А. ГИЛЛ

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1966

АРТУР ГИЛЛ

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

Перевод с английского
А. Т. ДАУРОВОЙ, А. П. ЕВСЕЕВОЙ,
В. В. КАРИБСКОГО, Е. С. СОГОМОНЯНА,
Ю. Л. ТОМФЕЛЬДА

Под редакцией
П. П. ПАРХОМЕНКО

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1966

6П2. 154
Г 47
УДК 62-50

INTRODUCTION TO
THE THEORY OF
FINITE-STATE MACHINES

ARTHUR GILL
Assistant Professor of Electrical
Engineering University
of California, Berkeley

McGRAW — HILL BOOK COMPANY, INC.
NEW YORK SAN FRANCISCO TORONTO LONDON

Артур Гилл
Введение в теорию конечных автоматов
(серия «Теоретические основы технической кибернетики»)
М., 1966 г., 272 стр. с илл.

Редактор *И. В. Пышкин*
Техн. редактор *К. Ф. Брудно* Корректор *С. Н. Емельянова*

Сдано в набор 4/XII 1965 г. Подписано к печати 18/IV 1966 г. Бумага $84\times108^1/_{32}$.
Физ. печ. л. 8,5. Условн. печ. л. 14,28. Уч.-изд. л. 13,81. Тираж 8000 экз.
Цена книги 1 р. 19 к. Заказ 2102.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой
Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Измайловский проспект, 29.

$\frac{3\text{-}3\text{-}14}{172\text{-}66}$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Предлагаемая книга Артура Гилла — доктора наук по электротехнике, преподавателя Калифорнийского университета — содержит систематическое изложение основных вопросов теории конечных автоматов.

В книге дается строгое определение конечного автомата, как модели реального устройства, с иллюстрацией на примерах. Автор, сохраняя математическую строгость, в доступной для широкого круга читателей форме, ясно и последовательно излагает различные способы представления конечных автоматов (таблицы, графы, матрицы переходов), методы минимизации автоматов, теорию экспериментов над автоматами и ряд других вопросов. Принятое расположение материала облегчает его усвоение инженерно-техническими работниками, имеющими дело с реальными объектами, так как при абстрактном представлении позволяет сохранять связь с привычными для инженера реальными устройствами.

Основным отличием книги от существующих является подробное и систематическое изложение достижений в области теории экспериментов, которая начинает находить широкое применение при решении задач технической диагностики дискретных устройств и систем с памятью, в том числе вычислительных и управляющих машин.

Каждая глава книги содержит примеры и заканчивается задачами, что облегчает глубокую проработку и усвоение ее содержания.

Книга является хорошим учебным пособием для студентов, инженеров и научных работников, занимающихся изучением теории конечных автоматов и ее практическими приложениями.

П. Пархоменко

ПРЕДИСЛОВИЕ

Последние годы явились свидетелями возникновения новой научной дисциплины, известной под названием *теория систем*. Появление этой дисциплины в большой степени было обусловлено проницательностью исследователей в различных областях науки и техники, нашедших общий язык в процессе ее формирования. Цель этой теории состояла в том, чтобы создать арсенал идей и средств, которые были бы в равной степени полезны специалистам во многих различных областях, таких, как электротехника, механика, физиология и лингвистика. Она была достигнута путем рассмотрения *системы* (которая может представлять собой живой организм, промышленное предприятие, управляемый снаряд) не через ее внутреннюю структуру, а через математические законы, определяющие ее наблюдаемое поведение. При использовании такого подхода, называемого методом «черного ящика», было найдено, что системы, представляющие совсем разные физические построения, могут все же быть охарактеризованы в одинаковых терминах и проанализированы с помощью одного и того же набора правил.

Хотя понятие о теории систем как о независимой дисциплине возникло совсем недавно, большинство ее составных частей — это установившиеся отрасли знаний. Теорию информации, теорию линейных систем, теорию управления и теорию конечных автоматов можно рассматривать в качестве основных составных частей теории систем ввиду того, что они затрагивают самые разнообразные области науки и техники. Из четырех дисциплин, указанных выше, теория конечных автоматов является наиболее новой дисциплиной, которая в отличие от других до сих пор еще не обобщена в виде отдельной книги. По мере расширения применения систем с дискретными состояниями вообще, и цифровых вычислительных машин в частности, потребность в такой книге как со стороны научных работников, так и со стороны промышленности непрерывно возрастала. Настоящая книга, представляющая собой вводное изложение понятий и методов, лежащих в основе теории синхронных детерминированных автоматов с конечным числом состояний, предназначена для того, чтобы отчасти удовлетворить эту потребность.

Как вводное руководство по теории машин с конечным числом состояний, настоящая книга охватывает лишь малую, но очень важную ее часть, известную под названием «теория автоматов». Таким образом, книга ограничивается основными теоретико-системными аспектами конечных автоматов, такими, как: задание условий работы автоматов, матрицы переходов, эквивалентность состояний и автоматов, минимизация автомата, эксперименты по распознаванию состояний и автоматов и по распознаванию неисправностей, — а также аспектами автоматов без потерь информации и автоматов с конечной памятью. Материал в значительной степени базируется на работах, выполненных за последнее десятилетие Хаффменом, Муром, Ауфенкампом, Хоном, Гинзбургом, Заде, Симоном, Поллом и Ангером (более подробные ссылки распределены в сносках по всей книге). Особое внимание в книге уделено методам анализа. Вопросы синтеза конечных автоматов здесь не рассматриваются. Причина этого состоит в том, что методы синтеза по своему существу являются специализированными и требуют полных знаний относительно данной исследуемой системы и компонент, которые можно использовать для ее реализации; с другой стороны, методы анализа могут быть сделаны вполне общими и применимыми к любой системе (например, нервной клетке, математическому алгоритму, электронной вычислительной машине), которая поддается моделированию с помощью конечного автомата. Опущено также общее рассмотрение модулярных последовательностных машин (хотя о линейных двоичных машинах говорится подробно) из-за требующейся для такого рассмотрения обширной математической подготовки. Наконец, было решено исключить из рассмотрения машины Тьюринга и цепи Маркова, так как, хотя эти темы и тесно связаны с предметом теории конечных автоматов, они составляют отдельные и независимые математические дисциплины, которые в достаточной степени освещены в других пособиях.

Основная часть этой книги первоначально была написана как конспект курса по конечным автоматам, прочитанного в Калифорнийском университете в Беркли в течение весеннего семестра 1961 года. Хотя курс был прочитан на электротехническом факультете, материал предназначается не специально инженеру-электрику, а любому специалисту — будь он экономистом или транспортным инженером, математиком или проектировщиком схем, — интересы которого лежат в сфере теории систем. В то же время материал этой книги особо рекомендуется инженерам по электронике и математикам-прикладникам, специализирующимся в области управления, связи или цифровых вычислений. Студентам, которые собираются стать специалистами по вычислительной технике и ее приложениям, материал может дать полезную подготовку к курсам по логическому синтезу и программированию.

Книга не предполагает какой-либо глубокой математической подготовки у читателя, хотя «математическая зрелость», добытая путем предварительной учебы, несомненно, полезна. Уровень изложения соответствует уровню аспирантов или студентов, начинающих дипломную работу. Очень желательно, чтобы читатель потрудился над задачами, которыми сопровождается каждая глава, так как эти задачи служат не только для иллюстрации, но и для пополнения текстового материала. Однако в принципе текст сам по себе полностью независим от задач.

Автор глубоко обязан доктору Л. А. Заде из Калифорнийского университета, чей семинар по системам с дискретными состояниями и автоматам (проводившийся в Беркли весной 1960 года) внес большой вклад в точку зрения, принятую в этой книге, а также в ее содержание. Автор также выражает благодарность доктору Д. А. Хаффмену из Массачусетского технологического института за несколько поощряющих бесед во время его визита в Беркли весной 1961 года.

Артур Гилл

ГЛАВА 1
ОСНОВНАЯ МОДЕЛЬ

1.1. Введение

Подобно другим теориям, развитие которых побуждается нуждами науки и техники, теория конечных автоматов имеет дело с математическими моделями, предназначенными для приближенного отображения физических или абстрактных явлений. Значение этой теории состоит в том, что применение ее моделей не ограничивается какой-либо частной областью, а возможно непосредственно для решения проблем практически в любой области исследований от психологии до административного управления и от связи до лингвистики. Идеи и техника теории конечных автоматов используются для решения таких, казалось бы не связанных, проблем, как исследование деятельности нервной системы человека, анализ английского синтаксиса и проектирование электронных вычислительных машин. В эпоху, когда темпы развития науки сильно зависят от межотраслевого кооперирования, унифицированный характер этой теории представляет несомненную ценность.

В этой главе будет введена так называемая «основная модель» конечного автомата, будут детально обсуждены предположения, лежащие в основе этой модели, и будет показано, как эта модель может быть использована для решения проблем из самых различных областей.

1.2. Многополюсный черный ящик

Большинство проблем, встречающихся в науке и технике, можно разбить на следующие две категории: задачи *анализа*, которые состоят в предсказании поведения определенной заданной системы, и задачи *синтеза*, состоящие в построении системы по заданному поведению. В этой книге предпочтение будет оказано скорее задачам анализа, чем синтеза. Как с точки зрения анализа, так и с точки зрения синтеза удобно переменные, которые характеризуют систему, различать следующим образом: (1) *входные переменные*, которые представляют собой воздействия, генерируемые другой системой (не подлежащей исследованию), и которые влияют на поведение исследуемой системы; (2) *выходные переменные* (реакции), представляющие собой те величины, характеризующие

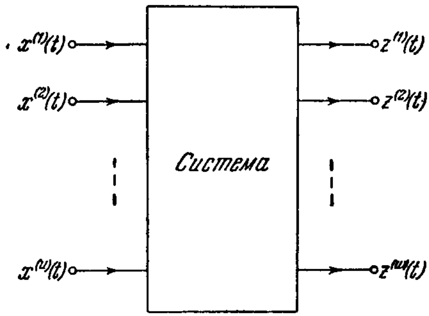


Рис. 1.1. Представление системы в виде «черного ящика».

поведение данной системы, которые интересуют исследователя; (3) *промежуточные переменные* — те величины, которые не являются ни входными, ни выходными переменными.

Схематично система может быть изображена «черным ящиком» с конечным числом внешних полюсов, доступных для исследователя. *Входные* полюсы соответствуют входным переменным и снабжаются стрелками, направленными внутрь ящика. *Выходные* полюсы соответствуют выходным переменным и снабжены стрелками, направленными от ящика. Предполагается, что промежуточные переменные, не представляющие непосредственного интереса, сосредоточены внутри ящика. Входные и выходные переменные и ящик, не имеют какого-либо физического смысла, они просто служат для наглядного представления тех переменных системы, которые имеют отношение к решению данной задачи.

Рис. 1.1 иллюстрирует представление системы в виде черного ящика в том случае, когда она имеет u входных и w выходных переменных, причем предполагается, что все переменные зависят от времени. Символ $x^{(i)}(t)$, $i = 1, 2, \ldots, u$, обозначает входные переменные, а символ $z^{(j)}(t)$, $j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, w$, — выходные переменные.

1.3. Дискретность времени

Предполагается, что любая система, представимая основной моделью с конечным числом состояний, следующим образом управляется некоторым независимым *синхронизирующим источником*. Все переменные системы измеряются не непрерывно, а только в дискретные моменты времени, в которые подается *синхронизирующий сигнал* от источника синхронизирующих сигналов. Эти моменты времени называются *тактовыми моментами*, причем ν-й тактовый момент будем обозначать через t_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$). Далее предполагается, что поведение системы в любой момент времени t_ν не зависит от интервала времени между t_ν и $t_{\nu-1}$. Таким образом, фактически независимой величиной, относительно которой определяется каждая переменная системы, является не время, а порядковые номера, связанные с тактовыми моментами. Таким образом, любая переменная системы $v(t)$ может быть записана в виде v_ν, что обозначает значение величины v в ν-й тактовый момент.

Следует заметить, что вышеизложенные предположения совсем не означают, что интервалы между соседними синхронизирующими сигналами одинаковы, а переменные системы внутри интервалов изменяются по какому-либо определенному закону (скажем, остаются постоянными). Эти предположения означают только следующее: какой бы ни был интервал времени между синхронизирующими сигналами и какие бы ни были изменения системы внутри этого интервала, значения переменных в ν-й тактовый момент зависят только от номера ν и не зависят от текущего значения времени t_ν.

Система, удовлетворяющая изложенным предположениям относительно дискретности во времени, называется *синхронной*. *Асинхронные* системы, не удовлетворяющие этим предположениям, в книге не рассматриваются. На практике многие асинхронные системы могут для целей анализа рассматриваться как синхронные. В качестве примера рассмотрим систему, состоящую из ключа и лампы, которую он включает и отключает. Входной переменной является положение ключа (включен или отключен), а выходной переменной — состояние лампы (горит или не горит). Источником синхронизирующих сигналов в этом случае является оператор, включающий и отключающий ключ, а синхронизирующим сигналом — поворот ключа. В тех случаях, когда можно считать, что значение каждой переменной в ν-й тактовый момент (т. е. когда ключ нажат в ν-й раз) не зависит от интервалов между моментами синхронизации (т. е. между одним нажатием ключа

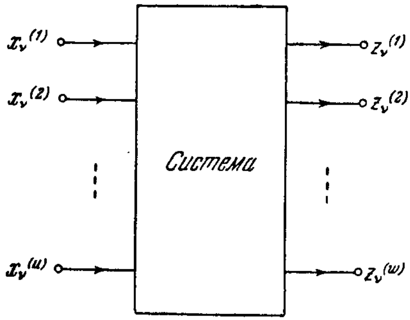


Рис. 1.2. Представление системы в виде «черного ящика» с учетом предположения о дискретности времени.

и следующим), описываемая система может рассматриваться как синхронная. Однако, строго говоря, система является асинхронной, так как работа реальных ключей и ламп зависит от интервала между двумя последовательными включениями, так как если частота переключения становится слишком высокой, то уже не может быть уверенности, например, в том, что свет имеется всегда, когда включен ключ. Тем не менее, когда известно, что частота переключения достаточно низкая (это знание может быть основано на заданных характеристиках синхронизирующего источника), допустимо рассматривать систему как синхронную. Можно отметить, что анализ большинства цифровых вычислительных машин, встречающихся на практике, может быть соответствующим образом проведен в предположении, что эти машины представляют собой синхронные системы.

Рис. 1.2 изображает представленную на рис. 1.1 систему с обозначениями, измененными в соответствии с предположением о дискретности времени. Символами $x_\nu^{(i)}$, $i=1, 2, \ldots, u$, и $z_\nu^{(j)}$, $j=1, 2, \ldots, w$, обозначены соответственно входные и выходные переменные в моменты времени t_ν.

1.4. Конечность алфавита

Следующее предположение, которое должно быть сделано для основной модели с конечным числом состояний, заключается в том, что каждая переменная может принимать только конечное число различных значений (которые по своей природе могут быть числовыми или не числовыми).

Множество[1]) значений, которые переменная v может принимать, называется *алфавитом* переменной v и обозначается через V; элемент v алфавита V называется *символом*. Пусть $K^{(1)}, K^{(2)}, \ldots, K^{(m)}$ — конечные множества с соответствующими элементами $k_i^{(1)}, k_i^{(2)}, \ldots, k_i^{(m)}$ и пусть множество $K^{(1)} \otimes K^{(2)} \otimes \ldots \otimes K^{(m)}$ обозначает множество всех упорядоченных m-значных наборов $\left(k_i^{(1)}, k_i^{(2)}, \ldots, k_i^{(m)}\right)$. Если входные переменные данной системы суть $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(u)}$, то *входной алфавит* этой системы, обозначаемый через X, определяется выражением

$$X = X^{(1)} \otimes X^{(2)} \otimes \ldots \otimes X^{(u)}, \tag{1.1}$$

где $X^{(i)}$, $i=1, 2, \ldots, u$, — алфавит $x^{(i)}$.

Аналогично, если выходные переменные системы суть $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(w)}$, то *выходной алфавит* Z системы определяется выражением

$$Z = Z^{(1)} \otimes Z^{(2)} \otimes \ldots \otimes Z^{(w)}, \tag{1.2}$$

где $Z^{(j)}$, $j=1, 2, \ldots, w$, — алфавит $z^{(j)}$.

---

[1]) Понятие *множество*, если не будет специально оговорено, всегда будет предполагать *неупорядоченное* множество. Множество элементов $e_1, e_2, \ldots, e_r$ будет записываться так: $\{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$. Число элементов r называется *мощностью* множества.

Если $X^{(i)}$ имеет мощность p_i, а $Z^{(j)}$ мощность q_j, то мощности p для X и q для Z выразятся соответственно формулами:

$$p = \prod_{i=1}^{u} p_i, \tag{1.3}$$

$$q = \prod_{j=1}^{w} q_j. \tag{1.4}$$

Мощности p и q конечны.

Из определения входного алфавита X видно, что одного символа входного алфавита — *входного символа* — достаточно для описания всех u входных переменных в любой заданный момент времени t_ν. Аналогично из определения выходного алфавита Z видно, что одного символа выходного алфавита — *выходного символа* — достаточно для описания всех w выходных переменных в любой заданный момент времени t_ν. Следовательно, входные переменные $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(u)}$ могут быть заменены одной входной переменной x, алфавит которой X определяется выражением (1.1). Выходные переменные $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(w)}$ могут быть заменены одной выходной переменной z, алфавит которой Z определяется выражением (1.2). Соответственно u входных клемм можно заменить одной входной клеммой и w выходных клемм — одной выходной клеммой. В результате получим схематичное изображение, имеющее вид двухклеммного ящика (рис. 1.3), которое является стандартным представлением основной модели конечного автомата.

Рис. 1.3. Представление конечного автомата в виде «черного ящика».

Для иллюстрации рассмотрим вычислительное устройство, которое имеет две входные линии $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$: по линии $x^{(1)}$ подаются символы 0 и 1, по линии $x^{(2)}$ — символы 1, 2 и 3. В произвольные моменты времени t_ν устройство выдает величины $z_\nu^{(1)} = x_\nu^{(1)} x_\nu^{(2)} + x_{\nu-1}^{(1)} x_{\nu-1}^{(2)}$ и $z_\nu^{(2)} = \left| x_\nu^{(1)} x_\nu^{(2)} - x_{\nu-1}^{(1)} x_{\nu-1}^{(2)} \right|$. Таким образом, имеем:

$$X^{(1)} = \{0, 1\}, \quad X^{(2)} = \{1, 2, 3\},$$
$$Z^{(1)} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad Z^{(2)} = \{0, 1, 2, 3\}$$

и, следовательно,

$$X = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3)\},$$

$$Z = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 0), (2,1), (2, 2), (2, 3), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 0), (4, 1), (4, 2)\ (4, 3), (5, 0), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (6, 0), (6, 1), (6, 2), (6, 3)\}.$$

1.5. Состояния

В то время как в качестве входов и выходов выбираются такие переменные, которые исследователь может наблюдать и измерять, природа промежуточных переменных часто может оставаться неизвестной, а измерение их — невозможным. Значение промежуточных переменных, однако, заключается не в характере изменения каждой из них, а скорее в их комбинированном действии на зависимости между входными и выходными переменными. Это комбинированное действие, так же как и переменные, вызывающие его, подчинено предположениям о дискретности времени и конечности алфавита, введенным в §§ 1.3 и 1.4. Указанное действие называется *состоянием* системы. Состояние системы в момент t_ν будем обозначать через s_ν. Набор всех возможных состояний системы, которые ей присущи, называется *множеством состояний* и обозначается через S.

Понятие состояния может быть строго определено, исходя из той роли, которую оно играет в определении основной модели конечного автомата. Эта роль может быть выражена следующими двумя положениями: (1) выходной символ в данный момент времени однозначно определяется входным символом и состоянием в данный момент; (2) состояние в следующий момент времени однозначно определяется входным символом и состоянием в настоящий момент времени.

Таким образом, грубо говоря, состояние конечного автомата в любой заданный тактовый момент является той переменной, которая вместе с входным символом дает возможность определить выходной символ в данный тактовый момент и состояние в следующий тактовый момент[1]).

В качестве примера рассмотрим игру, в которой монета повторно подбрасывается и производятся отметки при появлении каждого первого герба в серии гербов и каждой, исключая первые две, цифры в серии цифр. В этом примере системой является игра, синхронизирующим источником — игрок, а синхронизирующим сигналом — операция бросания монеты; входной переменной является сторона монеты, выходной переменной — отметка при броске. Тогда входной алфавит будет {цифра, герб}, а выходной — {отметка, нет отметки}. Для определения множества состояний находят такое множество условий (которые могут быть выражены словесно, символами, в числовом виде или в какой-нибудь другой удобной форме), чтобы по известному в настоящий момент условию и стороне монеты однозначно определялось наличие или отсутствие отметки в настоящий момент и условие в следующий. Из описания игры можно установить, что для того, чтобы предсказать отметку, необходимо знать стороны монеты в настоящий момент и в два предыдущих. Временно примем следующее множество состояний {появление первой цифры,

---

[1]) Понятие «состояние», как основное при описании систем, было впервые введено в 1936 г. Тьюрингом (A. M. Turing, On Computable Numbers with an Application to the Entscheidungproblem, Proc. London Math. Soc., ser. 2, vol. 42, pp. 230—265, 1936—1937). Позже это понятие было использовано Шенноном в его основополагающей работе по теории информации (C. E. Shennon, A Mathematical Theory of Communication, Bell System Tech. J., vol. 27, pp. 379—423, 623—656, 1948). Еще позднее понятие «состояние» было вновь введено Хаффменом (D. A. Huffman, The Synthesis of Sequential Switching Networks, J. Franklin Inst., vol. 257, pp. 161—190, 275—303, 1954), Клини (S. C. Kleene, Representation of Events in Nerve and Finite Automata, «Automata Studies», pp. 3—41, Princeton University Press, Princeton, N. Y., 1956. Русский перевод: С. К. Клини, Представление событий в нервных сетях и конечных автоматах. В сборнике «Автоматы» под редакцией К. Э. Шеннона и Дж. Маккарти, ИЛ, М., 1956) и Муром (E. F. Moore, Gedanken — Experiments on Sequential Machines, «Automata Studies», pp. 129—153, Princeton University Press, Princeton, N. Y., 1956. Русский перевод: Э. Ф. Мур, Умозрительные эксперименты с последовательностными машинами. В сборнике «Автоматы» под редакцией К. Э. Шеннона и Дж. Маккарти, ИЛ, М., 1956), после чего оно было принято как одно из основных понятий теории дискретных систем.

появление двух цифр, появление первого герба}, где «появление первой цифры» — состояние системы, когда цифра выпала первый раз после герба, «появление двух цифр» — состояние системы, когда цифра выпала после цифры, и «появление первого герба» — состояние системы, когда герб выпал после герба или после цифры. Отметка производится каждый раз, когда система находится в состоянии «появление двух цифр» и входом является цифра или когда система находится в состоянии, отличном от состояния «появление первого герба», и входом является герб. Если состояние в настоящий момент — «появление первой цифры» или «появление двух цифр», то состояние в следующий момент будет «появление двух цифр», если входом является цифра, и «появление первого герба», если входом является герб. Если состояние в настоящий момент — «появление первого герба», то состояние в следующий момент будет «появление первой цифры», если входом является цифра, и «появление первого герба», если входом является герб. Таким образом, подтверждается, что выбранное множество состояний отвечает предъявляемым требованиям, так как по известному состоянию системы и входу в настоящий момент может быть определен выход в настоящий момент и состояние в следующий.

Выбор множества состояний в общем случае является сложной задачей, которая решается не обязательно однозначно. Так как не существует общих правил для выбора множества состояний, то часто прибегают к методу последовательного приближения путем проб и ошибок. Затраты времени на выбор состояний и их число, вообще говоря, зависят от интуиции и степени знания исследуемой системы.

1.6. Определение основной модели

Теперь можно дать точное определение класса систем, которые мы будем называть *конечными автоматами*. Для краткости в дальнейшем представителей этого класса будем называть просто автоматами.

Определение 1.1. Конечным автоматом M называется синхронная система с конечным входным алфавитом $X = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p\}$, с конечным выходным алфавитом $Z = \{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_q\}$, с конечным множеством состояний

$S=\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$ и двумя *характеристическими функциями* f_z и f_s:

$$z_\nu = f_z(x_\nu, s_\nu), \tag{1.5}$$

$$s_{\nu+1} = f_s(x_\nu, s_\nu), \tag{1.6}$$

где x_ν, z_ν и s_ν — соответственно входной символ, выходной символ и состояние автомата M в момент t_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$)[1].

В этой книге предполагается, что автомат M, как это следует из определения 1.1, является *детерминированным*, т. е. его характеристические функции полностью определены. За исключением главы 7, также предполагается, что автомат M *без ограничений* на входе, т. е. любой входной символ может быть подан на автомат M в любой момент времени t_ν.

Особый тип конечного автомата получается при условии, что

$$f_z = (x_\nu, s_\nu) = f_z(x_\nu). \tag{1.7}$$

Такой автомат называется *тривиальным* автоматом[2]. Промежуточные переменные в тривиальном автомате не оказывают действия на зависимость между входами и выходами и, следовательно, понятие состояния в этом случае оказывается лишним. *Нетривиальным* называется автомат, для которого

$$f_z(x_\nu, s_\nu) \neq f_z(x_\nu). \tag{1.8}$$

1.7. Примеры конечных автоматов

Для иллюстрации разнообразия ситуаций, моделью которых может служить конечный автомат, приведем несколько примеров. Для каждого примера будут указаны: входной алфавит X, выходной алфавит Z и подходящее множество состояний S. Названия состояний системы будут выбираться таким образом, чтобы передать условия, определяющие эти состояния. Для каждого примера будет дано его словесное описание, которое будет служить основой при выборе множества состояний.

---

[1] Определение 1.1 задает конечный автомат Мили. (*Прим. перев.*)

[2] Такие автоматы называются также автоматами без памяти или комбинационными устройствами. (*Прим. ред.*)

Пример 1. Дано. Организм, возбуждается двумя стимулами: «положительным» и «отрицательным». Организм не реагирует на отрицательный стимул и реагирует на чередование положительных стимулов.

$X =$ {положительный стимул, отрицательный стимул},
$Z =$ {реакция, нет реакции},
$S =$ {реакция на последний положительный стимул, нет реакции на последний положительный стимул}.

При состоянии в настоящий момент — «реакция на последний положительный стимул» и входе — «положительный стимул» появляется выход — «нет реакции» и следующее состояние — «нет реакции на последний положительный стимул». При состоянии системы в настоящий момент «нет реакции на последний положительный стимул» и входе «положительный стимул» появляется выход «реакция» и следующее состояние «реакция на последний положительный стимул». При входе «отрицательный стимул» появляется выход «нет реакции», независимо от состояния в настоящий момент, а состояние системы не изменяется.

Пример 2. Дано. Английский текст, составленный из 26 букв алфавита и пропусков, просматривается с целью подсчета числа слов, начинающихся с *un* и кончающихся на *d* (таких, как «understand», «united» и т. д.). Для простоты пропуски обозначим буквой π, а все другие буквы, кроме d, n и u, — буквой λ.

$X = \{d, n, u, \pi, \lambda\}$,
$Z =$ {считать, не считать},
$S =$ {новое слово, ждать нового слова, появление u, появление u-n, появление u-n-d}.

При входе π появляется состояние в следующий момент «новое слово», независимо от существующего состояния. При существующем в настоящий момент состоянии «появление u-n-d» и входе π появляется выход «считать»; во всех остальных случаях появляется выход «не считать». При настоящем состоянии «новое слово» и входе u наступает следующее состояние «появление u», а при входе d, n или λ — следующее состояние «ждать нового слова». При настоящем состоянии «появление u» и входе n состояние в следующий момент будет «появление u-n», а при входе d, u или λ — состояние в следующий момент будет «ждать нового слова». Если состояние в настоящий момент «появление *u-n*» или «появление *u-n-d*» при входе *d*, то в следующий момент наступает состояние «появление *u-n-d*», а при входе *n*, *u* или λ состояние «появление *u-n*». Состояние «ждать нового слова» при входе, отличном от π, остается неизменным.

Пример 3. Дано. Вращение колеса, приводимого в движение двигателем, определяется двухпозиционным ключом; правое положение ключа соответствует вращению в направлении по часовой стрелке, левое — против часовой стрелки. В момент изменения направления вращения вспыхивает индикаторная лампа.

$X=\{$справа, слева$\}$,

$Z=\{$лампа включена, лампа выключена$\}$,

$S=\{$по часовой стрелке, против часовой стрелки$\}$.

При состоянии в настоящий момент «по часовой стрелке» и входе «справа» или при состоянии в настоящий момент «против часовой стрелки» и входе «слева» состояние остается неизменным и имеется выход «лампа выключена». При состоянии в настоящий момент «по часовой стрелке» и входе «слева» или при состоянии в настоящий момент «против часовой стрелки» и входе «справа» состояние изменяется и появляется выход «лампа включена».

Рассмотренные примеры и примеры, приводимые в конце этой главы, показывают, что конечным автоматом может представляться игра, язык, алгоритм, переключатель, живой организм, организация и т. д., т. е., по существу, любая система, в которой выходной сигнал в настоящий момент зависит от состояния (в его интуитивном смысле) в настоящий момент и входного сигнала в настоящий момент, а состояние в следующий момент зависит от состояния в настоящий момент и входного сигнала в настоящий момент.

1.8. Определение множества состояний по внутренней структуре

Промежуточные и выходные переменные в дальнейшем изложении будут называться ***зависимыми*** переменными. В большинстве случаев, представляющих практический интерес, имеется достаточная информация о внутренней структуре системы для определения всех переменных, которые характеризуют поведение системы. Более того, можно определить значение любой зависимой переменной в любой тактовый момент, если известны значения входных переменных в этот момент и значения зависимых переменных в предыдущий тактовый момент. В таких случаях, как будет показано ниже, существует методика определения множества состояний системы.

Пусть заданы входные переменные системы $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$ $\ldots, x^{(u)}$, выходные переменные системы $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(w)}$ и зависимые переменные системы $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(r)}$ (множества зависимых переменных включает в себя все выходные переменные). Предположим, что для каждой зависимой переменной $y^{(k)}$ структура системы дает следующее соотношение:

$$y_\nu^{(k)} = g_k\left(x_\nu^{(1)}, x_\nu^{(2)}, \ldots, x_\nu^{(u)}, y_{\nu-1}^{(1)}, y_{\nu-1}^{(2)}, \ldots, y_{\nu-1}^{(r)}\right). \tag{1.9}$$

На основании § 1.4 входные переменные можно представить одной переменной x с алфавитом

$$X = X^{(1)} \otimes X^2 \otimes \ldots \otimes X^{(u)}, \tag{1.10}$$

где $X^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, u$, является алфавитом $x^{(i)}$; выходные переменные можно представить одной переменной z с алфавитом

$$Z = Z^{(1)} \otimes Z^{(2)} \otimes \ldots \otimes Z^{(w)}, \tag{1.11}$$

где $Z^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, w$, является алфавитом $z^{(j)}$. Аналогично зависимые переменные можно представить одной переменной y с алфавитом

$$Y = Y^{(1)} \otimes Y^{(2)} \otimes \ldots \otimes Y^{(r)}, \tag{1.12}$$

где $Y^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, r$, является алфавитом $y^{(k)}$. Тогда выражение (1.9) можно записать так:

$$y_\nu = g_y(x_\nu, y_{\nu-1}). \tag{1.13}$$

Так как каждая выходная переменная является зависимой переменной, мы также имеем:

$$z_\nu = g_z(x_\nu, y_{\nu-1}). \tag{1.14}$$

Для перехода от приведенных выше формул к стандартным характеристическим функциям f_z и f_s конечного автомата определим переменную s следующим образом:

$$s_\nu = y_{\nu-1}. \tag{1.15}$$

Тогда алфавит s, обозначаемый через S, определяется формулой

$$S = Y. \tag{1.16}$$

Выражения (1.13) и (1.14) можно теперь записать так:

$$y_\nu = f_s(x_\nu, s_\nu), \tag{1.17}$$

$$z_\nu = f_z(x_\nu, s_\nu). \tag{1.18}$$

Из (1.15) и (1.17) получаем:

$$s_{\nu+1} = f_s(x_\nu, s_\nu). \tag{1.19}$$

Как теперь видно, уравнения (1.18) и (1.19) выражают искомые характеристические функции. Следовательно, S составляет требуемое для описания заданной системы множество состояний.

Для примера рассмотрим схему, показанную на рис. 1.4. На вход $v_{вх}$ от источника поступают импульсы со значением 0

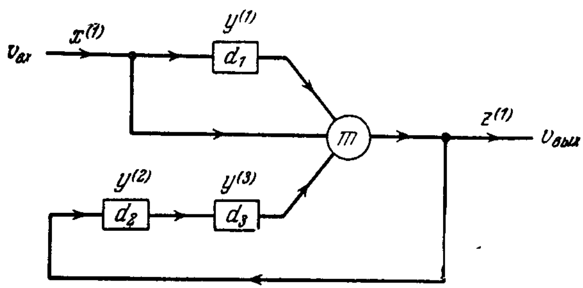


Рис. 1.4. Схема с мажоритарным элементом.

и 1 со скоростью один импульс в каждые T секунд. Тактовые моменты выбраны совпадающими с моментами появления импульсов. Элементы d_1, d_2, d_3 — задержки, которые запоминают поступающие на них импульсы на T секунд и затем передают их на следующий за ними элемент. Элемент m представляет собой «мажоритарный орган», который выдает импульс 0 или 1 в зависимости от значения (0 или 1 соответственно) большинства поступающих на его входы импульсов. Нас интересует значение импульса на выходе $v_{вых}$. Значение импульса на входе схемы $v_{вх}$ в момент t_ν можно принять в качестве входной переменной $x^{(1)}$, а значение импульса на выходе $v_{\text{вых}}$ в момент t_ν — в качестве выходной переменной $z^{(1)}$. Значения импульсов, запомненные элементами d_1, d_2 и d_3, в момент t_ν можно принять в качестве зависимых переменных $y^{(1)}$, $y^{(2)}$ и $y^{(3)}$ соответственно. Тогда имеем:

$$X = \{0,\ 1\},$$
$$Z = \{0,\ 1\},$$
$$S = \{(000),\ (001),\ (010),\ (011),\ (100),\ (101),\ (110),\ (111)\}.$$

Из схемы видно, что $y_\nu^{(1)} = x_\nu^{(1)}$, $y_\nu^{(2)} = z_\nu^{(1)}$ и $y_\nu^{(3)} = y_{\nu-1}^{(2)}$; значение $z_\nu^{(1)}$ равно значению большинства переменных $y_{\nu-1}^{(1)}$, $x_\nu^{(1)}$ и $y_{\nu-1}^{(3)}$. Используя эти соотношения, можно определить значения функций:

$$y_\nu^{(1)} = g_1\left(x_\nu^{(1)},\ y_{\nu-1}^{(1)},\ y_{\nu-1}^{(2)},\ y_{\nu-1}^{(3)}\right),$$
$$y_\nu^{(2)} = g_2\left(x_\nu^{(1)},\ y_{\nu-1}^{(1)},\ y_{\nu-1}^{(2)},\ y_{\nu-1}^{(3)}\right),$$
$$y_\nu^{(3)} = g_3\left(x_\nu^{(1)},\ y_{\nu-1}^{(1)},\ y_{\nu-1}^{(2)},\ y_{\nu-1}^{(3)}\right).$$

Результаты вычислений представлены в таблице 1.1. Из определения s следует, что каждая строка части таблицы, состоящей из столбцов $y_{\nu-1}^{(1)}$, $y_{\nu-1}^{(2)}$ и $y_{\nu-1}^{(3)}$, представляет собой состояние s_ν, а каждая строка части таблицы, состоящей из столбцов $y_\nu^{(1)}$, $y_\nu^{(2)}$ и $y_\nu^{(3)}$ — состояние $s_{\nu+1}$. Учитывая, что $x_\nu^{(1)} = x_\nu$ и $y_\nu^{(2)} = z_\nu$, можно сделать вывод, что таблица 1.1 полностью описывает характеристические функции рассматриваемой схемы. Например, из таблицы легко определить (см. четвертую строку), что при состоянии в настоящий момент (001) и входном символе в этот же момент 1 выход в настоящий момент будет 1, а следующее состояние (110).

1.9. Другая модель

Любой конечный автомат, соответствующий основной модели, задаваемой определением 1.1, может быть преобразован в автомат, в котором выходной символ в настоящий момент является функцией только состояния в настоящий момент. Преобразование может быть выполнено путем определения

Таблица 1.1

Функции g_k для системы рис. 1.4

	s_ν			$s_{\nu+1}$		
$x_\nu^{(1)}$	$y_{\nu-1}^{(1)}$	$y_{\nu-1}^{(2)}$	$y_{\nu-1}^{(3)}$	$g_1=y_\nu^{(1)}$	$g_2=y_\nu^{(2)}$	$g_3=y_\nu^{(3)}$
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0
0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1

переменной s'_ν как упорядоченной пары (x_ν, s_ν). Алфавит S' переменной s', следовательно, определяется выражением

$$S' = X \otimes S. \tag{1.20}$$

Используя уравнение (1.5), представим z_ν в виде

$$z_\nu = f'_z(s'_\nu). \tag{1.21}$$

Из определения s' и уравнения (1.6) получаем выражение для $s'_{\nu+1}$:

$$s'_{\nu+1} = (x_{\nu+1}, s_{\nu+1}) = (x_{\nu+1}, f_s(x_\nu, s_\nu)) \tag{1.22}$$

или

$$s'_{\nu+1} = f'_s(x_{\nu+1}, s'_\nu). \tag{1.23}$$

Уравнения (1.21) и (1.23) определяют вторую модель конечного автомата, в которой состояние однозначно определяет выходной сигнал[1]). Если мощность входного алфавита системы равна p, а мощность множества состояний S равна n, то мощность S' будет pn.

Система, соответствующая второй модели, определяемая уравнениями (1.21) и (1.23), может быть всегда представлена основной моделью, определяемой уравнениями вида (1.5) и (1.6), входящими в определение 1.1.

Это можно сделать, положив $s_\nu = s'_{\nu-1}$. Тогда из равенства (1.21) получим:

$$z_\nu = f'_z(s'_\nu) = f'_z(f'_s(x_\nu, s'_{\nu-1})) = f_z(x_\nu, s_\nu) \qquad (1.24)$$

Из определения s_ν и уравнения (1.23) получаем:

$$s_{\nu+1} = s'_\nu = f'_s(x_\nu, s'_{\nu-1}) = f_s(x_\nu, s_\nu). \qquad (1.25)$$

Нетрудно видеть, что уравнения (1.24) и (1.25) выражают характеристические функции основной модели конечного автомата.

Так как любая система, представимая одной моделью, представима также другой моделью и так как множество требуемых состояний для второй модели часто значительно больше, чем для основной модели, то использование второй модели не имеет каких-либо преимуществ. Поэтому в книге мы будем воздерживаться от использования второй модели, и когда будут делаться ссылки на характеристические функции конечного автомата, то следует иметь в виду функции, определяемые уравнениями (1.5) и (1.6).

1.10. Предсказание поведения автомата

Последовательность входных символов, в которой за символом ξ_{i_1} следует $\xi_{i_2}, \ldots, \xi_{i_l}$, называется *входной последовательностью* и записывается так: $\xi_{i_1}\xi_{i_2} \ldots \xi_{i_l}$. Аналогично последовательность выходных символов $\zeta_{j_1}\zeta_{j_2} \ldots \zeta_{j_l}$ называется *выходной последовательностью*. Число символов в последовательности называется *длиной* последовательности.

Как следует из предположения о дискретности времени, возбуждения подаются на конечный автомат всегда в виде входных последовательностей, а реакции снимаются всегда

[1]) Вторая модель соответствует автомату Мура. (*Прим. перев.*)

в виде выходных последовательностей, причем входная последовательность длины l всегда вызывает выходную последовательность длины l. Состояние автомата M в момент времени t_1 называется *начальным* состоянием M. Так как t_1 произвольно, то в качестве начального состояния автомата M обычно выбирается то состояние, в котором он находится перед началом работы.

Теорема 1.1. *Пусть дан нетривиальный автомат M с характеристическими функциями f_z и f_s. Тогда реакцию автомата M, находящегося в любом начальном состоянии σ_{i_0}, на любую входную последовательность $\xi_{j_1}\xi_{j_2}\ldots\xi_{j_l}$:* (а) *предсказать нельзя, если известны только f_z и f_s,* (б) *предсказать можно, если известны f_z, f_s и σ_{i_0}.*

Доказательство. (а) Если M не тривиален, то из (1.8) следует, что имеется по крайней мере два состояния σ_u и σ_v и по крайней мере один входной символ ξ_h, такой, что

$$f_z(\xi_h, \sigma_u) \neq f_z(\xi_h, \sigma_v). \tag{1.26}$$

Тогда реакция M на последовательность $\xi_h\xi_{j_2}\ldots\xi_{j_l}$ при $\sigma_{i_0}=\sigma_u$ отличается от реакции при $\sigma_{i_0}=\sigma_v$. Следовательно, если известны только f_z и f_s, то реакция по крайней мере на одну из входных последовательностей не может быть предсказана. (б) Рассмотрим индуктивное предположение: если f_s и σ_{i_0} известны, то известно состояние σ_{i_k}, в которое придет M под воздействием входной последовательности $\xi_{j_1}\xi_{j_2}\ldots\xi_{j_k}$. При $k=0$ предположение очевидно. Если предположение справедливо для k, то σ_{i_k} известно, и тогда $\sigma_{i_{k+1}}$ может быть найдено благодаря знанию f_s:

$$\sigma_{i_{k+1}} = f_s(\xi_{j_k}, \sigma_{i_k}). \tag{1.27}$$

Следовательно, по индукции, наше предположение справедливо для любого $k \geqslant 0$. Если в дополнение к f_s и σ_{i_0} известна функция f_z, то k-й выходной символ ζ_{h_k} может быть определен по формуле

$$\zeta_{h_k} = f_z(\xi_{j_k}, \sigma_{i_k}). \tag{1.28}$$

где σ_{i_k} находится рекурсивно по формуле (1.27). Придавая k значения 1, 2, ..., l, при известных f_z, f_s и σ_{i_0} можно предсказать выходную последовательность $\zeta_{h_1}\zeta_{h_2}\ldots\zeta_{h_l}$ для любой входной последовательности $\xi_{j_1}\xi_{j_2}\ldots\xi_{j_l}$.

Теорема 1.1 показывает, что знание характеристических функций недостаточно для полного описания поведения автомата. С другой стороны, полное описание всегда возможно, когда, кроме этих функций, известно начальное состояние автомата. Этот факт, может быть легко продемонстрирован на примерах § 1.7, в которых определения систем не содержат сведений о начальных состояниях. В примере 1 реакцию на входную последовательность, содержащую символ «положительный стимул», предсказать нельзя. В примере 2 нельзя предсказать реакцию на входную последовательность, начинающуюся символом «л». В примере 3 нельзя предсказать реакцию на любую входную последовательность. Однако все реакции в этих примерах можно предсказать, если будет определено начальное состояние.

Эта ситуация похожа на ситуацию, встречающуюся при анализе линейных систем. Соотношения f_s и f_z в конечном автомате аналогичны уравнениям равновесия, характеризующим линейное устройство, а начальное состояние автомата аналогично начальному распределению энергии в устройстве. Реакция устройства на любое заданное воздействие может быть предсказана, когда известны и уравнения равновесия и начальное распределение энергии, но реакция не может быть предсказана, если не задано начальное распределение энергии.

Задачи

1.1. Опишите три системы, которые могут быть представлены конечными автоматами. Перечислите входной алфавит, выходной алфавит и множество состояний и дайте обоснование вашего выбора множества состояний.

Задачи 1.2—1.9 содержат описание систем, которые могут быть представлены конечными автоматами. Входная переменная x и выходная z указываются в скобках в конце каждой задачи. Для каждой из описываемых систем перечислите входной алфавит, выходной алфавит и множество состояний, а также дайте обоснование вашего выбора.

1.2. Двоичные цифры 0 и 1 подаются на устройство, которое считает по модулю 3 накопленное число единиц (x — входные цифры, z — накопленное число).

1.3. Монета многократно подбрасывается и делается отметка при четных выпадениях цифры в последовательности цифр и при каждом втором (не обязательно подряд) выпадении герба (x — сторона монеты, z — отметка при броске).

1.4. Две плоские фишки, каждая из которых имеет на одной стороне цифру 1, а на другой — цифру 2, подбрасываются одновременно много раз. После каждого подбрасывания подсчитывается сумма по модулю 2 чисел, выпавших при данном броске, чисел, выпавших в предыдущий раз, и суммы, подсчитанной в предыдущий раз (x — комбинация двух сторон фишек, z — сумма при броске).

1.5. Грузовой лифт, обслуживающий трехэтажный магазин, имеет кнопку вызова на каждом этаже и работает по следующим правилам: если нажата одна кнопка, то лифт движется на этаж, на котором расположена данная кнопка; если нажаты одновременно две или три кнопки, то лифт движется на самый нижний из всех этажей, на которых нажаты кнопки. Ни одна кнопка не может быть нажата во время движения лифта (x — этаж, на котором нажата кнопка, z — направление, в котором будет двигаться лифт, и число этажей, которые он при этом пройдет без остановки).

1.6. Английский текст, состоящий из 26 букв алфавита и промежутков между буквами, просматривается с целью подсчета числа слов, которые рифмуются с «art» (x — буква или промежуток, z — увеличение общего счета).

1.7. На рис. З 1.1 изображена схема N, на которую поступают сигналы от двух импульсных генераторов напряжения V_1 и V_2.

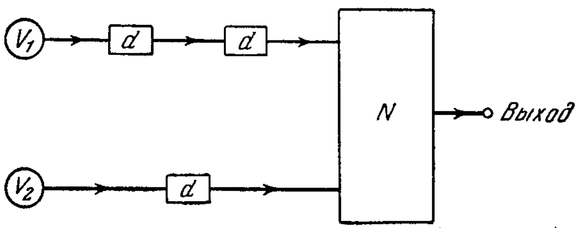


Рис. З 1.1.

Каждый генератор генерирует положительный или отрицательный импульс с периодом 1 микросекунда. Элемент d вызывает задержку импульса на 1 микросекунду. Схема N выдает положительный импульс, когда оба поступающих на ее входы импульса положительны, и выдает отрицательный импульс во всех остальных случаях (x — комбинация значений входных напряжений, z — значение выходного напряжения).

1.8. На рис. З 1.2 представлена модель нервной сети, где нервное волокно, обозначенное $V_{вх}$, соединено с источником, который генерирует стимулы 0 или 1 в моменты времени t_ν[1]). Большой кружок представляет нейрон. Выход нейрона в момент t_ν возбужден (т. е. принимает значение 1) только в том случае, когда разность между числом его возбужденных «возбуждающих входов» (показаны

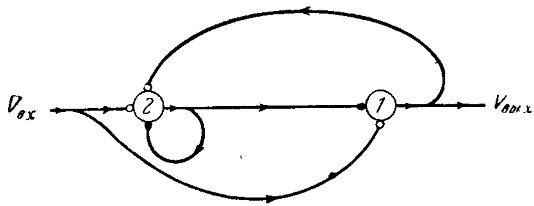


Рис. З 1.2.

зачерненными маленькими кружками) и числом возбужденных «тормозящих входов» (показаны маленькими кружками) в момент $t_{\nu-1}$ равна или превышает его «порог» (число, записанное внутри большого кружка) ($x = V_{вх}$, $z = V_{вых}$).

1.9. Работа вычислительного устройства, имеющего вход x и выход z, определяется следующими уравнениями:

$$z_\nu = x_\nu \oplus z_{\nu-1} \oplus w_{\nu-1},$$
$$w_\nu = x_\nu \oplus w_{\nu-1},$$

где каждая переменная принимает значения 0 или 1, знак $\oplus$ обозначает сложение по модулю 2 (x и z определены в условии задачи).

[1]) Эта модель введена в работе фон Неймана (J. von Neuman, Probabilistic Logics and the Synthesis of Reliable Organisms from Unreliable Components, «Automata Studies», pp 43—98, Princeton University Press, Princeton, N. Y., 1956. Русский перевод: Дж. фон Нейман, Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных элементов. В сборнике «Автоматы», под редакцией К. Э. Шеннона и Дж. Маккарти, ИЛ, М., 1956).

ГЛАВА 2

ТАБЛИЦЫ, ГРАФЫ И МАТРИЦЫ ПЕРЕХОДОВ

2.1. Введение

После того как для данной системы установлены входной алфавит, выходной алфавит и множество состояний, словесное описание системы может быть формализовано при помощи таблицы, графа или матрицы. Таблицы, графы и матрицы — различные формы представления характеристических функций конечного автомата, который описывает данную систему. Такое представление совершенно необходимо для проведения любого точного анализа или синтеза конечного автомата, и мы будем им широко пользоваться в настоящей книге. Поскольку одной формой представления автомата выгодно пользоваться при одних обстоятельствах, другой — при других, полезно познакомиться со всеми формами представления. Поэтому в этой главе будут введены все три представления и обсуждены некоторые характерные задачи, для решения которых одно представление оказывается более выгодным, чем другое.

2.2. Таблица переходов

Характеристические функции f_z и f_s, определяемые уравнениями (1.5) и (1.6), могут быть представлены в форме таблицы, известной под названием *таблицы переходов*. Таблица содержит перечень значений этих функций для всех возможных аргументов, т. е. для всех возможных упорядоченных пар (x_ν, s_ν), где x_ν принадлежит входному алфавиту X, а s_ν — множеству состояний S. Образец таблицы переходов для автомата с входным алфавитом $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p\}$, выходным алфавитом $\{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_q\}$ и множеством состояний $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$ представлен таблицей 2.1. Таблица состоит из двух соседних подтаблиц z_ν-*подтаблицы* и $s_{\nu+1}$-*подтаблицы*, которые определяют функции f_z и f_s соот-

Таблица 2.1

Общая таблица переходов

	z_ν				$s_{\nu+1}$			
x_ν / s_ν	ξ_1	ξ_2	$\dots$	ξ_p	ξ_1	ξ_2	$\dots$	ξ_p
σ_1 σ_2 . . . σ_n	В клетках таблицы помещаются значения из множества $\{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_q\}$				В клетках таблицы помещаются значения из множества $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$			

ветственно. Эти подтаблицы имеют общий основной столбец[1]) (левый крайний столбец), в котором перечислены все возможные состояния в настоящий момент s_ν; столбцы в обеих подтаблицах озаглавлены одинаково, причем каждому возможному значению входного символа в настоящий момент x_ν соответствует в каждой подтаблице свой столбец. Таким образом, строки обозначены символами $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, а столбцы символами $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$. В клетке на пересечении строки σ_i и столбца ξ_j в подтаблице z помещается значение $f_z(\xi_j, \sigma_i)$ (это значение будем называть значением z_ν), а в подтаблице $s_{\nu+1}$ помещается значение $f_s(\xi_j, \sigma_i)$ (это значение будем называть значением $s_{\nu+1}$). Символы, записанные в клетках подтаблиц z_ν и $s_{\nu+1}$, принадлежат выходному алфавиту Z и множеству состояний S соответственно или подмножествам этих множеств. Если f_z и f_s — характеристические функции детерминированного полностью определенного автомата, то эти функции должны быть однозначно определены для каждой упорядоченной пары (x_ν, s_ν), где x_ν принадлежит множеству X, а s_ν — множеству S. Следовательно, подтаблица z_ν должна содержать в каждой клетке

[1]) Основной столбец представляет собой перечень наименований, расположенных в крайнем левом столбце таблицы. Строку, в которой в основном столбце стоит «K» (или в которой содержимое основного столбца есть «K»), обычно будем называть «строкой K».

точно один элемент из Z, а подтаблица $s_{\nu+1}$ — точно один элемент из S.

Хотя описательные обозначения состояний (выбираемые так, как в примерах § 1.7) являются полезными для интуитивного понимания роли различных состояний при определении соотношений вход — выход и для определения функций f_z и f_s по словесному описанию системы, они становятся бесполезными после того, как эти функции определены. Поэтому в таблице переходов первоначальные обозначения можно заменить любыми другими, удобными для исследователя. В большинстве примеров, приводимых в книге, состояния будут обозначаться просто цифрами 1, 2, 3 и т. д.

Для иллюстрации построения таблицы переходов приведена таблица 2.2, которая представляет собой таблицу переходов системы, описанной в примере 2 § 1.7. Эта система названа автоматом $A1$, а состояния «новое слово», «ждать нового слова», «появление *u*», «появление *u-n*» и «появление *u-n-d*» обозначены цифрами 1, 2, 3, 4 и 5 соответственно. Содержимое клеток таблицы представляет собой числовое отражение словесных доводов, объясняющих

Таблица 2.2

Автомат $A1$

	z_ν					$s_{\nu+1}$				
s_ν \ x_ν	d	n	u	π	λ	d	n	u	π	λ
1	0	0	0	0	0	2	2	3	1	2
2	0	0	0	0	0	2	2	2	1	2
3	0	0	0	0	0	2	4	2	1	2
4	0	0	0	0	0	5	4	4	1	4
5	0	0	0	1	0	5	4	4	1	4

выбор множества состояний в примере 2. Сравнение словесного описания с таблицей переходов позволяет оценить точность и краткость последней по сравнению с первым способом описания.

2.3. Перечисление автоматов

Одним из важных применений таблицы переходов является использование ее для перечисления автоматов, принадлежащих тому или иному классу. Класс автоматов часто может быть определен при помощи ряда ограничений, накладываемых на распределение состояний и выходных символов в таблице переходов. Заданный класс автоматов может быть перечислен путем построения всех возможных таблиц переходов, удовлетворяющих этим ограничениям. Часто мощность класса может быть сразу оценена путем подсчета определяемого заданными ограничениями числа степеней свободы при построении таблиц переходов. Такое использование таблиц будет продемонстрировано при оценке мощностей некоторых классов автоматов, которые будут встречаться в последующих главах.

Класс (n, p, q)*-автоматов.* (n, p, q)-автомат — это автомат, имеющий множество состояний $S=\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$, входной алфавит, определяемый множеством $X=\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p\}$, и выходной алфавит, определяемый множеством $Z=\{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_q\}$ или некоторым подмножеством Z. Любая таблица переходов, имеющая в основном столбце символы $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, заглавия столбцов $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$, значения z_ν из можества Z или из подмножества Z и значения $s_{\nu+1}$ из множества S, характеризует (n, p, q)-автомат. Мощность $N_{n, p, q}$ этого класса автоматов определяется формулой

$$N_{n, p, q}=(qn)^{pn}. \tag{2.1}$$

Класс явно минимальных (n, p, q)*-автоматов.* Назовем (n, p, q)-автомат явно минимальным, если для каждого i и каждого $j \neq i$ имеется по крайней мере одно k такое, что $f_z(\xi_k, \sigma_i) \neq f_z(\xi_k, \sigma_j)$. Любая таблица переходов, в которой все строки в подтаблице z_ν различны, характеризует явно минимальный автомат. Мощность $N'_{n, p, q}$ этого класса равна

$$N'_{n, p, q}=n^{pn}\prod_{r=0}^{n-1}(q^p-r), \tag{2.2}$$

где отрицательные значения $N'_{n, p, q}$ считаются равными нулю.

Класс явно сократимых (n, p, q)*-автоматов.* (n, p, q)-автомат называется явно сократимым, если в таблице переходов выполняются следующие условия: существует по крайней мере одна пара строк, например σ_i и σ_j, которые одинаковы как в подтаблице z_ν, так и $s_{\nu+1}$ или становятся одинаковыми при замене каждого символа σ_i на σ_j (или σ_j на σ_i). Если автомат не относится к классу явно сократимых автоматов, то ему соответствует таблица, в которой все строки (в обеих подтаблицах z_ν и $s_{\nu+1}$) различны. Число $N''_{n,p,q}$ не явно сократимых автоматов поэтому определяется выражением

$$N''_{n,p,q} \leqslant \prod_{r=0}^{n-1} \left[(qn)^p - r\right]. \tag{2.3}$$

Из (2.1) и (2.3) следует, что нижняя граница числа $N'''_{n,p,q}$ явно сократимых (n, p, q)-автоматов определяется формулой

$$N'''_{n,p,q} \geqslant (qn)^{pn} - \prod_{r=0}^{n-1} \left[(qn)^p - r\right]. \tag{2.4}$$

2.4. Изоморфные автоматы

Как указывалось в § 2.2, обозначение состояний не имеет какого-либо особого значения и может выбираться произвольно. Автоматы, у которых характеристические функции одинаковы, за исключением возможных различий в обозначениях состояний, называются *изоморфными* друг другу. Если задан автомат M, представляющий определенную систему, то любой автомат, изоморфный к M, также может служить представлением этой системы. Следовательно, представление системы автоматом ни в коем случае не единственно.

Пусть M является (n, p, q)-автоматом, определенным таблицей переходов, такой, как таблица 2.1. Рассмотрим другую таблицу переходов, полученную из таблицы переходов автомата M путем перестановки символов $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ с последующей записью строк в том порядке, в котором они были выписаны в исходной таблице. В результате получится таблица, представляющая автомат, изоморфный автомату M. Множество всех различных автоматов, получающихся в результате всех возможных $n!$ таких перестановок, называется *семейством перестановок* автомата M. Ясно, что не обязательно две различные перестановки приводят к получению двух различных таблиц переходов и, следовательно, мощность семейства перестановок может быть меньше, чем $n!$. Следует также заметить, что два автомата, принадлежащие различным семействам перестановок, не могут быть изоморфными друг другу. В качестве примера таблицей 2.3 представлен автомат, изоморфный автомату $A1$, представленному таблицей 2.2. Он получен заменой первоначальных обозначений состояний 1, 2, 3, 4 и 5 на 5, 4, 3, 2 и 1 соответственно.

Таблица 2.3

Автомат, изоморфный автомату $A1$

	z_ν					$s_{\nu+1}$				
x_ν / s_ν	d	n	u	π	λ	d	n	u	π	λ
1	0	0	0	1	0	1	2	2	5	2
2	0	0	0	0	0	1	2	2	5	2
3	0	0	0	0	0	4	2	4	5	4
4	0	0	0	0	0	4	4	4	5	4
5	0	0	0	0	0	4	4	3	5	4

Лемма 2.1. *Мощность семейства перестановок явно минимального (n, p, q)-автомата равна $n!$.*

Доказательство. Строки в таблице z_ν явно минимального автомата различны по определению и остаются различными после перестановки обозначений состояний. Поэтому таблицы, получаемые в результате различных перестановок, различны. Так как число различных перестановок равно $n!$, то лемма доказана.

Теорема 2.1. *Мощность $N_{n, p, q}^{(\text{ЯМ})}$ класса явно минимальных (n, p, q)-автоматов, не содержащего изоморфных автоматов, определяется формулой*

$$N_{n, p, q}^{(\text{ЯМ})} = \frac{n^{pn}}{n!} \prod_{r=0}^{n-1} (q^p - r), \tag{2.5}$$

где отрицательные значения $N_{n, p, q}^{(\text{ЯМ})}$ принимаются равными нулю.

Доказательство. Множество явно минимальных (n, p, q)-автоматов является объединением[1]) семейств перестановок всех автоматов класса, определенного в теореме. Поскольку эти семейства перестановок являются непересекающимися[2]) и по лемме 2.1 каждое семейство содержит точно $n!$ различных автоматов, имеем:

$$n!N^{(ЯМ)}_{n,\,p,\,q} = N'_{n,\,p,\,q}, \tag{2.6}$$

где $N'_{n,\,p,\,q}$ — мощность класса явно минимальных (n, p, q)-автоматов, определяемая уравнением (2.2). Теорему доказывает решение (2.6) относительно $N^{(ЯМ)}_{n,\,p,\,q}$.

2.5. Граф переходов

Граф переходов представляет собой структуру, состоящую из *вершин*, изображаемых в виде малых кружков, и *ориентированных дуг*, изображаемых в виде линий между парами вершин и снабженных стрелками, указывающими направление от одной вершины к другой. Граф переходов, описывающий автомат с n состояниями, содержит n вершин, причем каждая вершина соответствует одному состоянию автомата; состояние, изображаемое вершиной, снабжается обозначением, соответствующим этому состоянию. Ориентированные дуги проводятся и обозначаются по следующему правилу. Пусть $X_{ij} = \{\xi_{k_1}, \xi_{k_2}, \ldots, \xi_{k_r}\}$ представляет собой множество значений x_ν, для которых $f_s(x_\nu, \sigma_i) = \sigma_j$, и пусть $f_z(\xi_{k_h}, \sigma_i) = \zeta_{l_h}$ для $h = 1, 2, \ldots, r$. Если X_{ij} не пустое[3]) множество, то дуга проводится из вершины σ_i в вершину σ_j; стрелка указывает направление из σ_i в σ_j и обозначение дуги записывается в виде

[1]) Объединение множеств $R_1, R_2, \ldots, R_N$, записываемое в виде $R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_N$, является множеством, которое содержит все элементы, содержащиеся в $R_1, R_2, \ldots, R_N$, и никаких других элементов не содержит.

[2]) Множества $R_1, R_2, \ldots, R_N$ — непересекающиеся, если не существует двух множеств R_i и R_j $(i \neq j)$, содержащих общий элемент.

[3]) Множество называется пустым, если оно не содержит ни одного элемента. Пустое множество обозначается нулем.

$(\xi_{k_1}/\zeta_{l_1}) \vee (\xi_{k_2}/\zeta_{l_2}) \vee \ldots \vee (\xi_{k_r}/\zeta_{l_r})$[1]. Каждый член вида (ξ_{k_h}/ζ_{l_h}), содержащийся в обозначении дуги, называется *парой вход-выход*. Изложенное правило построения графа переходов автомата иллюстрируется рис. 2.1. Это правило устанавливает взаимно однозначное соответствие между графом переходов и таблицей переходов для одного и того же автомата, так что, зная одно представление, всегда можно получить другое. Для примера на рис. 2.2 изображен граф переходов автомата $A1$, построенный по таблице 2.2.

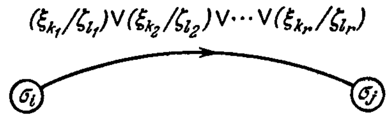


Рис. 2.1. Обозначение дуги.

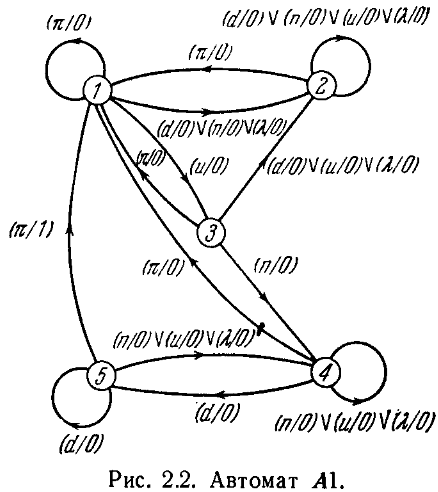


Рис. 2.2. Автомат $A1$.

По построению графа дуга, направленная из вершины σ_i к вершине σ_j, обозначается входными символами, которые вызывают переход автомата из состояния σ_i в σ_j, и выходными символами, которые выдаются автоматом при этом переходе. Для детерминированного, без ограничений на входе

[1]) $\vee$ — стандартный символ, обозначающий логическую связь «или».

автомата каждый входной сигнал вызывает переход из каждого состояния только в одно другое состояние; следовательно, дуги, выходящие из любой данной вершины, содержат полное число p пар вход-выход, где p — мощность входного алфавита. Непосредственное преимущество графа переходов состоит в том, что он облегчает определение реакции автомата на входную последовательность любой длины. При данном начальном состоянии σ_i автомата M и входной последовательности $\xi_{u_1}, \xi_{u_2}, \ldots, \xi_{u_l}$ реакция M легко определяется прослеживанием (в направлении стрелок) непрерывной последовательности l дуг, которая начинается в вершине σ_i и k-я дуга которой ($k = 1, 2, \ldots, l$) соответствует паре вход-выход $\left(\xi_{u_k}/\zeta_{v_k}\right)$. Выходная последовательность, которую выдает автомат M при подаче на него входной последовательности $\xi_{u_1}, \xi_{u_2}, \ldots, \xi_{u_l}$, тогда будет $\zeta_{v_1}, \zeta_{v_2}, \ldots, \zeta_{v_l}$; состояние, в которое при этом переходит M, определяется по обозначению вершины, в которой заканчивается последовательность из l дуг. Например, реакция автомата $A1$ на входную последовательность $\pi\mu\pi\lambda\lambda d\pi$ при начальном состоянии 3 легко определяется по рис. 2.2 и будет 0000001. Последовательность состояний при этом будет 1, 3, 4, 4, 4, 5 и 1.

Роль графа переходов в теории конечных автоматов подобна роли, которую играет графическое изображение схемы в теории электрических цепей. Граф переходов преобразует абстрактную модель в физическое изображение, усиливающее интуицию исследователя, и дает возможность ему «отчетливо представить» различные процессы и свойства, которые без такого изображения остались бы рядом сухих математических фактов. Как и в теории цепей, граф переходов удобно рассматривать как модель саму по себе, а символы, используемые в графе, — как абстрактные компоненты модели. Поэтому часто в дальнейшем мы будем граф, представляющий автомат M, называть «автоматом M», вершину, представляющую состояние σ_i, — «состоянием σ_i» и, наоборот, отождествлять абстрактные понятия с их геометрическими представлениями, имеющимися в графе переходов.

Понятие изоморфизма конечных автоматов, введенное в § 2.4, в терминах графов переходов допускает очень простую интерпретацию: автоматы изоморфны один другому, если они имеют одинаковые графы, отличающиеся, быть может, только обозначением вершин. Таким образом, для того чтобы автомат M заменить изоморфным ему автоматом, надо просто изменить обозначение одной или нескольких вершин. Аналогично, чтобы получить семейство перестановок автомата M, достаточно переставить обозначения вершин всеми возможными способами.

2.6. Классификация состояний и подавтоматов

Дуга относительно данного состояния, например, σ_i, может быть *заходящей* в σ_i, если она направлена к σ_i из другого состояния, или *исходящей* из σ_i, если она направлена от σ_i к другому состоянию, или *петлей*, если она выходит из σ_i и входит в σ_i. На рис. 2.3 показаны эти три типа дуг.

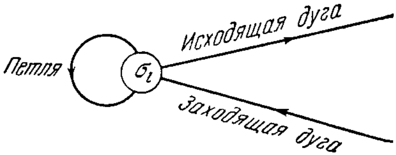


Рис. 2.3. Типы дуг.

Состояние, в котором отсутствуют заходящие и (или) исходящие дуги, может быть одним из следующих типов: (1) *преходящее состояние* — состояние, которое не имеет заходящих дуг, но имеет, по крайней мере, одну исходящую дугу; из этого состояния может быть осуществлен переход, по крайней мере, в одно другое состояние, но после выхода из этого состояния, в него нельзя попасть ни из какого другого; (2) *тупиковое состояние* — состояние, которое не содержит исходящих дуг, но содержит, по крайней мере, одну заходящую дугу; в такое состояние может быть осуществлен переход, по крайней мере, из одного другого состояния, но после перехода в это состояние из него нельзя осуществить переход ни в одно другое состояние; (3) *изолированное состояние* — состояние, которое не содержит ни заходящих, ни исходящих дуг; из такого состояния нельзя перейти ни в какое другое и в него нельзя попасть ни из какого другого состояния. На рис. 2.4 приведен автомат $A2$, в котором состояния 1 и 5 являются преходящими, состояния 2 и 4 — тупиковыми, а состояние 6 — изолированным.

Любое разбиение множества состояний автомата на два или большее число подмножеств может быть, очевидно, выполнено путем заключения представленных графом переходов

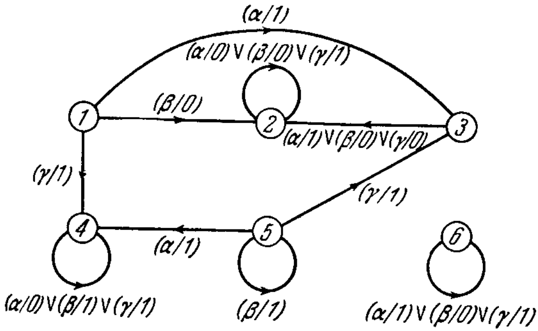


Рис. 2.4. Автомат *A*2.

состояний каждого подмножества в отдельный «прямоугольник», рассматриваемый как *подавтомат*. На рис. 2.5 и

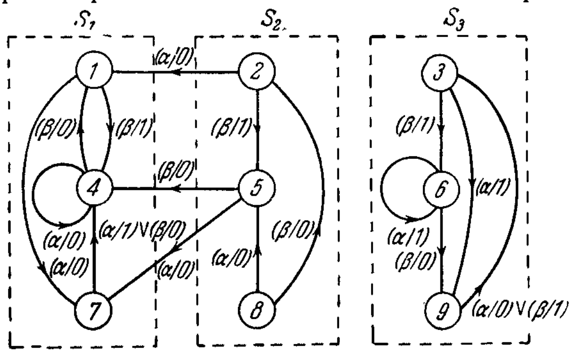


Рис. 2.5. Автомат *A*3.

в таблице 2.4 представлен автомат *A*3, множество состояний которого $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ разделено на подмножества $S_1 = \{1, 4, 7\}$, $S_2 = \{2, 5, 8\}$ и $S_3 = \{3, 6, 9\}$; три подавтомата, изображенные в виде прямоугольников, обозначены на рисунке символами S_1, S_2 и S_3.

Рассматривая каждый подавтомат как одно «сверхсостояние», преходящий, тупиковый или изолированный подавто-

Таблица 2.4

Таблица переходов автомата A3

	z_ν		$s_{\nu+1}$			z_ν		$s_{\nu+1}$	
s_ν \ x_ν	α	β	α	β	s_ν \ x_ν	α	β	α	β
1	0	1	7	4	6	1	0	6	9
2	0	1	1	5	7	1	0	4	4
3	1	1	9	6	8	1	0	5	2
4	0	0	4	1	9	0	1	3	3
5	0	0	7	4					

маты могут быть определены точно так же, как преходящее, тупиковое и изолированное состояние с заменой слова «состояние» на слово «подавтомат», именно: (1) *преходящий подавтомат* можно перевести, по крайней мере, в один другой подавтомат, но он не может быть достигнут после того, как оставлен; (2) *тупиковый подавтомат* может быть достигнут, по крайней мере, из одного другого подавтомата, но не может быть покинут после того, как он достигнут; (3) *изолированный подавтомат* не может быть достигнут ни из одного другого подавтомата и не может привести ни в какой другой подавтомат. Граф переходов часто позволяет визуально определить, составляет ли определенное подмножество множества состояний преходящий, тупиковый или изолированный подавтомат, и, следовательно, сделать заключение об относительной доступности этого подмножества. Например, из рис. 2.5 можно легко заключить, что S_1 — тупиковый подавтомат, S_2 — преходящий подавтомат, а S_3 — изолированный подавтомат.

Пусть $G_k(S_i)$ обозначает множество всех состояний автомата M, в которые можно попасть из любых состояний множества $S_i = \{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_r}\}$ при подаче на вход последовательности длины k или меньше. В частности, $G_0(S_i) = S_i$. Множество $G_1(S_i)$ есть объединение S_i и всех состояний, указанных в строках $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_r}$ подтаблицы $s_{\nu+1}$ таблицы переходов M. С другой стороны, $G_1(S_i)$ может быть определено путем просмотра графа переходов автомата M. Если задано $G_{k-1}(S_i)$, $k \geqslant 1$, то $G_k(S_i)$ может быть определено из соотношения

$$G_k(S_i) = G_1(G_{k-1}(S_i)). \tag{2.7}$$

Если $G_k(S_i) = G_{k-1}(S_i)$, то $G_{k+u}(S_i) = G_{k-1}(S_i)$ для всех неотрицательных целых u; следовательно, $G_k(S_i)$ составляет множество всех состояний, в которые можно попасть из S_i, если на вход подавать последовательности *любой* длины. Определение этого множества, обозначаемого просто $G(S_i)$, может быть теперь описано при помощи следующего алгоритма.

Алгоритм 2.1. Дано S_i; найти $G(S_i)$. (1) Пусть $G_0(S_i) = S_i$. Полагаем $k = 1$. (2) Определяем $G_k(S_i) = G_1(G_{k-1}(S_i))$. (3) (а) Если $G_k(S_i) \neq G_{k-1}(S_i)$, увеличиваем k на 1 и возвращаемся к (2). (б) Если $G_k(S_i) = G_{k-1}(S_i)$, то $G_k(S_i) = G(S_i)$.

Если $G_k(S_i) \neq G_{k-1}(S_i)$, то $G_k(S_i)$ должно содержать, по крайней мере, на один элемент больше, чем $G_{k-1}(S_i)$. Так как мощность $G_k(S_i)$ не может превышать общее число n состояний автомата M, то $G_k(S_i)$ должно равняться $G_{k-1}(S_i)$ для $k \leqslant n - r + 1$, где r — мощность множества S_i. Следовательно,

$$G(S_i) = G_{n-r}(S_i). \tag{2.8}$$

Это значит, что алгоритм 2.1 требует не более чем $n - r$ итераций пункта 2. Таблица 2.5 иллюстрирует применение алгоритма к автомату $A3$, изображенному на рис. 2.5, для $S_i = \{5, 6\}$, который дает $G(5, 6) = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$.

Таблица 2.5

Алгоритм 2.1 для автомата $A3$ и для $S_i = \{5, 6\}$

k	$G_k(S_i) = G_1(G_{k-1}(S_i))$
0	5, 6
1	4, 5, 6, 7, 9
2	1, 3, 4, 5, 6, 7, 9
3	1, 3, 4, 5, 6, 7, 9

Если S_i состоит из одного состояния σ_i, то $G(\sigma_i)$ называется σ_i-*достижимым множеством* и представляет собой множество всех состояний, в которые можно попасть из состояния σ_i.

Теорема 2.2. *Пусть σ_i и σ_j — два состояния в автомате с n состояниями. Если σ_j вообще достижимо из σ_i, то оно достижимо при подаче входной последовательности длиной не более $n - 1$.*

Доказательство. При $S_l = \{\sigma_l\}$ мощность r-множества S_l равна единице и выражение (2.8) принимает вид

$$G(\sigma_l) = G_{n-1}(\sigma_l). \tag{2.9}$$

Это означает, что σ_l-достижимое множество является множеством всех состояний автомата M, достижимых из σ_l при подаче входной последовательности длины $n-1$ или меньше.

Если известно, что начальное состояние автомата M принадлежит непустому множеству S_l, которое составляет тупиковый или изолированный подавтомат, то M можно упростить путем исключения всех состояний, которые не принадлежат множеству S_l, и всех дуг, начинающихся в этих состояниях. Полученный автомат хотя и не обязательно является адекватным представлением исходной системы во все моменты времени, но адекватен ей в смысле поведения в *будущем*. Это вытекает из того, что исключенные состояния никогда не могут быть достигнуты из начального состояния, и, следовательно, они в данном случае излишни. Например, если известно, что начальным состоянием автомата $A3$, изображенного на рис. 2.5, является состояние 1, то точный анализ поведения автомата $A3$ в будущем может быть проведен, несмотря на то, что состояния 2, 3, 5, 6, 8, 9 и начинающиеся в них дуги будут исключены из графа переходов.

2.7. Разложение автоматов и расщепляемый автомат

Пусть $H_k(S_l)$ обозначает множество всех состояний автомата M, соединенных с состояниями $S_l = \{\sigma_{l_1}, \sigma_{l_2}, \ldots, \sigma_{l_r}\}$ посредством k или меньшего числа дуг, причем направление дуг несущественно. В частности, $H_0(S_l) = S_l$. Множество $H_1(S_l)$ есть объединение S_l-состояний, расположенных в строках $\sigma_{l_1}, \sigma_{l_2}, \ldots, \sigma_{l_r}$ $s_{\nu+1}$-подтаблицы таблицы переходов автомата M, и состояний основного столбца таблицы переходов, соответствующих строкам $s_{\nu+1}$-подтаблицы, в которых есть какое-либо состояние из множества S_l. С другой стороны, $H_1(S_l)$ можно составить путем просмотра графа переходов автомата M. Если задано $H_{k-1}(S_l)$, $k \geqslant 1$, то $H_k(S_l)$ может быть определено из соотношения

$$H_k(S_l) = H_1(H_{k-1}(S_l)). \tag{2.10}$$

Если $H_k(S_i) = H_{k-1}(S_i)$, то $H_{k+u}(S_i) = H_{k-1}(S_i)$ для всех неотрицательных целых u и, следовательно, $H_{k-1}(S_i)$ составляет множество всех состояний, связанных с S_i цепью ребер[1]) *любой длины*. Определение этого множества, обозначаемого просто $H(S_i)$, может быть теперь описано при помощи следующего алгоритма.

Алгоритм 2.2. Дано S_i; требуется найти $H(S_i)$. (1) Пусть $H_0(S_i) = S_i$. Полагаем $k = 1$. (2) Определяем $H_k(S_i) = H_1(H_{k-1}(S_i))$. (3) (а) Если $H_k(S_i) \neq H_{k-1}(S_i)$, то увеличиваем k на единицу и возвращаемся к (2). (б) Если $H_k(S_i) = H_{k-1}(S_i)$, то $H_k(S_i) = H(S_i)$.

При помощи аргументов, аналогичных тем, которые были использованы для алгоритма 2.1, можно показать, что алгоритм 2.2 требует не более $n - r$ итераций пункта 2, где n — мощность множества состояний S автомата M, а r — мощность множества S_i. Таблица 2.6 иллюстрирует применение этого алгоритма для автомата $A3$, изображенного на рис. 2.5 для $S_i = \{1, 4\}$, $H(1, 4) = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$.

Таблица 2.6

Алгоритм 2.2 для $A3$ и $S_i = \{1,4\}$

k	$H_k(S_i) = H_1(H_{k-1}(S_i))$
0	1, 4
1	1, 2, 4, 5, 7
2	1, 2, 4, 5, 7, 8
3	1, 2, 4, 5, 7, 8

Автомат или подавтомат, который содержит два или большее число изолированных подавтоматов, будем называть *разложимым*. Ранее упоминалось, что если S_i содержит единственное состояние σ_i, то $H(\sigma_i)$ составляет множество всех состояний, соединенных с σ_i посредством цепей ребер любой длины. Следовательно, если $H(\sigma_i) \neq S$, то $H(\sigma_i)$ составляет неразложимый изолированный подавтомат автомата M. Если $H(\sigma_i) = S$, то можно заключить, что автомат M неразложим. Теперь можно описать метод получения *максимального* разложения автомата, т. е. метод разложения автомата на максимально возможное число изолированных подавтоматов.

Алгоритм 2.3. Определение максимального разложения заданного автомата M с множеством состояний S.

[1]) Дуга — направленное соединение, *ребро* — ненаправленное соединение двух вершин графа. (*Прим. перев.*)

(1) Пусть $S_1 = S$. Полагаем $k = 1$. (2) Выбираем любое состояние из S_k, например σ_{i_k}, и определяем $H(\sigma_{i_k})$. Множество $H(\sigma_{i_k})$ — множество состояний k-го изолированного подавтомата автомата M. (3) (а) Если $H(\sigma_{i_1}) \cup H(\sigma_{i_2}) \cup \ldots \ldots \cup H(\sigma_{i_k}) \neq S$, то полагаем, что S_{k+1} содержит состояния множества S, не содержащиеся в $H(\sigma_{i_1}) \cup H(\sigma_{i_2}) \cup \ldots \cup H(\sigma_{i_k})$. Увеличиваем k на единицу и возвращаемся к (2). (б) Если $H(\sigma_{i_1}) \cup H(\sigma_{i_2}) \cup \ldots \cup H(\sigma_{i_k}) = S$, то подавтоматы, определяемые множествами $H(\sigma_{i_1})$, $H(\sigma_{i_2})$, ..., $H(\sigma_{i_k})$, представляют максимальное разложение автомата M. В частности, если $H(\sigma_{i_1}) = S$, то автомат M неразложим.

Алгоритм 2.3, конечно, не обязателен, если автомат задан в виде графа. Однако он нужен, когда максимальное разложение надо провести без использования графа, например при помощи цифровой вычислительной машины.

Два или большее число автоматов называются *сравнимыми*, если они имеют одинаковые входные алфавиты. Пусть $M_1, M_2, \ldots, M_N$ — сравнимые автоматы, представляющие N различных систем, и пусть M — автомат, который состоит из изолированных подавтоматов $M_1, M_2, \ldots, M_N$. M называется *расщепляемым автоматом* автоматов $M_1, M_2, \ldots, M_N$ и обозначается так: $\Delta(M_1, M_2, \ldots, M_N)$. При заданных таблицах переходов $M_1, M_2, \ldots, M_N$ таблица переходов $\Delta(M_1, M_2, \ldots, M_N)$ может быть построена следующим образом. (1) Переобозначим состояния автомата M_i, если необходимо, так, чтобы не было в одном и том же автомате или в двух различных автоматах двух состояний, обозначенных одинаково. (2) Запишем строки всех N таблиц последовательно в одну общую таблицу; эта таблица является таблицей переходов автомата $\Delta(M_1, M_2, \ldots, M_N)$. Если M_i определены графами, то граф переходов $\Delta(M_1, M_2, \ldots, M_N)$ является просто объединением всех отдельных графов, состояния которых могут быть перенумерованы в случае необходимости в соответствии с указанным выше правилом.

Понятно, что расщепляемый автомат $\Delta(M_1, M_2, \ldots, M_N)$ и, следовательно, каждый автомат, содержащий ряд подавтоматов, определенных так же, как $M_1, M_2, \ldots, M_N$, может рассматриваться как «система», которая есть автомат M_1, или

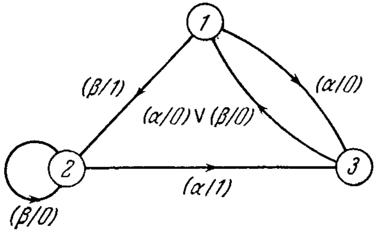


Рис. 2.6. Автомат $A4$.

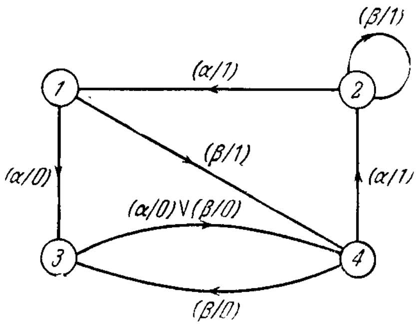


Рис. 2.7. Автомат $A5$.

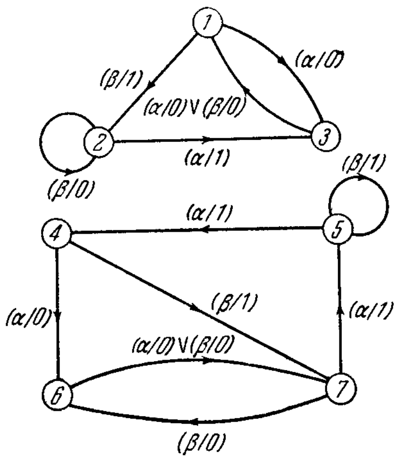


Рис. 2.8. Автомат Δ ($A4$, $A5$).

автомат M_2, ..., или автомат M_N. Эта интерпретация основывается на том факте, что если $\Delta(M_1, M_2, \ldots, M_N)$ находится в состоянии σ_u, принадлежащем подавтомату M_l, то $\Delta(M_1, M_2, \ldots, M_N)$ никогда не может перейти в какое-либо состояние подавтомата M_j, где $j \neq l$, так как M_l и M_j — два изолированных подавтомата. Поведение автомата $\Delta(M_1, M_2, \ldots, M_N)$, находящегося в состоянии σ_u, совпадает поэтому с поведением автомата M_l, находящегося в состоянии σ_u. Следовательно, автомат $\Delta(M_1, M_2, \ldots, M_N)$ может быть представлен автоматом M_1, или автоматом M_2, ..., или автоматом M_N, в зависимости от начального состояния.

В качестве примера рис. 2.6 и таблица 2.7 представляют автомат $A4$, а рис. 2.7 и таблица 2.8 — автомат $A5$. Расщепляемый автомат, составленный из автоматов $A4$ и $A5$, $\Delta(A4, A5)$, представлен на рис. 2.8 и в таблице 2.9.

Таблица 2.7

Автомат $A4$

	z_ν		$s_{\nu+1}$	
s_ν \ x_ν	α	β	α	β
1	0	1	3	2
2	1	0	3	2
3	0	0	1	1

Таблица 2.8

Автомат $A5$

	z_ν		$s_{\nu+1}$	
s_ν \ x_ν	α	β	α	β
1	0	1	3	4
2	1	1	1	2
3	0	0	4	4
4	1	0	2	3

Таблица 2.9

Автомат Δ ($A4$, $A5$)

	z_ν		$s_{\nu+1}$			z_ν		$s_{\nu+1}$	
s_ν \ x_ν	α	β	α	β	s_ν \ x_ν	α	β	α	β
1	0	1	3	2	5	1	1	4	5
2	1	0	3	2	6	0	0	7	7
3	0	0	1	1	7	1	0	5	6
4	0	1	6	7					

2.8. Матрица переходов [1])

Матрицы переходов являются математической копией графов переходов; они дают возможность формализовать ряд операций, которые на графе переходов могут быть выполнены визуально. Матрицы переходов поэтому имеют преимущества в тех случаях, когда эти операции не могут быть выполнены человеком-исследователем и, следовательно, не могут быть выполнены визуально или когда граф переходов настолько сложен, что использование визуальной методики бесполезно.

Для автомата M, имеющего n состояний, матрица переходов состоит из n строк и n столбцов и обозначается $[M]$. Пусть $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$ — множество состояний автомата M и пусть b_{ij} обозначает дугу графа переходов автомата M, направленную от σ_i к σ_j. Элемент (i, j) (т. е. содержимое клетки, расположенной на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы $[M]$ обозначается e_{ij} и определяется так:

$$e_{ij} = \begin{cases} b_{ij}, & \text{если } b_{ij} \text{ существует}, \\ 0, & \text{если } b_{ij} \text{ не существует}. \end{cases} \tag{2.11}$$

Для ясности обычно обозначение k-го состояния σ_k приписывают k-й строке и k-му столбцу и называют их «строка σ_k» и «столбец σ_k» соответственно. Выражение (2.12) изображает матрицу переходов автомата $A1$, заданного в виде графа на рис. 2.2.

$$[A1] =$$

$$= \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} (\pi/0) & (d/0)\vee(n/0)\vee(\lambda/0) & (u/0) & 0 & 0 \\ (\pi/0) & (d/0)\vee(n/0)\vee(u/0)\vee(\lambda/0) & 0 & 0 & 0 \\ (\pi/0) & (d/0)\vee(u/0)\vee(\lambda/0) & 0 & (n/0) & 0 \\ (\pi/0) & 0 & 0 & (n/0)\vee(u/0)\vee(\lambda/0) & (d/0) \\ (\pi/1) & 0 & 0 & (n/0)\vee(u/0)\vee(\lambda/0) & (d/0) \end{array}\right] \end{array}. \tag{2.12}$$

---

[1]) Материал, относящийся к матрицам переходов, частично базируется на работе Хона, Сешу, Ауфенкампа (F. E. Hohn, S. Seshu and D. D. Aufenkamp, The Theory of Nets, J. R. E. Trans., vol. EC—6, pp. 154—161, 1957).

Если p — мощность входного алфавита автомата M, то каждая строка в $[M]$ должна содержать точно p пар вход-выход, причем каждая пара имеет входной символ, отличный от входного символа любой другой пары. Дуги, заходящие в состояние σ_k, представляются недиагональными элементами[1]) столбца σ_k; дуги, исходящие из состояния σ_k, представляются недиагональными элементами строки σ_k; петля состояния σ_k представляется диагональным элементом в строке σ_k или столбце σ_k. Следовательно, если σ_k — переходящее состояние, то все недиагональные элементы в столбце σ_k (но не в строке σ_k) равны нулю; если σ_k — тупиковое состояние, то все недиагональные элементы в строке σ_k (но не в столбце σ_k) равны нулю; если σ_k — изолированное состояние, то все недиагональные элементы в строке σ_k и столбце σ_k равны нулю.

Если $S_i = \{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_r}\}$, то определенное в § 2.6 множество $G_1(S_i)$ представляет собой объединение S_i и обозначений столбцов, в которых элементы, принадлежащие строкам $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_r}$, не равны нулю. Определенное в § 2.7 множество $H_1(S_i)$ представляет собой объединение S_i, обозначений столбцов, в которых элементы, принадлежащие строкам $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_r}$, не равны нулю, и обозначений строк, в которых элементы, принадлежащие столбцам $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_r}$, не равны нулю. Например, из матрицы $[A1]$ ясно видно, что для автомата $A1$ $G_1(1, 2) = \{1, 2, 3\}$ и $H_1(4, 5) = \{1, 3, 4, 5\}$. Таким образом, ясно, что матрица переходов является удобным инструментом для выполнения алгоритмов 2.1, 2.2 и 2.3.

Для того чтобы определить, составляет ли множество $S_i(\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_r})$ преходящий, тупиковый или изолированный подавтомат автомата M, надо строки и столбцы матрицы $[M]$ переставить так, чтобы строки и столбцы $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_r}$ заняли соседние положения, начиная с первой строки и первого столбца соответственно. Как показано в (2.13), эта перестановка делит матрицу $[M]$ на четыре подматрицы $[M_{11}]$, $[M_{12}]$, $[M_{21}]$, $[M_{22}]$, причем строками и

---

[1]) Диагональный элемент матрицы — это элемент (i, j), где $i = j$. Недиагональный элемент матрицы — это элемент (i, j), где $i \neq j$.

столбцами $[M_{11}]$ являются строки и столбцы $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_r}$.

$$[M] = \begin{array}{c} \\ \sigma_{i_1} \\ \sigma_{i_2} \\ \vdots \\ \sigma_{i_r} \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \sigma_{i_1} & \sigma_{i_2} & \ldots & \sigma_{i_r} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c:c} [M_{11}] & [M_{12}] \\ \hdashline [M_{21}] & [M_{22}] \end{array}\right] \end{array}. \tag{2.13}$$

Обозначая матрицу, все элементы которой равны нулю, через $[0]$, можно сделать вывод, что S_l составляет преходящий подавтомат, если $[M_{21}] = [0]$, а $[M_{12}] \neq 0$, тупиковый подавтомат, если $[M_{12}] = [0]$, а $[M_{21}] \neq 0$, и изолированный подавтомат, если $[M_{12}] = [M_{21}] = [0]$. В (2.14) представлена матрица переходов автомата $A3$, изображенного на рис. 2.5, в которой строки и столбцы переставлены так, чтобы выделить тупиковый подавтомат $\{1, 4, 7\}$, преходящий подавтомат $\{2, 5, 8\}$ и изолированный подавтомат $\{3, 6, 9\}$.

$$[A3] =$$

$$= \begin{array}{c} \\ 1 \\ 4 \\ 7 \\ 2 \\ 5 \\ 8 \\ 3 \\ 6 \\ 9 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 1 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 3 & 6 & 9 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc} 0 & (\beta/1) & (\alpha/0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (\beta/0) & (\alpha/0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\alpha/1)\vee(\beta/0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline (\alpha/0) & 0 & 0 & 0 & (\beta/1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\beta/0) & (\alpha/0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\beta/0) & (\alpha/1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\beta/1) & (\alpha/1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\alpha/1) & (\beta/0) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\alpha/0)\vee(\beta/1) & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}. \tag{2.14}$$

Если S_l составляет тупиковый или изолированный подавтомат, то $[M_{12}] = [0]$ и, следовательно, каждая строка в $[M_{11}]$ содержит все p пар вход-выход, где p — мощность входного алфавита. Удалив $[M_{12}]$, $[M_{21}]$ и $[M_{22}]$ из $[M]$, получим матрицу $[M_{11}]$ размером $r \times r$, которую можно трактовать как матрицу, представляющую независимый автомат M_{11} с r состояниями, имеющий тот же входной алфавит, что и M. Отсюда следует то же заключение, которое было получено в § 2.6: если автомат находится в состоянии, принадлежащем тупиковому или изолированному подавтомату, то все состояния, которые не принадлежат этому подавтомату, и все дуги, исходящие из этих состояний, могут быть исключены.

2.9. Матрицы переходов высшего порядка

Последовательность k дуг, которая в графе переходов ведет из одного состояния в другое, называется *путем*; k называется *длиной* пути. $P_{ij}^{(k)}$ обозначает множество всех путей длины k, которые ведут из состояния σ_i в состояние σ_j. Множество $P_{ij}^{(1)}$, которое состоит из одной дуги, ведущей из σ_i в σ_j, будем обозначать π_{ij}. Если $P_{ij}^{(1)}$ пусто (т. е. если ни одна дуга не ведет из σ_i в σ_j), то ему придается значение 0 (нуль).

Путь длины k, представляющий собой упорядоченную последовательность дуг $\pi_{il_1}, \pi_{l_1 l_2}, \ldots, \pi_{l_{k-1}j}$ (рис. 2.9), символически изображается упорядоченным произведением

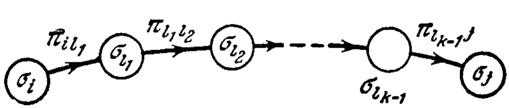


Рис. 2.9. Путь $\pi_{il_1}\pi_{l_1l_2}\ldots\pi_{l_{k-1}j}$.

$\pi_{il_1}\pi_{l_1l_2}\ldots\pi_{l_{k-1}j}$. Поскольку несуществующая дуга по определению соответствует нулевому сомножителю, то, если хотя бы одна дуга на пути, символически изображаемом вышеприведенным произведением, не существует, то все произведение становится равным нулю. Множество путей записывается как неупорядоченная сумма произведений; каждое произведение представляет элемент этого множества. Таким образом,

$$P_{ij}^{(k)} = \sum_{l_1=1}^{n} \sum_{l_2=1}^{n} \ldots \sum_{l_{k-1}=1}^{n} \pi_{il_1}\pi_{l_1l_2}\pi_{l_2l_3} \ldots \pi_{l_{k-1}j}, \qquad (2.15)$$

где нулевые компоненты интерпретируются как несуществующие пути.

Лемма 2.2.

$$P_{ij}^{(k+1)} = \sum_{u=1}^{n} \pi_{iu} P_{uj}^{(k)}. \tag{2.16}$$

Доказательство. Применяя (2.15), получим:

$$\sum_{u=1}^{n} \pi_{iu} P_{uj}^{(k)} = \sum_{u=1}^{n} \pi_{iu} \left\{ \sum_{l_1=1}^{n} \sum_{l_2=1}^{n} \ldots \sum_{l_{k-1}=1}^{n} \pi_{ul_1} \pi_{l_1 l_2} \ldots \pi_{l_{k-1} j} \right\} =$$
$$= \sum_{u=1}^{n} \sum_{l_1=1}^{n} \sum_{l_2=1}^{n} \ldots \sum_{l_{k-1}=1}^{n} \pi_{iu} \pi_{ul_1} \pi_{l_1 l_2} \ldots \pi_{l_{k-1} j}. \tag{2.17}$$

Заменяя индекс u на l_1 и индексы l_h, $h = 1, 2, \ldots, k-1$, на l_{h+1}, получим:

$$\sum_{u=1}^{n} \pi_{iu} P_{uj}^{(k)} = \sum_{l_1=1}^{n} \sum_{l_2=1}^{n} \ldots \sum_{l_k=1}^{n} \pi_{il_1} \pi_{l_1 l_2} \ldots \pi_{l_k j} = P_{ij}^{(k+1)}. \tag{2.18}$$

Для автоматов с n состояниями *матрица переходов k-го порядка* обозначается $[\overline{M}]^{(k)}$ и состоит из n строк и n столбцов, обозначенных так же, как и в матрице $[M]$. Элемент (i, j) матрицы $[\overline{M}]^{(k)}$ обозначается $e_{ij}^{(k)}$ и определяется так:

$$e_{ij}^{(k)} = P_{ij}^{(k)}. \tag{2.19}$$

Для $k = 1$ имеем:

$$e_{ij}^{(1)} = P_{ij}^{(1)} = \pi_{ij}. \tag{2.20}$$

$[\overline{M}]^{(1)}$ записывается как $[\overline{M}]$ и может быть получена из $[M]$ путем замены каждого ненулевого элемента (i, j) в матрице $[M]$ на π_{ij}.

Умножение матриц переходов высшего порядка определяется следующим образом. Если $[\overline{A}]$ имеет элемент (i, j), равный a_{ij}, $[\overline{B}]$ — элемент (i, j), равный b_{ij}, и $[\overline{C}] = [\overline{A}][\overline{B}]$ — элемент (i, j), равный c_{ij}, и если каждая из этих матриц является квадратной $(n \times n)$-матрицей переходов высшего порядка, то

$$c_{ij} = \sum_{u=1}^{n} a_{iu} b_{uj}. \tag{2.21}$$

Умножение элементов a_{iu} и b_{uj} (каждый из них в общем случае представляет сумму произведений[1])) ассоциативно и дистрибутивно по отношению к сложению, но не коммутативно. Таким образом, умножение матриц переходов высших порядков аналогично умножению обычных матриц, за исключением того, что порядок сомножителей в каждом произведении $a_{iu}b_{uj}$ должен быть сохранен, т. е. $a_{iu}b_{uj}$ не эквивалентно $b_{uj}a_{iu}$.

Лемма 2.3.

$$[\overline{M}]^{(k+1)} = [\overline{M}]\,[\overline{M}]^{(k)}. \tag{2.22}$$

Доказательство. Из (2.19), (2.20) и (2.21) следует, что элемент (i, j) произведения матриц $[\overline{M}]\,[\overline{M}]^{(k)}$ является суммой $\sum\limits_{u=1}^{n} \pi_{iu}P_{uj}^{(k)}$. Однако, согласно (2.16) и (2.19), это — элемент $e_{ij}^{(k+1)}$, что доказывает лемму.

Теорема 2.3. *Элемент* (i, j) *матрицы* $[\overline{M}]^k$, $k = 1, 2, \ldots$, *является множеством всех путей длины* k, *ведущих из состояния* σ_i *в состояние* σ_j *в автомате* M.

Доказательство. Теорема эквивалентна утверждению, что $[\overline{M}]^{(k)} = [\overline{M}]^k$. Для $k=1$ это равенство справедливо по построению. Если равенство справедливо для $k=h$, то из (2.22) получаем:

$$[\overline{M}]^{(h+1)} = [\overline{M}]\,[\overline{M}]^{(h)} = [\overline{M}]\,[\overline{M}]^h = [\overline{M}]^{h+1}. \tag{2.23}$$

По индукции следует, что указанное равенство справедливо для любого $k \geqslant 1$.

Теорема 2.3 показывает, что множество всех путей длины k, ведущих из одного состояния в другое, может быть построено систематически путем возведения матрицы $[\overline{M}]$ в k-ю степень. Нижние индексы содержащихся в матрице путей соответствуют дугам, из которых составлены эти пути. Обращаясь к графу или матрице переходов, можно определить обозначения этих дуг, а следовательно, и соответствующие путям входные и выходные последовательности.

Например, (2.24) является матрицей переходов первого, а (2.25) — матрицей переходов второго порядка автомата $A1$,

---

[1]) Такие произведения в дальнейшем называются членами элементов матрицы. (*Прим. перев.*)

заданного матрицей переходов (2.12). Из (2.25) видно, в частности, что имеются два пути длиной 2 из состояния 3 в состояние 2, а именно $\pi_{31}\pi_{12}$ и $\pi_{32}\pi_{22}$, и нет пути длиной 2 из состояния 2 в состояние 4 или 5. Из (2.25) и (2.12) также можно заключить, что в состояние 2 можно попасть из состояния 5, если подавать входные последовательности πd, или πn, или $\pi\lambda$.

$$[\overline{A1}] = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & 0 & 0 \\ \pi_{21} & \pi_{22} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{31} & \pi_{32} & 0 & \pi_{34} & 0 \\ \pi_{41} & 0 & 0 & \pi_{44} & \pi_{45} \\ \pi_{51} & 0 & 0 & \pi_{54} & \pi_{55} \end{bmatrix} \end{array}. \tag{2.24}$$

$$[\overline{A1}]^2 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \pi_{11}\pi_{11} + \pi_{12}\pi_{21} + \pi_{13}\pi_{31} & \pi_{11}\pi_{12} + \pi_{12}\pi_{22} + \pi_{13}\pi_{32} & \pi_{11}\pi_{13} & \pi_{13}\pi_{34} & 0 \\ \pi_{21}\pi_{11} + \pi_{22}\pi_{21} & \pi_{21}\pi_{12} + \pi_{22}\pi_{22} & \pi_{21}\pi_{13} & 0 & 0 \\ \pi_{31}\pi_{11} + \pi_{32}\pi_{21} + \pi_{34}\pi_{41} & \pi_{31}\pi_{12} + \pi_{22}\pi_{22} & \pi_{31}\pi_{13} & \pi_{34}\pi_{44} & \pi_{34}\pi_{45} \\ \pi_{41}\pi_{11} + \pi_{44}\pi_{41} + \pi_{45}\pi_{51} & \pi_{41}\pi_{12} & \pi_{41}\pi_{13} & \pi_{44}\pi_{44} + \pi_{45}\pi_{54} & \pi_{44}\pi_{45} + \pi_{45}\pi_{55} \\ \pi_{51}\pi_{11} + \pi_{54}\pi_{41} + \pi_{55}\pi_{51} & \pi_{51}\pi_{12} & \pi_{51}\pi_{13} & \pi_{54}\pi_{44} + \pi_{55}\pi_{54} & \pi_{54}\pi_{45} + \pi_{55}\pi_{55} \end{bmatrix} \end{array}. \tag{2.25}$$

2.10. Элементарные пути

Путь $\pi_{il_1}\pi_{l_1 l_2} \ldots \pi_{l_{k-1}j}$, ведущий из σ_i в σ_j, называется *элементарным путем* (длины k), если индексы i, l_1, l_2, ..., l_{k-1}, j различны. Он называется *элементарным контуром* (длины k), если индексы i, l_1, l_2, ..., l_{k-1} различны, а $i = j$. Таким образом, элементарный путь (элементарный контур) является разомкнутым (замкнутым) путем, который не проходит ни через одно состояние более одного раза. Отсюда имеем:

Лемма 2.4. *В автомате с n состояниями длина элементарного пути не может быть больше $n-1$, а длина элементарного контура не может быть больше n.*

Путь, не являющийся элементарным, называется *избыточным*. В следующем параграфе будут рассмотрены некоторые задачи, в которых представляют интерес только элементарные пути. В случае, когда это имеет место, все члены $\pi_{il_1}\pi_{l_1 l_2} \ldots \pi_{l_{k-1}j}$, у которых не все индексы i, l_1, l_2, ..., l_{k-1}, j различны, могут быть исключены из матрицы переходов k-го порядка $[\overline{M}]^k$; получаемая при таком исключении матрица обозначается так: $[\overline{M}']^{(k)}$. Элемент (i, j) матрицы $[\overline{M}']^{(k)}$ представляет собой множество всех элементарных путей длины k, ведущих из σ_i в σ_j в автомате M. Матрица $[\overline{M}']^{(1)}$ записывается в виде $[\overline{M}']$ и является матрицей $[\overline{M}]$, в которой все диагональные элементы исключены (т. е. все диагональные элементы заменены нулями).

Лемма 2.5. $[\overline{M}'][\overline{M}']^{(k)}$ *содержит все элементарные пути, содержащиеся в* $[\overline{M}]^{k+1}$.

Доказательство. Процесс умножения $[\overline{M}]$ на $[\overline{M}]^k$, как следует из (2.21), эквивалентен увеличению длины k каждого пути, представленного в $[\overline{M}]^k$, до длины $k+1$ посредством присоединения к концу пути одной из дуг, представленных в матрице $[\overline{M}]$. Если путь из k дуг матрицы $[\overline{M}]^k$ или присоединенная дуга избыточны, то результирующий путь длины $k+1$ также должен быть избыточным. Следовательно, произведение $[\overline{M}'][\overline{M}']^k$, где $[\overline{M}']$ образуется путем вычеркивания из $[\overline{M}]$ всех избыточных путей длины 1 и $[\overline{M}']^{(k)}$ образуется путем вычеркивания из $[\overline{M}]^{(k)}$ всех избыточных путей длины k, должно содержать все элементарные пути, содержащиеся в $[\overline{M}][\overline{M}]^k$. Так как $[\overline{M}][\overline{M}]^k = [\overline{M}]^{k+1}$, то лемма доказана.

Лемма 2.5 означает, что в процессе построения $[M]^{k+1}$ из $[\overline{M}]$ все избыточные пути можно исключать по мере их появления в любой промежуточной матрице, так как это исключение никакого влияния на образование элементарных путей не оказывает. Этот результат позволяет предложить упрощенный метод получения $[\overline{M}']^{(k)}$ значительно менее трудоемкий, чем метод, по которому сперва получают $[\overline{M}]^k$ и затем исключают из $[\overline{M}]^k$ все избыточные пути.

Алгоритм 2.4. Дана $[\overline{M}]$, надо построить $[\overline{M}']^{(l)}$ для $l > 1$. (1) Строим $[\overline{M}']$, заменяя все диагональные элементы в $[\overline{M}]$ нулями. Полагаем $k=1$. (2) Строим $[\overline{M}'][\overline{M}']^{(k)}$. В произведении матриц заменяем каждый член, представляющий избыточный путь, нулем. Пусть результирующая матрица будет $[\overline{M}']^{(k+1)}$. (3) (а) Если $k+1<l$, то увеличиваем k на 1 и возвращаемся к (2). (б) Если $k+1=l$, то $[\overline{M}']^{(k+1)}=[\overline{M}']^{(l)}$.

Матрицы (2.26)—(2.29) иллюстрируют применение алгоритма 2.4 для построения $[\overline{A1}']$, $[\overline{A1}']^{(2)}$, $[\overline{A1}']^{(3)}$ и $[\overline{A1}']^{(4)}$ по матрице $[\overline{A1}]$, представленной выражением (2.24).

$$[\overline{A1}'] = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \pi_{12} & \pi_{13} & 0 & 0 \\ \pi_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{31} & \pi_{32} & 0 & \pi_{34} & 0 \\ \pi_{41} & 0 & 0 & 0 & \pi_{45} \\ \pi_{51} & 0 & 0 & \pi_{54} & 0 \end{bmatrix} \end{array}. \tag{2.26}$$

$$[\overline{A1}']^{(2)} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \pi_{13}\pi_{32} & 0 & \pi_{13}\pi_{34} & 0 \\ 0 & 0 & \pi_{21}\pi_{13} & 0 & 0 \\ \pi_{32}\pi_{21}+\pi_{34}\pi_{41} & \pi_{31}\pi_{12} & 0 & 0 & \pi_{34}\pi_{45} \\ \pi_{45}\pi_{51} & \pi_{41}\pi_{12} & \pi_{41}\pi_{13} & 0 & 0 \\ \pi_{54}\pi_{41} & \pi_{51}\pi_{12} & \pi_{51}\pi_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}. \tag{2.27}$$

$$[\overline{A1}']^{(3)} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{13}\pi_{34}\pi_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{21}\pi_{13}\pi_{34} & 0 \\ \pi_{34}\pi_{45}\pi_{51} & \pi_{34}\pi_{41}\pi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi_{41}\pi_{13}\pi_{32}+\pi_{45}\pi_{51}\pi_{12} & \pi_{45}\pi_{51}\pi_{13} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_{51}\pi_{13}\pi_{32}+\pi_{54}\pi_{41}\pi_{12} & \pi_{54}\pi_{41}\pi_{13} & \pi_{51}\pi_{13}\pi_{34} & 0 \end{bmatrix} \end{array}. \tag{2.28}$$

$$[\overline{A1}']^{(4)} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{21}\pi_{13}\pi_{34}\pi_{45} \\ 0 & \pi_{34}\pi_{45}\pi_{51}\pi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi_{45}\pi_{51}\pi_{13}\pi_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi_{54}\pi_{41}\pi_{13}\pi_{32} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}. \tag{2.29}$$

Можно заметить, что, в то время как число ненулевых членов в $[\overline{M}]^k$ имеет тенденцию расти по экспоненте с ростом k, число членов в $[\overline{M}']^k$ имеет тенденцию оставаться постоянным до определенного значения величины k и уменьшаться для больших значений k. Действительно, из леммы 2.4 можно заключить, что если M является автоматом с n состояниями, то $[\overline{M}']^{(k)}$ для всех $k \geqslant n$ состоит полностью из нулевых членов.

2.11. Определение минимальных путей и полных контуров

Для многих задач, представляющих практический интерес, с генерированием каждого входного символа связана некоторая стоимость, определяемая тем, что переход автомата из одного состояния в другое влечет за собой определенные затраты, пропорциональные числу дуг, которые необходимо при этом пройти. Для того чтобы уменьшить общую стоимость, в этих случаях желательно определить наикратчайший или *минимальный путь* между двумя состояниями.

Лемма 2.6. *Минимальный путь, ведущий из состояния σ_i в σ_j, если он существует, должен быть элементарным путем.*

Доказательство. Пусть минимальный путь выражается так: $\pi_{il_1}\pi_{l_1l_2}\ldots\pi_{l_{k-1}j}$ и имеет длину k. Если этот путь избыточный, то имеются два индекса среди $i, l_1, l_2, \ldots, l_{k-1}, j$, которые одинаковы. Предположим, что $l_g = l_h$, где $h > g$. Тогда минимальный путь может быть представлен произведением

$$\pi_{il_1}\pi_{l_1l_2}\ldots\pi_{l_{g-1}l_g}\pi_{l_gl_{g+1}}\ldots\pi_{l_{h-1}l_h}\pi_{l_hl_{h+1}}\ldots\pi_{l_{k-1}j} =$$
$$= \pi_{il_1}\pi_{l_1l_2}\ldots\pi_{l_{g-1}l_g}\pi_{l_gl_{g+1}}\ldots\pi_{l_{h-1}l_g}\pi_{l_gl_{h+1}}\ldots\pi_{l_{k-1}j}.$$

Если этот путь существует, то в этом произведении нет множителей, равных нулю. Следовательно, нет равных нулю множителей и в произведении $\pi_{il_1}\pi_{l_1l_2}\ldots\pi_{l_{g-1}l_g}\pi_{l_gl_{h+1}}\ldots\pi_{l_{k-1}j}$, а это означает, что такой путь тоже существует. Так как последний путь короче, чем предыдущий, и, так же как предыдущий, ведет из σ_i в σ_j, предыдущий путь не может быть минимальным. Отсюда следует, что предположение, сделанное в начале доказательства, неверно, т. е. минимальный путь не может быть избыточным.

На основании лемм 2.4 и 2.6 можно теперь сформулировать следующую теорему.

Теорема 2.4. *Если существует путь, который ведет из состояния σ_i в состояние σ_j в автомате M с n состояниями, то кратчайший такой путь представляется некоторым элементом (i, j) одной из матриц $[\overline{M}']^{(k)}$, где $1 \leqslant k \leqslant n-1$.*

Теорема 2.4 указывает следующую процедуру для определения минимальных путей.

Алгоритм 2.5. Для того чтобы определить минимальный путь, ведущий из состояния σ_i в σ_j, в автомате M с n состояниями надо произвести следующие операции: (1) Полагаем $k = 1$. (2) Строим $[\overline{M}']^{(k)}$. (3) (а) Если элемент (i, j) равен нулю и $k < n-1$, то увеличиваем k на единицу и возвращаемся к (2). (б) Если элемент (i, j) равен нулю и $k = n-1$, то путь из σ_i в σ_j не существует. (в) Если элемент (i, j) не равен нулю, то он представляет искомый путь (или пути).

Например, для того чтобы найти минимальный путь, ведущий из состояния 1 в состояние 5 в автомате $A1$, строится матрица $[\overline{A1}']^{(k)}$ для $k = 1, 2, \ldots$ до тех пор, пока первый раз элемент, расположенный на пересечении строки 1 и столбца 5, примет значение, отличное от нуля, или пока k станет равным 5 (в последнем случае путь не существует). Матрицы (2.26) — (2.29) показывают, что первый отличный от нуля элемент, расположенный на пересечении строки 1 и столбца 5, появляется в матрице $[\overline{A}1']^{(3)}$, где этот элемент равен $\pi_{13}\pi_{34}\pi_{45}$. Обращение к графу переходов рис. 2.2 или к матрице переходов (2.12) показывает, что минимальным путем можно пройти, если подать входную последовательность *und*.

В автомате с n состояниями *полным контуром* называется любой элементарный контур длины n. Следовательно, полный контур — это замкнутый путь, который проходит через все состояния в автомате точно один раз. Проблема определения элементарных контуров возникает тогда, когда каждый входной символ имеет определенную стоимость и когда желательно наиболее экономным путем перевести автомат из начального состояния через все другие состояния и вернуть его в начальное состояние (например, для целей проверки).

Лемма 2.7. *Главная диагональ матрицы* $[\overline{M}'][M']^{(n-1)}$ *содержит все полные контуры автомата* M.

Доказательство. Так как полный контур является элементарным контуром, то любые $n-1$ последовательных дуг составляют в полном контуре длины n элементарный путь. Множество всех путей, построенных добавлением к элементарным путям длины $n-1$ элементарных путей длины 1, содержит поэтому все полные контуры длины n. Значит, $[\overline{M}'][\overline{M}']^{(n-1)}$ содержит это множество, и, следовательно, полные контуры являются путями, ведущими из любого состояния в то же самое состояние. Лемма доказана.

Очевидно, любое состояние автомата M может рассматриваться как начальное состояние в полном контуре. Следовательно, если один диагональный элемент в $[\overline{M}'][\overline{M}']^{(n-1)}$ равен нулю, что имеет место при отсутствии полных контуров в автомате M, то все диагональные элементы в этой матрице должны быть равны нулю. Любой ненулевой диагональный элемент (i, i) в $[\overline{M}'][\overline{M}']^{(n-1)}$ представляет собой множество всех возможных полных контуров в автомате M; диагональный элемент (j, j), $j \neq i$, представляет собой циклические перестановки сомножителей членов, содержащихся в элементе (i, i).

Например, в результате построения $[\overline{A1}'][\overline{A1}']^{(4)}$ получилась матрица, в которой все элементы равны нулю; это значит, что $A1$ не содержит полных контуров. Рис. 2.6 и матрица (2.30) представляют автомат $A4$, в котором существует полный контур. Матрицы (2.31), (2.32) и (2.33) иллюстрируют процедуру определения этого контура. Так как число состояний в $A4$ равно 3, то матрица $[\overline{A4}'][\overline{A4}']^{(2)}$, представленная выражением (2.33), должна содержать все полные контуры на своей главной диагонали. Искомым полным контуром является контур $\pi_{12}\pi_{23}\pi_{31}$ или любой другой, полученный из него циклической перестановкой. Обращение к рис. 2.6 или к матрице (2.30) показывает, что если начальное состояние $A4$ есть 1, то полный контур можно пройти, подавая на вход $\beta\alpha\alpha$ или $\beta\alpha\beta$.

$$[A4] = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & (\beta/1) & (\alpha/0) \\ 0 & (\beta/0) & (\alpha/1) \\ (\alpha/0) \vee (\beta/0) & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}. \tag{2.30}$$

$$[\overline{A4}'] = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \pi_{12} & \pi_{13} \\ 0 & 0 & \pi_{23} \\ \pi_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}. \tag{2.31}$$

$$[\overline{A4}']^{(2)} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \pi_{12}\pi_{23} \\ \pi_{23}\pi_{31} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_{31}\pi_{12} & 0 \end{bmatrix} \end{array}. \tag{2.32}$$

$$[\overline{A4}'][\overline{A4}']^{(2)} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \pi_{12}\pi_{23}\pi_{31} & \pi_{13}\pi_{31}\pi_{12} & 0 \\ 0 & \pi_{23}\pi_{31}\pi_{12} & 0 \\ 0 & 0 & \pi_{31}\pi_{12}\pi_{23} \end{bmatrix} \end{array}. \tag{2.33}$$

2.12. Скелетная матрица

В ряде задач детальное знание элементов матрицы высшего порядка несущественно, и решение может быть получено при изучении степеней так называемой *скелетной матрицы*, отличающейся тем, что она имеет существенно более простые элементы. Для автомата M с n состояниями скелетная матрица составляется из n строк и n столбцов, обозначаемых так же, как в $[M]$, и обозначается $[\tilde{M}]$. Элемент (i, j) матрицы $[\tilde{M}]$ обозначается $\tilde{e}_{ij}$. Если b_{ij} обозначает дугу, ведущую из состояния σ_i в состояние σ_j в автомате M, то $\tilde{e}_{ij}$ определяются так:

$$\tilde{e}_{ij}=\begin{cases} 1, \text{ если } b_{ij} \text{ существует,} \\ 0, \text{ если } b_{ij} \text{ не существует.} \end{cases} \tag{2.34}$$

Тогда матрица $[\tilde{M}]$ может быть построена из $[M]$ или $[\overline{M}]$ посредством замены каждого ненулевого элемента в этих матрицах на 1.

Теорема 2.5. *Элемент (i, j) матрицы $[\tilde{M}]^k$, где $k=1, 2, \ldots$,* ***равен числу путей длины k, ведущих из состояния σ_i в состояние σ_j в автомате M.***

Доказательство. Для $k=1$ теорема справедлива по построению. Предположим, что теорема справедлива для k; тогда элемент (u, j) матрицы $[\tilde{M}]^k$, обозначаемый $\tilde{e}_{uj}^{(k)}$, представляет число путей длины k, ведущих из σ_u в σ_j. Элемент (i, j) матрицы $[\tilde{M}][\tilde{M}]^k=[\tilde{M}]^{k+1}$ определяется формулой

$$e_{ij}^{(k+1)}=\sum_{u=1}^{n} \tilde{e}_{iu}e_{uj}^{(k)}. \tag{2.35}$$

В выражении (2.35) $\tilde{e}_{uj}^{(k)}$ умножается на 1, если в σ_u можно попасть из σ_i, пройдя только одну дугу, и умножается на нуль в противном случае. Следовательно, элемент $\tilde{e}_{ij}^{(k+1)}$ равен числу путей длины $k+1$, ведущих из σ_i в σ_j. По индукции теорема верна для всех $k > 0$.

$$[\widetilde{A1}] = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}. \tag{2.36}$$

$$[\widetilde{A1}]^2 = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \end{array}. \tag{2.37}$$

$$[\widetilde{A1}]^3 = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} 8 & 7 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 8 & 6 & 3 & 3 & 2 \\ 9 & 5 & 3 & 5 & 4 \\ 9 & 5 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} \end{array}. \tag{2.38}$$

Сжатая цифровая форма скелетной матрицы может быть использована в задачах, где важно знать *наличие* или *число* путей между определенными состояниями, но не обязательно знать, какие дуги входят в каждый путь. Можно определить число минимальных путей, ведущих из σ_i в σ_j, посредством построения $[\widetilde{M}]^k$ для последовательных значений $k \leqslant n-1$; если элемент (i, j) равен нулю в $[\widetilde{M}]^{k-1}$, но не равен нулю в $[\widetilde{M}]^k$, то элемент (i, j) матрицы $[\widetilde{M}]^k$ представляет собой число минимальных путей длины k; если элемент (i, j) равен нулю в $[\widetilde{M}]^{n-1}$, то путь между σ_i и σ_j не существует.

Матрицы (2.36)—(2.38) иллюстрируют построение скелетной матрицы для автомата $A1$, изображенного на рис. 2.2, и построение по этой матрице матриц второй и третьей степени. Из $[\widetilde{A1}]^3$ видно, например, что в состояние 5 нельзя попасть из состояния 2 ни одним путем, имеющим длину меньше 4, и что в состояние 1 можно попасть из состояния 4 девятью различными путями длины 3.

Следует заметить, что, поскольку одна дуга может соответствовать более чем одной паре вход-выход, то ненулевой элемент (i, j) матрицы $[\widetilde{M}]^k$ не обязательно представляет число всех входных последовательностей длины k, которые переводят автомат M из состояния σ_i в σ_j. Если представляет интерес число входных последовательностей, переводящих M из σ_i в σ_j, а не число путей, то можно определить *модифицированную скелетную матрицу*, обозначаемую через $[\widetilde{M}']$, элемент (i, j) которой, обозначаемый $\tilde{e}'_{ij}$, определяется так:

$$\tilde{e}'_{ij} = \begin{cases} \text{числу пар вход-выход, обозначающих дугу } b_{ij}, \\ 0, \text{ если } b_{ij} \text{ не существует.} \end{cases} \tag{2.39}$$

При таком определении матрица $[\widetilde{M}']$ может быть построена из $[M]$ заменой каждого ненулевого элемента в $[M]$ числом пар вход-выход, содержащихся в этом элементе. Матрицу $[\widetilde{M}']$ можно рассматривать как скелетную матрицу автомата M, где каждая дуга, обозначенная h парами вход-выход, заменена h параллельными дугами, каждая из которых обозначена одной парой вход-выход. Благодаря такой замене число дуг, содержащихся в каком-либо пути, становится равным числу пар вход-выход, содержащихся в обозначениях всех дуг этого пути. Таким образом, элемент (i, j) матрицы $[\widetilde{M}']^k$ должен совпадать с общим числом входных последовательностей длины k, которые переводят M из σ_i в σ_j.

Матрицы (2.40) и (2.41) иллюстрируют построение модифицированной скелетной матрицы автомата $A1$ (рис. 2.2) и построение по этой матрице матрицы второй степени. Из $[\widetilde{A1}']^2$ видно, например, что имеются три кратчайшие входные последовательности, которые переводят $A1$ из состояния 4 в состояние 2, и что есть 12 входных последовательностей длины 2, которые переводят $A1$ из состояния 5 в состояние 4.

$$[\widetilde{A1}'] = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \end{array}. \tag{2.40}$$

$$[\widetilde{A1}']^2 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 18 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 19 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 15 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 12 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & 12 & 4 \end{bmatrix} \end{array}. \tag{2.41}$$

2.13. Частичное построение матриц

Характерная особенность рассмотренных в предыдущих параграфах матриц состоит в том, что они являются квадратными. Следовательно, они содержат информацию, касающуюся не только двух *определенных* состояний, но также информацию о *любой* паре состояний. Часто желательно иметь такую информацию, но она получается ценой выполнения над матрицами трудоемких преобразований, сложность которых возрастает примерно пропорционально квадрату числа состояний автомата. В тех случаях, когда представляют интерес только те пути, которые начинаются из определенного начального состояния, некоторые затруднения, связанные с этими преобразованиями, могут быть обойдены благодаря частичному построению матриц, как это будет показано ниже.

Лемма 2.8. *Пусть* $[\overline{M}]_l^k$ *обозначает матрицу-строку, построенную из* l*-й строки матрицы* $[\overline{M}]^k$. *Тогда*

$$[\overline{M}]_l^{k+1} = [\overline{M}]_l^k\,[\overline{M}]. \tag{2.42}$$

Доказательство. Из определения P_{lj}^k и π_{lj} и преобразований, аналогичных проведенным в (2.17), получим:

$$P_{lj}^{(k+1)} = \sum_{u=1}^{n} \pi_{lu} P_{uj}^{(k)} = \sum_{u=1}^{n} P_{lu}^{(k)} \pi_{uj}. \tag{2.43}$$

Для фиксированного l множество $P_{lj}^{(k+1)}$ состоит из элементов l-й строки матрицы $[\overline{M}]^{k+1}$. Также для фиксированного l множество $\sum_{u=1}^{n} P_{lu}^{(k)}\pi_{uj}$ состоит из элементов матрицы-строки, полученной умножением $[\overline{M}]_l^k$ на $[\overline{M}]$. Следовательно, равенство (2.42) выполняется.

Лемма 2.8 означает, что $[\overline{M}]_l^k$ может быть построена путем последовательного умножения $[\overline{M}]$ на матрицу-строку, а не на квадратную матрицу. Когда представляют интерес только пути, начинающиеся в σ_l, такое частичное построение матрицы оказывается достаточным, так как $[\overline{M}]_l^{(k)}$ содержит ту же информацию об этих путях, что и вся матрица $[\overline{M}]^k$. В результате объем преобразований над матрицами сократится примерно в число раз, равное числу строк в матрице $[\overline{M}]$. Можно заметить, что описанная схема частичного построения непосредственно применима к построению матриц $[\overline{M}']^{(k)}$, описанному в алгоритме 2.4.

Матрицы (2.44) — (2.47) иллюстрируют схему частичного построения матрицы для определения всех элементарных путей длины 1, 2, 3 и 4, начинающихся в состоянии 1 автомата $A1$. $[\overline{A1}']_l^{(k)}$ обозначает l-ю строку матрицы $[\overline{A1}']^{(k)}$.

$$\begin{array}{rcccccl} & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ [\overline{A1}']_1 = & [& 0 & \pi_{12} & \pi_{13} & 0 & 0]. \end{array} \qquad (2.44)$$

$$\begin{array}{rcccccl} & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ [\overline{A1}']_1^{(2)} = & [& 0 & \pi_{13}\pi_{32} & 0 & \pi_{13}\pi_{34} & 0]. \end{array} \qquad (2.45)$$

$$\begin{array}{rcccccl} & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ [\overline{A1}']_1^{(3)} = & [& 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{13}\pi_{34}\pi_{45}]. \end{array} \qquad (2.46)$$

$$\begin{array}{rcccccl} & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ [\overline{A1}']_1^{(4)} = & [& 0 & 0 & 0 & 0 & 0]. \end{array} \qquad (2.47)$$

Можно легко показать, что лемма 2.8 справедлива в случае замены $[\overline{M}]$ на $[\widetilde{M}]$ или на $[\widetilde{M}']$. Поэтому частичное построение можно применять для определения строк скелетных матриц и модифицированных скелетных матриц разных степеней.

Задачи.

2.1. Постройте таблицу переходов, граф переходов и матрицу переходов для случаев, сформулированных в задачах 1.2—1.9. Для каждого случая рассмотрите число возможных начальных состояний и входных последовательностей и подтвердите, что выходные последовательности, получаемые на основании различных представлений, соответствуют тем, которые предполагались соответствующими словесным описаниям.

2.2. Известно, что конечный автомат имеет входной алфавит $\{\alpha, \beta\}$, выходной алфавит $\{0, 1\}$ и множество состояний $\{1, 2, 3\}$. Начертите граф переходов, удовлетворяющий этим условиям.

2.3. Подсчитайте число различных: (а) (n, p, q)-автоматов, в которых реакция в настоящий момент зависит только от состояния в настоящий момент и не зависит от входного сигнала в настоящий момент; (б) (n, p, q)-автоматов, в которых $n = p$ и из каждого состояния можно перейти в любое другое, подав на автомат один входной символ; (в) (n, p, q)-автоматов, в которых нет изолированных состояний; (г) (n, p, q)-автоматов, в которых каждый из q выходных символов появляется в таблице переходов, по крайней мере, один раз (достаточно получить рекуррентную формулу для подсчета этого числа автоматов).

2.4. Постройте автомат, изоморфный автомату, изображенному таблицей З 2.1, посредством замены обозначений состояний 1, 2, 3, 4, 5 и 6 на 2, 3, 4, 5, 6 и 1 соответственно. Без построения всего семейства перестановок автомата покажите, что это семейство имеет мощность, равную 6!.

Таблица З 2.1

	z_ν		$s_{\nu+1}$			z_ν		$s_{\nu+1}$	
s_ν \ x_ν	α	β	α	β	s_ν \ x_ν	α	β	α	β
1	0	0	1	1	4	0	1	4	2
2	0	0	2	1	5	1	0	5	3
3	0	1	3	2	6	1	0	6	3

2.5. Покажите, что если b обозначает число дуг в графе переходов (n, p, q)-автомата, то $n \leqslant b \leqslant np$.

2.6. (а) Постройте таблицу переходов и матрицу переходов автомата, изображенного на рис. З 2.1. (б) Определите преходящие, тупиковые и изолированные состояния в автомате. (в) Определите для этого автомата $G(1)$, $G(2)$, ..., $G(8)$.

2.7. Пусть σ_i — состояние из множества состояний S автомата M. Пусть $G(\sigma_i)$ — σ_i-достижимое множество и пусть множество $G'(\sigma_i)$ состоит из элементов множества S, не содержащихся в $G(\sigma_i)$.

Покажите, что: (а) если $G'(\sigma_i) \neq 0$ и $G(\sigma_i) \cap G(G'(\sigma_i)) = 0$ [1]), то $G(\sigma_i)$ и $G'(\sigma_i)$ представляют собой два изолированных подавтомата автомата M; (б) если $G'(\sigma_i) \neq 0$ и $G(\sigma_i) \cap G(G'(\sigma_i)) = 0$, то $G(\sigma_i)$

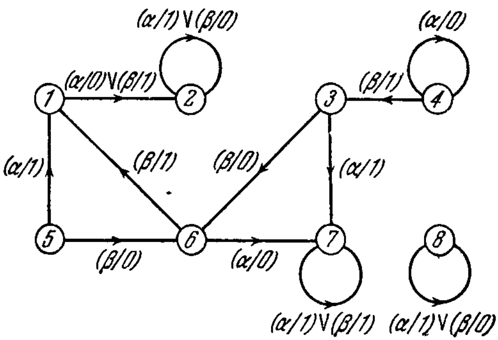


Рис. 3 2.1.

и $G'(\sigma_i)$ представляют тупиковый и преходящий автоматы соответственно; (в) если $G'(\sigma_i) = 0$, то M не содержит изолированных подавтоматов.

2.8. Таблица 3 2.2 представляет автомат A. (а) Найдите $G(5,6)$ для автомата A. (б) Используя результаты задачи 2.7, покажите, что $G(6)$ представляет изолированный подавтомат, а $G(2)$ — тупиковый подавтомат. (в) Найдите максимальное разложение автомата A.

Таблица 3 2.2

	z_ν		$s_{\nu+1}$			z_ν		$s_{\nu+1}$	
s_ν \ x_ν	α	β	α	β	s_ν \ x_ν	α	β	α	β
1	0	1	3	2	6	1	0	5	4
2	0	0	2	1	7	1	1	9	8
3	1	0	2	2	8	1	0	8	9
4	0	1	1	5	9	0	1	7	7
5	0	0	3	2					

[1]) Множество $R_1 \cap R_2$ означает пересечение множеств R_1 и R_2 и состоит из элементов, принадлежащих обоим множествам. Нуль (0) обозначает пустое множество.

2.9. Постройте таблицу переходов для расщепляемого автомата, который состоит из автоматов A, $Б$ и $В$, изображенных на рис. З 2.2.

2.10. Пусть $F_k(S_i)$ — множество всех состояний автомата M, из которых можно попасть в любое состояние множества S_i при подаче входных последовательностей длины k или меньше.

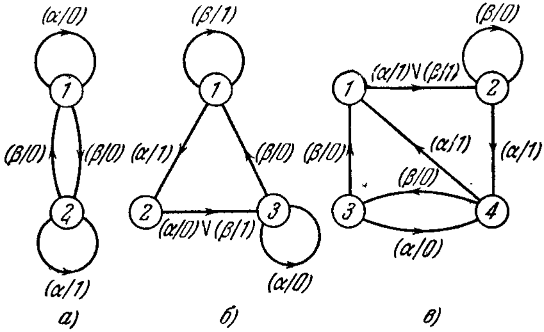


Рис. З 2.2.

(а) Сформулируйте алгоритм для определения $F(S_i)$-множества состояний, из которых S_i достижимо при подаче входной последовательности *любой* длины. (б) Примените алгоритм к автомату A из задачи 2.8 при $S_i = \{3\}$. (в) Покажите, что $G(S_i) \cup F(S_i) = H(S_i)$.

2.11. Автомат A определен матрицей переходов $[A]$. (а) Определите преходящие, тупиковые и изолированные состояния автомата A. (б) Определите $G_1(5, 7)$ и $H_1(2, 3)$. (в) Путем изменения порядка строк и столбцов в $[A]$ определите, составляют ли множества состояний $\{1, 2, 4, 7\}$ и $\{3, 5, 6, 8\}$ пару из преходящего и тупикового подавтоматов, пару изолированных подавтоматов или пару автоматов, не принадлежащих ни к одному из указанных типов.

$$
[A] = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\\
\begin{bmatrix}
(\alpha/1)\vee(\beta/0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & (\alpha/0) & 0 & (\beta/1) & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & (\alpha/1)\vee(\beta/1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & (\alpha/1) & 0 & (\beta/0) & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & (\alpha/0) & 0 & 0 & 0 & 0 & (\beta/1)\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\alpha/1)\vee(\beta/0) & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & (\beta/0) & 0 & 0 & (\alpha/1)\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\alpha/0)\vee(\beta/1) & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}.
$$

2.12. (а) Покажите, что если $e_{ii}^{(1)}$ — единственный ненулевой элемент в i-й строке матрицы $[\overline{M}]$, то $e_{ii}^{(k)}$ — единственный ненулевой элемент в i-й строке матрицы $[\overline{M}]^k$ (для любого целого $k \geqslant 1$). (б) Покажите, что если $e_{jj}^{(1)}$ — единственный ненулевой элемент в j-м столбце матрицы $[\overline{M}]$, то $e_{jj}^{(k)}$ — единственный ненулевой элемент в j-м столбце $[\overline{M}]^k$ (для любого целого $k \geqslant 1$).

2.13. Покажите, что $[\overline{M}]^{l-k}[M]^k = [M]^l$ (для всех $k \geqslant l$).

2.14. Для автомата A из задачи 2.11 постройте: (а) $[\overline{A}]$, $[\overline{A}]^2$, $[\overline{A}]^3$; (б) $[\overline{A}']$, $[\overline{A}']^{(2)}, \ldots, [\overline{A}']^{(7)}$; (в) $[\widetilde{A}]$, $[\widetilde{A}]^2$, $[\widetilde{A}]^3$; (г) $[\widetilde{A}']$, $[\widetilde{A}']^2$, $[\widetilde{A}']^3$; (д) установите, что A не имеет полных контуров.

2.15. Покажите, что необходимым условием существования полного контура в автомате M является наличие в каждой строке и в каждом столбце матрицы $[M]$, по крайней мере, одного недиагонального ненулевого элемента. Докажите с помощью примера, что это условие не является достаточным.

2.16. Подсчитайте число различных скелетных матриц и скелетных модифицированных матриц, которые описывают (n, p, q)-автоматы.

2.17. Требуется определить, существует ли в автомате M путь, который ведет из σ_i в σ_k через σ_l, и если существует, то определить длину минимального пути, соответствующего такому переходу. Сформулируйте алгоритм для решения этой задачи.

2.18. На автомат M с n состояниями требуется подать такую входную последовательность, чтобы, начиная из состояния σ_1, автомат перешел в состояние σ_k через $(k-1)h$ входных символов (где $2 \leqslant k \leqslant n$) и в состояние σ_n через nh символов. Полагая, что элементом (i, j) матрицы $[\widetilde{M}']^r$ является элемент $d_{ij}^{(r)}$, найдите число возможных последовательностей, которые отвечают сформулированным требованиям.

2.19. Граф переходов автомата M имеет n состояний, обозначенных $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, и m дуг, обозначенных $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$. $(n \times m)$-матрица $[M_a]$ с элементом (i, j), обозначенным через a_{ij}, определяется так:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } \beta_j \text{ является исходящей дугой или петлей,} \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

$(n \times m)$-матрица $[M_b]$ с элементом (i, j), обозначенным через b_{ij}, определяется так:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } b_{ij} \text{ является заходящей дугой или петлей,} \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Покажите, что $[\widetilde{M}] = [M_a][M_b]_t$, где $[M_b]_t$ является транспонированной матрицей $[M_b]$.

2.20. Используя методику частичного построения матриц, описанную в § 2.13, ответьте на следующие вопросы, относящиеся к автомату, представленному таблицей 3 2.3: (а) Какие кратчайшие входные последовательности переводят автомат из состояния 3 в состояние 1? (б) Какие входные последовательности длины 4 или меньше переводят автомат из состояния 3 снова в состояние 3? (в) Имеет ли автомат полные контуры? Если имеет, то составьте входную последовательность, которая соответствует полному контуру, начинающемуся в состоянии 3.

Таблица 32.3

	z_ν		$s_{\nu+1}$	
s_ν \ x_ν	α	β	α	β
1	1	0	2	3
2	1	1	4	1
3	0	1	3	2
4	0	0	1	3

ГЛАВА 3

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ И МИНИМИЗАЦИЯ АВТОМАТОВ

3.1. Введение

В предыдущих главах было подчеркнуто, что в конечных автоматах не нужно ни наблюдать, ни интересоваться физической природой состояний. Единственная функция состояний заключается в том, чтобы участвовать в определении зависимостей между входами и выходами автомата. Следовательно, любое множество состояний, выполняющих эту функцию, является приемлемым независимо от того, выражают эти состояния какой-либо интуитивный смысл или нет. Эта свобода выбора множества состояний весьма выгодна, поскольку она позволяет заменять одно множество другим, что может оказаться удобным для многих целей. В частности, она позволяет найти оптимальное или минимальное, в том или другом смысле, множество состояний. При всех таких рассмотрениях понятие «эквивалентности» играет главную роль. Как станет видно из дальнейшего, это понятие не только является фундаментальным для более точного и краткого определения конечных автоматов, но проливает новый свет на всю проблему анализа конечных автоматов (так же как и синтеза) [1]).

---

[1]) Материал этой главы частично базируется на работах: Хаффмена (D. A. Huffman, The Synthesis of Sequential Switching Networks, J. Franclin Inst., vol. 257, pp. 161—190, 275—303, 1954), Мура (E. F. Moore, Gedanken — Experiments on Sequential Machines, «Automata Studies», pp. 129—153, Princeton University Press, Princeton, N. Y., 1956. Русский перевод: Э. Ф. Мур, Умозрительные эксперименты с последовательностными машинами. В сборнике «Автоматы» под редакцией К. Э. Шеннона и Дж. Маккарти, ИЛ, М., 1956), Мили (G. H. Mealy, Method for Synthesizing Sequential Circuits, Bell System Tech. J., vol. 34, pp. 1054—1079, 1955) и Ауфенкампа и Хона (D. D. Aufenkamp and F. E. Hohn, Analysis of Sequential Machines, IRE Trans., vol. EC — 6, pp. 276—285, 1957).

3.2. Эквивалентность состояний

В дальнейшем будем применять обозначение $M|\sigma$ для краткой записи высказывания: «автомат M в состоянии σ».

Определение 3.1. Говорят, что состояние σ_i автомата M_1 и состояние σ_j автомата M_2 *эквивалентны*, если $M_1|\sigma_i$ и $M_2|\sigma_j$ под воздействием любой входной последовательности выдают одинаковые выходные последовательности. Если σ_i и σ_j не эквивалентны, то говорят, что они *различимы*. Обозначения M_1 и M_2 могут относиться к одному и тому же автомату.

Таким образом, σ_i и σ_j эквивалентны тогда и только тогда, когда, наблюдая внешние выходы, нельзя отличить автомат M_1, находящийся в начальном состоянии σ_i, от автомата M_2, находящегося в начальном состоянии σ_j[1]). Состояния σ_i и σ_j различимы тогда и только тогда, когда имеется хотя бы одна входная последовательность, подача которой как на $M_1|\sigma_i$, так и на $M_2|\sigma_j$ дает на выходах различные последовательности.

Эквивалентность σ_i и σ_j обозначается равенством $\sigma_i = \sigma_j$, а различимость σ_i и σ_j — неравенством $\sigma_i \neq \sigma_j$. Пользуясь определением 3.1, можно легко показать, что эквивалентные состояния обладают свойством рефлексивности ($\sigma_i = \sigma_i$), свойством симметричности (если $\sigma_i = \sigma_j$, то $\sigma_j = \sigma_i$) и свойством транзитивности (если $\sigma_i = \sigma_j$ и $\sigma_j = \sigma_k$, то $\sigma_i = \sigma_k$). Следовательно, эквивалентность состояний может рассматриваться как обычное соотношение эквивалентности, которое применимо к множествам состояний любой мощности. Различимость состояний не обладает свойствами рефлексивности и транзитивности и, следовательно, может относиться только к парам состояний.

В некоторых случаях эквивалентность или различимость двух состояний одного и того же автомата могут быть установлены исследованием таблицы переходов данного автомата,

---

[1]) Вместо выражения «различимость автоматов $M_1|\sigma_i$ и $M_2|\sigma_j$» будет употребляться выражение «различимость состояний σ_i и σ_j» во всех случаях, когда по контексту M_1 и M_2 подразумеваются. Аналогично вместо выражения «реакция автомата $M|\sigma$» будет употребляться выражение «реакция состояния σ», когда по контексту автомат M подразумевается.

Некоторые из этих случаев описываются с помощью следующих трех лемм.

Лемма 3.1. *Пусть* σ_i *и* σ_j *— состояния автомата* M. *Если строки* σ_i *и* σ_j *в подтаблице* z_ν *автомата* M *различаются, то* $\sigma_i \neq \sigma_j$.

Доказательство. Очевидно, существует по крайней мере один входной символ, при приложении которого к $M|\sigma_i$ и к $M|\sigma_j$, на выходе M получаются различные выходные символы. Следовательно, по определению 3.1 $\sigma_i \neq \sigma_j$.

Лемма 3.2. *Пусть* σ_i и σ_j *— состояния автомата* M. *Если строки* σ_i *и* σ_j *в полной таблице переходов автомата* M *одинаковы, то* $\sigma_i = \sigma_j$.

Доказательство. При приложении к $M|\sigma_i$ и к $M|\sigma_j$ любого входного символа выходные символы и следующие состояния в обоих случаях будут одинаковы. Поскольку $M|\sigma_i$ и $M|\sigma_j$ переходят в одно и то же состояние, их реакции на все подпоследовательности входных сигналов должны совпадать. Следовательно, по определению 3.1 $\sigma_i = \sigma_j$.

Лемма 3.3. *Пусть* σ_i *и* σ_j *— состояния автомата* M. *Если строки* σ_i *и* σ_j *полной таблицы переходов автомата* M *становятся одинаковыми при замене каждого обозначения* σ_i *на* σ_j *(или наоборот), то* $\sigma_i = \sigma_j$.

Доказательство. При приложении любого входного символа к $M|\sigma_i$ и к $M|\sigma_j$ выходные символы одинаковы в двух случаях: либо $M|\sigma_i$ и $M|\sigma_j$ переходят в одно и то же состояние, либо в состояния σ_i и σ_j (не обязательно соответственно). Если следующее состояние одно и то же, то реакции автомата на входные подпоследовательности будут совпадать. Если следующими состояниями являются σ_i и σ_j, то восстановится исходная ситуация, и приведенные выше соображения можно будет повторить, чтобы показать, что следующие выходные символы одинаковы в обоих случаях. Затем, по индукции, получим, что реакции при σ_i и σ_j на любую входную последовательность будут одинаковыми, откуда следует, что $\sigma_i = \sigma_j$.

Пары строк, обладающие свойством, приведенным в лемме 3.1, называются *явно различимыми*, а состояния, стоящие в основном столбце в этих строках, — *явно различимыми* состояниями. Пары строк, обладающие свойствами, указанными в леммах 3.2 и 3.3, называются *явно эквивалентными*, а состояния, стоящие в основном столбце в этих строках, — явно эквивалентными состояниями.

Таким образом, имеем:

Теорема 3.1. *Если состояния σ_i и σ_j явно различимы, то $\sigma_i \neq \sigma_j$, а если состояния σ_i и σ_j явно эквивалентны, то $\sigma_i = \sigma_j$.*

Следует отметить, что утверждение, обратное теореме 3.1, несправедливо, т. е. не каждая пара различимых состояний является явно различимой и не каждая пара эквивалентных состояний явно эквивалентной. Используя определения, введенные в § 2.3, можно заключить, что в явно минимальном

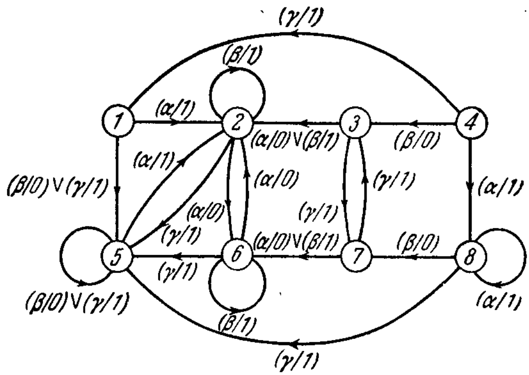


Рис. 3.1. Автомат $A6$.

автомате все пары состояний различимы, а в явно сократимом автомате имеется по крайней мере одна пара эквивалентных состояний.

Для иллюстрации лемм 3.1—3.3 рассмотрим автомат $A6$, представленный графом переходов, изображенным на рис. 3.1, и таблицей переходов 3.1.

Из таблицы переходов видно, что строки 1 и 5 одинаковы, а строки 2 и 6 становятся одинаковыми, если каждую цифру 2 заменить на цифру 6 (или каждую цифру 6 заменить на цифру 2). Следовательно, состояния в парах $\{1, 5\}$ и $\{2, 6\}$ являются эквивалентными. Рассмотрение подтаб-

Таблица 3.1

Автомат $A6$

	z_ν			$s_{\nu+1}$		
s_ν \ x_ν	α	β	γ	α	β	γ
1	1	0	1	2	5	5
2	0	1	1	6	2	5
3	0	1	1	2	2	7
4	1	0	1	8	3	1
5	1	0	1	2	5	5
6	0	1	1	2	6	5
7	0	1	1	6	6	3
8	1	0	1	8	7	5

лицы z_ν показывает также, что ни одно состояние из множества $\{1, 4, 5, 8\}$ не может быть эквивалентным какому-либо состоянию из множества $\{2, 3, 6, 7\}$.

3.3. k-эквивалентность

Для дальнейших обсуждений полезно ввести понятие «k-эквивалентности».

Определение 3.2. Состояние σ_i автомата M_1 и состояние σ_j автомата M_2 называются *k-эквивалентными*, если при приложении к $M_1|\sigma_i$ и к $M_2|\sigma_j$ входной последовательности длины k они вырабатывают одинаковые выходные последовательности. Если σ_i и σ_j не являются k-эквивалентными, то они называются *k-различимыми*. Обозначения M_1 и M_2 могут относиться к одному и тому же автомату.

Таким образом, σ_i и σ_j являются k-эквивалентными тогда и только тогда, когда, прикладывая входные последовательности длины k и наблюдая сигналы на внешних выходах, невозможно отличить автомат M_1 в состоянии σ_i от автомата M_2 в состоянии σ_j. Состояния σ_i и σ_j являются k-различимыми тогда и только тогда, когда имеется хотя бы одна входная последовательность длины k, которая при приложении к $M_1|\sigma_i$ и $M_2|\sigma_j$ вырабатывает разные выходные последовательности. Два 1-различимых состояния, согласно определению, данному в § 3.2, являются явно различимыми.

На основании определения 3.2 легко показать, что k-эквивалентные состояния обладают свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности. Следовательно, k-эквивалентность можно трактовать как обычное отношение эквивалентности, которое непосредственно применимо к множествам состояний любой мощности. С другой стороны, k-различимость не обладает свойствами рефлексивности и транзитивности, и, следовательно, это понятие применимо только к парам состояний.

Лемма 3.4. (а) *Если два состояния являются k-эквивалентными, то они являются и l-эквивалентными для каждого $l \leqslant k$.* (б) *Если два состояния являются k-различимыми, то они являются и l-различимыми для каждого $l \geqslant k$.*

Доказательство. (а) Пусть σ_i и σ_j являются k-эквивалентными, но различимыми при некоторой входной последовательности, скажем $\mathscr{E}_l$, длины $l \leqslant k$. Тогда σ_i и σ_j должны быть различимы при входной последовательности $\mathscr{E}_l\mathscr{E}_{k-l}$, где $\mathscr{E}_{k-l}$ представляет собой любую входную последовательность длины $k-l$. Следовательно, σ_i и σ_j являются k-различимыми, что противоречит условию. (б) Пусть σ_i и σ_j являются k-различимыми, но l-эквивалентными для некоторого $l \geqslant k$. Однако, согласно (а), если σ_i и σ_j являются l-эквивалентными, они должны быть k-эквивалентными для каждого $k \leqslant l$. Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения (б).

Состояние, в которое переходит состояние σ_i, при подаче входной последовательности длины k называется *k-м преемником* σ_i, по отношению к этой последовательности. Нулевым преемником состояния является само состояние.

Теорема 3.2. *Если состояния σ_i и σ_j являются k-эквивалентными и если их k-е преемники по отношению к любой входной последовательности длины k являются эквивалентными, то $\sigma_i = \sigma_j$.*

Доказательство. Если σ_i и σ_j являются k-эквивалентными, то, согласно лемме 3.4, они вырабатывают одинаковые реакции при всех входных последовательностях длины k или менее. Если их k-е преемники по отношению к любой входной последовательности длины k являются эквивалентными, то они вырабатывают одинаковые реакции при всех входных последовательностях, которые следуют за первыми k

символами. Следовательно, σ_i и σ_j вырабатывают одинаковые выходы при входных последовательностях *любой* длины, откуда следует, что $\sigma_i = \sigma_j$.

Теорема 3.3. *Если состояния σ_i и σ_j являются эквивалентными, то их k-е преемники по отношению к любой входной последовательности длины k и для любого k являются эквивалентными.*

Доказательство. Пусть σ'_i и σ'_j являются k-ми преемниками состояний σ_i и σ_j соответственно по отношению к произвольной входной последовательности $\mathscr{E}_k$. Если $\sigma'_i \neq \sigma'_j$, то имеется последовательность, скажем $\mathscr{E}_l$, для которой σ'_i и σ'_j вырабатывают различные реакции. Следовательно, реакции для σ_i и σ_j на $\mathscr{E}_k\mathscr{E}_l$ должны быть разными; это противоречит допущению, что $\sigma_i = \sigma_j$.

Входную последовательность, подаваемую на $M_1|\sigma_i$ и $M_2|\sigma_j$, можно сравнить с двумя путями, начинающимися состояниями σ_i и σ_j на графе переходов для автоматов M_1 и M_2 соответственно. Теорема 3.3 означает, что если два

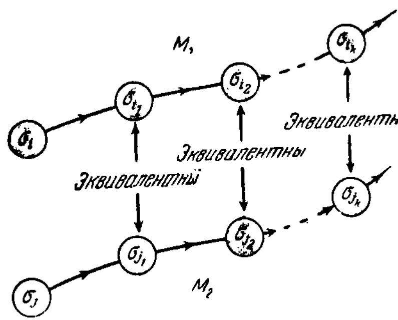


Рис. 3.2. Пути в автоматах M_1 и M_2 при $\sigma_i = \sigma_j$.

начальных состояния на этих путях эквивалентны, то каждые два соответствующих состояния на этих путях (т. е. состояния, в которые переходят автоматы из начальных состояний после прохождения одного и того же числа дуг) являются также эквивалентными. Это положение иллюстрируется рис. 3.2, где показанные пути являются путями, которые проходят M_1 и M_2, при приложении некоторой входной последовательности к $M_1|\sigma_i$ и к $M_2|\sigma_j$. Если σ_i и σ_j являются эквивалентными, то k-е преемники σ_{i_k} и σ_{j_k} должны быть эквивалентны для всех k.

Изложенные результаты могут быть использованы во многих случаях для установления эквивалентности состояний, когда эквивалентность других состояний уже установлена. Пусть, например, известно, что пары состояний $\{1, 5\}$ и $\{3, 7\}$ автомата $A6$, изображенного на рис. 3.1, являются эквивалентными. Тогда пара $\{4, 8\}$ должна быть также парой эквивалентных состояний вследствие того, что 4 и 8 являются 1-эквивалентными, а их первыми преемниками являются пары $\{1, 5\}$ и $\{3, 7\}$. Если известно, что состояния в паре $\{4, 8\}$ эквивалентны, то состояния в парах $\{1, 5\}$, $\{2, 6\}$ и $\{3, 7\}$ должны быть также эквивалентными, поскольку они образуют пары соответствующих состояний на путях, начинающихся состояниями 4 и 8.

3.4. k-эквивалентные разбиения

Для целей, которые станут ясными из следующих параграфов, представляет интерес деление или «разбиение» состояний автомата на классы по следующим правилам: (1) все состояния, принадлежащие к одному классу, должны быть k-эквивалентными; (2) все состояния, принадлежащие к разным классам, должны быть k-различимыми. Такое разбиение называется *k-эквивалентным разбиением* автомата и обозначается P_k. Классы P_k называются *классами k-эквивалентности* и обозначаются Σ_{k_1}, Σ_{k_2}, Σ_{k_3} и т. д. Состояния, принадлежащие к одному и тому же классу, называются *смежными состояниями*; состояния, принадлежащие к разным классам, называются *разобщенными состояниями*.

Рис. 3.3 и таблица 3.2 представляют автомат $A7$. Для этого автомата 2-эквивалентное разбиение имеет вид

$$P_2:\quad \begin{aligned} &\Sigma_{21} = \{1, 3, 5, 7, 8\}, \\ &\Sigma_{22} = \{2, 4, 6\}, \\ &\Sigma_{23} = \{9\}\ldots \end{aligned} \tag{3.1}$$

Легко проверить по графу переходов автомата $A7$, что смежные состояния в P_2, заданные выражениями (3.1), являются 2-эквивалентными, а разобщенные состояния являются 2-различимыми. Ни одно состояние автомата $A7$ не является 2-эквивалентным состоянию 9 (за исключением самого состояния 9), и, следовательно, состояние 9 образует класс, состоящий из одного состояния, — *одноэлементный класс.*

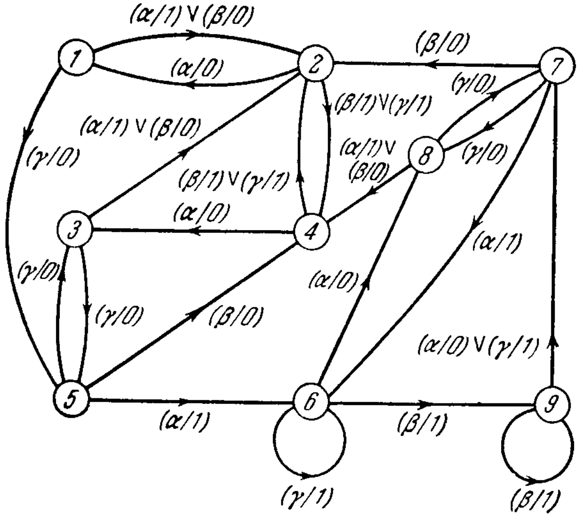


Рис. 3.3. Автомат $A7$.

Ясно, что ни одно состояние не может принадлежать одновременно двум различным k-эквивалентным классам, поскольку это означало бы, что это состояние является k-различимым по отношению к самому себе. Следовательно, общее число состояний в P_k равно общему числу состояний в автомате.

Лемма 3.5. *k-эквивалентное разбиение автомата единственно.*

Доказательство. Предположим, что разбиение P_k, состоящее из $\Sigma_{k_1}, \Sigma_{k_2}, \ldots, \Sigma_{k_u}$, не является единственным. Тогда для этого же автомата должно быть другое k-эквивалентное разбиение, скажем P'_k, состоящее из $\Sigma'_{k_1}, \Sigma'_{k_2}, \ldots$ $\ldots, \Sigma'_{k_v}$. Пусть $\Sigma_{k_r} = \{\sigma_{r_1}, \sigma_{r_2}, \ldots, \sigma_{r_d}\}$. Поскольку состояния из Σ_{k_r} являются k-эквивалентными и поскольку не

Таблица 3.2

Автомат $A7$

	z_ν			$s_{\nu+1}$				z_ν			$s_{\nu+1}$		
s_ν \ x_ν	α	β	γ	α	β	γ	s_ν \ x_ν	α	β	γ	α	β	γ
1	1	0	0	2	2	5	6	0	1	1	8	9	6
2	0	1	1	1	4	4	7	1	0	0	6	2	8
3	1	0	0	2	2	5	8	1	0	0	4	4	7
4	0	1	1	3	2	2	9	0	1	1	7	9	7
5	1	0	0	6	4	3							

имеется ни одного состояния вне Σ_{k_r}, являющегося эквивалентным какому-либо состоянию из Σ_{k_r}, то в P_k должен быть класс состояний, скажем Σ'_{k_1}, состоящий из состояний σ_{r_1}, σ_{r_2}, ..., σ_{r_d} и не содержащий никаких других состояний. Предположив, что r принимает значения 1, 2, ..., u, получим, что каждому классу в P_k соответствует идентичный класс в P'_k. Поскольку общее число состояний в P'_k должно быть таким же, как в P_k, то P_k и P'_k должны быть одинаковыми и, следовательно, P_k является единственным.

Лемма 3.6. *Состояния, являющиеся разобщенными в P_k, должны быть разобщенными в P_{k+1}.*

Доказательство. Согласно лемме 3.4 два состояния, являющиеся k-различимыми, являются и $(k+1)$-различимыми. Тогда справедливость доказываемой леммы непосредственно вытекает из определения P_k и P_{k+1}.

Например, P_3 автомата $A7$ не может содержать такие классы, как $\{1, 3, 6\}$ и $\{2, 5, 9\}$, поскольку эти классы, как следует из (3.1), содержат состояния, которые в P_2 являются разобщенными.

Лемма 3.7. *Если автомат M имеет два различимых, но k-эквивалентных состояния, то он также должен иметь два состояния, которые являются k-эквивалентными, но $(k+1)$-различимыми.*

Доказательство. Пусть σ_i и σ_j будут различимыми k-эквивалентными состояниями автомата M и пусть входная последовательность $\xi_{h_1}\xi_{h_2}\ldots\xi_{h_l}$ будет наикратчайшей входной последовательностью, различающей состояния σ_i и σ_j. Это значит, что σ_i и σ_j вырабатывают различные выходные символы не раньше, чем будет приложен входной символ ξ_{h_l}. Поскольку σ_i и σ_j являются k-эквивалентными, то должно быть $l > k$. Пусть $(l-k-1)$-ми преемниками σ_i и σ_j по отношению к входной последовательности $\xi_{h_1}\xi_{h_2}\ldots\xi_{h_{(l-k-1)}}$ будут σ_i' и σ_j' соответственно; так как $l > k$, то $l-k-1 \geqslant 0$, и эти преемники всегда существуют. Тогда σ_i' и σ_j' могут быть различимы при входной последовательности $\xi_{h_{l-k}}\xi_{h_{l-k+1}}\ldots$ $\ldots\xi_{h_l}$, длина которой равна $l-(l-k-1)=k+1$. Эти два состояния не могут быть различимы с помощью никакой другой более короткой последовательности, так как это противоречило бы условию, что σ_i и σ_j являются k-эквивалентными. Следовательно, σ_i' и σ_j' являются k-эквивалентными, но $(k+1)$-различимыми. Лемма доказана. Рассмотренная ситуация иллюстрируется на рис. 3.4.

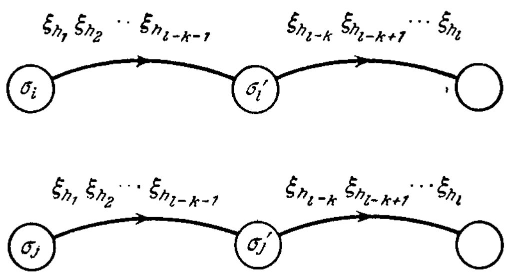


Рис. 3.4. Иллюстрация к лемме 3.7.

Предположим теперь, что смежные состояния в каждом классе эквивалентности разбиения P_k являются эквивалентными. Тогда ясно, что P_{k+u} совпадает с P_k для всех неотрицательных целых u. Если два смежных состояния в P_k являются различимыми, то они представляют собой два различимых состояния, которые являются k-эквивалентными. В этом случае, согласно лемме 3.7, автомат должен иметь два состояния, которые являются k-эквивалентными, но $(k+1)$-различимыми. Следовательно, P_k должно содержать два смежных состояния, которые становятся разобщенными в P_{k+1}. Таким образом, если смежные состояния в каком-нибудь классе из P_k являются различимыми, то разбиение P_{k+1} должно отличаться от разбиения P_k. Если P_{k+1} отличается от P_k, то, согласно лемме 3.6, должно существовать «собственное разделение» P_k, которое должно получаться расщеплением одного или нескольких классов P_k на два или более подклассов. В заключение можно утверждать следующее.

Теорема 3.4. *P_{k+1} должно быть собственным разделением P_k, если не во всех классах P_k смежные состояния являются эквивалентными. В противном случае P_k и P_{k+1} совпадают.*

Для автомата $A7$, например, имеем:

$$\begin{aligned} P_3\colon\ &\Sigma_{31}=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 8\},\\ &\Sigma_{32}=\{2,\ 4\},\\ &\Sigma_{33}=\{6\},\\ &\Sigma_{34}=\{9\}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

которое является собственным разделением P_2, и

$$\begin{aligned} P_4\colon\ &\Sigma_{41}=\{1,\ 3,\ 8\},\\ &\Sigma_{42}=\{2,\ 4\},\\ &\Sigma_{43}=\{5,\ 7\},\\ &\Sigma_{44}=\{6\},\\ &\Sigma_{45}=\{9\}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

которое является собственным разделением P_3. Однако видно, что

$$\begin{aligned} P_5\colon\ &\Sigma_{51}=\{1,\ 3,\ 8\},\\ &\Sigma_{52}=\{2,\ 4\},\\ &\Sigma_{53}=\{5,\ 7\},\\ &\Sigma_{54}=\{6\},\\ &\Sigma_{55}=\{9\} \end{aligned} \tag{3.4}$$

совпадает с P_4 и, следовательно, смежные состояния в каждом классе P_4 являются эквивалентными.

3.5. Эквивалентные разбиения

k-эквивалентное разбиение автомата M называется *эквивалентным разбиением* M и обозначается $\widehat{P}$, если во всех классах этого разбиения смежные состояния эквивалентны. При этих условиях каждый класс разбиения называется *классом эквивалентности*. Из материалов § 3.4 следует, что $\widehat{P}$ является наиболее детальным разбиением P_k. По теореме 3.4, эквивалентное разбиение $\widehat{P}$ может быть получено, если образовывать P_k для $k=1, 2, 3 \ldots$ до тех пор, пока первый раз получится разбиение, которое совпадает с предыдущим разбиением. Это разбиение и будет $\widehat{P}$. Пусть равенство $P_i = P_j$ означает, что P_i и P_j являются одинаковыми разбиениями, и пусть $|P_i|$ обозначает число классов в P_i. Используя это обозначение, предыдущие результаты могут быть обобщены следующим образом:

$$|P_k| \leqslant |P_{k+1}|. \tag{3.5}$$

Если $|P_k| = |P_{k+1}|$, то

$$P_k = P_{k+u} = \widehat{P}, \quad u = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{3.6}$$

Если все n состояний автомата являются 1-эквивалентными, то разбиение P_1 состоит из одного класса, содержащего n состояний. Очевидно, что если все n состояний являются 1-эквивалентными, то их первые преемники по отношению к любой входной последовательности являются также 1-эквивалентными. Таким образом, все n состояний должны быть 2-эквивалентными и, следовательно, $P_1 = P_2$. Тогда, по (3.6), $P_1 = \widehat{P}$ и все n состояний являются эквивалентными. Для автомата такого типа $f_z(x_\nu, s_\nu)$ является одинаковой для всех s_ν и, следовательно, $f_z(x_\nu, s_\nu) = f_z(x_\nu)$. Тогда по определению, введенному в § 1.6, можно утверждать, что автомат, в котором все состояния эквивалентны, является тривиальным автоматом. В дальнейшем, если не будет специально оговорено, будут рассматриваться только нетривиальные автоматы, т. е. автоматы, в которых имеется, по крайней мере, одна различимая пара состояний или в 1-эквивалентных разбиениях которых имеется, по крайней мере, два класса.

Лемма 3.8. *Если* $P_k \neq P_{k-1}$, *то*

$$|P_k| \geqslant k+1. \tag{3.7}$$

Доказательство. Если $P_k \neq P_{k-1}$, то, по (3.5) и (3.6), $|P_r| > |P_{r-1}|$ для $r = 1, 2, \ldots, k$. Поскольку $|P_{\mathrm{I}}| \geqslant 2$, то (3.7) следует по индукции.

Лемма 3.9. *Если для автомата с n состояниями $P_k \neq P_{k-1}$, то число состояний в каждом классе разбиения P_k не превышает $n-k$.*

Доказательство. Согласно лемме 3.8, число классов в P_k равно, по крайней мере, $k+1$. Предположим, что один класс содержит больше чем $n-k$, скажем $n-k+1$ состояний. Тогда, поскольку каждый другой класс в P_k должен содержать, по крайней мере, одно состояние, общее число состояний в P_k будет не менее $k+(n-k+1) = n+1$. Лемма доказана, так как общее число состояний не может превосходить n.

Лемма 3.10. *Для автомата с n состояниями $P_n = P_{n-1}$.*

Доказательство. Если $P_n \neq P_{n-1}$, то, согласно лемме 3.8, $|P_n| \geqslant n+1$. Так как число классов в k-эквивалентном разбиении автомата с n состояниями не может превышать n, то полученное противоречие доказывает лемму.

Из леммы 3.10 и уравнения (3.6) можно вывести следующее заключение:

Теорема 3.5. *Для автомата с n состояниями*

$$P_{n-1} = \widehat{P}. \tag{3.8}$$

Таким образом, процесс определения $\widehat{P}$ для автомата с n состояниями путем последовательного построения P_k для $k = 1, 2, 3$ требует не более $n-1$ построений.

Другим вариантом формулировки теоремы 3.5 является

Следствие 3.1. Два состояния автомата с n состояниями эквивалентны, если они $(n-1)$-эквивалентны, и различимы, если они $(n-1)$-различимы.

Определение P_{I}. P_{I} может быть определено с помощью следующего правила: состояния являются смежными в P_1 тогда и только тогда, когда они для каждого входного символа дают одинаковые выходные символы.

Определение P_{k+1} *по* P_k $(k \geqslant 1)$. Пары смежных состояний в P_k, которые при любом входном символе переходят в смежные состояния в P_k, представляют собой k-эквивалентные состояния, первые преемники которых по отношению к любому входному символу являются k-эквивалентными. Поэтому такие смежные состояния являются $(k+1)$-эквивалентными и должны быть смежными в P_{k+1}. Пары смежных состояний в P_k, которые при некотором входном символе переходят в разобщенные состояния в P_k, представляют собой k-эквивалентные состояния, первые преемники которых по отношению к некоторому входному символу являются k-различимыми. Поэтому такие смежные состояния являются $(k+1)$-различимыми и должны быть разобщенными в P_{k+1}. Два разобщенных состояния в P_k должны быть разобщенными также в P_{k+1}. Таким образом, P_{k+1} может быть определено по P_k делением состояний каждого класса P_k на подклассы таким образом, чтобы два состояния находились в одном и том же подклассе тогда и только тогда, когда их первые преемники по отношению к каждому входному символу являются смежными состояниями в P_k. Полученные подклассы являются классами P_{k+1}. Поскольку одноэлементные классы не могут быть разделены на подклассы, то такие классы P_k могут быть автоматически включены в P_{k+1}.

Рассмотрим, например, разбиение P_3 для автомата $A7$, приведенное в (3.2). Первые преемники состояний 1, 3 и 8 являются смежными в Σ_{32} при подаче α или β и в Σ_{31} при подаче γ. Первые преемники состояний 5 и 7 являются смежными в Σ_{33}, если приложен входной символ α, в Σ_{32}, если приложен символ β, и в Σ_{31}, если приложен символ γ. Следовательно, $\{1, 3, 8\}$ и $\{5, 6\}$ являются классами P_4. Первые преемники состояний 2 и 4 по отношению к каждому входному символу являются смежными состояниями в P_3; поэтому $\{2, 4\}$ являются классом P_4. Одноэлементные классы $\{6\}$ и $\{9\}$ переходят в P_4 без изменений. Полученное разбиение P_4 будет таким, как показано в (3.3).

Таким образом, мы описали правила для последовательного построения P_k для $k = 1, 2, 3, \ldots$ Если для каждого входного символа каждая пара смежных состояний P_k переходит в смежные состояния P_k, то никакое дальнейшее разбиение P_k невозможно и, следовательно, $P_k = \widehat{P}$. Описанные правила поэтому дают способ определения эквивалентного разбиения заданного автомата.

3.6. Разбиение при помощи таблиц P_k

За исключением простейших случаев, процесс определения эквивалентного разбиения заданного автомата путем исследования таблиц переходов, графов или матриц, по существу, невозможен.

В этом параграфе мы опишем метод, по которому разбиение может быть выполнено систематически путем построения серий так называемых *таблиц* P_k.

Таблица P_k заданного автомата, по существу, представляет собой то же, что и подтаблица $s_{\nu+1}$ для этого автомата со следующими отличиями: (1) Если $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_r}\}$ представляют собой класс P_k, то строки $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_r}$ группируются вместе, при этом каждая группа строк отделяется линией от соседних групп. Порядок групп в таблице и порядок строк в каждой группе произвольны. Строки, принадлежащие к одной и той же группе и, следовательно, представляющие класс k-эквивалентности, будем называть *смежными строками*; строки, принадлежащие к различным группам, будем называть *разобщенными строками*. (2) Добавляется столбец Σ, в котором указывается обозначение групп в таблице P_k. Обозначение групп произвольно и может выбираться независимо в каждой новой таблице P_k. (3) Каждое значение $s_{\nu+1}$ снабжается индексом, указывающим группу, к которой данное значение относится. Так, если строка σ_i находится в группе, обозначенной «a», то каждое значение σ_i в подтаблице $s_{\nu+1}$ снабжается индексом «a».

Таблицы 3.3—3.6 являются таблицами P_1, P_2, P_3 и P_4 для автомата $A7$, изображенного на рис. 3.3.

Построение таблицы P_1. Изменим порядок строк в таблице переходов таким образом, чтобы одинаковые строки в подтаблице z_ν стали соседними. Каждая группа таких строк соответствует классу 1-эквивалентности, и, следовательно, является группой смежных строк в таблице P_1. Теперь можно построить таблицу P_1 путем вычеркивания подтаблицы z_ν, разделения групп строк линиями, добавления столбца Σ и снабжения индексами значений $s_{\nu+1}$, как было описано выше. В качестве иллюстрации сошлемся на таблицы 3.2 и 3.3.

Построение таблицы P_{k+1} *по таблице* P_k $(k \geqslant 1)$. Две смежные строки в таблице P_k, имеющие во всех столбцах

Таблица 3.3

P_1 для автомата $A7$

		$s_{\nu+1}$		
Σ	x_ν / s_ν	α	β	γ
a	1 3 5 7 8	2_b 2_b 6_b 6_b 4_b	2_b 2_b 4_b 2_b 4_b	5_a 5_a 3_a 8_a 7_a
b	2 4 6 9	1_a 3_a 8_a 7_a	4_b 2_b 9_b 9_b	4_b 2_b 6_b 7_a

Таблица 3.4

P_2 для автомата $A7$

		$s_{\nu+1}$		
Σ	x_ν / s_ν	α	β	γ
a	1 3 5 7 8	2_b 2_b 6_b 6_b 4_b	2_b 2_b 4_b 2_b 4_b	5_a 5_a 3_a 8_a 7_a
b	2 4 6	1_a 3_a 8_a	4_b 2_b 9_c	4_b 2_b 6_b
c	9	7_a	9_c	7_a

Таблица 3.5

P_3 для автомата $A7$

		$s_{\nu+1}$		
Σ	x_ν / s_ν	α	β	γ
a	1 3 5 7 8	2_b 2_b 6_c 6_c 4_b	2_b 2_b 4_b 2_b 4_b	5_a 5_a 3_a 8_a 7_a
b	2 4	1_a 3_a	4_b 2_b	4_b 2_b
c	6	8_a	9_d	6_c
d	9	7_a	9_d	7_a

Таблица 3.6

P_4 для автомата $A7$

		$s_{\nu+1}$		
Σ	x_ν / s_ν	α	β	γ
a	1 3 8	2_b 2_b 4_b	2_b 2_b 4_b	5_c 5_c 7_c
b	2 4	1_a 3_a	4_b 2_b	4_b 2_b
c	5 7	6_d 6_d	4_b 2_b	3_a 8_a
d	6	8_a	9_e	6_d
e	9	7_c	9_e	7_c

одинаковые индексы, являются смежными в таблице P_{k+1}. Две смежные строки в таблице P_k, имеющие в некоторых столбцах различные индексы, являются разобщенными в таблице P_{k+1}. Разобщенные строки в таблице P_k являются также разобщенными в таблице P_{k+1}. Группа, состоящая из одной строки в таблице P_k, состоит из одной строки и в таблице P_{k+1}. Таким образом, группы таблицы P_{k+1} могут быть выявлены проверкой индексов в таблице P_k. После того как группы установлены, сама таблица может быть построена по описанному выше образцу. Приведенные здесь правила прямо вытекают из способа приписывания индексов и из описанных в § 3.5 условий определения P_{k+1} по P_k.

В качестве примера рассмотрим таблицу P_3 автомата $A7$, представленную таблицей 3.5. В группе «a» одинаковые индексы во всех столбцах имеют строки 1, 3 и 8 и строки 5 и 7. (Индексы в строках 5 и 7 отличаются от индексов в строках 1, 3 и 8.) Следовательно, строки 1, 3 и 8 и строки 5 и 7 образуют две группы строк в таблице P_4. В группе «b» все строки имеют одинаковые индексы во всех столбцах, поэтому группа без изменений остается в таблице P_4. Группы «c» и «d», содержащие по одной строке, могут быть перенесены без изменения в таблицу P_4.

Если известны способы построения таблицы P_1, а также таблицы P_{k+1} по таблице P_k ($k \geqslant 1$), то можно строить таблицы P_k для последовательных значений k до тех пор, пока не будет получена таблица, в которой все смежные строки имеют одинаковые индексы во всех столбцах. В основном столбце в этих смежных строках обозначены эквивалентные состояния, а следовательно, группы последних представляют собой искомые классы эквивалентности. Согласно теореме 3.5, это условие должно иметь место для некоторого значения $k \leqslant n-1$. Для автомата $A7$ этому условию удовлетворяет таблица P_4 (таблица 3.6).

Эквивалентное разбиение для $A7$ поэтому будет

$$P:\ \{1,\ 3,\ 8\},\ \{2,\ 4\},\ \{5,\ 7\},\ \{6\},\ \{9\}. \tag{3.9}$$

3.7. Разбиение при помощи таблицы пар

Определение эквивалентного разбиения автомата может быть произведено также с помощью так называемой *таблицы пар*. Разбиение выполняется последовательным изменением этой таблицы. В результате получается серия таблиц, k-я из которых называется *k-м вариантом* таблицы пар. В первоначальной таблице (в первом варианте таблицы пар) основной столбец, называемый *столбцом пар*, содержит все неупорядоченные пары 1-эквивалентных состояний $\{\sigma_i, \sigma_j\}$, где $i \neq j$. Кроме того, таблица имеет по столбцу на каждый символ ξ_h входного алфавита. В клетке таблицы, находящейся на пересечении строки $\{\sigma_i, \sigma_j\}$ и столбца ξ_h, записываются первые преемники σ_i и σ_j по отношению к ξ_h. Порядок расположения пар в столбце пар и порядок записи состояний в клетках таблицы произвольны. Таблица пар может быть построена непосредственно по таблице переходов, в которой 1-эквивалентными являются состояния, представляющие одинаковые строки в подтаблице z_ν. Таблица 3.7 представляет собой первый вариант таблицы пар автомата $A7$ (см. рис. 3.3).

В дальнейшем будем называть *отличающейся парой* пару неодинаковых состояний, записанную в клетке таблицы, а *выделенными строками* — такие строки, в которых пара в клетке основного столбца выделена жирным шрифтом.

Построение $(k+1)$-го варианта таблицы пар по k-му варианту $(k \geqslant 1)$. Рассмотрим каждую невыделенную строку в k-м варианте; сделаем строку выделенной, если в ней имеется отличающаяся пара, которая либо отсутствует в основном столбце пар, либо выделена жирным шрифтом в этом столбце. Таблица, полученная после рассмотрения последней невыделенной строки, будет $(k+1)$-м вариантом таблицы пар.

Лемма 3.11. *Невыделенные пары в клетках основного столбца в k-м варианте таблицы пар автомата M образуют все k-эквивалентные пары состояний автомата M.*

Доказательство. Для $k=1$ лемма справедлива по построению. Предположим, что она справедлива для k. Тогда невыделенная пара в клетке основного столбца представляет собой пару k-эквивалентных состояний. Эти состояния являются $(k+1)$-различимыми только тогда, когда их первые преемники по отношению, по крайней мере, к одному входному символу являются k-различимыми. Так как такими преемниками являются либо выделенные пары в клетках основного столбца, либо отличающиеся пары, отсутствующие в основном столбце (эти последние пары являются 1-различимыми, а следовательно и k-различимыми), то пары состояний, выделенные в процессе построения $(k+1)$-го варианта по k-му варианту, должны быть $(k+1)$-различимыми; пары в клетках основного столбца, оставшиеся невыделенными, должны быть $(k+1)$-эквивалентными. Поскольку невыделенные пары в k-м варианте представляют собой все k-эквивалентные пары состояний автомата M, то невыделенные пары в $(k+1)$-м варианте должны представлять собой все $(k+1)$-эквивалентные пары автомата M. Тогда, по индукции, лемма справедлива для всех $k \geqslant 1$.

Если k-й вариант является последним вариантом таблицы пар (т. е. вариантом, в котором все пары в клетках основного столбца выделены или в котором не может быть получено новых выделенных пар, то невыделенные пары в k-м варианте представляют собой все k-эквивалентные пары, где k может быть сделано сколь угодно большим. Эти пары поэтому являются всеми парами эквивалентных состояний заданного автомата. Согласно теореме 3.5, это может иметь место для некоторого значения $k \leqslant n-1$. Классы эквивалентности могут быть составлены из эквивалентных пар на основании того факта, что если $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_r}\}$ является классом эквивалентности, то $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}\}, \{\sigma_{i_2}, \sigma_{i_3}\}, \ldots, \{\sigma_{i_{r-1}}, \sigma_{i_r}\}$ являются эквивалентными парами. В частности, составление классов эквивалентности может быть выполнено с помощью следующего алгоритма.

Алгоритм 3.1. Дано множество всех эквивалентных пар состояний автомата M, $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{j_1}\}, \{\sigma_{i_2}, \sigma_{j_2}\}, \ldots, \{\sigma_{i_l}, \sigma_{j_l}\}$; требуется найти эквивалентное разбиение автомата M: (1) Пусть $k=1$ и $d=1$[1]. (2) Начнем рассмотрение с d-го класса эквивалентности, приписав к нему пару $\{\sigma_{i_k}, \sigma_{j_k}\}$. (3) (а). Если $k<l$, то увеличим k на 1 и перейдем к (4). (б). Если $k=l$, то d классов эквивалентности и одноэлементные классы, содержащие состояния, не включенные в какой-либо из d классов, образуют эквивалентное разбиение M. (4) (а) Если оба состояния в $\{\sigma_{i_k}, \sigma_{j_k}\}$ входят в какой-либо ранее рассмотренный класс, то вернемся к (3). (б) Если только одно из состояний $\{\sigma_{i_k}, \sigma_{j_k}\}$ входит в какой-нибудь ранее рас-

[1] k — номер пары, d — номер класса эквивалентности. (*Прим. перев.*)

смотренный класс, то добавим второе состояние пары в этот класс и вернемся к (3). (в) Если ни одно из состояний $\{\sigma_{i_k}, \sigma_{j_k}\}$ не входит ни в какой из ранее рассмотренных классов, то увеличим d на 1 и вернемся к (2).

Таблицы 3.7 — 3.10 иллюстрируют построение первых четырех вариантов таблиц пар автомата $A7$. Все построение может быть, конечно, выполнено на одной первоначальной таблице; ряд таблиц приведен только для того, чтобы показать последовательно шаги построения. Таблица 3.10 является таблицей пар в ее окончательной форме с эквивалентными парами $\{1,3\}$, $\{1,8\}$, $\{2,4\}$, $\{3,8\}$ и $\{5,7\}$, не выделенными жирным шрифтом в основном столбце. Применяя алгоритм 3.1,

Таблица 3.7

Таблица пар для автомата $A7$ (первый вариант)

Пары	α	β	γ	Пары	α	β	γ
1,3	2,2	2,2	5,5	3,7	2,6	2,2	5,8
1,5	2,6	2,4	3,5	3,8	2,4	2,4	5,7
1,7	2,6	2,2	5,8	4,6	3,8	2,9	2,6
1,8	2,4	2,4	5,7	4,9	3,7	2,9	2,7
2,4	1,3	2,4	2,4	5,7	6,6	2,4	3,8
2,6	1,8	4,9	4,6	5,8	4,6	4,4	3,7
2,9	1,7	4,9	4,7	6,9	7,8	9,9	6,7
3,5	2,6	2,4	3,5	7,8	4,6	2,4	7,8

Таблица 3.8

Таблица пар для автомата $A7$ (второй вариант)

Пары	α	β	γ	Пары	α	β	γ
1,3	2,2	2,2	5,5	3,7	2,6	2,2	5,8
1,5	2,6	2,4	3,5	3,8	2,4	2,4	5,7
1,7	2,6	2,2	5,8	4,6	3,8	2,9	2,6
1,8	2,4	2,4	5,7	**4,9**	3,7	2,9	2,7
2,4	1,3	2,4	2,4	5,7	6,6	2,4	3,8
2,6	1,8	4,9	4,6	5,8	4,6	4,4	3,7
2,9	1,7	4,9	4,7	**6,9**	7,8	9,9	6,7
3,5	2,6	2,4	3,5	7,8	4,6	2,4	7,8

Таблица 3.9

Таблица пар для автомата $A7$ (третий вариант)

Пары	α	β	γ	Пары	α	β	γ
1,3	2,2	2,2	5,5	3,7	2,6	2,2	5,8
1,5	2,6	2,4	3,5	3,8	2,4	2,4	5,7
1,7	2,6	2,2	5,8	**4,6**	3,8	2,9	2,6
1,8	2,4	2,4	5,7	**4,9**	3,7	2,9	2,7
2,4	1,3	2,4	2,4	5,7	6,6	2,4	3,8
2,6	1,8	4,9	4,6	5,8	4,6	4,4	3,7
2,9	1,7	4,9	4,7	**6,9**	7,8	9,9	6,7
3,5	2,6	2,4	3,5	7,8	4,6	2,4	7,8

Таблица 3.10

Таблица пар для автомата $A7$ (четвертый вариант)

Пары	α	β	γ	Пары	α	β	γ
1,3	2,2	2,2	5,5	**3,7**	2,6	2,2	5,8
1,5	2,6	2,4	3,5	3,8	2,4	2,4	5,7
1,7	2,6	2,2	5,8	**4,6**	3,8	2,9	2,6
1,8	2,4	2,4	5,7	**4,9**	3,7	2,9	2,7
2,4	1,3	2,4	2,4	5,7	6,6	2,4	3,8
2,6	1,8	4,9	4,6	**5,6**	4,6	4,4	3,7
2,9	1,7	4,9	4,7	**6,9**	7,8	9,9	6,7
3,5	2,6	2,4	3,5	**7,6**	4,6	2,4	7,8

получаем эквивалентное разбиение $\{1, 3, 8\}$, $\{2, 4\}$, $\{5, 7\}$, $\{6\}$ и $\{9\}$, совпадающее с приведенным в (3.9).

Метод разбиения с помощью таблицы пар по сравнению с методом P_k таблиц, описанным в § 3.6, имеет то преимущество, что нужно строить только одну таблицу; для автомата с n состояниями метод P_k таблиц может потребовать до $n-1$ различных таблиц. С другой стороны, каждая P_k таблица часто значительно меньше соответствующей таблицы пар и имеет дополнительное преимущество, состоящее в получении k-эквивалентных разбиений для каждого k, что полезно для многих задач.

3.8. Матричный метод разбиения

Метод разбиения, описываемый в настоящем параграфе, по существу, такой же, как метод, описанный в § 3.6; разница состоит в том, что операции производятся над матрицей переходов, а не над подтаблицей $s_{\nu+1}$. Хотя метод матричного разбиения не имеет преимуществ по сравнению с методами, описанными выше, он дает новую и полезную интерпретацию понятия классов эквивалентности.

Симметрической перестановкой относительно матрицы называется перестановка строк и столбцов матрицы по одному и тому же правилу. Следовательно, если обозначения, присвоенные строкам и столбцам матрицы $[M]$, симметричны относительно главной диагонали, то эти обозначения будут симметричными в любой симметрической перестановке этой матрицы. *Симметрическое разбиение* $[M]$ представляет собой разделение групп строк и столбцов пунктирными линиями таким образом, что если имеется пунктирная линия, разделяющая строки σ_i и σ_j, то имеется также пунктирная линия, разделяющая столбцы σ_i и σ_j, и наоборот.

Матрица $[M]^{(k)}$ для автомата M является матрицей $[M]$, в которой симметрическая перестановка и симметрическое разбиение обладают следующими свойствами: строки (и столбцы), соответствующие смежным состояниям P_k, сгруппированы вместе, а каждая группа отделена от соседних групп пунктирными линиями; порядок групп в матрице и порядок строк (столбцов) в каждой группе произвольны; если P_k содержит r_k классов, то симметрическое разбиение образует r_k рядов подматриц с r_k подматрицами в каждом ряду.

Построение матрицы $M(1)$. Сгруппируем строки матрицы $[M]$ так, чтобы две строки принадлежали к одной и той же группе тогда и только тогда, когда они образуют одинаковые множества пар вход-выход. Каждая такая группа представляет собой класс 1-эквивалентности. Производя симметрическую перестановку и симметрическое разбиение $[M]$ в соответствии с правилами, описанными выше, получим $[M]^{(1)}$. Примером матрицы переходов является матрица (3.10) автомата $A7$ (рис. 3.3). Строки 1, 3, 5, 7 и 8 в $[A7]$ представляют пары вход-выход $(\alpha/1)$, $(\beta/0)$ и $(\gamma/0)$. Строки 2, 4, 6 и 9 представляют пары вход-выход $(\alpha/0)$, $(\beta/1)$ и $(\gamma/1)$. Тогда матрица $[A7]^{(1)}$ строится группировкой строк (и столбцов)

1, 3, 5, 7 и 8 и строк (и столбцов) 2, 4, 6 и 9, при этом группы разделяются пунктирной линией. Матрицей $[A7]^{(1)}$, полученной в результате этих операций, является матрица (3.11).

Построение матрицы $[M]^{(k+1)}$ *по* $[M]^{(k)}$ $(k \geqslant 1)$. Пусть σ_i и σ_j — две строки в одной и той же группе строк $[M]^{(k)}$. Если в каждой из подматриц, пересеченных строками σ_i и σ_j, строки σ_i и σ_j имеют одинаковые множества пар вход-выход, то σ_i и σ_j представляют собой k-эквивалентные состояния, первые преемники которых по отношению к любому входному символу являются k-эквивалентными, поэтому состояния σ_i и σ_j являются $(k+1)$-эквивалентными. Если эти условия не имеют места, то σ_i и σ_j являются $(k+1)$-различимыми. Таким образом, матрица $[M]^{(k+1)}$ может быть построена по $[M]^{(k)}$, если разделить каждую группу строк в $[M]^{(k)}$ на подгруппы так, чтобы две строки принадлежали одной и той же подгруппе тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые пары вход-выход в каждой из пересекаемых ими подматриц r_k. Каждая такая группа представляет собой $(k+1)$-эквивалентный класс. Произведя симметрическую перестановку и симметрическое разбиение матрицы $[M]^{(k)}$, получим в результате $[M]^{(k+1)}$. Например, строки 1, 3, 5, 7 и 8 в $[A7]^{(1)}$ имеют одинаковые множества пар вход-выход в каждой подматрице, которую они пересекают. С другой стороны, строки 2, 4 и 6 образуют в пересекаемых подматрицах множества пар вход-выход, которые отличаются от множества пар вход-выход, образованного строкой 9. Следовательно, строки 2, 4 и 6 и строка 9 дают две различные группы в $[A7]^{(2)}$, как показано в (3.12).

Матрица $[M]^{(k)}$ дает эквивалентное разбиение тогда, когда никакое дальнейшее разбиение не может быть произведено (т. е. когда каждая подматрица имеет одну строку и один столбец или когда строки внутри каждой подматрицы имеют одинаковые множества пар вход-выход). При этих условиях различные группы строк (или столбцов) являются классами k-эквивалентности, где k может быть сделано сколь угодно большим; поэтому эти группы представляют собой классы эквивалентности автомата M. Согласно теореме 3.5, это может иметь место для некоторого значения $k \leqslant n-1$.

$$[A7] =$$

$$= \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} & \left[\begin{array}{ccccccccc} 0 & (\alpha/1) \vee (\beta/0) & 0 & 0 & (\gamma/0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (\alpha/0) & 0 & 0 & (\beta/1) \vee (\gamma/1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\alpha/1) \vee (\beta/0) & 0 & 0 & (\gamma/0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\beta/1) \vee (\gamma/1) & (\alpha/0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\gamma/0) & (\beta/0) & 0 & (\alpha/1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\gamma/1) & 0 & (\alpha/0) & (\beta/1) \\ 0 & (\beta/0) & 0 & 0 & 0 & (\alpha/1) & 0 & (\gamma/0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\alpha/1) \vee (\beta/0) & 0 & 0 & (\gamma/0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\alpha/0) \vee (\gamma/1) & 0 & (\beta/1) \end{array} \right] \end{array} . \tag{3.10}$$

$$[A7]^{(1)} =$$

$$= \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 3 & 5 & 7 & 8 & 2 & 4 & 6 & 9 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \\ 9 \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc|cccc} 0 & 0 & (\gamma/0) & 0 & 0 & (\alpha/1) \vee (\beta/0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\gamma/0) & 0 & 0 & (\alpha/1) \vee (\beta/0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\gamma/0) & & 0 & 0 & 0 & (\beta/0) & (\alpha/1) & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & (\gamma/0) & (\beta/0) & 0 & (\alpha/1) & 0 \\ 0 & 0 & & (\gamma/0) & 0 & 0 & (\alpha/0) \vee (\beta/0) & 0 & 0 \\ \hline (\alpha/0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\beta/1) \vee (\gamma/1) & 0 & 0 \\ 0 & (\alpha/0) & 0 & 0 & 0 & (\beta/1) \vee (\gamma/1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\alpha/0) & 0 & 0 & (\gamma/1) & (\beta/1) \\ 0 & 0 & 0 & (\alpha/0) \vee (\gamma/1) & 0 & 0 & 0 & 0 & (\beta/1) \end{array} \right] \end{array} . \tag{3.11}$$

Матрицы (3.10)—(3.14) иллюстрируют описываемый метод эквивалентного разбиения автомата $A7$. Матрица $[A7]^{(4)}$ дальнейшее разбиение которой невозможно, очевидно, содержит эквивалентное разбиение $\{1, 3, 8\}$, $\{2, 4\}$, $\{5, 7\}$, $\{6\}$ и $\{9\}$, совпадающее с разбиением (3.9).

$$[A7]^{(2)} =$$

$$= \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 3 & 5 & 7 & 8 & 2 & 4 & 6 & 9 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \\ 9 \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc|cccc} 0 & 0 & (\gamma/0) & 0 & 0 & (\alpha/1) \vee (\beta/0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\gamma/0) & 0 & 0 & (\alpha/1) \vee (\beta/0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\gamma/0) & 0 & 0 & 0 & 0 & (\beta/0) & (\alpha/1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\gamma/0) & (\beta/0) & 0 & (\alpha/1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\gamma/0) & 0 & 0 & (\alpha/1) \vee (\beta/0) & 0 & 0 \\ \hline (\alpha/0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\beta/1) \vee (\gamma/1) & 0 & 0 \\ 0 & (\alpha/0) & 0 & 0 & 0 & (\beta/1) \vee (\gamma/1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\alpha/0) & 0 & 0 & (\gamma/1) & (\beta/1) \\ \hline 0 & 0 & 0 & (\alpha/0) \vee (\gamma/1) & 0 & 0 & 0 & 0 & (\beta/1) \end{array} \right] \end{array} . \tag{3.12}$$

$$[A7]^{(3)} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccc} 1 & 3 & 5 & 7 & 8 & 2 & 4 & 6 & 9 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \\ 9 \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc:cc:c:c} 0 & 0 & (\gamma/0) & 0 & 0 & (\alpha/1) \vee (\beta/0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\gamma/0) & 0 & 0 & (\alpha/1) \vee (\beta/0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\gamma/0) & 0 & 0 & 0 & 0 & (\beta/0) & (\alpha/1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\gamma/0) & (\beta/0) & 0 & (\alpha/1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\gamma/0) & 0 & 0 & (\alpha/1) \vee (\beta/0) & 0 & 0 \\ \hdashline (\alpha/0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\beta/1) \vee (\gamma/1) & 0 & 0 \\ 0 & (\alpha/0) & 0 & 0 & 0 & (\beta/1) \vee (\gamma/1) & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & (\alpha/0) & 0 & 0 & (\gamma/1) & (\beta/1) \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & (\alpha/0) \vee (\gamma/1) & 0 & 0 & 0 & 0 & (\beta/1) \end{array}\right] \end{array} . \qquad (3.13)$$

$$[A7]^{(4)} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccc} 1 & 3 & 8 & 2 & 4 & 5 & 7 & 6 & 9 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \\ 6 \\ 9 \end{array} & \left[\begin{array}{ccc|cc|cc|c|c} 0 & 0 & 0 & (\alpha/1) \vee (\beta/0) & 0 & (\gamma/0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\alpha/1) \vee (\beta/0) & 0 & (\gamma/0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\alpha/1) \vee (\beta/0) & 0 & (\gamma/0) & 0 & 0 \\ \hline (\alpha/0) & 0 & 0 & 0 & (\beta/1) \vee (\gamma/1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\alpha/0) & 0 & (\beta/1) \vee (\gamma/1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & (\gamma/0) & 0 & 0 & (\beta/0) & 0 & 0 & (\alpha/1) & 0 \\ 0 & 0 & (\gamma/0) & (\beta/0) & 0 & 0 & 0 & (\alpha/1) & 0 \\ \hline 0 & 0 & (\alpha/0) & 0 & 0 & 0 & 0 & (\gamma/1) & (\beta/1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\alpha/0) \vee (\gamma/1) & 0 & (\beta/1) \end{array}\right] \end{array} . \qquad (3.14)$$

3.9. Эквивалентность автоматов

Понятие эквивалентности можно распространить на весь автомат с помощью следующих определений:

Определение 3.3. Говорят, что автомат M_1 и автомат M_2 *эквивалентны*, если каждому состоянию σ_i автомата M_1 соответствует, по крайней мере, одно эквивалентное ему состояние в автомате M_2 и если каждому состоянию σ_j автомата M_2 соответствует, по крайней мере, одно эквивалентное ему состояние в автомате M_1 Если автоматы M_1 и M_2 не эквивалентны, то они *различимы*.

Таким образом, M_1 и M_2 являются эквивалентными тогда и только тогда, когда, наблюдая сигналы на их выходах, нельзя отличить автомат M_1 в любом из его состояний от автомата M_2 и автомат M_2 в любом из его состояний от автомата M_1.

Автоматы M_1 и M_2 являются различимыми тогда и только тогда, когда имеется, по крайней мере, одно состояние в M_1, которое не является эквивалентным никакому состоянию в M_2 или если имеется, по крайней мере, одно состояние в M_2, которое не является эквивалентным никакому состоянию в M_1.

Эквивалентность автоматов M_1 и M_2 обозначается равенством $M_1 = M_2$, а различимость автоматов M_1 и M_2 — неравенством $M_1 \neq M_2$. Пользуясь определением 3.3 легко показать, что эквивалентность автоматов обладает свойством рефлексивности ($M_i = M_i$), свойством симметричности (если $M_i = M_j$, то $M_j = M_i$) и свойством транзитивности (если $M_i = M_j$ и $M_j = M_k$, то $M_i = M_k$). Следовательно, эквивалентность автоматов может рассматриваться как обычное отношение эквивалентности и применяться непосредственно к множествам автоматов любой мощности. С другой стороны, различимость автоматов не обладает свойствами рефлексивности и транзитивности и поэтому может относиться только к паре автоматов.

Определение эквивалентности автоматов означает, что два

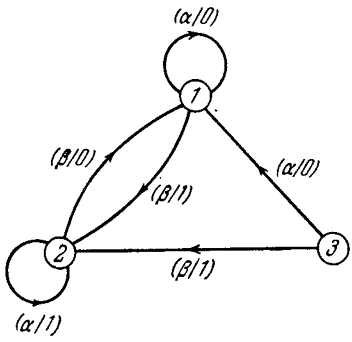


Рис. 3.5. Автомат $A8$.

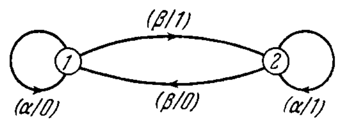


Рис. 3.6. Автомат $A9$.

автомата, имеющих одинаковые таблицы переходов (или графы или матрицы), должны быть эквивалентны. Кроме того, поскольку эквивалентность или различимость пары состояний не зависит от обозначений состояний, то два изоморфных автомата также должны быть эквивалентными.

Автоматы $A8$ и $A9$, изображенные на рис. 3.5 и 3.6 соответственно, представляют собой два эквивалентных автомата. В этом можно убедиться, если обратить внимание на то, что $A9$ становится автоматом $A8$, если не учитывать состояние 3 автомата $A8$. Следовательно, состояния 1 и 2 автомата $A8$ эквивалентны соответственно состояниям 1 и 2 автомата $A9$. Кроме того, состояния 1 и 3 автомата $A8$ явно эквивалентны и, следовательно, эквивалентны; поэтому состояние 3 $A8$ эквивалентно состоянию 1 $A9$. Таким образом, для каждого состояния $A8$ мы находим эквивалентное состояние $A9$ и для каждого состояния $A9$ находим эквивалентное состояние $A8$. Это означает, что $A8$ и $A9$ являются эквивалентными автоматами.

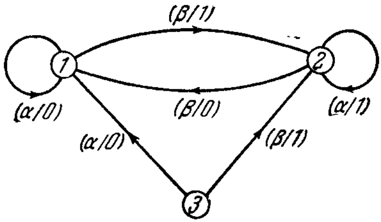


Рис. 3.7. Автомат $A10$.

Сравнивая автомат $A9$ с автоматом $A10$, изображенным на рис. 3.7, можно заметить, что $A9$ становится одинаковым с $A10$, если не учитывать состояние 3 $A10$; следовательно, для каждого состояния $A9$ мы находим эквивалентное состояние $A10$. Однако, поскольку пары состояний $\{1, 3\}$ и $\{2, 3\}$ являются явно различимыми и, следовательно, различимыми, утверждение, обратное последнему, не верно. Поэтому $A9$ и $A10$ не являются эквивалентными.

3.10. Эквивалентное разбиение множеств автоматов

Эквивалентное разбиение автомата, состоящего из множества автоматов $\mathfrak{M} = \{M_1, M_2, \ldots, M_N\}$, представляет собой разбиение $\mathfrak{M}$ на классы таким образом, что два автомата принадлежат одному и тому же классу тогда и только тогда, когда они являются эквивалентными. Каждый класс автоматов в этом разбиении называется *классом эквивалентных автоматов*. Очевидно, что автоматы не могут быть эквивалентными, если они несравнимы. Следовательно, до разбиения на классы эквивалентных автоматов множество $\mathfrak{M}$ следует сначала разбить на подмножества таким образом, чтобы два автомата относились к одному и тому же подмножеству тогда и только тогда, когда они сравнимы. Впоследствии каждое подмножество может индивидуально подвергаться дальнейшему разбиению. Поскольку разбиение множества автоматов в соответствии с их входным алфавитом является тривиальной задачей, то потеря общности будет незначительной, если мы предположим, что все автоматы в $\mathfrak{M}$ сравнимы. При таком допущении можно построить расщепляемый автомат $\Delta(M_1, M_2, \ldots, M_N)$ так, как было описано в § 2.7. Разбиение автомата $\Delta(M_1, M_2, \ldots, M_N)$ на обычные классы эквивалентности любым из описанных в §§ 3.6—3.8 способов, выявляет, являются ли любые два автомата M_i и M_j из множества $\mathfrak{M}$ эквивалентными. Действительно, по определению 3.3, M_i и M_j являются эквивалентными, если каждый класс эквивалентности, который содержит состояние автомата M_i, также содержит состояние автомата M_j и если каждый класс эквивалентности, который содержит состояние автомата M_j содержит также состояние автомата M_i; в противном случае M_i и M_j являются различимыми. Когда определены все пары эквивалентных автоматов из множества $\mathfrak{M}$, эквивалентное разбиение автоматов из $\mathfrak{M}$ может быть произведено с помощью алгоритма, аналогичного алгоритму 3.1 (в котором теперь рассматриваются не состояния, а автоматы).

В случаях, когда число автоматов N велико, определение классов эквивалентности автоматов облегчается построением так называемой *таблицы эквивалентности* для расщепляемого автомата $\Delta(M_1, M_2, \ldots, M_N)$. Эта таблица имеет строку для каждого класса эквивалентности автомата $\Delta(M_1, M_2, \ldots$ $\ldots, M_N)$ и столбец для каждого автомата M_i из множества $\mathfrak{M}$. Общий вид таблицы эквивалентности показан в таблице 3.11. Клетки таблицы эквивалентности заполняются в соответствии со следующим правилом: в клетке, где пересекаются строка $\{\sigma_{h_1}, \sigma_{h_2}, \ldots, \sigma_{hr_h}\}$ и столбец M_i, ставится 1, если какое-нибудь состояние в классе эквивалентности $\{\sigma_{h_1}, \sigma_{h_2}, \ldots, \sigma_{hr_h}\}$ принадлежит автомату M_i, и 0 — в противном случае. Таким образом, M_i и M_j являются эквивалентными тогда и только тогда, когда столбцы M_i и M_j являются одинаковыми во всех строках таблицы эквивалентности. Поэтому эквивалентное разбиение автоматов приводит к разбиению столбцов таблицы эквивалентности на подмножества таким образом, что два столбца принадлежат одному и тому же подмножеству в том и только в том случае, если они одинаковы во всех строках. Разбиение столбцов может быть выполнено вручную даже для большого числа N, при этом сразу получается эквивалентное разбиение автоматов без составления перечня всех пар эквивалентных автоматов.

Таблица 3.11

Таблица эквивалентности для автомата Δ (M_1, M_2, ..., M_N)

Класс	Автомат			
	M_1	M_2	...	M_N
$\sigma_{11}, \sigma_{12}, \ldots, \sigma_{1r_1}$	В клетках проставляются 0 или 1			
$\sigma_{21}, \sigma_{22}, \ldots, \sigma_{2r_2}$				
. . . .				
$\sigma_{l1}, \sigma_{l2}, \ldots, \sigma_{lr_l}$				

Для иллюстрации, на рис. 3.8 приведены автоматы $A11$, $A12$, $A13$ и $A14$, объединенные в один расщепляемый автомат $\Delta(A11, A12, A13$ и $A14)$.

Таблица 3.12

Автомат Δ ($A11$, $A12$, $A13$, $A14$)

$s_\nu \backslash x_\nu$	z_ν α	z_ν β	$s_{\nu+1}$ α	$s_{\nu+1}$ β	$s_\nu \backslash x_\nu$	z_ν α	z_ν β	$s_{\nu+1}$ α	$s_{\nu+1}$ β
1	0	1	2	3	7	0	1	6	6
2	1	1	2	4	8	1	0	9	10
3	1	1	2	1	9	0	1	10	10
4	0	1	2	3	10	1	1	10	9
5	0	1	6	6	11	1	1	11	12
6	1	1	6	5	12	0	1	11	11

Таблица переходов для этого расщепляемого автомата представлена в таблице 3.12. Применение любого из методов эквивалентного разбиения, описанных в §§ 3.6—3.8, показывает,

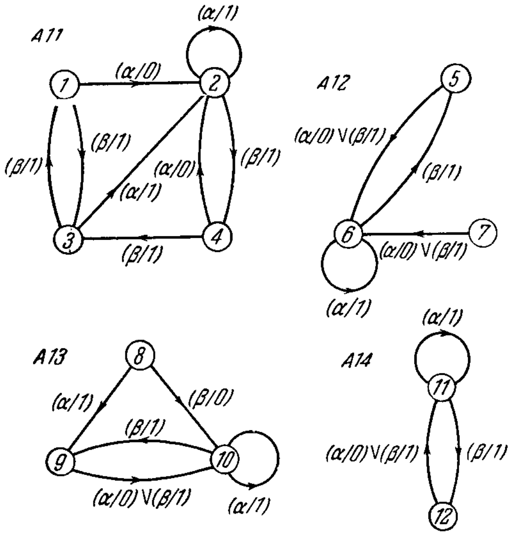


Рис. 3.8. Автомат Δ (*A*11, *A*12, *A*13, *A*14).

что для $\Delta(A11, A12, A13, A14)$ классами эквивалентности являются $\{1, 4, 5, 7, 9, 12\}$, $\{2, 3, 6, 10, 11\}$ и $\{8\}$.

Таблица 3.13 представляет собой таблицу эквивалентности для $\Delta(A11, A12, A13, A14)$, которая показывает, что

Таблица 3.13

Таблица эквивалентности для Δ (*A*11, *A*12, *A*13, *A*14)

Класс	Автомат			
	*A*11	*A*12	*A*13	*A*14
1, 4, 5, 7, 9, 12	1	1	1	1
2, 3, 6, 10, 11	1	1	1	1
8	0	0	1	0

эквивалентным разбиением автоматов для множества автоматов $\{A11, A12, A13, A14\}$ является $\{A11, A12, A14\}$ и $\{A13\}$.

Заметим, что в процессе эквивалентного разбиения автоматов мы получаем также обычное эквивалентное разбиение каждого автомата из заданного множества. Например, эквивалентное разбиение $\Delta(A11, A12, A13, A14)$, как видно из таблицы 3.13, показывает, что эквивалентное разбиение $A11$ есть $\{1, 4\}$ и $\{2, 3\}$, эквивалентное разбиение $A12$ — $\{5, 7\}$ и $\{6\}$, эквивалентное разбиение $A13$ — $\{8\}$, $\{9\}$ и $\{10\}$ и эквивалентное разбиение $A14$ — $\{11\}$ и $\{12\}$.

3.11. Минимальная форма

Пусть M — автомат с $\breve{n}$ эквивалентными классами, обозначенными $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_{\breve{n}}$, и пусть $\sigma^{(l)}$ представляет собой какое-нибудь состояние в Σ_l. *Минимальная форма* автомата M, обозначаемая через $\breve{M}$, представляет собой автомат с $\breve{n}$ состояниями, образующими множество $\{\sigma'_1, \sigma'_2, \ldots, \sigma'_{\breve{n}}\}$. Минимальный автомат строится из M следующим образом. Обозначим характеристические функции автомата M через f_z и f_s, а автомата $\breve{M}$ через $\breve{f}_z$ и $\breve{f}_s$; тогда, если

$$f_z(\xi_l, \sigma^{(u)}) = \zeta_j \quad \text{и} \quad f_s(\xi_l, \sigma^{(u)}) = \sigma^{(v)},$$

то

$$\breve{f}_z(\xi_l, \sigma'_u) = \zeta_j \quad \text{и} \quad \breve{f}_s(\xi_l, \sigma'_u) = \sigma'_v. \tag{3.15}$$

Заметим, что если при приложении ξ_l к M в определенном состоянии из Σ_u вырабатывается выходной символ ζ_j, то при приложении ξ_l в *любом* состоянии из Σ_u также вырабатывается выходной символ ζ_j. Аналогично, если при приложении ξ_l к M в некотором состоянии из Σ_u M переходит в состояние, принадлежащее Σ_v, то при приложении ξ_l в *любом* состоянии из Σ_u M переходит в состояние, принадлежащее Σ_v. Таким образом, при построении $\breve{M}$ по условию (3.15) не возникает никакой неопределенности вследствие того, что $\sigma^{(u)}$ является произвольным состоянием, принадлежащим классу Σ_u, и что $\sigma^{(v)}$ является произвольным состоянием, принадлежащим классу Σ_v.

Процесс отыскания минимальной формы автомата называется *минимизацией автомата.* Минимизация автомата M состоит в определении эквивалентного разбиения M и в последующем применении (3.15) для построения $\breve{M}$. Так как при применении (3.15) все состояния M, принадлежащие одному и тому же классу эквивалентности, дают один и тот же результат, то индивидуальное распознавание каждого состояния становится ненужным; для целей минимизации важно распознавание класса, к которому принадлежит каждое состояние. Поэтому всем состояниям M, принадлежащим классу эквивалентности Σ_l, можно приписать общее обозначение, например, σ_l'. После этого (3.15) может быть интерпретировано как формулировка того, что автомат $\breve{M}$ получается из автомата M путем «объединения» одинаково обозначенных состояний в одно состояние. Способы, которыми это объединение производится, существенно зависят от того, каким образом определен автомат — таблицей, графом или матрицей. Эти способы будут описаны ниже. Хотя понимание этих способов облегчается благодаря предшествующей интуитивной интерпретации условия (3.15), их справедливость не зависит от этой интерпретации и вытекает непосредственно из самого условия.

Таблица переходов $\breve{M}$. Если заданы таблица переходов и эквивалентное разбиение $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_{\breve{n}}$ автомата M, то таблица переходов автомата M может быть построена следующим образом: (1) заменим обозначение каждого состояния, которое имеется в таблице переходов M, на обозначение класса, которому данное состояние принадлежит; (2) из каждой группы строк с одинаковыми обозначениями в клетках основного столбца (все такие строки являются одинаковыми в обеих подтаблицах z_ν и $s_{\nu+1}$) вычеркнем все строки, кроме одной. Полученная при этом таблица является таблицей переходов M.

Например, автомат $A7$, представленный таблицей 3.2, имеет классы эквивалентности $\{1, 3, 8\}$, $\{2, 4\}$, $\{5, 7\}$, $\{6\}$ и $\{9\}$. Обозначим их произвольно 1, 2, 3, 4 и 5 соответственно. Делая первый шаг процедуры, заменим каждое обозначение «1», «3», и «8» в основном столбце и в $s_{\nu+1}$ подтаблице таблицы 3.2 на «1», каждое «2» и «4»—на «2», «5» и «7» — на «3», «6» — на «4», «9» — на «5». Полученная в результате таблица переходов приведена в таблице 3.14. Вычеркивание всех повторяющихся строк дает таблицу переходов $\breve{A}7$, показанную в таблице 3.15.

Таблица 3.14

Шаг 1 при построении таблицы переходов для автомата $\breve{A}7$

	z_ν			$s_{\nu+1}$				z_ν			$s_{\nu+1}$		
s_ν \ x_ν	α	β	γ	α	β	γ	s_ν \ x_ν	α	β	γ	α	β	γ
1	1	0	0	2	2	3	4	0	1	1	1	5	4
2	0	1	1	1	2	2	3	1	0	0	4	2	1
1	1	0	0	2	2	3	1	1	0	0	2	2	3
2	0	1	1	1	2	2	5	0	1	1	3	5	3
3	1	0	0	4	2	1							

Таблица 3.15

Автомат $\breve{A}7$

	z_ν			$s_{\nu+1}$				z_ν			$s_{\nu+1}$		
s_ν \ x_ν	α	β	γ	α	β	γ	s_ν \ x_ν	α	β	γ	α	β	γ
1	1	0	0	2	2	3	4	0	1	1	1	5	4
2	0	1	1	1	2	2	5	0	1	1	3	5	3
3	1	0	0	4	2	1							

Граф переходов $\breve{M}$. Если заданы граф переходов и эквивалентное разбиение $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_{\breve{n}}$ автомата M, то граф переходов автомата $\breve{M}$ может быть построен следующим образом: (1) заменим обозначение каждого состояния, которое имеется в графе переходов M, на обозначение класса, к которому относится данное состояние; (2) объединим все одинаково обозначенные состояния (рассматривая дуги графа как «гибкие связи») и представим объединенные состояния одним состоянием, имеющим общее обозначение; (3) из каждой группы дуг, имеющих общее исходное состояние и общее конечное состояние (все такие дуги обозначены одинаково), вычеркнем все, кроме одной. Полученный в результате граф будет графом $\breve{M}$.

В качестве примера на рис. 3.9 приведен граф переходов автомата $\breve{A}7$, полученный в результате применения описанной выше процедуры к графу переходов, изображенному на рис. 3.3. Использованные здесь обозначения классов эквивалентности $A7$ те же, что были использованы при построении таблицы переходов.

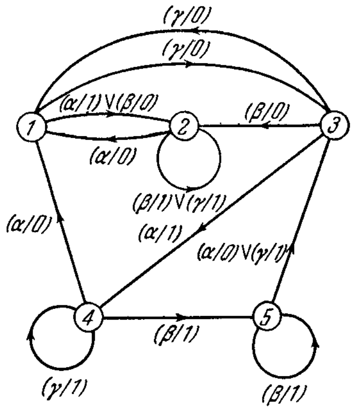


Рис. 3.9. Автомат $\breve{A}7$.

Матрица переходов $\breve{M}$. Если заданы матрица переходов и классы эквивалентности $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_{\breve{n}}$ автомата M, то матрица переходов автомата $\breve{M}$ может быть построена следующим образом: (1) произведем симметрическую перестановку и симметрическое разбиение $[M]$, так чтобы строки (и столбцы) группировались соответственно классам эквивалентности M (в результате получим матрицу такую же, как окончательная матрица $[M]^{(k)}$, получаемая при матричном методе эквивалентного разбиения); (2) заменим все обозначения строк (и столбцов) каждой группы, представляющей класс эквивалентности, одним обозначением этого класса; (3) заменим каждую подматрицу в разбитой матрице одной клеткой, содержащей все пары вход-выход, которые имеются в любой строке этой подматрицы (все строки в любой такой подматрице содержат одно и то же множество пар вход-выход). Полученная в результате матрица будет матрицей переходов $\breve{M}$.

В качестве примера приведена матрица (3.16), представляющая собой матрицу переходов $\breve{A}7$, построенную по показанной в (3.14) матрице $[A7]^{(4)}$. Использованные здесь обозначения классов эквивалентности $A7$ те же, что при построении таблицы переходов

$$\breve{A}7=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{array}\\ \begin{bmatrix} 0 & (\alpha/1)\vee(\beta/0) & \gamma/0) & 0 & 0\\ (\alpha/0) & (\beta/1)\vee(\gamma/1) & 0 & 0 & 0\\ (\gamma/0) & (\beta/0) & 0 & (\alpha/1) & 0\\ (\alpha/0) & 0 & 0 & (\gamma/1) & (\beta/1)\\ 0 & 0 & (\alpha/0)\vee(\gamma/1) & 0 & (\beta/1)\end{bmatrix}\end{array}. \qquad (3.16)$$

3.12. Свойства минимальной формы

В дальнейшем будем говорить, что автомат M_1 *меньше* или *больше* M_2 в зависимости от того, имеет M_1 соответственно меньшее или большее число состояний по сравнению с M_2.

Теорема 3.6. *Если* $\breve{M}$ *является минимальной формой автомата* M, *то*: (а) $\breve{M}$ *является единственной минимальной формой с точностью до изоморфизма*[1]); (б) $\breve{M}=M$; (в) *никакие два состояния в* $\breve{M}$ *не являются эквивалентными*; (г) *не существует автомата, эквивалентного* M *и меньшего, чем* $\breve{M}$.

Доказательство. (а) По лемме 3.5 P_k является единственным для любого $k\geqslant 1$ и, следовательно, $P_{n-1}=\hat{P}$ является единственным. Так как при определенном $\hat{P}$ построение $\breve{M}$ из M является единственным, не учитывая обозначения, то $\breve{M}$ является единственным с точностью до изоморфизма. (б) Рассмотрим какую-нибудь входную последовательность $\xi_{i_1}\xi_{i_2}\ldots\xi_{i_l}$, приложенную к $M|\sigma^{(u)}$. Пусть соответствующая последовательность состояний будет $\sigma^{(u_1)}$, $\sigma^{(u_2)}$, ..., $\sigma^{(u_l)}$ и соответствующая выходная последовательность будет $\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\ldots\zeta_{j_l}$. Теперь пусть та же входная последовательность приложена к $\breve{M}|\sigma'_u$. По условию (3.15), на основании которого строится $\breve{M}$ по M, соответствующая последовательность состояний должна быть σ'_{u_1}, σ'_{u_2}, ..., σ'_{u_l} и соответствующая выходная последовательность должна

[1]) То есть с точностью до обозначения состояний.

быть $\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\ldots\zeta_{j_l}$. Поскольку в приведенных рассуждениях l и u являются произвольными, то, следовательно, любое состояние M, принадлежащее классу эквивалентности Σ_u, является эквивалентным состоянию σ'_u автомата $\breve{M}$. Таким образом, для каждого состояния M мы находим эквивалентное состояние $\breve{M}$ и для каждого состояния $\breve{M}$ находим эквивалентное состояние M, что означает, что $\breve{M}=M$. (в) Пусть σ'_u и σ'_v являются двумя любыми состояниями $\breve{M}$ $(u \neq v)$.

Из доказательства части (б) следует, что σ_u эквивалентно состояниям M, принадлежащим классу эквивалентности Σ_u, а σ'_v эквивалентно состояниям M, принадлежащим классу эквивалентности Σ_v. Так как ни одно состояние из класса Σ_u не эквивалентно никакому состоянию из класса Σ_v, то состояния σ'_u и σ'_v автомата $\breve{M}$ должны быть различимыми. (г) Предположим, что имеется автомат M', эквивалентный M и меньший $\breve{M}$. Так как $\breve{M}=M$ и $M'=M$, то это значит, что $M'=\breve{M}$ и что каждое состояние $\breve{M}$ является эквивалентным некоторому состоянию M'. Так как $\breve{M}$ больше, чем M', то имеются, по крайней мере, два состояния $\breve{M}$, которые эквивалентны одному и тому же состоянию M' и, следовательно, эквивалентны друг другу. Однако, согласно части (в) теоремы, это невозможно, что доказывает от противного тот факт, что не существует автомата, эквивалентного M, и меньшего, чем $\breve{M}$.

Автомат, который является своей минимальной формой и потому не имеет эквивалентного себе меньшего автомата, называется *минимальным автоматом*. Автомат, имеющий n состояний и n классов эквивалентности, в котором, следовательно, все пары состояний различимы, является минимальным автоматом. Из теоремы 3.6 следует, что если задан какой-либо автомат M, то мы можем найти минимальный автомат $\breve{M}$, эквивалентный M и являющийся единственным с точностью до изоморфизма. Этот вывод является исключительно важным, поскольку он говорит нам, что каждый автомат имеет некоторое «каноническое» представление, независящее от способа задания исходного автомата. Действительно в общем случае существует ряд способов, которыми автомат может быть описан (особенно если это сделано устно), и оказывается, что все это многообразие описаний может быть, в конце концов, сведено к некоторому стандартному представлению. Более того, из сделанного вывода следует, что стандартное представление является наиболее компактным в смысле числа используемых состояний. Если вследствие недостатка опыта или изобретательности у исследователя начальное представление получается сильно избыточным, то имеется прямой способ уменьшить избыточность до предела и получить минимальное представление.

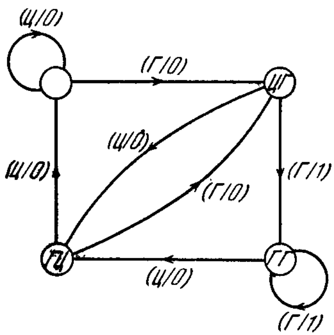


Рис. 3.10. Автомат $A15$.

Чтобы проиллюстрировать сказанное, рассмотрим следующую игру: монета подбрасывается многократно; очко засчитывается при ν-м подбрасывании, если при $(\nu-2)$-м, $(\nu-1)$-м и ν-м подбрасывании выпадают соответственно: цифра, герб, герб или герб, герб, герб; в других случаях очко не засчитывается. Обозначив «герб» буквой «Г», а «цифру» — буквой «Ц», «очко» — «1», а «отсутствие очка» — «0», мы можем выбрать следующие входной алфавит, выходной алфавит и множество состояний:

$$X=\{\text{Г, Ц}\},$$

$$Z=\{0,\ 1\},$$

$$S=\{\text{ЦЦ, ЦГ, ГЦ, ГГ}\},$$

где указанные четыре состояния отождествляются со всеми возможными исходами при $(\nu-2)$-м и $(\nu-1)$-м подбрасывании. Граф переходов автомата $A15$, соответствующего этому описанию игры, показан на рис. 3.10. Однако более компактное представление получается, если заметить, что счет очков при ν-м подбрасывании не зависит на самом деле от $(\nu-2)$-го исхода (хотя это может быть замаскировано устным описанием игры). Тогда мы можем выбрать следующие входной и выходной алфавиты и множество состояний:

$$X = \{\text{Г, Ц}\},$$
$$Z = \{1, 0\},$$
$$S = \{\text{Г, Ц}\},$$

где указанные два состояния отождествляются со всеми возможными исходами при ($\nu - 1$)-м подбрасывании. В результате получим граф переходов для автомата $A16$, изображенный на рис. 3.11.

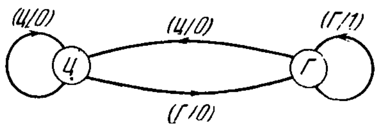


Рис. 3.11. Автомат $A16$.

Методом, описанным в § 3.10, легко проверить, что $A16 = A15$. Таким образом, если мы не сумели обнаружить избыточности в устном описании, мы все равно можем получить $A16$ (с точностью до изоморфизма) применением к $A15$ любой стандартной методики минимизации автоматов.

Попутно заметим, что роль, которую играет минимальная форма в теории конечных автоматов, аналогична роли, которую играет «эквивалентная схема Тевенена» в теории линейных цепей. Оба представления системы служат для описания ее поведения, наблюдаемого на доступных выводах, наиболее компактным способом.

3.13. Уменьшение числа состояний автомата последовательным объединением

Пусть M — автомат, о котором известно, что его состояния σ_i и σ_j эквивалентны. Объединением состояний σ_i и σ_j по правилам объединения эквивалентных состояний при минимизации, описанным в § 3.11, мы можем получить другой автомат M_1. При этом состояния σ_i и σ_j заменяются одним состоянием, скажем σ_{ij}, которое переходит в то же состояние, что и σ_i (или σ_j), и вырабатывает такой же выходной символ, как и σ_i (или σ_j), при приложении одного и того же входного символа. Это значит, что σ_{ij} эквивалентно σ_i и σ_j и, следовательно, $M_1 = M$. Далее, если известно, что в M_1 имеются два эквивалентных состояния, то, повторяя описанную операцию объединения, можно получить $M_2 = M_1$. Эта процедура может повторяться до тех пор, пока не будет получен $M_k = M_{k-1}$, не имеющий эквивалентных состояний. Обозначая исходную форму автомата M через M_0, можно установить, что $M_k (k \geqslant 1)$, полученный с помощью описанной процедуры, всегда меньше M_{k-1} и, следовательно, представляет собой *сокращенную* форму M.

Сокращение автомата последовательным объединением особенно удобно, когда рассматриваемый автомат имеет явно эквивалентные состояния, которые могут быть отмечены при рассмотрении таблицы переходов. Поскольку, согласно теореме 3.1, явно эквивалентные состояния являются эквивалентными, то для сокращения заданного автомата они могут быть объединены, как описано в предыдущем абзаце. Объединение двух явно эквивалентных состояний, скажем σ_i и σ_j, наиболее удобно выполнять по таблице переходов, вычеркивая строку σ_j и заменяя всюду в подтаблице $s_{\nu+1}$ обозначение «σ_j» на «σ_i».

В качестве примера приведены таблицы 3.16 — 3.19, в которых даны последовательные стадии сокращения автомата $A6$, изображенного на рис. 3.1 и в таблице 3.1. Для удобства таблица 3.1 воспроизведена здесь еще раз как таблица 3.16. В этой таблице пары состояний $\{1,5\}$ и $\{2,6\}$ являются явно эквивалентными; вычеркивая строки 5 и 6 и

Таблица 3.16

Автомат $A6$

$s_\nu \backslash x_\nu$	z_ν: α	β	γ	$s_{\nu+1}$: α	β	γ
1	1	0	1	2	5	5
2	0	1	1	6	2	5
3	0	1	1	2	2	7
4	1	0	1	8	3	1
5	1	0	1	2	5	5
6	0	1	1	2	6	5
7	0	1	1	6	6	3
8	1	0	1	8	7	5

Таблица 3.17

Автомат $A6_1$

$s_\nu \backslash x_\nu$	z_ν: α	β	γ	$s_{\nu+1}$: α	β	γ
1	1	0	1	2	1	1
2	0	1	1	2	2	1
3	0	1	1	2	2	7
4	1	0	1	8	3	1
7	0	1	1	2	2	3
8	1	0	1	8	7	1

заменяя каждое из обозначений «5» на «1» и каждое «6» на «2», получим автомат $A6_1 = A6$, представленный таблицей 3.17.

Таблица 3.18

Автомат $A6_2$

s_ν \ x_ν	z_ν α	z_ν β	z_ν γ	$s_{\nu+1}$ α	$s_{\nu+1}$ β	$s_{\nu+1}$ γ
1	1	0	1	2	1	1
2	0	1	1	2	2	1
3	0	1	1	2	2	3
4	1	0	1	8	3	1
8	1	0	1	8	3	1

Таблица 3.19

Автомат $A6_3$

s_ν \ x_ν	z_ν α	z_ν β	z_ν γ	$s_{\nu+1}$ α	$s_{\nu+1}$ β	$s_{\nu+1}$ γ
1	1	0	1	2	1	1
2	0	1	1	2	2	1
3	0	1	1	2	2	3
4	1	0	1	4	3	1

В $A6_1$ пара состояний $\{3,7\}$ является явно эквивалентной; вычеркивая строку 7 и заменяя каждое обозначение «7» на «3»,

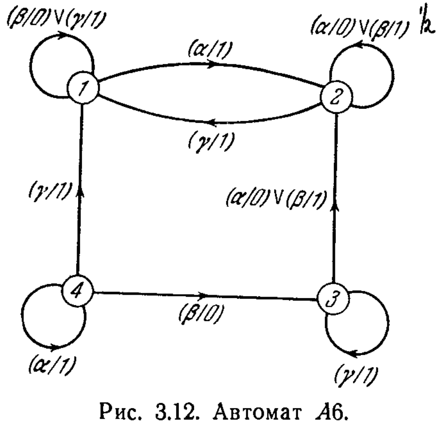


Рис. 3.12. Автомат $A6$.

получаем автомат $A6_2 = A6_1$, представленный таблицей 3.18. В $A6_2$ явно эквивалентной является пара $\{4,8\}$. Вычеркивая строку 8 и заменяя каждую цифру «8» на «4», получим автомат $A6_3 = A6_2$, представленный таблицей 3.19. Поскольку в $A6_3$ нет явно эквивалентных состояний, сокращение путем объединения в том виде, в каком оно выполнялось выше, должно на этом закончиться. Оказывается, что полученный сокращенный автомат $A6_3$ является в то же время минимальной формой $A6$. Граф переходов $A6_3 = \breve{A6}$ показан на рис. 3.12.

Следует подчеркнуть, что, поскольку не всякие два эквивалентных состояния являются явно эквивалентными, описанная процедура сокращения не всегда дает минимальный автомат. После того как методом последовательного объединения получен наименьший автомат, следует применять стандартную методику эквивалентного разбиения, чтобы получить минимальную форму автомата или чтобы удостовериться в том, что дальнейшее сокращение невозможно.

3.14. Класс минимальных автоматов

Используя определения, введенные в § 2.3, в качестве следствия теоремы 3.1 и определения эквивалентности автоматов получаем:

Лемма 3.12. *Явно минимальный (n, p, q)-автомат должен быть минимальным. Явно сократимый (n, p, q)-автомат не может быть минимальным.*

Дополнительно теперь докажем следующие леммы.

Лемма 3.13. *Мощность семейства перестановок минимального (n, p, q)-автомата равна $n!$*

Доказательство. Пусть M_1 — минимальный (n, p, q)-автомат и пусть M_2 — автомат, полученный из M_1 перестановкой обозначений его состояний. Предположим, что перестановка, с помощью которой M_2 получен из M_1, включает в себя замену обозначения состояния σ_i из M_1 на «σ_j» $(j \neq i)$. Если M_1 и M_2 имеют одинаковые таблицы переходов, то реакции $M_1|\sigma_j$ и $M_2|\sigma_j$ на любую входную последовательность должны быть одинаковыми и, следовательно, реакции $M_1|\sigma_j$ и $M_1|\sigma_i$ на любую входную последовательность также должны быть одинаковыми. Это означает, что состояния σ_i и σ_j в M_1 эквивалентны и, следовательно, M_1 не является минимальным автоматом. Из полученного противоречия следует, что различные перестановки должны давать в результате различные таблицы переходов. Число различных перестановок равно $n!$. Лемма доказана.

Лемма 3.14. *Мощность $\breve{N}_{n,p,q}$ класса минимальных (n, p, q)-автоматов, таких, среди которых нет двух изоморфных друг другу автоматов, определяется выражением*

$$\breve{N}_{n,p,q} \leqslant \frac{1}{n!} \prod_{r=0}^{n-1} [(qn)^p - r]. \tag{3.17}$$

Доказательство. Пусть число (n, p, q)-автоматов, не являющихся явно сократимыми, равно $\breve{N}''_{n,p,q}$ и пусть число минимальных (n, p, q)-автоматов, изоморфных или неизоморфных друг другу, равно $\breve{N}'_{n,p,q}$. Тогда, согласно лемме 3.12,

$$\breve{N}'_{n,p,q} \leqslant N''_{n,p,q}. \tag{3.18}$$

Согласно лемме 3.13,

$$\breve{N}'_{n,p,q} = n!\,\breve{N}_{n,p,q} \tag{3.19}$$

или

$$\breve{N}_{n,p,q} = \frac{1}{n!} \breve{N}'_{n,p,q} \leqslant \frac{1}{n!} N''_{n,p,q}. \tag{3.20}$$

Используя уравнение (2.3) для определения $N''_{n,p,q}$, получаем доказательство леммы.

Поскольку два минимальных неизоморфных автомата должны быть различимы, то $\breve{N}_{n,p,q}$ представляет собой также число минимальных (n, p, q)-автоматов, среди которых нет ни одной пары эквивалентных автоматов. Это число должно включать в себя число $N^{(\text{ям})}_{n,p,q}$ явно минимальных (n, p, q)-автоматов, среди которых нет ни одной пары изоморфных автоматов. Используя теорему 2.1 для определения $N^{(\text{ям})}_{n,p,q}$, получаем:

Теорема 3.7. *Мощность $\breve{N}_{n,p,q}$ класса минимальных (n, p, q)-автоматов, среди которых нет ни одной пары эквивалентных автоматов, определяется выражением*

$$\frac{1}{n!} n^{pn} \prod_{r=0}^{n-1} (q^n - r) \leqslant \breve{N}_{n,p,q} \leqslant \frac{1}{n!} \prod_{r=0}^{n-1} [(qn)^p - r]. \tag{3.21}$$

Например, общее число минимальных (2,2,2)-автоматов, среди которых нет эквивалентных, заключено между 96 и 120.

Задачи

3.1. Покажите, что если $\sigma_i = \sigma_j$, а $\sigma_j \neq \sigma_k$, то $\sigma_i \neq \sigma_k$.

3.2. Используя симметричность графа переходов, показанного на рис. З 3.1, покажите, что $\sigma_1 = \sigma_2$, $\sigma_3 = \sigma_4$ и $\sigma_5 = \sigma_6$.

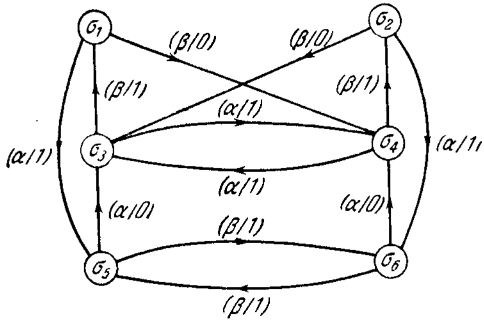


Рис. З 3.1.

3.3. В подтаблице z_v автомата M все строки одинаковы. Покажите, что M представляет собой тривиальный автомат.

3.4. Покажите, что если i-я и j-я строки матрицы $[M]$ одинаковы, то состояния σ_i и σ_j автомата M являются эквивалентными.

3.5. Состояния σ_i и σ_j являются k_1-эквивалентными, а их k_1-е преемники по отношению к любой входной последовательности длины k_1 являются k_2-эквивалентными. Покажите, что если $k_1 + k_2 \geqslant n - 1$, то $\sigma_i = \sigma_j$.

3.6. Состояния σ_i и σ_j являются k_1-эквивалентными, а их k_1-е преемники по отношению к любой входной последовательности длины k_1 являются k_2-эквивалентными, но (k_2+1)-различимыми. Покажите, что если $\sigma_i \neq \sigma_j$, то $k_1 + k_2 \leqslant n + 2$.

3.7. Автомат M имеет 1-эквивалентные классы $\Sigma_{11}, \Sigma_{12}, \ldots, \Sigma_{1r}$, где Σ_{1i}, $i = 1, 2, \ldots, r$, содержит n_i состояний. Сосчитайте число строк в таблице пар для M.

3.8. Разбиение P_1 автомата с n состояниями имеет r классов. (а) Если $P_k \neq P_{k-1}$, каково минимальное число классов в P_k? (б) Если $P_k \neq P_{k-1}$, каково максимальное число состояний в одном классе P_k? (в) Каково наименьшее значение k, при котором P_k является заведомо одинаковым с P_{k+1}?

3.9. Таблица З 3.1 представляет собой частично заполненную P_3 таблицу автомата с шестью состояниями. Определите 2-эквивалентное разбиение этого автомата.

Таблица 3.3.1

Σ	$s_\nu \backslash x_\nu$	$s_{\nu+1}$: α	$s_{\nu+1}$: β
a	1	4	?
	2	?	?
	3	6	?
b	4	?	?
c	5	?	?
d	6	?	?

Таблица 3.3.2

$s_\nu \backslash x_\nu$	z_ν: α	z_ν: β	$s_{\nu+1}$: α	$s_{\nu+1}$: β
1	0	0	5	4
2	0	1	3	3
3	0	0	7	9
4	1	1	3	3
5	0	0	3	3
6	0	0	2	5
7	0	0	8	6
8	0	0	5	5
9	0	0	1	8

3.10. Найдите эквивалентное разбиение автомата, определенного таблицей 3.3.2: (а) построением P_k таблиц, (б) методом таблицы пар.

3.11. Определите эквивалентное разбиение автомата, определенного графом на рис. 3.3.2: (а) построением P_k таблиц, (б) методом таблицы пар, (в) матричным разбиением.

3.12. Покажите, что если $M_1 = M_2$ и $M_2 \neq M_3$, то $M_1 \neq M_3$.

3.13. Рис. 3.3.3 представляет собой граф переходов автомата с четырьмя состояниями. Постройте граф переходов автомата с пятью состояниями, эквивалентный заданному на рис. 3.3.3.

3.14. Каждое состояние автомата M_1 эквивалентно некоторому состоянию автомата M_2, но $M_1 \neq M_2$. Покажите, что автомат M_1 эквивалентен либо изолированному, либо тупиковому подавтомату M_2.

3.15. Пусть состояние σ_i автомата M_1 эквивалентно состоянию σ_j автомата M_2. Известно, что имеется некоторая входная последовательность, которая проводит $M_1 | \sigma_i$ через все состояния M_1 и в то же время проводит $M_2 | \sigma_j$ через все состояния M_2. Покажите, что $M_1 = M_2$.

3.16. Определите, какие два из трех автоматов, показанных на рис. 3.3.4, являются эквивалентными и какие различимыми. Который из автоматов является минимальным?

3.17. Покажите, что если автомат M' является тупиковым или изолированным подавтоматом автомата M, то $\breve{M}$ содержит подавтомат M'', который является минимальной формой M', либо тупиковым подавтоматом $\breve{M}$, либо изолированным подавтоматом $\breve{M}$, либо, наконец, автоматом $\breve{M}$.

3.18. Покажите, что если $M_1 = M_2 = \ldots = M_N$, то $\breve{M}_1$ представляет собой минимальную форму автомата $\Delta(M_1, M_2, \ldots, M_N)$.

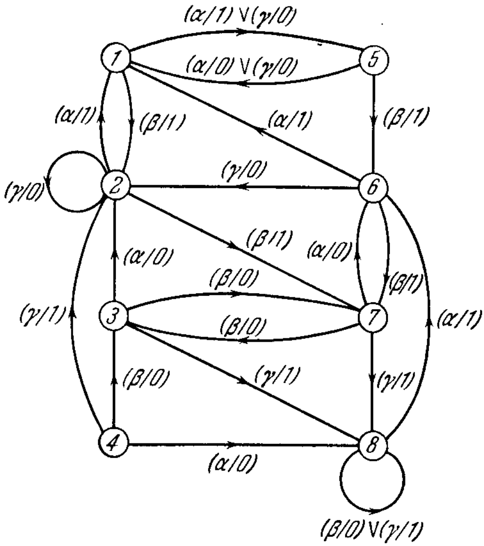


Рис. 3.3.2.

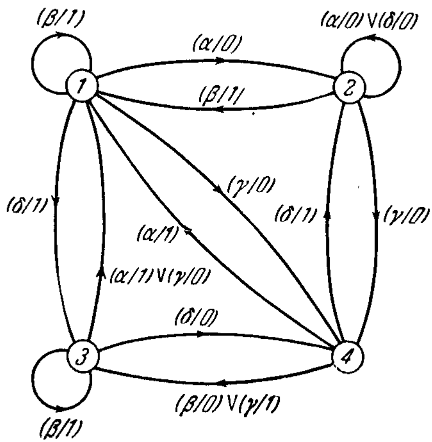


Рис. 3.3.3.

3.19. Покажите на примере, что два неминимальных эквивалентных автомата, имеющих одинаковое число состояний, не обязательно являются изоморфными.

3.20. Дано два автомата (не обязательно минимальных); сформулируйте алгоритм для определения, являются они изоморфными или нет.

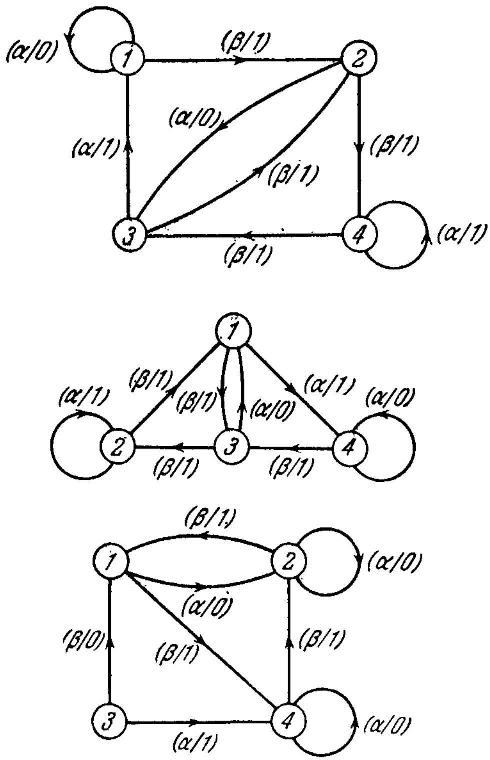


Рис. 3 3.4.

3.21. Определите минимальные формы автоматов, заданных в задачах 1.2—1.9 главы 1.

3.22. Постройте таблицу, граф и матрицу переходов минимальной формы автомата, показанного на рис. 3 3.2.

3.23. Сформулируйте правило определения всех явно эквивалентных пар состояний по таблице пар.

3.24. Получите минимальную форму автомата, изображенного на рис. 3 3.2, методом последовательного объединения, описанным в § 3.13.

ГЛАВА 4

ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО РАСПОЗНАВАНИЮ СОСТОЯНИЙ

4.1. Введение

Как было указано в главе 1, реакция нетривиального автомата M на определенные воздействия не предсказуема, если состояние M неизвестно; с другой стороны, эта реакция всегда может быть предсказана, если начальное состояние известно. Таким образом, одна из основных задач анализа конечных автоматов состоит в том, чтобы распознать состояние исследуемого автомата. После того как состояние распознано, можно определить поведение автомата при всех дальнейших условиях и могут быть предприняты шаги по введению автомата в различные режимы работы, желательные для исследователя.

В этой главе мы рассмотрим две наиболее важные задачи распознавания состояния: задачу определения начального состояния автомата (т. е. состояния, в котором находится автомат, когда он представлен исследователю) и задачу распознавания конечного состояния автомата (т. е. состояния, в котором находится автомат, когда завершены испытательные операции, проводимые исследователем). Решение любой из этих задач составляет решение основной задачи приведения автомата к предсказуемому для исследователя виду. Как будет показано в следующей главе, это решение всегда полезно в других задачах, в которых число представляющих интерес неизвестных величин существенно больше, чем число величин, которые имеются в задаче распознавания состояния [1]).

---

[1]) Материал этой главы частично основывается на работах: Мура (E. F. Moor, Gedanken — Experiments on Sequential Machines, «Automata Studies», pp. 129—153, Princeton University Press, Princeton, N. Y., 1956. Русский перевод: Э. Ф. Мур, Умозрительные эксперименты с последовательностными машинами. В сборнике «Автоматы» под редакцией К. Э. Шеннона и Дж. Маккарти, ИЛ, М., 1956), Гинзбурга (S. Ginsburg, On the Length of the Smallest Uniform Experiment Which Distinguishes the Terminal States of

4.2. Классификация экспериментов

Процесс приложения входных последовательностей к автоматам, наблюдения получаемых выходных последовательностей и вывода заключений, основанных на этих наблюдениях, будет называться *экспериментом*. Во всех наших рассмотрениях, без исключения, будет предполагаться, что автомат, над которым проводится эксперимент, является опечатанным «черным ящиком», в котором доступны только входные и выходные полюсы. Заключения следует делать только на основе приложенных воздействий, наблюдаемых реакций и таблиц (или графов, или матриц) переходов, если они имеются в распоряжении при решении задачи.

Мы будем различать два типа экспериментов.

1. *Безусловные эксперименты*, когда прикладываемая входная последовательность полностью определена заранее.

2. *Условные эксперименты*, когда прикладываемая входная последовательность состоит из двух или более подпоследовательностей, причем каждая подпоследовательность (исключая первую) определена на основании реакций, вызываемых предыдущими подпоследовательностями.

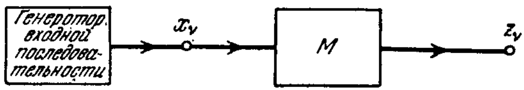
Безусловный эксперимент, как правило, легче осуществить, чем условный: последний требует ряда промежуточных решений перед принятием окончательного, тогда как первый не требует таковых. Рассматривая человека или механический «генератор входной последовательности», чья функция состоит в подаче на автомат требуемых входных последовательностей, можно видеть, что в безусловных экспериментах генератор должен обеспечить единственную последовательность. В условных экспериментах генератор, помимо этого, должен быть способным вырабатывать ряд подпоследовательностей, причем каждая подпоследовательность основана на информации, поступающей в обратном направлении с выходных полюсов автомата. Как мы увидим, преимущество некоторых условных экспериментов состоит в том, что они

---

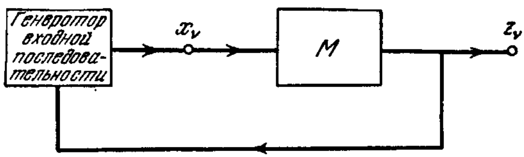
a Machine, J. Assoc. Comput. Mach., vol. 5, pp. 266—280, 1958. Русский перевод: С. Гинзбург, О длине кратчайшего однородного эксперимента, устанавливающего конечные состояния машины, «Кибернетический сборник» № 3, ИЛ, 1961) и Гилла (A. Gill, State Identification Experiments in Finite Automata, Information and Control, vol. 4, pp. 132—154, 1961).

относительно короче; кроме того, в некоторых случаях условные эксперименты легче построить, чем безусловные. Схематическое представление двух типов экспериментов показано на рис. 4.1.

Один автомат называется *копией* другого, если оба автомата имеют одинаковые таблицы переходов и если они



а)



б)

Рис. 4.1. а) Безусловный эксперимент. б) Условный эксперимент.

находятся в одном и том же состоянии перед началом эксперимента. Эксперименты могут быть классифицированы по числу требуемых для их проведения экземпляров [1]) исследуемого автомата.

1. *Простые эксперименты*, когда требуется единственный экземпляр автомата.

2. *Кратные эксперименты*, когда требуется более чем один экземпляр автомата.

Так как большинство автоматов, встречающихся в практике, имеются в единственном экземпляре, простые эксперименты предпочтительнее кратных.

Длина эксперимента принимается как общее число входных символов, прикладываемых в процессе проведения эксперимента. *Порядок* эксперимента принимается как число входных подпоследовательностей (т. е. последовательностей,

---

[1]) В тексте оригинала употреблено слово «копия». Здесь и далее это слово заменено словом «экземпляр». (*Прим. перев.*)

разделенных операциями принятия решений), из которых состоит эксперимент. *Кратность* эксперимента есть число экземпляров автомата, требующихся при исследовании. Так, безусловный эксперимент есть эксперимент порядка 1, а условный эксперимент есть эксперимент порядка 2 или более. Простой эксперимент есть эксперимент кратности 1, а кратный эксперимент есть эксперимент кратности 2 или более. Длина, порядок и кратность эксперимента могут рассматриваться как грубые меры его стоимости.

4.3. Диагностические и установочные эксперименты

Наша основная цель в этой главе состоит в разработке экспериментов для решения следующих двух задач.

1. *Диагностическая задача*. Известно, что данный автомат M, таблица переходов которого имеется в нашем распоряжении, находится в одном из состояний $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_m}$. Найти это состояние.

2. *Установочная задача*. Известно, что данный автомат M, таблица переходов которого имеется в нашем распоряжении, находится в одном из состояний $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_m}$. Установить M в известное состояние.

Диагностическая задача, следовательно, есть задача определения начального состояния M, а установочная задача состоит в определении конечного состояния M. Эксперимент, который решает диагностическую задачу, называется *диагностическим экспериментом*; эксперимент, который решает установочную задачу, называется *установочным экспериментом*. Ясно, что каждый диагностический эксперимент есть также установочный эксперимент, так как знание начального состояния M и приложенной последовательности означает знание конечного состояния. Обратное, однако, не обязательно верно.

Если особо не оговаривается, то во всей этой главе будет предполагаться, что M — минимальный автомат. Если автомат M, первоначально заданный своей таблицей переходов, не минимален, то он всегда может быть минимизирован методами, изложенными в главе 3. Так как только внешнее поведение M представляет интерес, можно без риска заменить первоначальную таблицу ее минимальной формой и, следовательно, без потери общности предполагать, что M минимален.

Множество состояний $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_m}\}$, одно из которых, как известно экспериментатору, есть начальное состояние M, называется *множеством допустимых начальных состояний* и обозначается $A(M)$. Состояния $A(M)$ называются *допустимыми состояниями*. Как диагностическая, так и установочная задачи становятся тривиальными, когда $A(M)$ является одноэлементным множеством, т. е. когда $m=1$. Наше внимание, следовательно, будет сконцентрировано на случаях, когда $m \geqslant 2$.

Можно заметить, что безусловный диагностический или установочный эксперименты не зависят от истинного начального состояния M. С другой стороны, условный диагностический или установочный эксперименты зависят в общем случае от истинного начального состояния. Это следует из того факта, что начальное состояние определяет реакцию M на первую входную подпоследовательность; так как составление следующей входной подпоследовательности основывается на реакции на текущую прикладываемую подпоследовательность, то начальное состояние определяет все входные подпоследовательности, исключая первую.

4.4. Диагностические эксперименты для двух состояний

Задача определения начального состояния автомата M в случае, когда $A(M)$ имеет произвольную мощность m, конечно, намного сложнее относительно частного случая, когда $m=2$. Чтобы различить между собой общий и этот частный случаи, первый будем называть *диагностической задачей для m состояний*, а второй — *диагностической задачей для двух состояний.*

В этой главе мы рассмотрим диагностическую задачу для двух состояний, предполагая, что данный автомат M имеет n состояний, с $A(M)=\{\sigma_{i_0}, \sigma_{j_0}\}$. Так как M минимален, то σ_{i_0} и σ_{j_0} должны быть различимы и, следовательно, $(n-1)$-различимы. Значит, существует входная последовательность длины $n-1$ или менее, которая, будучи приложенной к $M|\sigma_{i_0}$ и $M|\sigma_{j_0}$, вызывает различные выходные последовательности. Такая входная последовательность называется *диагностической последовательностью для* $\{\sigma_{i_0}, \sigma_{j_0}\}$. Диагностический эксперимент для двух состояний для автомата M при $A(M)=\{\sigma_{i_0}, \sigma_{j_0}\}$ состоит, следовательно, в приложении к M диагностической последовательности для $\{\sigma_{i_0}, \sigma_{j_0}\}$ и в наблюдении реакции; на основании этой реакции может быть определено истинное начальное состояние. В оставшейся части этого параграфа мы покажем, как могут быть построены диагностические последовательности для заданных пар состояний.

Пусть σ_{i_0} и σ_{j_0} будут l-различимы и $(l-1)$-эквивалентны, для некоторого l, $1 \leqslant l \leqslant n-1$ [1]). Тогда длина кратчайшей диагностической последовательности для $\{\sigma_{i_0}, \sigma_{j_0}\}$ есть l. Любая диагностическая последовательность для $\{\sigma_{i_0}, \sigma_{j_0}\}$, длина которой равна определенному выше значению l, будет называться *минимальной диагностической последовательностью для* $\{\sigma_{i_0}, \sigma_{j_0}\}$ и обозначаться $\mathscr{E}(\sigma_{i_0}, \sigma_{j_0})$. Если σ_{i_0} и σ_{j_0} l-различимы и $(l-1)$-эквивалентны, то σ_{i_0} и σ_{j_0} должны быть разобщенными состояниями в P_l и объединенными в P_{l-1}. Поэтому l может быть определено путем построения k-эквивалентных разбиений для данного автомата M и нахождения наименьшей величины k такой, что P_k содержит σ_{i_0} и σ_{j_0} в двух различных классах; эта величина должна равняться l.

Когда $\mathscr{E}(\sigma_{i_0}, \sigma_{j_0})$ прикладывается к $M|\sigma_{i_0}$ и $M|\sigma_{j_0}$, выходные последовательности получаются одинаковыми, за исключением последнего l-го символа. Следовательно, k-е преемники σ_{i_0} и σ_{j_0} относительно $\mathscr{E}(\sigma_{i_0}, \sigma_{j_0})$ являются $(l-k)$-различимыми и $(l-k-1)$-эквивалентными для всех $0 \leqslant k \leqslant l-1$. Это положение изображено на рис. 4.2, где $\mathscr{E}(\sigma_{i_0}, \sigma_{j_0})$ представлена в виде последовательности $\xi_{u_1}\xi_{u_2}\ldots\xi_{u_l}$. Последовательности состояний, которые проходят автоматы $M|\sigma_{i_0}$ и $M|\sigma_{j_0}$ есть соответственно $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_l}$ и $\sigma_{j_1}, \sigma_{j_2}, \ldots, \sigma_{j_l}$. При этом выходные последовательности имеют вид $\zeta_{v_1}\zeta_{v_2}\ldots\zeta_{v_l}^{(i)}$ для автомата $M|\sigma_{i_0}$ и $\zeta_{v_1}\zeta_{v_2}\ldots\zeta_{v_l}^{(j)}$

[1]) Так как 0-эквивалентность не определена, состояния, которые 1-различимы и 0-эквивалентны, должны считаться просто 1-различимыми.

для автомата $M|\sigma_{j_0}$, где $\zeta_{v_l}^{(i)} \neq \zeta_{v_l}^{(j)}$. Используя обозначения рис. 4.2, можно установить, что если σ_{i_0} и σ_{j_0} l-различимы и $(l-1)$-эквивалентны и если $\xi_{u_1}\xi_{u_2} \ldots \xi_{u_l}$ есть минимальная диагностическая последовательность для $\{\sigma_{i_0}, \sigma_{j_0}\}$, то: (1) для

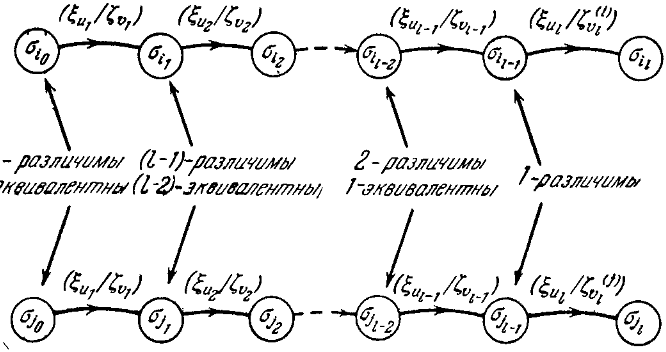


Рис. 4.2. Минимальная диагностическая последовательность для $\{\sigma_{i_0}, \sigma_{i_0}\}$.

$1 \leqslant k \leqslant l-1$ ξ_{u_k} есть входной символ, который переводит $\sigma_{i_{k-1}}$ и $\sigma_{j_{k-1}}$ в пару $(l-k)$-различимых и $(l-k-1)$-эквивалентных состояний σ_{i_k} и σ_{j_k}; (2) ξ_{u_l} есть входной символ, при приложении которого к автоматам $M|\sigma_{i_{l-1}}$ и $M|\sigma_{j_{l-1}}$ последние выдают различные выходные символы.

Определение ξ_{u_k}, σ_{i_k} *и* σ_{j_k} *из* $\sigma_{i_{k-1}}$ *и* $\sigma_{j_{k-1}}$ $(1 \leqslant k \leqslant l-1)$. Определение ξ_{u_k}, σ_{i_k} и σ_{j_k}, когда $\sigma_{i_{k-1}}$ и $\sigma_{j_{k-1}}$ известны, может быть наиболее удобно произведено с помощью таблиц P_k, построение которых для эквивалентных разбиений данного автомата описано в § 3.6. $\sigma_{i_{k-1}}$ и $\sigma_{j_{k-1}}$ являются $(l-k+1)$-различимыми и $(l-k)$-эквивалентными состояниями; следовательно, они составляют смежные строки в таблице P_{l-k} и разобщенные строки в таблице P_{l-k+1}. Поэтому строки $\sigma_{i_{k-1}}$ и $\sigma_{j_{k-1}}$ в таблице P_{l-k} должны содержать две клетки, скажем $\sigma'_{i_{k-1}}$ и $\sigma'_{j_{k-1}}$ соответственно, которые имеют различные нижние индексы, по меньшей мере в одном, скажем $\xi'_{u_{k-1}}$-м столбце. При этом $\sigma'_{i_{k-1}}$ и $\sigma'_{j_{k-1}}$

должны быть $(l-k-1)$-эквивалентными, так как они являются первыми преемниками $(l-k)$-эквивалентных состояний $\sigma_{i_{k-1}}$ и $\sigma_{j_{k-1}}$ относительно входного символа $\xi'_{u_{k-1}}$; они должны быть также $(l-k)$-различимыми, так как $\sigma'_{i_{k-1}}$ и $\sigma'_{j_{k-1}}$ имеют различные нижние индексы в таблице P_{l-k}. Следовательно, $\sigma'_{i_{k-1}}$ и $\sigma'_{j_{k-1}}$ являются искомыми состояниями σ_{i_k} и σ_{j_k} соответственно, и входной символ $\xi'_{u_{k-1}}$ есть искомый входной символ ξ_{u_k}. Таким образом, ξ_{u_k}, σ_{i_k} и σ_{j_k} могут быть определены путем просмотра таблицы P_{l-k}.

Определение ξ_{u_l} *из* $\sigma_{i_{l-1}}$ *и* $\sigma_{j_{l-1}}$. $\sigma_{i_{l-1}}$ *и* $\sigma_{j_{l-1}}$ являются 1-различимыми; поэтому должен существовать, по крайней мере, один входной символ, при приложении которого к автоматам $M|\sigma_{i_{l-1}}$ и $M|\sigma_{j_{l-1}}$ последние выдают различные выходные символы. Этот символ, который является искомым символом ξ_{u_l}, может быть легко определен путем нахождения в z_ν-подтаблице столбца, в котором строки $\sigma_{i_{l-1}}$ и $\sigma_{j_{l-1}}$ различны.

Приведенные методы могут быть объединены и представлены в виде следующего алгоритма.

Алгоритм 4.1. σ_{i_0} и σ_{j_0} суть два состояния автомата M. Чтобы определить минимальную диагностическую последовательность для $\{\sigma_{i_0}, \sigma_{j_0}\}$: (1) Построим таблицы P_k для M. Найдем l такое, что σ_{i_0} и σ_{j_0} являются смежными строками в таблице P_{l-1} и разобщенными строками в таблице P_l. Предположим, что $k=1$. (2) (а) Если $l-k>0$, то переходим к шагу 3. (б) Если $l-k=0$, то ξ_{u_k} соответствует любому столбцу в z_ν-подтаблице M, такому, что строки $\sigma_{i_{k-1}}$ и $\sigma_{j_{k-1}}$ в этом столбце различны. $\xi_{u_1}\xi_{u_2}\ldots\xi_{u_k}$ есть минимальная диагностическая последовательность для $\{\sigma_{i_0}, \sigma_{j_0}\}$. (3) ξ_{u_k} соответствует любому столбцу в таблице P_{l-k}, такому, что строки $\sigma_{i_{k-1}}$ и $\sigma_{j_{k-1}}$ этого столбца имеют клетки σ_{i_k} и σ_{j_k} соответственно с различными нижними индексами. Увеличиваем k на единицу и возвращаемся к шагу (2).

Для иллюстрации рассмотрим автомат $A17$, представленный таблицей 4.1 и изображенный на рис. 4.3. Таблицы 4.2 — 4.5 являются таблицами P_1, P_2, P_3 и P_4 автомата $A17$. Для примера найдем минимальную диагностическую последовательность для $\{1,2\}$, т. е. $\mathscr{E}$ (1,2). Начнем с рассмотрения таблицы P_3, так как это «последняя» таблица, в которой строки 1 и 2 являются смежными. Строки 1 и 2 в таблице P_3 имеют различные нижние индексы в клетках «4_c» и «5_d», которые находятся в столбце β. Значит, β есть первый символ в $\mathscr{E}$ (1,2). В таблице P_2 строки 4 и 5 имеют различные нижние индексы в клетках «3_b» и «2_a», которые находятся в столбце α. Значит, α есть второй символ в $\mathscr{E}$ (1,2). В таблице P_1 строки 3 и 2 имеют различные нижние индексы в клетках «5_b» и «1_a», которые находятся в столбце α. Значит, α есть третий символ в $\mathscr{E}$ (1,2). β также может быть выбран в качестве третьего символа, так как строки 3 и 2 имеют различные нижние индексы в клетках «1_a» и «5_b», которые находятся в столбце β. В z_ν-подтаблице строки 1 и 5 имеют различные клетки (0 и 1) в столбце α. Значит, α есть четвертый и последний символ в $\mathscr{E}$ (1,2). Таким образом, $\mathscr{E}$ (1,2) имеет

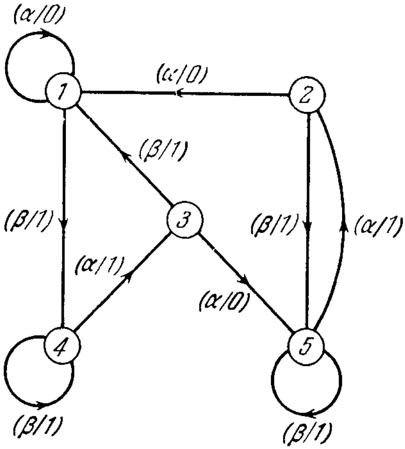


Рис. 4.3. Автомат $A17$.

Таблица 4.1
Автомат $A17$

s_ν \ x_ν	z_ν: α	z_ν: β	$s_{\nu+1}$: α	$s_{\nu+1}$: β
1	0	1	1	4
2	0	1	1	5
3	0	1	5	1
4	1	1	3	4
5	1	1	2	5

Таблица 4.2
Таблица P_1 для $A17$

Σ	s_ν \ x_ν	$s_{\nu+1}$: α	$s_{\nu+1}$: β
a	1	1_a	4_b
	2	1_a	5_b
	3	5_b	1_a
b	4	3_a	4_b
	5	2_a	5_b

Таблица 4.3

Таблица P_2 для $A17$

Σ	x_ν / s_ν	$s_{\nu+1}$: α	$s_{\nu+1}$: β
a	1 2	1_a 1_a	4_c 5_c
b	3	5_c	1_a
c	4 5	3_b 2_a	4_c 5_c

Таблица 4.4

Таблица P_3 для $A17$

Σ	x_ν / s_ν	$s_{\nu+1}$: α	$s_{\nu+1}$: β
a	1 2	1α 1_a	4_c 5_d
b	3	5_d	1_a
c	4	3_b	4_c
d	5	2_a	5_d

Таблица 4.5

Таблица P_4 для $A17$

Σ	x_ν / s_ν	$s_{\nu+1}$: α	$s_{\nu+1}$: β
a	1	1_a	4_d
b	2	1_a	5_e
c	3	5_e	1_a
d	4	3_c	4_d
e	5	2_b	5_e

Таблица 4.6

Минимальные диагностические последовательности для пар состояний $A17$

σ_{i_0}	σ_{j_0}	$\mathfrak{E}(\sigma_{i_0}, \sigma_{j_0})$	$\zeta^{(i)}_{v_l}$	$\zeta^{(j)}_{v_l}$
1	2	$\beta\alpha\alpha\alpha$	1	0
1	3	$\alpha\alpha$	0	1
1	4	α	0	1
1	5	α	0	1
2	3	$\alpha\alpha$	0	1
2	4	α	0	1
2	5	α	0	1
3	4	α	0	1
3	5	α	0	1
4	5	$\alpha\alpha\alpha$	1	0

вид $\beta\alpha\alpha\alpha$ или $\beta\alpha\beta\alpha$. Когда $\beta\alpha\alpha\alpha$ прикладывается к $A17$ в состоянии 1 и в состоянии 2, последний выходной символ есть 1 и 0 соответственно, что легко может быть проверено по таблице 4.1 или по рис. 4.3. Следовательно, если $\{1,2\}$ является множеством допустимых начальных состояний $A17$, то диагностический эксперимент может быть проведен путем приложения $\beta\alpha\alpha\alpha$ и наблюдения последнего выходного символа: если этот символ — 1, то начальное состояние — 1, если этот символ — 0, то начальное состояние — 2. В таблице 4.6 перечислены все минимальные диагностические последовательности для всех пар состояний $\{\sigma_{i_0}, \sigma_{j_0}\}$ $A17$; последние два столбца в этой таблице указывают последние наблюдаемые выходные символы $\zeta_{v_l}^{(i)}$ и $\zeta_{v_l}^{(j)}$, когда минимальная диагностическая последовательность прикладывается к σ_{i_0} и σ_{j_0} соответственно. Хотя для данной пары состояний могут быть построены две или более минимальных диагностических последовательностей, в таблице приведена только одна такая последовательность.

4.5. Разновидности диагностической задачи с двумя состояниями

Следующая теорема суммирует рассуждения, приведенные в предыдущем параграфе.

Теорема 4.1. *Диагностическая задача для автомата, содержащего n состояний, с двумя допустимыми состояниями всегда может быть решена простым безусловным экспериментом длины l, где*

$$l \leqslant n - 1. \tag{4.1}$$

Рис. 4.4, на котором изображен автомат $A18$, показывает, что верхняя граница в соотношении (4.1) может быть до-

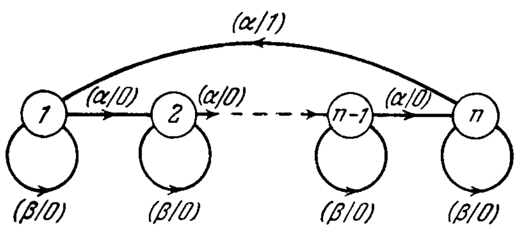


Рис. 4.4. Автомат $A18$.

стигнута для любого n. Очевидно, что в $A18$ никакие два состояния не могут выдать различные выходные символы прежде, чем будет достигнуто состояние n из одного из этих состояний и приложен входной символ α; следовательно, диагностический эксперимент для $A18$ и допустимого множества $\{1, 2\}$ не может быть короче, чем $n-1$. Минимальная диагностическая последовательность для $\{1, 2\}$ состоит из последовательности $n-1$ символов α, выходная последовательность оканчивается нулем, если начальное состояние — 1, и единицей, если начальное состояние — 2.

Диагностическая задача для двух состояний прямо связана со следующей задачей: известно, что данный автомат M является либо автоматом M_1 в состоянии σ_i, либо автоматом M_2 в состоянии σ_j, причем имеются таблицы переходов M_1, M_2 и M_1, M_2 являются сравнимыми автоматами. Желательно распознать автомат и его начальное состояние. Простым искусственным приемом рассмотрения M как расщепляемого автомата M_1 и M_2, а именно $\Delta(M_1, M_2)$, указанная задача может быть перефразирована в следующем виде: известно, что данный автомат $\Delta(M_1, M_2)$, таблица переходов которого доступна, находится в одном из состояний σ_i, σ_j. Найти это состояние. Эта задача в точности представляет собой диагностическую задачу для автомата $\Delta(M_1, M_2)$ и допустимого множества начальных состояний $\{\sigma_i, \sigma_j\}$. При $\sigma_i \neq \sigma_j$ задача может быть решена методом, описанным в § 4.4. По теореме 4.1, мы имеем:

Следствие 4.1. Известно, что данный автомат должен быть либо M_1 в состоянии σ_i, либо M_2 в состоянии σ_j, где $\sigma_i \neq \sigma_j$, M_1 и M_2 сравнимы и их таблицы переходов доступны. Если M_1 есть автомат с n_1 состояниями, а M_2 — с n_2 состояниями, то данный автомат и его начальное состояние всегда могут быть установлены простым безусловным экспериментом длины l, где

$$l \leqslant n_1 + n_2 - 1. \tag{4.2}$$

Как показано на примере автоматов $A19$ и $A20$ (рис. 4.5), верхняя граница в соотношении (4.2) может быть достигнута в точности для любых n_1 и n_2. В примере предполагается, что $n_2 \geqslant n_1$ (когда $n_1 = n_2$, состояние n_1 в $A20$ имеет единственную исходящую дугу, отмеченную $(\alpha/0) \vee (\beta/0)$, которая ведет к состоянию $n_1 - 1$). Прежде всего заметим, что никакие два состояния i в автомате $A19$ и j в автомате $A20$ не могут выдать различных выходных символов до тех пор, пока не будет достигнуто состояние 1 из i и j и не будет приложен входной символ β. Далее, вычеркнем в $A20$ пару вход-выход ($\alpha/0$) исходящей из состояния n_2 дуги, обозначенной ($\alpha/0$) $\vee$ ($\beta/0$), добавим к n_2 петлю ($\alpha/0$) и рассмотрим,

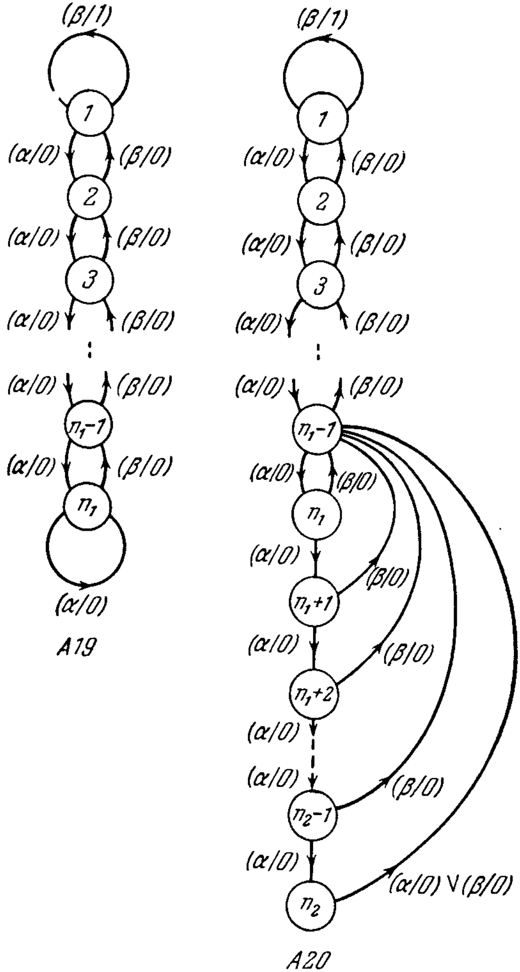


Рис. 4.5. Автоматы $A19$ и $A20$.

как это повлияет на $A20$. Как только это сделано, состояния n_2 и n_2-1 становятся явно эквивалентными и могут быть заменены одним состоянием, скажем n_2-1; состояния n_2-1

и n_2-2 являются теперь явно эквивалентными и также могут быть заменены одним состоянием, скажем n_2-2; ...; состояния n_1+1 и n_1 являются теперь явно эквивалентными и могут быть заменены одним состоянием, скажем n_1. В своей сокращенной форме автомат $A20$ одинаков с $A19$ и, следовательно, состояние i $A19$ эквивалентно состоянию i $A20$ для всех i, $1 \leqslant i \leqslant n_1$. Поэтому можно сделать вывод, что кратчайшая входная последовательность, под действием которой $A19$ и $A20$ должны выдавать различные выходные последовательности, когда оба автомата находятся в начальном состоянии 1, должна переводить автомат $A20$ из состояния 1 в состояние n_2 и затем входным символом α в состояние n_1-1. Так как состояние 1 должно быть вновь достигнуто перед тем, как либо $A19$, либо $A20$ выдадут различные выходные символы, та же самая последовательность должна переводить $A20$ из состояния n_2 в состояние 1 и затем оканчиваться входным символом β. Поэтому кратчайший эксперимент, различающий между собой $A19$ в состоянии 1 и $A20$ в состоянии 1, состоит в приложении n_2 символов α, за которыми следуют n_1-1 символов β, с общей длиной n_1+n_2-1. Последний наблюдаемый символ в этом эксперименте есть 0, если в состоянии 1 находится автомат $A19$, и 1, если в состоянии 1 находится $A20$.

Следует отметить, что единственное требование, предъявляемое к M_1 и M_2 в следствии 4.1, состоит в том, что $\sigma_i \neq \sigma_j$. Это требование не зависит от различимости или эквивалентности M_1 и M_2 (σ_i и σ_j могут быть различимыми состояниями в двух эквивалентных автоматах). Следовательно, нет необходимости распространять на расщепляемый автомат $\Delta(M_1, M_2)$ предположение о том, что отдельные автоматы M_1 и M_2 являются минимальными.

4.6. Дерево преемников

В дальнейшем под *σ-множеством* автомата M будем понимать любое конечное множество состояний M; элементы σ-множества не обязательно различны[1]). σ-множество,

[1]) Хотя σ-множество не является «множеством» в формальном смысле (так как оно содержит повторяющиеся элементы), оно будет обозначаться фигурными скобками, как это принято для обычных множеств.

содержащее единственный элемент, называется *простым*; σ-множество, содержащее два или более одинаковых элементов, называется *кратным*; σ-множество *однородно*, если все его элементы одинаковы (простое σ-множество является частным случаем однородного σ-множества).

Для автомата, у которого множество допустимых начальных состояний имеет мощность m, A-группа есть множество σ-множеств, причем m есть общее число элементов во всех входящих в A-группу σ-множествах. Число σ-множеств в A-группе называется *решением* группы. Решение A-группы не может превышать m. A-группа называется *простой*, если все σ-множества в ней просты; A-группа *однородна*, если все σ-множества в ней однородны.

Предположим, что G есть A-группа, содержащая σ-множества $g_1, g_2, \ldots, g_r$. $\xi_{i_1}\xi_{i_2}\ldots\xi_{i_l}$-*преемник* G есть другая A-группа, построенная согласно следующим правилам: (1) Разбиваем каждое множество g_i на подмножества такие, что два состояния g_i включаются в одно и то же подмножество, если и только если они вырабатывают одинаковые реакции на входную последовательность $\xi_{i_1}\xi_{i_2}\ldots\xi_{i_l}$. Считаем каждое подмножество как σ-множество, а множество всех таких σ-множеств — как A-группу, обозначенную через G'. (2) В σ-множествах из G' заменяем каждое состояние его преемником относительно входной последовательности $\xi_{i_1}\xi_{i_2}\ldots\xi_{i_l}$. Получаемая в результате A-группа есть $\xi_{i_1}\xi_{i_2}\ldots\xi_{i_l}$-преемник G.

Дерево преемников есть структура, определенная для данного автомата M и заданного множества допустимых начальных состояний $A(M)$. Структура состоит из ветвей, расположенных в последовательных *уровнях*, причем высшим уровнем является «нулевой» уровень, следующим за высшим является «первый» уровень и так далее. Нулевой уровень дерева содержит единственную ветвь, называемую *начальной ветвью*. В дереве преемников, построенном для автомата с входным алфавитом $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p\}$, каждая ветвь в k-м уровне ($k \geqslant 0$) расщепляется на p ветвей, представляющих $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ соответственно и являющихся ветвями в $(k+1)$-м уровне. Ветвь, представляющая входной символ ξ_i, называется «ветвь ξ_i». Ясно, что k-й уровень дерева содержит p^k

ветвей. Последовательность из l ветвей таких, что k-я ветвь находится в k-м уровне ($k=1, 2, \ldots, l$), и таких, что ($k+1$)-я ветвь порождается k-й ветвью ($k=1, 2, \ldots, l-1$), называется *путем по дереву*; l называется *длиной* пути по дереву. Если k-я ветвь этого пути по дереву есть ξ_{i_k} ($k=1, 2, \ldots, l$), то говорят, что этот путь *описывает* входную последовательность $\xi_{i_1}\xi_{i_2}\ldots\xi_{i_l}$. Таким образом, первые $k+1$ уровней дерева преемников содержат p^k путей, описывающих все возможные p^k входные последовательности длины k, которые могут быть построены из p входных символов.

Каждая ветвь в дереве преемников, построенном для M и $A(M)$, связана с A-группой. A-группа, с которой связана начальная ветвь, есть $A(M)$. Если ветвь b связана с A-группой G, то ветвь ξ_i, которую порождает b, связана с ξ_i-преемником G. Таким образом, A-группы, связанные с ветвями k-го уровня ($k \geqslant 1$), могут быть определены из A-групп, связанных с ветвями ($k-1$)-го уровня. В этом методе любой уровень дерева может быть построен на основании построенного уровня, который непосредственно предшествует ему. Говорят, что путь по дереву *ведет* в A-группу G, если его последняя ветвь связана с G.

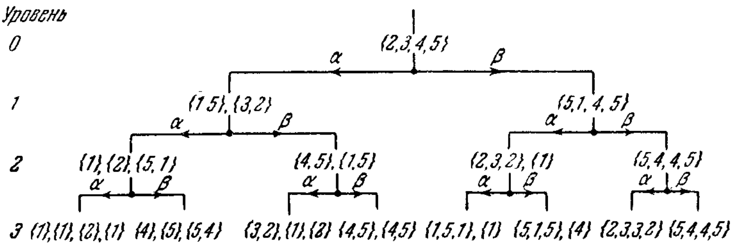


Рис. 4.6. Дерево преемников для $A17$ и множества допустимых начальных состояний $\{2, 3, 4, 5\}$.

Рис. 4.6 показывает первые четыре уровня дерева преемников, построенного для автомата $A17$ (рис. 4.3) и множества допустимых начальных состояний $\{2, 3, 4, 5\}$. Каждая ветвь отмечена входным символом, который она представляет, и A-группой, с которой она связана. A-группа, связанная с начальной ветвью, есть множество допустимых начальных состояний $\{2, 3, 4, 5\}$. Остальные A-группы могут быть найдены с помощью таблицы или диаграммы переходов для $A17$. Например, когда α прикладывается к состояниям 2, 3, 4 и 5, выходные символы будут 0, 0, 1 и 1 соответственно и следующие состояния будут 1, 5, 3 и 2 соответственно; тогда α-преемник A-группы $\{2, 3, 4, 5\}$ состоит из σ-множеств $\{1, 5\}$ и $\{3, 2\}$. Следовательно, ветвь α в первом уровне дерева преемников связана с A-группой $\{1, 5\}$, $\{3, 2\}$.

Следующие леммы, которые описывают некоторые свойства дерева преемников для автомата M и множества допустимых начальных состояний $A(M)$, являются прямыми результатами вышеприведенных правил и определений.

Лемма 4.1. *Пусть через $A(M)$ обозначено G_0 и пусть G_k есть A-группа, связанная с k-й ветвью пути по дереву. Тогда*: (а) *Решение G_k равно или превышает решение G_{k-1}.* (б) *Если G_{k-1} содержит кратное σ-множество, то G_k также должно содержать кратное σ-множество.*

Лемма 4.2. *Пусть $A(M)=\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_m}\}$ и пусть G есть A-группа, к которой ведет путь по дереву, описывающий входную последовательность $\mathscr{E}$. Пусть σ'_{i_k} обозначает преемника σ_{i_k} по отношению к $\mathscr{E}$. Тогда*: (а) *$\sigma'_{i_1}, \sigma'_{i_2}, \ldots, \sigma'_{i_m}$ — это m состояний, содержащихся в σ-множествах G.* (б) *σ'_{i_k} и σ'_{i_l} находятся в различных σ-множествах G тогда и только тогда, когда σ_{i_k}* и *σ_{i_l} выдают различные выходные последовательности при подаче входной последовательности $\mathscr{E}$.*

Лемма 4.3. *Пусть b_1 и b_2 обозначают две ветви, связанные с одинаковыми A-группами. Тогда ветвь, связанная с A-группой G, может быть достигнута из b_1 через l ветвей тогда и только тогда, когда ветвь, связанная с A-группой G, может быть достигнута из b_2 через l ветвей.*

4.7. Диагностическое дерево

Дерево преемников, определенное в предыдущем параграфе, по своему протяжению бесконечно и как таковое не имеет практического применения. В этом разделе мы дадим определение «усеченного» варианта дерева преемников путем формулировки ряда «правил завершения». Правило завершения определяет, когда ветвь может быть оставлена в качестве *оконечной ветви*, т. е. ветви, которая не порождает каких-либо ветвей следующего уровня.

Следующие правила завершения определяют структуру, которую будем называть *диагностическим деревом*.

Определение 4.1. Диагностическое дерево есть дерево преемников, в котором ветвь b k-го уровня становится

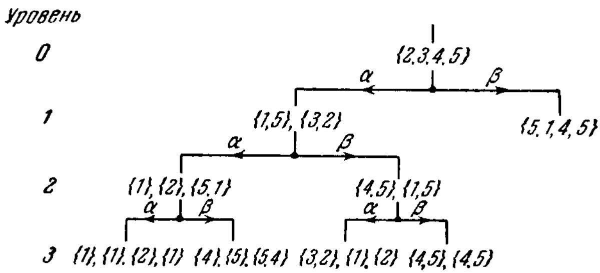


Рис. 4.7. Диагностическое дерево для $A17$ и множества допустимых начальных состояний $\{1, 2\}$.

оконечной, если удовлетворяется одно из следующих условий: (1) A-группа, связанная с b, содержит кратное σ-множество. (2) A-группа, связанная с b, связана с некоторой ветвью уровня, предшествующего k-му. (3) Имеется ветвь k-го уровня (возможно, сама ветвь b), связанная с простой A-группой.

Условие (3) подразумевает, что первый уровень, который содержит ветвь, связанную с простой A-группой, является также последним уровнем в диагностическом дереве. Дерево, последний уровень которого является k-м, называется деревом *высоты* k. Рис. 4.7 показывает, как строится диагностическое дерево для автомата $A17$, представленного на рис. 4.3, и для множества допустимых начальных состояний $\{2, 3, 4, 5\}$. Ветвь первого уровня, связанная с A-группой $\{5, 1, 4, 5\}$, является оконечной в силу правила (1). Очевидно, что на третьем уровне A-группа $\{1\}, \{1\}, \{2\}, \{1\}$ является простой; поэтому в силу правила (3) все ветви на третьем уровне являются оконечными. В качестве другого примера на рис. 4.8 показано диагностическое дерево для $A17$ и множества допустимых начальных состояний $\{1, 2\}$. Ветвь первого уровня, связанная с A-группой $\{1, 1\}$, является оконечной в силу

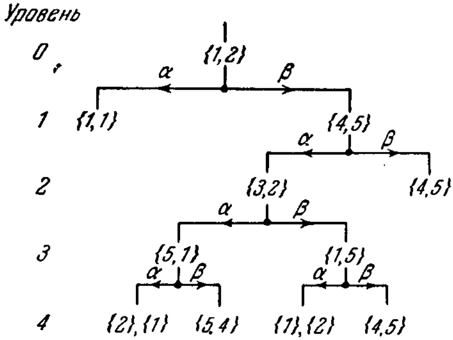


Рис. 4.8. Диагностическое дерево для $A17$ и множества допустимых начальных состояний (1, 2).

правила (1). Ветвь второго уровня, связанная с A-группой $\{4, 5\}$, является оконечной в силу правила (2), так как эта A-группа уже связана с ветвью первого уровня. Очевидно, что в четвертом уровне A-группа $\{2\}$, $\{1\}$ является простой; поэтому в силу правила (3) все ветви на четвертом уровне являются оконечными.

Лемма 4.4. *Высота диагностического дерева, построенного для автомата M с n состояниями и множества допустимых начальных состояний мощности m, определяется величиной h, где*

$$h \leqslant (m-1)\, n^m. \tag{4.3}$$

Доказательство. Пусть A-группа G состоит из σ-множеств $g_1, g_2, \ldots, g_r$, где мощность g_i есть m_i. Множество чисел $m_1, m_2, \ldots, m_r$ называется *распределением размещения* G. Число различных A-групп, имеющих то же распределение размещения, что и G, может достигать

$$n^{m_1} n^{m_2} \ldots n^{m_r} = n^m. \tag{4.4}$$

Теперь, если $A(M)$ обозначено через G_0, а G_k есть A-группа, связанная с k-й ветвью пути по дереву, то либо распределение размещения для G_k такое же, как для G_{k-1}, либо, по лемме 4.1, решение G_k превышает решение G_{k-1}. Следовательно, если $G_j, G_{j+1}, \ldots, G_{j+n^m-1}$ различны и имеют одинаковое решение r, то G_{j+n^m} должно быть либо тождественным с одной из предыдущих A-групп, либо иметь решение $r' \geqslant r+1$. По индукции, число последовательных A-групп с решением r или меньшим таких, что никакие две группы не одинаковы, составляет, как максимум, rn^m. В частности, число последовательных A-групп с решением $m-1$ или менее таких, что никакие две группы не одинаковы, достигает $(m-1)n^m$. Следовательно, если $G_0, G_1, \ldots$ $\ldots, G_{(m-1)n^m-1}$ различны и не просты, то $G_{(m-1)n^m}$ должна либо быть одинаковой с одной из предшествующих A-групп, либо быть простой. Таким образом, путь, который не заканчивается на $[(m-1)n^m]$-й ветви в силу правила (2), должен заканчиваться на этой ветви в силу правила (3). Следовательно, никакой путь в диагностическом дереве не может состоять из более чем $(m-1)n^m$ ветвей, и тем самым лемма доказана.

Во всех конкретных случаях h существенно меньше, чем граница, выраженная формулой (4.3), так как в формулу (4.3) мы не включили влияние правила (1) на длину пути или влияние на длину пути A-групп, связанных с другими путями. Лемма 4.4 доказывает, по крайней мере, что число уровней в диагностическом дереве конечно и что поэтому построение такого дерева представляет собой конечный процесс.

Диагностическим путем будем называть любой путь в диагностическом дереве, оконечная ветвь которого связана с простой A-группой. *Диагностической последовательностью* для M и $A(M) = \{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_m}\}$ будем называть любую входную последовательность, которая, будучи приложена к $M|\sigma_{i_1}, M|\sigma_{i_2}, \ldots, M|\sigma_{i_m}$, дает в результате m различных выходных последовательностей. Тогда из леммы 4.2 следует

Лемма 4.5. *Входная последовательность, описанная диагностическим путем в диагностическом дереве, построенном для M и $A(M)$, есть диагностическая последовательность для M и $A(M)$.*

Минимальная диагностическая последовательность для M и $A(M)$, обозначаемая через $\mathscr{E}(A)$, есть кратчайшая диагностическая последовательность для M и $A(M)$. *Усеченные пути* диагностического дерева, построенного для M и $A(M)$, представляют собой пути, имеющиеся в дереве преемников, но отсутствующие в диагностическом дереве в силу правила (1) или (2).

Лемма 4.6. *Усеченные пути диагностического дерева, построенного для M и $A(M)$, не описывают минимальных диагностических последовательностей.*

Доказательство. Если путь усечен в силу правила (1), то он оканчивается некоторой ветвью b, связанной с A-группой, которая содержит кратное σ-множество. По лемме 4.1, каждый путь, проходящий через b в дереве преемников, должен приводить к A-группе, которая содержит кратное σ-множество. Следовательно, такой путь не может вести к простой A-группе и потому не может быть диагностическим путем. Рассмотрим теперь усеченный в силу правила (2) путь, оканчивающийся на j-м уровне ветви b_j, которая связана с A-группой G. Тогда должна существовать ветвь b_i i-го уровня, где $i < j$, также связанная с G. По лемме 4.3, если в дереве преемников простая A-группа может быть достигнута из b_j через l ветвей, то простая A-группа также может быть достигнута из b_i через l ветвей. Следовательно, если в дереве преемников диагностический путь проходит через b_j, то через b_i должен также проходить диагностический путь; кроме того, последний должен быть более коротким, чем предыдущий, так как $i < j$. Следовательно, если дерево преемников содержит диагностический путь, который проходит через b_j, то этот путь не может быть описан минимальной диагностической последовательностью.

Теорема 4.2. *Множество последовательностей, описываемых диагностическими путями в диагностическом дереве, построенном для автомата M и множества допустимых начальных состояний $A(M)$, представляет собой множество всех минимальных диагностических последовательностей для M и для $A(M)$.*

Доказательство. По лемме 4.6 множество диагностических путей, представляемых диагностическим деревом, должно содержать пути, которые описывают все минимальные диагностические последовательности для M и $A(M)$. Так как в силу правила (3) все диагностические пути, представляемые деревом, имеют одинаковую длину, то все они должны быть минимальными. Если диагностическое дерево не представляет диагностических путей, то все эти пути оканчиваются в силу правил (1) и (2), и, следовательно, по лемме 4.6, для M и $A(M)$ не существует диагностической последовательности.

4.8. Простые безусловные диагностические эксперименты

Результаты, полученные в предыдущем параграфе, наводят на мысль о методе решения диагностической задачи для m состояний с помощью кратчайшего простого безусловного эксперимента во всех случаях, когда решение с помощью такого эксперимента существует.

Алгоритм 4.2. Даны автомат M и его множество допустимых начальных состояний

$$A(M)=\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_m}\}.$$

Требуется найти начальное состояние M с помощью кратчайшего простого безусловного эксперимента. (1) Построим диагностическое дерево для M и $A(M)$. (2) Найдем любую диагностическую последовательность $\mathscr{E}(A)$, описываемую этим деревом. Если ни одна такая последовательность деревом не описывается, то не существует решения с помощью простого безусловного эксперимента. (3) Перечислим реакции $M|\sigma_{i_1}$, $M|\sigma_{i_2}$, $\ldots$, $M|\sigma_{i_m}$ на $\mathscr{E}(A)$. (4) Подадим $\mathscr{E}(A)$ на M и зафиксируем реакцию. Начальным состоянием автомата является состояние σ_{i_k}, для которого реакция, упомянутая в (3), совпадает с зафиксированной реакцией.

Алгоритм 4.2 может быть продемонстрирован на примере автомата $A17$, показанного на рис. 4.3, и множества допустимых начальных состояний $\{2, 3, 4, 5\}$. В этом случае диагностическое дерево, представленное на рис. 4.7, показывает, что минимальной диагностической последовательностью является последовательность $\alpha\alpha\alpha$. В таблице 4.7 перечислены реакции состояний 2, 3, 4 и 5 на $\alpha\alpha\alpha$. Эти реакции, как можно было ожидать, являются различными и могут служить в качестве критерия для распознавания начального состояния $A17$, когда оно принадлежит заданному множеству допустимых начальных состояний. Другой пример приведен на рис. 4.8, выявляющем, что минимальными диагностическими последовательностями для $A17$ и множества допустимых начальных состояний $\{1, 2\}$ являются последовательности $\beta\alpha\alpha\alpha$ и $\beta\alpha\beta\alpha$. Для $m=2$ диагностическая задача сводится к диагностической задаче для двух состояний, для которой по теореме 4.1 всегда существует решение с помощью простого безусловного эксперимента. В этом случае минимальная диагностическая последовательность может быть более удобно определена через таблицы P_k, как описано в § 4.4. Для $m > 2$ решение посредством простого безусловного эксперимента существует не всегда, как показано с помощью диагностического дерева для $A17$ и множества допустимых начальных состояний $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, изображенных на рис. 4.9.

Таблица 4.7

Реакции $A17$ на $\alpha\alpha\alpha$

Начальное состояние	Реакция на $\alpha\alpha\alpha$
2	000
3	010
4	101
5	100

Используя лемму 4.4, мы теперь можем подвести следующие итоги.

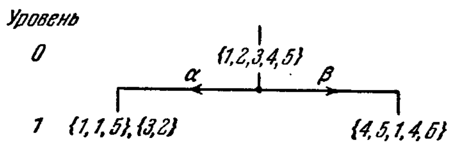


Рис. 4.9. Диагностическое дерево для $A17$ и множества допустимых начальных состояний $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Теорема 4.3. *Если диагностическая задача для автомата с n состояниями и m допустимыми состояниями вообще может быть решена путем проведения простого безусловного эксперимента, то она может быть решена путем простого безусловного эксперимента длины l, где*

$$l \leqslant (m-1)n^m, \tag{4.5}$$

Решение диагностической задачи для m состояний непосредственно может быть применено к следующей задаче: известно, что данный автомат M является автоматом M_1 в состоянии, принадлежащем множеству $A(M_1)$, или автоматом M_2 в состоянии, принадлежащем множеству $A(M_2)$, ..., или автоматом M_N в состоянии, принадлежащем множеству $A(M_N)$. Требуется распознать автомат M и его начальное состояние. В предположении, что $M_1, M_2, \ldots, M_N$ являются сравнимыми и для них имеются таблицы переходов, вышеупомянутая задача в точности представляет собой диагностическую задачу для m состояний для расщепляемого автомата $\Delta(M_1, M_2, \ldots, M_N)$ и множества допустимых начальных состояний $A(M_1) \cup A(M_2) \cup \ldots \cup A(M_N)$. Основное предположение о том, что данный автомат M является минимальным, в данном случае означает, что каждый автомат M_i минимален и что ни одно состояние в автомате M_i не является эквивалентным ни одному состоянию в автомате M_j $(j \neq i)$.

4.9. Простые условные диагностические эксперименты

Рассмотрим в диагностическом дереве для M и $A(M)$ путь, который ведет к A-группе G, содержащей простое σ-множество, например $\{\sigma'_i\}$ (сама G не обязательно является простой, так как она может содержать другие непростые σ-множества). Если этот путь описывает входную последовательность $\mathscr{E}$, то $A(M)$ должно содержать состояние, например σ_i, преемником которого по отношению к $\mathscr{E}$ является состояние σ'_i. Так как множество $\{\sigma'_i\}$ в G является одноэлементным, то реакция σ_i на $\mathscr{E}$, по лемме 4.2, не может быть приписана никакому состоянию из $A(M)$, за исключением σ_i. Следовательно, если случайно σ_i является истинным начальным состоянием M, то его можно распознать входной последовательностью, которая не обязательно описывается диагностическим путем. Используя этот факт, можно применять минимальные диагностические последовательности по частям, а не целиком, в надежде, что начальное состояние таково, что его можно распознать с использованием лишь части всей последовательности. Эта схема составляет решение диагностической задачи для m состояний с помощью простого условного эксперимента.

Деление минимальной диагностической последовательности на подпоследовательности выполняется следующим образом. Пусть $\mathscr{E}_k$ есть k-я подпоследовательность и пусть G_k представляет собой A-группу, к которой ведет путь, описываемый $\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2 \ldots \mathscr{E}_k$; обозначим $A(M)$ через G_0. Тогда $\mathscr{E}_k$ есть подпоследовательность, описываемая подпутем, который ведет от G_{k-1} к первой A-группе, которая содержит, по крайней мере, одно более простое σ-множество, чем G_{k-1}. Так как решение G_0 равно 1 и так как число σ-множеств в A-группе не может превышать мощности m, соответствующей $A(M)$, то число подпоследовательностей, полученных таким образом, не может превышать $m-1$. Так, например, автомат $A17$ на рис. 4.3 и множество допустимых начальных состояний $\{2, 3, 4, 5\}$ дают $G_0 = \{2, 3, 4, 5\}$, $G_1 = \{1\}, \{2\}, \{5, 1\}$, $G_2 = \{1\}, \{1\}, \{2\}, \{1\}$; следовательно, $\mathscr{E}_1 = \alpha\alpha$ и $\mathscr{E}_2 = \alpha$ (см. рис. 4.7). После того как определены подпоследовательности, условный эксперимент может быть выполнен следующим образом.

Алгоритм 4.3. Даны автомат M, его множество допустимых начальных состояний $A(M) = \{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_m}\}$ и разделенная на части диагностическая последовательность $\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2 \ldots \mathscr{E}_r$; требуется распознать начальное состояние M с помощью простого условного эксперимента. (1) Составим перечень реакций $M|\sigma_{i_1}$, $M|\sigma_{i_2}, \ldots, M|\sigma_{i_m}$ на $\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2 \ldots \mathscr{E}_r$. В соответствии с разделением входной последовательности разделим каждую реакцию на r подпоследовательностей. Пусть $k=1$. (2) Приложим $\mathscr{E}_k$ к M. (3) (а) Если реакция M на $\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2 \ldots \mathscr{E}_k$ является свойственной только одному состоянию в перечне, составленном в (1), то это состояние есть начальное состояние M. (б) Если реакция M на $\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2 \ldots \mathscr{E}_k$ является свойственной двум или более состояниям в перечне, составленном в (1), то увеличим k на 1 и возвратимся к (2).

Алгоритм 4.3 может быть продемонстрирован на примере автомата $A17$ и множества допустимых начальных состояний $\{2, 3, 4, 5\}$, для которых мы имеем $\mathscr{E}_1 = \alpha\alpha$ и $\mathscr{E}_2 = \alpha$. В таблице 4.8 дан перечень реакций на последовательность $\alpha\alpha\alpha$, разделенную, как сказано в шаге 1. Если оказалось, что начальным состоянием $A17$ является 2, то реакцией является 00, что может быть свойственно только состоянию 2; следовательно, в данном случае диагностический эксперимент требует только двух входных символов. Если оказалось, что начальным состоянием является 5, то реакция на $\alpha\alpha$ есть 10, что не может быть свойственно одному только состоянию 5 (на основе этого ответа начальным состоянием может быть или 4, или 5), и, следовательно, для того чтобы завершить эксперимент, требуется вторая последовательность.

Таблица 4.8

Расчлененные реакции $A17$ **на** $\alpha\alpha\alpha$

Начальное состояние	Реакции на	
	$\alpha\alpha$	α
2	00	0
3	01	0
4	10	1
5	10	0

Очевидно, что всегда, когда диагностическая задача для m состояний может быть решена простым безусловным экспериментом, она всегда может быть решена также простым условным экспериментом, длина которого никогда не превосходит длину безусловного эксперимента и порядок которого никогда не превышает $m-1$. Преимущество такого условного эксперимента заключается в том, что он может закончиться раньше, чем безусловный эксперимент. Конечно, точная длина условного эксперимента не может быть оценена заранее, так как она зависит от истинного начального состояния, которое остается неизвестным до тех пор, пока эксперимент не закончится.

Хотя из решения диагностической задачи для m состояний путем проведения простого безусловного эксперимента следует решение путем проведения простого условного эксперимента, обратное неверно. Имеются случаи, когда начальное состояние не может быть распознано никаким простым безусловным экспериментом, но может быть распознано простым условным экспериментом. Примером служит автомат $A21$ на рис. 4.10 и множество допустимых начальных состояний $\{1, 2, 3, 4\}$. Ясно, что любая минимальная диагностическая последовательность для данной задачи должна начинаться с α. Любая последовательность, начинающаяся с $\alpha\alpha$, дает одинаковые реакции, если $A21$ находится в состоянии 1 или 2; любая последовательность, начинающаяся с $\alpha\beta$, дает одинаковые реакции, если $A21$ находится в состоянии 3 или 4. Следовательно, не существует последовательности, реакции на которую всех четырех допустимых состояний являются различными. Однако если прикладывается α и затем наблюдается реакция, то имеется возможность определить, находится начальное состояние в $\{1, 2\}$ (когда реакция равна 0) или в $\{3, 4\}$ (когда реакция равна 1). Если найдено, что начальное состояние находится в $\{1, 2\}$, то может быть приложен символ β, который дает 0, если начальное состояние есть 1, и 1, если начальное состояние есть 2; если найдено, что начальное состояние находится в $\{3, 4\}$, то может быть приложен символ α, который дает 1, если начальное состояние

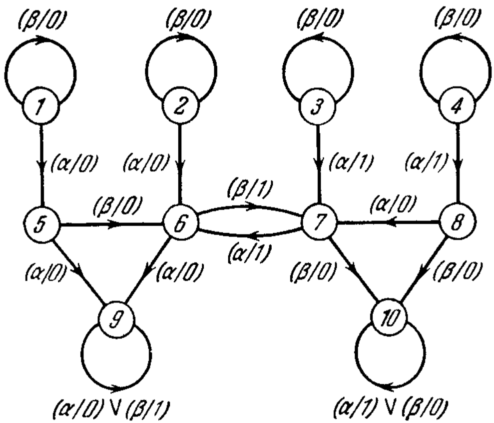


Рис. 4.10. Автомат $\dot{A}21$.

есть 3, и 0, если начальное состояние есть 4. Таким образом, начальное состояние может быть распознано с помощью простого условного эксперимента порядка 2 и длины 2. В заключение имеем следующую теорему.

Теорема 4.4. *Каждая диагностическая задача для m состояний, которая может быть решена с помощью простого безусловного эксперимента длины l, может быть также решена с помощью простого условного эксперимента длины l или меньше и порядка $m - 1$ или меньше. Имеются диагностические задачи для m состояний, которые не могут быть решены с помощью простого безусловного эксперимента, но могут быть решены с помощью простого условного эксперимента.*

Условный эксперимент, описанный алгоритмом 4.3, по существу, является безусловным экспериментом со способностью к раннему завершению, основанной на наблюдении реакций. Поэтому такой условный эксперимент зависит от существования безусловного эксперимента и ни в коем случае не является общим. Более общим условным экспериментом является эксперимент, в котором после приложения любого входного символа на основе наблюдаемой реакции исключается как можно больше допустимых состояний, т. е. рассматриваются только те допустимые состояния, которым

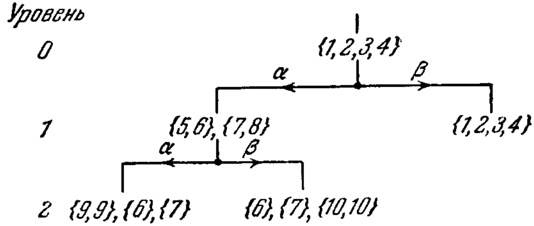


Рис. 4.11. Диагностическое дерево для $A21$ и множества допустимых начальных состояний $\{1, 2, 3, 4\}$.

могут быть приписаны прошлые реакции. В терминах дерева преемников это означает, что путь, который ведет к A-группе, содержащей кратное σ-множество, может быть еще использован для построения диагностического эксперимента, так как кратное σ-множество может быть получено из допустимых состояний, которые были ранее исключены. Этот факт демонстрируется диагностическим деревом для автомата $A21$ и множества допустимых начальных состояний $\{1, 2, 3, 4\}$, показанным на рис. 4.11. Хотя пути, описывающие $\alpha\alpha$ и $\alpha\beta$, ведут к A-группам, содержащим кратные σ-множества $\{9, 9\}$ и $\{10, 10\}$ соответственно, эти σ-множества могут быть исключены на основе реакции на первый символ α; после того как приложено α, могут быть исключены или состояния 1 и 2, как допустимые состояния (в этом случае можно пренебречь $\{9, 9\}$), или состояния 3 и 4 (в этом случае можно пренебречь $\{10, 10\}$).

Обобщая предыдущие замечания, можно отметить, что простой условный эксперимент для автомата M и его множества допустимых начальных состояний

$$A(M) = \{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_m}\}$$

может быть реализован, если дерево преемников для M и $A(M)$ содержит m путей, природа которых указана на рис. 4.12. На этом рисунке σ'_{i_h} обозначает преемника σ_{i_h}; любой из m путей, показанных на рисунке, может полностью перекрывать какой-либо из остальных путей. В добавление

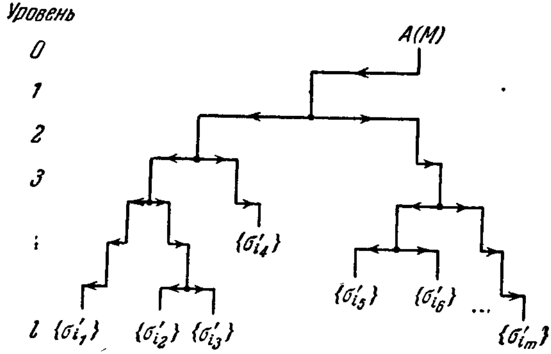


Рис. 4.12. Пути для простого условного диагностического эксперимента.

к таким путям простой условный эксперимент требует ряда правил: (1) правило для выбора первого входного символа в эксперименте; (2) правило выбора $(k+1)$-го входного символа в эксперименте при условии, что дана реакция на предыдущие k символов; (3) совокупность правил, которые должны давать в результате входную последовательность, описываемую путем, заканчивающимся в $\{\sigma'_{i_h}\}$ $(h=1, 2, \ldots, m)$, если истинное начальное состояние есть состояние σ_{i_h} из $A(M)$.

Посредством доказательства, подобного доказательству леммы 4.4, может быть показано, что если множество путей длины $(m-1)n^m$ или меньшей не имеет свойств, отмеченных на рис. 4.12, то никакое множество путей любой длины не имеет этих свойств. Таким образом, мы имеем следующую теорему.

Теорема 4.5. *Если диагностические задачи для автомата с n состояниями и m допустимыми состояниями вообще могут быть решены путем проведения простого условного эксперимента, то они могут быть решены* *с помощью простого условного эксперимента длины l, где*

$$l \leqslant (m-1)n^m. \tag{4.6}$$

Для того чтобы определить, может ли быть реализован простой условный эксперимент для заданных M и $A(M)$, определяют сначала, существует ли требуемое множество путей. Если это так, то составляют перечень всех возможных совокупностей правил для выбора входной последовательности. Если существует совокупность правил, которые выполняют оговоренные выше условия (1), (2) и (3), то такой эксперимент существует, и эта совокупность может быть использована для его выполнения. Если совокупность правил, удовлетворяющая этим условиям, не существует, то диагностическая задача для M и $A(M)$ не может быть решена с помощью простого условного эксперимента. По теореме 4.4, из этого следует, что задача не может быть решена никаким простым экспериментом — безусловным или условным.

Чтобы убедиться в том, что имеются случаи, когда диагностическая задача не может быть решена никаким простым экспериментом — безусловным или условным, рассмотрим автомат $A21$ на рис. 4.10 и множество допустимых начальных состояний $\{5, 6, 7, 8\}$. Любая последовательность или подпоследовательность, начинающаяся с α, заставляет состояния 5 и 6 перейти в состояние 9 с одинаковыми реакциями; любая последовательность или подпоследовательность, начинающаяся с β, заставляет состояния 7 и 8 перейти в состояние 10 с одинаковыми реакциями. Следовательно, уже после приложения первого входного символа (для того чтобы начать безусловный или условный эксперимент) нет возможности когда-либо различить состояние 5 и 6 или состояние 7 и 8. Таким образом, мы имеем следующую теорему.

Теорема 4.6. *Имеются диагностические задачи для m состояний, которые не могут быть решены ни с помощью простых безусловных экспериментов, ни с помощью простых условных экспериментов.*

4.10. Кратные безусловные диагностические эксперименты

Очевидный недостаток простого эксперимента заключается в том, что он может оказаться разрушительным; действительно, если имеется только один экземпляр автомата, то, вообще говоря, нет способа сознательно восстановить начальное состояние для того, чтобы провести новый эксперимент, когда оказалось, что предыдущий эксперимент неудачен. Таким образом, при проведении простых экспериментов полезная информация, которую дает неудающийся эксперимент, никогда не может быть использована для проведения дальнейших экспериментов, так как в то время, когда информация становится доступной, начальное состояние больше нельзя распознать. Если имеется достаточное число экземпляров данной машины, то можно провести ряд экспериментов, каждый из которых сам по себе недостаточен для того, чтобы решить диагностическую задачу, но в совокупности они дают достаточную информацию для того, чтобы распознать начальное состояние. Например, мы пришли к заключению, что нет простого эксперимента, который решает диагностическую задачу для автомата $A21$, представленного на рис. 4.10, и множества допустимых начальных состояний $\{5, 6, 7, 8\}$. Однако если имеются два экземпляра $A21$, то решение может быть достигнуто следующим образом. Приложим $\alpha\alpha$ к первому экземпляру $A21$ и β — ко второму экземпляру. Если реакция первого экземпляра есть 01, то начальное состояние есть 8; если реакция есть 10, то начальное состояние есть 7; если реакция есть 00, то начальное состояние есть либо 5, либо 6. В последнем случае реакция второго экземпляра есть 0, если начальное состояние есть 5, и 1, если начальное состояние — 6. Таким образом, диагностическая задача для $A21$ и множества допустимых начальных состояний $\{5, 6, 7, 8\}$ может быть решена кратным экспериментом кратности 2 и длины 3.

В данном месте полезно представить следующую теорему.

Теорема 4.7. *В минимальном автомате с n состояниями любое множество r состояний* ($2 \leqslant r \leqslant n$) *содержит, по меньшей мере, два состояния, которые являются* $(n-r+1)$*-различимыми.*

Доказательство. По лемме 3.9, число состояний в каждом классе P_k минимального автомата с n состояниями не превышает $n-k$. Следовательно, число состояний в каждом классе P_{n-r+1} не превышает $n-(n-r+1)= = r-1$. Следовательно, по меньшей мере, два состояния в множестве r состояний должны находиться в двух различных классах P_{n-r+1} и, следовательно, являются $(n-r+1)$-различимыми.

Пусть для автомата M и множества допустимых начальных состояний $A(M)$ мощности m G_k является A-группой, состоящей из σ-множеств $g_{k1}, g_{k2}, \ldots, g_{ku}$. G_0 состоит из простого σ-множества g_{01}, где $g_{01}=A(M)$. G_{k+1} построено из G_k в соответствии со следующими правилами. Если g_{kl} имеет мощность $r \geqslant 2$, то оно должно содержать, по меньшей мере, два состояния, скажем, σ_j и σ_l, которые являются $(n-r+1)$-различимыми. Разобьем g_{kl} на такие подмножества, что два состояния принадлежат одному и тому же подмножеству тогда и только тогда, когда они дают одинаковые реакции на $\mathscr{E}(\sigma_j, \sigma_l)$, т. е. на минимальную диагностическую последовательность для $\{\sigma_j, \sigma_l\}$. Реакция на $\mathscr{E}(\sigma_j, \sigma_l)$ тех состояний, которые принадлежат данному подмножеству, называется *характеристической реакцией* этого подмножества по отношению к $\mathscr{E}(\sigma_j, \sigma_l)$. σ-множества G_{k+1} являются одноэлементными в G_k и во всех подмножествах, полученных по предыдущему правилу. Если g_{kl} не является одноэлементным, то оно всегда может быть разбито, по крайней мере, на два подмножества, так как реакции σ_j и σ_l на $\mathscr{E}(\sigma_j, \sigma_l)$ являются различными. Таким образом, если только G_k не является простым, то G_{k+1} всегда представляет собой собственное разделение G_k. Так как мощность $A(M)$ есть m, то G_{m-1} должно быть простым.

Описанный выше процесс может быть показан на структуре, называемой *деревом кратного эксперимента*, определяемой для M и $A(M)$ [1]). В этом дереве каждая ветвь k-го уровня представляет некоторое g_{kl}, а начальная ветвь представляет g_{01}. Ветвь, представляющая простое g_{kl}, является оконечной. Если g_{kl} не является простым и может быть разбито, скажем, на h подмножеств (способом, описанным в предыдущем абзаце), то ветвь, представляющая это g_{kl}, расщепляется на h ветвей следующего уровня, который представляет h подмножеств, получающихся в процессе разбиения. Используя эти правила, можно развернуть все дерево

---

[1]) Терминология, которая будет использована для дерева кратного эксперимента, такая же, как терминология, использованная для диагностического дерева.

путем построения k-го уровня на основе построенного ($k-1$)-го уровня. Так как множества g_{kl}, представленные на k-м уровне, являются σ-множествами G_k, то отсюда следует, что высота дерева не может превышать $m-1$. К тому же дерево должно давать в точности m оконечных ветвей — по одному на каждое допустимое состояние.

Для наглядности все ветви в дереве сложного эксперимента, за исключением оконечных ветвей, изображаются

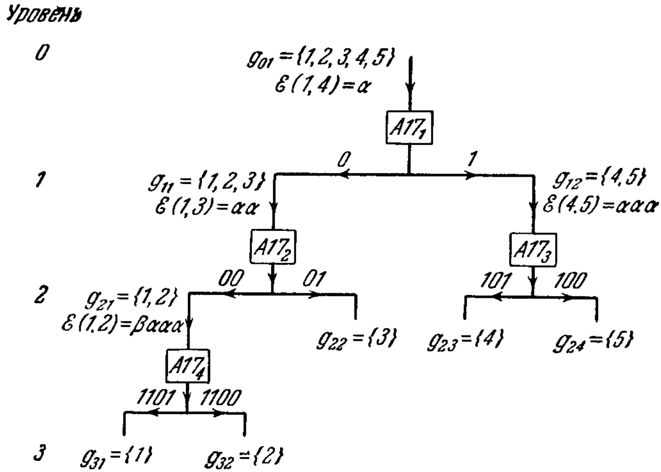


Рис. 4.13. Дерево кратного эксперимента для $A17$ и множества допустимых начальных состояний $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

в форме двухполюсных блоков, представляющих экземпляры заданного автомата. Каждая ветвь снабжается обозначением представляемого ею g_{kl}. Если g_{kl} не является однородным, ветвь также обозначается последовательностью $\mathscr{E}(\sigma_j, \sigma_l)$, примененной при разбиении g_{kl}, и характеристической реакцией g_{kl} по отношению к диагностической последовательности, соответствующей предыдущей ветви.

В качестве примера на рис. 4.13 показано дерево кратного эксперимента для автомата $A17$ (рис. 4.3) и множества допустимых начальных состояний $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Начальная ветвь представляет $g_{01}=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, которое есть заданное множество допустимых начальных состояний. Парой состояний $\{\sigma_j, \sigma_l\}$, использованной для разбиения $\mathcal{g}_{01}$, является $\{1, 4\}$. В данном случае пара состояний выбрана таким образом, чтобы она дала кратчайшее возможное $\mathcal{E}(\sigma_j, \sigma_l)$ (однако это правило выбора в данном методе несущественно). Выбор можно произвести с помощью перечня последовательностей, записанного в таблице 4.6, где $\mathcal{E}$ (1,4), очевидно, есть α. Когда α приложено к $A17$, подмножество $\{1, 2, 3\}$ множества $\mathcal{g}_{01}$ отвечает реакцией 0, а подмножество $\{4, 5\}$ — реакцией 1, что легко может быть выведено из таблицы переходов или диаграммы для $A17$. Поэтому начальная ветвь расщепляется на две ветви: ветвь, обозначенную 0, что является характеристической реакцией $\mathcal{g}_{11}=\{1, 2, 3\}$ по отношению к $\mathcal{E}$ $(1, 4)=\alpha$, и ветвь, обозначенную 1, что является характеристической реакцией $\mathcal{g}_{12}=\{4, 5\}$ по отношению к $\mathcal{E}$ $(1, 4)=\alpha$. Теперь из $\mathcal{g}_{11}$ выбирается пара состояний $\{1, 3\}$ таким же образом, как $\{1, 4\}$ была выбрана из $\mathcal{g}_{01}$. Когда к $A17$ приложено $\mathcal{E}$ $(1, 3)=\alpha\alpha$, подмножество $\{1, 2\}$ из $\mathcal{g}_{11}$ отвечает реакцией 00, а подмножество $\{3\}$ из $\mathcal{g}_{11}$ отвечает реакцией 01. Поэтому ветвь, представляющая $\mathcal{g}_{11}$, расщепляется на две ветви: ветвь, обозначенную 00, что является характеристической реакцией $\mathcal{g}_{21}=\{1, 2\}$ по отношению к $\mathcal{E}$ $(1, 3)=\alpha\alpha$, и ветвь, обозначенную 01, что является характеристической реакцией $\mathcal{g}_{22}=\{3\}$ на $\mathcal{E}$ $(1, 3)=\alpha\alpha$. Последняя ветвь является оконечной, так как $\mathcal{g}_{22}$ является одноэлементным множеством. Остаток дерева развертывается аналогичным образом.

Как только дерево кратного эксперимента для M и $A(M)$ построено, кратный эксперимент может быть проведен путем рассмотрения каждого блока на дереве как отдельного экземпляра M и приложения к каждому экземпляру особой диагностической последовательности, связанной с соответствующим блоком. Из правил, сформулированных для построения дерева, следует, что если наблюдаемая реакция всех экземпляров M, которые расположены вдоль некоторого пути по дереву, удовлетворяет перечисленным реакциям для этого пути, то начальное состояние M есть состояние, представленное конечной ветвью пути. Тогда начальное состояние может быть просто распознано путем сравнения действительных реакций экземпляров с реакциями, обозначенными вдоль m различных путей.

Для $A17$ и его множества допустимых начальных состояний $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ используются четыре экземпляра. Эти экземпляры, обозначенные $A17_1$, $A17_2$, $A17_3$, $A17_4$, подвергаются воздействию диагностических последовательностей α, $\alpha\alpha$, $\alpha\alpha\alpha$ и $\beta\alpha\alpha\alpha$ соответственно, как предписывается деревом сложного эксперимента на рис. 4.13. Если теперь оказывается, что начальное состояние $A17$ есть 2, то $A17_1$ должен дать 0, $A17_2$ должен дать 00 и $A17_4$ должен дать 1100. Так как эти реакции удовлетворяют реакциям, указанным вдоль пути по дереву, оканчивающегося в $g_{32} = \{2\}$, начальное состояние распознается как 2.

Очевидно, что действие экземпляра M, связанного с множеством g_{ki}, состоит в том, чтобы «расщепить» это множество на два или более подмножеств. Так как число расщепляющих операций, требуемых для того, чтобы разделить $A(M)$ на m одноэлементных подмножеств, не превышает $m-1$, число экземпляров, включенных в дерево кратного эксперимента, не превышает $m-1$. Так как длина диагностической последовательности для пары состояний в машине с n состояниями не может превосходить $n-1$, общая длина всех последовательностей, включенных в дерево, не может превышать $(n-1)(m-1)$. Таким образом, мы имеем следующую теорему.

Теорема 4.8. *Диагностическая задача для автомата с n состояниями и m допустимыми состояниями может всегда быть решена с помощью кратного безусловного эксперимента длины l и кратности c, где*

$$l \leqslant (n-1)(m-1), \tag{4.7}$$

$$c \leqslant m-1. \tag{4.8}$$

Граница в (4.7) существенно выше, чем величина l, встречавшаяся в большинстве задач (хотя она может быть достигнута для $m=2$), так как, по теореме 4.7, только часть примененных последовательностей должна быть длины $n-1$. Однако граница в (4.8) может быть достигнута при каждом n и $m \leqslant n$, как показано на примере автомата $A22$ с n состояниями (таблица 4.9).

Так как каждый входной символ переводит все состояния $A22$ в состояние 1, все диагностические последовательности ограничиваются одним символом. Так как каждый входной

Таблица 4.9

Автомат $A22$

	z_ν						$s_{\nu+1}$					
s_ν \ x_ν	ξ_1	ξ_2	ξ_3	...	ξ_{n-2}	ξ_{n-1}	ξ_1	ξ_2	ξ_3	...	ξ_{n-2}	ξ_{n-1}
1	1	0	0		0	0	1	1	1		1	1
2	0	1	0		0	0	1	1	1		1	1
3	0	0	1		0	0	1	1	1		1	1
.												
.												
.												
$n-2$	0	0	0		1	0	1	1	1		1	1
$n-1$	0	0	0		0	1	1	1	1		1	1
n	0	0	0		0	0	1	1	1		1	1

символ способен выполнить в точности одну операцию «расщепления» множества допустимых начальных состояний (независимо от мощности этого множества), диагностический эксперимент для m состояний для $A22$ требует в точности $m-1$ экземпляров. Дерево кратного эксперимента для $A22$ и множества допустимых начальных состояний $\{1, 2, \ldots, m\}$ показано на рис. 4.14.

Можно отметить, что, хотя метод построения кратного эксперимента может минимизировать длину входной последовательности, прикладываемой к каждому экземпляру, он, вообще говоря, не минимизирует общую длину эксперимента или его кратность. Во многих случаях как длина, так и кратность эксперимента могут быть сокращены посредством использования следующего очевидного факта. Если даны две входные последовательности $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2$, то реакция автомата M на $\mathscr{E}_1$ может быть определена по реакции M на $\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2$. Таким образом, если как $\mathscr{E}_1$, так и $\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2$ являются диагностическими последовательностями, которые должны применяться в кратном эксперименте, то в действительности должна применяться только $\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2$. Например, в кратном эксперименте, описанном на рис. 4.13, реакции $A17_1$ на α и $A17_2$ на $\alpha\alpha$ могут быть определены по реакции $A17_3$ на $\alpha\alpha\alpha$; следовательно, для эксперимента в действительности требуется только два экземпляра $A17$. Как легко можно установить, диагностическая задача для $A17$ и множества допустимых

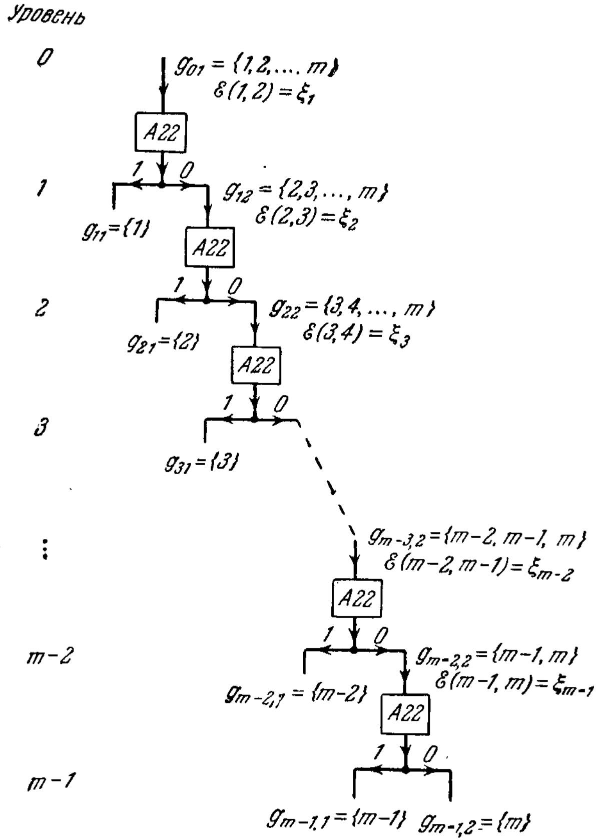


Рис. 4.14. Дерево кратного эксперимента для $A22$ и множества допустимых начальных состояний $\{1, 2, \ldots, m\}$.

начальных состояний $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ не может быть решена простым экспериментом, и, следовательно, приведенное выше упрощение обеспечивает достижение наименьшей возможной кратности для этой задачи.

4.11. Кратные условные диагностические эксперименты

Вместо приложения одновременно всех диагностических последовательностей, которые требуются для кратного эксперимента, они могут быть приложены по одной, причем каждая последовательность (за исключением первой) выбирается на основе предварительно наблюдаемых реакций. Такой условный эксперимент может быть выполнен следующим образом.

Алгоритм 4.4. Даны автомат M, его множество допустимых начальных состояний $A(M)=\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_m}\}$ и дерево кратного эксперимента для M и $A(M)$; требуется найти начальное состояние M с помощью кратного условного эксперимента. (1) Приложим входную последовательность, указанную для начальной ветви, к первому экземпляру M. Пусть $k=2$. (2) Перейдем к ветви, для которой перечисленная выходная последовательность совпадает с реакцией, данной последней примененной входной последовательностью. (3) (а) Если ветвь не является оконечной, то приложим входную последовательность, указанную для этой ветви, к k-у экземпляру M. Увеличим k на 1 и вернемся к (2). (б) Если ветвь оконечная, то одноэлементное множество $\{\sigma_{i_h}\}$, связанное с этой ветвью, содержит начальное состояние M.

Действие алгоритма 4.4 состоит в том, чтобы вести экспериментатора вдоль частного пути, который завершается в $\{\sigma_{i_h}\}$, где σ_{i_h} есть истинное начальное состояние M. Следовательно, устраняется необходимость в тех экземплярах M, которые не появляются вдоль этого пути.

Алгоритм может быть продемонстрирован деревом кратного эксперимента на рис. 4.13. Если истинное начальное состояние $A17$ есть 3, то приложение α к первому экземпляру $A17$ дает 0, который ведет к ветви, связанной с $\{1, 2, 3\}$. Соответственно последовательность, примененная ко второму экземпляру, есть $\alpha\alpha$, что дает 01 и, следовательно, ведет к ветви, связанной с (3). Тогда можно заключить, что начальное состояние $A17$ есть 3.

Максимальное число экземпляров, которое может быть нужно для решения диагностической задачи для автомата с n состояниями и m допустимыми состояниями, задается числом экземпляров, появляющихся в наиболее длинном пути соответствующего дерева сложного эксперимента. Ясно, что это число не может превышать общего числа экземпляров в дереве. Тогда, по теореме 4.8, кратность кратного условного эксперимента не превышает $m-1$. Если индивидуальные диагностические последовательности построены возможно более короткими, то, по теореме 4.7, длина эксперимента не может превосходить

$$\sum_{r=2}^{m}(n-r+1)=(n+1)(m-1)-\sum_{r=2}^{m}r=$$
$$=\frac{1}{2}(2n-m)(m-1). \tag{4.9}$$

Следовательно, мы имеем теорему.

Теорема 4.9. *Диагностическая задача для автомата с n состояниями и m допустимыми состояниями может всегда быть решена с помощью кратного условного эксперимента длины l и кратности c, где*

$$l \leqslant \frac{1}{2}(2n-m)(m-1), \tag{4.10}$$
$$c \leqslant m-1. \tag{4.11}$$

Граница в (4.10) может быть достигнута для $m=2$ и любого $n \geqslant 2$. Граница в (4.11) может быть достигнута для любого n и $m \leqslant n$, как показано на примере автомата $A22$ в таблице 4.9 и дерева кратного эксперимента на рис. 4.14: если начальное состояние $A22$ есть либо $m-1$, либо m, то для диагностической задачи для $A22$ и множества допустимых начальных состояний $\{1, 2, \ldots, m\}$ требуется в точности $m-1$ экземпляров.

Преимущество кратного условного эксперимента над кратным безусловным экспериментом может быть измерено величиной, на которую число экземпляров в дереве кратного эксперимента превышает высоту этого дерева. Таблица 4.10 представляет автомат $A23$ с n состояниями, для которого преимущество условного эксперимента над безусловным для любого множества допустимых начальных состояний является существенным. Дерево кратного эксперимента для $A23$ и множества допустимых начальных состояний $\{1, 2, \ldots, m\}$ (где $2<m<n-1$ и где как m, так и n являются четными) показано на рис. 4.15. Очевидно, что число экземпляров, включенное в дерево кратного эксперимента, есть $\frac{m}{2}+1$,

Таблица 4.10

Автомат $A23$

x_ν / s_ν	z_ν		$s_{\nu+1}$	
	α	β	α	β
1	1	1	1	1
2	1	2	1	1
3	2	2	1	1
4	2	3	1	1
5	3	3	1	1
6	3	4	1	1
. . .				
$n-3$	$\frac{n}{2}-1$	$\frac{n}{2}-1$	1	1
$n-2$	$\frac{n}{2}-1$	$\frac{n}{2}$	1	1
$n-1$	$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{2}$	1	1
n	$\frac{n}{2}$	1	1	1

а его высота есть 2. Таким образом, $\frac{m}{2}+1$ экземпляров $A23$ требуется для решения задачи с помощью безусловного эксперимента и только 2 экземпляра для решения задачи путем условного эксперимента.

Следует отметить, что метод построения кратного условного эксперимента, как и метод построения кратного безусловного эксперимента, вообще говоря, не минимизируют длину или кратность эксперимента. Длина и кратность во многих задачах могут быть уменьшены с помощью метода, описанного в конце § 4.10.

4.12. Установочное дерево

Установочное дерево, как и диагностическое дерево, есть усеченный вариант дерева преемников, полученный путем применения ряда правил завершения.

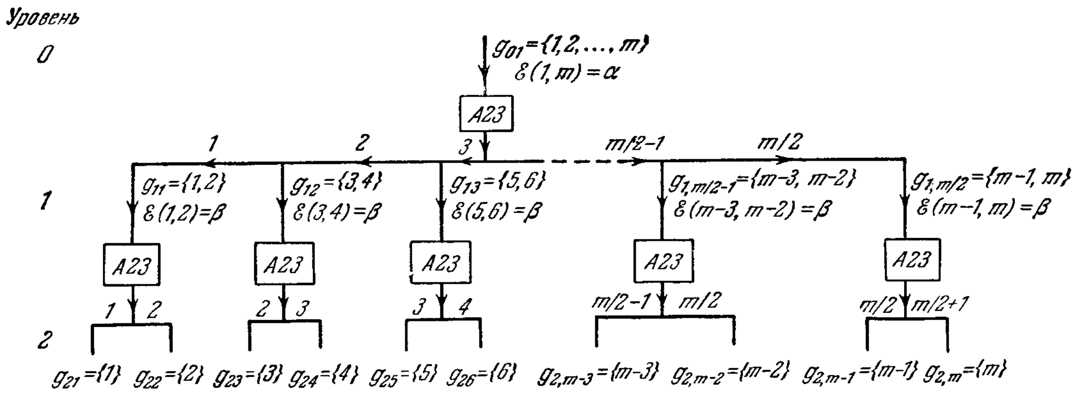


Рис. 4.15. Дерево кратного эксперимента для $A23$ и множества допустимых начальных состояний $\{1, 2, \ldots, m\}$.

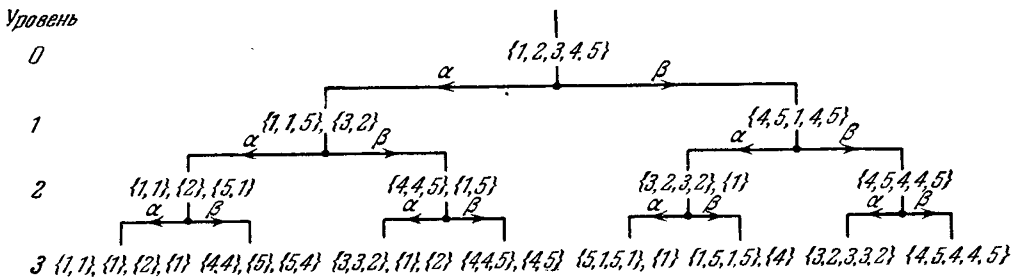


Рис. 4.16. Установочное дерево для $A17$ и множества допустимых начальных состояний $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Определение 4.2. Установочное дерево есть дерево преемников, в котором ветвь b k-го уровня становится оконечной, если выполняется одно из следующих условий: (1) A-группа, связанная с b, является связанной с некоторой ветвью в уровне, предшествующем k-му. (2) Имеется ветвь k-го уровня (возможно, сама b), связанная с однородной A-группой.

Правило (2) подразумевает, что первый уровень, который содержит ветвь, связанную с однородной A-группой, также является последним уровнем в установочном дереве. Рис. 4.16 демонстрирует, как строится установочное дерево для автомата $A17$, представленного на рис. 4.3, и множества допустимых начальных состояний $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Очевидно, что в третьем уровне A-группа $\{1, 1\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1\}$ является однородной; поэтому в силу правила 2 все ветви в третьем уровне являются оконечными.

Посредством доказательства, аналогичного доказательству, примененному в лемме 4.4, можно показать, что длина любого пути в установочном дереве для автомата M с n состояниями и m допустимыми состояниями не может превышать $(m-1)n^m$. Поэтому построение установочного дерева есть конечный процесс. В следующем параграфе будет получена граница, которая существенно ниже, чем $(m-1)n^m$.

Установочным путем будет любой путь в установочном дереве, оконечная ветвь которого связана с однородной A-группой. *Установочной последовательностью* для M и $A(M)$ будет любая входная последовательность, которая, будучи приложенной к $M|\sigma_i$ и $M|\sigma_j$, где σ_i и σ_j суть два состояния в $A(M)$, дает две различные выходные последовательности, если она переводит σ_i и σ_j в два различных состояния. Тогда лемма 4.2 дает следующую лемму.

Лемма 4.7. *Входная последовательность, описываемая установочным путем в установочном дереве, построенном для M и $A(M)$, есть установочная последовательность для M и $A(M)$.*

Минимальная установочная последовательность для M и $A(M)$, обозначаемая через $\mathscr{E}'(A)$, есть кратчайшая установочная последовательность для M и $A(M)$. *Усеченные* пути установочного дерева, построенного для M и $A(M)$, суть пути, включенные в дерево преемников, но отсутствующие в установочном дереве в силу правила 1. Следующий результат может быть доказан способом, целиком аналогичным способу, примененному в лемме 4.6.

Лемма 4.8. *Усеченные пути установочного дерева, построенного для M и $A(M)$, не описывают минимальных диагностических последовательностей.*

Таким образом, мы имеем следующую теорему — аналог теоремы 4.2.

Теорема 4.10. *Множество последовательностей, описываемых установочными путями в установочном дереве, построенном для автомата M и множества допустимых начальных состояний $A(M)$, есть множество всех минимальных установочных последовательностей для M и $A(M)$.*

4.13. Простые безусловные установочные эксперименты

Результаты, полученные в предыдущем разделе, наводят на мысль о методе решения установочной задачи для m состояний с помощью кратчайшего простого безусловного эксперимента.

Алгоритм 4.5. Даны автомат M и его множество допустимых начальных состояний $A(M)=\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_m}\}$; требуется найти конечное состояние M с помощью кратчайшего простого безусловного эксперимента. (1) Строим установочное дерево для M и $A(M)$. (2) Выбираем любую установочную последовательность $\mathscr{E}'(A)$, описываемую деревом [1]. (3) Составляем перечень реакций $M|\sigma_{i_1}$, $M|\sigma_{i_2}$, ..., $M|\sigma_{i_m}$ на $\mathscr{E}'(A)$ и состояний σ'_{i_1}, σ'_{i_2}, ..., σ'_{i_m}, в которые соответственно переходят σ_{i_1}, σ_{i_2}, ..., σ_{i_m} при подаче $\mathscr{E}'(A)$. (4) Прилагаем $\mathscr{E}'(A)$ к M и фиксируем реакцию. Конечное состояние есть состояние σ'_{i_k}, для которого реакция, внесенная в перечень в (3), совпадает с зафиксированной реакцией.

Алгоритм 4.5 может быть продемонстрирован на примере автомата $A17$ (рис. 4.3) и множества допустимых начальных состояний $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. В этом случае установочное дерево на рис. 4.16 выявляет, что минимальная установочная последовательность есть $\alpha\alpha\alpha$. Таблица 4.11 содержит перечень

[1]) В § 4.15 будет показано, что такая последовательность всегда существует.

реакций и конечных состояний для начальных состояний $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, когда применяется $\alpha\alpha\alpha$. Как и следовало ожидать, различные конечные состояния соответствуют различным реакциям и, следовательно, реакции могут служить в качестве критериев для распознавания конечного состояния $A17$ при условии, что определено множество допустимых начальных состояний.

Таблица 4.11

Реакция $A17$ на $\alpha\alpha\alpha$

Начальное состояние	Реакция на $\alpha\alpha\alpha$	Конечное состояние
1	000	1
2	000	1
3	010	1
4	101	2
5	100	1

Решение установочной задачи непосредственно может быть применено к следующей задаче. Известно, что заданный автомат M есть автомат M_1 в состоянии, принадлежащем множеству $A(M_1)$, или автомат M_2 в состоянии, принадлежащем множеству $A(M_2)$, ..., или автомат M_N в состоянии, принадлежащем множеству $A(M_N)$. Желательно распознать автомат и его конечное состояние. Если предположить, что $M_1, M_2, \ldots, M_N$ являются сравнимыми и что их таблицы переходов имеются, то указанная выше задача есть в точности установочная задача для m состояний для расщепляемого автомата $\Delta(M_1, M_2, \ldots, M_N)$ и множества допустимых начальных состояний $A(M_1) \cup A(M_2) \cup \ldots \cup A(M_N)$. В этом случае в основном предположении, что заданный автомат M является минимальным, подразумевается, что каждый автомат M_i является минимальным и что ни одно состояние любого автомата M_i не является эквивалентным какому-нибудь состоянию автомата M_j $(j \neq i)$.

4.14. Простые условные установочные эксперименты

Рассмотрим путь в установочном дереве для M и $A(M)$, который ведет к A-группе G, содержащей однородное σ-множество, скажем $\{\sigma'_i, \sigma'_i, \ldots, \sigma'_i\}$, где σ'_i встречается h раз (так как G может содержать другие σ-множества, которые не являются однородными, сама G не обязательно является однородной). Если этот путь описывает входную последовательность $\mathscr{E}$, то тогда $A(M)$ должно содержать некоторое число h состояний, скажем $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_h}$, все преемники которых по отношению к $\mathscr{E}$ суть σ'_i. Так как $\{\sigma'_i, \sigma'_i, \ldots, \sigma'_i\}$ является однородным в G, то реакция σ_{i_1} или $\sigma_{i_2}, \ldots$, или σ_{i_h} на $\mathscr{E}$, по лемме 4.2, не может быть приписана никакому конечному состоянию, за исключением σ'_i. Следовательно, если σ_{i_1} или $\sigma_{i_2}, \ldots$, или σ_{i_h} случайно является истинным начальным состоянием M, то конечное состояние M может быть распознано с помощью входной последовательности, которая не обязательно описывается установочным путем. Используя этот факт, можно применять минимальную установочную последовательность не целиком, а по частям, в надежде, что конечное состояние является таким, что оно может быть распознано с помощью только части всей последовательности. Эта схема составляет решение диагностической задачи для m состояний с помощью простого условного эксперимента.

Расчленение минимальной установочной последовательности на подпоследовательности выполняется следующим образом. Пусть $\mathscr{E}_k$ является k-й подпоследовательностью и пусть G_k является A-группой, к которой ведет путь, описывающийся последовательностью $\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2 \ldots \mathscr{E}_k$; обозначим $A(M)$ через G_0. Тогда $\mathscr{E}_k$ есть последовательность, описываемая подпутем, который ведет от G_{k-1} к первой A-группе, которая содержит, по крайней мере, на одно однородное σ-множество больше, чем G_{k-1}. Так как решение G_0 есть 1 и так как число σ-множеств в A-группе не может превышать мощность $A(M)$, равную m, число подпоследовательностей, произведенных таким образом, не может превышать $m-1$. Например, автомат $A17$, представленный на рис. 4.3, и множество допустимых начальных состояний $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ дают: $G_0 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $G_1 = \{1, 1\}, \{2\}, \{5, 1\}$; $G_2 = \{1, 1\}, \{1\}, \{2\}, \{1\}$, и, следовательно, $\mathscr{E}_1 = \alpha\alpha$, а $\mathscr{E}_2 = \alpha$ (см. рис. 4.16). Если определены подпоследовательности, условный эксперимент может быть выполнен следующим образом.

Алгоритм 4.6. Даны автомат M, его множество допустимых начальных состояний $A(M) = \{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_m}\}$ и расчлененная установочная последовательность $\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2 \ldots \mathscr{E}_r$; распознать конечное состояние M с помощью условного эксперимента. (1) Составляем перечень реакций $M \mid \sigma_{i_1}, M \mid \sigma_{i_2}, \ldots$

..., $M|\sigma_{i_m}$ на $\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2 \ldots \mathscr{E}_r$. Расчленяем каждую реакцию на r подпоследовательностей так, чтобы они соответствовали расчленению входной последовательности. После каждой выходной подпоследовательности вносим в перечень соответствующее конечное состояние. Полагаем $k=1$. (2) Прилагаем $\mathscr{E}_k$ к M. (3) (а) Если реакцию M на $\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2 \ldots \mathscr{E}_k$ можно приписать только одному конечному состоянию в перечне, составленном в (1), то это состояние есть конечное состояние M. (б) Если реакцию M на $\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2 \ldots \mathscr{E}_k$ можно приписать двум или более различным конечным состояниям в перечне, составленном в (1), то увеличиваем k на 1 и возвращаемся к (2).

Алгоритм 4.6 может быть продемонстрирован автоматом $A17$ и множеством допустимых начальных состояний $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, для которых мы имеем $\mathscr{E}_1 = \alpha\alpha$ и $\mathscr{E}_2 = \alpha$. Перечень реакций на $\alpha\alpha\alpha$, расчлененных, как определено в шаге 1, и соответствующих конечных состояний дан в таблице 4.12. Если оказалось, что начальное состояние есть 1

Таблица 4.12

Расчлененные реакции $A17$ на $\alpha\alpha\alpha$

Начальное состояние	Реакция на $\alpha\alpha$	Конечное состояние	Реакция на α	Конечное состояние
1	00	1	0	1
2	00	1	0	1
3	01	2	0	1
4	10	5	1	2
5	10	1	0	1

или 2, то реакция на $\alpha\alpha$ есть 00, что может быть приписано только конечному состоянию 1; следовательно, в этом случае установочный эксперимент требует только двух входных символов. Если оказалось, что начальное состояние есть 5, то реакция на $\alpha\alpha$ есть 10, что не может быть однозначно приписано никакому одному конечному состоянию (на основе этой реакции конечное состояние может быть либо 1, либо 5), и, следовательно, для того чтобы закончить эксперимент, требуется вторая подпоследовательность.

В заключение мы можем сделать следующее утверждение.

Теорема 4.11. *Каждая установочная задача для m состояний, которая может быть решена простым* *безусловным экспериментом длины l, может быть решена простым условным экспериментом длины l или меньшей и порядка $m-1$ или меньше.*

Таким образом, преимущество условного эксперимента состоит в том, что он может закончиться раньше, чем безусловный эксперимент. Точная длина условного эксперимента, разумеется, не может быть оценена заранее, так как она зависит от истинного начального состояния, которое остается неизвестным до тех пор, пока эксперимент не завершится.

4.15. Регулярные безусловные установочные эксперименты

Минимальная длина установочного эксперимента достигается за счет построения установочного дерева, которое в задачах, включающих большие множества допустимых начальных состояний, становится весьма громоздким. Если довольствоваться установочным экспериментом, длина которого не обязательно минимальна, то имеются более простые методы построения. Установочный эксперимент, построенный с помощью метода, который не гарантирует минимальной длины, будет называться *регулярным установочным экспериментом.*

Рассмотрим дерево преемников для автомата M с n состояниями и множеством допустимых начальных состояний $A(M)$. Пусть b есть ветвь, связанная с A-группой G, состоящей из σ-множеств $g_1, g_2, \ldots, g_u$, в которой, по крайней мере, одно σ-множество, скажем g_h, не является однородным. Если g_h содержит r состояний, то оно должно содержать, по крайней мере, два состояния, скажем σ_i и σ_j, которые являются $(n-r+1)$-различимыми. Следовательно, подпуть, начинающийся с b и описывающийся последовательностью $\mathscr{E}(\sigma_i, \sigma_j)$, должен вести к A-группе G', которая состоит, по меньшей мере, из $(u+1)$-го σ-множества. Следовательно, если G является неоднородной, то всегда может быть найден подпуть длины $n-r+1$ или меньшей, который ведет от G к A-группе, решение которой превышает решение G. Описываемая таким подпутем подпоследовательность называется *регулярной подпоследовательностью* G. Таким образом, мы имеем способ, с помощью которого можем проследить установочный путь в любом заданном дереве преемников и, следовательно, построить установочную последовательность для любого M и $A(M)$.

Алгоритм 4.7. Заданы автомат M и его множество допустимых начальных состояний $A(M)$; требуется найти установочную последовательность для M и $A(M)$. (1) Пусть $A(M)$ является G_0. Полагаем $k=0$. (2) (а) Если G_k не является однородным, то определим регулярную подпоследовательность, скажем $\mathscr{E}_k$, для G_k. Пусть $\mathscr{E}_k$-преемником G_k является G_{k+1}. Увеличиваем k на 1 и возвращаемся к (2). (б) Если G_k однородно, то $\mathscr{E}_0\mathscr{E}_1 \ldots \mathscr{E}_{k-1}$ есть установочная последовательность для M и $A(M)$.

Так как решение $A(M)$ есть 1 и так как решение любой A-группы не может превышать числа допустимых состояний m, то число подпоследовательностей, производимых алгоритмом 4.7, не превышает $m-1$. Для автомата с n состояниями длина минимальной диагностической последовательности для любой пары состояний не может превосходить $n-1$; следовательно, длина каждой подпоследовательности в установочной последовательности, выданная алгоритмом 4.7, не может превосходить $n-1$. Таким образом, мы имеем следующую теорему.

Теорема 4.12. *Установочная задача для автомата с n состояниями и m допустимыми состояниями всегда может быть решена с помощью простого безусловного эксперимента длины l, где*

$$l \leqslant (n-1)(m-1). \tag{4.12}$$

В приведенном ниже следствии изложена другая формулировка теоремы 4.12, которая будет полезной в дальнейших обсуждениях.

Следствие 4.2. Пусть M есть автомат, в котором каждая пара состояний является L-различимой. Установочная задача для M и m допустимых состояний может всегда быть решена с помощью простого безусловного эксперимента длины l, где

$$l \leqslant L(m-1). \tag{4.13}$$

Алгоритм 4.7, который представляет метод построения регулярных безусловных установочных экспериментов, не требует построения какого-либо дерева; он просто требует определения различных подпоследовательностей, описываемых различными подпутями, составляющими установочный путь, что может быть выполнено рекурсивным способом, как показано выше. Метод демонстрируется таблицей 4.13, в которой для автомата $A17$, показанного на рис. 4.3, и множества допустимых начальных состояний $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ построен регулярный безусловный установочный эксперимент.

Таблица 4.13

Регулярный безусловный эксперимент для $A17$ и множества допустимых начальных состояний $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

k	G_k	σ_i, σ_j	$\mathscr{E}(\sigma_i, \sigma_j)$
0	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$	1,4	α
1	$\{1, 1, 5\}, \{3, 2\}$	1,5	α
2	$\{1, 1\}, \{2\}, \{5, 1\}$	1,5	α
3	$\{1, 1\}, \{1\}, \{2\}, \{1\}$		

G_0 представляет собой множество $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, а G_k для $k \geqslant 1$ строится на основе G_{k-1}, т. е. на основе предварительно определенной подпоследовательности (подпоследовательности, приведенной в последнем столбце строки $k-1$) и таблицы или графа переходов для $A17$. Пара состояний $\{\sigma_i, \sigma_j\}$ есть любая пара состояний в любом однородном σ-множестве, содержащемся в G_k; $\mathscr{E}(\sigma_i, \sigma_j)$ есть минимальная диагностическая последовательность для $\{\sigma_i, \sigma_j\}$, которая может быть получена по методу, описанному в § 4.4. Для того чтобы минимизировать длину индивидуальных подпоследовательностей, σ_i и σ_j можно выбрать так, чтобы они давали в результате кратчайшее $\mathscr{E}(\sigma_i, \sigma_j)$. Для автомата $A17$ это может быть выполнено с помощью таблицы 4.6, в которой приводится перечень минимальных диагностических последовательностей для всех пар состояний в $A17$. Следует отметить, что, вообще говоря, это правило выбора не гарантирует минимальности общей длины установочного эксперимента (хотя в нашем примере оказалось, что результирующая установочная последовательность является минимальной). Строка 3 в таблице — последняя, так как G_3 является однородной A-группой. Установочная последовательность строится путем выписывания последовательностей $\mathscr{E}(\sigma_i, \sigma_j)$ в порядке, в котором они появляются в последнем столбце. Поэтому регулярный установочный эксперимент для $A17$ и множества допустимых начальных состояний $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ состоит в подаче $\alpha\alpha\alpha$ и наблюдении реакции. Реакция состояний 1, 2, 3, 4 и 5 на $\alpha\alpha\alpha$ и соответствующее конечное состояние показаны в таблице 4.11.

Теорема 4.12 выявляет основную разницу между диагностической задачей и установочной задачей. В то время как диагностическая задача, вообще говоря, не может быть решена путем проведения простого эксперимента, установочная задача всегда может быть решена проведением простого эксперимента. Если задан единственный экземпляр автомата M, то начальное состояние M не всегда может быть распознано; однако всегда можно перевести M в распознаваемое состояние. Как только распознаваемое состояние достигнуто, дальнейшая реакция M на любое определенное возбуждение становится, конечно, предсказуемой. Таким образом, всегда имеется способ сделать предсказуемым автомат, для которого имеется таблица переходов, но который до проведения установочного эксперимента был непредсказуем.

4.16. Регулярные условные установочные эксперименты

Регулярные безусловные установочные эксперименты, описанные в § 4.15, могут быть преобразованы в регулярные условные установочные эксперименты путем применения подпоследовательностей по одной и выбора следующей подпоследовательности на основе реакции на предыдущую подпоследовательность. Подход такой же, как в случае безусловного эксперимента, за исключением того, что на основании наблюдаемой реакции все, кроме одного, σ-множества из G_k $(k \geqslant 1)$ могут быть устранены из дальнейших рассмотрений.

Алгоритм 4.8. Даны автомат M и его множество допустимых начальных состояний $A(M)$; требуется определить конечное состояние M с помощью простого условного эксперимента. (1) Пусть $A(M)$ есть g_0. Полагаем $k=0$. (2) (а) Если g_k неоднородно, то определяем регулярную подпоследовательность, скажем $\mathscr{E}_k$, для g_k. Прилагаем $\mathscr{E}_k$ к M и полагаем, что g'_k является подмножеством g_k, которому может быть свойственна наблюдаемая реакция. Пусть g_{k+1} есть $\mathscr{E}_k$-преемник g'_k. Увеличиваем k на 1 и возвращаемся к (2). (б) Если g_k однородно, то конечное состояние M есть состояние, содержащееся в g_k.

Если g_k в алгоритме 4.8 не является однородным, то мощность g_{k+1} должна быть меньше, чем мощность g_k. Следовательно, если мощность $A(M)$ есть m, то число подпоследовательностей не превышает $m-1$. Для g_k мощности r всегда имеется регулярная подпоследовательность $\mathscr{E}_k$, длина которой не превышает $n-r+1$, где n есть общее число состояний в M. Следовательно, общая длина установочного эксперимента не может превосходить

$$\sum_{r=2}^{m}(n-r+1)=\frac{1}{2}(2n-m)(m-1). \tag{4.14}$$

Таким образом, мы имеем следующую теорему.

Теорема 4.13. *Установочная задача для автомата с n состояниями и m допустимыми состояниями может быть всегда решена с помощью простого условного эксперимента длины l и порядка d, где*

$$l\leqslant\frac{1}{2}(2n-m)(m-1), \tag{4.15}$$

$$d\leqslant m-1. \tag{4.16}$$

Можно отметить, что регулярный условный установочный эксперимент, построенный с помощью алгоритма 4.8, никогда не бывает длиннее, чем регулярный безусловный установочный эксперимент, построенный по алгоритму 4.7.

Таблица 4.14

Регулярный условный эксперимент для $A17$ и множества допустимых начальных состояний $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

Истинное состояние	k	g_k	σ_i, σ_j	$\mathscr{S}(\sigma_i, \sigma_j)$	Реакция
4	0	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$	1,4	α	1
3	1	$\{3, 2\}$	2,3	$\alpha\alpha$	01
2	2	$\{2\}$			

Таблица 4.14 демонстрирует регулярный условный эксперимент для $A17$, показанного на рис. 4.3, и множества допустимых начальных состояний $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, когда истинное начальное состояние есть 4. Первый столбец содержит для справки перечень состояний, через которые $A17$ проходит по мере проведения эксперимента (эти состояния, конечно, не известны экспериментатору). В этом примере g_0 есть $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, а $\mathscr{E}_0$ есть α. Когда α подается на $A17$, наблюдаемая реакция есть 1, из которой может быть выведено, что g_0' есть $\{4, 5\}$. Тогда g_1 есть α-преемник g_0', а именно $\{3, 2\}$. Подача $\mathscr{E}_1 = \alpha\alpha$ на $A17$ дает реакцию 01, из которой может быть выведено, что g_1' есть $\{3\}$. Тогда g_2 есть $\alpha\alpha$-преемник g_1', а именно $\{2\}$. Так как g_2 однородно, можно сделать заключение, что конечное состояние $A17$ есть 2.

Рис. 4.17 показывает автомат, обозначенный M^*, в котором могут быть достигнуты границы теоремы 4.13[1]). Как показано на рисунке, множеством состояний M^* является $\{1, 2, \ldots, n\}$, входной алфавит есть $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}\}$, а выходной алфавит — $\{0, 1\}$. Выходной символ 1 генерируется только тогда, когда ξ_{n-1} подается в состоянии n. Из структуры M^* можно увидеть, что если этот автомат, находясь в состоянии $1, 2, \ldots, i, j$ $(j > i)$, подвергается воздействию любого входного символа, отличного от ξ_{j-1}, то состояниями-преемниками, соответственно, являются $1, 2, \ldots, i, j$ или $1, 2, \ldots, i, j-1$. По отношению к установочному дереву для M^* и множеству допустимых начальных состояний $\{1, 2, \ldots, m\}$ под этим понимается, что кратчайший путь, ведущий из $\{1, 2, \ldots, m\}$ к A-группе, содержащей, по крайней мере, два σ-множества, есть путь, описывающийся входной последовательностью $\xi_{m-1}\xi_m \ldots \xi_{n-1}$; A-группа, к которой ведет этот путь, есть $\{1, 2, \ldots, m-1\}$, $\{n\}$. Тогда по индукции кратчайший путь, ведущий от $\{1, 2, \ldots, m\}$ к однородной A-группе, есть путь, описывающийся входной последовательностью $\xi_{m-1}\xi_m \ldots \xi_{n-1}$ (длины $n-m+1$), за которой следует $\xi_{m-2}\xi_{m-1} \ldots \xi_{n-1}$ (длины $n-m+2$), $\ldots$, за которой следует $\xi_1\xi_2 \ldots \xi_{n-1}$ (длины $n-1$). Длина этой последователь-

[1]) Автором этого автомата является Хиббард (T. N. Hibbard, Least Upper Bounds on Minimal Terminal State Experiments for Two Classes of Sequential Machines, J. Assoc. Comput. Mach., vol. 8, pp. 601—612, 1961).

ности есть $(2n-m)(m-1)/2$, т. е. совпадает с выражением (4.14). Путь ведет к A-группе $\{1\}$, $\{n\}$, $\{n\}$, ..., $\{n\}$, которая содержит m простых (и, следовательно, однородных)

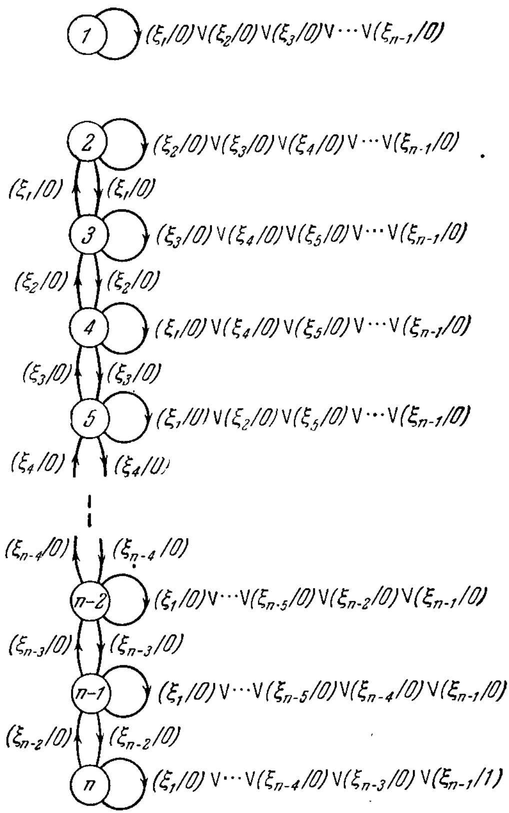


Рис. 4.17. Автомат M^*.

σ-множеств. Рис. 4.18 показывает установочное дерево для автомата M^* и множества допустимых начальных состояний $\{1, 2, \ldots, m\}$; на этом рисунке все оконечные ветви опущены, и единственный показанный путь есть путь, описывающий минимальную установочную последовательность, упомянутую выше. Ясно, что если начальным состоянием M^* оказалось состояние 1, то кратчайший условный установочный

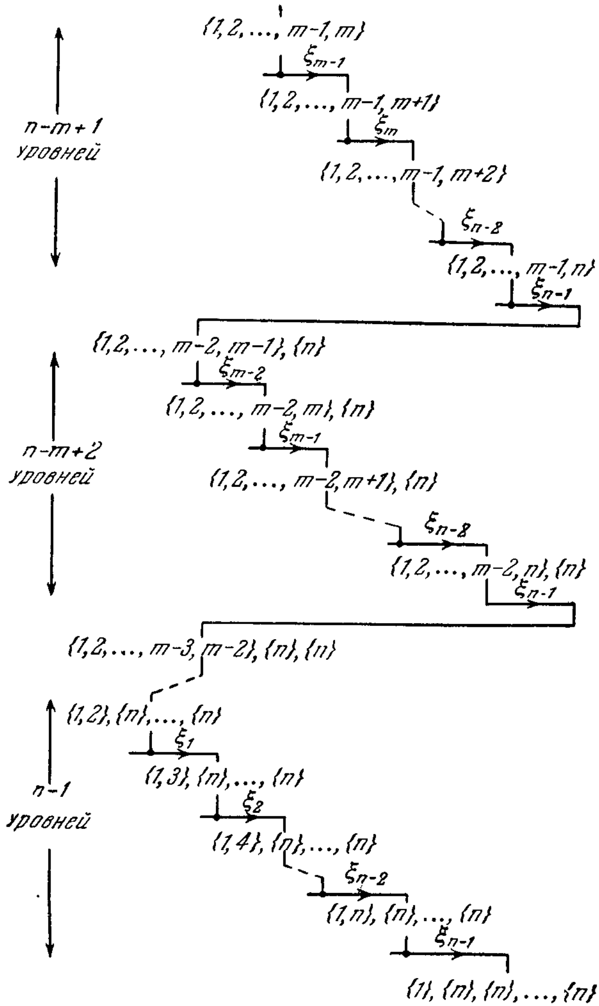


Рис. 4.18. Установочное дерево для M^* и множества допустимых начальных состояний $\{1, 2, \ldots, m\}$.

эксперимент для M^* и множества допустимых начальных состояний $\{1, 2, \ldots, m\}$ должен состоять из $m-1$ подпоследовательностей, совокупная длина которых задана верхней границей выражения (4.15). Автомат M^* показывает также, что кратчайший безусловный установочный эксперимент может иметь длину $(2n-m)(m-1)/2$ символов.

Заметим, что так как конечная A-группа на рис. 4.18 является простой A-группой, показанный путь описывает минимальную диагностическую последовательность (так же как минимальную установочную последовательность). Поэтому автомат M^* показывает, что простой безусловный или условный диагностический эксперимент может иметь длину, равную верхней границе l (4.15).

4.17. Следствия, связанные с экспериментами по распознаванию состояний

Особым случаем диагностической или установочной задачи для m состояний для автомата M является диагностическая или установочная задача для n состояний, где n есть общее число состояний в M. Эта проблема возникает, когда для M не определены допустимые состояния, и в этом случае следует предполагать, что начальным состоянием может быть любое из n состояний M. Для этого специального случая результаты, полученные в предыдущих параграфах, могут быть видоизменены и обобщены следующим образом.

Следствие 4.3. Пусть M есть автомат с n состояниями и известной таблицей переходов. Если начальное состояние автомата M вообще может быть определено путем проведения простого эксперимента, то оно может быть определено с помощью простого безусловного или простого условного эксперимента длины l, где

$$l \leqslant (n-1)\,n^n. \tag{4.17}$$

Начальное состояние M всегда может быть определено с помощью кратного безусловного эксперимента длины l и кратности c, где

$$l \leqslant (n-1)^2, \tag{4.18}$$

$$c \leqslant n-1, \tag{4.19}$$

и с помощью сложного условного эксперимента длины l и кратности c, где

$$l \leqslant \frac{1}{2} n(n-1), \tag{4.20}$$

$$c \leqslant n-1. \tag{4.21}$$

Конечное состояние M всегда может быть определено с помощью простого безусловного эксперимента длины l, где

$$l \leqslant (n-1)^2, \tag{4.22}$$

и с помощью простого условного эксперимента длины l и порядка d, где

$$l \leqslant \frac{1}{2} n(n-1), \tag{4.23}$$

$$d \leqslant n-1. \tag{4.24}$$

Пусть M — автомат с входным алфавитом $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p\}$ и множеством состояний $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$. Состояния σ_j и σ_l ($l \neq j$) называются *ξ_i-совместимыми*, если реакции $M|\sigma_j$ и $M|\sigma_l$ на ξ_i одинаковы и если σ_j и σ_l имеют одного и того же преемника по отношению к ξ_i. Пара ξ_i-совместимых состояний изображена на рис. 4.19.

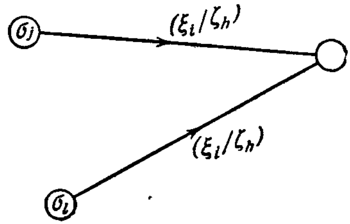


Рис. 4.19. Пара ξ_i-совместимых состояний.

Теорема 4.14. *Пусть M есть автомат с n состояниями и входным алфавитом $X = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p\}$. (а) Если M содержит пару ξ_i-совместимых состояний для каждого входного символа ξ_i из X, то диагностическая задача для n состояний для M никогда не может быть решена простым экспериментом. (б) Если M не содержит пары ξ_i-совместимых состояний ни для какого входного символа ξ_i из X, то диагностическая задача для n состояний для M всегда может быть решена простым экспериментом.*

Доказательство. (а) Подача любого входного символа ξ_i на M заставляет пару состояний, скажем σ_j и σ_l, перейти в одно и то же состояние с одинаковыми реакциями и, таким образом, обусловливает то, что эти состояния становятся не различимыми никакими последующими входными символами. (б) По теореме 4.12, M всегда может быть переведен в известное конечное состояние. Пусть установочной последовательностью, примененной для этой цели, является $\xi_{i_1}\xi_{i_2} \ldots \xi_{i_r}$; пусть соответствующая выходная последовательность будет $\zeta_{h_1}, \zeta_{h_2}, \ldots, \zeta_{h_r}$, а соответствующая последовательность состояний $\sigma_{j_1}, \sigma_{j_2}, \ldots, \sigma_{j_r}$. Предположим теперь, что σ_{j_k}, ξ_{i_k} и ζ_{h_k} известны для некоторого k, $1 \leqslant k \leqslant r$; так как по предположению ни одно состояние в M не имеет двух заходящих дуг, несущих одну и ту же пару вход-выход (ξ_{i_k}/ζ_{h_k}), то $\sigma_{j_{k-1}}$ может быть определено однозначно. Обозначим начальное состояние M через σ_{j_0}, тогда σ_{j_0} может быть определено рекурсивно на основе знания конечного состояния M и входной и выходной последовательностей, включенных в установочный эксперимент.

Из таблицы переходов заданного автомата M может быть легко установлено, обладает M свойством, упомянутым в части (а), или свойством, упомянутым в части (б) теоремы 4.14. Поэтому эта теорема оказывается во многих случаях полезной для того, чтобы установить, может ли начальное состояние заданного автомата быть определено с помощью простого эксперимента. Когда автомат не имеет ни свойства части (а), ни свойства части (б), то его начальное состояние либо может, либо не может быть определено простым экспериментом.

Задачи

4.1. Опишите матричный способ решения диагностической задачи для двух состояний.

4.2. Таблицы З 4.1 и З 4.2 соответственно представляют автоматы A и B. Перечислите минимальные диагностические последовательности для всех пар состояний, в которых одно состояние выбирается из A, а второе состояние — из B.

4.3. Рис. З 4.1 показывает граф переходов автоматов A и B. (а) Известно, что заданный автомат есть A в состоянии 3 или 4. Постройте кратчайший безусловный эксперимент для распознавания начального состояния. (б) Известно, что заданный автомат есть A в состоянии 1 или B в состоянии 1. Постройте кратчайший без-

Таблица З 4.1

$s_\nu \backslash x_\nu$	z_ν: α	z_ν: β	$s_{\nu+1}$: α	$s_{\nu+1}$: β
1	0	1	2	3
2	1	0	3	4
3	0	1	1	4
4	1	0	4	3

Таблица З 4.2

$s_\nu \backslash x_\nu$	z_ν: α	z_ν: β	$s_{\nu+1}$: α	$s_{\nu+1}$: β
1	0	1	1	3
2	0	1	2	2
3	1	0	3	1
4	1	0	4	2

условный эксперимент для распознавания автомата и его начального состояния.

4.4. Задайте автомат с шестью состояниями, в котором два состояния могут быть различены с помощью входной последовательности длины 5, но не меньше. Проверьте, что приведенное выше требование удовлетворяется.

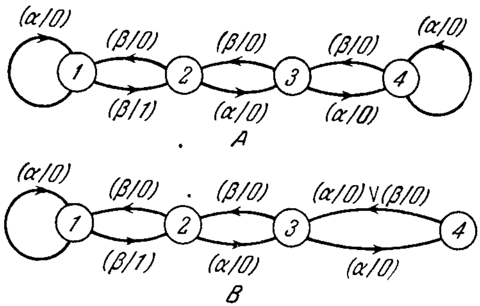


Рис. З 4.1.

4.5. Задайте автомат с шестью состояниями и автомат с девятью состояниями, в которых два состояния (по одному в каждом автомате) могут быть различены с помощью входной последовательности длины 14, но не меньше. Убедитесь, что указанное требование удовлетворяется.

4.6. Рис. З 4.2 показывает уровни от 0 до 3 частично снабженного обозначениями дерева преемников, где G_1, G_2 и G_3 суть A-группы. Покажите, что три пути, проходящих через G_1, G_2 и G_3 уровня 3, не могут представлять минимальных диагностических последовательностей для M и $A(M)$.

4.7. Покажите, что минимальная диагностическая последовательность для автомата с q выходными символами и множеством допустимых начальных состояний мощности m не может быть короче, чем $(\log m)/(\log q)$ символов.

4.8. Определите минимальную диагностическую последовательность для автомата, представленного таблицей З 4.3 и множеством допустимых начальных состояний $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

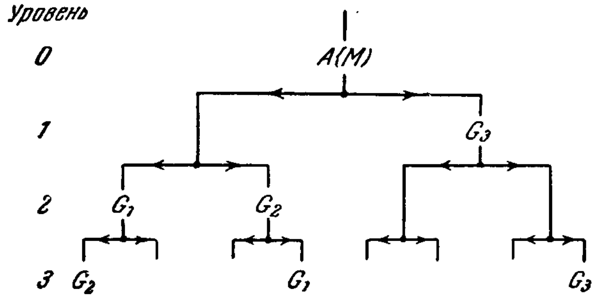


Рис. З 4.2.

4.9. Известно, что заданный автомат есть автомат, определенный либо таблицей З 4.4, либо таблицей З 4.5. Постройте кратчайший безусловный эксперимент для распознавания автомата и его начального состояния.

Таблица З 4.3

	z_ν		$s_{\nu+1}$			z_ν		$s_{\nu+1}$	
s_ν \ x_ν	α	β	α	β	s_ν \ x_ν	α	β	α	β
1	0	0	2	3	5	1	1	6	7
2	0	0	3	2	6	1	1	7	6
3	0	0	8	5	7	1	1	4	1
4	0	0	5	8	8	1	1	1	4

4.10. Для автомата, определенного таблицей З 4.6. (а) Постройте безусловные диагностические эксперименты, если множества допустимых начальных состояний таковы: (I) $\{4, 5\}$, (II) $\{1, 2, 5\}$, (III) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. (б) Для случаев (II) и (III) опишите условный диагностический эксперимент, если истинное начальное состояние есть 1 (что сначала не известно).

4.11. Заданный автомат представлен графом переходов на рис. З 4.3. (а) Постройте кратчайший безусловный эксперимент для распознавания начального состояния автомата. (б) Постройте кратчайший безусловный эксперимент для распознавания конечного состояния автомата.

Таблица 3 4.4

x_ν / s_ν	z_ν: α	z_ν: β	$s_{\nu+1}$: α	$s_{\nu+1}$: β
1	0	1	2	3
2	1	1	1	2
3	0	1	1	1

Таблица 3 4.5

x_ν / s_ν	z_ν: α	z_ν: β	$s_{\nu+1}$: α	$s_{\nu+1}$: β
1	1	1	1	3
2	1	1	2	2
3	0	1	2	1

Таблица 3 4.6

x_ν / s_ν	z_ν: α	z_ν: β	z_ν: γ	$s_{\nu+1}$: α	$s_{\nu+1}$: β	$s_{\nu+1}$: γ
1	1	0	0	2	2	3
2	0	1	1	1	2	2
3	1	0	0	4	2	3
4	0	1	1	1	5	4
5	0	1	1	3	5	3

4.12. Для автомата, заданного таблицей 3 4.6, и множества допустимых начальных состояний $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. (а) Постройте кратчайший безусловный установочный эксперимент. (б) Постройте регулярный безусловный установочный эксперимент. (в) Опишите регулярный условный установочный эксперимент, если истинное начальное состояние есть 5 (что заранее не известно).

4.13. Для автомата, показанного на рис. 3 4.4. (а) Постройте регулярный безусловный установочный эксперимент, если истинное начальное состояние есть 7 (что сначала не известно).

4.14. Неизвестное начальное состояние автомата на рис. 3 4.4 есть 1. Опишите условный эксперимент, который будет переводить автомат в состояние 7.

4.15. Известно, что заданный автомат есть либо A, либо B из задачи 4.2. Постройте безусловный эксперимент для распознавания автомата и определите его конечное состояние.

4.16. P_1-разбиение минимального автомата M с n состояниями имеет u классов. (а) Покажите, что любая диагностическая задача для двух состояний для M может быть решена с помощью простого безусловного эксперимента, длина которого не превышает $n-u+1$. (б) Покажите, что любая установочная задача для M может быть решена с помощью простого безусловного эксперимента, длина которого не превышает $(n-1)(n-u+1)$. (в) Покажите, что любая установочная задача для M может быть решена с помощью простого условного эксперимента, длина которого не превышает

$$u-2+[(n-u+2)(n-u+1)/2].$$

4.17. Может быть показано, что автомат с n состояниями и множеством допустимых начальных состояний мощности m всегда может быть переведен в известное состояние с помощью безусловного эксперимента длины l, где $l \leqslant (n-1)(m-1)+2^{u+1}-2-um$,

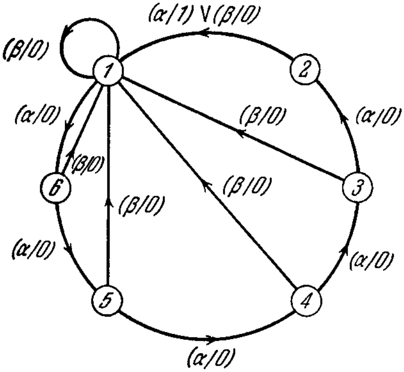


Рис. З 4.3.

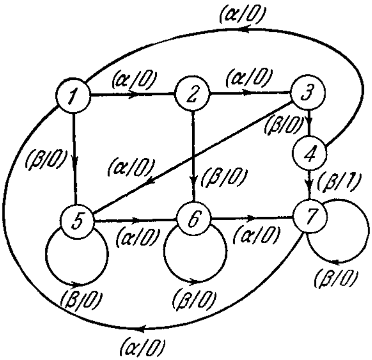


Рис. З 4.4.

где u есть любое положительное целое число [1]). (а) Найдите u (как функцию m), которое минимизирует верхнюю границу l. (б) Оцените наименьшую верхнюю границу l для $m=2$, 4, 8, 1024.

4.18. Таблица пар автомата M с n состояниями содержит только различные пары. Покажите, что начальное состояние M всегда может быть определено простым безусловным экспериментом, длина которого не превышает $(n-1)^2$.

4.19. Не строя каких-либо диагностических экспериментов, покажите, что диагностическая задача для восьми состояний для автомата, представленного в таблице З 4.3, может быть решена с помощью простого эксперимента и что диагностическая задача для пяти состояний для автомата, представленного таблицей З 4.6, не может быть решена с помощью простого эксперимента.

4.20. (а) Постройте минимальный (3, 2, 2)-автомат с входным алфавитом $\{\alpha, \beta\}$, в котором имеется пара α-совместимых состоя-

[1]) Автором этого результата является Гинзбург (S. Ginsburg, On the Length of the Smallest Uniform Experiment which Distinguishes the Terminal States of a Machine, J. Assoc. Comput. Mach., vol. 5, pp. 266—280, 1958. Русский перевод: С. Гинзбург, О длине кратчайшего однородного эксперимента, устанавливающего конечные состояния машины, «Кибернетический сборник», № 3, ИЛ, 1961).

ний и в котором диагностическая задача для трех состояний может быть решена с помощью простого эксперимента. (б) Постройте минимальный (3, 2, 2)-автомат с входным алфавитом $\{\alpha, \beta\}$, в котором имеется пара α-совместимых состояний, но нет ни одной пары β-совместимых состояний и в котором диагностическая задача для трех состояний не может быть решена простым экспериментом.

4.21. Известно, что в заданном автомате с n состояниями для каждой входной последовательности фиксированной длины l существует пара состояний, которые переходят в одно и то же конечное состояние с одинаковыми реакциями. Покажите, что для этого автомата диагностическая задача для n состояний может быть решена с помощью простого эксперимента.

4.22. Постройте автомат с пятью состояниями, для которого диагностическая и установочная задачи для пяти состояний не могут быть решены никаким безусловным экспериментом длины, меньшей чем 10. Постройте диагностическое дерево и установочное дерево для этого автомата.

ГЛАВА 5

ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО РАСПОЗНАВАНИЮ АВТОМАТОВ

5.1. Введение

В предыдущей главе наше основное допущение состояло в том, что исследуемый автомат полностью определен таблицей (или графом, или матрицей) переходов. В рассмотренных задачах имелась неопределенность относительно начального состояния автомата. В настоящей главе мы будем заниматься более широкой задачей, а именно, задачей распознавания неизвестного автомата, т. е. такого автомата, таблица переходов которого не задана [1]). Если рассматривать конечный автомат как черный ящик, то задача распознавания автомата, по существу, представляет собой задачу определения для черного ящика характеристик вход-выход при помощи измерений на его внешних выводах. Поскольку для эффективного управления и выгодного использования любой системы необходимо знать ее точные характеристики, эта задача является одной из важнейших и наиболее часто возникающих при анализе систем.

Чтобы проиллюстрировать разницу между задачами распознавания состояний, поставленными в главе 4, и задачами распознавания автомата, рассмотрим следующий грубый пример. Пациент с неизвестной болезнью принят в больницу для диагностики и лечения. Для наших целей пациент может рассматриваться как конечный автомат, входным алфавитом которого является множество различных способов его лечения. Выходным алфавитом этого автомата является множество возможных реакций пациента на лечение. Множеством со-

---

[1]) Материал этой главы частично базируется на работе Мура (E. F. Moore, Gedanken-Experiments on Sequential Machines, «Automata Studies», pp. 129—153, Princeton University Press, Princeton, N. Y., 1956. Русский перевод: Э. Ф. Мур, Умозрительные эксперименты с последовательностными машинами. В сборнике «Автоматы» под редакцией К. Э. Шеннона и Дж. Маккарти, ИЛ, М., 1956).

стояний автомата будет множество возможных физических состояний пациента. В данном примере диагностическая задача состоит в том, чтобы определить болезнь, с которой поступил больной (т. е. определить «начальное состояние»). Как мы установили ранее, эта задача не всегда разрешима: возможно, что природа болезни такова, что, независимо от предписанного лечения, болезнь исчезнет раньше, чем будет установлена. Установочная задача в рассматриваемом примере состоит в том, чтобы вылечить пациента, т. е. перевести его в известное физическое состояние (т. е. «конечное состояние»). Как мы ранее установили, эта задача всегда разрешима. Всегда имеется последовательность назначений, которая обязательно переведет пациента в известное физическое состояние (конечно, не обязательно желаемое). Задача распознавания автомата в данном примере состоит в определении того, как настоящая реакция и будущее физическое состояние пациента связаны с назначенным в настоящее время лечением и настоящим физическим состоянием (т. е. в определении «таблицы переходов»). Ясно, что до тех пор, пока не будут установлены указанные зависимости, не могут быть проведены какие-либо серьезные диагностические процедуры или назначено лечение. Поэтому определение физиологических характеристик пациента, которые могут быть установлены на основании сведений о его возрасте, поле, роде занятий, перенесенных болезнях, должно предшествовать любым действиям, имеющим целью управление здоровьем пациента.

5.2. Общая задача распознавания автомата

Будем говорить, что автомат является *распознанным*, если определена (с точностью до изоморфизма) его минимальная форма путем измерений на его внешних выводах. Будем говорить, что автомат *распознаваем*, если он может быть распознан независимо от его начального состояния. Задача распознавания автомата в ее наиболее общей форме состоит попросту в следующем: распознать заданный автомат M. Ниже в этом параграфе мы покажем, что если об автомате M нет достаточной информации, то общая задача распознавания автомата неразрешима.

Теорема 5.1. *Автомат M нераспознаваем, если заранее не известен полностью его входной алфавит.*

Доказательство. Предположим, что исследователю известно только подмножество, скажем X', входного алфавита X автомата M. Предположим также, что некоторый эксперимент, использующий входную последовательность $\mathscr{E}$, символы которой выбираются из подмножества X', выявляет, что M имеет минимальную форму M_2, показанную на рис. 5.1.

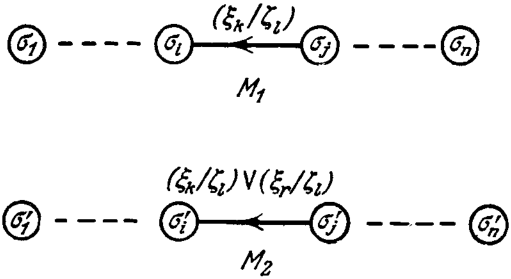


Рис. 5.1. Автоматы M_1 и M_2 к теореме 5.1.

Рассмотрим теперь автомат M_2 (также показанный на рис. 5.1), отличающийся от M_1 только тем, что в M_2 к петле или исходящей дуге всех состояний добавлена пара вход-выход (ξ_r/ζ_l), где ξ_r принадлежит X, но не принадлежит X'. Поскольку реакции M_1 и M_2 на последовательность $\mathscr{E}$ одинаковы, то в результате указанного эксперимента может быть сделан вывод о том, что автомат M — это автомат M_2, с такой же уверенностью, как и вывод, что автомат M — это M_1. Однако, так как автоматы M_1 и M_2 не сравнимы, то они, конечно, не эквивалентны, и, следовательно, предположение о том, что эксперимент выявляет минимальную форму, не может быть доказано. Тогда от противного следует, что если входной алфавит автомата M не полностью известен, то автомат M не может быть распознан.

Теорема 5.2. *Автомат M нераспознаваем, если предварительно не известно максимальное число состояний минимальной формы этого автомата.*

Доказательство. Пусть некоторым экспериментом произвольной, но конечной длины L установлено, что M_1 является минимальной формой автомата M, показанной на рис. 5.2. Пусть автомат M_1 имеет множество состояний $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$. Рассмотрим автомат M_2 (также показанный на рис. 5.2), построенный в соответствии со следующими правилами. Автомат M_2 имеет $n(L+1)$ состояний $\sigma'_1, \sigma'_2, \ldots, \sigma'_{n(L+1)}$. Если пара вход-выход (ξ_k/ζ_l) обозначает дугу, ведущую от состояния σ_i к состоянию σ_j в автомате M_1, то в автомате M_2 пара (ξ_k/ζ_l) также обозначает дугу, ведущую из состояния $\sigma'_{i+(u-1)n}$ в состояние σ'_{j+un} для $u=1, 2, \ldots, L$; если к автомату M_2 в состоянии σ'_{i+Ln} приложен входной символ ξ_k, то выходной символ будет $\bar{\zeta}_l \neq \zeta_l$ и следующее состояние M_2 будет σ'_{i+Ln}. Тогда по построению каждая входная последовательность длины L или меньшей вырабатывает одинаковые выходные последовательности в $M_1|\sigma_i$ и в $M_2|\sigma'_i$. Однако если прикладывается любая входная последовательность длины $L+1$ к $M_1|\sigma_i$ и к $M_2|\sigma'_i$, то две выходные последовательности этих автоматов должны различаться последними символами. Таким образом, результат любого конечного эксперимента над автоматом M может быть одинаково присущим как M_1, так и M_2, хотя M_1 и M_2 не эквивалентны. Следовательно, автомат M не может быть распознан никаким конечным экспериментом. Заметим, что если известно максимальное число состояний $\hat{n}$ автомата M, то автомат M_2 исключается экспериментом длины L такой, что $(L+1)n > \hat{n}$. Таким образом, если n известно, то с помощью достаточно длинного эксперимента автомат M может быть распознан.

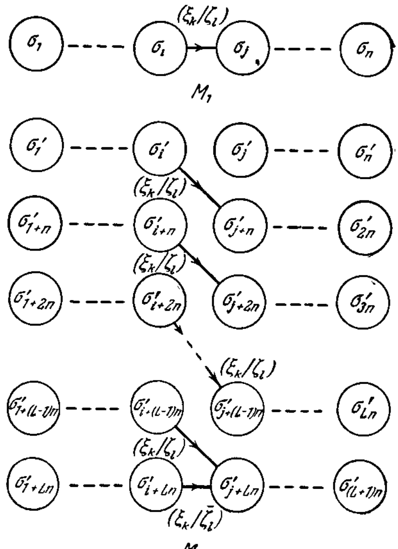


Рис. 5.2. Автоматы M_1 и M_2 к теореме 5.2.

Итак, можно считать установленным, что необходимым условием распознавания автомата является предварительное знание его входного алфавита и граничного значения числа состояний его минимальной формы. Предварительное знание выходного алфавита, как мы увидим в дальнейшем, для распознавания автомата не является обязательным.

5.3. Распознавание автоматов известного класса

Наиболее часто возникающая на практике форма задачи распознавания автомата состоит в распознавании автомата, о котором известно, что он принадлежит к определенному конечному классу автоматов[1]). В связи с этим определим *исключительный класс*, как такой класс автоматов $\{M_1, M_2, \ldots, M_N\}$, в котором ни одно состояние любого автомата M_i не эквивалентно никакому состоянию автомата M_j $(j \neq i)$.

Теорема 5.3. *Известно, что заданный автомат M принадлежит конечному классу автоматов $\mathfrak{M} = \{M_1, M_2, \ldots, M_N\}$. Необходимое и достаточное условие распознавания автомата M состоит в том, чтобы $\mathfrak{M}$ был исключительным классом.*

Доказательство. Если $\mathfrak{M}$ не является исключительным классом, то имеется, по крайней мере, одна пара эквивалентных состояний, скажем $\sigma^{(i)}$ в M_i и $\sigma^{(j)}$ в M_j. Тогда, если автомат M является либо автоматом $M_i \mid \sigma^{(i)}$, либо $M_j \mid \sigma^{(j)}$, то никаким экспериментом нельзя установить, каким именно автоматом он является. Следовательно, чтобы автомат M всегда был распознаваем, класс $\mathfrak{M}$ должен быть исключительным. Чтобы доказать достаточность условия теоремы, рассмотрим автомат $\Delta(M_1, M_2, \ldots, M_N)$, в который каждый член множества $\mathfrak{M}$ включен как изолированный подавтомат. Поскольку $\mathfrak{M}$ является исключительным, то $\Delta(M_1, M_2, \ldots, M_N)$ является минимальным и, следовательно, всегда существует установочный эксперимент, который определяет его конечное состояние. Зная конечное состояние автомата $\Delta(M_1, M_2, \ldots, M_N)$, можно найти подавтомат, имеющий начальное состояние, принадлежащее автомату

[1]) Если не определено иначе, то будем считать, что «класс» автоматов состоит из сравнимых минимальных автоматов таких, среди которых никакие два автомата не являются эквивалентными.

$\Delta(M_1, M_2, \ldots, M_N)$, и, следовательно, найти автомат M_h, с которым может быть отождествлен автомат M. Таким образом, если $\mathfrak{M}$ — исключительный класс, то M распознаваем.

Теорема 5.3 показывает, что два «различимых» (согласно определению § 3.9) автомата не обязательно различимы по их внешнему поведению, поскольку такие автоматы не обязательно исключительные. Например, автоматы $A9$ и $A10$, изображенные на рис. 3.6 и 3.7, различимы, но не являются исключительными (состояния 1 и 2 автомата $A9$ эквивалентны состояниям 1 и 2 автомата $A10$ соответственно), поэтому не всегда можно определить, является автомат M автоматом $A9$ или $A10$ (можно определить только в том случае, когда M является автоматом $A10$ в состоянии 3), и, следовательно, автомат M нераспознаваем.

Пусть n_i обозначает число состояний автомата M_i и пусть автоматы в исключительном классе $\mathfrak{M} = \{M_1, M_2, \ldots, M_N\}$ перенумерованы так, что $n_{i+1} \leqslant n_i$. Тогда $\Delta(M_1, M_2, \ldots, M_N)$ содержит $\sum_{i=1}^{N} n_i$ состояний. Согласно теореме 4.1, любые два состояния в автомате M_i являются $(n_i - 1)$-различимыми. По следствию 4.1, любые два состояния — одно из M_i, а другое из M_j $(j \neq i)$ — являются $(n_i + n_j - 1)$-различимыми. Так как $n_i + n_j \leqslant n_1 + n_2$, то любые два состояния в $\Delta(M_1, M_2, \ldots, M_N)$ (независимо от того, являются они состояниями одного и того же автомата или двух разных автоматов) должны быть $(n_1 + n_2 - 1)$-различимыми. Используя следствие 4.2, при $L = n_1 + n_2 - 1$ и $m = \sum_{i=1}^{N} n_i$ можно заключить, что установочная задача для $\Delta(M_1, M_2, \ldots, M_N)$ всегда разрешима простым безусловным экспериментом длины

$$(n_1 + n_2 - 1)\left[\left(\sum_{i=1}^{N} n_i\right) - 1\right] \text{ или менее.}$$

Так как решение установочной задачи является также решением задачи распознавания автомата M, мы имеем следующую теорему.

Теорема 5.4. *О заданном автомате M известно, что он принадлежит исключительному классу автоматов $\{M_1, M_2, \ldots, M_N\}$, где M_i имеет n_i состояний, причем $n_{i+1} \leqslant n_i$. Тогда автомат M может быть* *распознан простым безусловным экспериментом длины l, где*

$$l \leqslant (n_1 + n_2 - 1)\left[\left(\sum_{i=1}^{N} n_i\right) - 1\right]. \tag{5.1}$$

Важным частным случаем теоремы 5.4 является случай, когда n_i или верхние граничные значения n_i одинаковы для всех i.

Следствие 5.1. О заданном автомате M известно, что он принадлежит исключительному классу автоматов $\{M_1, M_2, \ldots, M_N\}$, где каждый автомат имеет не более n состояний. Тогда автомат M может быть распознан простым безусловным экспериментом длины l, где

$$l \leqslant (2n - 1)(Nn - 1). \tag{5.2}$$

Длина эксперимента, распознающего автомат, и трудности его построения значительно уменьшаются, если вместо безусловного установочного эксперимента проводится ряд регулярных условных установочных экспериментов. Это может быть сделано следующим образом.

Алгоритм 5.1. Известно, что автомат M принадлежит к исключительному классу автоматов $\{M_1, M_2, \ldots, M_N\}$. Чтобы распознать M при помощи простого условного эксперимента: (1) Полагаем $k = 1$. (2) Проводим над M регулярный условный установочный эксперимент, построенный для M_k с множеством допустимых начальных состояний, содержащим все состояния автомата M_k. (3) (а) Если $k < N$, то увеличиваем k на единицу и возвращаемся к (2). (б) Если $k = N$, то принимаем, что $\sigma^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, N$, обозначает настоящее состояние M, считая, что M — это M_i, и переходим к операции (4). (4) Проводим над M регулярный условный установочный эксперимент, построенный для $\Delta(M_1, M_2, \ldots, M_N)$ с множеством допустимых начальных состояний $\{\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \ldots, \sigma^{(N)}\}$. Если конечное состояние автомата $\Delta(M_1, M_2, \ldots, M_N)$ принадлежит подавтомату M_h, то M является автоматом M_h.

Из выражения (4.23) следует, что выполнение операции (2) алгоритма требует при $k = 1, 2, \ldots, N$ не более $\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} n_i (n_i - 1)$ входных символов, где n_i — число состояний в M_i. Если $n_{i+1} \leqslant n_i$, то, по следствию 4.2, выполнение операции (4) требует не более $(n_1+n_2-1)(N-1)$ операций. Из теоремы 4.13 следует, что порядок эксперимента, описанного алгоритмом, не превышает

$$\sum_{i=1}^{N}(n_i-1)+N-1=\left(\sum_{i=1}^{N} n_i\right)-1. \tag{5.3}$$

Таким образом получаем:

Теорема 5.5. *Если заданный автомат M принадлежит исключительному классу автоматов $\{M_1, M_2, \ldots, M_N\}$, где M_i имеет n_i состояний и $n_{i+1} \leqslant n_i$, то автомат M всегда может быть распознан простым условным экспериментом длины l и порядка d, где*

$$l \leqslant \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{N} n_i(n_i-1)\right]+(n_1+n_2-1)(N-1), \tag{5.4}$$

$$d \leqslant \left(\sum_{i=1}^{N} n_i\right)-1. \tag{5.5}$$

Следует заметить, что при проведении установочного эксперимента для любого частного автомата M_k, согласно требованию операции (2) алгоритма 5.1, наблюдаемые реакции могут быть использованы для исключения одного или нескольких автоматов (возможно, самого M_k) из дальнейшего рассмотрения в качестве автомата M. Когда выполнение операции (2) сопровождается таким исключением, то как длина, так и порядок эксперимента значительно сокращаются.

Когда n_i или верхняя граница n_i одинаковы для всех i, то из теоремы 5.5 вытекает

Следствие 5.2. Если заданный автомат M принадлежит исключительному классу автоматов $\{M_1, M_2, \ldots, M_N\}$, в котором каждый автомат имеет, по крайней мере, n состояний, то автомат M может быть распознан простым условным экспериментом длины l и порядка d, где

$$l \leqslant \frac{1}{2}N(n^2+3n-2)-2n+1, \tag{5.6}$$

$$d \leqslant Nn-1. \tag{5.7}$$

5.4. Задача распознавания повреждений

Значительный практический интерес представляет задача распознавания повреждения, которое вызвало неисправность автомата. В связи с этой задачей удобно рассматривать поврежденный автомат как самостоятельный автомат. При этом задача распознавания поврежденного автомата, в котором повреждение предполагается относящимся к известному классу повреждений, сводится к задаче распознавания автомата, относящегося к известному классу автоматов. Из результатов § 5.3 следует, что повреждение всегда может быть определено, если класс, к которому относится поврежденный автомат, является исключительным классом.

Чтобы проиллюстрировать процедуру распознавания автомата вообще и распознавания повреждения в частности, рассмотрим автомат $A24$, представленный таблицей 5.1

Известно, что автомат $A24$ неисправен и что в результате повреждения при приложении к автомату в одном из его состояний входного символа α на его выходе вместо 0 появляется 1. Поврежденный автомат $A24$ может быть одним

Таблица 5.1

Автомат $A24$

s_ν \ x_ν	z_ν: α	z_ν: β	$s_{\nu+1}$: α	$s_{\nu+1}$: β
1	1	0	2	4
2	0	1	3	1
3	0	0	4	2
4	0	1	1	3

Таблица 5.2

Автомат $A24'$

s_ν \ x_ν	z_ν: α	z_ν: β	$s_{\nu+1}$: α	$s_{\nu+1}$: β
1′	1	0	2′	4′
2′	1	1	3′	1′
3′	0	0	4′	2′
4′	0	1	1′	3′

из автоматов $A24'$, $A24''$ и $A24'''$, представленных таблицами 5.2, 5.3 и 5.4 соответственно. Чтобы определить, составляют ли автоматы $A24'$, $A24''$ и $A24'''$ исключительный класс, следует произвести эквивалентное разбиение для автомата Δ ($A24'$, $A24''$ и $A24'''$), т. е. для расщепляемого автомата, построенного из автоматов $A24'$, $A24''$ и $A24'''$.

Таблица 5.3

Автомат $A24''$

	z_ν		$s_{\nu+1}$	
s_ν \ x_ν	α	β	α	β
$1''$	1	0	$2''$	$4''$
$2''$	0	1	$3''$	$1''$
$3''$	1	0	$4''$	$2''$
$4''$	0	1	$1''$	$3''$

Таблица 5.4

Автомат $A24'''$

	z_ν		$s_{\nu+1}$	
s_ν \ x_ν	α	β	α	β
$1'''$	1	0	$2'''$	$4'''$
$2'''$	0	1	$3'''$	$1'''$
$3'''$	0	0	$4'''$	$2'''$
$4'''$	1	1	$1'''$	$3'''$

Разбиение может быть выполнено с помощью таблицы пар, как показано в таблице 5.5. Из этой таблицы видно, что эквивалентными в автомате Δ ($A24'$, $A24''$, $A24'''$) являются только пары $\{1'', 3''\}$ и $\{2'', 4''\}$. Следовательно, автомат $A24''$

Таблица 5.5

Таблица пар для автомата Δ ($A24'$, $A24''$, $A24'''$)

Пары	α	β	Пары	α	β
$\mathbf{1}', \mathbf{1}''$	$2', 2''$	$4', 4''$	$\mathbf{3}', \mathbf{3}'''$	$4', 4'''$	$2', 2'''$
$\mathbf{1}', \mathbf{3}''$	$2', 4''$	$4', 2''$	$\mathbf{4}', \mathbf{2}''$	$1', 3'''$	$3', 1''$
$\mathbf{1}', \mathbf{1}'''$	$2', 2'''$	$4', 4'''$	$\mathbf{4}', \mathbf{4}''$	$1', 1''$	$3', 3''$
$1'', 3''$	$2'', 4''$	$4'', 2''$	$\mathbf{4}', \mathbf{2}'''$	$1', 3'''$	$3', 1'''$
$\mathbf{1}'', \mathbf{1}'''$	$2'', 2'''$	$4'', 4'''$	$2'', 4''$	$3'', 1''$	$1'', 3''$
$\mathbf{3}'', \mathbf{1}'''$	$4'', 2'''$	$2'', 4'''$	$\mathbf{2}'', \mathbf{2}'''$	$3'', 3'''$	$1'', 1'''$
$\mathbf{4}', \mathbf{4}'''$	$3', 1'''$	$1', 3'''$	$\mathbf{4}'', \mathbf{2}'''$	$1'', 3'''$	$3'', 1'''$

не является минимальным, и ни одно состояние одного автомата не является эквивалентным никакому состоянию другого автомата. Таким образом, после того как автомат $A24''$ будет представлен своей минимальной формой, автомат Δ($A24'$, $A24''$, $A24'''$) становится минимальным и притом таким, что автоматы $A24'$, $A24''$ и $A24'''$ (все в своих минимальных формах) образуют исключительный класс. Таблица переходов и граф переходов автомата Δ ($A24'$, $A24''$, $A24'''$) приведены на рис. 5.3 и в таблице 5.6 (автомат $A24''$ дан в своей минимальной форме).

Теперь задача определения повреждения в автомате $A24$ сведена к задаче определения конечного состояния поврежденного автомата $A24$ или к задаче проведения установочного эксперимента над автоматом Δ ($A24'$, $A24''$, $A24'''$).

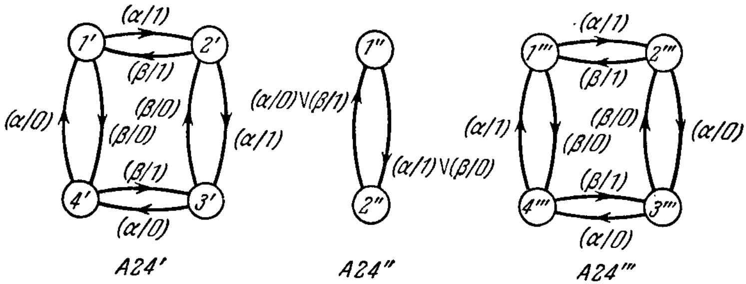


Рис. 5.3. Автомат Δ ($A24'$, $A24''$, $A24'''$).

Эксперимент для распознавания повреждения описан в таблице 5.7, где предполагается, что начальным состоянием

Таблица 5.6

Автомат Δ ($A24'$, $A24''$, $A24'''$)

	z_ν		$s_{\nu+1}$			z_ν		$s_{\nu+1}$	
s_ν \ x_ν	α	β	α	β	s_ν \ x_ν	α	β	α	β
$1'$	1	0	$2'$	$4'$	$2''$	0	1	$1''$	$1''$
$2'$	1	1	$3'$	$1'$	$1'''$	1	0	$2'''$	$4'''$
$3'$	0	0	$4'$	$2'$	$2'''$	0	1	$3'''$	$1'''$
$4'$	0	1	$1'$	$3'$	$3'''$	0	0	$4'''$	$2'''$
$1''$	1	0	$2''$	$2''$	$4'''$	1	1	$1'''$	$3'''$

автомата $A24$ является состояние 2 и что в результате повреждения при приложении к автомату входного символа α в состоянии 4 на выходе получается 1. Тогда истинным автоматом является $A24'''$, а истинным начальным состоянием — $2'''$ (это, конечно, экспериментатору сначала не известно). Первый столбец таблицы 5.7 содержит в качестве руководства читателю истинное состояние $A24'''$ на различ-

Таблица 5.7

Эксперимент по распознаванию повреждения в автомате $A24$

Истинное состояние	k	g_k	σ_i, σ_j	$\mathscr{E}(\sigma_i, \sigma_j)$	Реакция на выходе
Установочный эксперимент для $A24'$ и $\{1', 2', 3', 4'\}$					
$2'''$	0	$\{1', 2', 3', 4'\}$	$\{1', 2'\}$	β	1
$1'''$	1	$\{1', 3'\}$	$\{1, 3'\}$	α	1
$2'''$	2	$\{2'\}$			
Установочный эксперимент для $A24''$ и $\{1'', 2''\}$					
$2'''$	0	$\{1'', 2''\}$	$\{1'', 2''\}$	α	0
$3'''$	1	$\{1''\}$			
Установочный эксперимент для $A24'''$ и $\{1''', 2''', 3''', 4'''\}$					
$3'''$	0	$\{1''', 2''', 3''', 4'''\}$	$1'''$, $2'''$	α	0
$4'''$	1	$\{3''', 4'''\}$	$3'''$, $4'''$	α	1
$1'''$	2	$\{1'''\}$			
Установочный эксперимент для $\Delta(A24', A24'', A24''')$ и $\{1', 1'', 1'''\}$					
$1'''$	0	$\{1', 1'', 1'''\}$	$1'$, $1''$	$\alpha\alpha$	10
$3'''$	1	$\{1'', 3'''\}$	$1''$, $3'''$	α	0
$4'''$	2	$\{4'''\}$			

ных стадиях эксперимента по распознаванию. В соответствии с алгоритмом 5.1 сначала проведем регулярный условный установочный эксперимент для автомата $A24'$ с множеством допустимых начальных состояний $\{1', 2', 3', 4'\}$. В конце этого эксперимента оказывается, что если испытуемый автомат есть автомат $A24'$, то его конечным состоянием должно быть состояние $2'$. Далее проводим регулярный условный установочный эксперимент для $A24''$ с множеством допустимых начальных состояний $\{1'', 2''\}$. В конце этого эксперимента может быть сделано заключение о том, что если испытуемый автомат есть $A24''$, то его конечным состоянием должно быть $1''$. Затем проводим регулярный условный установочный эксперимент для автомата $A24'''$ с множеством допустимых начальных состояний $\{1''', 2''', 3''', 4'''\}$, который устанавливает, что конечное состояние должно быть $1'''$, если испытуемым автоматом является $A24'''$. Тогда в конце третьего установочного эксперимента заданным автоматом может быть $A24'$ в состоянии $1'$ ($\alpha\alpha\alpha$ переводит $2'$ в $1'$) или $A24''$ в состоянии $1'''$ ($\alpha\alpha$ переводит $1''$ в $1''$), или $A24'''$ в состоянии $1'''$. Поэтому далее проводим регулярный условный установочный эксперимент для автомата Δ $(A24', A24'', A24''')$ с множеством допустимых состояний $\{1', 1'', 1'''\}$, который выявляет, что конечным состоянием является $4'''$. Так как состояние $4'''$ принадлежит подавтомату $A24'''$, эксперимент показывает, что испытуемым автоматом является $A24'''$. Таким образом, можно сделать заключение, что имеющее место повреждение вызывает появление 1 вместо 0 при приложении входного символа α к автомату $A24$ в состоянии 4.

Заметим, что уменьшение длины распознающего эксперимента достигается в том случае, если после приложения каждой подпоследовательности возможно больше состояний автомата Δ $(A24', A24'', A24''')$ исключается из рассмотрения в качестве конечных. Например, после приложения первым входного символа β и получения 1 на выходе состояния $2''$, $2'''$ и $4'''$ (в дополнение к состояниям $2'$ и $4'$) могут быть исключены из числа конечных состояний. В результате второй установочный эксперимент может быть опущен, а третий установочный эксперимент укорочен.

5.5. Сильносвя́зные автоматы

В этом параграфе рассмотрим важный класс автоматов, называемых «сильносвя́зными автоматами».

Определение 5.1. Автомат M с множеством состояний $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$ называется *сильносвя́зным*, если существует входная последовательность, которая переводит автомат M из любого заданного состояния σ_i в любое заданное состояние σ_j (где i может равняться j).

Из определения следует, что сильносвязные автоматы не могут содержать в себе никаких преходящих, тупиковых или изолированных подавтоматов. И наоборот, любой автомат, который содержит преходящий, тупиковый или изолированный подавтомат, не может быть сильносвязным автоматом. Таким образом, сильносвязным является такой автомат, в котором можно перейти в каждое состояние независимо от предыстории автомата.

Цена и сложность многих автоматов, представляющих собой практические устройства, возрастает с увеличением числа их состояний. Поэтому во многих автоматах, конструируемых для практического использования, избегают наличия преходящих и изолированных подавтоматов (они представляют потенциальные убытки, так как их состояния недостижимы). Таким образом, сильносвязные автоматы представляют собой класс автоматов, которые часто встречаются на практике.

Лемма 5.1. *Если автоматы M_1 и M_2 являются сильносвязными и различимыми, то ни одно состояние в M_1 не эквивалентно какому-либо состоянию в M_2.*

Доказательство. Пусть множеством состояний автомата M_1 будет множество $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n_1}\}$, а множеством состояний автомата M_2 — $\{\sigma'_1, \sigma'_2, \ldots, \sigma'_{n_2}\}$. Предположим, что в автомате M_1 имеется состояние σ_i, которое эквивалентно некоторому состоянию σ'_j в M_2. Пусть $\mathcal{E}_1$ будет входной последовательностью, которая переводит автомат M_1 из состояния σ_i в σ_1, а $\mathcal{E}_k$ — входной последовательностью, переводящей автомат M_1 из состояния σ_{k-1} в состояние σ_k для $k=2, 3, \ldots, n_1$ (все такие последовательности существуют, поскольку автомат M_1 сильносвязный). Приложим последовательность $\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 \ldots \mathcal{E}_{n_1}$ к $M_1|\sigma_i$ и $M_2|\sigma'_j$. После приложения последовательности $\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 \ldots \mathcal{E}_k$ M_1 окажется в состоянии σ_k, а M_2 — в некотором состоянии σ'_{j_k}. Так как $\sigma_i = \sigma'_j$, то их преемники по отношению к любой входной последовательности должны быть эквивалентными, следовательно, $\sigma_k = \sigma'_{j_k}$ для $k=2, 3, \ldots, n_1$. Таким образом, для каждого состояния в M_1 существует эквивалентное состояние в M_2. Теперь пусть $\mathcal{E}'_1$ будет входной последовательностью, которая переводит автомат M_2 из состояния σ'_j в σ'_1, а $\mathcal{E}'_k$ — входной последовательностью, которая переводит M_2 из состояния σ'_{k-1} в σ'_k для $k=2, 3, \ldots, n_2$ (все такие последовательности существуют, так как M_2 — сильносвязный автомат). Приложим последовательность $\mathcal{E}'_1\mathcal{E}'_2 \ldots \mathcal{E}'_{n_2}$ к $M_1|\sigma_i$

и к $M_2|\sigma'_j$. После приложения $\mathscr{E}'_1\mathscr{E}'_2 \ldots \mathscr{E}'_k$ M_2 окажется в состоянии σ'_k, а M_1 — в некотором состоянии σ_{i_k}. Поскольку $\sigma_i = \sigma'_j$, то мы должны получить, как и прежде, $\sigma'_k = \sigma_{i_k}$ для $k = 1, 2, \ldots, n_2$, то есть для каждого состояния в M_2 существует эквивалентное состояние в M_1. Таким образом показано, что если $\sigma_i = \sigma'_j$, то $M_1 = M_2$. Это противоречит условию теоремы и, следовательно, ни одно состояние в M_1 не может быть эквивалентным какому-либо состоянию в M_2.

Теорема 5.6. *Если $\mathfrak{M} = \{M_1, M_2, \ldots, M_N\}$ является конечным классом сильносвязных автоматов таких, что среди них никакие два автомата не являются эквивалентными, то класс $\mathfrak{M}$ является исключительным.*

Доказательство. Предположим, что $\mathfrak{M}$ не является исключительным классом. Тогда в некотором автомате M_i должно существовать состояние, эквивалентное некоторому состоянию в другом автомате M_j $(j \neq i)$. Однако, согласно лемме 5.1, это невозможно, поскольку M_i и M_j различимы и сильносвязны. Полученное противоречие доказывает, что класс $\mathfrak{M}$ должен быть исключительным.

Объединяя теоремы 5.3 и 5.6, получим

Следствие 5.3. Если известно, что автомат принадлежит к определенному конечному классу сильносвязных автоматов, то он всегда может быть распознан. Процедура распознавания сильносвязного автомата и оценка длины распознающего эксперимента идентичны процедуре и оценке, представленным в предшествующих параграфах.

5.6. Некоторые свойства сильносвязных автоматов

Обратимым автоматом называется автомат, который всегда возможно установить в начальное состояние. Ясно, что каждый сильносвязный автомат является обратимым. Обратное утверждение, однако, неправильно: обратимый автомат не обязательно сильносвязный.

Теорема 5.7. *Автомат, в котором каждый изолированный подавтомат является сильносвязным, является обратимым.*

Доказательство. Пусть имеется автомат M, который состоит из изолированных подавтоматов $M_1, M_2, \ldots, M_N$.

Если начальным состоянием автомата M является состояние σ_i подавтомата M_j, то его конечное состояние σ'_i для любой входной последовательности также должно принадлежать M_j. Поскольку M_j является сильносвязным, всегда возможен переход в σ_i из σ'_i. Последнее означает, что M — обратимый автомат.

Теорема 5.8. *Обратимый автомат является сильносвязным тогда и только тогда, когда он не содержит изолированных подавтоматов.*

Доказательство. Ясно, что если обратимый автомат состоит из двух и более изолированных подавтоматов, то он не может быть сильносвязным. Теперь предположим, что обратимый автомат M не содержит изолированных подавтоматов, но содержит преходящий (а значит, и тупиковый) подавтомат. Это означает, что в автомате M может быть начальное состояние, в которое нельзя вернуться, и, следовательно, что автомат M не является обратимым. Тогда из полученного противоречия следует, что автомат M не может включать в себя преходящих тупиковых подавтоматов. Так как автомат является сильносвязным тогда, когда он не содержит преходящих, тупиковых, изолированных подавтоматов, то, следовательно, если обратимый автомат не содержит изолированных подавтоматов, он должен быть сильносвязным.

Важным свойством сильносвязного автомата является то, что он всегда может быть установлен в любое заданное конечное состояние.

Теорема 5.9. *Пусть M является сильносвязным автоматом с n состояниями. Тогда он может быть установлен в любое заданное состояние простым условным экспериментом длины l и порядка d, где*

$$l \leqslant \frac{1}{2}(n+2)(n-1), \tag{5.8}$$

$$d \leqslant n. \tag{5.9}$$

Доказательство. Используя выражения (4.23) и (4.24), автомат M всегда можно перевести в известное (но не обязательно заданное) конечное состояние простым условным экспериментом длины $n(n-1)/2$ или менее и порядка $n-1$ или менее. После того как автомат будет переведен в известное состояние, может быть приложена дополнительная последовательность, которая переведет его из этого состояния в любое заданное состояние (такая последовательность всегда существует, поскольку M, по предположению, является сильносвязным). Согласно теореме 2.2, длина этой дополнительной последовательности не превышает $n-1$. Таким образом, общая длина эксперимента будет

$$l \leqslant \frac{1}{2} n(n-1)+n-1=\frac{1}{2}(n+2)(n-1). \qquad (5.10)$$

Общий порядок при этом будет определяться выражением

$$d \leqslant n-1+1=n. \qquad (5.11)$$

5.7. Распознавание сильносвязных (n, p, q)-автоматов

Частичное знание внутренней структуры заданного автомата во многих случаях позволяет выявить его входной и выходной алфавиты и число его состояний. Например, если автомат представляет собой вычислительный прибор, то эта информация может быть получена из знания входного устройства, выходного устройства и числа элементов памяти прибора. Если число входных символов равно p, число выходных символов — q, а число состояний — n, то эта информация равносильна утверждению, что заданный автомат является (n, p, q)-автоматом. Если, кроме того, известно, что автомат сильносвязный, то можно утверждать, что заданный автомат является сильносвязным (n, p, q)-автоматом.

Класс сильносвязных (n, p, q)-автоматов такой, что никакие два автомата из этого класса не являются эквивалентными, будем обозначать через $C_{n, p, q}$. Очевидно, что $C_{n, p, q}$ является подклассом класса минимальных (n, p, q)-автоматов таких, что никакие два автомата из этого класса не эквивалентны друг другу. Согласно теореме 3.7, последний класс является конечным и, следовательно, $C_{n, p, q}$ должен быть также конечным. Используя выражение (3.21), находим, что мощность класса $C_{n, p, q}$, обозначаемая $|C_{n, p, q}|$, определяется выражением

$$|C_{n, p, q}| \leqslant \frac{1}{n!} \prod_{r=0}^{n-1} [(qn)^p - r]. \qquad (5.12)$$

Поскольку, согласно теореме 5.6, $C_{n,\,p,\,q}$ представляет собой исключительный класс, любой его член может быть определен простым безусловным экспериментом длины l, где, по следствию 5.1,

$$l \leqslant (2n-1)(|C_{n,\,p,\,q}|\,n-1) \leqslant \frac{2n-1}{(n-1)!}\prod_{r=0}^{n-1}[(qn)^p - r] =$$

$$= \frac{(2n-1)\,(qn)^{pn}}{(n-1)!}\prod_{r=0}^{n-1}\left[1-\frac{r}{(qn)^p}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(2n-1)\,(qn)^{pn}}{(n-1)!}\exp\left[-\frac{n\,(n-1)}{2\,(qn)^p}\right]. \qquad (5.13)$$

Таким образом имеем:

Теорема 5.10. *Если известно, что автомат M является сильносвязным $(n,\ p,\ q)$-автоматом, то M всегда может быть распознан простым безусловным экспериментом длины l, где*

$$l \leqslant \frac{(2n-1)\,(qn)^{pn}}{(n-1)!}\exp\left[-\frac{n\,(n-1)}{2\,(qn)^p}\right]. \qquad (5.14)$$

Например, сильносвязный (2, 2, 2)-автомат может быть распознан простым безусловным экспериментом, длина которого не будет превышать 725 символов.

5.8. Автоматы без потери информации [1])

В главе 4 и предыдущих параграфах настоящей главы мы изучали вопросы распознавания неизвестных состояний и неизвестных автоматов. В этом параграфе мы рассмотрим задачу распознавания другого типа — задачу распознавания неизвестной входной последовательности, приложенной к заданному конечному автомату. В частности, эта задача состоит в следующем: неизвестная конечная входная последовательность $\mathscr{E}$ прикладывается к автомату M, таблица переходов которого и начальное состояние σ_i (т. е. состояние

[1]) Материал этого параграфа частично базируется на работе Хаффмена (D. A. Huffman, Canonical Forms for Information — Lossless Finite — State Logical Machines, IRE Trans., vol. CT — 6, special supplement, pp. 41—59, 1959).

перед приложением входной последовательности $\mathscr{E}$) известны, а реакция на входную последовательность $\mathscr{E}$ может наблюдаться; построить эксперимент, который, будучи проведенным над автоматом M, после приложений последовательности $\mathscr{E}$ распознает эту последовательность. Автоматы, для которых эта задача может быть решена независимо от $\mathscr{E}$ и σ_i, называются *автоматами без потери информации*. Автоматы без потери информации в отличие от всех других конечных автоматов, в которых при известных начальном состоянии и приложенной входной последовательности всегда можно определить выходную последовательность, имеют дополнительное свойство: при заданном начальном состоянии по выходной последовательности можно всегда определить входную последовательность.

Будем говорить, что состояние σ_i автомата M *ведет в состояние* σ'_i *через* $\mathscr{E}/\mathscr{R}$, если приложение входной последовательности $\mathscr{E}$ к $M|\sigma_i$ дает выходную последовательность $\mathscr{R}$ и переводит автомат M в состояние σ'_i. Состояние σ_i будем называть *состоянием с потерей*[1]), если оно ведет в некоторое состояние σ'_i через $\mathscr{E}_1/\mathscr{R}$ и через $\mathscr{E}_2/\mathscr{R}$, где $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ — две различные входные последовательности. Последнее определение иллюстрируется рис. 5.4.

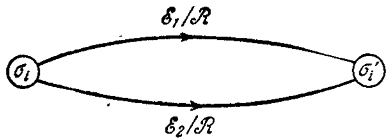


Рис. 5.4. Состояние с потерей информации.

Теорема 5.11. *Для того чтобы автомат M был автоматом без потери информации, необходимо и достаточно, чтобы этот автомат не имел состояний с потерей.*

Доказательство. Предположим, что автомат M содержит состояние с потерей σ_i такое, как показано на рис. 5.4. Так как выходные последовательности $M|\sigma_i$ при $\mathscr{E}_1$ и при $\mathscr{E}_2$ одинаковы и так как обе последовательности переводят M в одно и то же конечное состояние, то не существует последующего эксперимента, который бы выявил, вызвана выходная последовательность $\mathscr{R}$ входной

---

1) Имеется в виду потеря информации. (*Прим. ред.*)

последовательностью $\mathscr{E}_1$ или $\mathscr{E}_2$. Таким образом, необходимость условия теоремы очевидна. Предположим теперь, что M не содержит состояний с потерей и что $\mathscr{R}$ наблюдается при приложении неизвестной входной последовательности $\mathscr{E}$ к автомату M в известном начальном состоянии σ_i. По таблице переходов определим все различные входные последовательности, скажем $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_r$, которым точно соответствует $\mathscr{R}$; одной из этих последовательностей должна быть $\mathscr{E}$. Обозначим состояния, в которые ведет σ_i через $\mathscr{E}_1/\mathscr{R}, \mathscr{E}_2/\mathscr{R}, \ldots, \mathscr{E}_r/\mathscr{R}$, $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_r}$ соответственно. Поскольку, согласно допущению, σ_i не является состоянием с потерей, $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_r}$ должны быть различными и, следовательно, должно существовать взаимно однозначное соответствие между состояниями σ_{i_k} и входными последовательностями $\mathscr{E}_k$. Теперь приложим установочную последовательность, скажем $\mathscr{E}_H$, построенную для M с множеством допустимых начальных состояний $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_r}\}$. Обозначим конечное состояние, в которое перейдет автомат после приложения $\mathscr{E}_H$, через σ_j, а выходную последовательность, которая получится при этом, через $\mathscr{R}_H$. Пара последовательностей вход-выход $\mathscr{E}_H/\mathscr{R}_H$ может относиться только к одному из состояний $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_r}$ по следующим соображениям: допустим, что $\mathscr{E}_H/\mathscr{R}_H$ относится к двум состояниям, скажем σ_{i_1} и σ_{i_2}; тогда σ_i ведет в σ_j через $\mathscr{E}_1\mathscr{E}_H/\mathscr{R}\mathscr{R}_H$ и через $\mathscr{E}_2\mathscr{E}_H/\mathscr{R}\mathscr{R}_H$. Однако, так как $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ — различные последовательности, это означало бы, что σ_i является состоянием с потерей, что противоречит предположению, по которому автомат M не содержит состояний с потерей. Следовательно, $\mathscr{E}_H/\mathscr{R}_H$ однозначно определяет состояние, в которое автомат переходит из σ_i при приложении $\mathscr{E}$, и, значит, однозначно определяет $\mathscr{E}$. Это положение иллюстрируется рис. 5.5, где предполагается, что $\mathscr{E}_k$ является действительной входной последовательностью $\mathscr{E}$.

Пусть $S_j(\sigma_u)$ обозначает множество состояний, в которое переходит автомат M из состояния σ_u с выходным символом ζ_j. Если M является автоматом без потери информации, имеющим p входных и q выходных символов, то множества $S_1(\sigma_u), S_2(\sigma_u), \ldots, S_q(\sigma_u)$ должны содержать полное число элементов p. Теперь пусть «множество $D_k(\sigma_i)$» обозначает некоторое множество состояний, скажем $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_r}\}$, достижимых из состояния σ_i с выдачей одной и той же выходной последовательности длины k. Тогда множество $S_j(\sigma_{i_1}) \cup S_j(\sigma_{i_2}) \cup \ldots \cup S_j(\sigma_{i_r})$ является множеством $D_{k+1}(\sigma_i)$. Если M — автомат без потери информации, то число элементов множества $D_{k+1}(\sigma_i)$ должно равняться числу всех элементов в множествах $S_j(\sigma_{i_1}), S_j(\sigma_{i_2}), \ldots, S_j(\sigma_{i_r})$ для любого j. Таким образом, составляя рекурсивно все множества $D_k(\sigma_i)$ для всех k и i, можно определить, является автомат M автоматом без потери информации или нет.

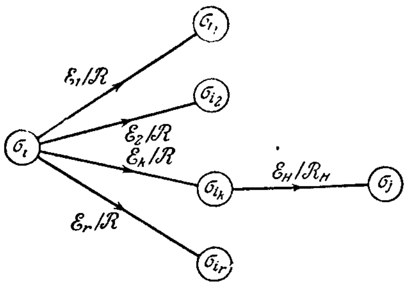


Рис. 5.5. Пояснение доказательства теоремы 5.11.

Указанный критерий может быть легко применен при построении так называемой *таблицы проверки потерь*. В этой таблице каждому столбцу соответствует свой, отличный от других, выходной символ ζ_j. Таблица делится на следующие друг за другом подтаблицы, первая из которых содержит в основном столбце состояния $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ автомата M, а содержимым клетки, находящейся на пересечении строки σ_u и столбца ζ_j, имеет множество $S_j(\sigma_u)$. Клетки основного столбца $(k+1)$-й подтаблицы заполняются содержимым клеток k-й подтаблицы, притом таким, которое не встречалось в основных столбцах предшествующих подтаблиц. В клетке на пересечении строки $(\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_r})$ и столбца ζ_j в $(k+1)$-й подтаблице записывается множество $S_j(\sigma_{i_1}) \cup S_j(\sigma_{i_2}) \cup \ldots \cup S_j(\sigma_{i_r})$, которое может быть составлено по данным первой подтаблицы. Построение таблицы заканчивается при выполнении одного из следующих условий: (1) число элементов некоторого множества $S_j(\sigma_u)$ (в первой подтаблице) меньше мощности входного алфавита; (2) число элементов некоторого множества $S_j(\sigma_{i_1}) \cup S_j(\sigma_{i_2}) \cup \ldots \cup S_j(\sigma_{i_r})$ (в k-й подтаблице, где $k > 1$) меньше общего числа элементов множеств $S_j(\sigma_{i_1}), S_j(\sigma_{i_2}), \ldots$ $\ldots, S_j(\sigma_{i_r})$; (3) нельзя добавить ни одной новой строки в основном столбце. Если условия (1) и (2) не имеют места, то M является автоматом без потери информации. Очевидно, что общее число строк в таблице проверки потерь не может превышать

$$\sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r} = 2^n - 1. \qquad (5.15)$$

Поэтому проверка потерь информации является конечным процессом.

В качестве примера в таблице 5.9 приведена таблица проверки потерь для автомата $A25$, заданного графом переходов рис. 5.6 и таблицей 5.8. Первая подтаблица строится

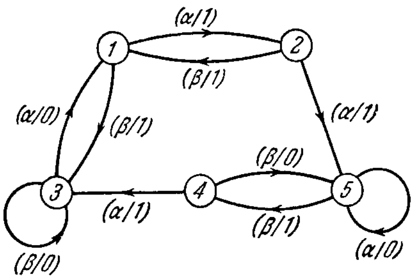


Рис. 5.6. Автомат $A25$.

на основании таблицы 5.8. В основной столбец второй подтаблицы переписываются из первой таблицы множества $\{1, 3\}$, $\{1, 5\}$ и $\{2, 3\}$, не содержащиеся в основном столбце последней. В клетке второй подтаблицы на пересечении строки $\{1, 5\}$ и столбца 1, например, проставляется набор состояний, стоящих в клетках первой подтаблицы на пересечении строк 1 и 5 и столбца 1, а именно $\{2, 3, 4\}$. Остальные клетки таблицы заполняются аналогично. Так как из рассмотрения таблицы 5.9 следует, что условия (1) и (2) не имеют места, автомат $A25$ является автоматом без потери информации.

Проиллюстрируем, как могут быть определены входные последовательности автомата без потери информации. Пусть известно, что автомат $A25$ до приложения неизвестной входной последовательности находился в состоянии 1, а в результате приложения этой последовательности выдал выходную

Таблица 5.8

Автомат $A25$

$s_\nu \backslash x_\nu$	z_ν α	z_ν β	$s_{\nu+1}$ α	$s_{\nu+1}$ β
1	1	1	2	3
2	1	1	5	1
3	0	0	1	3
4	1	0	3	5
5	0	1	5	4

Таблица 5.9

Таблица проверки потерь для автомата $A25$

	0	1
1	—	2, 3
2	—	1, 5
3	1, 3	—
4	5	3
5	5	4
1, 3	1, 3	2, 3
1, 5	5	2, 3, 4
2, 3	1, 3	1, 5
2, 3, 4	1, 3, 5	1, 3, 5
1, 3, 5	1, 3, 5	2, 3, 4

последовательность 111. Из графа переходов, изображенного на рис. 5.6, можно заключить, что последовательность 111 может соответствовать входным последовательностям αβα, αββ и ααβ, которые переводят автомат из состояния 1 в состояния 2, 3 и 4 соответственно. Последовательность αβ является установочной последовательностью для автомата $A25$ с множеством допустимых состояний $\{2, 3, 4\}$. При приложении последовательности αβ в состояниях 2, 3 и 4 выходные последовательности будут соответственно 11, 01 и 10. Следовательно, истинной входной последовательностью будет αβα, αββ или ααβ, в зависимости от того, какая будет реакция автомата на последовательность αβ (приложенную после неизвестной входной последовательности) — 11, 01 или 10 соответственно.

Автомат M без потери информации можно рассматривать как канал связи, в котором сообщение, переданное на входном конце, принято в закодированной форме на выходном конце. Задача декодирования получаемого сообщения может быть успешно разрешена, если получатель знает состояние канала перед передачей каждого сообщения и если канал может быть переведен в известное конечное состояние после передачи каждого сообщения. Если получатель не может контролировать передающий конец (как это часто имеет место), то второе требование может быть удовлетворено, если отправитель «согласится» заканчивать каждое сообщение последовательностью $\mathscr{E}_H$, т. е. заранее определенной установочной последовательностью для автомата M и для множества допустимых начальных состояний содержащего все состояния автомата. Например, для автомата $A25$ и для множества допустимых состояний $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ установочной последовательностью будет $\alpha\alpha\alpha$. Если отправитель систематически заканчивает каждое сообщение передачей последовательности $\alpha\alpha\alpha$ (или передает $\alpha\alpha\alpha$ в течение определенных, заранее оговоренных интервалов времени), то все переданные сообщения могут быть расшифрованы на приемном конце без необходимости доступа к входным зажимам автомата. Можно также показать, что если отправитель согласен передавать последовательность $\mathscr{E}_H$ *перед* каждым сообщением, то принимающему не нужно знать начальное состояние M (т. е. состояние M, в котором к M был приложен первый символ сообщения), так как это начальное состояние может быть определено по реакции автомата на $\mathscr{E}_H$. Таким образом, если до и после каждого сообщения передается последовательность $\mathscr{E}_H$, то это сообщение может быть расшифровано с помощью только таблицы переходов M. В нашем случае это означает, что передача каждого сообщения должна начинаться и заканчиваться передачей входной последовательности $\alpha\alpha\alpha$.

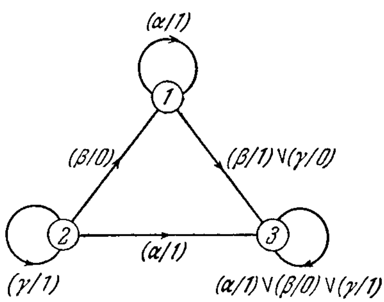


Рис. З 5.1.

Задачи

5.1. Постройте автомат, от которого никаким экспериментом длины 4 нельзя отличить автомат, изображенный на рис. З 5.1, но который не эквивалентен этому автомату.

5.2. Известно, что минимальный автомат M имеет два состояния, входной алфавит $\{\alpha, \beta\}$ и выходной алфавит $\{0, 1\}$. Известно также, что ни одно из состояний автомата M на графе переходов не имеет петель. Опишите эксперимент, распознающий этот автомат, если его истинное представление такое, как показано в таблице З 5.1, и если его действительное начальное состояние 1 (которое сначала не известно).

5.3. Известно, что автомат, определенный таблицей З 5.2, неисправен и что в результате неисправности, по крайней мере, вместо одной из «1» вырабатывается «0». Опишите эксперимент, распознающий повреждение, состоящее в том, что в состоянии 1 вместо «1» на выходе вырабатывается «0», и если начальным состоянием автомата является состояние 3 (что сначала не известно).

Таблица З 5.1

$s_\nu \backslash x_\nu$	z_ν: α	z_ν: β	$s_{\nu+1}$: α	$s_{\nu+1}$: β
1	0	1	2	2
2	1	1	1	1

Таблица З 5.2

$s_\nu \backslash x_\nu$	z_ν: α	z_ν: β	$s_{\nu+1}$: α	$s_{\nu+1}$: β
1	0	1	1	3
2	0	0	3	3
3	1	0	2	1

5.4. На рис. З 5.2 показан неполный граф переходов автомата с двумя состояниями. Опишите эксперимент над автоматом, с помощью которого можно закончить построение графа переходов. Предположите, что искомая дуга обозначается (α/1) и ведет в состояние 1 и что начальным состоянием автомата является состояние 1 (которое сначала не известно).

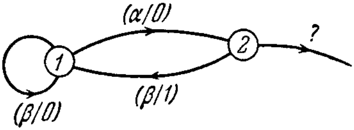


Рис. З 5.2.

5.5. Покажите, что автомат M с множеством состояний $S = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$ является сильносвязным тогда и только тогда, когда $G(\sigma_i) = S$ для $i = 1, 2, \ldots, n$. [Определение $G(\sigma_i)$ дано в § 2.6.]

5.6. Покажите, что для того, чтобы автомат M с n состояниями был сильносвязным, необходимо и достаточно, чтобы матрица $\sum_{k=1}^{n} [\tilde{M}]$ не имела нулевых элементов.

5.7. Автоматы M_1 и M_2 являются сильносвязными и состояние σ_i автомата M_1 эквивалентно состоянию σ_j автомата M_2. Покажите, что $M_1 = M_2$.

5.8. Постройте автомат с n состояниями, который является сильносвязным, но не содержит ни одного полного контура.

5.9. Автомат M имеет множество состояний $S = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$. Покажите, что: (а) M является обратимым, если в каждом изолированном подавтомате автомата M имеется состояние σ_i такое, что

$G(\sigma_i)=F(\sigma_i)$; (б) M является сильносвязным, если он имеет состояние σ_i такое, что $G(\sigma_i)=F(\sigma_i)=S$. [Определение $G(\sigma_i)$ дано в § 2.6; определение $F(\sigma_i)$ дано в задаче 2.10.]

5.10. Покажите, что если автомат M является сильносвязным, то $\check{M}$ также является сильносвязным, что и обратное утверждение не обязательно справедливо.

5.11. Докажите следующее неравенство, использованное в выражении (5.13):

$$\prod_{r=0}^{n-1}\left[1-\frac{r}{(qn)^p}\right]\leqslant \exp\left[-\frac{n(n-1)}{2(qn)^p}\right].$$

5.12. Известно, что автомат M является сильносвязным $(n, 2, 2)$-автоматом. Покажите, что M всегда может быть распознан простым безусловным экспериментом длины l, где

$$l\leqslant\frac{(2n)^{2n+1}}{n-1!}.$$

Вычислите верхнее значение l при $n=5$.

5.13. Известно, что автомат M является (n, p, q)-автоматом и содержит полный контур. Найдите верхнее значение длины распознающего M эксперимента (можно предположить, что $n\gg 1$).

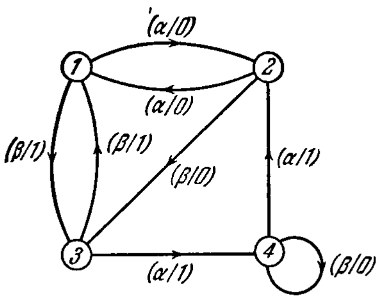


Рис. З 5.3.

5.14. Определите, является ли автомат $A17$, изображенный на рис. З 5.3, автоматом без потери информации.

5.15. Покажите, что автомат, представленный на рис. З 5.3, является автоматом без потери информации, и опишите распознавание входной последовательности $\alpha\alpha\beta$, приложенной к этому автомату в состоянии 2.

5.16. Покажите, что автомат является сильносвязным, если он имеет любое из следующих свойств: (а) ни в одной строке подтаблицы z_v не содержится двух одинаковых выходных символов; (б) ни в одном столбце матрицы переходов не имеется двух или более пар вход-выход с одинаковыми выходными символами.

ГЛАВА 6
АВТОМАТЫ С КОНЕЧНОЙ ПАМЯТЬЮ

6.1. Введение

Главное преимущество при использовании модели конечного автомата для представления заданной системы заключается в том, что предсказание выходной реакции системы не требует каких-либо данных относительно прошлого поведения системы. Для того чтобы предсказать выходную реакцию в любой заданный момент времени, достаточно знать входное воздействие и состояние в этот момент времени. Тогда, состояние автомата в настоящий момент времени можно рассматривать как особую «величину», которая в неявной форме объединяет все прошедшие события, относящиеся к определению выходной реакции в настоящий момент времени. Здесь может возникнуть следующий вопрос: всегда ли можно установить точное соотношение между выходной реакцией в настоящий момент времени и входным воздействием в настоящий момент времени и конечным числом входных воздействий и выходных реакций в предшествующие моменты времени? Отрицательный ответ на этот вопрос легко может быть продемонстрирован на простом автомате $A26$, показанном на рис. 6.1. В этом автомате конечное состояние остается неизвестным до тех пор, пока не будет приложен вход α и определена соответствующая выходная реакция.

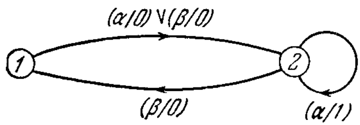


Рис. 6.1. Автомат $A26$.

Так, знание того, что прошлые l входных символов были β и прошлые l выходных символов были 0, бесполезно для предсказания выходной реакции $A26$ на приложенный входной символ α, независимо от значения l. Поэтому для данного автомата исследование его прошлого поведения не всегда помогает в предсказании выходной реакции на входное воздействие в настоящий момент времени. Значит, в общем случае не существует явной зависимости, которая выражала бы выходную реакцию в настоящий момент времени как функцию входного воздействия в настоящий момент времени и входных воздействий и выходных реакций в предшествующие моменты времени. В связи с этим можно заключить, что состояние конечного автомата отражает его «бесконечную память» в том смысле, что пребывание автомата в этом состоянии является результатом события, которое происходило сколь угодно далеко в прошлом. Например, состояние, в которое приходит автомат $A26$ после приложения последовательности $\alpha\beta\beta\beta \ldots \beta$ произвольной длины, однозначно определяется выходной реакцией на *первый* символ этой последовательности.

В этой главе мы будем рассматривать конечные автоматы не общего вида, а лишь те, в которых *может* быть установлена явная зависимость между входными воздействиями и выходными реакциями в прошедшие и настоящие моменты времени. Хотя такие автоматы представляют собой довольно узкий класс, они являются достаточно обычными в практике, чтобы оправдать подробное их обсуждение[1]).

6.2. Представление систем с конечной памятью

Системой с конечной памятью называется система, представимая конечным автоматом, в котором выходная реакция в любой дискретный момент времени зависит только от конечного ненулевого числа прошлых входных воздействий (и, возможно, от входного воздействия в настоящий момент времени)[2]) и от конечного числа прошлых выходных реакций. Значит, система с конечной памятью представима конечным автоматом, соотношение вход-выход которого может

[1]) Материал этой главы основывается на работе Симона (J. M. Simon, A note on the Memory Aspects of sequence Transducers, IRE Trans., vol. CT-6, pp. 26—29, 1959) и Заде (L. A. Zadeh, Unpublished notes on discrete — state systems and automata, University of California, Berkeley, 1960).

[2]) Автоматы, у которых выходная реакция не зависит от входного воздействия, называются *автономными*. Автономные автоматы в книге не рассматриваются.

быть записано в форме

$$z_\nu = g\left(x_{\nu-i_1}, x_{\nu-i_2}, \ldots, x_{\nu-i_u}, z_{\nu-j_1}, z_{\nu-j_2}, \ldots, z_{\nu-j_v}\right), \tag{6.1}$$

где принято, что $0 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_u$ и $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots$ $\ldots < j_v$. Если добавить ряд несущественных переменных[1]) и принять $i_u = \mu_1$ и $j_v = \mu_2$, то уравнение (6.1) можно записать в виде

$$z_\nu = f(x_\nu, x_{\nu-1}, \ldots, x_{\nu-\mu_1}, z_{\nu-1}, z_{\nu-2}, \ldots, z_{\nu-\mu_2}). \tag{6.2}$$

Для того чтобы преобразовать приведенное характеристическое уравнение в характеристические стандартные функции f_z и f_s конечного автомата, переменную s определим так, чтобы s_ν являлась упорядоченным набором значений $(\mu_1 + \mu_2)$ переменных $(x_{\nu-1}, x_{\nu-2}, \ldots, x_{\nu-\mu_1}, z_{\nu-1}, z_{\nu-2}, \ldots$ $\ldots, z_{\nu-\mu_2})$. Равенство (6.2) тогда примет вид

$$z_\nu = f_z(x_\nu, s_\nu). \tag{6.3}$$

Из определения s следует, что $s_{\nu+1}$ определяется так:

$$\begin{aligned}(x_\nu, x_{\nu-1}, \ldots, x_{\nu-\mu_1+1}, z_\nu, z_{\nu-1}, \ldots, z_{\nu-\mu_2+1}) = \\ = (x_\nu, x_{\nu-1}, \ldots, x_{\nu-\mu_1+1}, f(x_\nu, x_{\nu-1}, \ldots, x_{\nu-\mu_1}, \\ z_{\nu-1}, z_{\nu-2}, \ldots, z_{\nu-\mu_2}), z_{\nu-1}, \ldots, z_{\nu-\mu_2+1}).\end{aligned} \tag{6.4}$$

Следовательно,

$$s_{\nu+1} = h(x_\nu, x_{\nu-1}, \ldots, x_{\nu-\mu_1}, z_{\nu-1}, z_{\nu-2}, \ldots, z_{\nu-\mu_2}) \tag{6.5}$$

или

$$s_{\nu+1} = f_s(x_\nu, s_\nu). \tag{6.6}$$

Уравнения (6.3) и (6.6) могут рассматриваться как характеристические функции конечного автомата. Следовательно, множество упорядоченных наборов значений $(\mu_1 + \mu_2)$ переменных $(x_{\nu-1}, x_{\nu-2}, \ldots, x_{\nu-\mu_1}, z_{\nu-1}, z_{\nu-2}, \ldots, z_{\nu-\mu_2})$ адекватно множеству состояний системы, представленной урав-

[1]) *Несущественная переменная* является такой переменной, которая оставляет без изменения значение функции независимо от значения, принимаемого этой переменной.

нением (6.2). Если число символов входного и выходного алфавитов для системы соответственно равно p и q, то мощность множества состояний будет

$$n = p^{\mu_1} q^{\mu_2}. \tag{6.7}$$

В качестве примера рассмотрим устройство $A27$. На устройство периодически поступают цифры 0 и 1, выход его в момент t_ν равен сумме по модулю 2 выхода в момент $t_{\nu-1}$ и входа в момент $t_{\nu-2}$. Обозначая сложение по модулю 2 знаком $\oplus$ [1]), $A27$ может быть охарактеризовано равенством

$$z_\nu = x_{\nu-2} \oplus z_{\nu-1} = g(x_{\nu-2},\ z_{\nu-1}). \tag{6.8}$$

Добавляя несущественные переменные x_ν и $x_{\nu-1}$, вместо (6.8) получим:

$$z_\nu = f(x_\nu,\ x_{\nu-1},\ x_{\nu-2},\ z_{\nu-1}). \tag{6.9}$$

Входной алфавит в этом случае

$$X = \{0,\ 1\},$$

а выходной алфавит

$$Z = \{0,\ 1\}.$$

Множество состояний является множеством всех упорядоченных наборов значений трех переменных $(x_{\nu-1},\ x_{\nu-2},\ z_{\nu-1})$:

$$S = \{(0,\ 0,\ 0),\ (0,\ 0,\ 1),\ (0,\ 1,\ 0),\ (0,\ 1,\ 1),\ (1,\ 0,\ 0),\ (1,\ 0,\ 1),\ (1,\ 1,\ 0),\ (1,\ 1,\ 1)\}.$$

Зависимость между x_ν, s_ν, $s_{\nu+1}$ и z_ν может быть представлена в табличной форме, как показано в таблице 6.1. Столбцы таблицы под «s_ν» представляют все упорядоченные наборы значений трех переменных; каждый набор записан дважды (по одному разу для каждого значения x_ν). Столбцы, озаглавленные «$s_{\nu+1}$», могут быть заполнены путем воспроизведения ранее заполненных столбцов (таких как x_ν и $x_{\nu-1}$) и

---

[1]) Сложение по модулю 2 определяется следующим образом: $0 \oplus 0 = 0$, $0 \oplus 1 = 1$, $1 \oplus 0 = 1$, $1 \oplus 1 = 0$. Если y принимает значение 0 или 1, то $y \oplus y = 0$.

Таблица 6.1

Соотношения между x_ν, s_ν, $s_{\nu+1}$ и z_ν для $A27$

x_ν	s_ν			$s_{\nu+1}$			z_ν
	$x_{\nu-1}$	$x_{\nu-2}$	$z_{\nu-1}$	x_ν	$x_{\nu-1}$	z_ν	
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	0	0

путем использования соотношения (6.8) (для столбца z_ν). Показанную таблицу удобно использовать для определения характеристических функций f_z и f_s автомата $A27$. Например,

Таблица 6.2

Автомат $A27$

s_ν \ x_ν	z_ν		$s_{\nu+1}$	
	0	1	0	1
(0, 0, 0)	0	0	(0, 0, 0)	(1, 0, 0)
(0, 0, 1)	1	1	(0, 0, 1)	(1, 0, 1)
(0, 1, 0)	1	1	(0, 0, 1)	(1, 0, 1)
(0, 1, 1)	0	0	(0, 0, 0)	(1, 0, 0)
(1, 0, 0)	0	0	(0, 1, 0)	(1, 1, 0)
(1, 0, 1)	1	1	(0, 1, 1)	(1, 1, 1)
(1, 1, 0)	1	1	(0, 1, 1)	(1, 1, 1)
(1, 1, 1)	0	0	(0, 1, 0)	(1, 1, 0)

по четвертой строке можно сказать, что если входной символ 1 появляется при состоянии (0, 0, 1), то выходной символ будет 1 и следующее состояние (1, 0, 1). Применяя подобные рассуждения по отношению к другим строкам, построим таблицу переходов $A27$ (см. таблицу 6.2).

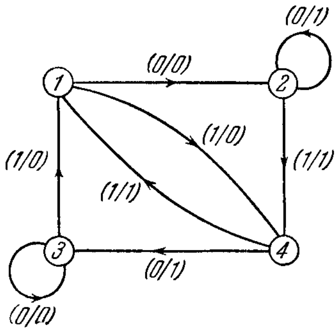


Рис. 6.2. Автомат $A27$.

В общем случае автомат, полученный описанным способом, не минимальный. Однако, минимальная форма всегда может быть определена любым из методов минимизации, описанных в главе 3. Минимальная форма автомата $A27$ показана на рис. 6.2, где состояния 1, 2, 3 и 4 представляют эквивалентные классы $\{(1, 0, 0), (1, 1, 1)\}$, $\{(0, 0, 1), (0, 1, 0)\}$, $\{(0, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ и $\{(1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ соответственно.

6.3. Свойства автоматов с конечной памятью

Конечный автомат, представляющий систему с конечной памятью, будем называть *автоматом с конечной памятью*. Таким образом, автомат с конечной памятью M, является автоматом, в котором

$$z_\nu = f(x_\nu, x_{\nu-1}, \ldots, x_{\nu-\mu_1}, z_{\nu-1}, z_{\nu-2}, \ldots, z_{\nu-\mu_2}), \quad (6.10)$$

где любой из аргументов (за исключением одного из x_i) может быть несущественной переменной. Числа μ_1 и μ_2 называются соответственно *памятью* x и *памятью* z автомата M. Целое число

$$\mu = \max(\mu_1, \mu_2) \quad (6.11)$$

называется *максимальной памятью* M. Если в дополнение к (6.10) имеет место

$$f(x_\nu, x_{\nu-1}, \ldots, x_{\nu-\mu}, z_{\nu-1}, z_{\nu-2}, \ldots, z_{\nu-\mu}) \neq$$
$$\neq f(x_\nu, x_{\nu-1}, \ldots, x_{\nu-\mu+1}, z_{\nu-1}, z_{\nu-2}, \ldots, z_{\nu-\mu+1}), \quad (6.12)$$

то будем говорить, что автомат M имеет ***память*** μ. Таким образом, μ является памятью автомата в том случае, если предсказание выходной реакции, по крайней мере, на одно входное воздействие в момент времени t_ν требует знания входного воздействия и (или) выходной реакции в момент времени $t_{\nu-\mu}$ (и, возможно, входных воздействий и выходных реакций, которые возникают в более поздние моменты времени), но не требует знания каких-либо входных воздействий и выходных реакций в моменты времени более ранние, чем $t_{\nu-\mu}$.

В дальнейшем $(\xi_{i_1}/\zeta_{j_1})(\xi_{i_2}/\zeta_{j_2})\ldots(\xi_{i_l}/\zeta_{j_l})$ будем называть *последовательностью вход-выход*, если входная последовательность $\xi_{i_1}\xi_{i_2}\ldots\xi_{i_l}$ заставляет автомат генерировать выходную последовательность $\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\ldots\zeta_{j_l}$. Будем говорить, что путь в диаграмме переходов *описывает* последовательность вход-выход $(\xi_{i_1}/\zeta_{j_1})(\xi_{i_2}/\zeta_{j_2})\ldots(\xi_{i_l}/\zeta_{j_l})$, если его k-я ветвь для $k=1, 2, \ldots, l$ обозначена парой вход-выход (ξ_{i_k}/ζ_{j_k}) (и, возможно, другими парами вход-выход). Пути будем называть $(\xi_{i_1}/\zeta_{j_1})(\xi_{i_2}/\zeta_{j_2})\ldots(\xi_{i_l}/\zeta_{j_l})$-*совпадающими*, если каждый из них описывает последовательность вход-выход $(\xi_{i_1}/\zeta_{j_1})(\xi_{i_2}/\zeta_{j_2})\ldots(\xi_{i_l}/\zeta_{j_l})$.

Лемма 6.1. *В минимальном автомате с памятью* μ

$$s_\nu = g(x_{\nu-1}, x_{\nu-2}, \ldots, x_{\nu-\mu}, z_{\nu-1}, z_{\nu-2}, \ldots, z_{\nu-\mu}). \quad (6.13)$$

Доказательство. Предположим обратное. Тогда автомат должен содержать по крайней мере два пути, которые являются $(\xi_{i_1}/\zeta_{j_1})(\xi_{i_2}/\zeta_{j_2})\ldots(\xi_{i_\mu}/\zeta_{j_\mu})$-совпадающими для некоторой последовательности вход-выход $(\xi_{i_1}/\zeta_{j_1})(\xi_{i_2}/\zeta_{j_2})\ldots$ $\ldots(\xi_{i_\mu}/\zeta_{j_\mu})$ и которые оканчиваются двумя различимыми состояниями. Пусть начальные состояния этих путей будут σ_{k_0} и σ'_{k_0} и конечные состояния — σ_{k_μ} и σ'_{k_μ}; пусть минимальная диагностическая последовательность для σ_{k_μ} и σ'_{k_μ} есть $\xi_{i_{\mu+1}}\xi_{i_{\mu+2}}\ldots\xi_{i_{\mu+r}}$ $(r \geqslant 1)$. Тогда σ_{k_0} и σ'_{k_0} дают одинаковые выходные реакции на $\xi_{i_1}\xi_{i_2}\ldots\xi_{i_\mu}\xi_{i_{\mu+1}}\ldots\xi_{i_{\mu+r-1}}$, но различные реакции на $\xi_{i_1}\xi_{i_2}\ldots\xi_{i_\mu}\xi_{i_{\mu+1}}\ldots\xi_{i_{\mu+r}}$. Однако это невозможно, так как по предположению автомат имеет память μ и, следовательно,

$$z_\nu = f(x_\nu,\ x_{\nu-1},\ \ldots,\ x_{\nu-\mu},\ z_{\nu-1},\ z_{\nu-2},\ \ldots,\ z_{\nu-\mu}). \quad (6.14)$$

Это равенство означает, что выходная реакция в настоящий момент времени может быть однозначно определена с помощью прошедшей последовательности вход-выход длиной μ. Лемма, таким образом, следует из полученного противоречия.

В дальнейшем будем говорить, что два или более путей *пересекаются* в состоянии σ_k, если σ_k («пересечение») достижимо из начальных состояний этих путей при одной и той же

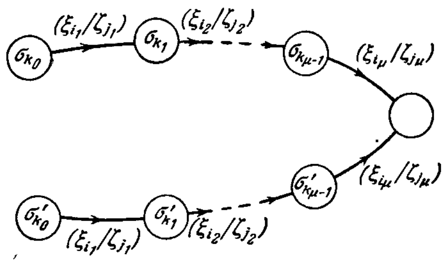


Рис. 6.3. $(\xi_{i_1}|\zeta_{j_1})(\xi_{i_2}|\zeta_{j_\mu}|\zeta_{j_\mu})$-совпадающие пути.

последовательности вход-выход. Лемма 6.1 означает, что диаграмма переходов автомата с памятью μ должна обладать следующими свойствами. Пути, которые являются $(\xi_{i_1}/\zeta_{j_1})\times$ $\times(\xi_{i_2}/\zeta_{j_2})\ldots(\xi_{i_\mu}/\zeta_{j_\mu})$-совпадающими, должны пересекаться в своих конечных состояниях. Кроме того, должна быть, по крайней мере, одна пара $(\xi_{i_1}/\zeta_{j_1})(\xi_{i_2}/\zeta_{j_2})\ldots(\xi_{i_\mu}/\zeta_{j_\mu})$-совпадающих путей, которые пересекаются в своих конечных состояниях, но не имеют других пересечений. Такая пара путей показана на рис. 6.3.

Лемма 6.2. *Если в заданном автомате M*

$$s_\nu = g(x_{\nu-1},\ x_{\nu-2},\ \ldots,\ x_{\nu-\mu},\ z_{\nu-1},\ z_{\nu-2},\ \ldots,\ z_{\nu-\mu}), \quad (6.15)$$

то M является автоматом с максимальной памятью μ.

Доказательство. Для любого конечного автомата

$$z_\nu = f_z(x_\nu,\ s_\nu). \quad (6.16)$$

Тогда для M

$$z_\nu = f_z(x_\nu, g(x_{\nu-1}, x_{\nu-2}, \ldots, x_{\nu-\mu}, z_{\nu-1}, z_{\nu-2}, \ldots, z_{\nu-\mu})) = \\ = f(x_\nu, x_{\nu-1}, \ldots, x_{\nu-\mu}, z_{\nu-1}, z_{\nu-2}, \ldots, z_{\nu-\mu}). \tag{6.17}$$

Следовательно, по определению, M является автоматом с максимальной памятью μ.

В связи с предшествующими леммами важно отметить следующее основное различие между произвольным конечным автоматом и автоматом с конечной памятью. В любом конечном автомате имеется, по крайней мере, одна *специально составленная* входная последовательность (а именно, установочная последовательность), которая, будучи приложенной к автомату, однозначно определяет конечное состояние. В автомате с конечной памятью μ это справедливо для *каждой* входной последовательности длины μ или больше (независимо от того, специально составлена такая последовательность или нет).

Теорема 6.1. *Пусть M — минимальный автомат с памятью μ и числом состояний n. Тогда*

$$\mu \leqslant \frac{1}{2} n(n-1). \tag{6.18}$$

Доказательство. Если автомат M является минимальным и имеет память μ, то должно существовать два пути, которые пересекаются не раньше, чем в своих конечных состояниях, как показано на рис. 6.3. Пусть $\{\sigma_{k_l}, \sigma'_{k_l}\}$ является l-й парой состояний, а $\{\sigma_{k_{l+h}}, \sigma'_{k_{l+h}}\}$ является $(l+h)$-й парой состояний $(l+h \leqslant \mu)$ этих путей. Предположим, что совпадают (являются одними и теми же состояниями) σ_{k_l} с $\sigma_{k_{l+h}}$, а также σ'_{k_l} с $\sigma'_{k_{l+h}}$. Тогда два пути, начинающихся в σ_{k_l} и σ'_{k_l}, каждый из которых описывает последовательность вход-выход $(\xi_{i_l}/\zeta_{j_l})(\xi_{i_{l+1}}/\zeta_{j_{l+1}}) \ldots (\xi_{i_{l+h-1}}/\zeta_{j_{l+h-1}})$, представляют собой замкнутые пути, которые являются $(\xi_{i_l}/\zeta_{j_l})(\xi_{i_{l+1}}/\zeta_{j_{l+1}}) \ldots$ $\ldots (\xi_{i_{l+h-1}}/\zeta_{j_{l+h-1}})$-совпадающими, и, следовательно, пути бесконечной длины, которые описывают одну и ту же последовательность вход-выход, но не пересекаются. (рис. 6.4). По лемме 6.1 такие пути не могут существовать в автомате с конечной памятью. Теперь предположим, что σ_{k_l} совпадает с $\sigma'_{k_{l+h}}$, а σ'_{k_l} с $\sigma_{k_{l+h}}$. Тогда начинающиеся в σ_{k_l} и σ'_{k_l} пути, каждый из которых описывает последовательность вход-выход $(\xi_{i_l}/\zeta_{j_l})\,(\xi_{i_{l+1}}/\zeta_{j_{l+1}})\,\ldots$ $\ldots\,(\xi_{i_{l+h-1}}/\zeta_{j_{l+h-1}})\,(\xi_{i_l}/\zeta_{j_l})\,\ldots$ $\ldots\,(\xi_{i_{l+h-1}}/\zeta_{j_{l+h-1}})$, представляют собой замкнутые пути, которые являются $(\xi_{i_l}/\zeta_{j_l})(\xi_{i_{l+1}}/\zeta_{j_{l+1}})\,\ldots$ $\ldots(\xi_{i_{l+h-1}}/\zeta_{j_{l+h-1}})\,(\xi_{i_l}/\zeta_{j_l})\,\ldots$ $\ldots(\xi_{i_{l+h-1}}/\zeta_{j_{l+h-1}})$-совпадающими, и, следовательно, пути бесконечной длины, которые описывают одну и ту же последовательность вход-выход, но не пересекаются (рис. 6.5). Снова, по лемме 6.1, такие пути не могут существовать. Таким образом, неупорядоченная l-я пара $\{\sigma_{k_l}, \sigma'_{k_l}\}$

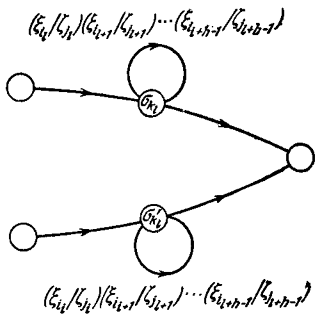


Рис. 6.4. Иллюстрация доказательства теоремы 6.1.

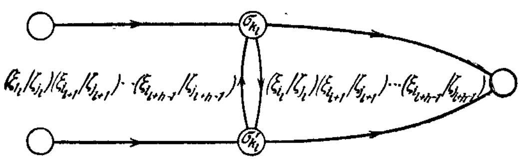


Рис. 6.5. Иллюстрация доказательства теоремы 6.1.

и неупорядоченная $(l+h)$-я пара $\{\sigma_{k_{l+h}}, \sigma'_{k_{l+h}}\}$ не могут быть совпадающими неупорядоченными парами. Поэтому длина μ любого из путей, показанных на рис. 6.3, не может превышать число неупорядоченных пар состояний, которые могут быть выбраны в автомате с n состояниями. Это число равно

$$\binom{n}{2} = \frac{1}{2}\,n(n-1). \tag{6.19}$$

Отсюда следует соотношение (6.18).

6.4. Определение памяти автомата

В этом параграфе мы рассмотрим следующую задачу. Заданы характеристические функции f_z и f_s автомата (в табличной форме, в виде графа или в матричной форме). Определить, является ли этот автомат автоматом с конечной памятью, и, если является, то, как определить его память?

Рассмотрим автомат M с множеством состояний $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$. Пусть $Q_k^{(i)}$ обозначает множество всех последовательностей вход-выход, описываемых путями длины k, которые заканчиваются в состоянии σ_i. По лемме 6.1, если M является автоматом с памятью μ, то

$$Q_{\mu-1}^{(i)} \cap Q_{\mu-1}^{(j)} \neq 0 \text{ для некоторых } i \text{ и } j \neq i, \tag{6.20}$$

$$Q_{\mu}^{(i)} \cap Q_{\mu}^{(j)} = 0 \text{ для всех } i \text{ и } j \neq i. \tag{6.21}$$

По теореме 6.1, если M не является автоматом с конечной памятью, то

$$Q_{n(n-1)/2}^{(i)} \cap Q_{n(n-1)/2}^{(j)} \neq 0 \text{ для некоторых } i \text{ и } j \neq i. \tag{6.22}$$

Следовательно, для определения памяти автомата можно сформулировать следующий алгоритм.

Алгоритм 6.1. Задан автомат M с множеством состояний $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$; требуется найти память автомата M. (1) Полагаем $k = 1$. (2) Составляем последовательность $Q_k^{(1)}, Q_k^{(2)}, \ldots, Q_k^{(n)}$. (3) (а) Если $Q_k^{(i)} \cap Q_k^{(j)} \neq 0$ для некоторых i и $j \neq i$, то переходим к (4). (б) Если $Q_k^{(i)} \cap Q_k^{(j)} = 0$ для всех i и $j \neq i$, то k является памятью M. (4) (а) Если $k < n(n-1)/2$, то увеличиваем k на 1 и возвращаемся к (2). (б) Если $k = n(n-1)/2$, то M не является автоматом с конечной памятью.

Выполнение алгоритма 6.1 облегчается при использовании матриц переходов высокого порядка, введенных в главе 2. В клетке (i, j) матрицы переходов k-го порядка $[\bar{M}]^k$ записаны все пути длины k, ведущие из состояния σ_i в состояние σ_j. Поэтому клетки j-го столбца матрицы $[\bar{M}]^k$ представляют все пути длины k, заканчивающиеся в состоянии σ_j. Таким образом, последовательности вход-выход, представленные путями, перечисленными в столбце матрицы $[\bar{M}]^k$, являются элементами множества $Q_k^{(j)}$. По матрице $[\bar{M}]^k$ и диаграмме переходов для автомата M может быть построена таблица, в которой j-й столбец содержит элементы $Q_k^{(j)}$; если нет двух столбцов, имеющих общий член, то k должно быть памятью автомата M.

В качестве примера рассмотрим автомат $A28$, показанный на рис. 6.6. Матрица переходов автомата $A28$ задана

Таблица 6.3

Множества $Q_l^{(j)}$ для $A28$

$Q_1^{(1)}$	$Q_1^{(2)}$	$Q_1^{(3)}$	$Q_1^{(4)}$
(1/0)	(0/0)	(1/1) (0/1)	(0/1) (1/1)

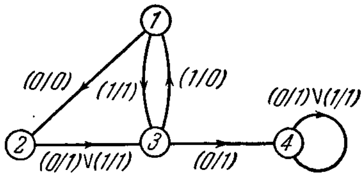


Рис. 6.6. Автомат $A28$.

выражением (6.23), а матрица переходов первого порядка — выражением (6.24).

$$[A28]=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}1 & 2 & 3 & 4\end{array}\\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0/0 & (1/1) & 0\\ 0 & 0 & (0/1)\vee(1/1) & 0\\ (1/0) & 0 & 0 & (0/1)\\ 0 & 0 & 0 & (0/1)\vee(1/1)\end{array}\right]\end{array}. \tag{6.23}$$

$$\overline{[A28]}=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}1 & 2 & 3 & 4\end{array}\\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & \pi_{12} & \pi_{13} & 0\\ 0 & 0 & \pi_{23} & 0\\ \pi_{31} & 0 & 0 & \pi_{34}\\ 0 & 0 & 0 & \pi_{44}\end{array}\right]\end{array}. \tag{6.24}$$

По (6.24) и (6.23) можно построить таблицу 6.3, в которой перечислены $Q_1^{(1)}$, $Q_1^{(2)}$, $Q_1^{(3)}$ и $Q_1^{(4)}$.

Так как последовательности вход-выход (0/1) и (1/1) появляются в двух различных столбцах этой таблицы, память автомата $A28$ будет превышать 1. Выражение (6.25) представляет собой матрицу переходов второго порядка для автомата $A28$.

$$\overline{[A28]}^2 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \pi_{13}\pi_{31} & 0 & \pi_{12}\pi_{23} & \pi_{13}\pi_{34} \\ \pi_{23}\pi_{31} & 0 & 0 & \pi_{23}\pi_{34} \\ 0 & \pi_{31}\pi_{12} & \pi_{31}\pi_{13} & \pi_{34}\pi_{44} \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{44}\pi_{44} \end{bmatrix} \end{array}. \quad (6.25)$$

По (6.25) и (6.23) можно построить таблицу 6.4, в которой перечислены $Q_2^{(1)}$, $Q_2^{(2)}$, $Q_2^{(3)}$ и $Q_2^{(4)}$.

Таблица 6.4

Множества $Q_2^{(j)}$ для $A28$

$Q_2^{(1)}$	$Q_2^{(2)}$	$Q_2^{(3)}$	$Q_2^{(4)}$
(1/1) (1/0) (0/1) (1/0)	(1/0) (0/0)	(0/0) (0/1) (0/0) (1/1) (1/0) (1/1)	(1/1) (0/1) (0/1) (0/1) (0/1) (1/1) (1/1) (1/1)

Автомат $A28$ должен иметь память 2, так как никакая последовательность вход-выход не появляется в двух различных столбцах этой таблицы. Если бы автомат $A28$ не был автоматом с конечной памятью, то этот факт обнаружился бы из таблицы, перечисляющей $Q_6^{(1)}$, $Q_6^{(2)}$, $Q_6^{(3)}$ и $Q_6^{(4)}$.

6.5. Минимальная x-z-функция

Если известна память μ конечного автомата M, то автомат может быть охарактеризован уравнением вида

$$z_\nu = f(x_\nu, x_{\nu-1}, \ldots, x_{\nu-\mu}, z_{\nu-1}, z_{\nu-2}, \ldots, z_{\nu-\mu}). \quad (6.26)$$

Функцию f, соответствующую выражению (6.26), будем называть *x-z-функцией* автомата M. Часто x-z-функция содержит целый ряд несущественных переменных и может быть сведена к виду

$$z_\nu = \breve{f}\left(x_{\nu-i_1}, x_{\nu-i_2}, \ldots, x_{\nu-i_u}, z_{\nu-j_1}, z_{\nu-j_2}, \ldots, z_{\nu-j_v}\right), \quad (6.27)$$

где $0 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_u$, $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_v$, а $i_u = \mu$ и (или) $j_v = \mu$. Функция $\breve{f}$ называется *минимальной x-z-функцией* M, если $u+v$ — минимальное число аргументов x_i и z_i, необходимых для выражения z, как функции входных воздействий и выходных реакций в форме (6.27). Таким образом, минимальная x-z-функция получается из x-z-функции путем вычеркивания из последней максимально возможного числа аргументов x_i и z_i. Получение минимальной x-z-функции, или *минимизация* x-z-функции представляет интерес для целого ряда задач анализа и синтеза, когда для заданного конечного автомата желательна наиболее компактная форма его описания, т. е. форма (6.27).

Задача минимизации x-z-функции может быть сформулирована более точно на языке x-z-таблицы, общая форма которой показана в таблице 6.5.

Таблица 6.5

Общая форма x-z-таблицы

z_ν	$x_{\nu-\mu}$	$z_{\nu-\mu}$	$x_{\nu-\mu+1}$	$z_{\nu-\mu+1}$	...	$x_{\nu-1}$	$z_{\nu-1}$	x_ν
ζ_1								
ζ_2								
$\vdots$								
ζ_q								

Таблица разделена на q групп строк, по одной группе для каждого выходного символа в выходном алфавите $\{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_q\}$ автомата M с n состояниями. Группу строк, обозначенную в столбце z_ν символом ζ_k, будем называть *ζ_k-группой*. Столбцы $x_{\nu-\mu}$, $z_{\nu-\mu}$, $x_{\nu-\mu+1}$, $z_{\nu-\mu+1}$, ..., $x_{\nu-1}$, $z_{\nu-1}$, x_ν заполняются следующим образом. Пусть (ξ_l/ζ_k) является парой вход-выход, связанной с дугой, которая начинается в состоянии σ_i, и пусть $(\xi_{l_1}/\zeta_{k_1})(\xi_{l_2}/\zeta_{k_2}) \ldots (\xi_{l_\mu}/\zeta_{k_\mu})$ —

последовательность вход-выход в множестве $Q_\mu^{(i)}$ (такие последовательности могут быть получены из таблицы для $Q_\mu^{(1)}$, $Q_\mu^{(2)}, \ldots, Q_\mu^{(k)}$, построенной для определения μ по алгоритму 6.1). Тогда последовательность символов $\xi_{l_1}, \zeta_{k_1}, \xi_{l_2}, \zeta_{k_2}, \ldots, \xi_{l_\mu}, \zeta_{k_\mu}, \xi_l$ (записанная в таком порядке) является строкой ζ_k группы. Следуя этим правилам в отношении всех n состояний, можно заполнить все клетки таблицы. Если число последовательностей в $Q_\mu^{(i)}$ равно r_i и число символов входного алфавита равно p, то число строк в x-z-таблице равно $p\sum_{i=1}^{n} r_i$. Таким образом x-z-таблица является табличным воспроизведением x-z-функции, в котором значения z_ν перечисляются для каждого из тех упорядоченных наборов зна-

Таблица 6.6

x-z-таблица для $A28$

	z_ν	$x_{\nu-2}$	$z_{\nu-2}$	$x_{\nu-1}$	$z_{\nu-1}$	x_ν
1		1	1	1	0	0
2		0	1	1	0	0
3	0	0	0	0	1	1
4		0	0	1	1	1
5		1	0	1	1	1
6		1	1	1	0	1
7		0	1	1	0	1
8		1	0	0	0	0
9		1	0	0	0	1
10		0	0	0	1	0
11		0	0	1	1	0
12		1	0	1	1	0
13	1	1	1	0	1	0
14		0	1	0	1	0
15		0	1	1	1	0
16		1	1	1	1	0
17		1	1	0	1	1
18		0	1	0	1	1
19		0	1	1	1	1
20		1	1	1	1	1

чений $(2\mu+1)$ переменных $(x_{\nu-\mu}, z_{\nu-\mu}, x_{\nu-\mu+1}, z_{\nu-\mu+1}, \ldots$ $\ldots, x_{\nu-1}, z_{\nu-1}, x_\nu)$, которые могут встретиться в данном автомате. Например, таблица 6.6 является x-z-таблицей автомата $A28$, показанного на рис. 6.6.

Из матрицы (6.23) видно, что пара вход-выход (0/0) связана с дугой, которая начинается в состоянии 1. Из таблицы 6.4 видно, что множество $Q_2^{(1)}$ состоит из последовательностей вход-выход (1/1) (1/0) и (0/1) (1/0). Следовательно, 0-группа в x-z-таблице должна содержать строки 1,1,1,0,0 и 0,1,1,0,0. Остальные строки в таблице 6.6 заполняются аналогичным образом. Чтобы облегчить последующее изложение материала, придадим строкам и столбцам этой таблицы порядковые номера.

Задача минимизации x-z-функции на языке x-z-таблицы может быть сформулирована следующим образом: вычеркнуть максимальное число столбцов из таблицы так, чтобы ни одна строка любой одной группы не стала одинаковой ни с какой строкой любой другой группы. Пусть столбцами, которые остались после такого вычеркивания, являются $x_{\nu-l_1}, x_{\nu-l_2}, \ldots, x_{\nu-l_u}, z_{\nu-j_1}, z_{\nu-j_2}, \ldots, z_{\nu-j_v}$. Поскольку $v+u$ обязательно является минимальным числом аргументов и поскольку ни один упорядоченный набор значений $u+v$ переменных не появляется в двух различных ζ_k-группах x-z-таблицы, мы имеем:

$$z_\nu = \breve{f}\left(x_{\nu-l_1}, x_{\nu-l_2}, \ldots, x_{\nu-l_u}, z_{\nu-j_1}, z_{\nu-j_2}, \ldots, z_{\nu-j_v}\right), \tag{6.28}$$

где $\breve{f}$ — минимальная x-z-функция.

Таким образом, чтобы найти минимальную x-z-функцию, можно воспользоваться следующим алгоритмом.

Алгоритм 6.2. Задана x-z-таблица автомата M. Чтобы определить минимальную x-z-функцию M: (1) Полагаем $h=1$. (2) Для каждой комбинации из h столбцов проверяем, делает ли вычеркивание остающихся столбцов строки из различных ζ_k групп одинаковыми. (3) (а) Если каждая комбинация делает строки в различных ζ_k-группах одинаковыми, то увеличиваем h на единицу и возвращаемся к (2). (б) Если есть комбинация, которая не делает строки в различных ζ_k-группах одинаковыми, то берем эту комбинацию, соответствующую столбцам $x_{\nu-l_1}, x_{\nu-l_2}, \ldots, x_{\nu-l_u}, z_{\nu-j_1}, z_{\nu-j_2}, \ldots, z_{\nu-j_v}$. Минимальная x-z-функция определяется выражением (6.28).

Выполнение алгоритма 6.2 становится значительно проще, если учесть следующие факты: (1) Каждая рассматриваемая комбинация из h столбцов должна включать либо столбец $x_{\nu-\mu}$, либо столбец $z_{\nu-\mu}$. (2) Если две строки, принадлежащие двум различным ζ_k-группам, отличаются символами в единственном столбце, то этот столбец включается в каждую рассматриваемую комбинацию из h столбцов. (3) Столбец, который содержит один и тот же символ в каждой строке, не должен включаться ни в какую рассматриваемую комбинацию из h столбцов. (4) Два одинаковых столбца вместе не должны включаться ни в какую рассматриваемую комбинацию из h столбцов.

Например, в таблице 6.6 можно заметить, что строки 3 и 18 различаются только значением переменной в столбце 2. Строки 1 и 16 различаются только значением переменной в столбце 4, строки 1 и 6 — только в столбце 5. Следовательно, при применении алгоритма 6.2 столбцы 2, 4 и 5 должны включаться в любую рассматриваемую комбинацию из h столбцов. Проверка строк в этих трех столбцах показывает, что нет такой строки в 0-группе, которая была бы одинаковой с какой-либо строкой в 1-группе. Таким образом, для автомата $A28$ можно записать:

$$z_\nu = \breve{f}(x_\nu, z_{\nu-1}, z_{\nu-2}). \tag{6.29}$$

В этом выражении число аргументов минимально.

Таблица 6.7

Минимальная x-z-таблица для $A28$

z_ν	$z_{\nu-2}$	$z_{\nu-1}$	x_ν
0	1	0	0
	0	1	1
1	1	0	1
	0	0	0
	0	0	1
	0	1	0
	1	1	0
	1	1	1

Минимальная x-z-функция может быть представлена в табличной форме путем вычеркивания из x-z-таблицы найденных по алгоритму 6.2 столбцов и объединения всех одинаковых строк. Получаемая в результате таблица называется *минимальной x-z-таблицей*. Минимальная x-z-таблица для автомата $A28$ показана в таблице 6.7.

6.6. Линейные двоичные автоматы[1])

В этом и следующих двух параграфах мы будем изучать специальный класс автоматов с конечной памятью, называемых *линейными двоичными автоматами*, которые вследствие своих интересных и полезных свойств оправдывают повышенное внимание к ним. В линейных двоичных автоматах входным и выходным алфавитами являются $\{0, 1\}$ и выход в любой заданный момент времени равен сумме по модулю 2 значений выбранных входных символов в прошедшие моменты времени (и, возможно, в настоящий момент времени) и выходных символов в прошедшие моменты времени. Обозначив сложение по модулю 2 знаком $\oplus$, линейный двоичный автомат можно охарактеризовать соотношением

$$z_\nu = f\left(x_{\nu-l_1}, x_{\nu-l_2}, \ldots, x_{\nu-l_u}, z_{\nu-j_1}, z_{\nu-j_2}, \ldots, z_{\nu-j_v}\right) = \\ = x_{\nu-l_1} \oplus x_{\nu-l_2} \oplus \ldots \oplus x_{\nu-l_u} \oplus z_{\nu-j_1} \oplus z_{\nu-j_2} \oplus \ldots \oplus z_{\nu-j_v}, \tag{6.30}$$

где $0 \leqslant l_1 < l_2 < \ldots < l_u$ и $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_v$.

Основное состояние линейного двоичного автомата определяется как состояние автомата, в котором

$$x_{\nu-l_1} = x_{\nu-l_2} = \ldots = x_{\nu-l_u} = z_{\nu-j_1} = \\ = z_{\nu-j_2} = \ldots = z_{\nu-j_v} = 0.$$

Будем говорить, что автомат находится в *покое*, если он находится в основном состоянии.

Теорема 6.2. *Пусть M есть линейный двоичный автомат, находящийся в покое в момент времени t_0, и пусть в момент t_0 к автомату M прикладывается входная последовательность $x_0\, x_1 \ldots x_k$. Тогда реакция*

[1]) Материал о линейном двоичном автомате базируется частично на работах Хаффмена (D. A. Huffman, The synthesis of Linear Sequential Coding Networks, «Information Theory», pp. 77—95, Academic Press, Inc. Neu York, 1956. Русский перевод: Д. А. Хаффмен, Синтез линейных многотактных кодирующих схем. В сборнике переводов «Теория передачи сообщений», ИЛ, М., 1957; D. A. Huffman, An Algebra for Periodically Timevarying Linear Binary Sequence Tranducers, Annals of the Computation Laboratory, vol. 29, pp. 189—203, Harvard University Press, Cambridge Mass., 1959).

M в момент t_k $(k \geqslant 0)$ определяется выражением

$$z_k = c_{k0}x_0 \oplus c_{k1}x_1 \oplus \ldots \oplus c_{kk}x_k, \tag{6.31}$$

где коэффициенты c_{kl} равны либо 0, *либо* 1.

Доказательство. Пусть автомат M имеет память μ. Тогда M может быть охарактеризован уравнением

$$z_\nu = \delta_0 x_\nu \oplus \delta_1 x_{\nu-1} \oplus \ldots \oplus \delta_\mu x_{\nu-\mu} \oplus \\ \oplus \varepsilon_1 z_{\nu-1} \oplus \varepsilon_2 z_{\nu-2} \oplus \ldots \oplus \varepsilon_\mu z_{\nu-\mu}, \tag{6.32}$$

где коэффициенты δ_i и ε_i принимают значения 0 или 1. Если M находится в состоянии покоя в момент t_0, то

$$x_{-1} = x_{-2} = \ldots = x_{-\mu} = z_{-1} = z_{-2} = \ldots = z_{-\mu} = 0. \tag{6.33}$$

Следовательно,

$$z_0 = \delta_0 x_0. \tag{6.34}$$

Это равенство доказывает теорему для $k = 0$. Положим, что теорема справедлива для $k = 0, 1, \ldots, l$. Тогда

$$z_{l+1} = \delta_0 x_{l+1} \oplus \delta_1 x_l \oplus \ldots \oplus \delta_\mu x_{l-\mu+1} \oplus \varepsilon_1 z_l \oplus \varepsilon_2 z_{l-1} \oplus \ldots \\ \ldots \oplus \varepsilon_\mu z_{l-\mu+1} = \delta_0 x_{l+1} \oplus \delta_1 x_l \oplus \ldots \oplus \delta_\mu x_{l-\mu+1} \oplus \\ \oplus \varepsilon_1 (c_{l,0}x_0 \oplus c_{l,1}x_1 \oplus \ldots \oplus c_{l,l}x_l) \oplus \\ \oplus \varepsilon_2 (c_{l-1,0}x_0 \oplus c_{l-1,1}x_1 \oplus \ldots \oplus c_{l-1,l-1}x_{l-1}) \oplus \ldots \\ \ldots \oplus \varepsilon_\mu (c_{l-\mu+1,0}x_0 \oplus c_{l-\mu+1,1}x_1 \oplus \ldots \oplus c_{l-\mu+1\ l-\mu+1}x_{l-\mu+1}). \tag{6.35}$$

Так как по (6.33) все переменные x_l с отрицательными индексами равны 0, то (6.35) можно записать в виде

$$z_{l+1} = a_0 x_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \ldots \oplus a_l x_l \oplus a_{l+1} x_{l+1}, \tag{6.36}$$

где коэффициенты a_l принимают значения либо 0, либо 1. Следовательно, если теорема справедлива для $k = 0, 1, \ldots, l$, то она должна быть справедливой для $k = l + 1$. По индукции, теорема справедлива для всех $k \geqslant 0$.

Теорема 6.2, в сущности, утверждает, что выходная реакция линейного двоичного автомата, находящегося в состоянии покоя, может быть выражена как линейная комбинация входных воздействий в настоящий и прошедшие моменты времени. Пусть $\xi'_{i0}\xi'_{i1} \ldots \xi'_{ik}$ — входная последовательность, приложенная к двоичному автомату M, находящемуся в состоянии покоя, и пусть ζ'_{jk} является выходной реакцией автомата M на входное воздействие ξ'_{ik}. Тогда

$$\zeta'_{jk} = c_{k0}\xi'_{i0} \oplus c_{k1}\xi'_{i1} \oplus \ldots \oplus c_{kk}\xi'_{ik}. \tag{6.37}$$

Аналогично пусть $\xi''_{i0}\xi''_{i1} \ldots \xi''_{ik}$ — входная последовательность, приложенная к автомату M, находящемуся в состоянии покоя, и пусть ζ''_{jk} — реакция автомата M на ξ''_{ik}. Тогда

$$\zeta''_{jk} = c_{k0}\xi''_{i0} \oplus c_{k1}\xi''_{i1} \oplus \ldots \oplus c_{kk}\xi''_{ik}. \tag{6.38}$$

Теперь рассмотрим входную последовательность $(\xi'_{i0} \oplus \xi''_{i0})$ $(\xi'_{i1} \oplus \xi''_{i1}) \ldots (\xi'_{ik} \oplus \xi''_{ik})$, полученную сложением по модулю 2 соответствующих символов предыдущих двух последовательностей. Пусть ζ_{jk} обозначает реакцию автомата M на $(\xi'_{ik} \oplus \xi''_{ik})$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \zeta_{jk} &= c_{k0}(\xi'_{i0} \oplus \xi''_{i0}) \oplus c_{k1}(\xi'_{i1} \oplus \xi''_{i1}) \oplus \ldots \oplus c_{kk}(\xi'_{ik} \oplus \xi''_{ik}) = \\ &= (c_{k0}\xi'_{i0} \oplus c_{k1}\xi'_{i1} \oplus \ldots \oplus c_{kk}\xi'_{ik}) \oplus \\ &\oplus (c_{k0}\xi''_{i0} \oplus c_{k1}\xi''_{i1} \oplus \ldots \oplus c_{kk}\xi''_{ik}) = \zeta'_{jk} \oplus \zeta''_{jk}. \end{aligned} \tag{6.39}$$

Поэтому линейный двоичный автомат, выведенный из покоя, подчиняется принципу суперпозиции: выходная реакция на сумму (по модулю 2) входных воздействий равна сумме (по модулю 2) выходных реакций на отдельные входные воздействия.

Теперь введем *оператор задержки* D, определяемый так:

$$D^r y = y_{\gamma - r}, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots, \tag{6.40}$$

где y может обозначать как x, так и z. Вместо D^0 будем писать I. В терминах операторов задержки выражение (6.30) может быть записано так:

$$Iz = D^{i_1}x \oplus D^{i_2}x \oplus \ldots \oplus D^{i_u}x \oplus D^{j_1}z \oplus D^{j_2}z \oplus \ldots \oplus D^{j_v}z. \tag{6.41}$$

Прибавляя $D^{j_1}z \oplus D^{j_2}z \oplus \ldots \oplus D^{j_v}z$ (по модулю 2) к обеим частям равенства (6.41), получим:

$$Iz \oplus D^{j_1}z \oplus D^{j_2}z \oplus \ldots \oplus D^{j_v}z = D^{i_1}x \oplus D^{i_2}x \oplus \ldots \oplus D^{i_u}x, \tag{6.42}$$

или

$$(D^{j_v} \oplus \ldots \oplus D^{j_2} \oplus D^{j_1} \oplus I)\, z = (D^{l_u} \oplus \ldots \oplus D^{l_2} \oplus D^{l_1})\, x. \tag{6.43}$$

Характеристики вход-выход линейного двоичного автомата M могут быть выражены *передаточным отношением*, обозначаемым через $T(M)$:

$$T(M) = \frac{D^{l_u} \oplus \ldots \oplus D^{l_2} \oplus D^{l_1}}{D^{j_v} \oplus \ldots \oplus D^{j_2} \oplus D^{j_1}}. \tag{6.44}$$

Если задано передаточное отношение автомата, то функция f в том виде, как она представлена равенством (6.30), всегда может быть определена выполнением в обратном порядке операций, описываемых уравнениями (6.41) — (6.44).

Из определения D и равенства (6.41) следует, что

$$D^r z = D^r (D^{l_1} x \oplus D^{l_2} x \oplus \ldots \oplus D^{l_u} x \oplus D^{j_1} z \oplus \oplus D^{j_2} z \oplus \ldots \oplus D^{j_v} z). \tag{6.45}$$

Из (6.45) и свойства суперпозиции следует, что если автомат, характеризуемый равенством (6.41), находится в состоянии покоя, то обе части (6.41) могут быть умножены без нарушения равенства на произвольный полином от D:

$$(D^k \oplus D^{k-1} \oplus \ldots \oplus I)\, z = (D^k \oplus D^{k-1} \oplus \ldots \oplus I) (D^{l_1} x \oplus D^{l_2} x \oplus \ldots \oplus D^{l_u} x \oplus D^{j_1} z \oplus D^{j_2} z \oplus \ldots \oplus D^{j_v} z). \tag{6.46}$$

Следовательно, если заданный линейный двоичный автомат M находится в начальный момент времени в состоянии покоя, то числитель и знаменатель его передаточного отношения могут быть умножены на произвольный полином от D. Кроме того, если M находится в начальный момент времени в состоянии покоя и полиномы числителя и знаменателя его передаточного отношения содержат общий множитель, то этот общий множитель может быть без ущерба сокращен. Сокращение общего множителя, которое может быть выполнено с помощью алгоритма Евклида, понижает порядок полиномов числителя и знаменателя в передаточном отношении, тем самым упрощая как анализ, так и синтез рассматриваемого автомата.

Для примера рассмотрим линейный двоичный автомат $A29$, определенный равенством

$$z_\nu = x_{\nu-1} \oplus x_{\nu-3} \oplus x_{\nu-5} \oplus x_{\nu-6} \oplus x_{\nu-7} \oplus \\ \oplus x_{\nu-8} \oplus z_{\nu-1} \oplus z_{\nu-6} \oplus z_{\nu-7} \tag{6.47}$$

или

$$z_{\nu-7} \oplus z_{\nu-6} \oplus z_{\nu-1} \oplus z_\nu = \\ = x_{\nu-8} \oplus x_{\nu-7} \oplus x_{\nu-6} \oplus x_{\nu-5} \oplus x_{\nu-3} \oplus x_{\nu-1}. \tag{6.48}$$

Поэтому передаточное отношение для $A29$ имеет вид

$$T(A29) = \frac{D^8 \oplus D^7 \oplus D^6 \oplus D^5 \oplus D^3 \oplus D}{D^7 \oplus D^6 \oplus D \oplus I}. \tag{6.49}$$

Для того чтобы определить общий наибольший делитель полиномов числителя и знаменателя, применим алгоритм Евклида, заменив вычитание по модулю 2 сложением (и заметив, что $D^r \oplus D^r = 0$):

$$\begin{array}{r|l} & \quad D \\ \hline D^7 \oplus D^6 \oplus D \oplus I & D^8 \oplus D^7 \oplus D^6 \oplus D^5 \oplus D^3 \oplus D \\ & \underline{D^8 \oplus D^7 \oplus D^2 \oplus D} \\ & D^6 \oplus D^5 \oplus D^3 \oplus D^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & \quad D \\ \hline & D^7 \oplus D^6 \oplus D \oplus I \\ & \underline{D^7 \oplus D^6 \oplus D^4 \oplus D^3 \oplus D^2} \\ \text{общий наибольший делитель} \to & D^4 \oplus D^3 \oplus D \oplus I \end{array} \qquad \begin{array}{|l} D^6 \oplus D^5 \oplus D^3 \oplus D^2 \\ \underline{D^6 \oplus D^5 \oplus D^3 \oplus D^2} \\ 0. \end{array} \tag{6.50}$$

Последний делитель (показанный стрелкой) является общим наибольшим делителем. Для того чтобы понизить передаточное отношение, разделим его числитель и знаменатель на этот делитель:

$$\begin{array}{r|l} & D^4 \oplus D^2 \oplus D \\ \hline D^4 \oplus D^3 \oplus D \oplus I & D^8 \oplus D^7 \oplus D^6 \oplus D^5 \oplus D^3 \oplus D \\ & \underline{D^8 \oplus D^7 \oplus D^5 \oplus D^4} \\ & D^6 \oplus D^4 \oplus D^3 \oplus D \\ & \underline{D^6 \oplus D^5 \oplus D^3 \oplus D^2} \\ & D^5 \oplus D^4 \oplus D^2 \oplus D \\ & \underline{D^5 \oplus D^4 \oplus D^2 \oplus D} \\ & 0. \end{array} \tag{6.51}$$

$$\begin{array}{r|l} & D^3 \oplus I \\ \hline D^4 \oplus D^3 \oplus D \oplus I & D^7 \oplus D^6 \oplus D \oplus I \\ & \underline{D^7 \oplus D^6 \oplus D^4 \oplus D^3} \\ & D^4 \oplus D^3 \oplus D \oplus I \\ & \underline{D^4 \oplus D^3 \oplus D \oplus I} \\ & 0. \end{array} \tag{6.52}$$

Из (6.51) и (6.52) получаем:

$$T(A29)=\frac{(D^4\oplus D^2\oplus D)(D^4\oplus D^3\oplus D\oplus I)}{(D^3\oplus I)(D^4\oplus D^3\oplus D\oplus I)}=\frac{D^4\oplus D^2\oplus D}{D^3\oplus I}. \tag{6.53}$$

Поэтому работа автомата $A29$, находящегося в начальный момент времени в состоянии покоя, может быть охарактеризована выражениями

$$z_{\nu-3}\oplus z_\nu=x_{\nu-4}\oplus x_{\nu-2}\oplus x_{\nu-1}, \tag{6.54}$$

или

$$z_\nu=x_{\nu-1}\oplus x_{\nu-2}\oplus x_{\nu-4}\oplus z_{\nu-3}. \tag{6.55}$$

Например, если $A29$ находится в начальный момент времени в состоянии покоя, то его выходная реакция на входную последовательность 100111001010 по равенству (6.55) будет 011011010001. Можно легко проверить, что эта выходная реакция совпадает с реакцией, которая получается при первоначальном (более длинном) соотношении (6.47).

В общем случае не все состояния линейного двоичного автомата достижимы из его основного состояния. Когда известно, что автомат находится в основном состоянии, то все состояния, которые недостижимы из этого состояния, могут не учитываться, что приводит к упрощению представления заданного автомата и, следовательно, его анализа. Сокращение общего делителя в передаточном отношении автомата соответствует именно такому упрощению. Автомат, представленный сокращенным отношением, содержит все состояния, достижимые из основного состояния первоначального автомата. Поскольку большинство линейных двоичных автоматов, встречающихся на практике, имеют основное состояние в качестве начального состояния, такое сокращение в большинстве случаев оправдано и желательно.

6.7. Временная характеристика линейного двоичного автомата

Свободную выходную последовательность линейного двоичного автомата M определим как выходную реакцию M на бесконечную входную последовательность 000... Назовем выходную последовательность автомата *периодической*, если выходной символ в момент времени t_ν является таким же, как и в момент $t_{\nu+\rho}$ для всех ν; ρ — положительное конечное целое число — называется *периодом* свободной выходной последовательности. Если выходная реакция постоянна, то ее период равен 1.

Теорема 6.3. *Пусть M — линейный двоичный автомат с памятью μ и z-памятью μ'. Тогда свободная выходная последовательность станет периодической не более чем через $2^{\mu'}+\mu-1$ символов и ее период*

$$\rho \leqslant 2^{\mu'}-1. \tag{6.56}$$

Доказательство. M может быть охарактеризован равенством

$$z_\nu = \delta_0 x_\nu \oplus \delta_1 x_{\nu-1} \oplus \ldots \oplus \delta_{\mu''} x_{\nu-\mu''} \oplus \\ \oplus \varepsilon_1 z_{\nu-1} \oplus \varepsilon_2 z_{\nu-2} \oplus \ldots \oplus \varepsilon_{\mu'} z_{\nu-\mu'}, \tag{6.57}$$

где коэффициенты δ_i и ε_i равны 0 или 1. Положим, что наблюдение свободной выходной последовательности начинается в момент $t_{1-\mu}$, где $\mu = \max(\mu', \mu'')$. Тогда для всех $\nu \geqslant 1$

$$z_\nu = \varepsilon_1 z_{\nu-1} \oplus \varepsilon_2 z_{\nu-2} \oplus \ldots \oplus \varepsilon_{\mu'} z_{\nu-\mu'}. \tag{6.58}$$

Тогда не более чем через μ символов каждый выходной символ будет однозначно определяться предшествующими μ' выходными символами. Следовательно, выходная последовательность становится периодической с периодом ρ, если для любого $\nu \geqslant 1$ упорядоченные наборы значений μ' переменных $(z_{\nu-1}, z_{\nu-2}, \ldots, z_{\nu-\mu'})$ и $(z_{\nu-1+\rho}, z_{\nu-2+\rho}, \ldots, z_{\nu-\mu'+\rho})$ совпадают. Так как существует всего $2^{\mu'}$ наборов значений μ' переменных, последний отрезок длиной μ' в выходной последовательности $z_1 z_2 \ldots z_{2^{\mu'}+\mu'}$, а именно, $z_{2^{\mu'}+1} z_{2^{\mu'}+2} \ldots z_{2^{\mu'}+\mu'}$, должен быть таким же, как некоторый предшествующий отрезок длиной μ'. Следовательно, период не может превышать $2^{\mu'}$. Теперь положим, что период точно равен $2^{\mu'}$. Тогда последовательность должна содержать отрезок, который состоит из μ' нулей. Однако из (6.58) можно заключить, что за таким отрезком должна следовать бесконечная последовательность из нулей, период которой равен 1, а не $2^{\mu'}$. Так как это противоречит предположению, то период не может превышать $2^{\mu'}-1$. Периодичность начинается в некоторый момент t_ν, где $1 \leqslant \nu \leqslant 2^{\mu'}$, и, следовательно, не более чем через $\mu + 2^{\mu'} - 1$ символов.

Бесконечная часть выходной последовательности, проявляющая периодические свойства, называется *периодической частью* выходной последовательности; ограниченная часть, которая предшествует периодической части, называется *переходной частью* выходной последовательности. Если наблюдение за свободной выходной последовательностью начинается в момент t_ν и если автомат имеет память μ, то как периодическая, так и переходная части выходной последовательности зависят от значений $x_{\nu-1}, x_{\nu-2}, \ldots, x_{\nu-\mu}$ и $z_{\nu-1}, z_{\nu-2}, \ldots$ $\ldots, z_{\nu-\mu}$, которые составляют *начальные условия* автомата. Пусть ρ — период свободной выходной последовательности и пусть $\zeta_{i_1}\zeta_{i_2} \ldots \zeta_{i_\rho}$ — произвольная последовательность из ρ символов, содержащаяся в периодической части выходной последовательности. Тогда из доказательства теоремы 6.3 следует, что ρ подпоследовательностей длины μ' (где μ' — z-память), начинающихся с символов $\zeta_{i_1}, \zeta_{i_2}, \ldots, \zeta_{i_\rho}$, должны быть различными. Если ρ имеет максимальное значение $2^{\mu'}-1$, то эти последовательности содержат все μ'-разрядные двоичные числа, за исключением μ'-разрядного числа $00\ldots0$.

Для примера рассмотрим линейный двоичный автомат $A30$ с памятью 5 и с z-памятью 3, определяемый равенством

$$z_\nu = x_{\nu-5} \oplus z_{\nu-1} \oplus z_{\nu-3}. \tag{6.59}$$

Запись (6.60) показывает свободную выходную последовательность этого автомата, начиная с момента t_ν, когда начальные условия $x_{\nu-5} = x_{\nu-4} = x_{\nu-3} = x_{\nu-1} = z_{\nu-1} = 1$ и $x_{\nu-2} = z_{\nu-3} = z_{\nu-2} = 0$. $\mathscr{E}$ и $\mathscr{R}$ обозначают соответственно входную и выходную последовательности. Как видно, длина переходной части в этом случае равна 2. Период равен 7, т. е. максимальному значению для заданной z-памяти $(2^3-1=7)$. Начиная с третьего выходного символа, имеется семь подпоследовательностей длины 3: 111, 110, 101, 010, 100, 001, 011, составляющих все трехразрядные двоичные числа за исключением 000.

$$\begin{array}{lcccc}
\mathscr{E}: & 11101 & 00 & 0000000 & 0000000\ldots \\
\mathscr{R}: & \underbrace{\quad 001}_{\text{Начальные условия}} & \underbrace{01}_{\text{Переходная часть}} & \underbrace{1110100}_{\text{Период 1}} & \underbrace{1110100}_{\text{Период 2}}\ldots
\end{array} \tag{6.60}$$

Поведение линейного двоичного автомата, начинающего работать из своего основного состояния, удобно характеризовать посредством его *импульсной характеристики*. Импульсная характеристика автомата M определяется как выходная реакция автомата M, находящегося в состоянии покоя, на бесконечную входную последовательность 1000 ... Такая последовательность называется *импульсом*. Ясно, что импульсная характеристика автомата, начиная с момента t_ν, является такой же, как и его свободная выходная характеристика, начиная с момента $t_{\nu+1}$ и при начальных условиях $x_\nu = 1$, $z_\nu = 0$ или 1 и при всех предшествующих входных или выходных символах, равных 0. Тогда, по теореме 6.3, следует, что импульсная характеристика станет периодической не более чем через $2^{\mu'} + \mu$ символов, где μ есть память, а μ' — z-память автомата M. Период импульсной характеристики не может превышать $2^{\mu'} - 1$. Так, например, импульсная характеристика автомата $A30$, заданного равенством (6.59), показана в (6.61).

$$\begin{array}{lccc}
\mathscr{E}: & 100 & 0000000 & 0000000\ \ldots \\
\mathscr{R}: & \underbrace{000}_{\text{Переходная часть}} & \underbrace{0011101}_{\text{Период 1}} & \underbrace{0011101}_{\text{Период 2}}\ \ldots
\end{array} \tag{6.61}$$

Входную последовательность, которая является 0 во все моменты времени, за исключением момента t_ν, обозначим через $\mathscr{D}_\nu$. Выходную реакцию автомата на $\mathscr{D}_\nu$ будем обозначать $\mathscr{R}_\nu$. $\mathscr{R}_\nu$ является импульсной характеристикой автомата, если импульс приложен в момент t_ν. Будем говорить, что последовательность $\mathscr{E}$ является суммой последовательностей $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_r$, записываемой как $\mathscr{E}_1 \oplus \mathscr{E}_2 \oplus \ldots \oplus \mathscr{E}_r$, если символ последовательности $\mathscr{E}$ в момент t_ν равен сумме по модулю 2 символов последовательностей $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_r$ в тот же самый момент t_ν. Таким образом, если $\mathscr{E}$ есть 0 во все моменты времени, за исключением $t_{l_1}, t_{l_2}, \ldots, t_{l_l}$, то выражение $\mathscr{E}$ может быть записано так:

$$\mathscr{E} = \mathscr{D}_{l_1} \oplus \mathscr{D}_{l_2} \oplus \ldots \oplus \mathscr{D}_{l_l}. \tag{6.62}$$

В силу свойства суперпозиции, если $\mathscr{E}$ прикладывается к линейному двоичному автомату M, находящемуся в начальный момент времени в состоянии покоя, то выходная реакция M, обозначаемая через $\mathscr{R}$, равна:

$$\mathscr{R}=\mathscr{R}_{l_1}\oplus\mathscr{R}_{l_2}\oplus \dots \oplus\mathscr{R}_{l_l}. \tag{6.63}$$

Поэтому выходная реакция может быть получена сложением по модулю 2 импульсных характеристик автомата M, начинающихся с моментов $t_{l_1}, t_{l_2}, \dots, t_{l_l}$. Ясно, что если входное возбуждение становится периодическим после ограниченного числа символов, то такой же становится выходная реакция. Например, (6.64) показывает реакцию автомата $A30$ на последовательность, которая становится периодической (с периодом 1) после четырех символов:

$$\begin{array}{llll}
\mathscr{E}\colon & 101100 & 0000000 & 0000000\dots \\
\mathscr{R}_1\colon & 000001 & 1101001 & 1101001\dots \\
\mathscr{R}_3\colon & 000000 & 0111010 & 0111010\dots \\
\mathscr{R}_4\colon & 000000 & 0011101 & 0011101\dots \\
\mathscr{R}\colon & \underbrace{000001}_{\substack{\text{Переходная}\\ \text{часть}}} & \underbrace{1001110}_{\text{Период 1}} & \underbrace{1001110}_{\text{Период 2}}\dots
\end{array} \tag{6.64}$$

Каждая последовательность $\mathscr{R}$ из единиц и нулей, которая становится периодической с периодом ρ после τ символов, может быть записана в форме

$$\mathscr{R}=\mathscr{R}_T\oplus\mathscr{R}_P, \tag{6.65}$$

где $\mathscr{R}_T$ — бесконечная последовательность, которая становится $000\dots$ не позднее чем через τ символов; $\mathscr{R}_P$ — бесконечная периодическая последовательность с периодом ρ и без переходной части. $\mathscr{R}_T$ и $\mathscr{R}_P$ называются соответственно *переходной составляющей* и *периодической составляющей* $\mathscr{R}$. $\mathscr{R}_P$ образуется следующим образом. Если $\tau=\eta+k\rho$, где $0\leqslant\eta\leqslant\rho$, и k — неотрицательное целое число, то вычеркнем переходную часть и первые $\rho-\eta$ символов из периодической части $\mathscr{R}$. Полученная в результате бесконечная последовательность есть $\mathscr{R}_P$. $\mathscr{R}_T$ тогда определяется равенством:

$$\mathscr{R}_T=\mathscr{R}\oplus\mathscr{R}_P. \tag{6.66}$$

Например, для $\mathscr{R}$ из (6.64) получаем:

$$\begin{array}{lll} \mathscr{R}_P\colon & \underbrace{0011101}_{\text{Период 1}} & \underbrace{0011101}_{\text{Период 2}}\ \ldots \\ \mathscr{R}_T\colon & \underbrace{001111}_{\substack{\text{Переходная}\\ \text{часть}}} & 00000000\ \ldots \end{array} \qquad (6.67)$$

Легко можно проверить, что последовательность (6.67) удовлетворяет равенству (6.65).

6.8. Распознавание линейного двоичного автомата

Как было отмечено в предшествующем параграфе, по заданной импульсной характеристике линейного двоичного автомата, легко можно определить реакцию автомата, находящегося в начальный момент времени в состоянии покоя, на любое возбуждение. Поэтому знание импульсной характеристики позволяет характеризовать любой неизвестный автомат, находящийся в начальный момент в состоянии покоя. В этом параграфе мы увидим, как можно получить x-z-характеристику по импульсной характеристике. Получив x-z-функцию, можно затем построить характеристические функции f_z и f_s заданного автомата так, как описано в § 6.2.

Рассмотрим линейный, находящийся в начальный момент времени в состоянии покоя двоичный автомат M, передаточное отношение которого задано равенством

$$T(M) = I\eta_1 \oplus D\eta_2 \oplus D^2\eta_3 \oplus \ldots \oplus D^{l-1}_{\eta_l}, \qquad (6.68)$$

где коэффициенты η_l равны либо 0, либо 1. Тогда для автомата M, находящегося в начальный момент времени в состоянии покоя,

$$z_\nu = \eta_1 x_\nu \oplus \eta_2 x_{\nu-1} \oplus \eta_3 x_{\nu-2} \oplus \ldots \oplus \eta_l x_{\nu-l+1}. \qquad (6.69)$$

Предположим теперь, что бесконечная входная последовательность 1000 ... (т. е. импульс) прикладывается к M в момент t_1. При этом мы получим $x_1 = 1$, а $x_k = 0$ для всех $k \neq 1$. Из (6.69) тогда имеем: $z_1 = \eta_1$, $z_2 = \eta_2$, ..., $z_l = \eta_l$ и $z_k = 0$ для всех $k > l$. Поэтому импульсная характеристика автомата, характеризуемого равенством (6.68), определяющим $T(M)$, имеет вид $\eta_1\eta_2 \ldots \eta_l 000 \ldots$ Наоборот, если автомат имеет импульсную характеристику $\eta_1\eta_2 \ldots$ $\ldots \eta_l 000 \ldots$, то он может быть охарактеризован передаточным отношением $T(M)$, которое задано выражением (6.68).

Полученный результат дает возможность найти передаточное отношение автомата, заданного произвольной импульсной характеристикой. Как было установлено в § 6.7, импульсная характеристика $\mathcal{R}$ линейного двоичного автомата может быть выражена как сумма переходной и периодической составляющих $\mathcal{R}_T$ и $\mathcal{R}_P$ соответственно.

Пусть

$$\mathcal{R}_T = \delta_1\delta_2 \ldots \delta_\tau 000 \ldots, \tag{6.70}$$

$$\mathcal{R}_P = \varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p \ldots \tag{6.71}$$

Автомат, который реализует $\mathcal{R}_T$, имеет передаточное отношение

$$T_T = I\delta_1 \oplus D\delta_2 \oplus \ldots \oplus D^{\tau-1}\delta_\tau. \tag{6.72}$$

Автомат, который реализует $\mathcal{R}_P$, имеет передаточное отношение:

$$\begin{aligned} T_P = {} & I\varepsilon_1 \oplus D\varepsilon_2 \oplus \ldots \oplus D^{\rho-1}\varepsilon_\rho \oplus \\ & \oplus D^\rho\varepsilon_1 \oplus D^{\rho+1}\varepsilon_2 \oplus \ldots \oplus D^{2\rho-1}\varepsilon_\rho \oplus \\ & \oplus D^{2\rho}\varepsilon_1 \oplus D^{2\rho+1}\varepsilon_2 \oplus \ldots \oplus D^{3\rho-1}\varepsilon_\rho \oplus \\ & \oplus \ldots \\ = {} & (I\varepsilon_1 \oplus D\varepsilon_2 \oplus \ldots \oplus D^{\rho-1}\varepsilon_\rho)(I \oplus D^\rho \oplus D^{2\rho} \oplus \ldots) = \\ = {} & (I\varepsilon_1 \oplus D\varepsilon_2 \oplus \ldots \oplus D^{\rho-1}\varepsilon_\rho)\frac{I}{D^\rho \oplus I}. \end{aligned} \tag{6.73}$$

Принимая во внимание свойство суперпозиции, автомат M, который реализует импульсную характеристику $\mathcal{R} = \mathcal{R}_T \oplus \mathcal{R}_P$, имеет передаточное отношение

$$\begin{aligned} T(M) = T_T \oplus T_P = I\delta_1 \oplus D\delta_2 \oplus \ldots \oplus D^{\tau-1}\delta_\tau \oplus \\ \oplus \frac{I\varepsilon_1 \oplus D\varepsilon_2 \oplus \ldots \oplus D^{\rho-1}\varepsilon_\rho}{D^\rho \oplus I}. \end{aligned} \tag{6.74}$$

Выражение $T(M)$ может быть записано как отношение двух полиномов от D, у которых может быть сокращен общий делитель, как было объяснено в § 6.6. Таким образом, по импульсной характеристике автомата M всегда может быть определено его передаточное отношение. Построение

x-z-функции по передаточному отношению и характеристических функций f_z и f_s по x-z-функции является простой задачей.

В качестве примера предположим, что линейный двоичный автомат $A31$ выдает импульсную характеристику

$$\mathcal{R} = 11101110100111010011 1\ \ldots \tag{6.75}$$

Следовательно,

$$\mathcal{R}_P = 01001110100111010011 1\ \ldots, \tag{6.76}$$

$$\mathcal{R}_T = 10100000000000000000\ \ldots \tag{6.77}$$

По (6.72), (6.73) и (6.74) получаем:

$$T_T = I + D^2, \tag{6.78}$$

$$T_P = (D \oplus D^4 \oplus D^5 \oplus D^6)\frac{I}{D^7 + I}, \tag{6.79}$$

$$T(A31) = I \oplus D^2 \oplus \frac{D \oplus D^4 \oplus D^5 \oplus D^6}{D^7 \oplus I} = \frac{D^9 \oplus D^7 \oplus D^6 \oplus D^5 \oplus D^4 \oplus D^2 \oplus D \oplus I}{D^7 \oplus I}. \tag{6.80}$$

Применение алгоритма Евклида к (6.80) показывает, что полиномы числителя и знаменателя имеют общий делитель $(D^4 \oplus D^2 \oplus D \oplus I)$ и что $T(A31)$ может быть записано в виде

$$T(A31) = \frac{(D^4 \oplus D^2 \oplus D \oplus I)(D^5 \oplus I)}{(D^4 \oplus D^2 \oplus D \oplus I)(D^3 \oplus D \oplus I)} = \frac{D^5 \oplus I}{D^3 \oplus D \oplus I}. \tag{6.81}$$

Автомат $A31$, находящийся в начальный момент времени в состоянии покоя, поэтому характеризуется равенством

$$z_\nu = x_\nu \oplus x_{\nu-5} \oplus z_{\nu-1} \oplus z_{\nu-3}. \tag{6.82}$$

Можно легко проверить, что автомат, определяемый (6.82), действительно обладает импульсной характеристикой (6.75).

Следует отметить, что распознавание линейного двоичного автомата посредством его импульсной характеристики, как описано выше, зависит от способности исследователя выделить переходную и периодическую части выходной реакции после конечного числа наблюдаемых символов. Эта способность, в свою очередь, требует предварительного знания максимальной памяти автомата, что позволяет определить верхнюю границу длины переходной части и период (см. теорему 6.3). С другой стороны, достаточно знать максимальное число состояний в автомате, чтобы по теореме 6.1 определить максимальную память. Заметим также, что число состояний n в линейном двоичном автомате с памятью μ не может превышать 4^{μ}. Поэтому знание μ эквивалентно знанию верхней границы для n, что можно было предполагать ввиду теоремы 5.2.

6.9. Не зависящие от выхода автоматы

Автомат с конечной памятью, в котором z-память равна 0, называется *не зависящим от выхода автоматом*. Такого типа автомат определяется соотношением

$$z_{\nu} = f(x_{\nu}, x_{\nu-1}, \ldots, x_{\nu-\mu}), \tag{6.83}$$

где любой из аргументов может быть несущественным. Не зависящие от выхода автоматы, составляющие подкласс класса автоматов с конечной памятью, проявляют все свойства, полученные ранее для класса автоматов с конечной памятью. В частности, из леммы 6.1 имеем:

Теорема 6.4. *В минимальном не зависящем от выхода автомате с памятью* μ

$$s_{\nu} = g(x_{\nu-1}, x_{\nu-2}, \ldots, x_{\nu-\mu}). \tag{6.84}$$

Значит, состояние не зависящего от выхода автомата полностью определяется входной последовательностью длины μ, и, следовательно, такой автомат может непосредственно управляться источником входного возбуждения. Если в автомате M

$$\sigma_i = g(\xi_{j_1}, \xi_{j_2}, \ldots, \xi_{j_\mu}), \tag{6.85}$$

то все, что требуется, чтобы перевести автомат M в состояние σ_i, — это подать входную последовательность $\xi_{j_1}\xi_{j_2}\ldots\xi_{j_\mu}$. Так как такая последовательность может быть подана на автомат, находящийся в любом состоянии, то из этого следует, что любое состояние в не зависящем от выхода автомате может быть достигнуто из любого другого состояния, а это значит, что не зависящий от выхода автомат эквивалентен сильносвязному автомату.

Пусть задан не зависящий от выхода автомат M с памятью μ и входным алфавитом $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p\}$; x-z-функция (6.83) автомата M всегда может быть получена подачей на вход автомата последовательно всех p^{μ} возможных последовательностей $\xi_{j_1}\xi_{j_2}\ldots\xi_{j_\mu}$. После определения x-z-функции может быть построена таблица (или граф, или матрица) переходов автомата M. Таким образом, не зависящий от выхода автомат с определенной памятью и входным алфавитом всегда может быть распознан с помощью простого заранее безусловного эксперимента. Заметим, что выходной алфавит не нужен для задания эксперимента, и, следовательно, до эксперимента распознаваемый автомат принадлежит бесконечному классу автоматов. Однако, так как каждый не зависящий от выхода автомат является сильносвязным, то этот класс является исключительным и удовлетворяет условию различимости по теореме 5.3.

Последовательность, которая содержит все p^{μ} возможные подпоследовательности $\xi_{j_1}\xi_{j_2}\ldots\xi_{j_\mu}$ из μ символов, называется (p, μ)-*последовательностью*. Самая короткая (p, μ)-последовательность является последовательностью, в которой каждый символ, за исключением последних $\mu - 1$ символов, начинает различную подпоследовательность длиной μ. Такая последовательность, длина которой обязательно $p^{\mu} + \mu - 1$, называется *компактной* (p, μ)-*последовательностью*.

Следующий метод, который будет дан без доказательств, может быть использован для построения компактных (p, μ)-последовательностей для каждого заданного p и μ[1]).

Алгоритм 6.3. Для того чтобы построить компактную (p, μ)-последовательность для не зависящего от выхода автомата с памятью μ и входным алфавитом $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$, нужно произвести следующие операции: (1) Пусть $\xi_{j_1} = \xi_{j_2} = \ldots = \xi_{j_\mu} = \xi_p$. Полагаем $k = \mu + 1$. (2) Рассматривая входной алфавит как упорядоченное множество (ξ_1 — первый символ, ξ_2 — второй символ, ..., ξ_p — p-й символ), полагаем, что символ ξ_{j_k} имеет наименьший индекс, так что подпоследовательность $\xi_{j_{k-\mu+1}}\xi_{j_{k-\mu+2}}\ldots\xi_{j_k}$ нигде не содержится в последовательности $\xi_{j_1}\xi_{j_2}\ldots\xi_{j_{k-1}}$. (3) (а) Если $k < p^{\mu} +$

[1]) Метод предложен Липпелом и Эпштейном (B. Lippel and I. J. Epstein, A Method for Obtaining Complete Digital Coding Chains, IRE Trans., vol. EC-6, p. 121, 1957).

$+\mu-1$, то увеличиваем k на 1 и возвращаемся к (2). (б) Если $k=p^{\mu}+\mu-1$, то $\xi_{j_1}\xi_{j_2}\ldots\xi_{j_k}$ является компактной (p, μ)-последовательностью.

В качестве примера (6.86) показывает построение компактной (3,3)-последовательности для не зависящего от выхода автомата с памятью 3 и входным алфавитом (α, β, γ). Последовательные строки показывают подпоследовательности длины 3 (имеется 27 таких подпоследовательностей). Последняя строка показывает суммарную последовательность, длина которой $3^3+3-1=29$.

$$
\begin{array}{l}
\gamma\,\gamma\,\gamma \\
\gamma\,\gamma\,\alpha \\
\gamma\,\alpha\,\alpha \\
\alpha\,\alpha\,\alpha \\
\alpha\,\alpha\,\beta \\
\alpha\,\beta\,\alpha \\
\beta\,\alpha\,\alpha \\
\alpha\,\alpha\,\gamma \\
\alpha\,\gamma\,\alpha \\
\gamma\,\alpha\,\beta \\
\alpha\,\beta\,\beta \\
\beta\,\beta\,\alpha \\
\beta\,\alpha\,\beta \\
\alpha\,\beta\,\gamma \\
\beta\,\gamma\,\alpha \\
\gamma\,\alpha\,\gamma \\
\alpha\,\gamma\,\beta \\
\gamma\,\beta\,\alpha \\
\beta\,\alpha\,\gamma \\
\alpha\,\gamma\,\gamma \\
\gamma\,\gamma\,\beta \\
\gamma\,\beta\,\beta \\
\beta\,\beta\,\beta \\
\beta\,\beta\,\gamma \\
\beta\,\gamma\,\beta \\
\gamma\,\beta\,\gamma \\
\beta\,\gamma\,\gamma \\
\gamma\,\gamma\,\gamma\,\alpha\,\alpha\,\alpha\,\beta\,\alpha\,\alpha\,\gamma\,\alpha\,\beta\,\beta\,\alpha\,\beta\,\gamma\,\alpha\,\gamma\,\beta\,\alpha\,\gamma\,\gamma\,\beta\,\beta\,\beta\,\gamma\,\beta\,\gamma\,\gamma
\end{array}
\tag{6.86}
$$

Последовательности, полученные по алгоритму 6.3, обладают следующим свойством. Если первые p^{μ} символов разместить по окружности, то каждая последовательность, построенная считыванием $p^\mu + \mu - 1$ последовательных символов, образует компактную (p, μ)-последовательность (независимо от начального символа и независимо от того, считываются символы по часовой стрелке или против). Поскольку последовательности, построенные путем выбора различных начальных символов на окружности (но продолжающиеся в одном и том же направлении), обязательно различны, то каждое применение алгоритма 6.3 может дать p_μ различных компактных (p, μ)-последовательностей. Число $W_{p,\mu}$ различных компактных (p, μ)-последовательностей дается[1]) выражением

$$W_{p,\mu} = (p!)^{p^\mu - 1}. \tag{6.87}$$

В заключение приведем следующую теорему.

Теорема 6.5. *Не зависящий от выхода автомат с известной памятью μ и входным алфавитом мощности p всегда может быть распознан простым безусловным экспериментом длины l, где*

$$l \leqslant p^\mu + \mu - 1. \tag{6.88}$$

Таблица 36.1

s_ν \ x_ν	z_ν: α	z_ν: β	$s_{\nu+1}$: α	$s_{\nu+1}$: β
1	1	1	1	2
2	0	0	3	2
3	0	1	1	1

Задачи

6.1. Какие из систем, описанных в задачах 1.2—1.9, представляют системы с конечной памятью? Представьте в виде x-z-таблицы функции тех систем, которые имеют конечную память.

6.2. Покажите, что автомат с нулевой памятью является тривиальным автоматом.

6.3. Постройте таблицу переходов (в минимальной форме) для автомата с конечной памятью, входной и выходной алфавит которого $\{0, 1\}$ и который характеризуется равенством $z_\nu = x_{\nu-2} \times z_{\nu-1}$.

6.4. Автомат, определенный таблицей 36.1, имеет память μ. (а) Найдите верхнюю границу μ. (б) Определите μ.

6.5. Для автомата, показанного на рис. 36.1: (а) определите память; (б) постройте минимальную x-z-таблицу.

---

[1]) Этот результат получен ван Арденном-Эренфестом и де Брюином (T. van Aardenne-Ehrenfest and N. G. de Bruijn, Circuits and Trees in Oriented Linear Graphs, Simon Stevin, vol. 28, pp. 203—217, 1950—1951.)

6.6. Покажите, что память минимального (n, p, q)-автомата с конечной памятью не может быть больше, чем $(\log n)/(\log pq)$.

6.7. Известно, что автомат M имеет p входных символов, n состояний и память μ. Найдите нижнюю границу мощности выходного алфавита.

6.8. Покажите, что длина заданного установочного эксперимента для автомата с памятью μ не превышает μ.

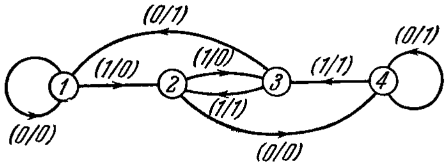


Рис. 36.1.

6.9. Линейный двоичный автомат A определяется соотношением

$$z_\nu = x_\nu \oplus x_{\nu-1} \oplus z_{\nu-1}.$$

(а) Составьте диаграмму переходов минимального автомата A и определите основное состояние. (б) Найдите передаточное отношение автомата A и упростите его сокращением общего делителя полиномов числителя и знаменателя. (в) Покажите, что автомат A, находящийся в начальный момент времени в состоянии покоя, можно описать соотношением $z_\nu = x_\nu \oplus z_{\nu-1}$. (г) Составьте диаграмму переходов представленного в пункте (в) автомата A, находящегося в начальный момент времени в состоянии покоя. Удостоверьтесь, что этот автомат составляет множество состояний автомата A, которые достижимы из основного состояния. (д) Найдите выходную реакцию автомата A, находящегося в начальный момент времени в состоянии покоя, на входную последовательность 101100011100.

6.10. Линейный двоичный автомат определяется выражением

$$z_\nu = x_\nu \oplus x_{\nu-1} \oplus \ldots \oplus x_{\nu-\mu} \oplus z_{\nu-1} \oplus z_{\nu-2} \oplus \ldots \oplus z_{\nu-\mu}.$$

Покажите, что автомат, начинающий работу из своего основного состояния, является тривиальным автоматом.

6.11. (а) Покажите, что $D \oplus I$ является делителем $D^r \oplus I$ для любого $r \geqslant 1$. (б) Покажите, что любой полином от D по модулю 2 с четным числом членов имеет делитель $D \oplus I$. (в) Покажите, что $D^{2r_1} \oplus D^{2r_2} \oplus \ldots \oplus D^{2r_k} = (D^{r_1} \oplus D^{r_2} \oplus \ldots \oplus D^{r_k})^2$.

6.12. Дано

$$T(M) = \frac{D^{10} \oplus D^9 \oplus D^8 \oplus D^7 \oplus D}{D^7 \oplus D^4 \oplus D^2 \oplus D \oplus I}.$$

Найдите x-z-функцию для автомата M, находящегося в начальный момент времени в состоянии покоя.

6.13. Дано

$$T(M) = \frac{D^{i_u} \oplus D^{i_{u-1}} \oplus \ldots \oplus D^{i_1}}{D^{j_v} \oplus D^{j_{v-1}} \oplus \ldots \oplus D^{j_1}},$$

где $i_u > i_{u-1} > \ldots > i_1$ и $j_v > j_{v-1} > \ldots > j_1$. (а) Покажите, что $T(M)$ характеризует линейный двоичный автомат, только если $j_1 \leqslant i_1$. (б) Покажите, что если $i_1 = j_1 = 0$, то существует автомат M^{-1}, такой, что $T(M)\,T(M^{-1}) = I$ (т. е. если M и M^{-1} соединены в каскад, то вход и выход объединенного автомата одинаковы в любой момент времени)[1]). (в) Определите x-z-функцию автомата M^{-1}, если M определяется выражением

$$z_\nu = x_\nu \oplus x_{\nu-1} \oplus x_{\nu-2} \oplus x_{\nu-4} \oplus z_{\nu-1} \oplus z_{\nu-3}.$$

6.14. Покажите, что период свободной выходной последовательности линейного двоичного автомата, имеющего 4 состояния, не может превышать 63.

6.15. На линейный двоичный автомат M с памятью μ подается входная последовательность периода ρ_0. Покажите, что выходная реакция станет периодической после конечного числа символов и что ее период не будет превышать $\rho_0(2^\mu - 1)$.

6.16. Импульсная характеристика линейного двоичного автомата, из состояния покоя, есть 1011001001001 ... Найдите выходную реакцию автомата, из состояния покоя, на входные последовательности: (а) 110101000000000 ..., (б) 101101101101101 ... Разбейте результирующую выходную реакцию на переходную и периодическую составляющие.

6.17. Импульсная характеристика линейного двоичного автомата, находящегося в состоянии покоя, есть

1010100111010011101001110100 11 ...

Определите x-z-функцию этого автомата.

6.18. Линейный двоичный автомат определяется выражением

$$z_\nu = x_\nu \oplus x_{\nu-1} \oplus x_{\nu-2} \oplus z_{\nu-2} \oplus z_{\nu-3}.$$

Начальные условия в момент t_ν: $x_{\nu-1} = x_{\nu-2} = x_{\nu-3} = z_{\nu-1} = z_{\nu-2} = z_{\nu-3} = 1$. Постройте последовательность, которая, будучи приложенной к автомату в момент времени t_ν, дает постоянный выход, равный 0.

6.19. Известно, что не зависящий от выхода автомат имеет память 5 и входной алфавит $\{0, 1\}$. Постройте самый короткий безусловный эксперимент для распознавания автомата.

6.20. Известно, что заданный автомат M является не зависящим от выхода (n, p, q)-автоматом. Покажите, что M может быть

[1]) Как автомат M, так и автомат M^{-1} являются автоматами без потери информации (см. § 5.8).

распознан с помощью простого безусловного эксперимента длины l, где

$$l \leqslant p^{n(n-1)/2} + \frac{1}{2} n^2 - \frac{1}{2} n - 1.$$

6.21. Постройте автомат с двумя состояниями, отвечающий следующим требованиям: (а) чтобы он не был автоматом с конечной памятью, (б) чтобы он был автоматом с конечной памятью, но не зависящим от выхода, (в) чтобы он был не зависящим от выхода автоматом.

6.22. Показать, что следующие характеристические функции представляют не зависящий от выхода автомат с памятью 1:

$$z_\nu = f_z(x_\nu, s_\nu),$$
$$s_{\nu+1} = f_s(x_\nu).$$

ГЛАВА 7

АВТОМАТЫ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ВХОДЕ

7.1. Введение

При изучении конечных автоматов мы обращали внимание на свойства самих автоматов и не касались свойств источников входных последовательностей, возбуждающих эти автоматы. Мы логично предполагали, что рассматриваемые автоматы могут подвергаться воздействиям со стороны любых источников сигналов, лишь бы генерируемые входные символы принадлежали входному алфавиту автомата. В этой главе мы откажемся от этого предположения и рассмотрим более общий класс автоматов, в котором на источники могут быть наложены определенные ограничения. Особо мы будем исследовать класс автоматов, известных как *автоматы с ограничениями на входе*, в которых не каждый входной символ может быть подан на автомат, находящийся в определенном состоянии. Такое ограничение неизменно возникает, поскольку существует некоторая взаимосвязь между внутренней структурой автомата и источником входных символов. Для иллюстрации рассмотрим пример 2 из § 1.7, где английский текст, состоящий из 26 букв алфавита и промежутков, просматривается с целью подсчета числа слов, начинающихся с «*un*» и оканчивающихся на «*d*». Когда автомат находится, например, в состоянии «появление *u-n-d*», входной символ «*p*» не может быть подан, так как не существует английских слов, содержащих последовательность букв «*undp*» (или вероятность появления такой последовательности чрезвычайно мала).

Поэтому для всех практических целей символ «*p*» (так же как и многие другие символы) может быть исключен из множества входных символов, когда автомат, который описывает систему, просматривающую текст, находится в состоянии «появление *u-n-d*».

В следующих параграфах мы увидим, как некоторые понятия и методы, развитые в предыдущих параграфах, могут быть распространены на класс автоматов с ограничениями на входе[1]).

7.2. Совместимость состояний

При определении основной модели с конечным числом состояний (см. § 1.6) молчаливо предполагалось, что характеристические функции f_z и f_s конечного автомата определены для каждой пары (x_ν, s_ν). При изучении автоматов с ограничениями на входе удобно видоизменить эту модель и допустить наличие пар (x_ν, s_ν), для которых обе функции f_z и f_s остаются неопределенными. В частности, мы можем предполагать, что f_z и f_s у автомата не определены для пары (ξ_j, σ_i), где ξ_j — входной символ, а σ_i — состояние автомата M, если ни при каких условиях ξ_j не может быть приложен к $M|\sigma_i$; при этом говорят, что автомат M имеет *ограничение на входе* в состоянии σ_i. В таблице переходов автомата M такое ограничение отмечается тем, что клетки в обеих подтаблицах z_ν и $s_{\nu+1}$, расположенные на пересечении строки i и столбца ξ_j, остаются пустыми (или заполняются прочерками). Входная последовательность называется *допустимой* в состоянии σ_i, если при приложении к $M|\sigma_i$ она не нарушает ограничения на входе ни в каком состоянии автомата M. В качестве примера на рис. 7.1 и в таблице 7.1 представлен автомат $A32$ с ограничениями на входе.

Состояния σ_i и σ_j автомата M с ограничениями на входе называются *совместимыми*, если для $M|\sigma_i$ и $M|\sigma_j$ при подаче на вход любой допустимой для σ_i и σ_j входной последовательности на выходе появляется одна и та же

---

[1]) Материал этой главы частично базируется на работах Ауфенкампа (P. D. Aufenkamp, Analysis of Sequential Machines, IRE Trans., vol. EC — 7, pp. 299—306, 1958), Гинзбурга (S. Ginsburg, A Technique for the Reduction of a Given Machine to a Minimal — State Machine, IRE Trans., vol. EC — 8, pp. 346—355, 1959; S. Ginsburg, On the Reduction of Superfluous States in a Sequential Machine, J. Assoc. Comput. Mach., vol. 6, pp. 259—282, 1959) и Паула и Ангера (M. C. Paull and S. H. Unger, Minimizing the Number of States in Incompletely Specified Sequential Switching Functions, IRE Trans., vol. EC — 8, pp. 356—367, 1959).

последовательность. Состояния σ_i и σ_j *несовместимы*, если существует, по крайней мере, одна входная последовательность, допустимая как для σ_i, так и для σ_j, при подаче которой на $M|\sigma_i$ и $M|\sigma_j$ автомат выдает различные выходные последовательности. Видно, что совместимость обладает

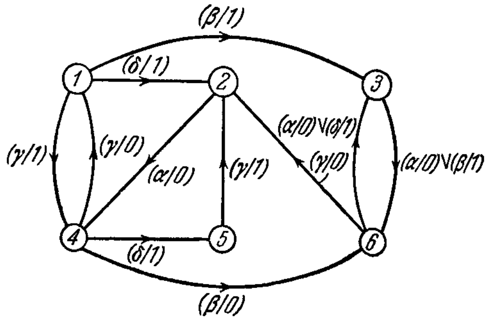


Рис. 7.1. Автомат *A*32.

свойствами рефлексивности и симметричности, но не обладает свойством транзитивности, так как последовательности, допустимые для σ_i и σ_j, не обязательно допустимы для σ_j и σ_k.

Таблица 7.1

Автомат *A*32

x_ν / s_ν	z_ν				$s_{\nu+1}$			
	α	β	γ	δ	α	β	γ	δ
1	—	1	1	1	—	3	4	2
2	0	—	—	—	4	—	—	—
3	0	1	—	—	6	6	—	—
4	—	0	0	1	—	6	1	5
5	—	—	1	—	—	—	2	—
6	0	—	0	1	3	—	2	3

Совместимость поэтому нельзя понимать как обычное отношение эквивалентности, а следует относить только к парам состояний.

Следует заметить, что определение совместимых пар состояний совпадает с определением эквивалентных пар состояний, если на входные последовательности рассматриваемого автомата не накладываются никакие ограничения. Таким образом, определение совместимости пар состояний может быть получено из определения эквивалентности пар состояний, если в последнем (см. определение 3.1) выражение «любой входной последовательности» заменить выражением «любой входной последовательности, допустимой для обоих состояний» (это изменение не отразится на правильности определения 3.1, так как в автомате без ограничений на входе множество допустимых последовательностей составляет множество *всех* последовательностей). Поэтому определение пары совместимых состояний производится так же, как определение пары эквивалентных состояний, с той лишь разницей, что все последовательности, недопустимые для обоих состояний пары, не учитываются.

В § 3.7 был описан метод, названный методом *таблицы пар*, для определения всех эквивалентных пар состояний в данном автомате. В соответствии с приведенными замечаниями этот метод может быть использован для определения всех совместимых пар состояний при условии, что первый вариант таблицы пар видоизменяется следующим образом: (1) элементы в столбце пар представляют собой пары состояний, при которых выдается один и тот же выходной символ при подаче любого входного символа, допустимого для обоих состояний пары; (2) если входной символ ξ_h недопустим для обоих состояний σ_i и σ_j, то клетка, расположенная на пересечении строки $\{\sigma_i, \sigma_j\}$ и столбца ξ_h, в таблице пар остается

Таблица 7.2

Таблица пар для автомата *A*32

Пары	α	β	γ	δ	Пары	α	β	γ	δ
1,2	—	—	—	—	2,5	—	—	—	—
1,3	—	3,6	—	—	**2,6**	3,4	—	—	—
1,5	—	—	2,4	—	3,5	—	—	—	—
2,3	4,6	—	—	—	3,6	3,6	—	—	—
2,4	—	—	—	—	4,6	—	—	1,2	3,5

пустой (или заполняется прочерком). Тогда построение последующих вариантов таблиц пар состояний может быть выполнено таким же образом, как это описано в § 3.7. Не выделенные жирным шрифтом элементы столбца пар в конечном варианте таблицы пар представляют все совместимые пары состояний для данного автомата.

Например, таблица 7.2 представляет конечный вариант таблицы пар для автомата *A*32, изображенного на рис. 7.1. Из таблицы следует, что совместимыми парами в автомате *A*32 являются: $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,5\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{2,5\}$, $\{3,5\}$, $\{3,6\}$ и $\{4,6\}$.

7.3. Квазиэквивалентные автоматы

Говорят, что состояние σ_j автомата M' *квазиэквивалентно* состоянию σ_i автомата M, если любая входная последовательность, допустимая для σ_i, вызывает одинаковые реакции при приложении ее к $M|\sigma_i$ и $M'|\sigma_j$. Говорят, что автомат M' *квазиэквивалентен* автомату M, если для каждого состояния σ_i автомата M имеется, по крайней мере, одно состояние σ_j автомата M', такое, что σ_j квазиэквивалентно σ_i. На основе этого определения автомат M' может быть интерпретирован следующим образом. Если дан неизвестный автомат, который может быть M или M', и известна реакция этого автомата на любую входную последовательность, *допустимую для некоторого состояния автомата* M, то нет способа определить, является неизвестный автомат автоматом M или M'. Таким образом, M' квазиэквивалентен M, если не существует способа отличить M от M' при помощи внешних экспериментов, которые используют только те входные последовательности, которые допустимы для состояний автомата M. Заметим, что отношение квазиэквивалентности не является симметричным отношением; тот факт, что M' квазиэквивалентен M, не означает, что M квазиэквивалентен M'.

Пусть $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ — множества состояний автомата M такие, что каждое состояние автомата M включено, по крайней мере, в одно множество Σ_i. Множество множеств $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ называется *группировкой*; n называется *мощностью* группировки. Два состояния, которые находятся вместе, по крайней мере, в одном множестве Σ_l, составляют *сопряженную* пару; пара состояний, которая не является сопряженной, называется *разобщенной парой*. Группировка называется *правильной*, если она удовлетворяет двум следующим условиям: (1) реакции автомата $M|\sigma_{i_1}$ и $M|\sigma_{i_2}$, где σ_{i_1} и σ_{i_2} составляют любую сопряженную пару, на любой входной символ ξ_j, допустимый для σ_{i_1} и σ_{i_2}, одинаковы; (2) первые преемники состояний σ_{i_1} и σ_{i_2} по отношению к ξ_j одинаковы или составляют сопряженную пару.

Пусть автомат M имеет множество состояний $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$. Пусть автомат M' квазиэквивалентен автомату M и имеет множество состояний $\{\sigma'_1, \sigma'_2, \ldots, \sigma'_n\}$. По определению квазиэквивалентности каждому состоянию σ_i автомата M должно соответствовать, по крайней мере, одно состояние автомата M', которое квазиэквивалентно σ_i. Распределим состояния автомата M по множествам $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ таким, что Σ_l — множество всех состояний, по отношению к которым σ'_l квазиэквивалентно. Эти множества составляют группировку, так как они включают каждое состояние M, по крайней мере, один раз. Пусть σ_{i_1} и σ_{i_2} — произвольная пара состояний из Σ_l и пусть ξ_j — любой символ, допустимый для σ_{i_1} и σ_{i_2}. Реакция $M|\sigma_{i_1}$ и $M|\sigma_{i_2}$ на ξ_j должна быть такой же, как и реакция $M'|\sigma'_l$ на ξ_j. Поэтому реакции $M|\sigma_{i_1}$ и $M|\sigma_{i}$ на ξ_j должны быть одинаковы. Предположим, что первыми преемниками состояний σ_{i_1} и σ_{i_2} по отношению к ξ_j являются σ_{k_1} и σ_{k_2} и что первый преемник состояния σ'_l по отношению к ξ_j есть σ'_k. Так как σ'_l квазиэквивалентно σ_{i_1} и σ_{i_2}, то σ'_k должно быть квазиэквивалентно σ_{k_1} и σ_{k_2}. Поэтому σ_{k_1} и σ_{k_2} не могут быть разобщенными и должны принадлежать одному и тому же множеству Σ_k. В заключение можно сделать вывод, что группировка $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ автомата M, построенная описанным выше способом, должна быть правильной группировкой.

Если дан автомат M с правильной группировкой $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$, то автомат M' может быть построен по следующим правилам. M' имеет n состояний, обозначаемых

$\sigma'_1, \sigma'_2, \ldots, \sigma'_n$. Если состояние M, принадлежащее множеству Σ_u, переходит в состояние, принадлежащее множеству Σ_v, и при этом выдается выходной символ ζ_k при входном символе ξ_j, то в M' состояние σ'_u переходит в σ'_v и при этом выдается выходной символ ζ_k при приложении входного символа ξ_j. Никакой неоднозначности при таком построении не получается, так как, если некоторое состояние автомата M, принадлежащее Σ_k, переходит в некоторое состояние, принадлежащее Σ_v, и при этом выдается выходной символ ζ_k на входной символ ξ_j, то *каждое* состояние M, которое принадлежит Σ_u и для которого допустим символ ξ_j, переходит в состояние, которое принадлежит Σ_v, и при этом выдается символ ζ_k на входной символ ξ_j. Из построения M' следует, что состояние σ'_i автомата M' квазиэквивалентно каждому состоянию M, принадлежащему множеству Σ_i. Поэтому автомат M' квазиэквивалентен автомату M. Таким образом, имеем следующий результат.

Теорема 7.1. *Каждому автомату M' с n состояниями, который квазиэквивалентен автомату M, соответствует в M правильная группировка мощности n. Каждой правильной группировке мощности n в автомате M соответствует автомат M', который квазиэквивалентен автомату M.*

Построение правильной группировки автомата M при заданном M' и построение M' при заданной правильной группировке автомата M можно осуществить так, как это описано выше. Если M — автомат с r состояниями и если $n < r$, то говорят, что M' — *сокращенная форма* M. Если не существует сокращенной формы M, имеющей меньше чем n состояний, то говорят, что M' — *минимальная форма* M, которая обозначается $\breve{M}$. Минимальная форма $\breve{M}$ данного автомата M имеет такое же значение для автоматов с ограничениями на входе, как и для автоматов без ограничений на входе: $\breve{M}$ — наименьший автомат, который ведет себя так же, как заданный автомат M. Однако следует иметь в виду, что в случае автомата с ограничениями на входе поведение автоматов M и $\breve{M}$ сравнимо только в отношении входных последовательностей, допустимых для состояний исходного автомата M.

Теорема 7.1 предполагает, что автомат $\breve{M}$ может быть определен из автомата M с r состояниями посредством перечисления всех правильных группировок автомата M, имеющих мощность r или меньше, и выбора из них наименьшей. Если задана наименьшая правильная группировка, или *минимальная правильная* группировка, то автомат, квазиэквивалентный автомату M, может всегда быть построен описанным ранее способом; этот автомат является минимальной формой автомата M. Хотя этот метод и дает решение, он очень трудоемок во всех случаях, кроме наиболее тривиальных, поскольку требует перечисления правильных группировок. В следующем параграфе будет получен ряд результатов, которые позволят отчасти облегчить задачу такого перечисления.

7.4. Определение минимальных форм

Множество Σ_l, входящее в правильную группировку $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$, будем называть *совместимым множеством.*

Лемма 7.1. *Каждая пара состояний в совместимом множестве должна быть совместимой.*

Доказательство. Рассмотрим состояния σ_{i_1} и σ_{i_2} из множества Σ_l правильной группировки $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$. По теореме 7.1 существует автомат M', в котором одно состояние, обозначенное σ'_l, квазиэквивалентно σ_{i_1} и σ_{i_2}. Тогда реакции автомата, находящегося в состояниях σ_{i_1} или σ_{i_2}, на любую входную последовательность $\mathscr{E}$, допустимую для обоих состояний, должны быть одинаковыми, так как каждая из этих реакций должна быть такой же, как реакция автомата $M' | \sigma'_l$ на входную последовательность $\mathscr{E}$. Следовательно, по определению σ_{i_1} и σ_{i_2} должны быть совместимы.

В дальнейшем *С-множеством* автомата M будем называть множество состояний автомата M, которое удовлетворяет двум следующим условиям: (1) каждая пара состояний из C-множества совместима; (2) это множество не является подмножеством другого C-множества, содержащего большее число состояний. Лемма 7.1 тогда позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема 7.2. *Каждое множество в правильной группировке автомата M должно быть или C-множеством, или подмножеством C-множества автомата M.*

Таким образом, построение минимальной формы может быть выполнено путем перечисления всех возможных C-множеств с последующим формированием всех возможных группировок из перечисленных C-множеств или из подмножеств этих C-множеств. Наименьшая группировка, которая оказывается правильной, является минимальной правильной группировкой и представляет собой минимальную форму данного автомата.

Перечень всех возможных C-множеств может быть легко составлен, когда задан перечень всех совместимых пар. Перечень всех совместимых пар в свою очередь может быть получен из таблицы пар, как описано в § 7.2. Процедура получения всех C-множеств из совместимых пар состоит в следующем.

Алгоритм 7.1. Даны все совместимые пары автомата M; требуется определить все C-множества автомата M. (1) Пусть первый перечень множеств состояний состоит из всех совместимых пар автомата M и из отдельных состояний, не принадлежащих ни к одной из совместимых пар. Полагаем $k=2$. (2) Для каждого множества состояний $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_h}\}$, содержащихся в $(k-1)$-м перечне, выполняем следующие операции. Определяем l состояний автомата M, скажем $\sigma_{j_1}, \sigma_{j_2}, \ldots, \sigma_{j_l}$ таких, что σ_{j_d} $(d=1, 2, \ldots, l)$ не включено в данное множество, и таких, что каждое σ_{j_d} образует совместимую пару с каждым состоянием из этого множества. Заменяем множество $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_h}\}$ l множествами $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_h}, \sigma_{j_d}\}$, $d=1, 2, \ldots, l$. Если $l=0$, то заменим множество $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_h}\}$ самим собой. (3) Исключаем из нового перечня множеств все одинаковые множества, оставляя по одному представителю от каждой группы одинаковых множеств, и все множества, являющиеся подмножествами других множеств. Пусть полученный таким образом перечень будет k-м перечнем. (4) (а) Если k-й перечень отличается от $(k-1)$-го перечня, то увеличиваем k на единицу и возвращаемся к (2). (б) Если k-й перечень совпадает с $(k-1)$-м, то он является перечнем всех C-множеств автомата M.

Выполнение алгоритма 7.1 облегчается построением *матрицы совместимости*, обозначаемой $[C_M]$, элемент (i, j) которой равен 1, если $\{\sigma_i, \sigma_j\}$ или $\{\sigma_j, \sigma_i\}$ — совместимые пары состояний, и 0 в противном случае. По построению, если в каждой строке $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_h}$ содержится 1 в каком-либо данном столбце σ_{j_d}, то σ_{j_d} образует совместимые пары с каждым состоянием из множества $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_h}\}$. Следовательно, если $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_h}\}$ — множество в $(k-1)$-м перечне и если строки $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_h}$ матрицы совмещений содержат единицу в столбце σ_{j_d}, множество $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots$ $\ldots, \sigma_{i_h}\}$ должно быть заменено множеством $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots$ $\ldots, \sigma_{i_h}, \sigma_{j_d}\}$.

В качестве примера рассмотрим автомат $A32$, изображенный на рис. 7.1. В таблице 7.2 получены все совместимые пары автомата $A32$, из которых может быть составлен первый перечень:

$$\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{4,6\}.$$

Матрица совмещений для $A32$, которая может быть построена непосредственно по первому перечню, представлена выражением (7.1):

$$[C_{A32}] = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}. \qquad (7.1)$$

Из этой матрицы и первого перечня можно найти второй перечень:

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 6\}.$$

Например, обе строки 1 и 2 в (7.1) содержат единицы в столбцах 3 и 5; поэтому множество $\{1, 2\}$ первого перечня заменяется множествами $\{1, 2, 3\}$ и $\{1, 2, 5\}$. Так как в матрице нет столбцов, в которых обе строки 2 и 4 содержат единицу, то множество $\{2, 4\}$ из первого перечня заменяется множеством $\{2, 4\}$. Из (7.1) и второго перечня можно найти третий перечень: $\{1, 2, 3, 5\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 6\}$, $\{4, 6\}$. Так как этот перечень такой же, как и четвертый, то он содержит все C-множества автомата $A32$.

Минимальная форма $A32$, а именно $\breve{A}32$ соответствует наименьшей правильной группировке, построенной из перечисленных C-множеств или из подмножеств этих C-множеств. Так как каждая группировка должна содержать все шесть состояний, минимальная правильная группировка должна иметь мощность 2 или больше. Однако, так как группировка $\{1, 2, 3, 5\}$, $\{4, 6\}$ не является правильной, нижняя граница мощности, равная 2, недостижима. При помощи таблицы 7.2 можно легко проверить, что $\{1, 2\}$, $\{3, 5\}$, $\{4, 6\}$ составляют правильную группировку; поэтому эта группировка и есть минимальная правильная группировка. Можно легко проверить, что $\{1, 5\}$, $\{2, 4\}$ и $\{3, 6\}$ составляют другую минимальную правильную группировку. Отсюда следует, что минимальная правильная группировка автомата с ограничениями на входе не всегда однозначна. Значит, заданный автомат с ограничениями на входе может иметь несколько минимальных форм, которые не обязательно изоморфны друг другу.

Как только получена минимальная правильная группировка автомата M, может быть получена таблица переходов соответствующей минимальной формы $\breve{M}$ из таблицы переходов M следующим образом.

Алгоритм 7.2. Дана минимальная правильная группировка автомата M, а именно $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$, где Σ_i есть $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_{r_i}}\}$; надо построить минимальную форму $\breve{M}$ с множеством состояний $\{\sigma'_1, \sigma'_2, \ldots, \sigma'_n\}$. (1) Полагаем $k = 1$. (2) (a) Если все клетки в подтаблицах z_ν и $s_{\nu+1}$ автомата M, расположенные на пересечении строк $\sigma_{k_1}, \sigma_{k_2}, \ldots, \sigma_{k_{r_k}}$ и столбца ξ_j, содержат прочерк, то в клетках подтаблиц z_ν

и $s_{\nu+1}$ автомата $\breve{M}$, расположенных на пересечении строки σ'_k и столбца ξ_j, тоже проставим прочерк. (б) Если, по крайней мере, одна из клеток в подтаблице z_ν автомата M, расположенных на пересечении строк $\sigma_{k_1}, \sigma_{k_2}, \ldots, \sigma_{k_{r_k}}$ и столбца ξ_j, не содержит прочерка, то проставим содержимое таких клеток в клетке, расположенной на пересечении строки σ'_k и столбца ξ_j в подтаблице z_ν автомата $\breve{M}$. (в) Если в подтаблице $s_{\nu+1}$ автомата M есть клетки без прочерка, расположенные на пересечении строк $\sigma_{k_1}, \sigma_{k_2}, \ldots, \sigma_{k_{r_k}}$ и столбца ξ_j, то находим совместимое множество Σ_l, в которое включены все элементы, соответствующие этим клеткам. Пусть σ'_l будет содержимым клетки, общей для строки σ'_k и столбца ξ_j в подтаблице $s_{\nu+1}$ автомата $\breve{M}$. (3) (а) Если $k < n$, то увеличиваем k на 1 и возвращаемся к (2). (б) Если $k = n$, то таблица переходов для $\breve{M}$ построена.

Таблица 7.3 представляет собой таблицу переходов автомата $\breve{A}32_1$, который является минимальной формой автомата $A32$.

Таблица 7.3

Автомат $\breve{A}32_1$

x_ν / s_ν	z_ν				$s_{\nu+1}$			
	α	β	γ	δ	α	β	γ	δ
1	0	1	1	1	3	2	3	1
2	0	1	1	—	3	3	1	—
3	0	0	0	1	2	3	1	2

Таблица 7.4

Автомат $\breve{A}32_2$

x_ν / s_ν	z_ν				$s_{\nu+1}$			
	α	β	γ	δ	α	β	γ	δ
1	—	1	1	1	—	3	2	2
2	0	0	0	1	2	3	1	1
3	0	1	0	1	3	3	2	3

Эта таблица построена на основе минимальной правильной группировки $\{1, 2\}$, $\{3, 5\}$, $\{4, 6\}$. Множества группировки представлены в $\breve{A}32_1$ состояниями 1, 2, 3 соответственно. Таблица 7.4 представляет собой таблицу переходов автомата $\breve{A}32_2$, являющегося минимальной формой $A32$. Таблица построена на основе минимальной правильной группировки

$\{1,5\}$, $\{2,4\}$, $\{3,6\}$, множества которой представлены в $A\breve{3}2_2$ состояниями 1, 2, 3 соответственно.

На рис. 7.2 и 7.3 приведены графы переходов автоматов $A\breve{3}2_1$ и $A\breve{3}2_2$ соответственно. Для иллюстрации квазиэквивалентности автоматов $A\breve{3}2_1$, $A\breve{3}2_2$ по отношению к автомату $A32$

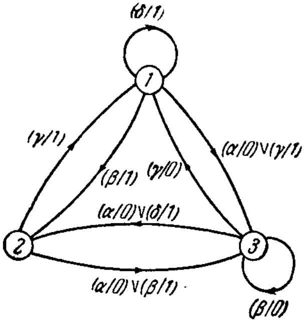


Рис. 7.2. Автомат $A\breve{3}2_1$.

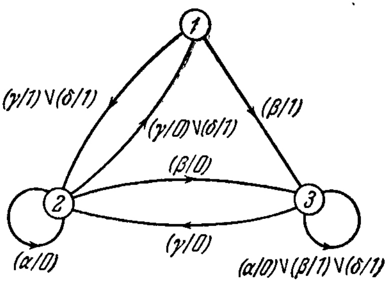


Рис. 7.3. Автомат $A\breve{3}2_2$.

рассмотрим входную последовательность $\gamma\gamma\delta\alpha\delta\gamma\alpha\beta\gamma\alpha\gamma\beta\beta\delta$, которая допустима для состояния 1 автомата $A32$. Когда эта последовательность прикладывается к $A32$ в состоянии 1 или к $A\breve{3}2_1$ в состоянии 1, или к $A\breve{3}2_2$ в состоянии 1 (два последних состояния квазиэквивалентны первому), видно, что реакция автоматов на эту последовательность одинакова у всех автоматов и выражается так: 10101100000111.

7.5. Метод уменьшения числа состояний автоматов с ограничениями на входе

Как стало ясно из предыдущих параграфов, определение минимальной формы автомата с ограничениями на входе — процесс очень трудоемкий. В тех случаях, когда не обязательно требуется минимальная форма, но уменьшение числа состояний все же желательно, может быть использован упрощенный метод, который часто дает значительно сокращенную форму (а иногда и минимальную форму) по сравнению с заданным автоматом. Предлагаемый метод, по существу, является методом таблиц P_k минимизации автоматов без ограничений на входе, описанным в § 3.6. Единственное различие между применением этого метода для автоматов без ограничений на входе и применением его для автоматов с ограничениями на входе состоит в том, что в последнем случае содержимое незаполненных клеток таблицы, содержащих прочерк, можно интерпретировать произвольно.

В качестве примера в таблицах 7.5 и 7.6 представлены соответственно таблица P_1 и таблица P_2 для автомата $A32$, заданного таблицей 7.1. Таблица P_1 получена путем замены прочерков в клетках подтаблицы z_ν таким образом, чтобы

Таблица 7.5

Таблица P_1 для $A32$

Σ	$s_\nu \backslash x_\nu$	$s_{\nu+1}$: α	β	γ	δ
a	1	—	3_a	4_b	2_a
	2	4_b	—	—	—
	3	6_b	6_b	—	—
	5	—	—	2_a	—
b	4	—	6_b	1_a	5_a
	6	3_a	—	2_a	3_a

Таблица 7.6

Таблица P_2 для $A32$

Σ	$s_\nu \backslash x_\nu$	$s_{\nu+1}$: α	β	γ	δ
a	1	—	3_b	4_c	2_a
	2	4_c	—	—	—
b	3	6_c	6_c	—	—
	5	—	—	2_a	—
c	4	—	6_c	1_a	5_b
	6	3_b	—	2_a	3_b

множества $\{1, 2, 3, 5\}$ и $\{4, 6\}$ стали 1-эквивалентным разбиением. Заметим, что возможны также другие замены прочерков в клетках, но при выбранной замене получается наименьшее число классов 1-эквивалентности. Таблица P_2 получена заменой прочерков в клетках таблицы P_1 таким образом, что множества $\{1, 2\}$, $\{3, 5\}$ и $\{4, 6\}$ становятся 2-эквивалентным разбиением. Так как это — конечная таблица P_k, то P_2 является эквивалентным разбиением, из которого сокращенная форма может быть построена по алгоритму 7.2. Случайно получилось, что множества $\{1, 2\}$, $\{3, 5\}$ и $\{4, 6\}$ также составляют минимальную правильную группировку, так что сокращенный автомат, полученный на основе P_2, является также минимальной формой автомата $A32$ (действительно, это автомат $\check{A}32_1$ рис. 7.2). Заметим, однако, что другая замена прочерков клеток в таблице P_1 может в результате дать 2-эквивалентное разбиение {1}, {2, 3, 5}, {4, 6}, затем 3-эквивалентное разбиение {1}, {2, 3, 5}, {4}, {6} и, наконец, эквивалентное разбиение {1}, {2}, {3, 5}, {4}, {6}. Ясно, что последнее разбиение дает менее удовлетворительную минимизацию автомата $A32$, чем {1, 2}, {3, 5}, {4, 6}. В общем случае целесообразно пробовать несколько различных замен на каждом шаге процесса разбиения и изучать, как влияют различные замены на число классов, получаемых при окончательном разбиении или, по крайней мере, при разбиении, непосредственно следующем за данным. Замена прочерков должна быть выбрана так, чтобы дать наименьшее число классов.

Преимущество описанного метода состоит в том, что он позволяет использовать личную изобретательность и опыт для получения сокращенных форм за относительно малое время. Недостатком его является то, что он не гарантирует уменьшения числа состояний и, конечно, не гарантирует

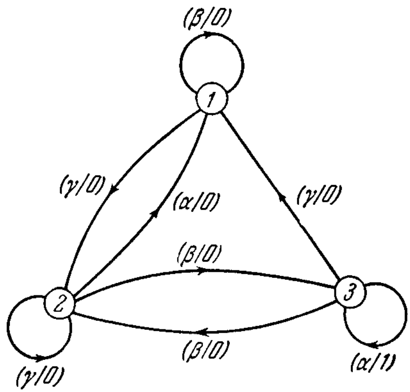


Рис. 7.4. Автомат $A33$.

минимизации заданного автомата. Важно отметить, что минимальная форма не гарантируется этим методом даже в том случае, если перепробованы все возможные замены прочерков в клетках на каждом шаге описанной процедуры. Причина состоит в том, что каждое эквивалентное разбиение неизбежно составляется из непересекающихся классов эквивалентности, в то время как минимальная правильная группировка может быть образована из пересекающихся совместимых множеств. Например, рассмотрим автомат $A33$, представленный графом на рис. 7.4 и таблицей 7.7. P_1 в этом случае будет $\{1, 2\}$, $\{3\}$, или $\{1,3\}$, $\{2\}$. В каждом из этих случаев P_2 будет $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, а это означает, что $A33$ не может быть минимизирован предложенным методом. С другой стороны, если применить общий метод минимизации, то окажется, что $\{1, 2\}$ и $\{1, 3\}$ являются C-множествами для $A33$

Таблица 7.7

Автомат $A33$

$s_\nu \backslash x_\nu$	z_ν: α	z_ν: β	z_ν: γ	$s_{\nu+1}$: α	$s_{\nu+1}$: β	$s_{\nu+1}$: γ
1	—	0	0	—	1	2
2	0	0	0	1	3	2
3	1	0	0	3	2	1

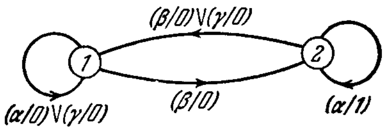


Рис. 7.5. Автомат $\breve{A}33$.

и что эти два C-множества составляют правильную группировку. Поэтому $A33$ имеет минимальную форму $\breve{A}33$, которая состоит из двух состояний. На рис. 7.5 приведена эта минимальная форма, в которой состояния 1 и 2 представляют соответственно множества $\{1, 2\}$ и $\{1, 3\}$ автомата $A33$.

Задачи

7.1. Покажите, что не существует множества в минимальной правильной группировке, которое можно было бы включить в какое-либо другое множество этой группировки.

Таблица З7.1

Пары	α	β	γ	δ	Пары	α	β	γ	δ
1,2	1,4	1,6	—	—	2,6	1,5	—	—	4,6
1,3	1,5	—	3,5	—	3,4	3,6	2,5	3,6	—
1,5	2,6	—	—	3,6	3,5	2,3	—	—	1,3
1,6	—	4,6	—	—	3,6	—	2,6	4,6	—
2,3	1,3	3,5	—	—	4,5	—	—	—	1,2
2,5	4,5	—	1,5	—	4,6	—	—	1,5	1,3

7.2. $C_1, C_2, \ldots, C_h$ представляют собой все C-множества автомата M с ограничениями на входе. Покажите, что $C_1, C_2, \ldots, C_h$ составляют правильную группировку и, следовательно, что число состояний в $\breve{M}$ не может превышать h.

7.3. Первый вариант таблицы пар для автомата с шестью состояниями представлен таблицей З 7.1. Найдите все C-множества и минимальную правильную группировку для этого автомата.

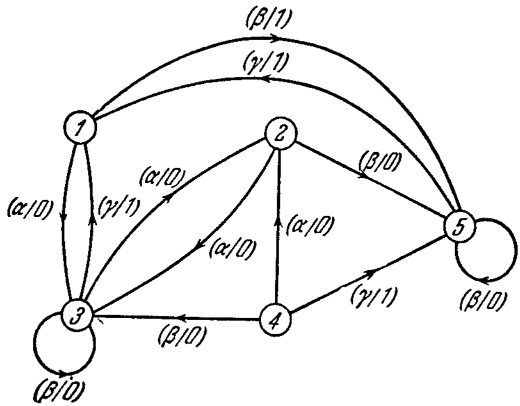


Рис. З 7.1.

7.4. Найдите минимальную форму автомата, заданного таблицей З 7.2.

Таблица З 7.2

	z_ν				$s_{\nu+1}$					z_ν				$s_{\nu+1}$			
s_ν \ x_ν	α	β	γ	δ	α	β	γ	δ	s_ν \ x_ν	α	β	γ	δ	α	β	γ	δ
1	0	0	—	1	2	3	—	4	4	1	0	—	1	5	3	—	1
2	0	0	—	—	3	5	—	—	5	—	0	—	—	—	6	—	—
3	1	0	1	—	4	6	3	—	6	—	—	1	0	—	—	4	2

7.5. Определите минимальную форму автомата с ограничениями на входе, изображенного на рис. З 7.1.

7.6. Уменьшите число состояний автомата, заданного таблицей З 7.3, используя метод сокращения, описанный в § 7.5.

Таблица 37.3

x_ν / s_ν	z_ν						$s_{\nu+1}$					
	a	b	c	d	e	f	a	b	c	d	e	f
1	1	—	2	—	4	—	9	—	9	—	2	—
2	2	3	2	1	2	—	2	11	9	10	3	—
3	1	3	2	—	4	—	9	3	11	—	1	—
4	1	3	2	—	4	—	1	4	11	—	9	—
5	2	3	2	1	2	—	7	5	13	3	4	—
6	2	4	—	1	1	3	6	10	—	12	1	3
7	—	3	2	—	4	—	—	2	1	—	1	—
8	—	3	—	1	—	—	—	11	—	7	—	—
9	—	3	—	—	4	—	—	3	—	—	8	—
10	1	3	2	—	—	—	10	8	9	—	—	—
11	2	3	2	3	2	—	2	2	1	7	12	—
12	1	3	—	—	4	—	12	4	—	—	2	—
13	2	4	—	1	1	3	13	7	—	9	12	3

БИБЛИОГРАФИЯ[1])

Айзерман М. А., Гусев Л. А., Розоноэр Л. И., Смирнова И. М., Таль А. А., Конечные автоматы, Автоматика и телемеханика, т. XXI, №№ 2, 3, 1960.

Aufenkamp D. D., Analysis of Sequential Machines, IRE Trans., vol. EC-7, pp. 299—306, 1958. [Русский перевод: Ауфенкамп Д. Д., Анализ последовательностных машин, II, Сб. переводов «Математика», 3 : 6, 1959.]

Aufenkamp D. D. and Hohn F. E., Analysis of Sequential Machines, IRE Trans., vol. EC-6, pp. 276—285, 1957. [Русский перевод: Ауфенкамп Д. Д., Хон Ф. Е., Анализ последовательностных машин, I, Сб. переводов «Математика», 3 : 3, 1959.]

Bellman R., Sequential Machines, Ambiguity and Dynamic Programming, J. Assoc. Comput. Mach., vol. 7, pp. 24—28, 1960.

Bellman R., Adaptive Control Processes, pp. 119—123, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1961. [Русский перевод: Беллман Р., Процессы регулирования с адаптацией, «Наука», 1964.]

Bennett W. S., Minimizing and Mapping Sequential Circuits, Trans., AIEE, vol. 74, pt. 1, pp. 443—447, 1955.

Блох А. Ш., Эквивалентные преобразования последовательностных машин, Автоматика и телемеханика, т. XXI, № 11, 1960.

Burks A. W., The Logic of Fixed and Growing Automata, Annals of the Computation Laboratory, vol. 29, pp. 147—188, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1959.

Burks A. W. and Wang H., The Logic of Automata, J. Assoc. Comput Mach., vol. 4, pp. 193—218, 279—297, 1957.

Burks A. W. and Wright J. B., Theory of Logical Nets, Proc. IRE, vol. 41, pp. 1357—1365, 1953. [Русский перевод: Беркс А., Райт Дж., Теория логических сетей, «Кибернетический сборник», № 4, ИЛ, 1962.]

Cadden W. J., Equivalent Sequential Circuits, IRE Trans., vol. CT-6, pp. 30—34, 1959.

de Bruijn N. G., A. Combinatorial Problem, Proc. Ned. Acad. Wetensch., vol. 49, pp. 758—764, 1946.

Elspas B., The Theory of Autonomous Linear Sequential Networks, IRE Trans., vol. CT-6, pp. 45—60, 1959.

Fitch F. B., Representation of Sequential Circuits in Combinatory Logic, Phil., Sci., vol. 25, pp. 263—279, 1958.

Friedland B., Linear Modular Sequential Circuits, IRE Trans., vol. CT-6, pp. 61—68, 1959.

---

[1]) Библиография ограничена статьями и книгами, в которых непосредственно рассматриваются вопросы, затрагиваемые в этой книге.

Friedland B. and Stern T. E., On Periodicity of States in Linear Modular Sequential Circuits, IRE Trans., vol. IT-5, pp. 136—137, 1959.

Gill A., Comparison of Finite-State Models, IRE Trans., vol. CT-7, pp. 178—179, 1960.

Gill A., Analysis of Nets by Numerical Methods, J. Assoc. Comput. Mach., vol. 7, 251—254, 1960.

Gill A., Characterizing Experiments for Finite-memory Binary Automata, IRE Trans., vol. EC-9, pp. 469—471, 1960.

Gill A., A Note on Moore's Distinguishability Theorem, IRE Trans., vol. EC-10, pp. 290—291, 1961.

Gill A., Cascaded Finite-State Machines, IRE Trans., vol. EC-10, pp. 366—370, 1961.

Gill A., State-identification Experiments in Finite Automata, Information and Control, vol. 4, pp. 132—154, 1961.

Gill A., A Theorem Concerning Compact and Cyclic Sequences, IRE Trans., vol. IT-8, p. 255, 1962.

Gillespie R. G. and Aufenkamp D. D., On the Analysis of Sequential Machines, IRE Trans., vol. EC-7, pp. 119—122, 1958.

Ginsburg S., On the Length of the Smallest Uniform Experiment Which Distinguishes the Terminal States of a Machine, J. Assoc. Comput. Mach., vol. 5, pp. 266—280, 1958. [Русский перевод: Гинзбург С., О длине кратчайшего эксперимента, устанавливающего конечные состояния машины, «Кибернетический сборник», № 3, ИЛ, 1961.]

Ginsburg S., A Synthesis Technique for Minimal-state Sequential Machines, IRE Trans., vol. EC-8, pp. 13—24, 1959.

Ginsburg S., On the Reduction of Superfluous States in a Sequential Machine, J. Assoc. Comput. Mach., vol. 6, pp. 259—282, 1959.

Ginsburg S., A Technique for the Reduction of a Given Machine to a Minimal-state Machine, IRE Trans., vol. EC-8, pp. 346—355, 1959.

Ginsburg S., Synthesis of Minimal-state Machines, IRE Trans., vol. EC-8, pp. 441—449, 1959.

Ginsburg S., Connective Properties Preserved in Minimal-state Machines, J. Assoc. Comput. Mach., vol. 7, pp. 311—325, 1960.

Ginsburg S., Some Remarks on Abstract Machines, Trans. Am. Math. Soc., vol. 96, pp. 400—444, 1960.

Ginsburg S., Compatibility of States in Input-independent Machines, J. Assoc. Comput. Mach., vol. 8, pp. 400—403, 1961.

Hartmanis J., Linear Multivalued Sequential Coding Networks, IRE Trans., vol. CT-6, pp. 69—74, 1959.

Hartmanis J., Symbolic Analysis of a Decomposition of Information Processing Machines, Information and Control, vol. 3, pp. 154—178, 1960.

Hartmanis J., On the State Assignment Problem for Sequential Machines, IRE Trans., vol. EC-10, pp. 157—165, 1961.

Hartmanis J., Loop-free Structure of Sequential Machines, Information and Control, vol. 5, pp. 25—43, 1962.

Hibbard T. N., Least Upper Bounds on Minimal Terminal State Experiments for Two Classes of Sequential Machines, J. Assoc. Comput. Mach., vol. 8, pp. 601—612, 1961.

Hohn F. E., Seshu S. and Aufenkamp D. D., The Theory of Nets, IRE Trans., vol. EC-6, pp. 154—161, 1957.

Holladay J. C. and Varga R. S., On Powers of Non-negative Matrices, Proc. Am. Math. Soc., vol. 9, pp. 631—634, 1958.

Huffman D. A., The Synthesis of Sequential Switching Circuits, J. Franklin Inst., vol. 257, pp. 161—190, 275—303, 1954.

Huffman D. A., Information Conservation in Sequence Transducers, Proc. Symposium on Information Networks, pp. 291—307, 1954.

Huffman D. A., The Synthesis of Linear Sequential Coding Networks, pp. 77—95 in C. Cherry (ed), «Information Theory», Academic Press, Inc., New York, 1956.

Huffman D. A., A Linear Circuit Viewpoint on Error-correcting Codes, IRE Trans., vol. IT-2, pp. 20—28, 1956.

Huffman D. A., An Algebra for Periodically Time-varying Linear Binary Sequence Transducers, Annals of the Computation Laboratory, vol. 29, pp. 289—203, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1959.

Huffman D. A., Canonical Forms for Information-lossless Finite-state Logical Machines, IRE Trans., vol. CT-6, pp. 41—59, 1959.

Huzino S., On Some Sequential Machines and Experiments, Mem. Fac. Sci., Kyushu Univ., ser. A, vol. 12, pp. 136—158, 1958.

Huzino S., Reduction Theorems on Sequential Machines, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., ser. A, vol. 12, pp. 159—179, 1958.

Huzino S., Some Properties of Convolution Machines and Sigma Composite Machines, Mem. Fac. Sci., Kyushu Univ., ser. A, vol. 13, pp. 69—83, 1959.

Huzino S., On Some Sequential Equations, Mem. Fac. Sci., Kyushu Univ., ser. A, vol. 14, pp. 50—62, 1960.

Карацуба А. А., Решение одной задачи из теории конечных автоматов, Успехи матем. наук, т. 15, вып. 3, 1960.

Lee Y. Y., Automata and Finite Automata, Bell System Tech. J., vol. 39, pp. 1267—1295, 1960.

Lippel B. and Epstein I. J., A Method for Obtaining Complete Digital Coding Chains, IRE Trans., vol. EC-6, p. 121, 1957.

McCluskey E. J., A Comparison of Sequential and Iterative Circuits, Trans. AIEE, vol. 78, pt. 1, pp. 1039—1044, 1959.

McCluskey E. J., Introduction to State Tables, pp. 109—119 in E. J. McCluskey and T. C. Bartee (eds.), «A Survey of Switching Circuit Theory», McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1962.

McNaughton R., The Theory of Automata, a Survey, pp. 379—421 in F. L. Alt (ed.), «Advances in Computers», vol. 2, Academic Press, Inc., New York, 1961.

Mealy G. H., Method for Synthesizing Sequential Circuits, Bell System Tech. J., vol. 34, pp. 1045—1079, 1955.

Mezei J. E., Minimal Characterizing Experiments for Finite Memory Automata, IRE Trans., vol. EC-10, p. 288, 1961.

Moore E. F., Gedanken-experiments on Sequential Machines, pp. 129—153 in C. E. Shannon and J. McCarthy (eds.), «Automata Studies», Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956.

Narasimhan R., Minimizing Incompletely Specified Sequential Switching Functions, IRE Trans., vol. EC-10, pp. 531—532, 1961.

Netherwood D. B., Minimal Sequential Machines, IRE Trans., vol. EC-8, pp. 339—345, 1959.

Paull M. C. and Unger S. H., Minimizing the Number of States in Incompletely Specified Sequential Switching Functions, IRE Trans., vol. EC-8, pp. 356—367, 1959.

Rabin M. O. and Scott D., Finite Automata and Their Decision Problems, IBM J. Research Develop., vol. 3, pp. 114—125, 1959. [Русский перевод: Рабин М. О., Скот Д., Конечные автоматы и задачи на разрешение, «Кибернетич. сборник», № 4, ИЛ, 1962.]

Raney G. N., Sequential Functions, J. Assoc. Comput. Mach., vol. 5, pp. 177—180, 1958.

Reed I. S., Mathematical Structure of Sequential Machines, pp. 187—196 in E. J. McCluskey and T. C. Bartee (eds.), «A Survey of Switching Circuit Theory», McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1962.

Runyon J. P., Derivation of Completely and Partially Specified State Tables, pp. 121—144 in E. J. McCluskey and T. C. Bartee (eds.), «A Survey of Switching Circuit Theory», McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1962.

Schubert E. J., Matrix Algebra for Sequential Logic, Trans. AIEE, vol. 78, pt. 1, pp. 1074—1079, 1960.

Seshu S., Mathematical Models for Sequential Machines, IRE Natl. Conv. Record, vol. 7, pt. 2, pp. 4—16, 1959.

Seshu S., Miller R. E. and Metze G., Transition Matrices of Sequential Machines, IRE Trans., vol. CT-6, pp. 5—12, 1959.

Seshu S. and Reed M. B., Linear Graphs and Electrical Networks, pp. 250—260, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1961.

Simon J. M., Some Aspects of the Network Analysis of Sequence Transducers, J. Franklin Inst., vol. 265, pp. 439—450, 1958.

Simon J. M., A Note on the Memory Aspects of Sequence Transducers, IRE Trans., vol. CT-6, pp. 26—29, 1959.

Srinivasan C. V., Narasimhan R., On the Synthesis of Finite Sequential Machines, Proc. Indian Acad. Sci., vol. 50, 1959.

Stearns R. E. and Hartmanis J., On the State Assignment Problem for Sequential Machines, IRE Trans., vol. EC-10, 1961.

Stern T. E. and Friedland B., The Linear Modular Sequential Circuit Generalized, IRE Trans., vol. CT-8, pp. 79—80, 1961.

Трахтенброт Б. А., Об операторах, реализуемых в логических сетях, ДАН СССР, т. 112, № 6, 1957.

Unger S. H., Simplification of State Tables, pp. 145—170 in E. J. McCluskey and T. C. Bartee (eds.), A. Survey of Switching Circuit Theory, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1962.

van Aardenne-Ehrenfest T. and de Bruijn N. G., Circuits and Trees in Oriented Linear Graphs, Simon Stevin, vol. 28, pp. 203—217, 1950—1951.

Yoeli M., The Cascade Decomposition of Sequential Machines, IRE Trans., vol. EC-10, pp. 587—592, 1961.

Zaden L. A., From Circuit Theory to System Theory, Proc. IRE, vol 50, pp. 856—865, 1962.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ