Н. БУРБАКИ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ

МЕРЫ, ИНТЕГРИРОВАНИЕ МЕР

ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

PAR

N. BOURBAKI

PREMIÈRE PARTIE

LES STRUCTURES FONDAMENTALES DE L'ANALYSE

LIVRE VI

INTÉGRATION

PARIS

HERMANN & Cie, ÉDITEURS

6, Rue de la Sorbonne, 6

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИКИ

Н. БУРБАКИ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ

МЕРЫ, ИНТЕГРИРОВАНИЕ МЕР

ПЕРЕВОД С ФРАНЦУЗСКОГО
Е. И. СТЕЧКИНОЙ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
С. Б. СТЕЧКИНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1967

517.2
Б 91
УДК 517.397

АННОТАЦИЯ

Настоящей книгой открывается перевод части трактата Бурбаки «Элементы математики», посвященной теории интегрирования в локально компактных топологических пространствах; излагается теория меры и интегрирование мер.

Книга рассчитана на математиков — научных сотрудников, аспирантов и студентов старших курсов университетов и педагогических институтов.

Н. Бурбаки

Интегрирование (меры, интегрирование мер)

М., 1967 г., 396 стр.

Редактор *В. В. Абгарян*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно* Корректоры *И. Я. Кришталь* и *Т. С. Плетнева*

Сдано в набор 9/III 1967 г. Подписано к печати 1/IX 1967 г. Бумага $60\times90/_{16}$, тип. №1. Физ. печ. л. 24,75+2 вкл. Условн. печ. л. 25,625. Уч.-изд. л. 23,85. Тираж 35 000 экз. Цена книги 1 р. 97 к. Заказ № 907

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Московская типография № 16 Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР. Москва, Трехпрудный пер., 9.

2-2-3
77-67

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Понятие *меры* величин является основополагающим как в повседневной жизни (длина, поверхность, объем, вес), так и в экспериментальной науке (электрический заряд, магнитная масса и т. д.). То общее, что присуще «мерам» этих различных величин, заключается в соотнесении каждой части пространства, удовлетворяющей некоторым условиям, *числа*, и притом так, чтобы объединению двух частей (не имеющих общих точек соответствовала сумма чисел, отнесенных каждой из них (*аддитивность* меры) *). Кроме того, мера обычно есть число положительное, и это влечет за собой тот факт, что она представляет собой *возрастающую* функцию измеримой части пространства **). С другой стороны, отметим, что в приложениях мало заботятся об уточнении вида тех частей пространства, которые рассматриваются как «измеримые»; разумеется, во всякой математической теории меры в этот пункт необходимо внести полную ясность, как это делается, например, в элементарной геометрии при определении площади многоугольников или объема многогранников; во всяком случае семейство «измеримых» множеств должно, естественно, быть таким, чтобы объединение любых двух из них без общих точек снова было «измеримо».

---

*) Заранее не очевидно, что величины разного рода могут быть измерены одними и теми же числами, и нет сомнения в том, что именно углубление понятия измерения величин привело древних греков к их *теории отношений*, эквивалентной теории положительных действительных чисел (см. Общая топология, гл. V, § 2 и Исторический очерк к гл. IV).

**) Это не применимо, например, к электрическому заряду тела; однако мера общего электрического заряда может рассматриваться как *разность* двух положительных мер положительных и отрицательных зарядов.

В большинстве предыдущих примеров мера части пространства стремится к нулю вместе с ее диаметром: здесь точка «не имеет длины», то есть она содержится в интервале сколь угодно малой длины, и значит, ей можно приписать лишь длину 0; меры таких величин называют рассеянными. Однако развитие механики и физики привело к величинам, для которых объект пренебрежимых размеров имеет не пренебрежимую меру: это гравитационные и электрические «точечные массы», которые на самом деле по большей части являются скорее математическими абстракциями, чем строго экспериментальными понятиями. Тем самым математика подошла к рассмотрению мер, определенных следующим образом: каждой точке a_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *конечного* множества F отнесено число m_i, ее «масса» или ее «вес», и мера произвольного множества A есть сумма масс m_i точек a_i, принадлежащих A.

С понятием меры тесно связано понятие *взвешенной суммы*. Рассмотрим, например, в пространстве конечное число (гравитационных или электрических) масс m_i, расположенных в точках a_i (с координатами x_i, y_i, z_i); составляющая (к примеру) по оси Oz притяжения, действующего на точку b (с массой 1 и с координатами α, β, γ) со стороны множества этих масс, равна (при надлежащим образом выбранной системе единиц) сумме $\sum\limits_i m_i \frac{(z_i-\gamma)}{r_i^3}$, где $r_i^2=(x_i-\alpha)^2+(y_i-\beta)^2+(z_i-\gamma)^2$ есть квадрат расстояния между точками a_i и b. Иными словами, берется значение функции

$$f(x,\ y,\ z)=\frac{z-\gamma}{((x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2)^{3/2}}$$

в каждой точке a_i, умножается на «вес» этой точки и составляется сумма полученных таким путем «взвешенных значений» функции f. Общеизвестно, что такие суммы постоянно встречаются в механике: центры тяжести и моменты инерции дают тому наиболее известные примеры.

Если пытаться распространить понятие «взвешенной суммы» со случая точечных масс на «рассеянную» меру, где всякая точка имеет меру нуль, то возникает такая внешне парадоксальная задача, которая породила интегральное исчисление: придать смысл «сумме» бесконечного числа членов, каждый из которых, взятый отдельно, равен нулю. Возьмем снова пример вычисления притяжения, действующего на точку, когда притягивающие массы непрерывно распределены в объеме V. Если множество V разбито на конечное число (без общих точек) частей V_i, то мы будем считать, что составляющая по оси Oz притяжения, действующего со стороны V на точку b, равна сумме составляющих притяжений, действующих на b со стороны каждого из V_i. Но если диаметр каждого V_i мал, то непрерывная функция $f(x, y, z)$ мало меняется в V_i, и это позволяет притяжение, действующее со стороны V_i, заменить притяжением точечной массы, равной массе m_i объема V_i и расположенной в произвольной точке a_i множества V_i. Таким образом, мы приходим к тому, что в качестве приближенного значения искомого числа берется «сумма Римана» $\sum\limits_i m_i f(x_i, y_i, z_i)$; для того чтобы это было законно с математической точки зрения, необходимо, естественно, показать, что эти приближенные значения стремятся к некоторому пределу, когда максимальный диаметр множеств V_i стремится к 0, что легко вытекает из равномерной непрерывности функции f на V (в предположении, что V компактно и точка b не принадлежит V).

Известно, что «метод исчерпывания» древних греков и «принцип Кавальери» для систематического вычисления площадей и объемов основаны на аналогичном процессе, состоящем в разбиении рассматриваемых площадей и объемов на «полосы». «Взвешенные суммы», к которым приходят таким путем, являются не чем иным, как интегралами $\int\limits_a^b f(x)dx$ (см. Исторический очерк к главам I—III «Функций действ. перем.»). Здесь снова существование предела «римановых сумм» следует из равномерной непрерывности функции f; это же условие влечет более общий факт: существование предела для аналогичных сумм $\sum\limits_i f(\xi_i)(g(x_{i+1}) - g(x_i))$ $(x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1})$, где предполагается лишь, что g — ограниченная и *возрастающая* на $[a, b]$ функция. Этот предел, обозначаемый через $\int\limits_a^b f(x)\,dg(x)$ и называемый *интегралом Стилтьеса* функции f относительно g, может рассматриваться как «взвешенная сумма» функции f относительно меры μ, определенной на множестве полуоткрытых интервалов $]\alpha, \beta]$ при помощи соотношения $\mu\ (]\alpha, \beta]) = g\ (\beta +) - g\ (\alpha +)$; он уже не так тесно связан с дифференциальным исчислением, как понятие обычного интеграла *). То же самое можно сказать о «двойных» и «тройных» классических интегралах, связанных соответственно с мерой площадей и объемов. Однако все эти понятия интеграла родственны между собой не только своим определением, но и тем, что «интеграл» $\mu\ (f)$ числовой функции f, непрерывной на некоторой компактной части K прямой, плоскости или трехмерного пространства, есть число, отнесенное элементу f пространства $\mathscr{C}(K)$ непрерывных на K функций; следовательно, $f \to \mu\ (f)$ есть отображение пространства $\mathscr{C}\ (K)$ в $\mathbf{R}$ (или, как часто говорят, «функционал»), которое 1° *линейно* (то есть $\mu\ (\alpha f + \beta g) = \alpha\mu\ (f) + \beta\mu\ (g)$ при любых скалярах α, β и любых непрерывных функциях f и g) *и* 2° *положительно* (то есть $\mu\ (f) \geqslant 0$ для любой непрерывной функции $f \geqslant 0$).

Примечательно, что, и обратно, этих двух свойств достаточно для характеристики интегралов Стилтьеса на интервале $[a, b]$ (теорема Ф. Рисса). А если так, то можно по значениям интеграла от непрерывных функций *восстановить* породившую его меру. Это приводит (если придерживаться интерпретации $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ как площади) к вычислению интеграла от *характеристической функции интервала*, если предположить его известным для непрерывных функций. Иными словами, речь идет о *продолжении* надлежащим образом функционала $\mu\ (f)$ на множество функций, содержащее $\mathscr{C}(K)$ и достаточно широкое, чтобы содержать также все характеристические функции интервала.

Есть несколько способов осуществления этого продолжения; один из наиболее интересных основан на понятии функционального пространства. Известно, что в пространстве $\mathbf{R}^n$ нормы $\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$ и $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$ определяют одинаковую топологию. А «переход от конечного к бесконечному» приводит к тому, что в пространстве $\mathscr{C}\ (K)$ функций, непрерывных на компактном

*) В частности, если взять в качестве g возрастающую и непрерывную справа *ступенчатую* функцию, то соответствующий интеграл Стилтьеса есть не что иное, как взвешенная сумма функции f для точечных масс $m_i = g\ (a_i +) - g\ (a_i -)$, расположенных в точках разрыва a_i функции g.

интервале $K = [a, b]$ прямой $\mathbf{R}$, рассматриваются нормы $\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|$ и $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx$ (или $\int_a^b |f|\, dg$, если речь идет об интеграле Стилтьеса). Однако здесь уже топологии, определяемые этими двумя нормами, будут различны, и пространство $\mathscr{C}(K)$, полное в первом случае (Общая топ., гл. X, § 2, теорема 1), не будет таковым во втором. Более точно, можно идентифицировать элементы *пополнения* $\mathscr{C}(K)$ для нормы $\|f\|_1$ с классами функций, не обязательно непрерывных, и тогда продолжение интеграла будет просто продолжением *по непрерывности* функционала $\mu(f)$, определенного на $\mathscr{C}(K)$, на пополнение этого пространства (технические подробности этого процесса изложены в гл. IV). Разумеется, мы предполагаем, что интеграл от непрерывных функций определен исходя из меры (посредством упоминаемых выше «римановых сумм»); для того чтобы получить теорему Рисса, необходимо действовать тем же способом, но только норму определять через $\mu(|f|)$, где $\mu(f)$ есть положительный линейный функционал, определенный на $\mathscr{C}(K)$.

Описанный выше метод продолжения не только приводит к теореме Рисса, но и позволяет, кроме того, определить интеграл для класса функций, «гораздо более разрывных», чем характеристические функции интервалов; рассматривая характеристические функции множеств, являющиеся функциями «интегрируемыми», мы можем распространить на такие множества меру, заданную первоначально для одних интервалов, положив $\mu(A) = \mu(\varphi_A)$; разумеется, это расширение сохраняет основные свойства аддитивности и положительности меры.

Все вышесказанное относится к интегралу Стилтьеса на прямой; однако метод продолжения сразу же распространяется на меры, определенные на плоскости или в пространстве, а также на кривых или поверхностях. Вообще, анализируя доказательства, можно заметить, что в действительности они справедливы для любого положительного линейного функционала, определенного на пространстве $\mathscr{K}(E)$ функций, непрерывных на любом *локально компактном пространстве* E и каждая из которых равна нулю вне некоторого компактного множества (зависящего от рассматриваемой функции).

Эта категория пространств, к которым, стало быть, применима теория интегрирования, естественно, содержит числовые пространства $\mathbf{R}^n$ и многообразия; она содержит также дискретные пространства (где теория интегрирования совпадает с теорией суммируемых семейств действительных чисел (Общая топ., гл. IV, § 7)), равно как и произведения (конечные и бесконечные) компактных пространств, тождественных интервалу прямой $\mathbf{R}$ или некоторому конечному множеству; в дальнейшем мы увидим, что теория меры на таких произведениях играет важную роль в теории вероятностей.

Расширение понятия меры на общие локально компактные пространства особенно плодотворно проявляется в *теории локально компактных групп*; вообще, понятие интеграла оказывается полезным орудием всякий раз, как в топологической алгебре возникает надобность «перехода от конечного к бесконечному», то есть обобщения чисто алгебраических процессов путем перехода от *конечных* сумм к случаю, когда «суммирование» должно распространяться на бесконечное число членов. Известно, например, что элементы *алгебры конечной группы* G (над $\mathbf{R}$) суть отображения $s \to \alpha(s)$ группы G в $\mathbf{R}$ с законом умножения $\alpha * \beta = \gamma$, где γ — функция, определенная равенством $\gamma(s) = \sum_{t \in G} \alpha(t) \beta(t^{-1}s)$. Естественным обобщением этой алгебры для произвольной локально компактной группы G является множество отображений G в $\mathbf{R}$, интегрируемое относительно некоторой специальной меры μ на G («мера Хаара»), причем умножение в алгебре задается формулой

$$(f * g)(s) = \int f(t) g(t^{-1}s) \, d\mu(t).$$

Впрочем, встав на этот путь, довольно скоро оказываются в затруднении из-за возможности «суммировать» лишь функции с действительными значениями; в большинстве случаев бывает полезно уметь определять интеграл от функции, определенной на E и принимающей значения в *топологическом векторном пространстве* над $\mathbf{R}$, например в банаховом пространстве или в пространстве операторов в банаховом пространстве. Выясняется, что это расширение можно легко произвести, не прибегая к глубоким изменениям в теории интегрирования.

В том, что было изложено выше, мы отдавали предпочтение *непрерывным* функциям; естественно задать вопрос: имеется ли на самом деле существенная зависимость между понятием меры и существованием топологии в том множестве E, на котором определена мера? Внимательное рассмотрение теории показывает, что этого нет и что методы продолжения так же хорошо применимы к положительному линейному функционалу $\mu(f)$, определенному на векторном пространстве $\mathscr{V}$ числовых функций, определенных на *произвольном* множестве E при выполнении некоторых дополнительных условий, наложенных на $\mathscr{V}$ и на $\mu(f)$; эти условия *автоматически* выполняются, когда $\mathscr{V}$ есть пространство $\mathscr{K}(E)$ непрерывных функций с компактным носителем, но они также выполняются и в случае, внешне более общем. Однако эта бóльшая общность кажущаяся: в самом деле, можно показать, что всякая «абстрактная мера» в некотором смысле «изоморфна» мере, определенной (исходя из непрерывных функций) на надлежащем локально компактном пространстве (гл. IV, § 4, упр. 10); с другой стороны, в громадном большинстве приложений речь идет о множествах E, наделенных топологией, естественным образом входящей в проблему; в редких же примерах, не принадлежащих к этой категории, часто бывает полезно ввести топологию, облегчающую исследование. Мы ограничились кратким указанием этой возможности обобщения в главе IV; в остальной части этой книги мы занимаемся исключительно мерами, определенными на локально компактных пространствах.

Первые две главы являются вводными в теорию: они посвящены доказательству неравенств, используемых для продолжения меры, и изучению некоторых упорядоченных векторных пространств — *пространств Рисса*, которые играют важную роль во многих дальнейших вопросах.

В главе III определено понятие меры на локально компактном пространстве; в качестве отправной точки мы взяли теорему Рисса, которая, таким образом, превратилась в определение; следовательно, интеграл от непрерывных функций определен *прежде* меры множеств, как положительный линейный функционал на $\mathscr{K}(E)$. Это изложение имеет некоторые технические преимущества (проистекающие из того факта, что непрерывные функции образуют векторное пространство, тогда как для характеристических функций множества этого уже нет); впрочем, во многих задачах интеграл естественно появляется в форме функционала, определенного на $\mathscr{K}(E)$. Наконец, разности двух положительных линейных функционалов на $\mathscr{K}(E)$ (которые мы снова назовем *мерами* на E) могут быть охарактеризованы как линейные формы на $\mathscr{K}(E)$, удовлетворяющие некоторым условиям *непрерывности*; таким образом, теория интегрирования переплетается, с одной стороны, с общей теорией двойственности в топологических векторных пространствах (ср. Топ. вект. пр-ва), а с другой стороны, с *теорией распределений*, которая обобщает некоторые стороны понятия меры и которую мы изложим в одной из следующих Книг.

Глава IV посвящена *продолжению* интеграла; в ней одновременно определяются интегрируемые функции и мера множеств, а также функциональные пространства L^p, столь важные в приложениях; здесь показано также, как введение понятия *измеримой функции* позволяет получить удобные признаки интегрируемости.

В следующих главах мы показываем, что измеримые функции проявляют себя, как «плотности», позволяя определить па пространстве E новые меры, исходя из заданной. Это исследование, которое, наряду с другими, приводит к важным результатам в теории двойственности пространств L^p, связано, с другой стороны, с понятием *векторной меры*, которую в наиболее благоприятных случаях можно ввести в теорию интегрирования функций с векторными значениями (относительно положительной меры).

Мы развиваем также то, что можно рассматривать как современное толкование идеи «разбиения на полосы» площадей и объемов, введенное создателями интегрального исчисления: при некоторых условиях мера на пространстве E может быть разбита на «сумму» мер, каждая из которых отнесена к «полосе» пространства E (то есть классу эквивалентности по некоторому отношению R); кроме того, такое разбиение позволяет вычислить интеграл от функции относительно первоначальной меры путем интегрирования сначала «по каждой полосе», а затем путем интегрирования (относительно соответствующей меры) полученной функции в фактор-пространстве E/R (обобщение «двойного суммирования» в сумме семейства, где индексы пробегают множество-произведение).

Наконец, последние две главы будут посвящены в основном изучению *меры Хаара* на локально компактной группе, меры, которая с точностью до множителя характеризуется свойством быть *инвариантной* при всяком сдвиге группы влево.

ГЛАВА I

НЕРАВЕНСТВА ВЫПУКЛОСТИ

1. *Основное неравенство выпуклости*

Пусть E — произвольное множество; пусть, далее, в векторном пространстве $\mathbf{R}^E$ всех *конечных* числовых функций, определенных на E, P означает множество всех числовых функций, положительных на E. С другой стороны, пусть M — определенная на P *конечная или бесконечная* числовая функция, принимающая положительные значения и такая, что:

1° $M(0) = 0$ и M *положительно однородна*, то есть для любого конечного действительного $\lambda > 0$ $M(\lambda f) = \lambda M(f)$;

2° M *возрастает* на P, то есть соотношение $f \leqslant g$ влечет $M(f) \leqslant M(g)$;

3° M *выпукла* на P, то есть (Топ. вект. пр-ва, гл. II, § 5) удовлетворяет соотношению $M(f+g) \leqslant M(f) + M(g)$.

Пример. Предположим, что E — конечное множество, например, интервал $[1, n]$ из $\mathbf{N}$, и обозначим через x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ координаты вектора $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$; тогда функции $M_1(\mathbf{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ и $M_\infty(\mathbf{x}) = \sup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i$ будут удовлетворять сформулированным выше условиям на множестве P векторов $\mathbf{x}$ с положительными координатами.

Замечания. 1) Условия 2° и 3° для M эквивалентны следующему: соотношение $h \leqslant f + g$ влечет $M(h) \leqslant M(f) + M(g)$.

2) Пусть S — *выпуклый конус* в P (то есть такое множество, что $S + S \subset S$ и $\lambda S \subset S$ при $\lambda > 0$; см. Топ. вект. пр-ва, гл. II, § 1); пусть M — конечная или бесконечная числовая функция с положительными значениями, определенная на S и удовлетворяющая на S вышеуказанным условиям 1°, 2° и 3°. Тогда можно продолжить M на все множество P так, чтобы продолженная функция (которую мы

снова обозначим через M) удовлетворяла тем же условиям: достаточно для всякой функции $f \in P$ положить $M(f) = +\infty$, если не найдется ни одной функции $g \in S$ такой, что $f \leqslant g$, и $M(f) = \inf\limits_{g \in S,\, f \leqslant g} M(g)$ в противном случае. Этот способ будет применен в главе IV, § 1, для определения *верхнего интеграла* от положительной функции.

Предложение 1. *Пусть* $\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ — *конечная числовая функция, определенная и непрерывная для* $t_i \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *и такая, что*:

1° *соотношения* $t_i > 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *влекут*

$$\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n) > 0;$$

2° *функция* φ *положительно однородна*;

3° *множество* $K \subset \mathbf{R}^n$, *определенное соотношениями* $t_i \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n) \geqslant 1$, *выпукло*.

Если при этих условиях n *функций* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *на* E *конечны, положительны и таковы, что* $M(f_i) < +\infty$ *для* $1 \leqslant i \leqslant n$, *то*

$$M(\varphi(f_1, f_2, \ldots, f_n)) \leqslant \varphi(M(f_1), M(f_2), \ldots, M(f_n)). \tag{1}$$

В самом деле, согласно теореме Хана — Банаха (Топ. вект. пр-ва, гл. II, § 3) K есть пересечение n полупространств $t_i \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и семейства замкнутых полупространств $(U_\iota)_{\iota \in I}$, где U_ι определено соотношением вида

$$\alpha_{\iota 1} t_1 + \alpha_{\iota 2} t_2 + \ldots + \alpha_{\iota n} t_n - \beta_\iota \geqslant 0, \tag{2}$$

в котором не все $\alpha_{\iota k}$ равны нулю. По условию, если $t = (t_i)$ таково, что $t_i > 0$ для $1 \leqslant i \leqslant n$, то $\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n) > 0$, и значит, найдется такое $\lambda_0 > 0$, что соотношение $\lambda \geqslant \lambda_0$ влечет $\lambda t \in K$; это показывает, что для каждого $\iota \in I$ соотношения $t_i \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ влекут $\alpha_{\iota 1} t_1 + \ldots + \alpha_{\iota n} t_n \geqslant 0$ и, стало быть, что $\alpha_{\iota k} \geqslant 0$ для $1 \leqslant k \leqslant n$; тогда легко видеть, что K есть также пересечение полупространств $t_i \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и тех U_ι, у которых $\beta_\iota \geqslant 0$; кроме того, поскольку начало не принадлежит K, то существует по крайней мере один индекс ι, при котором $\beta_\iota > 0$.

Обозначим через C выпуклый конус в $\mathbf{R}^{n+1}$, определенный соотношениями $t_i \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n+1)$, $t_{n+1} \leqslant \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ (замыкание выпуклого конуса, порожденного в $\mathbf{R}^{n+1}$ выпуклым множеством $K \times \{1\}$); очевидно, что C определяется также соотношениями $t_i \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n+1)$ и

$$\beta_\iota t_{n+1} \leqslant \alpha_{\iota 1} t_1 + \ldots + \alpha_{\iota n} t_n \qquad (\iota \in I,\ \beta_\iota \geqslant 0). \tag{3}$$

Следовательно, для любого $x \in E$ имеем

$$\beta_\iota \varphi(f_1(x), \ldots, f_n(x)) \leqslant \alpha_{\iota 1} f_1(x) + \ldots + \alpha_{\iota n} f_n(x) \qquad (4)$$

при любом $\iota \in I$. Для любого индекса ι, для которого $\beta_\iota > 0$, из (4) и из условий, наложенных на M, вытекает, что $M(\varphi(f_1, f_2, \ldots, f_n))$ конечно и что

$$\beta_\iota M(\varphi(f_1, f_2, \ldots, f_n)) \leqslant \alpha_{\iota 1} M(f_1) + \alpha_{\iota 2} M(f_2) + \ldots + \alpha_{\iota n} M(f_n),$$

и это соотношение, очевидно, выполняется также для $\beta_\iota = 0$. Таким образом, мы получаем, что точка с координатами $M(f_1)$, $M(f_2), \ldots, M(f_n)$, $M(\varphi(f_1, \ldots, f_n))$, принадлежит C, что и доказывает предложение.

2. *Неравенства Гёльдера и Минковского*

В этом и в следующем пунктах E и P будут обозначать то же, что и в n° 1, а через M будет обозначаться функция, определенная на P и удовлетворяющая условиям, перечисленным в n° 1.

Предложение 2. *Пусть α и β — такие два числа, что $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $\alpha + \beta = 1$. Если f и g — конечные положительные функции, определенные на E, и если $M(f)$ и $M(g)$ конечны, то*

$$M(f^\alpha g^\beta) \leqslant (M(f))^\alpha (M(g))^\beta \qquad (5)$$

(*неравенство Гёльдера*).

В силу предложения 1 все сводится к доказательству того, что в $\mathbf{R}^2$ множество, определенное соотношениями $t_1 \geqslant 0$, $t_2 \geqslant 0$, $t_1^\alpha t_2^\beta \geqslant 1$, выпукло или (Функции действ. перем., гл. I, § 4) что функция $u(t) = t^{-\frac{\alpha}{\beta}}$ выпукла для $0 < t < +\infty$. Но положив $r = \frac{\alpha}{\beta}$, получаем, что $D^2 u(t) = r(r+1) t^{-r-2}$, а так как $r > 0$, то $D^2 u(t) > 0$ на $]0, +\infty[$, что и доказывает предложение (Функции действ. перем., гл. I, § 4, следствие из предл. 8).

Следствие. *Пусть $\alpha_i > 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — n чисел, для которых $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, $f_i \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — n конечных функций, определенных на E и таких, что $M(f_i)$ конечно для $1 \leqslant i \leqslant n$. При этих условиях*

$$M(f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \ldots f_n^{\alpha_n}) \leqslant (M(f_1))^{\alpha_1} (M(f_2))^{\alpha_2} \ldots (M(f_n))^{\alpha_n}. \qquad (6)$$

Достаточно провести индукцию по n, применяя неравенство (5) к числам $\alpha=\alpha_1$ и $\beta=\sum_{i=2}^{n}\alpha_i$ и к функциям $f=f_1$, $g=(f_2^{\alpha_2}f_3^{\alpha_3}\ldots f_n^{\alpha_n})^{\frac{1}{\beta}}$.

Предложение 3. *Пусть p — конечное число, $p\geqslant 1$. Если f и g — конечные положительные функции, определенные на E, то*

$$(M((f+g)^p))^{\frac{1}{p}}\leqslant (M(f^p))^{\frac{1}{p}}+(M(g^p))^{\frac{1}{p}} \tag{7}$$

(*неравенство Минковского*).

Можно ограничиться случаем, когда $M(f^p)$ и $M(g^p)$ конечны. В силу предложения 1 все сводится к доказательству того, что в $\mathbf{R}^2$ множество, определенное условиями $t_1\geqslant 0$, $t_2\geqslant 0$, $t_1^{\frac{1}{p}}+t_2^{\frac{1}{p}}\geqslant 1$, выпукло или что функция $u(t)=(1-t^{\frac{1}{p}})^p$ выпукла для $0\leqslant t\leqslant 1$. Но $D^2u(t)=\left(1-\frac{1}{p}\right)t^{\frac{1}{p}-2}(1-t^{\frac{1}{p}})^{p-2}\geqslant 0$ для $0<t\leqslant 1$, откуда следует предложение.

3. Полунормы N_p

Пусть p — конечное действительное число, $p\geqslant 1$, и пусть $\mathcal{F}^p(E, M)$ — множество конечных числовых функций f, определенных на E и таких, что $M(|f|^p)$ *конечно*. Очевидно, что если функция g принадлежит $\mathcal{F}^p(E, M)$ и $|f|\leqslant|g|$, то f тоже принадлежит $\mathcal{F}^p(E, M)$; это замечание в сочетании с неравенством Минковского показывает, что сумма двух функций из $\mathcal{F}^p(E, M)$ снова принадлежит этому множеству; стало быть, принимая во внимание тот факт, что M положительно однородна, мы видим, что $\mathcal{F}^p(E, M)$ есть *векторное подпространство* пространства $\mathbf{R}^E$ всех конечных числовых функций, определенных на E.

Для любого числа $p>0$ и любой конечной числовой функции f, определенной на E, положим $N_p(f)=(M(|f|^p))^{\frac{1}{p}}$; тогда $N_p(\lambda f)=|\lambda|N_p(f)$ для любого скаляра λ; кроме того, если $p\geqslant 1$, то согласно (7) справедливо неравенство

$$N_p(f+g)\leqslant N_p(f)+N_p(g), \tag{8}$$

показывающее, что N_p есть *полунорма* на векторном пространстве $\mathcal{F}^p(E, M)$ (Топ. вект. пр-ва, гл. II, § 5).

Предложение 4. *Пусть* $p>0$ *и* $q>0$ — *конечные числа, и пусть* $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$. *Тогда для любых конечных числовых функций* f *и* g, *определенных на* E, *выполняется неравенство*

$$N_r(fg)\leqslant N_p(f)\,N_q(g), \tag{9}$$

если $N_p(f)$ *и* $N_q(g)$ *конечны.*

В самом деле, неравенство (9) можно записать в виде

$$M(|f|^r|g|^r)\leqslant(M(|f|^p))^{\frac{r}{p}}(M(|g|^q))^{\frac{r}{q}},$$

а это есть не что иное, как неравенство Гёльдера (5), примененное к числам $\alpha=\frac{r}{p}$ и $\beta=\frac{r}{q}$ и к функциям $|f|^p$ и $|g|^q$.

Следствие. *Предположим, что* $M(1)=1$; *тогда для любой конечной числовой функции* f, *определенной на* E, *отображение* $p\to N_p(f)$ *возрастает на* $]0, +\infty[$.

В самом деле, применив неравенство (9) к случаю $g=1$, получим, что $N_r(f)\leqslant N_p(f)$ при любом $q>0$; а так как число r, определенное равенством $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$, пробегает множество значений $0<r<p$, когда q пробегает множество строго положительных значений, то следствие доказано.

Предложение 5. *Для любой конечной числовой функции* f, *определенной на* E, *множество* I *значений* $\frac{1}{p}$ $(p>0)$, *для которых* $N_p(f)$ *конечно, либо пусто, либо составляет интервал; если* I *не сводится к точке, то отображение* $\frac{1}{p}\to\log N_p(f)$ *либо выпукло на* I, *либо равно* $-\infty$ *внутри* I.

Пусть $r>0$ и $s>0$ такие не равные между собой числа, что $\frac{1}{r}$ и $\frac{1}{s}$ принадлежат I; все сводится к доказательству того, что если $\frac{1}{p}=\frac{t}{r}+\frac{1-t}{s}$, где $0<t<1$, то

$$\log N_p(f)\leqslant t\log N_r(f)+(1-t)\log N_s(f), \tag{10}$$

или, что то же самое, к доказательству неравенства

$$N_p(f)\leqslant(N_r(f))^t(N_s(f))^{1-t}, \tag{11}$$

которое, согласно определению N_p, может быть записано как

$$M(|f|^p) \leqslant (M(|f|^r))^{\frac{tp}{r}} (M(|f|^s))^{\frac{(1-t)p}{s}}. \tag{12}$$

Если положить $\alpha = \frac{tp}{r}$, то в силу соотношения, определяющего p как функцию от t, r, s, имеем $1-\alpha = \frac{(1-t)p}{s}$, откуда $p = \alpha r + (1+\alpha) s$. Но из неравенства Гёльдера следует соотношение

$$M(|f|^{r\alpha} |f|^{s(1-\alpha)}) \leqslant (M(|f|^r))^\alpha (M(|f|^s))^{1-\alpha},$$

которое и является неравенством (12).

Упражнения. 1) Показать, в предположениях n°1, что множество функций, ограниченных на E и таких, что $M(|f|)$ конечно, есть подалгебра A алгебры $\mathbf{R}^E$ и что множество функций, ограниченных на E и таких, что $M(|f|) = 0$, есть идеал в A. Показать, что если при этом $M(1)$ конечно, то отображение $f \to M(f)$ непрерывно при условии, что множество A наделено топологией равномерной сходимости на E.

2) Пусть E — интервал $[0, +\infty]$ из $\mathbf{R}$, S — выпуклый конус, образованный функциями, определенными на E и такими, что $0 \leqslant f(x) \leqslant kx$ на E (для конечного числа $k > 0$, зависящего от f). Положим $M(f) = 0$ для $f \in S$ и $M(f) = +\infty$ для всякой положительной функции f, определенной на E и не принадлежащей S. Показать, что M удовлетворяет условиям n° 1 и что $M(x) = 0$ и $M(x^r) = +\infty$ для любого числа $r > 0$, отличного от 1.

3) Привести пример, где множество E состоит из двух элементов, $N_p(\mathbf{x})$ конечно при любом $p > 0$ и любом $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$, но где существуют такие значения p, для которых отображение $p \to N_p(\mathbf{x})$ не дифференцируемо.

4) Вывести неравенство (6) из неравенства среднего геометрического $z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \ldots z_n^{\alpha_n} \leqslant \alpha_1 z_1 + \ldots + \alpha_n z_n$ (где $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$) (свести к случаю, когда $M(f_i) = 1$ для $1 \leqslant i \leqslant n$).

5) Пусть α — действительное число, $\alpha > 1$, и пусть $\beta = 1 - \alpha < 0$. Пусть, далее, g — конечная функция, определенная на E и такая, что $g(x) > 0$ для всех $x \in E$ и что $M(g) > 0$; показать, что для любой конечной положительной функции f, определенной на E и такой, что $M(f)$ конечно, выполняется неравенство

$$M(f^\alpha g^\beta) \geqslant (M(f))^\alpha (M(g))^\beta$$

(применить надлежащим образом неравенство Гёльдера).

6) Вывести неравенство Минковского из неравенства Гёльдера (оценить сверху $M(f(f+g)^{p-1})$ при помощи неравенства Гёльдера). Точно так же, если $M(f+g)=M(f)+M(g)$ для любой пары функций $f\geqslant 0$ и $g\geqslant 0$ на E, то вывести из упр. 5 неравенство

$$(M((f+g)^p))^{\frac{1}{p}}\geqslant (M(f^p))^{\frac{1}{p}}+(M(g^p))^{\frac{1}{p}}$$

для следующих случаев: a) $0<p<1$, $f\geqslant 0$ и $g\geqslant 0$ — конечные положительные функции, определенные на E и такие, что $f(x)+g(x)>0$ для всех $x\in E$, а $M(f^p)$ и $M(g^p)$ конечны; b) $p<0$, f и g — конечные функции, определенные на E и такие, что $f(x)>0$ и $g(x)>0$ для всех $x\in E$, что $M(f^p)$ и $M(g^p)$ конечны, а $M((f+g)^p)>0$.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК

(Римские цифры отсылают к библиографии, помещенной в конце этого очерка.)

Понятия среднего арифметического и среднего геометрического двух положительных чисел восходят к античной древности, и пифагорейцы отдавали им особое предпочтение. Вполне вероятно также, что неравенство $\sqrt{ab} \leqslant \frac{1}{2}(a+b)$ между этими средними было им хорошо известно; во всяком случае оно доказано Евклидом в связи с задачей об отыскании максимума произведения двух чисел с заданной суммой. В качестве следующего этапа следует, по-видимому, указать позднюю дату — 1729 г., когда мы находим явно упоминаемое Маклореном обобщение этой задачи на n чисел и соответствующее неравенство (хотя гораздо более трудные задачи на экстремум рассматривались задолго до того).

Начиная с конца XVIII века в анализе и в геометрии появляются другие аналогичные неравенства. Так, в 1789 г. Люилье решает геометрическую задачу на максимум, которая связана с неравенством

$$\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2+\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k^2+b_k^2},$$

в 1821 году Коши доказывает частный случай

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

неравенства Гёльдера; Буняковский в 1859 г. и Шварц в 1885 г. распространяют неравенство Коши на интегралы.

И только перед самым концом XIX века неравенства выпуклости сделались объектом систематического исследования. В 1888 г. (I) Гёльдер привлекает к рассмотрению этого вопроса выпуклые функции одного переменного: так, исходя из вогнутости функции $\log x$, он получает неравенство среднего геометрического; применяя ту же идею к функции x^r, он доказывает неравенство, носящее его имя и уже найденное годом раньше Л. Ж. Роджерсом на основе неравенства среднего геометрического (см. упр. 4). Что же касается неравенства Минковского, то оно было доказано последним в 1896 году (для конечных сумм) в связи с его известными работами по «Геометрии чисел» ((II), стр. 115—117); но, в то время как идея выпуклости (для функций любого числа переменных) есть одна из основных идей этого труда, довольно странно, что Минковский не заметил, что его неравенство получается методом Гёльдера, примененным к $(1+x^r)^{1/r}$ (он ограничивается применением классических методов исследования экстремума средствами исчисления бесконечно малых).

Для более глубокого изучения неравенств выпуклости и их приложений читатель может обратиться к книге Харди, Литтльвуда и Полиа, посвященной этому вопросу и содержащей также очень полную библиографию (III).

БИБЛИОГРАФИЯ

(I) O. Hölder, Ueber einen Mittelwertsats, Göttingener Nachrichten (1889), стр. 38—47.

(II) H. Minkowski, Geometrie der Zahlen, 2-е изд., Leipzig — Berlin (Teubner), 1910.

(III) Г. Г. Харди, Д. Е. Литтльвуд, Г. Полиа, Неравенства, ИЛ, Москва, 1948.

ГЛАВА II

ПРОСТРАНСТВА РИССА

§ 1. Пространства Рисса и вполне решеточные пространства

1. Определение пространств Рисса

Напомним, что определенные во множестве E структура векторного пространства над полем $\mathbf{R}$ и структура порядка называются согласованными, если они удовлетворяют следующим двум аксиомам:

($\mathrm{EO_I}$) *Отношение* $x \leqslant y$ *влечет* $x + z \leqslant y + z$ *для любого* $z \in E$.

($\mathrm{EO_{II}}$) *Отношение* $x \geqslant 0$ *влечет* $\lambda x \geqslant 0$ *для любого скаляра* $\lambda > 0$.

Пространство E, наделенное этими двумя структурами, называется *упорядоченным векторным пространством* (Топ. вект. пр-ва, гл. II, § 1).

Аксиома ($\mathrm{EO_I}$) означает, что структура порядка в E согласуется со структурой аддитивной группы или что E, наделенное этими двумя структурами, является *упорядоченной группой* (Алгебра, гл. VI, § 1).

Аксиома ($\mathrm{EO_I}$) влечет тот факт, что отношения $x \leqslant y$ и $x + z \leqslant y + z$ равносильны. Точно так же из ($\mathrm{EO_{II}}$) вытекает, что для любого скаляра $\lambda > 0$ отношения $x \leqslant y$ и $\lambda x \leqslant \lambda y$ равносильны, ибо $\lambda^{-1} > 0$, и значит, отношение $\lambda x \leqslant \lambda y$ влечет $\lambda^{-1}(\lambda x) \leqslant \lambda^{-1}(\lambda y)$. Следовательно, можно сказать, что в упорядоченном векторном пространстве сдвиг (перенос) и гомотетия со строго положительным коэффициентом являются автоморфизмами структуры порядка; этот факт можно еще выразить, сказав, что порядок *инвариантен* относительно любого сдвига и любой гомотетии со строго положительным коэффициентом. Кроме того, симметрия $x \to -x$ есть изоморфизм структуры порядка в E в структуру *противоположного* порядка.

Определение 1. *Говорят, что упорядоченное векторное пространство есть пространство Рисса, если его структура порядка есть структура решетки* (то есть если всякая пара элементов x, y из E имеет верхнюю грань $\sup(x, y)$ и нижнюю грань $\inf(x, y)$).

Пример. Пространство $\mathbf{R}^A$ всех (конечных числовых) функций, определенных на произвольном множестве A, есть пространство Рисса (с отношением порядка «$x(t) \leqslant y(t)$ для любого $t \in A$»); в самом деле, любые две числовые функции x, y, определенные на A, имеют верхнюю (соотв. нижнюю) грань, равную отображению $t \to \sup(x(t), y(t))$ (соотв. отображению $t \to \inf(x(t), y(t))$).

Можно также сказать, что пространство Рисса есть векторное пространство E, наделенное такой структурой порядка, что, с одной стороны, эта структура и структура аддитивной группы пространства E определяют в E структуру *решеточно-упорядоченной группы* (Алгебра, гл. VI § 1), а с другой стороны, выполняется аксиома $(\mathrm{EO_{II}})$.

Следовательно, к пространствам Рисса применимы все свойства решеточно-упорядоченных групп; мы напомним основные из них (ср. Алгебра, гл. VI, § 1), указав также следствия, которые вытекают из аксиомы $(\mathrm{EO_{II}})$.

Прежде всего напомним обозначения:

$$x^+ = \sup(x, 0), \quad x^- = (-x)^+ = \sup(-x, 0), \quad |x| = \sup(x, -x);$$

имеем: $x = x^+ - x^-$ и $|x| = x^+ + x^-$; эти два соотношения равносильны следующим: $x^+ = \frac{1}{2}(|x| + x)$, $x^- = \frac{1}{2}(|x| - x)$. Отношение $x \leqslant y$ равносильно отношению «$x^+ \leqslant y^+$ и $x^- \geqslant y^-$». Для любых x и y выполняется *неравенство треугольника*

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|. \tag{1}$$

В силу инвариантности порядка относительно гомотетии со строго положительным коэффициентом, имеем

$$\sup(\lambda x, \lambda y) = \lambda \sup(x, y) \text{ для любого } \lambda \geqslant 0. \tag{2}$$

В частности,

$$(\lambda x)^+ = \lambda x^+, \quad (\lambda x)^- = \lambda x^- \text{ для любого } \lambda \geqslant 0. \tag{3}$$

Напротив, для $\lambda < 0$ имеем $(\lambda x)^+ = (-\lambda x)^- = |\lambda| x^-$ и $(\lambda x)^- = (-\lambda x)^+ = |\lambda| x^+$; из этого заключаем, что для любого $\lambda \in \mathbf{R}$

и любого $x \in E$

$$|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|. \tag{4}$$

Инвариантность порядка относительно сдвига показывает, что при любом $z \in E$

$$\sup(x+z, y+z) = z + \sup(x, y), \tag{5}$$

откуда, в частности, следует, что

$$\sup(x, y) = x + (y-x)^+ = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|). \tag{6}$$

Имеют место соотношения

$$\inf(x, y) = -\sup(-x, -y), \tag{7}$$

$$\sup(x, y) + \inf(x, y) = x + y. \tag{8}$$

Если $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, то *)

$$\inf(x+y+z) \leqslant \inf(x, z) + \inf(y, z). \tag{9}$$

Если A и B — два подмножества множества E, каждое из которых имеет верхнюю грань, то $A+B$ тоже имеет верхнюю грань и

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B. \tag{10}$$

Два элемента x, y из E называются *независимыми*, если $\inf(|x|, |y|) = 0$; на основании формулы (8) это соотношение эквивалентно равенству $\sup(|x|, |y|) = |x| + |y|$, а также, в силу (6), равенству $||x| - |y|| = |x| + |y|$; 0 есть единственный элемент, независимый с самим собой; для любого $x \in E$ x^+ и x^- независимы и могут быть охарактеризованы как единственные независимые элементы $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, для которых $x = y - z$. Если элемент y независим с x, то всякий элемент $z \in E$, удовлетворяющий условию $|z| \leqslant |y|$, независим с x. Если y и z независимы с x, то этим свойством, в силу неравенства (9), обладает и элемент $|y| + |z|$; в частности, $n|y|$ независим с x при любом целом $n > 0$, из чего следует, что λy независим с x при любом скаляре λ, так

*) Напомним вкратце доказательство этого неравенства. Если положить $u = \inf(x+y, z)$, то $u \leqslant x+y$ и $u \leqslant z$, а так как $x \geqslant 0$, то и $u \leqslant x+z$, откуда $u \leqslant \inf(x+y, x+z) = x + \inf(y, z)$; с другой стороны, из неравенства $\inf(y, z) \geqslant 0$ получаем также $u \leqslant z + \inf(y, z)$, откуда окончательно следует, что

$$u \leqslant \inf(x + \inf(y, z),\ z + \inf(y, z)) = \inf(x, z) + \inf(y, z).$$

как существует такое целое n, что $|\lambda| \leqslant n$, откуда $|\lambda y| \leqslant n\,|y|$. Если множество $A \subset E$ состоит из элементов, независимых с x, и если A имеет верхнюю грань, то эта верхняя грань снова независима с x *).

И, наконец, *лемма о разбиении*:

Если $(x_i)_{i \in I}$, $(y_j)_{j \in J}$ — две конечные последовательности положительных элементов из E и $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{j \in J} y_j$, то в E найдется такая конечная последовательность $(z_{ij})_{(i,\, j) \in I \times J}$ положительных элементов, что $x_i = \sum_{j \in J} z_{ij}$ для любого $i \in I$ и $y_j = \sum_{i \in J} z_{ij}$ для любого $j \in J$.

Напомним вкратце доказательство этого результата. При помощи индукции по числу элементов в I и в J все сводится к случаю, когда I и J совпадают с множеством $\{1, 2\}$ из двух элементов. Пусть, следовательно, $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$, где $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $y_1 \geqslant 0$, $y_2 \geqslant 0$; положим $z_{11} = \inf(x_1, y_1)$, $x_1 = z_{11} + z_{12}$, $y_1 = z_{11} + z_{21}$; тогда $z_{11} \geqslant 0$, $z_{12} \geqslant 0$, $z_{21} \geqslant 0$ и, в силу (5) и (7), $\inf(z_{12}, z_{21}) = 0$. Кроме того, $z_{12} + x_2 = z_{21} + y_2$; остается показать, что $z_{22} = x_2 - z_{21} = y_2 - z_{12} \geqslant 0$. Но

$$z_{21} \leqslant z_{12} + x_2,$$

и значит, в силу (9)

$$z_{21} = \inf(z_{21}, z_{12} + x_2) \leqslant \inf(z_{21}, z_{12}) + \inf(z_{21}, x_2),$$

а поскольку $\inf(z_{21}, z_{12}) = 0$, то отсюда следует, что $z_{21} \leqslant \inf(z_{21}, x_2)$, и стало быть, $z_{21} \leqslant x_2$, что и завершает доказательство.

2. *Порождение пространства Рисса его положительными элементами*

Пусть E — упорядоченное векторное пространство; множество P положительных элементов из E составляет *выпуклый конус* с вершиной 0, то есть (Топ. вект. пр-ва, гл. II, § 1) такое множество, что $P + P \subset P$ и $\lambda P \subset P$ при любом $\lambda > 0$. Обратно, если в топологическом векторном пространстве E над полем $\mathbf{R}$ выпуклый конус P с вершиной 0 таков, что $P \cap (-P) = \{0\}$, то известно

*) Напомним доказательство этого свойства. Можно ограничиться случаем, когда и x, и элементы из A положительны. Пусть $b = \sup A$; по условию для любого $y \in A$ имеем $\inf(x, y) = 0$, откуда $\sup(x, y) = x + y$; из этого выводим, что $\sup(x, b) = \sup(x, \sup_{y \in A} y) = \sup_{y \in A}(\sup(x, y)) = \sup_{y \in A}(x + y) = x + \sup_{y \in A} y = x + b$, чем и доказано равенство $\inf(x, b) = 0$.

(там же), что отношение $y - x \in P$ есть отношение порядка (записываемое $x \leqslant y$), согласующееся со структурой векторного пространства в E. Для того чтобы определенная таким образом в E структура порядка определяла структуру *пространства Рисса*, необходимо и достаточно, чтобы:

1° P порождало E, то есть чтобы любой элемент $z \in E$ был представим в виде $y - x$, где x и y принадлежат P;

2° P удовлетворяло одному из следующих двух условий:

a) любые два элемента из P имеют в P верхнюю грань;

b) любые два элемента из P имеют в P нижнюю грань (Алгебра, гл. VI, § 1).

3. Вполне решеточные пространства

Определение 2. *Говорят, что пространство Рисса E вполне решеточно, если всякая его непустая мажорированная часть имеет в E верхнюю грань.*

Очевидно, что всякая непустая минорированная часть вполне решеточного пространства E имеет в E нижнюю грань.

Примеры. 1) Если A есть произвольное множество, то пространство $\mathbf{R}^A$ числовых функций, определенных на A, вполне решеточно и верхняя грань в $\mathbf{R}^A$ мажорированного семейства функций есть его *верхняя огибающая* (Общая топ. гл. IV, § 5).

2) Пусть F — произвольное множество; пространство $\mathscr{B}$ (F-*ограниченных* на F числовых функций, наделенное структурой порядка, индуцированной структурой пространства $\mathbf{R}^A$, вполне решеточно. Напротив, если F есть топологическое пространство, то пространство $\mathscr{C}(F)$ числовых функций, *непрерывных* на F (наделенное структурой порядка, индуцированной структурой пространства $\mathbf{R}^F$), есть пространство Рисса, которое, вообще говоря, не является вполне решеточным (ср. упр. 13). Рассмотрим, например, случай, когда $F = \mathbf{R}$; пусть I есть интервал $]0, 1[$, φ_I — характеристическая функция интервала I, и пусть H есть множество таких непрерывных функций $x(t)$, что $x \leqslant \varphi_I$; ясно, что H мажорировано в $\mathscr{C}(F)$. Функция φ_I есть *верхняя огибающая* для функций $x \in H$, но не является их верхней гранью в $\mathscr{C}(F)$, поскольку φ_I полунепрерывна снизу, а не непрерывна. Покажем, что на самом деле H не имеет в $\mathscr{C}(F)$ верхней грани; достаточно показать, что для любой непрерывной функции u, удовлетворяющей условию $u \geqslant \varphi_I$, найдется такая непрерывная функция $v \neq u$, что $u \geqslant v \geqslant \varphi_I$. Но $u(0) \geqslant 1$, и, значит, существует такое число $\alpha > 0$, что $u(t) > 0$ для $-\alpha \leqslant t \leqslant 0$; если w есть непрерывная

функция, равная нулю вне интервала $]-\alpha, 0[$ и такая, что $0 < w(t) < u(t)$ на самом интервале, то функция $v = u - w$ является искомой.

Предложение 1. *Для того чтобы упорядоченное векторное пространство E было вполне решеточным, необходимо и достаточно, чтобы E было пространством Рисса и удовлетворяло одному из следующих двух условий:*

a) *всякое непустое множество A положительных элементов из E, мажорированное и фильтрующееся по отношению $\leqslant$, имеет в E верхнюю грань;*

b) *всякое непустое множество A положительных элементов из E, фильтрующееся по отношению $\geqslant$, имеет в E нижнюю грань.*

Необходимость условий очевидна. Обратно, предположим, что E — пространство Рисса, удовлетворяющее условию a). Пусть B — непустая мажорированная часть пространства E; множество C верхних граней конечных множеств из B фильтруется по отношению $\leqslant$; пусть a — один из элементов множества C и C_a — множество тех $x \in C$, которые удовлетворяют условию $x \geqslant a$; если мы покажем, что C_a имеет верхнюю грань, то эта грань будет также и верхней гранью множества B. Но $C_a - a$ есть множество положительных элементов, мажорированное и фильтрующееся по отношению $\leqslant$; следовательно, оно имеет верхнюю грань b, и, стало быть, $a + b$ есть верхняя грань множества C_a.

С другой стороны, условие b) влечет a): в самом деле, если F есть непустое множество положительных элементов из E, мажорированное и фильтрующееся по отношению $\leqslant$, и если c есть некоторая мажоранта множества F, то $c - F$ есть множество положительных элементов, фильтрующееся по отношению $\geqslant$, и если оно имеет нижнюю грань m, то $c - m$ служит верхней гранью для F.

4. Подпространства и произведения вполне решеточных пространств

Пусть E — вполне решеточное пространство и H — его векторное подпространство. Структура порядка, индуцированная в H структурой пространства E, согласуется со структурой векторного пространства H, но определенное таким образом упорядоченное векторное пространство H *может и не быть вполне решеточным пространством.*

Точнее, может оказаться, что H не будет пространством Рисса (упр. 2) или что H будет пространством Рисса, но не будет вполне решеточным; в последнем случае примером может служить подпространство $\mathscr{C}(\mathbf{R})$ пространства $\mathscr{B}(\mathbf{R})$ (n° 3, пример 2).

Кроме того, если H есть пространство Рисса (вполне решеточное или нет), то может случиться, что верхняя грань в H двух элементов из H отлична от их верхней грани в E (упр. 3). Наконец, возможно, что H будет вполне решеточным, что верхние грани всякого *конечного* множества из H будут одни и те же в E и в H, но в H будут существовать *бесконечные* множества, мажорированные в H и имеющие верхние грани, различные в E и в H (упр. 13f)).

Пусть $(E_\iota)_{\iota \in I}$ — произвольное семейство упорядоченных векторных пространств. Напомним, что в пространстве-произведении $E = \prod_{\iota \in I} E_\iota$ отношение порядка, порожденное отношениями порядка пространств-сомножителей, есть отношение «для любого $\iota \in I$ $x_\iota \leqslant y_\iota$» (Теор. мн., гл. III). Легко видеть, что это отношение согласуется со структурой векторного пространства в E; пространство E, наделенное этой структурой, называется *произведением* упорядоченных пространств E_ι.

Предложение 2. *Пусть $(E_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство упорядоченных векторных пространств. Для того чтобы пространство-произведение $E = \prod_{\iota \in I} E_\iota$ было пространством Рисса* (соотв. *вполне решеточным пространством*), *необходимо и достаточно, чтобы каждое из пространств E_ι было пространством Рисса* (соотв. *вполне решеточным пространством*).

Ограничимся рассмотрением случая вполне решеточных пространств. Предположим, что все E_ι вполне решеточны; пусть A — непустое мажорированное множество из E, $a = (a_\iota)$ — какая-нибудь мажоранта множества A. Для любого $\iota \in I$ множество $\mathrm{pr}_\iota A$ мажорировано элементом a_ι и, значит, имеет в E_ι верхнюю грань b_ι; ясно, что $b = (b_\iota)$ есть верхняя грань множества A в E.

Обратно, предположим, что E вполне решеточно. Пусть $A_\varkappa$ — мажорированное множество из $E_\varkappa$ и $A'_\varkappa$ — множество из E, состоящее из таких $x = (x_\iota)$, что $x_\varkappa \in A_\varkappa$ и $x_\varkappa = 0$ для $\iota \neq \varkappa$. Легко видеть, что $A_\varkappa$ мажорировано в E и, значит, имеет верхнюю грань $b = (b_\iota)$; согласно определению отношения порядка для произведения, $b_\iota = 0$ для $\iota \neq \varkappa$, а $b_\varkappa$ является верхней гранью множества $A_\varkappa$, что и завершает доказательство.

Определение 3. *Пусть E — упорядоченное векторное пространство, а V и W — два его дополнительных векторных подпространства. Говорят, что E есть упорядоченная прямая сумма пространств V и W, если каноническое отображение $(x, y) \to x + y$ упорядоченного векторного пространства $V \times W$ на упорядоченное векторное пространство E есть изоморфизм.*

Предложение 3. *Для того чтобы упорядоченное векторное пространство E было упорядоченной прямой суммой двух дополнительных подпространств V и W, необходимо и достаточно, чтобы соотношения $x \in V$, $y \in W$, $x + y \geqslant 0$ влекли $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$.*

В самом деле, поскольку в E отношения $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ влекут $x + y \geqslant 0$, то сформулированное выше условие есть выражение того, что отображение $(x, y) \to x + y$ преобразует множество положительных элементов пространства $V \times W$ в множество положительных элементов из E.

5. *Полосы во вполне решеточном пространстве*

Определение 4. *Говорят, что векторное подпространство B вполне решеточного пространства E есть полоса, если оно удовлетворяет следующим условиям:*

1) *отношения $x \in B$, $y \in E$ и $|y| \leqslant |x|$ влекут $y \in B$;*

2) *для любой непустой части X пространства B, мажорированной в E, верхняя грань $\sup X$ множества X в E принадлежит B.*

Пример. В пространстве $\mathbf{R}^A$ конечных числовых функций, определенных на множестве A, множество функций, равных нулю во всех точках некоторой части M множества A, есть полоса.

Замечание. В пространстве $\mathbf{R}^A$ подпространство $\mathscr{B}(A)$ числовых функций, ограниченных на A, удовлетворяет условию 1) определения 4; кроме того, для всякого множества X из $\mathscr{B}(A)$, мажорированного в $\mathscr{B}(A)$, верхняя огибающая множества X принадлежит $\mathscr{B}(A)$. Однако если A бесконечно, то множество из $\mathscr{B}(A)$

может оказаться *мажорированным в* $\mathbf{R}^A$, *не будучи мажорированным в* $\mathscr{B}(A)$, и значит, $\mathscr{B}(A)$ не является полосой в $\mathbf{R}^A$.

Из определения 4 сразу же вытекает, что если B есть полоса в E, то для любого непустого множества X из B, минорированного в E, $\inf X$ принадлежит B. Всякая полоса B в E, наделенная структурой упорядоченного векторного пространства, индуцированной структурой пространства E, есть вполне решеточное пространство, и для любого множества $X \subset B$, мажорированного в B, верхняя грань множества X в B совпадает с его верхней гранью в E.

Всякое пересечение семейства полос во вполне решеточном пространстве E снова является полосой. Для любого множества $M \subset E$ существует *наименьшая полоса*, содержащая M (поскольку само E есть полоса); будем говорить, что эта полоса *порождена* множеством M.

Свойства полос во вполне решеточном пространстве основываются на следующем предложении:

Предложение 4. *Пусть E — вполне решеточное пространство, и пусть A — часть этого пространства, состоящая из положительных элементов и такая, что:* 1) $A + A \subset A$; 2) *отношения* $x \in A$, $0 \leqslant y \leqslant x$ *влекут* $y \in A$. *Пусть, далее, M — множество верхних граней в E подмножеств множества A, мажорированных в E. При этих условиях всякий элемент $x \geqslant 0$ из E может быть записан в виде $y + z$, где $y \in M$ и где z есть положительный элемент, независимый со всеми элементами из M.*

В самом деле, пусть y — верхняя грань таких элементов $v \in A$, что $v \leqslant x$; по определению y принадлежит M, и, значит, $y \leqslant x$. Все сводится к тому, чтобы показать, что элемент $z = x - y$ независим с каждым элементом $t \in A$ (n° 1) или что $u = \inf(z, t)$ равно нулю. По условию $u \in A$ и $u \leqslant x - y$, и следовательно, $u + y \leqslant x$; для всякого $v \in A$ такого, что $v \leqslant x$, имеем, по определению, $v \leqslant y$, и, стало быть, $u + v \leqslant u + y \leqslant x$; так как по условию $u + v \in A$, то, согласно определению y, имеем также $u + v \leqslant y$; и, наконец, поскольку $u + y$ есть верхняя грань в E таких элементов $u+v$, что $v \in A$ и $v \leqslant x$, то $u+y \leqslant y$, откуда $u \leqslant 0$, что и завершает доказательство.

Теорема 1 (Ф. Рисс). *Пусть A — подмножество вполне решеточного пространства Рисса E. Множество A' элементов, независимых со всеми элементами множества A, составляет полосу; полоса A'' элементов, независимых со всеми элементами множества A', совпадает с полосой, порожденной множеством A, а E является упорядоченной прямой суммой полос A' и A''.*

Свойства независимых элементов, которые мы напомнили в n° 1, и определение полосы сразу же показывают, что A' есть полоса, а значит, A'' тоже полоса. В силу предложения 4 и определения полосы всякий элемент $x \geqslant 0$ из E может быть представлен в виде $x = y + z$, где $y \in A'$ и $z \in A''$, $y \geqslant 0$ и $z \geqslant 0$; а так как каждый элемент из E представляет собой разность двух положительных элементов, то $E = A' + A''$; с другой стороны, поскольку 0 есть единственный элемент, независимый с самим собой, то $A' \cap A'' = \{0\}$, откуда мы заключаем, что E есть прямая сумма множеств A' и A''; и, наконец, поскольку компоненты в A' и A'' положительного элемента из E положительны, то E есть упорядоченная прямая сумма полос A' и A'' (предл. 3).

Остается показать, что A совпадает с полосой B, порожденной множеством A. Но E есть прямая сумма B и полосы B', образованной элементами, независимыми со всеми элементами полосы B; а так как $A \subset B$, то $B' \subset A'$; однако, с другой стороны, $B \subset A''$, и в то же время E является прямой суммой A' и A ; следовательно, $B = A''$, $B' = A'$.

Теорема 1 и предложение 4 позволяют дать другое определение полосы, порожденной множеством элементов из E:

Предложение 5. *Пусть E — вполне решеточное пространство, M — подмножество из E и B — полоса, порожденная множеством M. Пусть, далее, M_1 — множество положительных элементов из E, каждый из которых мажорирован элементом вида $\sum_i |x_i|$, где $x_i \in M$; пусть M_2 — множество верхних граней мажорированных подмножеств множества M_1; тогда множество M_2 совпадает с множеством положительных элементов полосы B.*

Очевидно, что, по определению полосы, $M_2 \in B$; с другой стороны, если B' — полоса элементов, независимых со всеми элементами множества M_1, то теорема 1 показывает, что E есть упорядоченная прямая сумма B и B'. Но предложение 4 показывает, что каждый положительный элемент из E есть сумма элемента из M_2 и элемента из B', чем и доказано предложение.

Следствие. *Пусть a есть элемент вполне решеточного пространства E. Пусть, далее, B_a — полоса, порожденная элементом a, а B'_a — полоса элементов, независимых с a. Для всякого элемента $x \geqslant 0$ из E его компонента в B_a* (при разбиении E на упорядоченную прямую сумму полос B_a и B'_a) *равна* $\sup\limits_{n \in \mathbf{N}} (\inf (n|a|, x))$.

Отметим, что полосы, порожденные элементом a и элементом $|a|$, тождественны между собой. Если a и b — два независимых элемента из E, а A и B — полосы, порожденные соответственно элементами a и b, то всякий элемент из A независим с каждым элементом из B; в самом деле, b принадлежит полосе A' элементов, независимых с A, откуда $B \subset A'$; а в силу теоремы 1 всякий элемент из A независим с каждым элементом из A'.

6. Топологии в упорядоченных векторных пространствах

Пусть E — упорядоченное векторное пространство. Говорят, что топология в E *согласуется* со структурой упорядоченного векторного пространства в E, если, с одной стороны, она согласуется со структурой векторного пространства в E (то есть (Топ. вект. пр-ва, гл. I, § 1) отображения $(x, y) \to x + y$ и $(\lambda, x) \to \lambda x$ непрерывны), а с другой стороны, удовлетворяет следующей аксиоме:

(ТО) *Множество элементов $x \geqslant 0$ из E замкнуто.*

Примеры. Топология пространства $\mathbf{R}^n$ согласуется с его структурой упорядоченного векторного пространства. Если A — произвольное множество и $\mathscr{B}(A)$ — пространство числовых функций, ограниченных на A, то топология, определенная в $\mathscr{B}(A)$ при помощи нормы $\|x\| = \sup\limits_{t \in A} |x(t)|$ (топология равномерной сходимости), согласуется со структурой упорядоченного векторного пространства в $\mathscr{B}(A)$.

Упорядоченное векторное пространство, наделенное топологией, согласующейся с его структурой, называется *упорядоченным топологическим векторным пространством.* В таком пространстве E множество элементов $x \leqslant 0$ замкнуто; а так как сдвиги являются гомеоморфизмами, то из этого следует, что для любого $a \in E$ множество элементов $x \leqslant a$ (соотв. $x \geqslant a$) замкнуто.

Предложение 6. *Пусть в отделимом упорядоченном топологическом векторном пространстве E множество H фильтруется по отношению $\leqslant$. Если фильтр сечений множества H имеет предел в E, то этот предел есть верхняя грань множества H.*

В самом деле, пусть $b = \lim\limits_{x \in H} x$; для любого $y \in H$ множество тех $x \in H$, для которых $x \geqslant y$, есть множество фильтра сечений множества H, и следовательно, b есть точка прикосновения этого множества; а так как множество элементов $z \geqslant y$ замкнуто в E, то $b \geqslant y$, и значит, b есть мажоранта множества H. С другой стороны, если a есть мажоранта множества H, то H содержится в замкнутом множестве элементов $z \leqslant a$; а поскольку b — элемент прикосновения для H, то $b \leqslant a$, что и завершает доказательство.

Следствие. *Пусть E — пространство Рисса, наделенное отделимой топологией, согласующейся с его структурой упорядоченного векторного пространства. Если для всякого множества $H \subset E$, мажорированного и фильтрующегося по отношению $\leqslant$, фильтр сечений множества H сходится, то E вполне решеточно.*

Упражнения. 1) Пусть F — векторное пространство функций

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt \quad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

где f пробегает множество линейчатых функций на $[0, 1]$. Пусть P — множество возрастающих функций, принадлежащих F, и пусть E — векторное подпространство пространства F, порожденное P. Показать, что P есть выпуклый конус, удовлетворяющий условию $P \cap (-P) = \{0\}$, и что множество E, наделенное структурой порядка, определяемой соотношением $g - h \in P$, есть пространство Рисса.

2) Пусть $I \subset \mathbf{R}$ — компактный интервал. Показать, что подпространство пространства $\mathbf{R}^I$, состоящее из сужений на I многочленов (с действительными коэффициентами), не является пространством Рисса).

3) a) Пусть E — пространство Рисса и H — векторное подпространство пространства E. Говорят, что H есть *собственное* подпространство пространства E, если для любых элементов x, y из H $\sup(x, y)$ принадлежит H. Для того чтобы это было так, необходимо и достаточно, чтобы отношение $x \in H$ влекло $|x| \in H$.

b) Пусть I — компактный интервал из $\mathbf{R}$, и пусть H — подпространство пространства $\mathbf{R}^I$, образованное сужениями на I многочленов первой степени $t \to \alpha t + \beta$. Показать, что H не является собственным подпространством пространства $\mathbf{R}^I$, но является пространством Рисса (для структуры, индуцированной структурой пространства $\mathbf{R}^I$).

4) Пусть E — пространство Рисса и H — векторное подпространство пространства E. Говорят, что H — *плотное* подпространство пространства E, если отношения $x \in H$, $|y| \leqslant |x|$ влекут $y \in H$. Пусть теперь P — множество тех элементов $\dot{x}$ фактор-пространства E/H, для которых в классе $\dot{x}$ имеется хотя бы один элемент $x \geqslant 0$. Показать, что P есть множество положительных элементов для структуры порядка в E/H, которая согласуется со структурой векторного пространства в E/H и для которой E/H есть пространство Рисса.

5) a) Говорят, что упорядоченное пространство E *архимедово*, если всякий элемент $x \in E$, для которого множество элементов nx ($n \geqslant 0$ — целое) мажорировано, будет $\leqslant 0$. Показать, что это условие равносильно следующему: пересечение произвольной плоскости (проходящей через 0) и выпуклого множества P положительных элементов из E есть *замкнутый* угловой сектор. Показать, что любое подпространство вполне решеточного пространства архимедово *).

b) Пусть F — пространство Рисса $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ числовых функций, определенных на $\mathbf{R}$, и пусть H — подпространство $\mathscr{B}(\mathbf{R})$ функций, ограниченных на $\mathbf{R}$; H есть плотное подпространство пространства F (упр. 4). Показать, что пространство Рисса $E = F/H$ (упр. 4) не является архимедовым, точнее, показать, что для любого элемента $x \geqslant 0$ из E найдется такой элемент $y \in E$, что $y \geqslant nx$ при любом целом $n \geqslant 0$.

6) Пусть E — вполне решеточное пространство и V — его векторное подпространство. Показать, что для того, чтобы V имело в E дополнение W такое, чтобы E было упорядоченной прямой суммой V и W, необходимо и достаточно, чтобы V было полосой; тогда W совпадает с полосой элементов из E, независимых со всеми элементами из V.

7) Пусть E — вполне решеточное пространство и H — его плотное подпространство (упр. 4). Показать, что если B_1 и B_2 — две

*) Можно показать, что, и обратно, всякое упорядоченное архимедово пространство изоморфно некоторому подпространству вполне решеточного пространства (ср. Алгебра, гл. VI, § 1, упр. 31).

взаимно-дополнительные полосы в E, то H есть упорядоченная прямая сумма подпространств $H_1 = H \cap B_1$ и $H_2 = H \cap B_2$, и что пространство Рисса E/H есть упорядоченная прямая сумма пространств Рисса B_1/H_1 и B_2/H_2.

8) Пусть (E_ι) — семейство вполне решеточных пространств и E — произведение пространств E_ι (которое тоже вполне решеточно). Показать, что если B — полоса в E, то каждая из ее проекций $B_\iota = \mathrm{pr}_\iota(B)$ есть полоса в E_ι и что B совпадает с произведением полос B_ι. Получить отсюда способ построения полос в пространстве $\mathbf{R}^A$ отображений множества A в $\mathbf{R}$. Показать, что в пространстве $\mathscr{B}(A)$ числовых функций, ограниченных на A, всякая полоса есть след на $\mathscr{B}(A)$ некоторой полосы в $\mathbf{R}^A$.

° 9) Пусть E — вполне решеточное пространство. Говорят, что фильтр $\mathfrak{F}$ в E мажорирован (соотв. минорирован, ограничен), если в $\mathfrak{F}$ существует мажорированное (соотв. минорированное, ограниченное) множество. *Верхним пределом* (соотв. *нижним пределом*) мажорированного (соотв. минорированного) фильтра $\mathfrak{F}$, обозначаемым через $\limsup \mathfrak{F}$ соотв. $\liminf \mathfrak{F}$), называют выражение $\inf\limits_X (\sup X)$ (соотв. $\sup\limits_X (\inf X)$), где X пробегает множество мажорированных (соотв. минорированных) множеств из $\mathfrak{F}$, когда это выражение имеет смысл. Для того чтобы существовали оба предела $\limsup \mathfrak{F}$ и $\liminf \mathfrak{F}$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{F}$ был ограничен, и тогда $\liminf \mathfrak{F} \leqslant \limsup \mathfrak{F}$; говорят, что $\mathfrak{F}$ имеет *предел* или *сходится* для структуры порядка пространства E, если $\limsup \mathfrak{F} = \liminf \mathfrak{F}$; тогда общее значение этих двух выражений обозначается $\lim \mathfrak{F}$ и говорят, что $\mathfrak{F}$ сходится к этому элементу. Если фильтр имеет предел, то всякий более сильный фильтр имеет тот же предел (для структуры порядка).

a) Для того чтобы ограниченный фильтр $\mathfrak{F}$ имел предел, необходимо и достаточно, чтобы $\inf\limits_X (\sup X - \inf X) = 0$, когда X пробегает множество ограниченных множеств, принадлежащих $\mathfrak{F}$.

b) Пусть A — множество, фильтрующееся по фильтру $\mathfrak{G}$, и f — отображение A в E; говорят, что f имеет предел по фильтру $\mathfrak{G}$ для структуры порядка пространства E, если $f(\mathfrak{G})$ есть базис фильтра, имеющего предел в E (для структуры порядка). Показать, что если A есть упорядоченное фильтрующееся множество и отображение f множества A в E, мажорированное в A, является возрастающей функцией, то f имеет предел по фильтру сечений множества A, равный $\sup\limits_{x \in A} f(x)$.

c) Пусть E и F — два вполне решеточных пространства; для того чтобы произведение фильтра $\mathfrak{F}$ в E и фильтра $\mathfrak{G}$ в E было сходящимся фильтром в $E \times F$ (для структуры порядка), необходимо и достаточно, чтобы каждый из фильтров $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ был сходящимся, и тогда $\lim (\mathfrak{F} \times \mathfrak{G}) = (\lim \mathfrak{F}, \lim \mathfrak{G})$.

°10) a) Пусть E — вполне решеточное пространство, и пусть $\mathcal{T}_0(E)$ — сильнейшая топология в E, для которой всякий фильтр $\mathfrak{F}$ в E, сходящийся в смысле структуры порядка (упр. 9), сходится к тому же пределу для $\mathcal{T}_0(E)$ (Общая топ., гл. I, § 7). Пусть E и F — два вполне решеточных пространства, f — такое отображение E в F, при котором для всякого фильтра $\mathfrak{F}$ в E, сходящегося для структуры порядка, $f(\mathfrak{F})$ является базисом фильтра в E, сходящимся (для структуры порядка) к $f(\lim \mathfrak{F})$. Показать, что в этих предпосылках функция f непрерывна в топологиях $\mathcal{T}_0(E)$ и $\mathcal{T}_0(F)$.

b) Вывести из a), что топология $\mathcal{T}_0(E)$ отделима и согласуется со структурой векторного пространства в E и что отображение $x \to x^+$ непрерывно в этой топологии; следовательно, $\mathcal{T}_0(E)$ согласуется со структурой упорядоченного векторного пространства в E.

c) Пусть задано произвольное бесконечное множество A, и пусть $E = \mathcal{B}(A)$ — вполне решеточное пространство числовых функций, ограниченных на A. Пусть Φ — множество (конечных или бесконечных) числовых функций φ, определенных на A и таких, что $\varphi(t) > 0$ для любого $t \in A$ и что при любом целом $n > 0$ множество тех $t \in A$, для которых $\varphi(t) \leqslant n$, конечно. Для каждой функции $\varphi \in \Phi$ обозначим через V_φ множество тех $x \in E$, для которых $|x| \leqslant \varphi$; показать, что множества V_φ образуют фундаментальную систему окрестностей 0 в топологии $\mathcal{T}_1(E)$, согласующейся со структурой упорядоченного векторного пространства в E и для которой E отделимо и полно. Показать, что топология $\mathcal{T}_0(E)$ более сильная, чем $\mathcal{T}_1(E)$, но строго менее сильная, чем топология равномерной сходимости в A (введенная при помощи нормы $\|x\| = \sup\limits_{t \in A} |x(t)|$). Вывести отсюда, что для того, чтобы подмножество из E было ограничено (для структуры порядка), необходимо и достаточно, чтобы оно было ограничено в топологии $\mathcal{T}_0(E)$ (Топ. вект. пр-ва, гл. III); показать также, что всякий фильтр в E, ограниченный и сходящийся в топологии $\mathcal{T}_0(E)$, сходится для структуры порядка; и наконец, показать, что в E существуют фильтры, сходящиеся для $\mathcal{T}_0(E)$ и неограниченные.

°11) Пусть E — вполне решеточное пространство и $(x_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство элементов из E. Для любого конечного множества $H \subset I$ положим $s_H = \sum\limits_{\iota \in H} x_\iota$; говорят, что семейство $(x_\iota)_{\iota \in I}$ *суммируемо* для структуры порядка пространства E, если отображение $H \to s_H$ имеет предел (для этой структуры порядка) по упорядоченному фильтрующемуся множеству $\mathcal{F}(I)$ конечных подмножеств интервала I; этот предел s называется *суммой* семейства (x_ι) и записывается $\sum\limits_{\iota \in I} x_\iota$.

a) Для того чтобы семейство $(x_\iota)_{\iota \in I}$ было суммируемо, необходимо и достаточно, чтобы: 1° для любого конечного подмножества $H \subset I$ множество $|s_K|$, где K пробегает множество конечных подмножеств из I, не пересекающихся с H, имело верхнюю грань r_H; 2° $\inf\limits_H r_H = 0$, когда H пробегает $\mathfrak{F}(I)$ (использовать упр. 9a)).

b) Обобщить на семейства, суммируемые для структуры порядка в E, свойства семейств, суммируемых в топологических абелевых группах (Общая топ., гл. III, § 4, предл. 2 и 3 и теорема 2).

c) Пусть $(x_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство положительных элементов из E; для того чтобы это семейство было суммируемо, необходимо и достаточно, чтобы конечные частичные суммы s_H составляли мажорированное множество (применить упр. 9b)). Показать, что если $(x_\iota)_{\iota \in I}$ суммируемо и если $(y_\iota)_{\iota \in I}$ есть семейство таких элементов, что $0 \leqslant y_\iota \leqslant x_\iota$ для любых ι, то семейство (y_ι) суммируемо и $\sum\limits_{\iota \in I} y_\iota \leqslant \sum\limits_{\iota \in I} x_\iota$, причем равенство имеет место лишь в том случае, если $x_\iota = y_\iota$ при любом ι.

d) Пусть (x_ι) — семейство элементов из E; показать, что если семейство $(|x_\iota|)$ суммируемо для структуры порядка, то этим свойством обладает и семейство (x_ι).

12) Пусть E — вполне решеточное пространство. Показать, что существует такое семейство (u_ι) строго положительных элементов из E, что при различных двух индексах ι и $\varkappa$ элементы u_ι и $u_\varkappa$ независимы и что для любого $x > 0$ из E найдется по крайней мере один такой индекс ι, что $\inf(x, u_\iota) > 0$ (воспользоваться теоремой Цорна). Вывести отсюда, что для любого $x \geqslant 0$ существует, и притом единственное, семейство (x_ι) положительных элементов пространства E, таких, что x_ι принадлежит полосе B_ι, порожденной u_ι (при любом ι), и что $x = \sum x_\iota$ для структуры порядка (взять в качестве x_ι составляющую элемента x в полосе B_ι). Обратно, всякое мажорированное семейство (x_ι) положительных элементов, для которых $x_\iota \in B_\iota$ при любом $\iota \in I$, суммируемо в E (упр. 11).

°13) a) Пусть E — вполне решеточное пространство. Показать, что если $u \neq 0$ — произвольный элемент из E, то множество тех $x \in E$, для которых $|x| \leqslant n\,|u|$ (для некоторого целого n, зависящего от x), есть вполне решеточное подпространство C_u пространства E. Для любого $x \in C_u$ обозначим через $\|x\|$ нижнюю грань скаляров $\lambda > 0$, для которых $|x| \leqslant \lambda\,|u|$; показать, что $\|x\|$ есть норма в C_u (использовать тот факт, что E архимедово), что наделенное этой нормой пространство C_u полно и что $\|x\| = \sup(\|x^+\|, \|x^-\|)$.

b) Пусть $\mathcal{J}$ — множество составляющих элемента u в полосах B пространства C_u; показать, что $\mathcal{J}$ есть множество таких элементов

$c \geqslant 0$ из C_u, что $\inf(c, u - c) = 0$ (воспользоваться теоремой Рисса). Показать, что $\mathcal{J}$ замкнуто в нормированном пространстве C_u и что для отношения порядка, индуцированного отношением порядка в C_u, $\mathcal{J}$ есть полная булева решетка (Теор. мн., гл. III; достаточно показать, что если (c_ι) — семейство элементов из $\mathcal{J}$, то $\sup c_\iota$ принадлежит $\mathcal{J}$).

c) Пусть x — произвольный элемент из C_u; пусть для любого действительного λ $c(\lambda)$ означает составляющую элемента u в полосе из C_u, порожденной при помощи $(\lambda u - x)^+$. Показать, что если $\lambda \leqslant \mu$, то $c(\lambda) \leqslant c(\mu)$; для $\lambda < -\|x\|$ имеем $c(\lambda) = 0$, а для $\lambda > \|x\|$ имеем $c(\lambda) = u$. Показать, что если $c \in \mathcal{J}$ и $c \leqslant c(\lambda)$, то составляющая элемента x в полосе, порожденной при помощи c, не превосходит λc (заметить, что полоса, порожденная $c(\lambda)$, совпадает с полосой, порожденной $(\lambda u + x)^+$, и что составляющая элемента $\lambda u - x$ в этой полосе равна составляющей элемента $(\lambda u - x)^+$, и вывести отсюда, что составляющая элемента x в этой же полосе не превосходит $\lambda c(\lambda)$). Точно так же показать, что если $c \in \mathcal{J}$ и $c \leqslant u - c(\lambda)$, то составляющая элемента x в полосе, порожденной c, больше или равна λc.

d) Известно (Общая топ., 2-е изд., гл. II, § 4, упр. 13), что существует изоморфизм структуры порядка $c \to \theta_c$ булевой решетки $\mathcal{J}$ на булеву решетку, состоящую из характеристических функций одновременно открытых и замкнутых множеств всюду разрывного компактного пространства S. Показать, что соотношение $\sum\limits_i \lambda_i c_i = 0$ влечет тот факт, что функция $\sum\limits_i \lambda_i \theta_{c_i}$ равна нулю на S (использовать лемму о разбиении); вывести из этого замечания и из c), что отображение $c \to \theta_c$ может быть продолжено до изоморфизма $x \to \theta_x$ нормированного пространства C_u на нормированное пространство $\mathscr{C}(S)$ (конечных) числовых функций, непрерывных на S, так, чтобы $(\theta_x)^+ = \theta_{x^+}$ (при помощи c) показать, что для любого $x \in C_u$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется возрастающая последовательность $(\lambda_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ таких действительных чисел, что $\lambda_i - \lambda_{i-1} \leqslant \varepsilon$ и что

$$0 \leqslant x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i-1} (c(\lambda_{i-1}) - c(\lambda_i)) \leqslant \varepsilon u).$$

e) Для того чтобы S было конечно, необходимо и достаточно, чтобы C_u имело конечную размерность; вывести отсюда (при помощи упр. 12), что вполне решеточное пространство конечной размерности изоморфно пространству-произведению $\mathbf{R}^n$ (ср. § 2, упр. 7).

f) Показать, что в S замыкание открытого множества есть множество открытое (использовать тот факт, что $\mathcal{J}$ есть полная решетка). Обратно, пусть S — компактное пространство, обладающее этим свойством (*стоуново* пространство); пусть для любой функции f, полунепрерывной снизу на E, g есть наименьшая функция, полунепрерывная сверху на E и такая, что $g \geqslant f$; показать, что g непрерывна (показать, что для любого $a < g(x)$ x не может быть точкой прикосновения для (открытого) множества таких y, что $g(y) < a$, заметив, что в точке прикосновения z этого множества $f(z) \leqslant a$). Вывести отсюда, что в этом случае $\mathscr{C}(S)$ будет вполне решеточным пространством. Показать, что если S бесконечно, то верхняя грань в $\mathscr{C}(S)$ мажорированного бесконечного множества не обязана быть равной его верхней огибающей (рассмотреть открытое множество, не замкнутое в S); однако эти две функции равны между собой на дополнении некоторого тощего множества $\left(\text{рассмотреть множество точек, где их разность} \geqslant \frac{1}{n}\right)$.

g) Показать, что если f — числовая функция, определенная на дополнении некоторого *нигде не плотного* множества $M \subset S$, непрерывная и ограниченная на $\complement M$, то f может быть продолжена по непрерывности на все S (использовать тот факт, что $\mathscr{C}(S)$ вполне решеточно). Вывести отсюда, что множество $\mathscr{C}_0(S)$ числовых функций, как конечных, так и бесконечных, непрерывных на S и таких, что $f^{-1}(+\infty)$ и $f^{-1}(-\infty)$ образуют нигде не плотные множества в S, есть вполне решеточное векторное пространство и что полоса B_u, порожденная элементом u в E, изоморфна некоторому плотному подпространству (упр. 4) пространства $\mathscr{C}_0(S)$ (рассмотреть элемент $f \geqslant 0$ пространства $\mathscr{C}_0(S)$ в качестве верхней грани элементов $\inf(f, n)$).

§ 2. Линейные формы на пространстве Рисса

1. *Положительные линейные формы на пространстве Рисса*

Напомним следующее определение (Топ. вект. пр-ва, гл. II, § 1):

Определение 1. *Пусть E есть упорядоченное векторное пространство; говорят, что линейная форма L на E положительна, если для любого $x \geqslant 0$ из E $L(x) \geqslant 0$.*

Поскольку $L(y) - L(x) = L(y - x)$, то это определение равносильно утверждению, что отношение $x \leqslant y$ влечет $L(x) \leqslant L(y)$, то есть что L — *возрастающая* функция на E.

Примеры. 1) Пусть A — произвольное множество и E — подпространство пространства $\mathbf{R}^A$ всех числовых функций, определенных на A. Для любого элемента $a \in A$ отображение $x \to x(a)$ есть положительная линейная форма на E.

2) Пусть $I = [a, b]$ — компактный интервал из $\mathbf{R}$ и E — пространство Рисса, образованное числовыми функциями, *линейчатыми* на I (Функции действ. перем., гл. II, § 1, n° 3); отображение $x \to \int_a^b x(t)\,dt$ есть положительная линейная форма на E.

3) Пусть E — подпространство пространства $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$, образованное многочленами не выше второй степени, $t \to at^2 + bt + c$. Для каждого из этих многочленов x обозначим через $\alpha(x)$ коэффициент при t^2; тогда отображение $x \to \alpha(x)$ будет положительной линейной формой на E.

4) Пусть F — произвольное множество, $\mathfrak{U}$ — *ультрафильтр* в F (Общая топ., гл. I, § 5), E — пространство Рисса $\mathscr{B}(F)$ числовых функций, ограниченных на F. Для любого $x \in E$ существует $\lim_{\mathfrak{U}} x(t)$, так как $x(\mathfrak{U})$, есть базис ультрафильтра в относительно компактном множестве $x(F)$ и, следовательно, сходится. Кроме того, если $x \geqslant 0$, то $\lim_{\mathfrak{U}} x(t) \geqslant 0$ согласно принципу продолжения неравенств; стало быть, отображение $x \to \lim_{\mathfrak{U}} x$ есть положительная линейная форма на E. Если в качестве $\mathfrak{U}$ взять ультрафильтр, состоящий из множеств, содержащих элемент $a \in F$, то снова получится положительная линейная форма $x \to x(a)$ (пример 1).

Предложение 1. *Пусть E — упорядоченное векторное пространство и L — такое отображение E в $\mathbf{R}$, что $L(x+y) = L(x) + L(y)$ и что отношение $x \geqslant 0$ влечет $L(x) \geqslant 0$; тогда для любого скаляра λ и любого $x \geqslant 0$ имеем $L(\lambda x) = \lambda L(x)$.*

Так как $L(-x) = -L(x)$ (ибо L — представление аддитивной группы E в $\mathbf{R}$), то можно ограничиться случаем $\lambda \geqslant 0$. Для любого целого $n \geqslant 0$ имеем $L(nx) = nL(x)$, откуда $L\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{1}{n}L(x)$, и значит, $L(rx) = r(Lx)$ для любого рационального числа $r \geqslant 0$. С другой стороны, L возрастает на E; поэтому, если r и r' — два рациональных числа и $r \leqslant \lambda \leqslant r'$, то $rL(x) \leqslant L(\lambda x) \leqslant r'L(x)$, а поскольку $rL(x)$ и $r'L(x)$ отличаются от $\lambda L(x)$ сколь угодно мало, то $L(\lambda x) = \lambda L(x)$.

Предложение 2. *Пусть E — пространство Рисса, P — множество положительных элементов из E и $x \to M(x)$ — положительная числовая функция, определенная на P и такая, что*

$M(x+y) = M(x) + M(y)$ для любых x и y из P. Тогда существует, и притом только одна, положительная линейная форма L, продолжающая M на E.

В самом деле, любой элемент $z \in E$ может быть записан в виде $z = y - x$, где x и y положительны; при этом, если $z = y' - x'$ с $x' \geqslant 0$ и $y' \geqslant 0$, то $M(y) - M(x) = M(y') - M(x')$, так как из равенства $y - x = y' - x'$ следует $y + x' = x + y'$, и, значит, $M(y) + M(x') = M(x) + M(y')$. Обозначим через $L(z)$ общее значение разности $M(y) - M(z)$ для любого представления элемента z в виде разности $y - x$ двух положительных элементов; ясно, что если $z \geqslant 0$, то $L(z) = M(z)$, и (из предл. 1) непосредственно видно, что L есть линейная форма на E; наконец, единственность L следует из того, что P порождает пространство Рисса E.

Отметим, что это доказательство применимо к любому упорядоченному пространству, порождаемому множеством своих положительных элементов (то есть упорядоченному фильтрующемуся множеству).

2. *Относительно ограниченные линейные формы*

Пусть E — пространство Рисса. Обозначим через Q множество *положительных* линейных форм на E; оно представляет собой часть алгебраического сопряженного к E пространства E^* (то есть пространства всех линейных форм на E). Очевидно, $Q + Q \subset Q$ и $\lambda Q \subset Q$ для любого скаляра $\lambda > 0$ (иными словами, Q есть *выпуклый конус* в E^*). Кроме того, $Q \cap (-Q) = \{0\}$, ибо если L и $-L$ — положительные линейные формы, то $L(x) \geqslant 0$ и $L(x) \leqslant 0$ для любого $x \geqslant 0$, откуда $L(x) = 0$ при всех $x \geqslant 0$, и, значит, $L = 0$ (предл. 2). Стало быть, множество Q определяет в E^* *отношение порядка* $L \leqslant M$, равносильное отношению «$M - L$ есть положительная линейная форма на E» или отношению «для любого $x \geqslant 0$ $L(x) \leqslant M(x)$»; положительными элементами в E^* для этой структуры порядка будут положительные линейные формы (что оправдывает введенную терминологию). Пусть Ω — векторное подпространство пространства E^*, порожденное множеством Q, то есть множество линейных форм на E, представляющих собой *разность двух положительных линейных форм*; мы дадим другую характеристику элементов пространства Ω.

Определение 2. *Пусть E есть пространство Рисса; говорят, что линейная форма L на E относительно ограничена, если для любого $x \geqslant 0$ из E форма L ограничена на множестве тех $y \in E$, для которых $|y| \leqslant x$.*

Теорема 1. 1° *Для того чтобы линейная форма L на пространстве Рисса E была относительно ограниченной, необходимо и достаточно, чтобы она представляла собой разность двух положительных линейных форм.*

2° *Упорядоченное векторное пространство Ω относительно ограниченных линейных форм на E есть вполне решеточное пространство Рисса.*

Если $L = U - V$, где U и V — две положительные линейные формы на E, то отношение $-x \leqslant y \leqslant x$ влечет $-U(x) \leqslant U(y) \leqslant U(x)$ и $-V(x) \leqslant V(y) \leqslant V(x)$, откуда сразу вытекает, что $|L(y)| \leqslant U(x) + V(x)$; следовательно, L относительно ограничена. Обратно, предположим, что L относительно ограничена; достаточно установить существование такой положительной линейной формы N, которая при любом $x \geqslant 0$ удовлетворяет неравенству $N(x) \geqslant L(x)$, так как тогда $N - L$ будет положительной линейной формой.

Но если положительная линейная форма N обладает этим свойством, то для любого $x \geqslant 0$ и для $0 \leqslant y \leqslant x$ выполняются неравенства $N(x) \geqslant N(y) \geqslant L(y)$, и значит, $N(x) \geqslant \sup\limits_{0 \leqslant y \leqslant x} L(y)$; если мы покажем, что числовая функция $x \to M(x) = \sup\limits_{0 \leqslant y \leqslant x} L(y)$, определенная на множестве P положительных элементов из E, продолжается до положительной линейной формы на E (которую мы снова обозначим через M), то тем самым мы докажем первую часть теоремы и, кроме того, докажем, что M есть *верхняя грань* для 0 и L в Ω. А так как $M(x) \geqslant 0$ на P, то все сводится к тому, чтобы доказать, что для любых двух элементов $x \geqslant 0$, $x' \geqslant 0$ из E справедливо равенство $M(x + x') = M(x) + M(x')$

(предл. 2). Согласно определению имеем

$$M(x)+M(x')=\sup_{0\leqslant y\leqslant x} L(y)+\sup_{0\leqslant y\leqslant x} L(y')=$$
$$=\sup_{0\leqslant y\leqslant x,\ 0\leqslant y'\leqslant x'} L(y+y')\leqslant M(x+x').$$

С другой стороны, для любого z, удовлетворяющего условиям $0\leqslant z\leqslant x+x'$, имеет место равенство $x+x'=z+u$, где $u\geqslant 0$; следовательно, в силу леммы о разбиении (§ 1, n° 1) найдутся такие два элемента y и y', что $0\leqslant y\leqslant x$, $0\leqslant y'\leqslant x'$ и что $z=y+y'$, $u=(x-y)+(x'-y')$, откуда

$$L(z)=L(y)+L(y')\leqslant M(x)+M(x'),$$

и, значит, $M(x+x')=\sup\limits_{0\leqslant z\leqslant x+x'} L(z)\leqslant M(x)+M(x')$, что и завершает доказательство первой части теоремы. При этом дополнительно доказано, что Ω есть *пространство Рисса* и что для всякой относительно ограниченной линейной формы L на E и для любого $x\geqslant 0$ справедлива формула

$$L^+(x)=\sup_{0\leqslant y\leqslant x} L(y). \tag{1}$$

Остается доказать, что Ω вполне решеточно; для этого достаточно установить, что множество H *положительных* линейных форм, мажорированное и фильтрующееся по отношению $\leqslant$, имеет верхнюю грань в Ω (§ 1, предл. 1). Рассмотрим для любого $x\geqslant 0$ число $M(x)=\sup\limits_{L\in H} L(x)$, которое, по предположению, конечно и положительно; в силу предложения 2 все сводится к доказательству того, что для $x\geqslant 0$ и $x'\geqslant 0$ выполняется равенство $M(x+x')=M(x)+M(x')$; но это получается сразу, если заметить, что $M(x)=\lim\limits_{L\in H} L(x)$ (теорема о монотонном пределе).

Из формулы (1) тотчас вытекает, что если L и M — две относительно ограниченные линейные формы на E, то для любого $x\geqslant 0$ имеют место равенства

$$\begin{aligned}\sup(L, M)(x)&=\sup_{y\geqslant 0,\ z\geqslant 0,\ y+z=x}(L(y)+M(z)),\\ \inf(L, M)(x)&=\inf_{y\geqslant 0,\ z\geqslant 0,\ y+z=x}(L(y)+M(z)).\end{aligned} \tag{2}$$

В частности, если в первой из этих формул заменить M на $-L$, то получится равенство

$$|L|(x) = \sup_{y \geqslant 0,\, z \geqslant 0,\, y+z=x} L(y-z).$$

Но если $x = y + z$, $y \geqslant 0$ и $z \geqslant 0$, то $-x \leqslant y - z \leqslant x$; обратно, соотношение $|u| \leqslant x$ влечет $L(u) \leqslant |L|(|u|) \leqslant |L|(x)$. Отсюда вытекает формула

$$|L|(x) = \sup_{|y| \leqslant x} L(y) \text{ для } x \geqslant 0, \tag{3}$$

из которой, в частности, следует, что

$$|L(x)| \leqslant |L|(|x|) \tag{4}$$

для любого $x \in E$.

Предложение 3. *Для того чтобы две положительные линейные формы L и M на E были независимыми в пространстве Ω, необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ и любого $x \geqslant 0$ из E существовали такие два элемента $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ из E, что $x = y + z$ и $L(y) + M(z) \leqslant \varepsilon$.*

В самом деле, согласно формуле (2) это условие выражает, что $\inf(L, M) = 0$.

Предложение 4. *Пусть L — положительная линейная форма на E. Для того чтобы положительная линейная форма M на E принадлежала полосе, порожденной в Ω линейной формой L, необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \geqslant 0$ из E и любого числа $\varepsilon > 0$ существовало такое число $\delta > 0$, что соотношения $0 \leqslant y \leqslant x$ и $L(y) \leqslant \delta$ влекут $M(y) \leqslant \varepsilon$.*

Докажем сначала *необходимость* условия. Если $M \geqslant 0$ принадлежит полосе, порожденной L в Ω, то (§ 1, следствие из предл. 5) $M = \sup\limits_n (\inf(nL, M))$. Если положить $U_n = M - \inf(nL, M)$, то U_n будет положительной линейной формой на E и $\inf U_n = 0$ в Ω; следовательно (теорема 1), $U_n(x)$ стремится к 0, когда n неограниченно возрастает, и существует такое n, что $U_n(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Зафиксировав это n, получим, что $U_n(y) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ для всякого y, удовлетворяющего условиям $0 \leqslant y \leqslant x$, и, значит, соотношение $0 \leqslant y \leqslant x$ влечет

$$M(y) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \inf(nL, M)(y) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + nL(y);$$

если y таково, что $L(y) \leqslant \frac{\varepsilon}{2n}$, то $M(y) \leqslant \varepsilon$, что и устанавливает наше утверждение.

Теперь докажем, что условие *достаточно*. Для всякой положительной линейной формы M на E можно написать $M = U + V$, где U принадлежит полосе, порожденной L в Ω, а V независима с L, причем U и V положительны (§ 1, теорема 1). Если M удовлетворяет поставленному условию, то это имеет место и для $V = M - U$, поскольку $0 \leqslant V \leqslant M$. Отсюда мы выведем, что $V = 0$. В самом деле, для любого $x \geqslant 0$ из E и любого числа $\eta > 0$ найдутся такие два элемента $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ из E, что $x = y + z$ и $L(y) + V(z) \leqslant \eta$ (предл. 3); зададим произвольно число $\varepsilon > 0$ и выберем $\eta \leqslant \varepsilon$ так, чтобы соотношения $0 \leqslant u \leqslant x$ и $L(u) \leqslant \eta$ влекли $V(u) \leqslant \varepsilon$; определив y и z, как указано выше, получим $L(y) \leqslant \eta$, и значит, $V(y) \leqslant \varepsilon$, а стало быть, $V(x) = V(y) + V(z) \leqslant \varepsilon + \eta \leqslant 2\varepsilon$; поскольку ε произвольно, то $V(x) = 0$ для любого $x \geqslant 0$, то есть $V = 0$.

Упражнения. 1) Пусть E — пространство Рисса и x — элемент > 0 из E. Показать, что если на E существует такая относительно ограниченная линейная форма L, что $L(x) \neq 0$, то множество, состоящее из nx (для целых $n > 0$), не может быть мажорировано в E. В частности, доказать, что на пространстве Рисса E, определенном в упр. 5b) § 1, не существует ни одной относительно ограниченной линейной формы.

°2) Пусть L — положительная линейная форма на пространстве Рисса E. Рассмотрим некоторый элемент $a > 0$ из E и множество таких положительных линейных форм $M \leqslant L$, что: 1° $M(x) = L(x)$ для любого x, удовлетворяющего условиям $0 \leqslant x \leqslant a$; 2° $M(x) \doteq 0$ для всех $x \geqslant 0$, не зависимых с a. Показать, что это множество положительных линейных форм имеет максимальный элемент L_a и что для любого $x \geqslant 0$ выполняется равенство $L_a(x) = \inf L(y)$, где y пробегает множество всех элементов, для которых $0 \leqslant y \leqslant x$ и элемент $x - y$ независим с a. Показать, что $L_{\lambda a} = L_a$ для любого скаляра $\lambda > 0$ и что если a и b — независимые элементы, то $L_{a+b} \leqslant L_a + L_b$. Показать, что если E вполне решеточно, то $L_{a+b} = L_a + L_b$, когда a и b независимы. Пусть E есть пространство Рисса непрерывных на $I = [0, 1]$ функций и $L(x) = x\left(\frac{1}{2}\right)$; показать на примере, что для двух независимых элементов a и b из E может иметь место неравенство $L_{a+b} < L_a + L_b$. Показать, что если E вполне решеточно и $b > 0$ принадлежит полосе, порожденной a, то $L_b \leqslant L_a$.

3) Пусть E — вполне решеточное пространство.

a) Показать, что всякая линейная форма L на E, непрерывная в топологии $\mathscr{T}_0(E)$ (§ 1, упр. 10), относительно ограничена и что $|L|$ непрерывна в топологии $\mathscr{T}_0(E)$ (рассуждать от противного, заметив, что для любого $x \in E$ последовательность элементов $\frac{x}{n}$ стремится к 0 в топологии $\mathscr{T}_0(E)$, когда n неограниченно возрастает).

b) Пусть A — произвольное бесконечное множество и $\mathfrak{U}$ — ультрафильтр в A, множества которого имеют пустое пересечение. Рассмотрим на вполне решеточном пространстве $E = \mathscr{B}(A)$ положительную линейную форму $x \to \lim_{\mathfrak{U}} x(t)$; показать, что эта линейная форма не будет непрерывной в топологии $\mathscr{T}_0(E)$.

°4) Пусть E — вполне решеточное пространство.

a) Пусть L — положительная линейная форма на E, непрерывная в топологии $\mathscr{T}_0(E)$ (§ 1, упр. 10). Показать, что множество тех $x \in E$, для которых $L(|x|) = 0$, есть полоса $Z(L)$. Пусть $S(L)$ — полоса, дополнительная к $Z(L)$ в E (§ 1, упр. 6).

b) Пусть L и M — две положительные линейные формы на E, непрерывные в топологии $\mathscr{T}_0(E)$. Для того чтобы в пространстве Ω относительно ограниченных форм на E форма M принадлежала полосе, порожденной L, необходимо и достаточно, чтобы $S(M) \subset S(L)$. (Для доказательства достаточности рассуждать от противного, допустив, что M не удовлетворяет условию предложения 4; рассмотреть последовательность (y_n) таких элементов из E, что $0 \leqslant y_n \leqslant x$, $L(y_n) \leqslant \frac{1}{2^n}$ и $M(y_n) \geqslant \alpha > 0$, и вывести отсюда существование такого элемента $z \geqslant 0$ из E, что $L(z) = 0$ и $M(z) \geqslant \alpha$.)

c) Пусть L и M — две положительные линейные формы на E, непрерывные в топологии $\mathscr{T}_0(E)$. Для того чтобы в Ω формы L и M были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы $S(L) \cap S(M) = \{0\}$. (Для доказательства необходимости, используя b), показать, что если $S(L) \cap S(M)$ не сводится к нулю, то полосы, порожденные L и M в Ω, имеют общий элемент, отличный от 0.)

5) Пусть E — пространство Рисса и H — плотное векторное подпространство пространства E (§ 1, упр. 4). Пусть, далее, Ω — пространство относительно ограниченных линейных форм на E, и пусть Θ — подпространство пространства Ω, состоящее из линейных форм $L \in \Omega$, обращающихся в нуль на H. Показать, что Θ есть плотное подпространство пространства Ω и что Θ есть вполне решеточное пространство, изоморфное пространству относительно ограниченных линейных форм на пространстве Рисса E/H.

*6) Пусть E — пространство Рисса, Ω — вполне решеточное пространство относительно ограниченных линейных форм на E и F — *собственное* подпространство пространства Ω (§ 1, упр. 3). Для любого $x \in E$ отображение $x' \to \langle x, x' \rangle$ пространства F в $\mathbf{R}$ есть относительно ограниченная линейная форма u_x на F, а отображение $x \to u_x$ есть возрастающее линейное отображение пространства E во вполне решеточное пространство Ω' относительно ограниченных линейных форм на F. Для того чтобы $x \to u_x$ было изоморфизмом пространства E на собственное подпространство пространства Ω', то есть чтобы неравенство $u_x > 0$ влекло $x > 0$ и чтобы $u_{\sup(x,y)} = \sup(u_x, u_y)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия: 1° для любого $x > 0$ из E найдется такое $x' > 0$ из F, что $\langle x, x' \rangle > 0$; 2° для любой пары $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ независимых элементов из E, любого числа $\varepsilon > 0$ и любого $x' \geqslant 0$ из F существуют такие два элемента $y' \geqslant 0$, $z' \geqslant 0$ из F, что $x' = y' + z'$ и $\langle y, y' \rangle + \langle z, z' \rangle \leqslant \varepsilon$. (Заметить, что если выполняется условие 2° и если v — такая положительная линейная форма на F, что $v \geqslant u_x$, то при любом $x' \geqslant 0$ из F и любом $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $v(x') \geqslant \langle x^+, x' \rangle - \varepsilon$.)

Если выполняется условие 2°, но не выполняется условие 1°, то множество тех $x \in E$, для которых $\langle x, x' \rangle = 0$ при любом $x' \in F$, есть плотное векторное подпространство H пространства E. В этом случае при помощи факторизации отображение $x \to u_x$ определяет изоморфизм пространства Рисса E/H на собственное подпространство пространства Ω'.

Показать, что если $F = \Omega$, то указанное условие 2° всегда выполняется (использовать упр. 2).

7) Пусть E — пространство Рисса конечной размерности n.

a) Показать, что если E — архимедово пространство (§ 1, упр. 5), то конус P положительных элементов из E замкнут и имеет внутреннюю точку. Вывести отсюда, что пересечение опорных гиперплоскостей конуса P сводится к 0 (использовать тот факт, что $P \cap (-P) = \{0\}$).

b) Используя a) и упр. 6, показать, что всякое архимедово пространство Рисса размерности n изоморфно пространству-произведению $\mathbf{R}^n$ (ср. § 1, упр 13e)).

c) Привести пример совершенно упорядоченного пространства Рисса размерности 2.

8) Пусть E — пространство Рисса и (U_ι) — семейство положительных линейных форм на E. Рассмотрим на E топологию $\mathcal{T}$, определяемую при помощи полунорм $U_\iota(|x|)$.

a) Показать, что подпространство H пространства E, состоящее из тех x, для которых $U_\iota(|x|) = 0$ при любом ι, есть плотное подпространство пространства E (§ 1, упр. 4); соответствующее E отделимое пространство есть фактор-пространство E/H; путем факторизации формы U_ι определяют на E положительные линейные формы $\dot{U}_\iota$, а фактор-топология в E/H определяется при помощи полунорм $\dot{U}_\iota(|x|)$.

b) Показать, что в пространстве E отображение $x \to |x|$ равномерно непрерывно, и вывести отсюда, что если топология $\mathcal{T}$ отделима, то она согласуется со структурой упорядоченного векторного пространства в E.

c) Предположим, что топология $\mathcal{T}$ отделима и что E — вполне решеточное пространство; показать, что в E всякая полоса B замкнута и что если B' есть замкнутая полоса элементов, независимых со всеми элементами из B, то E есть топологическая прямая сумма B и B'.

d) Предположим, что топология $\mathcal{T}$ отделима. Пусть $\hat{E}$ — пополнение пространства E; показать, что если P есть множество положительных элементов из E, то замыкание $\overline{P}$ множества P в $\hat{E}$ определяет в $\hat{E}$ структуру пространства Рисса (ср. § 1, n° 2).

e) Показать, что если E отделимо и полно в топологии $\mathcal{T}$, то для того, чтобы множество $A \subset E$, фильтрующееся по отношению $\leqslant$, имело в E верхнюю грань, необходимо и достаточно, чтобы для всякого индекса ι множество $U_\iota(x)$ было мажорировано в A; тогда для любой непрерывной и возрастающей на E числовой функции f выполняется равенство $\sup\limits_{x \in A} f(x) = f(\sup A)$. Вывести отсюда, что E вполне решеточно.

f) Предположим, что E отделимо и полно в топологии $\mathcal{T}$. Показать, что если фильтр $\mathfrak{F}$ в E имеет предел для структуры порядка в E (§ 1, упр. 9), то он сходится к тому же пределу в топологии $\mathcal{T}$ использовать e)).

9) Пусть E — пространство Рисса и Ω — пространство относительно ограниченных линейных форм на E. Рассмотрим на Ω топологию, определяемую при помощи полунорм $L \to |L|(x)$, где x пробегает множество положительных элементов из E. Показать, что Ω, наделенное этой топологией, отделимо и полно.

ГЛАВА III

МЕРЫ НА ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

§ 1. Меры на компактном пространстве

1. *Определение меры*

Пусть E — компактное пространство. Обозначим через $\mathscr{C}(E)$ множество (конечных) числовых функций, *непрерывных* на E. Мы знаем, что $\mathscr{C}(E)$ есть векторное пространство над полем $\mathbf{R}$ и что функция $\|f\| = \sup\limits_{x \in E} |f(x)|$ есть *норма* в этом пространстве, которая определяет в $\mathscr{C}(E)$ *топологию равномерной сходимости*; при этом пространство $\mathscr{C}(E)$, наделенное этой нормой, *полно* (Общая топ., гл. X, §§ 1 и 2), то есть является действительным банаховым пространством.

Кроме того, напомним, что $\mathscr{C}(E)$ есть коммутативная алгебра над полем $\mathbf{R}$ (в которой произведение fg есть отображение $x \to f(x)\, g(x)$) и что определенная выше топология согласуется с этой структурой алгебры; более точно, выполняется неравенство $\|fg\| \leqslant \|f\|\cdot\|g\|$.

Определение 1. *Мерой Радона* (или просто *мерой*) *на компактном пространстве E называется всякая непрерывная линейная форма μ на банаховом пространстве $\mathscr{C}(E)$; значение формы μ для непрерывной функции f называется интегралом от f относительно μ.*

Следовательно, утверждение, что μ есть мера на E, означает, что отображение $f \to \mu(f)$ пространства $\mathscr{C}(E)$ в $\mathbf{R}$ удовлетворяет следующим условиям:

a) $\mu(f+g)=\mu(f)+\mu(g)$ *для любых непрерывных функций* f *и* g.

b) $\mu(\alpha f)=\alpha\mu(f)$ *для любых* $\alpha\in\mathbf{R}$ *и* $f\in\mathscr{C}(E)$.

c) *Существует такое конечное число* $a\geqslant 0$, *что*

$$|\mu(f)|\leqslant a\,\|f\| \tag{1}$$

для любой функции $f\in\mathscr{C}(E)$ (Общая топ., гл. IX, § 3, теорема 1).

Интеграл от функции $f\in\mathscr{C}(E)$ относительно меры μ, в соответствии с общими обозначениями для линейных форм, записывается как $\mu(f)$ или $\langle f,\mu\rangle$; используется также обозначение $\int f\,d\mu$ или $\int f(x)\,d\mu(x)$. Если f — постоянная функция, равная 1, то вместо $\int 1\,d\mu$ пишут $\int d\mu$; следовательно, для любого действительного α имеем $\int \alpha\,d\mu=\alpha\int d\mu$.

В обозначении $\int f(x)\,d\mu(x)$ x есть *связанное* *) переменное (Теор. мн., гл. I и II) и, следовательно, может быть заменено любым другим аргументом, отличным от аргументов, входящих в рассуждение, где фигурирует «функциональный символ» $\int f(x)\,d\mu(x)$ (ср. Функции действ. перем., гл. II, § 1, n° 4).

Как мы увидим в § 5, иногда приходится обозначать интеграл от функции посредством нескольких поставленных рядом значков $\int$ и писать, например, $\int\int\int f(x)d\mu(x)$ вместо $\int f(x)d\mu(x)$.

Через $\mathscr{M}(E)$ мы будем обозначать множество мер на E; это векторное пространство над $\mathbf{R}$, которое есть не что иное, как *сопряженное* к банахову пространству $\mathscr{C}(E)$ (Топ. вект. пр-ва, гл. IV).

2. *Примеры мер*

I. Пусть E — компактное пространство и a — точка из E; ясно, что отображение $f\to f(a)$ есть мера на E. По причинам, которые выяснятся дальше (§ 3, n° 5), говорят, что эта мера определена при помощи *единичной массы, расположенной в точке* a,

---

*) «Немое» по терминологии выпуска «Функции действительного переменного». (*Прим. ред.*)

и обычно ее обозначают символом ε_a. Таким образом, для всякой числовой функции f, непрерывной на E, имеем

$$\varepsilon_a(f) = \langle f, \varepsilon_a \rangle = \int f(x)\, d\varepsilon_a(x) = f(a).$$

II. В качестве обобщения рассмотрим бесконечную последовательность (a_n) точек из E и отнесем каждой точке a_n действительное число α_n, так что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < +\infty$. Тогда для любой функции $f \in \mathscr{C}(E)$ ряд с общим членом $f(a_n)\alpha_n$ абсолютно сходится, так как последовательность $(|f(a_n)|)$ ограничена числом $\|f\|$. Положим

$$\mu(f) = \sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)\alpha_n;$$

ясно, что μ есть линейная форма на $\mathscr{C}(E)$; она непрерывна, так как

$$|\mu(f)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |f(a_n)| \cdot |\alpha_n| \leqslant \|f\| \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|.$$

Следовательно, это есть мера на E; говорят, что она определена при помощи *масс* α_n, *расположенных в точках* $a_n \in E$; пример I соответствует случаю $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_n = 0$ для $n \neq 1$.

III. Рассмотрим компактный интервал $E = [a, b]$ из $\mathbf{R}$, не сводящийся к точке; для всякой функции $f \in \mathscr{C}(E)$ мы определили *интеграл от* f (Функции действ. перем., гл. II, § 1, n° 4)

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Отображение $f \to I(f)$ является линейной формой на $\mathscr{C}(E)$, которая непрерывна, так как согласно теореме о среднем

$$|I(f)| \leqslant (b-a) \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)| = (b-a)\|f\|,$$

стало быть, $f \to I(f)$ есть мера на E; она называется *мерой Лебега* *) на E.

Ясно, что термин «интеграл» и обозначение $\int f(x)\, d\mu(x)$ представляют собой расширение терминологии и обозначений, введенных для этого частного случая.

*) Относительно этой терминологии (которой в настоящей главе не дается исторического обоснования) см. Исторический очерк.

3. *Произведение меры на непрерывную функцию*

Пусть μ — мера на компактном пространстве E. Для любой функции $g \in \mathscr{C}(E)$ отображение

$$f \longrightarrow \mu(fg) = \int f(x)\, g(x)\, d\mu(x)$$

есть линейная форма на $\mathscr{C}(E)$; эта форма непрерывна, так как в силу (1)

$$|\langle fg, \mu\rangle| \leqslant M\, \|fg\| \leqslant M\, \|g\| \cdot \|f\|.$$

Следовательно, это есть мера ν на E, характеризуемая соотношением

$$\int f(x)\, d\nu(x) = \int f(x)\, g(x)\, d\mu(x) \tag{2}$$

для любой функции $f \in \mathscr{C}(E)$. Эта мера обозначается через $g \cdot \mu$; говорят, что это есть *произведение меры* μ *на функцию* g или *мера плотности* g *относительно* μ; иногда соотношение (2) записывают в сокращенной форме:

$$d\nu(x) = g(x)\, d\mu(x).$$

Очевидно,

$$g \cdot (\mu_1 + \mu_2) = g \cdot \mu_1 + g \cdot \mu_2, \quad (g_1 + g_2) \cdot \mu = g_1 \cdot \mu + g_2 \cdot \mu$$

и $(g_1 g_2) \cdot \mu = g_1 \cdot (g_2 \cdot \mu)$; иными словами, множество $\mathscr{M}(E)$, наделенное внешним законом композиции $(g, \mu) \longrightarrow g \cdot \mu$ и своей аддитивной структурой, является *модулем* над кольцом $\mathscr{C}(E)$.

Замечания. 1) Не следует смешивать *число* $(g \cdot \mu)(f) = \langle f, g \cdot \mu \rangle = \langle fg, \mu \rangle = \mu(fg)$ с *функцией* $x \rightarrow \mu(f)\, g(x)$, являющейся произведением функции g и числа $\mu(f)$.

2) В главе V мы определим произведение меры и на функцию, не обязательно непрерывную.

4. *Положительные меры*

Векторное пространство $\mathscr{C}(E)$ числовых функций, непрерывных на компактном пространстве E, есть *пространство Рисса* для отношения $f \leqslant g$ (гл. II, § 1, n° 3, пример 2). Его топология согласуется с его структурой упорядоченного векторного пространства (гл. II, § 1, n° 6). В соответствии с общими определениями (гл. II, § 2, n° 1) мы будем говорить, что мера μ на E *положительна*, если для всякой непрерывной функции $f \geqslant 0$, определенной на E, выполняется неравенство $\mu(f) \geqslant 0$; отношение порядка $\mu \leqslant \nu$ в пространстве $\mathcal{M}(E)$ мер на E означает, что $\nu - \mu$ есть положительная мера, и равносильно отношению «для любой непрерывной функции $f \geqslant 0$ $\mu(f) \leqslant \nu(f)$».

Теорема 1. *Всякая положительная линейная форма на пространстве Рисса $\mathcal{C}(E)$ непрерывна* (иначе говоря, является *положительной мерой* на E).

В самом деле, если μ — положительная линейная форма на $\mathcal{C}(E)$, а f — непрерывная числовая функция на E, то из неравенств $-\|f\| \leqslant f(x) \leqslant \|f\|$ для любого $x \in E$ следуют неравенства $-\|f\| \mu(1) \leqslant \mu(f) \leqslant \|f\| \mu(1)$ или, что то же самое, $|\mu(f)| \leqslant \leqslant \mu(1) \|f\|$, и теорема доказана.

Теорема 2. *Всякая мера на компактном пространстве E есть разность двух положительных мер.*

В самом деле, если μ есть мера на E, то существует такое $M > 0$, что для любой функции $f \in \mathcal{C}(E)$ выполняется неравенство $|\mu(f)| \leqslant M \|f\|$; а так как соотношение $0 \leqslant g \leqslant f$ влечет неравенство $\|g\| \leqslant \|f\|$, то оно влечет и $|\mu(g)| \leqslant M\|g\| \leqslant M\|f\|$, а это показывает, что мера μ относительно ограничена и, значит (гл. II, § 2, теорема 1), равна разности $\mu_1 - \mu_2$ двух положительных линейных форм на $\mathcal{C}(E)$; но согласно теореме 1 μ_1 и μ_2 являются (положительными) *мерами* на E.

Таким образом, пространство $\mathcal{M}(E)$ мер на E совпадает с пространством *относительно ограниченных линейных форм* на пространстве Рисса $\mathcal{C}(E)$; следовательно (гл. II, § 2, теорема 1), справедлива

Теорема 3. *Пространство $\mathcal{M}(E)$ мер на компактном пространстве E вполне решеточно.*

В согласии с обозначениями главы II для любой меры μ на E полагаем

$$\mu^+ = \sup(\mu, 0), \quad \mu^- = \sup(-\mu, 0), \quad |\mu| = \sup(\mu, -\mu);$$

напомним, что $\mu = \mu^+ - \mu^-$, $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ и $\inf(\mu^+, \mu^-) = 0$. Кроме того, для любой *положительной* функции $f \in \mathscr{C}(E)$ имеем

$$\int f\,d\mu^+ = \sup_{0 \leqslant g \leqslant f,\ g \in \mathscr{C}(E)} \int g\,d\mu \tag{3}$$

и

$$\int f\,d|\mu| = \sup_{|g| \leqslant f,\ g \in \mathscr{C}(E)} \int g\,d\mu, \tag{4}$$

откуда, в частности, для любой функции $f \in \mathscr{C}(E)$

$$\left|\int f\,d\mu\right| \leqslant \int |f|\,d|\mu|. \tag{5}$$

5. *Один способ определения меры*

Пусть H — *тотальное* множество в банаховом пространстве $\mathscr{C}(E)$, то есть (Топ. вект. пр-ва, гл. I, § 2) такое множество, что векторное подпространство V, порожденное множеством H, *всюду плотно* в $\mathscr{C}(E)$; иными словами, это означает, что всякая непрерывная на E числовая функция f может быть равномерно приближена линейными комбинациями (с действительными коэффициентами) функций, принадлежащих H (Общая топ., гл. X, § 5, n° 1). Для того чтобы линейная форма λ, определенная на V, могла быть продолжена до непрерывной линейной формы на $\mathscr{C}(E)$, то есть до меры на E, необходимо и достаточно, чтобы она была *непрерывна* на V, и тогда ее продолжение на $\mathscr{C}(E)$ *единственно*. В частности, имеет место

Предложение 1. *Пусть H — тотальное множество в банаховом пространстве $\mathscr{C}(E)$; если μ и ν — две меры на E и $\mu(f) = \nu(f)$ для любой функции $f \in H$, то $\mu = \nu$.*

Следствие. *Для того чтобы мера μ на E была равна нулю, необходимо и достаточно, чтобы $\int f\,d\mu = 0$ для любой функции f из некоторого тотального множества в $\mathscr{C}(E)$.*

Пример. Пусть $E = [0, 1]$; согласно теореме Вейерштрасса — Стоуна (Общая топ., гл. X, § 5, теорема 3) одночлены x^n ($n \geqslant 0$ — целое) образуют тотальное множество в $\mathscr{C}(E)$. Отсюда следует, что на E существует *не более одной меры* μ, для которой числа $c_n = \int x^n d\mu(x)$ имеют заданные значения. Эти числа называются *момен-*

тами меры μ; задача об отыскании условий, которым должна удовлетворять последовательность (c_n) действительных чисел для того, чтобы они были моментами некоторой меры на E, известна под названием «проблемы моментов».

Предложение 2. *Пусть V — всюду плотное векторное подпространство пространства $\mathscr{C}(E)$; пусть μ — линейная форма, определенная на V и такая, что $\mu(f) \geqslant 0$ для любой функции $f \geqslant 0$, принадлежащей V; тогда μ может быть единственным образом продолжена до меры на E, и эта мера положительна.*

Сначала покажем, что μ *непрерывна* на V, откуда будет следовать, что μ единственным образом продолжается до меры на E. По условию существует такая функция $f_0 \in V$, что $\|1 - f_0\| \leqslant \frac{1}{2}$, откуда $\frac{1}{2} \leqslant f_0$. Отсюда вытекает, что если $f \in V$, то неравенство $\|f\| \leqslant 1$ влечет $-2f_0 \leqslant f \leqslant 2f_0$; а поскольку μ положительна на V, то

$$-2\mu(f_0) \leqslant \mu(f) \leqslant 2\mu(f_0),$$

т. е. $|\mu(f)| \leqslant 2\mu(f_0)$, что доказывает непрерывность μ на V.

Остается показать, что мера, полученная в результате продолжения μ (и которую мы снова обозначим через μ), *положительна*. Пусть f — произвольная положительная функция из $\mathscr{C}(E)$; для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $g \in V$, что $\|f - g\| \leqslant \varepsilon$; отсюда в силу того, что $f \geqslant 0$, $g(x) \geqslant -\varepsilon$ для любого $x \in E$, откуда $g + 2\varepsilon f_0 \geqslant 0$, и значит, $\mu(g) \geqslant -2\varepsilon\mu(f_0)$. Но существует такое $M > 0$, что $|\mu(h)| \leqslant M\|h\|$ для любой функции $h \in \mathscr{C}(E)$; следовательно, $|\mu(f) - \mu(g)| \leqslant M\varepsilon$, откуда $\mu(f) \geqslant \mu(g) - M\varepsilon \geqslant -(M + 2\mu(f_0))\varepsilon$; а поскольку ε произвольно, то $\mu(f) \geqslant 0$.

6. *Норма меры*

Так как пространство $\mathscr{M}(E)$ мер на компактном пространстве E является *сопряженным* к банахову пространству $\mathscr{C}(E)$, то мы знаем (Топ. вект. пр-ва, гл. IV), что в $\mathscr{M}(E)$ определяется *норма* $\|\mu\|$: это наименьшее из чисел $a \geqslant 0$, для которых $|\mu(f)| \leqslant$

$\leqslant a\|f\|$ для любой функции $f \in \mathscr{C}(E)$; можно также написать, что

$$\|\mu\| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} |\mu(f)|. \tag{6}$$

Напомним, что $\mathscr{M}(E)$, наделенное этой нормой, *полно*, то есть является *банаховым пространством* (Топ. вект. пр-ва, гл. IV).

Предложение 3. *Для всякой меры μ на компактном пространстве E справедлива формула*

$$\|\mu\| = |\mu|(1) = \int d|\mu|. \tag{7}$$

Это следует непосредственно из формулы (4), примененной к случаю, когда f—постоянная, равная 1, ибо соотношения $|g| \leqslant 1$ и $\|g\| \leqslant 1$ равносильны.

Следствие 1. *Для всякой меры $\mu \geqslant 0$ на E имеем* $\|\mu\| = \mu(1)$.

Следствие 2. *Для всякой меры μ на E имеем* $\|\mu\| = \|\mu^+\| + \|\mu^-\|$.

В самом деле, $|\mu|(1) = \mu^+(1) + \mu^-(1) = \|\mu^+\| + \|\mu^-\|$.

Для любой меры μ на E действительное (положительное или отрицательное) число $\mu(1)$ называется *общей массой* меры μ; если мера μ *положительна*, то ее общая масса равна ее норме. Если мера μ *положительна* и ее общая масса *равна* 1, то говорят также, что ее значение $\mu(f)$ для непрерывной функции f есть *среднее* функции f (относительно μ).

Упражнения. 1) Пусть E — вполне регулярное пространство, а $\mathscr{C}^\infty(E)$ — пространство непрерывных и ограниченных на E числовых функций, наделенное нормой $\|f\| = \sup_{x \in E} |f(x)|$. Пусть $\widetilde{E}$ — компактное пространство, полученное в результате наделения E слабейшей равномерной структурой, для которой функции из $\mathscr{C}^\infty(E)$ равномерно непрерывны, и пополнения определенного таким образом равномерного пространства E (Общая топ., гл. IX, § 1, упр. 7); если каждой функции $f \in \mathscr{C}^\infty(E)$ поставить в соответствие ее продолжение по непрерывности $\widetilde{f}$ на $\widetilde{E}$, то будет определен изоморфизм банахова пространства $\mathscr{C}^\infty(E)$ на банахово пространство $\mathscr{C}(\widetilde{E})$. Вывести отсюда, что всякая непрерывная линейная форма на $\mathscr{C}^\infty(E)$ имеет вид $f \to \mu(\widetilde{f})$, где μ — некоторая мера на компактном пространстве $\widetilde{E}$.

Показать, что всякая положительная линейная форма на $\mathscr{C}^\infty(E)$ непрерывна.

2) Пусть E — компактное пространство, а λ и μ — две независимые меры (гл. II, § 1, n° 1) на E; показать, что $\|\lambda+\mu\| = \|\lambda\| + \|\mu\|$.

§ 2. Меры на локально компактном пространстве

1. *Непрерывные функции с компактным носителем*

Определение 1. *Пусть E — локально компактное пространство, а F — векторное пространство над* $\mathbf{R}$. *Носителем отображения f пространства E в F называется наименьшее замкнутое множество $S \in E$, такое, что $f(x)=0$ на дополнении S* (иными словами, S есть замыкание в E множества тех $x \in E$, для которых $f(x) \neq 0$).

Пусть E — локально компактное пространство, а F — топологическое векторное пространство; обозначим через $\mathscr{C}_F(E)$ векторное пространство непрерывных отображений E в F, а через $\mathscr{K}_F(E)$ подпространство пространства $\mathscr{C}_F(E)$, образованное непрерывными отображениями с *компактным носителем*; для любого компактного подмножества K из E через $\mathscr{K}_F(E, K)$ обозначим подпространство пространства $\mathscr{K}_F(E)$, состоящее из функций, носитель которых содержится в K. Вместо $\mathscr{C}_\mathbf{R}(E)$, $\mathscr{K}_\mathbf{R}(E)$ и $\mathscr{K}_\mathbf{R}(E, K)$ мы будем писать соответственно $\mathscr{C}(E)$, $\mathscr{K}(E)$ и $\mathscr{K}(E, K)$. Через $\mathscr{C}^\infty(E)$ мы будем обозначать подпространство (содержащее $\mathscr{K}(E)$) пространства $\mathscr{C}(E)$, состоящее из числовых функций, *непрерывных и ограниченных* на E; в этом пространстве $\|f\| = \sup\limits_{x\in E} |f(x)|$ есть *норма*, которая вводит в $\mathscr{C}^\infty(E)$ топологию равномерной сходимости; известно, что $\mathscr{C}^\infty(E)$, наделенное этой нормой, *полно* (Общая топ., гл. X, §§ 1 и 2). Кроме того, $\mathscr{C}^\infty(E)$ есть коммутативная алгебра над $\mathbf{R}$ и для любой пары функций из $\mathscr{C}^\infty(E)$ справедливо неравенство

$$\|fg\| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|.$$

Лемма 1. *Пусть E — локально компактное пространство, K — компактное подмножество из E и $(A_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ — конечное открытое покрытие множества K. Тогда найдется n непрерывных отображений f_k пространства E в* $[0, 1]$, *обладающих тем свойством, что носитель отображения f_k содержится в A_k для*

$1 \leqslant k \leqslant n$ *и что* $\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leqslant 1$ *для всех* $x \in E$ *и* $\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = 1$ *для всех* $x \in K$.

В самом деле, пусть E' — компактное пространство, полученное в результате присоединения к E бесконечно удаленной точки ω (Общая топ., гл. I, 2-е изд., § 10, теорема 4); множества $A_0 = \complement K$ и A_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ образуют открытое покрытие пространства E'. Пусть $(f_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ — непрерывное разбиение единицы, подчиненное этому покрытию (Общая топ., гл. IX, § 4, опр. 3); тогда функции f_k с номерами $k \geqslant 1$ удовлетворяют условиям леммы.

Следующая лемма обобщает приближение непрерывных на компактном пространстве функций со значениями в нормированном пространстве посредством линейных комбинаций непрерывных числовых функций (Общая топ., гл. X, § 5, предл. 5):

Лемма 2. *Пусть E — локально компактное пространство, F — локально выпуклое пространство над* $\mathbf{R}$, *K — компактное подмножество из E и g — непрерывное отображение E в* $[0, 1]$, *имеющее компактный носитель и равное* 1 *на K. Пусть, далее,* $\mathfrak{f}_k$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$ — *непрерывные отображения E в F с носителем, содержащимся в K. Тогда для любой полунормы q, непрерывной на F, и любого числа $\varepsilon > 0$ существует разбиение $g = \sum_{i=1}^{n} g_i$ отображения g на n таких непрерывных отображений g_i пространства E в* $[0, 1]$ *с компактными носителями, что если x_i — произвольная точка из носителя отображения g_i (для $1 \leqslant i \leqslant n$), то для любого $x \in E$*

$$q\left(\mathfrak{f}_k(x) - \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{f}_k(x_i)\, g_i(x)\right) \leqslant \varepsilon g(x) \quad \text{для} \quad 1 \leqslant k \leqslant m. \tag{1}$$

В самом деле, пусть U — открытое относительно компактное множество точек, в которых $g(x) > 0$. Так как функции $\mathfrak{f}_k$ равномерно непрерывны в некоторой компактной окрестности множества $\overline{U}$, то существует конечное открытое покрытие $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ множества $\overline{U}$, состоящее из таких относительно компактных множеств, что для любой пары x, y точек из одного и того же множества

A_i выполняется неравенство $q(\mathbf{f}_k(x)-\mathbf{f}_k(y))\leqslant\varepsilon$ для $1\leqslant k\leqslant m$. Согласно лемме 1 существует n таких непрерывных отображений h_i пространства E в $[0, 1]$, что носитель h_i содержится в A_i и что $\sum_{i=1}^{n} h_i(x)=1$ на $\overline{U}$; если положить $g_i=gh_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, то g_i будут непрерывными отображениями E в $[0, 1]$, для которых $g=\sum_{i=1}^{n} g_i$, и такими, что носитель g_i содержится в A_i для $1\leqslant i\leqslant n$. Пусть теперь x_i есть произвольная точка носителя g_i $(1\leqslant i\leqslant n)$; если $x\in A_i$, то

$$q(\mathbf{f}_k(x)g_i(x)-\mathbf{f}_k(x_i)g_i(x))=g_i(x)q(\mathbf{f}_k(x)-\mathbf{f}_k(x_i))\leqslant\varepsilon g_i(x)$$

для $1\leqslant k\leqslant m$, и это соотношение верно и для $x\notin A_i$, поскольку в этом случае $g_i(x)=0$. Отсюда, складывая эти соотношения и учитывая, что $\mathbf{f}_k g=\mathbf{f}_k$, получаем соотношения (1).

2. *Определение меры*

Определение 2. *Мерой Радона* (или просто *мерой*) *на локально компактном пространстве E называется всякая линейная форма μ на векторном пространстве $\mathscr{K}(E)$ непрерывных на E числовых функций с компактным носителем, удовлетворяющая следующему условию: для любого компактного множества $K\subset E$ сужение μ на подпространство $\mathscr{K}(E, K)$ функций из $\mathscr{K}(E)$, носитель которых содержится в K, непрерывно в топологии равномерной сходимости.*

Это означает, что для любого компактного множества $K\subset E$ существует такое зависящее лишь от K и μ число $M_K\geqslant 0$, что для всякой функции $f\in\mathscr{K}(E)$, *носитель которой содержится в K*, справедливо неравенство

$$|\mu(f)|\leqslant M_K\|f\|. \tag{2}$$

Это определение полностью совпадает с определением, данным в § 1, n° 1, когда E компактно. Если μ есть мера на локально компактном пространстве E, то значение $\mu(f)$ этой меры для функции $f\in\mathscr{K}(E)$ называется *интегралом от f относительно* μ и обозначается $\langle f, \mu\rangle$, $\int f d\mu$ или $\int f(x)d\mu(x)$ (иногда с несколькими стоящими рядом значками $\int$).

Обозначим через $\mathscr{M}(E)$ множество мер на E; это есть векторное пространство над $\mathbf{R}$.

В $\mathscr{K}(E)$ можно определить такую топологию отделимого локально выпуклого пространства, чтобы меры на E совпадали с линейными формами на $\mathscr{K}(E)$, непрерывными в этой топологии (упр. 1); тогда $\mathscr{M}(E)$ будет сопряженным к топологическому векторному пространству $\mathscr{K}(E)$.

Примеры. I. Пусть E — локально компактное пространство и a — произвольная точка из E; отображение $f \to f(a)$ есть мера на E, обозначаемая через ε_a (мера, определенная при помощи *единичной массы, расположенной в точке* a).

Вообще, пусть N — такое множество из E, что для любого компактного множества $K \subset E$ пересечение $N \cap K$ *конечно*; можно было бы также сказать, что N есть *дискретное замкнутое* подпространство E (действительно, в этом случае всякая точка из N обладает компактной окрестностью, содержащей лишь конечное число точек из N, и любое компактное подмножество из E может быть покрыто конечным числом таких окрестностей). Пусть α — числовая функция, определенная на E и такая, что N есть множество точек $x \in E$, где $\alpha(x) \neq 0$; для любой функции $f \in \mathscr{K}(E)$ сумма $\mu(f) = \sum\limits_{x \in E} \alpha(x) f(x)$ имеет определенное значение, так как в ней лишь конечное число членов отлично от 0; кроме того, если носитель функции f содержится в компактном множестве K и если положить $M_K = \sum\limits_{x \in N \cap K} |\alpha(x)|$, то $|\mu(f)| \leqslant M_K \|f\|$; тем самым доказано, что μ есть мера. Ее называют *дискретной* мерой, определенной при помощи *масс* $\alpha(x)$, *расположенных в точках* $x \in N$. Например, если E — *дискретное* пространство, то можно принять $N = E$; функции из $\mathscr{K}(E)$ являются числовыми функциями, равными нулю всюду, кроме некоторого конечного числа точек из E; в частности, если взять $\alpha(x) = 1$ для любого $x \in E$, то $\mu(f) = \sum\limits_{x \in E} f(x)$.

Отметим, что на дискретном пространстве E всякая мера μ дискретна; в самом деле, пусть для любого $x \in E$ числовая функция e_x такова, что $e_x(x) = 1$, $e_x(y) = 0$ для $y \neq x$. Для любой функции $f \in \mathscr{K}(E)$ можно написать, что $f = \sum\limits_{x \in E} f(x) e_x$; обозначим через μ произвольную меру на E и положим $\alpha(x) = \mu(e_x)$; тогда $\mu(f) = \sum\limits_{x \in E} f(x) \mu(e_x) = \sum\limits_{x \in E} \alpha(x) f(x)$, что и доказывает наше утверждение.

Пример I сразу же обобщается на случай, когда N есть произвольное множество в локально компактном пространстве E, а α — числовая функция, равная нулю на $\complement N$ и такая, что для любого компактного подмножества K из E сумма $\sum\limits_{x \in N \cap K} |\alpha(x)|$ *конечна*. Очевидно, что второй пример меры, приведенный в § 1, n° 2, относится к этому случаю.

II. Для всякой функции $f \in \mathcal{K}(\mathbf{R})$ существует компактный интервал $[a, b] \in \mathbf{R}$, вне которого f равна нулю; следовательно, существует интеграл

$$I(f) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx;$$

кроме того, согласно теореме о среднем (Функции действ. перем., гл. II, § 1, предл. 6) $|I(f)| \leqslant (b-a)\|f\|$; это показывает, что $f \to I(f)$ есть мера на $\mathbf{R}$; она называется *мерой Лебега*.

Замечание. Задание на локально компактном пространстве E меры μ определяет в E (с топологией пространства E) структуру; множество E, наделенное этой структурой, называется *локально компактным пространством с мерой*. Пусть E_1 — другое множество и φ — взаимно однозначное отображение E на E_1; в соответствии с общими определениями (Теор. мн., Рез., § 8, n° 5) структура локально компактного пространства с мерой, получаемая в результате *перенесения* на E_1 структуры пространства E посредством отображения φ, определяется следующим образом. Отображение φ переносит на E_1 топологию из E; тогда функции f из $\mathcal{K}(E_1)$ — это такие функции, что $f \circ \varphi$ принадлежит $\mathcal{K}(E)$, а мера μ_1 на E_1 определяется равенством $\mu_1(f) = \mu(f \circ \varphi)$.

В частности, *автоморфизм* структуры локально компактного пространства с мерой E есть такой гомеоморфизм σ пространства E, что $\mu(f) = \mu(f \circ \sigma)$ для любой функции $f \in \mathcal{K}(E)$; в этом случае говорят также, что мера μ *инвариантна* относительно гомеоморфизма σ.

Пример. Мера Лебега на $\mathbf{R}$ *инвариантна* относительно любого *сдвига* аддитивной группы $\mathbf{R}$. В самом деле, для любой функции $f \in \mathcal{K}(\mathbf{R})$ и любого действительного числа a, используя формулу замены переменных (Функции действ. перем., гл. II, § 2, формула (1)), получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+a)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt.$$

В дальнейшем будет показано, что на *любой локально компактной группе* G существует отличная от нуля мера, *инвариантная* относительно всех левых сдвигов группы G (левая мера Хаара), и отличная от 0 мера, инвариантная относительно всех правых сдвигов (правая мера Хаара); при этом обе эти меры определяются с точностью до постоянных множителей.

3. *Произведение меры на непрерывную функцию*

Пусть μ — мера на локально компактном пространстве E, и пусть g — числовая функция, непрерывная на E. Для любой функции $f \in \mathcal{K}(E)$ произведение fg имеет компактный носитель, и, значит, определена функция $\mu(fg)$, а отображение $f \to \mu(fg)$ есть линейная форма на $\mathcal{K}(E)$; покажем, что это есть мера. Пусть K — компактное подмножество из E, и пусть число $a_K \geqslant 0$ таково, что $|\mu(f)| \leqslant a_K \|f\|$ для всякой функции $f \in \mathcal{K}(E)$, носитель которой содержится в K; если $b_K = \sup\limits_{x \in K} |g(x)|$, то $|\mu(fg)| \leqslant a_K b_K \|f\|$. Следовательно, линейная форма $f \to \mu(fg)$ есть мера на E; мы будем обозначать ее через $g \cdot \mu$ и называть *произведением меры* μ *на функцию* g или еще *мерой плотности* g *относительно* μ (ср. гл. V). Таким образом, если $\nu = g \cdot \mu$, то для любой функции $f \in \mathcal{K}(E)$ выполняется равенство

$$\int f(x)\,d\nu(x) = \int f(x)\,g(x)\,d\mu(x),$$

которое сокращенно записывается в виде $d\nu(x) = g(x)\,d\mu(x)$.

Так же как и в § 1, n° 3, ясно, что множество $\mathcal{M}(E)$ мер на E, наделенное внешним законом композиции $(g, \mu) \to g \cdot \mu$ и своей аддитивной структурой, является *модулем* над кольцом $\mathcal{C}(E)$.

4. *Положительные меры*

Пространство $\mathcal{K}(E)$ числовых функций с компактным носителем, непрерывных на E, есть *пространство Рисса* для отношения порядка $f \leqslant g$. Будем говорить, что мера μ на E *положительна*, если для любой непрерывной числовой функции $f \geqslant 0$ с компактным носителем $\mu(f) \geqslant 0$. Множество $\mathscr{M}(E)$ мер на E наделено отношением порядка $\mu \leqslant \nu$, которое означает, что $\nu - \mu$ есть положительная мера, и равносильно отношению «$\mu(f) \leqslant \nu(f)$ для любой функции $f \geqslant 0$ из $\mathscr{K}(E)$».

Теорема 1. *Всякая положительная линейная форма на пространстве Рисса $\mathscr{K}(E)$ есть (положительная) мера на E.*

Пусть μ — положительная линейная форма на $\mathscr{K}(E)$ и K — произвольное компактное подмножество из E. Существует такое непрерывное отображение f_0 с компактным носителем пространства E в $[0, 1]$, что $f_0(x) = 1$ на K (лемма 1). Тогда для любой функции $g \in \mathscr{K}(E)$ с носителем, содержащимся в K, имеем $-\|g\| f_0 \leqslant g \leqslant \|g\| f_0$, и, значит, $|\mu(g)| \leqslant \|g\| \mu(f_0)$, что и доказывает теорему.

Теорема 2. *Всякая мера на локально компактном пространстве E есть разность двух положительных мер.*

В самом деле, пусть μ — мера на E, и пусть $f \geqslant 0$ — непрерывная на E функция с компактным носителем K; соотношение $0 \leqslant g \leqslant f$ в $\mathscr{K}(E)$ влечет, что $\|g\| \leqslant \|f\|$ и что носитель функции g содержится в K. По условию существует такое число $M_K \geqslant 0$, что $|\mu(h)| \leqslant M_K \|h\|$ для любой непрерывной функции h с носителем, содержащимся в K; следовательно, $|\mu(g)| \leqslant M_K \|g\| \leqslant$ $\leqslant M_K \|f\|$, что доказывает относительную ограниченность меры μ. Стало быть, μ представляет собой разность двух положительных линейных форм на $\mathscr{K}(E)$ (гл. II, § 2, теорема 1), которые, согласно теореме 1, являются мерами на E.

Итак, пространство $\mathscr{M}(E)$ мер на E совпадает с пространством относительно ограниченных линейных форм на пространстве Рисса $\mathscr{K}(E)$; следовательно (гл. II, § 2, теорема 1), справедлива

Теорема 3. *Пространство $\mathscr{M}(E)$ мер на локально компактном пространстве E вполне решеточно.*

В соответствии с обозначениями главы II для любой меры μ на E положим

$$\mu^+ = \sup(\mu, 0), \ \mu^- = \sup(-\mu, 0), \ |\mu| = \sup(\mu, -\mu);$$

тогда $\mu = \mu^+ - \mu^-$, $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ и $\inf(\mu^+, \mu^-) = 0$. Кроме того, для любой *положительной* функции $f \in \mathcal{K}(E)$ имеем

$$\int f\,d\mu^+ = \sup_{0 \leq g \leq f,\ g \in \mathcal{K}(E)} \int g\,d\mu \tag{3}$$

и

$$\int f\,d|\mu| = \sup_{|g| \leq f,\ g \in \mathcal{K}(E)} \int g\,d\mu, \tag{4}$$

откуда, в частности, для любой функции $f \in \mathcal{K}(E)$

$$\left|\int f\,d\mu\right| \leqslant \int |f|\,d|\mu|. \tag{5}$$

5. Один способ определения меры

Определение 3. *Пусть E — локально компактное пространство; говорят, что векторное подпространство V пространства $\mathcal{K}(E)$ изобильно* (соотв. *положительно изобильно*), *если для любого компактного подпространства K пространства E существует такая относительно компактная окрестность U множества K, что всякая непрерывная* (соотв. *непрерывная и положительная*) *числовая функция с носителем в K может быть равномерно приближена функциями* (соотв. *положительными функциями*) *из V с носителем в U.*

Если E *компактно*, то утверждение, что V изобильно, означает, что оно *плотно* относительно $\mathcal{C}(E)$; в этом случае V будет также положительно изобильно; в самом деле, в V найдется такая функция f_0, что $\|1 - f_0\| \leqslant \frac{1}{2}$, откуда $f_0 \geqslant \frac{1}{2}$; если $f \geqslant 0$ — функция из $\mathcal{C}(E)$, то существует $g \in V$, для которой $\|f - g\| \leqslant \varepsilon$; отсюда вытекает, что $\|f - (g + 2\varepsilon f_0)\| \leqslant 4\varepsilon$ и $g + 2\varepsilon f_0 \geqslant 0$.

Если $E = \mathbf{R}$, то *кусочно линейные* функции из $\mathcal{K}(\mathbf{R})$ (то есть примитивные ступенчатых функций) образуют положительно изобильное подпространство пространства $\mathcal{K}(\mathbf{R})$; в самом деле, если $f \geqslant 0$ — функция из $\mathcal{K}(\mathbf{R})$, носитель которой содержится в $I = [a, b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая строго возрастающая последовательность $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ точек из I, что $x_0 = a$, $x_n = b$ и что колебание функции f на каждом из интервалов $[x_i, x_{i+1}]$ (для $0 \leqslant i \leqslant n-1$) не превосходит ε. Если $g(x) = 0$ на дополнении к I, $g(x_i) = f(x_i)$ для $0 \leqslant i \leqslant n$ и g линейна на каждом из интервалов $[x_i, x_{i+1}]$, то $\|f - g\| \leqslant \varepsilon$.

Предложение 1. *Пусть V — изобильное подпространство пространства $\mathscr{K}(E)$. Для того чтобы линейная форма μ, определенная на V, могла быть продолжена до меры на E, необходимо и достаточно, чтобы для любого компактного множества $K \subset E$ сужение формы μ на подпространство V_K пространства V, образованное функциями из V с носителем в K, было непрерывно в топологии равномерной сходимости. Мера, полученная в результате продолжения формы μ, единственна.*

В силу определения меры на E и определения 3 единственность продолжения очевидна. Очевидно также, что сформулированное условие необходимо для существования продолжения. Чтобы доказать его достаточность, рассмотрим в E компактное множество K, и пусть U — такая его компактная окрестность, что подпространство $V_U = V \cap \mathscr{K}(E, U)$ функций из V с носителем в U плотно относительно подпространства $\mathscr{K}(E, K)$ в топологии равномерной сходимости. Так как по условию μ непрерывна на V_U в этой топологии, то она единственным образом продолжается до линейной формы, непрерывной на замыкании множества V_U в $\mathscr{K}(E, U)$ и тем более в $\mathscr{K}(E, K)$, которое, по условию, содержится в замыкании множества V_U. При этом значение определенной таким образом на $\mathscr{K}(E, K)$ линейной формы $\mu_{U,K}$ не зависит от самой компактной окрестности U множества K, обладающей тем свойством, что V_U плотно относительно $\mathscr{K}(E, K)$, так как если этим свойством обладают две компактные окрестности U_1 и U_2 множества K, то им тем более обладает и $U = U_1 \cup U_2$; а поскольку замыкание множества V_{U_1} (соотв. V_{U_2}) содержится в замыкании множества V_U, то $\mu_{U_1,K} = \mu_{U_2,K} = \mu_{U,K}$; стало быть, определенную таким образом на $\mathscr{K}(E, K)$ непрерывную линейную форму можно обозначить через μ_K. Кроме того, если $K_1 \subset K_2$, то μ_{K_1} есть сужение на $\mathscr{K}(E, K)$ формы μ_{K_2}, ибо если U — такая окрестность множества K_2, что V_U плотно относительно $\mathscr{K}(E, K_2)$, то V_U плотно также и относительно $\mathscr{K}(E, K_1)$. Следовательно, можно определить отображение μ пространства $\mathscr{K}(E)$ в $\mathbf{R}$, требуя, чтобы оно совпадало с μ_K на любом подпространстве $\mathscr{K}(E, K)$. А так как любые две функции из $\mathscr{K}(E)$ всегда принадлежат какому-нибудь одному $\mathscr{K}(E, K)$, то μ есть линейная форма на $\mathscr{K}(E)$, и поскольку ее сужение на $\mathscr{K}(E, K)$ непрерывно в топологии равномерной сходимости, то это есть *мера*, что и завершает доказательство.

Предложение 2. *Пусть V — положительно изобильное подпространство пространства $\mathcal{K}(E)$, и пусть μ — такая линейная форма на V, что $\mu(f) \geqslant 0$ для всякой функции $f \geqslant 0$ из V; тогда μ может быть единственным образом продолжена до меры на E, и эта мера положительна.*

Сначала покажем, что для любого компактного множества $K \subset E$ сужение μ на подпространство V_K пространства V, образованное функциями из V с носителем в K, *непрерывно* в топологии равномерной сходимости; этим будет доказано, что μ единственным образом продолжается до меры на E (предл. 1). Пусть h — непрерывное отображение с компактным носителем пространства E в $[0, 1]$, равное 1 на K (лемма 1); так как V положительно изобильно, то найдется такая *положительная* функция $f_0 \in V$, что $\|h - f_0\| \leqslant \frac{1}{2}$; в частности, $f_0(x) \geqslant \frac{1}{2}$ для любого $x \in K$. Отсюда для любой функции $g \in V_K$ выводим, что $-2\|g\| f_0 \leqslant g \leqslant 2\|g\| f_0$, откуда в силу того, что μ — положительная линейная форма на V,

$$|\mu(g)| \leqslant 2\|g\|\mu(f_0),$$

что и доказывает наше утверждение.

Остается показать, что мера на E, полученная в результате продолжения формы μ (и которую мы снова обозначим через μ), *положительна*. Пусть f — произвольная положительная функция из $\mathcal{K}(E)$; f есть равномерный предел последовательности функций $g_n \in V$, носитель которых содержится в некотором фиксированном компактном множестве U; следовательно, $\mu(f) = \lim_{n \to \infty} \mu(g_n)$. С другой стороны, как и выше, убеждаемся, что в V существует такая функция $f_1 \geqslant 0$, что $f_1(x) \geqslant \frac{1}{2}$ в U. Стало быть, если $\|f - g_n\| = \varepsilon_n$, то мы имеем неравенство $g_n - f \geqslant -\varepsilon_n f_1$, откуда $g_n \geqslant -\varepsilon_n f_1$, $\mu(g_n) \geqslant -\varepsilon_n \mu(f_1)$; отсюда, переходя к пределу, получаем $\mu(f) \geqslant 0$, что и завершает доказательство.

Замечание. Предложение 2 остается справедливым, если вместо того, чтобы предполагать V положительно изобильным, сделать лишь следующие два предположения:

1° всякая положительная функция из $\mathcal{K}(E)$ есть равномерный предел положительных функций из V (без каких бы то ни было гипотез относительно их носителей);

2° всякая функция $f \in \mathcal{K}(E)$ есть равномерный предел функций из V, носитель которых содержится в некотором (зависящем от f) фиксированном компактном множестве.

В самом деле, нетрудно убедиться в том, что доказательство первой части опиралось лишь на условие 1°, а доказательство второй части — лишь на 2°.

6. *Ограниченные меры*

Пусть E — локально компактное, но *не компактное* пространство. Вообще говоря, произвольная мера μ на E *не будет непрерывной* в пространстве $\mathcal{K}(E)$, наделенном топологией *равномерной сходимости* (определенной посредством нормы $\|f\|$); иными словами, вообще говоря, не существует такого числа $M \geqslant 0$, что для *любой функции* $f \in \mathcal{K}(E)$

$$|\mu(f)| \leqslant M \|f\|. \tag{6}$$

Определение 4. *Говорят, что мера μ на локально компактном пространстве E ограничена, если она непрерывна на $\mathcal{K}(E)$ в топологии равномерной сходимости.*

Таким образом, ограниченность меры μ означает, что μ принадлежит пространству, сопряженному к *нормированному* пространству $\mathcal{K}(E)$; обозначим это сопряженное пространство через $\mathcal{M}^1(E)$. Известно, что в этом случае норма $\|\mu\|$ меры μ определяется как наименьшее из чисел $M \geqslant 0$, для которых неравенство (6) выполняется для всякой функции $f \in \mathcal{K}(E)$; иными словами,

$$\|\mu\| = \sup_{\|f\| \leqslant 1,\ f \in \mathcal{K}(E)} |\mu(f)|. \tag{7}$$

Известно, что пространство $\mathcal{M}^1(E)$, наделенное этой нормой, есть *банахово пространство*.

Определение нормы $\|\mu\|$ посредством формулы (7) распространяется на все меры μ на E; для того чтобы мера μ была ограничена, необходимо и достаточно, чтобы $\|\mu\|$ была *конечна*.

Отметим, что на компактном пространстве всякая мера ограничена.

Примеры. 1) Мера ε_a, определенная при помощи единичной массы в точке a, ограничена, и, очевидно, $\|\varepsilon_a\|=1$.

2) Мера Лебега на $\mathbf{R}$ не ограничена; в самом деле, для любого целого $n>0$ существует функция $f\in\mathcal{K}(\mathbf{R})$ со значениями в $[0, 1]$, равная 1 на интервале $[-n, n]$ (лемма 1); следовательно, выполняются соотношения $\|f\|=1$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \geqslant \int\limits_{-n}^{n} f(x)\,dx=2n$, которые показывают, что не существует конечного числа M, удовлетворяющего условию (6).

3) Отображение $f\to\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)\,dx}{1+x^2}$ является ограниченной мерой на $\mathbf{R}$, так как для любой функции $f\in\mathcal{K}(\mathbf{R})$ имеем

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)\,dx}{1+x^2}\right|\leqslant\|f\|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi\|f\|.$$

4) Пусть μ — *произвольная* мера на локально компактном пространстве E, и пусть g — непрерывная на E числовая функция с *компактным носителем* (то есть элемент $\mathcal{K}(E)$); тогда мера $g\cdot\mu$ *ограничена*. В самом деле, для всякой функции $f\in\mathcal{K}(E)$ носитель функции fg содержится в носителе K функции g, откуда в силу (2) имеем

$$|\mu(fg)|\leqslant M_K\|fg\|\leqslant M_K\|g\|\cdot\|f\|;$$

следовательно, справедливо неравенство (6) с $M=M_K\|g\|$ (ср. § 3, следствие из предл. 11).

Пример 3 показывает, что $g\cdot\mu$ может быть ограничена и без того, чтобы g имела компактный носитель.

Предложение 3. *Для всякой меры μ на E справедлива формула*

$$\|\mu\|=\sup_{0\leqslant f\leqslant 1,\ f\in\mathcal{K}(E)}|\mu|(f). \tag{8}$$

В самом деле, согласно формуле (4) правую часть (8) можно записать в виде

$$\sup_{0\leqslant f\leqslant 1,\ f\in\mathcal{K}(E)}\Big(\sup_{|g|\leqslant f,\ g\in\mathcal{K}(E)}|\mu(g)|\Big)=\sup_{\|g\|\leqslant 1,\ g\in\mathcal{K}(E)}|\mu(g)|.$$

Следствие. *Для любой меры μ на E нормы мер μ и $|\mu|$ равны; для того чтобы мера μ была ограничена, необходимо и достаточно, чтобы была ограничена мера $|\mu|$.*

Предложение 4. *Если μ и ν — две положительные меры на E, то* $\|\mu+\nu\|=\|\mu\|+\|\nu\|$.

В самом деле, функции $f\in\mathcal{K}(E)$, удовлетворяющие условию $0\leqslant f\leqslant 1$, образуют множество S, фильтрующееся по отношению $\leqslant$. Следовательно, для положительной меры μ на E из (8) и из теоремы о монотонном пределе вытекает соотношение $\|\mu\|=\lim\limits_{f\in S}\mu(f)$; отсюда тотчас получаем искомое утверждение.

Следствие 1. *Если μ и ν — две положительные меры на E и $\mu\leqslant\nu$, то $\|\mu\|\leqslant\|\nu\|$; в частности, если ν ограничена, то μ тоже ограничена.*

В самом деле, $\|\nu\|=\|\mu\|+\|\nu-\mu\|$.

Следствие 2. *Для любой меры μ на E*

$$\|\mu\|=\|\mu^+\|+\|\mu^-\|.$$

В самом деле, норма меры μ равна норме меры $|\mu|=\mu^++\mu^-$ (следствие из предл. 3).

Предложение 5. *Если μ — ограниченная мера, а g — числовая функция, непрерывная и ограниченная на E, то мера $g\cdot\mu$ ограничена и* $\|g\cdot\mu\|\leqslant\|g\|\cdot\|\mu\|$.

В самом деле, для любой функции $f\in\mathcal{K}(E)$ имеем

$$|\mu(fg)|\leqslant\|\mu\|\cdot\|fg\|\leqslant\|\mu\|\cdot\|g\|\cdot\|f\|.$$

В главе IV, § 1, мы дадим другую интерпретацию нормы меры.

Замечание. В том случае, когда пространство E локально компактно, но не компактно, векторное пространство $\mathcal{K}(E)$, вообще говоря, не будет замкнутым подпространством банахова пространства $\mathcal{C}^\infty(E)$ функций, непрерывных и ограниченных на E. Более точно, обозначив через E' компактное пространство, полученное присоединением к E бесконечно удаленной точки ω (Общая топ. гл. I, 2-е изд., § 10, теорема 4), покажем, что замыкание $\overline{\mathcal{K}(E)}$ пространства $\mathcal{K}(E)$ в $\mathcal{C}^\infty(E)$ есть пространство непрерывных на E функций, *стремящихся к* 0, *когда x стремится к* ω. Действительно, если $f\in\mathcal{C}^\infty(E)$ есть точка прикосновения $\mathcal{K}(E)$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая непрерывная функция g с компактным носителем K, что $|f(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon$ для всех $x \in E$; следовательно, $|f(x)| \leqslant \varepsilon$ для любого $x \in \complement K$, откуда вытекает, что $f(x)$ стремится к 0, когда x стремится к ω. Обратно, если f обладает этим свойством, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое компактное множество $K \subset E$, что $|f(x)| \leqslant \varepsilon$ для любого $x \in \complement K$. Согласно лемме 1 существует непрерывное отображение h пространства E в $[0, 1]$ с компактным носителем, равное 1 на K; тогда $|f(x) h(x)| \leqslant \varepsilon$ на $\complement K$ и $f(x) = f(x) h(x)$ на K; а так как fh имеет компактный носитель и $|f(x) - f(x) h(x)| \leqslant 2\varepsilon$ для любого $x \in E$, то наше утверждение доказано.

Таким образом, всякая ограниченная на E мера μ, будучи непрерывной на $\mathcal{K}(E)$ в топологии равномерной сходимости, единственным образом продолжается по непрерывности на $\overline{\mathcal{K}(E)}$; значение продолжения меры μ для функции f из $\overline{\mathcal{K}(E)}$ мы будем снова обозначать через $\mu(f)$, $\langle f, \mu \rangle$ или $\int f \, d\mu$. Пространство $\overline{\mathcal{K}(E)}$ может быть отождествлено с множеством числовых функций, непрерывных на компактном пространстве E' и *обращающихся в 0 в точке* ω, то есть представляющих собой *замкнутую гиперплоскость* в банаховом пространстве $\mathcal{C}(E')$. Отсюда следует, что всякая ограниченная мера μ на E может быть продолжена до меры μ' на E', причем значение $\mu'(1)$ может быть выбрано произвольно; а поскольку всякая непрерывная на E' функция f единственным образом может быть представлена в виде $f = a + g$, где $a = f(\omega)$ и $g(\omega) = 0$, то $\mu'(f) = a\,\mu'(1) + \mu(g)$. Обратно, легко видеть, что сужение на $\mathcal{K}(E)$ произвольной меры на E' есть мера, *ограниченная* на E; последние могут, следовательно, быть охарактеризованы как меры на E, которые таким способом можно продолжить до мер на E' (ср. гл. IV, § 4 и гл. V).

7. *Широкая топология в пространстве мер*

Так как пространство $\mathcal{M}(E)$ мер на локально компактном пространстве E есть пространство линейных форм на векторном пространстве $\mathcal{K}(E)$, то в $\mathcal{M}(E)$ можно рассматривать топологию *простой* сходимости в $\mathcal{K}(E)$, которую мы назовем *широкой топологией* в $\mathcal{M}(E)$.

Если E — компактное пространство, то широкая топология в $\mathcal{M}(E)$ есть не что иное, как слабая топология в пространстве, сопряженном к банахову пространству $\mathcal{C}(E)$ (Топ. вект. пр-ва, гл. IV).

Широкая топология в $\mathcal{M}(E)$ есть топология отделимого локально выпуклого пространства, определенная посредством полунорм $\mu \to \sup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |\mu(f_i)|$, где $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ есть произвольная конечная последовательность функций из $\mathcal{K}(E)$. Утверждение, что фильтр $\mathfrak{F}$ в $\mathcal{M}(E)$ *широко сходится* к некоторой мере μ_0, означает, что для любой функции $f \in \mathcal{K}(E)$ выполняется равенство $\mu_0(f) = \lim_{\mathfrak{F}} \mu(f)$. Для всякой функции $f \in \mathcal{K}(E)$ отображение $\mu \to \mu(f)$ есть *широко непрерывная* линейная форма на пространстве $\mathcal{M}(E)$.

Предложение 6. *Пусть E — локально компактное пространство, и пусть для любого $x \in E$ через ε_x обозначена мера, определенная при помощи массы, равной $+1$, расположенной в точке x. Тогда отображение $x \to \varepsilon_x$ есть гомеоморфизм пространства E в пространство $\mathcal{M}(E)$ мер на E, наделенное широкой топологией. Если при этом E не компактно и если E' означает компактное пространство, полученное в результате присоединения к E бесконечно удаленной точки ω, то ε_x стремится к 0, когда x стремится к ω.*

Легко видеть, что отображение $x \to \varepsilon_x$ непрерывно на E, так как для любой функции $f \in \mathcal{K}(E)$ имеем $\langle f, \varepsilon_x \rangle = f(x)$ и так как f непрерывна. Если x и y — две различные точки из E, то существует такая функция $f \in \mathcal{K}(E)$, что $f(x) = 1$, $f(y) = 0$, и, значит, $\varepsilon_x \neq \varepsilon_y$; таким образом, $x \to \varepsilon_x$ — взаимно однозначное отображение E в $\mathcal{M}(E)$. Для компактного E тем самым уже показано, что $x \to \varepsilon_x$ есть гомеоморфизм E в $\mathcal{M}(E)$ (Общая топ., гл. I, 2-е изд., § 10, следствие 2 из теоремы 2). Если же E не компактно, то для любой функции $f \in \mathcal{K}(E)$ форма $\langle f, \varepsilon_x \rangle$, по определению, стремится к 0, когда x стремится к ω; следовательно, отображение $x \to \varepsilon_x$ продолжается по непрерывности на $E' = E \cup \{\omega\}$, принимая в точке ω значение 0. Это продолженное отображение снова взаимно однозначно, ибо $\varepsilon_x \neq 0$ для всех $x \in E$; таким образом, это есть гомеоморфизм компактного пространства E' в $\mathcal{M}(E)$, что и завершает доказательство предложения.

Предложение 7. *В пространстве $\mathcal{M}(E)$ мер на локально компактном пространстве E множество $\mathcal{M}_+(E)$ положительных мер полно в равномерной структуре, определяемой широкой топологией (и, значит, замкнуто в $\mathcal{M}(E)$ относительно этой топологии).*

В самом деле, рассмотрим фильтр Коши Φ для широкой равномерной структуры в $\mathcal{M}(E)$; по определению предел $\mu_0(f) = \lim_\Phi \mu(f)$ существует для любой функции $f \in \mathcal{K}(E)$, и на основании принципа продолжения неравенств для любой функции $f \geqslant 0$ из $\mathcal{K}(E)$ выполняется неравенство $\mu_0(f) \geqslant 0$; следовательно, μ_0 есть положительная мера на E (теорема 1).

Отметим, что само пространство $\mathcal{M}(E)$, вообще говоря, *не является полным* в широкой равномерной структуре (например, мы знаем, что если E компактно и бесконечно, то бесконечномерное пространство, сопряженное к банахову пространству $\mathcal{C}(E)$, не будет полным в слабой топологии (Топ. вект. пр-ва, гл. IV), что и доказывает наше утверждение).

Будем говорить, что подмножество H пространства $\mathcal{M}(E)$ *ограничено*, если для любой функции $f \in \mathcal{K}(E)$ выполняется условие $\sup\limits_{\mu \in H} |\mu(f)| < +\infty$. Отметим, что *всякая широко сходящаяся последовательность (μ_n) ограничена.*

Предложение 8. *Пусть H — ограниченное множество из $\mathcal{M}(E)$; для любого компактного множества $K \subset E$ существует такое число $M_K \geqslant 0$, что для всякой меры $\mu \in H$ и любой функции $f \in \mathcal{K}(E)$ с носителем в K выполняется неравенство $|\mu(f)| \leqslant M_K \|f\|$.*

В самом деле, подпространство $\mathcal{K}(E, K)$ пространства $\mathcal{K}(E)$, образованное непрерывными функциями с носителем, содержащимся в K, есть банахово пространство с нормой $\|f\|$; из условия вытекает, что сужения на $\mathcal{K}(E, K)$ мер $\mu \in H$ образуют множество, *слабо ограниченное* в пространстве, сопряженном к $\mathcal{K}(E, K)$, но мы знаем, что такое множество *сильно ограничено* (Топ. вект. пр-ва, гл. IV), откуда и следует предложение.

Предложение 9. *В пространстве $\mathcal{M}(E)$ мер на локально компактном пространстве E всякое ограниченное множество H относительно компактно в широкой топологии.*

Замыкание ограниченного множества в широкой топологии, очевидно, ограничено; значит, можно предположить, что H широко замкнуто; тогда все сводится к тому, чтобы доказать, что всякий ультрафильтр Φ в H широко сходится в $\mathscr{M}(E)$. По условию для любой функции $f \in \mathscr{K}(E)$ образ фильтра Φ при отображении $\mu \to \mu(f)$ есть базис ультрафильтра в $\mathbf{R}$, содержащего ограниченное множество и, значит, сходящегося, так как $\mathbf{R}$ локально компактно. Иными словами, Φ сходится в смысле простой сходимости к линейной форме μ_0 на $\mathscr{K}(E)$, и все сводится к доказательству того, что μ_0 есть мера; но это следует из предложения 8 и из принципа продолжения неравенств.

Следствие 1. *Пусть* ν — *положительная мера на* E; *тогда множество мер* μ, *для которых* $|\mu| \leqslant \nu$, *широко компактно.*

Следствие 2. *Множество ограниченных мер, для которых* $\|\mu\| \leqslant a$ ($a > 0$ — произвольное конечное число), *широко компактно.*

Отметим, что множество ограниченных мер, для которых $\|\mu\| = a$ (где $a > 0$), относительно компактно, *но*, вообще говоря, *не компактно* в широкой топологии, так как оно не является широко замкнутым. Например, если E не дискретно, то в $\mathscr{M}(E)$ мера 0 есть широкий элемент прикосновения для множества дискретных мер с нормой 2, определенных посредством масс $+1$ и -1, расположенных в двух различных точках. Действительно, это означает, что для любого конечного множества функций $f_k \in \mathscr{K}(E)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют такие две различные точки x и y из E, что $|f_k(x) - f_k(y)| \leqslant \varepsilon$ для любого индекса k.

Предложение 10. *В пространстве* $\mathscr{M}(E)$ *мер на* E *отображение* $\mu \to \|\mu\|$ *полунепрерывно снизу в широкой топологии.*

В самом деле, это отображение есть верхняя огибающая широко непрерывных функций $\mu \to |\mu(f)|$, когда f пробегает множество функций из $\mathscr{K}(E)$, для которых $\|f\| \leqslant 1$.

Отметим, что отображение $\mu \to |\mu|$ пространства $\mathscr{M}(E)$ в себя не будет, вообще говоря, непрерывным в широкой топологии (упр. 7).

Предложение 11. *Пусть* K — *компактное множество из* E *и* H — *ограниченное множество из* $\mathscr{M}(E)$; *тогда билинейная форма* $(f, \mu) \to \langle f, \mu \rangle$ *непрерывна на* $\mathscr{K}(E, K) \times H$, *если* $\mathscr{K}(E, K)$ *наделено топологией равномерной сходимости, а* H — *широкой топологией.*

В самом деле, существует такое число $M \geqslant 0$, что для любой функции $f \in \mathcal{K}(E, K)$ и любой меры $\mu \in H$ выполняется неравенство $|\mu(f)| \leqslant M \|f\|$ (предл. 8). Если μ_0 и μ — две меры из H, а f_0 и f — две функции из $\mathcal{K}(E, K)$, то

$$|\mu(f) - \mu_0(f_0)| = |\mu(f - f_0) + \mu(f_0) - \mu_0(f_0)| \leqslant M \|f - f_0\| + \\ + |\mu(f_0) - \mu_0(f_0)|;$$

последнее же выражение сколь угодно мало, если $\|f - f_0\|$ и $|\mu(f_0) - \mu_0(f_0)|$ достаточно малы, что и доказывает предложение (ср. Топ. вект. пр-ва, гл. IV).

Упражнения. °1) Пусть E — локально компактное, но не компактное пространство. Пусть, далее, $\mathfrak{A}$ — множество симметричных выпуклых множеств из $\mathcal{K}(E)$, след которых на каждом из подпространств $\mathcal{K}(E, K)$ (где K — произвольное компактное подмножество из E) есть окрестность 0 в этом подпространстве для топологии равномерной сходимости на K.

a) Показать, что $\mathfrak{A}$ есть фундаментальная система окрестностей 0 для локально выпуклой топологии в $\mathcal{K}(E)$, более сильной, чем топология равномерной сходимости на E, и называемой *сильной* топологией в $\mathcal{K}(E)$ (*индуктивный предел* топологий в $\mathcal{K}(E, K)$; ср. Топ. вект. пр-ва, гл. II, § 2); эта топология согласуется со структурой упорядоченного векторного пространства в $\mathcal{K}(E)$. Показать что топология, индуцированная в каждом из подпространств $\mathcal{K}(E, K)$ сильной топологией в $\mathcal{K}(E)$, совпадает с топологией равномерной сходимости; вывести отсюда, что каждое из подпространств $\mathcal{K}(E, K)$ сильно замкнуто в $\mathcal{K}(E)$.

b) Показать, что для того, чтобы линейное отображение пространства $\mathcal{K}(E)$ в локально выпуклое пространство F было непрерывно в сильной топологии, необходимо и достаточно, чтобы его сужение на каждое из подпространств $\mathcal{K}(E, K)$ было непрерывно в топологии равномерной сходимости. В частности, меры на E тождественны сильно непрерывным линейным формам.

Точно так же, для того чтобы множество H линейных отображений $\mathcal{K}(E)$ в F было равностепенно непрерывно (когда $\mathcal{K}(E)$ наделено сильной топологией), необходимо и достаточно, чтобы для любого компактного множества $K \subset E$ множество сужений на $\mathcal{K}(E, K)$ отображений множества H было равностепенно непрерывно (в топологии равномерной сходимости).

c) Вывести из b), что в пространстве $\mathcal{M}(E)$ мер на E всякое ограниченное множество H равностепенно непрерывно, если $\mathcal{K}(E)$ наделено сильной топологией.

°2) Пусть E — локально компактное пространство, счетное в бесконечности (Общая топ., гл. I, 2-е изд., § 10, n° 11).

a) Для любой числовой функции h, непрерывной на E и такой, что $h(x) > 0$ во всех точках из E, обозначим через $V(h)$ множество функций $f \in \mathscr{K}(E)$, для которых $|f| \leqslant h$; показать, что множества $V(h)$ образуют фундаментальную систему окрестностей 0 для сильной топологии в $\mathscr{K}(E)$ (воспользоваться теоремой Урысона). Вывести отсюда, что если E не компактно, то сильная топология в $\mathscr{K}(E)$ строго сильнее, чем топология равномерной сходимости.

b) Показать, что всякое сильно ограниченное в $\mathscr{K}(E)$ множество содержится в некотором подпространстве $\mathscr{K}(E, K)$, где K — надлежащим образом выбранное компактное множество из E (показать, что множество, не удовлетворяющее этому условию, не ограничено, построив при помощи теоремы Урысона надлежащую окрестность $V(h)$).

c) Показать, что пространство $\mathscr{K}(E)$ полно в сильной топологии (заметить, что фильтр Коши равномерно сходится к функции $f \in \mathscr{C}(E)$; рассуждая, как в b), показать, что носитель функции f непременно компактен).

°3) Пусть E_0 — несчетное вполне упорядоченное множество, имеющее наибольший элемент b и такое, что для любого $x < b$ множество элементов, не превосходящих x, счетно. Наделим E_0 топологией $\mathscr{T}(E_0)$, в которой E_0 компактно (Общая топ., гл. I, 2-е изд., § 10, упр. 12); обозначим через E локально компактное пространство, являющееся дополнением элемента b в E_0. Показать, что в $\mathscr{K}(E)$ сильная топология совпадает с топологией равномерной сходимости и что пространство $\mathscr{K}(E)$, наделенное этой топологией, полно (для любого $x \in E$ через K_x обозначим компактное множество, состоящее из $y \leqslant x$; если V есть окрестность 0 для сильной топологии в $\mathscr{K}(E)$, то через r_x обозначим наибольшее строго положительное число, обладающее тем свойством, что V содержит все непрерывные функции, носитель которых принадлежит K_x и для которых $\|f\| \leqslant r_x$. Показать, что нижняя грань чисел r_x в E строго положительна, доказав, что нельзя найти такую возрастающую последовательность (x_n) точек из E, чтобы $\lim\limits_{n \to \infty} r_{x_n} = 0$). Вывести отсюда, что в $\mathscr{K}(E$ существуют сильно ограниченные множества, которые не содержатся ни в каком из подпространств $\mathscr{K}(E, K)$ (K компактно).

4) Пусть E — локально компактное пространство и $\mathscr{M}(E)$ — пространство мер на E. Для любого компактного множества K из E и любого целого $n > 0$ обозначим через $S_{K,n}$ множество функций $f \in \mathscr{K}(E)$ с носителем в K и таких, что $\|f\| \leqslant n$. *Сильной* топологией в $\mathscr{M}(E)$ называется топология равномерной сходимости на множествах $S_{K,n}$.

a) Показать, что сильная топология в $\mathscr{M}(E)$ может быть определена при помощи полунорм $\mu \to |\mu|(f)$, где f пробегает множество положительных функций из $\mathscr{K}(E)$ (ср. гл. II, § 2, упр. 9). Показать, что $\mathscr{M}(E)$ полно в сильной топологии.

b) Показать, что для любого компактного множества $K \subset E$ билинейная форма $(f, \mu) \to \langle f, \mu \rangle$ непрерывна на $\mathcal{K}(E, K) \times \mathcal{M}(E)$, если $\mathcal{K}(E, K)$ наделено топологией равномерной сходимости, а $\mathcal{M}(E)$ — сильной топологией.

Показать, что билинейная форма $(f, \mu) \to \langle f, \mu \rangle$ не будет непрерывной на произведении $\mathcal{K}(E) \times \mathcal{M}(E)$, если и $\mathcal{K}(E)$ и $\mathcal{M}(E)$ наделены сильной топологией, а E счетно в бесконечности (ср. упр. 2).

c) Показать, что отображение $(g, \mu) \to g \cdot \mu$ произведения $\mathcal{C}(E) \times \mathcal{M}(E)$ в $\mathcal{M}(E)$ непрерывно, если $\mathcal{C}(E)$ наделено топологией компактной сходимости, а $\mathcal{M}(E)$ — сильной топологией.

d) Показать, что сильная топология в $\mathcal{M}(E)$ согласуется со структурой упорядоченного векторного пространства в $\mathcal{M}(E)$ (гл. II, § 1, n° 6). Вывести отсюда, что если H — фильтрующееся (по $\leqslant$) множество, мажорированное в $\mathcal{M}(E)$, то его верхняя грань в $\mathcal{M}(E)$ совпадает с пределом его фильтра сечений для сильной топологии (ср. там же, предл. 6).

5) a) Пусть Φ — фильтр во множестве $\mathcal{M}_+(E)$ положительных мер на E. Показать, что если Φ широко сходится, то для всякого компактного множества $K \subset E$ существуют такое множество $M \in \Phi$ и такое число $a_K \geqslant 0$, что $|\mu(f)| \leqslant a_K \|f\|$ для любой функции $f \in \mathcal{K}(E)$ с носителем в K и любой меры $\mu \in M$.

b) Пусть K — компактное множество из E. Показать, что билинейная форма $(f, \mu) \to \langle f, \mu \rangle$ непрерывна на $\mathcal{K}(E, K) \times \mathcal{M}_+(E)$, если $\mathcal{K}(E, K)$ наделено топологией равномерной сходимости, а $\mathcal{M}(E)$ — широкой топологией.

6) a) Показать, что для любой функции $g_0 \in \mathcal{C}(E)$ отображение $\mu \to g_0 \cdot \mu$ пространства $\mathcal{M}(E)$ в себя непрерывно в широкой топологии.

b) Показать, что если H — ограниченное множество в $\mathcal{M}(E)$, то отображение $(g, \mu) \to g \cdot \mu$ произведения $\mathcal{C}(E) \times H$ в $\mathcal{M}(E)$ непрерывно, если $\mathcal{C}(E)$ наделено топологией компактной сходимости, а $\mathcal{M}(E)$ и H — широкой топологией.

c) Показать, что отображение $(g, \mu) \to g \cdot \mu$ произведения $\mathcal{C}(E) \times \times \mathcal{M}_+(E)$ в $\mathcal{M}(E)$ непрерывно, если $\mathcal{C}(E)$ наделено топологией компактной сходимости, а $\mathcal{M}(E)$ и $\mathcal{M}_+(E)$ — широкой топологией.

7) Пусть E — компактный интервал $[0,1]$ из $\mathbf{R}$.

a) Пусть мера μ_n определена при помощи массы $+1$ в точке 0 и массы -1 в точке $\frac{1}{n}$. Показать, что последовательность (μ_n) широко стремится к 0 в $\mathcal{M}(E)$, в то время как $|\mu_n|$ не стремится широко к 0.

b) Пусть μ — мера Лебега на E, и пусть $g_n(x) = \sin nx$. Показать, что мера $(1 - g_n) \cdot \mu$ положительна и при неограниченном возрастании n широко стремится к μ, но не стремится сильно к μ. Вывести отсюда, что топологии, индуцируемые на $\mathcal{M}_+(E)$ сильной и широкой топологиями, различны (ср. упр. 5a)).

c) Показать, что билинейная форма $(f, \mu) \to \langle f, \mu \rangle$ не будет непрерывной на $\mathscr{C}(E) \times \mathscr{M}(E)$, если наделить $\mathscr{C}(E)$ топологией равномерной сходимости, а $\mathscr{M}(E)$ — широкой топологией.

d) Показать, что отображение $(g, \mu) \to g \cdot \mu$ произведения $\mathscr{C}(E) \times \times \mathscr{M}(E)$ в $\mathscr{M}(E)$ не будет непрерывным, если наделить $\mathscr{C}(E)$ топологией равномерной сходимости, а $\mathscr{M}(E)$ — широкой топологией.

8) Пусть μ_0 — мера на локально компактном пространстве E и $f \geqslant 0$ — функция из $\mathscr{K}(E)$. Показать, что для любого $\varepsilon > 0$ в $\mathscr{M}(E)$ найдется такая окрестность меры μ_0 для широкой топологии, что для любой меры μ из этой окрестности $\mu^+(f) \geqslant \mu_0^+(f) - \varepsilon$.

9) Пусть E — локально компактное, но не компактное пространство и $\mathscr{M}^1(E)$ — пространство ограниченных мер на E. $\mathscr{M}^1(E)$ представляет собой пространство, сопряженное к банахову пространству $\overline{\mathscr{K}(E)}$ функций, непрерывных на E и стремящихся к 0 в бесконечности; *ультрасильной* топологией в $\mathscr{M}^1(E)$ называется топология, определенная посредством нормы $\|\mu\|$, а *слабой* топологией — топология простой сходимости на $\overline{\mathscr{K}(E)}$.

a) Показать, что если E счетно в бесконечности, то слабая топология строго сильнее широкой топологии в $\mathscr{M}^1(E)$.

b) Показать, что в $\mathscr{M}^1(E)$ ультрасильная топология строго сильнее, чем сильная топология (заметить, что ε_x стремится сильно к 0 при x, стремящемся к бесконечности).

c) Показать, что если E счетно в бесконечности и не дискретно, то в $\mathscr{M}^1(E)$ слабая и сильная топологии не сравнимы.

d) Показать, что в $\mathscr{M}^1(E)$ всякое слабо ограниченное множество ограничено в ультрасильной топологии, но существуют сильно ограниченные и не слабо ограниченные множества.

10) Пусть E — локально компактное пространство и E' — компактное пространство, полученное в результате присоединения к E бесконечно удаленной точки ω. Пусть μ — ограниченная мера на E; показать, что на E' существует, и притом только одна, такая мера μ', которая является продолжением меры μ и для которой $\|\mu'\| = \|\mu\|$.

11) Пусть для любой меры μ на локально компактном пространстве E и любого гомеоморфизма σ пространства E на себя через μ_σ обозначена мера $f \to \mu(f \circ \sigma)$.

a) Показать, что $|\mu_\sigma| = |\mu|_\sigma$; вывести отсюда, что отображение $\mu \to \mu_\sigma$ пространства $\mathscr{M}(E)$ на себя непрерывно в широкой топологии и в сильной топологии.

b) Пусть $\mathscr{A}$ — множество непрерывных эндоморфизмов пространства $\mathscr{M}(E)$ (для широкой топологии в $\mathscr{M}(E)$), и пусть $\mathscr{A}$ наделено топологией равномерной сходимости на ограниченных множествах из $\mathscr{M}(E)$. Пусть, далее, $\mathscr{G}$ — множество гомеоморфизмов пространства E, наделенное топологией компактной сходимости, и для любого $\sigma \in \mathscr{G}$ $\mathscr{A}_\sigma$—отображение $\mu \to \mu_\sigma$, принадлежащее $\mathscr{A}$; показать, что если E компактно, то отображение $\sigma \to A_\sigma$ $\mathscr{G}$ в $\mathscr{A}$ непрерывно.

§ 3. Носитель меры

1. Сужение меры на открытое множество. Определение меры посредством локальных данных

Пусть E — локально компактное пространство и G — открытое множество из E. Подпространство G пространства E локально компактно, и всякую непрерывную на G числовую функцию с компактным носителем можно продолжить по непрерывности на все E, задавая ее равной 0 на $\complement G$; стало быть, таким путем можно отождествить пространство $\mathscr{K}(G)$ с подпространством пространства $\mathscr{K}(E)$, состоящим из непрерывных функций с компактным носителем, содержащимся в G. Если μ — мера на E, то легко видеть, что сужение μ_G меры μ на $\mathscr{K}(G)$ есть мера на G, которую называют *сужением* меры μ на открытое подпространство G или еще мерой, индуцированной на G мерой μ. На основании формулы (3) § 2 сужение меры μ^+ на G есть $(\mu_G)^+$.

Изложенное определение тотчас показывает, что если G и H — такие два открытых множества из E, что $G \supset H$, и если μ_G и μ_H — сужения μ на G и на H, то μ_H будет также сужением меры μ_G на открытое подпространство H локально компактного пространства G.

В главе V мы обобщим это определение на случай, когда G есть произвольное локально компактное подпространство пространства E.

Отметим, что мера на G *может и не быть* сужением меры, заданной на E (ср. гл. V).

Пусть, например, G — открытый интервал $]0, 1[$ из $\mathbf{R}$; отображение $f \to \int_0^1 \frac{f(x)}{x}\,dx$ есть мера на G, так как всякая функция из $\mathscr{K}(G)$ обращается в нуль в некоторой окрестности 0 из $\mathbf{R}$. Но эта мера не может быть продолжена в меру на $\mathbf{R}$, так как тогда она была бы ограничена на множестве функций $f \in \mathscr{K}(G)$, для которых $\|f\| \leqslant 1$, но это неверно.

Однако имеет место следующее предложение:

Предложение 1. *Пусть $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ — открытое покрытие пространства E, и пусть на каждом подпространстве G_α задана мера*

μ_α *так, что для любой пары* (α, β) *сужения мер* μ_α *и* μ_β *на* $G_\alpha \cap G_\beta$ *совпадают. При этих условиях существует, и притом только одна, мера* μ *на* E, *сужение которой на* G_α *равно* μ_α *для любого индекса* $\alpha \in A$.

Прежде всего покажем, что всякая функция $f \in \mathscr{K}(E)$ может быть записана в виде $f = \sum_i f_i$, где для каждой из функций $f_i \in \mathscr{K}(E)$ существует такой индекс α_i, что носитель функции f_i содержится в G_{α_i}. Если K — носитель функции f, то найдется конечное число таких индексов α_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, что G_{α_i} образуют покрытие множества K; пусть h_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — непрерывные отображения пространства E в $[0, 1]$, носители которых компактны и содержатся в G_{α_i} для $1 \leqslant i \leqslant n$, и $\sum_{i=1}^{n} h_i(x) = 1$ на K (§ 2, лемма 1); тогда функции $f_i = fh_i$ удовлетворяют поставленному условию. Этим, прежде всего, показано, что если существует мера μ, отвечающая нашему требованию, то она *единственна*, ибо для всякой конечной суммы $f = \sum_i f_i$, где $f_i \in \mathscr{K}(G_{\alpha_i})$, должно выполняться равенство $\mu(f) = \sum_i \mu_{\alpha_i}(f_i)$. Далее, существование на $\mathscr{K}(E)$ линейной формы μ, сужение которой на каждое из подпространств $\mathscr{K}(G_\alpha)$ равно μ_α, будет установлено, если будет доказано следующее свойство: если $(g_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ и $(h_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ — такие две конечные последовательности функций из $\mathscr{K}(E)$, что $g_i \in \mathscr{K}(G_{\alpha_i})$ для $1 \leqslant i \leqslant m$, $h_j \in \mathscr{K}(G_{\beta_j})$ для $1 \leqslant j \leqslant n$ и $\sum_{i=1}^{m} g_i(x) = \sum_{i=1}^{n} h_j(x) = 1$ на K, то $\sum_{i=1}^{m} \mu_{\alpha_i}(fg_i) = \sum_{j=1}^{n} \mu_{\beta_j}(fh_j)$. Но $fg_i = \sum_{j=1}^{n} fg_ih_j$, откуда

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_{\alpha_i}(fg_i) = \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} \mu_{\alpha_i}(fg_ih_j) \Big).$$

Точно так же

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_{\beta_j}(fh_j) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{m} \mu_{\beta_j}(fg_ih_j) \Big).$$

А поскольку носитель fg_ih_j содержится в $G_{\alpha_i} \cap G_{\beta_j}$, то $\mu_{\alpha_i}(fg_ih_j) = \mu_{\beta_j}(fg_ih_j)$, что и устанавливает наше утверждение.

Остается показать, что линейная форма μ является мерой, то есть что для любого компактного множества $K \subset E$ сужение формы μ на $\mathscr{K}(E, K)$ непрерывно в топологии равномерной сходимости. Пусть (G_{α_i}) — покрытие множества K конечным числом множеств G_α, и пусть h_i — такие непрерывные отображения пространства E в $[0, 1]$, что носитель функции h_i компактен и содержится в G_{α_i} и что $\sum_{i=1}^{n} h_i(x) = 1$ на K. Если H_i — носитель функции h_i, то, по условию, найдется такое число $a_i \geqslant 0$, что $|\mu_{\alpha_i}(g)| \leqslant a_i \| g \|$ для любой непрерывной функции g с носителем в H_i; следовательно, для всякой непрерывной функции f с носителем в K $|\mu_{\alpha_i}(fh_i)| \leqslant a_i \| fh_i \| \leqslant a_i \| f \|$, откуда

$$|\mu(f)| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \| f \|,$$

ч. т. д.

Следствие (принцип локализации). *Пусть μ и ν — две меры на E, и пусть (G_α) — такое семейство открытых множеств из E, что для любого α сужения мер μ и ν на G_α равны между собой; тогда сужения мер μ и ν на $G = \bigcup_{\alpha} G_\alpha$ тоже равны.*

2. Носитель меры

Пусть μ — мера на локально компактном пространстве, и пусть $\mathfrak{F}$ — множество открытых множеств $U \subset E$, обладающих тем свойством, что сужение меры μ на U равно *нулю* (или, как еще говорят, что мера μ *не содержит массы* в U); из принципа локализации сразу вытекает, что если U_0 есть *объединение* множеств $U \in \mathfrak{F}$, то оно само принадлежит $\mathfrak{F}$ и, значит, является наибольшим из множеств, входящих в $\mathfrak{F}$.

Определение 1. *Носителем меры μ на локально компактном пространстве E называется замкнутое множество, являющееся дополнением наибольшего открытого множества U из E, обладающего тем свойством, что μ не содержит массы в U.*

Выражение, что точка $x \in E$ не принадлежит носителю меры μ, означает, что существует такая окрестность V точки x, что сужение меры μ на V равно нулю; значит, утверждение, что x принадлежит носителю меры μ, означает, что для *любой* окрестности V точки x найдется такая функция $f \in \mathcal{K}(E)$, что ее носитель содержится в V и $\mu(f) \neq 0$.

Примеры. 1) Для того чтобы мера на E была равна нулю, необходимо и достаточно, чтобы ее носитель был *пуст*.

2) Носителем меры Лебега на $\mathbf{R}$ является вся прямая $\mathbf{R}$; действительно, этот носитель не пуст и инвариантен относительно любого сдвига.

3) Рассмотрим на интервале $E = [0, 1]$ счетное всюду плотное множество (a_n), и пусть μ есть мера, определенная посредством масс 2^{-n}, расположенных в точках a_n (для любого целого $n \geqslant 0$). Носителем меры μ служит весь интервал E; в самом деле, пусть x — какая-нибудь точка из E, V — окрестность этой точки и $f \geqslant 0$ — непрерывная числовая функция, определенная на E, равная 1 в точке x и имеющая носитель, содержащийся в V (§ 2, лемма 1); тогда множество тех точек $y \in V$, для которых $f(y) > 0$, открыто в E и, значит, содержит некоторую точку a_n, откуда $\mu(f) \geqslant f(a_n) 2^{-n} > 0$.

Предложение 2. *Носитель меры* μ *совпадает с носителем меры* $|\mu|$ *и является объединением носителей мер* μ^+ *и* μ^-.

В самом деле, если сужение меры μ на открытое множество U равно нулю, то это справедливо и для сужений мер μ^+ и μ^-, и обратно.

Отметим, что носители мер μ^+ и μ^- могут быть не пустыми и *совпадающими между собой* (ср. гл. V).

Предложение 3. *Если* μ *и* ν *— две меры на локально компактном пространстве* E *и* $|\mu| \leqslant |\nu|$, *то носитель меры* μ *содержится в носителе меры* ν.

Действительно, если сужение меры ν на некоторое открытое множество равно нулю, то это верно и для меры μ.

Предложение 4. *Носитель суммы двух мер содержится в объединении их носителей.*

В самом деле, если сужения двух мер на некоторое открытое множество равны нулю, то сужение их суммы тоже равно нулю.

Если μ и ν — две положительные меры, то носитель меры $\lambda = \mu + \nu$ совпадает с объединением носителей мер μ и ν; действительно, если x_0 — точка из этого объединения и V — произвольная окрестность точки x_0, то существует такая непрерывная функция $f \geqslant 0$, что ее носитель содержится в V и одно из двух чисел $\mu(f)$, $\nu(f)$ строго положительно; тогда тем более $\lambda(f) = \mu(f) + \nu(f) \geqslant \geqslant \min(\mu(f), \nu(f)) > 0$.

Предложение 5. *Носитель сужения меры μ на открытое множество U есть след на U носителя меры μ.*

Предложение очевидным образом следует из определений.

Предложение 6. *Множество мер на локально компактном пространстве E, носитель которых содержится в замкнутом множестве F, есть широко замкнутое векторное подпространство.*

В самом деле, это множество есть пересечение широко замкнутых гиперплоскостей, имеющих уравнения $\mu(f) = 0$, где f пробегает множество функций из $\mathscr{K}(E)$, носитель которых не пересекается с F.

Предположим, что E *не компактно*; если в пространстве $\mathscr{M}(E)$ мер на E задан фильтр Φ, то мы будем говорить, что носитель меры μ *бесконечно удаляется по* Φ, если для любого компактного множества $K \subset E$ существует такое множество $M \in \Phi$, что носитель любой меры $\mu \in M$ не пересекается с K.

Предложение 7. *Если Φ — такой фильтр в $\mathscr{M}(E)$, что носитель меры μ бесконечно удаляется по Φ, то μ широко сходится к 0 по Φ.*

В самом деле, пусть f — произвольная функция из $\mathscr{K}(E)$, и пусть K — ее носитель. По условию найдется такое множество $M \in \Phi$, что для всякой меры $\mu \in M$ носитель μ не пересекается с K; следовательно, $\mu(f) = 0$ для любой меры $\mu \in M$, что и доказывает предложение.

3. Характеризация носителя меры

По определению, если носитель функции $f \in \mathscr{K}(E)$ *не пересекается* с носителем меры μ, то $\mu(f) = 0$; более того:

Предложение 8. *Пусть μ — мера на локально компактном пространстве E. Для всякой непрерывной функции f с компактным носителем, равной нулю на носителе S меры μ, имеем $\mu(f) = 0$.*

Пусть K — носитель функции f. Зададим $\varepsilon > 0$ и обозначим через V множество тех $x \in E$, для которых $|f(x)| < \varepsilon$; тогда, по условию, V есть открытое множество, содержащее S, и следовательно, $\complement S$ есть окрестность компактного множества $K \cap \complement V$. Значит, существует непрерывное отображение h пространства E в $[0, 1]$, равное 1 на $K \cap \complement V$ и имеющее носитель, содержащийся в $\complement S$ (§ 2, лемма 1). А поскольку носитель функции fh не пересекается с S, то $\mu(fh) = 0$. С другой стороны, $f = fh$ на $K \cap \complement V$ и $|fh| \leqslant |f|$ на E, и стало быть, в силу выбора V, на E выполняется неравенство $|f - fh| \leqslant 2\varepsilon$. Наконец, заметим, что, по условию, найдется такое число M_K, что $|\mu(g)| \leqslant M_K \|g\|$ для любой функции $g \in \mathcal{K}(E)$, носитель которой содержится в K; а так как носитель функции $f - fh$ содержится в K, то $|\mu(f - fh)| \leqslant 2M_K\varepsilon$, и следовательно, $|\mu(f)| = |\mu(f - fh)| \leqslant 2M_K\varepsilon$; поскольку же ε произвольно, то $\mu(f) = 0$.

Следствие. *Если две функции f, g из $\mathcal{K}(E)$ равны между собой на носителе меры μ, то $\mu(f) = \mu(g)$.*

Для *положительных* мер предложение 8 допускает следующее дополнение:

Предложение 9. *Пусть μ — положительная мера на E; если $f \geqslant 0$ — такая функция из $\mathcal{K}(E)$, что $\mu(f) = 0$, то f равна нулю на носителе меры μ.*

Пусть x — точка из E, в которой $f(x) > 0$; покажем, что x не принадлежит носителю меры μ. Действительно, в этом случае существуют такая окрестность V точки x и такое число $a > 0$, что в этой окрестности $f(y) \geqslant a$. Обозначим через g непрерывную функцию $g \geqslant 0$ с носителем в V и покажем, что $\mu(g) = 0$; в самом деле, если положить $b = \|g\|$, то $g \leqslant \frac{b}{a} f$, откуда $\mu(g) \leqslant$ $\leqslant \frac{b}{a}\mu(f) = 0$.

Предложение 10. *Пусть μ — мера на локально компактном пространстве E; для всякой непрерывной на E числовой функции g носитель меры $g \cdot \mu$ является замыканием T множества точек носителя S меры μ, в которых $g(x) \neq 0$.*

В самом деле, пусть точка x_0 не принадлежит T; тогда найдется такая открытая окрестность V точки x_0, что в каждой точке из $V \cap S$ функция g равна нулю; если носитель функции $f \in \mathscr{K}(E)$ принадлежит V, то fg обращается в нуль на S, и значит (предл. 8), $\mu(gf) = 0$; иными словами, сужения $g \cdot \mu$ на V равно нулю.

Обратно, предположим, что сужение $g \cdot \mu$ на некоторую открытую окрестность W точки x_0 равно нулю, и покажем, что не существует ни одной точки из $W \cap S$, в которой $g \neq 0$. В самом деле, если бы такая точка y существовала, то она имела бы содержащуюся в W компактную окрестность U, в каждой точке x которой $g(x) \neq 0$; но тогда всякую функцию $f \in \mathscr{K}(E)$ с носителем в U можно записать в виде $f = gh$, где $h \in \mathscr{K}(E)$ имеет носитель в $U \subset W$; стало быть, $\mu(f) = \mu(gh) = 0$, что противоречит нашему предположению $y \in S$.

Отметим, что T содержится в пересечении носителя S меры μ и носителя функции g, но не обязано совпадать с этим пересечением. Например, если $E = \mathbf{R}$, μ — мера, определенная посредством массы 1, расположенной в точке 0, и если $g(x) = x$, то $g \cdot \mu = 0$, хотя пересечение носителей для g и μ есть точка 0 и, значит, не пусто.

Следствие. *Для того чтобы мера $g \cdot \mu$ была равна 0, необходимо и достаточно, чтобы функция g обращалась в нуль на носителе меры μ.*

4. Меры с компактным носителем

Предложение 11. *Пусть E — локально компактное пространство; если пространство $\mathscr{C}(E)$ всех непрерывных на E числовых функций наделено топологией компактной сходимости, то для того, чтобы мера на E могла быть продолжена до непрерывной линейной формы на $\mathscr{C}(E)$, необходимо и достаточно, чтобы ее носитель был компактен; тогда продолжение единственно.*

В самом деле, пространство $\mathscr{K}(E)$ *всюду плотно* в $\mathscr{C}(E)$ в топологии компактной сходимости, так как для всякого компактного множества $A \subset E$ существует функция $h \in \mathscr{K}(E)$, равная 1 на A (§ 2, лемма 1); следовательно, для любой функции $f \in \mathscr{C}(E)$ функция fh, принадлежащая $\mathscr{K}(E)$, равна f на A. Таким образом, все сводится к тому, чтобы выяснить, когда μ непрерывна на $\mathscr{K}(E)$ в топологии компактной сходимости. Если это имеет место, то существуют такое компактное множество K и такое число $a > 0$, что $|\mu(f)| \leqslant a \sup\limits_{x \in K} |f(x)|$ для любой функции $f \in \mathscr{K}(E)$; если носитель функции $g \in \mathscr{K}(E)$ не пересекается с K, то $\mu(g) = 0$, что доказывает, что носитель меры μ содержится в K. Обратно, предположим, что носитель S меры μ компактен. Пусть g — непрерывное отображение пространства E в $[0, 1]$, имеющее компактный носитель H и равное 1 в некоторой компактной окрестности множества S (§ 2, лемма 1). Для всякой функции $f \in \mathscr{K}(E)$ функция $f - fg$ равна нулю в некоторой окрестности множества K, и значит, по определению носителя меры μ, $\mu(f) = \mu(fg)$; отсюда $|\mu(f)| \leqslant M_H \| fg \| \leqslant M_H \sup\limits_{x \in H} | f(x) |$, что и завершает доказательство.

Следствие. *Всякая мера с компактным носителем ограничена.*

В самом деле, поскольку такая мера непрерывна в топологии компактной сходимости, то она тем более непрерывна в более сильной топологии равномерной сходимости.

5. *Точечные меры. Меры с конечным носителем*

Предложение 12. *Пусть a_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — различные точки локально компактного пространства E. Всякая мера на E, носитель которой содержится в множестве точек a_i, есть линейная комбинация мер ε_{a_i} $(1 \leqslant i \leqslant n)$.*

В самом деле, такая мера μ равна нулю для любой функции $f \in \mathscr{K}(E)$, удовлетворяющей n соотношениям $f(a_i) = 0$ (предл. 8); а так как эти соотношения можно записать в виде $\varepsilon_{a_i}(f) = 0$, то μ является линейной комбинацией мер ε_{a_i} (Алгебра, гл. II, § 4, теорема 1).

В частности, всякая мера, носитель которой сводится к одной точке x, имеет вид $\alpha\varepsilon_x$, где α — отличный от нуля скаляр; такую меру называют *точечной мерой*; значит, любая мера с конечным носителем есть сумма точечных мер.

Теорема 1. *Всякая мера μ на локально компактном пространстве E является широким элементом прикосновения для векторного* *пространства мер с конечным носителем, содержащимся в носителе меры* μ.

В самом деле, возьмем конечное число функций f_k $(1 \leqslant k \leqslant p)$ из $\mathscr{K}(E)$ и обозначим через K компактное множество, содержащее носители всех функций f_k. Пусть g — непрерывное отображение пространства E в $[0, 1]$ с компактным носителем, равное 1 на K (§ 2, лемма 1). Применим лемму 2 из § 2: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение $g = \sum_{i=1}^{n} g_i$ отображения g на n непрерывных отображений E в $[0, 1]$, что если x_i — произвольная точка носителя функции g_i (для $1 \leqslant i \leqslant n$), то для любого $x \in E$ выполняются неравенства

$$\left| f_k(x) - \sum_{i=1}^{n} f_k(x_i)\, g_i(x) \right| \leqslant \varepsilon g(x) \quad \text{для} \quad 1 \leqslant k \leqslant p.$$

Отсюда следует, что для $1 \leqslant k \leqslant p$

$$\left| \mu(f_k) - \sum_{i=1}^{n} f_k(x_i)\, \mu(g_i) \right| \leqslant \varepsilon\, |\mu|(g). \tag{1}$$

Но если носитель функции g_i не пересекается с носителем S меры μ, то $\mu(g_i) = 0$; если же носитель функции g_i пересекается с S, то можно взять $x_i \in S$; положив $\nu_i = \mu(g_i)\, \varepsilon_{x_i}$, мы можем записать соотношения (1) в виде

$$\left| \mu(f_k) - \sum_{i=1}^{n} \nu_i(f_k) \right| \leqslant \varepsilon\, |\mu|(g) \quad \text{для} \quad 1 \leqslant k \leqslant p,$$

что и доказывает теорему, ибо ε произвольно.

Если $\mu \geqslant 0$, то $\nu_i \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$; следовательно:

Следствие 1. *Всякая положительная мера* μ *на* E *является широким элементом прикосновения для выпуклого конуса положительных мер с конечным носителем, содержащимся в носителе меры* μ.

Следствие 2. *Всякая ограниченная мера* μ *есть широкий элемент прикосновения для выпуклого множества мер с конечным носителем, содержащимся в носителе меры* μ, *и имеющих норму, не превосходящую* $\|\mu\|$.

Действительно, в обозначениях, введенных при доказательстве теоремы 1, имеем $\|\nu_i\| = |\mu(g_i)|$, откуда $\left\|\sum_{i=1}^{n} \nu_i\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|\nu_i\| = \sum_{i=1}^{n} |\mu(g_i)| \leqslant |\mu|(g) \leqslant \|\mu\|$, так как $\|g\| \leqslant 1$.

Замечания. 1) Пусть C — множество мер ν с конечным носителем, содержащимся в носителе меры μ, и таких, что $\|\nu\| \leqslant \|\mu\|$. Когда ν стремится к μ, оставаясь в C, то $\varliminf_{\nu \to \mu, \nu \in C} \|\nu\| \geqslant \|\mu\|$, поскольку функция $\nu \to \|\nu\|$ полунепрерывна снизу в широкой топологии (§ 2, предл. 10). Но так как $\|\nu\| \leqslant \|\mu\|$ для $\nu \in C$, то $\|\nu\|$ *стремится к* $\|\mu\|$, когда ν стремится к μ, оставаясь в C.

2) Теорему 1 с ее следствиями можно также получить, применяя теорию двойственности (Топ. вект. пр-ва, гл. IV). В самом деле, пространства $\mathscr{K}(E)$ и $\mathscr{M}(E)$ *приводятся в двойственность* билинейной формой $\langle f, \mu\rangle = \int f\,d\mu$, и широкая топология есть не что иное, как соответствующая слабая топология $\sigma(\mathscr{M}(E), \mathscr{K}(E))$. Обозначим через V векторное подпространство пространства $\mathscr{M}(E)$, порожденное мерами ε_a, где a пробегает носитель S меры μ; чтобы показать, что μ есть широкий элемент прикосновения для V, достаточно показать, что μ ортогональна к подпространству V° пространства $\mathscr{K}(E)$, ортогональному к V, то есть что соотношения $\langle f, \varepsilon_a\rangle = 0$ (где a — произвольный элемент из S) влекут $\langle f, \mu\rangle = 0$; но это не что иное, как предложение 8. Точно так же, если P есть выпуклый конус с вершиной 0, порожденный мерами ε_a, то для доказательства следствия 1 достаточно установить, что положительная мера μ принадлежит конусу, полярному конусу из $\mathscr{K}(E)$, полярному к конусу P, то есть что соотношения $\langle f, \varepsilon_a\rangle \geqslant 0$ (для любого $a \in S$) влекут $\langle f, \mu\rangle \geqslant 0$; это вытекает из следствия предложения 8, так как положительная, непрерывная на S функция, согласно теореме Урысона, может быть продолжена по непрерывности до положительной функции, принадлежащей $\mathscr{K}(E)$. Пусть, наконец, A — выпуклое симметричное множество, порожденное мерами $\|\mu\|\cdot\varepsilon_a$, где a пробегает S; следствие 2 будет установлено, если показать, что μ принадлежит поляре поляры A° множества A, то есть что соотношения $|\langle f, \varepsilon_a\rangle| \leqslant \frac{1}{\|\mu\|}$ (для любого $a \in S$) влекут $|\langle f, \mu\rangle| \leqslant 1$; это также является следствием предложения 8 и теоремы Урысона.

Теорема 2. *Пусть μ — мера на локально компактном пространстве E. Для того чтобы точка x_0 принадлежала носителю меры μ, необходимо и достаточно, чтобы точечная мера ε_{x_0} была* *широким элементом прикосновения множества мер* $g \cdot \mu$, *где* g *пробегает множество непрерывных функций с компактным носителем, для которых* $\| g \cdot \mu \| \leqslant 1$.

Достаточность очевидна на основании предложения 6. Для доказательства необходимости рассмотрим конечное число функций f_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ из $\mathcal{K}(E)$ и произвольное число $\delta > 0$; достаточно показать, что существует функция $g \in \mathcal{K}(E)$, удовлетворяющая условиям $\| g \cdot \mu \| \leqslant 1$ и $| f_k(x_0) - \mu(gf_k) | \leqslant \delta$ для $1 \leqslant k \leqslant n$. Пусть U — такая относительно компактная открытая окрестность точки x_0, на которой колебание каждой функции f_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ не превосходит $\frac{\delta}{2}$. Так как x_0 принадлежит носителю меры μ, то существует такая функция $g_0 \in \mathcal{K}(E)$, что ее носитель содержится в U и что $\mu(g_0) \neq 0$; мера $\nu = g_0 \cdot \mu$ не равна нулю, поскольку ее носитель содержится в U и для любой функции $f \in \mathcal{K}(E)$, равной 1 на U, $\nu(f) = \mu(g_0) \neq 0$. Кроме того, ν ограничена (следствие из предложения 11); домножив g_0 на скаляр, можно принять, что $\| \nu \| = 1$. В таком случае для $1 \leqslant k \leqslant n$ и для любой функции $h \in \mathcal{K}(E)$ (положив $\alpha_k = f_k(x_0)$) можно написать

$$f_k(x_0) - \nu(f_k h) = \alpha_k(1 - \nu(h)) + \nu((\alpha_k - f_k) h).$$

Так как носитель меры ν принадлежит U, то можно отождествить ν с ее сужением на U; тогда из предположения $\| \nu \| = 1$ следует, что существует такая функция $h \in \mathcal{K}(E)$ с носителем в U, что $\| h \| \leqslant 1$ и $| \alpha_k(1 - \nu(h)) | \leqslant \frac{\delta}{2}$ для $1 \leqslant k \leqslant n$. В силу определения окрестности U для любого $x \in U$ выполняется неравенство $| (\alpha_k - f_k(x)) h(x) | \leqslant \frac{\delta}{2}$; а так как $\| \nu \| = 1$ и носитель меры ν содержится в U, то $| \nu((\alpha_k - f_k) h) | \leqslant \frac{\delta}{2}$, и следовательно, положив $g = g_0 h$, получим

$$| f_k(x_0) - \mu(gf_k) | \leqslant \delta \quad \text{для } 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Это доказывает теорему, поскольку

$$\| g \cdot \mu \| = \| (g_0 h) \cdot \mu \| \leqslant \| g_0 \cdot \mu \| = 1.$$

Следствие. *Пусть* μ — *мера на* E. *Для того чтобы мера* ν *была широким элементом прикосновения модуля (над* $\mathcal{K}(E)$ *), обра-*

зованного мерами $g \cdot \mu$, где g пробегает $\mathscr{K}(E)$, необходимо и достаточно, чтобы носитель меры ν содержался в носителе меры μ.

В самом деле, носитель $g \cdot \mu$ содержится в носителе меры μ (предл. 10), и значит, это верно для носителя любого широкого предела мер вида $g \cdot \mu$ (предл. 6). Обратно, если носитель меры ν содержится в носителе меры μ, то ν есть широкий предел мер с конечным носителем, содержащимся в носителе меры μ (теорема 1), и, следовательно, на основании теоремы 2 есть широкий элемент прикосновения модуля мер $g \cdot \mu$.

6. *Дискретные меры*

Предложение 13. *Для того чтобы мера μ на локально компактном пространстве E была дискретной мерой* (§ 2, n° 2, пример 1), *необходимо и достаточно, чтобы ее носитель был дискретным замкнутым подпространством пространства E.*

Пусть μ — дискретная мера на E, определенная при помощи масс $h(x)$, расположенных в точках x дискретного замкнутого подпространства N пространства E; покажем, что носитель меры μ совпадает с N. В самом деле, для всякой точки $a \in N$ и для любой окрестности V точки a найдется функция $f \in \mathscr{K}(E)$ с носителем в V, равная 1 в точке a и 0 в остальных точках из N; отсюда $\mu(f) = h(a) \neq 0$. Если, напротив, $b \notin N$, то найдется окрестность W точки b, не имеющая ни одной общей точки с N; тогда для любой функции $g \in \mathscr{K}(E)$ с носителем в W выполняется равенство $\mu(g) = 0$, показывающее, что b не принадлежит носителю меры μ.

Обратно, пусть μ — мера, носитель которой является дискретным замкнутым подпространством N пространства E. Для любой точки $a \in N$ существует открытая окрестность V_a точки a, не содержащая ни одной точки из N, отличной от a; следовательно, сужение меры μ на V_a есть точечная мера с носителем $\{a\}$ (предл. 5) и, значит (предл. 12), имеет вид $h(a)\,\varepsilon_a$, где $h(a) \neq 0$. Если положить $h(x) = 0$ в точках из $\complement N$ и обозначить через ν меру, определенную при помощи масс $h(x)$, то на основании принципа локализации получаем, что $\mu = \nu$.

Таким образом, мы снова пришли к выводу, что на дискретном пространстве E всякая мера дискретна (§ 2, n° 2, пример 1).

Упражнения. 1) Показать, что если Φ — такой фильтр в $\mathcal{M}(E)$, что носитель меры μ бесконечно удаляется по Φ, то μ сильно сходится к 0 по Φ.

2) Показать, что множество мер с компактным носителем всюду плотно в пространстве $\mathcal{M}^1(E)$ мер, ограниченных в ультрасильной топологии.

3) Пусть E — интервал $[0, 1]$ из $\mathbf{R}$. Показать, что в $\mathcal{M}(E)$ расстояние от меры Лебега до любой дискретной меры не меньше 1.

°4) Пусть E — локально компактное пространство, определенное в упр. 3 § 2. Показать, что всякая мера на E имеет компактный носитель (заметить, что если g — конечная возрастающая числовая функция на E, то найдется такая точка $x_0 \in E$, что g постоянна для $x \geqslant x_0$; задав положительную меру μ на E, применить это замечание к функции $g(x) = \mu(f_x)$, где f_x есть функция, равная 1 для $y \leqslant x$ и равная 0 для $y > x$).

°5) Пусть A — несчетное множество. В множестве $\mathfrak{P}(A)$ рассмотрим отношение «$X \cap \complement Y$ и $Y \cap \complement X$ счетны»; показать, что это есть отношение эквивалентности, согласующееся с отношением включения $X \subset Y$. Пусть B — фактор-множество множества $\mathfrak{P}(A)$ по этому отношению эквивалентности; показать, что в B отношение, полученное факторизацией из отношения включения, есть отношение порядка, для которого B есть булева решетка (Теор. мн., гл. III). Известно (Общая топ., гл. II, 2-е изд., § 4, упр. 13), что существует изоморфизм структуры порядка множества B на булеву решетку, состоящую из одновременно открытых и замкнутых подмножеств компактного вполне несвязного пространства E. Показать, что если U — непустое открытое множество из E, то существует несчетное семейство непустых открытых подмножеств V_α множества U попарно без общих точек (использовать тот факт, что несчетное множество допускает несчетное разбиение на несчетные подмножества). Вывести отсюда, что всякая мера на E имеет *нигде не плотный* носитель.

§ 4. Интегралы от непрерывных вектор-функций

1. *Определение интеграла от непрерывной вектор-функции*

Пусть E — локально компактное пространство, μ — мера на E и F — *отделимое локально выпуклое пространство над* $\mathbf{R}$. Будем через F' обозначать *сопряженное* к F пространство (пространство непрерывных линейных форм на F), через F'^* — *алге-*

браическое сопряженное к F' пространство (пространство всех линейных форм на F'); F можно канонически отождествить (как векторное, а не как топологическое пространство) с подпространством пространства F'^*, отождествив каждый вектор $\mathbf{z} \in F$ с линейной формой $\mathbf{z}' \to \langle \mathbf{z}, \mathbf{z}' \rangle$ на F' (Топ. вект. пр-ва, гл. IV).

Пусть $\mathbf{f}$ — непрерывное отображение E в F с компактным носителем. Для любого $\mathbf{z}' \in F'$ числовая функция $x \to \langle \mathbf{f}(x), \mathbf{z}' \rangle$ непрерывна на E и имеет компактный носитель; положим

$$\varphi(\mathbf{z}') = \int \langle \mathbf{f}(x), \mathbf{z}' \rangle \, d\mu(x).$$

Ясно, что φ есть линейная форма на F' и, значит, является *элементом пространства* F'^*, который называется *интегралом от* $\mathbf{f}$ *относительно* μ и обозначается $\mu(\mathbf{f})$, $\int \mathbf{f} \, d\mu$ или $\int \mathbf{f}(x) \, d\mu(x)$; следовательно, по определению

$$\left\langle \int \mathbf{f}(x) \, d\mu(x), \mathbf{z}' \right\rangle = \int \langle \mathbf{f}(x), \mathbf{z}' \rangle \, d\mu(x) \tag{1}$$

для любого $\mathbf{z}' \in F'$. Очевидно, $(\mathbf{f}, \mu) \to \int \mathbf{f} \, d\mu$ есть билинейное отображение произведения $\mathscr{K}_F(E) \times \mathscr{M}(E)$ в F'^*; в частности,

$$\int \mathbf{f} \, d\mu = \int \mathbf{f} \, d\mu^+ - \int \mathbf{f} \, d\mu^-.$$

Отметим, что если $\mathbf{f}$ равна нулю на носителе меры μ, то формула (1) показывает, что $\int \mathbf{f} \, d\mu = 0$.

Мы будем рассматривать в F'^* *слабую топологию* $\sigma(F'^*, F')$ (топологию простой сходимости в F'); эта топология индуцирует в F слабую топологию $\sigma(F, F')$, ассоциированную с топологией, заданной в F.

Предложение 1. *Пусть* $\mathbf{f}$ — *непрерывное отображение* E *в* F *с компактным носителем* K. *Пусть* h — *непрерывное отображение* E *в* $[0, 1]$ *с компактным носителем, равное* 1 *на* K, *и пусть* C — *слабо замкнутая выпуклая оболочка множества* $\mathbf{f}(E)$ *в* F'^*. *Тогда для любой положительной меры* μ *на* E *интеграл* $\int \mathbf{f} \, d\mu$ *принадлежит выпуклому множеству* $\mu(h)C$ *из* F'^*.

В самом деле, C есть пересечение слабо замкнутых в F'^* полупространств, содержащих $\mathbf{f}(E)$ (следовательно, $\mu(h)\,C$ есть пересечение полупространств, гомотетичных этим полупространствам с коэффициентом $\mu(h)$). Рассмотрим слабо замкнутое полупространство V в F'^*; это множество таких $\mathbf{z} \in F'^*$, что $\langle \mathbf{z}, \mathbf{z}' \rangle \geqslant \alpha$ для некоторого заданного элемента $\mathbf{z}' \in F'$ и фиксированного действительного α. Если V содержит $\mathbf{f}(E)$, то $\langle \mathbf{f}(x), \mathbf{z}' \rangle \geqslant \alpha$ для любого $x \in E$, и следовательно, в силу равенства $\mathbf{f}h = \mathbf{f}$

$$\langle \mathbf{f}(x), \mathbf{z}' \rangle = \langle \mathbf{f}(x)\,h(x), \mathbf{z}' \rangle = h(x)\,\langle \mathbf{f}(x), \mathbf{z}' \rangle \geqslant \alpha h(x)$$

для любого $x \in E$. Отсюда выводим, что

$$\int \langle \mathbf{f}(x), \mathbf{z}' \rangle\, d\mu(x) \geqslant \alpha \int h(x)\, d\mu(x),$$

поскольку мера μ положительна; это неравенство записывается в виде $\left\langle \int \mathbf{f}\, d\mu, \mathbf{z}' \right\rangle \geqslant \alpha\mu(h)$, чем и доказано предложение.

Отсюда мы выведем, что при выполнении некоторых условий интеграл $\int \mathbf{f}\, d\mu$ *принадлежит* F, а не только F'^*. Более точно, справедливо

Предложение 2. *Пусть F — отделимое локально выпуклое пространство над* $\mathbf{R}$, *удовлетворяющее следующей аксиоме*:

(EC) *Замкнутая выпуклая оболочка в F любого компактного множества из F компактна.*

Тогда интеграл от любого непрерывного отображения пространства E в F с компактным носителем принадлежит F.

Можно ограничиться рассмотрением случая, когда мера положительна. Пусть $\mathbf{f}$ — функция из $\mathscr{K}_F(E)$ с компактным носителем K, множество $\mathbf{f}(K)$ компактно в F и $\mathbf{f}(E)$ равно $\mathbf{f}(K)$ или объединению $\mathbf{f}(K)$ и $\{0\}$ и, значит, тоже компактно. Пусть A — замкнутая выпуклая оболочка множества $\mathbf{f}(E)$ в F, компактная на основании аксиомы (EC). Так как слабая топология $\sigma(F, F')$ является менее сильной, чем топология в F, то A также слабо компактно и тем более *слабо замкнуто в* F'^* и, стало быть, тождественно слабо замкнутой выпуклой оболочке C множества $\mathbf{f}(E)$ в F'^*; таким образом, предложение следует из предложения 1.

Достаточно было бы предположить, что замкнутая выпуклая оболочка в F любого компактного множества из F *слабо компактна.*

Помимо этого мы доказали такое

Следствие. *Пусть* μ — *ограниченная положительная мера на* E. *Если* A — *замкнутое выпуклое множество из* F *и* $\mathfrak{f}(E) \subset A$, *то* $\int \mathfrak{f}\, d\mu \in \|\mu\| A$.

Замечания. 1) Известно (Топ. вект. пр-ва, гл. II, § 4), что замкнутая выпуклая оболочка компактного подмножества локально выпуклого пространства F всегда есть *предкомпактное* множество (для равномерной структуры, индуцированной структурой из F); тогда аксиома (ЕС) равносильна тому утверждению, что замкнутая выпуклая оболочка компактного множества из F есть *полное* подпространство пространства F. Условие, что само F есть *полное пространство*, достаточно для этого, но оно не является необходимым. Например, пространство, *сопряженное* к банахову пространству и наделенное *слабой* топологией, удовлетворяет аксиоме (ЕС) (Топ. вект. пр-ва, гл. IV); это же верно для пространства $\mathscr{M}(E)$ мер на локально компактном пространстве, наделенного широкой топологией (§ 2, предл. 9).

Если $E = \mathbf{R}$, μ есть мера Лебега на $\mathbf{R}$ и F есть *банахово пространство* над $\mathbf{R}$, то интеграл $\int \mathfrak{f}\, d\mu$ от функции из $\mathscr{K}_F(\mathbf{R})$ представляет собой не что иное, как интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{f}(x)\, dx$, определенный в «Функциях действ. перем.», гл. II, § 3; это следует из помещенной выше формулы (1) и из формулы (10) в «Функциях действ. перем.», гл. II, § 1.

2) Могут существовать непрерывные отображения $\mathfrak{f}$ пространства E в F, носитель которых не компактен, но которые обладают тем свойством, что для любого $\mathbf{z}' \in F'$ непрерывная числовая функция $x \to \langle \mathfrak{f}(x), \mathbf{z}' \rangle$ имеет компактный носитель.

Например, если F есть пространство $\mathscr{M}(E)$ мер на E, наделенное широкой топологией, то сопряженное к F пространство F' совпадает с $\mathscr{K}(E)$ (Топ. вект. пр-ва, гл. IV). Отображение $x \to \varepsilon_x$ пространства E в F непрерывно (§ 2, предл. 6), но его носитель не будет компактным в случае некомпактного E; однако для любой функции $f \in \mathscr{K}(E)$ непрерывная числовая функция $x \to \langle f, \varepsilon_x \rangle = f(x)$ имеет компактный носитель.

Обозначим через $\mathscr{K}'_F(E)$ векторное пространство, образованное этими функциями; тогда изложенное выше определение интеграла естественным образом применяется к функциям из $\mathscr{K}'_F(E)$.

Теперь предположим, что F удовлетворяет следующей аксиоме:

(EC_a) *Всякое ограниченное замкнутое выпуклое множество в F слабо полно.*

Отметим, что всякое ограниченное множество в F *слабо предкомпактно* (Топ. вект. пр-ва, гл. IV); следовательно, аксиома (EC_a) означает также, что всякое ограниченное слабо замкнутое множество в F *слабо компактно*, то есть что F полурефлексивно (Топ. вект. пр-ва, Рез., § 6, n° 15).

Покажем, что при этих условиях для всякой функции $\mathbf{f} \in \mathcal{K}'_F(E)$ интеграл $\int \mathbf{f}\, d\mu$ *снова принадлежит* F. В самом деле, доказательство предложения 2 прежде всего дает возможность заключить, что интеграл от любой функции из $\mathcal{K}_F(E)$ принадлежит F. Тогда рассмотрим фильтрующееся (по отношению $\leqslant$) множество Φ таких функций $h \in \mathcal{K}(E)$, что $0 \leqslant h \leqslant 1$; для всякой функции $\mathbf{f} \in \mathcal{K}'_F(E)$ и любой точки $\mathbf{z}' \in F'$ найдется функция $g \in \Phi$, равная 1 на носителе функции $x \to \langle \mathbf{f}(x), \mathbf{z}' \rangle$ (§ 2, лемма 1); отсюда для всякой функции $h \in \Phi$, удовлетворяющей условию $h \geqslant g$, получаем

$$\left\langle \int \mathbf{f}h\, d\mu, \mathbf{z}' \right\rangle = \int \langle \mathbf{f}h, \mathbf{z}' \rangle\, d\mu = \int \langle \mathbf{f}, \mathbf{z}' \rangle\, d\mu = \left\langle \int \mathbf{f}\, d\mu, \mathbf{z}' \right\rangle.$$

Этим установлено, что в F'^* интеграл $\int \mathbf{f}h\, d\mu$ стремится слабо к $\int \mathbf{f}\, d\mu$ по фильтрующемуся множеству Φ. Но для любого $h \in \Phi$ и любого $\mathbf{z}' \in F'$ имеем

$$\left| \left\langle \int \mathbf{f}h\, d\mu, \mathbf{z}' \right\rangle \right| = \left| \int h \langle \mathbf{f}, \mathbf{z}' \rangle\, d\mu \right| \leqslant \int |\langle \mathbf{f}, \mathbf{z}' \rangle|\, d|\mu|,$$

что доказывает ограниченность множества точек $\int \mathbf{f}h\, d\mu$ из F (Топ. вект. пр-ва, гл. IV); тогда аксиома (EC_a) показывает, что $\int \mathbf{f}\, d\mu$ принадлежит F (ср. гл. V).

Например, пространство $\mathcal{M}(E)$ мер на E, наделенное широкой топологией, удовлетворяет аксиоме (EC_a) (§ 2, предл. 9). Значит, для всякой меры μ на E интеграл $\int \varepsilon_x\, d\mu(x)$ принадлежит $\mathcal{M}(E)$; но, по определению, для любой функции $f \in \mathcal{K}(E)$

$$\left\langle f, \int \varepsilon_x\, d\mu(x) \right\rangle = \int \langle f, \varepsilon_x \rangle\, d\mu(x) = \int f\, d\mu,$$

откуда вытекает соотношение

$$\mu = \int \varepsilon_x \, d\mu(x) \tag{2}$$

для любой меры μ на E.

2. *Свойства интеграла от непрерывной вектор-функции*

Отсюда и до конца этого параграфа F будет обозначать отделимое локальное выпуклое пространство, удовлетворяющее аксиоме (EC).

Предложение 3. *Для любой функции* $\mathbf{f}$ *из* $\mathcal{K}_F(E)$ *и любой непрерывной на* F *полунормы* q *справедливо неравенство*

$$q\left(\int \mathbf{f}\, d\mu\right) \leqslant \int q(\mathbf{f})\, d|\mu|. \tag{3}$$

В самом деле, по теореме Хана — Банаха множество тех $\mathbf{z} \in F$, для которых $q(\mathbf{z}) \leqslant 1$, может быть определено как множество точек, удовлетворяющих системе неравенств вида $|\langle \mathbf{z}, \mathbf{a}'_\iota \rangle| \leqslant \alpha_\iota$ $(\iota \in I)$, где $(\mathbf{a}'_\iota)$ — некоторое семейство точек из F и (α_ι) — некоторое семейство положительных чисел; при этом соотношения $\langle \mathbf{z}, \mathbf{a}'_\iota \rangle = 0$ для любого ι влекут $q(\mathbf{z}) = 0$. Тогда для любого $x \in E$ и любого индекса ι имеем

$$|\langle \mathbf{f}(x), \mathbf{a}'_\iota \rangle| \leqslant \alpha_\iota q(\mathbf{f}(x)),$$

откуда

$$\left| \int \langle \mathbf{f}, \mathbf{a}'_\iota \rangle \, d\mu \right| \leqslant \alpha_\iota \int q(\mathbf{f}(x))\, d|\mu|,$$

то есть

$$\left| \left\langle \int \mathbf{f}\, d\mu, \mathbf{a}'_\iota \right\rangle \right| \leqslant \alpha_\iota \int q(\mathbf{f}(x))\, d|\mu|. \tag{4}$$

Отсюда следует, что если $\int q(\mathbf{f}(x))\, d|\mu| = 0$, то $q\left(\int \mathbf{f}\, d\mu\right) = 0$; если же $\int q(\mathbf{f}(x))\, d|\mu| \neq 0$, то, разделив обе части неравенства (4) для каждого индекса ι на $\int q(\mathbf{f}(x))\, d|\mu|$, получим на основании вышеизложенного неравенство (3).

Теорема 1. *Отображение* $\mathbf{f} \to \int \mathbf{f}\, d\mu$ *пространства* $\mathcal{K}_F(E)$ *в* F *есть единственное линейное отображение, удовлетворяющее следующим двум условиям:*

a) *Для любого постоянного вектора* $\mathbf{a} \in F$ *и для всякой числовой функции* $g \in \mathcal{K}(E)$ *выполняется равенство*

$$\int \mathbf{a} g\, d\mu = \mathbf{a} \cdot \int g\, d\mu.$$

b) *Для любого компактного множества* K *из* E *сужение линейного отображения* $\mathbf{f} \to \int \mathbf{f}\, d\mu$ *на пространство* $\mathcal{K}_F(E, K)$ *непрерывных отображений пространства* E *в* F *с компактным носителем в* K *непрерывно в топологии равномерной сходимости.*

В самом деле, п определению

$$\left\langle \int \mathbf{a} g\, d\mu, \mathbf{z}' \right\rangle = \int \langle \mathbf{a} g, \mathbf{z}' \rangle\, d\mu = \int g \langle \mathbf{a}, \mathbf{z}' \rangle\, d\mu = \langle \mathbf{a}, \mathbf{z}' \rangle \int g\, d\mu =$$
$$= \left\langle \mathbf{a} \int g\, d\mu, \mathbf{z}' \right\rangle \text{ для любого } \mathbf{z}' \in F',$$

чем установлено утверждение a); с другой стороны, предложение 3 показывает, что $\int \mathbf{f}\, d\mu$ удовлетворяет условию b). Если обозначить через $\mathcal{H}_F(E)$ подпространство пространства $\mathcal{K}_F(E)$, образованное линейными комбинациями $\mathbf{f} = \sum_k \mathbf{a}_k f_k$ функций из $\mathcal{K}(E)$ с коэффициентами из F, то всякое линейное отображение пространства $\mathcal{K}_F(E)$ в F, удовлетворяющее условию a), совпадает на $\mathcal{H}_F(E)$ с $\int \mathbf{f}\, d\mu$; при этом, если K есть произвольное компактное множество из E и U — компактная окрестность множества K, то всякое непрерывное отображение пространства E в F с носителем в K может быть равномерно приближено функциями из $\mathcal{H}_F(E)$ с носителем в U (§ 2, лемма 2), чем и завершается доказательство единственности интеграла $\int \mathbf{f}\, d\mu$.

Предложение 4. *Пусть* F *и* G — *два отделимых локально выпуклых пространства, удовлетворяющих аксиоме* (EC), *и пусть* $\mathbf{u}$ — *непрерывное линейное отображение пространства* F *в* G. *Тогда для любой функции* $\mathbf{f}$ *из* $\mathcal{K}_F(E)$ *справедлива формула*

$$\mathbf{u}\left(\int \mathbf{f}(x)\, d\mu(x)\right) = \int \mathbf{u}(\mathbf{f}(x))\, d\mu(x). \tag{5}$$

В самом деле, если через ${}^t\mathbf{u}$ обозначить отображение, сопряженное к $\mathbf{u}$, то при любом $\mathbf{z}' \in G'$ будут выполняться равенства

$$\left\langle \mathbf{u}\left(\int \mathbf{f}\, d\mu\right), \mathbf{z}'\right\rangle = \left\langle \int \mathbf{f}\, d\mu, {}^t\mathbf{u}(\mathbf{z}')\right\rangle = \int \langle \mathbf{f}, {}^t\mathbf{u}(\mathbf{z}')\rangle\, d\mu =$$
$$= \int \langle \mathbf{u}(\mathbf{f}), \mathbf{z}'\rangle\, d\mu = \left\langle \int \mathbf{u}(\mathbf{f})\, d\mu, \mathbf{z}'\right\rangle,$$

и предложение доказано.

При этом доказательство показывает, что $\int \mathbf{u}(\mathbf{f})\, d\mu$ принадлежит G, даже если G не удовлетворяет аксиоме (EC).

Пусть, в частности, F_0 — векторное подпространство пространства F, наделенное *более сильной* топологией, чем та, которая индуцируется топологией пространства F, и предположим, что в этой топологии F_0 снова удовлетворяет аксиоме (EC); тогда, если $\mathbf{f}$ есть непрерывное отображение E в F_0 с компактным носителем, то $\mathbf{f}$ является также непрерывным отображением E в F, и его интеграл будет одним и тем же, рассматривать ли $\mathbf{f}$ принимающей значения в F_0 или в F; в самом деле, достаточно применить предложение 4 к каноническому отображению F_0 в F.

Предложение 5. *Для всякой функции g из $\mathscr{C}(E)$ и любой функции $\mathbf{f}$ из $\mathscr{K}_F(E)$ интеграл от $\mathbf{f}$ относительно меры $\nu = g \cdot \mu$ равен $\int \mathbf{f} g\, d\mu$.*

В самом деле, для любого $\mathbf{z}' \in F'$ имеем

$$\left\langle \int \mathbf{f}\, d\nu, \mathbf{z}'\right\rangle = \int \langle \mathbf{f}, \mathbf{z}'\rangle\, d\nu = \int \langle \mathbf{f}, \mathbf{z}'\rangle\, g\, d\mu =$$
$$= \int \langle \mathbf{f} g, \mathbf{z}'\rangle\, d\mu = \left\langle \int \mathbf{f} g\, d\mu, \mathbf{z}'\right\rangle,$$

откуда и следует предложение.

Предложение 6. *Пусть $\mathbf{f}$ — функция из $\mathscr{K}_F(E)$; отображение $\mu \to \mu(\mathbf{f})$ множества $\mathscr{M}_+(E)$* положительных *мер на E в пространство F непрерывно, если $\mathscr{M}_+(E)$ наделено широкой топологией.*

Прежде всего, непосредственно из определения широкой топологии следует, что если $\mathbf{f} = \sum_k \mathbf{a}_k f_k$ есть линейная комбинация функций из $\mathscr{K}(E)$ с коэффициентами из F, то отображение $\mu \to \mu(\mathbf{f})$ непрерывно *на всем* пространстве $\mathscr{M}(E)$.

Обозначим теперь через $\mathfrak{f}_0$ произвольную функцию из $\mathcal{K}_F(E)$, через K компактную окрестность носителя функции $\mathfrak{f}_0$ и через μ_0 положительную меру на E. Мы покажем, что существует такая окрестность V меры μ_0 в $\mathcal{M}_+(E)$ (относительно широкой топологии), что множество W сужений μ_K на $\mathcal{K}_F(E, K)$ отображений $\mathfrak{f} \to \mu(\mathfrak{f})$, где μ пробегает V, равностепенно непрерывно (если $\mathcal{K}_F(E, K)$ наделено топологией равномерной сходимости); тогда в W топология простой сходимости на множестве $\mathcal{H}_F(E, K)$ функций из $\mathcal{H}_F(E)$ с носителем в K будет совпадать с топологией простой сходимости на замыкании $\mathcal{H}_F(E, K)$ в $\mathcal{K}_F(E, K)$ (Общая топ., гл. X, § 3, предл. 3); а поскольку $\mathfrak{f}_0$ принадлежит этому замыканию (§ 2, лемма 2), то отображение $\mu_K \to \mu(\mathfrak{f}_0)$ будет непрерывно на W в этой топологии, то есть отображение $\mu \to \mu(\mathfrak{f}_0)$ непрерывно на V в широкой топологии.

Чтобы показать, что множество W равностепенно непрерывно, рассмотрим непрерывное отображение h пространства E в $[0, 1]$, равное 1 на K и имеющее компактный носитель; в качестве V возьмем множество таких положительных мер μ, что $|\mu(h) - \mu_0(h)| \leqslant 1$. Если $\mathfrak{f}_1$ и $\mathfrak{f}_2$ — две функции из $\mathcal{K}_F(E, K)$, для которых $q(\mathfrak{f}_1(x) - \mathfrak{f}_2(x)) \leqslant \varepsilon$ при любом $x \in E$ (где q — непрерывная полунорма на E), то на E будет также справедливо неравенство $q(\mathfrak{f}_1(x) - \mathfrak{f}_2(x)) \leqslant \varepsilon h(x)$; а так как всякая мера $\mu \in V$ *положительна*, то из этого неравенства выводим (предл. 3), что $q(\mu(\mathfrak{f}_1) - \mu(\mathfrak{f}_2)) \leqslant \varepsilon\mu(h) \leqslant \varepsilon(\mu_0(h) + 1)$, что и завершает доказательство.

Совершенно аналогичное рассуждение показывает, что отображение $\mu \to \mu(\mathfrak{f})$ широко непрерывно на любом *ограниченном* множестве пространства $\mathcal{M}(E)$. Напротив, отображение $\mu \to \mu(\mathfrak{f})$ не будет, вообще говоря, широко непрерывным на всем пространстве $\mathcal{M}(E)$ (упр. 2).

3. *Приложение: центры тяжести*

Пусть A — *компактное* множество в локально выпуклом пространстве F, удовлетворяющем аксиоме (EC); для всякой *положительной меры* μ *на* A с общей массой, равной *единице*, точка $\int \mathbf{x}\, d\mu(\mathbf{x})$ из F называется *центром тяжести* или *барицентром* множества A относительно меры μ.

Предложение 7. *Если имеется компактное множество* $A \subset F$, *то множество* G *центров тяжести множества* A *относительно всех положительных мер на* A *с общей массой, равной единице, есть замкнутая (компактная) выпуклая оболочка множества* A.

В самом деле, G есть образ при отображении $\mu \to \int \mathbf{x}\, d\mu(\mathbf{x})$ множества H определенных на A положительных мер с общей массой, равной 1. Но отображение $\mu \to \int \mathbf{x}\, d\mu(\mathbf{x})$ линейно на $\mathscr{M}(A)$ и непрерывно на H в широкой топологии (предл. 6); а так как H является пересечением широко замкнутой гиперплоскости, определяемой уравнением $\mu(1) = 1$, и широко компактного выпуклого множества ограниченных мер μ, для которых $\|\mu\| \leqslant 1$, то H выпукло и широко компактно (ср. § 2, следствие 2 из предл. 9); отсюда следует, что G выпукло и компактно в F и содержит A (последнее очевидно, ибо всякая точка $\mathbf{x} \in A$ есть центр тяжести множества A относительно меры $\varepsilon_{\mathbf{x}}$).

С другой стороны, из следствия предложения 2 вытекает, что G содержится в замкнутой выпуклой оболочке множества A, что и доказывает предложение.

Упражнения. 1) Пусть F — гильбертово пространство с ортонормированным счетным базисом $(\mathbf{e}_n)$ (Топ. вект. пр-ва, гл. V), и пусть F_0 — его всюду плотное подпространство, состоящее из линейных комбинаций конечного числа вектора $\mathbf{e}_n$. Пусть E — компактное подпространство $\mathbf{R}$, состоящее из 0 и точек $\frac{1}{n}$ ($n \geqslant 1$ — целое); пусть μ — мера на E, определяемая массой $\frac{1}{n^2}$ в каждой точке $\frac{1}{n}$. Рассмотрим непрерывное отображение $\mathbf{f}$ пространства E в F_0, при котором $\mathbf{f}(0) = 0$, $\mathbf{f}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\mathbf{e}_n}{n}$; показать, что интеграл $\int \mathbf{f}\, d\mu$ не принадлежит F_0.

°2) Пусть пространства E и F и отображение $\mathbf{f}$ определяются, как в упражнении 1; показать, что отображение $\mu \to \mu(\mathbf{f})$ множества $\mathscr{M}(E)$ в F не будет непрерывным в широкой топологии (показать, что если g_k ($1 \leqslant k \leqslant n$) суть n непрерывных на E числовых функций, то на E существует такая мера μ с конечным носителем, что $\int g_k d\mu = 0$ для $1 \leqslant k \leqslant n$, а норма $\left\| \int \mathbf{f}\, d\mu \right\|$ сколь угодно велика).

3) Пусть Φ — фильтр в пространстве $\mathcal{M}(E)$ мер на E, обладающий следующим свойством: для любого компактного множества $K \subset E$ существуют такое множество $M \in \Phi$ и такое число $a_K > 0$, что $|\mu(f)| \leqslant a_K \|f\|$ для всякой непрерывной числовой функции f с носителем в K и для любой меры $\mu \in M$. Пусть F — отделимое локально выпуклое пространство, удовлетворяющее аксиоме (ЕС), и пусть $\mathbf{g}$ — некоторая функция из $\mathcal{K}_F(E)$. Показать, что если фильтр Φ широко сходится к μ_0, то отображение $\mu \to \mu(\mathbf{g})$ сходится к $\mu_0(\mathbf{g})$ по фильтру Φ. Получить отсюда новое доказательство предложения 6 (ср. § 2, упр. 5а)).

4) Пусть F — отделимое локально выпуклое пространство, удовлетворяющее аксиоме (ЕС), и пусть K — компактное множество из E.

а) Показать, что если $\mathcal{K}_F(E, K)$ наделено топологией равномерной сходимости, а $\mathcal{M}(E)$ — сильной топологией (§ 2, упр. 4), то отображение $(\mathbf{f}, \mu) \to \mu(\mathbf{f})$ произведения $\mathcal{K}_F(E, K) \times \mathcal{M}(E)$ в F непрерывно.

b) Показать, что если $\mathcal{K}_F(E, K)$ наделено топологией равномерной сходимости, а $\mathcal{M}(E)$ — широкой топологией, то отображение $(\mathbf{f}, \mu) \to \mu(\mathbf{f})$ непрерывно как на $\mathcal{K}_F(E, K) \times \mathcal{M}(E)$, так и на $\mathcal{K}_F(E, K) \times H$, где H — произвольное ограниченное множество из $\mathcal{M}(E)$.

5) Пусть F — отделимое локально выпуклое пространство, удовлетворяющее аксиоме (ЕС), и пусть A — такое множество из F, что $A \cup \{0\}$ компактно. Показать, что когда μ пробегает множество положительных мер на локально компактном пространстве A с нормой $\leqslant 1$, то образ этого множества при отображении $\mu \to \int \mathbf{x}\, d\mu(\mathbf{x})$ есть замкнутая выпуклая оболочка множества $A \cup \{0\}$ в F.

§ 5. Произведения мер

1. Произведение двух мер

Теорема 1. *Пусть E и F — два локально компактных пространства, λ — мера на E и μ — мера на F; на произведении $E \times F$ существует, и притом только одна, такая мера ν, что для любой функции $g \in \mathcal{K}(E)$ и любой функции $h \in \mathcal{K}(F)$*

$$\int g(x)\, h(y)\, d\nu(x, y) = \left(\int g(x)\, d\lambda(x)\right)\left(\int h(y)\, d\mu(y)\right). \qquad (1)$$

1) *Единственность меры* ν. Очевидно, достаточно показать, что линейные комбинации $\sum_i g_i(x)\, h_i(y)$, где $g_i \in \mathcal{K}(E)$ и $h_i \in \mathcal{K}(F)$,

образуют *изобильное* множество в $\mathscr{K}(E \times F)$ (§ 2, предл. 1). Это вытекает из следующей леммы, которая уточняет один общий факт из топологии (Общая топ., гл. X, § 5, теорема 4), показывая, что множество вышеуказанных комбинаций *положительно изобильно.*

Лемма 1. *Пусть* U (соотв. V) — *открытое относительно компактное в* E (соотв. F) *множество и* f — *положительная непрерывная на* $E \times F$ *функция с носителем в* $U \times V$. *Тогда* f *может быть равномерно приближена функциями вида* $\sum\limits_i g_i(x)\, h_i(x)$, *где* g_i (соотв. h_i) — *положительные функции из* $\mathscr{K}(E)$ (соотв. $\mathscr{K}(F)$) *с носителем, содержащимся в* U (соотв. V).

В самом деле, f равномерно непрерывна на $U \times V$; согласно определению равномерной структуры пространства, являющегося произведением пространств, для любого $\varepsilon > 0$ в U (соотв. V) существует такое конечное покрытие $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ (соотв. $(B_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$) проекции на E (соотв. F) носителя функции f, что на каждом из множеств $A_i \times B_j$ колебание функции f не превосходит ε. Пусть g_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ (соотв. h_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$) — такие непрерывные отображения пространства E (соотв. F) в $[0, 1]$, что носитель функции g_i (соотв. h_j) содержится в A_i (соотв. B_j) и что $\sum\limits_{i=1}^{m} g_i(x) = 1$ $\left(\text{соотв. } \sum\limits_{j=1}^{n} h_j(y) = 1\right)$ на проекции носителя функции f на E (соотв. F) (§ 2, лемма 1); следовательно, имеет место тождество $f(x, y) = \sum\limits_{i,j} f(x, y)\, g_i(x)\, h_j(y)$. Если x_i (соотв. y_j) — произвольная точка из A_i (соотв. B_j), то из сделанных предположений вытекает, что

$$f(x, y) - \sum_{i,j} f(x_i, y_i)\, g_i(x)\, h_j(y) \,\Big| =$$
$$= \Big| \sum_{i,j} (f(x, y) - f(x_i, y_j))\, g_i(x)\, h_j(y) \Big| \leqslant \varepsilon \sum_{i,j} g_i(x)\, h_j(y) = \varepsilon,$$

что и доказывает лемму.

2) *Существование меры* ν. Сначала мы докажем следующую лемму:

Лемма 2. *Пусть K — компактное множество из E, а L — компактное множество из F. Если f есть функция из $\mathscr{K}(E \times F)$ с носителем в $K \times L$, то функция*

$$h(y) = \int f(x, y)\, d\lambda(x)$$

непрерывна на F и ее носитель содержится в L.

В самом деле, если f_y означает частичное отображение $x \to f(x, y)$, то h есть не что иное, как отображение $y \to \int f_y\, d\lambda$; но носитель функции f_y содержится в K при любом $y \in F$, и отображение $y \to f_y$ пространства F в $\mathscr{K}(E, K)$ непрерывно, если $\mathscr{K}(E, K)$ наделено топологией равномерной сходимости (Общая топ., гл. X, § 2, предл. 9); следовательно, h, согласно определению меры, непрерывно. С другой стороны, ясно, что $h(y) = 0$ для $y \notin L$, так как тогда $f(x, y) = 0$ для любого $x \in E$.

После того, как установлена эта лемма, для всякой функции $f \in \mathscr{K}(E \times F)$ определено число $\nu(f) = \mu\left(\int f(x, y)\, d\lambda(x)\right)$ $\Big($которое мы ради удобства снова обозначим через $\int d\mu(y) \int f(x, y)\, d\lambda(x)\Big)$; кроме того, если K и L — два компактных множества соответственно из E и F, то, по предположению, существуют такие два числа a_K и b_L, что для любой функции $g \in \mathscr{K}(E)$ (соотв. $h \in \mathscr{K}(F)$) с носителем в K (соотв. L) выполняется неравенство $|\lambda(g)| \leqslant a_K \|g\|$ (соотв. $|\mu(h)| \leqslant b_L \|h\|$). Отсюда следует, что для всякой функции $f \in K(E \times F)$ с носителем в $K \times L$ при любом $y \in F$ справедливо неравенство $\left|\int f(x, y)\, d\lambda(x)\right| \leqslant a_K \|f\|$, и следовательно, $|\nu(f)| \leqslant a_K b_L \|f\|$. Стало быть, линейная форма ν является *мерой* на $E \times F$, и, очевидно, для нее имеет место (1). Таким образом, теорема 1 полностью доказана.

Определение 1. *Если имеются две меры λ, μ, определенные соответственно на двух локально компактных пространствах E, F, то мерой-произведением меры λ на меру μ называется единственная мера ν, определенная на $E \times F$ и удовлетворяющая соотношению* (1) *для любой функции $g \in \mathscr{K}(E)$ и любой функции $h \in \mathscr{K}(F)$.*

При доказательстве теоремы 1 можно поменять местами пространства E и F: тогда на $E \times F$ будет определена мера $f \to \int d\lambda(x) \int f(x, y)\, d\mu(y)$, которая снова удовлетворяет условию (1). Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть λ, μ — две меры, определенные соответственно на двух локально компактных пространствах E, F. Для всякой непрерывной на $E \times F$ числовой функции f с компактным носителем интеграл от f относительно меры ν — произведения λ на μ — равен*

$$\int f(x)\, d\nu(x, y) = \int d\lambda(x) \int f(x, y)\, d\mu(y) = \int d\mu(y) \int f(x, y)\, d\lambda(x). \tag{2}$$

В силу этого интеграл от f относительно меры-произведения ν чаще всего обозначают через $\int\int f\, d\lambda\, d\mu$ или $\int\int f\, d\mu\, d\lambda$, а также $\int\int f(x, y)\, d\lambda(x)\, d\mu(y)$ или $\int\int f(x, y)\, d\mu(y)\, d\lambda(x)$; его называют *двойным* интегралом от f относительно λ и μ. В этих обозначениях формула (2) принимает вид

$$\int\int f(x, y)\, d\lambda(x)\, d\mu(y) = \int d\lambda(x) \int f(x, y)\, d\mu(y) = \\ = \int d\mu(y) \int f(x, y)\, d\lambda(x). \tag{3}$$

Формула (2) показывает, что если меры λ и μ *положительны*, то мера-произведение ν *положительна*.

Примеры. 1) Мера-произведение меры ε_x $(x \in E)$ и меры ε_y $(y \in F)$ есть мера $\varepsilon_{(x, y)}$.

2) Возьмем $E = F = \mathbf{R}$, а в качестве λ и μ *меру Лебега* (§ 2, n° 2) на $\mathbf{R}$; их произведение называется *мерой Лебега* на $\mathbf{R}^2$; интеграл от функции $f \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^2)$ относительно этой меры обозначается через $\int\int f(x, y)\, dx\, dy$ или $\int\int f(x, y)\, dy\, dx$; формула (3) для функции, равной нулю вне компактного прямоугольника $[a, b] \times [c, d]$, эквивалентна формуле

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy,$$

доказанной в «Функциях действ. перем.», гл. II, § 3, n° 6.

Поскольку мера Лебега на $\mathbf{R}$ инвариантна относительно любого сдвига (§ 2, n° 2), то отсюда тотчас вытекает, что мера Лебега на $\mathbf{R}^2$ *инвариантна относительно любого сдвига пространства* $\mathbf{R}^2$.

Замечания. 1) Пусть G — локально выпуклое пространство, удовлетворяющее аксиоме (EC) из § 4, n° 1. Пусть $\mathbf{f}$ — непрерывное отображение $E \times F$ в G с носителем, содержащимся в произведении $K \times L$ компактного множества $K \subset E$ и компактного множества $L \subset F$. Аналогично изложенной выше лемме 2 (с учетом предложения 3 из § 4) доказывается, что $\mathbf{h}(y) = \int \mathbf{f}(x, y)\, d\lambda(x)$ есть непрерывная функция на F с носителем в L. Таким образом, формула (3) принимает следующий более общий вид:

$$\int\int \mathbf{f}(x, y)\, d\lambda(x)\, d\mu(y) = \int d\lambda(x) \int \mathbf{f}(x, y)\, d\mu(y) = \int d\mu(y) \int \mathbf{f}(x, y)\, d\lambda(x). \qquad (4)$$

В самом деле, для любого $\mathbf{z}'$ из пространства G', сопряженного к G, имеем

$$\left\langle \int\int \mathbf{f}\, d\lambda\, d\mu, \mathbf{z}' \right\rangle = \int\int \langle \mathbf{f}, \mathbf{z}' \rangle\, d\lambda\, d\mu = \int d\lambda \int \langle \mathbf{f}, \mathbf{z}' \rangle\, d\mu = \int \left\langle \int \mathbf{f}\, d\mu, \mathbf{z}' \right\rangle d\lambda = \left\langle \int d\lambda \int \mathbf{f}\, d\mu, \mathbf{z}' \right\rangle,$$

откуда и следует (4).

2) Для любого $y \in F$ отображение $f \to \int f(x, y)\, d\lambda(x)$ есть *мера* на $E \times F$, носитель которой содержится в замкнутом множестве $E \times \{y\}$; эту меру мы обозначим λ_y.

Лемма 2 показывает, что отображение $y \to \lambda_y$ пространства F в $\mathcal{M}(E \times F)$ непрерывно в широкой топологии и что для всякой функции $f \in \mathcal{K}(E \times F)$ отображение $y \to \langle f, \lambda_y \rangle$ является непрерывной функцией с компактным носителем. Так как пространство мер $\mathcal{M}(E \times F)$ удовлетворяет аксиоме (EC_a) из § 4, то можно, следовательно, определить интеграл $\int \lambda_y\, d\mu(y)$, представляющий собой элемент из $\mathcal{M}(E \times F)$; эта мера есть не что иное, как *мера-произведение* ν меры λ на меру μ, поскольку интеграл от функции $f \in \mathcal{M}(E \times F)$ относительно меры $\int \lambda_y\, d\mu(y)$, по определению, равен $\int \langle f, \lambda_y \rangle \, d\mu(y) = \int d\mu(y) \int f(x, y) \, d\lambda(x)$. Стало быть, можно написать, что

$$\nu = \int \lambda_y \, d\mu(y). \tag{5}$$

2. Свойства мер-произведений

Рассмотрим *тензорное произведение* (Алгебра, гл. III, § 1) двух векторных пространств $\mathscr{K}(E)$ и $\mathscr{K}(F)$ над $\mathbf{R}$; если каждому элементу $\sum_k g_k \otimes h_k$ этого векторного пространства поставить в соответствие отображение $(x, y) \to \sum_k g_k(x) h_k(y)$ произведения $E \times F$ в $\mathbf{R}$, то тем самым будет определен (алгебраический) *изоморфизм* произведения $\mathscr{K}(E) \otimes \mathscr{K}(F)$ на $\mathscr{K}(E \times F)$. Действительно, предположим, что функция $(x, y) \to \sum_k g_k(x) h_k(y)$ равна нулю; пусть $h_k = \sum_j \rho_{jk} \varphi_j$, где $\varphi_j \in \mathscr{K}(F)$, линейно независимы; тогда из уравнения $\sum_j \big(\sum_k \rho_{jk} g_k(x)\big) \varphi_j(y) = 0$, справедливого для любого $y \in F$, следует, что $\sum_k \rho_{jk} g_k(x) = 0$ для любого $x \in E$, то есть $\sum_k \rho_{jk} g_k = 0$, и значит, $\sum_k g_k \otimes h_k = \sum_j \big(\sum_k \rho_{jk} g_k\big) \otimes \varphi_j = 0$. Следовательно, при помощи предыдущего изоморфизма можно канонически отождествить пространство непрерывных функций вида $\sum_k g_k(x) h_k(y)$ с компактным носителем и тензорное произведение $\mathscr{K}(E) \otimes \mathscr{K}(F)$. При этом то же самое рассуждение применяется и к тензорному произведению $\mathscr{C}(E) \otimes \mathscr{C}(F)$.

Если λ — мера на E, а μ — мера на F, то сужение на $\mathscr{K}(E) \otimes \mathscr{K}(F)$ меры-произведения меры λ на μ совпадает с *тензорным произведением* $\lambda \otimes \mu$ двух линейных форм λ и μ (Алгебра, гл. III, § 1, n° 4). Для удобства мы будем снова обозначать так саму меру-произведение (а не только ее сужение на $\mathscr{K}(E) \otimes \mathscr{K}(F)$). Тогда формула (1) примет вид

$$\langle g \otimes h, \lambda \otimes \mu \rangle = \langle g, \lambda \rangle \langle h, \mu \rangle. \tag{6}$$

Отображение $(\lambda, \mu) \to \lambda \otimes \mu$ произведения $\mathscr{M}(E) \times \mathscr{M}(F)$ в $\mathscr{M}(E \times F)$, очевидно, *билинейно*; иными словами,

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \otimes (\mu_1 + \mu_2) = \lambda_1 \otimes \mu_1 + \lambda_1 \otimes \mu_2 + \lambda_2 \otimes \mu_1 + \lambda_2 \otimes \mu_2,$$

и для любого скаляра α

$$(\alpha\lambda) \otimes \mu = \lambda \otimes (\alpha\mu) = \alpha (\lambda \otimes \mu).$$

Предложение 1. *Пусть λ — мера на E, а μ — мера на F; если $g \in \mathscr{C}(E)$ и $h \in \mathscr{C}(F)$, то*

$$(g \cdot \lambda) \otimes (h \cdot \mu) = (g \otimes h) \cdot (\lambda \otimes \mu). \tag{7}$$

В самом деле, для всякой функции $f \in \mathscr{K}(E \times F)$ на основании формулы (3) имеем

$$\langle f, (g \cdot \lambda) \otimes (h \cdot \mu) \rangle = \int g(x)\, d\lambda(x) \int f(x, y)\, h(y)\, d\mu(y) =$$
$$= \int d\lambda(x) \int f(x, y)\, g(x)\, h(y)\, d\mu(y),$$

что и доказывает соотношение (7).

Предложение 2. *Носитель произведения $\lambda \otimes \mu$ равен произведению носителей мер λ и μ.*

Во-первых, заметим, что соотношение $\lambda \otimes \mu = 0$ влечет тот факт, что хотя бы одна из двух мер λ, μ равна нулю (Алгебра, гл. III, § 1, следствие 2 из предл. 7). С другой стороны, если U (соотв. V) есть открытое множество в E (соотв. F), то сужение произведения $\lambda \otimes \mu$ на $U \times V$ равно произведению сужений мер λ и μ соответственно на U и V, как следует из теоремы 1 и из определения сужения меры на открытое множество (§ 3, n° 1). Стало быть, для того чтобы сужение меры $\lambda \otimes \mu$ на $U \times V$ было равно нулю, необходимо и достаточно, чтобы сужение меры λ на U или меры μ на V было равно нулю, после чего, приняв во внимание определение носителя меры (§ 3, n° 2), получим предложение. Отметим также, что если λ и μ — *ограниченные* меры, то $\lambda \otimes \mu$ тоже ограничена и $\|\lambda \otimes \mu\| \leqslant \|\lambda\| \cdot \|\mu\|$, что следует сразу же из формулы (2).

3. *Широкие пределы мер-произведений*

Предложение 3. *Для любой меры λ_0 на E отображение $\mu \to \lambda_0 \otimes \mu$ пространства $\mathscr{M}(E)$ в $\mathscr{M}(E \times F)$ широко непрерывно.*

В самом деле, если f — произвольная функция из $\mathscr{K}(E \times F)$ и если $h(y) = \int f(x, y)\, d\lambda_0(x)$, то согласно (3) $\langle f, \lambda_0 \otimes \mu \rangle = \langle h, \mu \rangle$, откуда следует предложение.

Предложение 4. *Пусть B — ограниченное множество в $\mathcal{M}(E)$, а C — ограниченное множество в $\mathcal{M}(F)$; если $\mathcal{M}(E)$, $\mathcal{M}(F)$ и $\mathcal{M}(E \times F)$ наделены широкой топологией, то отображение $(\lambda, \mu) \to \lambda \otimes \mu$ произведения $B \times C$ в $\mathcal{M}(E \times F)$ непрерывно и образ множества $B \times C$ при этом отображении ограничен.*

Прежде всего заметим, что отображение $(\lambda, \mu) \to \lambda \otimes \mu$ *всего* пространства $\mathcal{M}(E) \times \mathcal{M}(F)$ в $\mathcal{M}(E \times F)$ непрерывно, если $\mathcal{M}(E)$ и $\mathcal{M}(F)$ наделены широкой топологией, а $\mathcal{M}(E \times F)$ — топологией $\mathcal{T}$ *простой сходимости на* $\mathcal{K}(E) \otimes \mathcal{K}(F)$; это следует непосредственно из соотношения $\langle \sum_k g_k \otimes h_k, \lambda \otimes \mu \rangle = \sum_k \langle g_k, \lambda \rangle \langle h_k, \mu \rangle$ и из определения широкой топологии. Топология $\mathcal{T}$ в $\mathcal{M}(E \times F)$ является отделимой и менее сильной, чем широкая топология; следовательно, она индуцирует на любом *ограниченном* множестве в $\mathcal{M}(E \times F)$ ту же топологию, что и широкая топология, поскольку такое множество относительно компактно в широкой топологии (§ 2, предл. 9). Таким образом, предложение будет доказано, если будет установлено, что образ H множества $B \times C$ при отображении $(\lambda, \mu) \to \lambda \otimes \mu$ *ограничен*. Итак, пусть f — произвольная функция из $\mathcal{K}(E \times F)$, и пусть $K \subset E$, $L \subset F$ — такие два компактных множества, что $K \times L$ является окрестностью носителя функции f. По условию существует такое число $a > 0$, что для любой функции $g \in \mathcal{K}(E)$ (соотв. $h \in \mathcal{K}(F)$) с носителем в K (соотв. L) и любой меры $\lambda \in B$ (соотв. $\mu \in C$) выполняется неравенство $|\lambda(g)| \leqslant a \|g\|$ (соотв. $|\mu(h)| \leqslant a\|h\|$) (§ 2, предл. 8); тогда в силу (3) $\left| \int \int f \, d\lambda \, d\mu \right| \leqslant a^2 \|f\|$ для $\lambda \in B$ и $\mu \in C$, что и завершает доказательство.

4. *Произведение конечного числа мер*

Пусть E_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — n локально компактных пространств и $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ — их произведение. Множество линейных комбинаций числовых функций вида $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to u_1(x_1) u_2(x_2) \ldots u_n(x_n)$, где $u_i \in \mathcal{K}(E_i)$, может быть отождествлено с тензорным произведением $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{K}(E_i)$, что следует из рассуждения, приведенного в n° 2, примененного по индукции n раз; кроме того, лемма 1 при помощи индукции по n показывает, что подпространство $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathscr{K}(E_i)$ *положительно изобильно* в $\mathscr{K}(E)$.

Обозначим теперь через μ_i меру на E_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$; на E существует, и притом только одна, такая мера ν, что для $f_i \in \mathscr{K}(E_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ имеем

$$\langle f_1 \otimes f_2 \otimes \ldots \otimes f_n,\ \nu \rangle = \prod_{i=1}^{n} \langle f_i, \mu_i \rangle. \tag{8}$$

Действительно, если эта мера существует, то она единственна на основании вышесказанного. С другой стороны, пусть $\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \ldots \otimes \mu_n$ — мера на E, определенная рекуррентно по n:

$$\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \ldots \otimes \mu_n = (\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \ldots \otimes \mu_{n-1}) \otimes \mu_n.$$

Из формулы (1) и из этого определения (индукцией по n) получаем, что эта мера удовлетворяет (8); ее называют *мерой-произведением* мер μ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и снова обозначают через $\bigotimes_{i=1}^{n} \mu_i$; соотношение (8) записывается также в виде

$$\langle f_1 \otimes f_2 \otimes \ldots \otimes f_n,\ \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \ldots \otimes \mu_n \rangle = \prod_{i=1}^{n} \langle f_i, \mu_i \rangle. \tag{9}$$

Предложение 5 («ассоциативность произведения мер»). *Пусть* $(I_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ — *разбиение интервала* $[1, n]$ *из* $\mathbf{N}$; *тогда*

$$\bigotimes_{k=1}^{p} \Big(\bigotimes_{i \in I_k} \mu_i \Big) = \bigotimes_{i=1}^{n} \mu_i. \tag{10}$$

В самом деле, согласно (9) обе эти меры совпадают для всякой функции вида $f_1 \otimes f_2 \otimes \ldots \otimes f_n$.

Интеграл от функции $f \in \mathscr{K}(E)$ относительно меры-произведения $\bigotimes_{i=1}^{n} \mu_i$ обозначается $\int f\, d\mu_1\, d\mu_2 \ldots d\mu_n$ или

$\underbrace{\int\int \ldots \int}_{n} f\, d\mu_1 \ldots d\mu_n$, а также

$$\underbrace{\int\int \ldots \int}_{n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, d\mu_1(x_1)\, d\mu_2(x_2) \ldots d\mu_n(x_n);$$

его называют *кратным интегралом порядка* n или *n-кратным интегралом*. Используя ассоциативность произведения мер и теорему об изменении порядка интегрирования, получаем для любой перестановки σ интервала $[1, n]$ формулу

$$\underbrace{\int\int\ldots\int}_{n} f\,d\mu_1\,d\mu_2\ldots d\mu_n = \int d\mu_{\sigma(1)} \int d\mu_{\sigma(2)}\ldots \int f\,d\mu_{\sigma(n)}. \qquad (11)$$

Обозначение интеграла и формула (11) очевидным образом распространяются на функции со значениями в локально выпуклом пространстве (удовлетворяющем аксиоме (EC) из § 4, n° 1). Предоставляем читателю обобщить на произведение любого конечного числа мер результаты n°n° 2 и 3, относящиеся к произведению двух мер.

В частности, *мерой Лебега* на $\mathbf{R}^n$ называется произведение n мер, тождественных мере Лебега на $\mathbf{R}$; интеграл от непрерывной функции $\mathbf{f}$ с компактным носителем, определенной на $\mathbf{R}^n$ и принимающей значения в локально выпуклом пространстве G, удовлетворяющем аксиоме (EC), обозначается

$$\underbrace{\int\int\ldots\int}_{n} \mathbf{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n$$

и равен

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_n.$$

Мера Лебега на $\mathbf{R}^n$ *инвариантна относительно любого сдвига.*

5. Бесконечные произведения мер

Пусть $(E_\iota)_{\iota\in I}$ — произвольное семейство компактных пространств и $E = \prod_{\iota\in I} E_\iota$ — их произведение. Будем говорить, что отображение f пространства E во множество G *не зависит от переменных с индексом* $\iota \notin J$ (J — произвольная часть множества I), если соотношение $\mathrm{pr}_J(x) = \mathrm{pr}_J(y)$ влечет $f(x) = f(y)$. Если положить $E_J = \prod_{\iota\in J} E_\iota$, то тогда, исходя из f, можно определить отображение f_J пространства E_J в G факторизацией по отношению эквивалентности $\mathrm{pr}_J(x) = \mathrm{pr}_J(y)$ (Теор. мн., Рез, § 5, n° 7).

Если f не зависит от переменных, индекс которых принадлежит дополнению некоторого *конечного* множества из I, то говорят, что f *зависит лишь от конечного числа переменных*.

Теперь обозначим для любого индекса $\iota \in I$ через μ_ι *положительную* меру на E_ι с общей массой, равной 1; для любого конечного множества J из I через μ_J обозначим меру-произведение $\bigotimes_{\iota \in J} \mu_\iota$ на пространстве E_J; она положительна и имеет в силу (9) общую массу 1.

Предложение 6. *На пространстве-произведении* $E = \prod_{\iota \in J} E_\iota$ *существует, и притом только одна, такая мера* μ, *что для любого конечного множества* J *из* I *и любой непрерывной на* E *числовой функции* f, *не зависящей от переменных с индексом* $\iota \notin J$, *выполняется равенство* $\mu(f) = \mu_J(f_J)$.

В самом деле, пусть V — векторное пространство всех непрерывных на E числовых функций, зависящих лишь от конечного числа переменных; V *всюду плотно* в $\mathscr{C}(E)$ (Общая топ., гл. X, § 5, теорема 4). Достаточно, следовательно, показать, что существует положительная линейная форма μ, определенная на V и удовлетворяющая требуемому условию (§ 1, предл. 2). Итак, пусть f — функция, не зависящая от переменных с индексом $\iota \notin J$; для любой конечной части $K \supset J$ множества I справедливо равенство $\mu_K(f_K) = \mu_J(f_J)$; это следует из ассоциативности произведения мер (предл. 5) и из формулы (3) с учетом того, что f_K не зависит от переменных с индексом $\iota \in K \cap \complement J$, и того, что $\mu_{K \cap \complement J}$ имеет общую массу 1. Значит, для всякой функции $f \in V$ можно определить функцию $\mu(f)$ как постоянную, равную общему значению чисел $\mu_J(f_J)$ для всех конечных подмножеств $J \subset I$, обладающих тем свойством, что f не зависит от переменных с индексом $\iota \notin J$; μ линейна на V, ибо если f и g принадлежат V, то найдется такая конечная часть J множества I, что ни f, ни g не зависят от переменных с индексом $\iota \notin J$. А поскольку μ, очевидно, положительна, то предложение доказано.

Определенная таким способом на E мера μ называется *мерой-произведением* мер μ_ι и обозначается $\bigotimes_{\iota \in I} \mu_\iota$; ясно, что она имеет общую массу 1.

Предложение 7. *Пусть* $(I_\lambda)_{\lambda \in L}$ *— разбиение интервала* I; *для любого семейства* $(\mu_\iota)_{\iota \in I}$ *положительных мер на* E_ι *с общей массой* 1 *справедлива формула*

$$\bigotimes_{\lambda \in L} \Big(\bigotimes_{\iota \in I_\lambda} \mu_\iota \Big) = \bigotimes_{\iota \in I} \mu_\iota. \tag{12}$$

Это сразу же следует из определения меры-произведения и из того факта, что для всякой функции $f \in \mathscr{C}(E)$, зависящей лишь от конечного числа переменных, интегралы от f относительно мер, фигурирующих в левой и в правой частях формулы (12), равны между собой.

Мы предоставляем читателю сформулировать и доказать распространение предложения 2 на бесконечные произведения. Отметим также, что если для каждого индекса $\iota \in I$ σ_ι — такой гомеоморфизм E на себя, при котором μ_ι инвариантна относительно σ_ι, то мера-произведение $\bigotimes_{\iota \in I} \mu_\iota$ инвариантна относительно гомеоморфизма $(x_\iota) \to (\sigma_\iota(x_\iota))$ пространства E на себя.

6. *Проективные пределы мер*

Понятие меры-произведения на произведении бесконечного семейства компактных пространств обобщается следующим образом.

Пусть $(E_\iota)_{\iota \in I}$ — некоторое семейство компактных пространств, и пусть μ — мера на пространстве-произведении $E = \prod_{\iota \in I} E_\iota$. Легко видеть, что для любого непустого множества J из I отображение $f \to \mu(f \circ \mathrm{pr}_J)$ пространства $\mathscr{C}(E_J)$ в $\mathbf{R}$ есть *мера* на E_J; будем называть ее *проекцией на* E_J меры μ и обозначать $\mathrm{pr}_J(\mu)$ (это частный случай понятия образа меры, который мы будем изучать в гл. V). Кроме того, если J и K — такие два конечных множества из I, что $J \subset K$, то $\mathrm{pr}_{J,K}(\mathrm{pr}_K(\mu)) = \mathrm{pr}_J(\mu)$, где через $\mathrm{pr}_{J,K}$ обозначена проекция множества E_K на E_J. Обратно, имеем следующее предложение:

Предложение 8. *Пусть для любого конечного множества* J *из* I μ_J *есть положительная мера на* E_J. *Предположим, что если* J *и* K *— такие два конечных множества из* I, *что* $J \subset K$, *то* $\mathrm{pr}_{J,K}(\mu_K) = \mu_J$. *Тогда на* E *существует, и притом только одна,* *такая мера* μ, *что для любого конечного множества* J *из* I *выполняется равенство* $\mathrm{pr}_J(\mu) = \mu_J$.

В самом деле, пусть f — непрерывная на E числовая функция, не зависящая от переменных с индексом $\iota \notin J$, где J — конечное множество из I; тогда для любой конечной части $K \supset J$ множества I, по условию, имеем $\mu_K(f_K) = \mu_J(f_J)$, ибо $f_K = f_J \circ \mathrm{pr}_{J,K}$. Значит, можно определить $\mu(f)$ как общее значение чисел $\mu_J(f_J)$ для всех конечных множеств $J \subset I$, для которых f не зависит от переменных $\iota \notin J$; тогда доказательство заканчивается, как в предложении 6.

Определенную таким способом на E меру μ называют *проективным пределом* мер μ_J; случай произведения мер получается, когда μ_J есть произведение $\bigotimes_{\iota \in J} \mu_\iota$ для любого конечного множества J из I.

Упражнения. 1) Пусть E и F — два локально компактных пространства, U (соотв. V) — открытое относительно компактное в E (соотв. F) множество и $\mathbf{f}$ — непрерывное отображение с носителем в $U \times V$ пространства $E \times F$ в локально выпуклое пространство G. Показать, что для любого $\varepsilon > 0$ и любой непрерывной на G полунормы q существует такая функция $\mathbf{f}_0(x, y) = \sum_i \mathbf{a}_i g_i(x) h_i(y)$, где $\mathbf{a}_i \in G$, $g_i \in \mathcal{K}(E)$, $h_i \in \mathcal{K}(F)$ для любого i и носитель функции g_i (соотв. h_i) содержится в U (соотв. V), что $q(\mathbf{f}(x, y) - \mathbf{f}_0(x, y)) \leqslant \varepsilon$ и $q(\mathbf{f}_0(x, y)) \leqslant q(\mathbf{f}(x, y))$ на $E \times F$.

°2) Пусть E и F — два локально компактных пространства, μ — мера на E и ν — мера на F. Показать, что $|\mu \otimes \nu| = |\mu| \otimes |\nu|$ (показать, что если $\rho = |\mu \otimes \nu|$, то для $f = g \otimes h$, где $g \in \mathcal{K}(E)$ и $h \in \mathcal{K}(F)$ положительны, $|\mu|(g) \cdot |\nu|(h) \leqslant \rho(g \otimes h)$, и воспользоваться леммой 1).

3) Пусть E и F — два локально компактных пространства, μ — ограниченная мера на E и ν — ограниченная мера на F. Показать, что $\mu \otimes \nu$ ограничена на $E \times F$, что для любой функции $f \in \overline{\mathcal{K}(E \times F)}$ функция $x \to \int f(x, y)\, d\nu(y)$ принадлежит $\overline{\mathcal{K}(E)}$ и что

$$\int\int f(x, y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) = \int d\mu(x) \int f(x, y)\, d\nu(y).$$

4) Пусть E и F — два локально компактных пространства. Показать, что отображение $(\mu, \nu) \to \mu \otimes \nu$ произведения $\mathcal{M}(E) \times \mathcal{M}(F)$ в $\mathcal{M}(E \times F)$ непрерывно, если $\mathcal{M}(E)$, $\mathcal{M}(F)$ и $\mathcal{M}(E \times F)$ наделены сильной топологией.

5) Пусть E и F — два локально компактных пространства. Показать, что отображение $(\mu, \nu) \to \mu \otimes \nu$ произведения $\mathcal{M}_+(E) \times \mathcal{M}_+(F)$ в $\mathcal{M}_+(E \times F)$ непрерывно в широкой топологии.

°6) a) Пусть $E = [0, 1]$; показать, что если $(a_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ есть произвольная конечная последовательность отличных друг от друга элементов из E, то n функций $|x - a_k|$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ линейно независимы. Вывести отсюда, что непрерывная функция $|x - y|$, определенная на $E \times E$, не представима в виде $\sum\limits_i u_i(x)\, v_i(y)$, где u_i и v_i непрерывны.

b) Пусть u_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ — m произвольных функций из $\mathscr{C}(E)$; показать, что существует бесконечное число таких значений элемента $y \in E$, что для каждого из этих значений существует мера μ на E, удовлетворяющая условиям $\int u_i d\mu = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ и $\int |x - y|\, d\mu(x) \neq 0$ (заметить, что в противном случае $|x - y|$ будет линейной комбинацией функций $u_i(x)$ для бесконечного числа значений $y \in E$).

c) Пусть B — множество таких мер на E, что $\| \mu \| \leqslant 1$; показать, что отображение $(\mu, \nu) \to \mu \otimes \nu$ произведения $B \times \mathcal{M}(E)$ в $\mathcal{M}(E \times E)$ не будет непрерывным, если наделить $\mathcal{M}(E)$ и $\mathcal{M}(E \times E)$ широкой топологией (используя b), показать, что для любой окрестности V точки 0 в $\mathcal{M}(E)$ существуют такая мера $\mu \in V \cap B$ и такая мера $\nu \in V$, что интеграл $\int\int |x - y|\, d\mu(x)\, d\nu(y)$ сколь угодно велик).

7) Пусть $(E_\iota)_{\iota \in I}$ — бесконечное семейство компактных пространств; пусть для каждого $\iota \in I$ через a_ι обозначена точка из E_ι, а через μ_ι — положительная мера на E_ι с общей массой, равной 1. Пусть, далее, для любого конечного множества J из I через $\lambda(J)$ обозначена мера на $E = \prod\limits_{\iota \in I} E_\iota$, являющаяся произведением мер μ_ι для $\iota \in J$ и мер ε_{a_ι} для $\iota \in \complement J$. Показать, что мера $\lambda(J)$ широко стремится к $\mu = \bigotimes\limits_{\iota \in I} \mu_\iota$ по фильтрующемуся множеству конечных подмножеств из I, но, вообще говоря, не стремится к μ сильно.

°8) Пусть $(E_\iota)_{\iota \in I}$ — бесконечное семейство компактных пространств, и пусть для каждого ι через μ_ι обозначена *произвольная* мера на E_ι. Пусть, далее, $E = \prod\limits_{\iota \in I} E_\iota$ и V есть подпространство пространства $\mathscr{C}(E)$, состоящее из непрерывных функций, зависящих лишь от конечного числа переменных.

a) Для любой конечной функции $f \in V$ и любого конечного множества $J \subset I$, для которого f не зависит от переменных с индексом $\iota \notin J$, рассмотрим интеграл $\mu_J(f_J)$ (в обозначениях n° 5). Показать, что для того, чтобы отображение $J \to \mu_J(f_J)$ стремилось к пределу по фильтрующемуся множеству конечных подмножеств из I для любой функции $f \in V$, необходимо и достаточно, чтобы для любого множества $L \subset I$ с конечным дополнением семейство $(\mu_\iota(1))_{\iota \in L}$ было перемножаемо *в* $\mathbf{R}$ (произведение может равняться 0). Если это условие выполнено и $\mu(f)$ означает предел отображения $J \to \mu_J(f_J)$, то μ есть линейная форма на V. Показать, что для того, чтобы μ была равна нулю на V, необходимо и достаточно, чтобы одна из мер μ_ι была нулем или чтобы для любого множества L из I с конечным дополнением $\prod_{\iota \in L} \mu_\iota(1) = 0$.

b) Предположим, что меры μ_ι удовлетворяют сформулированному в a) условию и что μ не равна тождественно нулю на V. Показать, что для того, чтобы μ могла быть продолжена до меры на E, необходимо и достаточно, чтобы семейство $(\|\mu_\iota\|)_{\iota \in I}$ было перемножаемо *в* $\mathbf{R}_+^*$; показать, что если это так, то μ_ι есть положительная мера с общей массой, равной 1, исключая счетное подсемейство индексов ι, и что $\mu_\iota(1) > 0$, исключая конечное число индексов ι.

9) Обобщить определение проективного предела мер μ_J (предл. 8) на случай, когда меры μ_J имеют произвольный знак и таковы, что нормы $\|\mu_J\|$ ограничены. Показать, что если μ есть проективный предел мер μ_J, то для любой непрерывной на E числовой функции f, не зависящей от переменных с индексом $\iota \notin J$, $|\mu|(f)$ является верхней гранью и пределом чисел $|\mu_K|(f)$ по фильтрующемуся множеству конечных подмножеств K из I, содержащих J.

ГЛАВА IV

ПРОДОЛЖЕНИЕ МЕРЫ. ПРОСТРАНСТВА L^p

В этой главе E означает локально компактное пространство, а μ — положительную *меру на E; когда речь идет о некоторой функции (без уточнения множества, на котором она определена), то подразумевается, что функция определена на E.*

Для любого множества A из E через φ_A будет обозначаться характеристическая функция множества A (равная 1 на A и 0 на $\complement A$).

§ 1. Верхний интеграл от положительной функции

1. Верхний интеграл от положительной полунепрерывной снизу функции

Пусть E — локально компактное пространство и μ — *положительная* мера на E; через $\mathscr{K}_+(E)$ (или просто $\mathscr{K}_+$) будем обозначать множество конечных *положительных* числовых функций с компактным носителем, непрерывных на E; известно, что μ есть возрастающая функция на решетке $\mathscr{K}_+$.

Через $\mathscr{I}_+(E)$ (или просто $\mathscr{I}_+$) мы будем обозначать множество *положительных* числовых функций, *конечных или бесконечных*, *полунепрерывных снизу* на E. Напомним, что сумма произвольного семейства функций из $\mathscr{I}_+$ принадлежит $\mathscr{I}_+$; произведение функции из $\mathscr{I}_+$ на конечное число $\alpha > 0$ принадлежит $\mathscr{I}_+$; верхняя огибающая *произвольного* семейства функций из $\mathscr{I}_+$ и нижняя огибающая *конечного* семейства функций из $\mathscr{I}_+$ также принадлежат $\mathscr{I}_+$ (Общая топ., гл. IV, § 6, предл. 2 и теорема 4). Кроме того, нам понадобится следующая лемма:

Лемма 1. *Всякая функция $f \in \mathcal{J}_+$ есть верхняя огибающая множества (фильтрующегося по отношению $\leqslant$) функций $g \in \mathcal{K}_+$, удовлетворяющих условию $g \leqslant f$.*

В самом деле, для любого $x \in E$, для которого $f(x) > 0$, и любого действительного числа a, $0 < a < f(x)$, существует такая компактная окрестность V точки x, что $f(y) \geqslant a$ на V; с другой стороны, существует функция $g \in \mathcal{K}_+$ с носителем в V, равная a в точке x и $\leqslant a$ на V (Общая топ., гл. IX, § 1, теорема 2); следовательно, $0 \leqslant g \leqslant f$ и $g(x) \geqslant a$, что и доказывает лемму.

Определение 1. *Если на E задана положительная мера μ, то верхним интегралом от функции $f \in \mathcal{J}_+$* (относительно μ) *называется положительное число* (конечное или равное $+\infty$)

$$\mu^*(f) = \sup_{g \in \mathcal{K}_+,\ g \leqslant f} \mu(g).$$

Легко видеть, что для любой функции $f \in \mathcal{K}_+$ выполняется равенство $\mu^*(f) = \mu(f)$, иными словами, μ^* есть *продолжение* меры μ на $\mathcal{J}_+$.

Пример. Пусть E — произвольное локально компактное пространство и α — такая конечная положительная числовая функция на E, что сумма $\sum_{x \in K} \alpha(x)$ конечна для любого компактного множества $K \subset E$. Пусть μ — положительная мера на E, определенная при помощи масс $\alpha(x)$ (гл. III, § 2, n° 2); покажем, что для всякой функции $f \geqslant 0$, полунепрерывной снизу на E, выполняется равенство $\mu^*(f) = \sum_{x \in E} \alpha(x) f(x)$, если условиться, что $\alpha(x) f(x) = 0$, когда $\alpha(x) = 0$, а $f(x) = +\infty$. Действительно, для любой функции $g \in \mathcal{K}_+$, удовлетворяющей условию $g \leqslant f$, имеем

$$\mu(g) = \sum_{x \in E} \alpha(x) g(x) \leqslant \sum_{x \in E} \alpha(x) f(x), \text{ откуда } \mu^*(f) \leqslant \sum_{x \in E} \alpha(x) f(x).$$

С другой стороны, для любого действительного числа a, удовлетворяющего условию $a < \sum_{x \in E} \alpha(x) f(x)$, существует такое конечное множество $M \subset E$, что $a \leqslant \sum_{x \in M} \alpha(x) f(x)$ (Общая топ., гл. IV, § 7, n° 5). Для любого $x \in M$ и любого числа $b_x < f(x)$ найдется такая функция $g_x \in \mathcal{K}_+$, что $g_x \leqslant f$ и $g_x(x) \geqslant b_x$ (лемма 1); если g есть верхняя огибающая функций g_x, то $g \in \mathcal{K}_+$, $g \leqslant f$ и $\mu(g) \geqslant \sum_{x \in M} \alpha(x) b_x$. А так как последняя сумма сколь угодно близка к $\sum_{x\in M}\alpha(x)f(x)$, то $\mu^*(f)\geqslant a$, что и завершает доказательство нашего утверждения.

Предложение 1. *Для любого конечного действительного числа* $\alpha>0$ *и любой функции* $f\in\mathcal{J}_+$ *справедливо равенство*

$$\mu^*(\alpha f)=\alpha\mu^*(f). \tag{1}$$

Предложение 2. *Функция* μ^* *возрастает на множестве* $\mathcal{J}_+$.

Доказательство этих предложений вытекает непосредственно из определения 1.

Теорема 1. *Пусть H — множество функций из $\mathcal{J}_+$, фильтрующееся по отношению $\leqslant$. Для любой положительной меры μ на E справедлива формула*

$$\mu^*(\sup_{g\in H} g)=\sup_{g\in H}\mu^*(g)=\lim_{g\in H}\mu^*(g). \tag{2}$$

Положим $f=\sup_{g\in H} g$. Сначала мы докажем теорему для того частного случая, когда функции $g\in H$ и их верхняя огибающая f *принадлежат* $\mathcal{K}_+$. В этом случае из теоремы Дини (Общая топ., гл. X, § 5, теорема 1) следует, что фильтр сечений множества H *равномерно* сходится к f на любом компактном множестве из E и, в частности, на носителе K функции f. А поскольку $0\leqslant g\leqslant f$ для любой функции $g\in H$, то носитель всякой функции из H содержится в K; но по определению μ непрерывна на векторном пространстве $\mathcal{K}(E,K)$ непрерывных функций с носителем в K в топологии равномерной сходимости; отсюда вытекает формула (2) для рассматриваемого случая.

Перейдем к общему случаю. Ясно, что $\mu^*(g)\leqslant\mu^*(f)$ для любой функции $g\in H$. В силу определения 1 все сводится к тому, чтобы показать, что для всякой функции $\psi\in\mathcal{K}_+$, $\psi\leqslant f$, выполняется неравенство $\mu(\psi)\leqslant\sup_{g\in H}\mu^*(g)$. Обозначим для любой функции $g\in H$ через Φ_g множество таких функций $\varphi\in\mathcal{K}_+$, что $\varphi\leqslant g$, а через Φ — объединение множеств Φ_g, когда g пробегает H; поскольку H — фильтрующееся множество, то таковым является и Φ, и $f=\sup_{f\in\Phi}\varphi$. А так как $\psi\leqslant f$, то ψ есть верхняя огибающая множества функций $\inf(\psi,\varphi)$, когда φ пробегает Φ; а поскольку ψ и функции $\inf(\psi,\varphi)$ принадлежат $\mathcal{K}_+$, то первая часть доказательства показывает, что $\mu(\psi) = \sup\limits_{\varphi \in \Phi} \mu(\inf(\psi, \varphi))$. Но каждая функция $\varphi \in \Phi$ принадлежит множеству Φ_g, и значит,

$$\mu(\inf(\psi, \varphi)) \leqslant \mu(\varphi) \leqslant \mu^*(g) \leqslant \sup_{g \in H} \mu^*(g),$$

откуда сразу же получаем, что $\mu(\psi) \leqslant \sup\limits_{g \in H} \mu^*(g)$. Таким образом, мы доказали, что $\mu^*(f) = \sup\limits_{g \in H} \mu^*(g)$; соотношение $\mu^*(f) = \lim\limits_{g \in H} \mu^*(g)$ является теперь следствием теоремы о монотонном пределе (Общая топ., гл. IV, § 2, теорема 2).

Теорема 2. *Если f_1 и f_2 — две функции из $\mathcal{J}_+$, то*

$$\mu^*(f_1 + f_2) = \mu^*(f_1) + \mu^*(f_2). \tag{3}$$

В самом деле, когда φ_1 (соотв. φ_2) пробегает множество таких функций из $\mathcal{K}_+$, что $\varphi_1 \leqslant f_1$ (соотв. $\varphi_2 \leqslant f_2$), то функции $\varphi_1 + \varphi_2$ образуют фильтрующееся (по $\leqslant$) множество, верхняя огибающая которого равна $f_1 + f_2$. Следовательно, в силу теоремы 1

$$\mu^*(f_1 + f_2) = \sup \mu(\varphi_1 + \varphi_2) = \sup(\mu(\varphi_1) + \mu(\varphi_2)),$$

где (φ_1, φ_2) пробегает множество пар функций из $\mathcal{K}_+$, для которых $\varphi_1 \leqslant f_1$ и $\varphi_2 \leqslant f_2$; а так как

$$\sup(\mu(\varphi_1) + \mu(\varphi_2)) = \sup \mu(\varphi_1) + \sup \mu(\varphi_2)$$

(Общая топ., гл. IV, § 5, следствие 2 из предл. 12), то теорема доказана.

Предложение 3. *Для любого семейства $(f_\iota)_{\iota \in I}$ функций из $\mathcal{J}_+$*

$$\mu^*\Big(\sum_{\iota \in I} f_\iota\Big) = \sum_{\iota \in I} \mu^*(f_\iota). \tag{4}$$

В самом деле, для любого конечного подмножества J множества I из теоремы 2 (индукцией по числу элементов множества J) выводим, что $\mu^*\Big(\sum\limits_{\iota \in J} f_\iota\Big) = \sum\limits_{\iota \in J} \mu^*(f_\iota)$; когда J пробегает множество конечных частей множества I, функции $g_J = \sum\limits_{\iota \in J} f_\iota$ принадлежат $\mathcal{J}_+$ и образуют множество, фильтрующееся по отношению $\leqslant$ и имеющее в качестве верхней огибающей функцию $\sum\limits_{\iota \in I} f_\iota$; следовательно, предложение вытекает из теоремы 1.

Предложение 4. *Пусть f — функция из $\mathcal{J}_+$. Отображение $\mu \to \mu^*(f)$ множества $\mathcal{M}_+(E)$ положительных мер на E в замкну-*

тую прямую $\overline{\mathbf{R}}$ *полунепрерывно снизу в широкой топологии в* $\mathcal{M}_+(E)$ (гл. III, § 2, n° 7).

Действительно, это отображение по определению является верхней огибающей отображений $\mu \to \mu(g)$, где g пробегает множество таких функций из $\mathcal{K}_+$, что $g \leqslant f$; а по определению широкой топологии отображения $\mu \to \mu(g)$ непрерывны на $\mathcal{M}(E)$.

2. Внешняя мера открытого множества

Если задано *открытое* множество $G \subset E$, то его характеристическая функция φ_G *полунепрерывна снизу* на E (Общая топ., гл. IV, § 6, следствие из предл. 1). Следовательно, можно принять следующее определение:

Определение 2. *Если на* E *задана положительная мера* μ, *то внешней мерой любого открытого множества* $G \subset E$ *называется (и обозначается через* $\mu^*(G)$*) верхний интеграл* $\mu^*(\varphi_G)$.

Таким образом, внешняя мера открытого множества G есть положительное число, либо конечное, либо равное $+\infty$. Справедливо равенство $\mu^*(\varnothing) = 0$. Кроме того, как показывает формула (8) из главы III, § 2, $\mu^*(E) = \|\mu\|$.

Предложение 5. *Внешняя мера открытого относительно компактного множества* G *конечна.*

Действительно, в этом случае найдется такая функция $f \in \mathcal{K}_+$, что $\varphi_G \leqslant f$ (гл. III, § 2, лемма 1), откуда

$$\mu^*(G) = \mu^*(\varphi_G) \leqslant \mu^*(f) = \mu(f) < +\infty.$$

Утверждение, обратное этому предложению, неверно.

Предложение 6. *Если* G_1 *и* G_2 *— два открытых множества и* $G_1 \subset G_2$, *то* $\mu^*(G_1) \leqslant \mu^*(G_2)$.

Действительно, отношение $G_1 \subset G_2$ эквивалентно отношению $\varphi_{G_1} \leqslant \varphi_{G_2}$.

Предложение 7. *Пусть* $\mathfrak{G}$ *— множество открытых множеств из* E, *фильтрующееся по отношению* $\subset$; *тогда*

$$\mu^*\Big(\bigcup_{G \in \mathfrak{G}} G\Big) = \sup_{G \in \mathfrak{G}} \mu^*(G). \tag{5}$$

В самом деле, функции φ_G образуют фильтрующееся (по $\leqslant$) множество в $\mathcal{J}_+$, и их верхняя огибающая является характеристической функцией объединения множеств $G \in \mathfrak{G}$; таким образом, предложение является следствием из теоремы 1.

Предложение 8. *Пусть* $(G_\iota)_{\iota \in I}$ — *произвольное семейство открытых множеств; тогда*

$$\mu^*\left(\bigcup_{\iota \in I} G_\iota\right) \leqslant \sum_{\iota \in I} \mu^*(G_\iota). \tag{6}$$

Если при этом G_ι *не имеют попарно общих точек, то*

$$\mu^*\left(\bigcup_{\iota \in I} G_\iota\right) = \sum_{\iota \in I} \mu^*(G_\iota). \tag{7}$$

В самом деле, если $G = \bigcup_{\iota \in I} G_\iota$, то $\varphi_G = \sup_{\iota \in I} \varphi_{G_\iota} \leqslant \sum_{\iota \in I} \varphi_{G_\iota}$; а если G_ι не имеют попарно общих точек, то $\varphi_G = \sum_{\iota \in I} \varphi_{G_\iota}$; таким образом, предложение является следствием теоремы 1 и предложения 3.

Пример. Положим $E = \mathbf{R}$ и обозначим через μ меру Лебега на $\mathbf{R}$ (гл. III, § 2, n° 2); найдем внешнюю меру *открытого* интервала $G =]a, b[$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$. Допустим сначала, что a и b конечны. Тогда, согласно теореме о среднем, для любой функции f из $\mathcal{K}_+$, удовлетворяющей условию $f \leqslant \varphi_G$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \leqslant b - a,$$

откуда $\mu^*(G) \leqslant b - a$. С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $f \in \mathcal{K}_+$, что $f \leqslant \varphi_G$ и $f(x) = 1$ для $a + \varepsilon \leqslant x \leqslant b - \varepsilon$; отсюда $\mu^*(G) \geqslant b - a - 2\varepsilon$; а так как ε произвольно, то $\mu^*(G) = b - a$; иными словами, внешняя мера интервала G равна его *длине*. Этот результат сразу же распространяется на случай, когда G — открытый неограниченный интервал, ибо тогда он содержит открытые ограниченные интервалы сколь угодно большой длины, и, значит, в этом случае $\mu^*(G) = +\infty$.

Возьмем теперь в качестве G произвольное открытое множество из $\mathbf{R}$; тогда G есть объединение счетного (конечного или бесконечного) множества открытых интервалов $]a_k, b_k[$ попарно без общих точек (Общая топ., гл. IV, § 2, предл. 2); следовательно, $\mu^*(G) = \sum_k (b_k - a_k)$ (предл. 8); иными словами:

Предложение 9. *Внешняя мера Лебега открытого множества из* $\mathbf{R}$ *равна сумме длин его связных компонент.*

Отметим, в частности, что если G — открытое множество из $\mathbf{R}$ и $\mu^*(G) = 0$, то G *пусто.*

3. Верхний интеграл от положительной функции

Для всякой (как конечной, так и бесконечной) числовой функции $f \geqslant 0$, определенной на E, существуют такие функции $h \in \mathcal{J}_+$, что $f \leqslant h$, даже если f есть константа, равная $+\infty$.

Определение 3. *Пусть* μ — *положительная мера на* E; *для любой (конечной или нет) числовой функции* $f \geqslant 0$, *определенной на* E, *верхним интегралом от* f *(относительно* μ*) называется положительное (конечное или равное* $+\infty$*) число*

$$\mu^*(f) = \inf_{h \geqslant f,\ h \in \mathcal{J}_+} \mu^*(h).$$

Если $f \in \mathcal{J}_+$, то определенное таким путем число $\mu^*(f)$ равно верхнему интегралу, введенному в определении 1, поскольку μ^* возрастает на $\mathcal{J}_+$.

Наряду с обозначением $\mu^*(f)$ мы будем также использовать обозначения $\int^* f\,d\mu$ и $\int^* f(x)\,d\mu(x)$.

Пример. Пусть на E определена такая конечная числовая функция $\alpha \geqslant 0$, что для любого компактного множества $K \subset E$ сумма $\sum_{x \in K} \alpha(x)$ конечна. Пусть μ — мера, определенная при помощи масс $\alpha(x)$ (гл. III, § 2, n° 2). Для любой функции $f \geqslant 0$, определенной на E, и любой функции $h \in \mathcal{J}_+$, такой, что $f \leqslant h$, имеем (n° 1) $\mu^*(h) = \sum_{x \in E} \alpha(x) h(x) \geqslant \sum_{x \in E} \alpha(x) f(x)$, откуда $\mu^*(f) \geqslant \sum_{x \in E} \alpha(x) f(x)$.

Покажем, что если $\mu^*(f) < +\infty$, то $\mu^*(f) = \sum_{x \in E} \alpha(x) f(x)$. Действительно, в этом случае найдется такая функция $h \in \mathcal{J}_+$, что $h \geqslant f$ и $\mu^*(h)$ конечна. Пусть $u(x) = h(x) - f(x)$, когда эта разность определена, и $u(x) = 0$, когда $f(x) = h(x) = +\infty$; так как сумма $\sum_{x \in E} \alpha(x)\, u(x)$

конечна, то для любого $\varepsilon>0$ существует такое конечное множество $M\subset E$, что $\sum_{x\in M}\alpha(x)u(x)\geqslant\sum_{x\in E}\alpha(x)u(x)-\varepsilon$. Тогда обозначим через h_1 функцию, равную $f(x)$ для $x\in M$ и $h(x)$ для $x\notin M$; очевидно, h_1 полунепрерывна снизу и $h_1\geqslant f$; наконец, имеем $\sum_{x\in E}\alpha(x)h_1(x)=$ $=\sum_{x\in E}\alpha(x)h(x)-\sum_{x\in M}\alpha(x)u(x)\leqslant\sum_{x\in E}\alpha(x)f(x)+\varepsilon$; следовательно, $\mu^*(f)\leqslant\sum_{x\in E}\alpha(x)f(x)+\varepsilon$, а поскольку ε произвольно, то наше утверждение доказано.

Отметим, что может оказаться $\mu^*(f)=+\infty$ и $\alpha(x)f(x)=0$ для любого $x\in E$ (упр. 4).

Предложение 10. *Если f и g — две положительные числовые функции, определенные на E и удовлетворяющие условию $f\leqslant g$, то $\mu^*(f)\leqslant\mu^*(g)$.*

Предложение 11. *Для любого конечного действительного числа $\alpha>0$ и любой числовой функции $f\geqslant 0$, определенной на E,*

$$\mu^*(\alpha f)=\alpha\mu^*(f). \tag{8}$$

Предложение 12. *Если f_1 и f_2 — две положительные числовые функции, определенные на E, то*

$$\mu^*(f_1+f_2)\leqslant\mu^*(f_1)+\mu^*(f_2). \tag{9}$$

В самом деле, для любой функции $h_1\in\mathcal{I}_+$, для которой $f_1\leqslant h_1$, и любой функции $h_2\in\mathcal{I}_+$, для которой $f_2\leqslant h_2$, в силу теоремы 2 имеем

$$\mu^*(f_1+f_2)\leqslant\mu^*(h_1+h_2)=\mu^*(h_1)+\mu^*(h_2),$$

откуда (Общая топ., гл. IV, § 5, следствие 2 из предл. 12)

$$\mu^*(f_1+f_2)\leqslant\inf_{h_1\geqslant f_1,\ h_1\in\mathcal{I}_+}\mu^*(h_1)+\inf_{h_2\geqslant f_2,\ h_2\in\mathcal{I}_+}\mu^*(h_2),$$

что совпадает с неравенством (9).

Предложения 10, 11 и 12 выражают тот факт, что μ^* есть *возрастающая, положительная, однородная и выпуклая* функция на множестве положительных числовых функций, определенных на E (гл. I, n° 1). Отметим, что если f_1 и f_2 — две произвольные положительные функции, то обе части (9) могут не быть равными (§ 4, упр. 8d)); в § 4 мы укажем условия, при которых будет иметь место равенство.

Теорема 3. *Для всякой возрастающей последовательности* (f_n) *положительных числовых функций, определенных на* E, *справедлива формула*

$$\mu^*(\sup_n f_n) = \sup_n \mu^*(f_n). \tag{10}$$

Поскольку каждая из функций f_n не превосходит $\sup_n f_n$, то все сводится к доказательству неравенства $\mu^*(\sup_n f_n) \leqslant \sup_n \mu^*(f_n)$, которое очевидно, когда правая часть равна $+\infty$. Если же правая часть конечна, то $\mu^*(f_n) < +\infty$ при любом n; мы покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такая *возрастающая* последовательность (g_n) функций из $\mathcal{J}_+$, что $f_n \leqslant g_n$ и $\mu^*(g_n) \leqslant \mu^*(f_n) + \varepsilon$. Если g есть верхняя огибающая последовательности (g_n), то $\mu^*(g) = \sup_n \mu^*(g_n)$ (теорема 1), откуда $\mu^*(g) \leqslant \sup_n \mu^*(f_n) + \varepsilon$; а так как $\sup_n f_n \leqslant g$ и ε произвольно, то тем самым теорема будет доказана.

По условию существует такая функция $h_n \subset \mathcal{J}_+$, что $f_n \leqslant h_n$ и $\mu^*(f_n) \leqslant \mu^*(h_n) \leqslant \mu^*(f_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$; покажем, что функции

$$g_n = \sup (h_1, h_2, \ldots, h_n)$$

удовлетворяют поставленному требованию. Они принадлежат $\mathcal{J}_+$, образуют возрастающую последовательность и $f_n \leqslant g_n$ для любых n; докажем, что

$$\mu^*(g_n) \leqslant \mu^*(f_n) + \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

Проведем индукцию по n; случай $n = 1$ тривиален. С другой стороны, $g_{n+1} = \sup(g_n, h_{n+1})$, $g_n \geqslant f_n$ и $h_{n+1} \geqslant f_{n+1} \geqslant f_n$, откуда $\inf(g_n, h_{n+1}) \geqslant f_n$; а так как

$$\inf(g_n, h_{n+1}) + \sup(g_n, h_{n+1}) = g_n + h_{n+1},$$

то из теоремы 2 вытекает, что

$$\mu^*(g_{n+1}) = \mu^*(g_n) + \mu^*(h_{n+1}) - \mu^*(\inf(g_n, h_{n+1})) \leqslant$$
$$\leqslant \mu^*(g_n) + \mu^*(h_{n+1}) - \mu^*(f_n) \leqslant \mu^*(f_{n+1}) + \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} =$$
$$= \mu^*(f_{n+1}) + \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right), \text{ ч. т. д.}$$

Следствие. *Пусть* $\mathfrak{F}$ — счетное *множество положительных числовых функций, фильтрующееся по отношению* $\leqslant$; *тогда*

$$\mu^*(\sup_{f\in\mathfrak{F}} f) = \sup_{f\in\mathfrak{F}} \mu^*(f). \tag{11}$$

В самом деле, существует возрастающая последовательность функций из $\mathfrak{F}$ с той же верхней огибающей, что и $\mathfrak{F}$; если (f_n) есть последовательность всех функций из $\mathfrak{F}$, произвольным образом упорядоченная, то через (f_{n_k}) обозначим ее подпоследовательность, определенную по индукции условиями $n_1 = 1$, $f_{n_{k+1}} \geqslant \sup(f_{n_k}, f_k)$; ясно, что эта подпоследовательность обладает требуемыми свойствами.

Замечания. 1) Соотношение (11) уже не обязано выполняться, если $\mathfrak{F}$ есть *несчетное* фильтрующееся множество положительных функций, не являющихся полунепрерывными снизу. Возьмем, к примеру, $E = \mathbf{R}$, обозначим через μ меру Лебега на $\mathbf{R}$ и рассмотрим фильтрующееся (по $\leqslant$) множество $\mathfrak{F}$ характеристических функций φ_M всех *конечных* подмножеств из $\mathbf{R}$. Имеем $\mu^*(\varphi_M) = 0$ для любого конечного множества M, так как точка содержится в открытом интервале сколь угодно малой длины, и следовательно, характеристическая функция множества, сводящегося к точке, имеет верхний интеграл, равный нулю, что вытекает из определения 3 и предложения 9. Но верхняя огибающая множества $\mathfrak{F}$ есть постоянная функция, равная 1, и $\mu^*(1) = +\infty$.

2) Заметим, что для *убывающей* последовательности (f_n) положительных функций равенство $\mu^*(\inf_n f_n) = \inf_n \mu^*(f_n)$ может не выполняться, даже если $\mu^*(f_n) < +\infty$ при любом n (ср. § 4, упр. 8c)).

Предложение 13. *Для любой последовательности* (f_n) *положительных числовых функций, определенных на* E, *справедливо неравенство*

$$\mu^*\Bigl(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\Bigr) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(f_n). \tag{12}$$

Достаточно применить соотношение (10) к возрастающей последовательности функций $g_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ и учесть, что согласно (9)

$$\mu^*(g_n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu^*(f_k).$$

В § 4 мы укажем условия, при которых в формуле (12) имеет место равенство.

Предложение 14 (лемма Фату). *Для любой последовательности (f_n) положительных числовых функций справедливо соотношение*

$$\mu^*(\liminf_{n\to\infty} f_n) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mu^*(f_n). \tag{13}$$

Действительно, для любого целого n положим $g_n = \inf\limits_{p\geqslant 0} f_{n+p}$; последовательность (g_n) возрастает, и $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n = \sup\limits_n g_n$; отсюда в силу (10) $\mu^*(\liminf\limits_{n\to\infty} f_n) = \sup\limits_n \mu^*(g_n)$; но так как $g_n \leqslant f_{n+p}$ для $p \geqslant 0$, то $\mu^*(g_n) \leqslant \mu^*(f_{n+p})$, откуда $\mu^*(g_n) \leqslant \inf\limits_{p\geqslant 0} \mu^*(f_{n+p})$, и окончательно

$$\mu^*(\liminf_{n\to\infty} f_n) \leqslant \sup_n (\inf_{p\geqslant 0} \mu^*(f_{n+p})) = \liminf_{n\to\infty} \mu^*(f_n).$$

Следствие. *Пусть (f_n) — такая последовательность положительных числовых функций, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty$ для любого $x \in E$. Если мера μ отлична от нуля, то $\lim\limits_{n\to\infty} \mu^*(f_n) = +\infty$.*

Действительно, если f_0 — постоянная функция, равная $+\infty$, то f_0 является верхней огибающей всех функций из $\mathscr{K}_+$, а так как $\mu \neq 0$, то $\mu^*(f_0) > 0$; но поскольку $f_0 = \alpha f_0$ для любого $\alpha > 0$, то $\mu^*(f_0) = +\infty$ (предл. 11). Тогда неравенство (13) показывает, что $\mu^*(f_n)$ стремится к $+\infty$ вместе с n.

Предложение 15. *Для любого скаляра $\alpha > 0$ и любой пары положительных мер μ, ν на E справедливы формулы*

$$(\alpha\mu)^* = \alpha\mu^*, \tag{14}$$

$$(\mu + \nu)^* = \mu^* + \nu^*. \tag{15}$$

Кроме того, отношение $\mu \leqslant \nu$ влечет $\mu^* \leqslant \nu^*$.

Докажем соотношение (15). Положим $\lambda = \mu + \nu$; тогда $\lambda(f) = \mu(f) + \nu(f)$ для $f \in \mathscr{K}_+$; для $f \in \mathscr{I}_+$ значение интеграла $\lambda^*(f)$ (соотв. $\mu^*(f)$, $\nu^*(f)$) есть предел интегралов $\lambda(g)$ (соотв. $\mu(g)$, $\nu(g)$), когда g пробегает фильтрующееся (по $\leqslant$) множество функций $g \in \mathscr{K}_+$, $g \leqslant f$; следовательно, $\lambda^*(f) = \mu^*(f) + \nu^*(f)$. Наконец, если f есть произвольная положительная функция, определенная на E, то $\lambda^*(f)$ (соотв. $\mu^*(f)$, $\nu^*(f)$) есть предел интегралов $\lambda^*(h)$ (соотв. $\mu^*(h)$, $\nu^*(h)$), когда h пробегает фильтрующееся (по $\geqslant$)

множество функций $h \in \mathcal{J}_+$, $h \geqslant f$; таким образом, снова, переходя к пределу, получаем $\lambda^*(f) = \mu^*(f) + \nu^*(f)$, что и доказывает (15). Точно так же доказывается соотношение (14). И, наконец, если $\mu \leqslant \nu$, то можно написать $\nu = \mu + (\nu - \mu)$, где $\nu - \mu \geqslant 0$, и, значит, $\nu^* = \mu^* + (\nu - \mu)^*$, чем доказано, что $\mu^* \leqslant \nu^*$.

4. *Внешняя мера произвольного множества*

Определение 4. *Пусть μ — положительная мера на E; для любого подмножества A из E назовем внешней мерой A* (относительно меры μ) *и обозначим через $\mu^*(A)$ верхний интеграл $\mu^*(\varphi_A)$.*

Таким образом, внешняя мера множества есть положительное число, конечное или равное $+\infty$, совпадающее для открытых множеств с внешней мерой, введенной в определении 2.

Предложение 16. *Если A и B — два подмножества из E и $A \subset B$, то $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$.*

Предложение 17. *Если (A_n) есть возрастающая последовательность множеств из E, то $\mu^*(\bigcup_n A_n) = \sup_n \mu^*(A_n)$.*

Предложение 18. *Для любой последовательности (A_n) множеств из E справедливо неравенство $\mu^*(\bigcup_n A_n) \leqslant \sum_n \mu^*(A_n)$.*

Эти предложения являются переложением предложений 10 и 13 и теоремы 3 для характеристических функций множеств.

Предложение 19. *Для любого подмножества $A \subset E$ $\mu^*(A)$ есть нижняя грань внешних мер открытых множеств, содержащих A.*

Предложение очевидно, если $\mu^*(A) = +\infty$. В противном случае для любого ε, $0 < \varepsilon < 1$, существует такая функция $f \in \mathcal{J}_+$, что $\varphi_A \leqslant f$ и $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(f) \leqslant \mu^*(A) + \varepsilon$. Пусть G есть множество тех $x \in E$, в которых $f(x) > 1 - \varepsilon$. Поскольку f полунепрерывна снизу, то G *открыто* (Общая топ., гл. IV, § 6, предл. 1) и содержит A; с другой стороны, $f \geqslant (1 - \varepsilon)\varphi_G$, откуда $\mu^*(G) \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}\mu^*(f) \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}(\mu^*(A) + \varepsilon)$; а так как ε произвольно, то $\mu^*(G)$ сколь угодно мало отличается от $\mu^*(A)$, откуда и следует предложение.

Следствие. *Всякое множество, относительно компактное в E, имеет конечную внешнюю меру.*

Действительно, такое множество содержится в открытом относительно компактном множестве (Общая топ., гл. I, 2-е изд., § 10, предл. 10), внешняя мера которого конечна (предл. 5).

5. *Абстрактные меры*

Пусть A — произвольное множество, и пусть $\mathscr{R}$ — такое векторное подпространство пространства $\mathbf{R}^A$ всех определенных на A конечных числовых функций, что для любых двух функций f, g из $\mathscr{R}$ $\sup(f, g)$ принадлежит $\mathscr{R}$; следовательно, $\mathscr{R}$ есть *пространство Рисса*. Говорят, что положительная линейная форма μ на $\mathscr{R}$ есть *абстрактная мера*, если она удовлетворяет следующему условию:

(MA′) *Если возрастающая последовательность* (f_n) *функций из* $\mathscr{R}$ *имеет в качестве верхней огибающей функцию из* $\mathscr{R}$, *то* $\mu(\sup\limits_n f_n) = \sup\limits_n \mu(f_n)$.

Всякая положительная мера (Радона) μ на локально компактном пространстве A есть абстрактная мера, соответствующая случаю, когда в качестве $\mathscr{R}$ берется пространство $\mathscr{K}(A)$ непрерывных функций с компактным носителем; действительно, она удовлетворяет (теорема 1) следующей аксиоме, более ограничительной, чем (MA′):

(MA) *Если H есть фильтрующееся* (по $\leqslant$) *множество функций из* $\mathscr{R}$, *имеющее в качестве верхней огибающей функцию из* $\mathscr{R}$, *то* $\mu(\sup\limits_{f \in H} f) = \sup\limits_{f \in H} \mu(f)$.

В § 4, n° 11, мы приведем примеры абстрактных мер, не удовлетворяющих аксиоме (MA). С другой стороны, легко указать примеры положительных линейных форм на пространстве Рисса, не являющихся абстрактными мерами. Возьмем, к примеру, в качестве $\mathscr{R}$ пространство Рисса линейчатых функций на интервале $[0, 1]$ (Функции действ. перем., гл. II, § 1, n° 3) и положим $\mu(f) = f(0+)$; легко видеть, что μ есть положительная линейная форма на $\mathscr{R}$; однако если f_n означает характеристическую функцию интервала $\left]\frac{1}{n}, 1\right]$, то $\mu(f_n) = 0$ для любого n, а $\mu(\sup\limits_n f_n) = 1$.

Обозначим через $\mathscr{R}_+$ множество положительных функций принадлежащих $\mathscr{R}$, через $\mathscr{I}'_+(A)$ или просто $\mathscr{I}'_+$ — множество *верхних огибающих* (*конечных или нет*) *возрастающих последовательностей функций из* $\mathscr{R}_+$ и через $\mathscr{I}_+(A)$ или просто $\mathscr{I}_+$ — множество *верхних огибающих* (*конечных или нет*) *произвольных множеств из* $\mathscr{R}_+$; очевидно, $\mathscr{I}'_+ \subset \mathscr{I}_+$, и эти два множества, вообще говоря, различны. Пусть f — функция из $\mathscr{I}'_+$; если (g_n) и (h_n) — две возрастающие последовательности функций из $\mathscr{R}_+$, имеющие одну и ту же функцию f в качестве верхней огибающей, то $\sup_n \mu(g_n) = \sup_n \mu(h_n)$. Действительно, для любого m имеет $g_m \leqslant \sup_n h_n$; значит, $h_m = \sup_n (\inf(g_m, h_n))$, и условие (MA′) показывает, что $\mu(g_m) = \sup_n \mu(\inf(g_m, g_n)) \leqslant \sup_n \mu(h_n)$. Отсюда выводим, что $\sup_n \mu(g_n) \leqslant \sup_n \mu(h_n)$, и точно так же покажем, что $\sup_n \mu(h_n) \leqslant \sup_n \mu(g_n)$. Стало быть, для произвольной возрастающей последовательности (g_n) функций из $\mathcal{R}_+$, имеющей f в качестве верхней огибающей, число $\sup_n \mu(g_n)$ зависит лишь от f; его обозначают через $\mu^{**}(f)$ и называют *верхним интегралом* от f относительно абстрактной меры μ; это есть продолжение меры μ на $\mathcal{I}'_+$.

Если теперь f есть *произвольная* положительная функция, определенная на A, то обозначают через $\mu^{**}(f)$ и называют *верхним интегралом* от f относительно μ нижнюю грань чисел $\mu^{**}(h)$ для функций $h \in \mathcal{I}'_+$, $h \geqslant f$, если таковые существуют, и $+\infty$ в противном случае. После этого мы убеждаемся в том, что предложения 10, 11, 12, 13, 14 и теорема 3 справедливы для верхнего интеграла, соответствующего абстрактной мере (с заменой μ^* на μ^{**}).

Внешняя мера произвольного подмножества множества A относительно абстрактной меры μ определяется, как в n° 4, и предложения 16, 17 и 18 сохраняют силу с соответствующим изменением в обозначении.

Если абстрактная мера μ удовлетворяет аксиоме (MA), то можно определить второй верхний интеграл $\mu^*(f)$, действуя, как в n°n° 1 и 3: для всякой функции $f \in \mathcal{I}_+$ положим $\mu^*(f) = \sup\limits_{g \leqslant f,\, g \in \mathcal{R}_+} \mu(g)$, а для произвольной функции $f \geqslant 0$ $\mu^*(f) = \inf\limits_{h \geqslant f,\, h \in \mathcal{I}_+} \mu^*(h)$. При этом определении теоремы 1 и 2 сохраняются без изменений (в силу аксиомы (MA)), равно как и результаты n° 3. Очевидно, что $\mu^*(f) \leqslant \mu^{**}(f)$ для любой функции $f \geqslant 0$; оба верхних интеграла совпадают на $\mathcal{I}'_+$, но могут не совпадать на $\mathcal{I}_+$, когда эти множества различны.

В дальнейших параграфах мы будем попутно вкратце указывать, как результаты, относящиеся к мерам (Радона) на локально компактном пространстве, могут быть распространены на абстрактные меры.

Упражнения. 1) Показать, что если f и g — две положительные числовые функции на E, то

$$\mu^*(\sup(f, g)) + \mu^*(\inf(f, g)) \leqslant \mu^*(f) + \mu^*(g).$$

Вывести отсюда, что если A и B — произвольные множества из E, то

$$\mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

2) Показать, что, каково бы ни было $x \in E$, верхний интеграл $\varepsilon_x^*(f) = f(x)$ для любой числовой функции $f \geqslant 0$.

°3) Пусть $f \geqslant 0$ — числовая функция на E.

a) Показать, что для того, чтобы отображение $\mu \to \mu^*(f)$ пространства $\mathscr{M}_+(E)$ в $\overline{\mathbf{R}}$ было непрерывно в широкой топологии, необходимо (и достаточно), чтобы f была непрерывна и имела компактный носитель (использовать упр. 2). Для того чтобы отображение $\mu \to \mu^*(f)$ было полунепрерывно снизу в широкой топологии, необходимо (и достаточно, см. предл. 4), чтобы f была полунепрерывна снизу.

b) Показать, что для того, чтобы отображение $\mu \to \mu^*(f)$ пространства $\mathscr{M}_+(E)$ в $\overline{\mathbf{R}}$ было непрерывно в сильной топологии (гл. III, § 2, упр. 4), необходимо и достаточно, чтобы f была ограничена и имела компактный носитель (аналогичный метод). Вывести отсюда, что отображение $\mu \to \mu^*(f)$ полунепрерывно снизу в сильной топологии для всякой функции $f \geqslant 0$, равной нулю на дополнении к счетному объединению компактных множеств (применить теорему 3).

°4) Пусть E — подмножество плоскости $\mathbf{R}^2$, состоящее из прямой $x = 0$ и из точек $\left(\frac{1}{n}, \frac{k}{n^2}\right)$, где n пробегает множество целых строго положительных чисел, а k — множество $\mathbf{Z}$ целых рациональных чисел.

a) Для любой точки $(0, y)$ прямой $x = 0$ и любого целого $n > 0$ обозначим через $T_n(y)$ множество таких точек (u, v) из E, что $u \leqslant \frac{1}{n}$ и $|v - y| \leqslant u$. Показать, что если в качестве фундаментальной системы окрестностей каждой точки $(0, y)$ взять множества $T_n(y)$, а в качестве фундаментальной системы окрестностей каждой из остальных точек множества E — множество, сводящееся к этой точке, то в E будет определена топология $\mathscr{T}$, относительно которой E является локально компактным пространством, не счетным в бесконечности.

b) Пусть числовая функция $\alpha(x) \geqslant 0$ на E равна 0 в каждой из точек $(0, y)$ и равна $\frac{1}{n^3}$ в каждой из точек $\left(\frac{1}{n}, \frac{k}{n^2}\right)$. Показать, что для любого компактного множества $K \subset E$ сумма $\sum_{x \in K} \alpha(x)$ конечна. Пусть μ—положительная мера на E, определенная при помощи масс $\alpha(x)$. Показать, что множество D точек $(0, y)$ имеет бесконечную внешнюю меру (показать, что если открытое множество U содержит D, то существуют такой интервал $a \leqslant y \leqslant b$ в D, такое множество B, всюду плотное (относительно обычной топологии в $\mathbf{R}$) на этом интервале и такое целое n, что для любого $y \in B$ $T_n(y) \subset U$; использовать для этого теорему Бэра).

5) a) Пусть (μ_n) — возрастающая последовательность положительных мер на локально компактном пространстве E; предположим, что эта последовательность мажорирована в $\mathscr{M}_+(E)$, и обозначим через μ ее верхнюю грань. Пусть функция $f \geqslant 0$ определена на E и обращается в нуль на дополнении к счетному объединению компактных множеств. Показать, что $\mu^*(f) = \lim\limits_{n \to \infty} \mu_n^*(f)$ (ср. упр. 3b)).

b) Пусть E и μ — локально компактное пространство и мера, определенные в упр. 4. Пусть $\alpha_n(x)$ — функция, равная $\alpha(x)$ (обозначения упр. 4) во всякой точке $\left(\frac{1}{m}, \frac{k}{m^2}\right)$, $m \leqslant n$, и равная 0 в остальных точках из E; пусть μ_n — мера, определенная при помощи масс $\alpha_n(x)$. Показать, что μ есть верхняя грань мер μ_n в $\mathscr{M}_+(E)$ и что $\mu_n^*(D) = 0$ для любого n, а $\mu^*(D) = +\infty$.

°6) a) Пусть (μ_n) — убывающая последовательность положительных мер на локально компактном пространстве E, и пусть μ — нижняя грань этой последовательности в $\mathscr{M}_+(E)$. Показать, что для любой функции $f \geqslant 0$, для которой, начиная с некоторого номера, $\mu_n^*(f) < +\infty$, имеет место соотношение $\mu^*(f) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n^*(f)$ (в случае, когда g полунепрерывна снизу и $\mu^*(g) < +\infty$, заметить, что существует такая последовательность (h_m) непрерывных положительных функций с компактным носителем, что $\sum\limits_{m=1}^{\infty} h_m \leqslant g$ и что $\mu_n^*(g) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \mu_n^*(h_m)$ для *любого* индекса n).

b) Пусть на дискретном пространстве $E = \mathbf{N}$ определена мера μ_n при помощи массы $+1$, расположенной в каждой точке $m \geqslant n$. Показать, что нижняя грань убывающей последовательности (μ_n) равна 0, в то время как $\mu_n^*(E) = +\infty$ для любого n.

7) Пусть E — дискретное несчетное пространство и μ — положительная ограниченная мера на E. Показать, в обозначениях п° 5, что если принять $\mathscr{R} = \mathscr{K}(E)$, то множества $\mathscr{I}_+$ и $\mathscr{I}'_+$ различны и что $\mu^*(E) = \|\mu\|$, а $\mu^{**}(E) = +\infty$.

§ 2. *Пренебрежимые функции и множества*

1. *Положительные пренебрежимые функции*

Определение 1. *Если на локально компактном пространстве E задана положительная мера μ, то говорят, что числовая (конечная или бесконечная) функция $f \geqslant 0$, определенная на E, пренебрежима относительно меры μ, если $\mu^*(f) = 0$.*

В этом случае говорят также, что f μ-пренебрежима или, если это не влечет путаницы, просто пренебрежима.

Предложение 1. *Если $f \geqslant 0$ — пренебрежимая функция, то всякая числовая функция g, удовлетворяющая условиям $0 \leqslant g \leqslant \alpha f$ ($\alpha > 0$ — скаляр), пренебрежима.*

Действительно, $0 \leqslant \mu^*(g) \leqslant \alpha\mu^*(f) = 0$.

Предложение 2. *Сумма и верхняя огибающая последовательности* (f_n) *положительных пренебрежимых функций пренебрежимы.*

Действительно, $\mu^*\left(\sum\limits_n f_n\right) \leqslant \sum\limits_n \mu^*(f_n) = 0$ (§ 1, предл. 13) и $\sup\limits_n f_n \leqslant \sum\limits_n f_n$.

Предложение 3. *Для того чтобы функция* $f \geqslant 0$, полунепрерывная снизу на E, *была пренебрежима, необходимо и достаточно, чтобы она обращалась в нуль на носителе меры* μ.

В самом деле, если $\mu^*(f) = 0$, то $\mu(g) = 0$ для любой функции $g \in \mathscr{K}_+$, $g \leqslant f$; отсюда следует (гл. III, § 3, предл. 9), что g обращается в нуль на носителе S меры μ; а поскольку f есть верхняя огибающая функций $g \in \mathscr{K}_+$, $g \leqslant f$ (§ 1, лемма 1), то $f(x) = 0$ на S. Обратно, если $f(x) = 0$ на S, то $g(x) = 0$ на S для любой функции $g \in \mathscr{K}_+$, $g \leqslant f$, и значит (гл. III, § 3, предл. 8), $\mu(g) = 0$, что, по определению, влечет $\mu^*(f) = 0$.

2. *Пренебрежимые множества*

Определение 2. *Если на локально компактном пространстве* E *задана положительная мера* μ, *то говорят, что подмножество* $A \subset E$ *пренебрежимо относительно меры* μ, *если* $\mu^*(A) = 0$.

Говорят еще, что A μ-*пренебрежимо* или, если это не влечет путаницы, просто *пренебрежимо*. Это определение равносильно тому, что характеристическая функция φ_A пренебрежима.

Предложение 4. *Всякое подмножество пренебрежимого множества пренебрежимо; всякое счетное объединение пренебрежимых множеств пренебрежимо.*

Это следует непосредственно из предложений 1 и 2.

Пример. Пусть μ — мера Лебега на $\mathbf{R}$. Всякое сводящееся к точке множество $\{x_0\}$ пренебрежимо (ср. § 1, n° 3, замечание 1). Отсюда следует, что *всякое счетное множество из* $\mathbf{R}$ *пренебрежимо относительно меры Лебега.* Обратное утверждение неверно (§ 4, упр. 4b)).

Предложение 5. *Дополнение носителя* S *меры* μ *есть наибольшее открытое пренебрежимое множество в* E.

Действительно, в силу предложения 3, для того чтобы открытое множество G было пренебрежимо, необходимо и достаточно, чтобы $G \cap S = \varnothing$, то есть $G \subset \complement S$.

3. Свойства, справедливые почти всюду

Пусть E — локально компактное пространство и μ — положительная мера на E. Если $\mathbf{P}\{x\}$ есть свойство, содержащее *единственный* свободный аргумент $x \in E$, то свойство «$\mathbf{P}\{x\}$ *почти всюду* (*относительно* μ)», по определению, эквивалентно свойству «*множество тех* $x \in E$, *для которых* (не $\mathbf{P}\{x\}$) μ-*пренебрежимо*».

Теорема 1. *Для того чтобы числовая (конечная или бесконечная) функция* $f \geqslant 0$, *определенная на* E, *была пренебрежима, необходимо и достаточно, чтобы* $f(x) = 0$ *почти всюду.*

Условие *необходимо.* Действительно, предположим, что f пренебрежима и пусть N — множество тех $x \in E$, в которых $f(x) \neq 0$; тогда $\varphi_N \leqslant \sup\limits_n (nf)$, и значит, φ_N пренебрежима (предл. 1 и 2).

Условие *достаточно.* В самом деле, допустим, что множество точек N, в которых $f(x) \neq 0$, пренебрежимо; тогда $f \leqslant \sup\limits_n n\varphi_N$, и, следовательно, f пренебрежима (предл. 1 и 2).

Предложение 6. *Если* f *и* g — *две (конечные или нет) положительные функции, определенные на* E *и такие, что* $f(x) = g(x)$ *почти всюду, то* $\mu^*(f) = \mu^*(g)$.

В самом деле, пусть N — пренебрежимое множество тех точек $x \in E$, в которых $f(x) \neq g(x)$. Поскольку функции $\inf(f, g)$ и $\sup(f, g)$ равны между собой всюду, кроме точек множества N, то достаточно доказать предложение для случая $f \leqslant g$. Обозначим через h функцию, равную $+\infty$ в точках множества N и 0 на $\complement N$; тогда $f \leqslant g \leqslant f + h$, откуда $\mu^*(f) \leqslant \mu^*(g) \leqslant \mu^*(f + h) \leqslant \mu^*(f) + \mu^*(h) = \mu^*(f)$ (ибо h пренебрежима), из чего и следует предложение.

Предложение 7. *Если функция* $f \geqslant 0$ *определена на* E *и* $\mu^*(f) < +\infty$, *то* $f(x)$ *конечна почти всюду.*

В самом деле, пусть N — множество тех точек $x \in E$, где $f(x) = +\infty$; для любого целого n имеем $n\varphi_N \leqslant f$, откуда $n\mu^*(\varphi_N) \leqslant \mu^*(f)$; а так как n сколь угодно велико, то $\mu^*(N) = 0$.

Обратное утверждение неверно: даже когда E компактно, функция $f \geqslant 0$, определенная на E и конечная всюду, может иметь бесконечный верхний интеграл, как показывает пример, в котором $E = [0, 1]$, $f(x) = \frac{1}{x}$ для $x > 0$ и $f(0) = 0$, а μ есть мера Лебега на E

4. *Классы эквивалентных функций*

Пусть μ — положительная мера на локально компактном пространстве E и F — произвольное множество. Два отображения f, g пространства E в F называются *эквивалентными относительно* μ (или μ-*эквивалентными*, а также, если это не влечет путаницы, просто *эквивалентными*), если $f(x) = g(x)$ *почти всюду* на E. Поскольку объединение двух пренебрежимых множеств пренебрежимо, то тем самым определено отношение эквивалентности в множестве F^E всех отображений пространства E в F. Когда мы будем говорить о *классе эквивалентности* такой функции f (без дальнейших уточнений), то будет подразумеваться, что речь идет о классе функций, равных f почти всюду; в этой и последующих главах мы будем обозначать этот класс $\tilde{f}$.

Предложение 8. *Пусть (F_n) — счетное (конечное или бесконечное) семейство произвольных множеств. Для любого индекса n обозначим через f_n, g_n два эквивалентных отображения пространства E в F_n; тогда найдется такое пренебрежимое множество H, что для любого $x \notin H$ равенство $f_n(x) = g_n(x)$ выполняется при любом n.*

Действительно, множество H_n тех $x \in E$, в которых $f_n(x) \neq g_n(x)$, пренебрежимо, а значит, пренебрежимо и их объединение H (предл. 4), которое и будет искомым.

Следствие. *Если φ есть отображение $\prod\limits_n F_n$ в множество G, то отображения $\varphi((f_n))$ и $\varphi((g_n))$ пространства E в G эквивалентны.*

Обозначим теперь через $\varphi((\tilde{f}_n))$ класс эквивалентности любой функции $\varphi((f_n))$, когда f_n есть произвольная функция класса $\tilde{f}_n$.

В частности, если F есть *векторное пространство* над $\mathbf{R}$, то $\tilde{\mathbf{f}} + \tilde{\mathbf{g}}$ и $\alpha\tilde{\mathbf{f}}$ определяются соответственно как классы эквивалентности для $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ и $\alpha\mathbf{f}$ ($\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ — отображения E в F, α — скаляр); тем самым в множестве классов эквивалентности отображений пространства E в F установлена структура *векторного пространства*; при этом она является структурой *фактор-пространства* структуры пространства F^E по подпространству тех отображений $\mathbf{f}$, для которых $\tilde{\mathbf{f}} = \tilde{0}$ (функций, обращающихся в нуль почти всюду) и которые также называют *пренебрежимыми* функциями (со значениями в F). Точно так же определяется произведение $\tilde{g}\tilde{\mathbf{f}}$, где $\tilde{\mathbf{f}}$ есть класс эквивалентности отображений пространства E в F, а $\tilde{g}$ — класс эквивалентности (конечных) числовых функций, определенных на E: таким образом, множество классов эквивалентности отображений пространства E в F наделено структурой *модуля* над множеством классов эквивалентности определенных на E конечных числовых функций (которое в свою очередь наделено структурой *кольца*). Если F есть *алгебра* над $\mathbf{R}$, то определена также структура алгебры в множестве классов эквивалентности отображений пространства E в F.

Пусть F — *метризуемое* топологическое пространство. Рассмотрим в F равномерную структуру, согласующуюся с его топологией и определенную при помощи *счетного* семейства уклонений ρ_n (Общая топ., гл. IX, §§ 1 и 2); для того чтобы два отображения f, g пространства E в F были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы числовые функции $\rho_n(f, g)$ были *пренебрежимы*; действительно, это равносильно утверждению, что в E найдется такое пренебрежимое множество H, что для любого $x \notin H$ равенство $\rho_n(f(x), g(x)) = 0$ справедливо при любом n, то есть $f(x) = g(x)$. В частности, если F есть метризуемое локально выпуклое пространство, а (q_n) — счетное семейство полунорм, определяющее топологию в F (Топ. вект. пр-ва, гл. II, § 5), то для того, чтобы два отображения $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ пространства E в F были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы все числовые функции $q_n(\mathbf{f}(x) - \mathbf{g}(x))$ были пренебрежимы.

Предложение 9. *Пусть f и g — два* непрерывных *отображения пространства E в отделимое топологическое пространство F; для того чтобы f и g были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы $f(x) = g(x)$ в каждой точке носителя меры μ.*

Действительно, множество тех $x \in E$, в которых $f(x) \neq g(x)$, открыто (Общая топ., гл. I, § 8, 2-е изд., следствие 1 из предл. 6); для того чтобы оно было пренебрежимым, необходимо и достаточно, чтобы оно не имело общих точек с носителем меры μ (предл. 5).

Отметим еще следующий результат:

Предложение 10. *Пусть F — такое отделимое локально выпуклое пространство над* $\mathbf{R}$, *что в сопряженном к нему пространстве F' существует последовательность* $(\mathbf{a}'_n)$, *всюду плотная в слабой топологии* $\sigma(F', F)$ (Топ. вект. пр-ва, гл. IV). *Для того чтобы два отображения* $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ *пространства E в F были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы при любом n числовые функции* $\langle \mathbf{f}(x), \mathbf{a}'_n \rangle$ *и* $\langle \mathbf{g}(x), \mathbf{a}'_n \rangle$ *были эквивалентны.*

Необходимость очевидна. Обратно, если это условие выполняется, то найдется такое пренебрежимое множество H, что для любого $x \notin H$ равенство $\langle \mathbf{f}(x), \mathbf{a}'_n \rangle = \langle \mathbf{g}(x), \mathbf{a}'_n \rangle$ выполняется при *любом* n; это означает, что слабо непрерывные на F' линейные формы $\mathbf{z}' \to \langle \mathbf{f}(x), \mathbf{z}' \rangle$ и $\mathbf{z}' \to \langle \mathbf{g}(x), \mathbf{z}' \rangle$ равны между собой в каждой из точек $\mathbf{a}'_n$ и, стало быть, согласно предположению, совпадают, чем доказано, что $\mathbf{f}(x) = \mathbf{g}(x)$ для любого $x \notin H$.

Отметим, что условие предложения 10 применимо, в частности, к случаю, когда F есть *метризуемое* локально выпуклое пространство *счетного типа* (Топ. вект. пр-ва, гл. IV).

5. *Функции, определенные почти всюду*

В согласии с определением из n° 3 говорят, что отображение f множества A из E в множество F *определено почти всюду*, если дополнение множества A есть пренебрежимое множество. *Классом эквивалентности* отображения f называют и обозначают через $\tilde{f}$ класс эквивалентности всякой функции, определенной на всем E и равной $f(x)$ в тех точках $x \in E$, в которых f определена; ясно, что этот класс зависит только от f. Говорят, что две функции f, g, определенные почти всюду, *эквивалентны*, если $\tilde{f} = \tilde{g}$: это означает, стало быть, что множество точек, в которых обе функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и равны, имеет пренебрежимое дополнение.

Из этого сразу же выводится, что предложение 8 и его следствие обобщаются на тот случай, когда в их формулировках предположено лишь, что каждая из функций f_n, g_n определена почти всюду; тогда функции $\varphi((f_n))$ и $\varphi((g_n))$ тоже определены почти всюду; классом эквивалентности функции $\varphi((f_n))$ снова будет $\varphi((\widetilde{f}_n))$.

Функция, определенная почти всюду и принимающая значения в векторном пространстве F, снова называется *пренебрежимой*, если она эквивалентна 0. Если $\mathbf{f}$ есть пренебрежимая функция со значениями в F, а $\mathbf{u}$ — линейное отображение пространства F в векторное пространство G, то сложная функция $\mathbf{u}\circ\mathbf{f}$ (определенная почти всюду) пренебрежима; точно так же для всякой (конечной) числовой функции g, определенной почти всюду, функция $g\mathbf{f}$ (определенная почти всюду) пренебрежима.

Следует отметить, что в множестве функций, определенных почти всюду и принимающих значения в F, внутренний закон композиции $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \to \mathbf{f} + \mathbf{g}$ *не является законом группы*, так как нейтральным элементом для этого закона является функция 0, но в то же время, если $\mathbf{f}$ определена не всюду, не существует такой функции $\mathbf{g}$, что $\mathbf{f} + \mathbf{g} = 0$. Именно это служит причиной введения классов эквивалентности $\widetilde{\mathbf{f}}$, которые уже образуют векторное пространство.

Пусть (f_n) — последовательность отображений в *топологическое пространство* F, и пусть каждое из них определено почти всюду на E. Говорят, что последовательность (f_n) *сходится* (*просто*) *к* f *почти всюду на* E, если дополнение множества точек $x \in E$, в которых все функции $f_n(x)$ определены и последовательность $(f_n(x))$ имеет предел, равный $f(x)$, пренебрежимо. Ясно, что если для каждого n функция g_n (определенная почти всюду) эквивалентна f_n, то последовательность (g_n) сходится к f почти всюду.

Если F есть *топологическое векторное пространство*, то так же определяется *почти всюду сходящийся ряд*, общим членом которого служит функция $\mathbf{f}_n$, определенная почти всюду на E и принимающая значения в F; суммой этого ряда является функция, определенная в тех точках, в которых определены и имеют предел частичные суммы $\sum_{k=1}^{n} \mathbf{f}_k(x)$, и ее класс зависит лишь от классов $\widetilde{\mathbf{f}}_n$.

6. *Классы эквивалентности функций со значениями в* $\overline{\mathbf{R}}$

В согласии с определением из n° 3 говорят, что функция f, определенная почти всюду на E и принимающая значения в $\overline{\mathbf{R}}$, *конечна почти всюду*, если множество тех $x \in E$, в которых $f(x)$ определена и конечна, имеет пренебрежимое дополнение. Функция, конечная почти всюду, эквивалентна *всюду конечной* функции; значит, ее класс $\tilde{f}$ можно отождествить с классом *конечных* числовых функций, определенных на E (или почти всюду на E). В частности, определены сумма и произведение двух классов почти всюду конечных функций, и множество этих классов составляет *алгебру* над $\mathbf{R}$. Если (f_n) — последовательность функций со значениями в $\overline{\mathbf{R}}$, определенных и конечных почти всюду, то частичные суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ определены почти всюду; если они почти для всех $x \in E$ имеют предел $f(x)$ в $\overline{\mathbf{R}}$, то говорят еще, что ряд с общим членом f_n сходится почти всюду и f есть сумма этого ряда (отметим, что f не обязательно конечна почти всюду).

Если f и g — две числовые функции, определенные и конечные почти всюду на E, то $\tilde{f} + \tilde{g}$ (соотв. $\tilde{f}\tilde{g}$) есть класс всякой функции, равной $f(x) + g(x)$ (соотв. $f(x)\,g(x)$) в тех точках $x \in E$, где это выражение имеет смысл. Отметим, что f и g могут быть обе *всюду определены* и в то же время $f(x) + g(x)$ (соотв. $f(x)\,g(x)$) будет определена не для всех x (Общая топ., гл. IV, § 4, n° 3); тогда, по определению, $f + g$ (соотв. fg) есть функция, равная $f(x) + g(x)$ (соотв. $f(x)\,g(x)$) в тех точках, где это выражение определено; таким образом, оно определено лишь почти всюду.

Пусть f и g — две (не обязательно конечные) числовые функции, определенные почти всюду на E и такие, что $f(x) \leqslant g(x)$ почти всюду; если f_1 эквивалентна f, а g_1 эквивалентна g, то очевидно, что и $f_1(x) \leqslant g_1(x)$ почти всюду. Следовательно, рассматриваемое отношение зависит лишь от классов функций f и g; оно записывается в виде $\tilde{f} \leqslant \tilde{g}$, и легко видеть, что это отношение есть *отношение порядка* в множестве классов эквивалентности функций со значениями в $\overline{\mathbf{R}}$. Если $(\tilde{f}_n)$ есть (конечное или бесконечное) счетное семейство этих классов и если для любого n

функции f_n и g_n определены почти всюду и принадлежат классу $\tilde{f}_n$, то из предложения 8 вытекает, что определенные почти всюду функции $\sup\limits_n f_n$ и $\sup\limits_n g_n$ эквивалентны; значит, их класс зависит лишь от классов $\tilde{f}_n$, и легко видеть, что это есть *верхняя грань* $\sup\limits_n \tilde{f}_n$ этих классов в множестве классов функций со значениями в $\overline{\mathbf{R}}$ и упорядоченное только что указанным способом (следовательно, это множество является, в частности, *решеткой*). Точно так же доказывается существование нижней грани $\inf \tilde{f}_n$, и имеем $\inf\limits_n \tilde{f}_n = -\sup\limits_n (-\tilde{f}_n)$. Отсюда следует, что $\varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n$ и $\varlimsup\limits_{n\to\infty} g_n$ тоже эквивалентны и их класс, обозначаемый через $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \tilde{f}_n$, равен $\inf\limits_n (\sup\limits_{p\geqslant 0} \tilde{f}_{n+p})$; точно так же определяется $\varliminf\limits_{n\to\infty} \tilde{f}_n$.

Конечная или бесконечная числовая функция f называется *пренебрежимой*, если она эквивалентна 0; это определение, согласно теореме 1, равносильно определению 1 для положительных определенных всюду функций. Для того чтобы f была пренебрежимой, необходимо и достаточно, чтобы этим свойством обладала $|f|$ (или чтобы обе функции f^+ и f^- были пренебрежимы).

7. *Случай абстрактных мер*

За исключением предложений 3 и 5, все результаты этого параграфа справедливы для абстрактной меры μ (§ 1, n° 5) с заменой всюду μ^* на μ^{**}. Они выполняются без всяких изменений, если абстрактная мера μ удовлетворяет аксиоме (MA); в этом случае имеются два определения пренебрежимой функции, соответствующие двум верхним интегралам μ^* и μ^{**}; всякая функция, пренебрежимая относительно μ^{**}, пренебрежима относительно μ^*, но обратное может не выполняться, если $\mathcal{I}_+$ и $\mathcal{I}'_+$ различны.

§ 3. Пространства L^p

1. *Неравенство Минковского*

Пусть E — локально компактное пространство и μ — положительная мера на E. Функция $\mu^*(f)$, определенная на множестве *положительных* (конечных или бесконечных) числовых функций на E, *положительна, положительно однородна, выпукла и возрастает* (§ 1, предл. 10, 11 и 12).

Предложение 1. *Для любого конечного действительного числа $p \geqslant 1$ и любой пары определенных на E (конечных или бесконечных) положительных функций f, g выполняется неравенство*

$$(\mu^*((f+g)^p))^{\frac{1}{p}} \leqslant (\mu^*(f^p))^{\frac{1}{p}} + (\mu^*(g^p))^{\frac{1}{p}} \qquad (1)$$

(*неравенство Минковского*).

В самом деле, неравенство (1) очевидно, если один из членов в правой части равен $+\infty$. Если же правая часть (1) конечна, то f и g *конечны почти всюду* (§ 2, предл. 7). Если f_1 и g_1 — две конечные положительные функции, эквивалентные, соответственно, f и g, то f_1^p, g_1^p и $(f_1+g_1)^p$ эквивалентны, соответственно, f^p, g^p и $(f+g)^p$, а поскольку две эквивалентные положительные функции имеют один и тот же верхний интеграл (§ 2, предл. 6), то все сводится к доказательству формулы (1), когда f и g — конечные всюду функции; но тогда неравенство является частным случаем общего неравенства Минковского, доказанного в главе I, n° 2, предл. 3.

Мы будем также пользоваться следующим элементарным неравенством: если $p \geqslant 1$, то для любых чисел $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, справедливо неравенство

$$a^p + b^p \leqslant (a+b)^p. \qquad (2)$$

Действительно, при $a = b = 0$ неравенство очевидно, а если $a+b>0$, то оно записывается в виде $\left(\frac{a}{a+b}\right)^p + \left(\frac{b}{a+b}\right)^p \leqslant 1$ и вытекает из того, что

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^p \leqslant \frac{a}{a+b}, \quad \left(\frac{b}{a+b}\right)^p \leqslant \frac{b}{a+b} \quad \text{и} \quad \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1.$$

2. *Полунормы N_p*

В дальнейшем через F будет обозначаться *полное нормированное* векторное пространство над полем $\mathbf{R}$ (действительное банахово пространство); *норма* элемента $\mathbf{z} \in F$ будет обозначаться через $|\mathbf{z}|$. Если задано отображение $\mathbf{f}$ множества A в F, то $|\mathbf{f}|$ будет означать отображение $x \to |\mathbf{f}(x)|$ множества A в $\mathbf{R}_+$ (следует отметить, что $|\mathbf{f}|$ есть *числовая функция*, а не *число*).

Определение 1. *Пусть E — локально компактное пространство и μ — положительная мера на E. Для любого отображения* $\mathbf{f}$ *пространства E в банахово пространство F и любого числа p, $1 \leqslant p < +\infty$, через $N_p(\mathbf{f}, \mu)$ или просто $N_p(\mathbf{f})$ обозначается положительное число* $\left(\int^* |\mathbf{f}|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$.

Отметим, что число $N_p(\mathbf{f})$ может оказаться равным $+\infty$.

Предложение 2. *Если $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ — два отображения пространства E в F и $\alpha \neq 0$ — произвольный скаляр, то для $1 \leqslant p < +\infty$*

$$N_p(\alpha\mathbf{f}) = |\alpha| N_p(\mathbf{f}), \tag{3}$$

$$N_p(\mathbf{f}+\mathbf{g}) \leqslant N_p(\mathbf{f}) + N_p(\mathbf{g}). \tag{4}$$

В самом деле, соотношение (3) сразу вытекает из определения 1 и из того факта, что μ^* положительно однородна; с другой стороны, поскольку $|\mathbf{f}+\mathbf{g}| \leqslant |\mathbf{f}| + |\mathbf{g}|$, то неравенство (4) следует из неравенства Минковского (1) и из того факта, что μ^* возрастает.

Мы распространим определение 1 на случай определенных на E *конечных или бесконечных* числовых функций, положив снова $N_p(f) = \left(\int^* |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ для такой функции f. Легко видеть, что соотношения (3) и (4) снова выполняются для этих функций, когда $f+g$ определена на E и $\alpha \neq 0$. Кроме того, справедлива

Теорема 1 (теорема о счетной выпуклости). *Пусть (f_n) — последовательность (конечных или бесконечных) положительных функций, определенных на E. Для $1 \leqslant p < +\infty$ имеет место неравенство*

$$N_p\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} N_p(f_n). \tag{5}$$

В самом деле, положим $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$; f есть верхняя огибающая возрастающей последовательности функций $g_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$; определение $N_p(f)$ и теорема 3 из § 1 показывают, что $N_p(f) = \sup_n N_p(g_n)$.

Но в силу предложения 2 $N_p(g_n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} N_p(f_k)$, откуда следует неравенство (5).

Предложение 3. *Если* $\mathbf{f}$ *и* $\mathbf{g}$ — *два эквивалентных отображения пространства* E *в банахово пространство* F, *то* $N_p(\mathbf{f}-\mathbf{g})=0$ *для* $1 \leqslant p < +\infty$; *обратно, если* $N_p(\mathbf{f}-\mathbf{g})=0$ *для некоторого значения* $p \geqslant 1$, *то* $\mathbf{f}$ *и* $\mathbf{g}$ *эквивалентны.*

Предложение сразу вытекает из теоремы 1 § 2.

Если $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ — два эквивалентных отображения пространства E в F, то $N_p(\mathbf{f})=N_p(\mathbf{g})$ для любого $p \geqslant 1$ (§ 2, предл. 6); следовательно, $N_p(\mathbf{f})$ зависит лишь от класса $\widetilde{\mathbf{f}}$ функции $\mathbf{f}$, и, по определению, полагают $N_p(\widetilde{\mathbf{f}})=N_p(\mathbf{f})$. Так как классы отображений пространства E в F образуют векторное пространство (§ 2, n° 4), то соотношения (3) и (4) могут быть также записаны в виде

$$N_p(\alpha\widetilde{\mathbf{f}})=|\alpha|\,N_p(\widetilde{\mathbf{f}}), \tag{6}$$

$$N_p(\widetilde{\mathbf{f}}+\widetilde{\mathbf{g}}) \leqslant N_p(\widetilde{\mathbf{f}})+N_p(\widetilde{\mathbf{g}}). \tag{7}$$

Точно так же определяется $N_p(\widetilde{f})$ для любого класса эквивалентных (конечных или бесконечных) числовых функций.

Следовательно, можно определить $N_p(\mathbf{f})$ для функции со значениями в F (соотв. в $\overline{\mathbf{R}}$), определенной почти всюду на E, положив $N_p(\mathbf{f})=N_p(\widetilde{\mathbf{f}})$; легко видеть, что в этом случае соотношения (3) и (4) снова верны (предполагая, что $\alpha \neq 0$ и $f+g$ определена почти всюду, если речь идет о конечных или бесконечных числовых функциях).

Если $0<p<1$, то все еще полагают $N_p(\mathbf{f})=\left(\int^{*}|\mathbf{f}|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$, но неравенства (4) и (5) уже не выполняются (ср. гл. I, упр. 5 и гл. IV, § 6, упр. 17).

3. *Пространства* $\mathcal{F}_F^p$

Пусть F — банахово пространство и $\mathcal{F}_F(E)$ (или просто $\mathcal{F}_F$) — векторное пространство всех отображений пространства E в F. Для $1 \leqslant p < +\infty$ обозначим через $\mathcal{F}_F^p(E,\mu)$ или просто $\mathcal{F}_F^p(\mu)$, а также (если это не влечет никакой путаницы) $\mathcal{F}_F^p$ множество отображений $\mathbf{f}$ пространства E в F, для которых $N_p(\mathbf{f}) < +\infty$ (вместо $\mathcal{F}^p_{\mathbf{R}}$ пишется $\mathcal{F}^p$). Из предложения 2 сразу вытекает, что $\mathcal{F}^p_F$ есть *векторное подпространство* пространства $\mathcal{F}_F$ и что $N_p(\mathbf{f})$ есть *полунорма* на этом пространстве. Мы будем всюду (где не оговаривается противное) предполагать, что $\mathcal{F}^p_F$ наделено топологией, определяемой этой полунормой; будем говорить, что эта топология есть *топология сходимости в среднем порядка* p (для $p=1$ ее называют просто *топологией сходимости в среднем*; для $p=2$ говорят также, что это «топология сходимости в смысле среднего квадратического»). Будем говорить, что фильтр $\mathfrak{G}$ в $\mathcal{F}^p_F$, сходящийся к $\mathbf{f}$ в этой топологии (соотв. последовательность $(\mathbf{f}_n)$ элементов из $\mathcal{F}^p_F$), *сходится в среднем порядка* p; это означает, следовательно, что $N_p(\mathbf{g}-\mathbf{f})$ стремится к 0 по фильтру $\mathfrak{G}$ (соотв., что $N_p(\mathbf{f}_n-\mathbf{f})$ стремится к 0 при неограниченном возрастании n).

Эта терминология сразу распространяется на случай, когда функции $\mathbf{f}_n$ и функция $\mathbf{f}$ определены лишь почти всюду (или на функции со значениями в $\overline{\mathbf{R}}$, определенные и конечные почти всюду).

Отметим, что локально выпуклое пространство $\mathcal{F}^p_F$, вообще говоря, *не будет отделимым*; замыканием 0 в этом пространстве служит подпространство $\mathfrak{N}_F$ *пренебрежимых* отображений пространства E в F (предл. 3).

Замечание. Пусть F — банахово пространство *над полем* $\mathbf{C}$ комплексных чисел; тогда для всякой функции $\mathbf{f} \in \mathcal{F}^p_F$ и любого комплексного числа α функция $\alpha\mathbf{f}$ принадлежит $\mathcal{F}^p_F$ и $N_p(\alpha\mathbf{f}) = |\alpha| N_p(\mathbf{f})$; иными словами, $\mathcal{F}^p_F$ является также векторным подпространством над $\mathbf{C}$ и $N_p(\mathbf{f})$ есть полунорма на этом комплексном векторном пространстве (ср. Топ. вект. пр-ва, гл. II, § 6).

Предложение 4. *Пусть $\mathfrak{B}$ — базис фильтра в $\mathcal{F}^p_F$. Предположим, что существует такое компактное множество $K \subset E$, что для любого множества $M \in \mathfrak{B}$ носители всех отображений $\mathbf{f} \in M$ содержатся в K. Если при выполнении этих условий $\mathfrak{B}$ равномерно сходится на E к $\mathbf{f}_0$, то $\mathbf{f}_0$ принадлежит $\mathcal{F}^p_F$ и $\mathfrak{B}$ сходится к $\mathbf{f}_0$ в среднем порядка p.*

Это равносильно утверждению, что в множестве отображений $\mathbf{f} \in \mathscr{F}_F^p$, носитель которых содержится в фиксированном компактном множестве, топология равномерной сходимости является *более сильной*, чем топология сходимости в среднем порядка p.

Действительно, пусть h — непрерывное отображение пространства E в $[0, 1]$ с компактным носителем, равное 1 на K (гл. III, § 2, лемма 1). Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $M \in \mathfrak{B}$, что для всякого отображения $\mathbf{f} \in M$ неравенство $|\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}_0(x)| \leqslant \varepsilon h(x)$ выполняется при всех $x \in E$. Из этого выводим, что $N_p(\mathbf{f} - \mathbf{f}_0) \leqslant \varepsilon N_p(h)$, откуда и следует предложение.

Предложение 5. *Локально выпуклое пространство* $\mathscr{F}_F^p$ *полно*.

Так как ассоциированное с $\mathscr{F}_F^p$ отделимое пространство нормировано, то достаточно доказать, что всякая *последовательность Коши* $(\mathbf{f}_n)$ в $\mathscr{F}_F^p$ имеет предел в топологии сходимости в среднем порядка p (Общая топ., гл. IX, § 2, предл. 9). По условию для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое целое m_0, что из $m \geqslant m_0$, $n \geqslant m_0$ следует $N_p(\mathbf{f}_n - \mathbf{f}_m) \leqslant \varepsilon$. Значит, можно индукцией по k определить строго возрастающую последовательность (n_k) таких целых $n_k \geqslant 0$, что $N_p(\mathbf{f}_{n_{k+1}} - \mathbf{f}_{n_k}) \leqslant 2^{-k}$. Если мы покажем, что ряд с общим членом $g_k = f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$ $(k \geqslant 1)$ *сходится в среднем порядка* p, то он будет иметь сумму $\mathbf{g} \in \mathscr{F}_F^p$ и $\mathbf{f} = \mathbf{g} + \mathbf{f}_{n_1}$ будет пределом последовательности $(\mathbf{f}_{n_k})$ в $\mathscr{F}_F^p$; тогда $\mathbf{f}$ будет элементом прикосновения последовательности $(\mathbf{f}_n)$; а так как последняя есть последовательность Коши, то она будет иметь пределом $\mathbf{f}$, и предложение 5 будет доказано (Общая топ., гл. II, § 3, предл. 4).

Итак, предложение 5 является следствием следующего предложения:

Предложение 6. *Пусть* $(\mathbf{f}_n)$ — *такая последовательность функций из* $\mathscr{F}_F^p$, *что* $\sum_{n=1}^{\infty} N_p(\mathbf{f}_n) < +\infty$. *Тогда ряд с общим членом* $\mathbf{f}_n(x) \in F$ *абсолютно сходится почти всюду на* E. *Если в точках сходимости ряда положить* $\mathbf{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{f}_n(x)$, *а в остальных точках положить* $\mathbf{f}(x) = 0$, *то функция* $\mathbf{f}$ *будет принадлежать* $\mathscr{F}_F^p$

и будет служить суммой ряда с общим членом $\mathbf{f}_n$ (в топологии сходимости в среднем порядка p); *более точно, для любого* $n \geqslant 0$ *выполняется неравенство*

$$N_p\left(\mathbf{f} - \sum_{k=1}^{n} \mathbf{f}_k\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} N_p(\mathbf{f}_k). \tag{8}$$

В самом деле, рассмотрим положительную (конечную или бесконечную) функцию $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |\mathbf{f}_n(x)|$. Согласно теореме о счетной выпуклости (теорема 1) имеем $N_p(g) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} N_p(\mathbf{f}_n) < +\infty$; поэтому g почти всюду конечна (§ 2, предл. 7), что означает, что ряд с общим членом $\mathbf{f}_n(x)$ абсолютно сходится почти всюду. А поскольку F полно, то этот ряд сходится почти всюду, и для любого $x \in E$ имеем $|\mathbf{f}(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\mathbf{f}_n(x)| = g(x)$, откуда $N_p(\mathbf{f}) \leqslant \leqslant N_p(g) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} N_p(\mathbf{f}_n) < +\infty$, чем доказано, что $\mathbf{f}$ принадлежит $\mathcal{F}_F^p$. С другой стороны, для любого целого n неравенство

$$\left|\mathbf{f}(x) - \sum_{k=1}^{n} \mathbf{f}_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |\mathbf{f}_k(x)|$$

выполняется почти всюду, и значит, $N_p\left(\mathbf{f} - \sum_{k=1}^{n} \mathbf{f}_k\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} N_p(\mathbf{f}_k)$. По условию ряд с общим членом $N_p(\mathbf{f}_n)$ сходится; следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое целое n, что $\sum_{k=n+1}^{\infty} N_p(\mathbf{f}_k) \leqslant \varepsilon$, и неравенство (8) показывает, что $\mathbf{f}$ есть сумма ряда с общим членом $\mathbf{f}_n$ в топологии сходимости в среднем порядка p.

Таким образом, предложения 5 и 6 полностью доказаны.

4. *Функции, интегрируемые в p-й степени*

Векторное пространство $\mathcal{K}_F(E)$ (которое мы в случае, если это не вызывает никаких недоразумений, будем обозначать просто $\mathcal{K}_F$), состоящее из непрерывных отображений с компактным носителем пространства E в F, очевидно, является подпространством каждого из векторных пространств $\mathcal{F}_F^p$.

Определение 2. *Если заданы локально компактное пространство E, положительная мера μ на E и банахово пространство F, то через* $\mathcal{L}_F^p(E, \mu)$ (или просто $\mathcal{L}_F^p(\mu)$, а также $\mathcal{L}_F^p$) *обозначается замыкание в локально выпуклом пространстве* $\mathcal{F}_F^p(E, \mu)$ *векторного пространства* $\mathcal{K}_F(E)$ *непрерывных отображений с компактным носителем пространства E в F. Через* $L_F^p(E, \mu)$ (или $L_F^p(\mu)$, L_F^p) *обозначается отделимое* (*нормированное*) *пространство, ассоциированное с* $\mathcal{L}_F^p(E, \mu)$. *Говорят, что функции, принадлежащие* $\mathcal{L}_F^p$,*суть функции, интегрируемые в p-й степени* *).

Мы будем вместо $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}^p$ и $L_{\mathbf{R}}^p$ писать $\mathcal{L}^p$ и L^p. Если F есть комплексное банахово пространство, то $\mathcal{L}_F^p$ и L_F^p наделены структурой топологического векторного пространства над полем $\mathbf{C}$ (n° 3, замечание).

Ясно, что всякая функция из $\mathcal{F}_F^p$, эквивалентная некоторой функции из $\mathcal{L}_F^p$, принадлежит $\mathcal{L}_F^p$. Функция со значениями в F, *определенная почти всюду* на E, снова называется интегрируемой в p-й степени, если она эквивалентна некоторой функции из $\mathcal{L}_F^p$; точно так же функция со значениями в $\overline{\mathbf{R}}$, определенная и конечная почти всюду на E, называется интегрируемой в p-й степени, если она эквивалентна некоторой функции из $\mathcal{L}^p$.

Следовательно, функции из $\mathcal{L}_F^p$ (соотв. из $\mathcal{L}^p$) являются интегрируемыми в p-й степени функциями, *определенными на всем* E (соотв. определенными и конечными на всем E). Большинство предложений, доказанных в этом и в следующем параграфе для функций из $\mathcal{L}_F^p$ (соотв. $\mathcal{L}^p$), распространяется сразу же на интегрируемые в p-й степени функции, определенные не всюду (соотв. определенные и конечные не всюду); формулировка и доказательство этих результатов чаще всего будет предоставлена читателю.

Замечания. 1) Как уже отмечалось (§ 2, n° 5), интегрируемые в p-й степени функции со значениями в F, вообще говоря, *не образуют векторного пространства.*

2) В общем случае пространство $\mathcal{F}_F^p$ отлично от подпространства $\mathcal{L}_F^p$ (§ 4, упр. 8).

---

*) Обоснование этой терминологии будет дано в § 4, n° 2.

Определение 2 сразу же позволяет сформулировать следующий критерий:

Предложение 7. *Для того чтобы функция* $\mathbf{f}$ *принадлежала* $\mathcal{L}_F^p$, *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовала такая непрерывная функция* $\mathbf{g}$ *с компактным носителем, что* $N_p(\mathbf{f} - \mathbf{g}) \leqslant \varepsilon$.

Иными словами, функции из $\mathcal{L}_F^p$ являются пределами последовательностей непрерывных функций с компактным носителем *в топологии сходимости в среднем порядка p*.

Предложение 8. *Пусть* f — *(конечная или бесконечная) числовая функция, определенная почти всюду; если для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют такие две интегрируемые в p-й степени функции* g, h, *что* $g \leqslant f \leqslant h$ *почти всюду и что* $N_p(h - g) \leqslant \varepsilon$, *то* f *интегрируема в p-й степени.*

Действительно, f конечна почти всюду и $N_p(f - g) \leqslant \leqslant N_p(h - g) \leqslant \varepsilon$; тогда предложение 7 показывает, что f интегрируема в p-й степени.

Так как по определению $\mathcal{L}_F^p$ есть замкнутое подпространство пространства $\mathcal{F}_F^p$ и так как последнее полно (предл. 5), то получаем следующий результат (Общая топ., гл. II, § 3, предл. 6):

Теорема 2. *Пространство* $\mathcal{L}_F^p$ *полно; пространство* L_F^p *есть банахово пространство.*

Норма $N_p(\tilde{\mathbf{f}})$ класса в пространстве L_F^p снова обозначается через $\|\tilde{\mathbf{f}}\|_p$.

Теорему 2 можно уточнить следующим образом:

Теорема 3. *Пусть* $(\mathbf{f}_n)$ — *последовательность Коши в пространстве* $\mathcal{L}_F^p$; *тогда существует подпоследовательность* $(\mathbf{f}_{n_k})$ *последовательности* $(\mathbf{f}_n)$, *обладающая следующими свойствами:*

1° *ряд с общим членом* $N_p(\mathbf{f}_{n_{k+1}} - \mathbf{f}_{n_k})$ *сходится;*

2° *ряд с общим членом* $\mathbf{f}_{n_{k+1}}(x) - \mathbf{f}_{n_k}(x)$ *абсолютно сходится почти всюду;*

3° *если* $\mathbf{f}$ *есть функция, определенная на* E *и равная почти всюду пределу последовательности* $(\mathbf{f}_{n_k}(x))$, *то* $\mathbf{f}$ *принадлежит* $\mathcal{L}_F^p$ *и последовательность* $(\mathbf{f}_n)$ *сходится к* $\mathbf{f}$ *в среднем порядка* p;

4° *существует такая полунепрерывная снизу функция* $g \geqslant 0$, *что* $N_p(g) < +\infty$ *и для любого* k *выполняется неравенство* $|\mathbf{f}_{n_k}(x)| \leqslant g(x)$ *при всех* $x \in E$.

Как и в доказательстве предложения 5, достаточно так определить по индукции последовательность (n_k), чтобы $N_p(\mathbf{f}_{n_{k+1}} - \mathbf{f}_{n_k}) \leqslant 2^{-k}$; тогда утверждения 2° и 3° будут следовать из предложения 6 и из того факта, что $\mathcal{L}_F^p$ замкнуто в $\mathcal{F}_F^p$. С другой стороны, если $h(x)$ есть сумма ряда с общим членом $|\mathbf{f}_{n_{k+1}}(x) - \mathbf{f}_{n_k}(x)|$, то предложение 6 показывает, что $N_p(h) < +\infty$; стало быть, по определению меры μ^* существует такая полунепрерывная снизу функция $g \geqslant h + |\mathbf{f}_{n_1}|$, что $N_p(g) < +\infty$, чем и завершается доказательство.

Следствие 1. *Если последовательность Коши* $(\mathbf{f}_n)$ *в пространстве* $\mathcal{L}_F^p$ *такова, что последовательность* $(\mathbf{f}_n(x))$ *сходится почти всюду к* $\mathbf{f}(x)$, *то* $\mathbf{f}$ *интегрируема в* p*-й степени и последовательность* $(\mathbf{f}_n)$ *сходится к* $\mathbf{f}$ *в среднем порядка* p.

В самом деле, найдется такая подпоследовательность $(\mathbf{f}_{n_k})$ последовательности $(\mathbf{f}_n)$, что $(\mathbf{f}_{n_k}(x))$ сходится почти всюду к $\mathbf{g}(x)$, где $\mathbf{g}$ — функция из $\mathcal{L}_F^p$, к которой сходится в среднем порядка p последовательность $(\mathbf{f}_n)$. Тогда согласно сделанным предположениям $\mathbf{f}(x) = \mathbf{g}(x)$ почти всюду, откуда и получаем следствие.

Следствие 2. *Пусть* $\mathcal{E}$ — *всюду плотное множество в* $\mathcal{L}_F^p$. *Для всякой функции* $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_F^p$ *существует последовательность* $(\mathbf{g}_n)$ *функций из* $\mathcal{E}$, *обладающая следующими свойствами:*

1° *последовательность* $(\mathbf{g}_n)$ *сходится к* $\mathbf{f}$ *в среднем порядка* p;

2° *для почти всех* $x \in E$ *последовательность* $(\mathbf{g}_n(x))$ *сходится к* $\mathbf{f}(x)$.

В самом деле, поскольку пространство L_F^p метризуемо, то в $\mathcal{L}_F^p$ существует последовательность Коши $(\mathbf{f}_n)$, состоящая из функций из $\mathcal{E}$ и сходящаяся к $\mathbf{f}$ в среднем порядка p (Общая топ., гл. IX, § 2, предл. 8); достаточно применить к этой последовательности теорему 3.

Следствие 2 применимо, в частности, к случаю, когда в качестве $\mathscr{E}$ берется пространство $\mathscr{K}_F$ *непрерывных функций с компактным носителем.*

Замечания. 1) Последовательность Коши $(\mathbf{f}_n)$ в $\mathscr{L}_F^p$ может быть такой, что последовательность $(\mathbf{f}_n(x))$ не сходится *ни в одной точке* из E (упр. 1).

2) Если $\mathbf{f}$ принадлежит $\mathscr{L}_F^p$, то не всегда может найтись такая последовательность $(\mathbf{f}_n)$ непрерывных функций с компактным носителем, чтобы последовательность $(\mathbf{f}_n(x))$ сходилась *всюду* на E к функции, равной $\mathbf{f}(x)$ почти всюду (§ 4, упр. 4 c)).

5. Свойства функций, интегрируемых в p-й степени

Теорема 4. *Пусть F и G — два банаховых пространства, и $\mathbf{u}$ — непрерывное линейное отображение пространства F в G. Тогда для любой функции $\mathbf{f} \in \mathscr{L}_F^p$ сложная функция $\mathbf{u} \circ \mathbf{f}$ принадлежит $\mathscr{L}_G^p$.*

В самом деле, если $\mathbf{f} \in \mathscr{L}_F^p$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $\mathbf{g} \in \mathscr{K}_F$, что $N_p(\mathbf{f}-\mathbf{g}) \leqslant \varepsilon$; а так как $|\mathbf{u} \circ \mathbf{f} - \mathbf{u} \circ \mathbf{g}| \leqslant \|\mathbf{u}\| \cdot |\mathbf{f}-\mathbf{g}|$, то $N_p(\mathbf{u} \circ \mathbf{f} - \mathbf{u} \circ \mathbf{g}) \leqslant \|\mathbf{u}\| N_p(\mathbf{f}-\mathbf{g}) \leqslant \varepsilon \|\mathbf{u}\|$; поскольку же $\mathbf{u} \circ \mathbf{g}$ непрерывна и имеет компактный носитель, то теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $\mathbf{a}'$ — произвольная непрерывная линейная форма на F; если $\mathbf{f} \in \mathscr{L}_F^p$, то числовая функция $x \to \langle \mathbf{f}(x), \mathbf{a}' \rangle$* (обозначаемая через $\langle \mathbf{f}, \mathbf{a}' \rangle$) *принадлежит $\mathscr{L}^p$.*

Следствие 2. *Если заданы n точек $\mathbf{a}_k$ из F $(1 \leqslant k \leqslant n)$ и n числовых функций f_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$, принадлежащих $\mathscr{L}^p$, то функция $\mathbf{f} = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{a}_k f_k$ принадлежит $\mathscr{L}_F^p$.*

Это следует из того, что отображение $t \to \mathbf{a}t$ $\mathbf{R}$ в F непрерывно.

Предложение 9. *Пусть F — n-мерное векторное пространство над $\mathbf{R}$, и пусть $(\mathbf{e}_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ — базис в F. Для того чтобы функция $\mathbf{f} = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{e}_k f_k$ принадлежала $\mathscr{L}_F^p$, необходимо и достаточно, чтобы каждая из числовых функций f_k принадлежала $\mathscr{L}^p$.*

Это непосредственно вытекает из следствий 1 и 2 теоремы 4.

Предложение 10. *В пространстве* $\mathscr{L}_F^p$ *векторное подпространство, состоящее из (конечных) линейных комбинаций* $\sum_k \mathbf{a}_k f_k$, *где* $\mathbf{a}_k \in F$, *а* f_k — *непрерывные числовые функции с компактным носителем, всюду плотно* (в топологии сходимости в среднем порядка p).

В самом деле, множество $\mathscr{K}_F$ непрерывных отображений с компактным носителем пространства E в F, по определению, всюду плотно в $\mathscr{L}_F^p$. С другой стороны, всякая функция $\mathbf{g} \in \mathscr{K}_F$ может быть равномерно приближена функциями вида $\sum_k \mathbf{a}_k f_k$, где f_k непрерывны и имеют носитель, содержащийся в некоторой *фиксированной* компактной окрестности носителя функции $\mathbf{g}$ (гл. III, § 2, лемма 2); отсюда (предл. 4) вытекает, что $\mathbf{g}$ является в $\mathscr{L}_F^p$ элементом прикосновения для множества сумм $\sum_k \mathbf{a}_k f_k$, откуда и следует предложение.

Предложение 11. *Если функция* $\mathbf{f}$ *принадлежит* $\mathscr{L}_F^p$, *то функция* $|\mathbf{f}|$ *принадлежит* $\mathscr{L}^p$ *и отображение* $\mathbf{f} \to |\mathbf{f}|$ *пространства* $\mathscr{L}_F^p$ *в* $\mathscr{L}^p$ *равномерно непрерывно* (в топологии сходимости в среднем порядка p).

В самом деле, для любого $\varepsilon > 0$ существует такая непрерывная функция $\mathbf{g}$ с компактным носителем, что $N_p(\mathbf{f} - \mathbf{g}) \leqslant \varepsilon$; а поскольку $||\mathbf{f}| - |\mathbf{g}|| \leqslant |\mathbf{f} - \mathbf{g}|$, то $N_p(|\mathbf{f}| - |\mathbf{g}|) \leqslant \varepsilon$, откуда $|\mathbf{f}| \in \mathscr{L}^p$. С другой стороны, если $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ — две функции из $\mathscr{L}_F^p$, то $N_p(|\mathbf{f}_1| - |\mathbf{f}_2|) \leqslant N_p(\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2)$, и тем самым доказано, что отображение $\mathbf{f} \to |\mathbf{f}|$ равномерно непрерывно.

Предложение 12. *Для того чтобы числовая функция* f *принадлежала* $\mathscr{L}^p$, *необходимо и достаточно, чтобы каждая из функций* f^+ *и* f^- *принадлежала* $\mathscr{L}^p$.

Условие достаточно, ибо $f = f^+ - f^-$; оно необходимо, поскольку если $f \in \mathscr{L}^p$, то $|f| \in \mathscr{L}^p$ (предл. 11).

Следствие. *Верхняя* (соотв. *нижняя*) *огибающая конечного семейства функций из* $\mathscr{L}^p$ *принадлежит* $\mathscr{L}^p$.

6. *Фильтрующиеся множества в $\mathbf{L}^p$ и возрастающие последовательности в $\mathbf{L}^p$*

Выше (§ 2, n° 6) мы определили отношение порядка $\widetilde{f} \leqslant \widetilde{g}$ в множестве $\widetilde{\mathscr{F}}$ классов эквивалентности числовых функций, определенных и конечных почти всюду на E; наделенное этим отношением и своей структурой векторного пространства, множество $\widetilde{\mathscr{F}}$ становится *пространством Рисса*. Следствие из предложения 12 показывает, что если $\widetilde{f}$ и $\widetilde{g}$ — два элемента подпространства L^p пространства $\widetilde{\mathscr{F}}$, то верхняя грань $\sup(\widetilde{f}, \widetilde{g})$ для $\widetilde{f}$ и $\widetilde{g}$ из $\widetilde{\mathscr{F}}$ (являющаяся классом каждой из функций $\sup(f, g)$, где $f \in \widetilde{f}$ и $g \in \widetilde{g}$) принадлежит L^p; это показывает, в частности, что L^p, наделенное отношением порядка, индуцированным отношением порядка в $\widetilde{\mathscr{F}}$, есть *пространство Рисса*.

Предложение 13. *В пространстве Рисса L^p наделенном топологией, определенной посредством нормы $\|\widetilde{f}\|_p$, отображение $\widetilde{f} \to |\widetilde{f}|$ равномерно непрерывно, а множество элементов $\widetilde{f} \geqslant 0$ замкнуто.*

Первая часть предложения сразу же вытекает из предложения 11; поскольку же множество элементов $\widetilde{f} \geqslant 0$ является также множеством тех $\widetilde{f}$, для которых $|\widetilde{f}| = f$, то оно замкнуто, ибо отображение $\widetilde{f} \to |\widetilde{f}|$ непрерывно и L^p отделимо.

Стало быть, в L^p топология, определенная посредством нормы $\|\widetilde{f}\|_p$, *согласуется* со структурой упорядоченного векторного пространства в L^p (гл. II, § 1, n° 6).

Предложение 14. *Пусть H — некоторое подмножество пространства Рисса L^p, состоящее из положительных классов и фильтрующееся по отношению $\leqslant$. Для того чтобы H имело в L^p верхнюю грань, необходимо и достаточно, чтобы $\sup\limits_{\widetilde{f} \in H} \|\widetilde{f}\| < +\infty$. Тогда верхняя грань множества H в L^p есть предел* (в банаховом пространстве L^p) *фильтра сечений множества H.*

Необходимость очевидна, ибо отображение $\widetilde{f} \to \|\widetilde{f}\|_p$ является возрастающей функций на множестве положительных элементов из L^p. Для доказательства достаточности прежде всего заметим, что сформулированное условие, на основании теоремы о монотонном пределе, влечет, что образ множества H при отображении $\tilde{f} \to \|\tilde{f}\|_p$ имеет предел в $\mathbf{R}$; следовательно, образ фильтра сечений $\mathfrak{F}$ в H при этом отображении будет базисом фильтра Коши в $\mathbf{R}$. Доказательство будет закончено, если мы покажем, что само $\mathfrak{F}$ является *базисом фильтра Коши* в L^p; в самом деле, в этом случае $\mathfrak{F}$ будет сходиться в L^p, поскольку L^p полно (предл. 7), и тогда предложение будет следовать из предложения 6 главы II, § 1.

Для доказательства того, что $\mathfrak{F}$ есть базис фильтра Коши, мы воспользуемся следующей леммой:

Лемма. *Если f и g — такие две функции из $\mathscr{L}^p$, что $0 \leqslant f \leqslant g$, то*

$$(N_p(g-f))^p \leqslant (N_p(g))^p - (N_p(f))^p. \tag{9}$$

В самом деле, если f и g — непрерывные функции с компактным носителем, то соотношение (9) записывается в виде

$$\int (g-f)^p \, d\mu \leqslant \int g^p \, d\mu - \int f^p \, d\mu$$

и является в этом случае следствием элементарного неравенства $(g-f)^p \leqslant g^p - f^p$ (n° 1, формула (2)). Для того чтобы перейти к общему случаю, достаточно заметить, что обе части в неравенстве (9) являются непрерывными на $\mathscr{L}^p \times \mathscr{L}^p$ функциями и что вследствие непрерывности отображения $f \to |f|$ на $\mathscr{L}^p$ (предл. 11) всякая функция $f \geqslant 0$ из $\mathscr{L}^p$ есть предел (относительно сходимости в среднем порядка p) последовательности положительных непрерывных функций с компактным носителем.

Доказав лемму, мы можем утверждать, что для любого $\varepsilon > 0$, по условию, найдется такой элемент $\tilde{f} \in H$, что для любого $\tilde{g} \geqslant \tilde{f}$, принадлежащего H, выполняется неравенство $(\|\tilde{g}\|_p)^p - (\|\tilde{f}\|_p)^p \leqslant \varepsilon$; отсюда вытекает, что $(\|\tilde{g}-\tilde{f}\|_p)^p \leqslant \varepsilon$; следовательно, если $\tilde{g}_1 \geqslant \tilde{f}$ и $\tilde{g}_2 \geqslant \tilde{f}$ — два элемента из H, то $\|\tilde{g}_1 - \tilde{g}_2\|_p \leqslant 2\varepsilon^{\frac{1}{p}}$, чем показано, что $\mathfrak{F}$ есть базис фильтра Коши в L^p, и тем самым завершено доказательство предложения 14.

Следствие 1. *Если $\tilde{g}$ есть верхняя грань множества H в L^p, то*

$$\|\tilde{g}\|_p = \lim_{\tilde{f} \in H} \|\tilde{f}\|_p = \sup_{\tilde{f} \in H} \|\tilde{f}\|_p. \tag{10}$$

Это следует из непрерывности нормы $\|\tilde{f}\|_p$ в L^p и из теоремы о монотонном пределе.

Следствие 2. *Пространство Рисса L^p вполне решеточно.*

Действительно, всякое фильрующееся (по отношению $\leqslant$) множество H в L^p, состоящее из положительных классов и мажорированное в L^p, имеет верхнюю грань, так как если h есть мажоранта множества H в L^p, то $\|\tilde{f}\|_p \leqslant \|\tilde{h}\|_p$ при любых $\tilde{f} \in H$ и применимо предложение 14. Этим следствие доказано (гл. II, § 1, предл. 1).

Утверждения предложения 14 перестают выполняться, если формулировать их для *функций* из $\mathscr{L}^p$, а не для их *классов*. Более точно, если M есть множество из $\mathscr{L}^p$, состоящее из положительных функций, фильтрующееся по отношению $\leqslant$ и такое, что $\sup\limits_{f \in M} N_p(f) < +\infty$, то *класс верхней огибающей g множества M может не совпадать с верхней гранью в L^p классов функций $f \in M$*; в частности, g может не быть интегрируемой в p-й степени, и, даже если $g \in \mathscr{L}^p$, $N_p(g)$ может быть отлично от $\sup\limits_{f \in M} N_p(f)$ (ср. § 1, замечание 1 после теоремы 3).

Однако все же имеет место следующая теорема:

Теорема 5. *Пусть (f_n) — возрастающая последовательность положительных функций из $\mathscr{L}^p$. Для того чтобы верхняя огибающая f этой последовательности была интегрируема в p-й степени, необходимо и достаточно, чтобы $\sup N_p(f_n) < +\infty$. Тогда последовательность (f_n) сходится в среднем порядка p к функции f и*

$$N_p(f) = \sup_n N_p(f_n) = \lim_{n \to \infty} N_p(f_n). \tag{11}$$

Поскольку необходимость условия очевидна, то все сводится к доказательству его достаточности. Но при выполнении условия предложение 14 показывает, что последовательность $(\tilde{f}_n)$ есть последовательность Коши в L^p, и, значит, последовательность (f_n) есть последовательность Коши в $\mathscr{L}^p$; а так как $f_n(x)$ стремится к $f(x)$ при любом $x \in E$, то f интегрируема в p-й степени и служит пределом последовательности (f_n) в топологии сходимости в среднем порядка p (следствие 1 из теоремы 3). Следовательно, класс $\tilde{f}$, относительно которого уже известно, что он является верхней гранью последовательности $(\tilde{f}_n)$ в $\tilde{\mathfrak{F}}$ (ср. § 2, n° 6), будет также служить верхней гранью этой последовательности в L^p. Тогда соотношение (11) является следствием формулы (10) (а также теоремы 3 § 1).

Следствие 1. *Пусть (f_n) — убывающая последовательность положительных функций из $\mathcal{L}^p$; нижняя огибающая f этой последовательности принадлежит $\mathcal{L}^p$, последовательность (f_n) сходится в среднем порядка p к f, и*

$$N_p(f) = \lim_{n\to\infty} N_p(f_n) = \inf_n N_p(f_n).$$

Первые два утверждения вытекают из теоремы 5, примененной к возрастающей мажорированной последовательности функций $g_n = f_1 - f_n$; остальное уже очевидно.

Следствие 2. *Пусть (f_n) — последовательность функций из $\mathcal{L}^p$. Для того чтобы верхняя огибающая f последовательности (f_n) была интегрируема в p-й степени, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая функция $g \geqslant 0$, что $\int^* g^p \, d\mu < +\infty$ и $f_n \leqslant g$ при любом n.*

Необходимость очевидна, если положить $g = f^+$. Предположим теперь, что условие выполнено, и положим $g_n = \sup_{k\leqslant n} f_k$; последовательность (g_n) возрастает и состоит из функций, интегрируемых в p-й степени (следствие из предл. 12). Возрастающая последовательность положительных функций $h_n = g_n + g_1^-$ удовлетворяет условиям теоремы 5, так как $N_p(h_n) \leqslant N_p(g + g_1^-) < +\infty$; следовательно, ее верхняя огибающая $\sup_n h_n$ интегрируема в p-й степени, и то же самое справедливо для $f = \sup_n h_n - g_1^-$.

Следствие 3. *Пусть A — некоторое счетное множество, $\mathfrak{F}$ — фильтр в A, имеющий счетный базис, и $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ — некоторое семейство положительных функций из $\mathcal{L}^p$. Предположим, что существует такая функция $g \geqslant 0$, что $N_p(g) < +\infty$ и $f_\alpha \leqslant g$ при любом $\alpha \in A$; тогда функция $\limsup_{\mathfrak{F}} f_\alpha$ интегрируема в p-й* *степени и*

$$\limsup_{\mathfrak{F}} N_p(f_\alpha) \leqslant N_p(\limsup_{\mathfrak{F}} f_\alpha). \tag{12}$$

В самом деле, пусть (A_n) — убывающий базис фильтра $\mathfrak{F}$, и пусть $g_n = \sup_{\alpha \in A_n} f_\alpha$; так как A_n счетно, то из следствия 2 вытекает, что g_n интегрируема в p-й степени; с другой стороны, $N_p(g_n) \geqslant \sup_{\alpha \in A_n} N_p(f_\alpha)$. Тогда $\limsup_{\mathfrak{F}} f_\alpha$ будет нижней огибающей убывающей последовательности (g_n); значит, в силу следствия 1 функция $\limsup_{\mathfrak{F}} f_\alpha$ интегрируема в p-й степени и

$$N_p(\limsup_{\mathfrak{F}} f_\alpha) = N_p(\inf_n g_n) = \lim_{n \to \infty} N_p(g_n) \geqslant$$
$$\geqslant \lim_{n \to \infty} (\sup_{\alpha \in A_n} N_p(f_\alpha)) = \limsup_{\mathfrak{F}} N_p(f_\alpha).$$

7. Теорема Лебега

Теорема 6 (Лебег). *Пусть F — банахово пространство, а $(\mathbf{f}_n)$ — последовательность функций из $\mathcal{L}^p_F$, удовлетворяющая условиям: 1° последовательность $(\mathbf{f}_n(x))$ сходится почти всюду к пределу $\mathbf{f}(x) \in F$; 2° существует такая числовая функция $g \geqslant 0$, что $\int^* g^p \, d\mu < +\infty$ и $|\mathbf{f}_n(x)| \leqslant g(x)$ почти всюду на E при любом целом n. Тогда функция $\mathbf{f}$ (определенная почти всюду) интегрируема в p-й степени и последовательность $(\mathbf{f}_n)$ сходится к $\mathbf{f}$ в среднем порядка p.*

Рассмотрим «двойную» последовательность $g_{mn} = |\mathbf{f}_m - \mathbf{f}_n|$ числовых функций, принадлежащих $\mathcal{L}^p$ (предл. 11); по условию $\lim_{m \to \infty,\, n \to \infty} g_{mn}(x) = 0$ почти всюду, и, с другой стороны, $|g_{mn}(x)| \leqslant 2g(x)$ почти всюду; применив к этой последовательности следствие 3 из теоремы 5, получаем, что $\limsup_{m \to \infty,\, n \to \infty} N_p(\mathbf{f}_m - \mathbf{f}_n) \leqslant N_p(0) = 0$, а поскольку $N_p(\mathbf{f}_m - \mathbf{f}_n) \geqslant 0$, то это влечет $\lim_{m \to \infty,\, n \to \infty} N_p(\mathbf{f}_m - \mathbf{f}_n) = 0$; иначе говоря, последовательность $(\mathbf{f}_n)$ есть *последовательность Коши* в $\mathcal{L}^p_F$. Таким образом, теорема вытекает из следствия 1 теоремы 3.

Следствие. *Пусть A — множество индексов, фильтрующееся по фильтру $\mathfrak{F}$, имеющему счетный базис. Если $(\mathbf{f}_\alpha)_{\alpha \in A}$ есть* *семейство функций из $\mathcal{L}_F^p$, сходящееся просто (в смысле простой сходимости) по фильтру $\mathfrak{F}$ почти всюду к функции* $\mathbf{f}$, *и если при этом существует такая числовая функция* $g \geqslant 0$, *что* $\int^* g^p\, d\mu < +\infty$ *и* $|\mathbf{f}_\alpha(x)| \leqslant g(x)$ *почти всюду на* E *при любом* $\alpha \in A$, *то функция* $\mathbf{f}$ *интегрируема в р-й степени и* $\mathbf{f}_\alpha$ *стремится к* $\mathbf{f}$ *в среднем порядка р по фильтру* $\mathfrak{F}$.

В самом деле, пусть (A_n) — убывающий счетный базис фильтра $\mathfrak{F}$ и α_n — произвольный элемент из A_n; последовательность $(\mathbf{f}_{\alpha_n})$ сходится просто к $\mathbf{f}$ почти всюду на E, и значит, согласно теореме 6, $\mathbf{f}$ интегрируема в p-й степени и $\lim\limits_{n\to\infty} N_p(\mathbf{f} - \mathbf{f}_{\alpha_n}) = 0$. А поскольку фильтр $\mathfrak{F}$ является пересечением элементарных фильтров, ассоциированных со всеми последовательностями (α_n) (Общая топ., гл. I, § 5, предл. 10), то $\lim_{\mathfrak{F}} N_p(\mathbf{f} - \mathbf{f}_\alpha)$ существует и равен 0 — общему пределу всех последовательностей $(N_p(\mathbf{f} - \mathbf{f}_{\alpha_n}))$.

Замечания. 1) Теорема 6 не будет верна, если условие $|\mathbf{f}_n| \leqslant g$ (с $N_p(g) < +\infty$) заменить более слабым условием: $\sup\limits_n N_p(\mathbf{f}_n) < +\infty$. Предположим, например, что μ есть мера Лебега на $\mathbf{R}$; определим непрерывные функции следующим образом: $f_n(x) = 0$ для $x \leqslant 0$ и $x \geqslant \frac{2}{n}$, $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n$, и f_n линейна на интервалах $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ и $\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ при любом $x \in \mathbf{R}$, но $N_1(f_n) = 1$ при всех n (ср. § 5, упр. 8).

2) Следствие из теоремы 6 не сохраняется, если не предполагать, что фильтр $\mathfrak{F}$ имеет счетный базис (ср. § 1, замечание 1 после теоремы 3).

8. *Соотношения между пространствами* $\mathcal{L}_F^p$ $(1 \leqslant p < +\infty)$

Для любого числа $\alpha > 0$ отображение $\mathbf{z} \to |\mathbf{z}|^{\alpha-1} \cdot \mathbf{z}$ определено и непрерывно на дополнении 0 в F; кроме того, поскольку $||\mathbf{z}|^{\alpha-1} \cdot \mathbf{z}| = |\mathbf{z}|^\alpha$, то эта функция стремится к 0 вместе с $\mathbf{z}$, и значит, ее можно продолжить по непрерывности в точку 0, придав ей в этой точке значение 0, даже если $\alpha < 1$.

Теорема 7. *Пусть p и q — два действительных числа, $1 \leqslant p < +\infty$, $1 \leqslant q < +\infty$. Если функция $\mathbf{f}$ принадлежит $\mathcal{L}^p_F$, то функция $|\mathbf{f}|^{\frac{p}{q}-1}\cdot\mathbf{f}$ принадлежит $\mathcal{L}^q_F$, и обратно.*

По условию найдется последовательность $(\mathbf{f}_n)$ таких непрерывных функций с компактным носителем, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} N_p(\mathbf{f}_n) < +\infty$ и $\mathbf{f}(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{f}_n(x)$ почти всюду (теорема 3). Положим

$$\mathbf{g}_n = |\mathbf{f}_1+\mathbf{f}_2+\ldots+\mathbf{f}_n|^{\frac{p}{q}-1}\cdot(\mathbf{f}_1+\mathbf{f}_2+\ldots+\mathbf{f}_n);$$

функция $\mathbf{g}_n$ непрерывна и имеет компактный носитель; с другой стороны, $|\mathbf{g}_n|^q = |\mathbf{f}_1+\mathbf{f}_2+\ldots\mathbf{f}_n|^p \leqslant \Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\mathbf{f}_n|\Big)^p = h^q$, где числовая функция $h \geqslant 0$ (конечная или бесконечная) на основании теоремы о счетной выпуклости удовлетворяет неравенству

$$(N_q(h))^q = \Big(N_p\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|\mathbf{f}_n|\Big)\Big)^p \leqslant \Big(\sum_{n=1}^{\infty} N_p(\mathbf{f}_n)\Big)^p < +\infty.$$

В то же время $\mathbf{g}_n(x)$ стремится почти всюду к $\mathbf{g}(x) = |\mathbf{f}(x)|^{\frac{p}{q}-1}\cdot\mathbf{f}(x)$, и значит, теорема Лебега показывает, что $\mathbf{g} \in \mathcal{L}^q_F$. Обратное утверждение получается сразу, ибо $\mathbf{f} = |\mathbf{g}|^{\frac{q}{p}-1}\cdot\mathbf{g}$.

Можно показать, что отображение $\mathbf{f} \to |\mathbf{f}|^{\frac{p}{q}-1}\cdot\mathbf{f}$ есть гомеоморфизм пространства $\mathcal{L}^p_F$ на $\mathcal{L}^q_F$ (§ 6, упр. 10).

Следствие 1. *Для того чтобы функция $\mathbf{f}$ принадлежала $\mathcal{L}^p_F$, необходимо и достаточно, чтобы функция $|\mathbf{f}|^{p-1}\cdot\mathbf{f}$ принадлежала $\mathcal{L}^1_F$.*

Следствие 2. *Для того чтобы положительная числовая функция f принадлежала $\mathcal{L}^p$, необходимо и достаточно, чтобы функция f^p принадлежала $\mathcal{L}^1$.*

Отметим, что если числовая функция f произвольного знака такова, что $|f|^p$ принадлежит $\mathcal{L}^1$, то f не обязана принадлежать $\mathcal{L}$ (ср. § 4, упр. 8).

9. Случай абстрактных мер

Пусть μ — абстрактная мера (§ 1, n° 5), определенная на пространстве Рисса конечных числовых функций, определенных на множестве A. Для этой меры полунормы N_p и пространства $\mathcal{F}^p_F$ определяются, как в n°n° 2 и 3, простой заменой μ^* на μ^{**}; тогда будут справедливы без всяких изменений все предложения n°n° 1—3, кроме предложения 4 (для получения соответствующего ему предложения надо рассмотреть такой базис фильтра $\mathfrak{B}$, чтобы для любого множества $M \in \mathfrak{B}$ носители функций $\mathbf{f} \in M$ содержались в подмножестве $K \subset A$, для которого существует отображение множества A в $[0, 1]$, равное 1 на K и имеющее конечный верхний интеграл).

Чтобы определить функции, интегрируемые в p-й степени, нужно предположить, что функции из $\mathcal{R}$ принадлежат $\mathcal{F}^p$ (это, в частности, верно, если для всякой функции $f \in \mathcal{R}_+$, $f^p \in \mathcal{R}_+$). После этого надо рассмотреть в $\mathcal{F}^p_F$ замыкание подпространства $\mathcal{R}_+$, образованного линейными комбинациями $\sum\limits_k \mathbf{a}_k f_k$, где f_k принадлежат $\mathcal{R}$; это замыкание и будет обозначаться $\mathcal{L}^p_F$. В этом случае все рассуждения n°n° 4—7, кроме доказательства теоремы 11, будут справедливы, с тем лишь изменением, что $\mathcal{K}_F$ заменяется на $\mathcal{R}_F$, а μ^* — на μ^{**}. Действительно, если $\mathbf{g} \in \mathcal{R}_F$, то числовая функция $|\mathbf{g}|$ может и не принадлежать $\mathcal{R}$; чтобы установить предложение 11, достаточно показать, что $|\mathbf{g}| \in \mathcal{L}^p$. Итак, пусть $\mathbf{g} = \sum\limits_{k=1}^{r} \mathbf{a}_k f_k$, и пусть V — векторное подпространство пространства F, имеющее конечную размерность m и порожденное векторами $\mathbf{a}_k$. Пусть V' — сопряженное к V пространство, тоже имеющее размерность m, и пусть $(\mathbf{a}'_n)$ — последовательность, всюду плотная в единичном шаре $|z'| \leqslant 1$ из V'; для любого $x \in A$ имеем

$$|\mathbf{g}(x)| = \sup_n \left| \sum_{k=1}^{r} \langle \mathbf{a}_k, \mathbf{a}'_n \rangle f_k(x) \right| / |\mathbf{a}'_n|,$$

а поскольку $|\mathbf{g}| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{r} |\mathbf{a}_k| \cdot |f_k|$, то следствие 2 из теоремы 5 сразу же показывает, что $|\mathbf{g}|$ интегрируема в p-й степени.

Что же касается теоремы 7, то она справедлива лишь при наличии дополнительных условий, наложенных на $\mathcal{R}$ (упр. 3); достаточно предположить, что для всякой функции $f \in \mathcal{R}_F$ функция $|\mathbf{f}|^{\alpha-1} \cdot \mathbf{f}$ снова принадлежит $\mathcal{R}_F$ при $\alpha > 0$.

Если абстрактная мера μ удовлетворяет также аксиоме (МА) (см. § 1, n° 5), то существуют два определения функций, интегрируемых в p-й степени, в зависимости от того, берется ли μ^* или μ^{**} в качестве верхнего интеграла; получаемые таким путем множества функций различны, если различны $\mathcal{I}_+$ и $\mathcal{I}'_+$. Однако надо отметить, что банаховы пространства L^1, соответствующие этим двум определениям, *изоморфны*: действительно, каждое из них изоморфно пополнению нормированного пространства, ассоциированного с пространством $\mathcal{R}$, наделенным полунормой $\mu(|f|)$. Следовательно, для всякой интегрируемой (относительно μ^*) функции f существует такая интегрируемая (относительно μ^{**}) функция g, что $f-g$ пренебрежима (относительно μ^*).

Упражнения. 1) Пусть μ — мера Лебега на $E=[0, 1[$. Пусть для любого целого $n=2^h+k$ $(0 \leqslant k < 2^h)$ через f_n обозначена функция, равная 1 на интервале $\left[\frac{k}{2^h}, \frac{k+1}{2^h}\right[$ и 0 вне его. Показать, что последовательность (f_n) сходится к 0 в среднем порядка p при любом $p \geqslant 1$, но что последовательность $(f_n(x))$ не сходится ни в одной точке интервала E.

2) Показать, что всякая числовая функция f, принадлежащая $\mathcal{L}^p$, равна почти всюду разности g_1-g_2 двух положительных функций, полунепрерывных снизу и принадлежащих $\mathcal{L}^p$ (заметить, что $f(x)$ равна почти всюду сумме абсолютно сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, где f_n непрерывны и имеют компактный носитель).

3) Пусть A — интервал $[0, +\infty[$ из $\mathbf{R}$ и $\mathcal{R}$ — пространство Рисса, образованное линейными на A функциями $x \to ax$ с действительным a, пробегающим $\mathbf{R}$; функцию $x \to ax$ обозначим через f_a. Показать, что отображение $f_a \to a$ является абстрактной мерой μ на $\mathcal{R}$ и что для этой меры $\mathcal{L}^p(\mu)=\mathcal{R}$ для любого числа $p \geqslant 1$.

§ 4. Интегрируемые функции и множества

1. *Продолжение интеграла*

Из определения пространства $\mathcal{L}_F^p$ вытекает, что подпространство $\mathcal{K}_F$ непрерывных функций с компактным носителем *всюду плотно* в $\mathcal{L}_F^p$. Следовательно, всякая непрерывная (в топологии сходимости в среднем порядка p) линейная функция, определенная на $\mathcal{K}_F$ и принимающая свои значения в *отделимом и полном* топологическом векторном пространстве G, может быть единственным образом *продолжена по непрерывности* до непрерывной линейной функции, определенной на $\mathcal{L}_F^p$ и принимающей значения в G (Общая топ., гл. II, § 3, теорема 1 и гл. III, § 2, предл. 3).

Но для всякой непрерывной функции $\mathbf{f}$ с компактным носителем, принимающей значения в банаховом пространстве F, был определен (гл. III, § 4) *интеграл* $\mu(\mathbf{f})=\int \mathbf{f}\, d\mu$ относительно μ, являющийся элементом пространства F, и было доказано (гл. III, § 4, n° 2, предл. 3) неравенство

$$\left|\int \mathbf{f}\,d\mu\right| \leqslant \int |\mathbf{f}|\,d\mu = N_1(\mathbf{f}). \tag{1}$$

Это неравенство показывает, что отображение $\mathbf{f} \to \int \mathbf{f}\,d\mu$ есть линейное отображение пространства $\mathscr{K}_F$ в F, непрерывное в топологии сходимости в среднем на $\mathscr{K}_F$. Стало быть, можно продолжить его по непрерывности на все пространство $\mathscr{L}_F^1$ и принять следующее определение:

Определение 1. *Функции, принадлежащие* $\mathscr{L}_F^1(E, \mu)$, *называются интегрируемыми* (или *суммируемыми*) *относительно меры* μ (или еще μ-*интегрируемыми*). *Интегралом* (*относительно* μ) *от интегрируемой функции* $\mathbf{f}$ *служит, по определению, значение для* $\mathbf{f}$ *продолжения по непрерывности на* $\mathscr{L}_F^1$ *линейного отображения* $\mathbf{g} \to \int \mathbf{g}\,d\mu$ *пространства* $\mathscr{K}_F$ *в* F; *его обозначают также* $\mu(\mathbf{f})$, $\int \mathbf{f}\,d\mu$ *или* $\int \mathbf{f}(x)\,d\mu(x)$.

Пример. Пусть конечная числовая функция $\alpha \geqslant 0$ на E такова, что для любого компактного множества $K \subset E$ сумма $\sum\limits_{x \in K} \alpha(x)$ конечна. Пусть, далее, μ — мера, определенная посредством масс $\alpha(x)$ (гл. III, § 2, n° 2). Покажем, что функции из $\mathscr{F}_F^1$ *интегрируемы*, то есть что $\mathscr{L}_F^1 = \mathscr{F}_F^1$. Действительно, в этом случае для такой функции $\mathbf{f}$ имеем $\mu^*(|\mathbf{f}|) = \sum\limits_{x \in E} \alpha(x)\,|\mathbf{f}(x)| < +\infty$ (§ 1, n° 3, пример); для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое конечное множество $M \subset E$, что $\sum\limits_{x \in \complement M} \alpha(x)\,|\mathbf{f}(x)| \leqslant \varepsilon$. Пусть a_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ — точки из M, и пусть $b = \sup\limits_k |\mathbf{f}(a_k)|$; пусть, далее, для каждого k через V_k обозначена такая относительно компактная окрестность точки a_k, что $\left|\alpha(a_k) - \sum\limits_{x \in V_k} \alpha(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{nb}$; такая окрестность существует, ибо если V — некоторая компактная окрестность точки a_k, то сумма $\sum\limits_{x \in V} \alpha(x)$ конечна, и значит, имеется конечное подмножество $P \subset V$, не содержащее a_k и такое, что $\sum\limits_{x \in V} \alpha(x) \leqslant \alpha(a_k) + \sum\limits_{x \in P} \alpha(x) + \frac{\varepsilon}{nb}$; в качестве V_k

достаточно взять дополнение P относительно V. При этом можно предположить, что V_k не имеют попарно общих точек. Обозначим теперь через h_k непрерывное отображение пространства E в $[0, 1]$, равное нулю на $\complement V_k$ и такое, что $h_k(a_k)=1$, и рассмотрим непрерывную функцию $\mathbf{g}=\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{f}(a_k)\,h_k$. Если W_k означает дополнение множества $\{a_k\}$ в V_k, то

$$\mu^*(|\mathbf{f}-\mathbf{g}|)\leqslant \sum_{x\in\complement M}\alpha(x)\,|\mathbf{f}(x)|+\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{x\in W_k}\alpha(x)\,|\mathbf{f}(a_k)|\Big)\leqslant 2\varepsilon,$$

что и доказывает наше утверждение. Кроме того, имеем

$$\Big|\mu(\mathbf{g})-\sum_{x\in E}\alpha(x)\,\mathbf{f}(x)\Big|=\Big|\sum_{x\in E}\alpha(x)\,\mathbf{f}(x)-\mathbf{g}(x)\Big|\leqslant\mu^*(|\mathbf{f}-\mathbf{g}|)\leqslant 2\varepsilon,$$

откуда для любой интегрируемой функции вытекает соотношение

$$\mu(\mathbf{f})=\sum_{x\in E}\alpha(x)\,\mathbf{f}(x).$$

В частности, если E — *дискретное* пространство, то всякая числовая функция на E непрерывна; следовательно (§ 1, n° 1, пример), интегрируемые функции $\mathbf{f}$ являются теми функциями, для которых семейство $x\to\alpha(x)\,\mathbf{f}(x)$ *абсолютно суммируемо* (Общая топ., гл. IX, § 3, n° 6) и $\mu(\mathbf{f})=\sum\limits_{x\in E}\alpha(x)\,\mathbf{f}(x)$.

Так как функция $\mu(\mathbf{f})$, по определению, непрерывна на $\mathscr{L}^1_F$ и принимает свои значения в отделимом пространстве, то $\mu(\mathbf{f})=0$ для всякой функции из $\mathscr{L}^1_F$, являющейся элементом прикосновения 0, то есть пренебрежимой; если две интегрируемые функции $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ *эквивалентны*, то $\mu(\mathbf{f})=\mu(\mathbf{g})$. Иными словами, значение функции $\mu(\mathbf{f})$ зависит лишь от класса $\tilde{\mathbf{f}}$ интегрируемой функции $\mathbf{f}$; это значение обозначается также $\mu(\tilde{\mathbf{f}})$, а функция $\tilde{\mathbf{f}}\to\mu(\tilde{\mathbf{f}})$ является непрерывным линейным отображением пространства L^1_F в F. Если функция $\mathbf{f}$ со значениями в F, определенная почти всюду на E, эквивалентна интегрируемой функции, то $\mathbf{f}$ тоже называют *интегрируемой* и полагают $\int\mathbf{f}\,d\mu=\mu(\tilde{\mathbf{f}})$; точно так же определяются интегрируемая функция со значениями в $\overline{\mathbf{R}}$, определенная и конечная почти всюду, и ее интеграл.

2. *Свойства интеграла*

Предложение 1. *Для всякой интегрируемой* положительной *числовой функции f справедлива формула*

$$\int f\,d\mu = \int^* f\,d\mu = N_1(f) \geqslant 0. \tag{2}$$

В самом деле, $\int f\,d\mu$ и $N_1(f)$ непрерывны на $\mathcal{L}^1$ и равны между собой для любой непрерывной функции $f \geqslant 0$ с компактным носителем; с другой стороны, всякая функция $f \geqslant 0$ из $\mathcal{L}^1$ есть предел (в смысле сходимости в среднем) последовательности непрерывных положительных функций с компактным носителем (§ 3, предл. 11), откуда и следует предложение.

Следствие 1. *Для любой интегрируемой функции $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^1_F$ функция $|\mathbf{f}|$ интегрируема и*

$$\int |\mathbf{f}|\,d\mu = \int^* |\mathbf{f}|\,d\mu = N_1(\mathbf{f}). \tag{3}$$

Предложение 1 и его следствие 1 будут часто использоваться нами для замены $\int^* f\,d\mu$ или $N_1(f)$ на $\int f\,d\mu$, в случае интегрируемой положительной функции. Например, для того чтобы две интегрируемые функции $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ были *эквивалентны*, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int |\mathbf{f} - \mathbf{g}|\,d\mu = 0.$$

Напомним, что для того, чтобы функция $\mathbf{f}$ принадлежала $\mathcal{L}^p_F$, необходимо и достаточно, чтобы функция $|\mathbf{f}|^{p-1}\cdot\mathbf{f}$ принадлежала $\mathcal{L}^1_F$ (§ 3, следствие 1 из теоремы 7), то есть была интегрируема; это объясняет терминологию «функция, интегрируемая в p-й степени». Кроме того:

Следствие 2. *Для любой функции $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^p_F$ числовая функция $|\mathbf{f}|^p$ интегрируема и*

$$N_p(\mathbf{f}) = \left(\int |\mathbf{f}|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4}$$

Это сразу же следует из того, что $|\mathbf{f}|$ принадлежит $\mathcal{L}^p$ (§ 3, предл. 11), и из формулы (2).

Предложение 2. *Для любой интегрируемой функции* $\mathbf{f}$ *справедливо неравенство*

$$\left|\int \mathbf{f}\,d\mu\right| \leqslant \int |\mathbf{f}|\,d\mu. \tag{5}$$

Это тотчас вытекает из неравенства (1), если перейти в нем к пределу, учитывая формулу (5) и непрерывность функции $N_1(\mathbf{f})$ на $\mathscr{L}^1_F$.

Теорема 1. *Пусть F и G — два банаховых пространства, а* $\mathbf{u}$ — *непрерывное линейное отображение пространства F в G. Тогда для всякой интегрируемой функции* $\mathbf{f}$ *со значениями в F функция* $\mathbf{u}\circ\mathbf{f}$ *интегрируема и*

$$\int \mathbf{u}(f(x))\,d\mu(x) = \mathbf{u}\left(\int \mathbf{f}(x)\,d\mu(x)\right). \tag{6}$$

Уже известно (§ 3, теорема 4), что $\mathbf{u}\circ\mathbf{f}$ интегрируема; соотношение (6), будучи справедливым для $\mathbf{f}\in K_F$, распространяется, по принципу продолжения тождеств, на любую интегрируемую функцию $\mathbf{f}$: действительно, отображение $\mathbf{f}\to\mathbf{u}\circ\mathbf{f}$ непрерывно в топологии сходимости в среднем, что следует из неравенства $N_1(\mathbf{u}\circ\mathbf{f}) \leqslant \|\mathbf{u}\|\cdot N_1(\mathbf{f})$.

Следствие 1. *Пусть* $\mathbf{a}'$ — *произвольная непрерывная линейная форма на F. Если* $\mathbf{f}$ *есть интегрируемая функция со значениями в F, то числовая функция* $\langle\mathbf{f}, \mathbf{a}'\rangle$ *интегрируема и*

$$\int \langle \mathbf{f}(x), \mathbf{a}'\rangle\,d\mu(x) = \left\langle \int \mathbf{f}(x)\,d\mu(x), \mathbf{a}'\right\rangle. \tag{7}$$

В главе V мы покажем, что могут существовать такие функции $\mathbf{f}$ со значениями в бесконечномерном банаховом пространстве, что функция $\langle\mathbf{f}, \mathbf{a}'\rangle$ интегрируема для любой непрерывной линейной формы $\mathbf{a}'$ на F без того, чтобы $\mathbf{f}$ была интегрируемой.

Следствие 2. *Если* $\mathbf{a}_k$ $(1\leqslant k\leqslant n)$ — *векторы из F, а* f_k $(1\leqslant k\leqslant n)$ — *интегрируемые числовые функции, то функция* $\mathbf{f}=\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbf{a}_k f_k$ *интегрируема и*

$$\int \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{a}_k f_k\right) d\mu = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{a}_k \int f_k\,d\mu. \tag{8}$$

3. Предельный переход в интегралах

Предложение 3. *Пусть $\mathfrak{B}$ — базис фильтра в $\mathcal{L}^1_F$. Предположим, что существует такое компактное множество $K \subset E$, что для любого множества $M \in \mathfrak{B}$ носители всех функций $\mathbf{f} \in M$ содержатся в K. Если при этих условиях $\mathfrak{B}$ равномерно сходится на F к $\mathbf{f}_0$, то функция $\mathbf{f}_0$ интегрируема и*

$$\int \mathbf{f}_0 \, d\mu = \lim_{\mathfrak{B}} \int \mathbf{f} \, d\mu. \tag{9}$$

В самом деле, $\mathfrak{B}$ сходится к $\mathbf{f}_0$ в среднем (§ 3, предл. 4).

Предложение 4. *Пусть (f_n) — возрастающая* (соотв. *убывающая*) *последовательность интегрируемых числовых функций. Для того чтобы верхняя* (соотв. *нижняя*) *огибающая этой последовательности была интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы* $\sup\limits_n \int f_n \, d\mu < +\infty$ (соотв. $\inf\limits_n \int f_n \, d\mu > -\infty$), *и тогда*

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu. \tag{10}$$

Ограничимся рассмотрением возрастающей последовательности. Последовательность функций $g_n = f_n + f_1^-$ является возрастающей и состоит из интегрируемых положительных функций; а так как ее верхняя огибающая равна $g = f + f_1^-$, то предложение вытекает из теоремы 5 § 3.

Теорема 2. *Пусть A — множество индексов, фильтрующееся по фильтру $\mathfrak{F}$ со счетным базисом. Пусть $(\mathbf{f}_\alpha)_{\alpha \in A}$ — семейство интегрируемых функций, сходящихся просто по фильтру почти всюду к функции $\mathbf{f}$; если существует такая числовая функция $g \geqslant 0$, что $\int^* g \, d\mu < +\infty$ и $|\mathbf{f}_\alpha(x)| \leqslant g(x)$ почти всюду на E при любом $\alpha \in A$, то функция $\mathbf{f}$ интегрируема и*

$$\int \mathbf{f} \, d\mu = \lim_{\mathfrak{F}} \int \mathbf{f}_\alpha \, d\mu. \tag{11}$$

Теорема следует из теоремы Лебега (§ 3, следствие из теоремы 6), поскольку в сформулированных выше условиях $\mathbf{f}_\alpha$ сходится к $\mathbf{f}$ в среднем по фильтру $\mathfrak{F}$.

Следствие 1. *Пусть* Ω — *топологическое пространство, а* $\mathbf{f}$ — *отображение произведения* $E \times \Omega$ *в* F, *обладающее следующими свойствами:*

a) *для любого* $t \in \Omega$ *функция* $x \to \mathbf{f}(x, t)$ *интегрируема;*

b) *для любого* $x \in E$ *функция* $t \to \mathbf{f}(x, t)$ *непрерывна в некоторой точке* $t_0 \in \Omega$, *обладающей* счетной *фундаментальной системой окрестностей;*

c) *существуют такая окрестность* U *точки* t_0 *и такая определенная на* E *числовая функция* $g \geqslant 0$, *что* $\int^* g\, d\mu < +\infty$ *и* $|\mathbf{f}(x, t)| \leqslant g(x)$ *для* $x \in E$ *и* $t \in U$.

При этих условиях отображение $t \longrightarrow \int \mathbf{f}(x, t)\, d\mu(t)$ *пространства* Ω *в* F *непрерывно в точке* t_0.

Следствие 2. *Пусть* $(\mathbf{f}_n)$ — *такая последовательность интегрируемых функций, что ряд с общим членом* $\mathbf{f}_n(x)$ *сходится почти всюду; если существует функция* $g \geqslant 0$, *для которой* $\int^* g\, d\mu < +\infty$ *и при любом целом* n *выполняется неравенство* $\left|\sum_{k=1}^{n} \mathbf{f}_k(x)\right| \leqslant g(x)$ *почти всюду, то сумма* $\mathbf{f}(x)$ (*определенная почти всюду*) *ряда с общим членом* $\mathbf{f}_n(x)$ *интегрируема и*

$$\int \mathbf{f}\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int \mathbf{f}_n\, d\mu \tag{12}$$

(«почленное интегрирование ряда»).

4. *Характеризация интегрируемых числовых функций*

Предложение 5. *Для того чтобы* (*конечная или бесконечная*) *числовая функция* $f \geqslant 0$, *полунепрерывная снизу на* E, *была интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы* $\int^* f\, d\mu < +\infty$.

Все сводится к доказательству достаточности условия. Определение $\mu^*(f)$ (§ 1, n° 1, опр. 1) показывает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая непрерывная функция $g \geqslant 0$ с компактным носителем, что $g \leqslant f$ и $\mu^*(f) \leqslant \mu(g) + \varepsilon$. Но функция $f - g$ полунепрерывна снизу и положительна, а значит (§ 1, теорема 2), $\mu^*(f) = \mu(g) + \mu^*(f - g)$, или, иначе,

$N_1(f-g)=\mu^*(f-g)=\mu^*(f)-\mu(g)\leqslant\varepsilon$, чем и доказана интегрируемость функции f (§ 3, предл. 7).

Следствие. *Для того чтобы конечная числовая функция $f\geqslant 0$, полунепрерывная сверху на E, была интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы $\int^* f\,d\mu<+\infty$.*

В самом деле, если $\mu^*(f)<+\infty$, то найдется такая полунепрерывная снизу функция h, что $f\leqslant h$ и $\mu^*(h)<+\infty$; функция $h-f$ определена почти всюду и полунепрерывна снизу, и $\mu^*(h-f)\leqslant\mu^*(h)<+\infty$; следовательно, $h-f$ интегрируема, а так как $f(x)=h(x)-(h(x)-f(x))$ почти всюду, то f интегрируема.

Замечание. Предложение 5 в соединении с теоремой 1 из § 1 дает нам новый случай, когда можно переходить к пределу под интегралом: если H есть фильтрующееся по отношению $\leqslant$ множество полунепрерывных снизу интегрируемых положительных функций и если $\sup\limits_{f\in H}\int f\,d\mu<+\infty$, то верхняя огибающая g множества H интегрируема и $\int g\,d\mu=\sup\limits_{f\in H}\int f\,d\mu=\lim\limits_{f\in H}\int f\,d\mu$. Точно так же, если G есть фильтрующееся по отношению $\geqslant$ множество полунепрерывных сверху интегрируемых конечных положительных функций, то нижняя огибающая h множества G интегрируема и

$$\int h\,d\mu=\inf_{f\in G}\int f\,d\mu=\lim_{f\in G}\int f\,d\mu.$$

Теорема 3. *Для того чтобы числовая функция $f\geqslant 0$ была интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовала такая полунепрерывная сверху функция $g\geqslant 0$ с конечными значениями, имеющая компактный носитель, и такая полунепрерывная снизу интегрируемая функция h, что $g\leqslant f\leqslant h$ и $\int(h-g)\,d\mu\leqslant\varepsilon$.*

Достаточность условия вытекает из общего критерия интегрируемости (§ 3, предл. 8), предложения 5 и его следствия. Докажем его *необходимость.* Если $f\geqslant 0$ интегрируема, то для любого $\varepsilon>0$ найдется такая непрерывная функция $u\geqslant 0$ с компактным носителем, что $N_1(f-u)\leqslant\frac{\varepsilon}{4}$. Отсюда, в силу определения N_1, вытекает существование такой полунепрерывной снизу функции $v \geqslant 0$, что $\mu^*(v) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ и $|f-u| \leqslant v$. Следовательно, $-v(x) \leqslant$ $\leqslant f(x)-u(x) \leqslant v(x)$ для всех $x \in E$, а поскольку $u(x)$ всюду конечна, то отсюда получаем, что $(u(x)-v(x))^+ \leqslant f(x) \leqslant$ $\leqslant u(x)+v(x)$ для всех $x \in E$. Функции $g=(u-v)^+$ и $h=u+v$ и являются искомыми.

Следствие. *Для всякой интегрируемой числовой функции $f \geqslant 0$ существует такая возрастающая последовательность (g_n) конечных полунепрерывных сверху функций с компактным носителем и такая убывающая последовательность (h_n) полунепрерывных снизу интегрируемых функций, что:*

1° $g_n(x) \leqslant f(x) \leqslant h_n(x)$ *для всех $x \in E$ и всех целых n;*

2° $f(x)$ *равна почти всюду нижней огибающей h последовательности (h_n) и верхней огибающей g последовательности (g_n);*

3° $\int f\,d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int g_n\,d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int h_n\,d\mu$.

В самом деле, согласно теореме 3, для любого n существуют такая полунепрерывная снизу интегрируемая функция v_n и такая полунепрерывная сверху конечная функция u_n с компактным носителем, что $u_n \leqslant f \leqslant v_n$ и $\int (v_n-u_n)\,d\mu \leqslant \frac{1}{n}$; если положить $g_n=\sup(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ и $h_n=\inf(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, то последовательности (g_n) и (h_n) будут искомыми. Действительно, поскольку $g \leqslant f$, то, в силу предложения 4, g интегрируема, а так как $\int (f-g_n)\,d\mu \leqslant \int (v_n-u_n)\,d\mu \leqslant \frac{1}{n}$, то

$$\int (f-g)\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int (f-g_n)\,d\mu = 0$$

(предл. 4), чем доказана эквивалентность функций f и g. Точно так же рассуждаем для последовательности (h_n).

Пример. Для любой положительной меры μ на $\mathbf{R}$ всякая *ступенчатая* функция с компактным носителем μ-интегрируема; действительно, характеристическая функция открытого (соотв. замкнутого) интервала полунепрерывна снизу (соотв. сверху), а всякая ступенчатая функция является линейной комбинацией таких характеристических функций. Отсюда выводим, что если $\mathbf{f}$ — *линейчатая* на $\mathbf{R}$ функция с компактным носителем (Функции действ. перем., гл. II, § 1, n° 3), то $\mathbf{f}$ интегрируема, ибо служит равномерным пределом последовательности ступенчатых функций $\mathbf{g}_n$ с носителем, содержащимся в некотором фиксированном компактном множестве (предл. 3); при этом $\int \mathbf{f}\, d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int \mathbf{g}_n\, d\mu$.

В частности, если в качестве μ взять меру Лебега, то легко видеть, что для всякой линейчатой функции $\mathbf{f}$ с компактным носителем интеграл $\int \mathbf{f}\, d\mu$ равен интегралу $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(x)\, dx$, определенному в «Функциях действ. перем.», гл. II, § 2.

Замечания. 1) Пусть $\mathbf{f}$ — линейчатая функция на $\mathbf{R}$, интегрируемая относительно меры Лебега; тогда $|\mathbf{f}|$ тоже интегрируема (следствие 1 из предл. 1), и если положить $I_n = [-n, +n]$, то $|\mathbf{f}|$ будет служить верхней огибающей возрастающей последовательности линейчатых функций $|\mathbf{f}|\varphi_{I_n}$, и, значит, на основании теоремы 2 $\int \mathbf{f}\, d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{-n}^{n} \mathbf{f}(x)\, dx$. Иными словами, интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(x)\, dx$ *абсолютно сходится* (Функции действ. перем., гл. II, § 2, n° 3); обратное получается сразу, равно как и вытекающее из теоремы 2 равенство $\int \mathbf{f}\, d\mu = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(x)\, dx$. Отметим, что если интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(x)\, dx$ сходится, но не абсолютно, то $\mathbf{f}$ *не будет интегрируемой* относительно меры Лебега.

2) Применив предложение 3 к мере Лебега и к линейчатым функциям, мы снова получим теорему о предельном переходе для интегралов от линейчатых функций на компактном интервале (Функции действ. перем., гл. II, § 3, предл. 1); для *последовательностей* (или фильтров со счетным базисом) линейчатых функций это предложение значительно улучшается теоремой 2, поскольку она заменяет для равномерно ограниченных на компактном интервале линейчатых функций *равномерную* сходимость на *простую* (ср. § 5, теорема 2). Однако что касается предельного перехода для *абсолютно сходящихся* интегралов линейчатых функций на некомпактном интервале, то мы замечаем, что условия теоремы 2 предполагают рассматриваемые интегралы *равномерно сходящимися* (в смысле определения, данного в «Функциях действ. перем.», гл. II, § 3, n° 2) и, следовательно, улучшают сформулированные в Книге IV (там же) условия сходимости лишь в том, что относится к сходимости функций f_α на любом компактном интервале. Наконец, условия перехода к пределу, указанные для сходящихся, но *не абсолютно сходящихся*, интегралов от линейчатых функций, остаются вне пределов применимости теории, изложенной в этой главе.

5. *Интегрируемые множества*

Определение 2. *Говорят, что подмножество A локально компактного пространства E интегрируемо относительно положительной меры μ на E* (или еще *μ-интегрируемо*), *если интегрируема характеристическая функция φ_A множества A. Конечное число $\mu(A) = \int \varphi_A d\mu$ называется мерой множества A.*

Для всякого интегрируемого множества A выполняется равенство $\mu(A) = \mu^*(A)$ (предл. 1); для того чтобы множество было *пренебрежимо*, необходимо и достаточно, чтобы оно имело меру нуль.

Предложение 6. *Объединение конечной совокупности $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ интегрируемых множеств интегрируемо и*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i). \tag{13}$$

Если при этом A_i не имеют попарно общих точек, то

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i). \tag{14}$$

В самом деле, если $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, то $\varphi_A = \sup \varphi_{A_i}$, и значит (§ 3, следствие из предл. 12), если A_i интегрируемы, то интегрируемо и A; соотношение (13) представляет собой частный случай аналогичного соотношения для внешних мер (§ 1, предл. 18), если принять во внимание соотношение $\mu(A) = \mu^*(A)$; наконец, если A_i не имеют попарно общих точек, то $\varphi_A = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i}$, откуда и следует (14).

Предложение 7. 1° *Если A* и *B — два интегрируемых множества и $B \subset A$, то множество $C = A \cap \complement B$ интегрируемо и*

$$\mu(C) = \mu(A) - \mu(B). \tag{15}$$

2° *Пересечение счетного семейства интегрируемых множеств интегрируемо.*

Первая часть следует из того, что $\varphi_C = \varphi_A - \varphi_B$. Далее, если (A_n) есть последовательность интегрируемых множеств и A — их пересечение, то $\varphi_A = \inf_n \varphi_{A_n}$, и значит, A интегрируемо (предл. 4).

Следствие. *Если (A_n) — убывающая последовательность интегрируемых множеств, то $\mu\left(\bigcap_n A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$.*

Действительно, если $A=\bigcap\limits_n A_n$, то φ_A есть нижняя огибающая убывающей последовательности (φ_{A_n}) (предл. 4).

Предложение 8. *Пусть (A_n) — возрастающая последовательность интегрируемых множеств; для того чтобы объединение $A=\bigcup\limits_n A_n$ было интегрируемо, необходимо и достаточно, чтобы $\sup\limits_n \mu(A_n)<+\infty$; тогда*

$$\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n). \tag{16}$$

В самом деле, φ_{A_n} образуют возрастающую последовательность интегрируемых функций и $\varphi_A=\sup\varphi_{A_n}$; следовательно, предложение вытекает из предложения 4.

Следствие. *Пусть (A_n) — последовательность интегрируемых множеств и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)<+\infty$; тогда объединение $A=\bigcup\limits_n A_n$ интегрируемо и*

$$\mu(\bigcup_n A_n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n). \tag{17}$$

Действительно, $\varphi_A=\sup\limits_n\varphi_{A_n}$ и

$$\mu^*(A)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)<+\infty$$

(§ 1, предл. 18); значит, A интегрируемо (§ 3, следствие 2 из теоремы 5), а поскольку $\mu(A)=\mu^*(A)$, то имеем (17).

Предложение 9. *Пусть (A_n) — последовательность интегрируемых множеств, не имеющих попарно общих точек, и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)<+\infty$; тогда*

$$\mu(\bigcup_n A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n). \tag{18}$$

Действительно, если $A=\bigcup\limits_n A_n$, то $\varphi_A=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_{A_n}$, и предложение вытекает из (17) и из следствия 2 теоремы 2.

Формулу (18) можно также выразить, сказав, что мера μ *вполне аддитивна* на множестве интегрируемых подмножеств из E.

6. Критерии интегрируемости множества

Предложение 10. *Для того чтобы открытое* (соотв. *замкнутое*) *в E множество A было интегрируемо, необходимо и достаточно, чтобы* $\mu^*(A) < +\infty$.

Поскольку в этом случае функция φ_A полунепрерывна снизу (соотв. сверху), то предложение вытекает из предложения 5 и его следствия.

Следствие. *Всякое компактное множество интегрируемо; всякое открытое относительно компактное множество интегрируемо.*

Пример. Для меры Лебега μ на $\mathbf{R}$ из предложения 10 вытекает, что всякий открытый ограниченный интервал $]a, b[$ интегрируем и имеет меру $b - a$ (§ 1, n° 2, предл. 9). А поскольку всякое множество, сводящееся к точке, пренебрежимо относительно меры Лебега, то из этого следует, что все интервалы с концами a и b имеют также меру $b - a$.

Предложение 11. *Пусть $\mathfrak{G}$ — фильтрующееся по отношению $\subset$ множество интегрируемых открытых множеств из E; для того чтобы множество $A = \bigcup_{G \in \mathfrak{G}} G$ было интегрируемо, необходимо и достаточно, чтобы* $\sup_{G \in \mathfrak{G}} \mu(G) < +\infty$, *и тогда*

$$\mu(A) = \sup_{G \in \mathfrak{G}} \mu(G) = \lim_{\mathfrak{G}} \mu(G).$$

В самом деле, известно (§ 1, предл. 7), что $\mu^*(A) = \sup_{G \in \mathfrak{G}} \mu(G)$; таким образом, предложение вытекает из предложения 10.

Следствие. *Пусть $\mathfrak{F}$ — фильтрующееся по отношению $\supset$ множество интегрируемых замкнутых множеств из E; тогда замкнутое множество $B = \bigcap_{H \in \mathfrak{F}} H$ интегрируемо и*

$$\mu(B) = \inf_{H \in \mathfrak{F}} \mu(H) = \lim_{\mathfrak{F}} \mu(H).$$

В самом деле, пусть H_0 — множество из $\mathfrak{F}$; поскольку H_0 интегрируемо, то оно содержится в некотором интегрируемом открытом множестве U (§ 1, предл. 19); открытые множества $U \cap \complement H$, образующие фильтрующееся по отношению $\subset$ множество, содержатся в U, и их объединение равно $U \cap \complement B$; стало быть, все свелось к предложению 11.

Теорема 4. *Для того чтобы множество A было интегрируемо, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовали такое интегрируемое открытое множество G и такое компактное множество K, что $K \subset A \subset G$ и что*

$$\mu(G \cap \complement K) = \mu(G) - \mu(K) \leqslant \varepsilon.$$

a) Условие *достаточно*, ибо оно означает, что $\varphi_K \leqslant \varphi_A \leqslant \varphi_G$ и $\int (\varphi_G - \varphi_K)\, d\mu \leqslant \varepsilon$; а поскольку φ_G и φ_K интегрируемы, то интегрируема и φ_A (§ 3, предл. 7).

b) Условие *необходимо*. Если A интегрируемо, то существует такое открытое множество $G \supset A$, что $\mu^*(G)$ отличается сколь угодно мало от $\mu^*(A) = \mu(A)$ (§ 1, предл. 19); значит, все сводится к доказательству того, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое компактное множество $K \subset A$, что $\mu(A) - \mu(K) \leqslant \varepsilon$. Так как φ_A интегрируема, то существует полунепрерывная сверху функция $f \geqslant 0$, имеющая компактный носитель S и такая, что $f \leqslant \varphi_A$ и $\int (\varphi_A - f)\, d\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ (теорема 3). Пусть $\delta > 0$ — произвольное число, и пусть K — множество точек $x \in E$, в которых $f(x) \geqslant \delta$; K замкнуто и содержится в S и, следовательно, *компактно*, а поскольку $S \subset A$, то $K \subset A$. Множество $B = A \cap \complement K$ интегрируемо, и значит, $f \leqslant \varphi_K + \delta\varphi_B$, откуда

$$\int f\, d\mu \leqslant \mu(K) + \delta\mu(B) \leqslant \mu(K) + \delta\mu(A),$$

и окончательно:

$$\mu(A) \leqslant \int f\, d\mu + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \mu(K) + \delta\mu(A) + \frac{\varepsilon}{2},$$

что и завершает доказательство, так как δ произвольно.

Следствие 1. *Для того чтобы множество A было интегрируемо, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое компактное множество $K \subset A$, что $\mu^*(A \cap \complement K) \leqslant \varepsilon$. Тогда мера $\mu(A)$ есть верхняя грань множества мер $\mu(K)$ компактных множеств $K \subset A$.*

Условие необходимо, ибо если G и K удовлетворяют условиям теоремы 4, то

$$\mu^*(A \cap \complement K) \leqslant \mu^*(G \cap \complement K) \leqslant \varepsilon.$$

Условие достаточно, ибо оно выражает, что φ_A является, в топологии сходимости в среднем, элементом прикосновения множества интегрируемых функций φ_K (K — произвольное компактное подмножество из A).

Следствие 2. *Для всякого интегрируемого множества A существует:*

1° *множество $A_1 \supset A$, являющееся пересечением счетного множества интегрируемых открытых множеств и такое, что множество $A_1 \cap \complement A$ пренебрежимо;*

2° *множество $A_2 \subset A$, являющееся объединением счетного множества компактных множеств, попарно не имеющих общих точек, и такое, что множество $A \cap \complement A_2$ пренебрежимо.*

1° Для любого целого n существует такое интегрируемое открытое множество G_n, что $\mu(G_n) - \mu(A) \leqslant \frac{1}{n}$; если за A_1 принять пересечение множеств G_n, то $\mu(A_1) = \mu(A)$ (следствие из предл. 7), и значит, множество $A_1 \cap \complement A$ пренебрежимо.

2° Определим по индукции компактные множества K_n следующим образом: $K_1 \subset A$ и $\mu(A \cap \complement K_1) \leqslant 1$;

$$K_n \subset A \cap \complement\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} K_i\right) \text{ и } \mu\left(A \cap \complement\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} K_i\right) \cap \complement K_n\right) \leqslant \frac{1}{n}$$

для $n > 1$ (теорема 1); если за A_2 принять объединение множеств K_n, то $\mu(A_2) = \mu(A)$ (предл. 8), и значит, множество $A \cap \complement A_2$ пренебрежимо.

Следствие 3. *Всякое множество конечной внешней меры содержится в объединении пренебрежимого множества и счетного семейства компактных множеств, не имеющих попарно общих точек и имеющих конечную сумму мер.*

Достаточно применить следствие 2 к интегрируемому открытому множеству, содержащему заданное множество.

Следствие 4. *Для всякого открытого в E множества U $\mu^*(U)$ есть верхняя грань мер $\mu(K)$ компактных множеств $K \subset U$.*

Это сразу вытекает из теоремы 4, если $\mu^*(U) < +\infty$. Если же $\mu^*(U) = +\infty$, то, по условию, для любого целого n существует такая функция $f \in \mathscr{K}_+$, что $f \leqslant \varphi_U$ и $\mu(f) \geqslant n$. Если K есть компактный носитель функции f, то $f \leqslant \varphi_K \leqslant \varphi_U$, откуда $\mu(K) \geqslant n$, чем и доказано следствие.

Отметим, что $\mu^*(U)$ является также верхней гранью мер $\mu(G)$ таких относительно компактных открытых множеств, что $\overline{G} \subset U$. Действительно, если K — компактное множество, содержащееся в U, то для любого $x \in K$ существует такая относительно компактная открытая окрестность V точки x, что $\overline{V} \subset U$. Покрыв K конечным числом этих окрестностей, мы получим, что их объединение G есть такое относительно компактное открытое множество, что $\overline{G} \subset U$ и $K \subset G$, откуда окончательно $\mu(K) \leqslant \mu(G) \leqslant \mu^*(U)$.

7. *Характеризация ограниченных мер*

Предложение 12. *Для того чтобы положительная мера μ на локально компактном пространстве E была ограничена* (гл. III, § 2, n° 6), *необходимо и достаточно, чтобы E было интегрируемым множеством относительно* μ (или, что сводится к тому же, чтобы *всякая постоянная функция была интегрируема*); *тогда*

$$\|\mu\| = \mu(E) = \int d\mu.$$

Действительно, мы показали (§ 1, n° 2), что $\mu^*(E) = \|\mu\|$; таким образом, предложение следует из предложения 10.

Когда речь идет о положительной ограниченной мере μ, то говорят еще, что $\mu(1) = \|\mu\|$ есть *общая масса* меры μ. Когда же речь идет о произвольной ограниченной мере μ, то *общей массой* меры μ называют число $\mu^+(1) - \mu^-(1)$.

Из теоремы 4 вытекает, что если μ есть положительная ограниченная мера, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое компактное множество K, что $\mu(\complement K) \leqslant \varepsilon$.

Предложение 13. *Пусть μ — положительная ограниченная мера на E. Пусть, далее, $\mathfrak{B}$ — базис фильтра в $\mathscr{L}_F^p$, обладающий следующими свойствами:*

1° *существует такое множество $M \in \mathfrak{B}$, что функции $\mathbf{f} \in M$ равномерно ограничены на E;*

2° *$\mathfrak{B}$ равномерно сходится на любом компактном множестве из E к функции $\mathbf{f}_0$.*

При этих условиях $\mathbf{f}_0$ *принадлежит* $\mathscr{L}_F^p$, *а* $\mathfrak{B}$ *сходится к* $\mathbf{f}_0$ *в среднем порядка* p.

Прежде всего заметим, что если $|\mathbf{f}(x)| \leqslant a$ для любого $x \in E$ и любой функции $\mathbf{f} \in M$, то для всех $x \in E$ будет также выполняться неравенство $|\mathbf{f}_0(x)| \leqslant a$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое компактное множество K, что $\mu(\complement K) \leqslant \varepsilon^p$, и такое множество $N \in \mathfrak{B}$, что для всякой функции $\mathbf{f} \in N$ неравенство $|\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}_0(x)| \leqslant \varepsilon(\mu(K))^{-\frac{1}{p}}$ справедливо при любых $x \in K$. Но мы можем написать, что

$$\mathbf{f} - \mathbf{f}_0 = (\mathbf{f} - \mathbf{f}_0)\varphi_K + (\mathbf{f} - \mathbf{f}_0)\varphi_{\complement K};$$

из вышеизложенного следует, что если $\mathbf{f} \in N$, то $N_p((\mathbf{f} - \mathbf{f}_0)\varphi_K) \leqslant \varepsilon$ и $N_p((\mathbf{f} - \mathbf{f}_0)\varphi_{\complement K}) \leqslant 2a\varepsilon$, откуда $N_p(\mathbf{f} - \mathbf{f}_0) \leqslant (2a + 1)\varepsilon$, что и доказывает предложение.

Следствие. *Для любой положительной меры* μ, *ограниченной на* E, *всякое непрерывное ограниченное отображение* $\mathbf{f}$ *пространства* E *в* F *принадлежит каждому из* $\mathscr{L}_F^p$ $(1 \leqslant p < +\infty)$.

В самом деле, для любого компактного множества K из E обозначим через M_K множество отображений пространства E в F вида $h\mathbf{f}$, где h есть непрерывное отображение E в $[0, 1]$, равное 1 на K и имеющее компактный носитель. Ясно, что множества M_K образуют в $\mathscr{L}_F^p$ такой базис фильтра $\mathfrak{B}$, что принадлежащие M_K функции равномерно ограничены и что $\mathfrak{B}$ равномерно сходится к $\mathbf{f}$ на любом компактном множестве из E, откуда и получается следствие.

В частности, функция $\mathbf{f}$ интегрируема и ее интеграл $\int \mathbf{f}\, d\mu$ является пределом по фильтру $\mathfrak{B}$ интегралов $\int h\mathbf{f}\, d\mu$.

Следствие из предложения 13 мы снова получим в § 5, n° 6, в качестве следствия из общего критерия интегрируемости. В то же время отметим, что когда f есть непрерывная на E числовая функция, стремящаяся к 0 на бесконечности, то интеграл $\int f\, d\mu$ совпадает со значением продолжения меры μ на множество этих функций, определенного в гл. III, § 2, n° 6.

8. Кланы и аддитивные функции множества

Определение 3. *Говорят, что непустое множество Φ подмножеств множества A составляет клан, если существует такая алгебра $\mathscr{A}$ (над $\mathbf{R}$), состоящая из конечных числовых функций, определенных на A, что отношения $X \in \Phi$ и $\varphi_X \in \mathscr{A}$ эквивалентны.*

Пример. Если μ есть положительная мера на локально компактном пространстве E, то линейные комбинации с действительными коэффициентами характеристических функций интегрируемых множеств образуют *алгебру* $\mathscr{A}$, так как для двух интегрируемых множеств X и Y функция $\varphi_X \varphi_Y = \varphi_{X \cap Y}$ интегрируема (предл. 7); тогда из определений 2 и 3 вытекает, что множество интегрируемых подмножеств из E составляет клан.

Предложение 14. *Для того чтобы непустое множество Φ подмножеств множества A составляло клан, необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло следующему условию:*

(CL) *Для любой пары множеств X и Y из Φ множества $X \cup Y$ и $X \cap \complement Y$ принадлежат Φ.*

Необходимость следует из соотношений

$$\varphi_{X \cup Y} = \varphi_X + \varphi_Y - \varphi_X \varphi_Y, \quad \varphi_{X \cap \complement Y} = \varphi_X - \varphi_X \varphi_Y.$$

Для доказательства *достаточности* прежде всего заметим, что указанное условие влечет тот факт, что для любых двух множеств X и Y из Φ множество $X \cap Y$ принадлежит Φ, поскольку $X \cap Y = X \cap \complement (X \cap \complement Y)$. Обозначим через $\mathscr{E}(\Phi)$ множество линейных комбинаций с действительными коэффициентами характеристических функций множеств из Φ. Так как $\varphi_X \varphi_Y = \varphi_{X \cap Y}$, то $\mathscr{E}(\Phi)$ составляет алгебру. Остается показать, что если X — такое подмножество из A, что $\varphi_X = \sum_i c_i \varphi_{X_i}$, где $X_i \in \Phi$, то $X \in \Phi$. Это будет вытекать из следующей леммы:

Лемма 1. *Пусть Φ — непустое множество подмножеств из A, удовлетворяющее аксиоме* (CL). *Если имеется какое-либо конечное семейство $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ множеств из Φ, то найдется такое конечное семейство $(Y_j)_{1 \leqslant j \leqslant m}$ множеств из Φ попарно без общих точек, что каждое из множеств X_i является объединением некоторого числа множеств Y_j.*

В самом деле, рассмотрим $2^n - 1$ множеств вида $\bigcap_{i=1}^{n} Z_i$, где $Z_i = X_i$ для некоторых индексов i и $Z_i = \complement X_i$ для остальных индексов, причем хотя бы одно из множеств Z_i равно X_i. Пусть $(Y_j)_{1 \leqslant j \leqslant m}$ — упорядоченная некоторым способом последовательность этих множеств; они не имеют попарно общих точек и принадлежат Φ; с другой стороны, всякое множество X_K является объединением множеств $Y_j = \bigcap_{i=1}^{n} Z_i$, соответствующих тем семействам (Z_i), для которых $Z_k = X_k$, что и доказывает лемму.

Теперь мы можем всякую функцию вида $\sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_{X_i}$, где $X_i \in \Phi$, записать в форме $\sum_{j=1}^{m} d_j \varphi_{Y_j}$, где Y_j принадлежат Φ и не имеют попарно общих точек; если $\varphi_X = \sum_{j=1}^{m} d_j \varphi_{Y_j}$, то для каждого индекса j непременно будет выполняться либо равенство $d_j = 0$, либо $d_j = 1$, и значит, X есть объединение некоторого числа множеств Y_j, а следовательно, принадлежит Φ.

Всякий клан Φ подмножеств из A содержит пустое подмножество $\varnothing$ множества A; действительно, существует хотя бы одно подмножество $X \in \Phi$, а значит, множество $X \cap \complement X = \varnothing$ принадлежит Φ Отметим, что множество подмножеств из A, сводящееся к единственному подмножеству $\varnothing$, есть клан.

Определение 4. *Если имеются клан Φ подмножеств некоторого множества A и банахово пространство F, то функцией, размещенной на множествах из Φ (или Φ-размещенной функцией) со значениями в F, называется всякая функция вида $\sum_i a_i \varphi_{X_i}$, где a_i принадлежат F, а X_i принадлежат Φ.*

Легко видеть, что множество $\mathscr{E}_F(\Phi)$ Φ-размещенных функций со значениями в F есть векторное пространство над $\mathbf{R}$. Мы только что показали в предложении 14, что множество $\mathscr{E}(\Phi)$ конечных Φ-размещенных числовых функций составляет *алгебру* над $\mathbf{R}$; оно образует также векторное подпространство пространства $\mathbf{R}^A$, порожденное характеристическими функциями множеств из Φ.

Всякая функция из $\mathscr{E}_F(\Phi)$ может быть записана в виде $\mathbf{f} = \sum_j \mathbf{c}_j \varphi_{Y_j}$, где, в силу леммы 1, множества $Y_j \in \Phi$ не имеют попарно общих точек; отсюда следует, что $|\mathbf{f}| = \sum_j |\mathbf{c}_j| \varphi_{Y_j}$ принадлежит $\mathscr{E}(\Phi)$. В частности, $\mathscr{E}(\Phi)$ есть *пространство Рисса*, так как верхняя огибающая двух функций из $\mathscr{E}(\Phi)$ принадлежит $\mathscr{E}(\Phi)$.

Замечание. Нетрудно заметить, что определение 4 равносильно следующему: Ф-размещенная функция со значениями в F есть функция $\mathbf{f}$, принимающая лишь конечное число значений и такая, что для любого $\mathbf{a} \neq 0$ из F множество $\overset{-1}{\mathbf{f}}(\mathbf{a})$ принадлежит Ф.

Определение 5. *Говорят, что конечная числовая функция λ, определенная на клане Ф подмножеств множества A, аддитивна, если для любых двух множеств X и Y из Ф без общих точек выполняется равенство $\lambda(X \cup Y) = \lambda(X) + \lambda(Y)$.*

Из этого определения, в частности, вытекает, что $\lambda(\varnothing) = 0$.

Предложение 15. *Пусть λ — аддитивная функция множества, определенная на клане Ф. Существует, и притом только одна, такая линейная форма* (обозначаемая снова через λ) *на векторном пространстве $\mathscr{E}(\Phi)$ конечных Ф-размещенных числовых функций, что $\lambda(\varphi_X) = \lambda(X)$ для любого множества $X \subset \Phi$; при этом, если $\lambda(X) \geqslant 0$ для любого $X \in \Phi$, то λ есть положительная линейная форма на $\mathscr{E}(\Phi)$.*

Единственность линейной формы λ очевидна, ибо характеристические функции множеств из Ф порождают векторное пространство $\mathscr{E}(\Phi)$. Для доказательства *существования* формы λ достаточно показать, что соотношение $\sum_i c_i \varphi_{X_i} = 0$, где X_i — непустые множества из Ф, влечет $\sum_i c_i \lambda(X_i) = 0$. Но, согласно лемме 1, существует такое конечное семейство Y_j непустых множеств из Ф попарно без общих точек, что для каждого индекса i выполняется равенство $\varphi_{X_i} = \sum_j a_{ij} \varphi_{Y_j}$, где либо $a_{ij} = 0$, либо $a_{ij} = 1$. Следовательно, соотношение $\sum_i c_i \varphi_{X_i} = 0$, которое записывается в виде $\sum_j \left(\sum_i c_i a_{ij}\right) \varphi_{Y_j} = 0$, влечет $\sum_i c_i a_{ij} = 0$ для любого индекса j. Тогда, в силу определения 5, выполняются равенства

$$\sum_i c_i \lambda(X_i) = \sum_j \left(\sum_i c_i a_{ij}\right) \lambda(Y_j) = 0,$$

доказывающие существование формы λ. Наконец, предположим, что $\lambda(X) \geqslant 0$ при любом $X \in \Phi$; для всякой функции $f \in \mathscr{E}(\Phi)$ можно написать $f = \sum_i c_i \varphi_{X_i}$, где $X_i \in \Phi$ не имеют попарно общих точек; следовательно, если $f \geqslant 0$, то $c_i \geqslant 0$ для любого индекса i, для которого X_i не пусто, откуда $\lambda(f) = \sum_i c_i \lambda(X_i) \geqslant 0$.

9. *Приближение непрерывных функций размещенными функциями*

Предложение 16. *Пусть E — локально компактное пространство, и пусть Φ — клан подмножеств из E, содержащий множество компактных подмножеств из E. Для любого непрерывного отображения* $\mathbf{f}$ *пространства E в банахово пространство F* (соотв. *любой конечной непрерывной функции $f \geqslant 0$ на E*) *с компактным носителем существует последовательность $(\mathbf{g}_n)$ функций из $\mathscr{E}_F(\Phi)$, носитель которых содержится в K* (соотв. *такая последовательность (g_n) функций из $\mathscr{E}(\Phi)$, что $0 \leqslant g_n \leqslant f$ при любом n*) *и которая равномерно сходится к* $\mathbf{f}$ (соотв. f).

В самом деле, поскольку функция $\mathbf{f}$ равномерно непрерывна на K, то K можно покрыть конечным числом таких компактных множеств X_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$, чтобы колебание функции $\mathbf{f}$ на каждом из X_i не превосходило $\frac{1}{n}$. А так как X_i и K принадлежат Φ, то существует разбиение K на такие множества $Y_j \in \Phi$, что каждое из множеств $X_i \cap K$ является объединением некоторого числа множеств Y_j (лемма 1). Пусть $\mathbf{a}_j$ — элемент из F, для которого на Y_j выполняется неравенство $|\mathbf{f}(x) - \mathbf{a}_j| \leqslant \frac{1}{n}$. Если положить $\mathbf{g}_n = \sum_j \mathbf{a}_j \varphi_{Y_j}$, то $|\mathbf{f} - \mathbf{g}_n| \leqslant \frac{1}{n}$, откуда следует предложение для этого случая. Точно так же рассуждаем для непрерывной числовой функции f, положив $a_j = \inf_{x \in Y_j} f(x)$ и $g_n = \sum_j a_j \varphi_{Y}$.

Следствие 1. *Пусть* μ — *положительная мера на* E; *пространство* $\mathscr{E}_F(\Phi)$ *всюду плотно в каждом из пространств* $\mathscr{L}^p_F$ $(1 \leqslant p < +\infty)$.

В самом деле, из предложения 16 и критерия сходимости в среднем для равномерных пределов функций с компактным носителем (§ 3, предл. 4) вытекает, что $\mathscr{E}_F(\Phi)$ плотно в пространстве $\mathscr{K}_F$ непрерывных функций с компактным носителем в топологии сходимости в среднем порядка p; отсюда получаем следствие.

Следствие 2. *Если* μ *и* ν — *такие две положительные меры на* E, *что* $\mu(K) = \nu(K)$ *для любого компактного подмножества* K *из* E, *то* $\mu = \nu$.

Заметим сначала, что для любого открытого множества U справедливо равенство $\mu^*(U) = \nu^*(U)$ (следствие 4 из теоремы 4); тогда теорема 4 показывает, что клан Φ μ-интегрируемых подмножеств из E совпадает с кланом ν-интегрируемых подмножеств и что для любого подмножества $X \in \Phi$ выполняется равенство $\mu(X) = \nu(X)$. Следовательно, $\mu(g) = \nu(g)$ для любой функции $g \in \mathscr{E}(\Phi)$ (предл. 15), и тогда предложение 16 показывает, что $\mu(f) = \nu(f)$ для любой непрерывной числовой функции f с компактным носителем, то есть $\mu = \nu$.

10. Продолжение меры, определенной на семействе множеств

Пусть Φ — непустое множество подмножеств локально компактного пространства E, и пусть на Φ задана конечная положительная числовая функция $X \to \alpha(X)$. Мы ставим себе задачу отыскать условия, при которых существует такая (положительная) мера μ на E, чтобы множества из Φ были *μ-интегрируемы* и чтобы $\mu(X) = \alpha(X)$ для любого $X \in \Phi$. Мы ограничимся рассмотрением случая, когда Φ удовлетворяет следующим условиям:

($\mathrm{PC_I}$) *Объединение и пересечение двух множеств из* Φ *принадлежат* Φ.

($\mathrm{PC_{II}}$) *Для любой пары, состоящей из компактного множества* K *и открытого в* E *множества* U *и такой, что* $K \subset U$, *существует такое множество* $X \in \Phi$, *что* $K \subset X \subset U$.

Отметим, что в условии ($\mathrm{PC_{II}}$) содержится предположение $\varnothing \in \Phi$, ибо можно принять $K = U = \varnothing$. Однако множество Φ может и не быть кланом: например, множество компактных подмножеств из E удовлетворяет условиям ($\mathrm{PC_I}$) и ($\mathrm{PC_{II}}$), но, вообще говоря, не является кланом, так как если X и Y компактны, то этого, вообще, нельзя сказать о множестве $X \cap \complement Y$.

Кроме того, мы предположим, что определенная на Φ функция α удовлетворяет следующим условиям (очевидно, необходимым для того, чтобы задача имела решение):

($\mathrm{PM_I}$) *Отношение* $X \subset Y$ *влечет* $\alpha(X) \leqslant \alpha(Y)$.

($\mathrm{PM_{II}}$) *Каковы бы ни были* X *и* Y *из* Φ, $\alpha(X \cup Y) \leqslant \alpha(X) + \alpha(Y)$.

($\mathrm{PM_{III}}$) *Отношение* $X \cap Y = \varnothing$ *влечет* $\alpha(X \cup Y) = \alpha(X) + \alpha(Y)$.

Приняв в условии ($\mathrm{PM_{III}}$) $Y = \varnothing$, получаем, что $\alpha(\varnothing) = 0$; тогда условие ($\mathrm{PM_I}$) показывает, что $\alpha(X) \geqslant 0$ для любого $X \in \Phi$.

Теорема 5. *Пусть Φ — множество подмножеств локально компактного пространства E, удовлетворяющее условиям* ($\mathrm{PC_I}$) *и* ($\mathrm{PC_{II}}$), *и пусть α — определенная на Φ конечная числовая функция, удовлетворяющая условиям* ($\mathrm{PM_I}$), ($\mathrm{PM_{II}}$) *и* ($\mathrm{PM_{III}}$). *Для того чтобы существовала такая положительная мера μ на E, что множества из Φ μ-интегрируемы и $\mu(X) = \alpha(X)$ при любом $X \in \Phi$, необходимо и достаточно, чтобы функция α удовлетворяла еще одному условию*:

($\mathrm{PM_{IV}}$) *Для любого $\varepsilon > 0$ и любого $X \in \Phi$ найдется такое компактное множество $K \subset X$ и такое открытое множество $U \supset X$, что для всякого множества $Y \in \Phi$, удовлетворяющего отношению $K \subset Y \subset U$, выполняется неравенство $|\alpha(Y) - \alpha(X)| \leqslant \varepsilon$.*

При этом, если условие ($\mathrm{PM_{IV}}$) *выполнено, то мера μ единственна; для любого компактного множества K имеем* $\mu(K) = \inf\limits_{X\in\Phi,\ X\supset K} \alpha(X)$, *а для любого открытого множества U имеем* $\mu^*(U) = \sup\limits_{X\in\Phi,\ X\subset U} \alpha(X)$.

Отметим, что условие ($\mathrm{PM_{IV}}$) эквивалентно одновременному выполнению следующих двух условий:

($\mathrm{PM'_{IV}}$) *Для любого $\varepsilon > 0$ и любого $X \in \Phi$ найдется такое открытое множество $U \supset X$, что для всякого $Y \in \Phi$, содержащегося в U, выполняется неравенство $\alpha(Y) \leqslant \alpha(X) + \varepsilon$.*

($\mathrm{PM''_{IV}}$) *Для любого $\varepsilon > 0$ и любого $X \in \Phi$ найдется такое компактное множество $K \subset X$, что для всякого $Y \in \Phi$, содержащего K, выполняется неравенство $\alpha(Y) \geqslant \alpha(X) - \varepsilon$.*

В самом деле, легко видеть, что условия ($\mathrm{PM'_{IV}}$) и ($\mathrm{PM''_{IV}}$) влекут ($\mathrm{PM_{IV}}$). Обратно, покажем, например, что ($\mathrm{PM_{IV}}$) влечет ($\mathrm{PM'_{IV}}$). Пусть K — компактное, а U — открытое множества, для которых $K \subset X \subset U$ и $|\alpha(Z) - \alpha(X)| \leqslant \varepsilon$ при всяком $Z \in \Phi$, удовлетворяющем условию $K \subset Z \subset U$. Тогда, если $Y \in \Phi$ и $Y \subset U$, то $X \cup Y$ принадлежит Φ и $K \subset (X \cup Y) \subset U$, откуда $\alpha(X \cup Y) \leqslant \alpha(X) + \varepsilon$ и тем более $\alpha(Y) \leqslant \alpha(X) + \varepsilon$.

Если множество Φ, удовлетворяющее условиям (PC_I) и (PC_{II}), состоит из *компактных* множеств, то условие (PM''_{IV}) выполняется само собой, и тогда (PM_{IV}) эквивалентно (PM'_{IV}).

Необходимость условия (PM_{IV}) сразу же вытекает из теоремы 4 о «приближении» интегрируемого множества компактным множеством и открытым множеством. Доказательство других утверждений теоремы мы проведем в несколько этапов.

1° *Определение топологии в* $\mathfrak{P}(E)$.

Для любой пары (K, U), состоящей из компактного множества K и открытого в E множества U, через $I(K, U)$ обозначим множество таких $X \subset E$, что $K \subset X \subset U$; для того чтобы $I(K, U)$ было не пусто, необходимо и достаточно, чтобы $K \subset U$. Если (K', U') есть другая пара, состоящая из компактного множества K' и открытого множества U', то

$$I(K, U) \cap I(K', U') = I(K \cup K', U \cap U').$$

Пусть $\mathcal{T}$ — топология в $\mathfrak{P}(E)$, порожденная множеством подмножеств $I(K, U)$, когда K пробегает множество компактных подмножеств из E, а U — открытых в E множеств; в силу вышеизложенного множества $I(K, U)$ образуют *базис* топологии $\mathcal{T}$ (Общая топ., гл. I, § 2).

Отметим, что определение топологии $\mathcal{T}$ таково, что в $\mathfrak{P}(E)$ множество компактных подмножеств из E *всюду плотно*. Условие (PC_{II}) выражает, что Φ *плотно* в $\mathfrak{P}(E)$, а условие (PM_{IV}) — что функция α *непрерывна* на Φ в топологии, индуцированной топологией $\mathcal{T}$. Наконец, теорема 4 выражает тот факт, что функция $X \to \mu(X)$ *непрерывна* на клане μ-интегрируемых множеств в топологии, индуцированной топологией $\mathcal{T}$.

2° *Единственность меры* μ.

Обозначим через $\overline{\Phi}$ множество таких подмножеств $X \subset E$, что $\alpha(Y)$ стремится к конечному пределу, когда Y стремится к X (в топологии $\mathcal{T}$), оставаясь в Φ; тогда α можно единственным образом продолжить до непрерывного отображения $\overline{\alpha}$ множества $\overline{\Phi}$ в $\mathbf{R}$ (Общая топ., гл. I, § 6, теорема 1). Если искомая мера μ существует, то, согласно сделанным выше замечаниям, клан Ψ μ-интегрируемых множеств содержится в $\overline{\Phi}$ и $\mu(X) = \overline{\alpha}(X)$ для любого $X \in \Psi$; это соотношение справедливо, в частности, для любого компактного подмножества X из E, чем и доказана единственность меры μ (следствие 2 из предл. 16).

3° *Продолжение функции* α *на компактные множества.*

Теперь мы, не делая предположения о существовании меры μ, изучим множество $\overline{\Phi}$ и продолжение $\overline{\alpha}$ функции α на $\overline{\Phi}$. Прежде всего покажем, что любое компактное множество K принадлежит $\overline{\Phi}$ и что $\overline{\alpha}(K) = \inf_{Z \in \Phi,\, Z \supset K} \alpha(Z)$. Положим $a = \inf_{Z \in \Phi,\, Z \supset K} \alpha(Z)$; для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое множество $X \in \Phi$, что $K \subset X$ и $\alpha(X) \leqslant a + \varepsilon$. Согласно ($PM'_{IV}$) существует такое открытое множество $U \supset X$, что для всякого $Y \in \Phi$, содержащегося в U, выполняются неравенства $\alpha(Y) \leqslant \alpha(X) + \varepsilon \leqslant a + 2\varepsilon$; значит, для любого $Y \in \Phi$, удовлетворяющего условию $K \subset Y \subset U$, имеем $a \leqslant \alpha(Y) \leqslant a+2\varepsilon$, откуда, в силу определений, следует, что $K \in \overline{\Phi}$ и $\overline{\alpha}(K)=a$.

Этот результат тотчас показывает, что если K_1 и K_2 — два компактных множества и $K_1 \subset K_2$, то $\overline{\alpha}(K_1) \leqslant \overline{\alpha}(K_2)$. Если же K_1 и K_2 — два любых компактных множества, то, в силу ($\mathrm{PM_{II}}$), $\overline{\alpha}(K_1 \cup K_2) \leqslant \overline{\alpha}(K_1) + \overline{\alpha}(K_2)$. Если кроме того K_1 и K_2 не пересекаются, то $\overline{\alpha}(K_1 \cup K_2) = \overline{\alpha}(K_1) + \overline{\alpha}(K_2)$. Действительно, в этом случае найдутся такие два открытых множества U_1 и U_2 без общих точек, что $K_1 \subset U_1$ и $K_2 \subset U_2$ (Общая топ., гл. II, 2-е изд., § 4, предл. 1). Значит, согласно ($\mathrm{PC_{II}}$) найдутся такие два множества $X_1 \in \Phi$ и $X_2 \in \Phi$, что $K_1 \subset X_1 \subset U_1$ и $K_2 \subset X_2 \subset U_2$. Тогда обозначим через Z произвольное множество из Φ, содержащее $K_1 \cup K_2$; на основании ($\mathrm{PC_I}$) объединение двух множеств $Z \cap X_1$ и $Z \cap X_2$ принадлежит Φ, а поскольку эти два множества не пересекаются, то, применив ($\mathrm{PM_I}$) и ($\mathrm{PM_{III}}$), получим $\alpha(Z) \geqslant \alpha(Z \cap X_1) + \alpha(Z \cap X_2) \geqslant \overline{\alpha}(K_1) + \overline{\alpha}(K_2)$, что и доказывает наше утверждение.

4° *Продолжение функции α на открытые множества.*

Теперь мы покажем, что для того, чтобы открытое множество U принадлежало $\overline{\Phi}$, необходимо и достаточно, чтобы для K, пробегающих множество компактных подмножеств из U, верхняя грань чисел $\overline{\alpha}(K)$ была конечна; тогда $\overline{\alpha}(U)$ будет равно этой верхней грани.

В самом деле, пусть открытое множество U принадлежит $\overline{\Phi}$; для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое компактное множество $K \subset U$, что для любого множества $X \in \Phi$, удовлетворяющего условиям $K \subset X \subset U$, выполняется неравенство $|\overline{\alpha}(U) - \alpha(X)| \leqslant \varepsilon$; отсюда $|\overline{\alpha}(U) - \overline{\alpha}(K)| \leqslant \varepsilon$; с другой стороны, если K' есть произвольное содержащееся в U компактное множество, то $K \subset K \cup K' \subset U$, откуда $|\overline{\alpha}(U) - \overline{\alpha}(K \cup K')| \leqslant \varepsilon$, и значит, $\overline{\alpha}(U) \geqslant \overline{\alpha}(K \cup K') - \varepsilon \geqslant \overline{\alpha}(K') - \varepsilon$; итак, $\overline{\alpha}(U)$ равна верхней грани чисел $\overline{\alpha}(K)$, когда K пробегает множество компактных подмножеств из U.

Обратно, пусть открытое множество U обладает тем свойством, что $b = \sup\limits_{K \subset U} \overline{\alpha}(K) < +\infty$ (где K пробегает множество компактных подмножеств из U); покажем, что $U \in \overline{\Phi}$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое компактное множество $K \subset U$, что $b - \varepsilon \leqslant \overline{\alpha}(K) \leqslant b$; согласно ($\mathrm{PM''_{IV}}$), для любого X, удовлетворяющего условиям $K \subset X \subset U$, существует такое компактное множество $K' \subset X$, что $\alpha(X) \leqslant \overline{\alpha}(K') + \varepsilon \leqslant b + \varepsilon$; следовательно, $b - \varepsilon \leqslant \alpha(X) \leqslant b + \varepsilon$, чем и доказано, что $U \in \overline{\Phi}$.

Из этого характеристического свойства открытых множеств $U \in \overline{\Phi}$ и $\overline{\alpha}(U)$, прежде всего, вытекает, что если U_1 и U_2 — такие два открытых множества, что $U_1 \subset U_2$ и $U_2 \in \overline{\Phi}$, то $U_1 \in \overline{\Phi}$ и $\overline{\alpha}(U_1) \leqslant \overline{\alpha}(U_2)$. С другой стороны, если U_1 и U_2 — два открытых множества, принадлежащих $\overline{\Phi}$, то таким же будет и множество $U_1 \cup U_2$, и тогда $\overline{\alpha}(U_1 \cup U_2) \leqslant \overline{\alpha}(U_1) + \overline{\alpha}(U_2)$. В самом деле, пусть K означает произвольное компактное множество, содержащееся в $U_1 \cup U_2$; для любого $x \in K$ существует компактная окрестность точки x, содержащаяся в U_1 или в U_2; следовательно, K может быть покрыто конечным числом таких окрестностей; если обозначить через K_1 (соотв. K_2) объединение тех из них, которые содержатся в U_1 (соотв. в U_2), то $K \subset K_1 \cup K_2$, откуда

$$\overline{\alpha}(K) \leqslant \overline{\alpha}(K_1 \cup K_2) \leqslant \overline{\alpha}(K_1) + \overline{\alpha}(K_2) \leqslant \overline{\alpha}(U_1) + \overline{\alpha}(U_2),$$

чем требуемое свойство и установлено.

5° *Свойства множества* $\overline{\Phi}$ *и функции* $\overline{\alpha}$.

Теперь определение множества $\overline{\Phi}$ и функции $\overline{\alpha}$ может быть следующим образом преобразовано (с учетом условия ($\mathrm{PC_{II}}$)): для того чтобы $X \in \overline{\Phi}$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовали такое компактное множество K и такое открытое множество $U \in \overline{\Phi}$, что $K \subset X \subset U$ и $\overline{\alpha}(U) - \overline{\alpha}(K) \leqslant \varepsilon$; при этом $\overline{\alpha}(X)$ есть *нижняя грань* функций $\overline{\alpha}(U)$ для открытых множеств $U \in \overline{\Phi}$, содержащих X, и *верхняя грань* функций $\overline{\alpha}(K)$ для компактных множеств $K \subset X$.

Отсюда мы прежде всего выведем, что если X_1, X_2 *и* $X_1 \cup X_2$ принадлежат $\overline{\Phi}$, то $\overline{\alpha}(X_1 \cup X_2) \leqslant \overline{\alpha}(X_1) + \overline{\alpha}(X_2)$. Действительно, если U_1 и U_2 — два открытых множества из $\overline{\Phi}$, содержащие соответственно X_1 и X_2 и такие, что $\overline{\alpha}(U_1) \leqslant \overline{\alpha}(X_1) + \varepsilon$ и $\overline{\alpha}(U_2) \leqslant \overline{\alpha}(X_2) + \varepsilon$, то множество $U_1 \cup U_2$ принадлежит $\overline{\Phi}$, содержит $X_1 \cup X_2$ и, значит,

$$\overline{\alpha}(X_1 \cup X_2) \leqslant \overline{\alpha}(U_1 \cup U_2) \leqslant \overline{\alpha}(U_1) + \alpha(U_2) \leqslant \overline{\alpha}(X_1) + \overline{\alpha}(X_2) + 2\varepsilon,$$

откуда и следует наше утверждение.

Далее покажем, что если K — некоторое компактное множество, а U — такое открытое множество из $\overline{\Phi}$, что $K \subset U$, то $\overline{\alpha}(U \cap \complement K) = \overline{\alpha}(U) - \overline{\alpha}(K)$. На основании предыдущего $\overline{\alpha}(U) \leqslant \overline{\alpha}(K) + \overline{\alpha}(U \cap \complement K)$. С другой стороны, для любого компактного множества $K' \subset U \cap \complement K$ имеем $\overline{\alpha}(K \cup K') = \overline{\alpha}(K) + \overline{\alpha}(K') \leqslant \overline{\alpha}(U)$; а поскольку множество $U \cap \complement K$ открыто и принадлежит $\overline{\Phi}$, то $\overline{\alpha}(U \cap \complement K)$ есть верхняя грань $\overline{\alpha}(K')$, чем доказано, что $\overline{\alpha}(K) + \overline{\alpha}(U \cap \complement K) \leqslant \overline{\alpha}(U)$.

Таким образом, определению $\overline{\Phi}$ можно также придать следующую форму: для того чтобы $X \in \overline{\Phi}$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовали такое компактное множество K и такое открытое множество $U \in \overline{\Phi}$, что $K \subset X \subset U$ и $\overline{\alpha}(U \cap \complement K) \leqslant \varepsilon$.

Теперь мы подготовлены к доказательству того, что $\overline{\Phi}$ *есть клан* и $\overline{\alpha}$ есть *аддитивная функция множества* на $\overline{\Phi}$. Прежде всего покажем, что если X и Y принадлежат $\overline{\Phi}$, то это имеет место и для $X \cap \complement Y$ и $X \cup Y$. По условию, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие два компактных множества K и K' и такие два открытых множества U и U' из $\overline{\Phi}$, что $K \subset X \subset U$, $K' \subset Y \subset U'$, $\overline{\alpha}(U \cap \complement K) \leqslant \varepsilon$, $\overline{\alpha}(U' \cap \complement K') \leqslant \varepsilon$. Множество $K'' = K \cap \complement U'$

компактно, а множество $U'' = U \cap \complement K'$ открыто и принадлежит $\overline{\Phi}$ и $K'' \subset X \cap \complement Y \subset U''$; с другой стороны, $U'' \cap \complement K''$ содержится в объединении множеств $U \cap \complement K$ и $U' \cap \complement K'$, откуда $\overline{\alpha}(U'' \cap \complement K'') \leqslant 2\varepsilon$, чем доказано, что $X \cap \complement Y \in \overline{\Phi}$. Точно так же $U_1 = U \cup U'$ открыто и принадлежит $\overline{\Phi}$, $K_1 = K \cup K'$ компактно и $K_1 \subset X \cup Y \subset U$; с другой стороны, $U_1 \cap \complement K$ содержится в объединении $U \cap \complement K$ и $U' \cap \complement K'$, откуда снова $\overline{\alpha}(U_1 \cap \complement K_1) \leqslant \leqslant 2\varepsilon$ и $X \cup Y$ принадлежит $\overline{\Phi}$. Наконец, если X и Y не пересекаются, то $\overline{\alpha}(K_1) = \overline{\alpha}(K) + \overline{\alpha}(K') \geqslant \overline{\alpha}(X) + \overline{\alpha}(Y) - 2\varepsilon$, и следовательно, $\overline{\alpha}(X \cup Y) \geqslant \geqslant \overline{\alpha}(X) + \overline{\alpha}(Y) - 2\varepsilon$; а так как ε произвольно, то $\overline{\alpha}(X \cup Y) = \overline{\alpha}(X) + \overline{\alpha}(Y)$.

6° *Существование меры* μ.

Согласно предложению 15, на векторном пространстве $\mathscr{E}(\overline{\Phi})$ $\overline{\Phi}$-размещенных функций существует, и притом только одна, такая положительная линейная форма β, что $\beta(\varphi_X) = \overline{\alpha}(X)$ для любого $X \in \overline{\Phi}$. Для любого компактного подмножества K из E через $\mathscr{G}(K)$ обозначим пространство *равномерных пределов* функций из $\mathscr{E}(\overline{\Phi})$ с носителем в K. Так как β положительна, то $|\beta(f)| \leqslant \overline{\alpha}(K) \cdot \|f\|$ для любой функции $f \in \mathscr{E}(\overline{\Phi})$, носитель которой содержится в K; сужением формы β на пространство этих функций будет линейная форма, *непрерывная* в топологии равномерной сходимости; значит, она продолжается до непрерывной положительной линейной формы $\overline{\beta}_K$ на $\mathscr{G}(K)$. Кроме того, если K и K_1 — два компактных множества и $K \subset K_1$, то сужение формы $\overline{\beta}_{K_1}$ на $\mathscr{G}(K)$ тождественно $\overline{\beta}_K$, и, стало быть, на объединении $\mathscr{G}$ всех $\mathscr{G}(K)$ существует положительная линейная форма $\overline{\beta}$, являющаяся продолжением каждой из форм $\overline{\beta}_K$.

Но поскольку каждое компактное множество принадлежит $\overline{\Phi}$, то пространство $\mathscr{K}$ непрерывных числовых функций с компактным носителем есть *подпространство* пространства $\mathscr{G}$ (предл. 16); следовательно, *сужение* на $\mathscr{K}$ положительной линейной формы $\overline{\beta}$ есть положительная *мера* μ. Покажем, что для любого компактного множества K имеет место равенство $\mu(K) = = \overline{\alpha}(K)$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое открытое множество $U \in \overline{\Phi}$, что $K \subset U$, $\mu(U) \leqslant \mu(K) + \varepsilon$ и $\overline{\alpha}(U) \leqslant \overline{\alpha}(K) + \varepsilon$. Пусть f — непрерывное отображение пространства E в $[0, 1]$ с носителем в U и такое, что $f(x) = 1$ на K (гл. III, § 2, лемма 1). Имеем $\mu(K) \leqslant \mu(f) \leqslant \mu(U) \leqslant \mu(K) + \varepsilon$, а с другой стороны, $\overline{\alpha}(K) = \beta(\varphi_K) \leqslant \overline{\beta}(f) \leqslant \beta(\varphi_U) = \overline{\alpha}(U) \leqslant \overline{\alpha}(K) + \varepsilon$; так как $\mu(f) = \overline{\beta}(f)$, то отсюда $|\mu(K) - \overline{\alpha}(K)| \leqslant \varepsilon$, а поскольку ε произвольно, то $\mu(K) = \overline{\alpha}(K)$.

Характеристическое свойство открытых множеств, принадлежащих $\overline{\Phi}$, в соединении со следствием 4 из теоремы 4 показывает, что принадлежащие $\overline{\Phi}$ открытые множества суть не что иное, как открытые μ-интегрируемые множества, и что для такого множества U выполняется равенство $\mu(U) = = \overline{\alpha}(U)$. Далее, теорема 4 и характеристическое свойство множеств из $\overline{\Phi}$, указанное в n° 5, показывают, что μ-интегрируемые множества являются множествами из $\overline{\Phi}$ и что для такого множества X выполняется равенство $\mu(X)=\overline{\alpha}(X)$. Наконец, утверждение о том, что $\mu^*(U)=\sup\limits_{X\in\Phi,\ X\subset U}\alpha(X)$ для любого открытого множества U, сразу же вытекает из ($\mathrm{PC}_{\mathrm{II}}$) и следствия 4 теоремы 4.

Итак, теорема 5 полностью доказана.

11. *Случай абстрактных мер*

Пусть μ — абстрактная мера на пространстве Рисса $\mathscr{R}$ конечных числовых функций, определенных на множестве A. Пусть, далее, F — банахово пространство и $\mathscr{R}_F$ — множество линейных комбинаций $\sum\limits_k \mathbf{a}_k f_k$ функций из $\mathscr{R}$ с коэффициентами из F. Тогда для любой функции $\mathbf{f}=\sum\limits_k \mathbf{a}_k f_k$ из $\mathscr{R}_F$ будет выполняться неравенство (соответствующее (1))

$$\Big|\sum_k \mathbf{a}_k\mu(f_k)\Big|\leqslant\mu^{**}(|\mathbf{f}|). \tag{19}$$

В самом деле, согласно теореме Хана — Банаха (Топ. вект. пр-ва, гл. II) достаточно доказать, что для любой непрерывной линейной формы $\mathbf{a}'$ на F с нормой 1 имеет место неравенство $\Big|\Big\langle\sum\limits_k \mathbf{a}_k\mu(f_k),\ \mathbf{a}'\Big\rangle\Big|\leqslant\mu^{**}(|\mathbf{f}|)$; но это вытекает из соотношений $\Big|\sum\limits_k\langle\mathbf{a}_k,\mathbf{a}'\rangle f_k\Big|=|\langle\mathbf{f},\mathbf{a}'\rangle|\leqslant|\mathbf{f}|$.

Неравенство (19), прежде всего, показывает, что элемент $\sum\limits_k \mathbf{a}_k\mu(f_k)$ из F зависит только от $\mathbf{f}$, а не от ее выражения как линейной комбинации функций из $\mathscr{R}$; если, далее, положить $\mu(\mathbf{f})=\sum\limits_k \mathbf{a}_k\mu(f_k)$, то неравенство (19) покажет, что линейное отображение $\mathbf{f}\to\mu(\mathbf{f})$ *непрерывно в топологии сходимости в среднем*. Тогда для всякой функции из $\mathscr{L}^1_F$ продолжением по непрерывности на это пространство функции $\mu(\mathbf{f})$ определяется интеграл $\int\mathbf{f}\,d\mu$. Без всяких изменений, кроме замены μ^* на μ^{**}, будут справедливы все свойства, сформулированные в n°n° 1, 2, 3 и 5 (впрочем, можно обобщить также и свойства из n°n° 4 и 6; см. упр. 11).

Наиболее важный пример абстрактной меры дает нам определение линейной формы на пространстве размещенных функций исходя из аддитивной функции множества на клане (предл. 15). Пусть имеются клан Φ подмножеств множества A и аддитивная функция множества $\lambda\geqslant 0$, определенная на λ; найдем, при каком условии положительная линейная форма λ, определенная на $\mathscr{E}(\Phi)$ равенством $\lambda(\varphi_X)=\lambda(X)$ для любого $X\in\Phi$, будет *абстрактной мерой*, то есть будет удовлетворять аксиоме (МА′) из § 1, n° 5. Мы покажем, что для этого необходимо и достаточно, чтобы аддитивная функция множества λ удовлетворяла следующей аксиоме:

(ME′) *Для любой убывающей последовательности* (X_n) *множеств из* Φ, *имеющих пустое пересечение*, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(X_n) = 0$.

Необходимость вытекает из следствия предложения 7. Достаточность будет установлена, если мы покажем, что для убывающей последовательности (f_n) функций из $\mathscr{E}(\Phi)$ с нижней огибающей, равной 0, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(f_n) = 0$. Итак, задав произвольно $\varepsilon > 0$, обозначим через B_n множество тех $x \in A$, в которых $f_n(x) \geqslant \varepsilon$; B_n принадлежит Φ, ибо является объединением (конечного числа) множеств из Φ, на которых f_n принимает значения, бо́льшие или равные ε.

С другой стороны, пусть C означает множество тех $x \in A$, в которых $f_1(x) > 0$, и пусть $C_n = C \cap \complement B_n$; это множество принадлежит Φ. Если a есть наибольшее значение функции f_1, то для любого n $f_n \leqslant \varepsilon \cdot \varphi_{C_n} + a\varphi_{B_n}$, откуда

$$\lambda(f_n) \leqslant \varepsilon \cdot \lambda(C_n) + a \cdot \lambda(B_n) \leqslant \varepsilon \cdot \lambda(C) + a\lambda(B_n).$$

Но пересечение множеств B_n есть множество тех $x \in A$, в которых $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \geqslant \varepsilon$, то есть пусто; это, в силу (ME′), влечет равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(B_n) = 0$; следовательно, для достаточно больших n имеем $\lambda(B_n) \leqslant \varepsilon$, и значит, $\lambda(f_n) \leqslant \varepsilon(a + \lambda(C))$; а поскольку ε произвольно, то $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(f_n) = 0$.

Замечания. 1) Пусть Φ' — множество подмножеств из A, интегрируемых относительно абстрактной меры λ; ясно, что Φ' есть клан и что определенная на Φ' функция множества λ снова удовлетворяет аксиоме (ME′) (предл. 6 и 7 и следствие из предл. 7). Можно показать, что пространство $\mathscr{L}^p_F$, определенное исходя из этой функции множества, совпадает с пространством $\mathscr{L}^p_F$, определенным исходя из сужения функции λ на Φ (то есть первоначальной функции множества λ) (упр. 15).

2) Так же, как и выше, доказывается, что для того, чтобы определенная на $\mathscr{E}(\Phi)$ положительная линейная форма λ удовлетворяла аксиоме (MA) из § 1, n° 5, необходимо и достаточно, чтобы аддитивная функция множества λ (определенная на Φ) удовлетворяла следующей аксиоме:

(ME) *Для любого подмножества* Ψ *из* Φ, *фильтрующегося по отношению* $\supset$ *и такого, что пересечение множеств* $X \in \Psi$ *пусто*, $\lim_{\Psi} \lambda(X) = 0$.

3) Пусть μ — мера на локально компактном пространстве E, и пусть Φ — клан μ-интегрируемых множеств. Определенная на Φ аддитивная функция множества μ удовлетворяет аксиоме (ME′), но, вообще говоря, не удовлетворяет аксиоме (ME) (ср. § 1, n° 3, замечание 1).

Упражнения. °1) Пусть H есть такое фильтрующееся по отношению $\leqslant$ множество положительных интегрируемых функций, что $\sup\limits_{f \in H} N_1(f) < +\infty$. Пусть, далее, g есть верхняя огибающая множества H; для того чтобы g была интегрируема и чтобы в L^1 класс $\tilde{g}$ функции g имел предел по фильтру сечений фильтрующегося множества классов функций $f \in H$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовали: функция $f_1 \in H$, фильтрующееся по отношению $\leqslant$ множество B полунепрерывных снизу интегрируемых функций и такое отображение $f \to f^*$ множества H_1 функций $f \in H$, удовлетворяющих условию $f \geqslant f_1$, в множество B, что $f \leqslant f^*$ и $N_1(f^* - f) \leqslant \varepsilon$ для любой функции $f \in H_1$ (применить теорему 3).

2) Пусть μ — мера Лебега на $\mathbf{R}$, и пусть Ω — топологическое пространство, полученное в результате наделения пространства $\mathscr{L}^1$ топологией простой сходимости на $\mathbf{R}$. Показать, что отображение $f \to \int f\, d\mu$ пространства Ω в $\mathbf{R}$ не будет непрерывным ни в одной точке из Ω.

3) Пусть I — интервал из $\mathbf{R}$ и $\mathbf{f}$ — такое отображение произведения $E \times I$ в банахово пространство F, что: 1° для любого $\alpha \in I$ отображение $t \to \mathbf{f}(t, \alpha)$ пространства E в F интегрируемо; 2° для любого $t \in E$ отображение $\alpha \to \mathbf{f}(t, \alpha)$ имеет на I производную $\mathbf{f}'_\alpha(t, \alpha)$; 3° существует такая интегрируемая функция $g \geqslant 0$, что $|\mathbf{f}'_\alpha(t, \alpha)| \leqslant g(t)$ для любого $t \in E$ и любого $\alpha \in I$. Показать, что при выполнении этих условий функция $\mathbf{u}(\alpha) = \int \mathbf{f}(t, \alpha)\, d\mu(t)$ дифференцируема на I и что

$$\mathbf{u}'(\alpha) = \int \mathbf{f}'_\alpha(t, \alpha)\, d\mu(t).$$

°4) Пусть μ — мера Лебега на интервале $E = [0, 1]$.

a) Определить на E нигде не плотное множество A, имеющее произвольную меру α, заключенную в пределах $0 \leqslant \alpha < 1$ (использовать метод построения троичного канторова множества).

b) Определить на E такую последовательность (A_n) нигде не плотных интегрируемых множеств попарно без общих точек, что $\mu(A_n) = 2^{-n}$ и что всякий интервал, смежный с $B_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, содержит подмножество из A_{n+1} строго положительной меры. Показать, что если $A = \bigcup\limits_n A_n$, то A будет тощим множеством меры 1, а множество $\complement A$ будет не тощим и пренебрежимым.

c) Пусть $H = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_{2n+1}$; показать, что для любого открытого интервала $I \subset E$ пересечения интервала I с H и с $\complement H$ имеют строго положительную меру. Пусть f—функция, равная почти всюду характеристической функции φ_H; показать, что не существует последовательности (f_n) непрерывных на E функций, сходящейся в *каждой* точке из E к пределу f (заметить, что f непременно разрывна в каждой точке из E, и применить упр. 14 из «Общей топ.», гл. IX, § 5).

5) Пусть μ — положительная мера на локально компактном пространстве E. Для любой определенной на E (конечной или нет) числовой функции f произвольного знака обозначим через $\mu^*(f)$ (*верхний интеграл* функции f) нижнюю грань чисел $\mu(h)$ для функций $h \geqslant f$, интегрируемых и полунепрерывных снизу, если таковые существуют, и $+\infty$ в противном случае; это определение при $f \geqslant 0$ совпадает с определением из § 1, n° 3. Через $\mu_*(f)$ обозначим число $-\mu^*(-f)$ и его назовем *нижним интегралом* функции f.

a) Показать, что если f_1 и f_2 — такие две числовые функции, что $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ почти всюду, то $\mu^*(f_1) \leqslant \mu^*(f_2)$.

b) Пусть f_1 и f_2 — такие две числовые функции, что сумма $\mu^*(f_1) + \mu^*(f_2)$ определена и $< +\infty$; показать, что функция $f_1(x) + f_2(x)$ определена почти всюду и что $\mu^*(f_1 + f_2) \leqslant \mu^*(f_1) + \mu^*(f_2)$ (при помощи a) свести к случаю, когда $f_1(x) < +\infty$ и $f_2(x) < +\infty$ в каждой точке).

c) Пусть (f_n) есть возрастающая последовательность таких числовых функций, что, начиная с некоторого номера, $\mu^*(f_n) > -\infty$; показать, что $\mu^*(\sup\limits_n f_n) = \sup\limits_n \mu^*(f_n)$.

°6) a) Пусть f — такая числовая функция, что $\mu^*(f)$ (упр. 5) конечно. Показать, что существует интегрируемая функция $f_1 \geqslant f$, для которой $\mu(f_1) = \mu^*(f)$; если f_2 — другая инте рируемая функция, такая, что $f_2 \geqslant f$ и $\mu(f_2) = \mu^*(f)$, то f_1 и f_2 эквивалентны.

b) Для того чтобы числовая функция f была интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы $\mu^*(f)$ и $\mu_*(f)$ были конечны и равны.

c) Пусть f—такая числовая функция, что $\mu^*(f)$ и $\mu_*(f)$ конечны; пусть g и h—такие две интегрируемые функции, что $g \leqslant f \leqslant h$ и $\mu(g) = \mu_*(f)$, $\mu(h) = \mu^*(f)$. Показать, что $\mu_*(f-g) = \mu_*(h-f) = 0$ и $\mu^*(f-g) = \mu^*(h-f) = \mu^*(f) - \mu_*(f)$.

d) Пусть f_1 и f_2—две числовые функции, для которых все числа $\mu^*(f_1)$, $\mu^*(f_2)$, $\mu_*(f_1)$ и $\mu_*(f_2)$ конечны; показать, что $\mu_*(f_1+f_2) \leqslant \mu_*(f_1) + \mu^*(f_2) \leqslant \mu^*(f_1+f_2)$ (заметить, что если g_2—такая интегрируемая функция, что $f_2 \leqslant g_2$ и $\mu^*(f_2) = \mu(g_2)$, то для любой интегрируемой функции h, $h \leqslant f_1 + f_2$, выполняется неравенство $h - g_2 \leqslant f_1$). Вывести отсюда, что если f_1 интегрируема, то

$$\mu^*(f_1+f_2) = \mu(f_1) + \mu^*(f_2), \quad \mu_*(f_1+f_2) = \mu(f_1) + \mu_*(f_2)$$

и

$$\mu^*(f_1+f_2) = \mu^*(\sup(f_1, f_2)) + \mu^*(\inf(f_1, f_2))$$

(для последнего соотношения воспользоваться упр. 1 из § 1).

e) Пусть f — интегрируемая функция. Для того чтобы функция g, для которой $\mu^*(g)$ конечно, была интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы $\mu(f)=\mu^*(g)+\mu^*(f-g)$ (заметить, что если g_1 — интегрируемая функция, для которой $g \leqslant g_1$ и $\mu^*(g)=\mu(g_1)$, то $f-g_1 \leqslant f-g$)

°7) Пусть μ — положительная мера на E. Для любого подмножества $A \subset E$ назовем *внутренней мерой* множества A и обозначим через $\mu_*(A)$ нижний интеграл (упр. 5) характеристической функции φ_A.

a) Показать, что $\mu_*(A)$ есть верхняя грань мер компактных множеств, содержащихся в A (рассуждать, как в теореме 4).

b) Показать, что для любого подмножества A из E *конечной* внешней меры существуют такие два интегрируемых множества A_1, A_2, что $A_1 \subset A \subset A_2$ и $\mu_*(A)=\mu(A_1)$, $\mu^*(A)=\mu(A_2)$. Для того чтобы A было интегрируемо, необходимо и достаточно, чтобы $\mu^*(A)$ и $\mu_*(A)$ были конечны и равны. Показать, что, в тех же обозначениях,

$$\mu_*(A \cap \mathbf{C}A_1)=\mu_*(A_2 \cap \mathbf{C}A)=0$$

и

$$\mu^*(A \cap \mathbf{C}A_1)=\mu^*(A_2 \cap \mathbf{C}A)=\mu^*(A)-\mu_*(A).$$

c) Пусть A — интегрируемое множество; показать, что для любого множества $B \subset A$ имеем $\mu(A)=\mu^*(B)+\mu_*(A \cap \mathbf{C}B)$.

d) Пусть A и B — два множества конечной внешней меры, не имеющие общих точек. Показать, что если $C=A \cup B$, то

$$\mu_*(A)+\mu_*(B) \leqslant \mu_*(C) \leqslant \mu_*(A)+\mu^*(B) \leqslant \mu^*(C) \leqslant \mu^*(A)+\mu^*(B)$$

и

$$\mu_*(C)-\mu_*(A)-\mu_*(B) \leqslant \mu^*(A)+\mu^*(B)-\mu^*(C)$$

(доказательство этого последнего неравенства свести при помощи (b) к случаю, когда

$$\mu_*(A)=\mu_*(B)=0;$$

показать, что если A_2 и B_2 — такие интегрируемые множества, что $A \subset A_2$, $B \subset B_2$, $\mu^*(A)=\mu(A_2)$, $\mu^*(B)=\mu(B_2)$, то $\mu_*(C) \leqslant \mu(A_2 \cap B_2)$).

°8) Если отождествить канонически тор $\mathbf{T}=\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ с интервалом $[0, 1[$ из $\mathbf{R}$, то мера Лебега μ на этом интервале будет мерой на $\mathbf{T}$; для любого множества $A \subset \mathbf{T}$ и любого $z \in \mathbf{T}$ будет иметь место равенство $\mu^*(A+z)=\mu^*(A)$.

a) Показать, что существует такая подгруппа H_0 из $\mathbf{T}$, что множества $H_n=r_n+H_0$, где r_n пробегает множество рациональных чисел, содержащихся в $[0, 1[$, образуют разбиение тора $\mathbf{T}$ (рассматривая $\mathbf{R}$ как векторное пространство над $\mathbf{Q}$, заметить, что в $\mathbf{R}$ подпространство $\mathbf{Q}$ имеет дополнение).

b) Пусть H — объединение любого конечного числа множеств H_n; показать, что H не будет интегрируемым и что $\mu_*(H)=0$ (заметить, что всякая подгруппа аддитивной группы $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, порожденная конечным числом элементов, имеет в $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ бесконечный индекс; вывести отсюда, что существует разбиение тора $\mathbf{T}$ на бесконечное счетное множество множеств P_n, каждое из которых содержит множество вида $z + H$).

c) Построить на основании b) пример такой убывающей последовательности (A_n) подмножеств из $\mathbf{T}$ с пустым пересечением, что $\mu^*(A_n) = 1$ при любом n.

d) Пусть A — такое интегрируемое множество, что $H_0 \subset A$ и $\mu(A) = \mu^*(H_0) > 0$; показать, что для любого интегрируемого множества $B \subset A$ множества $B_1 = B \cap H_0$ и $B_2 = B \cap \complement H_0$ образуют разбиение множества B, для которого $\mu^*(B_1) = \mu^*(B_2) = \mu(B)$ и $\mu_*(B_1) = \mu_*(B_2) = 0$ (использовать упр. 7b)).

°9) a) Пусть μ — положительная мера на локально компактном пространстве E. Пусть в банаховом пространстве $\widetilde{\mathscr{F}}^1$ классов эквивалентности функций из $\mathscr{F}^1$ через G обозначено замкнутое векторное подпространство, содержащее подпространство L^1; пусть $\mathscr{G}$ — замкнутое векторное подпространство пространства $\mathscr{F}^1$, состоящее из функций, класс которых принадлежит G. Показать, что линейную форму $\mu(f)$ можно продолжить на $\mathscr{G}$ таким образом, чтобы выполнялось неравенство $|\mu(f)| \leqslant N_1(f)$ (применить теорему Хана — Банаха). Показать, что для продолженного таким способом интеграла теорема 3 из § 3 снова верна.

b) Предположим, что G есть прямая сумма пространства L^1 и подпространства H *конечной* размерности. Показать, что для $\mathscr{G}$ остается справедливой теорема Лебега (теорема 2). (Пусть (f_n) — последовательность функций из $\mathscr{G}$, стремящаяся почти всюду к f и такая, что $|f_n| \leqslant g$, где $g \geqslant 0$, и $N_1(g) < +\infty$. Пусть $(\widetilde{u}_k)_{1 \leqslant k \leqslant m}$ — базис в H, и пусть $f_n = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{nk} u_k + h_n$, где $h_n \in \mathscr{L}^1$. Используя тот факт, что G есть прямая топологическая сумма пространств L^1 и H, показать, что α_{nk} равномерно ограничены; выбирая в случае надобности из (f_n) подпоследовательность, свести к случаю, когда каждая из последовательностей $(\alpha_{nk})_{n \geqslant 1}$ имеет предел; затем вывести отсюда, что $h_n(x)$ стремится почти всюду к пределу, и применить к последовательности (h_n) теорему Лебега; наконец, заметить, что две подпоследовательности из $(\widetilde{f}_n)$ не могут стремиться к различным пределам в G.)

°10) a) Пусть $\mathscr{E}$ — пространство Рисса и μ — такая положительная линейная форма на $\mathscr{E}$, что соотношение $\mu(|x|) = 0$ влечет $x = 0$; тогда $\mu(|x|)$ есть норма на $\mathscr{E}$, и мы предположим, что $\mathscr{E}$, наделенное этой нормой, *полно*. Отсюда следует, что $\mathscr{E}$ вполне решеточно (гл. II, § 2, упр. 8e)). Следовательно (гл. II, § 1, упр. 12 и 13), существует такое локально компактное пространство E, являющееся суммой семейства (K_α) компактных стоуновых пространств, что $\mathscr{E}$ изоморфно пространству, состоящему из непрерывных на E (конечных или нет) числовых функций и содержащему пространство $\mathscr{K}(E)$. Отождествим $\mathscr{E}$ с этим пространством; тогда сужение формы μ на $\mathscr{K}(E)$ будет положительной мерой на E. Показать, что $\mathscr{E}$ канонически изоморфно пространству $L^1(\mu)$; более точно, для любой определенной на E μ-интегрируемой функции g существует, и притом только одна, функция $f \in \mathscr{E}$, эквивалентная g относительно меры μ (заметить, что всякий положительный элемент из $\mathscr{E}$ служит верхней гранью для возрастающей последовательности элементов из $\mathscr{K}(E)$ и что $\mathscr{K}(E)$ плотно в $\mathscr{L}^1(\mu)$).

b) Вывести из a), что для любого компактного пространства K существует такое локально компактное пространство S, являющееся топологической суммой семейства стоуновых пространств, и такая положительная мера ν на S с носителем, равным S, что вполне решеточное пространство $\mathscr{M}(K)$ мер на K, наделенное нормой $\|\mu\|$, изоморфно $L^1(\nu)$ (рассмотреть на $\mathscr{M}(K)$ линейную форму $\mu \to \mu(K)$).

c) Пусть μ — (положительная) абстрактная мера, определенная на пространстве Рисса $\mathscr{R}$, состоящем из конечных числовых функций, определенных на множестве A. Показать, что существует такое локально компактное пространство E, являющееся суммой семейства (K_α) компактных стоуновых пространств, и такая положительная мера $\widetilde{\mu}$ на E с носителем, равным E, что вполне решеточное пространство $L^1(\mu)$, наделенное нормой $\|\widetilde{f}\|_1$, изоморфно $L^1(\widetilde{\mu})$.

11) Пусть μ — (положительная) абстрактная мера, определенная на пространстве Рисса $\mathscr{R}$, состоящем из числовых функций, определенных на множестве A.

a) Пусть $\mathscr{J}'$ — множество (конечных или нет) верхних огибающих возрастающих последовательностей функций из $\mathscr{R}$; показать, что для того, чтобы функция f из $\mathscr{J}'$ была интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы $\mu^{**}(|f|) < +\infty$.

b) Показать, что для того, чтобы числовая функция f была интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовали такая интегрируемая функция $g \in -\mathscr{J}'$ и такая интегрируемая функция $h \in \mathscr{J}'$, что $g \leqslant f \leqslant h$ и $\int (h-g)\,d\mu \leqslant \varepsilon$.

c) Предположим, что пространство Рисса $\mathscr{R}$ таково, что для любого действительного $\alpha > 0$ и любой функции $f \in \mathscr{R}_+$ функция $\inf(f, \alpha)$ принадлежит $\mathscr{R}_+$. Показать, что для любой функции $f \in \mathscr{R}_+$ и любого действительного $\alpha > 0$ множество $P_{f,\alpha}$ тех $x \in A$, для которых $f(x) > \alpha$, интегрируемо (заметить, что характеристическая функция этого множества принадлежит $\mathscr{J}'$). Вывести отсюда, что множество $Q_{f,\alpha}$ тех $x \in A$, для которых $f(x) \geqslant \alpha$, интегрируемо.

d) Пусть $\mathfrak{F}$ — множество подмножеств из A, имеющих вид $P_{f,\alpha}$, где f пробегает $\mathscr{R}_+$, а α — множество строго положительных чисел. Показать, что для того, чтобы множество $M \subset A$ было интегрируемо, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое интегрируемое множество G, являющееся счетным объединением множеств из $\mathfrak{F}$, и такое множество K, являющееся счетным пересечением множеств из $\mathfrak{F}$, что $K \subset M \subset G$ и $\mu(G \cap \complement K) \leqslant \varepsilon$ (использовать b)).

12) a) Пусть Γ — произвольное множество подмножеств множества A. Пусть, далее, Ψ — множество подмножеств из A вида $X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_m \cap \complement X_{m+1} \cap \ldots \cap \complement X_{m+p}$, где X_i — множества из Γ, m — произвольное целое число, $m \geqslant 1$, p — произвольное целое число, $p \geqslant 0$. Показать, что наименьший клан Φ, содержащий Γ, есть множество, являющееся конечным объединением множеств из Ψ.

b) Пусть Δ — множество конечных пересечений множеств из Γ. Показать, что для любого векторного пространства F множество линейных комбинаций (с коэффициентами из F) характеристических функций множеств клана, порожденного Γ, совпадает с множеством линейных комбинаций характеристических функций множеств из Δ.

c) Пусть E — топологическое пространство и Γ — множество компактных подмножеств из E. Показать, что клан, порожденный множеством Γ, совпадает с множеством конечных объединений подмножеств из E вида $X \cap \complement Y$, где X и Y — компактные множества.

13) Пусть E — отделимое топологическое пространство. Для любой пары (K, U), состоящей из компактного множества K и открытого в E множества U, через $I(K, U)$ обозначим множество таких подмножеств $X \subset E$, что $K \subset X \subset U$, а через $\mathcal{T}$ — топологию в $\mathfrak{P}(E)$, порожденную множеством подмножеств $I(K, U)$ из $\mathfrak{P}(E)$.

a) Показать, что каждое из множеств $I(K, U)$ одновременно открыто и замкнуто в $\mathfrak{P}(E)$; вывести отсюда, что $\mathfrak{P}(E)$, наделенное топологией $\mathcal{T}$, является вполне регулярным вполне несвязным пространством.

b) Для того чтобы отображение $X \to \complement X$ пространства $\mathfrak{P}(E)$ на себя было непрерывно (в топологии $\mathcal{T}$), необходимо и достаточно, чтобы E было компактно.

c) Возьмем в качестве E интервал $[0, 1]$ из $\mathbf{R}$. Показать, что отображения $(X, Y) \to (X \cup Y)$ и $(X, Y) \to X \cap Y$ произведения $\mathfrak{P}(E) \times \mathfrak{P}(E)$ в $\mathfrak{P}(E)$ не будут непрерывны в топологии $\mathcal{T}$.

d) Пусть E локально компактно. Показать, что топология, индуцированная топологией $\mathcal{T}$ в множестве компактных подмножеств из E, будет более сильной, чем топология, полученная из равномерной структуры пространства E методом упр. 7 из «Общей топ.», гл. II, § 2; эти две топологии могут совпадать лишь в том случае, когда E — дискретное пространство.

°14) Пусть E — локально компактное пространство, и пусть Γ есть базис топологии в E, образованный относительно компактными множествами. Пусть $\mathcal{U}$ — равномерная структура, согласующаяся с топологией в E, и пусть $\mathfrak{S}$ — фундаментальная система окружений этой структуры. Пусть $X \to \lambda(X)$ — конечная положительная числовая функция, определенная на Г. Пусть для любого компактного множества $K \subset E$ и любого окружения $V \in \mathfrak{S}$ через $\alpha_V(K)$ обозначена нижняя грань чисел $\sum_i \lambda(U_i)$ для всех конечных покрытий (U_i) множества K, образованных множествами из Г порядка малости V; предположим, что когда V пробегает $\mathfrak{S}$, верхняя грань $\alpha(K)$ чисел $\alpha_V(K)$ будет *конечной*. Показать, что на E существует (и притом только одна) такая мера μ, что $\mu(K) = \alpha(K)$ для любого компактного множества K (применить теорему 5).

15) Пусть Φ — клан подмножеств множества A и λ — аддитивная функция множества, определенная на Φ, принимающая положительные значения и удовлетворяющая аксиоме (ME'). Пусть Φ_1 — клан подмножеств из A, интегрируемых относительно абстрактной меры λ; сужение λ_1 меры λ на этот клан снова удовлетворяет (ME'). Показать, что для того, чтобы пространства $\mathcal{L}_F^p(\lambda)$ и $\mathcal{L}_F^p(\lambda_1)$ совпадали, необходимо и достаточно, чтобы клан Φ_1 удовлетворял следующим двум условиям: 1° векторное подпространство $\mathcal{E}(\Phi_1)$ всюду плотно в $\mathcal{L}^1(\lambda)$; 2° всякое λ-пренебрежимое множество также λ_1-пренебрежимо. Построить пример клана Φ_1, удовлетворяющего первому и не удовлетворяющего второму из этих условий.

16) Пусть (A_n) — последовательность интегрируемых множеств и $\sum_n \mu(A_n) < +\infty$. Пусть для любого целого k через G_k обозначено множество таких $x \in E$, что $x \in A_n$ по крайней мере для k значений индекса n; показать, что G_k интегрируемо и что $k \cdot \mu(G_k) \leqslant \sum_n \mu(A_n)$.

17) Пусть μ — положительная ограниченная мера на локально компактном пространстве E, и пусть (A_n) — такая последовательность интегрируемых множеств из E, что $\inf_n \mu(A_n) = m > 0$. Показать, что множество B точек из E, принадлежащих бесконечному числу множеств A_n, интегрируемо и что $\mu(B) \geqslant m$.

°18) Пусть E — вполне регулярное пространство, и пусть $\mathcal{C}(E)$ (соотв. $\mathcal{C}^\infty(E)$) есть пространство Рисса непрерывных (соотв. непрерывных и ограниченных) на E числовых функций.

a) Показать, что если линейная форма λ на $\mathcal{C}(E)$ непрерывна в топологии компактной сходимости, то она относительно ограничена.

b) Пусть λ — положительная линейная форма на $\mathcal{C}(E)$. Показать, что если λ обращается в нуль на $\mathcal{C}^\infty(E)$, то она равна нулю и на $\mathcal{C}(E)$ (пусть φ — каноническое отображение пространства $\mathcal{C}(E)$ на фактор-пространство Рисса $\mathcal{C}(E)/\mathcal{C}^\infty(E)$, (гл. II, § 1, упр. 4); показать, что если h есть непрерывная положительная функция, не ограниченная на E, то $n\varphi(h) \leqslant \varphi(h^2)$ при любом целом $n > 0$).

c) Пусть $\widetilde{E}$ — компактное пространство, полученное в результате наделения E слабейшей равномерной структурой, при которой функции из $\mathscr{C}^\infty(E)$ равномерно непрерывны, и пополнения полученного таким образом равномерного пространства; тогда всякая функция $f \in \mathscr{C}(E)$ продолжается по непрерывности до непрерывной на $\widetilde{E}$ функции $\widetilde{f}$ с конечными или бесконечными значениями $\left(\text{рассмотреть } \frac{f}{1+|f|}\right)$. Если λ есть положительная линейная форма на $\mathscr{C}(E)$, то ее сужение на $\mathscr{C}^\infty(E)$ имеет вид $f \to \mu(\widetilde{f})$, где μ — положительная мера на E (гл. III, § 1, упр. 1); показать, что для любой функции $f \in \mathscr{C}(E)$ функция $\widetilde{f}$ интегрируема относительно μ и что $\lambda(f) = \mu(\widetilde{f})$ (использовать b), заметив, что всякая положительная функция из $\mathscr{C}(E)$ служит верхней огибающей некоторой последовательности функций из $\mathscr{C}^\infty(E)$).

d) Показать, что всякая точка из носителя меры μ, не принадлежащая E, обладает следующим свойством: для любой убывающей последовательности (V_n) окрестностей точки x_0 пересечение множеств V_n содержит хотя бы одну точку из E, и обратно.

e) Вывести из d), что если E локально компактно и счетно на бесконечности, то носитель меры μ содержится в E.

f) Показать, что если E дискретно, то носитель меры конечен (допустив противное, построить противоречащий пример — функцию $f \geqslant 0$, определенную на E и такую, что $\widetilde{f}$ не будет μ-интегрируема).

g) Показать, что если линейная форма λ на $\mathscr{C}(E)$ положительна и непрерывна в топологии компактной сходимости, то носитель меры μ содержится в E (ср. гл. III, § 3, предл. 11).

h) Пусть E_0 — компактное пространство, введенное в упр. 3, гл. III, § 2, F — подпространство из $\overline{\mathbf{R}}$, состоящее из положительных целых чисел и из $+\infty$, и E — локально компактное пространство, являющееся дополнением точки $(b, +\infty)$ в произведении $E_0 \times F$. Показать, что всякая непрерывная на E функция ограничена и стремится к некоторому пределу, когда x стремится к бесконечно удаленной точке $(b, +\infty)$ пространства E. Вывести отсюда, что если μ есть мера на E, определенная при помощи массы $\frac{1}{2^n}$, расположенной в точке (b, n) при любом целом $n \geqslant 0$, то всякая непрерывная на E функция μ-интегрируема, но носитель меры μ не компактен.

19) Пусть E — отделимое полное локально выпуклое пространство, E' — сопряженное к нему и $E'^* \supset E$ — алгебраическое сопряженное к E' пространство. Пусть A — компактное подмножество из E в слабой топологии $\sigma(E, E')$.

a) Пусть x — точка из E'^*, являющаяся точкой прикосновения для выпуклой оболочки C множества A в слабой топологии $\sigma(E'^*, E')$. Показать, что если (x'_n) есть последовательность точек из E', сходящаяся к x_0' в слабой топологии $\sigma(E', E)$, то $\lim_{n\to\infty} \langle x, x_n'\rangle = \langle x, x_0'\rangle$. (Заметить, что на A существует такая положительная мер μ с общей массой, равной 1, что $x = \int y\, d\mu(y)$ (гл. III, § 4, предл. 7), и применить теорему Лебега.)

b) Вывести из a), что если в E существует всюду плотная последовательность, то сужение отображения $x' \to \langle x, x'\rangle$ на любое равностепенно непрерывное подмножество H' из E' непрерывно в слабой топологии $\sigma(E', E)$ (заметить, что топология, индуцируемая в H' топологией $\sigma(E', E)$, метризуема). Вывести отсюда, что в этом случае непременно $x \in E$ (см. Топ. вект. пр-ва, гл. IV); иными словами, замкнутая выпуклая оболочка в E слабо компактного множества слабо компактна.

c) Распространить результат пункта b) на случай, когда E есть произвольное отделимое квазиполное локально выпуклое пространство (сначала, рассмотрев $\hat{E}$, свести к случаю, когда E полно, а затем заметить, что, согласно теореме Эберлейна (Топ. вект. пр-ва, гл. IV), достаточно доказать, что всякая последовательность (x_n) точек из C имеет в E элемент прикосновения относительно топологии $\sigma(E, E')$; показать, что это позволяет свести все к случаю, когда в E существует всюду плотная последовательность).

§ 5. Измеримые функции и множества

1. *Определение измеримых функций и множеств*

Определение 1. *Пусть E — локально компактное пространство и μ — положительная мера на E. Говорят, что отображение f пространства E в топологическое пространство F измеримо относительно меры μ* (или еще *μ-измеримо*), *если для любого компактного подмножества K пространства E существуют такое μ-пренебрежимое множество $N \subset K$ и такое разбиение множества $K \cap \complement N$, состоящее из (конечной или бесконечной) последовательности (K_n) компактных множеств, что сужение отображения f на каждое из K_n непрерывно.*

Ясно, что всякое непрерывное отображение пространства E в F измеримо.

Отметим, что если μ и ν — такие две положительные меры на E, что всякое μ-пренебрежимое множество ν-пренебрежимо, то *любая μ-измеримая функция также ν-измерима* (см. гл. V).

Определение 1 может быть преобразовано в следующий критерий:

Предложение 1. *Для того чтобы отображение f пространства E в F было измеримо, необходимо и достаточно, чтобы для любого компактного множества $K \subset E$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существовало такое компактное множество $K_1 \subset K$, что $\mu(K \cap \complement K) \leqslant \varepsilon$ и что сужение отображения f на K_1 непрерывно.*

Действительно, если указанное условие выполнено, то можно определить по индукции последовательность таких компактных множеств $K_n \subset K$, не имеющих попарно общих точек, что $\mu\left(K \cap \complement\left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i\right)\right) \leqslant \frac{1}{n}$ и что сужение отображения f на каждое из K_n непрерывно; тогда дополнение до K объединения множеств K_n будет пренебрежимо (§ 4, следствие из предл. 7), и значит, отображение f измеримо. Обратно, предположим, что существуют такое пренебрежимое множество $N \subset K$ и такое разбиение (K_n) множества $K \cap \complement N$, состоящее из компактных множеств, что сужение отображения f на каждое из K_n непрерывно; для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое целое n, что если $H = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$, то $\mu(K \cap \complement H) \leqslant \varepsilon$ (§ 4, следствие из предл. 7); множество H компактно, множества K_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ образуют конечное разбиение множества H на компактные множества, и сужение отображения f на каждое из K_i непрерывно; следовательно, непрерывно и сужение f на H.

Пример. Пусть $\alpha \geqslant 0$ — такая конечная числовая функция на E, что для любого компактного подмножества K из E сумма $\sum_{x \in K} \alpha(x)$ конечна. Пусть μ — мера, определенная при помощи масс $\alpha(x)$ (гл. III, § 2, n° 2); тогда *всякое* отображение f пространства E в любое топологическое векторное пространство F измеримо относительно меры μ. В самом деле, если K — компактное подмножество из E, то число $b = \sum_{x \in K} \alpha(x)$ конечно; следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ имеется такое конечное подмножество A из K, что $\sum_{x \in A} \alpha(x) \geqslant b - \varepsilon$; это означает, что $\mu(K \cap \complement A) \leqslant \varepsilon$ (§ 1, n° 3, пример), и ясно, что сужение отображения f на A непрерывно.

Предложение 2. *Пусть (F_n) — последовательность топологических пространств, и пусть для каждого n через f_n обозначено измеримое отображение пространства E в F_n. Тогда для любого компактного множества $K \subset E$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое компактное множество $K_0 \subset K$, что $\mu(K \cap \complement K_0) \leqslant \varepsilon$ и что сужение на K_0 каждой из функций f_n непрерывно.*

В самом деле, для каждого целого $n \geqslant 1$ существует такое компактное множество $K_n \subset K$, что $\mu(K \cap \complement K_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n}$ и что сужение f_n на K_n непрерывно. Множество $K_0 = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ компактно, сужения на K_0 всех функций f_n непрерывны, и так как $K \cap \complement K_0$ содержится в объединении множеств $K \cap \complement K$, то

$$\mu(K \cap \complement K_0) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

Определение 2. *Подмножество A из E называется измеримым, если измерима его характеристическая функция φ_A.*

Согласно определению 1 это означает, что измеримое множество A есть такое множество, что для любого компактного множества K существуют пренебрежимое множество $N \subset K$ и разбиение (K_n) множества $K \cap \complement N$, состоящее из последовательности компактных множеств, каждое из которых содержится в $A \cap K$ или в $K \cap \complement A$.

Это определение сразу же позволяет сформулировать следующий критерий:

Предложение 3. *Для того чтобы множество A было измеримо, необходимо и достаточно, чтобы для любого компактного множества K множество $A \cap K$ было интегрируемо.*

Условие необходимо, так как объединение последовательности интегрируемых множеств интегрируемо, когда сумма их мер конечна (§ 4, следствие из предл. 8). Условие достаточно, ибо для любого интегрируемого множества B существуют пренебрежимое множество $N \subset B$ и разбиение множества $B \cap \complement N$ на последовательность компактных множеств (§ 4, следствие 2 из теоремы 4).

Следствие. *Открытые множества и замкнутые множества измеримы.*

В частности, все пространство E измеримо.

2. Принцип локализации. Локально пренебрежимые множества

Предложение 4 (принцип локализации). *Пусть f — отображение пространства E в топологическое пространство F. Предположим, что для любого $x \in E$ существуют интегрируемая окрестность V_x точки x и такое измеримое отображение g_x пространства E в F, что $f(y) = g_x(y)$ почти всюду на V_x. Тогда f измеримо.*

В самом деле, пусть K — компактное множество; существует конечное число таких точек $x_i \in K$, что V_{x_i} образуют покрытие K. Из этого тотчас заключаем (§ 4, n° 8, лемма 1), что существуют такое пренебрежимое множество $N \subset K$ и такое конечное разбиение множества $K \cap \complement N$, состоящего из интегрируемых множеств M_j, что каждое из множеств $K \cap V_{x_i}$ является объединением подмножества из N и некоторого числа множеств M_j и что на каждом из M_j отображение f равно одной из функций g_{x_i}. Но для каждого M_j существуют пренебрежимое множество $N_j \subset M_j$ и разбиение множества $M_j \cap \complement N_j$, состоящее из последовательности компактных множеств K_{nj} $(n \in \mathrm{N})$; с другой стороны, для каждого K_{nj} существуют пренебрежимое множество $P_{nj} \subset K_{nj}$ и разбиение множества $K_{nj} \cap \complement P_n$, состоящее из такой последовательности компактных множеств K_{mnj} $(m \in \mathrm{N})$, что сужение отображения f на каждое из множеств K_{mnj} непрерывно. А так как объединение множеств N, N_j и P_{nj} пренебрежимо, то отображение f измеримо.

Таким образом, понятие измеримой функции носит локальный характер.

Определение 3. *Множество $A \subset E$ называется локально пренебрежимым (относительно меры μ), если для любого $x \in E$ существует такая окрестность V точки x, что множество $V \cap A$ пренебрежимо.*

Согласно принципу локализации всякое локально пренебрежимое множество *измеримо*. Свойства пренебрежимых множеств (§ 2) показывают, что любое подмножество локально пренебрежимого множества локально пренебрежимо и что любое счетное объединение локально пренебрежимых множеств локально пренебрежимо.

Предложение 5. *Для того чтобы множество A было локально пренебрежимо, необходимо и достаточно, чтобы для любого компактного множества K множество $A \cap K$ было пренебрежимо.*

Достаточность очевидна, так как всякая точка из E имеет компактную окрестность. Необходимость следует из того, что если для любого $x \in K$ существует такая окрестность V_x точки x, что $A \cap V_x$ пренебрежимо, то найдется конечное число точек $x_i \in K$, для которых V_{x_i} образуют покрытие K, и $A \cap K$ содержится в объединении пренебрежимых множеств $A \cap V_{x_i}$.

Следствие 1. *Для того чтобы множество A было пренебрежимо, необходимо и достаточно, чтобы оно было локально пренебрежимо и имело конечную внешнюю меру.*

Необходимость очевидна. Обратно, если условие выполнено, то A содержится в интегрируемом открытом множестве G, являющемся объединением пренебрежимого множества N и последовательности (K_n) компактных множеств (§ 4, следствие 2 из теоремы 4); а так как множество $A \cap N$ и множества $A \cap K_n$ пренебрежимы, то это верно и для их объединения A.

Следствие 2. *Всякое открытое локально пренебрежимое множество пренебрежимо* (и, стало быть, содержится в дополнении носителя меры μ).

В самом деле, внешняя мера открытого множества G служит верхней гранью мер компактных множеств $K \subset G$ (§ 4, следствие 4 из теоремы 4); если G локально пренебрежимо, то $\mu(K) = 0$ для любого содержащегося в G компактного множества, и, значит, $\mu^*(G) = 0$.

Следствие 3. *В локально компактном пространстве E, счетном в бесконечности, всякое локально пренебрежимое множество пренебрежимо.*

Действительно, так как E является объединением последовательности (K_n) компактных множеств, то всякое локально пренебрежимое множество A является объединением пренебрежимых множеств $A \cap K_n$ и потому пренебрежимо.

Можно указать примеры не счетных в бесконечности локально компактных пространств и мер на таком пространстве E, чтобы в E существовали локально пренебрежимые множества, не являющиеся пренебрежимыми (§ 1, упр. 4).

Если $\mathbf{P}\,\{x\}$ есть свойство, содержащее только один свободный аргумент $x \in E$, то свойство «$\mathbf{P}\,\{x\}$ *имеет место локально почти всюду* (*относительно меры* μ)», по определению, эквивалентно свойству «*множество тех* $x \in E$, *для которых* (не $\mathbf{P}\,\{x\}$), *локально пренебрежимо* (*относительно меры* μ)». Если F — произвольное множество, то отношение «$f(x) = g(x)$ локально почти всюду» есть отношение эквивалентности в множестве отображений пространства E в F. В частности, если F есть векторное пространство, то отображение f пространства E в F, при котором $f(x) = 0$ локально почти всюду, называется *локально пренебрежимым*. Мы предоставляем читателю установить для этих понятий большинство свойств, соответствующих тем, которые были перечислены в § 2, n°n° 4, 5 и 6, для функций, равных между собой почти всюду. Мы же ограничимся замечанием, что если два *непрерывных* отображения f и g пространства E в отделимое топологическое векторное пространство F равны между собой *локально почти всюду*, то они, на основании следствия 2 из предложения 5, равны *почти всюду* (и, значит, равны между собой в любой точке носителя меры μ (§ 2, предл. 9)); с другой стороны, мы можем сформулировать следующее предложение, являющееся непосредственным следствием принципа локализации:

Предложение 6. *Пусть f — измеримое отображение пространства E в топологическое векторное пространство F. Всякое отображение пространства E в F, равное $f(x)$ локально почти всюду, измеримо.*

3. Элементарные свойства измеримых функций

Теорема 1. *Пусть E — локально компактное пространство, μ — мера на E, (F_n) — последовательность топологических пространств и $F = \prod\limits_n F_n$ — их произведение. Пусть, далее, для каждого индекса n через f_n обозначено измеримое отображение пространства E в F_n, и пусть $f(x) = (f_n(x)) \in F$; тогда для любого* *непрерывного отображения и множества $f(E)$ в топологическое пространство G функция $x \to u(f(x))$ измерима.*

В самом деле, для любого компактного подмножества K из E и любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое компактное множество $K_1 \subset K$, что $\mu(K \cap \complement K_1) \leqslant \varepsilon$ и что сужения на K_1 всех функций f_n непрерывны (предл. 2); ясно, что функция $u \circ f$ непрерывна на K_1, откуда и следует теорема.

Теорема не распространяется на *произвольное* произведение топологических пространств (упр. 1).

Следствие 1. *Верхняя и нижняя огибающие конечного числа измеримых числовых (конечных или нет) функций измеримы.*

Действительно, $\sup(u, v)$ и $\inf(u, v)$ непрерывны на $\overline{\mathbf{R}} \times \overline{\mathbf{R}}$.

Следствие 2. *Для того чтобы (конечная или нет) числовая функция f была измерима, необходимо и достаточно, чтобы были измеримы f^+ и f^-.*

Необходимость вытекает из следствия 1, а достаточность — из того, что образ множества $A \subset E$ при отображении $x \to (f^+(x), f^-(x))$ в $\overline{\mathbf{R}} \times \overline{\mathbf{R}}$ не содержит точек $(+\infty, +\infty)$ и $(-\infty, -\infty)$, и, значит, отображение $(u, v) \to u - v$ непрерывно на A.

Следствие 3. *Если $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ — два измеримых отображения пространства E в топологическое векторное пространство F, то отображения $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ и $\alpha\mathbf{f}$* (где α — произвольный скаляр) *измеримы.*

Итак, множество измеримых отображений пространства E в топологическое векторное пространство F является векторным пространством.

Следствие 4. *Измеримые множества составляют клан.*

В самом деле, если X и Y измеримы, то, согласно теореме 1, $\varphi_{X \cup Y} = \varphi_X + \varphi_Y - \varphi_X\varphi_Y$ и $\varphi_{X \cap \complement Y} = \varphi_X - \varphi_X\varphi_Y$ измеримы.

Следствие 5. *Пусть F — n-мерное векторное пространство над $\mathbf{R}$, и пусть $(\mathbf{e}_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ — его базис. Для того чтобы* *функция* $\mathbf{f}=\sum_{k=1}^{n} \mathbf{e}_k f_k$ *была измерима, необходимо и достаточно, чтобы была измерима каждая из числовых функций* f_k.

Следствие 6. *Пусть F, G, H — три топологических векторных пространства, и пусть $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \to [\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}]$ — непрерывное билинейное отображение произведения $F \times G$ в H. Если $\mathbf{f}$ есть измеримое отображение пространства E в F, а $\mathbf{g}$ — измеримое отображение пространства E в G, то $[\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}]$ есть измеримое отображение пространства E в H.*

В частности, если $\mathbf{f}$ есть измеримое отображение пространства E в действительное (соотв. комплексное) нормированное пространство F, а g — измеримое отображение пространства E в $\mathbf{R}$ (соотв. $\mathbf{C}$), то отображение $g\mathbf{f}$ измеримо. Если F — *нормированная алгебра*, а $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ — измеримые отображения пространства E в F, то отображение $\mathbf{f}\mathbf{g}$ измеримо.

Следствие 7. *Если $\mathbf{f}$ есть измеримое отображение пространства E в нормированное пространство F, то числовая функция $|\mathbf{f}|$ измерима.*

Предложение 7. *Пусть A — измеримое подмножество из E и f — измеримое отображение пространства E в топологическое пространство F. Тогда всякое отображение g пространства E в F, постоянное на $\complement A$ и равное f на A, измеримо.*

В самом деле, пусть K есть произвольное компактное множество. Поскольку пересечение $K \cap A$ (соотв. $K \cap \complement A$) интегрируемо, то существуют пренебрежимое множество $M \subset K \cap A$ (соотв. $N \subset K \cap \complement A$) и разбиение (B_n) (соотв. (C_n)) множества $K \cap A \cap \complement M$ (соотв. $K \cap \complement A \cap \complement N$), состоящее из компактных множеств; с другой стороны, для каждого индекса n существуют пренебрежимое множество $P_n \subset B_n$ и разбиение (D_{mn}) множества $B_n \cap \complement P$, состоящее из компактных множеств и такое, что сужение отображения f на каждое из D_{mn} непрерывно. Из этого следует, что сужение отображения g на каждое из C_n и на каждое из D_{mn} непрерывно; а так как в то же время объединение множеств M, N и множеств P_n пренебрежимо, то предложение доказано.

Если A есть измеримое подмножество из E и f — отображение множества A в топологическое пространство F, то отображение f

называют *измеримым*, если в результате продолжения отображения f при помощи постоянной на $\complement A$ функции получается измеримое отображение пространства E в F; предложение 7 показывает, что это свойство не зависит от того (постоянного) значения, которое дается этой продолженной функции на $\complement A$. Это определение позволяет обобщить на измеримые функции, определенные на измеримом подмножестве из E, свойства измеримых функций, определенных на всем E; эти обобщения мы предоставляем читателю. Отметим только, что принцип локализации (предл. 4) остается верным и в том случае, когда предполагается, что каждая из функций g_x определена только на V_x (или почти всюду на V_x) и измерима в указанном смысле.

4. *Пределы измеримых функций*

Теорема 2 (Егоров). *Пусть A — счетное множество и $\mathfrak{F}$ — фильтр в A со счетным базисом, $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ — семейство измеримых отображений пространства E в метризуемое пространство F. Предположим, что предел $\lim\limits_{\mathfrak{F}} f_\alpha(x) = f(x)$ существует локально почти всюду на E. Тогда*:

1° *функция f* (определенная локально почти всюду) *измерима*;

2° *для любого компактного подмножества $K \subset E$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое компактное множество $K_1 \subset K$, что $\mu(K \cap \complement K_1) \leqslant \varepsilon$ и что сужения отображений f_α на K_1 непрерывны и равномерно сходятся на K_1 к отображению f.*

Первое утверждение является очевидным следствием второго, которое мы сейчас и докажем. Существует такое компактное множество $K_0 \subset K$, что $\mu(K \cap \complement K_0) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ и что сужения на K_0 всех функций f_α непрерывны (предл. 2). Обозначим через (A_n) убывающий счетный базис фильтра $\mathfrak{F}$, а через d — расстояние в F, согласующееся с топологией этого пространства. Пусть для любой пары целых чисел $n > 0$, $r > 0$ через $B_{n,r}$ обозначено множество таких точек $x \in K_0$, что хотя бы для одной пары α, β индексов, принадлежащих A_n, выполняется неравенство $d(f_\alpha(x), f_\beta(x)) \geqslant \frac{1}{r}$; для фиксированных α и β множество тех $x \in K_0$, при которых $d(f_\alpha(x), f_\beta(x)) \geqslant \frac{1}{r}$, замкнуто в K_0 и, значит, компактно; таким образом, $B_{n,r}$ является счетным объединением содержащихся в K_0 компактных множеств и, стало быть, интегрируемо (§ 4, предл. 6 и 8). Если зафиксировать r, то пересечение убывающей последовательности множеств $B_{n,r}$ ($n=1, 2, \ldots$) будет иметь меру нуль, потому что $f_\alpha(x)$ стремится к $f(x)$ по фильтру $\mathfrak{F}$ почти всюду на K_0; следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(B_{n,r})=0$ (§ 4, следствие из предл. 7), и, значит, найдется такое целое n_r, для которого $\mu(B_{n_r,r}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{r+2}}$. Обозначим через B объединение (для $r=1, 2, \ldots$) множеств $B_{n_r,r}$; оно интегрируемо, и $\mu(B) \leqslant \sum\limits_{r=1}^{\infty} \mu(B_{n_r,r}) \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$ (§ 4, следствие из предл. 8). Через C обозначим дополнение множества B до K_0; $f_\alpha(x)$, по построению, *равномерно* сходится к $f(x)$ по фильтру $\mathfrak{F}$ на C, а поскольку сужения функций f_α на C непрерывны, то непрерывно и сужение на C функции f. Тогда для выполнения сформулированных в теореме условий достаточно выбрать компактное множество $K_1 \subset C$ так, чтобы $\mu(C \cap \complement K_1) \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$, ибо $\mu(K \cap \complement K_1) = \mu(K \cap \complement K_0) + \mu(B) + \mu(C \cap \complement K_1) \leqslant \varepsilon$.

Заключения теоремы 2 уже не обязаны выполняться, если F не метризуемо (упр. 1). Если F метризуемо и множество A несчетно, но фильтр $\mathfrak{F}$ обладает счетным базисом, то первое заключение теоремы 2 остается справедливым; действительно, если (A_n) есть счетный базис фильтра $\mathfrak{F}$ и α_n — некоторый элемент из A_n, то функция f является локально почти всюду пределом последовательности (f_{α_n}) и, значит, измерима; однако второе заключение теоремы 2 может уже не выполняться (ср. упр. 2).

Следствие 1. *Пусть (f_n) — последовательность (конечных или нет) числовых функций. Если f_n измеримы, то функции* $\sup\limits_n f_n$, $\inf\limits_n f_n$, $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$, $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ *тоже измеримы.*

В самом деле, расширенная прямая $\overline{\mathbf{R}}$, гомеоморфная компактному интервалу из $\mathbf{R}$, метризуема. Тогда функция $\sup\limits_n f_n$ есть простой предел возрастающей последовательности функций $g_n = \sup(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, которые измеримы (следствие 1 из теоремы 1); точно так же $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$ есть простой предел убывающей последовательности функций $h_n = \sup_{p \geqslant 0} f_{n+p}$, каждая из которых, на основании предыдущего, измерима. Наконец, поскольку $\inf_n f_n = -\sup_n (-f_n)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \inf = -\lim\limits_{n\to\infty} \sup (-f_n)$, то эти функции измеримы.

Следствие 2. *Любое счетное объединение и любое счетное пересечение измеримых множеств измеримо.*

5. *Критерии измеримости*

Если F есть топологическое векторное пространство, то всякая размещенная на измеримых множествах (§ 4, n° 8, опр. 4) функция со значениями в F, очевидно, измерима (следствие 3 из теоремы 1); такая функция f принимает лишь конечное число значений, и для любого $y \in F$ множество $\overset{-1}{f}(y)$ измеримо. Вообще, пусть F — любое топологическое пространство и f — отображение пространства E в F, принимающее конечное число различных значений a_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$; если множества $A_i = \overset{-1}{f}(a_i)$ измеримы, то функция f измерима. Действительно, для любого компактного множества K и для каждого из множеств $A_i \cap K$ существуют пренебрежимое множество $N_i \subset A_i \cap K$ и разбиение множества $A_i \cap K \cap \complement N_i$, состоящее из последовательности (K_{in}) компактных множеств; а так как K есть объединение множеств $A_i \cap K$ и сужение функции f на каждое из K_{in} постоянно, а значит, непрерывно, то f измерима. Ради краткости мы будем говорить, что отображение f пространства E в F есть *измеримая размещенная функция*, если она принимает конечное число значений и если для любого $y \in F$ множество $\overset{-1}{f}(y)$ измеримо.

Теорема 3. *Для того чтобы отображение f пространства E в метризуемое пространство F было измеримо, необходимо и достаточно, чтобы для любого компактного множества $K \subset E$ существовала такая последовательность (g_n) измеримых размещенных функций со значениями в F, что $g_n(x)$ стремится к $f(x)$ для почти всех $x \in K$.*

Достаточность вытекает из теоремы Егорова и из принципа локализации. Докажем необходимость: по условию найдутся пренебрежимое множество $N \subset K$ и разбиение (K_m) множества $K \cap \complement N$, состоящее из таких компактных множеств, на каждом из которых f непрерывна. Чтобы выбрать последовательность (g_n), достаточно проделать следующее: обозначим через d расстояние, согласующееся с топологией пространства F; затем, согласно лемме 1, § 4, n° 8, для каждого K_i с индексом $i \leqslant n$ выберем конечное разбиение этого множества на такие достаточно малые интегрируемые множества A_{ij} $(1 \leqslant j \leqslant q_i)$, чтобы колебание функции f на каждом из A_{ij} не превосходило $\frac{1}{n}$; положим g_n постоянной на каждом из A_{ij} и равной одному из значений функции f на этом множестве (для $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant q_i$), а для любой точки из E, не принадлежащей никакому из A_{ij}, равной некоторому фиксированному элементу $a \in F$. Ясно, что последовательность $(g_n(x))$ сходится к $f(x)$ в любой точке из K, не принадлежащей N.

Следствие 1. *Пусть* $\mathbf{f}$ — *измеримое отображение пространства* E *в банахово пространство* F; *для любого компактного множества* $K \subset E$ *существует последовательность* $(\mathbf{g}_n)$ *таких измеримых размещенных функций с носителем в* K, *что* $|\mathbf{g}_n(x)| \leqslant |\mathbf{f}(x)|$ *для любого* $x \in E$ *и что* $\mathbf{g}_n(x)$ *стремится к* $\mathbf{f}(x)$ *для почти всех* $x \in K$.

Сохранив обозначения, введенные при доказательстве теоремы 3, и обозначив через $\mathbf{a}_{ij}$ значение функции $\mathbf{f}$ на A_{ij}, мы получим искомую последовательность, взяв в качестве значения функции $\mathbf{g}_n$ на A_{ij} точку 0, если $|\mathbf{a}_{ij}| \leqslant \frac{1}{n}$, и точку $\mathbf{a}_{ij}\left(1 - \frac{1}{n\,|\mathbf{a}_{ij}|}\right)$ в противном случае; наконец, на дополнении объединения множеств A_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant q_i)$ положим $\mathbf{g}_n(x) = 0$.

Следствие 2. *Пусть* E — *локально компактное пространство, счетное в бесконечности. Если* f *есть измеримое отображение пространства* E *в метризуемое пространство* F, *то найдется такая последовательность* (g_n) *измеримых размещенных функций со значениями в* F, *что* $g_n(x)$ *стремится к* $f(x)$ *для почти всех* $x \in E$.

В самом деле, если E есть объединение возрастающей последовательности (A_n) компактных множеств, то непустые множества

$A_n \cap \complement A_{n-1}$ образуют разбиение пространства E на интегрируемые множества; следовательно, существуют такое пренебрежимое множество $N \subset E$ и такое разбиение множества $\complement N$, состоящее из последовательности (K_n) компактных множеств, что сужение функции f на каждое из K_n непрерывно; тогда без всяких изменений повторяется доказательство теоремы 3.

Предложение 8. *Пусть f — измеримое отображение пространства E в топологическое пространство F; прообраз при отображении f любого замкнутого* (соотв. *открытого*) *в F множества измерим.*

Достаточно провести доказательство для прообраза $\overset{-1}{f}(A)$ замкнутого в F множества A. Пусть K — компактное подмножество из E; существуют пренебрежимое множество $N \subset K$ и разбиение (K_n) множества $K \cap \complement N$, состоящее из таких компактных множеств, что сужение функции f на каждое из K_n непрерывно. Тогда пересечение $K_n \cap \overset{-1}{f}(A)$ служит прообразом замкнутого множества A при сужении отображения f на K_n; значит, оно является замкнутым в K_n множеством и, стало быть, компактно. Таким образом, множество $K \cap \overset{-1}{f}(A)$ представляет собой объединение пренебрежимого множества $N \cap \overset{-1}{f}(A)$ и компактных множеств $K_n \cap \overset{-1}{f}(A)$, что доказывает измеримость множества $\overset{-1}{f}(A)$.

Теорема 4. *Пусть F — метризуемое пространство и d — расстояние, согласующееся с его топологией. Для того чтобы отображение f пространства E в F было измеримо, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:*

a) *прообраз при отображении f всякого замкнутого шара из F измерим;*

b) *для любого компактного множества $K \subset E$ существует такое счетное подмножество H из F, что $f(x) \in \overline{H}$ для почти всех $x \in K$.*

Необходимость условия a) вытекает из предложения 8; что же касается условия b), то при обозначениях, принятых в теореме 3, оно будет выполнено, если в качестве H взять счетную последовательность, составленную из значений всех функций g_n.

Покажем теперь, что условия a) и b) достаточны. Обозначив через K произвольное компактное множество из E и изменяя, в случае надобности, функцию f на пренебрежимом множестве, мы можем предположить, что $f(K)$ содержится в замыкании счетного множества точек из F, которые мы расположим в последовательность (a_n). Через $A_{n,p}$ обозначим множество тех $x \in K$, для которых $d(f(x), a_n) \leqslant \frac{1}{p}$. Из условия a) вытекает, что $A_{n,p}$ измеримо. Определим для фиксированного p по индукции последовательность множеств $B_{n,p} \subset K$, положив $B_{1,p} = A_{1,p}$ и $B_{n+1,p} = A_{n+1,p} \cap \complement(\bigcup_{k \leqslant n} A_{k,p})$; множества $B_{n,p}$ измеримы, и те из них, которые не пусты, образуют разбиение множества K. Обозначим через $g_{m,p}$ функцию, равную a_i на множестве $B_{i,p}$ для $1 \leqslant i \leqslant m$ и равную постоянной $b \in F$ на дополнении объединения этих множеств; $g_{m,p}$ — измеримая размещенная функция; когда m неограниченно возрастает, $g_{m,p}$ стремится просто к функции f_p, равной a_n на $B_{n,p}$ $(n \geqslant 1)$ и b на $\complement K$, и значит (теорема 2), f_p измерима. Когда p неограниченно возрастает, то $f_p(x)$ стремится к $f(x)$ при всех $x \in K$ и к b для $x \in \complement K$; следовательно, сужение функции f на K измеримо, и, стало быть, на основании принципа локализации, сама функция f тоже измерима.

Замечания. 1) Одного условия a) недостаточно для измеримости функции f (упр. 5).

2) Если топология пространства F имеет *счетный базис*, то условие b) теоремы 4 автоматически выполняется для любого отображения пространства E в F. При этом в процессе доказательства выясняется, что достаточно предположить, что при отображении f прообразы замкнутых шаров с рациональным радиусом и с центром, принадлежащим некоторому счетному всюду плотному множеству из F, являются измеримыми множествами.

3) Условие a) может быть заменено условием, что при отображении f прообраз всякого открытого шара из F измерим.

Особого упоминания заслуживает случай (конечных или нет) числовых функций:

Предложение 9. *Пусть D — счетное всюду плотное множество в $\mathbf{R}$. Для того чтобы (конечная или нет) числовая функция f была измерима, достаточно (и необходимо), чтобы для любого $a \in D$ множество тех $x \in E$, в которых $f(x) \geqslant a$, было измеримо.*

В самом деле, если это условие выполняется, то для любого $b \in \overline{\mathbf{R}}$ множество тех x, в которых $f(x) \geqslant b$, измеримо, как пересечение множеств (образующих счетное семейство), состоящих из тех x, в которых $f(x) \geqslant a$, когда a пробегает множество точек из D, не превосходящих b. Множество тех x, в которых $f(x) < b$, измеримо, как дополнение измеримого множества. Наконец, если b конечно, то множество тех x, в которых $f(x) \leqslant b$, измеримо, как пересечение множеств, состоящих из тех x, в которых $f(x) < b + \frac{1}{n}$; множество $\overset{-1}{f}(-\infty)$ тоже измеримо, как пересечение множеств, состоящих из тех x, в которых $f(x) < n$, где n пробегает $\mathbf{Z}$. Окончательно получаем, что прообраз при отображении f любого замкнутого интервала из $\overline{\mathbf{R}}$ измерим, как пересечение двух измеримых множеств, и значит, применима теорема 4.

Можно было бы также показать, что достаточно, чтобы для любого $a \in D$ множество тех x, в которых $f(x) > a$, было измеримо.

Следствие. *Всякая полунепрерывная снизу* (соотв. *сверху*) *функция измерима.*

Действительно, если f полунепрерывна снизу, то множество тех $x \in E$, в которых $f(x) \leqslant a$, замкнуто при любом $a \in \overline{\mathbf{R}}$.

Если F есть банахово пространство, то имеет место следующий критерий:

Предложение 10. *Пусть F — банахово пространство. Для того чтобы отображение $\mathbf{f}$ пространства E в F было измеримо, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:*

a) *для любой непрерывной на F линейной формы $\mathbf{a}'$ числовая функция $x \to \langle \mathbf{f}(x), \mathbf{a}' \rangle$ измерима;*

b) *для любого компактного множества $K \subset F$ существует такое счетное подмножество $H \subset F$, что $\mathbf{f}(x) \in \overline{H}$ для почти всех $x \in K$.*

Все сводится к доказательству того, что выполняется условие а) теоремы 4. Обозначим через B замкнутый шар в F с центром $\mathbf{a}$ и радиусом r; согласно принципу локализации достаточно показать, что для любого компактного множества $K \subset E$ множество $A = K \cap \overset{-1}{\mathbf{f}}(B)$ измеримо. Изменяя в случае надобности $\mathbf{f}$ на пренебрежимом множестве, мы можем предположить, что $\mathbf{f}(K)$ содержится в замыкании счетного подмножества H из F. Пусть V — замкнутое векторное подпространство пространства F, порожденное множеством $H \cup \{\mathbf{a}\}$. Так как в V существует счетное всюду плотное множество, то мы знаем (Топ. вект. пр-ва, гл. IV), что в сопряженном к F пространстве F' найдется такая последовательность $(\mathbf{a}'_n)$, что для любого $\mathbf{z} \in V$ имеет место равенство $|\mathbf{z}| = \sup_n |\langle \mathbf{z}, \mathbf{a}'_n \rangle| / |\mathbf{a}'_n|$; следовательно, множество A, состоящее из тех $x \in K$, в которых $|\mathbf{f}(x) - \mathbf{a}| \leqslant r$, является пересечением множества K и множеств, определенных неравенствами

$$|\langle \mathbf{f}(x), \mathbf{a}'_n \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{a}'_n \rangle| \leqslant r\, |\mathbf{a}'_n|;$$

а поскольку эти множества, по условию, измеримы, то A измеримо.

Наконец, отметим, что предложение 8 позволяет уточнить следующим образом теорему 3 для случая, когда пространство F метризуемо и компактно:

Предложение 11. *Если F есть метризуемое и компактное пространство, то всякое измеримое отображение f пространства E в F есть* равномерный *предел* (на всем E) *последовательности измеримых размещенных функций.*

Пусть d означает расстояние, согласующееся с топологией в F. Для любого целого n найдется *конечное* число таких точек $a_k \in F$, что замкнутые шары B_k с центром a_k и радиусом $\frac{1}{n}$ образуют покрытие пространства F; значит, множества $A_k = \overset{-1}{f}(B_k)$ измеримы (предл. 8) и образуют покрытие пространства E. Следовательно (§ 4, n° 8, лемма 1), существует такое разбиение (C_i) пространства E на конечное число измеримых множеств, что каждое из A_h является объединением конечного числа множеств C_i. Обозначим через c_i некоторую точку из C_i, а через g_n — измеримую размещенную функцию, равную $f(c_i)$ на C_i (для каждого индекса i). Ясно, что $d(f(x), g_n(x)) \leqslant \frac{2}{n}$ для всех $x \in E$.

6. *Критерии интегрируемости*

Теорема 5. *Для того чтобы отображение* $\mathbf{f}$ *пространства* E *в банахово пространство* F *было интегрируемо в p-й степени* ($1 \leqslant p < +\infty$), *необходимо и достаточно, чтобы* $\mathbf{f}$ *было измеримо и чтобы* $N_p(\mathbf{f})$ *было конечно.*

Условие *необходимо*: в самом деле, если $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_F^p$, то найдется последовательность $(\mathbf{g}_n)$ непрерывных функций с компактным носителем, сходящаяся почти всюду к $\mathbf{f}$ (§ 3, следствие 2 из теоремы 3); тогда, в силу теоремы 2, отображение $\mathbf{f}$ будет измеримо.

Для доказательства достаточности мы предварительно установим две леммы;

Лемма 1. *Всякое измеримое множество, содержащееся в интегрируемом множестве, интегрируемо.*

В самом деле, пусть A — измеримое множество, B — интегрируемое множество и $A \subset B$; тогда существуют пренебрежимое множество $N \subset B$ и разбиение (K_n) множества $B \cap \complement N$ на компактные множества; таким образом, A является объединением пренебрежимого множества $A \cap N$ и последовательности интегрируемых множеств $A \cap K_n$ (предл. 3), сумма мер которых конечна (§ 4, предл. 6); отсюда следует, что A интегрируемо (§ 4, следствие из предл. 8).

Лемма 2. *Пусть* $\mathbf{g}$ — *такая функция со значениями в* F, *что* $N_p(\mathbf{g}) < +\infty$ (то есть функция из $\mathcal{F}_F^p$). *Тогда множество* A *тех точек* $x \in E$, *в которых* $\mathbf{g}(x) \neq 0$, *содержится в объединении пренебрежимого множества и последовательности компактных множеств.*

В самом деле, обозначим через A_n множество тех точек $x \in E$, в которых $|\mathbf{g}(x)| \geqslant \frac{1}{n}$; тогда A будет объединением множеств A_n и будет выполняться неравенство $\varphi_{A_n} \leqslant n|\mathbf{g}|$, откуда $\mu^*(A_n) \leqslant (nN_p(\mathbf{g}))^p$; значит, A_n содержится в объединении пренебрежимого множества и последовательности компактных множеств (§ 4, следствие 3 из теоремы 4); стало быть, то же самое справедливо и для A.

После того, как мы доказали эти леммы, рассмотрим вначале случай, когда $\mathbf{f}$ имеет *компактный* носитель K. Согласно следствию 1 из теоремы 3 существует последовательность $(\mathbf{g}_n)$ таких измеримых размещенных функций, что $|\mathbf{g}_n(x)| \leqslant |\mathbf{f}(x)|$ в каждой точке $x \in E$ и что $\mathbf{g}_n(x)$ стремится почти всюду к $\mathbf{f}(x)$. Но $\mathbf{g}_n$ представляет собой линейную комбинацию характеристических функций измеримых множеств из K; а так как эти множества, по лемме 1, интегрируемы, то $\mathbf{g}$ принадлежит $\mathscr{L}_F^p$. Поскольку же $N_p(\mathbf{f}) < +\infty$, то теорема Лебега (§ 3, теорема 6) показывает, что $\mathbf{f}$ тоже принадлежит $\mathscr{L}_F^p$.

В общем случае из леммы 2 вытекает существование такой последовательности (K_n) компактных множеств, что $\mathbf{f}(x)$ обращается в нуль почти всюду на дополнении объединения множеств K_n. Обозначим через $\mathbf{f}_n$ функцию, равную $\mathbf{f}(x)$ на K_n и 0 вне его; $\mathbf{f}_n$ измерима (предл. 7), а поскольку $|\mathbf{f}_n| \leqslant |\mathbf{f}|$, то, в силу уже доказанного, $\mathbf{f}_n$ принадлежат $\mathscr{L}_F^p$. А так как $\mathbf{f}(x)$ равна почти всюду пределу последовательности функций $\mathbf{f}_n(x)$, то теорема Лебега снова показывает, что $\mathbf{f} \in \mathscr{L}_F^p$, чем и завершается доказательство.

Следует отметить, что *локально пренебрежимая*, но *не пренебрежимая* функция не интегрируема; таким образом, функция, равная *локально почти всюду* интегрируемой функции, не обязана быть интегрируемой.

Следствие 1. *Для того чтобы множество было интегрируемо, необходимо и достаточно, чтобы оно было измеримо и имело конечную внешнюю меру.*

Следствие 2. *Пусть (F_n) — последовательность топологических пространств, пусть для каждого индекса n через f_n обозначено измеримое отображение пространства E в F_n, и пусть $f(x) = (f_n(x)) \in F = \prod_n F_n$; наконец, пусть $\mathbf{u}$ — непрерывное отображение пространства $f(E)$ в банахово пространство G. Для того чтобы функция $\mathbf{g}(x) = \mathbf{u}(f(x))$ была интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы $N_1(\mathbf{g}) < +\infty$.*

Действительно, $\mathbf{g}$ измерима (теорема 1).

Следствие 3. *Для любой интегрируемой функции* $\mathbf{f}$ *и любого измеримого множества* A *функция* $\mathbf{f}\varphi_A$ *интегрируема.*

В самом деле, из теоремы 5 и следствия 6 теоремы 1 вытекает, что $\mathbf{f}\varphi_A$ измерима и $N_1(\mathbf{f}\,\varphi_A)\leqslant N_1(\mathbf{f})$.

Положим $\int\limits_A \mathbf{f}\,d\mu=\int \mathbf{f}\varphi_A\,d\mu$ для любой интегрируемой функции $\mathbf{f}$ и любого измеримого множества A. Будем также для любой (конечной или нет) функции $f\geqslant 0$ вместо $\int^* f\varphi_A\,d\mu$ писать $\int\limits_A^* f\,d\mu$.

Замечание. Пусть S — носитель меры μ. Так как множество $\complement S$ пренебрежимо, то для любой функции $\mathbf{f}$ функция $\mathbf{f}\varphi_S$ равна $\mathbf{f}$ почти всюду; следовательно, для интегрируемости функции $\mathbf{f}$ необходимо и достаточно, чтобы была интегрируема функция $\mathbf{f}\varphi_S$, и тогда $\int \mathbf{f}\,d\mu=\int\limits_S \mathbf{f}\,d\mu$. В частности, когда S компактно, всякое непрерывное отображение $\mathbf{f}$ пространства E в F интегрируемо, так как функция $\mathbf{f}\varphi_S$ измерима и $|\mathbf{f}\varphi_S|\leqslant a\cdot\varphi_S$, где через a обозначена верхняя грань функции $|\mathbf{f}|$ на S; при этом для любой непрерывной функции $\mathbf{g}$ с компактным носителем, равной $\mathbf{f}$ на S, имеем $\int \mathbf{g}\,d\mu=\int \mathbf{f}\,d\mu$; следовательно, интеграл $\int \mathbf{f}\,d\mu$ совпадает со значением, полученным в результате продолжения, указанного в гл. III, § 3, n° 4.

7. *Случай абстрактных мер*

Мы ограничимся случаем, когда рассматриваемая абстрактная мера μ определена заданием на клане подмножеств множества A аддитивной функции множества λ, удовлетворяющей аксиоме (ME′) из § 4, n° 11. В этом случае *измеримое* (соотв. *локально пренебрежимое*) множество из A определяется как множество, пересечение которого с любым интегрируемым множеством интегрируемо (соотв. пренебрежимо). Ясно, что само множество A измеримо, что измеримые множества образуют клан и что любое интегрируемое множество измеримо.

Отображение f множества A в *метризуемое* пространство F, принимающее конечное число значений, называется *измеримой размещенной функцией*, если для любого $y\in F$ множество $\overset{-1}{f}(y)$ измеримо. Говорят, что отображение f множества A в F *измеримо*, если для любого интегрируемого подмножества K из A существует такая последовательность (g_n) измеримых размещенных функций со значениями в F, что $g_n(x)$ стремится к $f(x)$ для почти всех $x \in K$. При этом определении теорема 1 распространяется сразу, если предположить, что F_n и G метризуемы и что множеств F_n имеется лишь конечное число.

После этого предложение 8 (для метризуемого пространства F) доказывается следующим образом: пусть K — такое интегрируемое множество, на котором функция f служит пределом последовательности измеримых размещенных функций f_n, и пусть U — открытое множество в F; пусть d — расстояние, согласующееся с топологией в F, и U_p — множество тех $z \in F$, для которых $d(z, \complement U) > \frac{1}{p}$; тогда $\overline{U}_p \subset U$ и U есть объединение открытых множеств U_p $(p \geqslant 1)$. Для любого $x \in K$ такого, что $f(x) \in U$, найдутся такие два целых числа $n_0(x)$ и $p(x)$, что $f_n(x) \in U_p(x)$ для $n \geqslant n_0(x)$. Отсюда выводим, что если положить $G_{np} = K \cap \bigcup_{m \geqslant n} \overset{-1}{f_m}(U_p)$, то каждое $x \in K \cap \overset{-1}{f}(U)$ будет принадлежать одному из G_{np}; обратно, если $x \in G_{np}$, то $f_m(x) \in U_p$ для $m \geqslant n$, и, следовательно, $f(x) \in \overline{U}_p \subset U$, а это показывает, что $K \cap \overset{-1}{f}(U)$ есть объединение множеств G_{np}. Но каждое из множеств $K \cap \overset{-1}{f_m}(U)$, по определению измеримых размещенных функций, интегрируемо; значит, интегрируемы и G_{np}, а стало быть, также и $K \cap \overset{-1}{f}(U)$. Отсюда, принимая во внимание определение измеримых множеств, заключаем, что множество $\overset{-1}{f}(U)$ измеримо.

Для доказательства аналога теоремы Егорова вначале покажем, что для любого интегрируемого подмножества $K \subset A$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое интегрируемое подмножество $K_1 \subset K$, что $\mu(K \cap \complement K_1) \leqslant \varepsilon$ и что $f_\alpha(x)$ *равномерно* сходится на K_1 к $f(x)$; рассуждение проводится точно так же, как в теореме 2, с использованием того факта, что $d(f_\alpha(x), f_\beta(x))$, согласно теореме 1, измеримо и что, следовательно, множество тех $x \in E$, в которых $d(f_\alpha(x), f_\beta(x)) \geqslant \frac{1}{r}$, на основании предложения 8, измеримо.

Этот результат позволяет видоизменить определение измеримых функций: если f измерима, то для любого интегрируемого подмножества K из A и любого $\varepsilon > 0$ существует такое интегрируемое подмножество $K_1 \subset K$, что $\mu(K \cap \complement K_1) \leqslant \varepsilon$ и что на K_1 функция f служит *равномерным* пределом последовательности измеримых размещенных функций. Обратно, если это свойство выполняется, то, придавая ε последовательность значений, стремящихся к 0, мы придем к тому, что существуют пренебрежимое множество $N \subset K$ и такое разбиение (K_n) множества $K \cap \complement N$ на последовательность интегрируемых множеств, что на каждом K_n функция f служит равномерным пределом последовательности $(f_{mn})_{m \in \mathbf{N}}$ измеримых размещенных функций. Если обозначить через g_n измеримую размещенную функцию, равную f_{nh} на K_h для $1 \leqslant h \leqslant n$ и некоторому фиксированному элементу $b \in F$ на дополнении объединения множеств K_h $(1 \leqslant h \leqslant n)$, то f равна почти всюду на K пределу последовательности измеримых размещенных функций g_n и, значит, измерима.

Теперь можно завершить доказательство теоремы, соответствующей теореме 2; расположим индексы α в некоторую последовательность (α_m) и каждому индексу m сопоставим такое интегрируемое множество H_m, что $H_m \subset K$, $\mu(K_1 \cap \complement H_m) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^m}$ и что функция f_{α_m} является на H_m равномерным пределом измеримых размещенных функций. Если K_2 — пересечение множеств H_m, то K_2 измеримо, $\mu(K_1 \cap \complement K_2) \leqslant \varepsilon$ и на K_2 каждая функция f_α служит равномерным пределом измеримых размещенных функций; отсюда следует, что на K_2 функция f является равномерным пределом измеримых размещенных функций, чем доказано, что f измерима.

Теорема 3 может служить определением; доказательство ее следствия 1 получается легко, если принять во внимание видоизмененное выше определение измеримых функций. Доказательство теоремы 4 переносится лишь с одним изменением, состоящим в замене «интегрируемый» на «компактный».

Наконец, без труда убеждаемся в том, что для распространения доказательства теоремы 5 достаточно показать, что всякое множество M *конечной* внешней меры содержится в интегрируемом множестве. Но, по условию, $\varphi_M \leqslant \sup_n g_n$, где (g_n) — возрастающая последовательность таких интегрируемых размещенных функций, что $\sup_n \mu(g_n) < +\infty$; если K_n есть интегрируемое множество тех x, в которых $g_n(x) \geqslant 1$, то M содержится в объединении K возрастающей последовательности множеств K_n, а так как $\varphi_{K_n} \leqslant g_n$, то K интегрируемо (§ 4, предл. 8).

Упражнения. °1) Пусть I — полуоткрытый интервал$]a, b]$ из $\mathbf{R}$, и пусть $F = \mathbf{R}^I$ — пространство всех отображений интервала I в $\mathbf{R}$, наделенное топологией простой сходимости; для любого $x \in I$ через $\mathbf{f}(x)$ обозначим отображение $t \to |x - t|$ интервала I в $\mathbf{R}$, являющееся элементом пространства F; отображение $\mathbf{f}$ интервала I в F непрерывно. Показать, что функция $\mathbf{f}$ дифференцируема слева в каждой точке из I, но что ее левая производная $\mathbf{f}'_g$ будет функцией (со значениями в F), не измеримой относительно меры Лебега, хотя она будет служить простым пределом последовательности непрерывных функций и для каждого $t \in I$ функция $\mathrm{pr}_t \circ \mathbf{f}'_g$ будет измеримой числовой функцией (заметить, что $\mathbf{f}'_g$ не будет непрерывна справа ни в одной точке из I, и применить упр. 1 из «Общей топ.», гл. IV, § 2).

°2) Пусть μ — мера Лебега на $E = [0, 1[$ и (H_n) — разбиение интервала E на бесконечную последовательность множеств мощности континуума, ни одно из которых не является измеримым и которые обладают тем свойством, что для любого объединения H конечного числа множеств H_n справедливо равенство $\mu_*(H) = 0$ (§ 4, упр. 8). Пусть, далее, σ_n — взаимно однозначное отображение интервала $\left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ на H_n. Пусть для любого числа y, удовлетворяющего условиям $0 < y \leqslant 1$, через n обозначено такое целое число, что $\frac{1}{n+1} < y \leqslant \frac{1}{n}$. Определим f_y как характеристическую функцию сводящегося к точке множества $\sigma_n(y)$; для любого $x \in E$ и при y, стремящемся к 0, функция $f_y(x)$ стремится к 0. Показать, что не существует ни одного такого компактного множества $K \subset \dot{E}$ строго положительной меры, что f_y равномерно стремится к 0 на K.

3) Пусть (f_{mn}) — двойная последовательность измеримых отображений пространства E в метризуемое пространство F. Допустим, что при любом m последовательность $(f_{mn})_{n\geq 1}$ сходится локально почти всюду к функции g_n и что последовательность (g_m) сходится локально почти всюду к функции h. Показать, что для любого компактного подмножества K из E найдутся такие две строго возрастающие последовательности (m_k) и (n_k) целых чисел, что последовательность функций $_{m_k, n_k}$ сходится почти всюду на K к h (заметить, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое компактное множество $K_1 \subset K$, что $\mu(K \cap \complement K) \leqslant \varepsilon$ и что на K_1 последовательность (g_m) и каждая из последовательностей (f_{mn}) равномерно сходится).

°4) Пусть для любого целого $n \geqslant 1$ $f_n(x) = [2^n x] - 2[2^{n-1} x]$. Пусть, далее, в компактном пространстве отображений прямой $\mathbf{R}$ в $\{0, 1\}$ (наделенном топологией простой сходимости) через f обозначено предельное значение последовательности (f_n). Показать, что для любого двоично-рационального числа r равенство $f(r+x) = f(x)$ справедливо для любого $x \in \mathbf{R}$, а равенство $f(r-x) = 1 - f(x)$ — для любого $x \in \mathbf{R}$, отличного от двоично-рационального числа. Вывести отсюда, что функция f не измерима относительно меры Лебега μ. (Рассуждать от противного; обозначив через A множество тех $x \in [0, 1]$, в которых $f(x) = 1$, допустим, что A измеримо и $\mu(A) = \alpha > 0$; показать, что существует такое множество I, представляющее собой объединение конечного числа открытых интервалов из $]0, 1[$, что $\mu(I \cap \complement A) \leqslant \frac{\alpha}{4}$ и $\mu(A \cap \complement I) \leqslant \frac{\alpha}{4}$; взяв интервалы, содержащиеся в I и имеющие вид $\left]\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[$, показать, что для двоично-рационального r и не двоично-рационального x не будет выполняться соотношение $f(r-x) = 1 - f(x)$.)

5) Пусть E — интервал $[0, 1]$ из $\mathbf{R}$ и F — гильбертово пространство, имеющее ортонормированный базис $(\mathbf{e}_t)_{0 \leqslant t \leqslant 1}$, равномощный интервалу E. Показать, что отображение $\mathfrak{f}$ интервала E в F, обладающее тем свойством, что $\mathfrak{f}(t) = \mathbf{e}_t$ для $0 \leqslant t \leqslant 1$, не измеримо относительно меры Лебега, но что прообраз при отображении $\mathfrak{f}$ всякого замкнутого шара из F измерим.

°6) Пусть F — банахово пространство и $\mathfrak{f}$ — такое измеримое отображение пространства E в F, что множество A тех $x \in E$, в которых $\mathbf{f}(x) \neq 0$, является счетным объединением интегрируемых множеств. Показать, что существует такая последовательность $(\mathbf{f}_n)$ непрерывных функций с компактным носителем, принимающих значения в F, что последовательность $(\mathbf{f}_n(x))$ сходится к $\mathbf{f}(x)$ почти всюду на E (заметить, что, с одной стороны, A есть объединение пренебрежимого множества N и последовательности компактных множеств K_n попарно без общих точек, обладающих тем свойством, что сужение функции $\mathbf{f}$ на каждое из K_n непрерывно; а с другой стороны, существует убывающая последовательность (U_n) открытых множеств, содержащих A и таких, что $\mu(U_n \cap \complement A)$ стремится к 0 при неограниченном возрастании n; и, наконец, применить упр. 11 из «Общей топ.», гл. X, § 5).

7) Пусть $\mathbf{f}$ — измеримое отображение пространства E в банахово пространство F. Для любого целого (положительного или отрицательного) рационального n через A_n обозначим множество тех $x \in E$, в которых $2^n \geqslant |\mathbf{f}(x)| > 2^{n-1}$. Для того чтобы функция $\mathbf{f}$ была интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы ряд с общим членом $2^n \mu(A_n)$ $(n \in \mathbf{Z})$ сходился.

°8) Пусть $(\mathbf{f}_n)$ — последовательность интегрируемых функций на E, сходящаяся просто на E к функции $\mathbf{f}$.

a) Показать, что если $\mathbf{f}$ интегрируема и если

$$\int \mathbf{f}\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \mathbf{f}_n\,d\mu,$$

то для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такое интегрируемое множество A, такая интегрируемая функция $g \geqslant 0$ и такое целое n_0, что при любом $n \geqslant n_0$ $\left|\int \mathbf{f}_n \varphi_{\complement A}\,d\mu\right| \leqslant \varepsilon$ и $|\mathbf{f}_n(x)| \leqslant g(x)$ для всех $x \in A$ (рассмотреть такое интегрируемое множество B, что $\int |\mathbf{f}|\,\varphi_{\complement B}\,d\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ и что $\mathbf{f}$ ограничена на B, и применить теорему Егорова).

b) Допустим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое измеримое множество A, такая интегрируемая функция $g \geqslant 0$ и такое целое n_0, что при любом $n \geqslant n_0$ $\int |\mathbf{f}_n|\,\varphi_{\complement A}\,d\mu \leqslant \varepsilon$ и $|\mathbf{f}_n(x)| \leqslant g(x)$ для всех $x \in A$. Показать, что при этих условиях $\mathbf{f}$ интегрируема и что $\widetilde{\mathbf{f}}_n$ стремится к $\widetilde{\mathbf{f}}$ в пространстве L^1. И обратно.

c) Предположим, что $F = \mathbf{R}$; построить примеры, в которых условия a) не были бы достаточными, а условия b) — необходимыми для интегрируемости функции $\mathbf{f}$ и для того, чтобы $\int \mathbf{f}\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \mathbf{f}_n\,d\mu$.

°9) Пусть μ — положительная мера на E. Показать, что если множество A измеримо, то для *любого* подмножества $B \subset E$ выполняется равенство

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap \complement A)$$

(в случае $\mu^*(B) < +\infty$ рассмотреть такое интегрируемое множество B_1, что $B \subset B_1$ и $\mu^*(B) = \mu(B_1)$ (§ 4, упр. 7b))). Обратно, показать, что если множество A удовлетворяет этому условию, то оно измеримо (ср. § 4, упр. 6e)).

10) Пусть (A_n) — такая последовательность подмножеств из E, что для каждого индекса n существует измеримое множество $B_n \supset A_n$, причем множества B_n не имеют попарно общих точек. Показать, что

$$\mu^*\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu^*(A_n) \quad \text{и} \quad \mu_*\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu_*(A_n).$$

11) Пусть μ — положительная мера на E. Определенная на E (конечная или нет) числовая функция f называется *квазиинтегрируемой*, если она измерима и если $\mu^*(f) = \mu_*(f)$ (§ 4, упр. 5). В этом случае полагают $\mu(f) = \mu^*(f) = \mu_*(f)$; вместо $\mu(f)$ пишут еще $\int f\, d\mu$.

a) Показать, что если f и g квазиинтегрируемы и если сумма $\mu(f) + \mu(g)$ определена, то функция $f + g$ определена почти всюду, квазиинтегрируема и $\mu(f+g) = \mu(f) + \mu(g)$.

b) Вывести из a), что для того, чтобы f была квазиинтегрируемой, необходимо и достаточно, чтобы f была измерима и чтобы по крайней мере одно из чисел $\mu^*(f^+)$ и $\mu^*(f^-)$ было конечно; тогда $\mu(f) = \mu^*(f^+) - \mu^*(f^-)$.

°12) Пусть E — компактное пространство и μ — положительная мера на E. Говорят, что ограниченная на E числовая функция f непрерывна почти всюду (относительно меры μ) на E, если дополнение множества точек из E, в которых f непрерывна (относительно E), имеет меру нуль.

a) Указать пример такой непрерывной почти всюду функции f, для которой не существует ни одной непрерывной функции g, равной f почти всюду.

b) Допустим, что носитель меры μ совпадает с E. Показать, что для того, чтобы ограниченная на E числовая функция f была почти всюду равна функции, непрерывной почти всюду на E, необходимо и достаточно, чтобы существовало подмножество H из E, имеющее пренебрежимое дополнение и такое, что сужение f_H функции f на H непрерывно (для доказательства достаточности заметить, что H всюду плотно в E и что продолжение функции f_H на E, полунепрерывное снизу на E (Общая топ., гл. IV, § 6, предл. 4), является непрерывной (относительно E) функцией в каждой точке из H; вывести отсюда, что f измерима).

c) Вывести из b), что если E, кроме того, *метризуемо*, то для любой ограниченной функции f, почти всюду равной непрерывной почти всюду на E функции, существует последовательность (f_n) непрерывных на E функций, сходящаяся в *каждой* точке из E и имеющая предел, почти всюду равный f (ср. § 4, упр. 4c)) (заметить, что предложение справедливо для полунепрерывной снизу функции f).

d) Пусть A — совершенное множество без внутренних точек, содержащееся в E и имеющее строго положительную меру (ср. § 4, упр. 4a)). Показать, что не существует ни одной непрерывной почти всюду на E функции, почти всюду равной полунепрерывной сверху функции φ_A.

°13) Пусть E — компактное пространство и μ — положительная мера на E. Говорят, что множество $\mathfrak{P}$ конечных разбиений пространства E на интегрируемые множества, фильтрующиеся по отношению «ω менее мелкое, чем ω'», *фундаментально*, если для всякого окружения V равномерной структуры пространства E существует разбиение $\omega = (A_i)$ пространства E, принадлежащее $\mathfrak{P}$ и такое, что все A_i малы порядка V. Для всякого конечного разбиения $\omega = (A_k)$, принадлежащего $\mathfrak{P}$, и любой ограниченной на E числовой функции f положим $s_\omega(f) = \sum_k \inf_{x \in A_k} f(x) \cdot \mu(A_k)$ и $S_\omega(f) = \sum_k \sup_{x \in A_k} f(x) \cdot \mu(A_k)$ («римановы суммы» для функции f и разбиения ω).

a) Показать, что $s_\omega(f) \leqslant \mu_*(f) \leqslant \mu^*(f) \leqslant S_\omega(f)$ для любого разбиения $\mathfrak{P}$ и что и $s_\omega(f)$ и $S_\omega(f)$ стремятся к пределу по упорядоченному фильтрующемуся множеству $\mathfrak{P}$.

b) Показать, что если $\mathfrak{P}$ есть (фундаментальное) множество *всех* конечных разбиений пространства E, состоящих из интегрируемых множеств, то для любой интегрируемой ограниченной функции f суммы $s_\omega(f)$ и $S_\omega(f)$ стремятся к $\int f\,d\mu$ по множеству $\mathfrak{P}$.

c) Если f — ограниченная функция, непрерывная почти всюду на E, то $s_\omega(f)$ и $S_\omega(f)$ стремятся к $\int f\,d\mu$ по *любому* фундаментальному множеству $\mathfrak{P}$ конечных разбиений пространства E на интегрируемые множества (для любого $\varepsilon > 0$ рассмотреть замкнутое множество A точек, в которых колебание функции f больше или равно ε, и для всякого разбиения $\mathfrak{P}$, множества которого малы порядка V, рассмотреть отдельно те множества из ω, которые пересекаются с $V(A)$, и те, которые не пересекаются). Показать, что если f ограничена и полунепрерывна снизу на E, то $s_\omega(f)$ стремится к $\int f\,d\mu$ по *любому* фундаментальному множеству $\mathfrak{P}$ конечных разбиений пространства E на интегрируемые множества (представить f как верхнюю огибающую непрерывных функций).

d) Множество $A \subset E$ называется *квадрируемым* (относительно μ), если его характеристическая функция непрерывна почти всюду или, что сводится к тому же, если его граница μ-пренебрежима. Показать, что всякая точка $x_0 \in E$ обладает фундаментальной системой квадрируемых открытых окрестностей (для любой окрестности V точки x_0 через f обозначить непрерывную функцию со значениями в $[0, 1]$, равную 1 в точке x_0 и 0 на $\complement V$; рассмотреть множество тех x, в которых $f(x) > \alpha$ для $0 < \alpha < 1$). Вывести отсюда, что существует такое фундаментальное множество конечных разбиений пространства E, что всякое разбиение $\omega \in \mathcal{P}$ состоит из открытых и из пренебрежимых множеств.

e) Пусть $\mathcal{P}$ — такое фундаментальное множество конечных разбиений пространства E на интегрируемые множества, что всякое разбиение $\omega \in \mathcal{P}$ состоит из открытых и из пренебрежимых множеств. Для любой ограниченной на E функции f через g обозначим наибольшую из функций, полунепрерывных снизу на E и не превосходящих f (Общая топ., гл. IV, § 6, предл. 4); показать, что для любого разбиения $\omega \in \mathcal{P}$ $s_\omega(f) = s_\omega(g)$. Вывести отсюда, что для того, чтобы $s_\omega(f)$ и $S_\omega(f)$ стремились к одному и тому же пределу по $\mathcal{P}$, необходимо, чтобы f была непрерывна почти всюду на E.

f) Вывести из e) пример такой пренебрежимой функции f и такого фундаментального множества $\mathcal{P}$ конечных разбиений пространства E на интегрируемые множества, что $s_\omega(f)$ и $S_\omega(f)$ не стремятся к одному и тому же пределу по $\mathcal{P}$ (взять в качестве E интервал $[0, 1]$ из $\mathbf{R}$, а в качестве μ — меру Лебега).

°14) Пусть E — такое локально компактное пространство, что в E замыкание любого относительно компактного открытого множества снова является открытым множеством (*стоуново* пространство; ср. гл. II, § 1, упр. 13); пусть μ — мера на E с носителем, совпадающим с E, и такая, что всякая интегрируемая ограниченная на E числовая функция эквивалентна непрерывной функции (§ 4, упр. 10).

a) Показать, что в E всякое нигде не плотное множество N локально пренебрежимо (для всякого компактного множества K рассмотреть непрерывную функцию, эквивалентную $\varphi_{K \cap \overline{N}}$).

b) Пусть f — (конечная или бесконечная) измеримая числовая функция на E, и пусть g — наибольшая из функций, полунепрерывных снизу на E и не превосходящих f. Показать, что f и g равны между собой локально почти всюду (заметить, что если сужение функции f на компактное множество K непрерывно, то f и g равны между собой внутри K, и применить a)).

c) Вывести из b), что в E всякое локально пренебрежимое относительно μ множество является нигде не плотным множеством. В частности, всякое тощее в E множество будет нигде не плотным.

15) Пусть μ — положительная мера на локально компактном пространстве E, и пусть f — измеримое отображение пространства E в метризуемое полное пространство F. Для того чтобы функция f могла на компактном множестве K из E быть равномерно приближена измеримыми размещенными функциями, необходимо и достаточно, чтобы множество $f(K)$ было относительно компактно в F.

16) Пусть E — компактное пространство, μ — положительная мера на E и (f_n) — последовательность конечных μ-измеримых числовых функций. Показать, что следующие свойства эквивалентны:

1° существует подпоследовательность (f_{n_k}) последовательности (f_n), стремящаяся к 0 почти всюду на E;

2° существует такая последовательность (λ_n) конечных действительных чисел, что $\limsup\limits_{n\to\infty} |\lambda_n| > 0$ и что ряд с общим членом $\lambda_n f_n(x)$ сходится почти всюду на E;

3° существует такая последовательность (λ_n) конечных действительных чисел, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| = +\infty$ и что ряд с общим членом $\lambda_n f_n(x)$ абсолютно сходится почти всюду на E.

(Чтобы показать, что 1° влечет 2° и 3°, воспользоваться теоремой Егорова. Чтобы показать, что из 3° следует 1°, установить, что 3° влечет существование такой возрастающей последовательности (A_k) измеримых подмножеств из E и такой подпоследовательности (f_{n_k}) последовательности (f_n), что $\mu(A_k)$ стремится к $\mu(E)$ и что $\int |f_{n_k}\varphi_{A_k}|\,d\mu$ стремится к 0.)

§ 6. Неравенства выпуклости

1. *Теорема о выпуклости*

Теорема 1. *Пусть F — банахово пространство, D — выпуклое замкнутое множество в F и $\mathfrak{f}$ — такая измеримая функция, что $\mathfrak{f}(E) \subset D$. Для всякой интегрируемой числовой функции $g \geqslant 0$, не пренебрежимой и такой, что функция $\mathfrak{f}g$ интегрируема, точка $\dfrac{\int \mathfrak{f}g\,d\mu}{\int g\,d\mu}$ принадлежит D.*

В самом деле, пусть F' — сопряженное к F пространство и $\langle \mathbf{z}, \mathbf{a}' \rangle \leqslant \alpha$ ($\mathbf{a}' \in F'$, $\alpha \in \mathbf{R}$) — соотношение, определяющее *замкнутое полупространство*, содержащее D. Поскольку $\mathfrak{f}g$ интегрируема, то интегрируема и числовая функция $\langle \mathfrak{f}g, \mathbf{a}' \rangle = \langle \mathfrak{f}, \mathbf{a}' \rangle g$ и $\int \langle \mathfrak{f}g, \mathbf{a}' \rangle\,d\mu = \left\langle \int \mathfrak{f}g\,d\mu, \mathbf{a}' \right\rangle$ (§ 4, следствие 1 из теоремы 1), но, по условию, $\langle \mathfrak{f}(x), \mathbf{a}' \rangle \leqslant \alpha$ для всех $x \in E$, и значит,

$\langle \mathbf{f}(x) g(x), \mathbf{a}' \rangle \leqslant \alpha g(x)$; интегрируя это неравенство, получаем

$$\left\langle \int \mathbf{f} g \, d\mu, \mathbf{a}' \right\rangle \leqslant \alpha \int g \, d\mu.$$

Это соотношение показывает, что точка $\dfrac{\int \mathbf{f} g \, d\mu}{\int g \, d\mu}$ принадлежит любому замкнутому полупространству, содержащему D; но, согласно теореме Хана — Банаха, D является пересечением содержащих его замкнутых полупространств (Топ. вект. пр-ва, гл. II), откуда и следует теорема.

Следствие. *Если мера μ имеет общую массу, равную 1, и если функция $\mathbf{f}$ интегрируема, то $\int \mathbf{f} \, d\mu$ принадлежит замкнутой выпуклой оболочке множества $\mathbf{f}(E)$ в F.*

Достаточно взять в качестве g постоянную, равную 1.

2. *Неравенство о среднем*

Мы уточним теорему 1 для измеримых *числовых* функций (конечных или нет).

Определение 1. *Если задана (конечная или нет) числовая функция f, определенная почти всюду на E, то максимумом по мере или μ-максимумом* (соотв. *минимумом по мере или μ-минимумом*) *функции f называется и обозначается через $M_\infty(f)$* (соотв. $m_\infty(f)$) *нижняя* (соотв. *верхняя*) *грань множества тех чисел α, для которых $f(x) \leqslant \alpha$* (соотв. $f(x) \geqslant \alpha$) *локально почти всюду (относительно μ).*

Из определения сразу же вытекает, что $m_\infty(f) = -M_\infty(-f)$, и, значит, из всякого свойства максимума по мере вытекает соответствующее свойство минимума по мере.

Для любого $\alpha > M_\infty(f)$ множество тех $x \in E$, в которых $f(x) > \alpha$, локально пренебрежимо; но множество тех $x \in E$, в которых $f(x) > M_\infty(f)$, является объединением множеств, на которых $f(x) > r_n$, когда r_n пробегает множество рациональных чисел, превосходящих $M_\infty(f)$; следовательно, $f(x) \leqslant M_\infty(f)$ локально почти всюду (§ 5, n° 2). Точно так же $f(x) \geqslant m_\infty(f)$ локально почти всюду; отсюда вытекает, что $m_\infty(f) \leqslant M_\infty(f)$, если мера μ не нулевая; при этом соотношение $m_\infty(f) = M_\infty(f)$ равносильно тому, что f *локально почти всюду равна постоянной.* Ясно, что если мера μ не нулевая, то

$$\inf_{x \in E} f(x) \leqslant m_\infty(f) \leqslant M_\infty(f) \leqslant \sup_{x \in E} f(x).$$

Если две функции f и g локально почти всюду равны, то $m_\infty(f) = m_\infty(g)$ и $M_\infty(f) = M_\infty(g)$.

Наконец, если f и g — такие две функции, что $f+g$ определена локально почти всюду, то из определения 1 сразу получаем, что

$$M_\infty(f+g) \leqslant M_\infty(f) + M_\infty(g), \tag{1}$$

если правая часть определена; точно так же, если обе функции f и g положительны и таковы, что fg определена локально почти всюду, то

$$M_\infty(fg) \leqslant M_\infty(f)\,M_\infty(g), \tag{2}$$

если правая часть определена.

Если $M_\infty(f) < +\infty$, то $f(x) < +\infty$ локально почти всюду, но не обязательно почти всюду. Говорят, что числовая функция f *ограничена по мере* (относительно меры μ), если она определена и конечна почти всюду и если при этом конечны оба числа $m_\infty(f)$ и $M_\infty(f)$ (последнее условие сводится к тому, что $M_\infty(|f|) < +\infty$).

Предложение 1 (неравенство о среднем). *Пусть f — измеримая, ограниченная по мере числовая функция. Для любой интегрируемой числовой функции $g \geqslant 0$ функция fg (определенная почти всюду) интегрируема и*

$$m_\infty(f) \int g\,d\mu \leqslant \int fg\,d\mu \leqslant M_\infty(f) \int g\,d\mu. \tag{3}$$

При этом два члена в формуле (3) *могут быть равны только в том случае, если f на множестве тех $x \in E$, в которых $g(x) \neq 0$, равна почти всюду $M_\infty(f)$ или равна почти всюду $m_\infty(f)$.*

В самом деле, функция fg измерима (§ 5, следствие 6 из теоремы 1); при этом выполняются неравенства $m_\infty(f)\,g(x) \leqslant f(x)\,g(x) \leqslant M_\infty(f)\,g(x)$, и не только локально почти всюду, но даже почти всюду, так как множество тех точек $x \in E$, в которых $g(x) \neq 0$, является счетным объединением интегрируемых множеств (§ 5, n° 6, лемма 2). Из этого выводим, что fg интегрируема (§ 5, теорема 5) и что справедливы неравенства (3).

С другой стороны, функция $M_\infty(f)g - fg$ определена почти всюду и равна $(M_\infty(f) - f)g$; следовательно, она положительна почти всюду на E; а поскольку соотношение $M_\infty(f)\int g\,d\mu = \int fg\,d\mu$ равносильно соотношению $\int (M_\infty(f) - f)g\,d\mu = 0$, то оно может иметь место лишь тогда, когда функция $(M_\infty(f) - f)g$ пренебрежима, что и завершает доказательство.

Формула (3), за исключением тривиального случая, когда $\int g\,d\mu = 0$, выводится из теоремы 1, примененной к интервалу $D = [m_\infty(f), M_\infty(f)]$. Можно внести в теорему 1 дополнения, аналогичные содержащимся в предложении 1, которые уточняют, в каком случае точка $\dfrac{\int \mathbf{f}g\,d\mu}{\int g\,d\mu}$ принадлежит границе множества D (упр. 2).

3. *Пространства* L_F^∞

Определение 2. *Для всякого отображения* $\mathbf{f}$ *пространства* E *в банахово пространство* F *полагаем* $N_\infty(\mathbf{f}) = M_\infty(|\mathbf{f}|)$; *говорят, что* $\mathbf{f}$ *ограничено по мере* (относительно меры μ), *если* $N_\infty(\mathbf{f})$ *конечно. Множество измеримых и ограниченных по мере отображений пространства* E *в* F *обозначается* $\mathcal{L}_F^\infty(E, \mu)$ (а также $\mathcal{L}_F^\infty(\mu)$ или просто $\mathcal{L}_F^\infty$).

Итак, функция $\mathbf{f}$ из $\mathcal{L}_F^\infty$ может быть охарактеризована тем свойством, что существует *измеримая и ограниченная* функция, равная $\mathbf{f}$ локально почти всюду.

Из формулы (1) сразу же вытекает, что $N_\infty(\mathbf{f}+\mathbf{g}) \leqslant N_\infty(\mathbf{f}) + N_\infty(\mathbf{g})$, а с другой стороны, $N_\infty(\alpha\mathbf{f}) = |\alpha| N_\infty(\mathbf{f})$ для любого скаляра α. Таким образом, множество $\mathcal{L}_F^\infty$ является *векторным подпространством* пространства всех отображений пространства E в F, а $N_\infty(\mathbf{f})$ есть полунорма на этом векторном пространстве. Обозначим через $(\mathbf{f}_n)$ последовательность функций из $\mathcal{L}_F^\infty$, сходящуюся к $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_F^\infty$ в топологии, определенной полунормой $N_\infty(\mathbf{f})$; для любого целого m найдутся локально пренебрежимое множество H_m и такое целое n_0, что при любом целом $n \geqslant n_0$ и любом $x \notin H_m$ выполняется неравенство $|\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}_n(x)| \leqslant \frac{1}{m}$ (поскольку всякое счетное объединение локально пренебрежимых множеств локально пренебрежимо); объединение H множеств H_m локально пренебрежимо, и мы видим, что $\mathbf{f}_n(x)$ *равномерно* стремится к $\mathbf{f}(x)$ на дополнении локально пренебрежимого множества H; обратное получается сразу.

Ясно, что любая функция, равная локально почти всюду некоторой функции из $\mathcal{L}_F^\infty$, сама принадлежит $\mathcal{L}_F^\infty$. В частности, *локально пренебрежимые* функции, определенные на E и принимающие значения в F, образуют векторное подпространство $\mathcal{N}_F^\infty$ пространства $\mathcal{L}_F^\infty$, характеризующееся соотношением $N_\infty(\mathbf{f})=0$ (замыкание нуля в топологии, определенной при помощи $N_\infty(\mathbf{f})$). Через $L_F^\infty(E, \mu)$ (а также $L_F^\infty(\mu)$ или L_F^∞) обозначается отделимое пространство, ассоциированное с $\mathcal{L}_F^\infty$, то есть факторпространство $\mathcal{L}_F^\infty/\mathcal{N}_F^\infty$; его топология определяется *нормой*, полученной из N_∞ факторизацией; норма класса $\dot{\mathbf{f}} \in L_F^\infty$ записывается $N_\infty(\dot{\mathbf{f}})$ или еще $\|\dot{\mathbf{f}}\|_\infty$. Если $F=\mathbf{R}$, то вместо $\mathcal{L}_\mathbf{R}^\infty$ и $L_\mathbf{R}^\infty$ пишут $\mathcal{L}^\infty$ и L^∞.

Предложение 2. *Пространство $\mathcal{L}_F^\infty$ полно; пространство L_F^∞ есть банахово пространство.*

В самом деле, пусть $(\mathbf{f}_n)$ — последовательность Коши в $\mathcal{L}_F^\infty$, для любого целого n существует такое целое k_n, что при $r \geqslant k_n$ и $s \geqslant k_n$ имеет место неравенство $N_\infty(\mathbf{f}_r-\mathbf{f}_s) \leqslant \frac{1}{n}$; следовательно, существует такое локально пренебрежимое множество A_{rs}, что $\mathbf{f}_r(x)-\mathbf{f}_s(x)| \leqslant \frac{1}{n}$ при всех $x \notin A_{rs}$. Если A_n есть объединение множеств A_{rs} (при $r \geqslant k_n$ и $s \geqslant k_n$), то A_n локально пренебрежимо и для любого $x \notin A_n$ неравенство $|\mathbf{f}_r(x)-\mathbf{f}_s(x)| \leqslant \frac{1}{n}$ справедливо при всех индексах $r \geqslant k_n$, $s \geqslant k_n$. Обозначим через A локально пренебрежимое множество, являющееся объединением множеств A_n, и положим $\mathbf{g}_n(x)=\mathbf{f}_n(x)$ для $x \notin A$ и $\mathbf{g}_n(x)=0$ для $x \in A$; $\mathbf{g}_n$ принадлежит пространству $\mathcal{L}_F^\infty$, и, по определению множества A, последовательность $(\mathbf{g}_n)$ *равномерно* сходится на E к функции $\mathbf{g}$. Отсюда следует, что функция $\mathbf{g}$ измерима (§ 5, теорема 2); кроме того, $\mathbf{g}$ ограничена на множестве тех $x \in E$, в которых $|\mathbf{g}_{k_1}(x)| \leqslant N_\infty(\mathbf{g}_{k_1})$, а поскольку дополнение этого множества локально пренебрежимо, то $\mathbf{g}$ принадлежит пространству $\mathscr{L}_F^\infty$. Легко видеть, что в $\mathscr{L}_F^\infty$ последовательность $(\mathbf{g}_n)$ имеет пределом $\mathbf{g}$, и то же самое имеет место для последовательности $(\mathbf{f}_n)$, ибо $N_\infty(\mathbf{f}_n-\mathbf{g}_n)=0$ для всех n. Отсюда сразу получается вторая часть предложения (Общая топ., гл. II, § 3).

Замечание. Всякая *непрерывная и ограниченная* на E функция со значениями в F принадлежит $\mathscr{L}_F^\infty$, и

$$N_\infty(\mathbf{f})\leqslant \|\mathbf{f}\|=\sup_{x\in E}|\mathbf{f}(x)|.$$

Для того чтобы для всякой непрерывной и ограниченной функции $\mathbf{f}$ имело место равенство $N_\infty(\mathbf{f})=\|\mathbf{f}\|$, необходимо и достаточно, чтобы носитель меры μ был *равен* E. В самом деле, если существует пренебрежимая и не равная тождественно нулю непрерывная функция $\mathbf{f}$ с компактным носителем, то $N_\infty(\mathbf{f})=0$ и $\|\mathbf{f}\|>0$. Обратно, если носитель меры μ равен E, то для любой непрерывной и ограниченной функции $\mathbf{f}$ и любого числа $\alpha<\|\mathbf{f}\|$ множество тех $x\in E$, в которых $|\mathbf{f}(x)|>\alpha$, открыто и не пусто и, значит, имеет строго положительную внешнюю меру, чем и показано, что $N_\infty(\mathbf{f})=\|\mathbf{f}\|$.

Следовательно, если носитель меры μ равен E, то можно *идентифицировать* нормированное пространство $\mathscr{C}_F^\infty(E)$ непрерывных и ограниченных на E функций со значениями в F и некоторое подпространство пространства $\mathscr{L}_F^\infty$. А поскольку $\mathscr{L}_F^\infty$, вообще говоря, не будет отделимым, то подпространство $\mathscr{C}_F^\infty$ в общем случае не будет замкнутым в $\mathscr{L}_F^\infty$, но его канонический образ в L_F^∞ будет замкнутым подпространством пространства L_F^∞ (которое, впрочем, в рассматриваемом случае можно отождествить с $\mathscr{C}_F^\infty$). Вообще говоря, $\mathscr{C}_F^\infty$ *отлично* от L_F^∞, то есть для произвольной измеримой и ограниченной функции $\mathbf{f}$ в общем случае не существует *непрерывной* функции $\mathbf{g}$, равной $\mathbf{f}$ локально почти всюду (§ 5, упр. 12). Это влечет за собой тот факт, что пространство $\mathscr{K}_F$ непрерывных отображений пространства E в F с компактным носителем, вообще говоря, *не будет всюду плотным в* L_F^∞, тогда как оно всюду плотно в каждом из пространств L_F^p при $1\leqslant p<+\infty$ (§ 3, опр. 2).

4. *Неравенство Гёльдера*

В этом пункте через p и q будут обозначаться два действительных числа, $1\leqslant p\leqslant +\infty$, $1\leqslant q\leqslant +\infty$, связанные соотношением $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$; значит, $q=\frac{p}{p-1}$, если $1<p<+\infty$, $q=+\infty$, если $p=1$, и $q=1$, если $p=+\infty$; p и q будут называться *сопря-*

женными показателями. Заметим, что соотношение $1 \leqslant p \leqslant 2$ равносильно $2 \leqslant q \leqslant +\infty$; равенство $p=q$ имеет место в том и только том случае, если p и q равны 2.

Теорема 2 (неравенство Гёльдера). *Пусть f и g — две числовые функции, конечные почти всюду и такие, что f равна почти всюду некоторой функции из $\mathscr{L}^p$, а g — некоторой функции из $\mathscr{L}^q$. Тогда функция fg (определенная почти всюду) интегрируема и*

$$N_1(fg) \leqslant N_p(f)\, N_q(g). \tag{4}$$

Пусть f_1 (соотв. g_1) — функция из $\mathscr{L}^p$ (соотв. $\mathscr{L}^q$), которой равна почти всюду функция f (соотв. g); функция fg почти всюду равна всюду определенной и конечной функции $f_1 g_1$, которая измерима, как произведение двух измеримых функций (§ 5, теоремы 1 и 5). Если $1 < p < +\infty$, то неравенство Гёльдера для верхнего интеграла (гл. I, предл. 4) приводит к неравенству (4), и тогда соотношение $N_1(fg) < +\infty$ показывает, что функция fg интегрируема (§ 5, теорема 5). Если $p=1$, $q=+\infty$, то неравенство (4) и интегрируемость функции fg вытекают непосредственно из неравенства о среднем (предл. 1); таким образом, теорема доказана для всех случаев.

Следствие 1. *Пусть F, G, H — три банаховых пространства и $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \to \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ — такое непрерывное билинейное отображение произведения $F \times G$ в H, что $|\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leqslant |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$. Если $\mathbf{f} \in \mathscr{L}_F^p$ и $\mathbf{g} \in \mathscr{L}_G^q$, то функция $\Phi(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ интегрируема и*

$$\left|\int \Phi(\mathbf{f}, \mathbf{g})\, d\mu\right| \leqslant \int |\Phi(\mathbf{f}, \mathbf{g})|\, d\mu \leqslant N_p(\mathbf{f})\, N_q(\mathbf{g}). \tag{5}$$

Действительно, $\Phi(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ измерима (§ 5, следствие 6 из теоремы 1); а поскольку $|\Phi(\mathbf{f}, \mathbf{g})| \leqslant |\mathbf{f}| \cdot |\mathbf{g}|$, то доказываемое следствие вытекает из теоремы 2 и критерия интегрируемости (§ 5, теорема 5).

Для приложений важны два частных случая следствия 1:

Следствие 2. *Пусть F — действительное* (соотв. *комплексное*) *банахово пространство, F' — к нему сильно сопряженное* (Топ. вект. пр-ва, гл. IV), *и пусть $(\mathbf{z}, \mathbf{z}') \to \langle \mathbf{z}, \mathbf{z}' \rangle$ — каноническая билинейная форма на $F \times F'$. Если $\mathbf{f} \in \mathscr{L}_F^p$ и $\mathbf{g} \in \mathscr{L}_{F'}^q$, то числовая* (соотв. *комплексная*) *функция* $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle$ *интегрируема и*

$$\left|\int \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle\, d\mu\right| \leqslant \int |\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle|\, d\mu \leqslant N_p(\mathbf{f})\, N_q(\mathbf{g}). \tag{6}$$

Действительно, $|\langle \mathbf{z}, \mathbf{z}'\rangle| \leqslant |\mathbf{z}|\cdot|\mathbf{z}'|$.

Следствие 3. *Пусть F — банахово пространство, $\mathbf{f}$ — функция из $\mathcal{L}_F^p$ и g — числовая функция, принадлежащая $\mathcal{L}^q$; тогда функция $\mathbf{f}g$ интегрируема и*

$$\left|\int \mathbf{f}g\, d\mu\right| \leqslant \int |\mathbf{f}g|\, d\mu \leqslant N_p(\mathbf{f})\, N_q(g). \tag{7}$$

Следствие 4. *Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_n$ — n интегрируемых положительных функций и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — такие n строго положительных чисел, что $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$; при этих условиях функция $f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \ldots$ $\ldots f_n^{\alpha_n}$ интегрируема и*

$$\int f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \ldots f_n^{\alpha_n}\, d\mu \leqslant \left(\int f_1\, d\mu\right)^{\alpha_1} \left(\int f_2\, d\mu\right)^{\alpha_2} \ldots \left(\int f_n d\mu\right)^{\alpha_n}. \tag{8}$$

В самом деле, произведение $f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \ldots f_n^{\alpha_n}$, будучи произведением измеримых функций, измеримо (§ 5, теорема 5, и теорема 1); поскольку неравенство (8) справедливо для верхних интегралов (гл. I, следствие из предл. 2), то функция $f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \ldots f_n^{\alpha_n}$ интегрируема (§ 5, теорема 5), откуда и вытекает следствие.

Следствие 2 из теоремы 2 уточняется при помощи следующего предложения:

Предложение 3. *Пусть F — действительное или комплексное банахово пространство, F' — к нему сильно сопряженное и $(\mathbf{z}, \mathbf{z}') \to \langle \mathbf{z}, \mathbf{z}'\rangle$ — каноническая билинейная форма на $F \times F'$. Тогда*

1° *для любой функции $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_F^p$ $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$*

$$N_p(\mathbf{f}) = \sup\left|\int \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle\, d\mu\right|, \tag{9}$$

когда $\mathbf{g}$ пробегает множество функций из $\mathcal{L}_{F'}^q$, для которых $N_q(\mathbf{g}) \leqslant 1$;

2° *для любой функции $\mathbf{g} \in \mathcal{L}_{F'}^q$ $(1 \leqslant q \leqslant +\infty)$*

$$N_q(\mathbf{g}) = \sup\left|\int \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle\, d\mu\right|, \tag{10}$$

когда f *пробегает множество функций из* $\mathcal{L}_F^p$, *для которых* $N_p(\mathbf{f}) \leqslant 1$.

Докажем сначала формулу (9); будем различать два случая.

1° $1 \leqslant p < +\infty$. Поскольку при $N_p(\mathbf{f}) = 0$ соотношение (9) становится тривиальным (ибо тогда f и $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle$ пренебрежимы), то можно всегда, домножив f на некоторый скаляр, предположить, что $N_p(\mathbf{f}) = 1$. Допустим сначала, что f есть интегрируемая *размещенная* функция, $\mathbf{f} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{a}_k \varphi_{A_k}$, где A_k не имеют попарно общих точек (§ 4, n° 8, лемма 1). Значит, по условию $\sum_{k=1}^{n} |\mathbf{a}_k|^p \mu(A_k) = 1$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует (для любого индекса k) такой вектор $\mathbf{a}'_k \in F'$, что $|\mathbf{a}'_k|^q = |\mathbf{a}_k|^p$, если $p > 1$ (соотв. $|\mathbf{a}'_k| = 1$, если $p = 1$) и $\langle \mathbf{a}_k, \mathbf{a}'_k \rangle \geqslant (1-\varepsilon)|\mathbf{a}_k| \cdot |\mathbf{a}'_k|$ (Топ. вект. пр-ва, гл. IV). Если положить $\mathbf{g} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{a}'_k \varphi_{A_k}$, то $\sum_{k=1}^{n} |\mathbf{a}'_k|^q \mu(A_k) = 1$, если $p > 1$ (соотв. $\sup\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |\mathbf{a}'_k| = 1$, если $p = 1$), и, следовательно, $N_q(\mathbf{g}) = 1$; с другой стороны,

$$\int \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \langle \mathbf{a}_k, \mathbf{a}'_k \rangle \mu(A_k) \geqslant (1-\varepsilon) \sum_{k=1}^{n} |\mathbf{a}_k| \cdot |\mathbf{a}'_k| \mu(A_k),$$

а поскольку $|\mathbf{a}'_k| = |\mathbf{a}_k|^{\frac{p}{q}} = |\mathbf{a}_k|^{p-1}$, если $p > 1$ (соотв. $|\mathbf{a}'_k| = 1$, если $p = 1$), то

$$\int \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle \, d\mu \geqslant (1-\varepsilon) \sum_{k=1}^{n} |\mathbf{a}_k|^p \mu(A_k) = (1-\varepsilon) N_p(\mathbf{f}) = 1 - \varepsilon,$$

и формула (9) для данного случая доказана.

Перейдем к случаю, когда f есть произвольный элемент пространства $\mathcal{L}_F^p$, удовлетворяющий условию $N_p(\mathbf{f}) = 1$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая размещенная функция $\mathbf{f}_1 \in \mathcal{L}_F^p$, что $N_p(\mathbf{f} - \mathbf{f}_1) \leqslant \varepsilon$ (§ 4, следствие из предл. 16). Согласно установленному выше существует функция $\mathbf{g} \in \mathcal{L}_{F'}^q$, для которой $N_q(\mathbf{g}) = 1$ и $\int \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{g} \rangle \, d\mu \geqslant N_p(\mathbf{f}_1) - \varepsilon \geqslant 1 - 2\varepsilon$. Но

$$\int \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle \, d\mu = \int \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{g} \rangle \, d\mu + \int \langle \mathbf{f} - \mathbf{f}_1, \mathbf{g} \rangle \, d\mu$$

и, в силу (6),

$$\left| \int \langle \mathbf{f}-\mathbf{f}_1, \mathbf{g} \rangle \, d\mu \right| \leqslant N_p(\mathbf{f}-\mathbf{f}_1) N_q(\mathbf{g}),$$

откуда

$$\left| \int \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle \, d\mu \right| \geqslant 1-3\varepsilon,$$

чем и доказана формула (9).

2° $p=+\infty$. Можно снова ограничиться случаем, когда $N_\infty(\mathbf{f})>0$. Пусть α — произвольное число, удовлетворяющее неравенствам $0<\alpha<N_\infty(\mathbf{f})$; по условию множество тех $x \in E$, в которых $|\mathbf{f}(x)|>0$, измеримо и не является локально пренебрежимым, а значит, содержит компактное множество K строго положительной меры. Поскольку $\mathbf{f}$ измеримо, то существует компактное множество $K_1 \subset K$, имеющее строго положительную меру и такое, что сужение функции $\mathbf{f}$ на K_1 непрерывно. Из этого следует, что для любого $\varepsilon>0$ существует разбиение множества K_1 на конечное число интегрируемых множеств, на каждом из которых колебание функции $\mathbf{f}$ не превосходит ε; по крайней мере одно из этих множеств, которое мы обозначим через A, имеет строго положительную меру. Через $\mathbf{a}$ обозначим одно из значений функции $\mathbf{f}$ на A; тогда $|\mathbf{a}|>\alpha$ и $|\mathbf{f}(x)-\mathbf{a}| \leqslant \varepsilon$ для всех $x \in A$. Найдется такой вектор $\mathbf{a}' \in F'$, что $|\mathbf{a}'|=1$ и $|\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}' \rangle| \geqslant$ $\geqslant |\mathbf{a}|-\varepsilon$; функция $\mathbf{g}=\frac{1}{\mu(A)}\varphi_A \cdot \mathbf{a}'$ интегрируема, и $N_1(\mathbf{g})=1$; с другой стороны,

$$\int \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle \, d\mu = \frac{1}{\mu(A)} \int \langle \mathbf{f}, \mathbf{a}' \rangle \varphi_A \, d\mu.$$

Но мы можем написать, что

$$\int \langle \mathbf{f}, \mathbf{a}' \rangle \varphi_A \, d\mu = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a}' \rangle \mu(A) + \int \langle \mathbf{f}-\mathbf{a}, \mathbf{a}' \rangle \varphi_A \, d\mu,$$

а так как

$$|\langle \mathbf{f}-\mathbf{a}, \mathbf{a}' \rangle \varphi_A| \leqslant \varepsilon\varphi_A,$$

то очевидно, что

$$\left| \int \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle \, d\mu \right| \geqslant |\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}' \rangle| - \varepsilon \geqslant |\mathbf{a}| - 2\varepsilon > \alpha - 2\varepsilon;$$

поскольку же ε произвольно и α — произвольное число, меньшее, чем $N_\infty(\mathbf{f})$, то формула (9) доказана и в этом случае.

Точно так же рассуждаем для доказательства соотношения (10), рассмотрев отдельно случаи $1 \leqslant q < +\infty$ и $q = +\infty$ и использовав тот факт, что по определению нормы на F, для любого $\mathbf{z}' \in F'$ выполняется равенство $|\mathbf{z}'| = \sup_{|\mathbf{z}| \leqslant 1} |\langle \mathbf{z}, \mathbf{z}' \rangle|$.

Замечания. 1) Пусть $\mathscr{E}$ — всюду плотное векторное подпространство пространства $\mathscr{L}^q_{F'}$; тогда формула (9) остается справедливой, если $\mathbf{g}$ пробегает пересечение подпространства $\mathscr{E}$ с множеством B тех функций из $\mathscr{L}^q_{F'}$, для которых $N_q(\mathbf{g}) \leqslant 1$. В самом деле, достаточно заметить, что внутренность $\mathring{B}$ множества B плотна относительно B и что пересечение $\mathring{B} \cap \mathscr{E}$ плотно относительно $\mathring{B}$, ибо $\mathring{B}$ открыто. Это замечание применимо, в частности, к множеству $\mathscr{E} = \mathscr{K}_{F'}(E)$ непрерывных функций с компактным носителем (со значениями в F'), когда $1 \leqslant q < +\infty$, то есть $1 < p \leqslant +\infty$. Но в этом случае формула (9) верна, если $\mathbf{g}$ пробегает $B \cap \mathscr{K}_{F'}(E)$, даже для $p = 1$. Действительно, можно, как и выше, ограничиться случаем, когда $\mathbf{f}$ будет размещенной. В этом случае показано, что если $N_1(\mathbf{f}) = 1$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая размещенная функция $\mathbf{g} \in \mathscr{L}^\infty_{F'}$, что $|\mathbf{g}(x)| \leqslant 1$ при всех $x \in E$ и что $\left| \int \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle \, d\mu \right| \geqslant 1 - \varepsilon$. Существует конечное число компактных множеств K_i, не имеющих попарно общих точек, таких, что на каждом из K_i функция $\mathbf{g}$ имеет постоянное значение $\mathbf{a}'_i$ и что если K есть объединение множеств K_i, то $\int |\mathbf{f}| \varphi_{\complement K} \, d\mu \leqslant \varepsilon$. Обозначим через U_i такую окрестность множества K_i, чтобы множества U_i не имели попарно общих точек, а через h_i — непрерывное отображение пространства E в $[0, 1]$ с носителем в U_i и равное 1 на K_i. Если положить $\mathbf{h} = \sum \mathbf{a}'_i h_i$, то $\mathbf{h}(x) = \mathbf{g}(x)$ на K и $|\mathbf{h}(x)| \leqslant 1$ на E, и, значит,

$$\int \left| \langle \mathbf{f}, \mathbf{h} \rangle \right| \varphi_{\complement K} \, d\mu \leqslant \varepsilon;$$

следовательно, $\left| \int \langle \mathbf{f}, \mathbf{h} \rangle \, d\mu \right| \geqslant 1 - 3\varepsilon$, чем и доказано наше утверждение. Аналогичные замечания могут быть сделаны для формулы (10).

2) Пусть $f \geqslant 0$ — измеримая (конечная или нет) функция, носитель которой содержится в счетном объединении компактных множеств K_n. Тогда для любого p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, имеет место равенство

$$N_p(f) = \sup \int^* |fg| \, d\mu, \tag{11}$$

когда g пробегает множество функций из $\mathscr{K}(E)$, для которых $N_q(g) \leqslant 1$. Действительно, формула (11) представляет собой частный случай формулы (9) для $N_p(f) < +\infty$, потому что тогда f эквивалентна некоторой функции из $\mathcal{L}^p$ (§ 5, теорема 5). Если $N_p(f) = +\infty$, то для любого целого $n > 0$ положим $f_n = \inf(n, f\varphi_{K_n})$. Тогда

$$N_p(f_n) = \sup \int^* |f_n g|\, d\mu \leqslant \sup \int^* |fg|\, d\mu,$$

откуда, переходя к пределу, получаем (§ 1, теорема 3), что $\sup \int^* |fg|\, d\mu = +\infty$.

Следствие 1. *Пусть F — банахово пространство, F' — к нему сильно сопряженное и $\mathbf{g}$ — произвольная функция из $\mathcal{L}^q_{F'}$. Линейная форма на L^p_F, полученная факторизацией из линейной формы $\mathbf{f} \to \int \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle\, d\mu$ на $\mathcal{L}^p_F$, непрерывна и имеет норму $N_q(\mathbf{g})$.*

В главе VI мы покажем, что, вообще, существуют непрерывные линейные формы на L^p_F, не получающиеся факторизацией из линейной формы $\mathbf{f} \to \int \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle\, d\mu$ с $\mathbf{g} \in \mathcal{L}^q_{F'}$.

В том случае, когда F есть действительное или комплексное *гильбертово пространство*, оно, как мы знаем (Топ. вект. пр-ва, гл. V), может быть канонически отождествлено со своим сопряженным F'. А так как пространство L^2_F полно, то имеет место следующий результат:

Следствие 2. *Пусть F — действительное* (соотв. *комплексное*) *гильбертово пространство. Симметрическая* (соотв. *эрмитова*) *форма на пространстве L^2_F*

$$(\widetilde{\mathbf{f}}, \widetilde{\mathbf{g}}) \to \int \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle\, d\mu$$

определяет структуру гильбертова пространства, для которой норма равна $\|\widetilde{\mathbf{f}}\|_2$.

5. *Приложение: соотношения между пространствами L^p_F $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$*

Предложение 4. *Пусть $\mathbf{f}$ — измеримая функция со значениями в банаховом пространстве F; множество I тех чисел p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, для которых $N_p(\mathbf{f})$ конечно, либо пусто, либо составляет интервал прямой $\overline{\mathbf{R}}$. Если I не пусто, то сужение* *на* $\bar{I}$ *отображения* $p \to N_p(\mathbf{f})$ *непрерывно; при этом, если* $\mathbf{f}$ *не пренебрежима, то* $\log N_p(\mathbf{f})$ *есть выпуклая функция от* $\frac{1}{p}$ *на* $\bar{I}$.

Мы уже знаем (гл. I, предл. 5), что множество J тех *конечных* чисел $p \geqslant 1$, для которых $N_p(\mathbf{f}) < +\infty$, либо пусто, либо есть интервал и что $\log N_p(\mathbf{f})$ есть выпуклая функция от $\frac{1}{p}$ на J (если $\mathbf{f}$ не пренебрежима); это, разумеется, влечет непрерывность функции $p \to N_p(\mathbf{f})$ на J. Докажем, что когда $p \in J$ стремится к одному из концов r интервала J, то $N_p(\mathbf{f})$ стремится к $N_r(\mathbf{f})$ в следующих двух случаях, в которых r не принадлежит J: 1° $r < +\infty$, а $N_r(\mathbf{f}) = +\infty$; 2° $r = +\infty$.

В первом случае допустим, например, что $N_p(\mathbf{f})$ конечно для $p > r$, и обозначим через A (измеримое) множество тех $x \in E$, в которых $|\mathbf{f}(x)| \geqslant 1$; мы можем написать, что

$$\int |\mathbf{f}|^p \, d\mu = \int |\mathbf{f}|^p \varphi_A \, d\mu + \int |\mathbf{f}|^p \varphi_{CA} \, d\mu.$$

Когда p стремится к r справа, то $|\mathbf{f}|^p \varphi_A$ стремится к $|\mathbf{f}|^r \varphi_A$, убывая, а $|\mathbf{f}|^p \varphi_{CA}$ стремится к $|\mathbf{f}|^r \varphi_{CA}$, возрастая; применение теоремы о переходе к пределу для верхних интегралов от монотонных последовательностей (§ 1, теор. 3) показывает, что $N_p(\mathbf{f})$ стремится к $+\infty$ и, значит, непрерывно на $\bar{I}$ в точке r.

Теперь предположим, что J не сводится к точке и что $+\infty$ служит концом для J. Прежде всего заметим, что, в силу выпуклости функции $\log N_p(\mathbf{f})$ как функции от $\frac{1}{p}$ на J, существует $\lim\limits_{p \to \infty} N_p(\mathbf{f})$. Покажем, что $\lim\limits_{p \to \infty} N_p(\mathbf{f}) \leqslant N_\infty(\mathbf{f})$; поскольку для $N_\infty(\mathbf{f}) = +\infty$ неравенство очевидно, то можно ограничиться случаем, когда $N_\infty(\mathbf{f})$ конечно. Если $s \in J$, то для любого конечного числа $p > s$ справедливо равенство $|\mathbf{f}|^p = |\mathbf{f}|^s |\mathbf{f}|^{p-s}$, и неравенство о среднем показывает, что

$$N_p(\mathbf{f}) \leqslant (N_s(\mathbf{f}))^{\frac{s}{p}} (N_\infty(\mathbf{f}))^{\frac{p-s}{p}}. \tag{12}$$

Устремляя p к $+\infty$, получаем неравенство $\lim\limits_{p \to \infty} N_p(\mathbf{f}) \leqslant N_\infty(\mathbf{f})$.

Докажем далее, что $\lim\limits_{p \to \infty} N_p(\mathbf{f}) \geqslant N_\infty(\mathbf{f})$. Пусть a — произвольное число в пределах $0 < a < N_\infty(\mathbf{f})$. Так как, по условию, существуют такие конечные значения p, для которых $N_p(\mathbf{f}) < +\infty$, то измеримое и не пренебрежимое множество A тех $x \in E$, для которых $|\mathbf{f}(x)| \geqslant a$, интегрируемо в силу неравенства $\varphi_A \leqslant \left(\frac{1}{a}|\mathbf{f}|\right)^p$; кроме того, из этого неравенства выводим, что $N_p(\mathbf{f}) \geqslant a \cdot (\mu(A))^{\frac{1}{p}}$; устремляя p к $+\infty$, получаем, что $\lim\limits_{p \to \infty} N_p(\mathbf{f}) \geqslant a$, что и доказывает наше утверждение.

Наконец, заметим, что если I не сводится к точке и если $+\infty \in I$, то из (12) вытекает, что $+\infty$ служит концом интервала J, чем и завершается доказательство предложения 4.

Следствие. *Если r, s, p — три числа, удовлетворяющие условиям $1 \leqslant r < p < s \leqslant +\infty$, то пересечение $\mathscr{L}^r_F \cap \mathscr{L}^s_F$ содержится в $\mathscr{L}^p_F$.*

Отметим, что, вообще, топологии, индуцированные в пересечении $\mathscr{L}^r_F \cap \mathscr{L}^s_P$ топологиями из $\mathscr{L}^p_F$ $(r < p < s)$, *различны*. Если не накладывать никакого дополнительного условия на μ, то топологии, индуцированные в $\mathscr{L}^r_F \cap \mathscr{L}^s_F$ топологиями из $\mathscr{L}^r_F$ и $\mathscr{L}^s_F$, вообще говоря, будут *не сравнимы* (иными словами, отношение $\frac{N_r(f)}{N_s(f)}$ может принимать сколь угодно большие и сколь угодно малые значения на $\mathscr{L}^r_F \cap \mathscr{L}^s_F$; ср. упр. 8).

В случае *ограниченной* меры μ предложение 4 может быть уточнено:

Предложение 5. *Пусть μ — ограниченная мера, и пусть f — μ-измеримая функция со значениями в банаховом пространстве F. Множество I чисел p, заключенных в пределах $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ и таких, что $N_p(\mathbf{f})$ конечно, либо пусто, либо составляет интервал с началом $p = 1$, содержащий эту точку; кроме того, $(\mu(E))^{-\frac{1}{p}} N_p(\mathbf{f})$ есть возрастающая функция от p на I.*

Это есть непосредственное следствие предложения 4 из этого n° и следствия из предложения 4 гл. I.

Следствие. *Если мера μ ограничена, то отношение $r < s$ влечет $\mathscr{L}^s_F \subset \mathscr{L}^r_F$; при этом топология сходимости в среднем поряд-*

ка s будет более сильной, чем топология сходимости в среднем порядка r (в $\mathcal{L}_F^s$).

Можно показать, что, вообще говоря, топология сходимости в среднем порядка s будет *строго более сильной*, чем топология сходимости в среднем порядка r (упр. 8).

Предложение 6. *Пусть E — дискретное пространство и μ — мера на E, определенная при помощи массы $+1$, расположенной в каждой точке из E. Если $\mathbf{f}$ есть отображение пространства E в банахово пространство F, то множество I чисел p, заключенных в пределах $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ и таких, что $N_p(\mathbf{f})$ конечно, либо пусто, либо составляет интервал, имеющий концом $+\infty$ и содержащий эту точку; при этом $N_p(\mathbf{f})$ есть убывающая функция от p на I.*

В самом деле, $\mu^*(|\mathbf{f}|) = \sum_{x \in E} |\mathbf{f}(x)|$ для любой функции $\mathbf{f}$ (§ 1, n° 1, пример) и $N_\infty(\mathbf{f}) = \|\mathbf{f}\| = \sup_{x \in E} |\mathbf{f}(x)|$; если существует такое число $\alpha > 0$, что $|\mathbf{f}(x)| \geqslant \alpha$ для бесконечного множества значений $x \in E$, то $N_p(\mathbf{f}) = +\infty$ при любом конечном p; в противном случае найдется такое $x_0 \in E$, что $|\mathbf{f}(x_0)| = \|\mathbf{f}\|$, откуда $N_\infty(\mathbf{f}) = |\mathbf{f}(x_0)| \leqslant N_p(\mathbf{f})$ при любом конечном p. А поскольку функция $\log N_p(\mathbf{f})$ выпукла относительно $\frac{1}{p}$ и принимает наименьшее значение в точке $+\infty$, то она непременно будет *убывающей* функцией от p на I (Функции действ. перем., гл. I, § 4, n° 3), что и завершает доказательство.

Следствие. *Если E дискретно и если мера μ определена при помощи массы $+1$ в каждой точке из E, то отношение $r < s$ влечет $\mathcal{L}_F^r \subset \mathcal{L}_F^s$; при этом топология сходимости в среднем порядка r будет более сильной, чем топология сходимости в среднем порядка s (в $\mathcal{L}_F^r$).*

Упражнения. 1) Пусть f и g — такие две измеримые числовые функции, что $a = M_\infty(f)$ и $b = M_\infty(g)$ конечны; показать, что для того, чтобы $M_\infty(f+g) = M_\infty(f) + M_\infty(g)$, необходимо и достаточно, чтобы для любой пары действительных чисел α, β, удовлетворяющих условиям $\alpha < a$, $\beta < b$, множество тех $x \in E$, в которых одновременно $\alpha \leqslant f(x)$ и $\beta \leqslant g(x)$, не было локально пренебрежимым.

°2) Пусть D — выпуклое тело в банаховом пространстве F, и пусть $\mathbf{f}$ — такая измеримая функция со значениями в F, что $\mathbf{f}(E) \subset D$. Пусть $g \geqslant 0$ — интегрируемая функция, не пренебрежимая и такая, что $\mathbf{f}g$ интегрируема. Предположим, что точка $\mathbf{c} = \frac{\int \mathbf{f} g \, d\mu}{\int g \, d\mu}$ является граничной для D; показать, что если V есть пересечение всех замкнутых опорных гиперплоскостей тела D в точке $\mathbf{c}$, то $\mathbf{f}(x) \in V \cap D$ почти всюду на множестве тех точек x, в которых $g(x) > 0$ (свести к случаю, когда F есть пространство счетного типа (то есть содержит счетное всюду плотное множество), применив теорему 4 из § 5; после этого заметить, что V есть пересечение счетного семейства опорных гиперплоскостей тела D в точке $\mathbf{c}$).

Показать, что если F конечномерно и если A есть грань точки $\mathbf{c}$ относительно D (Топ. вект. пр-ва, гл. II, § 4, упр. 4), то сделанное предположение влечет, что $\mathbf{f}(x) \in A$ почти всюду на множестве тех точек x, в которых $g(x) > 0$ (провести индукцию по размерности пространства F).

3) Пусть μ — такая мера на компактном пространстве E, для которой E служит носителем. Показать, что если любая измеримая и ограниченная по мере функция равна почти всюду непрерывной функции, то E является стоуновым пространством (ср. гл. II, § 1, упр. 13) (рассмотреть характеристическую функцию компактного множества). Обратно, если E есть стоуново пространство, то для того, чтобы всякая измеримая и ограниченная по мере функция была равна почти всюду некоторой непрерывной функции, необходимо и достаточно, чтобы всякое нигде не плотное множество в E было пренебрежимым (ср. § 5, упр. 14).

4) Пусть $\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ — конечная числовая функция, удовлетворяющая условиям предложения 1 из главы I. Показать, что если $f_1, f_2, \ldots, f_n$ суть n конечных положительных числовых функций, интегрируемых и непренебрежимых, то функция $\varphi(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ интегрируема и

$$\int \varphi(f_1, f_2, \ldots, f_n) \, d\mu \leqslant \varphi\left(\int f_1 \, d\mu, \int f_2 \, d\mu, \ldots, \int f_n \, d\mu\right).$$

При этом для того, чтобы имело место равенство

$$\int \varphi(f_1, \ldots, f_n) \, d\mu = \varphi\left(\int f_1 \, d\mu, \ldots, \int f_n \, d\mu\right),$$

необходимо и достаточно, чтобы для почти всех $x \in E$ точка из $\mathbf{R}^n$ с координатами $\xi_i = \frac{f_i(x)}{\varphi(f_1(x), \ldots, f_n(x))}$ принадлежала грани относительно K точки с координатами $\alpha_i = \frac{\int f_i \, d\mu}{\int \varphi(f_1, \ldots, f_n) \, d\mu}$ (рассуждать, как в упр. 2). В частности, если p и q означают два сопряженных показателя, удовлетворяющих условию $1 < p < +\infty$, то:

1° для того чтобы две положительные числовые функции $f \in \mathscr{L}^p$ и $g \in \mathscr{L}^q$ удовлетворяли равенству $\int fg\,d\mu = N_p(f)\,N_q(g)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие два числа α, β, не равные одновременно нулю, что равенство $\alpha(f(x))^p = \beta(g(x))^q$ справедливо почти всюду;

2° для того чтобы две положительные числовые функции $f \in \mathscr{L}^p$ и $g \in \mathscr{L}^p$ удовлетворяли равенству $N_p(f+g) = N_p(f) + N_p(g)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие два числа α, β, не равные одновременно 0, что равенство $\alpha f(x) = \beta g(x)$ выполняется почти всюду.

5) a) Пусть μ — мера Лебега на интервале $E =]0, +\infty[$. Для любого числа p в пределах $0 < p \leqslant +\infty$ указать примеры таких измеримых функций $f \geqslant 0$ на E, чтобы множество чисел r $(0 < r \leqslant +\infty)$, для которых $N_r(f) = \left(\int f^r\,d\mu\right)^{\frac{1}{r}}$ конечно, составляло бы один из интервалов $]0, p[$, $]0, p]$, $]p, +\infty]$, $[p, +\infty]$ (взять в качестве f функции вида $x^{\alpha}(\log x)^{\beta}$ в окрестности 0 или $+\infty$); вывести отсюда, что для всякого интервала I, содержащегося в $]0, +\infty]$, существует такая измеримая функция $f \geqslant 0$, что I совпадает с множеством тех $r > 0$, для которых $N_r(f) < +\infty$ (рассмотреть сумму двух функций, для которых I является одним из указанных выше интервалов).

b) Для меры Лебега на интервале $]0, 1[$ указать также примеры таких функций f, чтобы множество I чисел $r > 0$, для которых $N_r(f) < +\infty$, составляло произвольный интервал с началом в 0, содержащийся в $]0, +\infty]$.

6) Показать, что для любой измеримой непренебрежимой числовой функции $f \geqslant 0$ $N_r(f)$ есть функция от r, бесконечно дифференцируемая в каждой внутренней точке интервала, на котором она конечна. Вывести отсюда, что внутри интервала, на котором $N_r(f)$ конечна, $\log N_r(f)$ есть строго выпуклая функция от $\frac{1}{r}$, если только f не будет почти всюду постоянна на множестве тех $x \in E$, в которых $f(x) \neq 0$.

°7) Пусть f — положительная, измеримая, непренебрежимая числовая функция.

a) Показать, что если для конечного числа $r > 0$ функция f^r интегрируема, то функция $\log f$ квазиинтегрируема (§ 5, упр. 11).

b) Предположим, что f^r интегрируема для $0 < r < r_0$. Пусть A — множество тех $x \in E$, в которых $f(x) > 0$; показать, что если $\mu^*(A) > 1$, то $N_r(f)$ стремится к $+\infty$, когда r стремится к 0; если

$\mu(A) < 1$, то $N_r(f)$ стремится к 0 одновременно с r (использовать предл. 4 из гл. I).

c) Показать, что если $\mu(A) = 1$, то $\int f^r d\mu$ стремится к 1, когда r стремится к 0, и имеет в этой точке правую производную, равную $\int \log f\, d\mu$ (использовать упр. 8 из § 5); вывести отсюда, что когда r стремится к 0, $N_r(f)$ стремится к $G(f) = \exp\left(\int \log f\, d\mu\right)$.

d) Показать, что если $\mu(E) = 1$ и f^r и $\log f$ интегрируемы, то $G(f) \leqslant N_r(f)$, причем равенство достигается лишь в том случае, когда f постоянна почти всюду (использовать упр. 4).

e) Показать, что если $\mu(E) = 1$ и если f и g — такие две измеримые положительные функции, что $G(f)$ и $G(g)$ определены, то определено $G(f+g)$ и $G(f) + G(g) \leqslant G(f+g)$, причем равенство имеет место лишь в том случае, если найдутся такие два числа α, β, не равные одновременно нулю, что $\alpha f(x) = \beta g(x)$ почти всюду, или если $G(f+g) = 0$ $\left(\text{использовать d), рассматривая функции } \frac{f}{f+g} \text{ и } \frac{g}{f+g}\right)$.

8) Пусть μ — мера Лебега на интервале $E = [0, +\infty[$.

a) Пусть $k > 1$ и $h < k$ — два действительных числа. Показать, что для любого $n \geqslant 1$ и любого числа p в пределах $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ функции $f_n(x) = \frac{n^h}{(x+n)^k}$ принадлежат $\mathscr{L}^p$; показать, что при $p > \frac{1}{k-h}$ последовательность $N_p(f_n)$ стремится к 0 вместе с $\frac{1}{n}$, а при $p < \frac{1}{k-h}$ будет неограниченной.

b) Пусть число $k < 1$; показать, что для любого $n > 1$ и любого числа p в пределах $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ функции $g_n(x) = n^k e^{-nx}$ принадлежат $\mathscr{L}^p$; показать, что при $p < \frac{1}{k}$ последовательность $N_p(g_n)$ стремится к 0 вместе с $\frac{1}{n}$, а при $p > \frac{1}{k}$ будет неограниченной.

Вывести из a) и b), что если $1 \leqslant p < q \leqslant +\infty$, то топологии, индуцируемые в $\mathscr{L}^p \cap \mathscr{L}^q$ топологиями из $\mathscr{L}^p$ и $\mathscr{L}^q$, не сравнимы.

c) Показать, что если μ есть мера Лебега на интервале $[0, 1]$ и если $p < q$, то топология сходимости в среднем порядка q будет строго более сильной, чем топология сходимости в среднем порядка p (в $\mathscr{L}^q$).

9) Пусть E — бесконечное дискретное пространство и μ — такая мера на E, носитель которой равен E.

a) Показать, что для $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ пространство $\mathscr{L}^p(\mu)$ является топологическим векторным пространством, изоморфным пространству $\mathscr{L}^p(\mu_0)$, где μ_0 есть мера на E, определенная при помощи массы $+1$ в каждой точке из E.

b) Показать, что если $1 \leqslant p < q \leqslant +\infty$, то топология сходимости в среднем порядка p будет строго более сильной, чем топология сходимости в среднем порядка q (в $\mathscr{L}^p$).

10) a) Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — такие два вектора в банаховом пространстве E, что $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$. Показать, что для любого числа t в пределах $0 \leqslant t \leqslant 1$ и любого числа p в пределах $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ выполняются неравенства

$$|\mathbf{a}-t\mathbf{b}|^p \leqslant 2^p |\mathbf{a}-t^p\mathbf{b}|, \tag{1}$$

$$|\mathbf{a}-t^p\mathbf{b}| \leqslant 3p |\mathbf{a}-t\mathbf{b}| \tag{2}$$

(выразить $\mathbf{a}-t^p\mathbf{b}$ в виде линейной комбинации векторов $\mathbf{a}-t\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ и заметить, что для $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ справедливы неравенства $|\mathbf{a}-\rho\mathbf{b}| \geqslant 1-\rho$ и $|\mathbf{a}-\mathbf{b}| \leqslant 2|\mathbf{a}-\rho\mathbf{b}|$). Вывести отсюда, что если $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ — произвольные два вектора из F, то

$$|\mathbf{y}-\mathbf{z}|^p \leqslant 2^p \left||\mathbf{y}|^{p-1}\mathbf{y}-|\mathbf{z}|^{p-1}\mathbf{z}\right|, \tag{3}$$

$$\left||\mathbf{y}|^{p-1}\cdot\mathbf{y}-|\mathbf{z}|^{p-1}\cdot\mathbf{z}\right| \leqslant 3p|\mathbf{y}-\mathbf{z}|(|\mathbf{y}|+|\mathbf{z}|)^{p-1}. \tag{4}$$

b) Показать, что отображение $\mathbf{f} \to |\mathbf{f}|^{\frac{1}{p}-1}\cdot\mathbf{f}$ есть взаимно однозначное равномерно непрерывное отображение пространства $\mathscr{L}_F^1$ на $\mathscr{L}_F^p$ (использовать неравенство (3)).

c) Показать, что отображение $\mathbf{f} \to |\mathbf{f}|^{p-1}\cdot\mathbf{f}$ пространства $\mathscr{L}_F^p$ на $\mathscr{L}_F^1$ равномерно непрерывно на любой ограниченной части пространства $\mathscr{L}_F^p$ (использовать неравенство (4) и неравенство Гёльдера). Вывести отсюда, что топологические пространства $\mathscr{L}_F^1$ и $\mathscr{L}_F^p$ гомеоморфны.

°11) Пусть F — банахово пространство и $\mathscr{L}_F(E, \mu)$ (или просто $\mathscr{L}_F(\mu)$ и даже $\mathscr{L}_F$) — векторное пространство измеримых отображений пространства E в F. Для любого интегрируемого подмножества $A \subset E$ и любой пары (δ, ε) строго положительных чисел через $U(A, \delta, \varepsilon)$ обозначим множество отображений $\mathbf{f} \in \mathscr{L}_F$, для которых существует такое (зависящее от $\mathbf{f}$) интегрируемое подмножество $B \subset A$ с мерой, не превосходящей δ, что для любого $x \in A \cap \complement B$ справедливо неравенство $|\mathbf{f}(x)| \leqslant \varepsilon$.

a) Показать, что множества $U(A, \delta, \varepsilon)$ образуют фундаментальную систему окрестностей нуля относительно топологии в $\mathscr{L}_F$, согласующейся со структурой векторного пространства (топология *сходимости по мере*). Замыкание нуля в этой топологии есть подпространство локально пренебрежимых функций со значениями в F. Обозначим через L_F отделимое пространство, ассоциированное с $\mathscr{L}_F$ (пространство классов измеримых функций, равных локально почти всюду).

b) Показать, что если $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, то топология сходимости по мере в $\mathscr{L}_F^p$ будет менее сильной, чем топология, определяемая полунормой $N_p(\mathbf{f})$, и что $\mathscr{K}_F(E)$ (и тем более каждое из $\mathscr{L}_F^A$) всюду плотно в $\mathscr{L}_F$. Вывести отсюда, что если носитель меры μ бесконечен, то топология сходимости по мере в $\mathscr{L}_F^p$ строго менее сильна, чем топология, определяемая посредством $N_p(\mathbf{f})$.

c) Показать, что если $(\mathbf{f}_n)$ есть последовательность функций из $\mathscr{L}_F$, сходящаяся по мере к 0, то для любого интегрируемого множества A существует такая подпоследовательность $(\mathbf{f}_{n_k})$ последовательности $(\mathbf{f}_n)$, что последовательность $(\mathbf{f}_{n_k}(x))$ сходится к 0 для почти всех $x \in A$ (заметить, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется интегрируемое подмножество $B \subset A$ меры, не превосходящей ε, и подпоследовательность последовательности $(\mathbf{f}_n)$, сходящаяся просто к 0 на $A \cap \complement B$).

Обратно, пусть $(\mathbf{f}_n)$ — такая последовательность функций из $\mathscr{L}_F$, что для любого интегрируемого множества A и любой подпоследовательности $(\mathbf{f}_{n_k})$ последовательности $(\mathbf{f}_n)$ существует подпоследовательность последовательности $(\mathbf{f}_{n_k})$, сходящаяся к 0 почти всюду на A; показать, что последовательность $(\mathbf{f}_n)$ сходится по мере к 0.

d) Для того чтобы подмножество H из $\mathscr{L}_F$ обладало тем свойством, что его канонический образ в L_F предкомпактен, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ и любого интегрируемого множества $A \subset E$ существовало такое компактное множество $M \subset F$ и такое разбиение множества A на конечное число интегрируемых множеств A_i, что для любого $\mathbf{f} \in H$ найдется интегрируемое множество $B \subset A$ меры $\mu(B) \leqslant \varepsilon$, обладающее следующими свойствами: 1° расстояние любой точки из $\mathbf{f}(A \cap \complement B)$ до M не превосходит ε; 2° в каждом из множеств $A_i \cap \complement B$ колебание функции $\mathbf{f}$ не превосходит ε.

e) Показать, что если мера μ ограничена, то пространство L_F метризуемо и полно *).

f) Возьмем в качестве μ меру Лебега на $E = [0, 1]$. Показать, что всякая непрерывная линейная форма на $\mathscr{L}_F$ тождественно равна нулю.

°12) Пусть $(\mathbf{f}_n)$ — последовательность функций из $\mathscr{L}_F^p$ $(1 \leqslant p < +\infty)$, сходящаяся по мере к функции $\mathbf{f} \in \mathscr{L}_F$. Показать, что если $N_p(\mathbf{f}_n) \leqslant a$ при всех n, то функция $\mathbf{f}$ локально почти всюду равна функции $\mathbf{g} \in \mathscr{L}_F^\infty$ и $N_p(\mathbf{g}) \leqslant a$ (показать, что для любого компактного подмножества $K \subset E$ $\int |\mathbf{f}|^p \varphi_K \, d\mu \leqslant a^p$, и рассмотреть такую возрастающую

*) В главе V будет показано, что пространство L_F всегда полно.

последовательность (K_n) компактных множеств, что $\int |\mathbf{f}|^p \varphi_{K_n}\,d\mu$ стремится к верхней грани множества чисел $\int |\mathbf{f}|^p\,\varphi_K\,d\mu\Big)$.

°13) Множество $H \in \mathscr{L}_F^1$ называется *равностепенно интегрируемым*, если оно удовлетворяет следующим двум условиям: 1° для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого интегрируемого множества A меры $\mu(A) \leqslant \delta$ и любой функции $\mathbf{f} \in H$ выполняется неравенство $\int |\mathbf{f}|\,\varphi_A\,d\mu \leqslant \varepsilon$; 2° для любого $\varepsilon > 0$ существует такое компактное множество K, что для всякой функции $\mathbf{f} \in H$ имеет место неравенство $\int |\mathbf{f}|\,\varphi_{CK}\,d\mu \leqslant \varepsilon$.

a) Показать, что для того, чтобы последовательность $(\mathbf{f}_n)$ функций из $\mathscr{L}_F^1$ была последовательностью Коши относительно топологии сходимости в среднем, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $(\mathbf{f}_n)$ была последовательностью Коши в топологии сходимости по мере и чтобы множество функций $\mathbf{f}_n$ было равностепенно интегрируемо.

b) Для того чтобы подмножество $H \subset \mathscr{L}_F^1$ обладало тем свойством, что его канонический образ в L_F^1 относительно компактен, необходимо и достаточно, чтобы H было равностепенно интегрируемо и чтобы канонический образ множества H в L_F был предкомпактен (ср. упр. 11d)).

Распространить эти свойства на пространства $\mathscr{L}_F^p$ $(1 \leqslant p < +\infty)$ (ср. упр. 10).

14) Пусть g — положительная числовая функция, принадлежащая $\mathscr{L}^p$ $(1 \leqslant p < +\infty)$. Обозначим через I_g множество тех функций $\mathbf{f} \in \mathscr{L}_F^p$, для которых $|\mathbf{f}| \leqslant g$.

a) Показать, что в I_g топология сходимости в среднем порядка p совпадает с топологией сходимости по мере.

b) Показать, что если $p < q < r$ (соотв. $q < r < p$), то в множестве $I_g \cap \mathscr{L}_F^q \cap \mathscr{L}_F^r$ топология сходимости в среднем порядка q будет менее сильной (соотв. более сильной), чем топология сходимости в среднем порядка r (для двух функций $\mathbf{f}$, $\mathbf{f}_0$, принадлежащих этому множеству, написать, что $|\mathbf{f} - \mathbf{f}_0|^q \leqslant |f - f_0|^s (2g)^{q-s}$, и применить неравенство Гёльдера, выбрав надлежащим образом s и пару сопряженных показателей). Показать на примерах, что эти топологии могут быть различны (ср. упр. 8).

c) Пусть μ — мера Лебега на $E =]0, +\infty[$; функция $g(x) = (x(\log^2 x + 1))^{-\frac{1}{p}}$ принадлежит $\mathscr{L}^p$, но не принадлежит никакому $\mathscr{L}^q$ для $q \neq p$. Показать, что если $q \neq p$, то топология сходимости в среднем порядка q в множестве $I_g \cap \mathscr{L}^q$ отлична от топологии сходимости по мере.

15) Пусть $h \geqslant 0$ — такая числовая функция, что h и h^2 интегрируемы; пусть I_h — множество измеримых числовых функций f, для которых $|f| \leqslant h$. Показать, что отображение $(f, g) \to fg$ произведения $I_h \times I_h$ в $\mathscr{L}^1$ непрерывно в топологии сходимости в среднем (в I_h и в $\mathscr{L}^1$).

°16) Пусть F — *равномерно выпуклое* банахово пространство, то есть (Топ. вект. пр-ва, гл. V, § 1, упр. 15) оно обладает следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta(\varepsilon)$, что $0 < \delta(\varepsilon) < 1$ и что для любых двух векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ из F, удовлетворяющих условиям $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$, $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| \geqslant \varepsilon$, выполняется неравенство $\left|\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})\right| \leqslant 1 - \delta(\varepsilon)$.

a) Пусть p — число, содержащееся в пределах $1 < p < +\infty$. Показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta_p(\varepsilon)$, что $0 < \delta_p(\varepsilon) < 1$ и что для любых двух векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, удовлетворяющих условиям $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| \leqslant 1$, $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| \geqslant \varepsilon$, справедливо неравенство

$$\left|\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})\right|^p \leqslant (1-\delta_p(\varepsilon))\left(\frac{|\mathbf{a}|^p+|\mathbf{b}|^p}{2}\right). \tag{5}$$

(Рассуждать от противного; воспользоваться строгим неравенством $\left(\frac{1}{2}(1+t)\right)^p < \frac{1}{2}(1+t^p)$, справедливым для $0 \leqslant t < 1$, чтобы показать, что если две последовательности $(\mathbf{a}_n)$, $(\mathbf{b}_n)$ точек из F таковы, что

$$|\mathbf{a}_n| = 1, \qquad |\mathbf{b}_n| \leqslant 1, \qquad |\mathbf{a}_n - \mathbf{b}_n| \leqslant \varepsilon$$

и выражение

$$\left|\frac{1}{2}(\mathbf{a}_n+\mathbf{b}_n)\right|^p \Big/ \frac{1}{2}(|\mathbf{a}_n|^p + |\mathbf{b}_n|^p)$$

при неограниченном возрастании n имеет предел 1, то непременно $\lim\limits_{n\to\infty} |\mathbf{b}_n| = 1$, и значит, если положить $\mathbf{c}_n = \frac{\mathbf{b}_n}{|\mathbf{b}_n|}$, то

$$\lim_{n\to\infty} |\mathbf{b}_n - \mathbf{c}_n| = 0,$$

откуда $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2}(\mathbf{a}_n+\mathbf{c}_n)\right| = 1$.)

b) Показать, что банахово пространство L_F^p равномерно выпукло. (Пусть $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ — такие две функции из $\mathscr{L}_F^p$, что $N_p(\mathbf{f}) = N_p(\mathbf{g}) = 1$ и $N_p(\mathbf{f}-\mathbf{g}) \geqslant \varepsilon$. Рассмотреть интегрируемое подмножество A тех точек $x \in E$, в которых

$$|\mathbf{f}(x) - \mathbf{g}(x)|^p \geqslant \frac{\varepsilon^p}{4}(|\mathbf{f}(x)|^p + |\mathbf{g}(x)|^p).$$

Показать, что $N_p((\mathbf{f}-\mathbf{g})\varphi_A) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$ и что, следовательно, $\sup(N_p(\mathbf{f}\varphi_A), N_p(\mathbf{g}\varphi_A)) \geqslant \frac{\varepsilon}{4}$. И наконец, применив a), показать, что

$$\frac{1}{2}\int (|\mathbf{f}|^p+|\mathbf{g}|^p)\,\varphi_A\,d\mu-\int\left|\frac{1}{2}(\mathbf{f}+\mathbf{g})\right|^p\varphi_A\,d\mu\geqslant\frac{\varepsilon^p}{4^{p+1}}\,\delta_p\left(\frac{\varepsilon}{4}\right).$$

°17) Для любого числа p в пределах $0<p<1$ обозначим через $\mathcal{L}_F^p$ множество таких измеримых отображений $\mathbf{f}$ пространства E в банахово пространство F, что $N_p(\mathbf{f})<+\infty$.

a) Показать, что $\mathcal{L}_F^p$ есть векторное пространство и что если через B_a обозначено множество тех $\mathbf{f}\in\mathcal{L}_F^p$, для которых $N_p(f)\leqslant a$, то множества B_a при a, пробегающем множество строго положительных чисел, образуют фундаментальную систему окрестностей 0 в метризуемой топологии, согласующейся со структурой векторного пространства в $\mathcal{L}_F^p$.

b) Показать, что отображение $\mathbf{f}\to|\mathbf{f}|^{p-1}\cdot\mathbf{f}$ есть равномерно непрерывное отображение пространства $\mathcal{L}_F^p$ на $\mathcal{L}_F^1$ и что обратное отображение равномерно непрерывно на любом ограниченном подмножестве из $\mathcal{L}_F^1$ (ср. упр. 10). Вывести отсюда, что пространство $\mathcal{L}_F^p$ полно и что множество $\mathcal{K}_F(E)$ всюду плотно в $\mathcal{L}_F^p$.

c) Если мера μ ограничена, то $\mathcal{L}_F^1\subset\mathcal{L}_F^p$, и топология сходимости в среднем будет более сильной, чем топология, индуцируемая в $\mathcal{L}_F^1$ топологией из $\mathcal{L}_F^p$.

d) Возьмем в качестве μ меру Лебега на $E=[0, 1]$. Показать, что для любой непрерывной функции $f\geqslant 0$ существует разбиение $f=\frac{1}{2}(f_1+f_2)$, где $f_1\geqslant 0$ и $f_2\geqslant 0$ — такие две функции из $\mathcal{L}^p$, что $N_p(f_1)=N_p(f_2)=2^{1-\frac{1}{p}}N_p(f)$. Вывести отсюда, что в $\mathcal{L}^p$ замкнутая выпуклая оболочка любой окрестности B_a есть все пространство $\mathcal{L}^p$ и что, значит, всякая непрерывная линейная форма на $\mathcal{L}^p$ тождественно равна нулю.

°18) Пусть $p>0$ и $q>0$ — произвольные конечные действительные числа, и пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — непрерывная числовая функция, определенная на $\mathbf{R}^n$.

a) Пусть μ — мера Лебега на $E=[0, 1]$. Чтобы для любой системы из n функций $g_k\in\mathcal{L}^p$ функция $f(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ принадлежала $\mathcal{L}^q$, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число $a>0$, что

$$|f(x_1, \ldots, x_n)|^q\leqslant a\,(1+|x_1|+\ldots+|x_n|)^p.$$

(Необходимость доказывать от противного, допустив, что при любом целом $m>0$ существует такая точка $(x_{1m}, \ldots, x_{nm})$ из $\mathbf{R}^n$, что

$$|f(x_{1m}, \ldots, x_{nm})|^q\geqslant m\,(1+|x_{1m}|+\ldots+|x_{nm}|)^p.$$

После этого показать, что в E существует такая последовательность (A_m) интервалов попарно без общих точек, что если положить $g_k(t) = x_{km}$ для любого $t \in A_m$ и $g_k(t) = 0$ для любой точки t, не принадлежащей никакому A_m, то каждая из функций g_k будет принадлежать $\mathscr{L}^p$, но $f(g_1, \ldots, g_n)$ не будет принадлежать $\mathscr{L}^q$).

b) Пусть μ — мера Лебега на $\mathbf{R}$. Чтобы для любой системы n функций $g_k \in \mathscr{L}^p$ функция $f(g_1, \ldots, g_n)$ принадлежала $\mathscr{L}^q$, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число $b > 0$, что

$$|f(x_1, \ldots, x_n)|^q \leqslant b(|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|)^p$$

(тот же метод).

°19) Пусть E — компактное пространство и μ — мера на E. Для двух функций f и g из $\mathscr{L}^2_{\mathbf{C}}$ положим $\langle f, g\rangle = \langle \tilde{f}, \tilde{g}\rangle = \int f\bar{g}\,d\mu$. Последовательность функций $f_n \in \mathscr{L}^2_{\mathbf{C}}$ называется *ортонормированной*, если последовательность, составленная из $\tilde{f}_n$, ортонормирована в гильбертовом пространстве $L^2_{\mathbf{C}}$, то есть (Топ. вект. пр-ва, гл. V, § 2) если $\langle f_m, f_n\rangle = \delta_{mn}$ (символ Кронекера) для любой пары индексов. Для любой функции $g \in \mathscr{L}^2_{\mathbf{C}}$ комплексные числа $c_n = \langle g, f_n\rangle$ называются *компонентами* функции g относительно ортонормированной последовательности (f_n); имеем $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \leqslant \int |g|^2\,d\mu$.

Для любой пары точек x, y из E и любого целого $n \geqslant 0$ положим $K_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\overline{f_k(y)}$ (*ядро порядка* n для ортонормированной последовательности (f_n)); для всякой функции $g \in \mathscr{L}^2_{\mathbf{C}}$ имеем

$$s_n(g) = \sum_{k=0}^{n} \langle g, f_k\rangle f_k(x) = \int K_n(x, y)\, g(y)\, d\mu(y).$$

Положим $H_n(x) = \int |K_n(x, y)|\, d\mu(y)$ (*функция Лебега порядка* n для ортонормированной последовательности (f_n)).

a) Пусть (α_n) — такая убывающая последовательность строго положительных чисел, что ряд с общим членом α_n сходится. Показать, что для почти всех $x \in E$ выполняется соотношение $\sum_{k=0}^{n} |f_k(x)|^2 = o\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)$ (используя предл. 6 из § 3, показать, что ряд с общим членом $\alpha_n |f_n(x)|^2$ сходится почти всюду, и применить упр. 10 из «Общей топ.», гл. IV, § 7). Вывести отсюда, что $H_n(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_n}}\right)$ для почти всех $x \in E$.

b) Пусть x_0 — точка из E. Чтобы для *любой* комплекснозначной функции g, определенной и непрерывной на E, частичные суммы $s_n(g)$ были ограничены в точке x_0 (числом, зависящим от g и от x_0), необходимо и достаточно, чтобы множество чисел $H_n(x_0)$ было ограничено (использовать предл. 3 и тот факт, что в пространстве, сопряженном к банахову, всякое слабо ограниченное множество сильно ограничено).

c) Чтобы для *любой* комплекснозначной функции g, определенной и непрерывной на E, ряд с общим членом $\langle g, f_n\rangle f_n(x)$ равномерно сходился на E и имел сумму $g(x)$, необходимо и достаточно, чтобы: 1° всякая непрерывная на E функция с комплексными значениями могла быть равномерно приближена линейными комбинациями функций f_k; 2° существовала такая постоянная a, что $|H_n(x)| \leqslant a$ при любом n и любых $x \in E$. (Заметить, что для любого n справедливо тождество $f_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \langle f_n, f_m\rangle f_m(x)$; с другой стороны, для доказательства необходимости условия 2° заметить, что для любой возрастающей последовательности (n_k) целых чисел и любой последовательности (x_k) точек из E последовательность чисел $\int K_{n_k}(x_k, y)\, g(y)\, d\mu(y)$ ограничена (числом, зависящим от g), и рассуждать, как в b).)

20) Пусть μ — мера Лебега на $E = [0, 2\pi]$. Последовательность функций f_n, где

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad f_{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \; f_{2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \quad (n \geqslant 1),$$

есть ортонормированная тотальная последовательность в пространстве $\mathscr{L}^2_{\mathbf{C}}$ (см. Общая топ., гл. X, § 5, предл. 8). Показать, что соответствующая функция Лебега $H_n(x)$ не зависит от x и что $H_n \sim \frac{4}{\pi} \log n$.

°21) Пусть μ — мера Лебега на $E = [0, 1]$. Определим следующим образом последовательность (f_n) ступенчатых функций на E: f — постоянная, равная 1; пусть для любого целого $n > 0$ через m обозначено наибольшее целое число, при котором $2^m \leqslant n$, и пусть $n = 2^m + k$; f_n есть функция, равная $2^{\frac{m}{2}}$ на интервале $\left[\frac{2k}{2^{m+1}}, \frac{2k+1}{2^{m+1}}\right[$, $-2^{\frac{m}{2}}$ на интервале $\left[\frac{2k+1}{2^{m+1}}, \frac{2k+2}{2^{m+1}}\right[$ и 0 в остальных точках из E.

a) Показать, что последовательность (f_n) ортонормирована («ортонормированная система Хаара»).

b) Пусть V_n — векторное подпространство пространства $\mathscr{L}^2_{\mathbf{C}}$ (над $\mathbf{C}$), порожденное функциями f_k с индексами $k \leqslant n$. Показать, что существует разбиение интервала E на $n+1$ полуоткрытых интервалов, на каждом из которых всякая функция, принадлежащая V_n, будет постоянна. Вывести отсюда, что и, обратно, для любой функции g, постоянной на каждом из $n+1$ интервалов, существует функция из V_n, равная g на $[0, 1[$ (заметить, что V_n имеет размерность $n+1$).

c) Пусть g — произвольная функция из $\mathscr{L}_{\mathbf{C}}^2$; вывести из b), что если h есть единственная функция из V_n, для которой $N_2(g-h)$ достигает минимума, то на любом интервале $[\alpha, \beta[$, на котором h постоянна, $h(x) = \frac{1}{\beta-\alpha}\int\limits_\alpha^\beta g(t)\,dt$.

d) Показать, что для любой комплекснозначной функции g, определенной и непрерывной на E, ряд с общим членом $\langle g, f_n\rangle f_n(x)$ равномерно сходится на E и имеет сумму $g(x)$ (использовать c)). Вывести отсюда, что последовательность (f_n) тотальна.

ГЛАВА V

ИНТЕГРИРОВАНИЕ МЕР

В этой главе T будет означать локально компактное пространство, а μ — положительную меру на T. Для любой части A множества E через φ_A обозначается (если это не приводит к недоразумениям) характеристическая функция множества A. Для любой точки a локально компактного пространства через ε_a обозначается мера, определенная при помощи единичной массы, расположенной в точке a (гл. III, § 2, n° 2). *Под числовой функцией мы будем всегда понимать функцию, принимающую свои значения в* $\overline{\mathbf{R}}$ *и, значит, такую, которая может принимать значения* $+\infty$ *и* $-\infty$. *Кроме того, нам будет удобно считать, что произведения* $0\cdot(+\infty)$ *и* $0\cdot(-\infty)$ *равны* 0; *таким образом, если f есть числовая функция, определенная на T, и A — подмножество из T, то $f\varphi_A$ означает функцию, совпадающую с f на A и равную* 0 *на* $\complement A$.

Понятие существенного верхнего интеграла (соотв. существенно интегрируемой функции), вводимое нами в § 2, *совпадает, как легко убедиться, с понятием верхнего интеграла (соотв. интегрируемой функцией), когда T является локально компактным пространством, счетным в бесконечности (Общая топ.,* Рез., § 8, n° 19).

Таким образом, читатель, которого интересует интегрирование только на локально компактных пространствах, счетных в бесконечности, может при чтении опустить n° n° 1 *и* 2 *из* § 2; *в остальной части главы для получения формулировок, справедливых в случае, когда рассматриваемое пространство счетно в бесконечности, нужно опускать слова «существенный» и «существенно», заменяя при этом знак* $\overline{\mu}^*$ *на* μ^*, *а знак* $\overline{\int}^*$ *на* $\int^*$.

§ 1. μ-плотные семейства компактных множеств

1. *Индуцированная мера*

Пусть T — локально компактное пространство, μ — положительная мера на T и X — *локально компактное подпространство* пространства T. Так как X является пересечением открытого и замкнутого множеств в T (Общая топ., Рез., § 8, n° 16), то оно μ-измеримо (гл. IV, § 5, n° 1, следствие из предл. 3). Для любой функции $g \in \mathcal{K}(X)$ обозначим через g' функцию, определенную на T, равную g на X и 0 на $T - X$; покажем, что g' *μ-интегрируема*. Действительно, g' есть ограниченная функция с компактным носителем; достаточно показать, что она μ-измерима (гл. IV, § 5, n° 6, теорема 5). Но если $g \geqslant 0$, то g' полунепрерывна сверху на T и, значит, измерима (гл. IV, § 5, n° 5, следствие из предл. 9), и наше утверждение вытекает из соотношения $g' = (g^+)' - (g^-)'$. Таким образом, можно принять следующее определение:

Определение 1. *Если имеется локально компактное подпространство X локально компактного пространства T, то мерой, индуцированной на X положительной мерой μ на T и обозначаемой μ_X, называется положительная мера, определяемая формулой*

$$\int g \, d\mu_X = \int g' \, d\mu \tag{1}$$

для любой функции $g \in \mathcal{K}(X)$, где g' — функция, равная g на X и 0 на $\complement X$.

Пример. Пусть μ — мера Лебега на $\mathbf{R}$ и I — *произвольный* интервал из $\mathbf{R}$; I есть локально компактное подпространство прямой $\mathbf{R}$, и мера, индуцированная на I мерой μ, есть линейная форма $g \to \int_a^b g(x)\,dx$ на $\mathcal{K}(I)$, если через a и b обозначить левый и правый (конечные или бесконечные) концы интервала I (ср. гл. IV, § 4, n° 4, пример). Эта мера называется *мерой Лебега* на I; в случае, когда I компактно, это определение совпадает с принятым в гл. III, § 1, n° 2.

Когда X является *открытым* подпространством пространства T, определение 1 совпадает с тем определением меры, индуцированной на X мерой μ (или сужения меры μ на X), которое было приведено в гл. III, § 3, n° 1; действительно, в этом случае для любой функции $g \in \mathcal{K}(X)$ функция g' непрерывна на T.

В § 7 мы будем подробно изучать интегрирование относительно индуцированной меры, а пока нам понадобится лишь следующий частный результат:

Лемма 1. *Пусть K — компактное подмножество из T; для любого компактного подмножества H из K справедливо равенство $\mu_K(H) = \mu(H)$.*

В самом деле, обозначим через f характеристическую функцию множества H на пространстве K; f полунепрерывна сверху и, значит, служит нижней огибающей некоторого фильтрующегося убывающего семейства (g_α) функций из $\mathcal{K}(X)$; тогда $\mu_K(H) = \inf\limits_\alpha \int g_\alpha \, d\mu_K$ (гл. IV, § 4, n° 4). Если g'_α означает функцию, равную g_α на K и 0 на $T - K$, то g'_α полунепрерывна сверху, и нижняя огибающая убывающего фильтрующегося семейства (g'_α) равна характеристической функции φ_H множества H (на пространстве T); следовательно, в силу формулы (1)

$$\mu(H) = \inf_\alpha \int g'_\alpha \, d\mu = \inf_\alpha \int g_\alpha d\mu_K = \mu_K(H).$$

2. μ-плотные семейства компактных множеств

Предложение 1. *Пусть A есть μ-измеримое подмножество из T, и пусть $\mathfrak{K}$ — множество компактных подмножеств из A, удовлетворяющее следующим условиям:*

($\mathrm{PL_I}$) *Любая замкнутая* (и, следовательно, компактная) *часть множества из $\mathfrak{K}$ принадлежит $\mathfrak{K}$.*

($\mathrm{PL_{II}}$) *Любое объединение конечного числа множеств из $\mathfrak{K}$ принадлежит $\mathfrak{K}$.*

Тогда следующие четыре свойства эквивалентны:

a) *Для того чтобы подмножество $B \subset A$ было локально μ-пренебрежимо, достаточно, чтобы $\mu^*(B \cap K) = 0$ для любого $K \in \mathfrak{K}$.*

b) *Для любого компактного подмножества $K_0 \subset A$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется подмножество $K \in \mathfrak{K}$, содержащееся в K_0 и такое, что $\mu(K_0 - K) \leqslant \varepsilon$.*

c) *Для любого μ-интегрируемого подмножества $B \subset A$ существует разбиение, составленное из μ-пренебрежимого множества*

N и из последовательности (H_n) компактных множеств, принадлежащих $\mathfrak{K}$.

d) *Для любого μ-интегрируемого подмножества $B \subset A$ существует возрастающая последовательность (K_n) компактных множеств из $\mathfrak{K}$, содержащихся в B и таких, что множество $N = B - \bigcup_n K_n$ μ-пренебрежимо.*

Очевидно, что d) влечет a); c) будет следовать из d), если принять за K_n объединение множеств H_p при $p \leqslant n$ и воспользоваться ($\mathrm{PL_{II}}$). Чтобы доказать, что b) влечет c), определяем по индукции последовательность (H_p) множеств из $\mathfrak{K}$ так, чтобы $H_{n+1} \subset B - \bigcup_{p \leqslant n} H_p$ и чтобы $\mu(B - \bigcup_{p \leqslant n} H_p) \leqslant \frac{1}{n}$ (гл. IV, § 4, n° 6, теорема 4). Наконец, остается показать, что a) влечет b). Рассуждая от противного, допустим, что верхняя грань α чисел $\mu(K)$, когда K пробегает множество подмножеств из K_0, принадлежащих $\mathfrak{K}$, будет меньше, чем $\mu(K_0)$. Согласно ($\mathrm{PL_{II}}$) существует возрастающая последовательность (L_n) компактных подмножеств из K_0, принадлежащих $\mathfrak{K}$ и таких, что $\sup_n \mu(L_n) = \alpha$. Положим $B = \bigcup_n L_n$; B интегрируемо, и $\mu(B) = \alpha$, а значит, $\mu(K_0 - B) = \mu(K_0) - \alpha > 0$. Но, с другой стороны, мы покажем, что для любого подмножества $K \in \mathfrak{K}$ выполняется равенство $\mu(K \cap (K_0 - B)) = 0$, которое, в силу условия a), приводит к противоречию. Действительно, если бы существовало такое подмножество $K \in \mathfrak{K}$, что $\mu(K \cap (K_0 - B)) > 0$, то нашлось бы такое компактное подмножество H из $K \cap (K_0 - B)$, что $\mu(H) > 0$. Тогда, согласно ($\mathrm{PL_I}$), $H \in \mathfrak{K}$, и для достаточно больших n мы имели бы $\mu(L_n \cup H) = \mu(L_n) + \mu(H) > \alpha$. Но множество $L_n \cup H$, согласно ($\mathrm{PL_{II}}$), принадлежит $\mathfrak{K}$, что противоречит определению α.

Определение 2. *Пусть A есть μ-измеримое подмножество из T. Говорят, что множество $\mathfrak{K}$ компактных подмножеств из A μ-плотно в A, если выполняются условия* ($\mathrm{PL_I}$), ($\mathrm{PL_{II}}$), a), b), c), d) *предложения* 1.

Множество всех компактных подмножеств множества A μ-плотно в A.

В случае $A = T$ мы будем «множество, μ-плотное в T» называть просто «μ-плотным множеством». Если $T - A$ локально μ-пренебрежимо, то всякое множество компактных подмножеств из A, μ-плотное в A, μ-плотно в T.

Замечание. Предположим, что A есть объединение последовательности (L_n) компактных множеств и μ-пренебрежимого (соотв. локально μ-пренебрежимого) множества, и пусть $\mathfrak{K}$ — множество компактных подмножеств, μ-плотное в A. Применяя к каждому L_n свойство c) из предложения 1, получаем, что A есть объединение μ-пренебрежимого (соотв. локально μ-пренебрежимого) множества и последовательности компактных множеств, принадлежащих $\mathfrak{K}$.

Если K есть компактное подмножество из T, то безразлично, сказать ли, что множество компактных подмножеств из K μ-плотно в K или что оно μ_K-*плотно* в K: это следует из леммы 1 и условия b) предложения 1.

Предложение 2. *Пусть A есть μ-измеримое подмножество из T и $\mathfrak{K}$ — множество компактных подмножеств, μ-плотное в A. Пусть $\mathfrak{H}$ — множество компактных подмножеств из A, удовлетворяющее условиям* ($\mathrm{PL_I}$) *и* ($\mathrm{PL_{II}}$) *и такое, что для любого $K \in \mathfrak{K}$ множество тех $H \in \mathfrak{H}$, для которых $H \subset K$, μ_K-плотно* (или, что одно и то же, *μ-плотно*) *в K. Тогда $\mathfrak{H}$ μ-плотно в A.*

В самом деле, пусть L — компактное подмножество из A. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $K \in \mathfrak{K}$, что $K \subset L$ и $\mu(L - K) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, и такое $H \in \mathfrak{H}$, что $H \subset K$ и $\mu(K - H) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$; отсюда вытекает, что $\mu(L - H) \leqslant \varepsilon$, откуда и следует предложение.

3. *Критерий измеримости*

Предложение 3. *Пусть A есть μ-измеримое подмножество из T и f — отображение множества A в топологическое пространство G.*

a) *Если f μ-измеримо* (гл. IV, § 5, n° 3), *то множество компактных подмножеств $K \subset A$, обладающих тем свойством, что сужение отображения f на K непрерывно, будет μ-плотно в A.*

b) *Обратно, если существует такое μ-плотное в A множество $\mathfrak{K}$ компактных подмножеств, что сужение отображения f на любое множество $K \in \mathfrak{K}$ μ_K-измеримо, то f μ-измеримо.*

Первая часть сразу же вытекает из определения измеримых функций (гл. IV, § 5, n° 1, опр. 1) и условия c) предложения 1. Обратно, допустим, что выполняется сформулированное выше условие b), и обозначим через $\mathfrak{H}$ множество таких компактных подмножеств из A, что сужение отображения f на любое подмножество $H \in \mathfrak{H}$ непрерывно. Первая часть доказываемого предложения и предложения 2 показывают, что $\mathfrak{H}$ μ-плотно в A. Чтобы показать, что f μ-измеримо, продолжим его на $T - A$, положив его на этом множестве равным постоянному значению (гл. IV, § 5, n° 3); такое продолжение обозначим через g. Для любого компактного подмножества L из T множества $L \cap A$ и $L \cap (T - A)$ μ-интегрируемы; следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такое компактное подмножество $M \subset L \cap A$ и такое компактное подмножество $P \subset L \cap (T - A)$, что $\mu((L \cap A) - M) \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$ и $\mu((L \cap (T - A)) - P) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. С другой стороны, существует подмножество $H \in \mathfrak{H}$, содержащееся в M и такое, что $\mu(M - H) \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$; тогда сужение отображения g на компактное множество $K = H \cup P$ будет непрерывно (поскольку g постоянно на P) и $\mu(L - K) \leqslant \varepsilon$, чем и завершается доказательство.

4. *Локально счетные семейства*

Определение 3. *Множество подмножеств $\mathfrak{A}$ топологического пространства T называется локально счетным, если для любого элемента $t \in T$ существует такая его окрестность V, что множество подмножеств $A \in \mathfrak{A}$, пересекающих V, счетно.*

Предложение 4. *Пусть T — локально компактное пространство и μ — положительная мера на T. Тогда существует локально счетное множество $\mathfrak{K}$ непустых компактных подмножеств из T, попарно не пересекающихся и таких, что множество $T - \bigcup_{K \in \mathfrak{K}} K$ локально μ-пренебрежимо.*

Рассмотрим такие множества $\mathfrak{L}$ непустых компактных подмножеств из T, что два различных множества из $\mathfrak{L}$ не пересекаются и что для любого $L \in \mathfrak{L}$ и любого открытого множества $U \subset T$, пересекающего L, $\mu(L \cap U) \neq 0$. Эти множества $\mathfrak{L}$ образуют подмножество $\mathcal{F}$ множества $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(T))$, которое мы упорядочим в $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(T))$ отношением включения. Очевидно, что $\mathcal{F}$ *индуктивно*; обозначим через $\mathfrak{K}$ его максимальный элемент (Теор. мн., Рез., § 6, n° 10). Прежде всего покажем, что $\mathfrak{K}$ локально счетно. Действительно, пусть для любого $t \in T$ через V обозначена относительно компактная открытая окрестность элемента t; если $(K_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ есть конечное семейство различных множеств из $\mathfrak{K}$, пересекающих V, то в силу того, что K_i попарно не пересекаются, $\sum_{i=1}^{n} \mu(K_i \cap V) = \mu(V \cap (\bigcup_{i=1}^{n} K_i))$, откуда $\sum_{i=1}^{n} \mu(K_i \cap V) \leqslant \mu(V)$. Если $\mathfrak{H}$ означает множество тех $K \in \mathfrak{K}$, которые пересекают V, то, следовательно, $\sum_{K \in \mathfrak{H}} \mu(K \cap V) < +\infty$, а так как $\mu(K \cap V) > 0$ при любом $K \in \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{H}$ будет счетным. Остается показать, что множество $N = T - \bigcup_{K \in \mathfrak{K}} K$ локально μ-пренебрежимо. На основании принципа локализации (гл. IV, § 5, n° 2, предл. 4) ясно, что N μ-измеримо; если бы N не было локально пренебрежимо, то оно содержало бы непренебрежимое компактное множество H. А поскольку $\mu_H(H) = \mu(H) > 0$ (лемма 1), то мера μ_H, индуцированная на H мерой μ, отлична от нулевой; следовательно, ее носитель $S \subset H$ является непустым компактным подмножеством из H, и для любого открытого множества $U \subset T$, пересекающего S, выполняется неравенство $\mu_H(U \cap S) > 0$ (гл. IV, § 2, n° 2, предл. 5). Это сразу же влечет неравенство $\mu(U \cap S) > 0$ (ибо в $U \cap S$ найдется такое компактное множество L, что $\mu_H(L) = \mu(L) > 0$); отсюда заключаем, что множество $\mathfrak{H} \cup \{S\}$ принадлежит $\mathcal{F}$. Но это противоречит определению множества $\mathfrak{K}$, и предложение доказано.

Предложение 5. *Пусть $\mathfrak{A}$ — локально счетное множество μ-измеримых подмножеств из T. Тогда объединение $B = \bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A$ μ-измеримо; для того чтобы отображение g множества B в топологическое пространство G было μ-измеримо, необходимо и достаточно, чтобы его сужение на любое множество $A \in \mathfrak{A}$ было μ-измеримо,*

Утверждение о том, что B μ-измеримо, следует из принципа локализации (гл. IV, § 5, n° 2, предл. 4), поскольку для любого

$t \in T$ существует такая относительно компактная открытая окрестность V элемента t, что множество $V \cap B$ является объединением счетного семейства множеств вида $V \cap A$ (где $A \in \mathfrak{A}$). Ясно, что если g μ-измеримо, то его сужение на любое множество $A \in \mathfrak{A}$ μ-измеримо (гл. IV, § 5, n° 3, предл. 7). Обратно, допустим, что для любого $A \in \mathfrak{A}$ сужение g_A отображения g на A μ-измеримо; тогда множество $\mathfrak{K}_A$ компактных подмножеств $K \subset A$, для которых сужение отображения g на K непрерывно, будет μ-плотно в A (предл. 3). Обозначим через $\mathfrak{H}$ множество объединений конечного числа множеств, принадлежащих $\bigcup\limits_{A \in \mathfrak{A}} \mathfrak{K}$; достаточно показать, что $\mathfrak{H}$ μ-плотно в B (предл. 3.) Но $\mathfrak{H}$, очевидно, удовлетворяет условиям (PL_I) и (PL_{II}) предложения 1; с другой стороны, обозначим через N такое подмножество из B, что для любого $A \in \mathfrak{A}$ и любого $K \in \mathfrak{H}$ множество $N \cap K$ пренебрежимо. Для любого $t \in B$ существует относительно компактная открытая окрестность V элемента t, пересекающаяся не более чем со счетным семейством (A_n) множеств из $\mathfrak{A}$. По условию множество $N \cap V \cap A_n$ пренебрежимо, а значит, пренебрежимо и множество

$$N \cap V = \bigcup_n (N \cap V \cap A_n);$$

тем самым показано, что N локально пренебрежимо, и доказательство закончено.

Упражнения. 1) Пусть T — локально компактное пространство, μ — положительная мера на T и $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ — открытое покрытие пространства T. Пусть для любого $\alpha \in A$ через f_α обозначено отображение множества U_α в множество G. Предположим, что для любой пары индексов α, β множество тех точек $t \in U_\alpha \cap U_\beta$, в которых $f_\alpha(t) \neq f_\beta(t)$, локально μ-пренебрежимо. Показать, что существует такое отображение f пространства T в G, при котором для любого $\alpha \in A$ множество тех $t \in U_\alpha$, в которых $f(t) \neq f_\alpha(t)$, локально μ-пренебрежимо. (Вначале рассмотреть случай компактного T, покрыв T конечным числом множеств U_α, а затем при помощи предл. 4 перейти к общему случаю.)

°2) Пусть T — топологическое пространство и $\mathfrak{N}$ — множество подмножеств из T, удовлетворяющих условиям:

(LN_I) Если $X \in \mathfrak{N}$ и $Y \subset X$, то $Y \in \mathfrak{N}$.

(LN_{II}) Если $X \in \mathfrak{N}$ и $Y \in \mathfrak{N}$, то $X \cup Y \in \mathfrak{N}$.

(LN_{III}) Для того чтобы множество $X \subset T$ принадлежало $\mathfrak{N}$, необходимо и достаточно, чтобы всякая точка $x \in X$ обладала такой открытой окрестностью U в T, что $U \cap X \in \mathfrak{N}$.

Пусть $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ — открытое покрытие пространства T. Для любой пары индексов (α, β) через $N_{\alpha\beta}$ обозначим принадлежащее $\mathfrak{N}$ множество, удовлетворяющее следующим условиям: 1° $N_{\alpha\alpha} = \varnothing$, $N_{\beta\alpha} = N_{\alpha\beta}$; 2° $N_{\alpha\beta} \subset U_\alpha \cap U_\beta$; 3° каковы бы ни были индексы α, β, γ, имеем $(N_{\alpha\beta} \cap U_\gamma) \subset (N_{\alpha\gamma} \cup N_{\beta\gamma})$. Показать, что существует семейство $(N_\alpha)_{\alpha \in A}$ таких принадлежащих $\mathfrak{N}$ подмножеств из T, что $N_\alpha \subset U_\alpha$ при любом $\alpha \in A$ и $N_{\alpha\beta} \subset N_\alpha \cup N_\beta$ при любых α, β из A. (Рассмотреть множество Φ пар $(V, \mathfrak{M})$, образованных открытым множеством $V \subset T$ и таким семейством $\mathfrak{M} = (M_\alpha)_{\alpha \in A}$ подмножеств, принадлежащих $\mathfrak{N}$, что $M_\alpha \subset U_\alpha \cap V$ при любом $\alpha \in A$ и $(N_{\alpha\beta} \cap V) \subset (M_\alpha \cup M_\beta)$ при любых индексах α, β. Упорядочить Φ, полагая $(V, \mathfrak{M}) \leqslant (V', \mathfrak{M}')$, если $V \subset V'$ и если $M'_\alpha \cap V = M_\alpha$ для любого $\alpha \in A$. Показать, что множество Φ индуктивно и что максимальный элемент $(V_0, \mathfrak{M}_0)$ множества Φ должен быть таким, чтобы $V_0 = T$.) Получить отсюда новое доказательство упр. 1.

§ 2. Существенно интегрируемые функции

1. *Существенный верхний интеграл*

Определение 1. *Пусть T — локально компактное пространство и μ — положительная мера на T. Для любой определенной на T числовой функции $f \geqslant 0$ существенным верхним интегралом от f (относительно меры μ) называется и обозначается через* $\overline{\int}^* f\,d\mu$, $\overline{\int}^* f(t)\,d\mu(t)$ *или* $\overline{\mu}^*(f)$ *верхняя грань (конечная или нет) множества чисел* $\int_K^* f\,d\mu = \int^* f\varphi_K\,d\mu$, *где K пробегает множество компактных подмножеств из T. Для любого подмножества $A \subset T$ полагаем* $\overline{\mu}^*(A) = \overline{\mu}^*(\varphi_A)$.

Предложение 1. *Если $\mathfrak{K}$ есть μ-плотное множество компактных подмножеств из T* (§ 1, n° 2, опр. 2), *то* $\overline{\mu}^*(f) = \sup\limits_{K \in \mathfrak{K}} \int^* f\varphi_K\,d\mu$ *для любой функции $f \geqslant 0$.*

Достаточно показать, что для любого компактного подмножества $L \subset T$ выполняется равенство $\int^* f\varphi_L\,d\mu = \sup\limits_K \int^* f\varphi_K\,d\mu$, где K пробегает множество подмножеств из L, принадлежащих $\mathfrak{K}$. Но так как L представляет собой объединение пренебрежимого множества и возрастающей последовательности (K_n) множеств из $\mathfrak{K}$, то это следует из теоремы о переходе к пределу в верхних интегралах (гл. IV, § 1, n° 3, теорема 3).

Так как $f\varphi_K \leqslant f$ для любого компактного подмножества $K \subset T$, то

$$\overline{\int}^* f\,d\mu \leqslant \int^* f\,d\mu. \tag{1}$$

Может оказаться, что $\overline{\mu}^*(f) \neq \mu^*(f)$; действительно, условие $\mu^*(f)=0$ означает, что f *пренебрежима*, тогда как условие $\overline{\mu}^*(f)=0$ означает, что f *локально пренебрежима* (гл. IV, § 5, n° 2, предл. 5); но могут существовать локально пренебрежимые, но не пренебрежимые множества (гл. IV, § 1, упр. 4).

Предложение 2. *Для всякой полунепрерывной снизу на T числовой функции $f \geqslant 0$ справедливо равенство $\overline{\mu}^*(f)=\mu^*(f)$.*

В самом деле, пусть g — такая функция из $K_+(T)$, что $g \leqslant f$. Если K есть (компактный) носитель функции g, то $\mu(g) \leqslant \leqslant \mu^*(f\varphi_K) \leqslant \overline{\mu}^*(f)$. Из определения верхнего интеграла вытекает, что $\mu^*(f) \leqslant \overline{\mu}^*(f)$, и следовательно, в силу (1), $\overline{\mu}^*(f)=\mu^*(f)$.

Предложение 3. *Пусть $f \geqslant 0$ — определенная на T числовая функция, обращающаяся в нуль на дополнении объединения последовательности $(A_n)_{n \geqslant 0}$ интегрируемых множеств; тогда $\overline{\mu}^*(f)=\mu^*(f)$.*

Поскольку каждое из A_n есть объединение пренебрежимого множества и последовательности компактных множеств (гл. IV, § 4, n° 6, следствие 2 из теоремы 4), то для доказательства достаточно рассмотреть случай, когда A_0 пренебрежимо, A_n компактно и $A_n \subset A_{n+1}$ для $n \geqslant 1$. Тогда f будет почти всюду равна верхней огибающей возрастающей последовательности функций $f\varphi_{A_n}$ $(n \geqslant 1)$; поэтому (гл. IV, § 1, n° 3, теорема 3 и § 2, n° 3, предл. 6)

$$\mu^*(f) = \lim_{n\to\infty} \mu^*(f\mu_{A_n}) \leqslant \overline{\mu}^*(f),$$

и, следовательно (формула (1)), $\overline{\mu}^*(f)=\overline{\mu}^*(f)$.

Следствие. *Если T счетно в бесконечности или если μ ограничена, то $\overline{\mu}^*(f)=\mu^*(f)$ для любой числовой функции $f \geqslant 0$, определенной на T.*

Предложение 4. a) *Если* $f \geqslant 0$ *и* $g \geqslant 0$ — *две числовые функции, определенные на* T, *и* $f \leqslant g$, *то* $\bar{\mu}^*(f) \leqslant \bar{\mu}^*(g)$.

b) *Для любого конечного числа* $\alpha \geqslant 0$ *выполняется равенство* $\bar{\mu}^*(\alpha f) = \alpha \bar{\mu}^*(f)$.

c) *Если* $f_1 \geqslant 0$ *и* $f_2 \geqslant 0$ — *две числовые функции, определенные на* T, *то* $\bar{\mu}^*(f_1 + f_2) \leqslant \bar{\mu}^*(f_1) + \bar{\mu}^*(f_2)$.

d) *Если* ν — *положительная мера на* T *и* $\mu \leqslant \nu$, *то* $\bar{\mu}^* \leqslant \bar{\nu}^*$.

Эти свойства сразу вытекают из соответствующих свойств верхнего интеграла (гл. IV, § 1, n° 3, предл. 10, 11, 12 и 15).

2. *Существенно интегрируемые функции*

Пусть F — действительное банахово пространство. Для любого отображения $\mathbf{f}$ пространства T в F через $\bar{N}_1(\mathbf{f}, \mu)$ или просто $\bar{N}_1(\mathbf{f})$ обозначим (конечное или бесконечное) положительное число $\bar{\mu}^*(|\mathbf{f}|)$. Если $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ — два отображения T в F и α — скаляр, то из предложения 4 следует, что

$$\bar{N}_1(\alpha\mathbf{f}) = |\alpha| \bar{N}_1(\mathbf{f}),$$

$$\bar{N}_1(\mathbf{f} + \mathbf{g}) \leqslant \bar{N}_1(\mathbf{f}) + \bar{N}_1(\mathbf{g}).$$

Для того чтобы $\bar{N}_1(\mathbf{f}) = 0$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{f}$ было *локально пренебрежимо*.

Через $\bar{\mathscr{F}}_F^1(T, \mu)$ или просто $\bar{\mathscr{F}}_F^1(\mu)$ и даже $\bar{\mathscr{F}}_F^1$ (если это не может вызвать недоразумений) мы будем обозначать множество отображений $\mathbf{f}$ пространства T в F, для которых $\bar{N}_1(\mathbf{f}) < +\infty$. Легко видеть, что $\bar{\mathscr{F}}_F^1$ содержит $\mathscr{F}_F^1$ (гл. IV, § 3, n° 3), что $\bar{\mathscr{F}}_F^1$ есть векторное подпространство всех отображений пространства T в F и что $\bar{N}_1(\mathbf{f})$ есть полунорма на $\bar{\mathscr{F}}_F^1$. Мы будем всегда предполагать, что $\bar{\mathscr{F}}_F^1$ наделено топологией, определяемой этой полунормой. Вообще говоря, пространство $\bar{\mathscr{F}}_F^1$ не будет отделимым; замыкание нуля в этом пространстве представляет собой подпространство $\mathscr{N}_F^\infty$ локально пренебрежимых отображений пространства T в F.

Всякая функция из $\bar{\mathscr{F}}_F^1$ обращается в нуль на дополнении счетного объединения интегрируемых множеств (гл. IV, § 5, n° 6, лемма 2). Значит, в силу предложения 3 для любой функции $\mathbf{f} \in \overline{\mathscr{F}}^1_F$ справедливо равенство $\overline{N}_1(\mathbf{f}) = N_1(\mathbf{f})$.

Предложение 5. *Справедливы соотношения* $\overline{\mathscr{F}}^1_F = \mathscr{F}^1_F + \mathscr{N}^\infty_F$ *и* $\mathscr{F}^1_F \cap \mathscr{N}^\infty_F = \mathscr{N}_F$ *(пространство пренебрежимых отображений пространства T в F). Иначе говоря, для того чтобы функция* $\mathbf{f}$ *принадлежала* $\overline{\mathscr{F}}^1_F$, *необходимо и достаточно, чтобы существовала функция* $\mathbf{f}' \in \mathscr{F}^1_F$, *равная* $\mathbf{f}$ *локально почти всюду; кроме того, если* $\mathbf{f}''$ *есть вторая функция из* $\mathscr{F}^1_F$, *равная* $\mathbf{f}$ *локально почти всюду, то функция* $\mathbf{f}'' - \mathbf{f}'$ *пренебрежима. И наконец,* $\overline{N}_1(\mathbf{f}) = N_1(\mathbf{f}')$.

Вначале мы установим две леммы.

Лемма 1. *Пусть $f \geqslant 0$ и $g \geqslant 0$ — две числовые функции; если g измерима, то*

$$\int^* fg\, d\mu = \inf \int^* \varphi g\, d\mu,$$

когда φ пробегает множество измеримых функций, больших или равных f.

Поскольку неравенство $f \leqslant \varphi$ влечет $fg \leqslant \varphi g$, то $\int^* fg\, d\mu \leqslant \leqslant \inf \int^* \varphi g\, d\mu$. С другой стороны, обозначим через ψ полунепрерывную снизу функцию такую, что $\psi \geqslant fg$; положим $\varphi_0(x) = +\infty$, если $\psi(x) = g(x) = +\infty$ или если $g(x) = 0$, а в остальных случаях $\varphi_0(x) = \frac{\psi(x)}{g(x)}$. Сразу же убеждаемся в том, что φ_0 измерима (гл. IV, § 5, n° 5, предл. 9) и что $\varphi_0 g \leqslant \psi$ и $\varphi_0 \geqslant f$; следовательно, по определению верхнего интеграла (гл. IV, § 1, n° 3, опр. 3)

$$\int^* fg\, d\mu \geqslant \inf \int^* \varphi g\, d\mu,$$

что и завершает доказательство.

Лемма 2. *Пусть $f \geqslant 0$, $g \geqslant 0$, $h \geqslant 0$ — три числовые функции; если g и h измеримы, то*

$$\int^* f(g+h)\, d\mu = \int^* fg\, d\mu + \int^* fh\, d\mu.$$

В самом деле, $f(g+h) = fg + fh$ (с учетом соглашения $0 \cdot (+\infty) = 0$), и, значит, $\int^* f(g+h)\, d\mu \leqslant \int^* fg\, d\mu + \int^* fh\, d\mu$.

С другой стороны, из леммы 1 вытекает, что $\int^* f(g+h)\,d\mu = \inf \int^* \varphi(g+h)\,d\mu$, когда φ пробегает множество измеримых функций, удовлетворяющих условию $\varphi \geqslant f$. Но в то же время

$$\int^* \varphi g\,d\mu + \int^* \varphi h\,d\mu = \int^* \varphi(g+h)\,d\mu, \tag{2}$$

ибо если $\int^* \varphi g\,d\mu < +\infty$ и $\int^* \varphi h\,d\mu < +\infty$, то функции φg и φh интегрируемы (гл. IV, § 5, n° 6, теорема 5), а значит, интегрируема и $\varphi(g+h)$, из чего следует (2); в случае же, когда один из верхних интегралов в правой части равен $+\infty$, формула (2) очевидна. Тогда из (2) и из леммы 1 выводим неравенство $\int^* f(g+h)\,d\mu \geqslant \int^* fg\,d\mu + \int^* fh\,d\mu$, чем и завершается доказательство леммы.

Пусть теперь $\mathbf{f} \in \overline{\mathscr{F}}^1_F$ и (K_n) есть такая возрастающая последовательность компактных множеств, что $\sup\limits_n \int^* |\mathbf{f}|\,\varphi_{K_n}\,d\mu = \overline{N}_1(\mathbf{f})$. Пусть $A = \bigcup\limits_n K_n$; тогда (гл. IV, § 1, n° 3, теорема 3)

$$\int^* |\mathbf{f}|\,\varphi_A\,d\mu = \sup_n \int^* |\mathbf{f}|\,\varphi_{K_n}\,d\mu = \overline{N}_1(\mathbf{f}),$$

и значит, функция $\mathbf{f}' = \mathbf{f}\varphi_A$ принадлежит $\mathscr{F}^1_F$ и $N_1(\mathbf{f}') = \overline{N}_1(\mathbf{f})$. Покажем, что функция $\mathbf{f}\varphi_{T-A}$ *локально пренебрежима.* Если это не так, то найдется компактное подмножество K из $T - A$, для которого функция $|\mathbf{f}|\,\varphi_K$ не будет пренебрежимой (§ 1, n° 2, предл. 1). Пусть $a = \int^* |\mathbf{f}|\,\varphi_K\,d\mu > 0$. Множество $L = K \cup K_n$ компактно, и согласно лемме 2

$$\int^* |\mathbf{f}|\,\varphi_L\,d\mu = \int^* |\mathbf{f}|\,\varphi_{K_n}\,d\mu + \int^* |\mathbf{f}|\,\varphi_K\,d\mu = a + \int^* |\mathbf{f}|\,\varphi_{K_n}\,d\mu;$$

следовательно, для достаточно больших n имеем неравенство

$$\int^* |\mathbf{f}|\,\varphi_L\,d\mu > \overline{N}_1(\mathbf{f}),$$

чего не может быть.

Для завершения доказательства предложения 5 достаточно заметить, что если $\mathbf{f} \in \mathscr{F}^1_F \cap \mathscr{N}^\infty_F$, то $N_1(\mathbf{f}) = \overline{N}_1(\mathbf{f})$, то есть $\mathbf{f}$ пренебрежима.

Следствие. *Если функция* $\mathbf{f}$ *принадлежит* $\overline{\mathscr{F}}^1_F$, *то множество точек, в которых* $\mathbf{f}(t) \neq 0$, *содержится в объединении последовательности компактных множеств и локально пренебрежимого множества.*

Предложение 5 показывает, что нормированное пространство $\overline{\mathscr{F}}^1_F / \mathscr{N}^\infty_F$ канонически отождествляется с нормированным пространством $\mathscr{F}^1_F / \mathscr{N}_F$ и, значит, полно (гл. IV, § 3, n° 3, предл. 5), так что само пространство $\overline{\mathscr{F}}^1_F$ полно.

Определение 2. *Через* $\overline{\mathscr{L}}^1_F(T, \mu)$ (*или просто* $\overline{\mathscr{L}}^1_F(\mu)$, *а также* $\mathscr{L}^1_F$) *обозначается замыкание в локально выпуклом пространстве* $\overline{\mathscr{F}}^1_F(T, \mu)$ *векторного пространства* $\mathscr{K}_F(T)$ *непрерывных отображений пространства* T *в* F *с компактным носителем. Функции, принадлежащие* $\overline{\mathscr{L}}^1_F$, *называются существенно интегрируемыми относительно* μ (или *существенно* μ-*интегрируемыми*). *Говорят, что множество* $A \subset T$ *существенно интегрируемо относительно* μ (или *существенно* μ-*интегрируемо*), *если функция* φ_A *существенно* μ-*интегрируема.*

Предложение 6. *Справедливы соотношения* $\overline{\mathscr{L}}^1_F = \mathscr{L}^1_F + \mathscr{N}^\infty_F$ *и* $\mathscr{L}^1_F \cap \mathscr{N}^\infty_F = \mathscr{N}_F$. *Иначе говоря, для того чтобы функция* $\mathbf{f}$ *была существенно интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы существовала интегрируемая функция* $\mathbf{f}'$, *равная* $\mathbf{f}$ *локально почти всюду, и тогда эта функция* $\mathbf{f}'$ *определяется с точностью до пренебрежимой функции.*

В самом деле, пусть $\mathbf{f} \in \overline{\mathscr{L}}^1_F$; согласно предложению 5 имеется функция $\mathbf{f}' \in \mathscr{F}^1_F$, равная $\mathbf{f}$ локально почти всюду. С другой стороны, существует такая функция $\mathbf{g} \in \mathscr{K}_F(T)$, что $\overline{N}_1(\mathbf{f} - \mathbf{g}) = N_1(\mathbf{f}' - \mathbf{g})$ сколь угодно мало; это показывает, что $\mathbf{f}' \in \mathscr{L}^1_F$. Отсюда немедленно вытекает предложение.

Нормированное пространство $\overline{\mathscr{L}}^1_F / \mathscr{N}^\infty_F$ отождествляется канонически с $\mathscr{L}^1_F / \mathscr{N}_F = L^1_F$ и, стало быть, полно, так что само $\overline{\mathscr{L}}^1_F$ полно.

Предложение 7. *Для того чтобы отображение* $\mathbf{f}$ *пространства* T *в* F *было существенно интегрируемо, необходимо и достаточно, чтобы* $\mathbf{f}$ *было измеримо и чтобы* $\overline{N}_1$.

Это сразу же следует из предложения 6 и из критерия интегрируемости (гл. IV, § 5, n° 6, теорема 5).

Сочетая отображение $\tilde{\mathfrak{f}} \to \mu(\tilde{\mathfrak{f}})$ пространства L_F^1 в F с каноническим отображением пространства $\overline{\mathscr{L}}_F^1$ на L_F^1, получаем непрерывное линейное отображение пространства $\overline{\mathscr{L}}_F^1$ в F, которое *продолжает* отображение $\mathfrak{f} \to \int \mathfrak{f}\, d\mu$ пространства $\mathscr{L}_F^1$ в F; значение этого отображения для $\mathfrak{f} \in \overline{\mathscr{L}}_F^1$ обозначают снова через $\int \mathfrak{f}\, d\mu$ и называют этот элемент *интегралом* от $\mathfrak{f}$ относительно μ. Следовательно, две существенно интегрируемые функции, равные между собой локально почти всюду, имеют один и тот же интеграл. Для любой конечной существенно интегрируемой функции $f \geqslant 0$ выполняется соотношение $\overline{\int}^* f\, d\mu = \int f\, d\mu$ (предл. 5 и гл. IV, § 4, n° 2, предл. 1). Если A есть существенно интегрируемое множество, то интеграл $\int \varphi_A\, d\mu$ обозначается также через $\mu(A)$ и снова называется *мерой* множества A.

Предложение 8. *Пусть $\mathfrak{K}$ есть μ-плотное множество компактных подмножеств из T; для любой функции $\mathfrak{f} \in \overline{\mathscr{L}}_F^1$ имеем*

$$\int \mathfrak{f}\, d\mu = \lim_{\mathfrak{K}} \int \mathfrak{f}\varphi_K\, d\mu, \tag{3}$$

где предел берется по фильтрующемуся (по отношению $\subset$) множеству $\mathfrak{K}$.

Пусть $\mathfrak{f}'$ — интегрируемая функция, равная $\mathfrak{f}$ локально почти всюду. Поскольку $|\mathfrak{f}'|$ обращается в нуль на дополнении счетного объединения интегрируемых множеств (гл. IV, § 5, n° 6, лемма 2), то из предложений 1 и 3 следует, что $\int |\mathfrak{f}'|\, d\mu$ есть верхняя грань интегралов $\int |\mathfrak{f}'| \varphi_K\, d\mu$, где K пробегает множество $\mathfrak{K}$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое компактное множество $K \in \mathfrak{K}$, что $\int |\mathfrak{f}'| \varphi_{T-K}\, d\mu \leqslant \varepsilon$. Тогда для любого компактного множества $H \supset K$ имеем

$$\left| \int \mathfrak{f}\, d\mu - \int \mathfrak{f}\varphi_H\, d\mu \right| = \left| \int (\mathfrak{f}' - \mathfrak{f}'\varphi_H)\, d\mu \right| \leqslant \int |\mathfrak{f}'| \varphi_{T-H}\, d\mu \leqslant \varepsilon,$$

что и доказывает предложение.

Замечания. 1) В случае, когда T представляет собой счетное объединение интегрируемых множеств (и, в частности, когда T *счетно в бесконечности*), из предложения 3 и определения 2 следует, что понятие существенно интегрируемой функции совпадает с понятием интегрируемой функции.

2) Если функция $\mathbf{f}$ со значениями в банаховом пространстве F определена на T локально почти всюду, то снова говорят, что $\mathbf{f}$ *существенно интегрируема*, если она локально почти всюду равна всюду определенной и существенно интегрируемой функции $\mathbf{f}_1$; при этом полагают $\int \mathbf{f}\, d\mu = \int \mathbf{f}_1\, d\mu$, и это определение не зависит от той всюду определенной и существенно интегрируемой функции $\mathbf{f}_1$, которой $\mathbf{f}$ равна локально почти всюду. Точно так же определяется понятие существенно интегрируемой функции для функций со значениями в $\overline{\mathbf{R}}$, определенных и конечных локально почти всюду.

Предложение 9. *Пусть $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ — семейство положительных числовых функций, фильтрующееся по отношению $\leqslant$ и такое, что отображение $t \to (f_\alpha(t))$ пространства T в $\overline{\mathbf{R}}^A$ μ-измеримо. Пусть, далее, f — верхняя огибающая семейства (f_α). Тогда f μ-измерима и*

$$\overline{\int}^* f\, d\mu = \sup_{\alpha \in A} \overline{\int}^* f_\alpha\, d\mu. \tag{4}$$

Обозначим через $\mathfrak{K}$ множество таких компактных подмножеств $K \subset T$, что сужение на K отображения $t \to (f_\alpha(t))$ непрерывно; из условий предложения вытекает, что $\mathfrak{K}$ μ-плотно (§ 1, n° 3, предл. 3). Поскольку сужение на любое $K \in \mathfrak{K}$ каждого из отображений f_α непрерывно, то сужение отображения f на любое $K \in \mathfrak{K}$ полунепрерывно снизу, и, значит, f μ-измеримо (§ 1, n° 3, предл. 3 и гл. IV, § 5, n° 5, следствие из предл. 9). Пусть J означает (измеримое) множество точек из T, в которых $f(t) = +\infty$, а $\mathfrak{K}_1$ (соотв. $\mathfrak{K}_2$) — множество таких компактных подмножеств H из $T - J$ (соотв. из J), что сужения на H отображений f и $t \to (f_\alpha(t))$ непрерывны. Из предложения 3 § 1 непосредственно выводится, что в этом случае множество объединений $H_1 \cup H_2$, где $H_1 \in \mathfrak{K}_1$ и $H_2 \in \mathfrak{K}_2$, μ-плотно. Согласно предложению 1 из § 2 и теореме 2 из гл. IV, § 1, n° 1, все сводится к доказательству того, что $\sup\limits_{\alpha\in A}\int^* f_\alpha\varphi_K\,d\mu=\int^* f\varphi_K\,d\mu$ для $K\in\mathfrak{K}_1$ или $K\in\mathfrak{K}_2$. Если $K\in\mathfrak{K}_1$, то из теоремы Дини (Общая топ., Рез., § 13, n° 21) вытекает, что f_α равномерно сходится к f на K, откуда и следует наше утверждение для данного случая (гл. IV, § 4, n° 3, предл. 3). Если же $K\in\mathfrak{K}_2$, то можно ограничиться случаем, когда $\mu(K)>0$. Применяя теорему Дини к функциям $\frac{f_\alpha}{1+f_\alpha}$ и $\frac{f}{1+f}$, мы получаем, что для любого числа $a>0$ найдется такой индекс α, что $f_\alpha(t)\geqslant a$ при любом $t\in K$; следовательно, $\int^* f_\alpha\varphi_K\,d\mu\geqslant a\cdot\mu(K)$, так что

$$\sup_{\alpha\in A}\int^* f_\alpha\varphi_K\,d\mu=+\infty=\int^* f\varphi_K\,d\mu.$$

Отметим, что равенство (4) не обязано выполняться, если в нем существенные верхние интегралы заменить верхними интегралами (упр. 5).

Упражнения. 1) Показать, что для любой возрастающей последовательности (f_n) положительных числовых функций на T

$$\overline{\mu}^*(\sup_n f_n)=\sup_n \overline{\mu}^*(f_n)$$

(использовать предл. 5). Вывести отсюда, что для любой последовательности (f_n) положительных числовых функций

$$\overline{\mu}^*(\liminf_{n\to\infty} f_n)\leqslant \liminf_{n\to\infty}\overline{\mu}^*(f_n).$$

2) Показать, что если f и g — две положительные числовые функции, то $\overline{\mu}^*(\sup(f,g))+\overline{\mu}^*(\inf(f,g))\leqslant\overline{\mu}^*(f)+\overline{\mu}^*(g)$ (ср. гл. IV, § 1, упр. 1).

3) Показать, что для любой определенной на T функции $f\geqslant 0$ отображение $\mu\to\overline{\mu}^*(f)$ пространства $\mathscr{M}_+(T)$ в $\overline{\mathbf{R}}$ полунепрерывно снизу в сильной топологии (гл. III, § 2, упр. 4; ср. гл. IV, § 1, упр. 3b)). При каких условиях это отображение будет непрерывным?

4) Показать, что если μ и ν — две положительные меры на T и $\lambda=\mu+\nu$, то $\overline{\lambda}^*=\overline{\mu}^*+\overline{\nu}^*$ (ср. гл. IV, § 1, предл. 15).

5) Пусть T — локально компактное пространство и μ — мера, определенная в упр. 4 из гл. IV, § 1. Для любого действительного y через f_y обозначим характеристическую функцию множества, сводящегося к точке $(0, y)\subset T$. Показать, что отображение $t\to(f_y(t))_{y\in\mathbf{R}}$ μ-измеримо, но что если $f=\sup\limits_{y\in\mathbf{R}} f_y$, то $\mu^*(f)=+\infty$ и $\sup\limits_{y\in\mathbf{R}}\mu^*(f_y)=0$.

°6) Пусть $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ — семейство положительных числовых функций, определенных на T и обладающих следующим свойством: для любого компактного подмножества $K \subset T$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется тако компактное множество $K' \subset K$, что $\mu(K - K') \leqslant \varepsilon$ и что сужения на K' всех функций f_α полунепрерывны снизу. Обозначим через f верхнюю огибающую семейства (f_α). Показать, что f измерима и удовлетворяет соотношению (4) из предложения 9. (Показать, что если K' — такое компактное множество, что сужения всех f_α на K' полунепрерывны снизу, то $\int^* f\varphi_{K'}\, d\mu = \sup\limits_{\alpha \in A} \int^* f_\alpha \varphi_{K'}\, d\mu$; рассуждать, как в теореме 1, гл. IV, § 1.)

Привести пример отображения $t \to (f_\alpha(t))$, удовлетворяющего вышеуказанному условию и не являющегося μ-измеримым.

7) Пусть (μ_n) — последовательность положительных мер на T, сильно сходящаяся к μ в $\mathcal{M}(T)$ (гл. III, § 2, упр. 4).

a) Показать, что если отображение f пространства T в топологическое пространство G μ_n-измеримо при любом n, то оно μ-измеримо (использовать упр. 3b) из гл. IV, § 1).

b) Пусть $\mathbf{f}$ — отображение пространства T в банахово пространство F, существенно μ_n-интегрируемое при любом n. Показать, что если последовательность $(\overline{\mu_n^*}(|\mathbf{f}|))$ ограничена, то $\mathbf{f}$ существенно μ-интегрируемо (упр. 3).

Показать на примере, что равенство $\int \mathbf{f}\, d\mu = \lim\limits_{n \to \infty} \int \mathbf{f}\, d\mu_n$ может и не выполняться (взять в качестве μ_n такую точечную меру на компактном пространстве, чтобы $\lim\limits_{n \to \infty} \|\mu_n\| = 0$); однако это соотношение выполняется, если $\mathbf{f}$ ограничено и имеет компактный носитель.

§ 3. Интегрирование положительных мер

1. *Функции со значениями в пространстве мер*

Пусть X — локально компактное пространство и $\mathcal{M}(X)$ — пространство мер на X. Во всей оставшейся части этой главы $\mathcal{M}(X)$ будет всегда наделено *широкой топологией* (гл. III, § 2, n° 7); таким образом, утверждение, что отображение $t \to \lambda_t$ топологического пространства T в $\mathcal{M}(X)$ непрерывно, означает, что для любой функции $f \in \mathcal{K}(X)$ числовая функция $t \to \langle f, \lambda_t \rangle = \int f(x)\, d\lambda_t(x)$ непрерывна на T; в этом случае мы будем также говорить, что отображение $t \to \lambda_t$ *широко непрерывно* на T. Если T есть локально компактное пространство, а μ — положительная мера на T, то утверждение, что отображение $t \to \lambda_t$ μ-измеримо, означает, следовательно, что множество компактных подмножеств K из T, для которых сужение отображения $t \to \lambda_t$ на K широко непрерывно, будет μ-плотно (§ 1, n° 3, предл. 3). В этом случае говорят, что отображение $t \to \lambda_t$ *широко* μ*-измеримо*.

Пусть T — локально компактное пространство и μ — положительная мера на T. Далее, пусть $t \to \lambda_t$ — такое отображение пространства T в $\mathscr{M}(X)$, что для любого $t \in T$ λ_t является *положительной* мерой на X. Кроме того, предположим, что для любой функции $f \in \mathscr{K}(X)$ конечная числовая функция $t \to \langle f, \lambda_t \rangle$ *существенно интегрируема* относительно μ; если положить $\nu(f) = \int \langle f, \lambda_t \rangle \, d\mu(t)$, то, как легко видеть, $f \to \nu(t)$ есть положительная линейная форма на $\mathscr{K}(X)$ и, значит (гл. III, § 2, теорема 1), является *положительной мерой* на X. Мы будем говорить, что ν есть *интеграл* (относительно μ) семейства положительных мер $t \to \lambda_t$ $(t \in T)$, и будем записывать его в виде $\nu = \int \lambda_t \, d\mu(t)$.

В случае, когда T есть конечное множество, интеграл семейства $t \to \lambda_t$ является ничем иным, как (конечной) суммой семейства мер $\mu(\{t\}) \lambda_t$.

Определение 1. *Пусть T — локально компактное пространство и μ — положительная мера на T. Говорят, что семейство мер $t \to \lambda_t$ $(t \in T)$ на X согласовано относительно меры μ (или μ-согласовано), если оно удовлетворяет следующим условиям:*

1° *Для любого $t \in T$ λ_t есть положительная мера на X.*

2° *Для любой функции $f \in \mathscr{K}(X)$ числовая функция $t \to \langle f, \lambda_t \rangle$ существенно μ-интегрируема.*

3° *Отображение $t \to \lambda_t$ широко μ-измеримо.*

Замечания. 1) Утверждение о том, что $t \to \lambda_t$ широко μ-измеримо, сводится еще к тому, что отображение $t \to (\langle f, \lambda_t \rangle)_{f \in \mathscr{K}(X)}$ пространства T в $\mathbf{R}^{\mathscr{K}(X)}$ измеримо. Для этого недостаточно, чтобы каждая из функций $t \to \langle f, \lambda_t \rangle$ была измерима; семейство $t \to \lambda_t$ мер не обязано быть согласованным, если оно удовлетворяет только условиям 1° и 2° (упр. 1).

2) Приведенное выше определение интеграла от семейства положительных мер представляет собой частный случай понятия *слабого интеграла*, который будет изучаться в общем виде в главе VI.

2. *Повторные интегралы от полунепрерывных снизу функций*

Пусть $t \to \lambda_t$ есть μ-согласованное семейство мер на X. Если $f \in \mathcal{K}(X)$, то для интеграла $\int \langle f, \lambda_t \rangle \, d\mu(t)$ будет также использоваться обозначение $\int d\mu(t) \int f(x) \, d\lambda_t(x)$; тогда определение интеграла $\nu = \int \lambda_t \, d\mu(t)$ запишется в виде

$$\int f(x) \, d\nu(x) = \int d\mu(t) \int f(x) \, d\lambda_t(x). \tag{1}$$

Аналогичное изменение обозначений мы произведем в дальнейшем для верхних интегралов, существенно верхних интегралов и интегралов от функций со значениями в банаховом пространстве.

Предложение 1. *Пусть $t \to \lambda_t$ есть μ-согласованное семейство мер на X, и пусть $\nu = \int \lambda_t \, d\mu(t)$. Пусть, далее, $f \geqslant 0$ есть числовая функция, определенная и полунепрерывная снизу на X. Тогда числовая функция $t \to \int^* f(x) \, d\lambda_t(x)$ μ-измерима и*

$$\int^* f(x) \, d\nu(x) = \overline{\int}^* d\mu(t) \int^* f(x) \, d\lambda_t(x). \tag{2}$$

Пусть $(g_\alpha)_{\alpha \in A}$ — фильтрующееся по отношению $\leqslant$ семейство таких функций из $\mathcal{K}(X)$, что $0 \leqslant g_\alpha \leqslant f$. Положим $h(t) = \int^* f(x) \, d\lambda_t(x)$; тогда функция h будет служить верхней огибающей для функций

$$t \to \langle g_\alpha, \lambda_t \rangle = \int g_\alpha \, d\lambda_t.$$

С другой стороны, установлено (n° 1, замечание 1), что отображение $t \to (\langle g_\alpha, \lambda_t \rangle)$ пространства T в $\overline{\mathbf{R}}^A$ μ-измеримо. Согласно предложению 9 из § 2 функция h μ-измерима и

$$\overline{\int}^* h(t) \, d\mu(t) = \sup_\alpha \overline{\int}^* \langle g_\alpha, \lambda_t \rangle \, d\mu(t) =$$

$$= \sup_\alpha \int \langle g_\alpha, \lambda_t \rangle \, d\mu(t) = \sup_\alpha \nu(g_\alpha) = \int^* f(x) \, d\nu(x).$$

Следствие. *Если отображение $t \to \lambda_t$ широко непрерывно и если числовая функция $f \geqslant 0$ полунепрерывна снизу на X, то функция $t \to \int^* f(x)\, d\lambda_t(x)$ полунепрерывна снизу на T и*

$$\int^* f(x)\, d\nu(x) = \int^* d\mu(t) \int^* f(x)\, d\lambda_t(x). \tag{3}$$

Первая часть следствия сразу получается из предложения 4, гл. IV, § 1, n° 1; формула (3) является следствием формулы (2), если учесть совпадение верхнего и существенно верхнего интегралов для полунепрерывных снизу функций (§ 2, предл. 2).

3. Повторные интегралы от произвольных положительных функций

Предложение 2. *Пусть $t \to \lambda_t$ есть μ-согласованное семейство мер на X, и пусть $\nu = \int \lambda_t\, d\mu(t)$. Тогда для любой числовой функции $f \geqslant 0$, определенной на X, имеем*

$$\int^* f(x)\, d\nu(x) \geqslant \overline{\int}^* d\mu(t) \int^* f(x)\, d\lambda_t(x). \tag{4}$$

Если, кроме того, $t \to \lambda_t$ широко непрерывно, то

$$\int^* f(x)\, d\nu(x) \geqslant \int^* d\mu(t) \int^* f(x)\, d\lambda_t(x). \tag{5}$$

В самом деле, пусть g — такая полунепрерывная снизу функция на X, что $g \geqslant f$. Для любого $t \in T$ имеем

$$\int^* f(x)\, d\lambda_t(x) \leqslant \int^* g(x)\, d\lambda(x),$$

следовательно (предл. 1),

$$\overline{\int}^* d\mu(t) \int^* f(x)\, d\lambda_t(x) \leqslant \overline{\int}^* d\mu(t) \int^* g(x)\, d\lambda_t(x) = \int^* g(x)\, d\nu(x).$$

Если, кроме того, отображение $t \to \lambda_t$ широко непрерывно, то точно так же имеем

$$\int^* d\mu(t) \int^* f(x)\, d\lambda_t(x) \leqslant \int^* d\mu(t) \int^* g(x)\, d\lambda_t(x) = \int^* g(t)\, d\nu(x).$$

Тогда неравенства (4) и (5) будут вытекать из определения интеграла $\int^* f(x)\, d\nu(x)$ (гл. IV, § 1, n° 3, опр. 3).

Замечание. Неравенства (4) и (5) могут уже не выполняться, если в правой части вместо $\int^* f(x)\,d\nu(x)$ поставить $\overline{\int}^* f(x)\,d\nu(x)$ (упр. 3).

Следствие. *Пусть N — ν-пренебрежимое подмножество из X. Множество тех $t \in T$, для которых N не является λ_t-пренебрежимым, локально пренебрежимо относительно μ (и пренебрежимо, если при этом отображение $t \to \lambda_t$ широко непрерывно).*

Предложение 3. *Пусть f — ν-измеримая функция на X, принимающая значения в топологическом пространстве E и постоянная на дополнении некоторого счетного объединения ν-интегрируемых множеств. Тогда множество тех $t \in T$, для которых f не является λ_t-измеримой, локально пренебрежимо относительно μ.*

По условию существует разбиение пространства X, составленное из ν-пренебрежимого множества N, последовательности (K_n) компактных множеств и (ν-измеримого) множества B, так, что f постоянна на B и что сужение функции f на каждое из K_n непрерывно. Согласно следствию из предложения 2, N λ_t-пренебрежимо всюду, за исключением локально пренебрежимого множества S значений t. Значит, для $t \notin S$ сужение функции f на каждое из множеств N, B, K_n λ_t-измеримо, откуда и следует предложение (§ 1, n° 4, предл. 5).

Заключение предложения 3 не обязано более выполняться, если f не является постоянной на дополнении счетного объединения ν-интегрируемых множеств, даже если отображение $t \to \lambda_t$ широко непрерывно (упр. 4).

4. Повторные интегралы от функций со значениями в банаховом пространстве

Теорема 1. *Пусть $t \to \lambda_t$ — μ-согласованное семейство мер на локально компактном пространстве X, и пусть $\nu = \int \lambda_t\, d\mu(t)$. Пусть, далее, $\mathbf{f}$ есть ν-интегрируемая функция со значениями или в банаховом пространстве F, или в $\overline{\mathbf{R}}$. Наконец, пусть H — множество тех $t \in T$, для которых $\mathbf{f}$ не является λ_t-интегрируемой. Тогда H локально пренебрежимо относительно μ, функция*

$t \to \int \mathbf{f}(x)\, d\lambda_t(x)$, *определенная для* $t \notin H$, *существенно* μ-*интегрируема и*

$$\int \mathbf{f}(x)\, d\nu(x) = \int d\mu(t) \int \mathbf{f}(x)\, d\lambda_t(x). \tag{6}$$

Если при этом отображение $t \to \lambda_t$ *широко непрерывно, то* H *пренебрежимо и функция* $t \to \int \mathbf{f}(x)\, d\lambda_t(x)$ *интегрируема.*

Линейные комбинации с коэффициентами из F функций из $\mathcal{K}(X)$ образуют всюду плотное множество в $\mathcal{L}^1_F(\nu)$ (гл. IV, § 3, n° 5, предл. 10). Следовательно, существует последовательность $(\mathbf{g}_n)$ таких линейных комбинаций, обладающая следующими свойствами: 1° последовательность $(\mathbf{g}_n(x))$ сходится к $\mathbf{f}(x)$ всюду, кроме точек x некоторого ν-пренебрежимого множества N; 2° последовательность $(\mathbf{g}_n)$ сходится к $\mathbf{f}$ в среднем относительно меры ν; 3° существует такая полунепрерывная снизу ν-интегрируемая функция $h \geqslant 0$, что $|\mathbf{g}_n| \leqslant h$ при любом n (гл. IV, § 3, n° 4, теорема 3). В силу следствия из предложения 2 существует множество $A \subset T$, локально пренебрежимое относительно меры μ и такое, что для $t \notin A$ множество N λ_t-пренебрежимо; следовательно, при любом $t \notin A$ последовательность непрерывных функций $\mathbf{g}_n$ стремится почти всюду к $\mathbf{f}$ по мере λ_t. С другой стороны, согласно (4),

$$\overline{\int}^* d\mu(t) \int^* h(x)\, d\lambda_t(x) \leqslant \int^* h(x)\, d\nu(x) < +\infty,$$

и, значит, множество B тех точек $t \in T$, для которых будет $\int^* h(x)\, d\lambda_t(x) = +\infty$, локально пренебрежимо. Если положить $H = A \cup B$, то H будет локально пренебрежимо относительно μ, и, по теореме Лебега (гл. IV, § 3, n° 7, теорема 6), при $t \notin H$ функция $\mathbf{f}$ будет λ_t-*интегрируема.*

Отображение $t \to \int \mathbf{g}_n(x)\, d\lambda_t(x)$ при любом n принадлежит $\overline{\mathcal{L}}^1_F(T, \mu)$, поскольку $t \to \lambda_t$ μ-согласовано и, в силу формулы (1),

$$\int \mathbf{g}_n(x)\, d\nu(x) = \int d\mu(t) \int \mathbf{g}_n(x)\, d\lambda_t(x).$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \int^* |\mathbf{f}(x) - \mathbf{g}_n(x)|\, d\nu(x) = 0$, то из (4) вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\int}^* d\mu(t) \int^* |\mathbf{f}(x) - \mathbf{g}_n(x)|\, d\lambda_t(x) = 0$$

и тем более равенство

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\int}^* \left| \int \mathbf{f}(x)\, d\lambda_t(x) - \int \mathbf{g}_n(x)\, d\lambda_t(x) \right| d\mu(t) = 0.$$

По определению пространства $\overline{\mathscr{L}}^1_F(T, \mu)$ (§ 2, n° 2, опр. 2) последнее соотношение показывает, что отображение $t \to \int \mathbf{f}(x)\, d\lambda_t(x)$ (определенное локально почти всюду) локально почти всюду равно функции из $\overline{\mathscr{L}}^1_F(T, \mu)$; исходя из непрерывности интеграла в $\overline{\mathscr{L}}^1_F(T, \mu)$, отсюда можно также заключить, что интеграл $\int d\mu(t) \int \mathbf{f}(x)\, d\lambda_t(x)$ служит пределом для интегралов $\int d\mu(t) \int \mathbf{g}_n(x)\, d\lambda_t(x) = \int \mathbf{g}_n(x)\, d\nu(x)$, то есть равен $\int \mathbf{f}(x)\, d\nu(x)$; таким образом, первая часть теоремы доказана.

Если отображение $t \to \lambda_t$ широко непрерывно, то следствие из предложения 2 и формула (5) прежде всего показывают, что множества A и B μ-пренебрежимы, и значит, таковым является и H. Кроме того, из формулы (5) вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} \int^* \left| \int \mathbf{f}(x)\, d\lambda_t(x) - \int \mathbf{g}_n(x)\, d\lambda_t(x) \right| d\mu(t) = 0,$$

чем доказано, что отображение $t \to \int \mathbf{f}(x)\, d\lambda_t(x)$ интегрируемо.

Предложение 4. *Пусть $t \to \lambda_t$ — μ-согласованное семейство мер на X, и пусть $\nu = \int \lambda_t\, d\mu(t)$. Пусть, далее, $f \geqslant 0$ — числовая функция, определенная на X, ν-измеримая и обращающаяся в нуль на дополнении некоторого счетного объединения ν-интегрируемых множеств. Тогда функция $t \to \int^* f(x)\, d\lambda_t(x)$ μ-измерима и*

$$\int^* f(x)\, d\nu(x) = \overline{\int}^* d\mu(t) \int^* f(x)\, d\lambda_t(x). \tag{7}$$

Если при этом отображение $t \to \lambda_t$ широко непрерывно, то

$$\int^* f(x)\, d\nu(x) = \int^* d\mu(t) \int^* f(x)\, d\lambda_t(x). \tag{8}$$

Пусть (A_n) — возрастающая последовательность таких ν-интегрируемых подмножеств из X, что $f(x) = 0$ для $x \notin \bigcup_n A_n$, и пусть $f_n = \inf(n, f\varphi_{A_n})$. Каждая из функций f_n ν-интегрируема, и f

служит верхней огибающей для возрастающей последовательности (f_n). По теореме о переходе к пределу в верхних интегралах (гл. IV, § 1, n° 3, теорема 3) функция $t \to \int^* f(x)\,d\lambda_t(x)$ является верхней огибающей для функций $t \to \int^* f_n(x)\,d\lambda_t(x)$; но в силу теоремы 1 функция $t \to \int^* f_n(x)\,d\lambda_t(x)$ локально почти всюду равна функции (определенной локально почти всюду) $t \to \int f_n(x)\,d\lambda_t(x)$, которая существенно интегрируема. Следовательно, функция $t \to \int^* f(x)\,d\lambda_t(x)$, как верхняя огибающая последовательности измеримых функций, измерима (гл. IV, § 5, n° 4, следствие 1 из теоремы 2). Кроме того, поскольку $\int^* f_n\,d\nu = \int f_n\,d\nu$, то на основании теоремы 1 и теоремы о переходе к пределу в верхних интегралах получаем

$$\int^* f(x)\,d\nu(x) = \sup_n \int f_n(x)\,d\nu(x) = \sup_n \overline{\int}^* d\mu(t) \int^* f_n(x)\,d\lambda_t(x).$$

Но поскольку отображение $t \to \left(\int^* f_n(x)\,d\lambda_t(x)\right)$ пространства T в $\overline{\mathbf{R}}^N$ μ-измеримо (гл. IV, § 5, n° 3, теорема 1), то предложение 9 из § 2 показывает, что

$$\sup_n \overline{\int}^* d\mu(t) \int^* f_n(x)\,d\lambda_t(x) = \overline{\int}^* d\mu(t) \int^* f(x)\,d\lambda_t(x),$$

откуда и следует первая часть предложения. В случае, когда $t \to \lambda_t$ широко непрерывно, рассуждение будет точно таким же, с использованием того факта, что

$$\int f_n(x)\,d\nu(x) = \int^* d\mu(t) \int^* f_n(x)\,d\lambda_t(x),$$

и с применением теоремы о переходе к пределу в верхних интегралах вместо теоремы 9 из § 2.

Заключения предыдущего предложения не обязаны выполняться, если функция f не будет обращаться в нуль на дополнении некоторого счетного объединения ν-интегрируемых множеств (упр. 3).

Следствие. *Пусть функция* $\mathbf{f}$ *определена на* X, *принимает значения в банаховом пространстве или в* $\overline{\mathbf{R}}$, ν-*измерима и обращается в нуль на дополнении некоторого счетного объединения*

ν-интегрируемых множеств. Для того чтобы $\mathbf{f}$ *была ν-интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\overline{\int}^* d\mu(t) \int^* |\mathbf{f}(x)|\, d\lambda_t(x) < +\infty.$$

Это сразу же следует из предложения 4 и из критерия интегрируемости (гл. IV, § 5, n° 6, теорема 5).

Замечание. Пусть $t \to \lambda_t$ — μ-согласованное семейство мер на X; если отображение $t \to \lambda'_t$ пространства T в $\mathscr{M}_+(X)$ равно $t \to \lambda_t$ локально почти всюду относительно μ, то из определений сразу же получаем, что семейство $t \to \lambda'_t$ тоже μ-согласовано и $\int \lambda_t\, d\mu\ (t) = \int \lambda'_t\, d\mu\ (t)$. Если теперь взять функцию $t \to \rho_t$ со значениями в $\mathscr{M}(X)$, определенную локально почти всюду (относительно μ) на T, то мы снова будем называть это семейство *μ-согласованным*, если оно локально почти всюду (относительно μ) равно некоторому μ-согласованному семейству $t \to \lambda_t$, определенному всюду на T; тогда полагаем $\int \rho_t\, d\mu\ (t) = \int \lambda_t\, d\mu\ (t)$, и это определение не зависит от семейства $t \to \lambda_t$, локально почти всюду равного $t \to \rho_t$. Мы предоставляем читателю удостовериться в том, что доказанные выше предложения распространяются на μ-согласованные семейства, определенные локально почти всюду.

5. Суммируемые семейства положительных мер

Пусть $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in A}$ — семейство *положительных* мер на локально компактном пространстве X. Пространство $\mathscr{M}_+(X)$ положительных мер на X, наделенное широкой топологией, может рассматриваться как подпространство пространства-произведения $\mathbf{R}^{\mathscr{K}(X)}$, замкнутое в этом произведении (гл. III, § 2, n° 7, предл. 7); с другой стороны, оно наделено ассоциативным и коммутативным законом композиции $(\mu, \nu) \to \mu + \nu$. Следовательно, утверждение, что семейство $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in A}$ *суммируемо* (Общая топ., Рез., § 11, n° 1), означает, что для любой функции $f \in \mathscr{K}(X)$ семейство чисел $\int f\, d\lambda_\alpha$ суммируемо в $\mathbf{R}$ (Общая топ., Рез., § 11, n° 4); для этого необходимо и достаточно, чтобы для любой функции $f \geqslant 0$ из $\mathscr{K}(X)$

имело место неравенство

$$\sum_{\alpha \in A} \int f\, d\lambda_\alpha < +\infty. \tag{9}$$

При этом, если S — носитель функции f, то $f \leqslant \|f\| \cdot \varphi_S$; а с другой стороны, для любого компактного подмножества $K \subset X$ существует такая функция $g \in \mathscr{K}(X)$, что $\varphi_K \leqslant g$ (гл. III, § 2, n° 1, лемма 1). Значит, для того чтобы семейство (λ_α) было суммируемо, необходимо и достаточно, чтобы для любого компактного подмножества $K \subset X$ выполнялось неравенство

$$\sum_{\alpha \in A} \lambda_\alpha(K) < +\infty. \tag{10}$$

Непосредственно видно, что когда семейство $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in A}$ положительных мер суммируемо, то его сумма $\sum\limits_{\alpha \in A} \lambda_\alpha$ служит в $\mathscr{M}(X)$ верхней гранью семейства конечных частичных сумм $\sum\limits_{\alpha \in J} \lambda_\alpha$, где J пробегает множество конечных подмножеств из A.

Наделив A дискретной топологией, обозначим через μ меру на A, определенную при помощи массы $+1$, расположенной в каждой точке множества A (гл. III, § 2, n° 2). Для любой определенной на A функции $h \geqslant 0$, по определению, положим $\overline{\int}^* h(\alpha)\, d\mu(\alpha) = \sup\limits_H \Big(\sum\limits_{\alpha \in H} h(\alpha)\Big)$, когда H пробегает множество конечных подмножеств из A; следовательно (гл. IV, § 1, n° 1, пример),

$$\overline{\int}^* h(\alpha)\, d\mu(\alpha) = \int^* h(\alpha)\, d\mu(\alpha) = \sum_{\alpha \in A} h(\alpha);$$

для меры μ понятия интегрируемой и существенно интегрируемой функции совпадают; утверждение, что определенная на A функция $\mathbf{h}$ со значениями в банаховом пространстве μ-интегрируема, означает, что семейство $(\mathbf{h}(\alpha))_{\alpha \in A}$ суммируемо и

$$\int \mathbf{h}\, d\mu = \sum_{\alpha \in A} \mathbf{h}(\alpha).$$

При этих предпосылках ясно, что отображение $\alpha \to \lambda_\alpha$ множества A в $\mathscr{M}(X)$ широко непрерывно; согласно вышеизложенному, для того чтобы это отображение было μ-согласовано, необходимо и достаточно, чтобы семейство $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in A}$ было *суммируемо*, и тогда $\int \lambda_\alpha \, d\mu(\alpha) = \sum\limits_{\alpha\in A} \lambda_\alpha$. Следовательно, можно применить общие результаты этого параграфа к суммируемым семействам положительных мер:

Предложение 5. *Пусть* $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in A}$ — *суммируемое семейство положительных мер на* X, *и пусть* $\nu = \sum\limits_{\alpha\in A} \lambda_\alpha$.

1° *Для любой числовой функции* $f \geqslant 0$, *определенной и полунепрерывной снизу на* X, *имеем*

$$\int^* f\, d\nu = \sum_{\alpha\in A} \int^* f\, d\lambda_\alpha. \tag{11}$$

2° *Для любой числовой функции* $f \geqslant 0$ *на* X

$$\int^* f\, d\nu \geqslant \sum_{\alpha\in A} \int^* f\, d\lambda_\alpha. \tag{12}$$

3° *Пусть* $\mathbf{f}$ *есть* ν-*интегрируемая функция со значениями в банаховом пространстве* F. *Тогда для любого* $\alpha\in A$ *функция* $\mathbf{f}$ λ_α-*интегрируема, семейство* $\left(\int \mathbf{f}\, d\lambda_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ *суммируемо в* F *и*

$$\int \mathbf{f}\, d\nu = \sum_{\alpha\in A} \int \mathbf{f}\, d\lambda_\alpha. \tag{13}$$

Это вытекает из предложений 1 и 2 и из теоремы 1.

Следствие 1. *Для любого компактного* (соотв. *открытого и относительно компактного*) *подмножества* M *из* X *справедливо равенство*

$$\nu(M) = \sum_{\alpha\in A} \lambda_\alpha(M). \tag{14}$$

Действительно, множество M ν-интегрируемо.

Следствие 2. *Для того чтобы подмножество* N *из* X *было локально* ν-*пренебрежимо, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\alpha\in A$ *множество* N *было локально* λ_α-*пренебрежимо*.

Необходимость очевидна, ибо $\lambda_\alpha \leqslant \nu$ для любого $\alpha\in A$. Обратно, обозначив через K компактное множество из X, предположим, что $\lambda_\alpha(K\cap N) = 0$ для любого $\alpha\in A$. Пусть U означает относительно компактную открытую окрестность множества K;

так как $\sum\limits_{\alpha\in A}\lambda_\alpha(U)=\nu(U)$ (формула (14)), то для любого $\varepsilon>0$ найдется такое конечное подмножество B из A, что $\sum\limits_{\alpha\notin B}\lambda_\alpha(U)\leqslant\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$; пусть m есть число элементов множества B. По условию существует такая открытая окрестность $V\subset U$ множества $K\cap N$, что $\lambda_\alpha(V)\leqslant\frac{\varepsilon}{2m}$ для любого $\alpha\in B$; тогда формула (14) показывает, что $\nu(V)=\sum\limits_{\alpha\in A}\lambda_\alpha(V)\leqslant\varepsilon$, а поскольку ε произвольно, то $\nu(K\cap N)=0$.

Предложение 6. *Пусть $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in A}$ — суммируемое семейство положительных мер на X, и пусть $\nu=\sum\limits_{\alpha\in A}\lambda_\alpha$. Для того чтобы отображение f пространства X в топологическое пространство G было ν-измеримо, необходимо и достаточно, чтобы f было λ_α-измеримо при любом $\alpha\in A$.*

Необходимость следует из соотношений $\lambda_\alpha\leqslant\nu$ (гл. IV, § 5, n° 1). Обратно, предположим, что f λ_α-измерима при любом $\alpha\in A$. Достаточно показать, что множество $\mathfrak{K}$ компактных подмножеств K из X, на которых сужение функции f непрерывно, ν-плотно (§ 1, n° 3, предл. 3). Но, по условию, $\mathfrak{K}$ λ_α-плотно при любом $\alpha\in A$ (§ 1, n° 3, предл. 3); и если N есть такое подмножество из X, что $\nu(K\cap N)=0$ для любого $K\in\mathfrak{K}$, то и $\lambda_\alpha(K\cap N)=0$ для любого $\alpha\in A$ и любого $K\in\mathfrak{K}$, то есть N локально λ_α-пренебрежимо для любого $\alpha\in A$ и, значит, локально ν-пренебрежимо (следствие 2 из предл. 5).

Следствие 1. *Пусть $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ — конечная последовательность положительных мер на X. Для того чтобы определенная на X функция $\mathbf{f}$ со значениями в банаховом пространстве G была интегрируема относительно $\nu=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{f}$ была интегрируема относительно каждой из мер λ_i, и тогда*

$$\int\mathbf{f}\,d\nu=\sum_{i=1}^{n}\int\mathbf{f}\,d\lambda_i. \tag{15}$$

В самом деле, необходимость следует из предложения 5, равно как и формула (15). Обратно, если f λ_i-интегрируема при $1 \leqslant i \leqslant n$, то она, согласно предложению 6, ν-измерима, а так как, с другой стороны, $\nu^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^*$ (гл. IV, § 1, n° 3, предл. 15), то $\nu^*(|\mathbf{f}|) < +\infty$; следовательно, в силу критерия интегрируемости f ν-интегрируема (гл. IV, § 5, n° 6, теорема 5).

Следствие 2. *Пусть* $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in A}$ — *суммируемое семейство положительных мер на* счетном в бесконечности *локально компактном пространстве* X, *и пусть* $\nu = \sum_{\alpha \in A} \lambda_\alpha$. *Для того чтобы отображение* f *пространства* X *в банахово пространство* F *было* ν-*интегрируемо, необходимо и достаточно, чтобы* f *было* λ_α-*интегрируемо для любого* $\alpha \in A$ *и чтобы* $\sum_{\alpha \in A} \int^* |\mathbf{f}|\, d\lambda_\alpha < +\infty$.

Необходимость следует из предложения 5; с другой стороны, если функция f λ_α-интегрируема для любого $\alpha \in A$, то она, согласно предложению 6, ν-измерима. А поскольку X счетно в бесконечности, то можно применить следствие из предложения 4, что и завершает доказательство.

Упражнения. 1) Пусть T — компактный интервал $[0, 1]$ из $\mathbf{R}$, и пусть μ — мера Лебега на T. Пусть, далее, X — локально компактное пространство, полученное в результате наделения интервала $[0, 1]$ из $\mathbf{R}$ дискретной топологией. Показать, что отображение $t \to \lambda_t = \varepsilon_t$ интервала T в $\mathcal{M}(X)$ не является широко измеримым, но что интеграл $\nu = \int \lambda_t \, d\mu(t)$ существует и равен 0. Вывести отсюда, что для непрерывной функции f, равной 1 на X и, следовательно, ν-пренебрежимой, справедливо неравенство

$$\int^* f(x)\, d\nu(x) < \overline{\int}^* d\mu(t) \overline{\int}^* f(x)\, d\lambda_t(x).$$

2) Пусть T — локально компактное пространство и μ — положительная мера, определенная в упр. 4, гл. IV, § 1. Примем за X множество T, наделенное топологией, индуцированной топологией из $\mathbf{R}^2$, так что X локально компактно и счетно в бесконечности. Пусть $t \to \lambda_t$ — такое отображение пространства T в $\mathcal{M}(X)$, при котором для $t = (0, y)$ $\lambda_t = \varepsilon_t$, а для любого $t = \left(\frac{1}{n}, \frac{k}{n^2}\right)$ $\lambda_t = \frac{\varepsilon_t}{n^3}$. Показать, что отображение $t \to \lambda_t$ будет μ-согласованным, но не будет широко

непрерывным и что для постоянной функции f, равной 1 на X, справедливы соотношения

$$\int^* f(x)\,d\nu(x) < \int^* d\mu(t) \overline{\int}^* f(x)\,d\lambda_t(x) = +\infty.$$

3) Пусть T и T' — два локально компактных пространства, μ — положительная мера на T и μ' — положительная мера на T'. На пространстве-произведении $X = T \times T'$ положим $\lambda_t = \varepsilon_t \otimes \mu'$, $\lambda'_{t'} = \mu \otimes \varepsilon_{t'}$ для $t \in T$, $t' \in T'$. Отображение $t \to \lambda_t$ (соотв. $t' \to \lambda'_{t'}$) пространства T (соотв. T') в $\mathscr{M}(X)$ широко непрерывно и μ-согласовано (соотв. μ'-согласовано), и

$$\nu = \mu \otimes \mu' = \int \lambda_t\,d\mu(t) = \int \lambda'_{t'}\,d\mu'(t')$$

(гл. III, § 5, n° 1; ср. § 8). Возьмем в качестве T интервал $[0, 1]$ из $\mathbf{R}$, в качестве μ меру Лебега, в качестве T' интервал $[0, 1]$, наделенный *дискретной* топологией, и в качестве μ' меру на T', определенную при помощи массы $+1$ в каждой точке интервала T'. Пусть f — характеристическая функция «диагонали» Δ из X (множество точек (t, t), где t пробегает интервал $[0, 1]$); показать, что f полунепрерывна сверху и что

$$1 = \int^* d\mu(t) \int^* f(x)\,d\lambda_t(x) < \int^* f(x)\,d\nu(x) = +\infty$$

и

$$0 = \overline{\int}^* f(x)\,d\nu(x) < \overline{\int}^* d\mu(t) \overline{\int}^* f(x)\,d\lambda_t(x) = 1.$$

°4) Обозначив через T, T' и X те же пространства, а через μ, μ' и ν те же меры, что и в упр. 3, рассмотрим пространство-произведение $Y = T \times X = T \times (T \times T')$ и на нем меру-произведение $\overline{\omega} = \mu \otimes \nu$. Если для $t \in T$ положить $\rho_t = \varepsilon_t \otimes \nu$, то $\overline{\omega} = \int \rho_t\,d\mu(t)$. Пусть H — подмножество из T, не измеримое относительно μ (гл. IV, § 4, упр. 8), и пусть A — подмножество из Y, состоящее из точек (t_1, t_2, t_3), удовлетворяющих условиям $t_1 = t_3$, $t_2 \in H$. Показать, что характеристическая функция φ_A локально пренебрежима относительно $\overline{\omega}$, но что *ни для какого* значения $t \in T$ функция φ_A не будет ρ_t-измеримой.

5) Привести пример μ-согласованного семейства $t \to \lambda_t$ и числовой функции f, определенной на X, так, чтобы f была λ_t-измерима при любом $t \in T$, но не была бы измеримой относительно меры $\nu = \int \lambda_t\,d\mu(t)$ (взять $X = T$ и $\lambda_t = \varepsilon_t$ для любого $t \in T$).

6) Пусть X и μ — локально компактное пространство и мера из упр. 4, гл. IV, § 1. Пусть f — характеристическая функция множества D точек $(0, y)$. Построить на X такую суммируемую

последовательность (λ_n) точечных мер, чтобы $\mu = \sum_n \lambda_n$ и чтобы

$$0=\sum_n \int f\,d\lambda_n=\sum_n \int^* f\,d\lambda_n < \int^* f\,d\mu = +\infty.$$

°7) a) Пусть (λ_α) — семейство *точечных* мер на локально компактном пространстве X; показать, что для того, чтобы семейство (λ_α) было суммируемо в $\mathscr{M}(X)$, наделенном широкой топологией, необходимо и достаточно, чтобы таковым было семейство $(|\lambda_\alpha|)$.

b) Пусть (λ_n) — последовательность мер на локально компактном пространстве X показать, что для того, чтобы последовательность (λ_n) была суммируема в $\mathscr{M}(X)$, наделенном широкой топологией, необходимо и достаточно, чтобы для любой функции $f \in \mathscr{K}(X)$ ряд с общим членом $\lambda_n(f)$ был абсолютно сходящимся (использовать теорему Банаха — Штейнгауза; ср. Топ. вект. пр-ва, гл. III, § 3).

c) Пусть X — компактный интервал $[0, 1]$ из $\mathbf{R}$, и пусть для любого целого $n > 0$ через λ_n обозначена мера

$$f \to \frac{1}{n}\int_0^1 f(x)\sin 2n\pi x\,dx$$

на X. Показать, что в пространстве $\mathscr{M}(X)$, наделенном широкой топологией (или сильной топологией (гл. III, § 2, упр. 4)), последовательность мер (λ_n) суммируема, в то время как последовательность $(|\lambda_n|)$ положительных мер не является таковой (заметить, применив неравенство Бесселя, что если $\alpha_n = n\lambda_n(f)$, то $\sum_n \alpha_n^2 < +\infty$, и по неравенству Коши — Шварца вывести отсюда, что $\sum_n |\lambda_n(f)| < +\infty$).

8) Показать, что все результаты § 3, включающие в себя понятие μ-согласованного семейства, остаются справедливыми, если в определении μ-согласованного семейства условие, состоящее в том, что функция $t \to \lambda_t$ широко μ-измерима, заменить следующим условием: для юбого компактного подмножества K из T и любого $\varepsilon > 0$ существует такое компактное множество $K_1 \subset K$, что $\mu(K - K_1) \leqslant \varepsilon$ и что сужения на K_1 всех функций $t \to \langle f, \lambda_t \rangle$, где f пробегает $\mathscr{K}_+(X)$, полунепрерывны снизу (ср. § 2, упр. 6).

§ 4. Интегрирование положительных точечных мер

1. *Семейства точечных мер*

Пусть X и T — два локально компактных пространства, π — отображение T в X и $g \geqslant 0$ — *конечная* числовая функция, определенная на T; эти две функции определяют отображение $t \to \lambda_t = g(t)\,\varepsilon_{\pi(t)}$ пространства T в пространство $\mathscr{M}(X)$ мер на X, что для любого $t \in T$ отображение λ_t либо есть *точечная* мера (гл. III, § 3, n° 5), либо равно 0. Если $f \geqslant 0$ есть числовая функция, определенная на X, то

$$\int^* f(x)\, d\lambda_t(x) = \overline{\int}^* f(x)\, d\lambda_t(x) = f(\pi(t))\, g(t)$$

(напомним, что мы условились считать это произведение равным 0, если $g(t) = 0$, а $f(\pi(t)) = +\infty$). Всякая функция (со значениями в топологическом пространстве), определенная на X, λ_t-измерима для любого $t \in T$. Всякое отображение $\mathbf{f}$ пространства X в банахово пространство F λ_t-интегрируемо при любом $t \in T$ и $\int \mathbf{f}(x)\, d\lambda_t(x) = \mathbf{f}(\pi(t))\, g(t)$. Наконец, если f есть произвольная числовая функция, определенная на X, то для того, чтобы f была λ_t-интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы произведение $f(\pi(t))\, g(t)$ было конечно, и тогда $\int f(x)\, d\lambda_t(x) = f(\pi(t))\, g(t)$.

Определение 1. *Пусть μ — положительная мера на T. Говорят, что пара (π, g) μ-приспособлена, если выполняются следующие условия:*

1° *Функции π и g μ-измеримы.*

2° *Для любой функции $f \in \mathscr{K}(X)$ отображение $f \to f(\pi(t)) g(t)$ существенно μ-интегрируемо.*

Предложение 1. *Если пара (π, g) μ-приспособлена, то семейство мер $t \to \lambda_t = g(t) \varepsilon_{\pi(t)}$ μ-согласовано.*

В самом деле, по условию, для любой функции $f \in \mathscr{K}(X)$ функция $t \to \langle f, \lambda_t \rangle = f(\pi(t))\, g(t)$ существенно μ-интегрируема. Покажем, что отображение $t \to \lambda_t$ широко μ-измеримо. Действительно, отметим прежде всего, что если π и g *непрерывны*, то отображение $t \to \lambda_t$ *широко непрерывно*. В общем случае множество таких компактных подмножеств K из T, на которых сужения функций π и g непрерывны, μ-плотно (§ 1, n° 3, предл. 3); если K есть такое множество, то сужение отображения $t \to \lambda_t$ на K широко непрерывно, откуда и следует предложение (§ 1, n° 3, предл. 3) (ср. упр. 1).

Нам понадобится следующая лемма:

Лемма 1. *Пусть T и X — два локально компактных пространства и π — собственное непрерывное отображение* (Общая топ., Рез., § 8, n° 18) *T в X. Пусть, далее, g — полунепрерывная снизу числовая функция, определенная на T. Пусть, наконец, для любого $x \in X$ через $f(x)$ обозначена нижняя грань функции $g(t)$ на множестве* $\overset{-1}{\pi}(x)$ (если $\overset{-1}{\pi}(x) = \varnothing$, то эта нижняя грань принимается равной $+\infty$; ср. Теор. мн., гл. III, § 1). *Тогда f полунепрерывна снизу на X.*

Прежде всего заметим, что множество $\pi(T)$ замкнуто в X (Общая топ., Рез., § 8, n° 18). Так как $f(x) = +\infty$, когда x принадлежит открытому множеству $C\pi(T)$, то достаточно доказать, что сужение функции f на $\pi(T)$ полунепрерывно снизу; иначе говоря, можно ограничиться случаем, когда $\pi(T) = X$. С другой стороны, всякая точка $x \in X$ обладает компактной окрестностью V, а поскольку множество $\overset{-1}{\pi}(V)$, в силу того, что π является собственным отображением, компактно, то можно, кроме того, предположить, что T и X *компактны*.

Пусть теперь a — конечное действительное число; покажем, что множество A тех $x \in X$, в которых $f(x) > a$, открыто. Пусть $x_0 \in A$; имеем $g(t) > a$ для любого $t \in \overset{-1}{\pi}(x_0)$, а значит, и для любого t, принадлежащего некоторой окрестности W множества $\overset{-1}{\pi}(x_0)$. Так как T и X компактны, то можно предположить W насыщенным по отношению эквивалентности $\pi(x) = \pi(y)$ (Общая топ., Рез., § 7, n° n° 17 и 18); следовательно, $\pi(W)$ является окрестностью точки x_0. Для любого $x \in \pi(W)$ найдется такое $t \in \overset{-1}{\pi}(x)$, что $g(t) = f(x)$, поскольку множество $\overset{-1}{\pi}(x)$ компактно, а g полунепрерывна снизу (Общая топ., Рез., § 6, n° 18). Таким образом, $f(x) > a$ при любом $x \in \pi(W)$, что и завершает доказательство.

2. *Верхние интегралы от положительных функций относительно интеграла от точечных мер*

Теперь мы покажем, что когда (π, g) есть μ-приспособленная пара, то можно уточнить результаты, получаемые при применении к μ-согласованному семейству $t \to \lambda_t = g(t)\, \varepsilon_{\pi(t)}$, предложений из § 3.

Теорема 1. *Пусть* (π, g) *есть* μ-*приспособленная пара и* $\nu = \int g(t)\, \varepsilon_{\pi(t)}\, d\mu(t)$. *Тогда для числовой функции* $f \geqslant 0$, *определенной на* X, *справедлива формула*

$$\overline{\int}^{*} f(x)\, d\nu(x) = \overline{\int}^{*} f(\pi(t))\, g(t)\, d\mu(t). \qquad (1)$$

A) Допустим сначала, что носитель функции f компактен; тогда $\overline{\int}^{*} f\, d\nu = \int^{*} f\, d\nu$, и, приняв во внимание формулу (4) из § 3, n° 3, достаточно показать, что

$$\int^{*} f(x)\, d\nu(x) \leqslant \overline{\int}^{*} f(\pi(t))\, g(t)\, d\mu(t). \qquad (2)$$

Пусть U — относительно компактная открытая окрестность носителя функции f, ψ — функция из $\mathcal{K}(X)$, удовлетворяющая условию $\varphi_U \leqslant \psi$, и L — носитель функции ψ. По условию функция $t \to \psi(\pi(t))\, g(t)$ существенно μ-интегрируема, и значит (§ 2, n° 2, следствие из предл. 5 и § 1, n° 2, замечание к определению 2), множество A точек из T, в которых $\psi(\pi(t))\, g(t) \neq 0$, является объединением локально μ-пренебрежимого множества N и возрастающей последовательности (K_n) таких компактных множеств, что сужения функций π и g на каждое из K_n *непрерывны*. Пусть $B = \bigcup\limits_n K_n$; тогда $\pi(B) \subset L$ и $g(t) > 0$ на B.

Положим $g' = g\varphi_B$; ясно, что пара (π, g') μ-приспособлена. Если F есть определенная на X числовая функция с носителем, содержащимся в U, то функции $F(\pi(t))\, g(t)$ и $F(\pi(t))\, g'(t)$ совпадают на $T - N$. Отсюда, положив $F = f$, заключаем, во-первых, что правая часть в формуле (2) не изменится, если заменить в ней g на g'; во-вторых, взяв F из $\mathcal{K}(X)$, заключаем также, что мера $\nu' = \int g'(t)\, \varepsilon_{\pi(t)}\, d\mu(t)$ и мера ν индуцируют на U одну и ту же меру; следовательно, левая часть в формуле (2) не изменится, если заменить в ней ν на ν'. Таким образом, все сводится к доказательству формулы (2) для того случая, когда g и ν заменяются на g', ν'; учитывая же предложение 3 из § 2, n° 1, это сводится к доказательству того, что

$$\int^{*} f(x)\, d\nu'(x) \leqslant \int^{*} f(\pi(t))\, g'(t)\, d\mu(t). \qquad (3)$$

Согласно определению верхнего интеграла достаточно показать, что

$$\int^* f(x)\,d\nu'(x) \leqslant \int^* h(t)\,d\mu(t) \tag{4}$$

для любой функции h, полунепрерывной снизу на T и такой, что $h(t) \geqslant f(\pi(t))\,g'(t)$ при любом $t \in T$.

Чтобы это доказать, рассмотрим для каждого целого n функцию f_n, определенную на X и при любом $x \in X$ равную нижней грани функции $\frac{h(t)}{g'(t)}$ на множестве $\overset{-1}{\pi}(x) \cap K_n$ (если это множество пусто, нижняя грань равна $+\infty$). Последовательность (f_n) обладает следующими свойствами:

a) Поскольку сужение функции g' на K_n конечно, непрерывно и строго положительно, то функция $\frac{h}{g'}$ определена на K_n и ее сужение на K_n полунепрерывно снизу (Общая топ., Рез., § 6, n° 19); тогда сужение функции f_n на компактное множество $\pi(K_n)$, в силу леммы 1, полунепрерывно снизу. А так как $f_n(x) = +\infty$ на $X - \pi(K_n)$, то f_n полунепрерывна снизу на X.

b) Неравенство $h(t) \geqslant f_n(\pi(t))\,g'(t)$ выполняется для любого $t \in K_n$ по определению f_n и для любого $t \notin B$, поскольку $g'(t) = 0$ на $T - B$.

c) В силу условия, наложенного на h, в каждой точке из X справедливо неравенство $f_n \geqslant f$.

d) Последовательность (f_n) убывает.

Обозначим теперь через V относительно компактную открытую окрестность множества L, а через f'_n — функцию, равную f_n на V и 0 на $X - V$; ясно, что свойства a), b), c), d) останутся справедливыми, если заменить в них f_n на f'_n. Обозначив через f' нижнюю огибающую последовательности (f'_n), получим в силу свойства c) $f' \geqslant f$, а в силу b) $h(t) \geqslant f'(\pi(t))\,g'(t)$ при любом $t \in T$; кроме того, f' ν'-измерима и равна нулю на $X - V$. Следовательно,

$$\int^* h(t)\,d\mu(t) \geqslant \int^* f'(\pi(t))\,g'(t)\,d\mu(t) = \overline{\int}^* f'(\pi(t))\,g'(t)\,d\mu(t)$$

(§ 2, n° 1, предл. 3). Но в силу предложения 4 из § 3, n° 4,

$$\overline{\int}^* f'(\pi(t))\,g'(t)\,d\mu(t) = \int^* f'(x)\,d\nu'(x) \geqslant \int^* f(x)\,d\nu'(x),$$

что и завершает доказательство формулы (4).

B) Рассмотрим теперь случай, когда носитель функции f произволен. В силу вышеизложенного для любого компактного подмножества L из X имеем

$$\int^* \varphi_L(x) f(x)\, d\nu(x) = \\ = \overline{\int}^* \varphi_L(\pi(t)) f(\pi(t)) g(t)\, d\mu(t) \leqslant \overline{\int}^* f(\pi(t)) g(t)\, d\mu(t);$$

отсюда, по определению существенного верхнего интеграла, следует неравенство

$$\overline{\int}^* f(x)\, d\nu(x) \leqslant \overline{\int}^* f(\pi(t)) g(t)\, d\mu(t). \tag{5}$$

Пусть $\mathfrak{K}$ — множество таких компактных подмножеств K из T, что сужение функции π на K непрерывно; множество $\mathfrak{K}$ μ-плотно (§ 1, n° 3, предл. 3), и значит, в силу предложения 1 из § 2, n° 1, для доказательства (1) достаточно, учитывая формулу (5), доказать, что для любого $K \in \mathfrak{K}$ имеем

$$\int^* \varphi_K(t) f(\pi(t)) g(t)\, d\mu(t) \leqslant \overline{\int}^* f(x)\, d\nu(x). \tag{6}$$

Но в этом случае $L = \pi(K)$ компактно, и на основании первой части доказательства заключаем, что

$$\int^* \varphi_K(t) f(\pi(t)) g(t)\, d\mu(t) \leqslant \overline{\int}^* \varphi_L(\pi(t))\, f(\pi(t)) g(t)\, d\mu(t) = \\ = \overline{\int}^* \varphi_L(x) f(x)\, d\nu(x) \leqslant \overline{\int}^* f(x)\, d\nu(x),$$

то и завершает доказательство теоремы 1.

Следствие. *Для того чтобы подмножество N из X было локально пренебрежимо относительно ν, необходимо и достаточно, чтобы пересечение множества $\overset{-1}{\pi}(N)$ и множества точек $t \in T$, в которых $g(t) > 0$, было локально пренебрежимо относительно μ.*

Предложение 2. *Пусть π — непрерывное собственное отображение* (Общая топ., Рез., § 8, n° 18) *пространства T в X, а g — такая конечная непрерывная числовая функция на T, что $g(t) > 0$ при любом $t \in T$. Тогда пара (π, g) μ-приспособлена, и если положить $\nu = \int g(t)\, \varepsilon_{\pi(t)}\, d\mu(t)$, то для любой числовой функции $f \geqslant 0$, определенной на X, имеем*

$$\int^* f(x)\, d\nu(x) = \int^* f(\pi(t)) g(t)\, d\mu(t). \tag{7}$$

Ясно, что функции π и g μ-измеримы; кроме того, для любой функции $\psi \in \mathscr{K}(X)$ функция $\psi \circ \pi$ непрерывна и имеет компактный носитель, так как π — собственное отображение; следовательно, пара (π, g) μ-приспособлена и при этом отображение $t \to g(t)\varepsilon_{\pi(t)}$ *широко непрерывно.* Обозначим через h такую полунепрерывную снизу функцию на T, что $f(\pi(t))\, g(t) \leqslant h(t)$ при любом $t \in T$. Мы покажем, что

$$\int^* f(x)\, d\nu(x) \leqslant \int^* h(t)\, d\mu(t). \tag{8}$$

Из этого неравенства, по определению верхнего интеграла, будет следовать неравенство

$$\int^* f(x)\, d\nu(x) \leqslant \int^* f(\pi(t))\, g(t)\, d\mu(t),$$

которое в сочетании с неравенством (5) из § 3, n° 3, и будет доказывать (7).

Для доказательства (8) определим на X функцию $\bar{f}$ следующим образом: $\bar{f}(x)$ есть нижняя грань функции $\frac{h(t)}{g(t)}$ на множестве $\overset{-1}{\pi}(x)$ (если $\overset{-1}{\pi}(x) = \varnothing$, нижняя грань равна $+\infty$). Функция $\bar{f}$ обладает следующими свойствами:

1° $\bar{f}(x) \geqslant f(x)$ для любого $x \in X$ (ибо $g(t) > 0$ для любого $t \in T$).

2° $\bar{f}(\pi(t))\, g(t) \leqslant h(t)$ при любом $t \in T$.

3° Функция $\bar{f}$, согласно лемме 1, полунепрерывна снизу, поскольку функция $\frac{h}{g}$ полунепрерывна снизу на T.

Таким образом, учитывая следствие из предложения 1 § 3, получаем, что

$$\int^* f(x)\, d\nu(x) \leqslant \int^* \bar{f}(x)\, d\nu(x) = \int^* \bar{f}(\pi(t))\, g(t)\, d\mu(t) \leqslant \int^* h(t)\, d\mu(t);$$

тем самым формула (8) установлена и доказательство закончено.

3. Измеримость относительно интеграла от точечных мер

Предложение 3. *Пусть* (π, g) — μ-*приспособленная пара и* $\nu = \int g(t)\, \varepsilon_{\pi(t)}\, d\mu(t)$. *Пусть, далее,* f *есть отображение пространства* X *в топологическое пространство* G *и* S — (μ-*измеримое*) *множество точек $t \in T$, в которых $g(t) > 0$. Для того чтобы f было ν-измеримо, необходимо и достаточно, чтобы сужение отображения $f \circ \pi$ на S было μ-измеримо.*

Предположим сначала, что f ν-измеримо. По условию множество $\mathfrak{K}$ компактных подмножеств K из S, на которых сужение функции π непрерывно, μ-плотно в S (§ 1, n° 3, предл. 3). Значит, для того чтобы показать, что сужение на S функции $f \circ \pi$ μ-измеримо, достаточно показать, что для любого $K \in \mathfrak{K}$ множество компактных подмножеств H из K, на которых сужение функции $f \circ \pi$ непрерывно, μ-плотно в K (§ 1, n° 2, предл. 2). Но, по предположению, существует разбиение компактного множества $\pi(K)$, состоящее из ν-пренебрежимого множества N и из последовательности (C_n) таких компактных множеств, что сужение функции f на каждое из C_n непрерывно. При этих условиях множество $K \cap \overset{-1}{\pi}(N)$ и множества $K \cap \overset{-1}{\pi}(C_n)$ составляют разбиение множества K; но $K \cap \overset{-1}{\pi}(N)$, согласно следствию из теоремы 1, μ-пренебрежимо, множества $K \cap \overset{-1}{\pi}(C_n)$ компактны и сужение функции $f \circ \pi$ на каждое из этих множеств непрерывно, что и доказывает, что сужение на S функции $f \circ \pi$ μ-измеримо.

Обратно, предположим, что это имеет место; для того чтобы доказать, что отображение f ν-измеримо, достаточно показать, что множество $\mathfrak{L}$ компактных подмножеств L из X, на которых сужение функции f непрерывно, будет ν-плотным (§ 1, n° 3, предл. 3). Обозначим через N такое подмножество из X, что множество $N \cap L$ ν-пренебрежимо при любом $L \in \mathfrak{L}$, и покажем, что N локально ν-пренебрежимо. Для этого мы должны показать, что $\overset{-1}{\pi}(N) \cap S$ локально μ-пренебрежимо (следствие из теоремы 1). Но множество $\mathfrak{H}$ компактных подмножеств H из S, на которых сужения функций π и $f \circ \pi$ непрерывны, по предположению, μ-плотно в S (§ 1, n° 3, предл. 3). Следовательно, достаточно доказать, что $\overset{-1}{\pi}(N) \cap H$ μ-пренебрежимо при любом $H \in \mathfrak{H}$. Но $\pi(H)$ компактно и может быть отождествлено с фактор-пространством пространства H по отношению эквивалентности $\pi(t) = \pi(t')$; при этом π совпадает с каноническим отображением H на это фактор-пространство (Общая топ., Рез., § 7, n° 20). А так как сужение функции $f \circ \pi$ на H непрерывно, то сужение функции f на $\pi(H)$ тоже непрерывно, то есть $\pi(H) \in \mathfrak{L}$, и значит, $N \cap \pi(H)$ ν-пренебрежимо. В силу следствия из теоремы 1 множество $\overset{-1}{\pi}(N \cap \pi(H)) \cap S$ локально μ-пренебрежимо; стало быть, этим свойством обладает и множество

$$H \cap \overset{-1}{\pi}(N) \subset \overset{-1}{\pi}(N \cap \pi(H)) \cap S;$$

но поскольку H компактно, то $H \cap \overset{-1}{\pi}(N)$ μ-пренебрежимо, что и завершает доказательство.

Замечание. Если $\mathbf{f}$ есть отображение пространства X в банахово пространство F, то все сводится к утверждению, что сужение функции $\mathbf{f} \circ \pi$ на S μ-измеримо или что функция $(\mathbf{f} \circ \pi) g$ (определенная на T) μ-измерима, поскольку g μ-измерима, отлична от 0 на S и обращается в нуль на $T - S$ (гл. IV, § 5, n° 3, предл. 7).

4. *Интегрирование функций со значениями в банаховом пространстве относительно интеграла от точечных мер*

Теорема 2. *Пусть* (π, g) — μ-*приспособленная пара и* $\nu = \int g(t)\, \varepsilon_{\pi(t)}\, d\mu(t)$. *Пусть, далее,* $\mathbf{f}$ *есть функция, определенная на* X *со значениями в банаховом пространстве* F *или в* $\overline{\mathbf{R}}$. *Для того чтобы* $\mathbf{f}$ *была существенно* ν-*интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы отображение* $t \to \mathbf{f}(\pi(t))\, g(t)$ *было существенно* μ-*интегрируемо, и тогда имеем*

$$\int \mathbf{f}(x)\, d\nu(x) = \int \mathbf{f}(\pi(t))\, g(t)\, d\mu(t). \tag{9}$$

Предположим, кроме того, что π — *непрерывное собственное отображение, а также что* g *непрерывно и* $g(t) > 0$ *при любом* $t \in T$. *Тогда для того, чтобы* $\mathbf{f}$ *была* ν-*интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы отображение* $t \to \mathbf{f}(\pi(t))\, g(t)$ *было* μ-*интегрируемо.*

Для того чтобы $\mathbf{f}$ была существенно ν-интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{f}$ была ν-измерима и чтобы $\overline{\int}^{*} |\mathbf{f}(x)|\, d\nu(x) < +\infty$ (§ 2, n° 2, предл. 7). Следовательно, необходимо и достаточно, чтобы отображение $t \to \mathbf{f}(\pi(t))\, g(t)$ было μ-измеримо (предл. 3) и чтобы $\overline{\int}^* |\mathbf{f}(\pi(t))|\, g(t)\, d\mu(t) < +\infty$ (теорема 1); иными словами, необходимо и достаточно, чтобы отображение $t \to \mathbf{f}(\pi(t))\, g(t)$ было существенно μ-интегрируемо.

Предположим, что это условие выполнено. Тогда найдется такая последовательность $(\mathbf{f}_n)$ линейных комбинаций функций из $\mathscr{K}(X)$ с коэффициентами из F (соотв. из $\mathbf{R}$), что

$$\lim_{n\to\infty} \int |\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}_n(x)|\, d\nu(x) = 0, \tag{10}$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int \mathbf{f}(x)\, d\nu(x) - \int \mathbf{f}_n(x)\, d\nu(x) \right| = 0. \tag{11}$$

Из формулы (10) и из теоремы 1 следует равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int |\mathbf{f}(\pi(t))\, g(t) - \mathbf{f}_n(\pi(t))\, g(t)|\, d\mu(t) = 0,$$

из которого вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int \mathbf{f}(\pi(t))\, g(t)\, d\mu(t) - \int \mathbf{f}_n(\pi(t))\, g(t)\, d\mu(t) \right| = 0. \tag{12}$$

Но поскольку $\mathbf{f}_n$ есть линейная комбинация функций из $\mathscr{K}(X)$, то, по определению ν,

$$\int \mathbf{f}_n(x)\, d\nu(x) = \int \mathbf{f}_n(\pi(t))\, g(t)\, d\mu(t),$$

и формула (9) вытекает из формул (11) и (12).

Вторая часть теоремы доказывается точно так же, только вместо теоремы 1 используется предложение 2.

Замечание. Пусть (π, g) — μ-приспособленная пара, π' — такое отображение пространства T в X и $g' \geqslant 0$ — такая конечная числовая функция, определенная на T, что π' (соотв. g') равно π (соотв. g) локально почти всюду относительно μ. Тогда пара (π', g') μ-приспособлена, меры $\lambda_t = g(t)\, \varepsilon_{\pi(t)}$ и $\lambda'_t = g'(t)\, \varepsilon_{\pi'(t)}$ равны локально почти всюду и $\int g(t)\, \varepsilon_{\pi(t)}\, d\mu(t) = \int g'(t)\, \varepsilon_{\pi'(t)}\, d\mu(t)$. Если теперь π' и g' определены лишь локально почти всюду (относительно μ) и существует такая μ-приспособленная пара (π, g), что π' (соотв. g') равно π (соотв. g) локально почти всюду, то пару (π', g') снова условимся называть μ-приспособленной и будем полагать

$$\int g'(t)\, \varepsilon_{\pi'(t)}\, d\mu(t) = \int g(t)\, \varepsilon_{\pi(t)}\, d\mu(t)$$

(ср. § 3, n° 4, замечание). Формулировки теорем 1 и 2 и предложения 3 остаются справедливыми, если предположить, что π и g определены лишь локально почти всюду.

Упражнения. 1) Пусть π — отображение пространства T в локально компактное пространство X, g — конечная числовая функция, определенная на T, и S — множество тех $t \in T$, в которых $g(t) \neq 0$. Показать, что если отображение $t \to \lambda_t = g(t)\, \varepsilon_{\pi(t)}$ широко непрерывно (соотв. широко μ-измеримо), то сужения функций g и π на S непрерывны (соотв. μ-измеримы). (Сначала показать, что если отображение $t \to \lambda_t$ широко непрерывно, то S открыто в T, затем что π непрерывно в любой точке $t_0 \in S$; для этого рассмотреть для любой компактной окрестности V точки $\pi(t_0)$ в X функцию f из $\mathcal{K}(X)$, равную нулю вне V и равную 1 в точке $\pi(t_0)$.)

2) Пусть T и X — два компактных пространства, π — непрерывное отображение T на X и g — конечная непрерывная числовая функция, определенная на T. Пусть для любого $x \in X$ через $f(x)$ обозначена нижняя грань функции $g(t)$ на множестве $\overset{-1}{\pi}(x)$. Построить пример, в котором f не будет непрерывной (взять $T = [0, 1]$ из $\mathbf{R}$, а в качестве π взять каноническое отображение интервала T на фактор-пространство X, полученное отождествлением 0 и 1 в T).

3) Пусть X и ν — локально компактное пространство и мера из упр. 4, гл. IV, § 1; пусть f — характеристическая функция множества D точек $(0, y)$ в X. Показать, что в двух нижеследующих случаях имеем $\nu = \int g(t)\, \varepsilon_{\pi(t)}\, d\mu(t)$ и

$$\int^* f(\pi(t))\, g(t)\, d\mu(t) < \int^* f(x)\, d\nu(x) = +\infty.$$

a) Положим $T = X$, а в качестве μ возьмем меру, определенную при помощи массы $\frac{\log n}{n^3}$ в каждой точке $\left(\frac{1}{n}, \frac{k}{n^2}\right)$. В качестве π возьмем тождественное отображение, а g определим следующими условиями: $g(0, y) = 0$, $g\left(\frac{1}{n}, \frac{k}{n^2}\right) = \frac{1}{\log n}$; тогда g будет непрерывна, но не будет выполняться условие: $g(t) > 0$ при любом $t \in T$.

b) Возьмем в качестве T множество X, наделенное дискретной топологией, а в качестве μ меру, определенную при помощи тех же масс, что и ν. Положим $g(t) = 1$ для любого t, а в качестве π возьмем тождественное отображение; последнее будет непрерывным, но не будет собственным отображением.

§ 5. Меры, определенные при помощи числовых плотностей

1. *Локально интегрируемые функции*

Предложение 1. *Пусть* $\mathbf{g}$ *есть функция, определенная локально почти всюду на* T *(относительно положительной меры* μ) *и принимающая значения в банаховом пространстве* F *(соотв. в* $\overline{\mathbf{R}}$). *Тогда следующие свойства эквивалентны:*

a) *Для любой точки* $t \in T$ *существует такая окрестность* V, *что функция* $\mathbf{g}\varphi_V$ μ-*интегрируема.*

b) *Функция* $\mathbf{g}$ μ-*измерима и для любого компактного множества* $K \subset T$ *имеем* $\int^* |\mathbf{g}| \varphi_K \, d\mu < +\infty$.

c) *Для любой числовой функции* $h \in \mathcal{K}(T)$ *функция* $\mathbf{g}h$ μ-*интегрируема.*

Покажем, что a) влечет b); действительно, на основании принципа локализации (гл. IV, § 5, n° 2, предл. 4) функция $\mathbf{g}$ измерима. С другой стороны, для любого $t \in K$, по условию, в T найдется такая окрестность V_t, что функция $\mathbf{g}\varphi_{V_t}$ интегрируема; стало быть, K может быть покрыто конечным числом таких окрестностей V_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, чтобы функции $\mathbf{g}\varphi_{V_i}$ были интегрируемы. А так как

$$|\mathbf{g}| \varphi_K \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{g}| \varphi_{V_i}, \text{ то } \int^* |\mathbf{g}| \varphi_K \, d\mu < +\infty.$$

Далее, b) влечет c), ибо в этом случае функция $\mathbf{g}h$ измерима, и если L есть компактный носитель функции h, то $|\mathbf{g}h| \leqslant \|h\| \cdot |\mathbf{g}| \varphi_L$, и значит, по условию $\int^* |\mathbf{g}h| \, d\mu < +\infty$; таким образом, согласно критерию интегрируемости (гл. IV, § 5, n° 6, теорема 5) $\mathbf{g}h$ интегрируема.

Наконец, c) влечет a). В самом деле, для любого $t \in T$ пусть V есть компактная окрестность точки t. Существует непрерывное отображение h пространства T в $[0, 1]$, равное 1 на V и имеющее компактный носитель (гл. III, § 2, n° 1, лемма 1); по условию $\mathbf{g}h$ интегрируема, и значит, интегрируема и $\mathbf{g}\varphi_V = (\mathbf{g}h)\,\varphi_V$ (гл. IV, § 5, n° 6, следствие 3 из теоремы 5).

Определение 1. *Говорят, что функция* $\mathbf{g}$, *определенная локально почти всюду на* T (*относительно положительной меры* μ) *и принимающая значения в банаховом пространстве* F (соотв. *в* $\overline{\mathbf{R}}$), *локально интегрируема относительно* μ (*или локально* μ-*интегрируема*), *если она удовлетворяет условиям* a), b) *и* c) *предложения* 1.

Всякая измеримая функция $\mathbf{g}$, существенно ограниченная на любом компактном множестве, локально интегрируема. Для любого числа p в пределах $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ всякая функция $\mathbf{g} \in \mathcal{L}_F^p$ локально интегрируема; действительно, всякая функция $h \in \mathcal{K}(T)$ принадлежит $\mathcal{L}^q$ (где q — показатель, сопряженный с p), и значит, функция $\mathbf{g}h$ интегрируема (гл. IV, § 6, n° 4, следствие 3 из теоремы 2).

Пусть F, G, H — три банаховых пространства и $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \to \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ — непрерывное билинейное отображение $F \times G$ в H. Если функция $\mathbf{f}$ локально интегрируема и принимает свои значения в F и если $\mathbf{g} \in \mathcal{L}_G^\infty$, то отображение $\Phi(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ локально интегрируемо (гл. IV, § 6, n° 4, следствие 1 из теоремы 2).

И наконец, отметим, что если функция $\mathbf{g}$ локально μ-интегрируема, то всякая функция, равная $\mathbf{g}$ локально почти всюду, тоже локально μ-интегрируема.

2. *Меры, определенные при помощи числовых плотностей*

Пусть $g \geqslant 0$ — *конечная* числовая функция, определенная на T, и пусть $\lambda_t = g(t)\,\varepsilon_t$ при любом $t \in T$. Для всякой функции $f \in \mathcal{K}(T)$ функция $t \to \langle f, \lambda_t \rangle = f(t)\,g(t)$ имеет компактный носитель; таким образом, для нее понятия существенной интегрируемости и интегрируемости совпадают. Следовательно, для того чтобы функция $t \to \langle f, \lambda_t \rangle$ была существенно интегрируема при любой функции $f \in \mathcal{K}(T)$, необходимо и достаточно, чтобы g была *локально интегрируема* (предл. 1); а так как в этом случае g измерима, то пара (I, g) (где I — тождественное отображение пространства T) μ-приспособлена (§ 4, n° 1); тогда положительная мера $\nu = \int \lambda_t\, d\mu(t)$ будет определяться условием

$$\int f(t)\, d\nu(t) = \int f(t)\, g(t)\, d\mu(t) \quad \text{для} \quad f \in \mathcal{K}(T). \tag{1}$$

Если теперь взять в качестве g конечную (не обязательно положительную) числовую функцию, то утверждение, что g локально интегрируема, означает, что этим свойством обладают функции g^+ и g^-; следовательно, отображение $f \to \int f(t)\, g(t) d\mu(t)$ снова является мерой на T.

Определение 2. *Если задана конечная локально μ-интегрируемая числовая функция g, то говорят, что мера $f \to \int fg\, d\mu$ на T есть произведение меры μ на функцию g или мера плотности g относительно μ и обозначается $g \cdot \mu$. Всякая мера-произведение положительной меры μ на локально μ-интегрируемую функцию называется мерой с базисом μ.*

Соотношение (1) принято записывать также в виде $d\nu(t) = g(t)\, d\mu(t)$. Если g непрерывна, то мы возвращаемся к определению, данному в гл. III, § 2, n° 3.

3. *Интегрирование относительно положительной меры с базисом* μ

Пусть g — конечная *положительная* локально μ-интегрируемая числовая функция. Замечания из n° 2 показывают, что результаты § 4 применимы к мере $\nu = g \cdot \mu = \int g(t)\, \varepsilon_t\, d\mu(t)$; таким образом, получаем следующие утверждения:

Предложение 2. *Для любой числовой функции $f \geqslant 0$, определенной на T, имеем*

$$\overline{\int}^* f\, d\nu = \overline{\int}^* (fg)\, d\mu. \tag{2}$$

Это следует из теоремы 1 § 4, n° 2.

Предложение 3. *Для того чтобы отображение f пространства T в топологическое пространство G было измеримо относительно меры $g \cdot \mu$, необходимо и достаточно, чтобы сужение функции f на множество точек, где $g(t) \neq 0$, было μ-измеримо.*

Это частный случай предложения 3 § 4, n° 3.

Теорема 1. *Пусть $\mathbf{f}$ — функция, определенная на T, со значениями в банаховом пространстве F или в $\overline{\mathbf{R}}$. Для того чтобы $\mathbf{f}$*

была существенно интегрируема относительно $\nu = g \cdot \mu$, *необходимо и достаточно, чтобы функция* $\mathbf{f}g$ *была существенно* μ-*интегрируема, и тогда имеем*

$$\int \mathbf{f}\, d\nu = \int (\mathbf{f}g)\, d\mu. \tag{3}$$

Достаточно применить теорему 2 из § 4, n° 4.

Следствие. *Для того чтобы мера* $g \cdot \mu$ *была ограничена, необходимо и достаточно, чтобы функция* g *была существенно* μ-*интегрируема.*

В самом деле, утверждение, что $\nu = g \cdot \mu$ ограничена, означает, что функция, равная 1, ν-интегрируема (гл. IV, § 4, n° 7, предл. 12) или, что сводится к тому же (§ 2, n° 1, предл. 2), существенно ν-интегрируема.

Пример. Пусть A — некоторое подмножество из T; для того чтобы функция φ_A была локально μ-интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы A было μ-*измеримо*. Предположив это условие выполненным, положим $\nu = \varphi_A \cdot \mu$; тогда для любой числовой функции $f \geqslant 0$, определенн ойна T, будем иметь $\overline{\int}^* f\, d\nu = \overline{\int}^* f\varphi_A\, d\mu$, что обозначается также через $\overline{\int_A}^* f\, d\mu$ (ср. гл. IV, § 5, n° 6). Для того чтобы отображение g пространства T в топологическое пространство G было ν-измеримо, необходимо и достаточно, чтобы сужение функции g на A было μ-измеримо. Для того чтобы отображение $\mathbf{f}$ пространства T в банахово пространство F или в $\overline{\mathbf{R}}$ было существенно ν-интегрируемо, необходимо и достаточно, чтобы функция $\mathbf{f}\varphi_A$ была существенно μ-интегрируема, и тогда имеем

$$\int \mathbf{f}\, d\nu = \int \mathbf{f}\varphi_A\, d\mu,$$

и это выражение обозначается также через $\int_A \mathbf{f}\, d\mu$. Отметим, что если два отображения пространства T в G (соотв. в F, $\overline{\mathbf{R}}$) совпадают на A, то для того, чтобы одно из них было ν-измеримо (соотв. существенно ν-интегрируемо), необходимо и достаточно, чтобы этим свойством обладало и другое отображение. Если теперь

g есть отображение в G некоторого подмножества $B \supset A$ из T, то говорят, что g *μ-измеримо на A*, если произвольное продолжение на T сужения функции g на A ν-измеримо, то есть что сужение функции g на A μ-измеримо. Говорят, что отображение $\mathbf{f}$ множества B в банахово пространство F или в $\overline{\mathbf{R}}$ *существенно μ-интегрируемо на A*, если продолжение $\overline{\mathbf{f}}$ на T сужения функции $\mathbf{f}$ на A существенно ν-интегрируемо; тогда полагают $\int_A \mathbf{f}\, d\mu = \int_A \overline{\mathbf{f}}\, d\mu = \int \overline{\mathbf{f}}\varphi_A\, d\mu$ и говорят, что $\int_A \mathbf{f}\, d\mu$ есть *интеграл от* $\mathbf{f}$ *по* A (или *распространенный на* A). Если $f \geqslant 0$ есть числовая функция, определенная на $B \supset A$, то точно так же определяют $\int_A^* f\, d\mu$ и $\overline{\int_A^*} f\, d\mu$. Наконец, говорят, что определенная на $B \supset A$ числовая функция g *локально μ-интегрируема на A*, если продолжение $\overline{g}$ на T сужения функции g на A локально ν-интегрируемо; это равносильно утверждению, что для любого компактного подмножества K из T функция $\overline{g}\varphi_{K\cap A}$ μ-интегрируема.

4. *Свойства мер с базисом* μ

Предложение 4. *Если g_1 и g_2 — две конечные локально μ-интегрируемые числовые функции, то функция $g_1 + g_2$ локально μ-интегрируема и $(g_1 + g_2)\cdot\mu = g_1\cdot\mu + g_2\cdot\mu$.*

Предложение вытекает непосредственно из определений.

Предложение 5. *Если g есть конечная локально μ-интегрируемая числовая функция, то $(g\cdot\mu)^+ = g^+\cdot\mu$, $(g\cdot\mu)^- = g^-\cdot\mu$ и $|g\cdot\mu| = |g|\cdot\mu$.*

Положим $g\cdot\mu = \nu$, $g^+\cdot\mu = \nu_1$, $g^-\cdot\mu = \nu_2$. Тогда $\nu_1 \geqslant 0$, $\nu_2 \geqslant 0$, $\nu = \nu_1 - \nu_2$. Для доказательства того, что $\nu_1 = \nu^+$ и и $\nu_2 = \nu^-$, достаточно показать, что если λ есть положительная мера, удовлетворяющая условиям $\lambda \leqslant \nu$ и $\lambda \leqslant \nu_2$, то $\lambda = 0$ (гл. II, § 1, n° 1). Но, обозначив через A_1 (соотв. A_2) множество тех точек $t \in T$, в которых $g(t) \geqslant 0$ (соотв. $g(t) \leqslant 0$), получаем, что

$\varphi_{A_2} g^+ = 0$, и значит (предл. 2), A_2 локально пренебрежимо относительно ν_1 и тем более локально пренебрежимо относительно λ. Точно так же доказывается, что A_1 локально пренебрежимо относительно λ, откуда следует, что $T = A_1 \bigcup A_2$ локально пренебрежимо относительно λ, чем показано, что $\lambda = 0$. Таким образом, установлены формулы $(g\cdot\mu)^+ = g^+\cdot\mu$ и $(g\cdot\mu)^- = g^-\cdot\mu$, из которых сразу же вытекает формула $|g\cdot\mu| = |g|\cdot\mu$.

Следствие 1. *Для того чтобы мера $g\cdot\mu$ была равна нулю, необходимо и достаточно, чтобы функция g была локально μ-пренебрежима.*

Допустим, что g равна нулю локально почти всюду; тогда для любой функции $f \in \mathcal{K}(T)$ функция fg будет μ-пренебрежимой, и значит, $g\cdot\mu = 0$. Обратно, предположим, что $g\cdot\mu = 0$, и покажем, что g локально пренебрежима. На основании предложения 5 можно ограничиться случаем, когда $g \geqslant 0$. Тогда, в силу того что 1 пренебрежима относительно $g\cdot\mu$, функция g, согласно предложению 2, будет локально пренебрежима относительно μ.

Следствие 2. *Пусть g_1 и g_2 — две конечные локально μ-интегрируемые числовые функции. Для того чтобы $g_1\cdot\mu = g_2\cdot\mu$, необходимо и достаточно, чтобы g_1 и g_2 были равны между собой локально почти всюду.*

Это сразу вытекает из следствия 1.

В силу этого следствия можно определить меру $g\cdot\mu$ для того случая, когда g есть локально интегрируемая функция, определенная и конечная локально почти всюду (n° 1); определим ее равной $g'\cdot\mu$, где g' есть функция, определенная и конечная на всем T и равная g локально почти всюду.

Следствие 3. *Пусть g — локально μ-интегрируемая числовая функция. Для того чтобы $g\cdot\mu$ было положительной мерой, необходимо и достаточно, чтобы $g(t) \geqslant 0$ локально почти всюду.*

Действительно, соотношение $g\cdot\mu \geqslant 0$ эквивалентно равенству $(g\cdot\mu)^- = 0$, то есть равенству $g^-\cdot\mu = 0$ (предл. 5); но последнее означает, что $g^-(t) = 0$ локально почти всюду (следствие 1).

Предложение 6. *Пусть (g_n) — последовательность локально μ-интегрируемых числовых функций, для которой последователь-*

ность мер $g_n \cdot \mu$ возрастает. Для того чтобы эта последовательность была мажорирована в упорядоченном векторном пространстве $\mathcal{M}(T)$ мер на T, необходимо и достаточно, чтобы функция $g = \sup g_n$ была локально μ-интегрируема; тогда верхняя грань в $\mathcal{M}(T)$ последовательности $(g_n \cdot \mu)$ есть мера $g \cdot \mu$.

Следствие 3 из предл. 5 показывает, что $g_n(t) \leqslant g_{n+1}(t)$ локально почти всюду; значит, изменив функции g_n на одном и том же локально пренебрежимом множестве, можно допустить, что последовательность (g_n) возрастает. Предположим, что последовательность $(g_n \cdot \mu)$ мажорирована в $\mathcal{M}(T)$; тогда для любой функции $f \geqslant 0$ из $\mathcal{K}(T)$ имеем $\sup\limits_n \int f g_n \, d\mu < +\infty$; отсюда следует (гл. IV, § 4, n° 3, предл. 4), что функция $fg = \sup\limits_n f g_n$ интегрируема и что $\int fg \, d\mu = \sup\limits_n \int f g_n \, d\mu$. Это показывает, что g локально интегрируема (предл. 1) и что $g \cdot \mu$ есть верхняя грань функций $g_n \cdot \mu$ в $\mathcal{M}(T)$ (гл. II, § 2, n° 2). Обратно, ясно, что если g локально интегрируема, то меры $g_n \cdot \mu$ мажорированы мерой $g \cdot \mu$.

Предложение 7. *Пусть g_1 и g_2 — две конечные числовые функции, определенные на T. Предположим, что g_1 локально интегрируема относительно μ и положительна. Для того чтобы g_2 была локально интегрируема относительно $g_1 \cdot \mu$, необходимо и достаточно, чтобы функция $g_2 g_1$ была локально интегрируема относительно μ, и тогда имеем $g_2 \cdot (g_1 \cdot \mu) = (g_2 g_1) \cdot \mu$* («формула ассоциативности»).

Рассматривая g_2^+ и g_2^-, мы сразу же сводим все к случаю, когда $g_2 \geqslant 0$. Утверждение, что g_2 локально интегрируема относительно меры $g_1 \cdot \mu$, означает, что для любой функции $f \in \mathcal{K}(T)$ функция $g_2 f$ интегрируема относительно $g_1 \cdot \mu$ (предл. 1); а поскольку $g_2 f$ имеет компактный носитель, то все сводится к утверждению, что $g_2 f$ существенно интегрируема относительно $g_1 \cdot \mu$ и, следовательно, что функция $g_2 g_1 f$ существенно интегрируема относительно μ (теорема 1); а так как $g_2 g_1 f$ имеет компактный носитель, то это означает, что $g_2 g_1 f$ μ-интегрируема, и значит, $g_2 g_1$ локально μ-интегрируема. Кроме того, полагая $\nu = g_1 \cdot \mu$, $\lambda = g_2 \cdot (g_1 \cdot \mu)$, получаем (теорема 1), что

$$\int f\,d\lambda = \int fg_2\,d\nu = \int fg_2g_1\,d\mu,$$

что и завершает доказательство.

Предложение 8. *Пусть* μ *и* μ' *— две положительные меры на* T; *для того чтобы числовая функция* g *была локально интегрируема относительно меры* $\mu+\mu'$, *необходимо и достаточно, чтобы* g *была локально интегрируема относительно* μ *и относительно* μ'; *тогда имеем* $g\cdot(\mu+\mu') = g\cdot\mu + g\cdot\mu'$.

Утверждение, что g локально интегрируема относительно $\rho=\mu+\mu'$ (соотв. μ, μ'), означает, согласно предложению 1, что для любой функции $f\in\mathcal{K}(T)$ функция fg интегрируема относительно ρ (соотв. μ, μ'); если это имеет место, то (теорема 1) $\langle f, g\cdot\rho\rangle = \int fg\,d\rho$ $\left(\text{соотв. } \langle f, g\cdot\mu\rangle = \int fg\,d\mu,\ \langle f, g\cdot\mu'\rangle = \int fg\,d\mu'\right)$. Таким образом, предложение вытекает из следствия 1 предложения 6 § 3.

Предложение 9. *Пусть* $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$ *— локально счетное семейство* (§ 1, n° 4, опр. 3) *попарно не пересекающихся* μ*-измеримых подмножеств из* T. *Если* $M=\bigcup_{\alpha\in A} M_\alpha$, *то мера* $\varphi_M\cdot\mu$ *является в* $\mathcal{M}(T)$ *верхней гранью множества мер* $\sum_{\alpha\in J}\varphi_{M_\alpha}\cdot\mu$, *где* J *пробегает множество конечных подмножеств из* A.

В самом деле, носитель (компактный) всякой функции $f\geqslant 0$ из $\mathcal{K}(T)$ пересекается лишь со множествами M_α из некоторого счетного подсемейства $(M_\alpha)_{\alpha\in B}$ семейства $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$. Следовательно, имеем $f\varphi_M = \sum_{\alpha\in B} f\varphi_{M_\alpha}$, и значит (гл. IV, § 4, n° 3, следствие 2 из теоремы 2), $\int f\varphi_M\,d\mu = \sum_{\alpha\in B}\int f\varphi_{M_\alpha}\,d\mu$; но последняя сумма служит верхней гранью сумм $\sum_{\alpha\in J}\int f\varphi_{M_\alpha}\,d\mu$, где J пробегает фильтрующееся множество конечных подмножеств из A, откуда и следует предложение (гл. II, § 2, n° 2).

5. *Характеризация мер с базисом* μ

Напомним (гл. III, § 2, n° 4, теорема 3), что множество $\mathscr{M}(T)$ мер на T *вполне решеточно* (иными словами, всякое мажорированное подмножество из $\mathscr{M}(T)$ имеет верхнюю грань).

Теорема 2 (Лебега — Никодима). *Пусть μ и ν — две положительные меры на локально компактном пространстве T. Следующие условия эквивалентны:*

a) *ν есть мера с базисом μ.*

b) *Всякое локально μ-пренебрежимое множество локально ν-пренебрежимо.*

c) *Для любой μ-интегрируемой и ν-интегрируемой числовой функции $f \geqslant 0$ с компактным носителем и для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что соотношения $0 \leqslant h \leqslant f$, $\int^* h\,d\mu \leqslant \delta$ влекут $\int^* h\,d\nu \leqslant \varepsilon$.*

c′) *Для любой непрерывной на T конечной числовой функции $g \geqslant 0$ с компактным носителем и любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всякой непрерывной функции h, удовлетворяющей условиям $0 \leqslant h \leqslant g$ и $\int h\,d\mu \leqslant \delta$, справедливо неравенство $\int h\,d\nu \leqslant \varepsilon$.*

c″) *Для любого компактного множества $K \subset T$ и любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что соотношения $A \subset K$ и $\mu^*(A) \leqslant \delta$ влекут неравенство $\nu^*(A) \leqslant \varepsilon$* («абсолютная непрерывность» меры ν относительно μ).

d) *Мера ν принадлежит полосе, порожденной мерой μ во вполне решеточном пространстве $\mathscr{M}(T)$* (гл. II, § 1, n° 5).

Мы будем доказывать эту теорему по следующей логической схеме:

$$\begin{tikzcd} & & c'' \arrow[dl, Rightarrow] \\ a \arrow[r, Rightarrow] & b \arrow[r, Rightarrow] & c \arrow[u, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \\ & d \arrow[ul, Rightarrow] & c' \arrow[l, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

Во-первых, a) влечет b), ибо если ν есть мера с базисом μ, то всякое локально μ-пренебрежимое множество локально ν-пренебрежимо согласно предложению 2.

Покажем, что b) влечет c). Допустим, что условие c) не выполняется; тогда найдутся μ-интегрируемая и ν-интегрируемая функция $f_0 \geqslant 0$ и число $\alpha > 0$, обладающие следующими свойствами: для любого целого $n > 0$ существует такая функция g_n, что $0 \leqslant g_n \leqslant f_0$, $\int^* g_n \, d\mu < 2^{-n}$ и $\int^* g_n \, d\nu \geqslant \alpha$. При этом можно предположить, что g_n μ-интегрируема и ν-интегрируема, заменив в случае надобности g_n на $\inf(f_0, g_n')$, где g_n' — такая полунепрерывная снизу функция, что $g_n' \geqslant g_n$ и что интеграл $\int^* g_n' \, d\mu$ сколь угодно мало отличается от $\int^* g_n \, d\mu$. Положим $h_n = \sup\limits_{p \geqslant 0} g_{n+p}$ и $h = \inf\limits_n h_n = \limsup\limits_{n \to \infty} g_n$. Тогда имеем $\int h_n \, d\mu \leqslant \sum\limits_{p=0}^{\infty} \int g_{n+p} \, d\mu \leqslant 2^{1-n}$ (гл. IV, § 3, n° 2, теорема 1). А поскольку $h_n \leqslant f_0$, то h_n ν-интегрируема и $\int h_n \, d\nu \geqslant \alpha$, ибо $h_n \geqslant g_n$. Следовательно (гл. IV, § 4, n° 3, предл. 4), $\int h \, d\mu = \lim\limits_{n \to \infty} \int h_n \, d\mu = 0$ и $\int h \, d\nu = \lim\limits_{n \to \infty} \int h_n \, d\nu \geqslant \alpha$. Таким образом, функция h будет μ-пренебрежимой, но не будет ν-пренебрежимой; но это противоречит условию b), так как h имеет компактный носитель.

Очевидно, что c′) и c″) получаются посредством специализации функций f и h в условии c). С другой стороны, c′) влечет d) на основании предложения 4, гл. II, § 2, n° 2. Покажем, что c″) влечет b): действительно, если $A \subset T$ локально μ-пренебрежимо, то для любого компактного подмножества K из T имеем $\mu(A \cap K) = 0$; значит, согласно c″) для *любого* $\varepsilon > 0$ $\nu^*(A \cap K) \leqslant \varepsilon$, то есть $\nu(A \cap K) = 0$, что и доказывает b).

Остается доказать, что d) влечет a). Мы проделаем это в несколько этапов.

1° Предположим сначала, что $\nu \leqslant \mu$ и что мера ν *ограничена*. По равенству Коши — Шварца, для всякой функции $g \in \mathcal{K}(T)$ имеем

$$|\nu(g)|^2 \leqslant \nu(1)\,\nu(g^2) \leqslant \nu(1)\,\mu(g^2). \tag{4}$$

Это доказывает, во-первых, что если g μ-пренебрежима, то $\nu(g) = 0$; кроме того, (4) показывает, что линейная форма ν на $\mathcal{K}(T)$ непрерывна в топологии сходимости в смысле среднего квадратического относительно меры μ. При помощи факторизации эта форма определяет линейную форму $\tilde{g} \to \nu(\tilde{g})$ на всюду плотном подпространстве $\tilde{\mathscr{K}}(T)$ (пространство классов эквивалентности по μ функций из $\mathscr{K}(T)$) гильбертова пространства $L^2(T, \mu)$; значит, она продолжается по непрерывности на все $L^2(T, \mu)$. Тогда найдется (Топ. вект. пр-ва, гл. V, § 1, теорема 3) такая функция $f \in \mathscr{L}^2(T, \mu)$, что $\nu(g) = \mu(gf)$ для любой функции $g \in \mathscr{K}(T)$. А так как f локально μ-интегрируема (n° 1), то можно написать $\nu = f \cdot \mu$, и соотношение $0 \leqslant f(t) \leqslant 1$ будет иметь место локально почти всюду относительно μ (следствие 3 из предл. 5).

2° Предположим только, что $\nu \leqslant \mu$. Пусть $(K_\alpha)_{\alpha \in A}$ — локально счетное семейство компактных множеств из T, попарно не пересекающихся и таких, что $T - \bigcup_{\alpha \in A} K_\alpha$ локально μ-пренебрежимо (§ 1, n° 4, предл. 4). Значит, если положить $M = \bigcup_{\alpha \in A} K_\alpha$, то $\varphi_M \cdot \mu = \mu$. Пусть $\mu_\alpha = \varphi_{K_\alpha} \cdot \mu$, $\nu_\alpha = \varphi_{K_\alpha} \cdot \nu$; тогда $\nu_\alpha \leqslant \mu_\alpha$ и μ_α ограничена (следствие теоремы 1); следовательно, согласно 1° существует такая локально μ_α-интегрируемая функция f_α, что $\nu_\alpha = f_\alpha \cdot \mu_\alpha$ и $0 \leqslant f_\alpha \leqslant 1$. Таким образом, функция $f_\alpha \varphi_{K_\alpha}$ μ-измерима и не превосходит 1 при любых $\alpha \in A$ (предл. 3). Обозначим через f такую функцию на T, что $0 \leqslant f \leqslant 1$ и что при любом $\alpha \in A$ функция μ совпадает на K_α с $f_\alpha \varphi_{K_\alpha}$; тогда f будет локально μ-интегрируема (§ 1, n° 4, предл. 5). Положим $\nu' = f \cdot \mu$; для любого $\alpha \in A$, согласно предложению 7, имеем $\varphi_{K_\alpha} \cdot \nu' = (\varphi_{K_\alpha} f) \cdot \mu = f_\alpha \cdot (\varphi_{K_\alpha} \cdot \mu) = f_\alpha \cdot \mu_\alpha = \nu_\alpha = \varphi_{K_\alpha} \cdot \nu$, и стало быть, из предложения 9 вытекает, что $\nu' = \nu$, так как $T - M$ локально μ-пренебрежимо.

3° Перейдем к общему случаю. Если ν принадлежит полосе, порожденной мерой μ в $\mathscr{M}(T)$, то $\nu = \sup_n (\inf(n\mu, \nu))$ (гл. II, § 1, n° 5, следствие предл. 5). Поскольку $\inf(n\mu, \nu) \leqslant n\mu$, то найдется такая локально μ-интегрируемая функция $f_n \geqslant 0$, что $\inf(n\mu, \nu) = f_n \cdot \mu$. А так как последовательность мер $f_n \cdot \mu$ возрастает и имеет верхней гранью меру ν в $\mathscr{M}(T)$, то функция $f = \sup_n f_n$ локально μ-интегрируема и $\nu = f \cdot \mu$ (предл. 6), что и завершает доказательство теоремы 2.

Замечание. Условие b) теоремы 2 эквивалентно следующему условию:

b′) *Всякое μ-пренебрежимое компактное подмножество из T ν-пренебрежимо.*

Действительно, легко видеть, что b) влечет b′). Обратно, предположим, что b′) выполнено; обозначим через N некоторое локально μ-пренебрежимое множество. Для любого компактного подмножества K из T множество $K \cap N$ μ-пренебрежимо и, значит, содержится в некотором относительно компактном μ-пренебрежимом множестве A, являющемся счетным пересечением открытых множеств (гл. IV, § 4, n° 6, следствие 2 из теоремы 4). Множество A ν-интегрируемо (гл. IV, § 5, n° 1, следствие предл. 3) и, следовательно, является объединением ν-пренебрежимого множества M и последовательности (H_n) компактных множеств. По предположению каждое из множеств H_n ν-пренебрежимо, а следовательно, таковым является и A, и, таким образом, N локально ν-пренебрежимо.

Следствие. *Для того чтобы действительная мера ν была мерой с базисом μ, необходимо и достаточно, чтобы ν принадлежала полосе B, порожденной мерой μ в $\mathcal{M}$ (T).*

Действительно, для того чтобы ν была мерой с базисом μ, необходимо и достаточно, чтобы этим свойством обладали ν^+ и ν^- (предл. 5); с другой стороны, для того чтобы $\nu \in B$, необходимо и достаточно, чтобы $\nu^+ \in B$ и $\nu^- \in B$ (гл. II, § 1, n° 5), откуда и получаем следствие.

Схолия. Рассмотрим отношение эквивалентности «$f(t) = g(t)$ локально почти всюду относительно μ» между конечными числовыми функциями и обозначим через $\mathcal{Y}$ (T, μ) (или просто $\mathcal{Y}$) множество классов по этому отношению функций, локально интегрируемых относительно μ. Множество $\mathcal{Y}$ наделено структурой пространства Рисса, и, как мы видели (следствие 2 из предл. 5), мера $f\cdot\mu$ зависит только от класса $\dot{f}$ функции f в $\mathcal{Y}$. Теорема 2 в соединении с предложением 5 показывает, что отображение $\dot{f} \to f\cdot\mu$ есть *изоморфизм пространства Рисса $\mathcal{Y}$ на полосу, порожденную мерой* μ *в пространстве* $\mathcal{M}$ (T). В частности, верхняя грань двух мер $f\cdot\mu$ и $g\cdot\mu$ с базисом μ в пространстве $\mathcal{M}$ (T) есть мера $(\sup(f, g))\cdot\mu$.

Поскольку всякая полоса во вполне решеточном пространстве сама является вполне решеточным пространством (гл. II, § 1, n° 5), то ясно, что пространство $\mathcal{Y}$ *вполне решеточно*; однако следует напомнить, что верхняя грань в $\mathcal{Y}$ несчетного семейства $(\dot{f}_\alpha)$ классов эквивалентности не обязана совпадать с классом верхней огибающей функций f_α. Тем не менее мы показали, что для *возрастающей последовательности* (f_n) локально μ-интегрируемых функций, верхняя огибающая f которых локально μ-интегрируема, функция $f \cdot \mu$ служит верхней гранью последовательности мер $(f_n \cdot \mu)$ в $\mathcal{M}(T)$ (предл. 6).

6. *Эквивалентные меры*

Предложение 10. *Пусть μ и ν — две положительные меры на T. Имеет место эквивалентность следующих условий:*

a) *Одни и те же множества локально пренебрежимы относительно μ и ν.*

b) *Полосы, порожденные мерами μ и ν в $\mathcal{M}(T)$, совпадают.*

c) *Справедливо равенство $\nu = g \cdot \mu$, где g локально μ-интегрируема и $g(t) > 0$ локально почти всюду относительно μ.*

Условия a) и b) эквивалентны в силу теоремы 2. Если они выполняются, то $\nu = g \cdot \mu$ и $\mu = h \cdot \nu$, где g (соотв. h) положительна и локально интегрируема относительно μ (соотв. ν). Значит (предл. 7), функция hg локально μ-интегрируема и $\mu = (hg) \cdot \mu$. Отсюда следует (следствие 2 из предл. 5), что hg равна 1 локально почти всюду относительно μ, так что $g(t) > 0$ и $h(t) = \frac{1}{g(t)}$ локально почти всюду относительно μ. Обратно, предположим, что $\nu = g \cdot \mu$, где $g(t) > 0$ локально почти всюду относительно μ; так как функция $\left(\frac{1}{g}\right) g$ определена локально почти всюду и является локально μ-интегрируемой, то $\frac{1}{g}$ локально ν-интегрируема и $\left(\frac{1}{g}\right) \cdot \nu = \mu$ (предл. 7).

Определение 3. *Две меры μ и ν на локально компактном пространстве T называются эквивалентными, если меры $|\mu|$ и $|\nu|$ удовлетворяют условиям* a), b) *и* c) *предложения* 10.

Следовательно, для того чтобы μ и ν были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы этим свойством обладали $|\mu|$ и $|\nu|$.

Замечание. Если μ и ν — две положительные эквивалентные меры, то, как сразу следует из предложения 3, относительно мер μ и ν измеримы *одни и те же* функции, определенные на T и принимающие значения в произвольном топологическом пространстве G.

Предложение 11. *Пусть μ — положительная мера на T. Если T счетно в бесконечности, то существует такая непрерывная функция h, что $h(t) > 0$ при любом $t \in T$ и что мера $\nu = h \cdot \mu$* (эквивалентная μ) *ограничена.*

В самом деле, пусть (K_n) есть последовательность компактных множеств, образующая покрытие пространства T, и для любого n через f_n обозначена такая функция из $\mathcal{K}(T)$, что $0 \leqslant f_n \leqslant 1$ и $f_n(t) = 1$ на K_n (гл. III, § 2, n° 1, лемма 1). Пусть, далее, (a_n) есть последовательность строго положительных чисел, для которых $\sum\limits_n a_n < +\infty$; тогда ряд $h = \sum\limits_n a_n f_n$ нормально сходится на T, и следовательно, h, по построению, является непрерывной функцией на T, удовлетворяющей неравенству $h(t) > 0$ при любом $t \in T$. Положив $\nu = h \cdot \mu$, будем иметь (предл. 2 и гл. IV, § 1, n° 3, предл. 13)

$$\nu^*(1) = \int^* h \, d\mu \leqslant \sum_n a_n \int f_n \, d\mu.$$

Положим, например, $a_n = 2^{-n} \left(\int f_n \, d\mu \right)^{-1}$, когда $\int f_n \, d\mu > 1$, и $a_n = 2^{-n}$ в противном случае; тогда $\sum\limits_n a_n < +\infty$ и $\nu^*(1) < +\infty$, что и доказывает предложение.

Предложение 12. *Пусть (μ_n) — последовательность положительных ограниченных мер на T; тогда существует такая положительная ограниченная мера μ на T, что отношение $\mu(N) = 0$ эквивалентно отношению «каково бы ни было n, $\mu_n(N) = 0$»; каждая из мер μ_n есть мера с базисом μ. Если при этом μ' есть другая положительная мера на T, обладающая тем же свойством, то μ и μ' эквивалентны.*

Последнее утверждение следует сразу же из определения 3. Чтобы доказать существование μ, можно ограничиться случаем, когда $\mu_n \neq 0$ при любом n; тогда семейство мер $\frac{\mu_n}{2^n \|\mu_n\|}$ суммируемо на $\mathscr{M}(T)$ (§ 3, n° 5) и его сумма μ удовлетворяет неравенству $\|\mu\| \leqslant 1$. Кроме того, поскольку $\mu_n \leqslant 2^n \|\mu_n\| \cdot \mu$, то отношение $\mu(N) = 0$ влечет $\mu_n(N) = 0$ при любом n; обратно, если N есть пренебрежимое множество относительно всех μ_n, то оно локально пренебрежимо относительно μ (§ 3, n° 5, следствие 2 из предл. 5) и, стало быть, μ-пренебрежимо, так как μ ограничена (§ 2, n° 1, следствие из предл. 3).

7. *Независимые меры*

Напомним, что если имеются две меры ρ и σ на T, то ρ и σ называются независимыми, если $\inf(|\rho|, |\sigma|) = 0$ на $\mathscr{M}(T)$ (гл. II, § 1, n° 1). Известно, что меры, независимые с некоторой заданной мерой, образуют полосу (гл. II, § 1, n° 5, теорема 1).

Определение 4. *Пусть задана положительная мера μ на локально компактном пространстве T и подмножество M из T; говорят, что мера μ сосредоточена на M или что M несет μ, если множество $\complement M$ локально пренебрежимо относительно μ.*

Это равносильно утверждению, что M μ-измеримо и что $\mu = \varphi_M \cdot \mu$. Ясно, что если μ сосредоточена на множестве M, то всякая положительная мера с базисом μ также сосредоточена на M (теорема 2).

Предложение 13. *Для того чтобы две меры μ и ν были независимы, необходимо и достаточно, чтобы в T существовали такие два множества M и N без общих точек, что $|\mu|$ сосредоточена на M, а $|\nu|$ на N.*

Пусть λ — такая положительная мера, что $|\mu| \leqslant \lambda$ и $|\nu| \leqslant \lambda$ (например, $\lambda = |\mu| + |\nu|$). Тогда $|\mu| = g \cdot \lambda$ и $|\nu| = h \cdot \lambda$, где g и h — положительные функции, локально интегрируемые относительно λ (теорема 2). Для того чтобы $\inf(|\mu|, |\nu|) = 0$, необходимо и достаточно, чтобы $\inf(g, h)$ была равна нулю локально почти всюду относительно λ (n° 5, схолия), или, другими словами, чтобы существовало два непересекающихся множества M и N, λ-измеримых и таких, что $\varphi_M g = g$ и $\varphi_N h = h$ локально почти всюду относительно λ. Но для того, чтобы $\varphi_M g = g$ локально почти всюду относительно λ, необходимо и достаточно, чтобы $(\varphi_M g)\cdot\lambda = g\cdot\lambda$ (следствие 2 из предл. 5), то есть чтобы $\varphi_M \cdot |\mu| = |\mu|$ (предл. 7); это означает, что M несет $|\mu|$. Точно так же, для того чтобы $\varphi_N h = h$ локально почти всюду относительно λ, необходимо и достаточно, чтобы N несло $|\nu|$. Это завершает доказательство.

Следствие. *Для любой меры ν на T существуют два непересекающихся множества M и N, несущих соответственно ν^+ и ν^-.*

Не следует смешивать понятие *носителя* меры ν с понятием множества, несущего $|\nu|$. Носитель S меры ν есть наименьшее *замкнутое* множество, несущее $|\nu|$ (гл. III, § 3, n° 2, предл. 2 и гл. IV, § 2, n° 2, предл. 5). Однако могут существовать подмножества из S, отличные от S и несущие $|\nu|$. Точнее, может оказаться, что $\inf(\mu, \nu) = 0$ для двух положительных мер μ и ν с одним и тем же носителем (упр. 6).

Отметим также, что пересечение множеств, несущих $|\nu|$, является множеством таких точек $t \in T$, что $|\nu|(\{t\}) > 0$, и может быть пустым (например, в случае меры Лебега); стало быть, вообще говоря, не существует наименьшего множества, несущего $|\nu|$.

Теорема 3 (Лебег). *Пусть μ — положительная мера на локально компактном пространстве T. Всякая мера ν на T может быть единственным образом записана в виде $\nu = g\cdot\mu + \nu'$, где g локально μ-интегрируема, а ν' есть мера, независимая с μ. Если мера ν положительна, то положительны и меры $g\cdot\mu$ и ν'.*

Это есть не что иное, как теорема Ф. Рисса (гл. II, § 1, n° 5, теорема 1), в применении ко вполне решеточному пространству $\mathcal{M}(T)$ мер на T и к полосе, порожденной в этом пространстве мерой μ.

Если g есть существенно μ-интегрируемая числовая функция, то, как уже было показано (следствие из теоремы 1), мера $g\cdot\mu$ ограничена и (теорема 1 и гл. IV, § 4, n° 7, предл. 12) $\|g\cdot\mu\| = \||g|\cdot\mu\| = \overline{N}_1(g)$. Следовательно, можно отождествить пространство $L^1(T, \mu)$ с *нормированным* подпространством банахова пространства $\mathcal{M}^1(T)$ ограниченных мер на T (гл. III, § 2, n° 6), образованным ограниченными мерами *с базисом* μ. При этих соглашениях теорема 3 влечет следующее утверждение:

Следствие. *Для всякой положительной меры* μ *на* T *существует непрерывный проектор* p *с нормой* 1 *пространства* $\mathscr{M}^1(T)$ *на подпространство* $L^1(T, \mu)$, *для которого*

$$\|\nu\| = \|p(\nu)\| + \|\nu - p(\nu)\| \tag{5}$$

для любой ограниченной меры $\nu \in \mathscr{M}^1(T)$, *и имеющий ядро* $\overset{-1}{p}(0)$, *являющееся множеством ограниченных мер, независимых с* μ.

Доказательства требует лишь соотношение (5); оно следует из предложения 4, гл. III, § 2, и из того факта, что если ρ и σ — две независимые меры на T, то меры $(\rho^+ + \sigma^+)$ и $(\rho^- + \sigma^-)$ независимы (гл. II, § 1, n° 1), и значит, $|\rho + \sigma| = |\rho| + |\sigma|$.

8. Приложения: I. Двойственность пространств L^p

Напомним, что два числа p и q такие, что $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $1 \leqslant q \leqslant +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, называются *сопряженными показателями* (гл. IV, § 6, n° 4). Всякая функция $g \in \mathscr{L}^q$ определяет на L^p непрерывную линейную форму θ_g, которая получается факторизацией из линейной формы $f \to \int fg\,d\mu$ на $\mathscr{L}^p$, и имеет место равенство $N_q(g) = \|\theta_g\|$ (гл. IV, § 6, n° 4, следствие из предл. 3). Следовательно, факторизацией из отображения $g \to \theta_g$ получается линейное изометрическое отображение φ пространства L^q в пространство $(L^p)'$, сопряженное к L^p. Мы покажем, что при $1 \leqslant p < +\infty$ φ отображает L^q *на* $(L^p)'$, так что мы сможем, стало быть, отождествить банаховы пространства L^q и $(L^p)'$ при помощи изоморфизма φ. Иными словами, имеет место

Теорема 4. *Пусть* p *и* q — *сопряженные показатели, причем* $1 \leqslant p < +\infty$. *Всякая непрерывная линейная форма на* $\mathscr{L}^p(T, \mu)$ *имеет вид* $f \to \int fg\,d\mu$, *где* g *есть функция из* $\mathscr{L}^q(T, \mu)$, *класс которой в* L^q *полностью определен.*

В самом деле, пусть θ — непрерывная линейная форма на $\mathscr{L}^p$; следовательно, существует такое число $a \geqslant 0$, что $|\theta(f)| \leqslant a \cdot N_p(f)$ для любой функции $f \in \mathscr{L}^p$. Рассмотрим сужение формы θ на пространство $\mathscr{K}(T)$ непрерывных функций с компактным носителем: для любого компактного подмножества K из T и любой функции $f \in \mathcal{K}(T, K)$ (пространство непрерывных функций с носителем, содержащимся в K) имеем $N_p(f) \leqslant (\mu(K))^{1/p} \| f \|$; значит, топология, индуцируемая в $\mathcal{K}(T, K)$ топологией из $\mathcal{L}^p$, будет менее сильной, чем топология равномерной сходимости, и стало быть, сужение формы θ на каждое множество $\mathcal{K}(T, K)$ непрерывно в этой топологии. Это означает, что сужение формы θ на $\mathcal{K}(T)$ есть *мера* ν (гл. III, § 2, n° 2, опр. 1).

Покажем, что $|\nu|(|f|) \leqslant a \cdot N_p(f)$ для любой функции $f \in \mathcal{K}(T)$. Достаточно доказать эту оценку для $f \geqslant 0$. Но для любой функции ψ из $\mathcal{K}(T)$, удовлетворяющей неравенству $|\psi| \leqslant f$, имеем $|\nu(\psi)| \leqslant a \cdot N_p(\psi) \leqslant a \cdot N_p(f)$; наше утверждение получается из выражения для абсолютного значения меры, приведенного в гл. III, § 2, n° 4, формула (4). Тем более имеем $\nu^+(|f|) \leqslant \leqslant a \cdot N_p(f)$ и $\nu^-(|f|) \leqslant a \cdot N_p(f)$. Это показывает, что меры ν^+ и ν^- являются мерами *с базисом* μ: действительно, если $f \geqslant 0$ есть функция из $\mathcal{K}(T)$, а ψ — функция из $\mathcal{K}(T)$ такая, что $0 \leqslant \psi \leqslant f$, то

$$\nu^+(\psi) \leqslant a \cdot (\mu(\psi^p))^{\frac{1}{p}} \leqslant a \cdot \| f \|^{\frac{p-1}{p}} \cdot (\mu(\psi))^{\frac{1}{p}},$$

и тем самым выполнено условие с′) теоремы 2; аналогичным образом рассуждаем для ν^-. Следовательно, существует такая положительная локально μ-интегрируемая функция h_1, что $\nu^+(f) = \int f h_1 \, d\mu$ для любой функции $f \in \mathcal{K}(T)$. Покажем, что h_1 локально почти всюду равна некоторой функции из $\mathcal{L}^q$. Если функция $f \geqslant 0$ из $\mathcal{K}(T)$ такова, что $N_p(f) \leqslant 1$, то имеем $\int f h_1 \, d\mu = \nu^+(f) \leqslant a$. Стало быть, при любом непрерывном отображении f_0 с компактным носителем пространства T в $[0, 1]$ выполняется неравенство $\int (f_0 h_1) f \, d\mu \leqslant a$, когда f пробегает множество таких положительных функций из $\mathcal{K}(T)$, что $N_p(f) \leqslant 1$. Отсюда, согласно формуле (11) из гл. IV, § 6, n° 4, получаем, что $N_q(f_0 h_1) \leqslant a$. Из этого следует, что $\sup_K N_q(\varphi_K h_1) \leqslant a$, когда K пробегает множество компактных подмножеств из T, и этим наше утверждение доказано (§ 2, предл. 6 и 7).

Точно такое же рассуждение проводится для ν^-. А так как $\nu = \nu^+ - \nu^-$, то существует такая функция $g \in \mathcal{L}^q$, что для любой функции $f \in \mathscr{K}(T)$ справедливо соотношение $\theta(f) = \nu(f) = \int fg\, d\mu$. Иными словами, непрерывные линейные формы θ и θ_g сопадают на $\mathscr{K}(T)$; значит, они равны и на $\mathscr{L}^p$, так как $\mathscr{K}(T)$ всюду плотно в $\mathscr{L}^p$, и доказательство закончено.

Следствие. *Для любого числа p в пределах $1 < p < \infty$ банахово пространство $L^p(T, \mu)$ рефлексивно.*

Вообще говоря, пространство, сопряженное к L^∞, не будет изоморфно пространству L^1, и стало быть, L^1 и L^∞ не рефлексивны (упр. 12). Мы охарактеризуем непрерывные линейные формы на L^∞, получающиеся факторизацией из линейной формы $f \to \int fg\, d\mu$ на $\mathscr{L}^\infty$, где $g \in \mathscr{L}^1$.

Упорядоченное векторное пространство $L^\infty(T, \mu)$, являющееся подпространством пространства $\mathscr{Y}(T, \mu)$ (n° 5), *вполне решеточно*; действительно, если (f_α) есть семейство положительных функций из $\mathscr{L}^\infty$, множество классов $(\dot{f}_\alpha)$ которых мажорировано в L^∞, то найдется такое $a \geqslant 0$, что $N_\infty(f_\alpha) \leqslant a$ при любом α. А так как $\mathscr{Y}(T, \mu)$ вполне решеточно, то семейство $(\dot{f}_\alpha)$ имеет в $\mathscr{Y}(T, \mu)$ верхнюю грань $\dot{h}$; но поскольку $\dot{a} \geqslant \dot{f}_\alpha$ при любом α, то $\dot{h} \leqslant \dot{a}$, следовательно, $N_\infty(h) \leqslant a$, откуда и вытекает наше утверждение.

Предложение 14. *Для того чтобы положительная линейная форма θ на $\mathscr{L}^\infty$ была формой вида $f \to \int fg\, d\mu$, где $g \in \mathscr{L}^1$, необходимо и достаточно, чтобы для любого фильтрующегося возрастающего семейства $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ положительных функций из $\mathscr{L}^\infty$, множество классов $(\dot{f}_\alpha)_{\alpha \in A}$ которых мажорировано в L^∞ и имеет в этом пространстве верхнюю грань $\dot{h}$, выполнялось равенство $\theta(h) = \sup_{\alpha \in A} \theta(f_\alpha)$.*

Сначала покажем, что условие необходимо. В самом деле, мера $h \cdot \mu$ служит в $\mathscr{M}(T)$ верхней гранью множества мер $f_\alpha \cdot \mu$ (n° 5, схолия); значит (гл. II, § 2, n° 2), для любой функции $\varphi \geqslant 0$ из $\mathscr{K}(T)$ имеем $\int h\varphi\, d\mu = \sup_{\alpha \in A} \int f_\alpha \varphi\, d\mu$. Если теперь обозначить через a такое положительное число, что $N_\infty(f_\alpha) \leqslant a$ при любом $\alpha \in A$ (что влечет $N_\infty(h) \leqslant a$), то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $\varphi \in \mathscr{K}(T)$, что $\varphi \geqslant 0$ и $N_1(g-\varphi) \leqslant \varepsilon$, откуда выводим, что $\int f_\alpha |g-\varphi|\,d\mu \leqslant a\varepsilon$ при любом $\alpha \in A$, и $\int h|g-\varphi|\,d\mu \leqslant a\varepsilon$. А поскольку $\sup\limits_{\alpha \in A} \int f_\alpha g\,d\mu \leqslant \int hg\,d\mu$, то это показывает, что обе части неравенства равны между собой.

Для доказательства достаточности нам понадобится следующая лемма:

Лемма 1. 1° *Пусть f — полунепрерывная снизу положительная ограниченная функция на T. Тогда ее класс $\dot{f}$ в L^∞ служит верхней гранью множества классов $\dot{\varphi}$, где φ пробегает множество функций из $\mathscr{K}(T)$, удовлетворяющих условию $0 \leqslant \varphi \leqslant f$.*

2°. *Пусть f — измеримая положительная ограниченная функция на T. Тогда ее класс $\dot{f}$ в L^∞ служит нижней гранью множества классов $\dot{\psi}$, где ψ пробегает множество полунепрерывных снизу ограниченных функций на T, для которых $\psi \geqslant f$.*

1°. Пусть f' — такая функция из $\mathscr{L}^\infty$, что $\dot{f}'$ является верхней гранью в L^∞ множества классов $\dot{\varphi}$ таких функций φ из $\mathscr{K}(T)$, что $0 \leqslant \varphi \leqslant f$; очевидно, $\dot{f}' \leqslant \dot{f}$. Пусть U есть открытое относительно компактное подмножество из T; по определению для любой функции h из $\mathscr{K}(T)$ такой, что $0 \leqslant h \leqslant f\varphi_U$, неравенство $h(t) \leqslant f'(t)$ выполняется локально почти всюду, и значит, $h(t) \leqslant f'(t)\varphi_U(t)$ почти всюду; из этого заключаем, что $\int h\,d\mu \leqslant \int f'\varphi_U\,d\mu$. Но так как $f\varphi_U$ полунепрерывна снизу, то $\int f\varphi_U\,d\mu = \sup \int h\,d\mu$, где h пробегает множество функций из $\mathscr{K}(T)$, для которых $0 \leqslant h \leqslant f\varphi_U$ (гл. IV, § 1, n° 1, опр. 1); следовательно, $\int f\varphi_U\,d\mu \leqslant \int f'\varphi_U\,d\mu$, а поскольку $f'\varphi_U \leqslant f\varphi_U$ почти всюду, то непременно $f\varphi_U = f'\varphi_U$ почти всюду, откуда следует, что $f = f'$ локально почти всюду.

2°. Пусть f' — такая функция из $\mathscr{L}^\infty$, что $\dot{f}'$ есть нижняя грань в L^∞ множества классов $\dot{\psi}$ полунепрерывных снизу функций ψ, ограниченных и таких, что $\psi \geqslant f$; тогда $\dot{f}' \geqslant \dot{f}$. Пусть K есть компактное подмножество из T, а для любой функции h, полунепрерывной снизу, ограниченной и мажорирующей $f\varphi_K$, пусть $\overline{h}$ есть функция, равная h на K и $\|f\|+\|h\|$ на $T-K$. Тогда $\overline{h}$ полунепрерывна снизу и $\overline{h} \geqslant f$, и стало быть, по определению $\overline{h}(t) \geqslant f'(t)$ локально почти всюду; из этого заключаем, что $h(t) \geqslant f'(t)\,\varphi_K(t)$ почти всюду, откуда следует, что $\int h\,d\mu \geqslant \geqslant \int f'\varphi_K\,d\mu$. Но $\int f\varphi_K\,d\mu = \inf \int h\,d\mu$, где h пробегает множество полунепрерывных снизу функций, ограниченных и мажорирующих $f\varphi_K$ (гл. IV, § 1, n° 3, опр. 3); следовательно, $\int f\varphi_K\,d\mu \geqslant \geqslant \int f'\varphi_K\,d\mu$, а так как $f\varphi_K \leqslant f'\varphi_K$ почти всюду, то непременно $f\varphi_K = f'\varphi_K$ почти всюду, откуда получаем, что $f = f'$ локально почти всюду.

После того как лемма доказана, возьмем положительную линейную форму θ на $\mathcal{L}^\infty$, удовлетворяющую условиям предложения 14. Сужение формы θ на пространство $\mathcal{K}(T)$ есть положительная мера ν на T. Мы покажем, что для всякой положительной функции $f \in \mathcal{L}^\infty(T, \mu)$ справедливо равенство $\theta(\dot{f}) = \nu^*(f)$. Предположим вначале, что f полунепрерывна снизу (и ограничена); согласно лемме $\dot{f}$ служит верхней гранью фильтрующегося возрастающего множества классов $\dot{\varphi}$, где φ пробегает фильтрующееся множество Φ функций из $\mathcal{K}(T)$, удовлетворяющих условию $0 \leqslant \varphi \leqslant f$. А так как, по условию, $\theta(\dot{f}) = \sup\limits_{\varphi\in\Phi} \theta(\dot{\varphi})$ и, по определению, $\nu^*(f) = \sup\limits_{\varphi\in\Phi} \nu(\varphi)$, то наше утверждение для этого случая доказано. Допустим теперь, что f μ-измерима и ограничена; тогда, по определению, $\nu^*(f) = \inf\limits_{\psi\in\Psi} \nu^*(\varphi)$, где ψ пробегает фильтрующееся убывающее множество Ψ полунепрерывных снизу функций, ограниченных и удовлетворяющих неравенству $\psi \geqslant f$. Если $a > \|f\|$, то, применив условие теоремы к фильтрующемуся возрастающему множеству классов функций $a-\psi$, где $\psi \in \Psi$ и $\psi \leqslant a$, получаем, согласно лемме, что $\theta(\dot{f}) = \inf\limits_{\psi\in\Psi} \theta(\dot{\psi})$, и значит, $\theta(\dot{f}) = \nu^*(f)$. В частности, для любой μ-пренебрежимой функции $f \geqslant 0$ имеем $\theta(f) = 0$, а следовательно, $\nu^*(f) = 0$, и стало быть (теорема 2), ν есть мера *с базисом* μ; кроме того, $\nu^*(1) = \theta(1) < +\infty$, и таким образом (следствие из теоремы 1), $\nu = g \cdot \mu$, где $g \in \mathscr{L}^1(T, \mu)$. Наконец, поскольку всякая μ-измеримая функция ν-измерима, то всякая положительная функция $f \in \mathscr{L}^\infty(T, \mu)$ ν-интегрируема, и имеем $\int fg\,d\mu = \nu^*(f) = \theta(f)$, что и завершает доказательство.

Из предложения 14 заключаем, что линейные формы на $\mathscr{L}^\infty$, имеющие вид $f \to \int fg\,d\mu$, где $g \in \mathscr{L}^1$, являются разностями $\theta_1 - \theta_2$, где θ_1 и θ_2 — положительные линейные формы, удовлетворяющие условию предложения 14.

9. *Приложения: II. Функции мер*

Пусть $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ — меры на T и $u(x_1, \ldots, x_n)$ — конечная *положительно однородная* числовая функция, определенная на $\mathbf{R}^n$ (то есть (гл. I, § 1, n° 1) такая функция, что $u(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) = \alpha u(x_1, \ldots, x_n)$ для любого скаляра $\alpha \geqslant 0$). На T существуют положительные меры λ такие, что $|\mu_i| \leqslant \lambda$ при $1 \leqslant i \leqslant n$ (например, сумма $\sum_{i=1}^{n} |\mu_i|$). Пусть λ, λ' — две такие меры на T. Можно написать $\mu_i = f_i \cdot \lambda = f'_i \cdot \lambda'$, где функция f_i (соотв. f'_i) измерима и существенно ограничена относительно меры λ (соотв. λ') (теорема 2). Мы установим следующий результат: *для того чтобы числовая функция $u(f_1, \ldots, f_n)$ была локально интегрируема относительно λ, необходимо и достаточно, чтобы функция $u(f'_1, \ldots, f'_n)$ была локально интегрируема относительно λ', и тогда*

$$u(f_1, \ldots, f_n) \cdot \lambda = u(f'_1, \ldots, f'_n) \cdot \lambda'.$$

Так как $|\mu_i| \leqslant \inf(\lambda, \lambda')$, то можно ограничиться случаем, когда $\lambda \leqslant \lambda'$. Тогда $\lambda = g \cdot \lambda'$, где g есть λ'-измеримая функция в пределах $0 \leqslant g \leqslant 1$ (теорема 2); отсюда (предл. 7) следует, что $\mu_i = f_i \cdot (g\lambda') = (f_i \cdot g) \cdot \lambda'$, откуда вытекает (следствие 2 из предл. 5), что $f_i g$ равна f'_i локально почти всюду относительно λ'. Таким образом,

$$u(f'_1, \ldots, f'_n) = u(f_1 g, \ldots, f_n g) = u(f_1, \ldots, f_n)\, g$$

локально почти всюду относительно λ'. Стало быть, для того чтобы функция $u(f'_1, \ldots, f'_n)$ была локально λ'-интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы функция $u(f_1, \ldots, f_n)g$ была локально интегрируема относительно λ', то есть (предл. 7) чтобы $u(f_1, \ldots, f_n)$ была локально интегрируема относительно λ, и тогда имеем (предл. 7)

$$u(f'_1, \ldots, f'_n)\cdot\lambda' = (u(f_1, \ldots, f_n)g)\cdot\lambda' = u(f_1, \ldots, f_n)\cdot\lambda.$$

Итак, мера $u(f_1, \ldots, f_n)\cdot\lambda$ зависит только от мер $\mu_1, \ldots, \mu_n$ и от функции u; она обозначается также $u(\mu_1, \ldots, \mu_n)$. Эта мера будет, следовательно, определена, если u будет такой положительно однородной функцией, что для некоторой положительной меры λ, мажорирующей все $|\mu_i|$, функция $u(f_1, \ldots, f_n)$ будет локально λ-интегрируема, если через f_i обозначить плотности мер μ_i относительно λ. Отметим, что это условие заведомо выполняется для положительно однородной *непрерывной* функции u: действительно, тогда

$$|u(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant a(|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|)$$

(поскольку u ограничена в достаточно малой окрестности точки $(0, \ldots, 0)$), и так как $u(f_1, \ldots, f_n)$ λ-измерима (гл. IV, § 5, n° 3, теорема 1), то, в силу критерия интегрируемости (гл. IV, § 5, n° 6, теорема 5), она локально λ-интегрируема.

Пусть $u_1, \ldots, u_p$ — положительно однородные числовые функции, определенные на $\mathbf{R}^n$ и такие, что p функций $g_k = u_k(f_1, \ldots, f_n)$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$ локально λ-интегрируемы. Пусть v есть положительно однородная числовая функция, определенная на $\mathbf{R}^n$ и такая, что $v(g_1, \ldots, g_p)$ локально λ-интегрируема. Положим

$$w(x_1, \ldots, x_n) = v(u_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_p(x_1, \ldots, x_n)).$$

Тогда функция w будет положительно однородна, $w(f_1, \ldots, f_n)$ — локально λ-интегрируема, и по определению имеем

$$w(\mu_1, \ldots, \mu_n) = v(u_1(\mu_1, \ldots, \mu_n), \ldots, u_p(\mu_1, \ldots, \mu_n)).$$

В частных случаях функций x^+, x^-, $|x|$, $x+y$, $\inf(x, y)$, $\sup(x, y)$ меры, определяемые вышеописанным способом, совпадают, соответственно, с теми, которые обозначаются как μ^+, μ^-, $|\mu|$, $\mu+\nu$, $\inf(\mu, \nu)$, $\sup(\mu, \nu)$; это сразу же получается из предложения 5.

Этот метод можно применить к положительно однородной функции $(x_1^2+\ldots+x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ для определения длины кривой.

10. *Рассеянные меры; атомические меры*

Определение 5. *Мера* μ *на* T *называется рассеянной, если для любого* $t\in T$ $|\mu|(\{t\})=0$.

Пример. Мера Лебега на $\mathbf{R}$ является рассеянной (гл. IV, § 1, n° 3, замечание 1).

Утверждение, что μ есть рассеянная мера на T, означает, что всякое множество, дополнительное к конечному, несет $|\mu|$ или еще что мера μ независима с любой точечной мерой. Следовательно, рассеянные меры составляют полосу в $\mathscr{M}(T)$ (гл. II, § 1, n° 5, теорема 1).

Пусть теперь $\alpha\geqslant 0$ — конечная числовая функция, определенная на T; для того чтобы семейство (точечных или равных 0) мер $(\alpha(t)\,\varepsilon_t)_{t\in T}$ было *суммируемо*, необходимо и достаточно, чтобы для любого компактного подмножества K из T $\sum\limits_{t\in K}\alpha(t)<+\infty$ (§ 3, n° 5).

Определение 6. *Мера* ν *на* T *называется атомической, если* $|\nu|$ *является суммой некоторого суммируемого семейства положительных точечных мер.*

Положительная атомическая мера, будучи в $\mathscr{M}(T)$ верхней гранью множества мер с конечным носителем, независима с любой рассеянной мерой (гл. II, § 1, n° 1).

Предложение 15. *Всякая положительная мера* μ *на* T *может быть единственным образом представлена в виде* $\mu_1+\mu_2$, *где* μ_1 — *положительная атомическая, а* μ_2 — *положительная рассеянная меры.*

Положим $\alpha(t)=\mu(t)$ для любого $t\in T$; тогда для любого компактного подмножества K из T и любого конечного подмножества J из K имеем $\sum\limits_{t\in J}\alpha(t)=\mu(J)\leqslant\mu(K)$, то есть, $\sum\limits_{t\in K}\alpha(t)<+\infty$, и значит, семейство мер $(\alpha(t)\,\varepsilon_t)_{t\in T}$ суммируемо. Пусть μ_1 есть атомическая мера, являющаяся суммой этого семейства; очевидно, что $\mu_1\leqslant\mu$;

положив $\mu_2 = \mu - \mu_1$, получим, что μ_2 положительна, и, по определению, при любом $t \in T$ выполняется равенство $\mu_2(\{t\}) = 0$, или, иными словами, μ_2 является рассеянной мерой. Единственность разбиения следует из того, что атомическая мера независима со всеми рассеянными мерами (гл. II, § 1, теорема 1).

Отметим, что если N есть множество тех $t \in T$, для которых $\mu(\{t\}) \neq 0$, то N является также множеством тех $t \in T$, для которых $\mu_1(\{t\}) \neq 0$, и следовательно, N есть наименьшее множество, несущее μ_1.

Упражнения. 1) Пусть T и X — два локально компактных пространства, μ — положительная мера на T, $t \to \lambda_t$ — μ-согласованное семейство положительных мер на X и $\nu = \int \lambda_t \, d\mu(t)$. Пусть, далее, $\mathbf{g}$ — функция, определенная на X, со значениями в некотором банаховом пространстве; показать, что если $\mathbf{g}$ локально ν-интегрируема, а X счетно в бесконечности, то $\mathbf{g}$ локально λ_t-интегрируема для всех t, за исключением некоторого локально μ-пренебрежимого множества. Показать на примере, что это предложение перестает быть верным, если X не будет счетным в бесконечности (ср. § 3, упр. 4).

2) Пусть g — положительная функция на T, измеримая и существенно ограниченная относительно μ, и пусть $\nu = g \cdot \mu$. Показать, что если функция $\mathbf{f}$ определена на T, принимает значения в банаховом пространстве или в $\overline{\mathbf{R}}$ и μ-интегрируема, то $\mathbf{f}$ ν-интегрируема. (Заметить, что $\nu \leqslant a\mu$ для некоторой постоянной a, и применить предл. 15 из гл. IV, § 1, n° 3.)

3) Пусть X — локально компактное пространство, $t \to \lambda_t$ и $t \to \lambda'_t$ — два μ-согласованных семейства положительных мер на X и $\nu = \int \lambda_t \, d\mu(t)$, $\nu' = \int \lambda'_t \, d\mu(t)$. Показать, что если λ_t является мерой с базисом λ'_t локально почти всюду относительно μ, то ν есть мера с базисом ν'. (Рассмотреть относительно компактное множество $A \subset X$, являющееся счетным пересечением открытых множеств и ν'-пренебрежимое. Используя предл. 4 из § 3, показать, что A ν-пренебрежимо.)

4) a) Пусть μ — положительная мера на T. Показать, что если T есть счетное объединение μ-интегрируемых множеств, то найдется такая непрерывная на T функция $h > 0$, что мера $h \cdot \mu$ ограничена и эквивалентна μ (рассуждать, как в предл. 11).

b) Пусть (μ_n) — последовательность положительных мер на T. Показать, что если при любом n множество T является счетным объединением μ_n-интегрируемых множеств, то на T существует такая положительная мера μ, что каждая из мер μ_n будет мерой с базисом μ (свести к случаю, когда каждая из μ_n ограничена).

5) Показать, что в пространстве $\mathscr{M}(T)$ атомические меры образуют полосу, совпадающую с полосой мер, независимых со всеми рассеянными мерами (использовать предл. 15 и теорему Ф. Рисса).

6) Пусть ρ, σ — две атомические меры на T, а M и N — наименьшие множества, несущие, соответственно, $|\rho|$ и $|\sigma|$. Для того чтобы ρ и σ были независимы, необходимо и достаточно, чтобы $M \cap N = \varnothing$. Пользуясь этим, построить пример такой атомической меры ν на интервале $I = [0, 1]$ прямой $\mathbf{R}$, чтобы I был носителем мер ν^+ и ν^-.

7) Показать, что если ν есть атомическая мера на T, то $|\nu|(\{t\}) = |\nu(\{t\})|$ при любом $t \in T$.

8) a) Пусть μ — положительная мера на T. Показать, что если множество A есть борелевское множество из T, которое не является локально μ-пренебрежимым, то найдется такая сосредоточенная на A положительная мера ν, что $\nu \neq 0$ и $\nu \leqslant \mu$. (Взять $\nu = \varphi_K \cdot \mu$, где K — некоторое компактное подмножество из A, не являющееся μ-пренебрежимым.)

b) Пусть M — борелевское подмножество из T. Показать, что для того, чтобы положительная мера λ на T была сосредоточена на M, необходимо и достаточно, чтобы λ была независима со всякой положительной мерой, сосредоточенной на $\complement M$ (использовать a)).

c) Вывести из b), что меры ρ на T, для которых $|\rho|$ сосредоточена на M, образуют полосу в $\mathscr{M}(T)$. Эта полоса широко замкнута в $\mathscr{M}(T)$, если M есть замкнутое подмножество из T (гл. III, § 3, предл. 6).

d) Показать, что мера Лебега на $I = [0, 1]$ является широким пределом последовательности атомических мер, сосредоточенных на некотором фиксированном счетном множестве $A \subset I$ (ср. гл. III, § 3, теоремы 1 и 2). Таким образом, полоса мер, сосредоточенных на A, не будет широко замкнутой.

°9) a) Пусть μ — положительная мера на T и A — такое μ-интегрируемое множество, что $\mu(A) > 0$. Показать, что если для любого μ-интегрируемого множества $B \subset A$ выполняется равенство $\mu(B) = 0$ или $\mu(B) = \mu(A)$, то найдется такая точка $a \in A$, что $\mu(\{a\}) = \mu(A)$. (Рассмотреть пересечение таких компактных множеств $K \subset A$, что $\mu(K) = \mu(A)$; показать, что оно не пусто, имеет меру, равную $\mu(A)$, и сводится к единственной точке.)

b) Предположим, что μ есть рассеянная мера. Показать, что для любого μ-интегрируемого множества A, для которого $\mu(A) > 0$, и любого $\varepsilon > 0$ существует такое μ-интегрируемое подмножество B из A, что $0 < \mu(B) \leqslant \varepsilon$ (принимая во внимание a), заметить, что существует такое μ-интегрируемое подмножество C из A, что $0 < \mu(C) \leqslant \frac{1}{2}\mu(A)$). Вывести отсюда, что, когда X пробегает множество μ-интегрируемых подмножеств из A, множество значений $\mu(X)$ составляет замкнутый интервал $[0, \mu(A)]$ (для любого числа β в пределах $0 < \beta < \mu(A)$ через γ обозначим верхнюю грань мер таких измеримых подмножеств X из A, что $\mu(X) \leqslant \beta$; сначала, используя предыдущий результат, показать, что $\gamma = \beta$, а затем доказать существование возрастающей последовательности (X_n) таких измеримых подмножеств из A, что $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(X_n) = \beta$).

°10) a) Пусть ν — положительная атомическая мера на T и A — ν-интегрируемое подмножество из T. Показать, что множество значений меры $\nu(X)$, когда X пробегает множество ν-интегрируемых подмножеств из A, замкнуто в $\mathbf{R}$. (Пусть N — наименьшее множество, несущее ν. Предположив $A \cap N$ бесконечным и расположив точки из $A \cap N$ в последовательность (a_n), рассмотреть отображение φ пространства-произведения $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ в $\mathbf{R}$, определенное соотношением $\varphi((\varepsilon_n)) = \sum\limits_n \varepsilon_n \nu(\{a\})$, и показать, что оно непрерывно.)

b) Вывести из a) и из упр. 9 b), что если μ есть произвольная положительная мера на T и A есть μ-интегрируемое подмножество из T, то множество значений меры $\mu(X)$, когда X пробегает множество μ-интегрируемых подмножеств из A, замкнуто в $\mathbf{R}$. Распространить этот результат на случай, когда μ есть произвольная действительная мера на T.

c) Вывести из упр. 9 b), что если μ есть рассеянная действительная мера на T, то множество значений меры $\mu(X) = \mu^+(X) - \mu^-(X)$, когда X пробегает множество $|\mu|$-интегрируемых подмножеств из T, составляет замкнутый интервал прямой $\mathbf{R}$ (не обязательно ограниченный).

d) Привести пример такой положительной атомической меры ν на локально компактном, но не компактном пространстве T, чтобы множество значений меры $\nu(X)$, где X пробегает множество ν-интегрируемых подмножеств из T, не было замкнутым взять ν так, чтобы $\inf\limits_{t \in T} \nu(\{t\}) > 0$).

11) Пусть μ и ν — две независимые положительные меры на T. Показать, что для любого числа p в пределах $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ топологическое векторное пространство $L^p(T, \mu + \nu)$ изоморфно произведению топологических векторных пространств $L^p(T, \mu)$ и $L^p(T, \nu)$.

12) a) Пусть $\mu \neq 0$ — рассеянная положительная мера на локально компактном пространстве T. Показать, что в $\mathscr{L}^1(T, \mu)$ существует такая последовательность функций f_n, что $N_1(f_n) = 1$ при любом n и что последовательность рассеянных мер $f_n \cdot \mu$ широко сходится к точечной мере ε_a. Вывести отсюда, что пространство $L^1(T, \mu)$ (а следовательно, и $L^\infty(T, \mu)$) не рефлексивно.

b) Пусть ν — положительная атомическая мера на T с бесконечным носителем. Пусть, далее, A — наименьшее множество, несущее ν, B — некоторое бесконечное счетное подмножество из A и λ — мера $\varphi_B \cdot \nu$. Показать, что пространство, сопряженное к $L^\infty(T, \mu)$, не является пространством счетного типа и потому не может быть изоморфным пространству $L^1(T, \lambda)$ (ср. Топ. вект. пр-ва, гл. I, § 2, упр. 8).

c) Вывести из a) и из b), что для того, чтобы положительная мера μ на локально компактном пространстве T обладала тем свойством, что $L^1(T, \mu)$ рефлексивно, необходимо и достаточно, чтобы она имела конечный носитель (использовать упр. 11).

°13) Пусть S — компактное стоуново пространство (гл. II, § 1, упр. 13f)); говорят, что положительная мера μ на S *нормальна*, если для любого возрастающего фильтрующегося семейства $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ непрерывных на S функций, мажорированного в $\mathscr{C}(S)$ и имеющего во вполне решеточном пространстве $\mathscr{C}(S)$ верхнюю грань f (верхняя грань может и не быть равной верхней огибающей семейства (f_α)), справедливо соотношение $\mu(f) = \sup_{\alpha\in A} \mu(f_\alpha)$. Говорят, что мера λ на S нормальна, если нормальны положительные меры λ^+ и λ^-.

a) Для того чтобы положительная мера μ на S была нормальна, необходимо и достаточно, чтобы всякое нигде не плотное множество A было μ-пренебрежимо (необходимость устанавливается при помощи рассмотрения содержащих A множеств, одновременно открытых и замкнутых в S; для доказательства достаточности заметим, что верхняя огибающая и верхняя грань в $\mathscr{C}(S)$ мажорированного возрастающего фильтрующегося семейства (f_α) равны между собой на дополнении некоторого тощего множества (ср. гл. II, § 1, упр. 13f)). Вывести отсюда, что носитель меры μ одновременно открыт и замкнут.

b) Пусть μ — положительная нормальная мера на S, f — числовая μ-измеримая функция и g — наибольшая полунепрерывная снизу на S функция, не превосходящая f. Показать, что f и g равны между собой почти всюду относительно μ (ср. гл. IV, § 5, упр. 14b)). Вывести отсюда, что для любого μ-измеримого подмножества A из S множества $A - \mathring{A}$ и $\overline{A} - A$ будут μ-пренебрежимы.

c) Показать, что в банаховом пространстве $\mathscr{M}(S)$ мер на S множество нормальных мер составляет замкнутое векторное подпространство, являющееся полосой по отношению к структуре вполне решеточного пространства $\mathscr{M}(S)$.

°14) Стоуново пространство H называется *гиперстоуновым*, если объединение носителей положительных нормальных мер на H (упр. 13) всюду плотно.

a) Пусть T — локально компактное пространство и μ — положительная мера на T. Показать, что существует такой изоморфизм $u \to \theta_u$ банахова пространства $L^\infty(T, \mu)$ на пространство $\mathscr{C}(H)$ непрерывных числовых функций на гиперстоуновом пространстве H, что $\theta_u^+ = \theta_{u^+}$ (ср. § 5, предл. 14 и гл. II, § 1, упр. 13).

b) Пусть H — компактное гиперстоуново пространство, и пусть $(\mu_\iota)_{\iota\in I}$ — такое семейство положительных нормальных мер на H, что объединение носителей мер μ^ι всюду плотно в H. Показать, что для того, чтобы множество было нигде не плотным в H, необходимо и достаточно, чтобы оно было μ_ι-пренебрежимым для любого $\iota \in I$ (заметить, что если A μ_ι-пренебрежимо, то это будет иметь место и для $\overline{A}$ (упр. 13b)). Вывести отсюда, что в гиперстоуновом пространстве всякое тощее множество является нигде не плотным.

c) В тех же предпосылках, что и в b), показать, что если f есть μ_ι-измеримая при любом $\iota \in I$ числовая функция, то существует такая непрерывная на H функция g, что f и g совпадают на дополнении некоторого нигде не плотного множества (использовать b) и упр. 13b)).

d) Пусть H — гиперстоуново пространство. Показать, что существует такое семейство $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ непустых одновременно открытых и замкнутых подмножеств из H, не имеющих попарно общих точек, что их объединение T всюду плотно в H и что при любом $\alpha \in A$ существует положительная нормальная мера μ_α на G_α с носителем G_α (применить теорему Цорна к множеству семейств положительных нормальных мер на H с попарно не пересекающимися носителями и использовать упр. 13a)). Пусть μ — мера на T и ее сужение на каждое из G_α равно μ_α (гл. III, § 3, предл. 1). Показать, что отображение, ставящее в соответствие всякой функции $f \in \mathscr{C}(H)$ класс в $L^\infty(T, \mu)$ ее сужения на T, есть изоморфизм банахова пространства $\mathscr{C}(H)$ на $L^\infty(T, \mu)$ (при помощи c) показать, что отображение сюръективно).

°15) Пусть T — локально компактное пространство, μ — положительная мера на T и (f_n) — последовательность функций из $\mathscr{L}^1(T, \mu)$; положим $\mu_n = f_n \cdot \mu$ и для любого μ-измеримого множества A

$$\mu_n(A) = \overset{+}{\mu_n}(A) - \overset{-}{\mu_n}(A) = \int\limits_A f_n \, d\mu.$$

a) Показать, что если T не компактно, то последовательность (f_n) может не быть ограниченной в $\mathscr{L}^1(T, \mu)$, в то время как последовательность интегралов $\int f_n g \, d\mu$ ограничена для любой функции $g \in \mathscr{K}(T)$.

b) Показать, что если последовательность $(\mu_n(A))$ ограничена для любого подмножества A из T, сводящегося к точке, и для любого открытого множества A, обладающего тем свойством, что мера, индуцированная мерой μ на границе множества A, имеет конечный носитель, то последовательность (f_n) ограничена в $\mathscr{L}^1$ или, что то же самое, последовательность норм $(\|\mu_n\|)$ ограничена. (Сначала надо показать, что всякая точка t_0 из T обладает такой открытой окрестностью U, что последовательность чисел $|\mu_n|(U)$ ограничена. Для этого следует рассуждать от противного, показав, что в случае невыполнения условия можно построить строго возрастающую последовательность целых чисел (n_k), убывающую последовательность (U_k) окрестностей точки t_0 и последовательность (W_k) квадрируемых относительно μ открытых множеств (гл. IV, § 5, упр. 13), обладающих следующими свойствами:

$$\overline{U}_k \subset U_{k-1},\ \mu(U_k - \{t_0\}) \leqslant \frac{1}{k},\ |\mu_{n_i}|(U_k - \{t_0\}) \leqslant 1 \quad \text{при} \quad i < k,$$

$$\overline{W}_k \subset U_k - \overline{U}_{k+1} \quad \text{и} \quad |\mu_{n_k}(W_k)| > k + \sum_{i<k} |\mu_{n_k}(W_i)|.$$

Наконец, для того чтобы получить противоречие, надо рассмотреть объединение W множеств W_k («метод скользящего горба»). Затем при помощи аналогичных рассуждений показать, что существует такое компактное подмножество K из T, что последовательность мер $|\mu_n|(T - K)$ ограничена.)

c) Вывести из b), что если последовательность $(\mu_n(A))$ ограничена для любого открытого множества A из T, то последовательность (f_n) ограничена в $\mathscr{L}^1$.

d) Если на интервале $[0, 1]$ взять в качестве μ_n меру, определенную при помощи массы n в точке $t = 0$ и массы $-n$ в точке $t = \frac{1}{n}$, то последовательность $(\mu_n(A))$ будет ограничена для любого открытого множества A, квадрируемого относительно всех мер $|\mu_n|$, в то время как последовательность норм $\|\mu_n\|$ будет неограниченной. Точно так же, если в качестве μ_n взять меру, определенную при помощи массы n в точке $t = \frac{1}{n}$ и массы $-n$ в точке $t = \frac{1}{n+1}$, то последовательность $(\mu_n(A))$ ограничена для любого интервала, содержащегося в $[0, 1]$ (и, значит, для любого конечного подмножества A), без того, чтобы последовательность норм $(\|\mu_n\|)$ была ограниченной.

16) Пусть θ — линейная форма на пространстве $\mathscr{L}^\infty(T, \mu)$; для того чтобы θ была формой вида $f \to \int fg\,d\mu$, где $g \in \mathscr{L}^1(T, \mu)$, необходимо и достаточно, чтобы θ удовлетворяла следующим условиям: 1° сужение θ на $\mathscr{K}(T)$ — мера; 2° для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что соотношение $\mu^*(A) \leqslant \delta$ влечет $|\theta(h)| \leqslant \varepsilon$ для любой μ-измеримой функции h, удовлетворяющей условию $|h| \leqslant \varphi_A$; 3° для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое компактное множество K, что для всякого μ-интегрируемого множества $B \subset T - K$ выполняется неравенство $|\theta(\varphi_B)| \leqslant \varepsilon$. (Воспользоваться теоремой Лебега — Никодима.)

°17) Пусть H — подмножество пространства $\mathscr{L}^1(T, \mu)$ и $\widetilde{H}$ — его канонический образ в банаховом пространстве $L^1(T, \mu)$. Доказать эквивалентность следующих условий:

α) Выполняется совокупность двух условий: α_1) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое компактное множество $L \subset T$, что $\int\limits_{T-L} |f| \, d\mu \leqslant \varepsilon$ для любой функции $f \in H$; α_2) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta > 0$, что для всякого открытого множества U из T, для которого $\mu^*(U) \leqslant \eta$, выполняется неравенство $\int\limits_U |f| \, d\mu \leqslant \varepsilon$ для любой функции $f \in H$.

β) Выполняется совокупность двух условий α_1) и β_2): для любого компактного множества $K \subset T$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такая открытая окрестность U множества K, что $\int\limits_{U-K} |f| \, d\mu \leqslant \varepsilon$ для любой функции $f \in H$.

γ) Для любой последовательности (g_n) функций из $\mathscr{L}^\infty$, равномерно ограниченной и сходящейся по мере (гл. IV, § 6, упр. 11) к функции g, равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \int f g_n \, d\mu = \int f g \, d\mu$ выполняется *равномерно*, когда f пробегает H.

δ) Для любой последовательности (h_n) непрерывных на T функций, стремящихся к 0 в бесконечно удаленной точке, равномерно ограниченной и такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} h_n(t) = 0$ при любом $t \in T$, равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \int f h_n \, d\mu = 0$ выполняется *равномерно*, когда f пробегает H.

ζ) Для любой бесконечной последовательности (U_n) не пересекающихся открытых множеств из T равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{U_n} f \, d\mu =$ выполняется *равномерно*, когда f пробегает H.

(Для доказательства того, что ζ) влечет β), а β) влечет α), использовать «метод скользящего горба» точно так же, как это сделано в упр. 15b). Затем доказать, что α) влечет γ), γ) влечет δ) и δ) влечет ζ).)

Если, кроме того, предположить, что для любого $t \in T$, при котором $\mu(\{t\}) \neq 0$, множество функций $f(t)$ *ограничено* в $\mathbf{R}$, когда f пробегает H, то показать, что предыдущие условия эквивалентны следующему условию:

θ) $\widetilde{H}$ есть относительно компактное подмножество из L^1 в ослабленной топологии $\sigma(L^1, L^\infty)$.

(Чтобы показать, что θ) влечет β), рассуждать от противного используя теорему Шмульяна (Топ. вект. пр-ва, гл. IV, § 2, упр. 13) и «метод скользящего горба». Чтобы показать, что α) влечет θ), показать, что H ограничено в $\mathscr{L}^1$, а затем применить теорему Эберлейна (Топ. вект. пр-ва, гл. IV, § 2, упр. 15) и воспользоваться упр. 16.)

°18) a) Пусть (f_n) — последовательность функций из $\mathscr{L}^1(T, \mu)$. Показать эквивалентность следующих условий:

α) Последовательность $(\widetilde{f}_n)$ сходится в L^1 в ослабленной топологии $\sigma(L^1, L^\infty)$.

β) Множество функций $\widetilde{f}_n$ относительно компактно в L^1 в ослабленной топологии, и последовательность мер $f_n \cdot \mu$ широко сходится в $\mathscr{M}(T)$.

γ) Для любого открытого подмножества U из T последовательность чисел $\int\limits_U f_n\, d\mu$ сходится в $\mathbf{R}$.

(Чтобы показать, что β) влечет α), использовать критерий α) из упр. 17 и определение измеримой функции. Чтобы показать, что γ) влечет β), рассмотреть вначале частный случай пространства $L^1(\mathbf{N})$ (дискретная мера, определенная при помощи массы $+1$ в каждой точке), воспользовавшись упр. 4 из кн. «Топ. вект. пр-ва», гл. IV, § 5. В общем же случае применить критерий ζ) из упр. 17, чтобы свести его к случаю $L^1(\mathbf{N})$, сопоставив каждой функции f_n суммируемую последовательность $\left(\int\limits_{U_m} f_n\, d\mu\right)_{m \in \mathbf{N}}$.)

b) Вывести из этих результатов, что в L^1 всякая последовательность Коши относительно ослабленной топологии сходится в этой топологии.

c) Пусть μ есть мера Лебега на интервале $T = [0, 1]$, и пусть для любого целого $n \geqslant 1$ μ_n есть мера, определенная при помощи массы $\frac{1}{n}$ в каждой точке $\frac{k}{n}$ $(0 \leqslant k < n)$; пусть, далее, ν — такая положительная мера на T, что $\mu = g \cdot \nu$, $\mu_n = f_n \cdot \nu$ (упр. 4b)). Показать, что $\mu_n(A)$ стремится к $\mu(A)$ для любого конечного подмножества A из T и любого открытого множества A, для которого мера, индуцированная на его границе мерой ν, имеет конечный носитель, а для произвольных открытых множеств $U \subset T$ это не имеет места (ср. упр. 15b)).

19) a) Пусть μ — мера Лебега на интервале $T = [0, +\infty]$. Показать, что если $1 \leqslant r < s < +\infty$, то топологии, индуцируемые в $L^r \cap L^s$ ослабленными топологиями из L^r и L^s, не будут сравнимы (ср. гл. IV, § 6, упр. 8). Показать, что если f_n — характеристическая функция интервала $[n, n+1]$, то последовательность $(\widetilde{f}_n)$ стремится к 0 в ослабленной топологии всех L^p при $p > 1$, но для ослабленной топологии пространства L^1 это не выполняется.

b) Пусть μ — мера Лебега на интервале $T = [0, 1]$. Показать, что если $r < s$, то ослабленная топология пространства L^s будет строго более сильной, чем топология, индуцируемая в L^s ослабленной топологией из L^r (ср. гл. IV, § 6, упр. 8).

c) Пусть μ — положительная атомическая мера на локально компактном пространстве. Показать, что если $1 \leqslant r < s < +\infty$, то ослабленная топология пространства L^r будет строго более сильной, чем топология, индуцируемая в L^r ослабленной топологией из L^s (гл. IV, § 6, упр. 9).

20) Пусть A — множество, содержащееся в $L^r \cap L^s$ и ограниченное одновременно и в L^r, и в L^s $(1 < r < s < +\infty)$. Показать, что для любого p в пределах $r \leqslant p \leqslant s$ множество A ограничено в L^p и что топологии, индуцируемые в A ослабленной топологией из пространств L^p, совпадают между собой (заметить, что $\widetilde{\mathcal{K}}(T)$ плотно во всех пространствах L^q при $1 \leqslant q < +\infty$). Показать, что при $r = 1$ указанное свойство перестает выполняться (ср. упр. 19a)).

°21) a) Показать, что если μ есть положительная мера на T и F есть банахово пространство, то пространство $\mathcal{L}_F(T, \mu)$ измеримых отображений пространства T в F, наделенное топологией сходимости по мере (гл. IV, § 6, упр. 11), полно (использовать тот факт, что это свойство справедливо, когда T компактно (гл. IV, § 6, упр. 11), и предл. 4 и 5 из § 1, n° 4).

b) Пусть (f_n) — последовательность функций из $\mathcal{L}^p$ $(1 < p < +\infty)$, ограниченная в $\mathcal{L}^p$ и сходящаяся по мере к 0. Показать, что последовательность $(\widetilde{f}_n)$ сходится к 0 в L^p в ослабленной топологии.

c) Указать пример последовательности (f_n) функций из $\mathcal{L}^1$, ограниченной в $\mathcal{L}^1$, сходящейся по мере к 0 и такой, чтобы последовательность $(\widetilde{f}_n)$ не сходилась к 0 в ослабленной топологии пространства L^1 (взять в качестве μ меру Лебега на $T = [0, 1]$ и воспользоваться критерием α) из упр. 17).

d) Пусть μ — мера Лебега на $T = [0, 1]$. Показать, что если $f_n(t) = \sin nt$, то последовательность $(\widetilde{f}_n)$ сходится к 0 в ослабленной топологии всех пространств L^p, где $1 \leqslant p < +\infty$, но не сходится к 0 по мере.

22) a) Пусть (f_n) — такая последовательность функций из $\mathcal{L}^1$, что: 1° последовательность (f_n) сходится к 0 по мере (гл. IV, § 6, упр. 11); 2° для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta > 0$, что соотношение $\mu^*(A) \leqslant \eta$ влечет $\limsup\limits_{n\to\infty} \int_A^* |f_n|\, d\mu \leqslant \varepsilon$; 3° для любого $\varepsilon > 0$ существует такое интегрируемое множество B, что $\int_{T-B} |f_n|\, d\mu \leqslant \varepsilon$ при любом n. Показать, что последовательность (f_n) сходится к 0 в среднем.

b) Пусть μ — мера Лебега на $T = [0, 1]$. Для $1 < p < +\infty$ через f_n обозначим функцию, равную $n^{\frac{2}{p}}$ на интервале $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ и 0 вне его. Показать, что последовательность (f_n) удовлетворяет трем условиям из a) и что последовательность $(\widetilde{f}_n)$ сходится к 0 в ослабленной топологии пространства L^p, но это не будет выполняться в топологии сходимости в среднем порядка p.

°23) a) Пусть (f_n) — такая последовательность функций из $\mathscr{L}^1$, что: 1° $\liminf_{n\to\infty} f_n(t) \geqslant 0$ почти всюду на T; 2° для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta > 0$, что соотношение $\mu^*(A) \leqslant \eta$ влечет $\limsup_{n\to\infty} \int_A^* |f_n|\, d\mu \leqslant \varepsilon$; 3° для любого $\varepsilon > 0$ существует такое интегрируемое множество B, что $\int_{T-B} |f_n|\, d\mu \leqslant \varepsilon$ при любом n; 4° $\lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu = 0$. Показать, что последовательность (f_n) сходится к 0 в среднем. (Заметить, что если для любого $\varepsilon > 0$ через C_m обозначить множество тех $t \in T$, в которых $f_n(t) \geqslant -\varepsilon$ хотя бы при одном $n \geqslant m$, то последовательность (C_m) убывает и имеет пренебрежимое пересечение.)

b) Пусть (f_n) — такая последовательность функций из $\mathscr{L}^1$, что: 1° существует такая интегрируемая функция g, что $f_n \geqslant g$ при любом n; 2° $\liminf_{n\to\infty} f_n(t) \geqslant 0$ почти всюду; 3° $\limsup_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu \leqslant 0$. Показать, что последовательность (f_n) сходится к 0 в среднем. (Вначале показать, что для любого измеримого множества A выполняется неравенство $\liminf_{n\to\infty} \int_A f_n\, d\mu \geqslant 0$; затем заметить, что для любого измеримого множества A

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu \geqslant \limsup_{n\to\infty} \int_A f_n\, d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_{T-A} f_n\, d\mu.\Big)$$

°24) Пусть в банаховом пространстве $E = \mathscr{M}^1(T)$ ограниченных мер на локально компактном пространстве T через H обозначено множество, компактное в ослабленной топологии.

a) Показать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такая положительная мера μ_ε на T, что всякая мера $\nu \in H$ является суммой меры с базисом μ_ε и меры λ, независимой с μ_ε и имеющей норму $\leqslant \varepsilon$. (Использовать тот факт, что пространство E, наделенное своей нормой и своей структурой порядка, изоморфно пространству $L^1(S, \rho)$, где S есть объединение компактных стоуновых пространств, а ρ есть положительная мера на S (гл. IV, § 4, упр. 10), и применить в $L^1(S, \rho)$ критерий α_1) из упр. 17.)

b) Вывести из а) что на T существует такая положительная мера μ, что все меры $\nu \in H$ будут мерами с базисом μ (использовать упр. 4b)).

25) Пусть μ — положительная мера на локально компактном пространстве T, p — число в пределах $1 \leqslant p < +\infty$ и q — сопряженный к нему показатель. Показать, что если g есть такая конеч-

ная измеримая функция, что для любой функции $f \in \mathcal{L}^p$ функция fg интегрируема, то g локально почти всюду равна некоторой функции из $\mathcal{L}^q$. (Показать, что отображение $f \to fg$ пространства $\mathcal{L}^p$ в $\mathcal{L}^1$ непрерывно, используя для этого теорему о замкнутом графике (Топ. вект. пр-ва, гл. I, § 3, следствие 5 из теоремы 1).)

26) Пусть p и q — два сопряженных показателя. Показать, что если B (соотв. C) есть ограниченное подмножество из L^p (соотв. L^q), то отображение произведения $B \times C$ в L^1, полученное из $(f, g) \to fg$ факторизацией, не обязано быть непрерывным, если L^p, L^q и L^1 наделены соответственно топологиями $\sigma(L^p, L^q)$, $\sigma(L^q, L^p)$ и $\sigma(L^1, L^\infty)$ (ср. упр. 21d)).

°27) a) Пусть u и v — произвольные действительные числа и $1 < p < +\infty$. Доказать неравенство

$$|u+v|^p \leqslant |u|^p + pvu|u|^{p-2} + a\sum_{r=2}^{[p]} |v|^r |u|^{p-r} + b|v|^p,$$

где a и b — постоянные, зависящие только от p, а $[p]$ есть целая часть p (Функции действ. перем., гл. III, § 2, упр. 6).

b) Пусть $(\tilde{f}_n)$ — последовательность, сходящаяся к 0 в L^p в ослабленной топологии ($1 < p < +\infty$). Показать, что существует такая подпоследовательность (f_{n_k}) последовательности (f_n), что если положить $s_m = \sum_{k=1}^{m} f_{n_k}$, то

$$\left| \int s_{m-1} |s_{m-1}|^{p-2} f_{n_m} \, d\mu \right| \leqslant 1$$

(определить последовательность (n_k) по индукции). Отсюда, используя a) и неравенство Гёльдера, вывести, что если $p > 2$, то найдутся такие две постоянные a и b, что

$$N_1(|s_n|^p) \leqslant N_1(|s_{n-1}|^p) + a + bN_1(|s_{n-1}|^{p-2}),$$

и что если $1 < p \leqslant 2$, то найдется такая постоянная c, что

$$N_1(|s_m|^p) \leqslant N_1(|s_{n-1}|^p) + c.$$

В итоге получить, что

$$N_p(s_n) = O\left(n^{\frac{1}{2}}\right) \quad \text{для } p > 2,$$

$$N_p(s_n) = O\left(n^{\frac{1}{p}}\right) \quad \text{для } 1 \leqslant p \leqslant 2.$$

c) Показать, что полученные выше результаты в общем случае не могут быть улучшены (ср. упр. 21d) и 22b)).

°28) Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_m$ — конечное число мер на локально компактном пространстве T, записываемых в виде $\mu_k = f_k \cdot \mu$, где μ — положительная мера, а $|f_k| \leqslant 1$ (n° 9).

a) Пусть Φ — множество функций, определенных и положительно однородных на $\mathbf{R}^m$ и таких, что $u(f_1, \ldots, f_m)$ локально μ-интегрируема для любой функции $u \in \Phi$. Показать, что если последовательность (u_n) функций из Φ равномерно сходится на любом компактном подмножестве из $\mathbf{R}^m$ к некоторой функции u, то $u(\mu_1, \ldots, \mu_m)$ является пределом мер $u_n(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ в сильной топологии в $\mathscr{M}(T)$ (гл. III, § 2, упр. 4).

b) Предположим, что функция $u \in \Phi$ непрерывна на $\mathbf{R}^m$. Показать, что отображение $(\mu_1, \ldots, \mu_m) \to u(\mu_1, \ldots, \mu_m)$ пространства $(\mathscr{M}(T))^m$ в $\mathscr{M}(T)$ непрерывно в сильной топологии (начать с рассмотрения случая, когда u — липшицева функция; затем воспользоваться a) и теоремой Вейерштрасса — Стоуна).

c) Предположим, что функция u непрерывна на $\mathbf{R}^m$. Пусть g — произвольная функция из $\mathscr{K}(T)$ и K — ее носитель. Показать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное открытое покрытие (A_i) множества K, состоящее из относительно компактных множеств и такое, что для любого более мелкого, чем (A_i), конечного открытого покрытия (B_j) множества K и любого семейства (h_j) непрерывных отображений пространства T в $[0, 1]$, имеющих носитель в B_j и удовлетворяющих на K равенству $\sum_j h_j(t) = 1$, выполняется неравенство

$$\left| \int g \cdot u(f_1, \ldots, f_m)\, d\mu - \sum_j u\left(\int g h_j f_1\, d\mu, \ldots, \int g h_j f_m\, d\mu \right) \right| \leqslant \varepsilon$$

(рассмотреть сначала случай, когда u — липшицева функция и f_k непрерывны, а затем перейти к случаю, когда u — липшицева функция, а f_k локально интегрируемы, и, наконец, к общему случаю, используя для этого теорему Вейерштрасса — Стоуна).

d) Пусть $u(x_1, x_2)$ — положительно однородная функция на $\mathbf{R}^2$, равная $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, когда дробь $\frac{x_1}{x_2}$ иррациональна, и 0 в противном случае. Пусть, далее, μ есть мера Лебега на $T = [0, 1]$, и пусть ν есть мера на T, определенная равенством $d\nu(t) = t\, d\mu(t)$. Показать, что если $g \geqslant 0$ есть непрерывная функция на T, то

$$\sum_j u\left(\int g h_j\, d\mu, \int g h_j\, d\nu \right)$$

не стремится ни к какому пределу по фильтрующемуся множеству конечных открытых покрытий носителя функции g.

§ 6. Образы меры

1. *Образ положительной меры*

Пусть X — локально компактное пространство и π есть μ-*измеримое* отображение пространства T в X. Таким образом, утверждение, что пара $(\pi, 1)$ μ-*приспособлена* (§ 4, n° 1), равносильно утверждению, что для любой функции $f \in \mathscr{K}(X)$ функция $f \circ \pi$ *существенно μ-интегрируема.*

Предложение 1. *Пусть π есть μ-измеримое отображение пространства T в локально компактное пространство X. Следующие два условия эквивалентны:*

a) *для любой функции $f \in \mathscr{K}(T)$ функция $f \circ \pi$ существенно μ-интегрируема;*

b) *для любого компактного множества $K \subset X$ множество $\overset{-1}{\pi}(K)$ существенно μ-интегрируемо.*

Как мы только что заметили, a) влечет за собой, что пара $(\pi, 1)$ μ-приспособлена. Следовательно (§ 4, n° 4, теорема 2), для любого компактного множества $K \subset X$ функция $\varphi_K \circ \pi = \varphi_A$, где $A = \overset{-1}{\pi}(K)$, существенно инегрируема, или, другими словами, a) влечет b).

Обратно, предположим, что множество $\overset{-1}{\pi}(K)$ существенно μ-интегрируемо для любого компактного подмножества K из X, и покажем, что выполняется условие a). Действительно, пусть S есть носитель функции f; так как множество S компактно, то, положив $A = \overset{-1}{\pi}(S)$, получаем, по условию, что

$$\overline{\int}^* |f(\pi(t))|\, d\mu(t) \leqslant \|f\| \overline{\int}^* \varphi_S(\pi(t))\, d\mu(t) =$$

$$= \|f\| \overline{\int}^* \varphi_A(t)\, d\mu(t) < +\infty.$$

А поскольку функция $f \circ \pi$ μ-измерима (гл. IV, § 5, n° 3, теорема 1), то очевидно, что $f \circ \pi$ существенно μ-интегрируема (§ 2, предл. 7).

Определение 1. *Пусть μ — положительная мера на локально компактном пространстве T. Отображение π пространства T в локально компактное пространство X называется μ-собственным* (или *собственным относительно меры μ*), *если пара* $(\pi, 1)$ *μ-приспособлена, то есть* (§ 4, n° 1) *если π μ-измеримо и удовлетворяет двум (эквивалентным) условиям* a) *и* b) *из предложения* 1. *Тогда мера $\int \varepsilon_{\pi(t)}\, d\mu(t)$ на X называется образом меры μ при отображении π и обозначается $\pi(\mu)$.*

Следовательно, если $\nu = \pi(\mu)$, то, по определению, для $f \in \mathscr{K}(X)$ справедлива формула

$$\int f(x)\,d\nu(x) = \int f(\pi(t))\,d\mu(t). \tag{1}$$

Замечания. 1) Если μ *ограничена* (и, в частности, если μ имеет компактный носитель), то всякое μ-измеримое отображение пространства T в X является μ-собственным (гл. IV, § 5, n° 3, теорема 1 и n° 6, теорема 5).

2) Если отображение π μ-измеримо и если для любого компактного подмножества K из X множество $\overset{-1}{\pi}(K)$ относительно компактно, то π будет μ-собственным (гл. IV, § 5, n° 5, предл. 8 и n° 6, теорема 5); в частности, всякое непрерывное *собственное* отображение пространства T в X (Общая топ., Рез., § 8, n° 18) является μ-собственным относительно любой положительной меры μ на T. В частности, это верно для любого *гомеоморфизма* π пространства T на X; тогда мера $\nu = \pi(\mu)$ есть не что иное, как мера на X, являющаяся результатом перенесения меры μ при отображении π (гл. III, § 2, n° 2).

3) Предположим, что топология пространства X имеет *счетный базис*; тогда всякое отображение π пространства T в X, удовлетворяющее условию b) предложения 1, μ-измеримо, и значит, μ-собственно. Для того чтобы это показать, достаточно применить теорему 4 из гл. IV, § 5, n° 5, заметив, что в этом случае X метризуемо (Общая топ., Рез., § 8, n° 19) и что для любого расстояния, согласующегося с топологией в X, всякий замкнутый шар является счетным объединением компактных множеств.

2. *Интегрирование относительно образа положительной меры*

Пусть π есть μ-собственное отображение пространства T в X, и пусть $\nu = \pi(\mu)$. Применив результаты § 4, получим следующие утверждения:

Предложение 2. *Для любой определенной на X числовой функции $f \geqslant 0$ справедлива формула*

$$\overline{\int}^* f(x)\,d\nu(x) = \overline{\int}^* f(\pi(t))\,d\mu(t). \tag{2}$$

Это вытекает из теоремы 1 § 4, n° 2.

Следствие 1. *Для любого подмножества A из X имеем* $\bar{\nu}^*(A) = \bar{\mu}^*(\overset{-1}{\pi}(A))$.

Следствие 2. *Для того чтобы подмножество A из X было локально пренебрежимо относительно ν, необходимо и достаточно, чтобы множество $\overset{-1}{\pi}(A)$ было локально пренебрежимо относительно μ.*

Следствие 3. *Если мера μ сосредоточена на множестве M, то $\pi(\mu)$ сосредоточена на $\pi(M)$.*

Действительно, если $N = X - \pi(M)$, то $\overset{-1}{\pi}(N)$ не пересекается с M и, значит, локально μ-пренебрежимо, а стало быть (следствие 2), N локально ν-пренебрежимо.

Следствие 4. *Пусть S — носитель меры μ. Если функция π* непрерывна, *то носитель меры $\pi(\mu)$ равен $\overline{\pi(S)}$.*

В самом деле, из следствия 3 получаем, что $\pi(\mu)$ сосредоточена на $\pi(S)$, и значит, если S' — носитель меры $\pi(\mu)$, то $S' \subset \overline{\pi(S)}$. С другой стороны, $\overset{-1}{\pi}(X - S')$ есть открытое локально μ-пренебрежимое множество (следствие 2) и, стало быть, μ-пренебрежимо (гл. IV, § 5, n° 2, следствие 2 из предл. 5). Таким образом, $\overset{-1}{\pi}(X - S') \subset T - S$, и следовательно, $\pi(S) \subset S'$, что и доказывает наше следствие.

Предложение 3. *Для того чтобы отображение f пространства X в топологическое пространство G было ν-измеримо, необходимо и достаточно, чтобы отображение $f \circ \pi$ было μ-измеримо.*

Это вытекает непосредственно из предложения 3 § 4.

Следствие. *Для того чтобы подмножество A из X было ν-измеримо, необходимо и достаточно, чтобы $\overset{-1}{\pi}(A)$ было μ-измеримо.*

Напротив, образ при отображении π некоторого μ-измеримого подмножества M из T может и не быть ν-измеримым, даже если π непрерывно, а M μ-пренебрежимо (упр. 7 и § 8, упр. 1).

Теорема 1. *Пусть $\mathbf{f}$ — функция, определенная на X и принимающая значения в $\overline{\mathbf{R}}$ или в банаховом пространстве F. Для того* *чтобы* $\mathbf{f}$ *была существенно* ν*-интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы функция* $\mathbf{f}\circ\pi$ *была существенно* μ*-интегрируема, и тогда*

$$\int \mathbf{f}(x)\,d\nu(x)=\int \mathbf{f}(\pi(t))\,d\mu(t). \tag{3}$$

Достаточно применить теорему 2 из § 4.

Следствие. *Для того чтобы подмножество* A *из* X *было существенно* ν*-интегрируемо, необходимо и достаточно, чтобы множество* $\overset{-1}{\pi}(A)$ *было существенно* μ*-интегрируемо, и тогда* $\nu(A)=$ $=\mu(\overset{-1}{\pi}(A))$.

В частности, для любого компактного множества $K\subset X$ имеем $\nu(K)=\mu(\overset{-1}{\pi}(K))$. Из следствия 3 предложения 2 вытекает, что если μ — *атомическая* мера (§ 5, n° 10), то такой же будет и $\pi(\mu)=\nu$. Действительно, пусть M — множество тех $t\in T$, для которых $\mu(\{t\})\neq 0$; так как μ сосредоточена на M, то ν сосредоточена на $\pi(M)$; кроме того, для любого $x\in\pi(M)$ имеем $\nu(\{x\})=$ $=\mu(\overset{-1}{\pi}(x))>0$, поскольку $\overset{-1}{\pi}(x)$ содержит хотя бы одну точку из M.

3. Свойства образа положительной меры

Предложение 4. *Пусть* T, T' *и* T'' *— три локально компактных пространства,* μ *— положительная мера на* T *и* π *есть* μ*-собственное отображение* T *в* T'. *Пусть, далее,* $\mu'=\pi(\mu)$, π' *— отображение* T' *в* T'' *и* $\pi''=\pi'\circ\pi$. *Для того чтобы отображение* π' *было* μ'*-собственным, необходимо и достаточно, чтобы* π'' *было* μ*-собственным, и тогда* $\pi''(\mu)=\pi'(\pi(\mu))$ («транзитивность образа меры»).

В самом деле (предл. 3), для того чтобы π'' было μ-измеримо, необходимо и достаточно, чтобы π' было μ'-измеримо. С другой стороны, если K есть компактное подмножество из T'', то $\overset{-1}{\pi''}(K)=$ $=\overset{-1}{\pi}(\overset{-1}{\pi'}(K))$; согласно следствию из теоремы 1, для того чтобы $\overset{-1}{\pi''}(K)$ было существенно μ-интегрируемо, необходимо и достаточно, чтобы $\overset{-1}{\pi'}(K)$ было существенно μ'-интегрируемо. И наконец, если π'' μ-собственно, то, положив $\mu'' = \pi''(\mu)$, получим, в силу теоремы 1, для любой функции $f \in \mathcal{K}(T'')$ соотношения

$$\int f(t'')\,d\mu''(t'') = \int f(\pi''(t))\,d\mu(t) =$$

$$= \int f(\pi'(\pi(t)))\,d\mu(t) = \int f(\pi'(t'))\,d\mu'(t'),$$

что и завершает доказательство.

Следствие. *Пусть T и T' — два локально компактных пространства, μ — положительная мера на T, π — взаимно однозначное отображение T на T' и $\overset{-1}{\pi}$ — обратное к нему отображение. Предположим, что π μ-собственно и $\mu' = \pi(\mu)$. Тогда отображение $\overset{-1}{\pi}$ μ-собственно и $\overset{-1}{\pi}(\pi(\mu)) = \mu$.*

Предложение 5. *Пусть T и X — два локально компактных пространства, μ — положительная мера на T, π — μ-собственное отображение пространства T в X и $g \geqslant 0$ — конечная числовая функция, определенная на X и такая, что функция $g \circ \pi$ локально интегрируема относительно μ. Для того чтобы g была локально интегрируемой относительно $\pi(\mu)$, необходимо и достаточно, чтобы отображение π было собственным относительно меры $(g \circ \pi) \cdot \mu$, и тогда*

$$\pi((g \circ \pi) \cdot \mu) = g \cdot \pi(\mu). \tag{4}$$

Положим $\nu = \pi(\mu)$. Для того чтобы g была локально ν-интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы функция gf была ν-интегрируема для любой функции $f \in \mathcal{K}(X)$; а поскольку gf имеет компактный носитель, то это сводится к тому, что gf существенно ν-интегрируема, что эквивалентно утверждению, что $(g \circ \pi)(f \circ \pi)$ существенно μ-интегрируема (теорема 1). Но, в силу теоремы 1 из § 5, n° 3, это означает, что функция $f \circ \pi$ существенно интегрируема относительно $\rho = (g \circ \pi) \cdot \mu$, и, по определению, это равносильно тому, что отображение π ρ-собственно (поскольку π, очевидно, ρ-измеримо). Кроме того,

$$\int fg\,d\nu = \int f(\pi(t))\,g(\pi(t))\,d\mu(t) = \int f(\pi(t))\,d\rho(t)$$

(теорема 1 и § 5, теорема 1), что и доказывает (4).

Предложение 6. *Пусть T и X — два локально компактных пространства, $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in A}$ — суммируемое семейство положительных мер на T (§ 3, n° 5) и $\mu=\sum\limits_{\alpha\in A}\lambda_\alpha$. Для того чтобы отображение π пространства T в X было μ-собственным, необходимо и достаточно, чтобы оно было λ_α-собственным при любом $\alpha\in A$ и чтобы для любого компактного подмножества K из X выполнялось условие $\sum\limits_{\alpha\in A}\lambda_\alpha(\overset{-1}{\pi}(K))<+\infty$. При этих условиях семейство положительных мер $(\pi(\lambda_\alpha))_{\alpha\in A}$ на X суммируемо и*

$$\sum_{\alpha\in A}\pi(\lambda_\alpha)=\pi\Big(\sum_{\alpha\in A}\lambda_\alpha\Big). \tag{5}$$

В самом деле, для того чтобы отображение π было μ-измеримо, необходимо и достаточно, чтобы π было λ_α-измеримо при любом $\alpha\in A$ (§ 3, n° 5, предл. 6). Если же π μ-собственно, то π λ_α-измеримо при любом $\alpha\in A$ и, кроме того, для любого компактного подмножества K из X множество $\overset{-1}{\pi}(K)$ существенно λ_α-интегрируемо при любом $\alpha\in A$ и (§ 3, n° 5, предл. 5)

$$\mu(\overset{-1}{\pi}(K))=\sum_{\alpha\in A}\lambda_\alpha(\overset{-1}{\pi}(K)), \tag{6}$$

и значит, π λ_α-собственно при любом $\alpha\in A$; кроме того, если учесть формулу (14) из § 3, то меры, фигурирующие в обеих частях формулы (5), имеют, в силу (6), одинаковое значение для любого компактного подмножества K из X и, следовательно, совпадают (гл. IV, § 4, n° 9, следствие из предл. 16). Обратно, если π λ_α-собственно при любом $\alpha\in A$ и если для любого компактного подмножества K из X выполняется условие $\sum\limits_{\alpha\in A}\lambda_\alpha(\overset{-1}{\pi}(K))<+\infty$, то множество $\overset{-1}{\pi}(K)$ существенно μ-интегрируемо: действительно, достаточно показать, что $\sup\limits_H\mu(H\cap\overset{-1}{\pi}(K))<+\infty$, когда H пробегает множество компактных подмножеств из T; но $\mu(H\cap\overset{-1}{\pi}(K))=\sum\limits_{\alpha\in A}\lambda_\alpha(H\cap\overset{-1}{\pi}(K))\leqslant\sum\limits_{\alpha\in A}\lambda_\alpha(\overset{-1}{\pi}(K))$ (§ 3, n° 5, формула (13)), откуда и вытекает наше утверждение. Отсюда следует, что π μ-собственно.

Следствие. *Пусть T и X — два локально компактных пространства, $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ — конечная последовательность положительных мер на T и $\mu=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$. Для того чтобы отображение π пространства T в X было μ-собственным, необходимо и достаточно, чтобы оно было λ_i-собственным для каждого индекса i, и тогда имеем*

$$\sum_{i=1}^{n}\pi(\lambda_i)=\pi\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\Big). \tag{7}$$

4. Образ меры произвольного знака

Определение 2. *Пусть λ — мера на локально компактном пространстве T. Отображение π пространства T в локально компактное пространство X называется λ-собственным, если оно $|\lambda|$-собственно; тогда мера $\pi(\lambda^+)-\pi(\lambda^-)$ на X называется образом меры λ при отображении π и обозначается $\pi(\lambda)$* (ср. упр. 11).

Это сводится к тому, что мера-образ $\nu=\pi(\lambda)$ характеризуется уравнением

$$\int f(x)\,d\nu(x)=\int f(\pi(t))\,d\lambda^+(t)-\int f(\pi(t))\,d\lambda^-(t) \tag{8}$$

для любой функции $f\in\mathscr{K}(X)$.

Вообще, предположим, что $\lambda=\rho-\sigma$, где ρ и σ — две положительные меры на T; если π одновременно ρ-собственно и σ-собственно, то из следствия предложения 6 вытекает, что π λ-собственно, ибо $|\lambda|\leqslant\rho+\sigma$; а так как $\lambda^+ +\sigma=\lambda^- +\rho$, то отсюда заключаем, что

$$\int f(x)\,d\nu(x)=\int f(\pi(t))\,d\rho(t)-\int f(\pi(t))\,d\sigma(t) \tag{9}$$

для любой функции $f\in\mathscr{K}(X)$.

Если π λ-собственно, то $\pi(|\lambda|)=\pi(\lambda^+)+\pi(\lambda^-)$, и следовательно,

$$|\pi(\lambda)|\leqslant\pi(|\lambda|). \tag{10}$$

Отметим, что в общем случае две части (10) не будут равны: возьмем, например, $T=\{0, 1\}$, $X=\{0\}$, а через π обозначим постоянное отображение T в X, равное 0. Если λ есть точечная мера $\varepsilon_0-\varepsilon_1$, то $\pi(\lambda)=0$, но $\pi(|\lambda|)=2\varepsilon_0$.

Пусть $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ — конечная последовательность мер на T и $\lambda=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$. Если отображение π λ_i-собственно для любого индекса i, то из (9) и из следствия предложения 6 вытекает, что π λ-собственно и что снова выполняется соотношение (7).

Ясно, что всякое непрерывное собственное отображение пространства T в X λ-собственно относительно любой меры λ на T (n° 1, замечание 2).

5. *Приложение: замена переменного в интеграле Лебега*

Пусть I — (не обязательно ограниченный) интервал прямой $\mathbf{R}$, a — его левый, а b — правый конец в $\overline{\mathbf{R}}$ и μ — мера Лебега на I. Для любой μ-интегрируемой функции $\mathbf{f}$ и любого интервала $H\subset I$ с левым концом α и правым концом β будем писать $\int_\alpha^\beta \mathbf{f}(t)\,dt$ вместо $\int_H \mathbf{f}(t)\,dt=\int_H \mathbf{f}\,d\mu$ и полагать $\int_\beta^\alpha \mathbf{f}(t)\,dt=-\int_\alpha^\beta \mathbf{f}(t)\,dt$; эти обозначения совпадают с теми, которые были введены в «Функциях действ. перем.», гл. II, §§ 1 и 2, когда $\mathbf{f}$ — линейчатая функция с компактным носителем (гл. IV, § 4, n° 4, пример).

Пусть g — *локально μ-интегрируемая* числовая функция, определенная на I, и x_0 — точка из I; для любого $x\in I$ положим

$$G(x)=c+\int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \qquad (c\text{ — постоянная}). \tag{11}$$

Числовая функция G *непрерывна* на I; это сразу же вытекает из теоремы Лебега (гл. IV, § 4, n° 3, следствие 1 из теоремы 2), так как произведение функции g и характеристической функции интервала с концами x и $x+h$ стремится к пренебрежимой функции, когда h стремится к 0. Следовательно, $G(I)$ есть *интервал* из $\mathbf{R}$. Во всем этом n° мы будем рассматривать G как отображение интервала I на локально компактное пространство $G(I)$. Через λ будем обозначать меру $g\cdot\mu$ на I.

Предположим сначала, что g μ-*интегрируема*. Тогда аналогичное рассуждение показывает, что пределы $G(a+)$ и $G(b-)$ существуют и *конечны*; кроме того, мера $|\lambda|$ *ограничена* (§ 5, n° 3, следствие из теоремы 1) и отображение G интервала I в $G(I)$ λ-собственно.

Предложение 7. *Предположим, что функция g μ-интегрируема. Если J есть открытый интервал из* $\mathbf{R}$ *с концами $G(a+)$ и $G(b-)$, то образ меры $g\cdot\mu$ при отображении G есть мера $\varphi_J\cdot\nu$, если $G(a+)\leqslant G(b-)$, и мера $-\varphi_J\cdot\nu$, если $G(a+)\geqslant G(b-)$ (где ν обозначает меру Лебега на $G(I)$).*

Достаточно показать, что для любой функции $f\in\mathscr{K}(G(I))$ имеем

$$\int_{G(a+)}^{G(b-)} f(\xi)\,d\xi=\int_a^b f(G(t))\,g(t)\,dt. \tag{12}$$

Но эта формула уже была доказана для $g\in\mathscr{K}(I)$ (Функции действ. перем., гл. II, § 2, n° 1, формула (1)). Перейдем к общему случаю; существует такая последовательность (g_n) функций из $\mathscr{K}(I)$, что: 1° последовательность $(g_n(t))$ стремится к $g(t)$ почти всюду на I; 2° существует такая μ-интегрируемая функция $h\geqslant 0$, что $|g_n|\leqslant h$ при любом n (гл. IV, § 3, n° 4, теорема 3). Из теоремы Лебега сразу же получаем, что если положить $G_n(x)=c+\int_{x_0}^{x} g_n(t)\,dt$, то последовательность (G_n) *равномерно сходится* к G на I и числа $G_n(a+)$ и $G_n(b-)$ стремятся соответственно к $G(a+)$ и $G(b-)$. Пусть f' — функция из $\mathscr{K}(\mathbf{R})$, продолжающая f; из предыдущего вытекает, что $f'(G_n(t))$ стремится к $f'(G(t))=f(G(t))$ для любого $t\in I$; применив теорему Лебега, получим формулу (12) из формулы

$$\int_{G_n(a+)}^{G_n(b-)} f'(\xi)\,d\xi=\int_a^b f'(G_n(t))\,g_n(t)\,dt$$

при помощи предельного перехода.

Следствие. *Если функция* $\mathbf{f}$ *определена на $G(I)$, принимает значения в* $\overline{\mathbf{R}}$ *или в банаховом пространстве и такова, что функция $t\to\mathbf{f}(G(t))\,g(t)$ интегрируема на I относительно меры Лебега,* *то* $\mathfrak{f}$ *интегрируема на* J *относительно меры Лебега и* (формула замены переменной в интеграле Лебега)

$$\int_{G(a+)}^{G(b-)} \mathfrak{f}(\xi)\, d\xi = \int_a^b \mathfrak{f}(G(t))\, g(t)\, dt. \tag{13}$$

Действительно, $\mathfrak{f}(G(t))$ интегрируема относительно меры $|g|\cdot\mu$, а значит, также и относительно мер $g^+\cdot\mu$ и $g^-\cdot\mu$; из теоремы 1 (n° 2) вытекает, что $\mathfrak{f}$ интегрируема относительно мер-образов $G(g^+\cdot\mu)$ и $G(g^-\cdot\mu)$, а стало быть, и относительно меры $\varphi_J\cdot\nu$ и что, на основании предложения 7 и формулы (9), справедлива формула (13).

Может случиться, что $\mathfrak{f}$ интегрируема на J относительно меры Лебега, но отображение $t \to \mathfrak{f}(G(t))\, g(t)$ не будет интегрируемо на I относительно меры Лебега (упр. 10).

Предположим теперь, что функция g почти всюду имеет *постоянный знак* (и локально μ-интегрируема); можно, например, предположить, что $g(t) \geqslant 0$ почти всюду на I. Тогда G является непрерывной возрастающей функцией на I, и значит, $G(a+)$ и $G(a-)$ существуют (но могут быть бесконечными). Кроме того, G есть λ-*собственное* отображение интервала I в $G(I)$: действительно, если $G(b-) \in G(I)$, то найдется такое $x_1 \geqslant x_0$, что G постоянно для $x \geqslant x_1$, и тогда прообраз при отображении G компактного интервала $[G(x_0), G(b-)]$ λ-интегрируем; если же, напротив, $G(b-) \notin G(I)$, то прообраз при отображении G любого компактного интервала с левым концом $G(x_0)$, содержащимся в $G(I)$, есть компактный интервал. Рассуждая точно так же для компактных интервалов с правым концом $G(x_0)$, получим наше утверждение. Кроме того, справедливо

Предложение 8. *Предположим, что функция* $g \geqslant 0$ *и локально* μ*-интегрируема. Тогда образ положительной меры* $g\cdot\mu$ *при отображении* G *есть мера Лебега на* $G(I)$. *Для того чтобы функция* $\mathfrak{f}$, *определенная на* $G(I)$ *и принимающая значения в* $\overline{\mathbf{R}}$ *или в банаховом пространстве, была интегрируема на* $G(I)$ *относительно меры Лебега, необходимо и достаточно, чтобы функция* $t \to \mathfrak{f}(G(t))\, g(t)$ *была интегрируема на* I *относительно меры Лебега и выполнялось соотношение* (13).

Первая часть предложения следует из того, что формула (12) справедлива для любой функции $f \in \mathscr{K}(G(I))$; действительно, носитель функции $t \to f(G(t))$ содержится в интервале $K \subset I$, на котором g интегрируема в силу сделанных выше замечаний, и значит, достаточно применить к K предложение 7. Вторая часть является следствием теоремы 1 из n° 2.

Упражнения. 1) Пусть T и X — два локально компактных пространства, μ — положительная мера на T, π — *непрерывное* μ-собственное отображение T в X и $\nu = \pi(\mu)$.

a) Показать, что для любой числовой функции $g \geqslant 0$, определенной и полунепрерывной снизу на X, функция $g \circ \pi$ полунепрерывна снизу на T и $\nu^*(g) = \mu^*(g \circ \pi)$.

b) Показать, что если $\mathbf{f}$ есть ν-интегрируемая функция со значениями в банаховом пространстве, то $\mathbf{f} \circ \pi$ μ-интегрируема и $\int \mathbf{f}\, d\nu = \int (\mathbf{f} \circ \pi)\, d\mu$. Будет ли справедливо обратное без дополнительного условия (ср. § 4, упр. 3b))?

°2) Пусть T и X — два локально компактных пространства и $\mathscr{P}$ — множество непрерывных собственных отображений пространства T в X, наделенное топологией компактной сходимости. Пусть, далее, H — такое подмножество из $\mathscr{P}$, что для любого компактного подмножества K из X объединение множеств $\overset{-1}{\pi}(K)$, где π пробегает H, относительно компактно в T.

a) Показать, что отображение $(\pi, \lambda) \to \pi(\lambda)$ произведения $H \times \mathscr{M}(T)$ в $\mathscr{M}(T)$ непрерывно, если каждое из пространств $\mathscr{M}(T)$ и $\mathscr{M}(X)$ наделено сильной топологией (гл. III, § 2, упр. 4).

b) Показать, что если B есть ограниченное подмножество из $\mathscr{M}(T)$, то сужение на $H \times B$ отображения $(\pi, \lambda) \to \pi(\lambda)$ непрерывно, если каждое из пространств $\mathscr{M}(T)$, $\mathscr{M}(X)$ наделено широкой топологией (использовать предл. 8 из гл. III, § 2).

c) Показать, что отображение $(\pi, \lambda) \to \pi(\lambda)$ произведения $H \times \mathscr{M}_+(T)$ в $\mathscr{M}_+(X)$ непрерывно, если $\mathscr{M}(T)$ и $\mathscr{M}(X)$ наделены широкой топологией (ср. гл. III, § 2, упр. 5a)).

d) Указать пример, когда $T = X$ компактно, а отображение $(\pi, \lambda) \to \pi(\lambda)$ произведения $\mathscr{P} \times \mathscr{M}(T)$ в $\mathscr{M}(X) = \mathscr{M}(T)$ не является непрерывным, если $\mathscr{M}(T)$ наделено широкой топологией (взять в качестве T тор $\mathbf{T}$ и воспользоваться упр. 6b) из гл. III, § 5).

°3) Пусть T — локально компактное, но не компактное пространство, μ — положительная мера на T и $\mathscr{G}$ — группа гомеоморфизмов пространства T. Построить пример, показывающий, что отображение $\pi \to \pi(\mu)$ группы $\mathscr{G}$ в $\mathscr{M}(T)$ может не быть непрерывным, если наделить $\mathscr{G}$ топологией компактной сходимости, а $\mathscr{M}(T)$ — широкой топологией (взять в качестве T подпространство из $\mathbf{R}$, составленное из 0 и из точек n и $\frac{1}{n}$ ($n \geqslant 1$ — целое), а в качестве μ — меру, определенную соотношениями

$$\mu(\{0\})=0, \quad \mu\left(\left\{\frac{1}{n}\right\}\right)=\frac{1}{n^2}, \quad \mu(\{n\})=1\Big).$$

4) Для любого локально компактного пространства T обозначим через $\mathcal{M}^c(T)$ подпространство пространства $\mathcal{M}(T)$, составленное из мер с компактным носителем. Если T и X — два локально компактных пространства, а π — непрерывное отображение T в X, то π λ-собственно и $\pi(\lambda) \in \mathcal{M}^c(X)$ для любой меры $\lambda \in \mathcal{M}^c(T)$. Построить пример, показывающий, что отображение $\lambda \to \pi(\lambda)$ пространства $\mathcal{M}^c(T)$ в $\mathcal{M}^c(X)$ может не быть непрерывным, если наделить $\mathcal{M}^c(T)$ и $\mathcal{M}^c(X)$ широкой топологией (или сильной топологией (гл. III, § 2, упр. 4)), и что π может не быть собственным отображением (ср. гл. III, § 3, упр. 1).

5) a) Пусть ρ и σ — две положительные меры на $\mathbf{R}$. Показать, что если $\rho(]a, b]) = \sigma(]a, b])$ для любого полуоткрытого интервала $]a, b]$, то $\rho = \sigma$.

b) Пусть I — интервал из $\mathbf{R}$ с концами α, β, и пусть ψ есть возрастающая конечная числовая функция, определенная на I; продолжим произвольным образом ψ на $\mathbf{R}$. Для того чтобы отображение ψ было собственным относительно меры $\varphi_I \cdot \mu$ (где μ — мера Лебега на $\mathbf{R}$), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия: 1° α либо конечно, либо $\alpha = -\infty$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} \psi(x) = -\infty$; 2° β либо конечно, либо $\beta = +\infty$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} \psi(x) = +\infty$.

Пусть эти условия выполнены, и пусть для любого $y \in \mathbf{R}$ через $\theta(y)$ обозначена верхняя грань множества тех $x \in I$, в которых $\psi(x) \leqslant y$ (для пустого множества она считается равной α). Показать, что θ есть конечная числовая функция, возрастающая и непрерывная справа на $\mathbf{R}$. Если ν есть образ меры $\varphi_I \cdot \mu$ при отображении ψ, то $\nu(]a, b]) = \theta(b) - \theta(a)$ для любого полуоткрытого интервала $]a, b]$ из $\mathbf{R}$.

c) Показать, что, и обратно, для любой конечной числовой функции θ, возрастающей и непрерывной справа на $\mathbf{R}$, существует, и притом только одна, такая положительная мера ν на $\mathbf{R}$, что $\nu(]a, b]) = \theta(b) - \theta(a)$ для любого полуоткрытого интервала $]a, b]$ из $\mathbf{R}$ («мера Стилтьеса на $\mathbf{R}$, определенная при помощи θ»; вместо $\int f\,d\nu$ пишут $\int f\,d\theta$); при этом всякая положительная мера на $\mathbf{R}$ может быть получена таким способом. При каком условии мера ν будет рассеянной? Каким будет тогда образ меры ν при отображении θ?

6) a) Пусть K — канторово множество на интервале $I = [0, 1]$ (Общая топ., гл. IV, § 2, n° 5). Показать, что на $\mathbf{R}$ существует рассеянная мера ν с носителем K и общей массой 1 и такая непрерывная возрастающая функция θ на $\mathbf{R}$, что $\theta(\mathbf{R}) = I$ и $\theta(\nu) = \varphi_I \cdot \mu$ (где μ — мера Лебега; ср. Общая топ., гл. IV, § 8, упр. 16).

b) Вывести из a), что на $\mathbf{R}$ существует положительная *рассеянная* мера, независимая с мерой Лебега, носителем которой является весь интервал I (взять на каждом интервале J, смежном с K и содержащемся в I, меру, пропорциональную образу меры ν при аффинном отображении интервала I на J, а затем провести индукцию).

7) Пусть μ — мера Лебега на $\mathbf{R}$ и I — интервал $[0, 1]$ из $\mathbf{R}$. Если положить $\theta(x) = |x|$, то θ будет собственным отображением относительно меры $\varphi_I \cdot \mu$ и будем иметь $\theta(\varphi_I \cdot \mu) = \varphi_I \cdot \mu$. Построить пример множества, пренебрежимого относительно $\varphi_I \cdot \mu$ и имеющего при отображении θ образ, не измеримый относительно $\varphi_I \cdot \mu$ (ср. гл. IV, § 4, упр. 8).

°8) Пусть T — компактное пространство и μ — положительная рассеянная мера на T с общей массой 1.

a) Показать, что существует такое непрерывное отображение π пространства T на $E = [0, 1]$, что образ меры μ при отображении π есть мера Лебега λ на E. (Поступать, как при доказательстве теоремы Урысона (Общая топ., гл. IX, § 4, теорема 1), определяя для любого t в пределах $0 \leqslant t \leqslant 1$ такое открытое множество $U(t) \subset T$, квадрируемое относительно μ (гл. IV, § 5, упр. 13), что $U(0) = \varnothing$, $U(1) = T$, $\overline{U(t)} \subset U(t')$ для $t < t'$ и, наконец, $\mu(U(t)) = t$; воспользоваться упр. 9 из § 5, чтобы доказать, что если V и W — такие два открытых квадрируемых множества из T, что $\overline{V} \subset W$ и $\mu(V) < \mu(W)$, то существует такое открытое квадрируемое множество U, что $\overline{V} \subset U \subset \overline{U} \subset W$ и что

$$\frac{1}{3}\mu(W-V) \leqslant \mu(U-V) \leqslant \frac{2}{3}\mu(W-V).$$

И наконец, применить упр. 5a).)

b) Вывести из a), что в T существуют подмножества, не являющиеся μ-измеримыми (гл. IV, § 4, упр. 8), а также что в $\mathcal{L}^p(T, \mu)$ существуют последовательности, сходящиеся к 0 в среднем порядка p, но не сходящиеся к 0 ни в одной точке из T для $1 \leqslant p < +\infty$ (гл. IV, § 3, упр. 1), и такие последовательности (f_n), что $(\widetilde{f}_n)$ сходится к 0 в ослабленной топологии пространства $L^p(T, \mu)$, но не сходится к 0 по мере (§ 5, упр. 21).

c) Допустим, кроме того, что T *метризуемо*. Показать, что существуют μ-пренебрежимое подмножество N из T, λ-пренебрежимое подмножество M из E и такой *гомеоморфизм* π множества $E - M$ на $T - N$, что если продолжить (произвольным образом) π до отображения φ пространства E в T, а $\overset{-1}{\pi}$ до отображения ψ пространства T в E, то $\varphi(\lambda) = \mu$ и $\psi(\mu) = \lambda$. (Воспользовавшись упр. 13 из гл. IV, § 5], показать, что для любого целого $n > 0$ найдется конечное разбиение пространства T, составленное из μ-пренебрежимого множества и из открытых квадрируемых множеств с диаметром, не превосходящим $\frac{1}{n}$ (относительно расстояния, согласующегося с топологией в T), и с мерой, не превосходящей $\frac{1}{n}$. Отсюда, проведя индукцию и перейдя к пределу, вывести существование такого непрерывного отображения f множества $E - D$ в T, где D есть счетное подмножество из E, что $f(\lambda) = \mu$; показать, что можно сделать так, чтобы f было гомеоморфизмом множества $E - D$ на подмножество из T, имеющее меру 1 (ср. § 8, упр. 14).

°9) Пусть μ и ν — две положительные рассеянные меры на локально компактном пространстве T. Показать, что для того, чтобы ν была мерой с базисом μ, достаточно, чтобы всякое μ-измеримое подмножество из T было также и ν-измеримым (рассуждать от противного, используя теорему 3 и предл. 13 из § 5 и упр. 8 из § 6).

10) На интервале $I =]0, 1[$ из $\mathbf{R}$ определим следующую функцию g: $g(t) = -\sqrt{n}$ для $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) < t \leqslant \frac{1}{n}$ и $g(t) = \sqrt{n}$ для $\frac{1}{n+1} < t \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, и продолжим ее нулем на $\mathbf{R} - I$; g — интегрируема относительно меры Лебега. Положим $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$; показать, что функции f, равная $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ на интервале $[-1, +1]$ и 0 вне этого интервала и интегрируемая относительно меры Лебега, такова, что отображение $t \to f(G(t))\,g(t)$ не будет интегрируемым на I.

°11) Примем обозначения n° 5, и пусть g есть локально μ-интегрируемая числовая функция на I.

a) Для того чтобы G было λ-собственным отображением интервала I в $G(I)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия: 1° в $\overline{\mathbf{R}}$ существуют пределы $G(a+)$ и $G(b-)$; 2° если $G(a+) \in G(I)$, то g μ-интегрируема на интервале $]a, x_0[$; 3° если $G(b-) \in G(I)$, то g μ-интегрируема на интервале $]x_0, b[$.

b) Предположим, что пределы $G(a+)$ и $G(b-)$ существуют в $\overline{\mathbf{R}}$. Показать, что если функция $\mathbf{f}$ такова, что отображение $t \to \mathbf{f}(G(t))\,g(t)$ интегрируемо на I относительно меры Лебега, то $\mathbf{f}$ интегрируема на интервале с концами $G(a+)$ и $G(b-)$ относительно меры Лебега и справедлива формула (13). (Свести к случаю, когда x_0 есть одно из чисел a, b; если, например, $x_0 = a$, то заметить, что на

I найдется такая строго возрастающая последовательность (b_n), стремящаяся к b, что последовательность $(G(b_n))$ будет либо возрастающей, либо убывающей; применить предл. 4 из гл. IV, § 4, n° 3, и теорему Лебега.)

12) a) Пусть g — конечная числовая функция, определенная на компактном интервале $I = [a, b]$ из $\mathbf{R}$. Множеством *роста вправо* (соотв. *влево*) *функции* g *на* I называется множество тех $x \in I$, для которых существует такое $y \in I$, что $x < y$ (соотв. $x > y$) и $g(x) < g(y)$. Показать, что если g непрерывна, то множество роста вправо (соотв. влево) функции g на I открыто в I, и что если $]\alpha, \beta[$ есть связная компонента этого множества, то $g(\alpha) = g(\beta)$ и $g(x) \leqslant g(\alpha)$ для $\alpha < x < \beta$.

b) Пусть r_1 и r_2 — два действительных числа и $0 \leqslant r_1 < r_2$. Пусть, далее, g есть непрерывная *возрастающая* функция на I, и пусть E' есть множество роста влево функции $g(x) - r_1 x$ на I, а E'' — объединение множеств роста вправо функции $g(x) - r_2 x$ на каждом из интервалов, являющихся замыканием связных компонент из E'. Показать, используя a), что если μ есть мера Лебега на I, то $\mu(E'') \leqslant \frac{r_1}{r_2} \mu(E')$.

c) *Верхними и нижними правыми производными числами* конечной числовой функции g на I в точке $x \in I$ называются, соответственно, числа

$$D_d^+ g(x) = \varlimsup_{h \to 0,\, h > 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h},$$

$$D_d^- g(x) = \varliminf_{h \to 0,\, h > 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Точно так же *верхними и нижними левыми производными числами* функции g в точке x называются, соответственно, числа

$$D_g^+ g(x) = \varlimsup_{h \to 0,\, h < 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h},$$

$$D_g^- g(x) = \varliminf_{h \to 0,\, h < 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Показать, что если g непрерывна и *возрастает*, то множество тех $x \in I$, в которых $D_d^+ g(x) = +\infty$, и множество тех $x \in I$, в которых $D_g^- g(x) < D_d^+ g(x)$, имеют относительно μ меру нуль (для любого рационального числа $r > 0$ (соотв. для любой пары (r_1, r_2) рациональных чисел $0 \leqslant r_1 < r_2$) рассмотреть множество тех $x \in I$, в которых $D_d^+ g(x) > r$ (соотв. $D_g^- g(x) < r_1$ и $D_d^+ g(x) > r_2$ одновременно), и применить b)). Вывести отсюда, что функция g имеет конечную производную для почти всех $x \in I$ («*теорема Лебега*») (применить также предыдущий результат к функции $-g(-x)$).

°13) Пусть на компактном интервале $I=[a, b]$ из $\mathbf{R}$ последовательность конечных непрерывных возрастающих функций (f_n) такова, что $f_n(a)=0$ при любом n и что сумма $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ конечна на I. Показать, что существует такое пренебрежимое относительно меры Лебега множество $N\subset I$, что для любого $x\in I-N$ производные $f'_n(x)$ и $s'(x)$ существуют и $s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ (*«теорема Фубини»*). (Заметить, что ряд с общим членом $f'_n(x)$ сходится почти всюду; затем, положив $s_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, выбрать такую подпоследовательность (s_{n_k}), чтобы ряд с общим членом $s(x)-s_{n_k}(x)$ был сходящимся на I, и применить к этому ряду предыдущее замечание.)

14) Пусть f — числовая функция, определенная на компактном интервале $I=[a, b]$ из $\mathbf{R}$ и интегрируемая на нем относительно меры Лебега. Показать, что если $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, то F имеет почти всюду на I производную, равную f (свести к случаю, когда $f\geqslant 0$; затем, используя упр. 13, рассмотреть последовательно случаи, когда f полунепрерывна снизу, а затем уже общий случай (ср. гл. IV, § 4, n° 4, следствие из теоремы 3)).

15) Пусть μ означает меру Лебега на $\mathbf{R}$; говорят, что точка $x\in\mathbf{R}$ есть *точка плотности* подмножества A из $\mathbf{R}$, если при h и k, стремящихся к 0 по строго положительным значениям, частное $\dfrac{\mu^*(A\cap[x-h, x+k])}{h+k}$ стремится к 1. Показать, что множество точек некоторого произвольного подмножества A из $\mathbf{R}$, не являющихся точками плотности множества A, пренебрежимо относительно μ. (Свести к случаю, когда A содержится в компактном интервале $[a, b]$, и рассмотреть функцию $s_A(x)=\mu^*(A\cap[a, x])$. Выбрать такую убывающую последовательность (A_n) открытых множеств, содержащих A, чтобы ряд с общим членом $s_{A_n}(x)-s_A(x)$ сходился на $[a, b]$, и применить упр. 13.)

16) a) Пусть g есть функция, интегрируемая относительно меры Лебега $E=[0, 1]$. Положим $G(x)=\int_0^x g(t)\,dt$; показать, что в любой точке $x\in E$, в которой g непрерывна, G имеет производную, равную g.

b) Построить пример функции g, ограниченной и непрерывной почти всюду на E и такой, чтобы G не имела правой производной в точках некоторого несчетного подмножества из E (ср. Функции действ. перем., гл. I, § 2, упр. 9).

c) Показать, что функция, равная $x^2 \sin \frac{1}{x^2}$ для $x \neq 0$ и 0 для $x = 0$, имеет производную в каждой точке из E, но эта производная не интегрируема относительно меры Лебега на E.

§ 7. Интегрирование относительно индуцированной меры

1. *Интегрирование относительно индуцированной меры*

Пусть X — непустое локально компактное подпространство пространства T, μ — положительная мера на T и μ_X — мера, индуцированная на X мерой μ (§ 1, n° 1). Определим для любого $t \in T$ меру λ_t *на* X следующим образом: $\lambda_t = \varepsilon_t$, если $t \in X$, и $\lambda_t = 0$, если $t \in \complement X$. Тогда для любой числовой функции g, определенной на X, имеем $\int g(x)\, d\lambda_t(x) = g(t)$, если $t \in X$, и $\int g(x)\, d\lambda_t(x) = 0$, если $t \in \complement X$. Следовательно, если g есть функция из $\mathscr{K}(X)$, то, по определению меры μ_X (§ 1, n° 1), имеем

$$\mu_X(g) = \int \langle g, \lambda_t \rangle\, d\mu(t). \tag{1}$$

Значит, можно написать (§ 3, n° 1), что

$$\mu_X = \int \lambda_t\, d\mu(t). \tag{2}$$

Определим теперь отображение π пространства T в X, положив $\pi(t) = t$ для $t \in X$ и $\pi(t) = t_0$ для $t \in \complement X$, где t_0 — некоторая точка из X; тогда для любого $t \in T$ имеем $\lambda_t = \varphi_X(t)\, \varepsilon_{\pi(t)}$. Покажем, что *пара* (π, φ_X) μ-*приспособлена* (§ 4, n° 1); в силу изложенного в § 1, n° 1, достаточно показать, что отображение π μ-измеримо; но это следует из того, что сужения π на X и на $\complement X$ μ-измеримы (§ 1, n° 4, предл. 5).

Предложение 1. *Для любой числовой функции* $g \geqslant 0$, *определенной на* X, *имеем*

$$\overline{\int}^{*} g\, d\mu_X = \overline{\int_X}^{*} g\, d\mu \tag{3}$$

(ср. § 5, n° 3, пример).

Если учесть предыдущие замечания и формулу (2), то соотношение (3) вытекает из теоремы 1 § 4.

Следствие 1. *Для любого подмножества* B *из* X *имеем* $\overline{\mu}_X^*(B) = \overline{\mu}^*(B)$; *для того чтобы* B *было локально* μ_X*-пренебрежимо, необходимо и достаточно, чтобы оно было локально* μ*-пренебрежимо.*

Следствие 2. *Пусть* M — *подмножество из* T. *Если мера* μ *сосредоточена на* M, *то* μ_X *сосредоточена на* $M \cap X$.

Следствие 3. *Для того чтобы мера* μ_X *была нулевой, необходимо и достаточно, чтобы* X *было локально* μ*-пренебрежимо.*

Замечание. Если S есть носитель меры μ, то множество $S \cap X$ (замкнутое в X), согласно следствию 2, содержит носитель меры μ_X, но может быть отличным от него. Например, если μ есть рассеянная мера и X — подпространство, сводящееся к точке, то индуцированная мера μ_X равна нулю, и значит, ее носитель есть пустое множество.

Предложение 2. *Для того чтобы отображение* g *пространства* X *в топологическое пространство было* μ_X*-измеримо, необходимо и достаточно, чтобы* g *было* μ*-измеримо на* X (§ 5, n° 3, пример).

Это вытекает из предложения 3 § 4.

Следствие. *Для того чтобы подмножество* B *из* X *было* μ_X*-измеримо, необходимо и достаточно, чтобы* B *было* μ*-измеримо.*

Теорема 1. *Пусть* g — *функция, определенная на* X *и принимающая значения в* $\overline{\mathbf{R}}$ *или в банаховом пространстве. Для того чтобы* g *была существенно* μ_X*-интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы* g *была существенно* μ*-интегрируема на* X (§ 5, n° 3, пример), *и тогда*

$$\int g\, d\mu_X = \int_X g\, d\mu. \tag{4}$$

Это вытекает из теоремы 2 § 4.

Следствие. *Для того чтобы подмножество* B *из* X *было существенно* μ_X*-интегрируемо, необходимо и достаточно, чтобы оно было существенно* μ*-интегрируемо, и тогда* $\mu_X(B) = \mu(B)$.

2. *Свойства индуцированных мер*

Предложение 3. *Пусть X — локально компактное подпространство пространства T. Тогда каноническое вложение j X в T является μ_X-собственным и $j(\mu_X) = \varphi_X \cdot \mu$.*

Действительно, j непрерывно, и стало быть, μ_X измеримо. С другой стороны, для любой функции $f \in \mathscr{K}(T)$ функция $f \circ j$, являющаяся сужением функции f на X, существенно μ-интегрируема на X и, значит, существенно μ_X-интегрируема (теорема 1), и тогда, положив $\nu = \varphi_X \cdot \mu$, получаем соотношения

$$\int f\, d\nu = \int f\varphi_X\, d\mu = \int\limits_X f\, d\mu = \int\limits_X (f \circ j)\, d\mu = \int (f \circ j)\, d\mu_X,$$

чем и доказано предложение (§ 6, опр. 1).

Следствие. *Пусть π есть μ-собственное отображение пространства T в локально компактное пространство Y и π_X — его сужение на X. Тогда отображение π_X будет μ_X-собственным и $\pi_X(\mu_X) = \pi(\varphi_X \cdot \mu)$.*

Действительно, $\pi_X = \pi \circ j$, и доказываемое следствие вытекает из только что доказанного предложения 3 и из предложения 4 § 6, n° 3.

Предложение 4. *Пусть X и Y — два локально компактных подпространства пространства T и $Y \subset X$. Тогда мера, индуцированная мерой μ_X на Y, совпадает с мерой μ_Y* (транзитивность индуцированных мер).

Пусть $g \in \mathscr{K}(Y)$ и g' — такое продолжение функции g на X, что $g'(x) = 0$ на $X - Y$; по определению $\int g\, d(\mu_X)_Y = \int g'\, d\mu_X$, а так как g' существенно μ_X-интегрируема, то она существенно μ-интегрируема на X (теорема 1), и имеем $\int g'\, d\mu_X = \int\limits_X g'\, d\mu$; но поскольку $g'\varphi_Y = g'$, то g' также существенно μ-интегрируема на Y, и имеем $\int\limits_X g'\, d\mu = \int\limits_Y g\, d\mu$, что, в силу определения индуцированной меры (§ 1, n° 1), и доказывает предложение.

Предложение 5. *Пусть h — конечная положительная локально μ-интегрируемая числовая функция, определенная на T. Тогда сужение h_X функции h на X локально μ_X-интегрируемо и $h_X \cdot \mu_X = (h \cdot \mu)_X$.*

Положим $\lambda = h \cdot \mu$, и пусть g есть функция из $\mathcal{K}(X)$; тогда g существенно λ-интегрируема на X и, по определению, $\int g \, d\lambda_X = \int_X g \, d\lambda$; но это означает (§ 5, теорема 1), что функция gh существенно μ-интегрируема на X и $\int_X g \, d\lambda = \int_X gh \, d\mu$. Следовательно, в силу теоремы 1 gh_X существенно μ_X-интегрируема (а значит, и μ_X-интегрируема, поскольку ее носитель в X компактен), и имеем $\int gh_X \, d\mu_X = \int_X gh \, d\mu$. Это доказывает, что h_X локально μ_X-интегрируема, а соотношение $\int g \, d\lambda_X = \int gh_X \, d\mu_X$ показывает, что $\lambda_X = h_X \cdot \mu_X$.

Положительная мера на X не обязательно индуцируется положительной мерой на T. Точнее, справедливо

Предложение 6. *Пусть λ — положительная мера на X. Для того чтобы на T существовала положительная мера, индуцирующая на X меру λ, необходимо и достаточно, чтобы для любого компактного подмножества K из T множество $K \cap X$ было существенно λ-интегрируемо.*

Условие необходимо, ибо если ν есть такая положительная мера на T, что $\lambda = \nu_X$, то множество $K \cap X$ существенно λ-интегрируемо в силу следствия из теоремы 1. Обратно, если это условие выполнено, то каноническое вложение j пространства X в T будет λ-собственным (§ 6, n° 1, опр. 1); положим $\nu = j(\lambda)$. Тогда всякая функция $f \in \mathcal{K}(X)$ существенно ν-интегрируема на X, и в силу теоремы 1 из § 6, n° 2, имеем $\int f \, d\lambda = \int_X f \, d\nu$, что и доказывает, что $\lambda = \nu_X$.

Следствие. *Если X замкнуто, то всякая положительная мера λ на X индуцируется некоторой положительной мерой на T.*

Действительно, для любого компактного подмножества K из T множество $K \cap T$ замкнуто в T и потому компактно, и следовательно, λ-интегрируемо.

Замечание. Пусть X — локально компактное подпространство пространства T, и пусть λ — произвольная мера на T. *Мерой, индуцированной* на X мерой λ, называется мера $(\lambda^+)_X - (\lambda^-)_X$, которая обозначается λ_X; поскольку λ^+ и λ^- сосредоточены на непересекающихся множествах (§ 5, следствие из предл. 13), то это верно и для индуцированных мер $(\lambda^+)_X$ и $(\lambda^-)_X$ (следствие 2 из предл. 1); следовательно, эти меры будут независимыми, и значит, $(\lambda^+)_X = (\lambda_X)^+$, $(\lambda^-)_X = (\lambda_X)^-$; отсюда получаем, что $|\lambda_X| = |\lambda|_X$.

Упражнения. 1) Пусть X — локально компактное подпространство локально компактного пространства T. Показать, что для любой меры λ на T носитель меры λ_X есть след на X носителя меры $\nu = \varphi_X \cdot \lambda$.

2) Пусть T — локально компактное пространство, X — его локально компактное подпространство и μ — положительная мера на T; положим $\nu = \varphi_X \cdot \mu = j(\mu_X)$ (где j есть каноническое вложение X в T).

a) Показать, что всякое μ_X-пренебрежимое подмножество из X ν-пренебрежимо.

b) Показать, что для любой числовой функции $g \geqslant 0$, определенной на X, справедливо равенство $\int^* g\, d\mu_X = \int_X^* g\, d\nu$ (применить a), а также формулу (5) из § 3).

c) Пусть $\mathbf{g}$ — функция, определенная на X, со значениями в $\overline{\mathbf{R}}$ или в банаховом пространстве, и $\mathbf{g}'$ — продолжение функции $\mathbf{g}$ на T, равное 0 на $T - X$. Для того чтобы $\mathbf{g}$ была μ_X-интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{g}'$ была ν-интегрируема, и тогда $\int \mathbf{g}\, d\mu_X = \int_X \mathbf{g}\, d\nu$ (использовать b)).

3) В обозначениях упр. 2 предположим, что X есть *открытое* подмножество из T.

a) Показать, что для любой числовой функции $g \geqslant 0$, определенной на X, справедливо равенство $\int^* g\, d\mu_X = \int_X^* g\, d\mu$ (использовать упр. 2, предл. 2 из § 5 и предл. 2 из § 2).

b) Пусть $\mathbf{g}$ — функция, определенная на X, со значениями в $\overline{\mathbf{R}}$ или в банаховом пространстве, и $\mathbf{g}'$ — ее продолжение на T, равное 0 на $T - X$. Для того чтобы $\mathbf{g}$ была μ_X-интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы g' была μ-интегрируема, и тогда $\int g\,d\mu_X = \int\limits_X g\,d\mu$ (использовать а)).

4) Приняв обозначения упр. 2, показать, что если X *замкнуто* в T, то для любой числовой функции $f \geqslant 0$, определенной на T, выполняется равенство $\int^* (f \circ j)\,d\mu_X = \int^* f\,d\nu$ (заметить, что отображение j является собственным, и применить предл. 2 из § 4). Если, в тех же предпосылках, $\mathbf{f}$ есть отображение пространства T в $\overline{\mathbf{R}}$ или в банахово пространство, то для того, чтобы отображение $\mathbf{f} \circ j$ было μ_X-интегрируемо, необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{f}$ было ν-интегрируемо, и тогда $\int (\mathbf{f} \circ j)\,d\mu_X = \int \mathbf{f}\,d\nu$ (§ 4, теорема 2).

5) Пусть T — локально компактное пространство, μ — мера, определенная в упр. 4, гл. IV, § 1, и D — (замкнутое) множество точек из T вида $(0, y)$.

a) Показать, что мера μ_D, индуцированная на D мерой μ, является нулевой, но $\int^* \varphi_D\,d\mu = +\infty$ (ср. упр. 3а)).

b) Пусть $X = T - D$, и пусть j есть каноническое вложение пространства X в T; тогда имеем $j(\mu_X) = \mu$, но $\int^* (\varphi_D \circ j)\,d\mu_X = 0$, $\int^* \varphi_D\,d\mu = +\infty$ (ср. упр. 4).

6) Пусть T — локально компактное пространство, X — его локально компактное подпространство и j — каноническое вложение пространства X в T. Пусть, далее, λ — такая положительная мера на X, что для любого компактного множества $K \subset T$ пересечение $K \cap X$ существенно λ-интегрируемо. Показать, что мера $\nu = j(\lambda)$ есть наименьшая из положительных мер ρ на T, обладающих тем свойством, что $\rho_X = \lambda$ и что их носитель является замыканием в T носителя меры λ.

§ 8. Произведения мер

1. *Интегрирование относительно произведения двух мер*

Пусть T и T' — два локально компактных пространства, μ — положительная мера на T, μ' — положительная мера на T' и $\nu = \mu \otimes \mu'$ — мера-произведение на $X = T \times T'$ (гл. III, § 5, n° 1).

Для любого $t \in T$ отображение $t' \to (t, t')$ пространства T' в X является непрерывным и собственным. Пусть λ'_t есть образ меры μ' при этом отображении; тогда λ'_t будет положительной мерой на X, и если $f \in \mathscr{K}(X)$, то, обозначив через f_t частичное отображение $t' \to f(t, t')$, имеем

$$\int f\, d\lambda'_t = \int f_t\, d\mu', \tag{1}$$

что записывается также в виде $\lambda'_t = \varepsilon_t \otimes \mu'$.

Кроме того, отображение $t \to \lambda'_t(f)$ непрерывно и имеет компактный носитель (гл. III, § 5, n° 1, лемма 2), и значит, отображение $t \to \lambda'_t$ пространства T в $\mathscr{M}(X)$ широко непрерывно (и тем более широко μ-измеримо); следовательно, семейство мер $t \to \lambda'_t$ μ-*согласовано* (§ 3, n° 1). Интеграл от f относительно меры $\int \lambda'_t d\mu(t)$, по определению, равен

$$\int \langle f, \lambda'_t\rangle\, d\mu(t) = \int d\mu(t) \int f_t(t')\, d\mu'(t') = \int f(t, t')\, d\nu(t, t')$$

(гл. III, § 5, n° 1, теорема 2); следовательно, имеем $\nu = \int \lambda'_t d\mu(t)$ (ср. гл. III, § 5, n° 1, замечание 2).

Точно так же для любого элемента $t' \in T'$ пусть $\lambda_{t'}$ есть образ меры μ при отображении $t \to (t, t')$ пространства T в X. Тогда отображение $t' \to \lambda_{t'}$ μ'-согласовано и широко непрерывно и имеем $\nu = \int \lambda_{t'} d\mu'(t')$. Применим результаты § 3 к семействам мер $t \to \lambda'_t$ и $t' \to \lambda_{t'}$. Нам понадобятся следующие леммы:

Лемма 1. *Для любой числовой функции $f \geqslant 0$, определенной на X, имеем*

$$\int^* f_t\, d\mu' = \int^* f\, d\lambda'_t. \tag{2}$$

Так как $t' \to (t, t')$ есть непрерывное и собственное отображение, то формула вытекает из предложения 2 § 4.

Лемма 2. *Пусть f есть отображение пространства X в топологическое пространство. Для того чтобы f было λ'_t-измеримо, необходимо и достаточно, чтобы f_t было μ'-измеримо.*

Это является следствием предложения 3 из § 6.

Лемма 3. *Пусть $\mathbf{f}$ — функция, определенная на X, со значениями в $\overline{\mathbf{R}}$ или в банаховом пространстве. Для того чтобы $\mathbf{f}$ была λ'_t-инте-*

грируема, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{f}_t$ *была* μ'*-интегрируема, и тогда имеем*

$$\int \mathfrak{f}_t \, d\mu' = \int \mathfrak{f} \, d\lambda_t'. \tag{3}$$

Это следует из теоремы 2 § 4, если учесть, что $t' \to (t, t')$ — непрерывное и собственное отображение.

Замечание. Можно, не пользуясь результатами §§ 4 и 6, доказать очень просто леммы 1, 2 и 3 при помощи прямого рассуждения. Например, соотношение (2), по определению, очевидно для $f \in \mathcal{K}(T \times T')$. Если же f полунепрерывна снизу на $X = T \times T'$, то достаточно заметить, что $t' \to f_t(t')$ есть верхняя огибающая для функций $t' \to g_t(t') = g(t, t')$, где g пробегает множество таких функций из $\mathcal{K}(X)$, что $0 \leqslant g \leqslant f$. И наконец, в случае произвольной функции f отметим, что если $h \geqslant f$ полунепрерывна снизу на X, то $t' \to h(t, t')$ полунепрерывна снизу на T'; и обратно, если функция $t' \to u(t')$ полунепрерывна снизу на T' и такова, что $u(t') \geqslant \geqslant f(t, t')$ при любом $t' \in T'$, то функция h, обладающая тем свойством, что $h(t, t') = u(t')$, $h(t_1, t') = +\infty$ для $t_1 \neq t$, полунепрерывна снизу на X и такова, что $h \geqslant f$. Но раз лемма 1 доказана, то из нее следует, что множество $(T - \{t\}) \times T'$ λ_t'-пренебрежимо, и тогда очень легко доказать леммы 2 и 3.

Соотношение (3) позволяет, не боясь путаницы, обозначать оба члена равенства через $\int \mathfrak{f}(t, t') \, d\mu'(t')$. Очевидно, что аналогичные результаты имеют место для мер $\lambda_{t'} = \mu \otimes \varepsilon_{t'}'$.

Вместо обозначений $\int^* f(t, t') \, d\nu(t, t')$, $\overline{\int}^* f(t, t') \, d\nu(t, t')$ и $\int \mathfrak{f}(t, t') \, d\nu(t, t')$ мы будем пользоваться $\int \int^* f(t, t') \, d\mu(t) \, d\mu'(t')$, $\overline{\int \int}^* f(t, t') \, d\mu(t) \, d\mu'(t')$ и $\int \int \mathfrak{f}(t, t') \, d\mu(t) \, d\mu'(t')$ в согласии с обозначениями, принятыми в гл. III, § 5, n° 1. Тогда результаты, полученные в § 3, примут следующий вид:

Предложение 1. *Пусть $f \geqslant 0$ — числовая функция, полунепрерывная снизу на $T \times T'$. Тогда функция $t \to \int^* f(t, t') \, d\mu'(t')$ полунепрерывна снизу на T и имеем*

$$\int \int^* f(t, t') \, d\mu(t) \, d\mu'(t) = \int^* d\mu(t) \int^* f(t, t') \, d\mu'(t'). \tag{4}$$

Это вытекает из следствия предложения 1 из § 3 с учетом изложенной выше леммы 1.

Предложение 2. *Пусть* $f \geqslant 0$ — *числовая функция, определенная на* $T \times T'$. *Тогда имеем*

$$\int \int^* f(t, t')\, d\mu(t)\, d\mu'(t') \geqslant \int^* d\mu(t) \int^* f(t, t')\, d\mu'(t'). \qquad (5)$$

Это вытекает из предложения 2 § 3 с учетом формулы (2).

Следствие. *Пусть* N *есть* ν-*пренебрежимое множество из* $T \times T'$. *Для почти всех* $t \in T$ *срез множества* N *по* t μ'-*пренебрежим.*

Предложение 3. *Пусть* f *есть* ν-*измеримая функция, определенная на* $T \times T'$ *и принимающая значения в топологическом пространстве* G. *Если* T' *счетно в бесконечности, то множество тех* $t \in T$, *для которых отображение* $t' \to f(t, t')$ *не является* μ'-*измеримым, локально* μ-*пренебрежимо.*

Достаточно доказать, что для любого компактного подмножества K из T множество тех $t \in K$, в которых отображение $t' \to f(t, t')$ не является μ'-измеримым, μ-пренебрежимо. Для этого, очевидно, можно рассмотреть вместо f функцию f', равную f на $K \times T'$ и постоянную на его дополнении. Тогда предложение получится сразу из изложенной выше леммы 2 и из предложения 3 § 3 (ср. § 3, упр. 4).

Теорема 1 (Лебега — Фубини). *Пусть* $\mathbf{f}$ — *функция, определенная на* $T \times T'$, *принимающая значения в* $\overline{\mathbf{R}}$ *или в банаховом пространстве и интегрируемая относительно меры-произведения* $\mu \otimes \mu'$. *Тогда для почти всех* $t \in T$ *функция* $t' \to \mathbf{f}(t, t')$ μ'-*интегрируема; функция* $t \to \int \mathbf{f}(t, t')\, d\mu'(t')$, *определенная почти всюду,* μ-*интегрируема и имеем*

$$\int \int \mathbf{f}(t, t')\, d\mu(t)\, d\mu'(t') = \int d\mu(t) \int \mathbf{f}(t, t')\, d\mu'(t'). \qquad (6)$$

Это сразу вытекает из изложенной выше леммы 3 и из теоремы 1 § 3.

Если предположить только, что $\mathbf{f}$ существенно ν-интегрируема, то может оказаться, что функция $t' \to \mathbf{f}(t, t')$ не будет существенно μ'-интегрируемой *ни при каком* значении $t \in T$ (§ 3, упр. 4).

Очевидно, что в теореме 1 можно поменять местами T и T' и при тех же предположениях получить формулу

$$\int\int \mathbf{f}(t, t')\, d\mu(t)\, d\mu'(t') = \int d\mu'(t') \int \mathbf{f}(t, t')\, d\mu(t). \tag{7}$$

Следствие. *Если множество $A \subset T \times T'$ ν-интегрируемо, то для почти всех $t \in T$ срез $A(t)$ множества A по t μ'-интегрируем, функция $t \to \mu'(A(t))$ μ-интегрируема и*

$$\nu(A) = \int \mu'(A(t))\, d\mu(t). \tag{8}$$

Предложение 4. *Пусть $f \geqslant 0$ — числовая функция, определенная на $T \times T'$, ν-измеримая и обращающаяся в нуль на дополнении некоторого счетного объединения ν-интегрируемых множеств. Тогда функции $t \to \int^* f(t, t')\, d\mu'(t)$ и $t \to \int^* f(t, t')\, d\mu(t)$ измеримы соответственно относительно μ и μ' и имеем*

$$\int\int^* f(t, t')\, d\mu(t)\, d\mu'(t') = \int^* d\mu(t) \int^* f(t, t')\, d\mu'(t') =$$
$$= \int^* d\mu'(t') \int^* f(t, t')\, d\mu(t). \tag{9}$$

Это следует из предложения 4 § 3.

Схолия. *Пусть $\mathbf{f}$ есть функция, определенная на $T \times T'$, принимающая значения в $\overline{\mathbf{R}}$ или в банаховом пространстве, ν-измеримая и обращающаяся в нуль на дополнении некоторого счетного объединения ν-интегрируемых множеств. Для того чтобы три интеграла*

$$\int\int \mathbf{f}(t, t')\, d\mu(t)\, d\mu'(t'), \quad \int d\mu(t) \int \mathbf{f}(t, t')\, d\mu'(t'),$$
$$\int d\mu'(t') \int \mathbf{f}(t, t')\, d\mu(t)$$

существовали и были равны между собой, необходимо и достаточно, чтобы одно из двух чисел

$$\int^* d\mu(t) \int^* |\mathbf{f}(t, t')|\, d\mu'(t') \quad \text{и} \quad \int^* d\mu'(t') \int^* |\mathbf{f}(t, t')|\, d\mu(t)$$

было конечным.

Это является непосредственным следствием теоремы 1, предложения 4 и критерия интегрируемости (гл. IV, § 5, n° 6, теорема 5).

2. *Критерии измеримости относительно произведения двух мер*

Напомним наше соглашение считать произведение $0 \cdot (+\infty)$ равным 0. Оно имеет, в частности, такое следствие: если $f \geqslant 0$ есть числовая функция, определенная на локально компактном пространстве, наделенном положительной мерой λ, то $\lambda^*(af) = a\lambda^*(f)$ для любой постоянной a в пределах $0 \leqslant a \leqslant +\infty$. Для $a = 0$ это очевидно; если $a = +\infty$, то либо $\lambda^*(af) = a\lambda^*(f) = 0$, либо $\lambda^*(af) = a \cdot \lambda^*(f) = +\infty$, в зависимости от того, будет или не будет f λ-пренебрежимой; и наконец, если $0 < a < +\infty$, то мы знаем, что $\lambda^*(af) = a \cdot \lambda^*(f)$.

Предложение 5. *Для любой пары числовых функций $f \geqslant 0$ и $f' \geqslant 0$, определенных соответственно на T и на T', справедлива формула*

$$\iint^* f(t)\, f'(t')\, d\mu(t)\, d\mu'(t') = \left(\int^* f(t)\, d\mu(t)\right)\left(\int^* f'(t')\, d\mu'(t')\right) \tag{10}$$

(где оба члена всегда имеют смысл в силу соглашения $0 \cdot (+\infty) = 0$), *за исключением, быть может, того случая, когда один из множителей в правой части равен* 0, *а другой равен* $+\infty$.

На основании предложения 2 выводим, что

$$\int \int^* f(t)\, f'(t')\, d\mu(t)\, d\mu'(t) \geqslant \int^* d\mu(t) \int^* f(t)\, f'(t')\, d\mu'(t'),$$

и согласно замечанию, сделанному в начале n°, для любого $t \in T$ имеем

$$\int^* f(t)\, f'(t')\, d\mu'(t') = f(t) \cdot \int^* f'(t')\, d\mu'(t')$$

и

$$\int^* d\mu(t) \int^* f(t)\, f'(t')\, d\mu'(t') = \int^* \left(\int^* f'(t')\, d\mu'(t')\right) f(t)\, d\mu(t) =$$
$$= \left(\int^* f'(t')\, d\mu'(t')\right)\left(\int^* f(t)\, d\mu(t)\right).$$

Таким образом, достаточно доказать неравенство

$$\iint^* f(t)\, f'(t')\, d\mu(t)\, d\mu'(t) \leqslant \left(\int^* f(t)\, d\mu(t)\right)\left(\int^* f'(t')\, d\mu'(t')\right). \tag{11}$$

Оно очевидно, если правая часть равна $+\infty$. Случай, когда один из множителей в правой части равен 0, а другой $+\infty$, исключен в условии, и потому остается исследовать случай, когда оба множителя конечны. Тогда правая часть в соотношении (11) может (по определению верхнего интеграла) быть сколь угодно точно приближена произведениями вида

$$\left(\int^* g(t)\, d\mu(t)\right)\left(\int^* g'(t')\, d\mu'(t')\right),$$

где g и g' суть функции, полунепрерывные снизу соответственно на T и на T' и такие, что $f \leqslant g$ и $f' \leqslant g'$. Но функция $g(t)\, g'(t')$ полунепрерывна снизу в каждой точке из $T \times T'$; это очевидно для любой точки (t_0, t'_0), где $g(t_0) > 0$ и $g'(t'_0) > 0$ (Общая топ., Рез., § 6, n° 19); если же $g(t_0) = 0$ или $g'(t'_0) = 0$, то, благодаря соглашению, всегда имеем $g(t_0)\, g'(t'_0) = 0$, и значит, $g(t)\, g'(t')$ снова полунепрерывна снизу в этой точке. Итак, на основании предложения 1 имеем

$$\left(\int^* g(t)\, d\mu(t)\right)\left(\int^* g'(t')\, d\mu'(t')\right) = \int^* d\mu(t) \int^* g(t)\, g'(t')\, d\mu'(t') =$$
$$= \iint^* g(t)\, g'(t')\, d\mu(t)\, d\mu'(t') \geqslant \iint^* f(t)\, f'(t')\, d\mu(t)\, d\mu'(t'),$$

что устанавливает формулу (11) и тем самым завершает доказательство.

Следствие 1. *Пусть A есть μ-пренебрежимое подмножество из T и A' — подмножество из T', для которого $\mu'^*(A') < +\infty$. Тогда произведение $A \times A'$ пренебрежимо относительно $\mu \otimes \mu'$.*

Следствие 2. *Для любых двух числовых функций $f \geqslant 0$ и $f' \geqslant 0$, определенных, соответственно, на T и на T', справедлива формула*

$$\overline{\iint}^* f(t)\, f'(t')\, d\mu(t)\, d\mu'(t') =$$
$$= \left(\overline{\int}^* f(t)\, d\mu(t)\right)\left(\overline{\int}^* f'(t')\, d\mu'(t')\right). \quad (12)$$

Действительно, пусть K и K' — два компактных подмножества, соответственно, из T и T'. Мы уже знаем (предл. 5), что

$$\iint^* f(t)\, \varphi_K(t)\, f'(t')\, \varphi_{K'}(t')\, d\mu(t)\, d\mu'(t) =$$
$$= \left(\int^* f(t)\, \varphi_K(t)\, d\mu(t)\right)\left(\int^* f'(t')\, \varphi_{K'}(t')\, d\mu'(t')\right), \quad (13)$$

кроме, быть может, того случая, когда один из множителей справа равен 0, а другой $+\infty$. Но если, к примеру, $\int^* f\varphi_K\, d\mu = 0$, то из следствия 1 вытекает, что $f(t)\,\varphi_K(t)\, f'(t')\,\varphi_{K'}(t')$ обращается в нуль на дополнении некоторого множества, пренебрежимого относительно $\mu \otimes \mu'$. Стало быть, при имеющихся соглашениях равенство (13) справедливо без всяких ограничений. Тогда

$$\overline{\int\int}^* f(t)\, f'(t')\, d\mu(t)\, d\mu'(t') =$$
$$= \sup \int\int^* f(t)\, f'(t')\, \varphi_K(t)\, \varphi_{K'}(t')\, d\mu(t)\, d\mu'(t') =$$
$$= \sup \left(\int^* f(t)\, \varphi_K(t)\, d\mu(t)\right)\left(\int^* f'(t')\, \varphi_{K'}(t')\, d\mu'(t')\right),$$

когда K (соотв. K') пробегает множество компактных подмножеств из T (соотв. T'), и следствие доказано.

Следствие 3. *Пусть F, F' и G — три топологических пространства, и пусть и есть непрерывное отображение произведения $F \times F'$ в G. Пусть, далее, f (соотв. f') есть функция, определенная на T (соотв. T'), принимающая значения в F (соотв. F') и измеримая относительно μ (соотв. μ'). Тогда функция $(t, t') \to u(f(t), f'(t'))$ измерима относительно $\mu \otimes \mu'$.*

Достаточно, принимая во внимание теорему 1 из гл. IV, § 5, n° 3, показать, что отображение $(t, t') \to f(t)$ произведения $T \times T'$ в F измеримо относительно $\mu \otimes \mu'$. Итак, пусть K и K' — два компактных подмножества, соответственно, из T и T'. Существует такое разбиение множества K, составленное из μ-пренебрежимого множества N и из последовательности (K_n) компактных множеств, что сужение функции f на каждое из K_n непрерывно. Тогда сужение отображения $(t, t') \to f(t)$ на каждое из множеств $K_n \times K'$ непрерывно, и на основании следствия 1 множество $N \times K'$ пренебрежимо относительно $\mu \otimes \mu'$, что и завершает доказательство.

Следствие 4. *Если $A \subset T$ и $A' \subset T'$ измеримы (соответственно относительно μ и μ'), то произведение $A \times A'$ измеримо относительно $\mu \otimes \mu'$.*

Это сразу же вытекает из следствия 3.

Следствие 5. *Пусть F, F' и G — три банаховых пространства, и пусть $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \to [\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}]$ — непрерывное билинейное отображение произведения $F \times F'$ в G. Пусть, далее, $\mathbf{f}$ (соотв. $\mathbf{f}'$) — функция,* *определенная на* T (соотв. T'), *принимающая значения в* F (соотв. F') *и интегрируемая относительно* μ (соотв. μ'). *Тогда функция* $(t, t') \to [\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{f}'(t')]$ *интегрируема относительно* $\mu \otimes \mu'$ *и*

$$\int\int [\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{f}'(t')]\, d\mu(t)\, d\mu'(t') = \left[\left(\int \mathbf{f}(t)\, d\mu(t) \right) \cdot \left(\int \mathbf{f}'(t')\, d\mu'(t') \right) \right]. \quad (14)$$

Согласно следствию 3 функция $(t, t') \to [\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{f}'(t')]$ $(\mu \otimes \mu')$-измерима. С другой стороны, если b означает норму билинейного отображения $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \to [\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}]$, то, в силу предложения 5, имеем

$$\int\int^* |[\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{f}'(t')]|\, d\mu(t)\, d\mu'(t') \leqslant b \int\int^* |\mathbf{f}(t)| \cdot |\mathbf{f}'(t')|\, d\mu(t)\, d\mu'(t') = b \left(\int^* |\mathbf{f}(t)|\, d\mu(t) \right) \left(\int^* |\mathbf{f}'(t')|\, d\mu'(t') \right).$$

Это показывает, что функция $[\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{f}'(t')]$ интегрируема относительно $\mu \otimes \mu'$ (гл. IV, § 5, n° 6, теорема 5). Тогда формула (14) следует из теоремы Лебега — Фубини и из линейности интеграла (гл. IV, § 4, n° 2, теорема 1).

Следствие 6. *Если* $A \subset T$ *и* $A' \subset T'$ *интегрируемы* (*соответственно относительно* μ *и* μ'), *то произведение* $A \times A'$ *интегрируемо относительно* $\mu \otimes \mu'$ *и* $(\mu \otimes \mu')(A \times A') = \mu(A)\, \mu'(A')$.

Это сразу вытекает из следствия 5.

Следствие 7. *Следствие* 5 *и* 6 *остаются в силе, если всюду термин «интегрируемый» заменить на «существенно интегрируемый».*

Действительно, в обозначениях следствия 5, функция $(t, t') \to [\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{f}'(t')]$, согласно следствию 3, $(\mu \otimes \mu')$-измерима. С другой стороны, в силу следствия 2 имеем

$$\overline{\int\int}^* |[\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{f}'(t')]|\, d\mu(t)\, d\mu'(t') \leqslant b \left(\overline{\int}^* |\mathbf{f}(t)|\, d\mu(t) \right) \left(\overline{\int}^* |\mathbf{f}'(t')|\, d\mu'(t') \right),$$

где через b обозначена норма билинейного отображения $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \to [\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}]$. Из этого следует, что отображение $(t, t') \to [\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{f}'(t')]$ существенно интегрируемо относительно $\mu \otimes \mu'$ (§ 2, предл. 7).

Отсюда выводим, что

$$\iint [\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{f}'(t')]\,d\mu(t)\,d\mu'(t') =$$

$$= \lim \iint [\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{f}'(t')]\,\varphi_{K\times K'}(t, t')\,d\mu(t)\,d\mu'(t') =$$

$$= \lim \left[\left(\int \mathbf{f}(t)\,\varphi_K(t)\,d\mu(t)\right)\cdot\left(\int \mathbf{f}'(t')\,\varphi_{K'}(t')\,d\mu'(t')\right)\right] =$$

$$= \left[\left(\lim \int \mathbf{f}(t)\,\varphi_K(t)\,d\mu(t)\right)\cdot\left(\lim \int \mathbf{f}'(t')\,\varphi_{K'}(t')\,d\mu'(t')\right)\right],$$

где K (соотв. K') пробегает фильтрующееся множество компактных подмножеств из T (соотв. T') (следствие 5 и § 2, предл. 8). Тем самым следствие доказано.

Следствие 8. *Если множество $A \subset T$ локально μ-пренебрежимо, то $A \times T$ локально пренебрежимо относительно $\mu \otimes \mu'$.*

Действительно, если K (соотв. K') есть компактное подмножество из T (соотв. T'), то $(A \times T') \cap (K \times K') = (A \cap K) \times K'$, а так как множество $A \cap K$ μ-пренебрежимо, то $(A \cap K) \times K'$ $(\mu \otimes \mu')$-пренебрежимо в силу следствия 1.

Следствие 9. *Если мера μ* (соотв. μ') *сосредоточена на M* (соотв. M'), *то $\mu \otimes \mu'$ сосредоточена на $M \times M'$.*

Действительно, $T \times T' - M \times M'$ есть объединение множеств $(T - M) \times T$ и $T \times (T' - M)$, которые, согласно следствию 8, локально пренебрежимы относительно $\mu \otimes \mu'$.

Замечание. Пусть λ (соотв. λ') — произвольная мера на T (соотв. T'); если $\rho = \lambda \otimes \lambda'$, то $\rho^+ = \lambda^+ \otimes \lambda'^+ + \lambda^- \otimes \lambda'^-$ и $\rho^- = \lambda^+ \otimes \lambda'^- + \lambda^- \otimes \lambda'^+$; действительно, из следствия 9 вытекает, что эти две положительные меры являются независимыми (§ 5, предл. 13) и ρ равна их разности. Следовательно, $|\rho| = |\lambda| \otimes |\lambda'|$.

3. *Другие свойства произведения двух мер*

Предложение 6. *Пусть g* (соотв. g') *— конечная числовая функция, определенная на T* (соотв. T') *и локально интегрируемая относительно μ* (соотв. μ'). *Тогда функция $(t, t') \to g(t)\,g'(t')$* (обозначаемая сокращенно $g \otimes g'$; ср. гл. III, § 5, n° 3) *локально интегрируема относительно $\nu = \mu \otimes \mu'$ и*

$$(g\cdot\mu)\otimes(g'\cdot\mu') = (g\otimes g')\cdot(\mu\otimes\mu').$$

Доказательство сразу же сводится к рассмотрению случая $g \geqslant 0$, $g' \geqslant 0$. Если K и K' — компактные подмножества, соответственно, из T и T', то функция $g(t)\, g'(t')\varphi_{K \times K'}(t, t') = (g(t)\varphi_K(t))\,(g'(t')\varphi_{K'}(t'))$ ν-интегрируема на основании следствия 5 из предложения 5. С другой стороны, пусть $\mu_1 = g \cdot \mu$, $\mu_1' = g' \cdot \mu'$ и $\nu_1 = (g \otimes g') \cdot \nu$. Для $f \in \mathscr{K}(T)$ и $f' \in \mathscr{K}(T)$, согласно следствию 5 из предложения 5, имеем

$$\int\int f(t) f'(t') g(t) g'(t')\, d\nu(t, t') = \\ = \left(\int f(t) g(t)\, d\mu(t)\right)\left(\int f'(t') g'(t') d\mu'(t')\right),$$

откуда $\nu_1 = \mu_1 \otimes \mu_1'$ (гл. III, § 5, n° 1, теорема 1).

Предложение 7. *Пусть* π (соотв. π') *есть* μ-*собственное* (соотв. μ'-*собственное*) *отображение пространства* T (соотв. T') *в локально компактное пространство* T_1 (соотв. T_1'). *Тогда отображение* $\pi \times \pi'$ *будет* $(\mu \otimes \mu')$-*собственным и*

$$(\pi \times \pi')(\mu \otimes \mu') = \pi(\mu) \otimes \pi'(\mu').$$

В самом деле, отображение $\pi \times \pi'$ $(\mu \otimes \mu')$-измеримо на основании следствия 3 из предложения 5. С другой стороны, если K (соотв. K') есть компактное подмножество из T_1 (соотв. T_1'), то $\overset{-1}{\pi}(K)$ и $\overset{-1}{\pi'}(K')$ существенно интегрируемы, соответственно, относительно μ и μ', и значит, множество $\overset{-1}{\pi}(K) \times \overset{-1}{\pi'}(K')$ существенно интегрируемо относительно $\mu \otimes \mu'$ (следствие 7 из предл. 5). Этим доказано, что отображение $\pi \times \pi'$ $(\mu \otimes \mu')$-собственно. Пусть теперь $\mu_1 = \pi(\mu)$, $\mu_1' = \pi'(\mu')$ и $\nu_1 = (\pi \times \pi')(\mu \otimes \mu')$; тогда для $f \in \mathscr{K}(T_1)$ и $f' \in \mathscr{K}(T_1')$ получаем равенство

$$\int\int f(\pi(t)) f'(\pi'(t'))\, d\mu(t)\, d\mu'(t') = \\ = \left(\int f(\pi(t))\, d\mu(t)\right)\left(\int f'(\pi'(t'))\, d\mu'(t')\right)$$

(следствие 7 из предл. 5), которое показывает, что $\nu_1 = \mu_1 \otimes \mu_1'$ (гл. III, § 5, n° 1, теорема 1).

Предложение 8. *Пусть* X (соотв. X') — *локально компактное подпространство пространства* T (соотв. T'). *Тогда мера* $(\mu \otimes \mu')_{X \times X'}$, *индуцируемая на локально компактное подпростран-*

ство $X \times X'$ *с пространства* $T \times T'$, *равна произведению* $\mu_X \otimes \mu'_{X'}$ *мер, индуцируемых на* X *и на* X', *соответственно, мерами* μ *и* μ'.

В самом деле, если $f \in \mathscr{K}(X)$ и $f' \in \mathscr{K}(X')$, то, согласно следствию 5 из предложения 5, справедливо равенство

$$\iint\limits_{X\times X'} f(t)\, f'(t')\, d\mu(t)\, d\mu'(t') = \Bigl(\int\limits_X f(t)\, d\mu(t)\Bigr)\Bigl(\int\limits_X f'(t')\, d\mu'(t')\Bigr),$$

которое, по определению индуцированной меры (§ 1, n° 1), показывает, что $(\mu \otimes \mu')_{X\times X'} = \mu_X \otimes \mu'_{X'}$ (гл. III, § 5, n° 1, теорема 1).

4. *Интегрирование относительно конечного произведения мер*

Предыдущие результаты без труда распространяются на произведение конечного числа мер. Пусть, например, T_1, T_2 и T_3 — три локально компактных пространства, μ_i — положительная мера на T_i ($i = 1, 2, 3$), и пусть $\nu = \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \mu_3$ есть мера-произведение на $T = T_1 \times T_2 \times T_3$. Пусть, далее, $\mathbf{f}$ есть ν-интегрируемая функция со значениями в $\overline{\mathbf{R}}$ или в банаховом пространстве; тогда после первого применения теоремы Лебега — Фубини будет установлено, что, за исключением точек $(t_1, t_2) \in T_1 \times T_2$, составляющих пренебрежимое (относительно $\mu_1 \otimes \mu_2$) множество, функция $t_3 \to \mathbf{f}(t_1, t_2, t_3)$ μ_3-интегрируема, что функция $(t_1, t_2) \to \int \mathbf{f}(t_1, t_2, t_3)\, d\mu_3(t_3)$, определенная почти всюду на $T_1 \times T_2$, $(\mu_1 \otimes \mu_2)$-интегрируема и

$$\int\int\int \mathbf{f}(t_1, t_2, t_3)\, d\nu(t_1, t_2, t_3) =$$
$$= \int\int d\mu_1(t_1)\, d\mu_2(t_2) \int \mathbf{f}(t_1, t_2, t_3)\, d\mu_3(t_3).$$

Второе применение той же теоремы показывает, что для почти всех $t_1 \in T_1$ функция $t_2 \to \int \mathbf{f}(t_1, t_2, t_3)\, d\mu_3(t_3)$ определена почти всюду на T_2 и μ_2-интегрируема; кроме того, функция $t_1 \to \int d\mu_2(t_2) \int \mathbf{f}(t_1, t_2, t_3)\, d\mu_3(t_3)$, определенная почти всюду на T_1, μ_1-интегрируема и

$$\iiint \mathbf{f}(t_1, t_2, t_3)\, d\nu(t_1, t_2, t_3) = \\ = \int d\mu_1(t_1) \int d\mu_2(t_2) \int \mathbf{f}(t_1, t_2, t_3)\, d\mu_3(t_3).$$

Точно так же доказывается, что для почти всех $t_1 \in T_1$ функция $(t_2, t_3) \to \mathbf{f}(t_1, t_2, t_3)$ $(\mu_2 \otimes \mu_3)$-интегрируема, что функция $t_1 \to \to \iint \mathbf{f}(t_1, t_2, t_3)\, d\mu_2(t_2)\, d\mu_3(t_3)$, определенная почти всюду, μ_1-интегрируема и

$$\iiint \mathbf{f}(t_1, t_2, t_3)\, d\nu(t_1, t_2, t_3) = \\ = \int d\mu_1(t_1) \iint \mathbf{f}(t_1, t_2, t_3)\, d\mu_2(t_2)\, d\mu_3(t_3).$$

Мы предоставляем читателю обобщить тем же способом другие результаты, полученные выше для произведения двух мер.

5. *Приложение: мера евклидова шара в* $\mathbf{R}^n$

Пусть μ — мера Лебега на $\mathbf{R}$ и μ_n — мера Лебега на $\mathbf{R}^n$, являющаяся произведением n множителей, равных μ. Вычислим меру $V_n = \mu_n(\mathbf{B}_n)$ единичного евклидова шара. В силу следствия из теоремы 1, имеем

$$V_n = \int_{-1}^{+1} \mu_{n-1}(\mathbf{B}_n(z_n))\, dz_n. \tag{15}$$

Но срез $\mathbf{B}_n(z_n)$ есть подмножество из $\mathbf{R}^{n-1}$, определенное условием $\sum_{i=1}^{n-1} z_i^2 \leqslant 1 - z_n^2$, или, другими словами, это есть множество, полученное из шара $\mathbf{B}_{n-1}$ посредством гомотетии с коэффициентом $\sqrt{1 - z_n^2}$. Но из предложения 7 и формулы $\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\, dz$ для любой функции $f \in \mathcal{K}(\mathbf{R})$ сразу вытекает, что образ меры μ_{n-1} при гомотетии $\mathbf{x} \to \alpha\mathbf{x}$ есть мера $\alpha^{1-n}\mu_{n-1}$. Следовательно, $\mu_{n-1}(\mathbf{B}_n(z_n)) = \left(\sqrt{1-z_n^2}\right)^{n-1} V_{n-1}$. Подставляя это выражение в формулу (15) и сделав замену переменного $z_n = \sin\varphi$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$, получим формулу

$$V_n = V_{n-1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^n \varphi \, d\varphi = 2V_{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \varphi \, d\varphi. \tag{16}$$

Но (Функции действ. перем., гл. VII, § 1, n° 3, формула (20))

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)};$$

подставляя это значение в формулу (16) и учитывая значение $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ (Функции действ. перем., гл. VII, § 1, n° 3, формула (21)), получим окончательно, что 168

$$V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}. \tag{17}$$

Упражнения. 1) Пусть T и T' — два локально компактных пространства, μ — положительная мера на T и μ' — положительная мера на T'. Показать, что если мера μ' ограничена, то проекция pr_1 произведения $T \times T'$ на T есть $(\mu \otimes \mu')$-собственное отображение и $\mathrm{pr}_1(\mu \otimes \mu') = a \cdot \mu$, где $a = \mu'(T')$. Получить отсюда пример $(\mu \otimes \mu')$-пренебрежимого подмножества из $T \times T'$, проекция которого на T не является μ-измеримой.

2) Пусть T — интервал $[0, 1]$ из $\mathbf{R}$, наделенный топологией, индуцируемой топологией $\mathbf{R}$, и T' — интервал $[0, 1]$ из $\mathbf{R}$, наделенный дискретной топологией; пусть, далее, μ есть мера Лебега на T, μ' есть дискретная мера на T', определенная при помощи массы $+1$ в каждой точке из T', и $\nu = \mu \otimes \mu'$ есть мера-произведение на $X = T \times T'$.

a) Для любого $t \in T$ множество $\{t\}$ μ-пренебрежимо, а множество $\{t\} \times T'$ уже не будет ν-пренебрежимым.

b) «Диагональ» Δ из $T \times T'$ (множество точек (t, t), где t пробегает интервал $[0, 1]$) есть такое замкнутое в $T \times T'$ локально

ν-пренебрежимое, но не ν-пренебрежимое множество, что для любого $t \in T$ справедливо равенство $\mu'(\Delta(t)) = 1$, а для любого $t' \in T'$ — равенство $\mu(\overset{-1}{\Delta}(t')) = 0$ (ср. § 3, упр. 3).

c) Рассмотрим на пространстве $X \times X = Y$ меру-произведение $\rho = \nu \otimes \nu$. Показать, что в Y существует такое локально ρ-пренебрежимое множество A, что для любого $x \in X$ множества $A(x)$ и $\overset{-1}{A}(x)$ ν-измеримы, но не локально пренебрежимы. (Если $x = (t, t')$, где $t \in T$, а $t' \in T'$, то определить A так, чтобы $A(x)$ содержало все точки $(s, t) \in X$, где $0 \leqslant s \leqslant 1$).

3) Пусть T — локально компактное пространство, μ — положительная мера на T и $f \geqslant 0$ — числовая функция, определенная на T. В пространстве-произведении $T \times \mathbf{R}_+$ через D_f обозначим множество тех точек (t, x), для которых $0 \leqslant x \leqslant f(t)$; с другой стороны, пусть ν есть мера Лебега на $\mathbf{R}_+$.

a) Показать, что для того, чтобы f была μ-измерима, необходимо и достаточно, чтобы множество D_f было измеримо относительно меры-произведения $\lambda = \mu \otimes \nu$. (Для доказательства необходимости показать, что если f μ-измерима, то для любого компактного подмножества K из T множество $D_f \cap (K \times \mathbf{R}_+)$ является объединением λ-пренебрежимого множества и счетного семейства множеств вида $A \times I$, где A есть μ-измеримое множество, а I — интервал из $\mathbf{R}_+$. Для доказательства достаточности показать, что если условие выполнено, то для любого компактного подмножества K из T найдется такое всюду плотное множество $H \in \mathbf{R}_+$, что при любом $\alpha \in H$ множество $K \cap \overset{-1}{f}([\alpha, +\infty])$ μ-измеримо: воспользоваться для этого следствием из теоремы 1.)

b) Показать, что для μ-интегрируемости функции f необходимо и достаточно, чтобы множество D_f было λ-интегрируемо, и тогда $\lambda(D_f) = \int f\,d\mu$. Кроме того, если через g обозначена убывающая числовая функция на $\mathbf{R}_+$, определяемая равенством $g(t) = \mu(\overset{-1}{f}([t, +\infty]))$ (и, возможно, равная $+\infty$ при $t = 0$), то $\int f\,d\mu = \int_0^{+\infty} g(t)\,dt$.

4) Пусть T интервал $[0, 1]$ из $\mathbf{R}$ и μ — мера Лебега на T. Пусть, далее, для любого целого $n > 0$ $A'_n = \left[\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^{n+1}}\right[$, $A''_n = \left[\frac{3}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n-1}}\right[$, и пусть в пространстве-произведении $T \times T$ $B'_n = A'_n \times A'_n$, $B''_n = A''_n \times A''_n$, $C'_n = A'_n \times A''_n$, $C''_n = A''_n \times A'_n$. Положим $f(t, t') = 4^{n+1}$ на B'_n и B''_n, $f(t, t') = -4^{n+1}$ на C'_n и C''_n при любом целом $n > 0$ и $f(t, t') = 0$ в остальных точках из $T \times T'$. Показать, что два интеграла $\int d\mu(t) \int f(t, t')\,d\mu(t)$ и $\int d\mu(t) \int f(t, t')\,d\mu(t')$ определены

и равны между собой и, однако, функция f не интегрируема относительно меры $\mu \otimes \mu$.

°5) Пусть T и T' — два локально компактных пространства, μ — положительная мера на T и μ' — положительная мера на T'; предположим, что любое компактное подмножество из T метризуемо. Пусть, далее, f — такое отображение произведения $T \times T'$ в метризуемое пространство G, что: 1° при любом $t \in T$ отображение $t' \to f(t, t')$ μ'-измеримо; 2° при любом $t' \in T'$ отображение $t \to f(t, t')$ непрерывно. Показать, что при этих условиях отображение f $(\mu \otimes \mu')$-измеримо. (Заметить, что для любого компактного подмножества K из T сужение функции f на $K \times T'$ служит пределом для некоторой последовательности $(\mu \otimes \mu')$-измеримых функций.)

°6) a) Пусть T — локально компактное пространство, ν — положительная мера на T, I — интервал из $\mathbf{R}$ и μ — положительная мера на I. Далее, пусть A — такое подмножество произведения $I \times T$, что: 1° при любом $x \in I$ срез $A(x) \subset T$ множества A по x ν-измерим; 2° отношение $x \leqslant y$ влечет $A(x) \subset A(y)$. Показать, что A $(\mu \otimes \mu)$-измеримо. (Свести к случаю, когда I и T компактны, а μ есть рассеянная мера; рассмотреть такую возрастающую последовательность $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ точек из I с концами x_0 и x_n, что $\mu([x_i, x_{i+1}]) \leqslant \varepsilon$ при $0 \leqslant i \leqslant n-1$, и выбрать в $I \times T$ два подмножества B и C, измеримые относительно $\lambda = \mu \otimes \nu$ и такие, что $B \subset A \subset C$ и $\lambda(C - B) \leqslant \varepsilon\nu(T)$.)

b) Вывести из a), что если f есть такая определенная на $I \times T$ числовая функция, что: 1° для каждого $x \in I$ функция $t \to f(x, t)$ ν-измерима; 2° для каждого $t \in T$ функция $x \to f(x, t)$ возрастает, — то f $(\mu \otimes \nu)$-измерима.

c) Пусть g — такая определенная на $I \times T$ числовая функция, что: 1° для каждого $x \in I$ функция $t \to g(x, t)$ ν-измерима; 2° для каждого $t \to T$ функция $x \to g(x, t)$ монотонна. Вывести из b), что g $(\mu \otimes \nu)$-измерима. (Пусть $T_1 \subset T$ — множество тех $t \in T$, для которых отображение $x \to g(x, t)$ возрастает; показать, что T_1 ν-измеримо. Для этого любой паре (r_1, r_2) рациональных чисел $r_1 \leqslant r_2$ из I сопоставить множество D_{r_1, r_2} тех точек $t \in T$, для которых $g(r_1, t) \leqslant g(r_2, t)$, и выразить T_1 в виде пересечения множеств D_{r_1, r_2}.)

°7) a) Пусть T и T' — два локально компактных пространства, и пусть T' имеет счетный базис. Далее, пусть μ — положительная мера на T, а μ' — положительная мера на T'. И наконец, пусть $f \geqslant 0$ — числовая функция, определенная на $T \times T'$, ограниченная на любом компактном подмножестве из $T \times T'$ и такая, что: 1° для почти всех $t \in T$ функция $t' \to f(t, t')$ μ'-измерима; 2° для любой функции $h \in \mathcal{K}(T')$ функция $t \to \int f(t, t')\, h(t')\, d\mu'(t')$, определенная почти всюду, μ-измерима. Показать, что при этих условиях существует такая измеримая относительно $\mu \otimes \mu'$ функция g, что для почти всех $t \in T$ равенство $f(t, t') = g(t, t')$ имеет место всюду, кроме некоторого (зависящего от t) μ'-пренебрежимого множества A_t. (Показать, что для любой функции $\varphi \in \mathcal{K}(T \times T')$ функция $t' \to f(t, t')\varphi(t, t')$ μ'-интегрируема для почти всех $t \in T$ и что функция $t \to \int f(t, t')\varphi(t, t')\,d\mu'(t')$, определенная почти всюду, μ-интегрируема; использовать лемму 1 из гл. III, § 5, n° 1. Затем заметить, что $\varphi \to \int d\mu(t) \int (t, t')\varphi(t, t')\,d\mu'(t')$ есть положительная мера на $T \times T'$, имеющая базис $\mu \otimes \mu'$, и применить теорему Лебега — Никодима; наконец, воспользоваться тем фактом, что в $\mathcal{K}(T')$ существует счетное всюду плотное множество.)

b) Предположим, кроме того, что T метризуемо. Показать, что условия из a) будут выполнены, если: 1° для почти всех $t' \in T'$ функция $t \to f(t, t')$ μ-измерима; 2° для почти всех $t \in T$ функция $t' \to f(t, t')$ непрерывна почти всюду (относительно μ'). (Использовать упр. 13 из гл. IV, § 5.)

c) Возьмем $T = T' = [0, 1]$ и примем гипотезу континуума (Теор. мн., гл. III, § 6, n° 4). Пусть $x \prec y$ есть отношение полного упорядочения в T, при котором не существует наибольшего элемента и при котором для любого $x \in T$ множество элементов $z \prec x$ счетно. Показать, что если в качестве $\mu = \mu'$ взять меру Лебега, то характеристическая функция f множества тех пар (t, t'), в которых $t \prec t'$ удовлетворяет условиям из a), но в то же время $\int f(t, t')\,d\mu(t) = 0$ при любом $t' \in T$ и $\int f(t, t')\,d\mu'(t') = 1$ при любом $t \in T$.

8) Пусть T — локально компактное пространство, μ — положительная мера на T, A — дискретное пространство и λ — мера на A, определенная при помощи массы $+1$ в каждой точке из A.

a) Для того чтобы отображение f произведения $A \times T$ в топологическое пространство было $(\lambda \otimes \mu)$-измеримо, необходимо и достаточно, чтобы при любом $\alpha \in A$ отображение $t \to f(\alpha, t)$ было μ-измеримо.

b) Для того чтобы функция $\mathbf{f}$, определенная на $A \times T$ и принимающая значения в $\overline{\mathbf{R}}$ или в банаховом пространстве, была $(\lambda \otimes \mu)$-интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы: 1° функция $t \to \mathbf{f}(\alpha, t)$ всюду, кроме счетного множества значений $\alpha \in A$, обращалась тождественно в нуль; 2° для любого $\alpha \in A$ функция $t \to \mathbf{f}(\alpha, t)$ была μ-интегрируема; 3° выполнялось условие $\sum\limits_{\alpha \in A} \int |\mathbf{f}(\alpha, t)|\,d\mu(t) < +\infty$.

Для того чтобы $\mathbf{f}$ была существенно $(\lambda \otimes \mu)$-интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы: 1° для каждого $\alpha \in A$ функция $t \to \mathbf{f}(\alpha, t)$

была существенно μ-интегрируема; 2° выполнялось условие

$$\sum_{\alpha \in A} \int |\mathbf{f}(\alpha, t)|\, d\mu(t) < +\infty;$$

тогда

$$\int\int \mathbf{f}\, d\lambda\, d\mu = \sum_{\alpha \in A} \int \mathbf{f}(\alpha, t)\, d\mu(t).$$

c) Пусть X — локально компактное пространство и $(\alpha, t) \to \rho_{\alpha, t}$ — семейство положительных мер на X ($\alpha \in A$, $t \in T$). Для того чтобы семейство $(\alpha, t) \to \rho_{\alpha, t}$ было $(\lambda \otimes \mu)$-согласовано, необходимо и достаточно, чтобы при любом $\alpha \in A$ семейство $t \to \rho_{\alpha, t}$ было μ-согласовано и чтобы семейство мер $\left(\int \rho_{\alpha, t}\, d\mu(t)\right)_{\alpha \in A}$ было суммируемо.

9) Пусть u и v — две возрастающие функции, непрерывные справа на $\mathbf{R}$ и такие, что $u(0-) = v(0-) = 0$. Пусть, далее, w — возрастающая функция, непрерывная справа на $\mathbf{R}$ и заданная соотношениями: $w(t) = u(t)\, v(t)$ для $t \geqslant 0$ и $w(t) = -u(t)\, v(t)$ для $t < 0$; пусть λ, μ и ν — меры Стилтьеса, отвечающие, соответственно, функциям u, v и w (§ 6, упр. 5).

Всякой функции $\mathbf{f}$, определенной на $\mathbf{R}$ и принимающей значения в $\overline{\mathbf{R}}$ или в банаховом пространстве F, поставим в соответствие функцию $\overline{\mathbf{f}}$, определенную на $\mathbf{R}^2$ условиями: $\overline{\mathbf{f}}(x, y) = \mathbf{f}(x)$, если $y < x$, и $\overline{\mathbf{f}}(x, y) = \mathbf{f}(y)$, если $y \geqslant x$. Показать, что для того, чтобы $\mathbf{f}$ была ν-интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы $\overline{\mathbf{f}}$ была интегрируема относительно меры-произведения $\lambda \otimes \mu$, и что тогда $\int \mathbf{f}\, d\nu = \int\int \overline{\mathbf{f}}\, d\lambda\, d\mu$ (сначала доказать это для характеристических функций интервалов). Вывести отсюда формулу

$$\int \mathbf{f}(x)\, dw(x) = \int \mathbf{f}(x)\, v(x-)\, du(x) + \int \mathbf{f}(x)\, u(x+)\, dv(x).$$

В частности, если u и v *непрерывны* на $\mathbf{R}$, то имеет место *формула интегрирования по частям*

$$\int_a^b u(x)\, dv(x) = u(b)\, v(b) - u(a)\, v(a) - \int_a^b v(x)\, du(x).$$

10) Пусть T и X — два локально компактных пространства, λ — положительная мера на T и μ — такая ограниченная положительная мера на X, что $\mu(X) = 1$. Пусть, далее, $f > 0$ есть числовая функция на $T \times X$, интегрируемая вместе с функцией $\log f$ относительно меры $\lambda \otimes \mu$. Доказать неравенство

$$\log\left(\int \exp\left(\int \log f\, d\mu\right) d\lambda\right) \leqslant \int \left(\log \int f\, d\lambda\right) d\mu$$

и показать, что равенство может достигаться лишь для функции f, эквивалентной функции вида $g \otimes h$ (применить неравенство для среднего геометрического (гл. IV, § 6, упр. 7d)) для любого $t \in T$ к функции

$$x \to \frac{f(t, x)}{\int f(t, x)\, d\lambda(t)}\Big).$$

11) Пусть $p \geqslant 1$ — конечное действительное число, T и X — два локально компактных пространства, λ — положительная мера на T, μ — положительная мера на X и $f \geqslant 0$ — определенная на $T \times X$ функция, интегрируемая вместе с f^p относительно меры $\lambda \otimes \mu$. Доказать неравенство

$$\left(\int\left(\int f\, d\mu\right)^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \int\left(\int f^p\, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} d\mu.$$

(Для любого $t \in T$ применить неравенство Гёльдера к функции $x \to f(t, x)$, заданной соотношением

$$f(t, x) = g(t, x)\left(\int f^p(t, x)\, d\lambda(t)\right)^{\frac{1}{pq}},$$

где q — показатель, сопряженный с p.) Показать, что равенство может достигаться лишь для функции f, эквивалентной функции вида $g \otimes h$.

°12) Пусть T_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — n локально компактных пространств и μ_i — положительная мера на T_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Для каждого индекса i через E_i обозначим произведение $\prod\limits_{j \neq i} T_j$; пусть $f_i \geqslant 0$ — функция, измеримая относительно $\mu = \bigotimes\limits_{i=1}^{n} \mu_i$ на $T = \prod\limits_{i=1}^{n} T_i$ и *не зависящая* от t_i; показать, что если для $1 \leqslant k \leqslant n$ функция f_k^{n-1} интегрируема относительно меры $\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_{k-1} \otimes \mu_{k+1} \otimes \ldots \otimes \mu_n$, то функция $f_1 f_2 \ldots f_n$ μ-интегрируема и

$$\int f_1 f_2 \ldots f_n\, d\mu_1\, d\mu_2 \ldots d\mu_n \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} J_k\right)^{\frac{1}{n-1}},$$

если для каждого индекса k положить

$$J_k = \int t_k^{n-1}\, d\mu_1 \ldots d\mu_{k-1}\, d\mu_{k+1} \ldots\, d\mu_n$$

(провести индукцию по n, применив теорему Лебега — Фубини и неравенство Гёльдера).

Вывести отсюда, что если A есть μ-измеримое подмножество из T, A_i — его проекция на E_i и если A_i интегрируемо и имеет меру m_i (относительно меры $\bigotimes\limits_{j\neq i}\mu_j$ на E), то A μ-интегрируемо и

$$\mu(A)\leqslant(m_1m_2\ldots m_n)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Выявить случай равенства в этих двух неравенствах.

Обобщить на случай, когда вместо n произведений из $n-1$ пространств T_i рассматривается $\binom{n}{p}$ произведений из p пространств T_i и когда на T интегрируется произведение $\binom{n}{p}$ положительных функций, каждая из которых зависит только от p переменных t_i. Например, показать, что если $F_{ij}=T_i\times T_j$ $(i<j)$ и если f_{ij} зависит лишь от переменных t_i и t_j, то

$$\int\Big(\prod_{i<j}f_{ij}\Big)\,d\mu_1\,d\mu_2\ldots d\mu_n\leqslant\Big(\prod_{i<j}\int f_{ij}^{n-1}\,d\mu_i\,d\mu_j\Big)^{\frac{1}{n-1}}.$$

°13) Пусть $(T_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство компактных пространств, и пусть для каждого $\iota\in I$ через μ_ι обозначена положительная мера на T_ι с общей массой, равной 1. Пусть T есть пространство-произведение $\prod\limits_{\iota\in I}T_\iota$ и μ есть мера-произведение $\bigotimes\limits_{\iota\in I}\mu_\iota$ на T (гл. III, § 5, n° 5).

a) Пусть для любого $\iota\in I$ через K_ι обозначено компактное подмножество из T_ι; показать, что если $K=\prod\limits_{\iota\in I}K_\iota$, то $\mu(K)=$ $=\prod\limits_{\iota\in I}\mu_\iota(K_\iota)$.

b) Пусть M — компактное подмножество из T и $\mu(M)>0$. Показать, что существует такое *счетное* подмножество J из I, что если положить $H=I-J$, $T_J=\prod\limits_{\iota\in J}T_\iota$, $\mu_J=\bigotimes\limits_{\iota\in J}\mu_\iota$ и $T_H=\prod\limits_{\iota\in H}T_\iota$, то $M\subset$ $\subset N\times T_H$, где N есть μ_J-измеримое подмножество из T_J, удовлетворяющее равенству $\mu_J(N)=\mu(M)$. (Заметить, что для любого $n>0$ существует открытая окрестность множества M, являющаяся объединением конечного числа элементарных множеств, имеющих меру, отличающуюся от $\mu(M)$ менее чем на $\frac{1}{n}$.) Вывести отсюда, что для почти всех $x\in N$ срез $M(x)\subset T_H$ (если отождествить T с произведением $T_J\times T_H$) содержит произведение носителей мер μ_ι для $\iota\in H$ (воспользоваться теоремой Лебега — Фубини).

c) Показать, что если I *счетно* и если для любого $\iota\in I$ A_ι есть μ_ι-измеримое подмножество из T_ι, то множество $A=\prod\limits_{\iota\in I}A_\iota$ μ-измеримо и $\mu(A)=\prod\limits_{\iota\in I}\mu_\iota(A_\iota)$.

d) Предположим, что I несчетно. Пусть для любого $\iota \in I$ через A_ι обозначено μ_ι-измеримое подмножество из T_ι. Для того чтобы $A = \prod_{\iota \in I} A_\iota$ было μ-измеримо, необходимо и достаточно, чтобы имел место один из следующих двух случаев: 1° $\prod_{\iota \in I} \mu_\iota (A_\iota) = 0$; 2° A_ι содержит носитель меры μ_ι для всех индексов ι, кроме, быть может, некоторого счетного подмножества из I. В каждом из двух случаев имеем $\mu(A) = \prod_{\iota \in I} \mu_\iota (A_\iota)$. (Предположив, что ни один из этих случаев не выполняется, показать, что тогда можно ограничиться рассмотрением случая, когда $\mu_\iota (A_\iota) = 1$ при любом $\iota \in I$. Используя b), показать, что ни A, ни $T - A$ не могут содержать компактное множество с мерой, отличной от нуля.)

°14) Пусть K — интервал $[0, 1]$ из $\mathbf{R}$, λ — мера Лебега на K, A — несчетное множество и μ — мера на $T = K^A$, являющаяся произведением мер λ на каждом из сомножителей.

a) Показать, что всякое замкнутое *метризуемое* подпространство X пространства T μ-пренебрежимо (использовать упр. 13b) и упр. 11 из «Общей топ.», гл. IX, § 2).

b) Пусть Y — локально компактное пространство со счетным базисом, ν — положительная мера на Y и π — ν-собственное отображение пространства Y в T. Показать, что образ $\pi(\nu)$ независим с μ (использовав a), показать, что мера $\pi(\nu)$ сосредоточена на μ-пренебрежимом множестве).

15) Пусть $(T_\iota)_{\iota \in I}$ — произвольное семейство компактных пространств, и пусть для каждого $\iota \in I$ через μ_ι обозначена положительная мера на T_ι с общей массой 1; пусть, далее, μ есть мера-произведение $\bigotimes_{\iota \in I} \mu_\iota$ на $T = \prod_{\iota \in I} T_\iota$. Для любого разбиения (L, M) множества I на два множества отождествим T с произведением $T_L \times T_M$, где $T_L = \prod_{\iota \in L} T_\iota$; для любого $t \in T$ положим $t_L = \mathrm{pr}_L t$, так что t отождествляется с (t_L, t_M); пусть μ_L есть мера $\bigotimes_{\iota \in L} \mu_\iota$ на T_L. Пусть $p \geqslant 1$ — конечное действительное число; для любой функции $\mathbf{f}$ из $\mathscr{L}_F^p (T, \mu)$ (F — банахово пространство или $F = \overline{\mathbf{R}}$) положим $\mathbf{f}_L (t) = \int \mathbf{f}(t_L, t_M)\, d\mu_M (t_M)$. Показать, что $\mathbf{f}_L$ стремится к $\mathbf{f}$ *в среднем порядка* p по фильтрующемуся множеству *конечных* подмножеств L из I, а $\mathbf{f}_M$ стремится *в среднем порядка* p к постоянной функции, равной $\int \mathbf{f}\, d\mu$. (Приблизить $\mathbf{f}$ непрерывной функцией, зависящей лишь от конечного числа переменных.)

Вывести отсюда, что если μ-измеримое подмножество A из T таково, что для любого $t \in A$ всякая точка $t' \in T$ с координатами, равными координатам точки t, кроме *конечного* числа индексов, также принадлежит A, то либо $\mu(A)=0$, либо $\mu(A)=1$.

°16) Пусть (T_n) — бесконечная последовательность компактных пространств, μ_n — положительная мера с общей массой, равной 1 на T_n, и μ — мера-произведение $\bigotimes_{n=1}^{\infty} \mu_n$ на $T=\prod_{n=1}^{\infty} T_n$.

a) Пусть $f \geqslant 0$ — μ-интегрируемая функция на T. Пусть (L_n) — возрастающая последовательность подмножеств из N, и, полагая, что $M_n=\mathrm{N}-L_n$, пусть $g=\sup\limits_n f_{L_n}$, $h=\sup\limits_n f_{M_n}$ (обозначения упр. 15). Пусть для любого $\alpha>0$ через A_α обозначено множество точек $t \in T$, в которых $g(t)>\alpha$, а через B_α — *множество* точек $t \in T$, в которых $h(t)>\alpha$. Показать, что $\alpha \cdot \mu(A_\alpha) \leqslant \int f\,d\mu$ и $\alpha \cdot \mu(B_\alpha) \leqslant \int f\,d\mu$. (Заметить, что A_α есть множество тех $t \in T$, для которых по крайней мере одно из значений $f_{L_n}(t)>\alpha$, и выразить его в виде счетного объединения множеств G_n, не имеющих попарно общих точек и таких, что $\alpha \cdot \mu(G_n) \leqslant \int\limits_{G_n} f\,d\mu$.)

b) Предположим, что (L_n) есть возрастающая последовательность конечных подмножеств из N, объединение которых составляет N. Показать, что f_{L_n} стремится к f почти всюду и что f_{M_n} стремится почти всюду к постоянной $\int f\,d\mu$ на T. (Для любого $\varepsilon>0$ рассмотреть непрерывную функцию, зависящую от конечного числа переменных и такую, что $\int |f-g|\,d\mu \leqslant \varepsilon$, а затем применить a) к функции $|f-g|$.)

°17) Пусть $(T_\iota)_{\iota \in I}$ — произвольное семейство компактных пространств; пусть для каждого $\iota \in I$ через μ_ι обозначена положительная мера на T_ι с общей массой, равной 1, и пусть μ есть мера-произведение $\bigotimes_{\iota \in I} \mu_\iota$ на $T=\prod_{\iota \in I} T_\iota$. Далее, пусть для любого $\iota \in I$, $f_\iota \geqslant 0$ есть функция на T_ι, μ_ι-интегрируемая и такая, что $\int f_\iota d\mu_\iota \leqslant 1$; положим $\mu'_\iota = f_\iota \cdot \mu_\iota$ и $\mu' = \bigotimes_{\iota \in I} \mu'_\iota$ (гл. III, § 5, упр. 8). Допустим, что $\mu' \neq 0$.

a) Для любого конечного подмножества J из I положим $T_J = \prod_{\iota \in J} T_\iota$, $\mu_J = \bigotimes_{\iota \in I} \mu_\iota$, $\mu'_J = \bigotimes_{\iota \in J} \mu'_\iota$, $f_J(t) = \prod_{\iota \in J} f_\iota(\mathrm{pr}_\iota t)$, $g_J = \sqrt{f_J}$, $\mu''_J = \sqrt{\mu_J \mu'_J}$ (§ 5, n° 9) и $\rho(\mu_J, \mu'_J) = \mu''_J(T_J) = \int g_J d\mu_J$. Показать, что для того, чтобы функции g_J сходились в смысле среднего квадратического к функции из $\mathscr{L}^2(T, \mu)$ по упорядоченному фильтрующемуся множеству конечных подмножеств из I, необходимо и достаточно, чтобы произведение чисел $\rho(\mu_\iota, \mu'_\iota)$ сходилось в $\mathbf{R}^*_+$, то есть было > 0. (Оценить для двух конечных подмножеств J, L, $J \subset L$, норму $N_2(g_J - g_L)$ при помощи $\rho(\mu_\iota, \mu'_\iota)$.) Вывести отсюда, что тогда функции f_J будут сходиться в среднем к функции $f \geqslant 0$, удовлетворяющей равенству $\mu' = f \cdot \mu$.

b) Показать, что если произведение $\prod_{\iota \in J} \rho(\mu_\iota, \mu'_\iota)$ равно нулю, то меры μ и μ' будут независимы (рассмотреть множество A_J тех точек $t \in T$, в которых $g_J(t) > 1$, и оценить меры $\mu(A_J)$ и $\mu'(T - A_J)$).

°18) Пусть, в дополнение к обозначениям упр. 17, ν_ι есть положительная мера на T_ι с общей массой, равной 1, и пусть $\nu = \bigotimes_{\iota \in I} \nu_\iota$.

a) Показать, что если одна из мер ν_ι независима с мерой μ_ι того же индекса, то ν независима с μ.

b) Для любого $\iota \in I$ положим $\nu_\iota = \mu'_\iota + \mu''_\iota$, где μ'_ι имеет базис μ_ι, а μ''_ι независима с μ_ι (§ 5, теорема 3); допустим, что $\mu'_\iota \neq 0$ при любом $\iota \in I$. Показать, что для того, чтобы мера ν не была независима с μ, необходимо и достаточно, чтобы $\mu''_\iota = 0$, исключая некоторое счетное семейство индексов, и чтобы произведение $\mu' = \bigotimes_{\iota \in I} \mu'_\iota$ было отличной от нуля мерой с базисом μ; тогда мера $\mu'' = \nu - \mu'$ независима с μ. (Показать, что если $\mu''_\iota \neq 0$ для несчетного множества индексов, то найдется такое число α, $0 < \alpha < 1$, что для бесконечного счетного множества индексов ι_n справедливо неравенство $\mu'_n(T_{\iota_n}) \leqslant \alpha$; показать, что тогда μ независима с ν, и применить a); вторую часть утверждения доказать при помощи упр. 17.)

19) Пусть I есть упорядоченное фильтрующееся вправо множество и $(T_\alpha)_{\alpha \in I}$ — семейство компактных пространств, для которого I служит множеством индексов. Пусть для любой пары (α, β) индексов из I такой, что $\alpha \leqslant \beta$, через $\varphi_{\alpha\beta}$ обозначено *непрерывное сюръективное* отображение пространства T_β на T_α. Предположим, что отношения $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$ влекут $\varphi_{\alpha\gamma} = \varphi_{\alpha\beta} \circ \varphi_{\beta\gamma}$. Пусть $E = \prod_{\alpha \in I} T_\alpha$ есть пространство-произведение семейства (T_α), и пусть T есть

подмножество из E, являющееся *проективным пределом* (Теор. мн., гл. III, § 1. n° 12) семейства (T_α) относительно семейства отображений $(\varphi_{\alpha\beta})$.

a) Показать, что для любого $\alpha \in I$ $\operatorname{pr}_\alpha(T)=T_\alpha$. (Для любого $x_\alpha \in T_\alpha$ и любого содержащего α конечного подмножества J из I рассмотреть множества S_J таких точек $t=(t_\beta)_{\beta\in I}$ из E, что $t_\alpha=x_\alpha$ и что для любой пары индексов (β, γ) из J, удовлетворяющих неравенству $\beta \leqslant \gamma$, $t_\beta=\varphi_{\beta\gamma}(t_\gamma)$; показать, что в E множество S_J замкнуто и не пусто.)

b) Пусть на каждом из T_α определена положительная мера μ_α с общей массой, равной 1; предположим, что для $\alpha \leqslant \beta$ $\mu_\alpha=\varphi_{\alpha\beta}(\mu_\beta)$. Показать, что если φ_α означает сужение проекции pr_α на T, то на T существует, и притом только одна, такая мера μ с общей массой, равной 1, что $\mu_\alpha=\varphi_\alpha(\mu)$ для любого $\alpha \in I$ (Для случая, когда $f \in \mathscr{K}(T)$ зависит лишь от тех t_β, для которых $\beta \in J$, где $J=\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ есть конечное подмножество из I, рассмотреть для любого $\gamma \in I$, мажорирующего все $\beta \in J$, число

$$\int f(\varphi_{\beta_1\gamma}(x_\gamma), \ldots, \varphi_{\beta_n\gamma}(x_\gamma))\, d\mu_\gamma(x_\gamma)$$

и показать, что оно не зависит от индекса γ, мажорирующего J; затем применить теорему 4 из § 5 «Общей топ.», гл. X.)

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК

(ГЛАВЫ II—V)

(Римские цифры отсылают к библиографии, помещенной в конце этого очерка.)

Развитие современного понятия интеграла тесно связано с развитием понятия функции и с углубленным изучением числовых функций действительных переменных, проводившимся с начала XIX века. Известно, что уже Эйлер достаточно широко понимал функции, поскольку для него задание «произвольной» кривой, пересекаемой любой параллелью к оси Oy в единственной точке, определяет функцию $y = f(x)$ (ср. Функции действ. перем., Ист. очерк к главам I — III, стр. 195); но, так же как и большинство его современников, он отвергал допущение, что такие функции могут быть выражены «аналитически». Эта точка зрения почти не претерпела изменения вплоть до работ Фурье; открытие им возможности представления разрывных функций в виде сумм тригонометрических рядов *) оказало решающее влияние на следующие поколения. Справедливости ради следует отметить, что доказательства Фурье были совершенно лишены строгости и область их применения не была ясно очерчена; однако интегральные формулы

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x)\cos nx\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x)\sin nx\,dx \qquad (n \geqslant 1), \tag{1}$$

*) Впрочем, речь идет об «открытии» лишь в сугубо относительном смысле: уже Эйлер знал разложения в тригонометрические ряды таких непериодических функций, как x и x^2, а формулы (1) имеются в работе Клеро 1754 года и у Эйлера в мемуаре 1777 года. Но, в то время как в XVIII веке ввиду недостаточно ясного понимания того, что означает разложение в ряд, пренебрегали такими результатами и пребывали в твердом убеждении о невозможности получить подобные разложения для «разрывных» функций, Фурье, напротив, объявляет, что его разложения сходятся, «*какова бы ни была заданная кривая, отвечающая* $\varphi(x)$, *как выражаемая некоторым аналитическим уравнением, так и не зависящая ни от какого правильного закона*» (Œuvres, т. 1, Париж, Gauthier-Villars, 1888, стр. 210).

выражающие коэффициенты разложения функции φ в ряд Фурье, имели интуитивно очевидный смысл в том случае, когда φ непрерывна и кусочно монотонна *). Именно такими функциями и ограничивается вначале Дирихле в своем знаменитом мемуаре (II), где он доказывает сходимость ряда Фурье; но в конце работы он уже занимается распространением своих результатов на более широкие классы функций. Известно, что как раз в связи с этим Дирихле, уточняя идеи Фурье, дает общее понятие функции в том виде, как мы понимаем ее теперь; в первую очередь, естественно, следовало выяснить вопрос, в каких еще случаях возможно придание смысла формулам (1). «*Когда число разрывов* (*функции* φ) *бесконечно*, — говорит Дирихле ((II), стр. 22),— *то нужно только, чтобы функция* $\varphi(x)$ *удовлетворяла следующему условию: каковы бы ни были два количества* a *и* b, *находящиеся в пределах* $-\pi$ *и* $+\pi$, *всегда между ними можно вставить такие два других количества* r *и* s, *настолько близкие, что функция* $\varphi(x)$ *будет непрерывной в промежутке от* r *до* s. *Необходимость этого ограничения мы почувствуем, если примем в соображение, что различные члены ряда* (*Фурье*) *представляют собой определенные интегралы, и обратимся к основному определению интеграла. Тогда мы увидим, что интеграл функции только в том случае имеет смысл, если она удовлетворяет данному выше условию*».

В современном выражении Дирихле, судя по всему, считает, что интегрируемость равносильна тому, что точки разрыва составляют нигде не плотное множество; при этом несколькими строками ниже он строит знаменитый пример функции, равной c для рациональных x и отличному от c значению d для x иррациональных, и утверждает, что «*в этом случае различные интегралы, входящие в ряд, теряют всякий смысл*». Тут же он говорит о дальнейших работах по этому вопросу, но они не были никогда опубликованы **), и, по-видимому, в течение 25 лет никто не предпринимал попытки идти в этом направлении, быть может, потому, что рассмотрение столь «патологических» функций казалось в то время лишенным всякого интереса; во всяком случае, когда в 1854 году Риман ((III), стр. 225—261) снова обратился к этому вопросу (опять в связи с тригонометрическими рядами ***)),

*) Для Фурье интеграл определялся еще путем обращения к понятию площади; напомним, что аналитическое определение интеграла ведет свое начало лишь от Коши (ср. Функции действ. перем., Ист. очерк к главам I—III, стр. 196).

**) Судя по некоторым (довольно неясным) указаниям Липшица (J. de Crelle, т. XIII (1864), стр. 296; русское издание: Лежен-Дирихле, Риман, Липшиц, Разложение функций в тригонометрические ряды, Харьков, 1914, стр. 90—114), Дирихле, быть может, полагал, что если множество точек разрыва является нигде не плотным, то его «производное» множество конечно, и, во всяком случае, он ограничивался исследованием случая, когда это имеет место.

***) От Дирихле и Римана до наших дней мы можем проследить эту связь между интегрированием и тем, что теперь называют «гармоническим анализом», для которого оно в некотором смысле служит краеугольным камнем то он почувствовал необходимость обосновать свою работу: «... *при всем несовершенстве наших знаний о том, как силы и состояния материи изменяются в бесконечно малом в зависимости от места и времени, все же мы можем с уверенностью считать, что те функции, на которые не распространяется исследование Дирихле, в природе не встречаются*». «*Тем не менее*,— продолжает он,— *нужно думать, что случаи, не рассмотренные Дирихле, заслуживают внимания по двум причинам. Во-первых, как указывает сам Дирихле в конце своей работы, этот вопрос стоит в теснейшей связи с основными принципами исчисления бесконечно малых и может служить для того, чтобы привести эти принципы в состояние большей ясности и определенности. С этой точки зрения исследование упомянутых случаев представляет непосредственный интерес. Во-вторых, область применения рядов Дирихле не ограничивается одними лишь физическими задачами; эти ряды применяются теперь с большим успехом и в одной области чистой математики, а именно в теории чисел, и можно думать, что здесь как раз те функции, представимость которых с помощью тригонометрических рядов не была выяснена Дирихле, должны играть известную роль*» ((III), стр. 234, 235).

Идея Римана состоит в том, чтобы исходить из процесса приближения интеграла, введенного Коши, и выяснить, когда «римановы суммы» функции f на ограниченном интервале $[a, b]$ стремятся к пределу (при максимальной длине интервалов разбиения, стремящейся к 0); эта задача была им без труда решена в следующей форме: для любого $\alpha > 0$ имеется разбиение интервала $[a, b]$ на частичные интервалы столь малой максимальной длины, что сумма длин интервалов из этого разбиения, на которых колебание функции f больше α, сколь угодно мала. При этом он показывает, что условие выполняется не только для непрерывных и кусочно монотонных функций, но и для функций, которые могут иметь всюду плотное множество точек разрыва *).

Мемуар Римана был опубликован лишь после его смерти, в 1867 году. Однако на сей раз эпоха была более благоприятной для такого рода исследований, и «интеграл Римана» естественным образом занял свое место в том развитии идей, которое привело к тщательному изучению «непрерывности» функций действительного переменного (Вейерштрасс, Дю Буа-Реймон, Ганкель, Дини) и завершилось с Кантором расцветом теории множеств. В той форме, в какой Риманом было дано условие интегрируемости, оно навело на идею «меры» для множества точек разрыва функции на интервале; однако должно было пройти почти 30 лет, прежде чем было найдено удобное и плодотворное определение этого понятия.

Первые попытки в этом направлении были предприняты Штольцем, Гарнаком и Кантором (1884—1885); из них первые два для определения «меры» ограниченного множества E из $\mathbf{R}$ рассматривают множества $F \supset E$, составленные из *конечного* числа интервалов, берут для каждого F сумму

*) Напротив, Г. Дж. Смит опубликовал в 1875 году первый пример функции, не интегрируемой в смысле Римана и имеющей нигде не плотное множество точек разрыва (*Proc. Lond. Math. Soc.* (1), т. VI (1875), стр. 140—153).

длин соответствующих интервалов и называют «мерой» множества E нижнюю грань этих чисел; в отличие от них Кантор с самого начала помещает все в пространстве $\mathbf{R}^n$, рассматривает для ограниченного множества E и для $\rho > 0$ окрестность $V(\rho)$ множества E, состоящую из точек, расстояние которых до E не превосходит ρ, и берет нижнюю грань «объема» окрестности $V(\rho)$ *). При этом определении «мера» множества была равна мере его замыкания, откуда, в частности, следовало, что «мера» объединения двух множеств без общих точек могла оказаться строго меньше суммы «мер» этих двух множеств. Нет сомнения, что именно для того, чтобы избавиться от этого последнего затруднения, несколькими годами позже Пеано (V) и Жордан (VI), наряду с «мерой» Кантора $\mu(A)$ множества A, содержащегося в кирпиче I, вводят свою «внутреннюю меру» $\mu(I) - \mu(I - A)$ и дают название «измеримых» тем множествам A (называемым теперь «квадрируемыми»), для которых оба этих числа совпадают. Тогда объединение двух квадрируемых множеств A, B без общих точек квадрируемо и в качестве «меры» имеет сумму «мер» множеств A и B; однако открытое ограниченное множество может и не быть квадрируемым и множество рациональных чисел, содержащихся в ограниченном интервале, тоже не будет таковым; это в значительной мере лишало интереса понятие Пеано — Жордана.

Только Э. Борелю (IX) принадлежит та заслуга, что он сумел распознать недостатки прежних определений и увидел, как их можно устранить. Начиная с Кантора, было известно, что всякое открытое множество U из $\mathbf{R}$ является счетным объединением своих «компонент»— открытых интервалов попарно без общих точек; и вместо того, чтобы пытаться приблизить U «извне», заключая его в конечную последовательность интервалов, Борель, опираясь на предыдущий результат, предлагает взять в качестве меры множества U (когда оно ограничено) сумму длин его компонент. Затем он очень коротко **) очерчивает класс множеств (называемых с тех пор «борелевскими»), которые можно получить из открытых множеств, неограниченно повторяя операции счетного объединения и «разности» $A - B$, и указывает, что для этих множеств можно определить меру, обладающую фундаментальным свойством *полной аддитивности*: если последовательность (A_n) состоит из попарно не пересекающихся борелевских множеств, то мера их объединения (предполагаемого ограниченным) равна сумме мер слагаемых.

Это определение открыло новую эру в анализе: с одной стороны, в связи с современными ему работами Бэра оно представляло собой отправную точку

---

*) Кантор не дает точного определения этого «объема» и ограничивается утверждением, что его можно вычислить при помощи кратного интеграла ((IV), стр. 229—236 и 257—258). Легко видеть, применяя теорему Бореля — Лебега, что его определение эквивалентно определению Штольца — Гарнака.

**) В тот момент для Бореля мера была лишь техническим средством для изучения некоторых рядов рациональных функций, и он сам подчеркивал, что в задачах, которые он рассматривает, полезность меры основана на том, что множество ненулевой меры несчетно ((IX), стр. 48).

для целой серии исследований топологической природы по классификации точечных множеств, но главным образом явилось базой для расширения понятия интеграла, осуществленного Лебегом в первые годы XX века.

В своей диссертации (Xa) Лебег начинает с уточнения и развития сжатых указаний Э. Бореля; имитируя метод Пеано — Жордана, он определяет «внешнюю меру» ограниченного множества $A \subset \mathbf{R}$ как нижнюю грань мер открытых множеств, содержащих A; затем, если I есть открытый интервал, содержащий A, то «внутренняя мера» множества A определяется как разность внешних мер множеств I и $I - A$; таким образом он получает понятие «измеримого множества», которое от первоначального «конструктивного» определения Бореля отличается лишь добавлением некоторой части множества, имеющего меру нуль по Борелю. Это определение тотчас распространяется на пространства $\mathbf{R}^n$; таким образом, старое толкование определенного интеграла $\int_a^b f(t)\,dt$ от положительной ограниченной функции как «площади», ограниченной кривой $y = f(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$ и $y = 0$, сразу же дает возможность распространить интеграл Римана на все функции f, для которых мера предыдущего множества оказывается определенной. Однако оригинальность Лебега не столько в идее этого расширения *), сколько в открытии им фундаментальной теоремы о переходе к пределу в таком интеграле — теоремы, которая возникла у него в качестве следствия полной аддитивности меры **); он сразу же подметил всю ее значительность и сделал ее краеугольным камнем дидактического изложения своей теории, которую он дал в 1904 году в знаменитых «Лекциях об интегрировании и отыскании примитивных функций» (Xb) ***).

---

*) Независимо от Лебега У. Г. Юнг применил ту же идею к полунепрерывным функциям (XIa).

**) Частный случай этой теоремы, в котором идет речь о последовательности функций, интегрируемых в смысле Римана на компактном интервале, равномерно ограниченных и имеющих предел, интегрируемый в смысле Римана, был доказан Арцела (VII).

***) Среди наиболее важных следствий этой теоремы в общей теории интегрирования необходимо, в частности, упомянуть теорему Егорова о сходимости последовательностей измеримых функций (XVI), уточняющую более ранние замечания Бореля и Лебега. С другой стороны, измеримые (числовые) функции были вначале определены Лебегом при помощи того свойства, что для такой функции f прообраз при отображении f всякого интервала из $\mathbf{R}$ является измеримым множеством. Но начиная с 1903 года Борель и Лебег обратили внимание на топологические свойства этих функций; они были в их современном виде определены Витали, который в 1905 году (XIIa) впервые сформулировал свойства измеримых функций, которые мы приняли в качестве определения в главе IV, § 5 (эта теорема была вновь найдена в 1912 году Лузиным и известна обычно под его именем).

Мы не имеем возможности подробно описать здесь те неисчислимые успехи, которые повлекли за собой результаты Лебега в изучении классических задач исчисления бесконечно малых; мы будем иметь случай остановиться на некоторых из них в последующих книгах. Сам Лебег уже в своей диссертации применил свою теорию к распространению классических понятий длины и площади на множества более общего вида, чем обычные кривые и поверхности; изложению существенного развития этой теории в течение полувека посвящена недавно вышедшая книга Л. Чезари (XXVI), к которой мы и отсылаем читателя. Упомянем также приложения к тригонометрическим рядам, развитые Лебегом (Xc) почти сразу же после его диссертации и открывшие для этой теории новые горизонты, исследование которых далеко от завершения и в наши дни (см. (XXV)). Наконец, и главным образом, определение пространств L^p и теорема Фишера — Рисса ((XIII), (XVa) и (XVb); ср. Ист. очерк к Книге V) осветили роль, которую могло играть в функциональном анализе новое понятие интеграла, роль, которая увеличивалась с дальнейшими обобщениями этого понятия, о которых будет сейчас идти речь.

Прежде мы остановимся несколько подробнее на одной из задач, к которым Лебег относился с наибольшим интересом,—на связи между понятиями интеграла и примитивной. С обобщением введенного Риманом интеграла естественно было поставить вопрос о том, сохранится ли классическое соответствие между интегралом и примитивной, справедливое для непрерывных функций, при переходе к более общим случаям. Но легко указать примеры функций f, интегрируемых в смысле Римана и таких, что $\int\limits_a^x f(t)\,dt$ не имеет в некоторых точках производной (и даже ни правой, ни левой) (ср. Функции действ. перем., гл. II, § 2, упр. 1); обратно, Вольтерра в 1881 году показал, что функция $F(x)$ может иметь на интервале I ограниченную производную, не интегрируемую (в смысле Римана) на I. Посредством очень тонкого анализа (где одной теоремы о переходе к пределу в интеграле далеко не достаточно) Лебег пришел к доказательству того, что если f интегрируема (в его смысле) на $[a, b]$, то $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$ имеет почти всюду производную, равную $f(x)$ (Xb). Обратно, если функция g дифференцируема на $[a, b]$ и если ее производная $g'=f$ *ограничена*, то f интегрируема и имеет место формула $g(x)-g(a)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$. Однако Лебег обнаружил, что задача будет значительно более сложной, если g' не будет ограниченной; в этом случае g' может не быть интегрируемой, и стало быть, в первую очередь надо было охарактеризовать непрерывные функции g, для которых g' существует почти всюду и интегрируема. Ограничившись случаем, когда одно из производных чисел *) функции g конечно всюду, Лебег показал, что g всегда будет функцией с ограниченным изменением **). Наконец, он установил результат, обратный этому: функция g с ограниченным изменением имеет почти всюду производную, и g' интегрируема; но соотношение

$$g(x)-g(a)=\int_a^x g'(t)\,dt \tag{2}$$

может уже не выполняться; разность между обеими частями этого соотношения есть функция с ограниченным изменением, отличная от постоянной и имеющая почти всюду производную, равную нулю («сингулярная» функция). Оставалось охарактеризовать такие функции с ограниченным изменением, для которых справедливо соотношение (2). Лебег доказал, что это функции (названные Витали, подробно изучавшим их, «абсолютно непрерывными»), обладающие следующим свойством: полное изменение функции g на открытом множестве U (сумма полных изменений функции g на каждой из связных компонент множества U) стремится к 0 вместе с мерой множества U.

Ниже мы увидим, как, в ослабленной форме, эти результаты найдут гораздо более общее применение. В первоначальном же виде поле их приложений остается довольно ограниченным и не выходит за рамки «тонкой» теории функций действительных переменных и остаются вне плана этого трактата. То же самое с еще большим основанием можно сказать о дальнейшем развитии теории примитивных; мы ограничимся упоминанием здесь глубоких работ Данжуа и его соратников и последователей (Перрон, Де ла Валле-Пуссен, Хинчин, Лузин, Банах и т. д.); подробное изложение этого вопроса читатель найдет в книге С. Сакса (XXIV).

Одно из существенных достижений, внесенных теорией Лебега, касается кратных интегралов. Это понятие было введено в середине XVIII века, вначале в виде «неопределенного интеграла» (по аналогии с теорией интеграла функций одного переменного $\iint f(x, y)\,dx\,dy$ означает решение

---

*) Правыми производными числами функции g в точке x называются два предела $\overline{\lim\limits_{h\to 0,\ h>0}}\,(g(x+h)-g(x))/h$ и $\underline{\lim\limits_{h\to 0,\ h>0}}\,(g(x+h)-g(x))/h$. Аналогично определяются левые производные числа.

**) Эти функции были введены Жорданом в связи со спрямлением кривых (VI); он показал, что можно принять следующие два эквивалентных определения: a) f есть разность двух возрастающих функций; b) для любого разбиения интервала $[a, b]$ конечной возрастающей последовательностью точек $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ с $a=x_0$, $b=x_n$ сумма $\sum\limits_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$ ограничена числом, не зависящим от рассматриваемого разбиения. Верхняя грань этих сумм называется полным изменением функции f на $[a, b]$.

уравнения $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y)$); однако с 1770 года Эйлер имел очень ясное представление о двойном интеграле, распространенном на (ограниченную дугами аналитических кривых) область, и дал правильную формулу для вычисления такого интеграла при помощи двух последовательных простых интегралов (1). Эту формулу нетрудно установить, исходя из «римановых сумм», если интегрируемая функция непрерывна и область определения не слишком сложна; но как только мы захотим подойти к более общим случаям, процесс Римана встречает серьезные трудности ($f(x, y)$ может быть интегрируема в смысле Римана без того, чтобы $\int dx \int f(x, y)\, dy$ имел смысл, когда простые интегралы берутся в смысле Римана). Эти трудности исчезают, если перейти к определению Лебега, который показал уже в своей диссертации, что если $f(x, y)$ есть ограниченная «функция Бэра», то такими же будут и функции $y \to f(x, y)$ (при любом x) и $x \to \int f(x, y)\, dy$ и будет справедлива формула

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy = \int dx \int f(x, y)\, dy \qquad (3)$$

(интеграл берется по прямоугольнику).

Немного позднее Фубини (XIV) получил важное дополнение к этому результату, доказав, что если предполагать только интегрируемость функции f, то множество тех x, в которых функция $y \to f(x, y)$ не интегрируема, имеет меру нуль, что сразу позволяет распространить на этот случай формулу (3).

Наконец, в 1910 году (Xd) Лебег приступил к распространению на кратные интегралы своих результатов о производных простых интегралов. Так, он связал с функцией f, интегрируемой на любом компактном подмножестве из $\mathbf{R}^n$, *функцию множества* $F(E) = \int_E f(\mathrm{x})\, d\mathrm{x}$, определенную для любого интегрируемого подмножества E из $\mathbf{R}^n$ и обобщающую понятие «неопределенного интеграла»; в связи с этим он отмечает, что эта функция обладает следующими двумя свойствами: 1° она вполне аддитивна; 2° она «абсолютно непрерывна» в том смысле, что $F(E)$ стремится к 0 вместе с мерой множества E. Значительная часть мемуара Лебега состоит в доказательстве предложения, обратного вышеуказанному *). Но он не ограничивается этим и отмечает возможность обобщения в том же направлении понятия функции с ограниченным изменением, рассматривая функции $F(E)$ измеримого множества, вполне аддитивные и такие, что $\sum_n |F(E_n)|$ остается ограниченной

*) Это доказательство проводится в основном при помощи теоремы о покрытии, которая несколько прежде была доказана Витали (XIIb) и остается фундаментальной в этом круге вопросов.

для любого счетного разбиения множества E на измеримые подмножества E_n. И если он на самом деле ограничивается тем, что рассматривает такие функции лишь на множестве «кирпичей» из $\mathbf{R}^n$, то совершенно ясно, что остается сделать всего один шаг, чтобы вплотную подойти к общему понятию меры, которую предстоит определить Ж. Радону в 1913 году, слив воедино интеграл Лебега и интеграл Стилтьеса, о котором мы теперь должны вести речь.

* * *

В 1894 году Т. Стилтьес опубликовал под заглавием «Исследования о непрерывных дробях» (VIII) очень своеобразный мемуар, в котором, исходя из вопроса, внешне весьма частного, он ставит и с редким изяществом решает задачи совсем нового типа в теории аналитических функций и функций действительного переменного *). Стремясь изобразить предел некоторой последовательности аналитических функций, Стилтьес попутно пришел к введению на прямой понятия «распределения положительной массы»— понятия, с давних пор ставшего обычным в науках физических, а в математических встречавшегося до этого лишь при ограничительных условиях (обычно — существование в любой точке «плотности», меняющейся непрерывным образом); он заметил, что задание такого распределения равносильно заданию возрастающей функции $\varphi(x)$, задающей общую массу, содержащуюся на интервале с концами 0 и x при $x > 0$, и эта масса будет иметь другой знак для $x < 0$, а точки разрыва функции φ соответствуют массам, «сосредоточенным в одной точке» **). Тогда Стилтьес составляет для такого распределения массы на интервале $[a, b]$ «римановы суммы» $\sum\limits_i f(\xi_i)(\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i))$ и показывает, что, когда f непрерывна на $[a, b]$, эти суммы стремятся к пределу, который он обозначает $\int\limits_a^b f(x)\,d\varphi(x)$. Имея надобность в интегрировании лишь непрерывных (и даже дифференцируемых) функций, Стилтьес не продолжает изучение этого интеграла ***), и в продолжение двенадцати

---

*) Именно, наряду с другими задачами там сформулирована и решена знаменитая «проблема моментов» (ср. Ист. очерк к Книге V).

**) Стилтьес еще не делал различия между разными видами интервалов с одинаковыми концами a и b, что привело его к утверждению, что в точках разрыва c функции φ часть массы, сосредоточенная в c, принадлежит интервалу с левым концом c, а остальная часть, сообразно со значением $\varphi(c)$,— интервалу с правым концом c.

***) Однако необходимо отметить первое появление у Стилтьеса идеи «сходимости» последовательности мер ((VIII), стр. 95; в действительности речь идет о *сильном* пределе).

лет это понятие не привлекает внимания *). Но в 1909 году Ф. Рисс (XVc), решая задачу, поставленную за несколько лет до того Адамаром (ср. Ист. очерк к Книге V), доказал, что интегралы Стилтьеса $f \to \int_a^b f\,d\varphi$ являются самыми общими непрерывными линейными функционалами на пространстве $\mathscr{C}(I)$ непрерывных числовых функций на $I = [a, b]$ (причем $\mathscr{C}(I)$ наделено топологией равномерной сходимости) **); изящество и простота этого результата почти сразу же порождают различные обобщения. Самым удачным было то, которое дал Ж. Радон в 1913 году (XVII): комбинируя идеи Ф. Рисса и Лебега, он показал, как, пользуясь конструкцией Лебега, определить интеграл, исходя из некоторой произвольной «вполне аддитивной функции множества» (определенной на множествах, измеримых относительно меры Лебега), вместо того чтобы исходить из меры Лебега. Во введенном таким способом понятии «меры Радона» на $\mathbf{R}^n$ содержится понятие функции «с ограниченным изменением»: разбиение такой функции на разность двух возрастающих функций представляет собой частный случай разбиения меры на разность двух положительных мер; точно так же «мера с базисом μ» соответствует понятию «абсолютно непрерывной» функции, а разбиение произвольной меры на меру с базисом μ и на меру, назависимую с μ,— разбиению Лебега функции с ограниченным изменением на сумму абсолютно непрерывной функции и «сингулярной» функции. Кроме того, Радон показал, что «плотность» относительно μ меры с базисом μ снова существует, если μ есть мера, имеющая базисом меру Лебега; для этого он использовал прежнюю идею Ф. Рисса (возобновленную и разъясненную позже наряду с другими Дж. фон Нейманом),состоящую в том, чтобы построить образ меры μ при отображении θ пространства $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}$, выбранном так, чтобы $\theta(\mu)$ было мерой Лебега на $\mathbf{R}$ (ср. гл. V, § 6, упр. 8).

Почти сразу же после выхода в свет мемуара Радона Фреше замечает, что почти все результаты этой работы могут быть распространены на случай, когда «вполне аддитивная функция множества», вместо того чтобы быть определенной для измеримых подмножеств пространства $\mathbf{R}^n$, определена для некоторых подмножеств произвольного множества E (эти подмножества таковы, что операции счетного объединения и «разности» снова дают множества, для которых функция определена). Однако выражение меры

*) Однако оно обретает значение начиная с 1906 года благодаря разработке Гильбертом и его школой спектральной теории операторов. Именно для этой теории в 1907 году Хеллингер вводит такие интегралы, как $\int \frac{(dg)^2}{df}$, кажущиеся на первый взгляд более общими, чем интеграл Стилтьеса; однако в действительности, как показал в 1912 году Хан, они сводятся к нему (это частные случаи понятия «функции меры»; ср. гл. V, § 5, n° 9).

**) В этой работе появляется также и понятие *широкого* предела последовательности мер ((XVc), стр. 49).

с базисом μ в виде $g \cdot \mu$ основано у Лебега и у Радона на рассуждениях, существенным образом использующих топологию пространства $\mathbf{R}^n$ (и мы видели, что доказательство Радона применимо только тогда, когда μ есть мера, имеющая своим базисом меру Лебега); и лишь в 1930 году О. Никодим (XX) получил эту теорему в общем виде путем прямого рассуждения (значительно упрощенного несколькими годами позже Дж. фон Нейманом благодаря использованию свойств пространств L^2 ((XXII), стр. 127—130).

С мемуаром Радона общая теория интегрирования в основных чертах может считаться завершенной; в качестве более поздних существенных приобретений заслуживают упоминания лишь определение бесконечного произведения мер, принадлежащее Даниелю (XIXb), и определение интеграла от функции со значениями в банаховом пространстве, данное Бохнером в 1933 году (XXI) и являющееся введением в изучение «слабого интеграла», которым мы будем заниматься в главе VI. Оставалось сделать новую теорию общедоступной и превратить ее в действенный математический аппарат, когда большинство математиков к 1910 году еще видело в «интеграле Лебега» лишь инструмент высокой точности, требующий умелого обращения и предназначенный лишь для исследований исключительно тонких и в высшей степени абстрактных. Это было проделано Каратеодори в книге (XVIII), долгое время остававшейся классической и обогатившей к тому же теорию Радона многочисленными оригинальными замечаниями.

Именно в этой книге понятие интеграла, которое стояло на первом плане у Лебега (о чем достаточно ясно говорят названия его диссертации (Xa) и его основной работы по этим вопросам (Xb)), впервые уступило первенство понятию меры, которое было у Лебега (так же как до него у Жордана) вспомогательным техническим средством. Это изменение точки зрения, без сомнения, связано у Каратеодори с тем чрезмерным значением, которое он, по-видимому, придавал «p-мерным мерам» *). С того времени авторы работ по интегрированию разделились между этими двумя точками зрения, вступая подчас в споры, которые заставляли литься много не крови, но чернил **). Одни из них следовали точке зрения Каратеодори: в их работах, все более абстрактных и аксиоматических, мере, со всеми сопровождающими ее техническими тонкостями, не только придавалась доминирующая роль, но еще и чувствовалось стремление порвать ее связь с топологическими

---

*) Речь идет об обобщении понятия «длины плоской кривой» на произвольные значения n и p размерности окружающего и изучаемого пространств; разумеется, предполагается, что $0 \leqslant p \leqslant n$, но не всегда p предполагается целым. Этот вопрос служил предметом работ многочисленных авторов, начиная с Минковского, Каратеодори и Хаусдорфа; сам же Лебег, который выявил частные случаи в своей диссертации, видимо, находил в нем лишь способ подвергнуть испытанию мощность оружия, которое он выковал.

**) Ср. рецензию П. Халмоша на первый том этой книги (Bull. Amer. Math. Soc., т. LIX (1953), стр. 249) и рецензию Ж. Дьедонне на книгу Мейергофера (там же, т. LIX (1953), стр. 479) структурами, с которыми она в действительности была связана в большинстве задач, в которые она входила. Другие работы, как настоящий трактат, следуют более или менее точно методу, уже указанному У. Г. Юнгом в мемуаре, который, к несчастью, мало известен (XIb), и развитому затем Даниелем. Первый, излагая интеграл Лебега, исходит из «интеграла Коши» от непрерывных функций с компактным носителем, предполагаемого известным, чтобы затем определить последовательно (как мы делали это в гл. IV, § 1) верхний интеграл от полунепрерывных снизу функций, затем от произвольных числовых функций, откуда следует определение интегрируемых функций, построенное по образцу определения Лебега для множеств при помощи чисто «функциональных средств». В 1918 году Даниель ((XIXa); ср. (XXVII)) распространяет это изложение с некоторыми изменениями на функции, определенные на произвольном множестве; главным его достоинством было выявление роли, которую играет в абстрактной теории условие (MA′) из главы IV, § 1, n° 5 (которое не может появляться с той же ясностью в теории мер Радона, где это условие, благодаря теореме Дини, выполняется автоматически). В том же порядке идей (и в тесной связи с методами, используемыми в спектральной теории до Гельфанда) нам нужно также отметить мемуар Ф. Рисса (XVd), который в сжатой и изящной форме излагает некоторые результаты теории упорядоченных пространств, играющих роль в теории интегрирования; в главе II мы довольно близко придерживались его изложения.

Но не в описательных работах, более или менее приятных для чтения, содержание которых, по существу, мало меняется, а скорее со стороны приложений следует искать прогресс, достигнутый в теории интегрирования начиная с 1920 года: теория вероятностей (берущая начало с загадок и парадоксов и ставшая ветвью теории интегрирования после ее аксиоматизации Колмогоровым (XXIII), но ветвью самостоятельной, со своими методами и своими собственными задачами); эргодическая теория; спектральная теория и гармонический анализ после открытия Хааром меры, носящей его имя, и вызванного этим открытием наращивания идей сделали интеграл одним из наиболее важных орудий в теории групп. Этими вопросами мы и закончим настоящий очерк; некоторые из них будут изложены в последующих главах или книгах.

БИБЛИОГРАФИЯ

(I) L. Euler, Opera Omnia: De formulis integralibus duplicatis (1), т. XVII, Leipzig — Berlin (Teubner), 1915, стр. 289—315.

(II) G. Lejeune-Dirichlet, Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données, J. de Crelle, т. IV (1829), стр. 157—169 (=Werke, т. I, стр. 118—132, Berlin (G. Reimer), 1889).

(III) B. Riemann, Gesammelte mathematische Werke, 2-е изд., Leipzig (Teubner), 1892. Русский перевод: Риман Б., Сочинения, М.— Л., Гостехиздат, 1948.

(IV) G. Cantor, Gesammelte Abhandlungen, Berlin (Springer), 1932. На русском языке: Кантор Г., Ученье о множествах, СПб., 1914.

(V) G. Peano, Applicazioni geometriche del calculo infinitesimale, Turin, 1887.

(VI) C. Jordan, Cours d'Analyse, t. I, 2-е изд., Paris (Gauthier-Villars), 1893.

(VII) C. Arzelà; a) Sulla integrabilità di una serie di funzioni, Rendic. Acc. dei Lincei, (4), т. I (1885), стр. 321—326; b) Sulla integrazione per serie, ibid., стр. 532—537 и 566—569.

(VIII) T. Stieltjes, Recherches sur les fractions continues, Ann. Fac. Sci. de Toulouse, т. VIII (1894), J. 1 à J. 122. Русский перевод: Стилтьес Т. И., Исследования о непрерывных дробях, Харьков — Киев, 1936.

(IX) E. Borel, Leçons sur la théorie des fonctions, Paris (Gauthier-Villars), 1898.

(X) H. Lebesgue: a) Intégrale, longueur, aire, Annali di Mat., (3), т. VII (1902), стр. 231—359; Русский перевод: Лебег А., Об измерении величин, М., 1938; b) Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, Paris (Gauthier-Villars), 1904. Русский перевод: Лебег А., Интегрирование и отыскание примитивных функций, М., Гостехиздат, 1934. c) Sur les séries trigonométriques, Ann. Ec. Norm. Sup., (3), т. XX (1903), стр. 453—485; d) Sur l'intégration des fonctions discontinues, Ann. Ec. Norm. Sup., (3), т. XXVII (1910), стр. 361—450.

(XI) W. H. Young: a) On upper and lower integration, Proc. Lond. Math. Soc., (2), т. II (1905), стр. 52—66; b) A new method in the theory of integration, Proc. Lond. Math. Soc., (2), т. IX (1911), стр. 15—50.

(XII) G. Vitali: a) Una proprieta delle funzioni misurabili, R. Its. Lombardo, Rendiconti, (2), т. XXXVIII (1905), стр. 599—603; b) Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali, Rendic. Acc. Sci. di Torino, т. XLIII (1908), стр. 229—236.

(XIII) E. Fischer, Sur la convergence en moyenne, C. R. Acad. Sci., т. CXLIV (1907), стр. 1022—1024.

(XIV) G. Fubini, Sugli integrali multipli, Rendic. Acc. dei Lincei, (5), т. XVI (1907), стр. 608—614.

(XV) F. Riesz: a) Sur les systèmes orthogonaux de fonctions, C.R. Acad. Sci., т. CXLIV (1907), стр. 615—619; b) Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, Math. Ann., т. LXIX (1910), стр. 449—497; c) Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales, Ann. Ec. Norm. Sup., (3), т. XXVIII (1911), стр. 33—62; d) Sur quelques notions fondamentales dans la théorie générale des opérations linéaires, Ann. of Math., (2), т. XLI (1940), стр. 174—206.

(XVI) D. Egoroff, Sur les suites de fonctions mesurables, C.R. Acad. Sci., т. CLII (1911), стр. 244.

(XVII) J. Radon, Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen, Sitzungsber. der math. naturwiss. Klasse der Akad. der Wiss. (Wien), т. CXXII, Abt. IIa (1913), стр. 1295—1438.

(XVIII) C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig — Berlin (Teubner), 1918.

(XIX) P. J. Daniell: a) A general form of integral, Ann. of Math., (2), т. XIX (1918), стр. 279—294; b) Integrals in an infinite number of dimensions, Ann. of Math., (2), т. XX (1919), стр. 281—288.

(XX) O. Nikodym, Sur une généralisation des intégrales de M. J. Radon, Fund. Math., т. XV (1930), стр. 131—179.

(XXI) S. Bochner, Integration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vektorraumes sind, Fund. Math., т. XX (1933), стр. 262—276.

(XXII) J. von Neumann, On rings of operators. III, Ann. of Math., (2), т. XLI (1940), стр. 94—161.

(XXIII) A. Kolmogoroff, Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin (Springer), 1933. Русское издание:

Основные понятия теории вероятностей, М.— Л., ОНТИ, 1936.

(XXIV) S. Saks, Theory of the integral, 2-е изд., New York (Stechert), 1937. Русский перевод: Сакс С., Теория интеграла, М., ИЛ, 1949.

(XXV) A. Zygmund, Trigonometrical series, Warszawa, 1935. Русский перевод: Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М., Гостехиздат, 1939.

(XXVI) L. Cesari, Surface area, Princeton, 1954.

(XXVII) L.-H. Loomis, An introduction to abstract harmonic analysis, London — New York — Toronto (van Nostrand), 1953. Русский перевод: Люмис Л., Введение в абстрактный гармонический анализ, М., ИЛ, 1956.

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

УКАЗАТЕЛЬ ТЕРМИНОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГЛАВЫ III

Определение носителя функции:

Пусть E — локально компактное пространство и $\mathbf{f}$ — отображение E в векторное пространство F. *Носителем* функции $\mathbf{f}$ называется замыкание множества тех $x \in E$, в которых $\mathbf{f}(x) \neq 0$; его дополнением является наибольшее открытое множество, на котором $\mathbf{f}(x) = 0$.

Определение меры:

Пусть E — локально компактное пространство и $\mathcal{K}(E)$ — векторное пространство (над $\mathbf{R}$) непрерывных на E числовых функций с компактным носителем. *Мерой* на E называется линейная форма $f \to \mu(f) = \int f\,d\mu$ на $\mathcal{K}(E)$, удовлетворяющая следующему условию: для любого компактного множества $K \subset E$ найдется такое число $a_K \geqslant 0$, что для всякой функции $f \in \mathcal{K}(E)$ с носителем, содержащимся в K, выполняется неравенство $|\mu(f)| \leqslant a_K \sup\limits_{x \in K} |f(x)|$. Это условие заведомо выполняется, если линейная форма μ на $\mathcal{K}(E)$ такова, что $\mu(f) \geqslant 0$ для любой функции $f \geqslant 0$ из $\mathcal{K}(E)$; такая мера μ называется *положительной*.

Меры на E образуют векторное пространство $\mathcal{M}(E)$ (над $\mathbf{R}$). Всякая мера μ на E может быть записана в виде $\mu = \mu^+ - \mu^-$, где μ^+ и μ^- положительны и μ^+ задается формулой

$$\mu^+(f) = \sup_{0 \leqslant g \leqslant f,\ g \in \mathcal{K}(E)} \mu(g)$$

для любой функции $f \geqslant 0$ из $\mathcal{K}(E)$. Полагают $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$, и тогда

$$|\mu|(f) = \sup_{|g| \leqslant f,\ g \in \mathcal{K}(E)} \mu(g)$$

для любой функции $f \geqslant 0$ из $\mathcal{K}(E)$.

Определение нормы меры:

Если имеется мера μ на локально компактном пространстве E, то *нормой* меры μ называется положительное (конечное или бесконечное) число

$$\|\mu\| = \sup_{|f| \leqslant 1,\ f \in \mathcal{K}(E)} |\mu(f)| = \sup_{0 \leqslant f \leqslant 1,\ f \in \mathcal{K}(E)} |\mu|(f).$$

Норма меры μ равна норме меры $|\mu|$, и $\|\mu\| = \|\mu^+\| + \|\mu^-\|$. Говорят, что мера μ *ограничена*, если ее норма конечна.

Определение носителя меры:

Если на локально компактном пространстве E задана мера μ, то *носителем* меры μ называется дополнение такого наибольшего открытого множества G, что для любой функции $f \in \mathscr{K}(E)$, носитель которой содержится в G, $\mu(f) = 0$. Для того чтобы точка $x_0 \in E$ принадлежала носителю меры μ, необходимо и достаточно, чтобы для любой окрестности V точки x_0 существовала такая непрерывная числовая функция f с носителем в V, что $\mu(f) \neq 0$.

Определение интеграла от непрерывной вектор-функции:

Пусть μ — мера на локально компактном пространстве E и F — отделимое локально выпуклое пространство, удовлетворяющее следующей аксиоме:

(EC) Замкнутая выпуклая оболочка в F любого компактного подмножества из F компактна.

Для всякого непрерывного отображения $\mathbf{f}$ пространства E в F, имеющего компактный носитель, *интегралом* от $\mathbf{f}$ относительно μ называется такой элемент $\mu(\mathbf{f}) = \int \mathbf{f}\, d\mu$ пространства F, что для любой непрерывной линейной формы $\mathbf{a}'$ на F справедливо равенство

$$\left\langle \int \mathbf{f}\, d\mu,\ \mathbf{a}' \right\rangle = \int \langle \mathbf{f}, \mathbf{a}' \rangle\, d\mu.$$

Пусть $\mathscr{K}_F\ E)$ — векторное пространство непрерывных отображений E в F с компактным носителем. Тогда отображение $\mathbf{f} \to \int \mathbf{f}\, d\mu$ пространства $\mathscr{K}_F(E)$ в F линейно.

Аксиома (EC заведомо выполняется, если F — полное пространство и, в частности, если F — банахово пространство. В последнем случае будет иметь место неравенство

$$\left| \int \mathbf{f}\, d\mu \right| \leqslant \int |\mathbf{f}|\, d|\mu|$$

(если обозначать через $|\mathbf{x}|$ норму элемента $\mathbf{x} \in F$.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГЛАВЫ IV

Ниже через μ будет обозначаться *положительная мера* на локально компактном пространстве E.

Определение верхнего интеграла от положительной функции:

Пусть $h \geqslant 0$ — числовая функция, полунепрерывная снизу на E. *Верхним интегралом* функции h относительно μ называется положительное (конечное или бесконечное) число

$$\mu^* (h) = \sup_{0 \leq g \leq h,\ g \in \mathcal{K}(E)} \mu(g).$$

Пусть $f \geqslant 0$ — произвольная (конечная или нет) числовая функция, определенная на E. *Верхним интегралом* функции f относительно μ называется положительное (конечное или бесконечное) число $\mu^* (f) = \inf \mu^* (h)$ (которое обозначается также через $\int^* f\, d\mu$), где h пробегает множество полунепрерывных снизу функций, больших или равных f.

Определение внешней меры множества:

Если имеется произвольное подмножество A из E, то *внешней мерой* множества A называется и обозначается через $\mu^* (A)$ верхний интеграл $\mu^* (\varphi_A)$ характеристической функции множества A.

Определение пренебрежимых множеств и пренебрежимых функций:

Подмножество A из E *пренебрежимо* относительно меры μ (или μ-*пренебрежимо*), если его внешняя мера — нулевая. Говорят, что какое-либо свойство переменного элемента $x \in E$ имеет место *почти всюду* относительно меры μ, если множество тех $x \in E$, где оно не выполняется, пренебрежимо. Два отображения f и g пространства E в произвольное множество F *эквивалентны* (относительно μ), если $f(x) = g(x)$ почти всюду; класс всех отображений пространства E в F, эквивалентных f, обозначается через $\tilde{f}$. Отображение $\mathbf{f}$ пространства E в векторное пространство F (соотв. отображение f пространства E в $\overline{\mathbf{R}}$) называется *пре-*

небрежимым, если оно почти всюду обращается в нуль; это сводится к утверждению, что $\mu^*(|\mathbf{f}|) = 0$ (соотв. $\mu^*(|f|) = 0$). Если две числовые функции f и g эквивалентны, то $\mu^*(f) = \mu^*(g)$.

Определение функций, интегрируемых в p-й степени:

Если имеется функция $\mathbf{f}$, определенная почти всюду на E и принимающая значения в банаховом пространстве F, то через $N_p(\mathbf{f})$ при любом действительном $p \geqslant 1$ обозначается верхний интеграл $\mu^*(g)$, где g есть конечная числовая функция на E, равная почти всюду $|\mathbf{f}|^p$. Для двух функций $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$, определенных почти всюду на E и принимающих значения в F, справедливо неравенство

$$N_p(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2) \leqslant N_p(\mathbf{f}_1) + N_p(\mathbf{f}_2)$$

и равенство $N_p(\alpha\mathbf{f}) = |\alpha|\, N_p(\mathbf{f})$ для любого скаляра α. Говорят, что функция $\mathbf{f}$, определенная почти всюду на E и принимающая значения в F, *интегрируема в p-й степени* (или, для $p = 1$, просто *интегрируема*), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая принимающая значения в F непрерывная функция $\mathbf{g}$ с компактным носителем, что $N_p(\mathbf{f} - \mathbf{g}) \leqslant \varepsilon$. Множество $\mathscr{L}_F^p$ функций, определенных почти всюду на E, принимающих значения в F и интегрируемых в p-й степени, есть векторное пространство, на котором $N_p(\mathbf{f})$ является полунормой. Множество L_F^p классов эквивалентности функций из $\mathscr{L}_F^p$ есть банахово пространство с нормой $\|\tilde{\mathbf{f}}\|_p = N_p(\mathbf{f})$ ($\mathbf{f}$ — произвольная функция класса $\tilde{\mathbf{f}}$). Для того чтобы функция $\mathbf{f}$ была интегрируема в p-й степени, необходимо и достаточно, чтобы функция $|\mathbf{f}|^{p-1}\,\mathbf{f}$ была интегрируема.

Определение интеграла от интегрируемой функции:

Векторное пространство $\mathscr{K}_F(E)$ плотно в пространстве $\mathscr{L}_F^p$ интегрируемых функций (наделенном полунормой $N_1(\mathbf{f})$); отображение $\mathbf{f} \to \int \mathbf{f}\, d\mu$ пространства $\mathscr{K}_F(E)$ в F продолжается по непрерывности до линейного отображения пространства $\mathscr{L}_F^p$ в F, причем обозначение остается прежним. Для любой интегрируемой функции $\mathbf{f}$ символом $\int \mathbf{f}\, d\mu$ (или $\mu(\mathbf{f})$) обозначают и называют *интегралом* от $\mathbf{f}$ относительно μ элемент из F, равный $\int \mathbf{g}\, d\mu$ для любой интегрируемой функции $\mathbf{g}$, определенной всюду и равной почти всюду $\mathbf{f}$; тогда функция $|\mathbf{f}|$ интегрируема и

$$\left|\int \mathbf{f}\, d\mu\right| \leqslant \int |\mathbf{f}|\, d\mu.$$

Для любой интегрируемой функции $f \geqslant 0$ имеем

$$\int f\, d\mu = \mu^*(f) = N_1(f).$$

Определение интегрируемых множеств:

Говорят, что подмножество A из E *интегрируемо*, если интегрируема его характеристическая функция φ_A. Число $\mu(A) = \int \varphi_A d\mu$ называется *мерой* множества A; тогда $\mu^*(A) = \mu(A)$. Пренебрежимые множества совпадают с интегрируемыми множествами меры нуль. Для того чтобы множество A было интегрируемо, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовали такое компактное множество $K \subset A$ и такое открытое множество $U \supset A$, что $\mu^*(U \cap \complement K) \leqslant \varepsilon$.

Определение измеримой функции:

Говорят, что отображение пространства E в топологическое пространство F *измеримо*, если для любого компактного подмножества K из E существует такое разбиение K на множество N меры нуль и на последовательность компактных множеств K_n, что сужение функции f на каждое из множеств K_n непрерывно. Условие, эквивалентное этому, формулируется так: для любого компактного множества K и любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое компактное множество $K_1 \subset K$, что $\mu(K \cap \complement K_1) \leqslant \varepsilon$ и что сужение функции f на K_1 непрерывно.

Определение измеримого множества:

Говорят, что подмножество A из E *измеримо*, если измерима его характеристическая функция. Эквивалентное условие состоит в том, что для любого компактного множества K множество $A \cap K$ интегрируемо.

Определение локально пренебрежимых множеств и локально пренебрежимых функций:

Говорят, что подмножество A из E *локально пренебрежимо*, если всякая точка $x \in E$ обладает такой окрестностью V, что множество $A \cap V$ пренебрежимо; тогда множество A измеримо.

Говорят, что некоторое свойство переменного элемента $x \in E$ имеет место *локально почти всюду*, если множество тех $x \in E$, для которых оно не выполняется, локально пренебрежимо. Говорят, что отображение $\mathbf{f}$ пространства E в векторное пространство F *локально пренебрежимо*, если оно локально почти всюду равно нулю; тогда функция $\mathbf{f}$ измерима.

Критерий интегрируемости функции:

Для того чтобы отображение $\mathbf{f}$ пространства E в банахово пространство было интегрируемо, необходимо и достаточно, чтобы функция $\mathbf{f}$ была измерима, а $N_1(\mathbf{f})$ было конечно.

БУРБАКИ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ

МЕРЫ, ИНТЕГРИРОВАНИЕ МЕР

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИКИ

Н. БУРБАКИ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ

МЕРЫ, ИНТЕГРИРОВАНИЕ МЕР

БУРБАКИ

Группа французских математиков, объединенная под псевдонимом «Бурбаки», поставила перед собой цель — написать под общим заглавием «Элементы математики» полный трактат современной математической науки.

Много томов этого трактата уже вышло во Франции. Они вызвали большой интерес математиков всего мира как новизной изложения, так и высоким научным уровнем.

Книга рассчитана на математиков — научных работников, аспирантов и студентов старших курсов.

Цена 1 р. 97 к.

Н. БУРБАКИ

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИКИ

ПЕРВАЯ ЧАСТЬ

Книга I. Теория множеств
Книга II. Алгебра
Книга III. Общая топология
Книга IV. Функции действительного переменного
Книга V. Топологические векторные пространства
Книга VI. Интегрирование

ВТОРАЯ ЧАСТЬ

Книга (без номера). Группы и алгебры Ли
Книга (без номера). Коммутативная алгебра