Н. Я. ВИЛЕНКИН

Индукция. Комбинаторика

Пособие для учителей

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1976

Виленкин Н. Я.

В44 Индукция. Комбинаторика. Пособие для учителей. М., «Просвещение», 1976
48 с.

В $\dfrac{60501\text{-}205}{103(03)\text{-}76}$ 128-76 **517.1**

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая вниманию читателя книга адресована учителям математики старших классов и посвящена двум разделам школьного курса математики, а именно методу математической индукции и комбинаторике. Материал книги излагается на более высоком научном уровне и в большем объеме, чем это предусмотрено школьной программой, что будет способствовать вооружению учителя достаточно глубоким знанием преподаваемых вопросов. Рассмотрена связь метода математической индукции с аксиоматикой множества натуральных чисел, роль индукции в математике и т. д. Изложение комбинаторики ведется на теоретико-множественной основе, что отвечает современному подходу к этой области математики.

Автор просит присылать замечания о возможных недостатках этой книги по адресу: Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41, издательство «Просвещение», редакция математики.

Н. Виленкин

§ 1. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

1. Дедукция и индукция. Одной из отличительных черт математики и таких наук, как теоретическая механика, теоретическая физика, математическая лингвистика, является дедуктивное построение теории, при котором все утверждения выводятся из нескольких основных положений, называемых аксиомами, с помощью дедукции, т. е. логического вывода (само слово *дедукция* по-русски означает вывод). *Аксиомами* называют высказывания, задающие свойства основных понятий данной теории и отношений между этими понятиями.

В течение более чем двух тысячелетий образцом дедуктивного построения теории была книга «Начала», написанная в III веке до нашей эры древнегреческим геометром Евклидом. По этому образцу писались не только математические сочинения, но и философские трактаты. Однако позднейшая критика вскрыла недочеты в изложении Евклида, показала, что наряду с явно сформулированными аксиомами он использовал наглядно очевидные утверждения, не фигурирующие в списке аксиом. Длительная работа многих поколений геометров, важным этапом которой было построение в начале XIX века Н. И. Лобачевским неевклидовой геометрии, завершилась в конце XIX века созданием полной аксиоматики геометрии. В книге немецкого математика Д. Гильберта «Основания геометрии» за основные понятия приняты *точка*, *прямая*, *плоскость*, а за основные отношения между ними *принадлежать*, *лежать между*, *быть конгруэнтными*. Сейчас в школе применяется иная система аксиом, в которой за основные понятия приняты *точка*, *прямая*, *плоскость*, *расстояние*, а понятие конгруэнтности строится на базе этих основных понятий.

Однако, какая бы система аксиом ни была положена в основу геометрии, после того как аксиомы сформулированы, все остальные геометрические понятия и теоремы должны строиться на их основе. При доказательстве теорем уже нельзя ссылаться на результаты измерения длин сторон и величин углов конкретных треугольников, все должно выводиться дедуктивно, на основе чистой логики.

Аналогично этому была построена аксиоматика арифметики, основанная на отношении *следовать за*. И здесь даже такие очевидные утверждения, как *сумма не меняется при перестановке слагаемых*, получили строгое доказательство, основанное на этой системе аксиом.

Однако дедукция не является единственным методом научного мышления. Уже в вычислительной математике не всегда удается строго доказать, что вычислительные процессы сходятся и их применимость обосновывается тем, что они дают, как правило, результаты, подтверждаемые практикой. Еще шире используется апелляция к наблюдению и опыту в таких науках, как физика, химия, биология. В них наряду с дедукцией широко используются индуктивные рассуждения. Слово *индукция* по-русски означает наведение, а *индуктивными* называют выводы, сделанные на основе наблюдений, опытов, т. е. полученные путем заключения от частного к общему.

Например, мы каждый день наблюдаем, что Солнце восходит с востока. Поэтому можно быть уверенным, что и завтра оно появится на востоке, а не на западе. Этот вывод мы делаем, не прибегая ни к каким предположениям о причине движения Солнца по небу (более того, само это движение оказывается кажущимся, поскольку на самом деле движется земной шар). И тем не менее этот индуктивный вывод правильно описывает те наблюдения, которые мы проведем завтра.

Роль индуктивных выводов в экспериментальных науках очень велика. Они дают те положения, из которых потом путем дедукции делаются дальнейшие умозаключения. И хотя теоретическая механика основывается на трех законах движения Ньютона, сами эти законы явились результатом глубокого продумывания опытных данных, в частности законов Кеплера движения планет, выведенных им при обработке многолетних наблюдений датского астронома Тихо Браге. Наблюдение, индукция оказываются полезными и в дальнейшем для уточнения сделанных предположений. После опытов Майкельсона по измерению скорости света в движущейся среде оказалось необходимым уточнить законы физики, создать теорию относительности.

В математике роль индукции в значительной степени состоит в том, что она лежит в основе выбираемой аксиоматики. После того как длительная практика показала, что прямой путь всегда короче кривого или ломаного, естественно было сформулировать аксиому: *для любых трех точек A, B и C выполняется неравенство* $|AB| + |BC| \geqslant |AC|$. Лежащее в основе арифметики понятие *следовать за* тоже появилось при наблюдениях за строем солдат, кораблей и другими упорядоченными множествами.

Не следует, однако, думать, что этим исчерпывается роль индукции в математике. Разумеется, мы не должны экспериментально проверять теоремы, логически выведенные из аксиом: если при выводе не было сделано логических ошибок, то они постольку верны, поскольку истинны принятые нами аксиомы. Но из данной системы аксиом можно вывести очень много утверждений. И отбор тех утверждений, которые надо доказывать, вновь подсказывается индукцией. Именно она позволяет отделить полезные теоремы от бесполезных, указывает, какие теоремы могут оказаться верными, и даже помогает наметить путь доказательства. Как правило, справедливость теоремы сначала делается очевидной из опыта и наглядных соображений и лишь потом получает дедуктивное подтверждение. Лишь после того, как на многочисленных примерах убедились, что сумма чисел не изменяется при перестановке слагаемых, возникла потребность вывести это утверждение из аксиом арифметики.

Индуктивные рассуждения широко использовал в своих исследованиях по теории чисел член Петербургской Академии наук великий математик XVIII века Леонард Эйлер. Он писал: «Покажется немало парадоксальным приписывать большое значение наблюдениям даже в той части математических наук, которая обычно называется чистой математикой, так как существует распространенное мнение, что наблюдения ограничиваются физическими объектами, которые воздействуют на наши чувства... Однако в действительности, как я здесь покажу, приведя очень веские доводы, свойства чисел, известные сегодня, по большей части были открыты путем наблюдения и открыты задолго до того, как их истинность была подтверждена строгими доказательствами. Имеется даже много свойств чисел, с которыми мы хорошо знакомы, но которые мы все еще не в состоянии доказать; только наблюдения привели нас к их познанию... Этот вид знания, которое подкрепляется только наблюдениями и все еще не доказано, следует тщательно отличать от истины; оно, как мы обычно говорим, приобретается индукцией. Однако мы видели случаи, когда простая индукция вела к ошибке. Поэтому мы должны проявлять большую осторожность, чтобы не принять за истинные такие свойства чисел, которые мы открыли путем наблюдения и которые подкрепляются одной лишь индукцией. В действительности мы должны пользоваться таким открытием, как возможностью более точно исследовать эти открытые свойства и доказать их или опровергнуть; в обоих случаях мы должны научиться кое-чему полезному».

2. Полная индукция. Как отмечено в приведенном выше высказывании Л. Эйлера, индукция может привести и к ошибочным выводам. Например, французский математик XVII века Пьер Ферма, рассматривая числа

$$2^{2^1} + 1 = 5,\ 2^{2^2} + 1 = 17,\ 2^{2^3} + 1 = 257,\ 2^{2^4} + 1 = 65537,$$

пришел к выводу, что при любом натуральном значении n число $2^{2^n} + 1$ является простым. Проверить справедливость этого утверждения при $n = 5$ он не смог, так как не сумел выяснить, имеет ли число $2^{32} + 1$ нетривиальные делители. Но Эйлеру удалось показать, что это число делится на 641.

В теории чисел доказывается, что если p — простое число, то $2^{p-1}-1$ делится на p. Но ни для одного из простых чисел, меньших 1000, $2^{p-1}-1$ не делится на p^2. Поэтому возникла гипотеза, что вообще ни для одного простого числа p число $2^{p-1}-1$ не делится на p^2. Однако оказалось, что $2^{1093-1}-1$ делится на 1093^2. Существуют примеры, когда число, опровергающее гипотезу, настолько велико, что найти его перебором практически невозможно. Например, первое значение n такое, что число $991n^2+1$ является точным квадратом, насчитывает 29 десятичных знаков. Поэтому, если бы кто-нибудь сформулировал гипотезу: *число* $991n^2+1$ *никогда не является точным квадратом*, то для опровержения этого утверждения ему пришлось бы перебрать столь много чисел, что это оказалось бы не под силу самой быстродействующей вычислительной машине (разумеется, опровергающее гипотезу число было найдено иным путем).

Из сказанного выше следует, что угаданный с помощью индукции результат подлежит дедуктивному доказательству. В некоторых случаях такое доказательство можно провести, разобрав конечное число случаев, исчерпывающих все возможности.

Например, чтобы доказать утверждение: *для любого правильного многогранника справедливо соотношение* В — Р + Г = 2, *где* В — *число его вершин*, Р — *ребер и* Г — *граней*, достаточно рассмотреть пять случаев: тетраэдр, октаэдр, куб, додекаэдр, икосаэдр — других правильных многогранников не существует. А для этих пяти случаев утверждение проверяется с помощью следующей таблицы:

Название	Число вершин	Число ребер	Число граней
Тетраэдр	4	6	4
Октаэдр	6	12	8
Куб	8	12	6
Додекаэдр	20	30	12
Икосаэдр	12	30	20

В самом деле, для всех пяти многогранников имеем В — Р + + Г = 2.

Такой метод перебора конечного числа случаев, исчерпывающих все возможности, называется *полной индукцией*. Несмотря на свое название, этот метод является на самом деле не индуктивным, а дедуктивным — применяя его, мы опираемся на общие положения логики, позволяющие расчленять общий случай на конечное число частных случаев и рассматривать их по отдельности.

3. Метод математической индукции. Метод полной индукции имеет весьма ограниченную область применимости в математике. Как правило, математические утверждения касаются бесконечного множества объектов (например, всех натуральных чисел, всех простых чисел, всех многогранников и т. д.), и перебрать все эти объекты оказывается невозможным. Но существует метод рассуждения, заменяющий неосуществимый перебор бесконечного множества случаев доказательством того, что если данное утверждение истинно в одном случае, то оно окажется истинным и в следующем за ним случае. Такой метод рассуждения называется *математической индукцией* или рассуждением от n к $n + 1$.

Моделью математической индукции может служить следующее рассуждение: «Причиной кажущегося восхода Солнца на востоке является суточное вращение Земли вокруг оси. Если сегодня Солнце взошло на востоке, то через сутки Земля и Солнце снова окажутся в том же самом положении, и мы вновь будем наблюдать то же самое явление. Но тогда мы будем наблюдать его спустя еще сутки, а потом еще через сутки и таким образом увидим его каждое утро».

Неточность этого рассуждения заключается в том, что в нем не учитываются движение Земли по орбите, меняющее час восхода Солнца, изменение скорости вращения Земли и т. д. Но в математике такая схема рассуждения часто оказывается полезной. Будем, например, вычислять последовательные суммы нечетных чисел: 1, $1 + 3$, $1 + 3 + 5$, $1 + 3 + 5 + 7$. Мы получим числа 1, 4, 9, 16, являющиеся квадратами натуральных чисел 1, 2, 3, 4. Можно ожидать, что, прибавив к сумме $1 + 3 + 5 + 7$ следующее нечетное число, 9, получим квадрат числа 5, т. е. 25. И действительно, $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$. Итак, мы делаем гипотезу, что для любого натурального числа n истинно равенство

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2. \tag{1}$$

Как уже отмечалось выше, последовательный перебор натуральных чисел не даст доказательства этой гипотезы, так как, сколько бы чисел мы ни проверили, всегда остается возможность, что среди оставшихся чисел есть такое, для которого равенство (1) не выполняется. Нам нужно провести рассуждение, которое было бы аналогом слов «через сутки Земля и Солнце окажутся в том же самом положении, и мы будем наблюдать то же самое явление». Иными словами, нам надо доказать, что если

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2, \tag{2}$$

то такое же равенство будет справедливо и при добавлении к левой части равенства следующего нечетного числа $2k + 1$ и одновременной замене правой части на $(k + 1)^2$, т. е.

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2. \tag{3}$$

Итак, доказательство справедливости равенства (1) не только для чисел $n = 1, 2, 3, 4$, но и для всех натуральных чисел сводится к тому, чтобы доказать следующее утверждение: *если истинно равенство* (2), *то истинно и равенство* (3). Равенство (3), истинность которого мы хотим доказать, можно переписать следующим образом:

$$[1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1)] + 2k + 1 = k^2 + 2k + 1.$$

Но, по предположению, квадратную скобку в левой части равенства можно заменить на k^2. В результате получаем тождество $k^2 + 2k + 1 = k^2 + 2k + 1$.

Итак, равенство (1) истинно при $n = 1$, а из его истинности при $n = k$ вытекает, что оно истинно и при $n = k + 1$. Но тогда из его истинности при $n = 1$ следует, что оно истинно при $n = 1 + 1 = 2$, а тогда оно истинно при $n = 2 + 1 = 3$, при $n = 3 + 1 = 4$ и вообще при всех натуральных значениях n.

Как и все доказательства методом математической индукции, проведенное рассуждение состоит из следующих частей:

1) на основе разбора нескольких частных случаев формулируется утверждение $T(n)$[1], в формулировку которого входит натуральное число n (среди этих частных случаев фигурирует и $n = 1$);

2) доказывается, что если утверждение $T(n)$ справедливо при $n = k$, то оно справедливо и при $n = k + 1$.

А после этого рассуждают так: так как данное утверждение истинно при $n = 1$, то оно истинно и при $n = 2$, но тогда оно истинно при $n = 3$, при $n = 4$ и вообще при всех натуральных значениях n.

В школе, к сожалению, не всегда придается должное значение первой части, т. е. обучению школьников искусству делать индуктивные предположения. При таком, более формальном подходе метод математической индукции становится лишь способом доказательства заранее сформулированных утверждений, а не завершающим этапом на пути к открытию новых истин. В этом случае доказательство начинают с того, что проверяют истинность утверждения $T(n)$ при $n = 1$.

4. Метод математической индукции и аксиомы Пеано. Как и в случае полной индукции, название *метод математической индукции* обманчиво — на самом деле этот метод является дедуктивным и дает строгое доказательство утверждениям, угаданным с помощью индукции. Таким образом, метод математической индукции является одной из форм математического рассуждения.

Выясним теперь основу этого метода. Проводя доказательства методом математической индукции, мы говорили: если утверждение справедливо для $n = 1$, то оно справедливо для $n = 2$, $n = 3$ и т. д., а значит, оно справедливо для всех натуральных значений n. При этом понятие натурального числа считалось само собой очевидным, не требующим разъяснения. Но в современной математике не допускается использование таких само собой очевидных понятий. Каждое понятие должно быть либо определено на основе ранее известных понятий, либо введено аксиоматически (т. е. путем указания высказываний, касающихся этого понятия, из которых логически выводятся все остальные его свойства).

---

[1] На языке математической логики $T(n)$ — предикат, заданный на множестве натуральных чисел.

Для арифметики такими исходными понятиями являются: *единица*, *натуральное число* и *следовать за*, а основными свойствами этих понятий — аксиомы, данные итальянским математиком Д. Пеано. Эти аксиомы таковы:

1) *для каждого натурального числа n существует одно и только одно следующее за ним натуральное число. Это число принято обозначать* n'[1];

2) *единица является натуральным числом, причем она не следует ни за каким натуральным числом*;

3) *ни одно натуральное число не следует за двумя различными натуральными числами*;

4) *если множество A содержит единицу и вместе с каждым числом k содержит следующее за ним число k', то A содержит все натуральные числа.*

Четвертую аксиому Пеано называют *аксиомой математической индукции* — именно на ней основан метод математической индукции. В самом деле, пусть высказывание $T(1)$ истинно, а из истинности высказывания $T(k)$ следует истинность высказывания $T\ (k+1)$. Обозначим через A множество тех натуральных чисел, для которых истинно $T\ (n)$. По предположению $1 \in A$ (высказывание истинно при $n = 1$), а из $k \in A$ следует $k' \in A$ (если $T\ (n)$ истинно при $n = k$, то оно истинно и при $n = k' = k + 1$). Но в силу аксиомы (4) отсюда следует, что A совпадает с множеством всех натуральных чисел. Значит, $T\ (n)$ истинно для всех натуральных чисел n.

Приведем пример использования математической индукции для доказательства свойств натуральных чисел.

Для любого натурального числа n, кроме 1, существует предшествующее ему число m, т. е. *такое число, что* $m' = n$.

В самом деле, обозначим через A множество, получаемое объединением 1 и множества всех натуральных чисел, имеющих предшествующие числа. По построению множество A содержит 1. Далее, пусть $k \in A$. Тогда $k' \in A$, поскольку у k' есть предшествующий элемент k. Итак, $1 \in A$ и из $k \in A$ следует $k' \in A$. Поэтому A совпадает со множеством всех натуральных чисел. Это и значит, что все натуральные числа, кроме 1, имеют предшествующие. (Из аксиомы 3 следует, что такое предшествующее число единственно.)

Математическая индукция используется для определения сложения и умножения натуральных чисел, для доказательства свойств этих операций. На ее основе вводятся отношения *больше* и *меньше* и доказываются свойства этих отношений. Мы не проводим соответствующих доказательств, которые излагают в пединститутах. Поскольку в школьной математике операции над натуральными числами и их свойства изучают индуктивно — давать эти доказательства в начальной и даже в средней школе невозможно.

---

[1] Число n', следующее за n, обозначают также $n + 1$.

Отметим еще одно важное свойство множества натуральных чисел, также доказываемое с помощью математической индукции.

В любом непустом подмножестве множества натуральных чисел есть наименьшее число.

Это утверждение называют свойством *полной упорядоченности* множества натуральных чисел. Из этого свойства вытекает следующее утверждение, эквивалентное аксиоме математической индукции, но иногда более удобное при проведении доказательств.

Если $T(n)$ истинно при $n = 1$, а из того, что оно истинно при всех $n < k$, следует, что оно истинно и при $n = k$, то $T(n)$ истинно для всех натуральных значений n.

В самом деле, обозначим через A подмножество натуральных чисел, для которых $T(n)$ ложно. Если это подмножество непусто, то оно содержит наименьшее число k. Этим числом не может быть 1, так как по условию $T(1)$ истинно. Значит, $k > 1$. Но поскольку k — наименьшее число, для которого $T(n)$ ложно, то для всех $n < k$ $T(n)$ истинно, а тогда по условию теоремы оно должно быть истинно и при $n = k$. Мы пришли к противоречию — одновременно оказалось, что $T(k)$ истинно и $T(k)$ ложно. Это противоречие показывает, что наше предположение (A не пустое множество) ложно. Значит, A — пустое множество, т. е. нет натуральных чисел, для которых $T(n)$ ложно. Это и означает, что $T(n)$ истинно для всех натуральных чисел n.

5. Метод математической индукции и вычисление сумм и произведений. По-видимому, естественным моментом введения метода математической индукции в школе могло бы оказаться изучение прогрессий и последовательностей. Прогрессии определяются *рекуррентными соотношениями*, т. е. соотношениями, позволяющими найти следующий член последовательности по одному или нескольким предыдущим ее членам. Арифметическая прогрессия задается рекуррентным соотношением $a_{n+1} = a_n + d$, а геометрическая прогрессия — рекуррентным соотношением $b_{n+1} = b_n q$. Иными словами, само определение этих прогрессий дается с помощью индукции от n к $n + 1$. Поэтому и большинство формул, относящихся к прогрессиям, было бы целесообразно выводить при помощи метода математической индукции.

Например, при выводе формулы общего члена арифметической прогрессии замечаем, что

$$a_2 = a_1 + d, \quad a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d, \quad a_1 = a_3 + d = a_1 + 3d.$$

Эти формулы позволяют предположить, что для любого натурального числа n истинно равенство

$$a_n = a_1 + (n - 1)\,d. \tag{1}$$

Докажем его с помощью математической индукции. При $n = 1$ оно истинно, поскольку и a_n и $a_1 + (n - 1)d$ при $n = 1$ равны a_1.

Предположим теперь, что $a_k = a_1 + (k - 1)\, d$. Тогда

$$a_{k+1} = a_k + d = a_1 + (k - 1)\, d + d. \qquad (2)$$

Равенство (2) можно переписать так:

$$a_{k+1} = a_1 + [(k + 1) - 1]\, d.$$

Полученное равенство является не чем иным, как равенством (1) при $n = k + 1$. Итак, равенство (1) истинно при $n = 1$, а из его истинности при $n = k$ следует, что оно истинно и при $n = k + 1$. Значит, оно истинно при всех натуральных значениях n.

Точно так же доказывается, что общий член геометрической прогрессии выражается формулой

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

Выведем теперь с помощью математической индукции формулы для сумм членов арифметической и геометрической прогрессий.

Для арифметической прогрессии имеем:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1 + (a_1 + d) + \ldots + [a_1 + (n - 1)\, d] = na_1 + d\,[1 + 2 + \ldots + (n - 1)].$$

Таким образом, нам надо вывести формулу для суммы $1 + 2 + \ldots + (n - 1)$ первых $n - 1$ натуральных чисел. Обозначим сумму первых n натуральных чисел через s_n.

Имеем:

$$2s_1 = 2 \cdot 1 = 2,\ 2s_2 = 2\,(1 + 2) = 6 = 2 \cdot 3,$$
$$2s_3 = 2\,(1 + 2 + 3) = 12 = 3 \cdot 4, \quad 2s_4 = 2\,(1 + 2 + 3 + 4) = 20 = 4 \cdot 5.$$

Этого достаточно, чтобы сделать предположение индукции: $2s_n = n\,(n + 1)$, т. е.

$$s_n = \frac{n\,(n + 1)}{2}. \qquad (3)$$

Поскольку $s_1 = 1$, а $\frac{n\,(n+1)}{2}$ при $n = 1$ тоже равно 1, то наше предположение истинно при $n = 1$. Пусть оно истинно при $n = k$, т. е. пусть

$$s_k = 1 + 2 + \ldots + k = \frac{k\,(k + 1)}{2}.$$

Тогда имеем:

$$s_{k+1} = (1 + 2 + \ldots + k) + (k + 1) = s_k + (k + 1) = \frac{k\,(k + 1)}{2} + k + 1 = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}.$$

Полученное равенство есть равенство (3) при $n = k + 1$. Пользуясь методом математической индукции, мы доказали формулу (3).

Таким образом, $s_{n-1} = \frac{(n - 1)\, n}{2}$, а потому

$$S_n = na_1 + d[1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)] = na_1 + ds_{n-1} =$$
$$= na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d].$$

Так как $2a_1 + (n - 1)d = a_1 + a_n$, то эту формулу можно переписать следующим образом:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

Аналогично выводится формула для суммы членов геометрической прогрессии. Сначала замечаем, что в силу формул сокращенного умножения имеем:

$$S_2 = b_1 + b_2 = b_1 + b_1q = b_1(1 + q) = b_1\frac{q^2 - 1}{q - 1}$$

(мы считаем, что $q \neq 1$) и

$$S_3 = b_1 + b_2 + b_3 = b_1 + b_1q + b_1q^2 = b_1(1 + q + q^2) = b_1\frac{q^3 - 1}{q - 1}.$$

Поскольку и S_1 можно записать в виде $S_1 = b_1 = b_1\frac{q - 1}{q - 1}$, то приходим к индуктивному предположению: $S_n = b_1\frac{q^n - 1}{q - 1}$. Равенство

$$S_{k+1} = S_k + b_{k+1} = b_1\frac{q^k - 1}{q - 1} + b_1q^k = b_1\frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}$$

позволяет сделать переход от k к $k + 1$. Предоставляем читателю самому провести детали доказательства.

Метод математической индукции позволяет выводить и формулы для многих других сумм. Выведем, например, с помощью этого метода формулу для суммы квадратов первых n натуральных чисел:

$$S_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad (4)$$

При $n = 1$ обе части равенства (4) принимают значение 1. Таким образом, при $n = 1$ это равенство выполняется. Пусть равенство (4) истинно при $n = k$:

$$S_k = 1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Тогда

$$S_{k+1} = 1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 =$$
$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} =$$
$$= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)[2(k+1)+1]}{6}.$$

Правая часть полученного равенства является правой частью равенства (4) при $n = k + 1$. Итак, равенство (4) истинно при $n = 1$, а из его истинности при $n = k$ следует, что оно верно и при $n = k + 1$. Значит, в силу метода математической индукции оно истинно при всех значениях n.

Предоставляем читателю доказать равенство:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Иногда бывает, что тщательное изучение доказательства, полученного с помощью математической индукции, позволяет найти более короткое доказательство той же формулы. Равенства

$$\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{2}{3}; \quad \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{3}{4}$$

приводят к индуктивному предположению:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}. \tag{5}$$

Поскольку $S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$, то равенство (5) верно при $n = 1$. Пусть оно верно при $n = k$:

$$S_k = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}.$$

Тогда

$$S_{k+1} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{k+1}{(k+1)+1},$$

откуда в силу математической индукции получаем, что (5) верно при всех натуральных значениях n.

Центральным местом этого вывода явилось тождество

$$\frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2},$$

т. е.

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}.$$

Его можно непосредственно вывести следующим образом:

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+2)-(k+1)}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}.$$

А тогда равенство (5) проще доказывается так:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Легко видеть, что сумма членов этого ряда, за исключением первого и последнего, равна нулю и потому

$$S_n=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.$$

С помощью математической индукции можно получать и формулы для произведений. Пусть

$$P_n=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right),\ n\geqslant 2.$$

Из равенств

$$P_2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=\frac{2+1}{2\cdot 2},\quad P_3=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)=\frac{4}{6}=\frac{3+1}{2\cdot 3},$$

$$P_4=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)=\frac{5}{8}=\frac{4+1}{2\cdot 4}$$

делаем индуктивное предположение, что $P_n=\frac{n+1}{2n}$. Доказательство предоставляем закончить читателю.

6. Доказательство тождеств и неравенств с помощью математической индукции. Метод математической индукции позволяет доказывать тождества и неравенства, одна или обе части которых зависят от натурального числа n. Например, можно сначала убедиться, что доказываемое тождество истинно при $n=1$, а потом записать его при $n=k+1$ и при $n=k$ и вычесть соответствующие части полученных тождеств. Если при этом получится, что разность левых частей тождества равна разности правых частей, то из истинности доказываемого тождества при $n=k$ будет следовать его истинность при $n=k+1$, а тем самым в силу математической индукции и при всех значениях n.

Докажем, например, что при любом n истинно тождество

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}. \quad (1)$$

При $n=1$ оно принимает вид $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ и потому справедливо. Запишем теперь доказываемое тождество при $n=k+1$ и при $n=k$:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2(k+1)}=$$
$$=\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2} \quad (2)$$

и

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}=\frac{1}{k+1}+\ldots+\frac{1}{2k}. \quad (3)$$

Вычитая соответствующие части тождеств друг из друга, приходим к истинному равенству

$$\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2(k+1)}=\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}.$$

Значит, если истинно равенство (3), то истинно и равенство (2), а потому в силу математической индукции тождество (1) справедливо для всех значений n.

В других случаях оказывается полезно разделить друг на друга соответствующие части доказываемых тождеств. Например, тождество

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n} \tag{4}$$

сразу доказывается, если записать его при $n=k+1$ и при $n=k$ и заметить, что отношение левых и отношение правых частей полученных равенств имеет вид

$$\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}.$$

При доказательстве неравенств используют свойства неравенств. Докажем, например, что если $0<a<b$, то для любого натурального значения n истинно неравенство $a^n<b^n$. При $n=1$ справедливость доказываемого неравенства сразу вытекает из условия. Пусть верно, что $a^k<b^k$. Так как $a>0$ и $b>0$, то мы можем умножить обе части этого неравенства на соответствующие части неравенства $a<b$, которое истинно по условию, и получить требуемое неравенство $a^{k+1}<b^{k+1}$. После этого выводим по математической индукции, что $a^n<b^n$ для всех натуральных чисел n.

Точно так же доказывается следующее утверждение, называемое *неравенством Бернулли*:

Если $x>-1$, то для всех натуральных значений n истинно неравенство

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx. \tag{5}$$

В самом деле, при $n=1$ имеем истинное неравенство $1+x\geqslant 1+x$. Пусть $(1+x)^k\geqslant 1+kx$. Так как по условию $1+x>0$, то это неравенство не изменит смысла при умножении обеих частей на $1+x$. Получаем

$$(1+x)^{k+1}\geqslant(1+kx)(1+x),\quad \text{или}\quad (1+x)^{k+1}\geqslant 1+(k+1)x+kx^2.$$

Так как $kx^2>0$, то отсюда вытекает:

$$(1+x)^{k+1}\geqslant 1+(k+1)x,$$

откуда в силу математической индукции выводим, что неравенство (5) истинно для всех натуральных n.

7. Метод математической индукции и делимость чисел. С помощью метода математической индукции можно доказывать различные утверждения, касающиеся делимости натуральных чисел.

Начнем с доказательства основной теоремы арифметики натуральных чисел: *любое натуральное число n, большее* 1, *либо является простым, либо разлагается в произведение простых чисел, причем два разложения отличаются друг от друга лишь порядком множителей.*

Сначала докажем существование разложения на простые множители. При $n = 2$ имеем простое число 2, а потому наше утверждение истинно. Пусть любое натуральное число n, меньшее k, либо простое, либо разлагается на простые множители. Докажем, что тогда и само число k либо простое, либо разлагается на простые множители. Если k простое, то наше утверждение истинно. Если же k— составное число, то $k = ab$, где a и b — натуральные числа, меньшие k. По предположению эти числа разлагаются на простые множители. Заменяя их этими разложениями, получаем разложение на простые множители числа k.

Итак, теорема о существовании разложения на простые множители истинна при $n = 2$, а из ее истинности для всех натуральных чисел, меньших k, следует, что она истинна и при k. Значит, она истинна при всех натуральных значениях n, больших 1.

А теперь докажем единственность (с точностью до порядка множителей) разложения на простые множители. Для этого нам понадобится следующее свойство простых чисел: если натуральное число n делится на простое число p, то в любом разложении n на простые множители один из множителей равен p. В самом деле, если n делится на p и $n = q_1 \dots q_m$, где $q_1, \dots, q_m$ — простые числа, то в силу свойств простых чисел один из множителей $q_1, \dots, q_m$, например q_1, должен делится на p; а так как q_1 — простое число, то он должен совпадать с p.

При $n = 2$ получаем простое число 2, которое, очевидно, не имеет иных разложений на простые множители. Пусть все натуральные числа n, меньшие k, имеют единственное разложение на простые множители. Если k — простое число, то оно не разлагается на множители и для него теорема единственности разложения истинна. Если же k — составное число, то оно делится хотя бы на одно простое число p, отличное от k. Тогда в любое разложение числа k на простые множители входит множитель p. Иными словами, любое разложение k на простые множители имеет вид $k = p \times \times q_2 \dots q_m$, где $q_2 \dots q_m$ — разложение на простые множители числа $\frac{k}{p}$. Так как $\frac{k}{p}$ — натуральное число, большее 1, но меньшее k, оно по предположению имеет единственное разложение на простые множители. А тогда и k имеет единственное разложение. В силу метода математической индукции наше утверждение доказано.

Следующее утверждение можно сравнительно просто доказать и непосредственно. Покажем, как оно получается с помощью метода математической индукции.

Если n — натуральное число, то число $n^2 - n$ четное.

При $n = 1$ наше утверждение истинно: $1^2 - 1 = 0$ — четное число. Предположим, что $k^2 - k$ — четное число. Так как $(k + 1)^2 - (k + 1) - (k^2 - k) = 2k$, а $2k$ — четное число, то и $(k + 1)^2 - (k + 1)$ четное. Итак, четность $n^2 - n$ доказана при $n = 1$, а из четности $k^2 - k$ выведена четность $(k + 1)^2 - (k + 1)$. Значит, $n^2 - n$ четно при всех натуральных значениях n.

Точно так же доказывается, что $n^3 - n$ делится на 3 при всех натуральных значениях n. При этом мы используем тот факт, что $(k + 1)^3 - (k + 1) - (k^3 - k) = 3k^2 + 3k$ делится на 3.

Рассмотренные примеры приводят к предположению индукции, что $n^m - n$ всегда делится на m. Но уже пример $m = 4$, $n = 3$ опровергает это утверждение: $3^4 - 3 = 78$ не делится на 4. При $m = 5$ снова получаем, что $n^5 - n$ делится на 5 (доказательство этого утверждения опирается на формулу бинома Ньютона). Числа 2, 3 и 5 простые. Поэтому уточним гипотезу: *выражение $n^p - n$, где p — простое число, делится на p*. Это утверждение (малая теорема Ферма) истинно для всех простых чисел p и всех натуральных чисел n. Его доказательство проводится методом математической индукции с использованием формулы бинома Ньютона (см. с. 35; 36).

§ 2. КОМБИНАТОРИКА

1. Комбинаторные задачи. На практике часто приходится выбирать из некоторого множества объектов подмножества элементов, обладающих теми или иными свойствами, располагать элементы одного или нескольких множеств в определенном порядке и т. д. Например, мастеру приходится распределять различные виды работ между рабочими, агроному — размещать сельскохозяйственные культуры на нескольких полях, офицеру — выбирать из солдат взвода наряд и т. д.

Поскольку в таких задачах речь идет о тех или иных комбинациях объектов, их называют *комбинаторными задачами*. Область математики, в которой изучаются комбинаторные задачи, называют *комбинаторикой*. Комбинаторику можно рассматривать как часть теории множеств — любую комбинаторную задачу можно свести к задаче о конечных множествах и их отображениях.

Различают несколько уровней решения комбинаторных задач. Начальным уровнем является поиск хотя бы одного расположения объектов, обладающего заданными свойствами (например, отыскание такого расположения десяти точек на пяти отрезках, при котором на каждом отрезке лежит по четыре точки, или такого расположения восьми ферзей на шахматной доске, при котором они не бьют друг друга). Иногда удается доказать, что данная комбинаторная задача не имеет решения (например, нельзя расположить 10 шаров в 9 урнах так, чтобы в каждой урне было не более одного шара — хотя бы в одной из урн окажется не менее двух шаров). Если комбинаторная задача имеет несколько решений, то возникает вопрос о подсчете числа таких решений, об описании всех решений данной задачи. Наконец, часто бывает, что различные решения данной комбинаторной задачи отличаются друг от друга некоторыми параметрами. В этом случае возникает проблема отыскания оптимального варианта решения такой задачи.

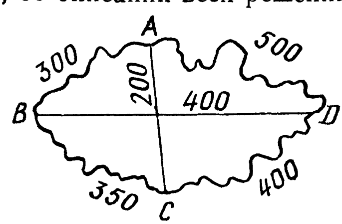

Рис. 1

Пусть, например, путешественник хочет выехать из города A, посетить города B, C и D, после чего вернуться в город A. На рисунке 1 изображена схема путей, связывающих эти города. Различные варианты путешествия отличаются друг от друга порядком посещения городов B, C и D. Существует шесть вариантов путешествия. В таблице 1 указаны эти варианты и длина каждого пути:

Путь	Длина пути	Путь	Длина пути
$ABCDA$	1550	$ACDBA$	1300
$ABDCA$	1300	$ADBCA$	1450
$ACBDA$	1450	$ADCBA$	1550

Из этой таблицы видно, что кратчайшими являются пути $ACDBA$ и $ABDCA$, отличающиеся друг от друга лишь направлением движения.

Комбинаторные задачи на оптимизацию приходится решать мастеру, стремящемуся к быстрейшему выполнению задания на данном количестве станков, агроному, стремящемуся к наивысшей урожайности на данных полях, и т. д.

В этой книге мы рассмотрим лишь вопрос о подсчете числа решений комбинаторной задачи. Этот раздел комбинаторики, называемый *теорией перечислений*, тесно связан с теорией вероятностей. Во многих случаях при вычислении вероятности данного события надо найти общее число возможных вариантов и число благоприятных вариантов, а отыскание числа вариантов делается на основе комбинаторных методов.

2. Правило суммы. Характерной чертой математического анализа практических задач является абстрагирование, т. е. отвлечение от конкретных черт, выявление глубинного содержания, общего для задач, внешне отличающихся друг от друга. Это приводит к построению *математической модели* задачи, к введению общих понятий, охватывающих различные частные случаи, подобно тому, как понятие геометрической фигуры охватывает конкретные треугольники, прямоугольники, трапеции, окружности и т. д.

Выше говорилось, что комбинаторика тесно связана с теорией конечных множеств. Такие понятия теории множеств, как *подмножество*, *объединение множеств*, *пересечение множеств*, изучаемые сейчас в средней школе, оказываются весьма полезными при решении комбинаторных задач.

Обозначим число элементов конечного множества A через $n(A)$, а множество, состоящее из m элементов, назовем *m-множеством*. Например, $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ является 6-множеством и $n(A) = 6$.

Рассмотрим следующую комбинаторную задачу:

Сколько элементов содержится в объединении $A \cup B$ k-множества A и m-множества B?

Эта задача имеет однозначное решение лишь в случае, когда множества A и B не пересекаются, т. е. $A \cap B = \varnothing$. В этом случае множество $A \cup B$ содержит $k + m$ элементов (например, если $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{e, f, g\}$, то $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ содержит $4+3=7$ элементов). Таким образом, справедливо следующее утверждение:

Если множества A и B конечны, причем $A \cap B = \varnothing$, то

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B). \tag{1}$$

Это очевидное утверждение называют в комбинаторике *правилом суммы*. Его формулируют также следующим образом:

Если α можно выбрать k способами, а β — m способами, причем любой способ выбора α отличается от любого способа выбора β, то выбор «α или β» можно сделать $k+m$ способами.

Например, если на тарелке лежат 8 яблок и 6 груш, то один плод можно выбрать $8+6=14$ способами.

Сложнее обстоит дело, если пересечение множеств A и B непусто. Например, объединение множеств $A = \{a, b, c, d, e\}$ и $B = \{d, e, f, g\}$ состоит лишь из семи элементов: $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, а не из $5+4=9$ элементов. Это объясняется тем, что элементы d и e принадлежат и A и B, а в объединение $A \cup B$ эти элементы входят лишь один раз (для множеств не имеет смысла говорить, что некоторый элемент входит в них несколько раз). Поэтому из суммы $5+4$ приходится вычесть 2, т. е. число элементов пересечения $A \cap B$. Вообще для любых двух конечных множеств A и B имеет место равенство:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B). \tag{2}$$

Таким образом, число элементов в объединении двух конечных множеств равно сумме чисел элементов в каждом из них, уменьшенной на число элементов в пересечении этих множеств.

Аналогично рассматривается вопрос о числе элементов в объединении нескольких конечных множеств. Если эти множества $A_1, \ldots, A_m$ попарно не пересекаются (т. е. если $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$), то справедливо равенство

$$n(A_1 \cup \ldots \cup A_m) = n(A_1) + \ldots + n(A_m), \tag{3}$$

легко доказываемое с помощью математической индукции по m.

Как и при $m=2$, сложнее обстоит дело, если попарные пересечения множеств $A_1, \ldots, A_m$ могут быть не пусты. В этом случае имеет место следующее равенство, обобщающее соотношение (2):

$$\begin{aligned} n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) = n(A_1) + n(A_2) + \ldots + n(A_m) - n(A_1 \cap \\ \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - \ldots - n(A_1 \cap A_m) - \ldots - n(A_{m-1} \cap A_m) + \\ + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \ldots + (-1)^{k-1} n(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) + \ldots + \\ + (-1)^{m-1} n(A_1 \cap \ldots \cap A_m). \end{aligned} \tag{4}$$

В эту формулу, кроме самих множеств $A_1, A_2, \ldots, A_m$, входят их всевозможные пересечения по два, по три, ..., по m, причем если число пересекаемых множеств нечетно, то соответствующее слагаемое входит в правую часть равенства (4) со знаком плюс (в этом случае $(-1)^{k-1} = 1$), а если число пересекаемых множеств четно, то соответствующее слагаемое получает знак минус (в этом случае $(-1)^{k-1} = -1$).

Поскольку в равенство (4) входят пересечения множеств $A_1, \ldots, A_m$, т. е. оно учитывает, как эти множества перекрываются друг с другом, его называют *формулой перекрытий* или *формулой включений и исключений*. Мы приведем доказательство формулы (4) ниже, а сейчас покажем, как ее применяют для решения задач.

Сколько человек участвовало в прогулке, если известно, что 16 *из них взяли с собой бутерброды с ветчиной*, 24 *— с колбасой*, 15 *— с сыром*, 11 *— и с ветчиной и с колбасой*, 8 *— и с ветчиной и с сыром*, 12 *— и с колбасой и с сыром*, 6 *— бутерброды всех трех видов, а* 5 *вместо бутербродов взяли с собой пирожки?*

Обозначим через A множество участников, взявших с собой бутерброды с ветчиной, через B — с колбасой и через C — с сыром. Тогда условия задачи можно записать так:

$$
\begin{gathered}
n(A) = 16,\ n(B) = 24,\ n(C) = 15,\\
n(A \cap B) = 11,\ n(A \cap C) = 8,\ n(B \cap C) = 12,\\
n(A \cap B \cap C) = 6,\\
n(D) = 5,
\end{gathered}
$$

где через D обозначено множество участников, взявших с собой вместо бутербродов пирожки. Найдем $n(A \cup B \cup C)$, т. е. число участников прогулки, взявших с собой один или несколько видов бутербродов. По формуле (4) получаем:

$$
n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) = 16 + 24 + 15 - 11 - 8 - 12 + 6 = 30.
$$

Значит, бутерброды взяли с собой 30 человек, а всего в прогулке участвовали $30 + 5 = 35$ человек.

На рисунке 2 дана схема, графически изображающая условия задачи. Такие схемы называют *диаграммами Эйлера — Венна*. Они широко применяются для решения самых разнообразных задач, связанных с конечными множествами, математической логикой и т. д. С помощью такой диаграммы можно решить нашу задачу, не прибегая к формуле включений и исключений. Для этого заметим, что область, занумерованная римской цифрой VIII, соответствует множеству $A \cap B \cap C$, а потому содержит 6 элементов. Объединение областей VII и VIII изображает множество $A \cap B$ и потому содержит 11 элементов. Поскольку в области VIII содержится 6 элементов, а эти области не пересекаются, то в области VII содержится 5 элементов. Аналогично находим, что в области VI содержится 2 элемента, в области V — 6 элементов. Теперь рассмотрим области, имеющие номера II, VI, VII и VIII. Их объединением является множество A, содержащее по условию 16 элементов. Но объединение областей VI, VII и VIII содержит $2 + 5 + 6 = 13$ элементов, а потому на долю области II остается 3 элемента. Так же находим, что область III содержит 7 элементов, а область IV — всего один элемент.

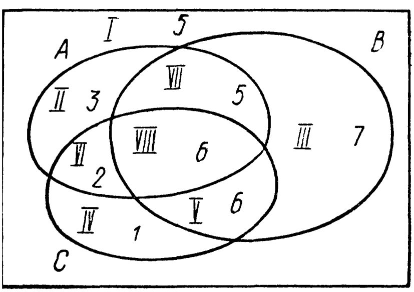

Рис. 2

Но объединение областей II, III, IV, V, VI, VII и VIII является множеством $A \cup B \cup C$. Поскольку эти области попарно не пересекаются, то число элементов во множестве $A \cup B \cup C$ равно $3 + 7 + 1 + 6 + 2 + 5 + 6 = 30$. Мы снова получили, что $n(A \cup B \cup C) = 30$, т. е. что бутерброды взяли с собой 30 человек. Область I изображает множество D людей, захвативших пирожки, а прямоугольник — всех участников прогулки. Так как $n(D) = 5$, то общее число участников прогулки равно 35.

3. Кортежи. Не всегда удается составить математическую модель комбинаторной задачи, используя лишь упомянутые выше понятия теории множеств. Во многих комбинаторных задачах существенную роль играет порядок элементов (например, порядок обработки детали на различных станках, порядок солдат в строю и т. д.), в то время как для множеств порядок элементов роли не играет. Далее, часто возникают комбинаторные задачи, в которых некоторые элементы следует считать неразличимыми, тождественными (как, например, две белые шашки из одного и того же комплекта, две автомашины одной и той же марки, цвета и года выпуска и т. д.). Поэтому возникает необходимость ввести новое математическое понятие, которое можно было бы использовать и в таких задачах. Этим понятием является «кортеж» (или, как его еще называют, «слово», «n-мерный вектор»).

Пусть дано некоторое множество X. Возьмем множество натуральных чисел $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ и зададим некоторое отображение множества N_n во множество X. Это значит, что числу 1 ставится в соответствие элемент $x_1 \in X$, числу 2 — элемент $x_2 \in X$, ..., числу n — элемент $x_n \in X$. В результате мы получаем набор $x_1, x_2, \ldots, x_n$ элементов множества X, в который некоторые элементы могут входить несколько раз (ведь при отображении N_n в X может случиться, что различным числам отвечает один и тот же элемент множества X). Располагая элементы этого набора по порядку номеров, мы получаем *кортеж* $(x_1, \ldots, x_n)$ длины n, составленный из элементов множества X. Слово «кортеж» по-французски означает торжественное шествие (иногда и по-русски говорят «свадебный кортеж», «кортеж автомашин» и т. д.). Элемент x_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, называют k-й *компонентой* или k-й координатой кортежа $(x_1, \ldots, x_n)$.

Кортежи длины 2 называют *парами* (точнее говоря, упорядоченными парами), а кортежи длины 3 — *тройками*. Иногда и кортежи длины n называют *n-ками*. Примерами кортежей могут служить слова (кортежи, составленные из букв алфавита), десятичные записи чисел (кортежи, составленные из цифр) и т. д.

Два кортежа $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(y_1, \ldots, y_m)$ считают *равными*, если они имеют одинаковую длину, причем их компоненты, имеющие одинаковые номера, равны. Мы будем обозначать кортежи греческими буквами. Итак, если $\alpha = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\beta = (y_1, \ldots, y_m)$, то $\alpha = \beta$ в том и только в том случае, когда $n = m$ и $x_k = y_k$ для всех k, $1 \leqslant k \leqslant n$. Например, если $\alpha = (2^2, 3^2, 4^2)$, $\beta = (\sqrt{16}, \sqrt{81}, \sqrt{256})$, то $\alpha = \beta$, так как $2^2 = \sqrt{16}$, $3^2 = \sqrt{81}$, $4^2 = \sqrt{256}$. Кортежи (a, b, c) и (a, b, c, a) не равны, так как имеют различную длину. Кортежи (a, b, c) и (b, a, c) имеют одинаковую длину и состоят из одних и тех же элементов, но они не равны, так как порядок их компонент различен.

Компонентами кортежа могут быть множества, кортежи и т. д. Например, кортежи $(\{a, b\}, c, d)$ и $(\{b, a\}, c, d)$ равны, так как множества $\{a, b\}$ и $\{b, a\}$ совпадают (для множеств порядок элементов не играет роли), а кортежи $((a, b), c, d)$ и $((b, a), c, d)$ различны, так как различны кортежи (a, b) и (b, a), являющиеся их первыми компонентами.

Кортеж, не содержащий ни одной компоненты (т. е. кортеж длины нуль), называется *пустым* и обозначается $(\ )$.

Подчеркнем еще раз отличия понятия кортежа от понятия множества:

а) *в множестве порядок элементов не играет роли, а кортежи, отличающиеся порядком элементов, различны даже в том случае, когда они имеют один и тот же состав*;

б) *в множестве все элементы различны* (ни один элемент не может входить во множество дважды), *а в кортеже компоненты могут повторяться.*

4. Декартово произведение множеств. Размещения с повторениями. Обобщим понятие кортежа и будем рассматривать кортежи, компоненты которых принадлежат различным множествам. Иными словами, зададим множества $X_1, \ldots, X_n$ и рассмотрим такие наборы $\alpha = (x_1, \ldots, x_n)$ элементов этих множеств, что $x_k \in X_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Множество, состоящее из таких кортежей, называют *декартовым произведением множеств* $X_1, \ldots, X_n$. Его обозначают $X_1 \times \ldots \times X_n$.

Например, если $X_1 = \{a, b, c\}$, $X_2 = \{1, 2\}$, то декартово произведение $X_1 \times X_2$ состоит из шести пар:

$$(a, 1),\ (a, 2),\ (b, 1),\ (b, 2),\ (c, 1),\ (c, 2).$$

Декартово же произведение $X_2 \times X_1$ тоже состоит из шести пар, компоненты которых идут в ином порядке:

$$(1, a),\ (1, b),\ (1, c),\ (2, a),\ (2, b),\ (2, c).$$

Таким образом, множества $X_1 \times X_2$ и $X_2 \times X_1$, вообще говоря, различны: $X_1 \times X_2 \neq X_2 \times X_1$. Принято считать, что если хотя бы одно из множеств X_1, X_2 пусто, то и их декартово произведение пусто:

$$X_1 \times \varnothing = \varnothing \times X_2 = \varnothing.$$

Найдем число элементов декартова произведения $X \times Y$ в случае, когда X является k-множеством, а Y — m-множеством. Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$, а $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$. Декартово произведение $X \times Y$ состоит из пар (x_i, y_j). Их можно расположить следующим образом:

$$\begin{array}{l} (x_1, y_1),\ (x_1, y_2),\ \ldots,\ (x_1, y_m), \\ (x_2, y_1),\ (x_2, y_2),\ \ldots,\ (x_2, y_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (x_k, y_1),\ (x_k, y_2),\ \ldots,\ (x_k, y_m). \end{array}$$

Мы получили k строк по m пар в каждой строке. Отсюда следует, что общее число пар, входящих в $X \times Y$, равно km, т. е. $n(X)n(Y)$. Иными словами, имеет место следующая формула:

$$n(X \times Y) = n(X)\, n(Y). \tag{1}$$

Она выражает правило произведения:

Число элементов в декартовом произведении конечных множеств X и Y равно произведению числа элементов множества X и числа элементов множества Y.

С помощью метода математической индукции легко обобщить это правило на случай произведения нескольких множеств. Именно при любом m верна формула

$$n\,(X_1 \times \ldots \times X_m) = n\,(X_1) \ldots n\,(X_m). \qquad (2)$$

В самом деле, мы уже доказали эту формулу для $m = 2$. Предположим, что ее справедливость уже доказана для $m = k$:

$$n\,(X_1 \times \ldots \times X_k) = n\,(X_1) \ldots n\,(X_k).$$

Возьмем теперь множества $X_1, \ldots, X_k, X_{k+1}$. Любой кортеж длины $k + 1$ из элементов этих множеств имеет вид:

$$(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}), \text{ где } x_i \in X_i, \; 1 \leqslant i \leqslant k + 1.$$

Поставим в соответствие каждому такому кортежу пару $((x_1, \ldots, x_k), x_{k+1})$, состоящую из кортежа $(x_1, \ldots, x_k) \in X_1 \times \ldots \times X_k$ и элемента $x_{k+1} \in X_{k+1}$. По правилу произведения для $m = 2$ число таких пар равно $n\,(X_1 \times \ldots \times X_k)\, n\,(X_{k+1})$. Но по предположению

$$n\,(X_1 \times \ldots \times X_k) = n\,(X_1) \ldots n\,(X_k),$$

и потому число пар рассматриваемого вида равно

$$n\,(X_1) \ldots n\,(X_k)\, n\,(X_{k+1}).$$

Поскольку существует взаимно однозначное соответствие между парами вида $((x_1, \ldots, x_k), x_{k+1})$ и кортежами вида $(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1})$, то число элементов декартова произведения $X_1 \times \ldots \times X_{k+1}$ тоже равно $n\,(X_1) \ldots n\,(X_{k+1})$:

$$n\,(X_1 \times \ldots \times X_{k+1}) = n\,(X_1) \ldots n\,(X_{k+1}).$$

Но это и есть формула (2) для $m = k + 1$.

Итак, мы доказали справедливость формулы (2) при $m = 2$ и из ее справедливости при $m = k$ вывели, что она верна и при $m = k + 1$. Отсюда следует, что эта формула верна для всех $m \geqslant 2$.

В комбинаторике правило произведения обычно формулируют следующим образом:

Если элемент α можно выбрать k способами, а элемент β — m способами, то пару (α, β) можно выбрать km способами.

Иногда для решения задач приходится пользоваться обобщенным правилом произведения. А именно бывает, что различные варианты выбора элемента β определяются уже сделанным выбором элемента α, но после каждого выбора элемента α элемент β можно выбрать одним и тем же числом способов. И в этом случае число способов выбрать пару (α, β) равно km, где k — число способов выбрать элемент α, а m — число способов выбрать элемент β после того, как элемент α выбран.

Пример. Найдем число слов длины 4, составленных из 33 букв русского алфавита, и таких, что любые две соседние буквы этих слов различны (допускается слово «хата», но не допускаются слова «веер» или «босс»). При этом мы наряду со словами, имеющими смысл, допускаем и такие бессмысленные сочетания букв, как «арнг», «тосо» и т. д. В этой задаче первую букву слова можно выбрать 33 способами. Но после того, как она выбрана, следующую букву можно выбрать лишь 32 способами (повторить выбранную букву уже нельзя). Третья буква должна быть отлична от второй (хотя и может совпадать с первой), а потому ее можно выбрать тоже 32 способами, равно как и четвертую. Поэтому общее число способов выбора равно $33 \cdot 32 \cdot 32 \cdot 32 = 1\,081\,344$.

С помощью формулы (2) легко решить такую задачу:

Найти число всех кортежей длины k, составленных из элементов m-множества X.

Искомое число равно числу кортежей в декартовом произведении $X \times \ldots \times X$, содержащем m множителей. По формуле (2) получаем:

$$n(\underbrace{X \times \ldots \times X}_{k \text{ раз}}) = \underbrace{n(X) \ldots n(X)}_{k \text{ раз}}.$$

Но $n(X) = m$, а потому $n(X \times \ldots \times X) = m^k$.

Итак, *число кортежей длины k, составленных из элементов m-множества X, равно m^k.*

Например, из 33 букв русского алфавита можно составить 33^2 слов длины 2 (аа, аб, ав, ..., ая, ба, ..., яя), 33^3 слов длины 3, 33^4 слов длины 4 и т. д. Точно так же из 10 цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 можно составить 10^2 двузначных номеров (00, 01, ..., 99), 10^3 трехзначных номеров и т. д.

Кортежи длины k, составленные из элементов m-множества, *называют размещениями с повторениями* из m элементов по k, а их число обозначают $\overline{A}_m^k$ (от французского слова arrangement — размещение; черта поставлена сверху, чтобы отличать эти размещения от размещений без повторений, которые мы рассмотрим позднее). Таким образом,

$$\overline{A}_m^k = m^k. \tag{3}$$

5. Число отображений k-множества в m-множество. Выведенная выше формула для числа кортежей позволяет решать различные задачи комбинаторики. Вспомним, что кортеж длины k из элементов m-множества Y — это отображение множества $N_k = \{1, 2, \ldots, k\}$ в Y. Поэтому число m^k таких кортежей равно числу отображений множества N_k в m-множество Y. Очевидно, таким же будет число отображений любого k-множества в любое m-множество.

Итак, мы доказали, что *число отображений k-множества X в m-множество Y равно m^k.*

Например, если $k = 3$, $m = 2$, то имеем $2^3 = 8$ отображений. Если же $k = 2$, $m = 3$, то имеем $3^2 = 9$ отображений.

Полученный результат можно сформулировать и иным образом. Если считать элементы множества X «предметами», а элементы множества Y—«ящиками», то при каждом отображении φ множества X во множество Y происходит распределение предметов по ящикам (некоторые ящики могут при этом оказаться пустыми, поскольку может оказаться, что в элемент $y \in Y$ не отображается ни один элемент множества X). Например, если множество X состоит из элементов $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, а множество Y — из чисел 1, 2, 3, 4 и отображение φ задается схемой, показанной на рисунке 3, то в первый ящик попадают элементы a, c и d, во второй ящик — элементы b, e, f, в четвертый ящик — элементы g и h, а третий ящик остается пустым. Поскольку число отображений k-множества X в m-множество Y равно m^k, то и *число распределений k различных предметов по m различным ящикам* (некоторые ящики могут оказаться пустыми) *равно m^k.*

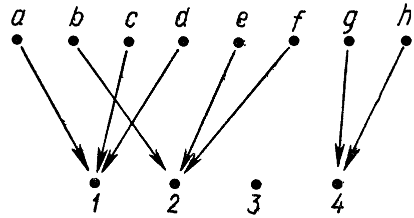

Рис. 3

Этот результат позволяет найти число подмножеств n-множества X. В самом деле, возьмем два числа 0 и 1 (или, если угодно, два ящика). Каждому подмножеству A множества X соответствует отображение φ множества X во множество $\{0; 1\}$, при котором элементы из A отображаются в 1, а остальные элементы — в 0. Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между подмножествами множества X и отображениями этого множества в 2-множество $\{0; 1\}$. Но число этих отображений равно 2^n, где n — число элементов множества X. Значит, и *число подмножеств n-множества X равно 2^n.*

В качестве примера рассмотрим 3-множество $X = \{a, b, c\}$. Оно должно иметь $2^3 = 8$ подмножеств. Ими являются $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$ и $\{a, b, c\}$.

Утверждение о числе подмножеств n-множества можно доказать, используя метод математической индукции. При $n = 1$ оно истинно, так как $2^1 = 2$, а 1-множество $\{a\}$ имеет два подмножества — само множество $\{a\}$ и пустое множество $\varnothing$. Предположим теперь, что утверждение справедливо при $n = k$, т. е. что k-множество $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$ имеет 2^k подмножеств. Присоединив ко множеству X элемент x_{k+1}, получим $(k+1)$-множество $Y = (x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}\}$. Любое из подмножеств множества Y либо не содержит нового элемента x_{k+1}, либо содержит его. В первом случае оно является подмножеством k-множества X. Число таких подмножеств равно 2^k. Во втором случае, отбрасывая элемент x_{k+1}, снова получаем подмножество множества X. Итак, число подмножеств второго вида равно числу подмножеств первого вида, т. е. равно 2^k. Но тогда общее число подмножеств множества Y равно $2^k + 2^k = 2^{k+1}$.

Итак, мы доказали, что наше утверждение истинно при $n = 1$, а из его истинности при $n = k$ вывели, что оно истинно и при $n = k + 1$. Значит, оно верно при всех значениях n.

6. Упорядоченные множества. Размещения без повторений. Образование кортежей можно наглядно представить себе следующим образом. Положим элементы множества X в мешок и будем извлекать их из него один за другим, записывать извлеченный элемент и класть обратно в мешок. После того как мы сделаем m извлечений, получим один из кортежей длины m, состоящих из элементов множества X.

Предположим теперь, что мы не возвращаем извлеченные элементы обратно в мешок. Тогда в полученном кортеже не будет повторяющихся элементов. Он будет состоять из m различных элементов, расположенных в определенном порядке. Такие кортежи называют *упорядоченными множествами* (напомним, что во множестве нет двух одинаковых элементов). Таким образом, множество называется упорядоченным, если его элементы расположены в определенном порядке. Этот порядок проще всего задать, занумеровав элементы данного множества. Элемент, получивший номер k, обозначим x_k. Получившееся упорядоченное множество обозначают $(x_1, \ldots, x_m)$. В дальнейшем мы будем писать $x_i < x_j$, если элемент x_i предшествует элементу x_j, т. е., если $i < j$.

Одно и то же множество можно упорядочить различными способами (например, множество школьников в классе можно упорядочить по возрасту, по росту, по весу, по алфавиту и даже по столь случайному признаку, как время его прихода в школу 1 сентября).

Если задано n-множество X и $m \leqslant n$, то можно составить различные упорядоченные m-множества, в которые входят лишь элементы множества X. Например, из элементов множества $\{a, b, c, d\}$ можно составить 12 упорядоченных 2-множеств:

$$(a, b),\ (a, c),\ (a, d),\ (b, a),\ (b, c),\ (b, d),$$
$$(c, a),\ (c, b),\ (c, d),\ (d, a),\ (d, b),\ (d, c).$$

Упорядоченные m-множества, состоящие из элементов n-множества X, называют *упорядоченными m-подмножествами* этого *множества* или *размещениями без повторений* из n элементов по m. Их число обозначают A_n^m. Найдем формулу, выражающую A_n^m через n и m.

Итак, пусть задано n-множество X. Упорядоченное m-подмножество можно получить, выбирая из X поочередно элементы $x_1, \ldots, x_m$. Но в качестве первого элемента x_1 можно выбрать любой из n элементов множества X. Поэтому такой выбор может быть произведен n способами. После того как первый элемент выбран, второй элемент можно выбрать лишь $n - 1$ способами (можно взять любой элемент, исключая уже выбранный). После выбора первых двух элементов остаются лишь $n - 2$ возможности выбрать третий элемент и т. д. Последний, m-й элемент можно выбрать $n - m + 1$ способами — ведь до него уже выбраны $m - 1$ элемент, а потому осталось лишь $n - (m - 1) = n - m + 1$ элементов.

По правилу произведения (см. с. 25) получаем, что число упорядоченных m-подмножеств n-множества X равно произведению чисел n, $n - 1$, ..., $n - m + 1$, т. е. $n(n-1)\ldots(n-m+1)$. Мы доказали, таким образом, что

$$A_n^m = n(n-1)\ldots(n-m+1). \qquad (1)$$

Произведение первых n натуральных чисел, т. е. $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, называют *$n$-факториал* и обозначают $n!$. Произведение $n(n-1)\ldots$ $\ldots(n-m+1)$ можно записать в виде дроби

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)(n-m)\ldots 1}{(n-m)\ldots 1},$$

т. е. в виде $\frac{n!}{(n-m)!}$. Итак, мы доказали, что

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \qquad (2)$$

В частности, при $m = 0$ получаем из формулы (2)

$$A_n^0 = \frac{n!}{n!} = 1. \qquad (3)$$

Это означает, что существует единственное упорядоченное множество длины 0 — пустой кортеж, не имеющий ни одной компоненты.

7. Перестановки без повторений. Рассмотрим теперь различные упорядочивания данного n-множества X. Получаемые при этом упорядоченные множества отличаются друг от друга лишь порядком входящих в них элементов. Их называют *перестановками без повторений из n элементов*, а их число обозначают P_n. Например, $P_3 = 6$, так как из трех элементов a, b, c можно составить шесть перестановок:

$$(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a).$$

Общая формула для P_n получается из формулы (1) п. 6. Действительно, перестановка без повторений из n элементов — это то же самое, что размещение без повторений из n элементов по n. Поэтому для отыскания P_n достаточно положить в формуле (1) п. 6 $m = n$. Получаем:

$$P_n = A_n^n = n(n-1)\ldots(n-n+1) = n!. \qquad (1)$$

Итак, $P_n = n!$. Полагая в формуле (2) п. 6 $m=n$, получаем:

$$P_n = \frac{n!}{0!}. \qquad (2)$$

Сравнивая равенства (1) и (2), приходим к выводу, что $0! = 1$. На первый взгляд это равенство кажется парадоксальным. Но для всех $n \geqslant 2$ справедливо равенство $n! = (n-1)!\,n$. Если потребовать, чтобы это равенство было справедливо и при $n = 1$, то получим $1! = 0! \cdot 1$, откуда вновь следует, что естественно положить $0! = 1$.

Приведем таблицу значений $n!$ при $1 \leqslant n \leqslant 10$.

n	$n!$	n	$n!$
1	1	6	720
2	2	7	5040
3	6	8	40320
4	24	9	362880
5	120	10	3628800

8*. Упорядоченные подмножества и обратимые отображения. Отображение φ множества X во множество Y называют *обратимым*, если различным элементам множества X соответствуют различные элементы множества Y, т. е. если из $x_1 \neq x_2$ следует $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$ (рис. 4). Каждому обратимому отображению φ множества $N_m = \{1, 2, \ldots, m\}$ в n-множество Y соответствует упорядоченное m-подмножество множества Y, состоящее из элементов $y_1 = \varphi(1), \ldots, y_m = \varphi(m)$ (все эти элементы различны в силу обратимости φ). Обратно, каждое упорядоченное m-подмножество $(y_1, \ldots, y_m)$ множества Y определяет обратимое отображение N_m в Y, при котором $\varphi(k) = y_k$.

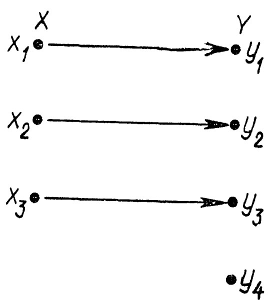

Рис. 4

Вместо N_m можно взять любое m-множество X. Таким образом, *число обратимых отображений m-множества X в n-множество Y равно числу упорядоченных m-подмножеств в Y, т. е. A_n^m*.

Если $m = n$, то любое обратимое отображение X в Y является взаимно однозначным соответствием между X и Y (рис. 5). Поэтому *число взаимно однозначных соответствий между n-множеством X и n-множеством Y равно P_n*, т. е. $n!$.

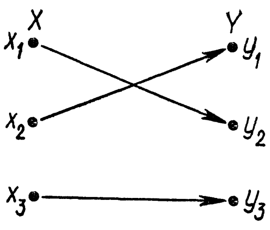

Рис. 5

9. Сочетания без повторений. Одной из важнейших задач комбинаторики является подсчет числа m-подмножеств n-множества X. Такие неупорядоченные подмножества называются *сочетаниями без повторений* из n элементов по m, а их число обозначают C_n^m (от французского слова combinaison — сочетание). Например, из элементов 5-множества $X = \{a, b, c, d, e\}$ можно составить следующие 2-подмножества: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{a, e\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{b, e\}$, $\{c, d\}$, $\{c, e\}$, $\{d, e\}$.

Число этих подмножеств равно 10. Значит, $C_5^2 = 10$. Отметим, что $C_n^0 = 1$ — каждое множество X имеет лишь одно 0-подмножество, а именно пустое множество. Далее, $C_n^1 = n$ — в n-множестве $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ содержится n одноэлементных подмножеств, т. е. подмножеств вида $\{x_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Выведем формулу, выражающую C_n^m через n и m. Пусть из элементов n-множества X составлены все m-подмножества. Упорядочим всеми способами каждое из этих подмножеств. Мы получим, и притом лишь по одному разу, все упорядоченные m-подмножества n-множества X. Их число, как мы знаем, равно A_n^m. Но число m-подмножеств в X равно C_n^m, а каждое из них можно упорядочить $P_m = m!$ способами. Значит, имеет место равенство $A_n^m = m!\, C_n^m$. Из него вытекает, что $C_n^m = \frac{A_n^m}{m!}$. Заменяя в полученной формуле A_n^m его выражением $\frac{n!}{(n-m)!}$, получаем:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}. \tag{1}$$

10*. Строго монотонные отображения. Пусть X — упорядоченное m-множество, а Y — упорядоченное n-множество. Отображение φ множества X в Y называется *строго монотонным*, если из $x_i < x_j$ следует $\varphi(x_i) < \varphi(x_j)$. Иными словами, строго монотонные отображения обратимы и сохраняют порядок. На рисунке 6 изображено строго монотонное отображение множества $X = (x_1, x_2, x_3)$ в $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$.

Каждое упорядоченное множество имеет единственное строго монотонное отображение на себя, а именно тождественное отображение, оставляющее все элементы неподвижными, при любом другом отображении X на Y порядок элементов изменяется. Аналогично доказывается, что существует единственное строго монотонное отображение n-множества X на n-множество Y, а именно отображение, при котором первый элемент в X отображается на первый элемент в Y, второй элемент — на второй, ..., n-й — на n-й.

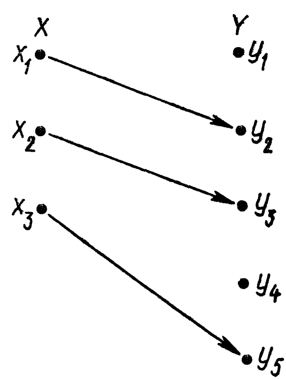

Рис. 6

Найдем теперь число строго монотонных отображений упорядоченного m-множества X в упорядоченное n-множество Y. Любое m-подмножество A в Y упорядочено, причем существует единственное строго монотонное отображение X на A. Обратно, каждому строго монотонному отображению

X в Y соответствует m-подмножество в Y, состоящее из образов элементов X при этом отображении. Таким образом, число строго монотонных отображений X в Y равно числу m-подмножеств в Y, т. е. C_n^m.

Итак, *число строго монотонных отображений упорядоченного m-множества X в упорядоченное n-множество Y равно C_n^m.*

11. Свойства чисел C_n^m. Числа C_n^m, выражающие количество m-подмножеств в n-множестве X, обладают целым рядом замечательных свойств. Эти свойства выражают различные соотношения между подмножествами множества X. Их можно доказывать, непосредственно исходя из формулы для C_n^m. Но более содержательными являются доказательства, опирающиеся на теоретико-множественные рассуждения.

1) Если $0 \leqslant m \leqslant n$ и числа m и n целые, то верно равенство

$$C_n^m = C_n^{n-m}. \tag{1}$$

С помощью формулы (1) п. 9 это утверждение доказывается сразу. Действительно,

$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!\,[n-(n-m)]!} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!} = C_n^m.$$

Смысл этого утверждения состоит в следующем. Каждому m-подмножеству A n-множества X соответствует однозначно определенное $(n-m)$-подмножество в X, получаемое из X удалением всех элементов подмножества A. Это $(n-m)$-подмножество называют *дополнением* к A в X. При этом любое $(n-m)$-подмножество в X является дополнением одного и только одного m-подмножества. Значит, существует взаимно однозначное соответствие между m-подмножествами и $(n-m)$-подмножествами, а потому число m-подмножеств равно числу $(n-m)$-подмножеств. Это утверждение и выражается равенством (1).

2) Для любого целого числа $n \geqslant 0$ верно равенство

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n = 2^n. \tag{2}$$

В самом деле, мы доказали в п. 5, что общее число подмножеств n-множества X равно 2^n. Но любое подмножество n-множества содержит k элементов, где k — целое число, такое, что $0 \leqslant k \leqslant n$. Так как число k-подмножеств в X равно C_n^k, то по правилу суммы общее число подмножеств n-множества равно $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n$. Сравнивая два получившихся значения для числа всех подмножеств в X, получаем равенство (2).

3) *Для любых m и n, таких, что $0 \leqslant m \leqslant n$, верно равенство*:

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m. \tag{3}$$

И это равенство нетрудно получить с помощью формулы (1) п. 9. В самом деле, так как

$$C_{n-1}^{m-1} = \frac{(n-1)!}{(m-1)!\,(n-m)!} = \frac{(n-1)!\,m}{m!\,(n-m)!}$$

и $$C_{n-1}^{m} = \frac{(n-1)!}{m!\,(n-m-1)!} = \frac{(n-1)!\,(n-m)}{m!\,(n-m)!},$$

то, подставляя эти значения в правую часть формулы (3), получаем:

$$C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^{m} = \frac{(n-1)!\,m}{m!\,(n-m)!} + \frac{(n-1)!\,(n-m)}{m!\,(n-m)!} =$$
$$= \frac{(n-1)!\,(m+n-m)}{m!\,(n-m)!} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = C_n^m.$$

Равенство (3) доказано. Отметим, что при $m = 0$ получаем равенство $C_n^0 = C_{n-1}^{-1} + C_{n-1}^0$. Так как $C_n^0 = C_{n-1}^0 = 1$, то следует положить $C_{n-1}^{-1} = 0$. Аналогично следует положить $C_n^m = 0$ при $m > n$. Тогда равенство (3) оказывается верным и при $m = n$.

Приведем второй вывод равенства (3), вскрывающий его теоретико-множественный смысл. Выделим один из элементов n-множества X, например элемент a. Тогда все m-подмножества X разбиваются на два класса: первый состоит из подмножеств, не содержащих элемента a, а второй — из подмножеств, содержащих этот элемент. Но если m-подмножество не содержит элемента a, то оно является подмножеством $(n-1)$-множества X', получаемого из X удалением элемента a. Поэтому число m-подмножеств первого класса равно числу m-подмножеств множества X', т. е. C_{n-1}^m. Найдем теперь число m-подмножеств второго класса. Все эти подмножества содержат элемент a. Если исключить из них этот элемент, то получатся $(m-1)$-подмножества, не содержащие a (например, из 3-подмножества $\{a, b, c\}$ получится 2-подмножество $\{c, d\}$). Эти $(m-1)$-подмножества не содержат элемента a, и потому они состоят из элементов $(n-1)$-множества X'. Следовательно, число подмножеств второго класса равно числу $(m-1)$-подмножеств $(n-1)$-множества X', т. е. C_{n-1}^{m-1}.

Поскольку каждое m-подмножество либо содержит элемент a, либо не содержит его, оно принадлежит либо первому, либо второму классу. Значит, по правилу суммы получаем, что число C_n^m всех m-подмножеств в X равно $C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$. Поэтому $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$.

12. Треугольник Паскаля. Тождество (3) предыдущего пункта позволяет вычислять значения C_n^m, зная C_{n-1}^m и C_{n-1}^{m-1}. Иными словами, с помощью этого тождества можно последовательно вычислять C_n^m сначала при $n = 0$, затем при $n = 1$, при $n = 2$ и т. д. Вычисления удобно записывать в виде треугольной таблицы:

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{array}$$

В $(n+1)$-й строке таблицы по порядку стоят числа C_n^0, C_n^1, ..., C_n^n. При этом $C_n^0 = C_n^n = 1$, а остальные числа вычисляются по формуле (3) п. 11. Поскольку C_{n-1}^{m-1} и C_{n-1}^m располагаются в этой таблице строкой выше, чем C_n^m, и находятся в этой строке слева и справа от него, то для получения C_n^m надо сложить находящиеся слева и справа от него числа предыдущей строки. Например, значение 10 в шестой строке мы получили, сложив числа 4 и 6 пятой строки.

Такую треугольную таблицу называют треугольником Паскаля по имени французского математика Блэза Паскаля (1623—1662), в трудах которого она встречается. Это название исторически неточно, так как такую таблицу знали уже арабские математики Гиясэддин Каши и Омар Хайям, жившие в XIII веке, а из европейских ученых с нею был знаком итальянский механик и математик Николо Тарталья (1500—1557). Поэтому точнее называть эту таблицу *арифметическим треугольником.*

13. Бином Ньютона. Числа, стоящие в строках арифметического треугольника, встречаются при возведении в степень двучлена $a+b$. Например,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Но коэффициенты 1, 2, 1 — это числа, стоящие в третьей строке таблицы 1, т. е. C_2^0, C_2^1, C_2^2, а 1, 3, 3, 1 — числа, стоящие в четвертой строке той же таблицы, т. е. C_3^0, C_3^1, C_3^2, C_3^3.

Это замечание делает естественной гипотезу, что для любого n истинно равенство

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n. \quad (1)$$

Проведем доказательство равенства (1) с помощью метода математической индукции.

При $n = 1$ равенство (1) принимает вид $a + b = C_1^0 a + C_1^1 b$ и истинно, поскольку $C_1^0 = C_1^1 = 1$.

Предположим теперь, что равенство (1) доказано при $n = m$, т. е.

$$(a+b)^m = C_m^0 a^m + C_m^1 a^{m-1} b + \ldots + C_m^k a^{m-k} b^k + \ldots + C_m^m b^m. \quad (2)$$

Чтобы доказать истинность этого равенства при $n = m + 1$, умножим обе части (2) на $a + b$. Мы получим:

$$(a+b)^{m+1} = (C_m^0 a^m + C_m^1 a^{m-1} b + \ldots + C_m^k a^{m-k} b^k + \ldots + C_m^m b^m)(a + b) = C_m^0 a^{m+1} + (C_m^0 + C_m^1) a^m b + \ldots + (C_m^k + C_m^{k-1}) a^{m-k+1} b^k + \ldots + C_m^m b^{m+1}.$$

В самом деле, $a^{m-k+1}b^k$ может получиться в двух случаях — при умножении $C_m^k\ a^{m-k}\ b^k$ на a и при умножении $C_m^{k-1}a^{m-k+1}b^{k-1}$ на b. А теперь вспомним, что

$$C_m^0 = C_{m+1}^0 = 1,\ C_m^m = C_{m+1}^{m+1} = 1,\ \text{а}\ C_m^k + C_m^{k-1} = C_{m+1}^k.$$

Мы получаем:

$$(a+b)^{m+1} = C_{m+1}^0 a^{m+1} + C_{m+1}^1 a^m b + \ldots +$$
$$+ C_{m+1}^k a^{m+1-k} b^k + \ldots + C_{m+1}^{m+1} b^{m+1}.$$

Получившееся равенство есть не что иное, как равенство (1) при $n = m+1$.

Итак, мы доказали, что формула (1) верна при $n = 1$, а из ее справедливости при $n = m$ вывели, что она истинна и при $n=m+1$. Значит, она верна при всех натуральных значениях n.

Формулу (1) называют формулой *бинома Ньютона*, хотя она была известна задолго до Ньютона уже упоминавшемуся Гиясэддину Каши, а также Паскалю и другим. Заслуга Ньютона состоит в том, что он нашел обобщение формулы (1) на случай нецелых показателей.

С помощью формулы бинома Ньютона можно получить многие из доказанных ранее свойств чисел C_n^k, а также вывести иные свойства этих чисел. Например, полагая $a = b = 1$, получаем:

$$2^n = C_0^n + C_n^1 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n \tag{3}$$

(см. формулу (2) п. 10). А если положить $a = 1$, $b = -1$, то будем иметь

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^k C_n^k + \ldots + (-1)^n C_n^n.$$

Иными словами,

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots. \tag{4}$$

Мы можем теперь дать доказательство формулы перекрытий (см. п. 2). Для этого подсчитаем, какой вклад дает в правую часть формулы (4) п. 2 каждый элемент объединения $A_1 \cup \ldots \cup A_m$. Пусть этот элемент входит, например, во множества $A_1, \ldots, A_k$. Тогда он по одному разу учитывается в слагаемых $n(A_i)$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $n(A_i \cap A_j)$, $1 \leqslant i$, $j \leqslant k$, $i \neq j$, ..., $n(A_1 \cap \ldots \cap A_k)$. Но число слагаемых вида $n(A_i)$, $1 \leqslant i \leqslant k$, равно C_k^1, вида $n(A_i \cap A_j)$, $1 \leqslant i$, $j \leqslant k$, $i \neq j$, равно C_n^2 и т. д. Учитывая знаки этих слагаемых, получаем, что вклад данного элемента в правую часть формулы (4) п. 2 равен:

$$C_k^1 - C_k^2 + C_k^3 - \ldots + (-1)^{k-1} C_k^k.$$

Но по формуле (4) эта сумма равна C_k^0, т. е. 1. Значит, правая часть формулы (4) п. 2 равна сумме такого количества единиц, сколько элементов во множестве $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$. Иными словами, она равна $n(A_1 \cup \ldots \cup A_m)$, что и требовалось доказать.

С помощью формулы бинома Ньютона можно доказать малую теорему Ферма: если p — простое число, то $n^p - n$ делится на p. В самом деле, при

$n = 1$ это утверждение справедливо, так как $1^p - 1 = 0$ делится на p. Пусть уже доказано, что $k^p - k$ делится на p. Чтобы доказать делимость на p числа $(k+1)^p - (k+1)$, рассмотрим разность

$$(k+1)^p - (k+1) - (k^p - k).$$

Раскрывая $(k+1)^p$ по формуле бинома Ньютона, получим:

$$(k+1)^p - (k+1) - (k^p - k) = (k+1)^p - k^p - 1 = C_p^1 k^{p-1} + C_p^2 k^{p-2} + \ldots + C_p^{p-1} k. \qquad (5)$$

Но при $1 \leqslant j < p$ имеем:

$$C_p^j = \frac{p(p-1)\ldots(p-j+1)}{1 \cdot 2 \ldots j}.$$

Поскольку число p простое, оно не делится ни на одно из чисел $1, 2, \ldots, j$, стоящих в знаменателе. Поэтому C_p^j делится на p при $1 \leqslant j < p$. Но тогда все слагаемые в правой части равенства (5) делятся на p, а значит, и левая часть делится на p. Поскольку в силу предположения $k^p - k$ делится на p, то и $(k+1)^p - (k+1)$ делится на p.

Итак, делимость $n^p - n$ на p доказана при $n = 1$, а из делимости $k^p - k$ на p следует, что и $(k+1)^p - (k+1)$ делится на p. Значит, $n^p - n$ делится на p при всех натуральных значениях n.

14. Перестановки с повторениями. Кортежи (a, b, a, a, b) и (b, a, b, a, a) различны, но имеют один и тот же состав — в оба кортежа входят три буквы a и две буквы b. Уточним понятие состава кортежа. Пусть α — кортеж длины n, составленный из элементов m-множества X. Перенумеруем элементы множества X: $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Тогда каждому числу k, $1 \leqslant k \leqslant m$, соответствует число n_k, показывающее, сколько раз элемент x_k встречается среди компонент кортежа α. Выписывая по порядку эти числа, получаем новый кортеж $(n_1, \ldots, n_m)$, который и называют *составом кортежа* α. Например, если $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, а $\alpha = (x_1, x_3, x_1, x_4, x_3, x_1)$, то кортеж α имеет состав $(3, 0, 2, 1)$.

Два кортежа, имеющие один и тот же состав, могут отличаться друг от друга лишь порядком компонент. Их называют *перестановками с повторениями* данного состава. Решим следующую комбинаторную задачу:

Найти число перестановок с повторениями, имеющих состав $(n_1, n_2, \ldots, n_m)$.

Прежде чем решать эту задачу в общем виде, рассмотрим частный случай — найдем число перестановок с повторениями из букв a, a, a, b, b, c, c. Сначала перенумеруем эти буквы: $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2$. Так как после нумерации все буквы стали различны (мы можем теперь отличить a_1 от a_3), то из них можно составить $7!$ перестановок, где $7 = 3 + 2 + 2$. Если стереть в каждой из этих перестановок значки при буквах, то получатся перестановки с повторениями из букв a, a, a, b, b, c, c. Например, из перестановки $(a_1, b_1, c_2, c_1, a_3, b_2, a_2)$ получим (a, b, c, c, a, b, a). При этом одна и та же перестановка с повторениями получается несколько раз. Например, перестановка с повторениями (a, a, a, b, b, c, c) получается из всех перестановок букв $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2$, в которых на первых трех местах стоят буквы a_1, a_2, a_3 (в любом порядке), на четвертом и пятом месте — буквы b_1 и b_2 (в любом порядке), а шестое и седьмое места занимают буквы c_1 и c_2. Но буквы a_1, a_2, a_3 можно переставлять 3! способами, буквы b_1, b_2 — 2! способами и буквы c_1, c_2 — 2! способами. Поскольку эти способы можно произвольным образом комбинировать друг с другом, то получаем, что (a, a, a, b, b, c, c) получается из $3! \cdot 2! \cdot 2!$ перестановок букв $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2$. Столькими же способами может получиться любая другая перестановка с повторениями букв a, a, a, b, b, c, c. Значит, число различных перестановок с повторениями в $3! \cdot 2! \cdot 2!$ раз меньше общего числа перестановок семи букв a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2, т. е. равно

$$\frac{7!}{3! \cdot 2! \quad 2!} = 210.$$

Точно так же разбирается общий случай: количество $P(n_1, n_2, \ldots, n_m)$ перестановок с повторениями, имеющих состав $(n_1, n_2, \ldots, n_m)$, выражается формулой:

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_m) = \frac{(n_1 + n_2 + \ldots + n_m)!}{n_1! \cdot n_2! \ldots n_m!}. \tag{1}$$

Например, буквы слова «Миссисипи» можно переставлять $\frac{9!}{1! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 1!} =$ $= 2520$ способами.

Из формулы (1) вытекает, что $n - k$ букв a и k букв b можно переставлять $\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ способами. Но это число равно C_n^k. Значит, число перестановок с повторениями состава $(n - k, k)$ равно C_n^k:

$$P(n - k, k) = C_n^k. \tag{2}$$

Это утверждение можно вывести и не ссылаясь на общую формулу (1). В самом деле, любая перестановка с повторениями из $n - k$ букв a и k букв b однозначно определяется выбором мест, на которых стоят буквы b. Но общее число мест равно $(n - k) + k =$ $= n$, а буквы b занимают k мест, и эти места можно выбрать C_n^k способами.

Отметим, что формулу бинома Ньютона можно доказать, воспользовавшись равенством (2). В самом деле, запишем выражение $(a + b)^n$ следующим образом:

$$(a + b)^n = \underbrace{(a + b)(a + b) \ldots (a + b)}_{n \text{ раз}}.$$

А теперь раскроем скобки, выписывая множители в порядке их появления. Например, $(a + b)^2$ запишем в виде:

$$(a + b)(a + b) = aa + ab + ba + bb,$$

а $(a + b)^3$ — в виде:

$$(a + b)(a + b)(a + b) = aaa + aab + aba + abb +$$
$$+ baa + bab + bba + bbb.$$

Ясно, что слагаемые в правой части будут всевозможными перестановками с повторениями длины n из букв a и b. Чтобы привести подобные члены, нужно найти число перестановок, имеющих заданный состав. Но, как мы видели, число перестановок состава $(n-k, k)$ равно C_n^k. Поэтому слагаемое $a^{n-k}\,b^k$ входит в сумму с коэффициентом C_n^k. В результате получаем формулу бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = C_n^0\,a^n + \ldots + C_n^k\,a^{n-k}\,b^k + \ldots + C_n^n\,b^n.$$

Приведенное доказательство без изменений переносится на случай нескольких слагаемых. Рассуждая точно так же, как и выше, убеждаемся, что

$$(x_1 + \ldots + x_m)^n = \sum P(n_1, \ldots, n_m)\,x_1^{n_1}\ldots x_m^{n_m},$$

где суммирование распространено на все кортежи $(n_1, \ldots, n_m)$, такие, что $n_1 + \ldots + n_m = n$.

15. Сочетания с повторениями. В предыдущем пункте мы нашли число кортежей данного состава. Найдем теперь число различных составов, которые могут иметь кортежи длины n, состоящие из элементов m-множества X. Каждый такой состав является кортежем, состоящим из m чисел $n_1, \ldots, n_m$, таких, что $n_1 + \ldots + n_m = n$. Его можно записать в виде кортежа из нулей и единиц, заменив каждое число соответствующим числом единиц и поставив нуль после каждой группы единиц, кроме последней. Например, вместо кортежа (4, 2, 1) можно написать (1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1), а вместо кортежа (2, 0, 0, 3) — кортеж (1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1). Число единиц, входящих в полученные кортежи, равно $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$, а число нулей равно $m - 1$. Поэтому число различных кортежей такого вида равно числу перестановок с повторениями из n единиц и $m - 1$ нулей, т. е. $P(n, m-1)$. Но $P(n, m-1) = C_{n+m-1}^n$.

Итак, мы доказали, что *число составов кортежей длины n, компоненты которых принадлежат данному m-множеству, равно C_{n+m-1}^n.*

Различные составы кортежей длины n из элементов m множества называют также *сочетаниями с повторениями* из m элементов по n. Их число обозначают $\overline{C}_m^n$.

Мы доказали, что $\overline{C}_m^n = C_{n+m-1}^n$.

16. Решение комбинаторных задач. При решении конкретной комбинаторной задачи надо сначала выяснить, не решается ли она непосредственно применением правил суммы и произведения. Если такое решение окажется затруднительным, то следует составить математическую схему решаемой задачи, выяснив, идет ли в ней речь о составлении подмножеств или кортежей, допустимы или нет повторения.

Приведем примеры решения комбинаторных задач.

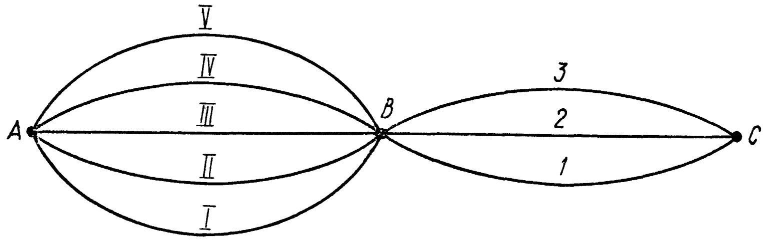

Рис. 7

1. *Из города A в город B ведут пять дорог, а из города B в город C — три дороги. Сколько путей, проходящих через B, ведут из A в C?*

Каждый путь искомого вида задается парой (a, b), где a — один из путей, соединяющих A и B, а b — один из путей, соединяющих B и C. Так как по условию a можно выбрать пятью способами, а b — тремя способами, то пару (a, b) можно по правилу произведения выбрать $5 \cdot 3 = 15$ способами.

Решение задачи может быть более наглядным, если составить схему, изображенную на рисунке 7. Здесь римские цифры — номера путей из A в B, а арабские — номера путей из B в C.

2. *Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «полка»?*

В этом слове две гласные буквы и три согласные. По правилу произведения выбор может быть сделан $2 \cdot 3 = 6$ способами.

3. *Имеется 6 пар перчаток различных размеров. Сколькими способами можно выбрать из них одну перчатку на левую руку и одну перчатку на правую руку так, чтобы эти перчатки были различных размеров?*

Эту задачу тоже можно решить по правилу произведения. Перчатка на левую руку может быть выбрана шестью способами. После того как она выбрана, перчатку на правую руку можно выбрать лишь пятью способами (размеры перчаток должны быть разными). Поэтому всего имеем $6 \cdot 5 = 30$ способов выбора.

Другой способ решения этой задачи основан на формуле для размещений без повторений. Каждый выбор можно задать парой различных чисел (a, b), где $1 \leqslant a \leqslant 6$, $1 \leqslant b \leqslant 6$. Число таких пар равно $A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30$.

4. *Сколькими способами можно составить флаг, состоящий из трех горизонтальных полос различных цветов, если имеется материал пяти различных цветов?*

Обозначим пять имеющихся цветов буквами a, b, c, d, e. Тогда любой флаг «зашифровывается» кортежем из трех различных букв. Поэтому число флагов равно числу размещений без повторений из 5 по 3, т. е. $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

5. *Сколькими способами можно составить четырехцветный флаг из горизонтальных полос, имея четыре различных цвета?*

В этом случае различные флаги отличаются друг от друга лишь порядком цветов. Их число равно числу перестановок из четырех элементов, т. е. $P_4 = 4! = 24$.

6. *Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. Сколькими различными способами это можно сделать? В скольких случаях среди этих карт окажется хотя бы один туз? В скольких случаях окажется ровно один туз? В скольких случаях — ровно 4 туза?*

Каждый выбор карт из колоды есть выбор 10-множества из 52-множества. Это может быть сделано

$$C_{52}^{10} = \frac{52!}{10!\,42!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}$$

способами.

Найти число способов, когда среди выбранных карт есть хотя бы один туз, на первый взгляд сложнее — надо разбирать случаи, когда есть ровно один туз, ровно два туза, ровно три туза, ровно четыре туза. Но проще найти сначала, в скольких случаях среди выбранных карт нет ни одного туза — во всех остальных случаях будет хотя бы один туз. Но если среди выбранных карт нет ни одного туза, то выбор совершался не из 52, а из 48 карт (всех карт, кроме тузов), а потому число таких выборов равно C_{48}^{10}. Следовательно, хотя бы один туз будет в $C_{52}^{10} - C_{48}^{10}$ случаях.

Чтобы найти, в скольких случаях будет ровно один туз, разобьем операцию выбора карт на две — сначала выбирают из четырех тузов один туз — это можно сделать C_4^1 способами. А потом из оставшихся 48 карт выберем 9, что можно сделать C_{48}^9 способами. По правилу произведения получаем, что весь выбор можно сделать $C_4^1 \cdot C_{48}^9$ способами.

Наконец, выбор, содержащий четыре туза, можно сделать C_{48}^6 способами — надо взять 4 туза и выбрать еще 6 карт из 48.

7. *В некотором государстве не было двух жителей с одинаковым набором зубов. Какова может быть наибольшая численность населения государства* (наибольшее число зубов равно 32)?

Каждому жителю государства соответствует подмножество множества X, состоящего из 32 зубов, показывающее, каков набор зубов у этого жителя. Общее число подмножеств 32-множества равно 2^{32}. Значит, в государстве не может быть больше, чем 2^{32} жителей.

8. *Пусть $p_1, \ldots, p_m$ — различные простые числа. Сколько делителей имеет число $q = p_1^{\alpha_1} \ldots p_m^{\alpha_m}$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — некоторые натуральные числа* (делители 1 и q включаются)?

Каждый делитель числа q имеет вид $p_1^{\beta_1} \ldots p_m^{\beta_m}$, где $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Значит, показатель β_i может принимать $\alpha_i + 1$ значений. Но тогда по правилу произведения число кортежей $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ (а тем самым и число делителей q) равно $(\alpha_1 + 1) \ldots (\alpha_m + 1)$.

9. *Сколькими способами можно расставить белые фигуры* (2 ко-

ня, 2 слона, 2 ладьи, ферзя и короля) на первой линии шахматной доски?

В этой задаче надо найти число кортежей длины 8, имеющих заданный состав (2, 2, 2, 1, 1). Число таких кортежей (т. е. перестановок с повторениями) равно:

$$P\ (2, 2, 2\ 1,\ 1) = \frac{8!}{2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!} = 5040.$$

10. *Пятнадцать занумерованных биллиардных шаров разложены по шести лузам. Сколькими способами это можно сделать?*

Поставим каждому числу от 1 до 15 в соответствие номер лузы, в которую положен шар, номер шара равен этому числу. Получим кортеж длины 15, составленный из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 (номеров луз). Число таких кортежей равно 6^{15}.

11. *Сколькими способами можно расставить на 32 черных полях шахматной доски 12 белых и 12 черных шашек?*

Поля для белых шашек можно выбрать C_{32}^{12} способами. После этого остается 20 полей, из которых можно C_{20}^{12} способами выбрать поля для черных шашек. Всего получаем

$$C_{32}^{12}\cdot C_{20}^{12} = \frac{32!}{12!\cdot 20!}\cdot\frac{20!}{12!\cdot 8!} = \frac{32!}{12!\cdot 12!\cdot 8!}$$

способов.

12. *Сколькими способами можно составить набор из 8 пирожных, если имеется 4 сорта пирожных?*

Поскольку в этой задаче порядок пирожных не играет роли, то каждый набор задается кортежем длины 8 из 4 элементов (названий сортов пирожных), причем порядок компонент кортежа не играет роли. Иными словами, нам надо найти число различных составов таких кортежей. А это число равно числу сочетаний с повторениями из 4 элементов по 8, т. е. $\overline{C}_4^8 = C_{11}^8 = 165$. Значит, существует 165 различных наборов.

17. Комбинаторные задачи геометрического содержания. Существует много комбинаторных задач, имеющих геометрическое содержание, например задачи на подсчет числа диагоналей многоугольника, числа точек пересечения нескольких прямых или окружностей и т. д. Покажем решение некоторых задач такого типа.

1. *На плоскости проведено n прямых, причем никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Сколько точек пересечения имеют эти прямые?*

Каждая точка пересечения однозначно определяется парой проходящих через нее прямых. При этом порядок прямых роли не играет. Поэтому искомое число точек пересечения равно числу сочетаний из n по два, т. е. C_n^2.

2. *Найти число точек пересечения диагоналей, лежащих внутри выпуклого n-угольника, если никакие три из них не пересекаются в одной точке.*

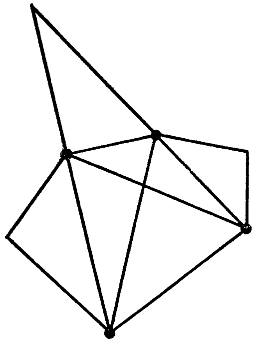

Рис. 8

Если взять любые четыре вершины многоугольника, то через них можно провести четыре диагонали (рис. 8), имеющие две точки пересечения (кроме вершин). Из этих точек лишь одна лежит внутри многоугольника. Значит, любая внутренняя точка пересечения диагоналей однозначно определяется выбором четверки вершин, причем порядок вершин роли не играет. Итак, число таких четверок (а тем самым и внутренних точек пересечения диагоналей) равно C_n^4.

3. *На одной из параллельных прямых линий отмечено* 10 *точек, а на другой* — 7 *точек. Каждая точка одной прямой соединена с каждой точкой другой прямой. Найдите число точек пересечения полученных отрезков, если никакие три отрезка не имеют общей точки* (общие точки на концах отрезков не считаются).

Сделав рисунок, мы убеждаемся, что любая точка пересечения определяется однозначно, если задать пару точек на одной прямой и пару точек на второй прямой. При этом порядок точек на прямых роли не играет. Поэтому в обоих случаях речь идет о выборе подмножеств. Но из 10-множества можно выбрать C_{10}^2 2-подмножеств, а из 7-множества — C_7^2 2-подмножеств. По правилу произведения получаем, что общее число точек пересечения равно $C_{10}^2 \cdot C_7^2$, т. е. 945.

18. Некоторые понятия теории вероятностей. Событие, которое может произойти или не произойти, называют случайным событием. Примерами таких событий являются попадание стрелка в мишень при данном выстреле, извлечение туза пик из колоды карт, выигрыш данного билета в очередном розыгрыше лотереи, бракованность данной детали и т. д. Изучение отдельно взятого случайного события не может быть предметом научной теории — нельзя, например, научно предсказать, какие номера «Спортлото» окажутся выигрышными в данном тираже. Но если происходят последовательные испытания, причем исход каждого испытания случаен, то выявляются определенные закономерности, позволяющие делать количественные предсказания. Например, если бросить 1200 раз игральную кость, имеющую форму куба и изготовленную достаточно точно, то с высокой степенью достоверности можно сказать, что выпадение шести очков более 300 раз весьма маловероятно — неизмеримо больше шансов, что шесть очков выпадут от 150 до 250 раз. Точно так же при заданной технологии изготовления деталей можно указать число, к которому будет близок процент бракованных деталей в большой партии изделий. При этом, чем больше проверяемая партия изделий, тем результат эксперимента окажется ближе к теоретически предсказанному.

Опыт показал, что вообще для многих случайных событий можно указать число p, называемое *вероятностью* этого события и обладающее следующим свойством: если производится серия из N испытаний, то при больших значениях N примерно в pN случаях произойдет это событие. Ясно, что число p изменяется от 0 до 1 — событие не может произойти менее нуля раз и более N раз.

Изучением свойств вероятностей, правил, по которым, зная вероятности одних событий, можно найти вероятности других событий, занимается раздел математики, называемый *теорией вероятностей*. Подобно тому как геометрия изучает не конкретные тела (мяч, ядро и т. д.), а идеализированные геометрические тела (например, шар), теория вероятностей изучает математические схемы, идеализирующие конкретные случайные события. И так же, как геометрия теперь строится на основе системы аксиом, теория вероятностей приняла современный вид лишь после того, как в 1933 г. А. Н. Колмогоров создал ее аксиоматику. Эта аксиоматика имеет весьма общий характер и охватывает как случаи, когда события могут иметь лишь конечное число исходов (например, бросание игральной кости или извлечение карты из колоды), так и события с бесконечным множеством исходов (например, измерение длины детали, если считать, что это измерение можно сделать сколь угодно точно).

Мы изложим здесь лишь понятия, относящиеся к событиям с конечным числом исходов. Основным понятием теории является *пространство элементарных событий*. Так называют конечное множество X, состоящее из конечного числа элементов (элементарных событий) $x_1, \ldots, x_n$, причем каждому событию x_k соответствует неотрицательное число $p(x_k)$, называемое его *вероятностью*. При этом требуется, чтобы сумма этих чисел равнялась единице:

$$\sum_{k=1}^{n} p(x_k) = 1.$$

Событием мы назовем любое подмножество $A \subset X$, а вероятностью события A — сумму вероятностей элементарных событий, принадлежащих этому подмножеству. Как и любые множества, события, содержащиеся в данном пространстве X, можно пересекать и объединять, а для каждого события A можно находить его дополнение. Это дополнение в теории вероятностей называют *противоположным событием* и обозначают $\bar{A}$. Если вероятность A равна p, то вероятность $\bar{A}$ равна $1 - p$. Два события, имеющие пустое пересечение, называют несовместными. Событие, вероятность которого равна 1, называют достоверным, а событие, вероятность которого равна нулю, — невозможным. Если все элементарные случайные события имеют положительную вероятность (т. е. среди них нет невозможных), то достоверным событием является лишь событие X, а невозможным лишь пустое событие $\varnothing$.

Поясним сказанное примерами. Пусть проводится некоторое испытание, которое может иметь n различных исходов, причем никакие два исхода не могут появиться одновременно. Тогда каждому возможному исходу испытания соответствует элемент в пространстве событий, т. е. элементарное случайное событие. Например, при бросании игральной кости такими элементами являются появление одного, двух, трех, четырех, пяти или шести очков. Иными словами, в этом случае X состоит из шести элементов. А событиями могут быть: появление четного числа очков (т. е. подмножество $\{2, 4, 6\}$), появление числа очков, не превосходящего трех (подмножество $\{1, 2, 3\}$), и т. д.

Наряду с отдельными испытаниями рассматривают серии испытаний, например несколько бросаний кости, несколько выстрелов и т. д. В этом случае пространство событий для серии является декартовым произведением пространств событий для каждого испытания или некоторым подпространством этого пространства. Пусть, например, в мешке лежат n одинаковых шаров, помеченных числами от 1 до n. Каждое испытание состоит в извлечении одного шара. Если после каждого извлечения шар возвращается обратно, то отчет об k извлечениях имеет форму кортежа $\{x_1, \ldots, x_k\}$, элементами которого являются числа от 1 до n. В этом случае пространством элементарных событий является X^k — декартово произведение k экземпляров множества $X = \{1, \ldots, n\}$. Если же вынутый шар не возвращается обратно, то получатся не произвольные кортежи, а упорядоченные множества, так как числа не могут повторяться. Здесь пространство событий — подмножество декартова произведения.

Разумеется, составить пространство событий лишь часть дела, надо еще узнать вероятность каждого элементарного события. В одних случаях вероятности определяют статистически. Например, путем наблюдений можно найти вероятность того, что данный стрелок попадет в мишень, что данный рабочий даст не более одного процента бракованной продукции и т. д. В других случаях вероятности определяют из соображений симметрии. Например, при бросании кости, имеющей кубическую форму и вполне однородной, естественно считать все исходы равновероятными. А так как общее число исходов равно шести и сумма вероятностей равна единице, то вероятность появления каждого элементарного события равна $\frac{1}{6}$. Точно так же из соображений симметрии выводим, что вероятность вынуть из полной колоды карт короля треф равна $\frac{1}{52}$ и т. д. Не следует, однако, думать, что элементарные случайные события всегда равновероятны. Если, например, испытывается деталь, то есть два исхода — деталь годна или она бракованна, и эти исходы отнюдь не являются равновероятными.

Если производится серия испытаний и можно считать исход каждого следующего испытания не зависящим от исхода предыдущего испытания (это имеет место, например, при стрельбе в мишень без пристрелки или при извлечении шаров из мешка с последующим возвращением), то за вероятность кортежа $(x_1, \ldots, x_k)$ принимают произведение вероятностей исходов $x_1, \ldots, x_k$, т. е. число $p(x_1) \ldots \ldots p(x_k)$. Например, если стрелок имеет вероятность p попасть в мишень, то вероятность того, что он попадет первые два раза и промахнется в третий раз, равна p^2q, где $q = 1 - p$ — вероятность промаха, вероятность же трех промахов равна $q^3 = (1 - p)^3$.

Из данного выше определения вероятности вытекает следующее правило ее вычисления, называемое правилом суммы: если события A и B несовместны (т. е. если $A \cap B = \varnothing$), то $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$. Это правило доказывается почти так же, как правило суммы в комбинаторике, только вместо подсчета элементов надо складывать вероятности.

Если же пересечение событий A и B непусто, то справедливо равенство

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B), \tag{1}$$

которое аналогично формуле (2) в п. 2.

Найдем, например, вероятность того, что вытащенная из полной колоды карта окажется пикой или картинкой (валетом, дамой, королем или тузом). Так как вероятность вытащить любую карту равна $\frac{1}{52}$, а число пик в полной колоде равно 13, то вероятность события A (извлечена пика) равна $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$. Число картинок равно 16 (по четыре в каждой масти), и вероятность события B (извлечена картинка) равна $\frac{16}{52} = \frac{4}{13}$. Но вероятность события $A \cup B$ отлична от $\frac{1}{4} + \frac{1}{13}$, так как события A и B имеют непустое пересечение — может случиться, что вытащенная карта является одновременно и пикой и картинкой (валет пик, дама пик, король пик, туз пик). Множество $A \cap B$ состоит из четырех элементов и потому $p(A \cap B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$. Окончательно по формуле (1) получаем:

$$p(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{4}{13} - \frac{1}{13} = \frac{25}{52}.$$

19. Применение комбинаторики к вычислению вероятностей. Приведем несколько примеров вычисления вероятностей с помощью формул для сочетаний, размещений и перестановок.

Пример 1. Пусть мешок содержит одинаковые по размерам и материалу шары, помеченные числами от 1 до 90. Из мешка вытаскивают какие-то 5 шаров. Какова вероятность, что среди этих шаров один помечен числом 90?

Элементарным событием в этой задаче является извлечение данной пятерки шаров (например, пяти шаров с числами 24, 35, 42, 64, 83). Каждая такая пятерка является 5-подмножеством в

90-множестве, а потому их число равно C_{90}^5. Поскольку все эти пятерки имеют одну и ту же вероятность появления, то вероятность появления каждой пятерки равна $\frac{1}{C_{90}^5}$. Теперь найдем, сколько элементарных событий входит в событие A (один из пяти шаров помечен числом 90). Мы можем считать, что этот шар заранее извлечен из мешка, а потом из оставшихся 89 шаров извлекают еще 4 шара. Это можно сделать C_{89}^4 способами. Значит, нам надо сложить C_{89}^4 чисел, каждое из которых равно $\frac{1}{C_{90}^5}$, т. е., проще говоря, умножить $\frac{1}{C_{90}^5}$ на C_{89}^4. Получаем, что искомая вероятность есть

$$p(A) = \frac{C_{89}^4}{C_{90}^5} = \frac{89! \cdot 85! \cdot 5!}{85! \cdot 4! \cdot 90!} = \frac{1}{18}.$$

Пример 2. Из пруда, в котором плавают 40 щук, выловили 5 щук, пометили их и пустили обратно в пруд. Во второй раз выловили 9 щук. Какова вероятность, что среди них окажутся ровно две помеченные щуки?

В этой задаче элементарным событием является извлечение 9-подмножества из 40-множества. Значит, пространство элементарных событий содержит C_{40}^9 элементов, каждый из которых имеет вероятность $\frac{1}{C_{40}^9}$. Найдем, сколько этих 9-подмножеств содержат ровно две помеченные щуки. Выбор двух щук из пяти можно сделать C_5^2 способами. После этого надо еще выбрать 7 щук из 35 непомеченных. Это можно сделать C_{35}^7 способами. По правилу произведения получаем $C_5^2 \cdot C_{35}^7$ способов вылова, при которых окажется ровно две помеченные щуки. Значит, искомая вероятность равна

$$\frac{C_5^2 \cdot C_{35}^7}{C_{40}^9}.$$

Вообще, если Y является m-подмножеством в n-множестве X и из X выбирают k-подмножество A, то вероятность того, что среди выбранных элементов содержится ровно r элементов из Y, равна:

$$p(A) = \frac{C_m^r \cdot C_{n-m}^{k-r}}{C_n^m}.$$

Пример 3. Из коробки, содержащей карточки с буквами *о*, *н*, *к*, *ь*, наудачу извлекают одну карточку за другой и располагают в порядке извлечения. Какова вероятность, что в результате получится слово «конь»?

Здесь элементарным событием является расположение извлеченных карточек в определенном порядке. Но 4 карточки можно упорядочить $P_4 = 24$ способами. Вероятность каждого из этих способов равна $\frac{1}{24}$. Поскольку лишь в одном случае получается слово «конь», то вероятность получить это слово равна $\frac{1}{24}$.

П р и м е р 4. Из коробки, содержащей карточки с буквами $а, к, о, р, р, т, т$, извлекают одну за другой буквы и располагают в порядке извлечения. Какова вероятность, что получится слово «трактор»?

Так как общее число карточек равно 7, то их можно упорядочить $7!$ способами. Поскольку обе буквы $т$ и обе буквы $р$ можно менять местами, не изменяя слова, то слово трактор получится $2! \cdot 2! = 4$ раза. Искомая вероятность равна $\frac{4}{7!}$. Иначе тот же результат можно было бы получить, заметив, что в результате извлечения карточек мы получаем перестановку с повторениями состава $(2, 2, 1, 1, 1)$, причем все такие перестановки имеют одну и ту же вероятность. Так как число этих перестановок равно $P(2, 2, 1, 1, 1)$, то вероятность каждой из перестановок равна

$$\frac{1}{P(2, 2, 1, 1, 1)} = \frac{4}{7!}.$$

П р и м е р 5. Из урны, содержащей белый и черный шары, извлекают шар, записывают его цвет и возвращают в урну. После n извлечений получаем кортеж длины n из букв *б* и *ч*. Какова вероятность, что он содержит k букв *б*?

В этом случае элементарным событием является получение заданного кортежа длины n, причем все такие кортежи имеют одну и ту же вероятность. Но число кортежей длины n, в которые входят буквы *б* и *ч*, равно 2^n (это число размещений с повторениями из двух элементов по n, с. 27). Из этих кортежей C_n^k содержат k раз букву *б* (с. 30). Значит, вероятность того, что полученный кортеж содержит k букв *б*, равна $\frac{C_n^k}{2^n}$.

Если бы в задаче речь шла о стрелке, сделавшем n выстрелов, причем вероятность попадания при каждом выстреле равна p, то вероятность попадания была бы равна $C_n^k p^k (1 - p)^k$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Наум Яковлевич Виленкин

ИНДУКЦИЯ. КОМБИНАТОРИКА

Редактор *С. В. Пазельский*
Художник обложки *Б. Н. Юдкин*
Художественный редактор *Е. Н. Карасик*
Технический редактор *В. Ф. Коскина*
Корректор *Г. С. Попкова*

Сдано в набор 27/V 1975 г. Подписано к печати 6/X 1975 г. $60\times90^1/_{16}$. Бумага тип. № 1
Печ. л. 3,0. Уч.-изд. л. 2,90. Тираж 270 тыс. экз.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. Заказ 331.