УЧЕНЫЯ ЗАПИСКИ

ИМПЕРАТОРСКАГО

КАЗАНСКАГО УНИВЕРСИТЕТА

ПО

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ФАКУЛЬТЕТУ.

1885 годъ.

СОДЕРЖАНІЕ.

Г. И. Шебуева. Руководство къ теоретической оптикѣ. (*Продолженіе*) . . 1—148.

Меньшикова. Изслѣдованіе реакціи цинкэтила на бутиронъ . . . . . 149—223

КАЗАНЬ.
Типографія Императорскаго Университета.
1887.

По опредѣленію физико-математическаго факультета Императорскаго Казанскаго университета печатать дозволяется.

Деканъ К. Ворошиловъ.

РУКОВОДСТВО

КЪ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ОПТИКѢ.

(Продолженіе).

Г. Н. Шебуева.

ОБОБЩЕНІЕ ЗАКОНОВЪ ОТРАЖЕНІЯ И ПРЕЛОМЛЕНІЯ.

§ 94. Въ томъ случаѣ, когда точка 0, координаты которой x_0, y_0 и z_0, лежатъ въ неоднородной срединѣ, состоящей изъ отдѣляемыхъ одна отъ другой прозрачными или непрозрачными, черными или свѣтлыми поверхностями, то освѣщеніе этой точки, происходящее отъ свѣтящейся точки p (x_p, y_p, z_p), будетъ вообще отлично отъ того освѣщенія, которое имѣло бы мѣсто въ той точкѣ, если бы однородность средины, въ которой лежитъ точка 0, не нарушалась.

§ 95. Чтобы изслѣдовать освѣщеніе въ точкѣ 0, согласимся въ слѣдующихъ опредѣленіяхъ.

Вообразимъ себѣ ломанную линію, соединяющую точки p и 0, направленіе которой измѣняется только въ тѣхъ точкахъ, въ которыхъ она встрѣчаетъ одну изъ поверхностей s', s', $\ldots s^{(n)}$, отдѣляющихъ одну изотропную средину отъ другой. Такихъ линій, очевидно, можно провести безконечное количество. Частный случай такой линіи можетъ быть и прямая, соединяющая точки 0 и p.

Всякая подобная ломанная линія составлена изъ такихъ отрѣзковъ прямыхъ линій, которыя цѣликомъ лежатъ въ одной и той же изотропной срединѣ. Раздѣливъ длину каждаго изъ отрѣзковъ прямыхъ линій, составляющихъ данную ломанную линію, на длину волны, соотвѣтствующей той изотропной срединѣ, въ которой онъ находится, и складывая

всѣ такія частныя, мы получимъ выраженіе, называющееся оптическимъ путемъ отъ точки p до точки 0 вдоль этой ломанной линіи.

Оптическій путь мы будемъ обозначать слѣдующимъ образомъ:

$$\Psi(p, p', p'', \ldots p^{(n)}, 0) =$$

$$= \sqrt{(x_p - x')^2 + (y_p - y')^2 + (z_p - z')^2} \cdot \frac{1}{\lambda_1}$$

$$+ \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2} \cdot \frac{1}{\lambda_2}$$

$$+ \sqrt{(x'' - x''')^2 + (y'' - y''')^2 + (z'' - z''')^2} \cdot \frac{1}{\lambda_3}$$

$$\cdots \cdots \cdots \cdots$$

$$+ \sqrt{(x^{(n-1)} - x^{(n)})^2 + (y^{(n-1)} - y^{(n)})^2 + (z^{(n-1)} - z^{(n)})^2} \cdot \frac{1}{\lambda_n}$$

$$+ \sqrt{(x^{(n)} - x_0)^2 + (y^{(n)} - y_0)^2 + (z^{(n)} - z_0)^2} \cdot = \frac{1}{\lambda_0}$$

$$= \frac{r_1}{\lambda_1} + \frac{r_2}{\lambda_2} + \frac{r_3}{\lambda_3} + \ldots + \frac{r_n}{\lambda_n} + \frac{r_0}{\lambda_0},$$

гдѣ p' (x', y', z'), p'' (x'', y'', z''), . . , p $(x^{(n)}, y^{(n)}, z^{(n)})$ суть точки встрѣчи ломанной линіи съ поверхностями $s', s'', s''', \ldots, s^{(n)}$, отдѣляющими различныя изотропныя средины, r_1, r_2, r_3 . . , r_0, суть длины отрѣзковъ $\overline{pp'}$, $\overline{p'p''}$, . . . , $\overline{p^{(n-1)}p^{(n)}}$ и $\overline{p^{(n)}0}$ и λ_1, λ_2, . . , λ_0 длины волнъ, соотвѣтствующія тѣмъ срединамъ, въ которыхъ лежатъ эти отрѣзки. Понимая подъ p' какую либо точку поверхности s', подъ p'' какую либо точку поверхности s'', и т. д, мы замѣтимъ, что оптическій путь:

$$\Psi(p, p', p'', \ldots, p^{(n)}, 0)$$

будетъ функціей координатъ точекъ p', p'', ... и $p^{(n)}$.

Мы будемъ *различать между собою* оптическія пути по числу отрѣзковъ ихъ составляющихъ и по порядку, въ которомъ слѣдуютъ точки встрѣчи той линіи, вдоль которой онъ считается, съ поверхностями s', s'', ... и $s^{(n)}$. Вотъ примѣры *различныхъ между собою* оптическихъ путей:

$$\Psi\,(p,\ p',\ p'',\ 0),$$
$$\Psi\,(p,\ p',\ p'',\ p''',\ 0),$$
$$\Psi\,(p,\ p''',\ p'',\ p',\ 0),$$
$$\Psi\,(p,\ p'_1,\ p'',\ p'_2,\ 0),$$

Въ послѣднемъ примѣрѣ точки p'_1 и p'_2 суть двѣ различныя точки одной и той же поверхности s'.

§ 96. Измѣняя положенія точекъ p', p'' ... и $p^{(n)}$, соотвѣтствующихъ данному оптическому пути

$$\Psi\,(p,\ p',\ p'',\ \ldots\ p^{(n)},\ 0)$$

мы можемъ отъискать одну или нѣсколько системъ такихъ положеній этихъ точекъ, которыя соотвѣтствуютъ *maximum*'амъ или *minimum*'амъ пути, такъ что

$$\Psi\,(p,\ p'_1,\ p''_1,\ \ldots\ p_1^{(n)},\ 0) = \Psi_1$$
$$\Psi\,(p,\ p'_2,\ p''_2,\ \ldots\ p_2^{(n)},\ 0) = \Psi_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Psi\,(p,\ p'_i,\ p''_i,\ \ldots\ p_i^{(n)},\ 0) = \Psi_i$$

будутъ i возможныхъ максимальныхъ или минимальныхъ значеній функціи

$$\Psi\,(p,\ p',\ p'',\ p''',\ \ldots\ p^{(n)},\ 0).$$

Положеніе этихъ точекъ, доставляющихъ функціи Ψ наибольшее или наименьшее значеніе, вполнѣ опредѣленное, такъ какъ для опредѣленія ихъ координатъ мы имѣемъ $3n$ уравненій.

Чтобы получить эти уравненія, вспомнимъ, что точки p', p'', ... и $p^{(n)}$ лежатъ на поверхностяхъ s', s'' .., $s^{(n)}$, уравненія которыхъ пусть будутъ $s'=0$, $s''=0$, ... $s^{(n)}=0$ что координаты z', z'', ... и $z^{(n)}$ можно разсматривать соотвѣтственно какъ функціи координатъ x' и y', x'' и y'', .., $x^{(n)}$ и $y^{(n)}$, и что слѣдовательно:

$$\frac{ds'}{dx'}+\frac{ds'}{dz'}\cdot\frac{dz'}{dx'}=0,\quad \frac{ds'}{dy'}+\frac{ds'}{dz'}\cdot\frac{dz'}{dy'}=0,$$

$$\frac{ds''}{dx''}+\frac{ds''}{dz''}\cdot\frac{dz''}{dx''}=0,\quad \frac{ds''}{dy''}+\frac{ds''}{dz''}\cdot\frac{dz''}{dy''}=0$$

. . . . . .

$$\frac{ds^{(n)}}{dx^{(n)}}+\frac{ds^{(n)}}{dz^{(n)}}\cdot\frac{dz^{(n)}}{dx^{(n)}}=0,\quad \frac{ds^{(n)}}{dy^{(n)}}+\frac{ds^{(n)}}{dz^{(n)}}\cdot\frac{dz^{(n)}}{dy^{(n)}}=0$$

При помощи этихъ равенствъ условія minimum'а функціи Ψ могутъ быть написаны такъ:

$$d\Psi=\left\{\frac{d\Psi}{dx'}-\frac{d\Psi}{dz'}\cdot\frac{\frac{ds'}{dx'}}{\frac{ds'}{dz'}}\right\}dx'+\left\{\frac{d\Psi}{dy'}-\frac{d\Psi}{dz'}\cdot\frac{\frac{ds'}{dy'}}{\frac{ds'}{dz'}}\right\}dy'+$$

$$+\left\{\frac{d\Psi}{dx''}-\frac{d\Psi}{dz''}\cdot\frac{\frac{ds''}{dx''}}{\frac{ds''}{dz''}}\right\}dx''+\left\{\frac{d\Psi}{dy''}-\frac{d\Psi}{dz''}\cdot\frac{\frac{ds''}{dx''}}{\frac{ds''}{dz''}}\right\}dy''+$$

$$+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$=\left\{\frac{d\Psi}{dx^{(n)}}-\frac{d\Psi}{dz^{(n)}}\cdot\frac{\frac{ds^{(n)}}{dx^{(n)}}}{\frac{ds^{(n)}}{dz^{(n)}}}\right\}dx^{(n)}+\left\{\frac{d\Psi}{dy^{(n)}}-\frac{d\Psi}{dz^{(n)}}\cdot\frac{\frac{ds^{(n)}}{dy^{(n)}}}{\frac{ds^{(n)}}{dz^{(n)}}}\right\}dy^{(n)}=0.$$

Приравнивая нулю коэффиціэнты при отдѣльныхъ произвольныхъ дифференціалахъ, dx', dy', dx'', dy'', ... $dx^{(n)}$, $dy^{(n)}$,

мы получимъ $2n$ уравненій, которыя вмѣстѣ съ уравненіями поверхностей $s'=0$, $s''=0$, ... $s^{(n)}=0$ составятъ систему $3n$ уравненій, необходимую для опредѣленія $3n$ координатъ точекъ p'_i, p''_i, ... и $p_i^{(n)}$.

Для каждаго изъ *различныхъ* возможныхъ оптическихъ путей мы найдемъ, такимъ образомъ, нѣсколько максимумовъ и минимумовъ.

§ 97. Если всѣ поверхности s', s'', ... $s^{(n)}$ свѣтлыя и прозрачныя, то можно доказать теорему, что значеніе функціи U, отъ которой зависитъ освѣщеніе въ точкѣ 0, будетъ выражаться суммой:

$$U_0 = \Sigma_i \; A_i \; Cos \; 2\pi \; \left(\Psi_i - \frac{t}{T} + \delta_i + \frac{1}{4} h_i \right),$$

гдѣ A_i есть независящая отъ времени величина, Ψ_i есть одно изъ наибольшихъ или наименьшихъ значеній различныхъ возможныхъ оптическихъ путей Ψ отъ точки p до точки 0, δ постоянное, зависящее только отъ координатъ точки $p_i^{(n)}$, h_i цѣлое число, а сумма Σ_i распространяется на всевозможныя максимальныя или минимальныя значенія различныхъ возможныхъ оптическихъ путей отъ p до 0.

Для того чтобы это доказать, допустимъ, что теорема эта справедлива для того случая, когда ломанная линія, вдоль которой считается оптическій путь, состоитъ изъ n отрѣзковъ r', r'', r''', .., $r^{(n)}$ и докажемъ, что она останется справедливою для того случая, когда эта ломанная линія состоитъ изъ $n+1$ частей: r', r'', r''', ... $r^{(n)}$, r_0.

§ 98. Пусть $s^{(n)}$ есть поверхность, отдѣляющая ту изотропную средину, въ которой лежитъ точка 0, отъ всѣхъ прочихъ срединъ. Обозначивъ черезъ Q_i длину одного изъ наибольшихъ или наименьшихъ оптическихъ путей отъ точ-

ки p до точки $p^{(n)}$ $(x^{(n)}, y^{(n)}, z^{(n)})$ поверхности $s^{(n)}$, положимъ что значеніе $\overline{U}$ функціи U на поверхности $s^{(n)}$, если бы средина, въ которой лежитъ точка 0 *не отличалась* отъ той средины, отъ которой ее отдѣляетъ эта поверхность, выражалась бы формулой.

$$\overline{U} = \Sigma_i \; D_i \; Cos \; 2\pi \left(Q_i - \frac{t}{T} - \delta_i \right) \; . \; . \; . \; . \; (235).$$

Здѣсь D_i и δ_i суть функціи отъ координатъ $x^{(n)}$, $y^{(n)}$ и $z^{(n)}$ точки $p^{(n)}$ поверхности $s^{(n)}$ и координатъ промежуточныхъ точекъ p'_i, p''_i, . . . и $p_i^{(n-1)}$, въ которыхъ ломанная линія оптическаго пути Q_i встрѣчаетъ поверхности s', s'' . . . и $s^{(n-1)}$. Такъ какъ положенія точекъ p'_i, p''_i, . . . $p_i^{(n-1)}$ вполнѣ опредѣлено условіемъ, что Q_i есть одно изъ наибольшихъ или наименьшихъ значеній одного изъ возможныхъ различныхъ путей отъ точки p до точки $p^{(n)}$, то A_i, Q_i и δ_i суть опредѣленныя функціи координатъ точки $p^{(n)}$.

Если мы предположимъ, что точка p лежитъ внѣ среды, въ которой лежитъ точка 0, то въ выраженіи

$$4\pi U_0 = \int \left\{ \frac{D}{Dn} \left[\frac{1}{r_0} \mathfrak{U} \left(t - \frac{r_0}{a_0} \right) - \frac{1}{r_0} \mathfrak{U}_n \left(t - \frac{r_0}{a_0} \right) \right] ds^{(n)}, \ldots \right. \quad (236),$$

гдѣ $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{U}_{(n)}$ суть значенія U и U_n на поверхности $s^{(n)}$, интегрированіе должно быть распространено по поверхности $s^{(n)}$.

Вліяніе того обстоятельства, что поверхность $s^{(n)}$ раздѣляетъ двѣ *различныя* средины, мы предположимъ въ томъ, что $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{U}_n$ отличаются отъ $\overline{U}$ и $\overline{U}_n$ амплитудами и фазами тѣхъ отдѣльныхъ періодическихъ функцій, сумма которыхъ составляетъ функціи U и U_n.

Такимъ образомъ, пусть

$$\mathfrak{U} = \Sigma_i \; A_i \; Cos \; 2\pi \; \left(Q_i - \frac{t}{T} + \alpha_i\right), \quad . \quad . \quad . \quad (237)$$

гдѣ A_i, Q_i и α_i суть функціи отъ координатъ $x^{(n)}$, $y^{(n)}$ и $z^{(n)}$ точки $p^{(n}$ на поверхности $s^{(n)}$. Отсюда найдемъ, замѣчая что $a_0 T = \lambda_0$:

$$\mathfrak{U}\left(t - \frac{r_0}{a_0}\right) = \Sigma_i \; A_i \; Cos \; 2\pi \; \left(Q_i + \frac{r_0}{\lambda_0} - \frac{t}{T} + \alpha_i\right) \; , \; . \; (238)$$

и

$$\frac{D}{Dn}\left[\frac{1}{r_0}\mathfrak{U}\left(t - \frac{r_0}{a_0}\right)\right] = \frac{d\left(\frac{1}{r_0}\right)}{dn}\Sigma_i \; A_i \; Cos \; 2\pi \; \left(Q_i + \frac{r_0}{\lambda_0} - \frac{t}{T} + \alpha_i\right)$$

$$- \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{1}{r_0}\frac{dr_0}{dn}\Sigma_i \; A_i \; Sin \; 2\pi \; \left(Q_i + \frac{r_0}{\lambda_0} - \frac{t}{T} + \alpha_i\right) . \; . \; (239).$$

Изъ формулы (235) имѣемъ

$$\overline{U}_n = \Sigma_i \frac{dD_i}{dn} Cos \; 2\pi \; \left(Q_i - \frac{t}{T} + \delta_i\right)$$

$$- \Sigma_i \frac{2\pi}{\lambda_0} \; D_i \; \frac{d\left(\lambda_0 Q_i + \lambda_0 \delta_i\right)}{dn} \; Sin \; 2\pi \left(Q_i - \frac{t}{T} + \delta_i\right) . \; (240).$$

Измѣняя амплитуду и фазу періодическихъ функцій, напишемъ $\mathfrak{U}_n$ слѣдующимъ образомъ:

$$\mathfrak{U}_n = \Sigma_i \; B_i \; Cos \; 2\pi \; \left(Q_i - \frac{t}{T} + \beta_i\right) -$$

$$- \Sigma \frac{2\pi}{\lambda_0} C_i \; Sin \; 2\pi \; \left(Q_i - \frac{t}{T} + \beta_i\right) . \quad . \quad . \quad . \quad (241)$$

и

$$- \frac{1}{r_0} \mathfrak{U}_n \left(t - \frac{r_0}{a_0}\right) = - \frac{1}{r_0} \Sigma \; B_i \; Cos \; 2\pi \left(Q_i + \frac{r_0}{\lambda_0} - \frac{t}{T} + \beta_i\right) +$$

$$+ \Sigma \; C_i \; Sin \; 2\pi \left(Q_i + \frac{r_0}{\lambda_0} - \frac{t}{T} + \beta_i\right) . \; . \; . \; . \; . \quad (242)$$

гдѣ B_i, C_i и β_i суть функціи координатъ точки $p^{(n)}$.

Положивъ въ формулахъ 238 и 241:

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} = \varkappa_0,\ \lambda_0 Q_i + r_0 = \zeta_i \text{ и } \frac{2\pi}{T} t = \Theta,$$

мы можемъ ихъ представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{D}{Dn}\left[\frac{1}{r_0} U\left(t - \frac{r_0}{a_0}\right)\right] = \frac{d\left(\frac{1}{r_0}\right)}{dn} \Sigma_i A_i \cos 2\pi \alpha_i \cos(\varkappa_0 \zeta_i + \Theta) -$$

$$- \frac{d\left(\frac{1}{r_0}\right)}{dn} \Sigma_i A_i \sin 2\pi \alpha_i \sin(\varkappa_0 \zeta_i + \Theta) -$$

$$- \varkappa_0 \frac{1}{r_0} \frac{dr_0}{dn} \Sigma_i A_i \sin 2\pi \alpha_i \cos(\varkappa_0 \zeta_i + \Theta) -$$

$$- \varkappa_0 \frac{1}{r_0} \frac{dr_0}{dn} \Sigma_i A_i \cos 2\pi \alpha_i \sin(\varkappa_0 \zeta_i + \Theta) \quad . \quad (243)$$

$$- \frac{1}{r_0} U_n\left(t - \frac{r_0}{a_0}\right) = - \frac{1}{r_0} \Sigma_i B_i \cos 2\pi \beta_i \cos(\varkappa_0 \zeta_i + \Theta) +$$

$$- \frac{1}{r_0} \Sigma_i B_i \sin 2\pi \beta_i \sin(\varkappa_0 \zeta_i + \Theta) +$$

$$+ \varkappa_0 \frac{1}{r_0} \Sigma_i C_i \sin 2\pi \beta_i \cos(\varkappa_0 \zeta_i + \Theta) +$$

$$+ \varkappa_0 \frac{1}{r_0} \Sigma_i C_i \cos 2\pi \beta_i \sin(\varkappa_0 \zeta_i + \Theta) \ . \ . \ , \quad (244).$$

Полагая здѣсь

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\left(\frac{1}{r_0}\right)}{dn} A_i \cos 2\pi \alpha_i - \frac{1}{r_0} B_i \cos 2\pi \beta_i = G_i \\
&- \frac{d\left(\frac{1}{r_0}\right)}{dn} A_i \sin 2\pi \alpha_i - \frac{1}{r_0} B_i \sin 2\pi \beta_i = G'_i \\
&\frac{1}{r_0}\left\{\frac{dr_0}{dn} A_i \sin 2\pi \alpha_i - C_i \sin 2\pi \beta_i\right\} = -\vartheta_i \\
\text{и} \quad &\frac{1}{r_0}\left\{\frac{dr_0}{dn} A_i \cos 2\pi \alpha_i - C_i \cos 2\pi \beta_i\right\} = -\vartheta'_i
\end{aligned}\right\} \quad (245)$$

получимъ, сложивъ почленно формулы 243 и 244:

$$4\pi\ U_0 = \int \left\{ \frac{D}{D_n}\left(\frac{\mathfrak{U}}{r_0}\right) - \frac{1}{r_0}\,\mathfrak{U}_n \right\} ds^{(n)} =$$

$$= \Sigma_i\ \Gamma_i + \Sigma_i\ \Gamma_i' + \Sigma_i\ \Delta + \Sigma_i\ \Delta_i', \quad . \quad (246)$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_i &= \int G_i\ Cos\ (\varkappa_0\ \zeta_i + \Theta)\ ds^{(n)}, \\ \Gamma_i' &= \int G'_i\ Cos\ (\varkappa_0\ \zeta_i + \Theta - \tfrac{\pi}{2})\ ds^{(n)} \\ \Delta_i &= \varkappa_0 \int \vartheta_i\ Sin\ (\varkappa_0\ \zeta_i + \Theta)\ ds^{(n)}, \\ \Delta_i' &= \varkappa_0 \int \vartheta_i'\ Sin\ (\varkappa_0\ \zeta_i + \Theta - \tfrac{\pi}{2})\ ds^{(n)} \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ (247).$$

§ 99. Какъ и въ § 94 и съ тѣми же ограниченіями заключаемъ здѣсь, что въ томъ случаѣ, когда на разсматриваемой части поверхности $s^{(n)}$ нѣтъ ни максимумовъ, ни минимумовъ функціи ζ_i, то интегралы Γ, Γ', Δ и Δ', распространенные на эту часть поверхности, равны нулю.

§ 100. Разсмотримъ теперь тотъ случай, когда на нѣкоторой части поверхности $s^{(n)}$, на которую распространяются интегралы (247), находится максимумъ или минимумъ функціи $\zeta_i = \lambda_0\ Q_i + r_0$ въ точкѣ $p^{(n)}_{0,i}$ и что это наименьшее значеніе функціи ζ_i на разсматриваемой части поверхности равно $A_{0,i}$.

Значеніе Q_i, соотвѣтствующее точкѣ $p^{(n)}_{0,i}$, обозначимъ черезъ $Q_{0,i}$; значеніе r_0 для этой точкѣ — черезъ $\varrho_{0,i}$ и въ дальнѣйшемъ временно откинемъ значки (i) для простоты

письма. Тогда

$$A_0 = \lambda_0 Q_0 + \varrho_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (248)$$

Для того чтобы въ этомъ случаѣ найти уравненіе проэкціи кривой пересѣченія поверхности $s^{(n)}$ съ поверхностью, для точекъ которой ζ безконечно мало отличается отъ A_0, на касательную плоскость къ поверхности $s^{(n)}$ въ точкѣ p, помѣстимъ начало координатъ въ эту точку и направимъ ось z по нормали къ поверхности $s^{(n)}$. Тогда касательная плоскость къ поверхности $s^{(n)}$ въ точкѣ p будетъ плоскость $x\,y$ и намъ придется искать проэкцію кривой пересѣченія на плоскость $x\,y$. Чтобы получить уравненіе этой проэкціи, мы исключимъ изъ уравненія

$$\lambda_0 Q + r_0 = \zeta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (249)$$

координату z помощью уравненія поверхности $s^{(n)} = 0$.

Уравненіе поверхности $s^{(n)}$ для точекъ, весьма близкихъ отъ p, можемъ написать, откинувъ указателя (n) при $x^{(n)}$, $y^{(n)}$ и $z^{(n)}$ въ слѣдующемъ видѣ

$$z = a_{1,1} x^2 + a_{1,2} x\,y + a_{2,2} y^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (250)$$

Чтобы составить уравненіе поверхности (249) для безконечно мало удаленныхъ отъ p точекъ, замѣтимъ, что по теоремѣ Тайлора, пренебрегая членами со степенями x, y и z высшими второй, мы будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} Q = Q_0 &+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right)_0 z + \\ &+ \left(\frac{\partial Q^2}{\partial x^2}\right)_0 x^2 + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}\right)_0 xy + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}\right)_0 y^2 + \\ &+ \left[\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z}\right)_0 x + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial z}\right) y\right]_0 z + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}\right)_0 z^2, \end{aligned} \quad (251)$$

гдѣ Q разсматривается какъ функція однихъ координатъ $x^{(n)}$, $y^{(n)}$ и $z^{(n)}$ точки $p^{(n)}$ или, согласно условію, откинувъ (n); отъ x, y, и z.

Вставляя сюда значеніе z изъ (250) и пренебрегая степенями x и y высшими второй, получимъ

$$Q=Q_0+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_0 x+\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)_0 y+\left\{\left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right)_0 a_{11}+\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_0\right\} x^2+$$

$$+\left\{\left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right)_0 a_{12}+2\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y}\right)_0\right\} xy+\left\{\left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right)_0 a_{22}+\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}\right)_0\right\} y^2. \quad (252)$$

Воспользовавшись выраженіемъ (94), полученнымъ для $_0$ въ § 52, можно составить выраженіе для $\zeta=\lambda_0 Q+r_0$.

Это выраженіе будетъ имѣть слѣдующій видъ

$$\zeta=A_0+\left[\lambda_0\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_0-\alpha_0\right] x+\left[\lambda_0\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)_0-\beta_0\right] y+$$

$$+A_{11}x^2+2A_{12}xy+A_{22}y^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (253)$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \lambda_0 Q_0+\varrho_0 \\ A_{11} &= \left[\lambda_0\left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right)_0-\gamma_0\right] a_{11}+\lambda_0\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_0+\frac{1-\alpha_0^2}{2\varrho_0}=B_{11}+\frac{C_{11}}{\varrho_0} \\ A_{12} &= \frac{1}{2}\left[\lambda_0\left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right)_0-\gamma_0\right] a_{12}+\lambda_0\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y}\right)_0-\frac{\alpha_0\beta_0}{2\varrho_0}=B_{12}+\frac{C_{12}}{\varrho_0} \\ A_{22} &= \left[\lambda_0\left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right)_0-\gamma_0\right] a_{22}+\lambda_0\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial y_2}\right)_0+\frac{1-\beta_0}{2\varrho_0}=B_{22}+\frac{C_{22}}{\varrho_0} \end{aligned}\right\} (254)$$

Легко убѣдиться въ томъ, что коэффиціенты при первой степени x и y равны нулю. Дѣйствительно, такъ какъ въ точкѣ p функція ζ имѣетъ минимумъ, то

$$\left(\frac{d\xi}{dx^{(n)}}+\frac{d\xi}{dz^{(n)}}\cdot\frac{dz}{dx^{(n)}}\right)_0=0 \text{ и } \left(\frac{d\xi}{dy^{(n)}}+\frac{d\xi}{dz^{(n)}}\cdot\frac{dz}{dy^{(n)}}\right)_0=0,$$

или, откидывая, согласно условію, указатель (n) и замѣнивъ $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{dz}{dy}$ изъ уравненія (250) черезъ $2a_{11}x+2a_{12}y$ и $2a_{12}x+2a_{22}y$:

$$\left\{\lambda_0\frac{dQ}{dx}+\frac{dr_0}{dx}+2\frac{d\xi}{dz}(a_{11}x+a_{12}y)\right\}_0=0,$$

а, такъ какъ p_0 есть начало координатъ, то

$$\lambda_0\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_0+\left(\frac{x-x_0}{r_0}\right)_0=\lambda_0\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_0-\alpha_0=0$$

Точно также докажемъ, что и

$$\lambda_0\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_0-\beta_0=0.$$

Благодаря этому, уравненіе (250) можетъ быть написано въ видѣ слѣдующаго

$$A_{11}x^2+2A_{12}xy+A_{22}y^2=\zeta-A_0, \quad . \quad . \quad (255)$$

или въ видѣ

$$\mu_1x^2+\mu_2y^2=\zeta-A_0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (256)$$

гдѣ μ_1 и μ_2 суть корни уравненія

$$(A_{11}-\mu)(A_{22}-\mu)-A^2_{12}=0. \quad . \quad . \quad (257)$$

Также какъ и въ §§ 53 и 54 докажемъ, что въ томъ случаѣ, когда μ_1 и μ_2 имѣютъ одинаковые знаки, и когда, слѣдовательно, кривыя, уравненія которыхъ выражаются формулой (257)—эллипсы; интегралы Γ и Γ' равны нулю, а интегралы

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= \pm\vartheta_0 \frac{\pi}{\sqrt{\mu_1\mu_2}} \mathit{Cos}\,(\varkappa_0 A_0 + \Theta) \\ \Delta' &= \pm\vartheta'_0 \frac{\pi}{\sqrt{\mu_1\mu_2}} \mathit{Sin}\,(\varkappa_0 A_0 + \Theta) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (258)$$

и

$$\Delta + \Delta^1 = \pm \frac{L_0}{\varrho_0} \frac{\pi}{\sqrt{\mu_1\mu_2}} \mathit{Cos}\,(\varkappa_0 A_0 + \Theta + \delta_0) \; . \quad . \quad (259)$$

гдѣ принято

$$\varrho_0\vartheta_0 = L_0 \mathit{Cos}\,\delta_0 \text{ и } \varrho_0\vartheta'_0 = -L_0 \mathit{Sin}\,\delta_0 . \quad . \quad (260)$$

Здѣсь легко прослѣдить по формуламъ 245, 240 241, и 237, что L_0 и δ_0 суть функціи координатъ $x_0^{(n)}$, $y_0^{(n)}$ и $z_0^{(n)}$ точки p_0 и не зависятъ отъ координатъ x_0, y_0, z_0 точки 0.

Знакъ + въ формулѣ (259) соотвѣтствуетъ тому случаю, когда функція A_0 есть максимумъ функціи ζ и знакъ— когда A_0 есть минимумъ этой же функціи. Когда μ_1 и μ_2 имѣютъ различные знаки, т. е. когда кривыя, выражаемыя уравненіями (256) суть гиперболы, то

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= \vartheta_0 \frac{\pi}{\sqrt{\mu_1\mu_2}} \mathit{Sin}\,(\varkappa_0 A_0 + \Theta) \\ \Delta' &= -\vartheta_0 \frac{\pi}{\sqrt{\mu_1\mu_2}} \mathit{Cos}\,(\varkappa_0 A_0 + \Theta) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (261)$$

и

$$\Delta + \Delta' = \frac{L_0}{\varrho_0} \frac{\pi}{\sqrt{\mu_1\mu_2}} \mathit{Sin}\,(\varkappa_0 A_0 + \Theta + \delta_0) \quad . \quad . \quad (262)$$

Точно также и съ тѣми же обозначеніями, какъ и въ § 59, мы докажемъ, что

$$\Delta+\Delta'=\begin{cases}=\pm\dfrac{L\pi}{RV\overline{(f_1-\varrho_0)\,(f_2-\varrho_0)}}\,Cos\,(\varkappa_0 A_0+\Theta+\delta_0)\\ \quad\text{для } \mu_1\mu_2>0 \text{ и } b_{11}\,b_{22}-b_{12}^2>0\\ =\pm\dfrac{L\pi}{RV\overline{(f_1-\varrho_0)\,(\varrho_0-f_2)}}\,Cos\,(\varkappa_0 A_0+\Theta+\delta_0)\\ \quad\text{для } \mu_1\mu_2>0 \text{ и } b_{11}\,b_{22}-b_{12}^2<0\\ =\dfrac{L\pi}{RV\overline{(f_1-\varrho_0)\,(\varrho_0-f_2)}}\,Sin\,(\varkappa_0 A_0+\Theta+\delta_0)\\ \quad\text{для } \mu_1\mu_2<0 \text{ и } b_{11}\,b_{22}-b_{12}^2<0\\ =\dfrac{L\pi}{RV\overline{(f_1-\varrho_0)\,(f_2-\varrho_0)}}\,Sin\,(\varkappa_0 A_0+\Theta+\delta_0)\\ \quad\text{для } \mu_1\mu_2<0 \text{ и } b_{11}\,b_{22}-b_{12}^2<0\end{cases}\qquad(264)$$

Въ нашемъ случаѣ f_1 и f_2 суть дѣйствительные корни уравненія

$$\varrho_0^2\mu_1\mu_2=(B_{11}\varrho_0+c_{11})(B_{22}\varrho_0+c_{22})-(B_{12}\varrho_0+c_{12})^2=0,\ldots(264)$$

гдѣ значенія B_{11}, B_{12}, B_{22}, c_{11}, c_{12} и c_{22} найдутся изъ формулъ (254).

§ 101. Легко убѣдиться въ томъ, что A_0 есть максимумъ или минимумъ выраженія $\zeta=\lambda_0 Q+r_0$, разсматриваемаго какъ функція координатъ точекъ p', p''..... и $p_{(n}$ Дѣйствительно, функція Q удовлетворяетъ условіямъ:

$$\frac{\partial Q}{\partial x'}-\frac{\partial Q}{\partial z'}\cdot\frac{\left(\frac{\partial s'}{\partial x'}\right)}{\left(\frac{\partial s'}{\partial z'}\right)}=0,\quad \frac{\partial Q}{\partial y'}-\frac{\partial Q}{\partial z'}\cdot\frac{\left(\frac{\partial s'}{\partial y'}\right)}{\left(\frac{\partial s'}{\partial z'}\right)}=0$$

. . . . . .

$$\frac{\partial Q}{\partial x^{(n-1)}}-\frac{\partial Q}{\partial z^{(n-1)}}\frac{\left(\frac{\partial s^{(n-1)}}{\partial x^{(n-1)}}\right)}{\left(\frac{\partial s^{(n-1)}}{\partial z^{(n-1)}}\right)}=0,\quad \frac{\partial Q}{\partial y^{(n-1)}}-\frac{\partial Q}{\partial z^{(n-1)}}\frac{\left(\frac{\partial s}{\partial y^{(n-1)}}\right)}{\left(\frac{\partial s^{n-1}}{\partial z^{(n-1)}}\right)}=0$$

Такъ какъ r_0 не зависитъ отъ координатъ точекъ p', p''.... и $p^{(n-1)}$, то можно написать, что

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial\xi}{\partial x'} - \dfrac{\partial\xi}{\partial z'}\dfrac{\left(\dfrac{\partial s'}{\partial x'}\right)}{\left(\dfrac{\partial s'}{\partial z'}\right)} = 0\,, \quad \dfrac{\partial\xi}{\partial y'} - \dfrac{\partial\xi}{\partial z'}\dfrac{\left(\dfrac{\partial s'}{\partial y'}\right)}{\left(\dfrac{\partial s'}{\partial z'}\right)} = 0 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \dfrac{\partial\xi}{\partial x^{(n-1)}} - \dfrac{\partial\xi}{\partial z^{(n-1)}}\dfrac{\left(\dfrac{\partial s^{(n-1)}}{\partial x^{(n-1)}}\right)}{\left(\dfrac{\partial s^{(n-1)}}{\partial z^{(n-1)}}\right)} = 0\,, \quad \dfrac{\partial\xi}{\partial y^{(n-1)}} - \dfrac{\partial\xi}{\partial z^{(n-1)}}\dfrac{\left(\dfrac{\partial s^{(n-1)}}{\partial y^{(n-1)}}\right)}{\left(\dfrac{\partial s^{(n-1)}}{\partial z^{(n-1)}}\right)} = 0 \end{array}\right\} \quad (265)$$

Къ этимъ уравненіямъ присоединяется еще условіе, что A_0 есть наименьшее значеніе функціи ζ, разсматриваемой какъ выраженіе, въ которомъ, при помощи предъидущихъ уравненій и уравненій поверхностей $s'=0$, $s''=0$,... $s^{(n-1)}=0$, координаты точекъ p', p'',... p^{n-1} замѣнены координатами точки p^n:

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\dfrac{\partial\xi}{\partial x'} - \dfrac{\partial\xi}{\partial z'}\dfrac{\left(\dfrac{\partial s'}{\partial x'}\right)}{\left(\dfrac{\partial s'}{\partial z'}\right)}\right\}\cdot\left\{\dfrac{\partial x'}{\partial x^{(n)}} - \dfrac{\partial x'}{\partial z^{(n)}}\dfrac{\left(\dfrac{\partial s^{(n)}}{\partial x^{(n)}}\right)}{\left(\dfrac{\partial s^{(n)}}{\partial z^{(n)}}\right)}\right\} + \cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot + \dfrac{\partial z}{\partial x^{(n)}} - \dfrac{\partial\xi}{\partial z^{(n)}}\dfrac{\left(\dfrac{\partial s^{(n)}}{\partial x^{(n)}}\right)}{\left(\dfrac{\partial s^{(n)}}{\partial z^{(n)}}\right)} = 0, \end{array}\right\} \quad (266)$$

или, такъ какъ первые $n-1$ членовъ, благодаря уравненіямъ (265) пропадаютъ,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \xi}{\partial x^{(n)}} - \frac{\partial \xi}{\partial z^{(n)}} \frac{\left(\frac{\partial s^{(n)}}{\partial x^{(n)}}\right)}{\left(\frac{\partial s^{(n)}}{\partial z^{(n)}}\right)} = 0 \\ \text{и точно также} \\ &\frac{\partial \xi}{\partial y^{(n)}} - \frac{\partial \xi}{\partial z^{(n)}} \frac{\left(\frac{\partial s^{(n)}}{\partial y^{(n)}}\right)}{\left(\frac{\partial s^{(n)}}{\partial z^{(n)}}\right)} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (267)$$

Послѣднимъ условіямъ, слѣдовательно, удовлетворяютъ значенія A_0 функціи ζ въ точкѣ $p_0^{(n)}$.

Уравненія (265) и (267) вмѣстѣ съ уравненіями поверхностей $s' = 0$, $s'' = 0, \ldots$ $s^{(n-1)} = 0$, $s^{(n)} = 0$ представляютъ условіе, что функція ζ, разсматриваемая какъ функція координатъ точекъ p', p'', $\ldots$ $p^{(n)}$ имѣетъ въ точкѣ $p_0^{(n)}$ maximum или minimum A_0.

§ 102. Воспользовавшись значеніями $\Delta + \Delta'$ короче можно написать такъ:

$$\Delta + \Delta' = A \, Cos \, (k_0 \, A_0 + \Theta + \delta_0 + \tfrac{1}{4} \pi \, h),$$

гдѣ h цѣлое число, мы можемъ представить функцію U_0 формулой:

$$4\pi \, U_0 = \Sigma_i \, A_i \, Cos \, (k_0 \, A_{0,i} + \Theta + \delta_{i,0} + \tfrac{1}{4} \pi \, h) =$$

$$= \Sigma_i \, A_i \, Cos \, 2\pi \, (\Psi_i - \frac{t}{T} + \delta_i + \tfrac{1}{4} h_i), \ldots (268)$$

гдѣ слѣдуетъ помнить, что значеніе δ_i соотвѣтствуетъ точкѣ $p_{0,i}^{(n)}$, или короче $p_i^{(n)}$; въ которой ломанная линія, вдоль которой считается данный наименьшій оптическій путь, пересѣкаетъ поверхность $s^{(n)}$.

Такимъ образомъ теорема доказана.

§ 103. Въ томъ случаѣ, когда поверхности $s', s'', \ldots s^{(n)}$ не всѣ прозрачныя и свѣтлыя, то изъ суммы въ формулѣ для U_0 выпадаютъ всѣ члены, для которыхъ хотя одна изъ точекъ ломанной $p\ p_i'\ p_i''\ p_i'''\ldots\ p_i^{n)}$ лежитъ на черной или не прозрачной части поверхности $s^{(n)}$.

§ 104. Въ томъ случаѣ, когда точка p лежитъ въ той же срединѣ, какъ и 0, придется въ формулѣ (236) прибавить интегрированіе по поверхности безконечно малой сферы, окружающей точку p. Результатомъ этого интегрированія будетъ, какъ мы видѣли въ § 48,

$$4\pi\ U_0.$$

§ 105. Такъ какъ теорема, выраженная формулой (268), по доказанному въ § 69, справедлива для двухъ, а по § 71 для случая трехъ срединъ, то она справедлива и вообще.

Фокусы.

§ 106. Распространимъ теперь теоремы, доказанныя въ §§ 66, 67 и 68 для случая двухъ срединъ, на случай вообще сколькихъ угодно срединъ.

Остановимся сначала на вопросѣ о фокусахъ.

Мы видѣли, что функція U, отъ которой зависитъ освѣщеніе, выражается формулой:

$$4\pi\ U_0 = \Sigma i\ A_i\ Cos\ 2\pi\ (\Psi_i - \frac{t}{T} + \delta_i + \frac{1}{4} h_i), \ldots\ldots \quad (269)$$

гдѣ

$$A_i = \pm \frac{L_i \pi}{R_i \sqrt{(f_{1,i} \infty \varrho_{0,i})\ (f_{2,i} \infty \varrho_{0,i})}} \quad \ldots\ldots \quad (270)$$

Здѣсь L_i, R_i величины, независящія отъ ϱ_0, f_1 и f_2 два дѣйствительныя значенія ϱ_0, удовлетворяющія уравненію:

$$(B_{11}\varrho_0 - C_{11})(B_{22}\varrho_0 - C_{22}) - (B_{12}\varrho_0 - C_{12})^2 = 0$$

или короче

$$A_{11}\ A_{22} - A_{12}{}^2 = 0, \ldots\ldots\ldots \quad (271)$$

а знакъ ∞ выражаетъ, что слѣдуетъ брать или $f_1 - \varrho_0$, если $f_1 > \varrho_0$ и $\varrho_0 - f_1$, если $f_1 < \varrho_0$, или $f_2 - \varrho_0$, если $f_2 > \varrho_0$ и $\varrho_0 - f_2$, если $f_2 < \varrho_0$.

Для $\varrho_0 = f_1$ и $\varrho_0 = f_2$ $U = \infty$. Отсюда слѣдуетъ, что, если освѣщенная точка 0 лежитъ или на разстояніи $f_{1,i}$ или $f_{2,i}$ отъ точки $p_i^{(n)}$, то освѣщеніе ея будетъ безконечно велико.

Разстоянія f_1 и f_2 называются фокусными разстояніями.

Легко разыскать еще другое свойство фокусныхъ разстояній. Для этого замѣтимъ, что положеніе точки $p_i^{(n)}$ $(x_i^{(n)}, y_i^{(n)}, z_i^{(n)})$, въ которой поверхность $s^{(n)}$ пересѣкается ломанной линіей $p\ p'\ p''\ldots\ p^{(n)}\ 0$, одного изъ наибольшихъ или наименьшихъ оптическихъ путей опредѣляется изъ уравненій (267) и уравненія поверхности $s^{(n)}$. Такъ какъ для безконечно близкихъ отъ $p_i^{(n)}$ точекъ въ системѣ координатъ, начало которыхъ находится въ $p_0^{(n)}$ и ось z нормальна къ поверхности $s^{(n)}$

$$\zeta = A_0 + A_{11}\, x^{(n)2} + 2A_{12}\, x^{(n)}\, y^{(n)} + A_{12}\, y^{(n)2},$$

то уравненія (267) примутъ видъ

$$A_{11}\, x^{(n)} + A_{12}\, y^{(n)} = 0,\ A_{12}\, x^{(n)} + A_{22}\, y^{(n)} = 0. \quad (272)$$

§ 107. Примѣнивъ къ этимъ уравненіямъ разсужденія, приведенныя въ § 67 относительно уравненіи 179, и, замѣнивъ въ нихъ только x_p и y_p черезъ $x_i^{(n)}$ и $y_i^{(n)}$, докажемъ, что на поверхности $s^{(n)}$ существуютъ двѣ такія безконечно малыя, взаимно перпендикулярныя, прямыя линіи, пересѣкаю-

щіяся въ точкѣ $p_i^{\prime(n)}$, которыя обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что, если точка 0 находится въ одномъ изъ фокусовъ, то для точекъ одной изъ нихъ производныя по $x^{(n)}$ и $y^{(n)}$ выраженія $\zeta = \lambda_0 Q_i + r_0$ будутъ равны нулю. Точно также, какъ и въ § 68 мы убѣдимся, что если соблюдено условіе:

$$\frac{B_{11}}{C_{11}} = \frac{B_{12}}{C_{12}} = \frac{B_{22}}{C_{22}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (273)$$

то $f_1 = f_2$ и всѣ точки, безконечно мало удаленныя отъ точки $p_i^{(n)}$, будутъ обладать тѣмъ свойствомъ, что для нихъ производныя отъ выраженія ζ по $x^{(n)}$ и $y^{(n)}$ равны нулю. Въ этомъ случаѣ точка 0 находится въ изображеніи точки p.

Законъ преломленій и отраженій.

§ 108. Мы назвали оптическимъ путемъ отъ точки p до точки 0 выраженіе:

$$\Psi = \frac{r_1}{\lambda_1} + \frac{r_2}{\lambda_2} + \ldots + \frac{r_n}{\lambda_n} + \frac{r_0}{\lambda_0}, \quad . \quad . \quad (274)$$

помноживъ это выраженіе на время T одного колебанія и замѣтивъ, что $\frac{\lambda}{T} = a$ есть скорость распространенія колебаній, мы получимъ:

$$\Psi T = \frac{r_1}{a_1} + \frac{r_2}{a_2} + \ldots + \frac{r_n}{a_n} + \frac{r_0}{a_0} = \theta, \quad . \quad (275)$$

гдѣ θ есть время, въ теченіе котораго сотрясеніе, распространяясь отъ точки p вдоль ломанной линіи $p\,p'\,p''\ldots p^{(n)}\,0$. достигаетъ точки 0.

Видъ ломанной линіи $p\ p_i'\ p_i''\ldots p_i^{(n}\ 0$, соотвѣтствующій наибольшему или наименьшему оптическому пути, вполнѣ опредѣляется координатами точекъ: $p_i', p_i''\ldots$ и $p_i^{(n)}$, которыя, въ свою очередь, опредѣляются изъ $3n$ уравненій:

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\dfrac{d\Psi}{dx'}-\dfrac{d\Psi}{dz'}\cdot\dfrac{\left(\dfrac{ds'}{dx'}\right)}{\left(\dfrac{ds'}{dz'}\right)}\right\}_i=0,\quad \left\{\dfrac{d\Psi}{dy'}-\dfrac{d\Psi}{dz'}\cdot\dfrac{\left(\dfrac{ds'}{dy'}\right)}{\left(\dfrac{ds'}{dz'}\right)}\right\}_i=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left\{\dfrac{d\Psi}{dx^{(n)}}-\dfrac{d\Psi}{dz^{(n)}}\cdot\dfrac{\left(\dfrac{ds^{(n)}}{dx^{(n)}}\right)}{\left(\dfrac{ds^{(n)}}{dz^{(n)}}\right)}\right\}_i=0,\quad \left\{\dfrac{d\Psi}{dy^{(n)}}-\dfrac{d\Psi}{dz^{(n)}}\cdot\dfrac{\left(\dfrac{ds^{(n)}}{dy^{(n)}}\right)}{\left(\dfrac{ds^{(n)}}{dz^{(n)}}\right)}\right\}_i=0 \end{array}\right\} \quad (276)$$

$$s'=0,\quad s''=0,\quad \ldots\ldots,\quad s^{(n)}=0.$$

Для опредѣленія положенія точки $p_i^{(k)}$ на поверхности $s^{(k)}$ мы будемъ имѣть слѣдующія уравненія:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x^{(k)}}-\frac{\partial\Psi}{\partial z^{(k)}}\frac{\left(\dfrac{\partial s^{(k)}}{\partial x^{(k)}}\right)}{\left(\dfrac{\partial s^{(k)}}{\partial z^{(k)}}\right)}=0,\quad \frac{\partial\Psi}{\partial y^{(k)}}-\frac{\partial\Psi}{\partial z^{(k)}}\frac{\left(\dfrac{\partial s^{(k)}}{\partial y^{(k)}}\right)}{\left(\dfrac{\partial s^{(k)}}{\partial z^{(k)}}\right)}=0\ \ldots\ (277).$$

Положивъ начало координатъ въ точкѣ $p_i^{(n)}$ и направивъ ось z по нормали $n^{(k)}$ къ $s^{(k)}$ въ точкѣ $p_i^{(k)}$, замѣтимъ, что $\dfrac{ds^{(k)}}{dx^{(k)}}=\dfrac{ds^{(k)}}{dy^{(k)}}=0$ и слѣдовательно наши уравненія примутъ видъ:

$$\left(\frac{d\Psi}{dx^{(k)}}\right)_i=0,\quad \left(\frac{d\Psi}{dy^{(k)}}\right)_i=0,\quad s^{(k)}=0\ \ldots\ (278)$$

Такъ какъ отъ $x^{(k)}$ и $y^{(k)}$ зависятъ только r_k и r_{k+1}, то первое изъ этихъ уравненій дастъ:

$$\left(\frac{1}{\lambda_k}\cdot\frac{dr_k}{dx^{(k)}}+\frac{1}{\lambda_{k+1}}\cdot\frac{dr_{k+1}}{dx^{(k)}}\right)_i=\left(\frac{1}{\lambda_k}\frac{x^{(k)}-x^{(k-1)}}{r_k}-\frac{1}{\lambda_{k+1}}\cdot\frac{x^{(k+1)}-x^{(k)}}{r_{k+1}}\right)_i=0$$

Замѣтивъ, что $x_i^{(k)}=o$, согласно выбору начала координатъ, получимъ:

$$\frac{1}{\lambda_k}\cdot\frac{x_i^{k-1}}{\varrho_k}=-\frac{1}{\lambda_{k+1}}\cdot\frac{x_i^{k+1}}{\varrho_{k+1}},$$

гдѣ

$$\varrho_k=\sqrt{(x_i^{(k-1)})^2+(y_i^{k-1})^2+(z_i^{k-1})^2}$$

$$\varrho_{k+1}=\sqrt{(x_i^{(k+1)})^2+(y_i^{(k+1)})^2+(z_i^{k+1})^2}.$$

Обозначивъ черезъ α_k, β_k и γ_k углы ϱ_k съ осями и черезъ α_{k+1}, β_{k+1} и γ_{k+1} углы ϱ_{k+1} съ осями, получимъ:

$$\frac{1}{\lambda_k}\alpha_k=-\frac{1}{\lambda_{k+1}}\cdot\alpha_{k+1} \quad \ldots\ldots \quad 279.$$

Точно также получимъ изъ втораго уравненія системы 278:

$$\frac{1}{\lambda_k}\beta_k=-\frac{1}{\lambda_{k+1}}\cdot\beta_{k+1} \quad \ldots\ldots \quad 280$$

Возвысивъ въ квадратъ обѣ части формулъ 279 и 280, складывая ихъ почленно и, замѣтивъ, что $\alpha^2_k+\beta^2_k+\gamma^2_k=1$ и $\alpha^2_{k+1}+\beta^2_{k+1}+\gamma^2_{k+1}=1$, получимъ:

$$\frac{1}{\lambda^2_k}(1-\gamma^2_k)=\frac{1}{\lambda^2_{k+1}}(1-\gamma^2_{k+1}),$$

откуда:

$$\frac{Sin\,(\varrho_{k+1},\,n^{(k)})}{Sin\,(\varrho_k,\,n^{(k)})}=\frac{\frac{1}{\lambda_{k+1}}}{\frac{1}{\lambda_k}}=q^{k+1}_k=\frac{1}{q^k_{k+1}}, \quad \ldots\ldots \quad 281$$

гдѣ q^{k+1}_k и q^k_{k+1} постоянныя величины.

Обозначивъ черезъ φ_k уголъ плоскости $n^{(k)}\varrho_k$ съ плоскостью $x^{(k)}z^{(k)}$ и черезъ φ_{k+1} уголъ плоскости $n^{(k)}\varrho_{k+1}$ съ той же плоскостью и замѣтивъ, что

$$\alpha_k=Sin(\varrho_k,\,n^{(k)})Cos\varphi_k,\quad \alpha_{k+1}=Sin(\varrho_{k+1},\,n^{(k)})Cos\varphi_{k+1}$$

$$\beta_k=Sin(\varrho_k,\,n^{(k)})\,Sin\varphi_k,\quad \beta_{k+1}=Sin(\varrho_{k+1},\,n^{(k)})Sin\varphi_{k+1},$$

получимъ изъ равенствъ 279, 280 и 281:

$$Cos\varphi_{k+1} = -Cos\varphi_k \text{ и } Sin\varphi_{k+1} = -Sin\varphi_k, \quad . \quad . \quad 282$$

откуда

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k + 180^\circ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 283$$

Формулы 281 и 283 выражаютъ извѣстные законы преломленія; величина q^{k+1}_{k} называется показателемъ преломленія изъ $(k+1)$-ой средины къ k-тую средину, а q^{k}_{k+1} показателемъ преломленія изъ k-той средины къ $k+1$-ую. Полагая $\lambda_{k+1} = -\lambda_k$, получимъ законы отраженія.

Поверхность волны.

§ 109. Поверхностью волны называется поверхность, уравненіе которой:

$$\Psi(p, p'_i, p''_i, \ldots p_i^{(n)}, 0) = \text{const.} \quad . \quad . \quad 284.$$

Здѣсь координаты точки p разсматриваются какъ постоянныя, координаты точки 0 какъ перемѣнныя независимыя, въ функціи которыхъ при помощи уравненій 276 выражены координаты точекъ $p'_i, p''_i, \ldots p_i^{(n)}$.

Можно доказать, что линія $\varrho_{0,i}$, соединяющая одну изъ точекъ 0 точкою $p^{(n)}$ поверхности $s^{(n)}$, нормальна къ поверхности волны.

Для того чтобы это доказать, дифференцируемъ формулу 284 по x_0 и y_0, разсматривая z_0 какъ функцію отъ x_0 и y_0, выраженную этой формулой. Это дифференцированіе будетъ соотвѣтствовать переходу отъ одной точки поверхности волны къ другой безконечно близкой. Мы получимъ тогда:

$$\left\{\frac{\partial\Psi}{\partial x'_i}-\frac{\partial\Psi}{\partial z'_i}\frac{\left(\frac{\partial s'}{\partial x'_i}\right)}{\left(\frac{\partial s'}{\partial z'_i}\right)}\right\}\left\{\frac{\partial x'_i}{\partial x_0}-\frac{\partial x'_i}{\partial z_0}\frac{\left(\frac{d\Psi}{dx_0}\right)}{\left(\frac{d\Psi}{dz_0}\right)}\right\}+$$

$$+\left\{\frac{\partial\Psi}{\partial y'_i}-\frac{\partial\Psi}{\partial z'_i}\frac{\left(\frac{\partial s'}{\partial y'_i}\right)}{\left(\frac{\partial s'}{\partial z'_i}\right)}\right\}\left\{\frac{\partial y'_i}{\partial x_0}-\frac{\partial y'_i}{\partial z_0}\frac{\left(\frac{d\Psi}{dx_0}\right)}{\left(\frac{d\Psi}{dz'_i}\right)}\right\}+$$

. . . . . .

$$+\frac{\partial\Psi}{\partial x_0}-\frac{\partial\Psi}{\partial z_0}\frac{\left(\frac{d\Psi}{dx_0}\right)}{\left(\frac{d\Psi}{dz_0}\right)}=0,$$

гдѣ символы ∂ и d обозначаютъ частныя и полныя дифференцированія по x_0, y_0 и z_0, или, принимая во вниманіе уравненія 276:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x_0}-\frac{\partial\Psi}{\partial z_0}\frac{\left(\frac{d\Psi}{dx_0}\right)}{\left(\frac{d\Psi}{dz_0}\right)}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (285)$$

и такимъ же образомъ

$$\frac{\partial\Psi}{\partial y_0}-\frac{\partial\Psi}{\partial z_0}\frac{\left(\frac{d\Psi}{dy_0}\right)}{\left(\frac{d\Psi}{dz_0}\right)}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (286).$$

Замѣчая, x_0, y_0 и z_0 входятъ только въ ϱ_0 и что

$$\frac{\partial\varrho_0}{\partial x_0}=\frac{1}{\lambda_0}\frac{x_i^{(n)}-x_0}{\varrho_{0,i}}=\alpha_{0,i}$$

$$\frac{\partial\varrho_0}{\partial y_0}=\frac{1}{\lambda_0}\frac{y_i^{(n)}-y_0}{\varrho_{0,i}}=\beta_{0,i}$$

$$\frac{\partial\varrho_0}{\partial z_0}=\frac{1}{\lambda_0}\frac{z_i^{(n)}-z_0}{\varrho_{0,i}}=\gamma_{0,i}$$

гдѣ $\alpha_{0,i}$, $\beta_{0,i}$ и $\gamma_{0,i}$ суть косинусы угловъ $\varrho_{0,i}$ съ осями, получимъ

$$\frac{\alpha_{0,i}}{\frac{d\Psi}{dx_0}} = \frac{\beta_{0,i}}{\frac{d\Psi}{dy_0}} = \frac{\gamma_{0,i}}{\frac{d\Psi}{dz_0}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (287)$$

послѣдняя формула указываетъ, что линія $\varrho_{0,i}$ дѣйствительно нормальна къ поверхности $\Psi = \text{const}$, что и требовалось доказать.

Лучъ и пучекъ свѣта.

§ 110. Ломаная линія $p\ p'_i\ p''_i \ldots p_i^{(n)}\ 0$, вдоль которой считается одна изъ наибольшихъ или наименьшихъ возможныхъ оптическихъ путей называется лучемъ свѣта, исходящимъ изъ точки p и достигающимъ послѣ претерпѣваемыхъ имъ на поверхностяхъ s', $s'' \ldots$ и $s^{(n)}$ преломленій и отраженій, точки 0.

Изслѣдуемъ видъ пучка лучей, проходящихъ черезъ точки поверхности волны, расположенныя на безконечно малой окружности, центръ которой находится въ точкѣ c (x_c, y_c, z_c). Для этого представимъ уравненіе поверхности подъ видомъ:

$$z_0 - f(x_0, y_0) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (288).$$

Если черезъ x, y и z обозначимъ текучія координаты, то уравненіе луча, проходящаго черезъ точку c, будетъ:

$$\frac{x_c - x}{\left(\frac{df}{dx_0}\right)_c} = \frac{y_c - y}{\left(\frac{df}{dy_0}\right)_c} = \frac{z_c - z}{\left(\frac{df}{dz_0}\right)_c}, \quad \ldots \quad (289)$$

а уравненія луча, проходящаго черезъ точку 0, получимъ, обозначивъ безконечно малыя величины $x_c - x_0$, $y_c - y_0$ и

$z_c - z_c$ черезъ ξ, η, ζ, подъ видомъ:

$$\frac{x_c+\xi-x}{\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)_c+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\partial x_0}\right)_c\xi+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y_0\partial x_0}\right)_c\eta+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_0\partial x_0}\right)_c\zeta}=$$

$$=\frac{y_c+\eta-y}{\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)_c+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\partial y_0}\right)_c\xi+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y_0\partial y_0}\right)_c\eta+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_0\partial y_0}\right)_c\zeta}=\frac{z_c+\xi-z}{1} \quad (290).$$

Помѣстивъ начало координатъ гдѣ либо на лучѣ, проходящемъ черезъ точку c, и направивъ ось z по этому лучу, получимъ, замѣчая, что въ этомъ случаѣ

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)_c=\left(\frac{\partial f}{\partial y_0}\right)_c=x_c=y_c=\zeta=0 \quad . \quad . \quad . \quad (291)$$

$$\frac{\xi-x}{r\xi+s\eta}=\frac{\eta-y}{s\xi+t\eta}=z_c-z, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (292)$$

гдѣ

$$r=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}\right)_c, \quad s=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y_0\partial x_0}\right)_c \text{ и } t=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}\right)_c \quad . \quad . \quad (293).$$

Чтобы найти уравненія сѣченія линейчатой поверхности, образуемой лучами, проходящими черезъ точки 0, лежащія на разстояніи R отъ точки c, плоскостью перпендикулярной къ лучу, проходящему черезъ точку c, положимъ

$$\xi=R\ Cos\ \varphi, \ \eta=R\ Sin\ \varphi \text{ и } z_c-z=h, \quad . \quad . \quad (294)$$

тогда уравненія 292 примутъ видъ:

$$\left.\begin{aligned}(1-rh)\ Cos\ \varphi-sh\ Sin\ \varphi&=\frac{x}{R}\\ sh\ Cos\ \varphi-(1-th)\ Sin\ \varphi&=\frac{y}{R}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (296).$$

Опредѣляя изъ этихъ уравненій $Cos\ \varphi$ и $Sin\varphi$, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} Cos\ \varphi &= \frac{1}{R}\ \frac{(1-th)\ x - shy}{(1-rh)\ (1-th) - s^2h^2} \\ \text{и} \qquad Sin\ \varphi &= \frac{1}{R}\ \frac{shx - (1-rh)y}{(1-rh).\ (1-th) - s^2h^2} \end{aligned}\right\} \quad . . \ (296).$$

Возвышая эти два равенства въ квадратъ и складывая, получимъ:

$$\left\{(1-th)^2+s^2h^2\right\}x^2-2sh\left\{2-(t+r)h\right\}xy+\left\{(1-rh)^2+s^2h^2\right\}y^2=$$

$$=R^2\left\{(1-rh)\,(1-th)-s^2h^2\right\}^2 \quad . \ . \ . \quad (297).$$

Уравненіе 297 даетъ искомую зависимость между x и y. Изъ вида уравненія и изъ того обстоятельства, что кривая искомаго сѣченія не имѣетъ безконечно удаленныхъ точекъ, мы заключаемъ, что она эллипсисъ, центръ котораго находится въ точкѣ $x=y=0$ и $z=z_c-h$, т. е. на лучѣ, проходящемъ черезъ точку c.

Если выбрать оси x и y параллельно линіямъ главныхъ кривизнъ поверхности волны въ точкѣ c, то, какъ извѣстно, $s=0$.

Въ этомъ случаѣ уравненія 296 напишутся такъ:

$$Cos\ \varphi=\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{(1-rh)} \text{ и } Sin\ \varphi=\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{(1-th)},$$

откуда:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

гдѣ

$$a=R\ (1-rh) \text{ и } b=R\ (1-th)$$

суть полуоси эллипсиса.

Для $h=\frac{1}{r}$ и $h=\frac{1}{t}$ эллипсисъ превращается въ пря-

мую, въ первомъ случаѣ параллельную оси y, а во второмъ— въ прямую, параллельную оси x.

Если лучъ, проходящій черезъ точку 0, встрѣчается съ лучемъ, проходящимъ черезъ точку c, то для какого либо значенія $z_c - z$ координаты x и y должны превратиться въ нули. Для того чтобы найти условія возможности этой встрѣчи, положимъ въ уравненіи 297, луча проходящаго черезъ точку 0, $x=0$ и $y=0$, тогда получимъ, исключивъ $z_i - z$,

$$s\xi^2 + (r-t)\ \xi\eta - s\eta^2 = 0\ , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (298)$$

или раздѣливъ на $s\eta^2$ и принимая во вниманіе равенство 294:

$$tang^2\ \varphi + \frac{r-t}{s}\ tang\ \varphi - 1 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (299)$$

откуда

$$tang\ \varphi = -\frac{r-t}{2s} \pm \sqrt{\frac{(r-t)^2}{4s} + 1} \quad . \quad . \quad (300).$$

Такъ какъ произведенія обоихъ значеній для тангенса равно (-1), то два угла φ, получаемые отсюда, отличаются на $\frac{\pi}{2}$. Отсюда мы видимъ, что только лучи, проходящіе черезъ четыре точки o_1, o_2, o_3, o_4 безконечно малой окружности, а именно точки, лежащія на концахъ двухъ взаимно перпендикулярныхъ діаметровъ, образующихъ углы:

$$\left.\begin{aligned} \varphi' &= arc.\ tg\ \left(\frac{r-t}{2s} + \sqrt{\frac{(s-t)^2}{4s} + 1}\right) \\ \text{и} \\ \varphi'' &= arc.\ tg\ \left(\frac{r-t}{2s} - \sqrt{\frac{(s-t)^2}{4s} + 1}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ (301)$$

съ осью x, встрѣчаютъ лучъ, проходящій черезъ точку c, остальные же лучи не встрѣчаютъ его вовсе.

Легко доказать, что точки o_1, o_2, o_3 и o_4 лежатъ на линіяхъ главныхъ кривизнъ поверхности волны въ точкѣ c.

Для этого удобнѣе всего выбрать оси x и y параллельно линіямъ кривизнъ поверхности волны. Тогда $s=0$ и уравненія 292 дадутъ, положивъ въ нихъ $x=y=s=0$:

$$(r-t)\ \xi\eta=0,\ (r-t)\ Cos\ \varphi\ Sin\ \varphi=1\ .\ .\quad (302).$$

Если $r \gtrless t$, то это условіе можетъ быть выполнено только тогда, когда

$$Cos\ \varphi=0 \text{ и } Sin\ \varphi=0,$$

т. е. когда точки o лежатъ или на одной, или на другой изъ линій кривизнъ.

Чтобы опредѣлить разстояніе $z_c - z$, на которомъ происходитъ встрѣча, воспользуемся опять уравненіемъ 292; изъ этого уравненія получимъ, положивъ $x=y=s=0$ для точекъ o_1 и o_3, лежащихъ въ плоскости xz, для которыхъ $\eta=0$:

$$z_c - z = \frac{1}{r}$$

и для точекъ o_2 и o_4, лежащихъ въ плоскости yz, для которыхъ $\xi=0$:

$$z_c - z = \frac{1}{t}.$$

Результаты эти очевидны сами собою, ибо встрѣча лучей, образующихъ разсмотрѣнную ранѣе линейчатую поверхность, можетъ происходить только тамъ, гдѣ сѣченіе ея плоскостью, перпендикулярной къ лучу, проходящему черезъ c, превращается въ линію, что случается на разстояніяхъ $\frac{1}{r}$ и $\frac{1}{t}$ отъ точки c.

Если $r - t = s = 0$, что имѣетъ мѣсто въ сферической точкѣ волновой поверхности, то поверхность, составленная лучами, проходящими черезъ точки 0, будетъ конусъ вращенія, основаніе котораго есть окружность, имѣющая центръ въ c и описанная радіусомъ R и лежащая въ поверхности волны, а вершина на лучѣ, проходящимъ черезъ c на разстояніи $\frac{1}{r} = \frac{1}{t}$ отъ точки c.

ОБОБЩЕНІЕ ЗАКОНОВЪ ДИФФРАКЦІИ.

§ 111. Разсмотримъ теперь тотъ случай, когда свѣтовыя колебанія, исходящія изъ точки 1, прежде чѣмъ достигнуть диффракціоннаго экрана, преломляются нѣсколькими поверхностями, отдѣляющими средины различной упругости.

Въ этомъ случаѣ отклоненіе $\overline{u}$ точекъ, принадлежащихъ плоскости экрана, мы получимъ при помощи формулъ

$$\overline{U} = C\ Cos\ [2\pi\ \Psi + \Delta + \Theta]$$

$$\overline{V} = C'\ Cos\ [2\pi\ \Psi + \Delta' + \Theta']$$

и

$$\overline{W} = C''\ Cos\ [2\pi\ \Psi + \Delta'' + \Theta''],$$

гдѣ $\Theta = -\frac{2\pi t}{T}$ и $\Delta = 2\pi\delta + \frac{1}{2}\pi h$, а двѣ другія получаются тѣмъ же самымъ путемъ.

Здѣсь C, C', C'', Θ, Θ', Θ'', Δ, Δ' и Δ'' суть функціи координатъ x, y и z, опредѣляющихъ положеніе точки на плоскости экрана, а Ψ есть наименьшій оптическій путь отъ точки 1 до точки (x, y, z).

Вспомнивъ (§ 19 и § 26), что

$$\bar{u} = \bar{u}'' = \frac{\partial \overline{W}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{V}}{\partial z},$$

получимъ:

$$\bar{u} = \frac{\partial C''}{\partial y} Cos[2\pi\ \Psi + \Delta'' + \Theta''] - 2\pi\, C'' \frac{\partial(\Psi + \Delta'')}{\partial y} Sin[2\pi\, \Psi + \Delta'' + \Theta'']$$

$$- \frac{\partial C'}{\partial z} Cos[2\pi\ \Psi + \Delta' + \Theta'] + 2\pi\, C' \frac{\partial(\Psi + \Delta')}{\partial z} Sin[2\pi\, \Psi + \Delta' + \Theta']$$

Разлагая синусы и косинусы отъ $2\pi\ \Psi + \Delta' + \Theta'$ и $2\pi\ \Psi + \Delta'' + \Theta''$, получимъ выраженіе вида:

$$\bar{u} = A\ Cos\ 2\pi\ (\Psi - \frac{t}{T}) + A'\ Sin\ 2\pi\ (\Psi - \frac{t}{T}),$$

отличающееся весьма незначительно отъ выраженія для u, даннаго въ § 76.

Вспомнивъ, что $\Psi . T = t$ гдѣ t, есть время, употребляемое свѣтомъ на прохожденіе отъ точки 1 до той точки плоскости экрана, для которой вычисляется отраженіе $\bar{u}$, какъ это слѣдуетъ изъ разсужденія, приведеннаго въ концѣ § 71, мы можемъ функцію $\bar{u}$ выразить такъ:

$$\bar{u}\ (x,\ y,\ z,\ t) = A\ Cos \frac{2\pi}{T} (t_1 - t) + A'\ Sin\ \frac{2\pi}{T} (t_1 - t).$$

Пусть a_0 есть скорость распространенія колебаній въ средѣ, въ которой лежитъ точка 0. Замѣтивъ, что тогда $\frac{r_0}{a_0}$ есть время t_0, въ теченіе котораго свѣтъ проходитъ отъ точки плоскости экрана до точки 0, мы получимъ, что

$$\frac{D}{Dn}\left(\frac{\overline{u}\,(x,\ y,\ z,\ t-\frac{r_0}{a_0})}{r_0}\right)=$$

$$-\frac{A}{r_0^2}\frac{\partial r_0}{\partial n}\,Cos\,\frac{2\pi}{T}\,(t_1+t_0-t)-\frac{A}{r_0}\frac{2\pi}{a_0T}\frac{\partial r_0}{\partial n}\,Sin\,\frac{2\pi}{T}\,(t_1+t_0-t)$$

$$-\frac{A'}{r_0^2}\frac{\partial r_0}{\partial n}\,Sin\,\frac{2\pi}{T}\,(t_1+t_0-t)+\frac{A'}{r_0}\frac{2\pi}{a_0T}\frac{\partial r_0}{\partial n}\,Cos\,\frac{2\pi}{T}\,(t_1+t_0-t)$$

и

$$\frac{1}{r_0}\,\overline{u}_n\,(x,\ y,\ z,\ t-\tfrac{r_0}{a_0})=$$

$$+\frac{1}{r_0}\frac{\partial A}{\partial n}\,Cos\,\frac{2\pi}{T}\,(t_1+t_0-t)-\frac{A}{r_0}\frac{2\pi}{T}\frac{\partial t_1}{\partial n}\,Sin\,\frac{2\pi}{T}\,(t_1+t_0-t)$$

$$+\frac{1}{r_0}\frac{\partial A'}{\partial n}\,Sin\,\frac{2\pi}{T}\,(t_1+t_0-t)+\frac{A'}{r_0}\frac{2\pi}{T}\frac{\partial t_1}{\partial n}\,Cos\,\frac{2\pi}{T}\,(t_1+t_0-t).$$

Пренебрегая членами, неимѣющими дѣлителемъ T и разсуждая какъ въ § 76, получимъ:

$$4\pi\ u\ (x_0,\ y_0,\ z_0,\ t)=$$

$$=\frac{2\pi}{T}\int\chi'\,Cos\,\frac{2\pi}{T}\,(t_1+t_0-t)\,ds-\frac{2\pi}{T}\int\chi\,Sin\,\frac{2\pi}{T}\,(t_1+t_0-t)\,ds,$$

гдѣ

$$\chi'=\frac{A'}{a_0r_0}\left(\frac{\partial r_0}{\partial n}-a_0\,\frac{\partial t_1}{\partial n}\right)\ \text{и}\ \chi=-\frac{A}{a_0r_0}\left(\frac{\partial r_0}{\partial n}-a_0\,\frac{\partial t_1}{\partial n}\right)$$

Интегрированіе въ формулѣ для u, какъ и въ формулѣ 201, слѣдуетъ распространить на всѣ отверстія и всю плоскость, служащую продолженіемъ экрана.

Разсуждая также, какъ и въ § 77 и замѣняя только въ этомъ разсужденіи фигурирующіе въ этомъ параграфѣ эллипсоиды вращенія поверхностями, для которыхъ t_1+t_0 имѣетъ нѣкоторое постоянное значеніе $\mathfrak{T}$, а точку пересѣ-

ченія линіи (0, 1) съ плоскостью экрана или отверстій, точкою прикосновенія съ этой плоскостью поверхности $t_1 + t_0 = \mathfrak{T}$, мы увидимъ, что χ и χ' можно принять постоянными и отклоненіе u выразить формулой:

$$u\ (x_0,\ y_0,\ z_0,\ t) =$$

$$= P\left\{(A'C - AS)\ Cos\ 2\pi\ \frac{t}{T} + (A'S + AC)\ Sin\ 2\pi\ \frac{t}{T}\right\},$$

гдѣ P есть нѣкоторая функція, зависящая отъ вида экрана и положенія точки 0 относительно экрана и свѣтящейся точки,

$$C = \int ds\ Cos\ \frac{2\pi}{T}\ (t_1 + t_0) \text{ и } S = \int ds\ Sin\ \frac{2\pi}{T}\ (t_1 + t_0),$$

или

$$C = \int ds\ Cos\ 2\pi\ \left(\frac{\bar{t}_1 + t_0}{T} + \frac{t_1 - \bar{t}_1}{T}\right),$$

$$S = \int ds\ Sin\ 2\pi\ \left(\frac{\bar{t}_1 + t_0}{T} + \frac{t_1 - \bar{t}_1}{T}\right),$$

гдѣ $\bar{t}_1$ есть время, въ теченіе котораго свѣтъ прошелъ бы путь отъ точки 1 до точки элемента экрана, если бы средина была однородная и при томъ такая, въ которой лежитъ точка 0.

Интегралы C и S можно еще написать такъ:

$$C = \int ds\ Cos\ \left\{\frac{2\pi}{\lambda_0}\ (r_1 + r_0) + \frac{t_1 - \bar{t}_1}{T}\right\}$$

и

$$S = \int ds\ Sin\ \left\{\frac{2\pi}{\lambda_0}\ (r_1 + r_0) + \frac{t_1 - \bar{t}_1}{T}\right\}$$

§ 112. Примѣнимъ полученный нами выводъ къ слѣдующему частному случаю. Представимъ себѣ, что мы имѣемъ нѣсколько одинаковыхъ отверстій и передъ ними стеклянныя пластинки. Освѣщеніе точки 0, лежащей за ними, можно будетъ вычислить при помощи слѣдующихъ интеграловъ:

$$C = \Sigma_i \iint Cos \left(\frac{\bar{t}_1 + t_0}{T} + \frac{t_1 - \bar{t}_1}{T} \right) 2\pi .\ dx\ dy$$

и

$$S = \Sigma_i \iint Sin \left(\frac{\bar{t}_1 + t_0}{T} + \frac{t_1 - \bar{t}_1}{T} \right) 2\pi .\ dx\ dy$$

гдѣ $dx\ dy$ элементъ i-таго отверстія на экранѣ, а $\bar{t}_1$ то время, которое бы употребилъ свѣтъ для прохожденія разстоянія отъ свѣтящейся точки 1 до элемента отверстія, если бы не было стеклянной пластинки. Назовемъ здѣсь $a\,(t_1 - \bar{t}_1)$ для отверстія i черезъ Θ_i, гдѣ a есть скорость распространенія свѣта въ воздухѣ и замѣтивъ, что $a.\,(\bar{t}_1 + t_0) = r_1 + r_0$, получимъ, какъ и въ § 88:

$$C = \Sigma_i \iint Cos \frac{2\pi}{\lambda} \left[(\alpha_1 - \alpha_0)(x' + a_i) + (\beta_1 - \beta_0)(y' + b_i) - \Theta_i \right] dx'\, dy'$$

$$S = \Sigma_i \iint Sin \frac{2\pi}{\lambda} \left[\alpha_1 - \alpha_0)(x' + a_i) + (\beta_1 - \beta_0)\ (y' + b_i) - \Theta_i \right] dx'\, dy',$$

гдѣ λ длина волны въ воздухѣ, а x', y', a_i, b_i, $\alpha_1 = \frac{x_1}{\varrho_1}$, $\beta_1 = \frac{y_1}{\varrho_1}$, $\alpha_0 = -\frac{x_0}{\varrho_0}$ и $\beta_0 = -\frac{y_0}{\varrho_0}$ имѣютъ тѣ же значенія, что и въ § 88. Теперь легко получить выраженіе C', S', $\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{f}$, они будутъ:

$$C' = \int dx'\, dy'\, Cos\, [(\alpha_1 - \alpha_0)\, x' + (\beta_1 - \beta_0)\, y'] \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$S' = \int dx'\, dy'\, Sin\, [(\alpha_1 - \alpha_0)\, x' + (\beta_1 - \beta_0)\, y'] \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\mathfrak{c} = \Sigma_i\, Cos\, [(\alpha_1 - \alpha_0)\, a_i + (\beta_1 - \beta_0)\, b_i - \Theta_i] \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\mathfrak{f} = \Sigma_i\, Sin\, [(\alpha_1 - \alpha_0)\, a_i + (\beta_1 - \beta_0)\, b_i - \Theta_i] \frac{2\pi}{\lambda}$$

§ 113. Если остановимся на случаѣ двухъ параллельныхъ щелей, изъ которыхъ только вторая покрыта стеклянной пластинкой, ограниченной параллельными плоскостями, то въ этомъ случаѣ $b_i = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = l$ и $\Theta_1 = 0$, и слѣдовательно:

$$\mathfrak{c} = 1 + Cos\, \frac{2\pi}{\lambda}\, [(\alpha_1 - \alpha_0)\, l - \Theta_2]$$

$$\mathfrak{f} = Sin\, \frac{2\pi}{\lambda}\, [(\alpha_1 - \alpha_0)\, l - \Theta_2]$$

и

$$J = (\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{f}^2)\, J_1,$$

или воспользовавшись значеніями, полученными для $\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{f}$.

$$J = 4 J_1\, Cos^2\, [(\alpha_1 - \alpha_1)\, l - \Theta_2] \frac{\pi}{\lambda},$$

гдѣ J_1 освѣщеніе въ точкѣ 0 въ случаѣ одного отверстія, незакрытаго стекломъ.

Вычислимъ Θ_2. Мы имѣемъ, что $\Theta_2 = a\ (t_1 - \bar{t_1})$; $t_1 = \frac{1A'}{a} + \frac{A'B}{a'}$ (черт. 13), слѣдовательно:

$$a t_1 = 1A' + \frac{a}{a'} A'B$$

и

$$\bar{a t} = 1A + AB$$

такъ что

$$\Theta_2 = \frac{a}{a'} A'B - AB.$$

Но по формулѣ 21:

$$\frac{a'}{a} = \frac{Sin\ \vartheta}{Sin\ \vartheta'} = n,$$

показателю преломленія изъ воздуха въ стекло, гдѣ $\vartheta = \angle PA'1$ есть уголъ паденія, а $\vartheta' = \angle P'BA'$ уголъ преломленія, кромѣ того изъ чертёжа имѣемъ, что

$$A'B = \frac{D}{Cos\ \vartheta'},$$

гдѣ D толщина пластинки и

$$AB = A'B\ Cos \angle A'BA;$$

но уголъ $P'BA$ можно, вслѣдствіе отдаленности точки 1, принять равнымъ углу ϑ, такъ что $A'BA = \vartheta - \vartheta'$ и слѣдовательно

$$\Theta_2 = \frac{D}{Cos\ \vartheta'}\ [n - Cos\ (\vartheta - \vartheta')]$$

или

$$\Theta_2 = \frac{D}{Cos\ \vartheta'}\left[\frac{Sin\ \vartheta}{Sin\ \vartheta'} - Cos\ \vartheta\ Cos\ \vartheta' - Sin\ \vartheta\ Sin\ \vartheta'\right] =$$

$$= \frac{D}{Cos\ \vartheta'}\left[\frac{Sin\ \vartheta - Sin\ \vartheta\ Sin^2\vartheta' - Cos\ \vartheta\ Cos\ \vartheta'\ Sin\ \vartheta'}{Sin\ \vartheta'}\right]$$

$$= \frac{D}{Cos\ \vartheta'}\left[\frac{Sin\ \vartheta\ Cos^2\ \vartheta' - Cos\ \vartheta\ Cos\ \vartheta'\ Sin\ \vartheta'}{Sin\ \vartheta'}\right]$$

и наконецъ

$$\Theta_2 = D\ [n\ Cos\ \vartheta' - Cos\ \vartheta].$$

Вычисливъ Θ_2, мы можемъ вычислить c и f, а слѣдовательно и J.

Для прямоугольныхъ отверстій мы имѣемъ, что

$$J_1 = Const\left\{\frac{Sin\ \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha_1 - \alpha_0)\ a}{\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha_1 - \alpha_0)\ a}\right\}^2 \cdot \left\{\frac{Sin\ \frac{2\pi}{\lambda}(\beta_1 - \beta_0)\ b}{\frac{2\pi}{\lambda}(\beta_1 - \beta_0)\ b}\right\}^2,$$

и, если источникъ свѣта есть линія параллельная оси y а отверстія суть щели, тоже параллельныя оси y, то

$$J_1 = Const \left\{ \frac{Sin \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha_1 - \alpha_0)\, a}{\frac{2\pi}{\lambda} (\alpha_1 - \alpha_0)\, a} \right\}^2$$

и тогда

$$J = Const \left\{ \frac{Sin \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha_1 - \alpha_0)\, a}{\frac{2\pi}{\lambda} (\alpha_1 - \alpha_0)\, a} \right\}^2 Cos^2 \left[(\alpha_1 - \alpha) - \Theta_2 \right] \frac{\pi}{\lambda}.$$

О НАПРЯЖЕНІИ И ФАЗѢ ОТРАЖЕННАГО И ПРЕЛОМЛЕННАГО ЛУЧА.

§ 114. Свѣтовое движеніе въ двухъ соприкасающихся срединахъ должно въ каждой изъ нихъ удовлетворять извѣстнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{k}{\mu}\Delta u;\quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{k}{\mu}\Delta u;\quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{k}{\mu}\Delta w;\quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2}=\frac{k'}{\mu'}\Delta u';\quad \frac{\partial^2 v'}{\partial t^2}=\frac{k'}{\mu'}\Delta v';\quad \frac{\partial^2 w'}{\partial t^2}=\frac{k'}{\mu'}\Delta w';\quad \frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}=0.$$

Также несомнѣнно, что для $z=0$ на границѣ обѣихъ срединъ, которую мы примемъ за плоскость xy, должны имѣть мѣсто слѣдующія условія

$$u=u',\qquad v=v',\qquad w=w'$$

$$X_z=X'_z,\quad Y_z=Y'_z,\quad Z_z=Z'_z.$$

Разсмотримъ простѣйшій случай плоской волны. Въ первой средѣ, въ которой находится источникъ свѣта, мы будемъ имѣть двѣ системы волнъ: — падающую и отраженную, а потому и перемѣщенія u, v и w состоятъ изъ двухъ частей, такъ что

$$u=u_e+u_r,\quad v=v_e+v_r,\quad w=w_e+w_r,$$

гдѣ значки e и r относятся къ падающему и отраженному

волненіямъ. Нашимъ дифференціальнымъ уравненіямъ можно удовлетворить слѣдующею системою выраженій для отношеній. Въ первой срединѣ положимъ

$$u_e = \alpha_e Sin\left(\frac{lx+my+nz}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi,$$

$$v_e = \beta_e Sin\left(\frac{lx+my+nz}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi,$$

$$w_e = \gamma_e Sin\left(\frac{lx+my+nz}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi,$$

$$u_r = R\alpha_r Sin\left(\frac{lx+my-nz}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi,$$

$$v_r = R\beta_r Sin\left(\frac{lx+my-nz}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi,$$

$$w_r = R\gamma_r Sin\left(\frac{lx+my-nz}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi,$$

гдѣ l, m, n суть косинусы угловъ, образуемыхъ нормалью къ падающей волнѣ съ осями, α_e, β_e, γ_e — косинусы угловъ, которые образуетъ съ осями направленіе перемѣщенія частицы, и такъ какъ они лежатъ въ плоскости волны, то между l, m, n и α_e, β_e, γ_e должна быть слѣдующая зависимость

$$\alpha_e l + \beta_e m + \gamma_e n = 0;$$

$\lambda = T\sqrt{\frac{k}{\mu}}$ есть длина волны, а T періодъ колебанія.

Далѣе, R есть амплитуда отраженнаго свѣта, l, m и $(-n)$ суть косинусы угловъ нормали къ преломленной волнѣ съ осями, α_r, β_r, γ_r — косинусы угловъ отклоненія въ отраженномъ волненіи съ осями, такъ что

$$\alpha_r l + \beta_r m + \gamma_r n = 0.$$

Во второй срединѣ положимъ

$$u' = D\,\alpha'\,Sin\left(\frac{l'x+m'y+n'z}{\lambda'} - \frac{t}{T}\right)2\,\pi,$$

$$v' = D\,\beta'\,Sin\left(\frac{l'x+m'y+n'z}{\lambda'} - \frac{t}{T}\right)2\,\pi,$$

$$w' = D\,\gamma'\,Sin\left(\frac{l'x+m'y+n'z}{\lambda'} - \frac{t}{T}\right)2\,\pi.$$

Здѣсь D есть амплитуда колебаній во второй срединѣ, l', m' и n' — косинусы угловъ, которые образуетъ нормаль къ преломленной волнѣ съ осями, α', β' и γ' — косинусы угловъ, которые образуютъ отклоненія во второй срединѣ съ осями, такъ что

$$\alpha'l' + \beta'm' + \gamma'n' = 0.$$

Наконецъ $\lambda' = T\sqrt{\frac{k'}{\mu'}}$ есть длина волны во второй срединѣ.

Въ силу закона преломленій мы имѣемъ еще слѣдующія соотношенія

$$\frac{l'}{\lambda'} = \frac{l}{\lambda},\quad \frac{m'}{\lambda'} = \frac{m}{\lambda}\ \text{(смотри форм. 191).}$$

дѣйствительно, эти выраженія удовлетворяютъ даннымъ дифференціальнымъ уравненіямъ и кромѣ того для $z=0$ аргументы синусовъ въ этихъ выраженіяхъ тождественны, такъ что намъ придется выбрать значенія постоянныхъ R, D и двухъ изъ шести косинусовъ α_r, β_r, γ_r, α', β' и γ', между которыми уже существуютъ четыре условія

$$\alpha^2_r + \beta^2_r + \gamma^2_r = 1\,,\qquad \alpha_r l + \beta_r m + \gamma_r n = 0$$

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1 \quad \text{и} \quad \alpha'l' + \beta'm' + \gamma'n' = 0$$

такъ, чтобы удовлетворить и условіямъ при $z=0$.

Но этихъ условій шесть, а въ нашемъ распоряженіи находится только четыре произвольныхъ величины, поэтому задача наша вообще невозможна.

Изъ этого затрудненія старались выйти различными путями, между прочимъ допущеніемъ продольныхъ колебаній. Приведемъ здѣсь допущеніе Кирхгофа. Онъ предполагаетъ, что разности

$$X_z - X'_z = \Xi,\ Y_z - Y'_z = H \text{ и } Z - Z'_z = Z$$

не равны нулю, а представляютъ нѣкоторыя силы, дѣйствующія на поверхности, раздѣляющей двѣ средины и, подобно силамъ капиллярнымъ, не обнаруживающимся внутри тѣлъ.

Относительно этихъ силъ онъ предполагаетъ, что работа ихъ при перемѣщеніи частицы эфира равна нулю, то есть что

$$dxdydz\left\{\Xi\frac{\partial u}{\partial t}+H\frac{\partial v}{\partial t}+Z\frac{\partial w}{\partial t}\right\}=0 \quad . \quad . \quad (303)$$

Присовокупляя къ этому условію еще и то, что при $z=0$

$$u=u',\ v=v' \text{ и } w=w', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (304)$$

мы будемъ имѣть четыре условія для опредѣленія четырехъ изъ названныхъ величинъ. Чтобы воспользоваться этими условіями, замѣтимъ, что по изложенному въ § 15

$$X_z=-k\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right) \qquad X'_z=-k'\left(\frac{\partial w'}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$Y_z=-k\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right) \qquad Y'_z=-k\left(\frac{\partial w'}{\partial y}+\frac{\partial v'}{\partial z}\right)$$

$$Z_z=-2k\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)=2k\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right) \quad Z'_z=2k'\left(\frac{\partial w'}{\partial z}\right)=2k'\left(\frac{\partial u'}{\partial z}+\frac{\partial v'}{\partial y}\right).$$

Если внесемъ эти выраженія для силъ въ условіе (303), примемъ въ соображеніе, что для поверхности $z=0$

$$\frac{u}{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)}=\frac{v}{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)}=\frac{w}{\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)}=\frac{u'}{\left(\frac{\partial u'}{\partial t}\right)}=\frac{v'}{\left(\frac{\partial v'}{\partial t}\right)}=\frac{w'}{\left(\frac{\partial w'}{\partial t}\right)}=$$

$$=\operatorname{tang}\left(\frac{lx+my}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)2\pi=\operatorname{tang}\left(\frac{l'x+m'y}{\lambda'}-\frac{t}{T}\right)2\pi$$

и замѣнимъ

$$\frac{\partial u}{\partial t},\ \frac{\partial v}{\partial t},\ \frac{\partial w}{\partial t},\ \frac{\partial u'}{\partial t},\ \frac{\partial v'}{\partial t},\ \frac{\partial w'}{\partial t}$$

пропорціональными имъ величинами u, v, w, w' v', и w', то получимъ:

$$k\left[u\frac{\partial w}{\partial x}-w\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}-w\frac{\partial v}{\partial y}+u\frac{\partial u}{\partial z}-w\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial z}-w\frac{\partial v}{\partial y}\right]=$$

$$=k'\left[u'\frac{\partial w'}{\partial x}-w'\frac{\partial u'}{\partial x}+v'\frac{\partial w'}{\partial y}-w'\frac{\partial v'}{\partial y}+u'\frac{\partial u'}{\partial z}-w'\frac{\partial u'}{\partial x}+v'\frac{\partial v'}{\partial z}-w'\frac{\partial v'}{\partial y}\right];$$

но изъ выраженій для u, v и w мы видѣли, что для $z=0$ $\frac{u}{w}$ и $\frac{v}{w}$ постоянныя величины, такъ что производныя этихъ частныхъ для $z=0$ равны нулю, откуда

$$u\frac{\partial w}{\partial x}-w\frac{\partial u}{\partial x}=0\quad\text{и}\quad v\frac{\partial w}{\partial y}-w\frac{\partial v}{\partial y}=0\quad(\text{для } z=0).$$

Точно также найдемъ, что

$$u'\frac{\partial w'}{\partial x}-w'\frac{\partial u'}{\partial x}=0\quad\text{и}\quad v'\frac{\partial w'}{\partial y}-w'\frac{\partial v'}{\partial y}=0\quad(\text{для } z=0).$$

При помощи этихъ соотношеній условіе (303) приводится къ болѣе простому виду:

$$k\left(u\frac{\partial u}{\partial z}-u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial z}-v\frac{\partial w}{\partial y}\right)=k\left(u'\frac{\partial u'}{\partial z}-u'\frac{\partial w'}{\partial x}+v'\frac{\partial v'}{\partial z}-v'\frac{\partial w'}{\partial y}\right),$$

или:

$$k\left[u\left\{\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right\}+v\left\{\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right\}\right]=$$

$$=k'\left[u'\left\{\frac{\partial u'}{\partial z}-\frac{\partial w'}{\partial x}\right\}+v'\left\{\frac{\partial v'}{\partial z}-\frac{\partial w'}{\partial y}\right\}\right],$$

откуда:

$$0=u'\left[k\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)-k'\left(\frac{\partial u'}{\partial z}-\frac{\partial w'}{\partial x}\right)\right]+$$

$$+v'\left[k\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right)-k'\left(\frac{\partial v'}{\partial z}-\frac{\partial w'}{\partial y}\right)\right] \quad . \quad . \quad . \quad (305)$$

Положивъ въ этомъ уравненіи:

$$k\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)-k'\left(\frac{\partial u'}{\partial z}-\frac{\partial w'}{\partial x}\right)=A$$

$$k\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right)-k'\left(\frac{\partial v'}{\partial z}-\frac{\partial w'}{\partial y}\right)=B,$$

мы можемъ его написать такъ:

$$u'A+v'B=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (306)$$

Положивъ, какъ это сдѣлалъ Нейманъ, что плотность въ обѣихъ срединахъ одинакова, примемъ ее за единицу; тогда:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=k\Delta w=k\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right]$$

и

$$\frac{\partial^2 w'}{\partial t^2}=k'\Delta w'=k'\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w'}{\partial x}-\frac{\partial u'}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u'}{\partial y}-\frac{\partial v'}{\partial z}\right)\right].$$

Для $z=0$, w' постоянно равно w, а потому

$$\frac{\partial^2 w'}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Вычитая выраженіе для $\frac{\partial^2 w'}{\partial t^2}$ изъ выраженія $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$, получимъ

$$\frac{\partial A}{\partial x}-\frac{\partial B}{\partial y}=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (307)$$

Вставляя сюда вмѣсто u, v и w и u', v' и w' ихъ значенія, и воспользовавшись тѣмъ, что $\frac{l}{\lambda}=\frac{l'}{\lambda'}$ и $\frac{m}{\lambda}=\frac{m'}{\lambda'}$, замѣчаемъ, что для $z=0$

$$A=\left[\frac{k}{\lambda}\left\{(\alpha_e\, n-\gamma_e\, l)+R\,(-\alpha_r\, n-\gamma_r\, l)\right\}-\right.$$
$$\left.-\frac{\lambda'}{k'}D\,(\alpha'\,n'-\gamma'\,l')\right]Cos\left(\frac{xl'+ym'}{\lambda'}-\frac{t}{T}\right)2\pi$$

$$B=\left[\frac{k}{\lambda}\left\{(\beta_e\, n-\gamma_e\, m)+R\,(-\beta_r\, n-\gamma_r\, m)\right\}-\right.$$
$$\left.-\frac{k'}{\lambda'}D\,(\beta'\,n'-\gamma'\,m')\right]Cos\left(\frac{xl'+ym'}{\lambda'}-\frac{t}{T}\right)2\pi,$$

такъ что

$$\frac{dA}{dx}=-\,l'\,A\,tang\left(\frac{xl'+y'\,m'}{\lambda'}-\frac{t}{T}\right)2\pi$$

$$\frac{dB}{dy}=-\,m'\,B\,tang\left(\frac{xl'+ym'}{\lambda'}-\frac{t}{T}\right)2\pi$$

и равенство (307) превратится въ слѣдующее

$$l'A+m'B=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (308)$$

Равенства (306) и (307) могутъ быть совмѣстными или въ томъ случаѣ, если

$$A=0, \quad \text{и} \quad B=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (309)$$

то есть когда вращеніе частицъ, лежащихъ близъ поверхности около оси y и около оси x равны, или когда

$$l'\,v'-m'\,u'=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (310)$$

то есть когда колебанія совершаются перпендикулярно къ плоскости паденія.

Изъ предъидущаго мы видимъ, что

$$\Xi=-\,k\left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right)+k'\left(\frac{dw'}{dx}+\frac{du'}{dz}\right).$$

Вычитая отсюда равенство $0 = A$, справедливое на поверхности раздѣла и замѣчая, что на этой поверхности $\frac{\partial w'}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}$, такъ какъ на протяженіи всей этой поверхности $w' = w$, получимъ:

$$\Xi = -2(k - k')\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Подобнымъ же образомъ получимъ

$$H = -2(k - k')\frac{\partial w}{\partial y}$$

и

$$Z = -2k\frac{\partial w}{\partial z} - 2k'\frac{\partial w'}{\partial z}.$$

§ 115. Разсмотримъ теперь частный случай, когда колебанія совершаются въ плоскости паденія, которую примемъ за плоскость xz.

Назвавъ черезъ φ уголъ паденія, а чрезъ φ' уголъ преломленія, будемъ имѣть:

$l = Sin\,\varphi$	$m = 0$	$n = Cos\,\varphi$
$l' = Sin\,\varphi'$	$m' = 0$	$n' = Cos\,\varphi'$
$\alpha_e = \pm Cos\,\varphi$	$\beta_e = 0$	$\gamma_e = \mp Sin\,\varphi$
$\alpha_r = \pm Cos\,\varphi$	$\beta_r = 0$	$\gamma_r = \pm Sin\,\varphi$
$\alpha' = \pm Cos\,\varphi'$	$\beta' = 0$	$\gamma' = \mp Sin\,\varphi'$

откуда, принимая первый знакъ, получимъ

$$u_e = Cos\,\varphi.\,Sin\left(\frac{x\,Sin\,\varphi + z\,Cos\,\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi$$

$$v_e = 0$$

$$w_e = -Sin\,\varphi.\,Sin\left(\frac{x\,Sin\,\varphi + z\,Cos\,\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi$$

$$u_r = R.\ Cos\ \varphi.\ Sin\ \left(\frac{x\ Sin\ \varphi - z\ Cos\ \varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi$$

$$v_r = 0$$

$$w_r = R.\ Sin\ \varphi.\ Sin\ \left(\frac{x\ S\varphi - z\ Cos\ \varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi$$

$$u' = D.\ Cos\ \varphi'.\ Sin\ \left(\frac{x\ Sin\ \varphi' + z\ Cos\ \varphi'}{\lambda'} - \frac{t}{T}\right) 2\pi$$

$$v' = 0$$

$$w' = -\ D.\ Sin\ \varphi'.\ Sin\ \left(\frac{x\ Sin\ \varphi' + z\ Cos\ \varphi'}{\lambda'} - \frac{t}{T}\right) 2\pi.$$

Для опредѣленія постоянныхъ, мы будемъ имѣть изъ уравненія (304)

$$(1+R)\ Cos\ \varphi = D\ Cos\ \varphi' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (311)$$

$$(1-R)\ Sin\ \varphi = D\ Sin\ \varphi' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (312)$$

а изъ условій (309), изъ которыхъ второе удовлетворяется тождественно, такъ какъ w и w' не зависятъ отъ y, а $v = v' = 0$, мы будемъ имѣть:

$$\frac{k}{\lambda}(1-R) = \frac{k'}{\lambda'} D. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (313)$$

но это послѣднее уравненіе есть слѣдствіе уравненія (312) и соотношенія

$$\frac{k}{k'} = \frac{\lambda^2}{\lambda'^2} = \frac{Sin^2\varphi}{Sin^2\varphi'}.$$

Такимъ образомъ мы имѣемъ для опредѣленія R и D два уравненія 311 и 312, изъ которыхъ получимъ

$$R = \frac{Sin\,(\varphi - \varphi')}{Sin\,(\varphi + \varphi')} \quad \text{и} \quad D = \frac{Sin\,2\varphi}{Sin\,(\varphi + \varphi')} \quad . \quad . \quad . \quad (314)$$

§ 116. Разсмотримъ теперь случай, когда колебанія перпендикулярны къ полости паденія.

Въ этомъ случаѣ

$l = Sin\,\varphi$	$m = 0$	$n = Cos\,\varphi$
$l' = Sin\,\varphi'$	$m' = 0$	$n' = Cos\,\varphi'$
$\alpha_e = 0$	$\beta_e = \pm 1$	$\gamma_e = 0$
$\alpha_r = 0$	$\beta_r = \pm$	$\gamma_r = 0$
$\alpha' = 0$	$\beta' = \pm$	$\gamma' = 0$

откуда:

$$u_e = 0$$

$$v_e = Sin\,\left(\frac{x\,Sin\,\varphi + z\,Cos\,\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi$$

$$w_e = 0$$

$$u_r = 0$$

$$v_r = R.\,Sin\,\left(\frac{x\,Sin\,\varphi - z\,Cos\,\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi$$

$$w_r = 0$$

$$u' = 0$$

$$v' = D.\,Sin\,\left(\frac{x\,Sin\,\varphi' + z\,Cos\,\varphi'}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi$$

$$w' = 0.$$

Условіе 305, независимое еще отъ предположеній Неймана относительно плотности, приметъ слѣдующій видъ:

$$k\,\frac{\partial v}{\partial z} = k'\,\frac{\partial v'}{\partial z}$$

или:

$$(1-R)\,\frac{k}{\lambda}\,Cos\,\varphi = D\,\frac{k'}{\lambda'}\,Cos\,\varphi'.$$

Но такъ какъ $\frac{\lambda}{Sin\,\varphi} = \frac{\lambda'}{Sin\,\varphi'}$, то эти условія можно написать слѣдующимъ образомъ:

$$(1-R)\,k\,Cotg\,\varphi = D\,k'\,Cotg\,\varphi' \quad . \quad . \quad . \quad (315)$$

или, вспомнивъ, что

$$\frac{\lambda}{T} = \sqrt{\frac{k}{\mu}} \quad \text{и} \quad \frac{\lambda'}{T} = \sqrt{\frac{k'}{\mu'}},$$

откуда

$$\frac{k}{k'} = \frac{\mu}{\mu'} \cdot \frac{\lambda^2}{\lambda'^2} = \frac{\mu}{\mu'} \cdot \frac{Sin^2\,\varphi}{Sin^2\,\varphi'},$$

дадимъ нашему уравненію еще слѣдующую форму

$$\mu\,Cos\,\varphi\,Sin\,\varphi\,(1-R) = \mu'\,Cos\,\varphi'\,Sin\,\varphi'\,D \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (316)$$

Условіе (304) дастъ намъ, что

$$1 + R = D \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (317)$$

Изъ формулъ (315), (316) и (317) получимъ для опредѣленія R формулу

$$\frac{1-R}{1+R} = \frac{k'}{k} \cdot \frac{Cotg\,\varphi'}{Cotg\,\varphi} = \frac{\mu'}{\mu} \cdot \frac{Cos\,\varphi'\,Sin\,\varphi'}{Cos\,\varphi\,Sin\,\varphi},$$

откуда:

$$R = \frac{k\,Cotg\,\varphi - k'\,Cotg\,\varphi'}{k\,Cotg\,\varphi + k'\,Cotg\,\varphi'} = \frac{\mu\,Sin\,\varphi\,Cos\,\varphi - \mu'\,Sin\,\varphi'\,Cos\,\varphi'}{\mu\,Sin\,\varphi\,Cos\,\varphi + \mu'\,Sin\,\varphi'\,Cos\,\varphi'} \quad . \quad (318)$$

Если положимъ здѣсь, какъ и раньше, $\mu = \mu'$, то

$$R = \frac{Sin\ 2\varphi - Sin\ 2\varphi'}{Sin\ 2\varphi + Sin\ 2\varphi'} = \frac{Sin\ [(\varphi+\varphi') + (\varphi-\varphi')] - Sin\ [(\varphi+\varphi') - (\varphi-\varphi')]}{Sin\ [(\varphi+\varphi') + (\varphi-\varphi')] + Sin\ [(\varphi+\varphi') - (\varphi-\varphi')]}$$

$$= \frac{Cos\ (\varphi+\varphi')\ Sin\ (\varphi-\varphi')}{Cos\ (\varphi-\varphi')\ Sin\ (\varphi+\varphi')}$$

такъ что окончательно

$$R = \frac{tg\ (\varphi - \varphi')}{tg\ (\varphi + \varphi')} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (319)$$

и

$$D = \frac{2\ Sin\ 2\varphi}{Sin\ 2\varphi + Sin\ 2\varphi'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (320)$$

Если же положимъ, по Френелю, $k = k'$, то получимъ

$$R = \frac{Sin\ (\varphi - \varphi')}{Sin\ (\varphi + \varphi')}$$

По экспериментальнымъ законамъ Френеля мы имѣемъ, что для амплитуды отраженнаго луча,

1) когда плоскость поляризаціи параллельна плоскости паденія

$$R = \frac{Sin\ (\varphi - \varphi')}{Sin\ (\varphi + \varphi')}\ ,$$

2) когда плоскость поляризаціи перпендикулярна къ плоскости паденія

$$R = \frac{tang\ (\varphi - \varphi')}{tang\ (\varphi + \varphi')}\ .$$

Изъ этого слѣдуетъ, что допущеніе $\mu = \mu'$ равносильно тому допущенію, что колебанія совершаются въ плоскости поляризаціи, а допущеніе, что $k = k'$ равносильно допу-

щенію, что колебанія происходятъ въ плоскости, перпендикулярной къ плоскости поляризаціи.

§ 117. Полное внутреннее отраженіе происходитъ тогда, когда $\lambda' > \lambda$ и уголъ паденія φ таковъ, что $\frac{\lambda'}{\lambda} Sin\,\varphi > 1$.

Явленіе состоитъ въ томъ, что яркость отраженнаго луча равна яркости луча падающаго, но фаза его другая, а преломленный лучъ быстро поглощается.

Въ томъ случаѣ, когда колебанія происходятъ въ плоскости паденія, дифференціальнымъ уравненіямъ движенія можно удовлетворить, положивъ:

$$u_e = Cos\,\varphi\, Sin\left(\frac{x\,Sin\,\varphi + z\,Cos\,\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi$$

$$v_e = 0$$

$$w_e = -\,Sin\,\varphi\, Sin\left(\frac{x\,Sin\,\varphi + z\,Cos\,\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi$$

$$u_r = R\,Cos\,\varphi\, Sin\left\{\left(\frac{x\,Sin\,\varphi - z\,Cos\,\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi + \delta\right\}$$

$$v_r = 0$$

$$w_r = R\,Sin\,\varphi\, Sin\left\{\left(\frac{x\,Sin\,\varphi - z\,Cos\,\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi + \delta\right\}$$

$$u' = D\,\frac{Cos\,\varphi'}{\sqrt{-1}}\, e^{-\frac{z}{\lambda'}\frac{Cos\,\varphi'}{\sqrt{-1}}2\pi}\, Sin\left\{\left(\frac{x\,Sin\,\varphi'}{\lambda'} - \frac{t}{T}\right) 2\pi + \delta'\right\}$$

$$v' = 0$$

$$w' = D\,Sin\,\varphi' e^{-\frac{z}{\lambda'}\frac{Cos\,\varphi'}{\sqrt{-1}}2\pi}\, Cos\left\{\left(\frac{x\,Sin\,\varphi'}{\lambda'} - \frac{t}{T}\right) 2\pi + \delta'\right\}$$

гдѣ:

$$Sin\,\varphi' = \frac{\lambda}{\lambda'}\,Sin\,\varphi,\quad Cos\,\varphi' = \sqrt{-1}\,\sqrt{Sin^2\,\varphi' - 1}.$$

Условія

$$u_e + u_r = u' \text{ и } w_e + w_r = w' \text{ при } z = 0,$$

которыя должны быть справедливы для всякаго t, даютъ для опредѣленія R и δ слѣдующія уравненія

$$\left.\begin{aligned} &Cos\,\varphi\,(1 + R\,Cos\,\delta) = \frac{Cos\,\varphi'}{\sqrt{-1}}\,.\;D.\,Cos\,\delta' \\ &Cos\,\varphi.\;R.\;Sin\,\delta = \frac{Cos\,\varphi'}{\sqrt{-1}}\,.\;D.\,Sin\,\delta'. \\ &Sin\,\varphi\,(1 - R\,Cos\,\delta) = Sin\,\varphi'.\;D.\,Sin\,\delta' \\ &Sin\,\varphi.\;R.\;Sin\,\delta = Sin\,\varphi'\;\;D.\,Cos\,\delta'. \end{aligned}\right\} \ldots\ 321$$

Второе изъ условій (309) будетъ удовлетворено тождественно, а первое вмѣстѣ съ соотношеніями $Sin\,\varphi' = \frac{\lambda'}{\lambda}.\;Sin\,\varphi$ дастъ два условія тождественныя съ третьимъ и четвертымъ изъ полученныхъ уже условій (321).

Раздѣливъ произведеніе перваго и третьяго уравненій (321) на произведеніе втораго и четвертаго, получимъ.

$$\frac{1 - R^2\,Cos^2\,\varrho}{R^2\,Sin^2\,\varrho} = 1, \text{ откуда } R = 1.$$

Перемноживъ результаты дѣленія третьяго изъ тѣхъ же уравненій на второе и четвертаго на первое, получимъ

$$tang\,\frac{\delta}{2} = \frac{Sin\,\varphi'}{\left(\frac{Cos\,\varphi'}{\sqrt{-1}}\right)}\,.\;Cotang\,\varphi.$$

Въ томъ случаѣ, когда колебанія совершаются перпендикулярно къ плоскости паденія, мы удовлетворимъ дифференціальнымъ уравненіямъ упругости, положивъ

$$u_e = 0$$

$$v_e = Sin\ \left(\frac{x\ Sin\ \varphi + z\ Cos\ \varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi$$

$$w_e = 0$$

$$u_r = 0$$

$$v_r = R\ Sin\ \left\{\left(\frac{x\ Sin\ \varphi - z\ Cos\ \varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) + \delta\right\}$$

$$w_r = 0$$

$$u' = 0$$

$$v' = De^{-\frac{z}{\lambda'}\frac{Cos\ \varphi'}{\sqrt{-1}}\ 2\pi}\ Sin\ \left\{\left(\frac{x\ Sin\ \varphi'}{\lambda'} - \frac{t}{T}\right) + \delta'\right\}$$

$$w' = 0.$$

Условіе

$$v_e + v_r = v' \text{ при } z = 0,$$

которое должно быть справедливо для всякаго t, дастъ для опредѣленія R и δ слѣдующія уравненія

$$1 + R\ Cos\ \delta = D\ Cos\ \delta'$$

$$R\ Sin\ \delta = D\ Sin\ \delta'$$

кромѣ того, изъ условія

$$k\ \frac{\partial v}{\partial z} = k'\ \frac{\partial v'}{\partial z} \text{ для } z = 0\ ,$$

вытекающаго изъ уравненія (305), получимъ еще два уравненія

$$\frac{k}{\lambda}\ Cos\ \varphi\ (1 - R\ Cos\ \delta) = -\frac{k'}{\lambda'}.\ \frac{Cos\ \varphi'}{\sqrt{-1}}.\ D.\ Sin\ \delta'$$

$$-\frac{k}{\lambda}\ Cos\ \varphi\ R\ Sin\ \delta = \frac{k'}{\lambda'}.\ \frac{Cos\ \varphi'}{\sqrt{-1}}.\ D.\ Cos\ \delta'$$

или замѣняя k и k' пропорціональными имъ величинами $Sin^2\varphi$ и $Sin^2\varphi'$, и вспомнивъ что $\frac{Sin\,\varphi}{\lambda} = \frac{Sin\,\varphi'}{\lambda'}$,

$$Sin\,\varphi.\ Cos\,\varphi\ (1 - R\ Cos\,\delta') = -Sin\,\varphi'\ \frac{Cos\,\varphi'}{\sqrt{-1}}.\ D\ \ Sin\,\delta''$$

$$-Sin\,\varphi.\ Cos\,\varphi\ \ R.\ Sin\,\delta' = Sin\,\varphi'\ \frac{Cos\,\varphi'}{\sqrt{-1}}.\ D.\ Cos\delta''.$$

Изъ полученныхъ четырехъ уравненій получимъ такъ же, какъ и въ предъидущемъ случаѣ

$$R = 1 \text{ и } tang\ \frac{\delta}{2} = \frac{Sin\,\varphi'\ \frac{Cos\,\varphi'}{\sqrt{-1}}}{Sin\,\varphi.\ Cos\,\varphi}.$$

§ 118 Сведемъ полученные нами результаты. Означимъ черезъ r_p амплитуду отраженнаго луча для того случая, когда колебаніе совершаются въ плоскости паденія, а черезъ r_s амплитуду отраженнаго луча для того случая, когда колебанія перпендикулярны къ плоскости паденія.

Точно также черезъ d_p и d_s назовемъ амплитуды преломленныхъ лучей для этихъ двухъ случаевъ; тогда

a) для неполнаго отраженія:

$$r_p = \frac{Sin\,(\varphi - \varphi')}{Sin\,(\varphi + \varphi')},\quad r_s = \frac{tang\,(\varphi - \varphi')}{tang\,(\varphi + \varphi')}$$

$$d_p = \frac{Sin\ 2\varphi}{Sin\,(\varphi + \varphi')},\quad d_s = \frac{2\ Sin\ 2\varphi}{Sin\ 2\varphi + Sin\ 2\varphi'}$$

b) для полнаго внутренняго отраженія:

$$r_p = r_s = 1$$

$$tang\,\frac{\delta_p}{2} = \frac{Sin\,\varphi'}{\left(\frac{Cos\,\varphi'}{\sqrt{-1}}\right)}.\ Cotang\,\varphi,\quad tang\,\frac{\delta_s}{2} = -\frac{Sin\,\varphi'.\ \frac{Cos\,\varphi'}{\sqrt{-1}}}{Sin\,\varphi'\ Cos\,\varphi}.$$

Если колебанія падающаго луча, амплитуду котораго примемъ за единицу, совершаются подъ угломъ α къ плоскости паденія, то, разложивъ эти колебанія на колебанія параллельныя и перпендикулярныя къ этой плоскости, получимъ два составляющихъ движенія. Амплитуда перваго изъ этихъ движеній будетъ $Cos\,\alpha$, а втораго $Sin\,\alpha$, Амплитуды отраженныхъ лучей будутъ соотвѣтственно $r_p\ Cos\ \alpha$ и $r_s\ Sin\,\alpha$, такъ что амплитуда R отраженнаго луча будетъ выражаться формулой

$$R = \sqrt{r^2{}_p\ Cos^2\,\alpha + {}^2r_s\ \overline{Sin^2\,\alpha}},$$

а уголъ β, образуемый колебаніями его съ плоскостью паденія, формулой

$$tang\,\beta = \frac{r_s}{r_p}\ .\ tang\,\alpha$$

Точно также для амплитуды D и азимута γ преломленнаго луча мы будемъ имѣть.

$$D = \sqrt{d_p{}^2\ Cos^2\,\alpha + d_s{}^2\ Cos^2\,\alpha}$$

и:
$$tang\,\gamma = \frac{d_s}{d_p}\,tang\,\alpha\ .$$

Легко видѣть, что при $\varphi = \varphi'$ отраженнаго луча не будетъ вовсе, а напряженіе преломленнаго равно единицѣ. Если φ не равно φ', то амплитуда отраженнаго луча можетъ быть равна нулю только тогда, когда одновременно или r_p и $Sin\alpha$ равню нулю, или r_s и $Cos\alpha$ равны нулю. Но такъ

какъ $Sin\,(\varphi+\varphi')$ всегда конеченъ, то r_p можетъ только равняться нулю когда $\varphi=\varphi'$, намъ остается, слѣдовательно, случай когда $r_s=0$ и $Cos\ \alpha=0$. Въ этомъ случаѣ, если φ не равно φ', то $tang\ (\varphi+\varphi')=\infty$ или $\varphi+\varphi'=90^\circ$.

Если уголъ φ таковъ, что $\frac{\lambda'}{\lambda}\ Sin\ \varphi>1$, то будетъ имѣть мѣсто явленіе полнаго отраженія, и для этого случая мы получимъ отраженный лучъ вообще эллиптически поляризованнымъ, причемъ

$$tang\ \frac{\delta_p-\delta_s}{2}=\frac{Sin\,\varphi'}{Sin\,\varphi}\cdot\frac{\dfrac{Cos\,\varphi}{\left(\dfrac{Cos\,\varphi'}{\sqrt{-1}}\right)}}{1-\dfrac{\left(\dfrac{Cos\,\varphi'}{\sqrt{-1}}\right)}{\dfrac{Cos\,\varphi}{\dfrac{Sin^2\varphi'}{Sin^2\varphi}}}}=-\frac{Sin\,\varphi'}{\left(\dfrac{Cos\,\varphi'}{\sqrt{-1}}\right)}\cdot tang\,\varphi\ .$$

Условіе для круговой поляризаціи будетъ:

$$\alpha=45^\circ,\ \delta_p-\delta_s=\pm\pi\ .$$

ИНТЕРФЕРЕНЦІЯ СВѢТА ВЪ ТОНКИХЪ ПЛАСТИНКАХЪ.

§ 119 Разсмотримъ случай прозрачной изотропной пластинки, ограниченной двумя параллельными плоскостями и находящейся въ нѣкоторой изотропной средѣ, въ которой, на безконечно далекомъ разстояніи отъ пластинки, находится свѣтящаяся точка p.

Вычислимъ освѣщеніе точки 0, лежащей по туже сторону отъ пластинки, какъ и свѣтящаяся точка. Мы видѣли въ § 97, что функціи U, V, и W, посредствомъ которыхъ выражаются проэкціи отклоненія, получаемаго точкою 0 (x_0, y_0, z_0), выражаются формулами:

$$4\pi U_0 = \Sigma_i A_i Cos\, 2\pi(\psi_i - \frac{t}{T} + \delta_i + \frac{1}{4}h_i) + 4\pi \overline{U}_0 \quad ; \ldots 321$$

гдѣ $\overline{U}_0$ есть то значеніе, которое имѣло бы функція U въ точкѣ 0, если бы однородность средины не нарушалась пластинкой. Подобными же формулами выразятся V_0 и W_0 Зная эти функціи, мы получимъ и слѣдующія выраженія для проэкцій u_0, v_0 и w_0 отклоненія по формуламъ:

$$u_0 = \frac{\partial W_0}{\partial y_0} - \frac{\partial V_0}{\partial z_0}, \; v_0 = \frac{\partial U_0}{\partial z_0} - \frac{\partial W_0}{\partial x_0} \text{ и } w_0 = \frac{\partial V_0}{\partial x_0} - \frac{\partial U_0}{\partial y_0} \ldots 323$$

Эти формулы можно привести къ слѣдующему виду:

$$\left.\begin{aligned} 4\pi u_0 &= \Sigma a_i Sin 2\pi\left(\psi_i - \frac{t}{T} + d_i + \frac{1}{4} g_i\right) + 4\pi u_0 \\ 4\pi v_0 &= \Sigma b_i Sin 2\pi\left(\psi_i - \frac{t}{T} + e_i + \frac{1}{4} h_i\right) + 4\pi v_0 \\ 4\pi w_0 &= \Sigma c_i Sin 2\pi\left(\psi_i - \frac{t}{T} + f_i + \frac{1}{4} k_i\right) + 4\pi w_0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 324$$

гдѣ g_i h_i и k_i суть положительныя цѣлыя числа не бо́льшія трехъ.

Выбравъ плоскость i—таго луча, т. е. плоскость, проходящую черезъ точки p и 0 и перпендикулярную къ пластинкѣ за плоскость xy, и направивъ ось z перпендикулярно къ пластинкѣ, получимъ для слагающихъ $u_{i,o}$, $v_{i,o}$, и $w_{i,o}$ отклоненія обусловливаемаго i—тымъ лучемъ формулы:

$$\left.\begin{aligned} 4\pi u_{o,i} &= a_i\, Sin\, 2\pi\left(\psi_i - \frac{t}{T} + d_i + \frac{1}{4} g_i\right) \\ 4\pi\, v_{o,i} &= b_i\, Sin\, 2\pi\left(\psi_i - \frac{t}{T} + e_i + \frac{4}{1} h_i\right) \\ 4\pi w_{o,i} &= c_i\, Sin\, 2\pi\left(\psi_i - \frac{t}{T} + f_i + \frac{1}{4} k_i\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 325$$

Величины a_i, b_i и c_i можно разсматривать какъ функціи угла паденія φ_i на пластинку, ибо этимъ угломъ вполнѣ опредѣляется число преломленій и отраженій, претерпѣваемыхъ лучемъ въ пластинкѣ. Если индексомъ $i=2$ обозначимъ тотъ изъ лучей, который претерпѣваетъ два преломленія и одно отраженіе (на чертежѣ 15 представлены 2-ой и 5-ый лучи), то полагая i—2, 3, . . . ,∞, получимъ всѣ возможныя лучи за исключеніемъ того, который претерпѣваетъ только одно отраженіе. Согласно теоріи отраженія и преломленія поляризованнаго луча, мы будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} a_i &= K_i \frac{Sin\ 2\varphi_i}{Sin(\varphi_i+\varphi_i')} \cdot \frac{Sin\ 2\varphi_i'}{Sin(\varphi_i+\varphi_i')} \cdot \frac{Sin\ (\varphi_i'-\varphi_i)}{Sin(\varphi_i+\varphi_i')}^{2(i-1)-1} Cos\varphi_i \\ b_i &= L_i \frac{2\ Sin\ \varphi_i}{Sin^2\varphi_i+Sin^2\varphi_i'} \cdot \frac{2\ Sin\ \varphi_i'}{Sin^2\varphi_i+Sin^2\varphi_i'} \cdot \frac{t_g(\varphi_i'-\varphi_i)}{t_g(\varphi_i+\varphi_i')}^{2(i-1)-1} \\ c_i &= K_i \frac{Sin\ 2\varphi_i}{Sin(\varphi_i+\varphi_i')} \cdot \frac{Sin 2\varphi_i'}{Sin(\varphi_i+\varphi_i')} \cdot \frac{Sin\ (\varphi_i'-\varphi_i)}{Sin\ (\varphi_i+\varphi_i)}^{2(i-1)-1} Sin\varphi \end{aligned}\right\} 326$$

гдѣ φ'_i есть уголъ преломленія, а K_i и L_i величины, которыя могутъ еще зависѣть отъ длины прямолинейныхъ отрѣзковъ $\varrho_{1,i}$ и $\varrho_{0,i}$ луча отъ точки p до пластинки и отъ пластинки до точки 0. Длина этихъ отрѣзковъ въ свою очередь вполнѣ опредѣляется величиною угла φ_i.

Выраженія a_i, b_i и c_i могутъ быть значительно упрощены слѣдующимъ образомъ. Мы имѣемъ, отбрасывая указателя i:

$$\frac{Sin\ 2\varphi}{Sin\ (\varphi+\varphi')} \cdot \frac{Sin\ 2\varphi'}{Sin\ (\varphi+\varphi')} = \frac{4\ Sin\varphi\ Cos\ \varphi Sin\ \varphi' Cos\varphi'}{Sin^2(\varphi+\varphi')} =$$

$$= \frac{[Sin(\varphi+\varphi')+Sin(\varphi-\varphi')].[Sin(\varphi+\varphi')-Sin(\varphi-\varphi')]}{Sin^2\ (\varphi\ +\ \varphi')} =$$

$$= \frac{Sin^2(\varphi+\varphi')-Sin^2(\varphi-\varphi')}{Sin^2(\varphi+\varphi')} = 1 - \frac{Sin^2(\varphi\ -\ \varphi')}{Sin^2(\varphi\ -\ \varphi')} ,$$

или, полагая для краткости

$$\frac{Sin\ (\varphi\ -\ \varphi')}{Sin\ (\varphi\ +\ \varphi')} = -\ \mu . \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 327$$

получимъ

$$\frac{Sin\ 2\varphi}{Sin\ (\varphi+\varphi')} \cdot \frac{Sin\ 2\varphi'}{Sin\ (\varphi+\varphi')} = 1\ -\ \mu^2 , \quad . \quad .$$

и слѣдовательно

$$a_i = K_i\ Cos\varphi_i\ .\ (1-\mu_i^2)\ \mu_i^{2\ i-1)-1} \qquad 328$$

и

$$c_i = K_i \, Sin \, \varphi_i \, (1 - \mu_i^{\,2}) \, \mu_i^{\,2(i-1)-1} \quad . \quad . \quad . \quad 329.$$

Точно также

$$\frac{2Sin\,2\varphi}{Sin\,2\varphi + Sin\,2\varphi'} \cdot \frac{2\,Sin\,2\varphi'}{Sin\,2\varphi + Sin 2\varphi'} = \frac{Sin\,2\varphi\,Sin\,2\varphi'}{Sin^2(\varphi+\varphi').Cos^2(\varphi-\varphi')} =$$

$$= \frac{Sin[\varphi+\varphi'+\varphi-\varphi'].Sin[\varphi'+\varphi+\varphi'-\varphi]}{Sin^2(\varphi+\varphi').Cos^2(\varphi-\varphi')} =$$

$$= \frac{[Sin(\varphi+\varphi').Cos(\varphi-\varphi') + Sin(\varphi-\varphi')Cos(\varphi+\varphi')].[Sin(\varphi+\varphi')Cos(\varphi-\varphi') - Sin(\varphi-\varphi').Cos(\varphi+\varphi')]}{Sin^2(\varphi+\varphi').Cos^2(\varphi-\varphi')}$$

$$= \frac{Sin^2(\varphi+\varphi').Cos^2(\varphi-\varphi') - Sin^2(\varphi-\varphi').Cos^2(\varphi+\varphi')}{Sin^2(\varphi+\varphi').Cos^2(\varphi-\varphi')} = 1 - \frac{tg^2(\varphi-\varphi')}{tg^2(\varphi+\varphi')},$$

или, полагая

$$\frac{tg^2(\varphi-\varphi')}{tg^2(\varphi+\varphi')} = \nu \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 330$$

получимъ:

$$\frac{Sin\,2\varphi}{Sin 2\varphi + Sin 2\varphi'} \cdot \frac{Sin\,2\varphi'}{Sin 2\varphi + Sin 2\varphi'} = 1 - \nu^2. \quad . \quad . \quad 331$$

откуда $$b_i = L_i \, (1 - \nu_i^{\,2}) \, \nu_i^{\,2i-1)-1}$$

Легко также убѣдиться въ томъ, что

$$\psi_i = \frac{\varrho_{p,i}}{\lambda} + (i-1)\,\frac{2H Cos\,\varphi' i}{\lambda} + \frac{\varrho_{0,i}}{\lambda} \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 332$$

гдѣ H толщина пластинки, λ длина волны въ срединѣ, въ которой находятся точки p и 0, и λ' длина волны внутри пластинки.

Обозначая для краткости:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\varrho_{p,i}+\varrho_{0,i}}{\lambda} - \frac{t}{T} + d_i + \frac{1}{4} g_i = \mathfrak{P}_i \\
&\frac{\varrho_{p,i}+\varrho_{0,i}}{\lambda} - \frac{t}{T} + e_i + \frac{1}{4} h_i = \mathfrak{Q}_i \\
&\frac{\varrho_{p,i}+\varrho_{0,i}}{\lambda} - \frac{t}{T} + f_i + \frac{1}{4} k_i = \mathfrak{R}_i
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad 333$$

мы можемъ написать

$$\left.\begin{aligned}
&4\pi u_0 = 4\pi\,\overline{u}_0 - K_1\,Cos\,\varphi_1\,\mu\,Sin\,2\pi\,\mathfrak{P} + \\
&+ \sum_{i=2}^{i=\infty} K_i Cos\varphi_i (1-\mu^2)\mu^{2(i-1)-1} Sin 2\pi \left[(i-1)\frac{2\mathrm{H}\,Cos\varphi_i'}{\lambda} + \mathfrak{P}\right] \\
&4\pi v_0 = 4\pi\,\overline{v}_0 - L_1\,\nu\,Sin\,2\pi\,\mathfrak{Q}_1 + \\
&+ \sum_{i=2}^{i=\infty} L_i (1-\nu^2)\,\nu^{2(i-1)-1} Sin 2\pi \left[(i-1)\frac{2\mathrm{H}\,Cos\varphi'_i}{\lambda} + \mathfrak{Q}\right] \\
&4\pi w_0 = 4\pi\,\overline{w}_0 - K_1\,Sin\,\varphi_1\,\mu\,Sin\,2\pi\,\mathfrak{R}_1 + \\
&+ \sum_{i=2}^{i=\infty} K_i Sin\varphi_i (1-\mu^2)\mu^{2(i-1)-1} Sin 2\pi \left[(i-1)\frac{2\mathrm{H}\,Cos\varphi'_i}{\lambda} + \mathfrak{R}\right]
\end{aligned}\right\} 334$$

Преобразуемъ эти выраженія. Для этого замѣтимъ, что если точки p и 0 очень удалены отъ плоскости, то можно принять

$$\begin{aligned}
K_1 &= K_2 = \ldots\ldots = K_i = K \\
L_1 &= L_2 = \ldots\ldots = L_i = L \\
\varphi_1 &= \varphi_2 = \ldots\ldots = \varphi_i = \varphi \\
\varphi'_1 &= \varphi'_2 = \ldots\ldots = \varphi_i' = \varphi'
\end{aligned}$$

Полагая теперь для краткости

$$2\pi\,\frac{2\mathrm{H}\,Cos\varphi'}{\lambda} = y \quad \text{и} \quad 2\pi\,\mathfrak{P} = x \;, \; . \; . \; . \quad 335$$

мы можемъ написать первое изъ выраженій слѣдующимъ образомъ:

$$4\pi u_0 = 4\pi\bar{u}_0 + \frac{KCos\varphi}{2\sqrt{-1}}\left\{ \mu e^{\sqrt{-1}} + (1-\mu^2)\sum_{i=2}^{i=\infty} \mu^{2(i-1)-1} e^{\sqrt{-1}(x+(i-1)y)} \right.$$

$$\left. -\mu e^{-\sqrt{-1}} - (1-\mu^2)\sum_{i=2}^{i=\infty} \mu^{2(i-1)-1} e^{-\sqrt{-1}(x-(i-1)y)} \right\} \quad . \quad 336$$

Можно найти сумму прогрессій

$$\sum_{i=2}^{i=n} \mu^{2(i-1)-1} e^{\sqrt{-1}(x+(i-1)y)} = \frac{\mu^{2n-1} e^{\sqrt{-1}(x+ny)} - \mu e^{\sqrt{-1}(x+y)}}{\mu^2 e^{\sqrt{-1}y} - 1}$$

$$\sum_{i=2}^{i=n} \mu^{2(i-1)-1} e^{-\sqrt{-1}(x-(i-1)y)} = \frac{\mu^{2n-1} e^{-\sqrt{-1}(x+ny)} - \mu e^{-\sqrt{-1}(x+y)}}{\mu^2 e^{-\sqrt{-1}y} - 1}$$

Разность D_n этихъ прогрессій будетъ:

$$D_n = 2\sqrt{-1}\,\frac{\mu^{2n+1} Sin[x+(n-1)y] - \mu^{2n-1} Sin(x+ny) + \mu Sin(x+y) - \mu^2 Siny}{\mu^4 - 2\mu^2 Cos\, y + 1}$$

Такъ какъ μ есть правильная дробь, то при $n=\infty$

$$\underset{\infty}{D} = 2\sqrt{-1} \,.\, \mu \,.\, \frac{Sin\,(x-y) - \mu^2 Sin\, x}{\mu^4 - 2\mu^2 Cos\, y + 1} \,.$$

Подставляя это выраженіе въ 333, получимъ

$$4\pi u_0 = 4\pi\bar{u}_0 + \mu KCos\varphi \left\{ -Sinx + (1-\mu^2)\frac{Sin(x+y) - \mu^2 Sin\, x}{\mu^4 - 2\mu^2 Cos\, y + 1} \right\} 337$$

Преобразуемъ теперь большія скобки послѣдняго выраженія. Мы получимъ:

$$-Sinx + (1-\mu^2)\frac{Sin\,(x+y) - \mu^2\, Sin\, x}{\mu^4 - 2\,\mu^2\, Cos\, y + 1} =$$

$$= \frac{[2\mu^2 Cosy - (1+\mu^4)]Sinx + (1-\mu^2)CosySinx - (1-\mu^2)\mu^2 Sinx + (1-\mu^2)SinyCosx}{\mu^4 - 2\,\mu^2\, Cos\, y + 1}$$

$$= \frac{[-1-\mu^4-\mu^2+(1+2\mu^2-\mu^2)\,Cos\,y]\,Sin\,x+(1-\mu^2)\,Sin\,y\,Cos\,x}{\mu^4-2\mu^2\,Cos\,y+1} =$$

$$= \frac{(1+\mu^2)\,(Cos\,y-1)\,Sin\,x+(1-\mu^2)\,Sin\,y\,Cos\,x}{\mu^4-2\mu^2\,Cos\,y+1}$$

Полагая здѣсь

$$\left.\begin{aligned} \frac{(1+\mu^2)\,(Cos\,y-1)}{\mu^4-2\mu^2\,Cos\,y+1} &= \frac{A}{K\mu}\,Cos\,2\pi\,\Delta \\ \frac{(1-\mu^2)\;\;Sin\;\;y}{\mu^4-2\mu^2\,Cos\,y+1} &= \frac{A}{K\mu}\,Sin\,2\pi\,\Delta \end{aligned}\right\}\;; \ldots 338$$

тогда выраженіе 337 приметъ видъ:

$$4\pi\,u_0 = 4\pi\,\bar{u}_0 + Cos\,\varphi\,Sin\,(x+2\pi\,\Delta) \quad \ldots\ldots 339$$

или

$$4\pi u_0 = 4\pi\,\bar{u}_0 + A\;Cos\,\varphi\;Sin\,2\pi\,(\mathfrak{P}+\Delta) \quad \ldots 340$$

Точно также получимъ:

$$4\pi v_0 = 4\pi\,\bar{v}_0 + B\;Sin\,2\pi\,(\mathfrak{Q}+\chi) \quad \ldots 341$$

и

$$4\pi w_0 = 4\pi\bar{w}_0 + A\;Sin\,\varphi\;Sin\,2\pi\,(\mathfrak{R}+\Delta) \quad \ldots 342$$

Здѣсь

$$\left.\begin{aligned} A\,Cos\,2\pi\Delta &= K\mu(1+\mu^2)\left\{\frac{Cos\,2\pi\left(\frac{2H\,Cos\,\varphi'}{\lambda}\right)-1}{1-2\mu^2\,Cos\,2\pi\left(\frac{2H\,Cos\,\varphi'}{\lambda}\right)+\mu^4}\right\} \\ A\,Sin\,2\pi\Delta &= K\mu(1-\mu^2)\;\;\frac{Sin\,2\pi\left(\frac{2H\,Cos\,\varphi'}{\lambda}\right)}{1-2\mu^2\,Cos\,2\pi\left(\frac{2H\,Cos\,\varphi'}{\lambda}\right)+\mu^4} \\ B\,Cos\,2\pi\,\chi &= L\nu\;\;(1+\nu^2)\left\{\frac{Cos\,2\mu\left(\frac{2H\,Cos\,\varphi'}{\lambda}\right)-1}{1-2\mu^2\,Cos\,2\mu\left(\frac{2H\,Cos\,\varphi'}{\lambda}\right)+\mu^4}\right\} \\ B\,Sin\,2\pi\,\chi &= L\nu\;\;(1-\nu^2)\;\;\frac{Sin\,2\pi\left(\frac{2H\,Cos\,\varphi'}{\lambda}\right)}{1-2\mu^2\,Cos\,2\pi\left(\frac{2H\,Cos\,\varphi'}{\lambda}\right)+\mu^4} \end{aligned}\right\} 343$$

Если устранить движеніе $\overline{u}_0$, $\overline{v}_0$ и $\overline{w}_0$, непосредственно передающееся отъ точки p точкѣ 0, то напряженіе I_0 свѣта въ точкѣ 0 будетъ:

$$I_0 = P(2A^2 + B^2) \quad \ldots\ldots \quad 344;$$

но

$$A^2 = K^2\mu^2 \left\{ \frac{(1+\mu^2)^2 (Cos 2\pi \frac{2H Cos\varphi'}{\lambda} - 1)^2 + (1-\mu^2)^2 Sin 2\pi \frac{2H Cos\varphi'}{\lambda'}}{(-2\mu^2 Cos 2\pi \frac{2H\ Cos\ \varphi'}{\lambda'} + \mu^4)^2} \right\} =$$

$$= K^2\mu^2 \left\{ \frac{(1+2\mu^2+\mu^4)(Cos^2 y - 2 Cos y + 1) + (1-2\mu^2+\mu^4) Sin^2 y}{(1-2\mu^2\ Cos\ y + \mu^4)^2} \right\} =$$

$$= K^2\mu^2 \frac{1 + 2\mu^2 Cos 2y + \mu^4 - 2(1+2\mu^2+\mu^4) Cos y + 1 + 2\mu^2 + \mu^4}{(1-2\mu^2\ Cos\ y + \mu^4)^2} =$$

$$= 2K^2\mu^2 \frac{(1+\mu^2)(1-Cos\ y) + \mu^2 (Cos\ 2y - 2\ Cos\ y + 1)}{(1-2\ \mu^2\ Cos\ y + \mu^4)^2} =$$

$$= 2K^2\mu^2 \frac{(1+\mu^2)(1-Cos\ y) - 2\mu^2 (1-Cos\ y) Cos\ y}{(1-2\mu^2 Cos\ y + \mu^4)^2} =$$

$$= 2K^2\mu^2 \frac{(1-2\mu^2\ Cos\ y + \mu^4)(1-Cos\ y)}{(1-2\mu^2\ Cos\ y + \mu^4)^2}$$

или окончательно

$$A^2 = 2K^2\mu^2 \frac{1 - Cos 2\pi \left(\frac{2H\ Cos\ \varphi'}{\lambda'}\right)}{1 - 2\mu^2 Cos\ 2\pi \left(\frac{2H\ Cos\ \varphi'}{\lambda'}\right) + \mu^4}$$

или

$$A^2 = K^2\mu^2 \frac{4\mu^2 Sin\ 2\pi \left(\frac{2H\ Cos\ \varphi'}{\lambda'}\right)}{(1-\mu^2)^2 + 4\mu^2 Sin^2 2\pi \left(\frac{H\ Cos\ \varphi'}{\lambda'}\right)} \quad \ldots \quad 345$$

Такимъ же образомъ получимъ

$$B^2 = L^2 - \frac{4\nu^2 \, Sin^2 2\pi \left(\frac{H Cos\, \varphi'}{\lambda'}\right)}{(1-\nu^2) + 4\nu^2 Sin^2 2\pi \left(\frac{H Cos\, \varphi'}{\lambda'}\right)} \quad \ldots\ldots 346$$

Воспользовавшись этимъ, получимъ:

$$I = P\left\{ K^2 \frac{4\mu^2}{\left\{ \frac{(1-\mu^2)^2}{Sin^2 2\pi \left(\frac{H\, Cos\varphi'}{\lambda'}\right)} + 4\mu^2 \right\}} + \right.$$

$$\left. + L^2 \frac{4r^2}{\left\{ \frac{(1-\nu^2)^2}{Sin^2 2\pi \left(\frac{H Cos\, \varphi'}{\lambda'}\right)} + 4\nu^2 \right\}} \right\} \quad \ldots\ldots 347$$

Изъ этой формулы мы видимъ, что максимумъ и минимумъ напряженія свѣта совпадаютъ съ максимумомъ и минимумомъ $Sin^2 2\pi \frac{H Cos\, \varphi'}{\lambda'}$.

Такимъ образомъ мы видимъ, что максимумъ I будетъ имѣть мѣсто при условіи

$$H Cos\, \varphi' = (2n+1)\frac{\lambda'}{4}, \quad \ldots\ldots 348$$

гдѣ n число цѣлое.

Условія для минимумовъ, которыя будутъ равны нулю будутъ:

$$H Cos\, \varphi' = 2n \cdot \frac{\lambda'}{4} \quad \ldots\ldots 349$$

КРИСТАЛЛИЧЕСКАЯ СРЕДА.

§ 120. Для объясненія свѣтовыхъ явленій въ кристаллической срединѣ мы принимаемъ функцію F (§ 13), характеризующую реакціи, которыя эта среда оказываетъ деформаціямъ, слѣдующаго вида:

$$2F = a_0(\dot{x}_x + y_y + z_z)^2 +$$
$$+ a_{11}(y_z{}^2 - 4y_y z_z) + a_{22}(z_x{}^2 - 4z_z x_x) + a_{33}(x_y{}^2 - 4x_x y_y) +$$
$$+ 2a_{23}(2y_z x_x - y_z z_x) + 2a_{31}(2z_x y_y - z_y x_y) + 2a_{12}(2x_y z_z + x_z y_z). \quad 350\ ^1)$$

§ 121. Дифференціальныя уравненія, которымъ должны удовлетворять проэкціи u v и w отклоненія движущейся частицы кристаллической среды мы получимъ, если въ уравненія

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 351$$

подставимъ:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \frac{\partial F}{\partial x_x} \qquad Y_z = Z_y = \frac{\partial F}{\partial y_z} \\ Y_y &= \frac{\partial F}{\partial y_y} \qquad Z_x = X_z = \frac{\partial F}{\partial z_x} \\ Z_z &= \frac{\partial F}{\partial z_z} \qquad X_y = Y_x = \frac{\partial F}{\partial x_y} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad 352$$

---

[1]) Здѣсь величины y_z, z_x, и x_y вдвое больше тѣхъ, которыя такимже образомъ обозначены въ § 3.

и въ полученныхъ такимъ образомъ уравненіяхъ положимъ

$$\left.\begin{aligned} x_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \qquad y_z = z_y = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ y_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \qquad z_x = x_z = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ z_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \qquad x_y = y_x = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad 353.$$

Распространеніе сотрясенія плоскими волнами

§ 122. Положимъ:

$$u = \alpha\sigma \qquad v = \beta\sigma \text{ и } w = \gamma\sigma \; ; \quad . \; . \; . \quad 354$$

гдѣ α, β и γ косинусы, опредѣляющіе направленіе отклоненія,

$$\sigma = \Phi(t,s) \text{ и } s = lx + my + nz \quad . \; . \; . \; . \quad 355$$

Такое движеніе, очевидно, представляетъ плоскую волну, которая распространяется по направленію, опредѣляемому косинусами l, m, и n. Подставимъ выраженія 353 въ систему дифференціальныхъ уравненій 350, 351 и 352. Замѣтимъ при этомъ что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2}, \; \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \beta \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2}, \; \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \gamma \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} \; , \; . \; . \; . \quad 356$$

и что:

$$\left.\begin{aligned} x_x &= \alpha l \frac{\partial \sigma}{\partial s} \qquad y_z = (\beta n + \gamma m)\frac{\partial \sigma}{\partial s} \\ y_y &= \beta m \frac{\partial \sigma}{\partial s} \qquad z_x = (\gamma l + \alpha n)\frac{\partial \sigma}{\partial s} \\ z_z &= \gamma m \frac{\partial \sigma}{\partial s} \qquad x_y = (\alpha m + \beta l)\frac{\partial \sigma}{\partial s} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad 357$$

Замѣтимъ далѣе, что производныя функціи F по $x_x, y_x, \ldots x_y$ суть однородныя линейныя функціи отъ x_x, $y_y, \ldots, x_y$ и что если мы въ эти функціи вмѣсто x_x, $y_y, \ldots$ и x_y подставимъ

ихъ значенія изъ 357, то получимъ нѣкоторую постоянную величину, помноженную на $\frac{\partial\sigma}{\partial s}$. Эта постоянная величина получится, если мы въ искомой производной F положимъ:

$$\left.\begin{aligned} x_x &= \alpha l, \quad y_z = \beta n + \gamma m \\ y_y &= \beta m, \quad z_x = \gamma l + \alpha n \\ z_z &= \gamma n, \quad x_y = \alpha m + \beta l \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 358$$

Эти значенія x_x, $y_y,\ldots, x_y$ обозначимъ черезъ x'_x, $y'_y,\ldots,x'_y$, а значеніе функціи F, въ которой x_x, $y_y,\ldots,x_x$ замѣнены величинами x'_x, $y'_y,\ldots, x'_y$ мы обозначимъ черезъ F'.

Тогда:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \frac{\partial F}{\partial x_x} = \frac{\partial F'}{\partial x'_x}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial s} \\ Y_y &= \frac{\partial F}{\partial y_y} = \frac{\partial F'}{\partial y'_y}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial s} \\ Z_z &= \frac{\partial F}{\partial z_z} = \frac{\partial F'}{\partial z'_z}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial s} \\ Y_z = Z_y &= \frac{\partial F}{\partial y_z} = \frac{\partial F'}{\partial y'_z}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial s} \\ Z_x = X_z &= \frac{\partial F}{\partial z_x} = \frac{\partial F'}{\partial z'_x}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial s} \\ X_y = Y_x &= \frac{\partial F}{\partial x_y} = \frac{\partial F'}{\partial x'_y}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial s} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 359$$

При помощи этихъ формулъ получимъ изъ перваго уравненія групы (351):

$$\alpha\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} = \left(l\frac{\partial F'}{\partial x'_x} + m\frac{\partial F'}{\partial x'_y} + n\frac{\partial F'}{\partial x'_z}\right)\frac{\partial^2\sigma}{\partial s^2}$$

принимая во вниманіе, что

$$l = \frac{\partial x'_x}{\partial\alpha}\ ,\quad m = \frac{\partial x'_y}{\partial\alpha}\ ,\quad n = \frac{\partial x'_z}{\partial\alpha}$$

и что

$$\frac{\partial y'_x}{\partial \alpha}=0,\ \frac{\partial y'_z}{\partial \alpha}=0,\ \frac{\partial z'_z}{\partial \alpha}=0\ ,$$

мы можемъ написать предъидущее равенство такъ:

$$\alpha\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2}=\frac{\partial F'}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial^2\sigma}{\partial s^2}\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ 360$$

Такимъ образомъ, преобразуя второе и третье равенство группы 351, получимъ:

$$\left.\begin{aligned}\beta\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2}&=\frac{\partial F'}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial^2\sigma}{\partial s^2}\\ \gamma\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2}&=\frac{\partial F'}{\partial \gamma}\cdot\frac{\partial^2\sigma}{\partial s^2}\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ .\ .\ .\ 361$$

§ 123. Вообразимъ теперь поверхность втораго порядка, уравненіе которой:

$$2r^2F'=1\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 362$$

гдѣ $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ и $\alpha=\frac{x}{r}$, $\beta=\frac{y}{r}$ и $\gamma=\frac{z}{r}$.

Эта поверхность, очевидно, будетъ эллипсоидъ, ибо при $u=v=w=0$ кристаллическая среда должна быть въ устойчивомъ равновѣсіи, и слѣдовательно нулевымъ значеніямъ u, v и w, а слѣдовательно и нулевымъ значеніямъ $x_x, y_y, .., x_y$ долженъ соотвѣтствовать минимумъ функціи $2F$, выражащей работу реакцій. Положивъ въ формулѣ для F $x_x=y_y=.....=x_y=0$, увидимъ, что этотъ минимумъ есть нуль, слѣдовательно функція F такова, что для всякихъ значеній аргументовъ ея, отличающихся отъ нуля, она положительна. F' есть значеніе функціи F для нѣкоторой опредѣленной системы аргументовъ, и есть, слѣдовательно, величина постоян-

но положительная, а потому и радіусъ векторъ r поверхности для всякаго направленія имѣетъ дѣйствительное значеніе.

Опредѣлимъ направленіе осей эллипсоида 362, пользуясь тѣмъ обстоятельствомъ, что радіусъ векторъ, ведущій къ одной изъ вершинъ эллипсоида, перпендикуляренъ къ касательной плоскости. Это условіе перпендикулярности выражается слѣдующими равенствами:

$$\frac{\frac{\partial(2F'r^2)}{\partial x}}{\alpha} = \frac{\frac{\partial(2F'r^2)}{\partial y}}{\beta} = \frac{\frac{\partial(2F'r^2)}{\partial z}}{\gamma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 363$$

Замѣтивъ также, что:

$$\frac{\partial(2F'r^2)}{\partial x} = 2\left(\frac{\partial F'}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial F'}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial x}+\frac{\partial F'}{\partial\gamma}\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)r^2+4F'r\cdot\frac{\partial r}{\partial x}$$

и что:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)=\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3},\ \frac{\partial\beta}{\partial x}=-\frac{yx}{r^2},\ \frac{\partial\gamma}{\partial x}=-\frac{zx}{r^3},\ \frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r},$$

получимъ:

$$\frac{\partial(2F'r^2)}{\partial x}=2r\frac{\partial F'}{\partial\alpha}-2r\left(\frac{\partial F'}{\partial\alpha}\alpha+\frac{\partial F'}{\partial\beta}\cdot\beta+\frac{\partial F'}{\partial\gamma}\cdot\gamma\right)\alpha+4rF'\alpha.$$

Но $2F'$ есть однородная функція втораго порядка отъ α, β и γ, а слѣдовательно:

$$\frac{\partial(2F'r^2)}{\partial x}=2r\frac{\partial F'}{\partial\alpha}-4rF'\alpha+4rF'\alpha=2r\frac{\partial F'}{\partial\alpha}$$

и точно также

$$\frac{\partial(2F'r^2)}{\partial y}=2r\frac{\partial F'}{\partial\beta}\quad\text{и}\quad\frac{\partial(2F'r^2)}{\partial z}=2r\frac{\partial F'}{\partial\gamma}.$$

Воспользовавшись этимъ, напишемъ равенство 363 слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{\frac{\partial F'}{\partial \alpha}}{\alpha} = \frac{\frac{\partial F'}{\partial \beta}}{\beta} = \frac{\frac{\partial F'}{\partial \gamma}}{\gamma} = V^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 364$$

гдѣ

$$V^2 = \sqrt{\left(\frac{\partial F'}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial F'}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial F'}{\partial \gamma}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 365$$

Опредѣливъ α, β и γ изъ формулы 364, то есть принявъ за направленіе (α, β, γ) одну изъ осей эллипсоида (362), мы приведемъ всѣ три уравненія (360 и 361) къ одному:

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 366$$

гдѣ V^2 опредѣлится изъ формулы 317.

Уравненіе 366 мы удовлетворимъ, положивъ:

$$\sigma = f_1(s - Vt) + f_2(s + Vt) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 367$$

Такимъ образомъ мы получимъ для проэкцій u, v и w отклоненія частицы кристаллической средины, получаемаго ею вслѣдствіе сотрясенія, распространяющагося плоскими волнами, перпендикулярными къ направленію (l, m, n), слѣдующія формулы:

$$\left.\begin{aligned} u &= \alpha\left[f_1(s - Vt) + f_2(s + Vt)\right] \\ v &= \beta\left[f_1(s - Vt) + f_2(s + Vt)\right] \\ w &= \gamma\left[f_1(s - Vt) + f_2(s + Vt)\right] \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad 368$$

гдѣ α, β, γ суть косинусы, опредѣляющіе направленіе одной изъ осей эллипсоида

$$2F'r^2 = 1 \ ,$$

V^2 опредѣляется изъ формулы (365), а $s=lx+my+nz$.

а) Продольныя колебанія.

§ 124. Легко показать, что одна изъ осей эллипсоида $2F'r^2=1$ совпадаетъ съ направленіемъ $[l, m, n]$ распространенія волны.

Дѣйствительно, замѣнивъ въ выраженіи 350 $x_x, y_y, \ldots$, и x_y выраженіями 358, получимъ:

$$2F'=a_0(\alpha l+\beta m+\gamma n)^2+a_{11}(\gamma m-\beta n)^2+a_{22}(\alpha n-\gamma l)^2+$$
$$+a_{33}(\beta l-\alpha m)^2+2a_{23}(\alpha n-\gamma l)(\beta l-\alpha m)+$$
$$+2a_{31}(\beta l-\alpha m)(\gamma m-\beta n)+2a_{12}(\gamma m-\beta n)(\alpha n-\gamma l) \quad \ldots \quad 369$$

откуда:

$$\frac{\partial F'}{\partial \alpha}=a_0 l(\alpha l+\beta m+\gamma n)+a_{22}n(\alpha n-\gamma l)-a_{33}m(\beta l-\alpha m)$$
$$+a_{23}n(\beta l-\alpha m)-a_{31}m(\gamma m-\beta n)+a_{12}n(\gamma m-\beta n) \quad , \quad \ldots \quad 370$$

Полагая въ выраженіи $\frac{1}{\alpha}\frac{\partial F'}{\partial \alpha}\ \alpha=l$, получимъ:

$$\left[\frac{\left(\frac{\partial F'}{\partial \alpha}\right)}{\alpha}\right]_{\alpha=l}=a_0 \quad \ldots \quad 371$$

Такимъ же образомъ найдемъ, что и

$$\left[\frac{\left(\frac{\partial F'}{\partial \beta}\right)}{\beta}\right]_{\beta=m}=a_0 \text{ и } \left[\frac{\left(\frac{\partial F'}{\partial \gamma}\right)}{\gamma}\right]_{\gamma=n}=a_0, \quad \ldots \quad 372$$

Изъ формулъ 371 и 372 мы видимъ, что когда направленіе (α, β, γ) совпадаетъ съ направленіемъ (l, m, n), то условіе 364 соблюдено, причемъ въ этомъ случаѣ:

$$V^2=a_0 \quad \ldots \quad 373$$

b) Поперечныя колебанія.

§ 125. Заставляя направленіе (α, β, γ) совпадать съ двумя другими осями эллипсоида 362, мы получимъ также возможныя отклоненія, совершающіяся въ плоскости волны, перпендикулярной къ направленію (l, m, n).

Обнаружимъ весьма простую зависимость этихъ двухъ направленій и соотвѣтствующаго каждому изъ нихъ значенію V^2 отъ другаго эллипсоида, эллипсоида упругости, положеніе и размѣры котораго не зависятъ отъ косинусовъ l, m, n, опредѣляющихъ направленіе распространенія волны.

Для этого обозначимъ, черезъ $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ косинусы направленія, перпендикулярнаго къ направленіямъ (α, β, γ) и (l, m, n), то есть положимъ:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{a} &= \gamma m - \beta n \\ \mathfrak{b} &= \alpha n - \gamma l \\ \mathfrak{c} &= \beta l - \alpha m \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 374$$

Принимая во вниманіе, что въ разсматриваемыхъ нами случаяхъ отклоненій, совпадающихъ съ двумя перпендикулярными къ направленію (l, m, n) осями эллипсоида 362,

$$\alpha l + \beta m + \gamma n = 0, \quad \ldots\ldots \quad 375$$

мы можемъ написать также, что

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \mathfrak{b} n - \mathfrak{c} m \\ \beta &= \mathfrak{c} l - \mathfrak{a} n \\ \gamma &= \mathfrak{a} m - \mathfrak{b} l \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 328$$

Полагая теперь

$$2\mathfrak{F} = a_{11}\mathfrak{a}^2 + a_{22}\mathfrak{b}^2 + a_{33}\mathfrak{c}^2 + 2a_{23}\mathfrak{cb} + 2a_{31}\mathfrak{ac} + 2a_{12}\mathfrak{ba} \quad \ldots \quad 329$$

и принимая въ разсчетъ равенства 374, 375 и 377, получимъ вмѣсто равенства 369:

$$F' = \mathfrak{F} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad 378$$

Изъ этого слѣдуетъ, что

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{a}} \cdot \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{b}} \cdot \frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{c}} \cdot \frac{\partial \mathfrak{c}}{\partial \alpha} =$$

$$= \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{b}} n - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{c}} m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 379$$

Вставивъ въ первое изъ равенствъ 364 вмѣсто $\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \alpha}$ его величину изъ 379 и вмѣсто α его величину изъ 376, получимъ

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{b}} - V^2\mathfrak{b}\right) n - \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{c}} - V^2\mathfrak{c}\right) m = 0, \\ \text{точно также получимъ и} \\ \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{c}} - V^2\mathfrak{c}\right) l - \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{a}} - V^2\mathfrak{a}\right) n = 0 \\ \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{a}} - V^2\mathfrak{a}\right) m - \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{b}} - V^2\mathfrak{b}\right) l = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 380$$

откуда:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{a}} &= V^2\mathfrak{a} + \varphi l \\ \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{b}} &= V^2\mathfrak{b} + \varphi m \\ \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{c}} &= V^2\mathfrak{c} + \varphi n \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 381$$

гдѣ

$$\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{a}} - V^2\mathfrak{a}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{b}} - V^2\mathfrak{b}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{c}} - V^2\mathfrak{c}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial c}\right)^2 - 4V^2\mathfrak{F} + 4V^4} \quad . \quad . \quad 382$$

Разсмотримъ теперь эллипсоидъ, котораго уравненіе

$$2\mathfrak{F}r^2 = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 383$$

гдѣ r есть длина радіуса вектора, имѣющаго направленіе (a, b, c) и который называется эллипсоидомъ упругости.

Длина радіуса вектора этого эллипсоида, направленіе котораго опредѣляется косинусами a, b, и c, выражается формулой:

$$r^2 = \frac{1}{2\mathfrak{F}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 384$$

Если мы въ этой формулѣ косинусы a, b, c, подчинимъ условію

$$la + mb + nc = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 385$$

то получимъ длину радіусовъ векторовъ, лежащихъ въ плоскости параллельной къ плоскости волны и проходящей черезъ начало координатъ. Чтобы отыскать направленіе осей сѣченія эллипсоида упругости плоскостью параллельной плоскости волны, отыщемъ maximum или minimum r, разсматриваемаго какъ функціи отъ переменныхъ a, b, c, связанныхъ условіями:

$$\left.\begin{aligned} la + mb + nc &= 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 386$$

Вмѣсто того, чтобы отыскивать maximum или minimum функціи r, можно отыскать maximum или minimum функціи $\mathfrak{F}$ при условіяхъ 386.

Для этого имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{a}} \cdot d\mathfrak{a} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{b}} \cdot d\mathfrak{b} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{c}} d\mathfrak{c} = 0 \\ l\, d\mathfrak{a} + m\, d\mathfrak{b} + n\, d\mathfrak{c} = 0 \\ \mathfrak{a}\, d\mathfrak{a} + \mathfrak{b}.\, d\mathfrak{b} + \mathfrak{c}\, d\mathfrak{c} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 387$$

Помноживъ второе равенство на $(-A)$, третье на $(-B)$, складывая и опредѣляя A и B такъ, чтобы коэффиціенты при $d\mathfrak{a}$ $d\mathfrak{b}$ исчезли, получимъ условія maximum'а въ слѣдующемъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{a}} - Al - B\mathfrak{a} = 0 \\ \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{b}} - Am - B\mathfrak{b} = 0 \\ \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{c}} - An - B\mathfrak{c} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 388$$

Помножимъ первое на $\mathfrak{a}$, второе на $\mathfrak{b}$ и третье на $\mathfrak{c}$ и складывая, получимъ:

$$\mathfrak{a}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{a}} + \mathfrak{b}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{b}} + \mathfrak{c}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{c}} = B$$

или

$$B = 2\mathfrak{F} = \frac{1}{\mathfrak{r}^2} \quad \ldots \quad 389$$

Помноживъ первое изъ уравненій 388 на l, второе на m и третье на n и сложивъ, получимъ:

$$l\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{a}} + m\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{b}} + n\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{c}} = A \quad \ldots \quad 390$$

Наконецъ также изъ формулъ 388, получимъ

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial b}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial c}\right)^2=A^2+B^2 \quad . \quad . \quad . \quad 391$$

Подставивъ въ формулу 365 значенія $\frac{\partial F'}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial F'}{\partial \beta}$ и $\frac{\partial F'}{\partial \gamma}$ изъ 379, примѣняя извѣстную формулу

$$(bc'-cb')^2+(ca'-ac')^2+(ab'-ba')^2=$$
$$=(a^2+b^2+c^2)\ (a'^2+b'^2+c'^2)-(aa'+bb'+cc')^2$$

и формулы 390 и 391, получимъ

$$V'=\sqrt{A^2+B^2-A^2}=B=2\mathfrak{F}=\frac{1}{r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 392$$

По формуламъ 382, 391 и 392 получимъ

$$\varphi=\sqrt{A^2+B^2-2BB+B^2}=A. \quad . \quad . \quad . \quad 393$$

Подставляя въ уравненія 388 вмѣсто A и B ихъ величины изъ 392 и 393 увидимъ, что эти уравненія будутъ тожественны съ уравненіями 381. Изъ этого обстоятельства заключаемъ, что если a, b и c принять равными косинусамъ, опредѣляющимъ направленія осей сѣченія эллипсоида упругости плоскостью параллельной плоскости волны, то мы удовлетворимъ уравненіямъ 381. Изъ этого заключаемъ, что направленіе, опредѣляемое косинусами a, b и c, а слѣдовательно и перпендикулярное ему, лежащее также въ плоскости параллельной волнѣ, направленіе (α, β, γ) совпадаютъ каждое съ одной изъ осей параллельнаго плоскости волны сѣченія эллипсоида упругости.

Изъ формулы 392 заключаемъ, что

$$V=\pm\frac{1}{r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 394$$

что значеніе V, соотвѣтствующее направленію (α, β, γ), совпадающему съ одной изъ осей сѣченія эллипсоида упругости, параллельнаго волнѣ, равно единицѣ, дѣленной на половину другой оси того же сѣченія.

§ 126 Направивъ оси координатъ по осямъ эллипсоида упругости, мы получимъ его уравненіе подъ видомъ

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2=1 \ ,$$

или, вводя полярныя координаты,

$$(a^2\mathfrak{a}^2 + b^2\mathfrak{b}^2 + c^2\mathfrak{c}^2)r^2=1 \ ,$$

откуда замѣчаемъ, что

$$2\mathfrak{F}=a^2\mathfrak{a}^2+b^2\mathfrak{b}^2+c^2\mathfrak{c}^2. \quad \ldots\ldots \quad 395$$

Сличая эти выраженія съ формулой 377, замѣчаемъ, что при такомъ выборѣ осей

$$a_{11}=a^2, \ a_{22}=b^2, \ a_{33}=c^2, \ a_{12}=a_{23}=a_{31}=0$$

и что слѣдовательно выраженіе (350) для $2F$ и (369) для $2F'$ тогда значительно упрощаются.

При такомъ выборѣ осей можно найти уравненіе, дающее зависимость между V^2 и l, m и n.

Для этого замѣтимъ, что

$$\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\mathfrak{a}}=a^2\mathfrak{a}, \quad \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\mathfrak{b}}=b^2\mathfrak{b} \text{ и } \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\mathfrak{c}}=c^2\mathfrak{c} \quad \ldots \quad 396$$

и что слѣдовательно равенства 381 напишутся такъ:

$$\left.\begin{aligned}(a^2 - V^2)\,\mathfrak{a} &= \varphi l\\ (b^2 - V^2)\,\mathfrak{b} &= \varphi m\\ (c^2 - V^2)\,\mathfrak{c} &= \varphi n\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 397$$

Умноживъ первое изъ этихъ равенствъ на $\frac{l}{a^2-V^2}$, второе на $\frac{m}{b^2-V^2}$, третье на $\frac{n}{c^2-V^2}$ и сложивъ, получимъ:

$$\frac{l^2}{a^2-V^2}+\frac{m}{b^2-V^2}+\frac{n}{c^2-V^2}=0 \quad ; \quad . \quad . \quad . \quad 398$$

или, умноживъ это уравненіе на V^2 и сложивъ съ равенствамъ:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

получимъ:

$$\frac{a^2l^2}{a^2-V^2}+\frac{bm^2}{b^2-V^2}+\frac{c^2n^2}{c^2-V^2}=1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 399$$

Освободивъ уравненіе 399 отъ знаменателей и раскрывъ скобки, получимъ:

$$-V^6+(a^2+b^2+c^2)V^4-(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)V^2+a^2b^2c^2=$$

$$=a^2b^2c^2l^2 \; -a^2(b^2+c^2)l^2 \; V^2+a^2l^2 \; V^4$$

$$+a^2b^2c^2m^2-b^2(c^2+a^2)m^2V^2+b^2m^2V^4$$

$$+a^2b^2c^2n^2 \; -c^2(a^2+b^2)n^2 \; V^2+c^2n^2 \; V^4$$

Помноживъ членъ съ V^2 въ первой части на

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \; ,$$

сдѣлавъ приведеніе и раздѣливъ обѣ части уравненія на V^2, получимъ:

$$V^4 - V^2[l^2(b^2+c^2)+m^2(c^2+a^2)=n^2(a^2+b^2)]+l^2b^2c^2+m^2c^2a^2+n^2a^2b^2=0 \quad 400$$

откуда, помноживъ постоянный членъ на $l^2+m^2+n^2$, получимъ:

$$V^2=\frac{1}{2}\left[l^2(b^2+c^2)+m^2(c^2+a^2)+n^2(a^2+b^2)\right]\pm$$

$$\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2-2BC-2CA-2AB},$$

$$\text{гдѣ} \quad A=l^2(b^2-c^2)$$

$$B=m^2(c^2-a^2) \qquad \ldots\ldots 401$$

$$C=n^2(a^2-b^2)$$

Пусть $a>b>c$, тогда A и C положительны и B отрицательно.

Такъ какъ подкоренная величина въ формулѣ 401 можетъ быть представлена подъ видомъ

$$(A-C)^2+B^2+(-2BC)+(-2AB),$$

то она положительна.

Подкоренная величина въ выраженіи 401 равна нулю въ томъ случаѣ, когда

$$(A+B-C)^2-4AB=0$$

§ 127 Вообразимъ въ средѣ, въ которой распространяется сотрясеніе плоскими волнами, нѣкоторую плоскость, и пусть p q и r суть косинусы направленія нормали къ этой плоскости. Вычислимъ работу давленія на эту плоскость, разсчитанную на единицу поверхности.

Это давленіе будетъ

$$\left.\begin{aligned}&(p\ X_x + q\ X_y + r\ X_z)\ \frac{\partial u}{\partial t}\\ +\ &(p\ Y_x + q\ Y_y + r\ Y_z)\ \frac{\partial v}{\partial t}\\ +\ &(p\ Z_x + q\ Z_y + r\ Z_z)\ \frac{\partial w}{\partial t}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ 402$$

Мы имѣемъ, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial \sigma}{\partial t},\ \frac{\partial v}{\partial t} = \beta \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad \text{и} \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \gamma \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad \ldots\ldots\ 403$$

$$\frac{\partial F'}{\partial l} = \frac{\partial F'}{\partial x'_x} \cdot \frac{\partial x'_x}{\partial l} + \frac{\partial F}{\partial y'_y} \cdot \frac{\partial y'_y}{\partial l} + \frac{\partial F'}{\partial z'_z} \cdot \frac{\partial z'_z}{\partial l} + \frac{\partial F'}{\partial y'_z} \cdot \frac{\partial y'_z}{\partial l} + \frac{\partial F'}{\partial z'_x} \cdot \frac{\partial z'_x}{\partial l} + \frac{\partial F'}{\partial x'_y} \cdot \frac{\partial x'_y}{\partial l} =$$

$$= \alpha \frac{\partial F'}{\partial x'_x} + \beta \frac{\partial F'}{\partial x'_y} + \gamma \frac{\partial F'}{\partial x'_z},$$

откуда, замѣчая что

$$X_x = \frac{\partial F}{\partial x_x} = \frac{\partial F'}{\partial x'_x} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial s},\ X_y = \frac{\partial F}{\partial x_y} = \frac{\partial F'}{\partial x'_y} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial s} \text{ и } X_z = \frac{\partial F}{\partial x_z} = \frac{\partial F'}{\partial x'_z} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial s},$$

получимъ:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial F'}{\partial l} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial s} = \alpha X_x + \beta X_y + \gamma X_z\\ \text{и точно также:}\\ &\frac{\partial F'}{\partial m} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial s} = \alpha Y_x + \beta Y_y + \gamma Y_z\\ &\frac{\partial F'}{\partial n} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial s} = \alpha Z_x + \beta Z_y + \gamma Z^z\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ 404$$

Замѣнивъ въ выраженіи 402 скорости $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$ и $\frac{\partial w}{\partial t}$ ихъ значеніями изъ 403, и воспользовавшись формулами 404, придадимъ этому выраженію работы слѣдующій видъ:

$$\left(p \frac{\partial F'}{\partial e} + q \frac{\partial F'}{\partial m} + r \frac{\partial F'}{\partial n}\right) \frac{\partial \sigma}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial t} \quad \ldots\ldots\ 405$$

Эта работа, очевидно, равна нулю въ томъ случаѣ, когда направленіе (p, q, r) перпендикулярно къ направленію S, опредѣляемому косинусами:

$$Cos(S,x)=\frac{\frac{\partial F'}{\partial l}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F'}{\partial l}\right)^2+\left(\frac{\partial F'}{\partial m}\right)^2+\left(\frac{\partial F'}{\partial n}\right)^2}},$$

$$Cos(S,y)=\frac{\frac{\partial F'}{\partial m}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F'}{\partial l}\right)^2+\left(\frac{\partial F'}{\partial m}\right)^2+\left(\frac{\partial F'}{\partial n}\right)^2}}$$

и $$Cos(S,z)=\frac{\frac{\partial F'}{\partial n}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F'}{\partial l}\right)^2+\left(\frac{\partial F'}{\partial m}\right)^2+\left(\frac{\partial F'}{\partial n}\right)^2}}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что если плоскость параллельна направленію S, то по одну сторону ея можетъ происходить движеніе, когда по другую ея сторону среда находится въ спокойномъ состояніи. Это направленіе S называется направленіе луча.

§ 128 Легко вычислить уголъ, который образуетъ направленіе луча съ направленіемъ нормали къ волнѣ. Для этого замѣтимъ, что

$$F'=\mathfrak{F},$$

откуда:

$$\frac{\partial F'}{\partial l}=\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial l}+\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial b}\cdot\frac{\partial b}{\partial l}+\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial c}\cdot\frac{\partial c}{\partial l}$$

или

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F'}{\partial l}&=\beta\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{c}}-\gamma\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{b}}\\ \frac{\partial F'}{\partial m}&=\gamma\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{a}}-\alpha\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{c}}\\ \frac{\partial F'}{\partial n}&=\alpha\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{b}}-\beta\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{a}}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad 406$$

и также

Вставляя въ эти формулы значенія производныхъ изъ формулъ (381) и замѣчая, что

$$\mathfrak{a}=\gamma m-\beta n,\ \mathfrak{b}=\alpha n-\gamma l,\ \mathfrak{c}=\beta l-\alpha m$$

и что слѣдовательно

$$l=\beta\mathfrak{c}-\gamma\mathfrak{b},\ m=\gamma\mathfrak{a}-\alpha\mathfrak{c},\ n=\alpha\mathfrak{b}-\beta\mathfrak{a}\ ,$$

получимъ

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F'}{\partial l}&=V^2l-\varphi\mathfrak{a}\\ \frac{\partial F'}{\partial m}&=V^2m-\varphi\mathfrak{b}\\ \frac{\partial F'}{\partial n}&=V^2n-\varphi\mathfrak{c}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad 407$$

Если E искомый уголъ луча съ нормалью въ плоскости волны, то

$$Cos E=\frac{l\frac{\partial F'}{\partial l}-m\frac{\partial F'}{\partial m}+n\frac{\partial F'}{\partial n}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F'}{\partial l}\right)^2+\left(\frac{\partial F'}{\partial m}\right)^2+\left(\frac{\partial F'}{\partial n}\right)^2}}$$

или подставляя выраженія для $\frac{\partial F'}{\partial l}$, $\frac{\partial F'}{\partial m}$ и $\frac{\partial F'}{\partial n}$ изъ 407 и замѣчая, что

$$l\mathfrak{a}+m\mathfrak{b}+n\mathfrak{c}=0\ ,$$

получимъ

$$Cos\, E' = \frac{V^2}{\sqrt{V^4+\varphi^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 408$$

откуда

$$V^2 tang\, E = \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 409$$

§ 129 Обозначая $Cos\,(Sx)$, $Cos\,(Sy)$ и $Cos\,(Sz)$ соотвѣтственно черезъ λ, μ и ν, получимъ:

$$\frac{\lambda}{\frac{\partial F'}{\partial l}} = \frac{\mu}{\frac{\partial F'}{\partial l}} = \frac{\nu}{\frac{\partial F'}{\partial l}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 410$$

или, согласно формуламъ 407,

$$\frac{\lambda}{V^2 l - \varphi a} = \frac{\mu}{V^2 m - \varphi b} = \frac{\nu}{V^2 n - \varphi c} = \frac{1}{\sqrt{V^4+\varphi^2}} = \frac{Cos\, E}{V^2} \quad . \quad . \quad 411$$

откуда, полагая $VSec\, E = S$, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} VS\lambda &= V^2 l - \varphi a \\ VS\mu &= V^2 m - \varphi b \\ VS\nu &= V^2 n - \varphi c \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 412$$

Изъ равенствъ 397 и 409 имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} \varphi a &= \frac{\varphi^2 l}{a^2 - V^2} = \frac{V^4 tang^2 E.l}{a^2 - V^2} \\ \varphi b &= \frac{\varphi m}{b^2 - V^2} = \frac{V^4 tang^2 E.m}{b^2 - V^2} \\ \varphi c &= \frac{\varphi^2 n}{c^2 - V^2} = \frac{V^4 tang^2 E.n}{c^2 - V^2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 413$$

Вставляя эти выраженія въ формулы 412, мы получимъ

$$S\lambda = Vl\left(1 - \frac{V^2 tang^2 E}{a^2 - V^2}\right)$$

$$S\lambda = Vl\left(1 - \frac{V^2 Sec^2 E - V^2}{a^2 - V^2}\right),$$

или наконецъ

$$\left.\begin{aligned} S\lambda &= Vl\ \left(1 - \frac{S^2 - V^2}{a^2 - V^2}\right) \\ S\mu &= Vm\left(1 - \frac{S^2 - V^2}{b^2 - V^2}\right) \\ S\nu &= Vn\ \left(1 - \frac{S^2 - V^2}{c^2 - V^2}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 414$$

и точно также

Формулы 414 можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} Vl &= S\lambda\left(1 + \frac{S^2 - V^2}{a^2 - S^2}\right) \\ Vm &= S\mu\left(1 + \frac{S^2 - V^2}{b^2 - S^2}\right) \\ Vn &= S\nu\ \left(1 + \frac{S^2 - V^2}{c^2 - S^2}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 415$$

или въ слѣдующемъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{S\lambda}{a^2 - S^2} &= \frac{Vl}{a^2 - V^2} \\ \frac{S\mu}{b^2 - S^2} &= \frac{Vm}{b^2 - V^2} \\ \frac{S\nu}{c^2 - S^2} &= \frac{Vn}{c^2 - V^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 416$$

Помноживъ первое изъ равенствъ 415 на $S\lambda$, второе на $S\mu$, третье на $S\nu$ и сложивъ, получимъ:

$$SV(\lambda l+\mu m+\nu n)=S^2+S^2(S^2-V^2)\left\{\frac{\lambda^2}{a^2-S^2}+\frac{\mu^2}{b^2-S^2}+\frac{\nu^2}{c^2-S^2}\right\}$$

$$SV\,Cos\,E=V^2=S^2+S^2(S^2-V^2)\left\{\frac{\lambda^2}{a^2-S^2}+\frac{\mu^2}{b^2-S^2}+\frac{\nu^2}{c^2-S^2}\right\}$$

Такъ какъ S^2-V^2 вообще не равно нулю, то сокращая на S^2-V^2, получимъ:

$$\frac{\lambda^2}{a^2-S^2}+\frac{\mu^2}{b^2-S^2}+\frac{\nu^2}{c^2-S^2}+\frac{1}{S^2}=0 \quad . \quad . \quad . \quad 417$$

Складывая съ этимъ равенствомъ тождество

$$\frac{\lambda^2}{S^2}+\frac{\mu^2}{S^2}+\frac{r^2}{S^2}-\frac{1}{S^2}=0,$$

получимъ, сокративъ на S^2:

$$\frac{a^2\lambda^2}{a^2-S^2}+\frac{b^2\mu^2}{b^2-S^2}+\frac{c^2\nu^2}{c^2-S^2}=0 \quad . \quad . \quad . \quad 418$$

§ 130. Величина $S = V\,Sec\,E$, опредѣляющаяся изъ уравненія 418, называется скоростью распространенія свѣта по лучу.

Можно разсматривать векторъ S (λ, μ, ν) какъ радіусъ векторъ нѣкоторой поверхности. Мы получимъ уравненіе этой поверхности, полагая въ формулѣ 418 $\lambda S = x$, $\mu S = y$, $\nu S = z$; это уравненіе будетъ

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{a^2x^2}{a^2-S^2}+\dfrac{b^2y^2}{b^2-S^2}+\dfrac{c^2z^2}{c^2-S^2}=0\\ S^2=x^2+y^2+z^2\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad 419$$

гдѣ

Поверхность эта называется волновою поверхностью Френеля.

Опредѣлимъ направленіе нормали къ этой поверхности. Для этого мы представимъ уравненіе 418, сложивъ его съ тождествомъ

$$\frac{x^2}{S^2}+\frac{y^2}{S^2}+\frac{z^2}{S^2}=1\,,$$

въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{x^2}{a^2-S^2}+\frac{y^2}{b^2-S^2}+\frac{z^2}{c^2-S^2}+1=0\,. \quad . \quad . \quad . \quad 420$$

Мы получимъ тогда, обозначая черезъ N направленіе искомой нормали:

$$\left.\begin{array}{ll} Cos(Nx)\text{пропорц: } x & \left\{\frac{1}{a^2-S^2}+\left[\left(\frac{x}{a^2-S^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2-S^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2-S^2}\right)^2\right]\right\} \\ Cos(Ny)\text{пропорц: } y & \left\{\frac{1}{b^2-S^2}+\left[\left(\frac{x}{a^2-S^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2-S^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2-S^2}\right)^2\right]\right\} \\ Cos(Nz)\text{пропорц: } z & \left\{\frac{1}{c^2-S^2}+\left[\left(\frac{x}{a^2-S^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2-S^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2-S^2}\right)^2\right]\right\} \end{array}\right\} \ldots 421$$

Но по формулѣ 415 мы имѣемъ

$$Vl=S\lambda\left(1+\frac{S^2-V^2}{a^2-S^2}\right)\,,$$

откуда

$$\frac{V}{S^2-V^2}\,l=S\lambda\,\left(\frac{1}{S^2-V^2}+\frac{1}{a^2-S^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad 422$$

Такимъ же образомъ получимъ изъ уравненія 414:

$$\frac{S\lambda}{S^2-V^2}=Vl\left(\frac{1}{S^2-V^2}-\frac{1}{a^2-V^2}\right)\,.$$

Возведемъ обѣ части каждаго изъ трехъ подобныхъ послѣднему равенствъ въ квадратъ и, сложивъ, получимъ:

$$\frac{S^2}{(S^2-V^2)^2} = V^2\frac{1}{(S^2-V^2)^2} + V^2\left(\frac{l^2}{(a^2-V^2)^2}+\frac{m^2}{(b^2-V^2)^2}+\frac{n^2}{(c^2-V^2)^2}\right)$$

$$-\frac{2V^2}{S^2-V^2}\left(\frac{l^2}{a^2-V^2}+\frac{m^2}{b^2-V^2}+\frac{n^2}{c^2-V^2}\right),$$

или, согласно равенству 398:

$$\frac{S^2-V^2}{(S^2-V^2)^2} = V^2\left(\frac{l^2}{(a^2-V^2)^2}+\frac{m^2}{(b^2-V^2)^2}+\frac{n^2}{(c^1-V^2)^2}\right),$$

откуда

$$\frac{1}{S^2-V^2} = V^2\left(\frac{l^2}{(a^2-V^2)^2}+\frac{m^2}{(b^2-V^2)^2}+\frac{n^2}{(c^2-V^2)^2}\right) \quad . \quad . \quad 423$$

Сложивъ почленно квадраты обѣихъ частей равенствъ 416, получимъ:

$$V^2\left[\left(\frac{l}{a^2-V^2}\right)^2+\left(\frac{m}{b^2-V^2}\right)^2+\left(\frac{n}{c^2-V^2}\right)^2\right] =$$

$$= S^2\left[\left(\frac{\lambda}{a^2-S^2}\right)^2+\left(\frac{\mu}{b^2-S^2}\right)^2+\left(\frac{\nu}{c^2-S^2}\right)^2\right] =$$

$$= \left(\frac{x}{a^2-S^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2-S^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2-S^2}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad 424$$

Воспользовавшись формулами 422, 423 и 424, и замѣчая, что $S\lambda = x$, $S\mu = y$ и $S\nu = z$, преобразуемъ 421 слѣдующимъ образомъ:

$$\left.\begin{array}{l} Cos(Nx) \text{ пропорціонально } x\left[\frac{1}{a^2-S^2}+\frac{1}{S^2-V^2}\right] = \frac{V}{S^2-V^2}\cdot l \\ Cos(Ny) \text{ пропорціонально } y\left[\frac{1}{b^2-S^2}+\frac{1}{S^2-V^2}\right] = \frac{V}{S^2-V^2}\cdot m \\ Cos(Nz) \text{ пропорціонально } z\left[\frac{1}{c^2-S^2}+\frac{1}{S^2-V^2}\right] = \frac{V}{S^2-V^2}\cdot n \end{array}\right\} 425$$

откуда заключаемъ, что направленіе (l, m, n) параллельно нормали къ поверхности волны, проведенной въ точкѣ, лежащей въ концѣ вектора $S(\lambda, \mu, \nu)$. Отсюда слѣдуетъ, что касательная плоскость къ волновой поверхности, проведенная къ ней въ концѣ вектора $S(\lambda, \mu, \nu)$, параллельна къ плоскости волны.

Уравненіе этой касательной плоскости будетъ:

$$lX+mY+nZ=Const \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 426$$

гдѣ X, Y и Z текущія координаты.

Постоянное опредѣляется тѣмъ условіемъ, чтобы эта плоскость проходила черезъ точку (x, y, z), лежащую въ концѣ вектора S, откуда

$$Const=xl+ym+zn=S\lambda l+S\mu m+S\nu n=$$

$$=SCos(S, V)=SCos\,\mathrm{E}=V$$

Такимъ образомъ уравненіе плоскости 426 напишется такъ:

$$lX+mY+nZ=V \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 427$$

гдѣ V опредѣляется изъ уравненія

$$\frac{l^2}{a^2-V^2}+\frac{m^2}{b^2-V^2}+\frac{n^2}{c^2-V^2}=0 \quad . \quad . \quad . \quad 428$$

Распространеніе сотрясеній волнами, образующими поверхности Френеля

§ 131 Мы видѣли, что въ кристаллической средѣ, для которой уравненіе эллипсоида упругости выражается формулой

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 429$$

возможно распространеніе свѣтовыхъ колебаній плоскими волнами.

Такимъ названіемъ, мы обозначали колебательное движеніе, состоящее въ томъ, что точка среды, положеніе которой опредѣляется координатами x, y, z, получаетъ въ моментъ t отклоненіе, проэкціи котораго на оси координатъ выражаются формулами:

$$\left.\begin{aligned} u &= \mathrm{E}'\alpha\sigma' + \mathrm{E}''\alpha''\sigma'' \\ v &= \mathrm{E}'\beta\sigma' + \mathrm{E}''\beta''\sigma'' \\ w &= \mathrm{E}'\gamma\sigma' + \mathrm{E}''\gamma''\sigma'' \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 430$$

гдѣ σ' и σ'' удовлетворяютъ дифференціальнымъ уравненіямъ

$$\frac{\partial^2\sigma'}{\partial t^2} = V'^2\frac{\partial^2\sigma'}{\partial r} \text{ и } \frac{\partial^2\sigma''}{\partial t} = V''^2\frac{\partial^2\sigma''}{\partial r} \quad . \quad . \quad . \quad 431$$

и суть, стало быть, функціи вида

$$f'\left(\frac{r}{V'}\pm t\right) \text{ и } f''\left(\frac{r}{V''}\pm t\right),$$

гдѣ

$$r = l(x-x_1) + m(y-y_1) + n(z-z_1), \quad . \quad . \quad . \quad 432$$

l, m и n—косинусы, опредѣляющіе направленіе нормали къ плоскости волны, V' и V'' суть большій и меньшій изъ двухъ положительныхъ корней биквадратнаго уравненія:

$$\frac{l^2}{a^2-V^2} + \frac{m^2}{b^2-V^2} + \frac{n^2}{c^2-V^2} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad 433$$

служащіе въ свою очередь для вычисленія косинусовъ α', β' γ', и α'', β'', γ'', опредѣляющихъ направленіе отклоненій изъ слѣдующей системы уравненій:

$$\left.\begin{aligned}
&(a^2 - V'^2)\frac{\mathfrak{a}'}{l} = (b^2 - V'^2)\frac{\mathfrak{b}'}{m} = (c^2 - V'^2)\frac{\mathfrak{c}'}{n} \\
&\alpha' = \mathfrak{b}'n - \mathfrak{c}'m \\
&\beta' = \mathfrak{c}'l - \mathfrak{a}'n \\
&\gamma' = \mathfrak{a}'m - \mathfrak{b}'l \\
&1 = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \; 434$$

$$\left.\begin{aligned}
&(a^2 - V''^2)\frac{\mathfrak{a}''}{l} = (b^2 - V''^2)\frac{\mathfrak{b}''}{m} = (c^2 - V''^2)\frac{\mathfrak{c}''}{n} \\
&\alpha''' = \mathfrak{b}''n - \mathfrak{c}''m \\
&\beta'' = \mathfrak{c}''l - \mathfrak{a}''n \\
&\gamma'' = \mathfrak{a}''m - \mathfrak{b}''l \\
&1 = \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \; 435$$

и наконецъ E′ и E″ произвольныя постоянныя величины.

Такъ какъ видъ функцій

$$f'\left(\frac{r}{V'} \pm t\right) \text{ и } f''\left(\frac{r}{V''} \pm t\right)$$

совершенно произволенъ, то мы можемъ эти функціи выбрать такъ, чтобы онѣ только для значеній аргумента, лежащихъ между нулемъ и нѣкоторой положительной величиной i, отличались отъ нуля.

§ 132 Совмѣстныя дифференціальныя уравненія, которымъ должны удовлетворить выраженія для проэкцій отклоненія частицы въ кристаллической средѣ, имѣютъ слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \\
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \\
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \\
X_x = \frac{\partial F}{\partial x_x}\,;\; Y_y &= \frac{\partial F}{\partial y_y}\,;\; Z_z = \frac{\partial F}{\partial x_y} \\
2F = a_0(x_x + y_y + z_z)^2 & \\
+ a^2(y_z^2 - 4y_y z_z) + b^2(z_x^2 - 4z_z x_x) + c^2(x_y^2 - 4x_x y_y) & \\
x_x = \frac{\partial u}{\partial x}\,;\; y_y = \frac{\partial v}{\partial y}\,;\; z_z = \frac{\partial w}{\partial z} & \\
y_z = z_y = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y},\; z_x = x_z = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z},\; x_y = y_x = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &
\end{aligned}\right\} \ldots 436$$

Эта система уравненій линейна по отношенію къ u, v, w и ихъ производнымъ, а потому если ей удовлетворяютъ выраженія (430), то этой же системѣ уравненій можно удовлетворить и выраженіями слѣдующаго вида:

$$\left.\begin{aligned}
u &= \int E'(l,m,n)\,\alpha' f'\left(\frac{r}{V'} + t\right) dS \\
&+ \int E''(l,m,n)\,\alpha'' f''\left(\frac{r}{V''} + t\right) dS \\
v &= \int E'(l,m,n)\,\beta' f'\left(\frac{r}{V'} + t\right) dS \\
&+ \int E''(l,m,n)\,\beta'' f''\left(\frac{r}{V''} + t\right) dS \\
w &= \int E'(l,m,n)\,\gamma' f'\left(\frac{r}{V'} + t\right) dS \\
&+ \int E''(l,m,n)\,\gamma'' f''\left(\frac{r}{V''} + t\right) dS
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 437$$

гдѣ E' и E'' суть произвольныя функціи отъ косинусовъ l m и n. Эти косинусы мы будемъ разсматривать какъ координаты нѣкоторой точки на сферѣ S, описанной радіусомъ равнымъ единицѣ изъ точки (x_1, y_1, z_1), какъ изъ центра; dS есть элементъ этой сферы, а интегрированіе распространено на всю сферу.

§ 133 Вычислимъ значеніе интеграловъ, входящихъ въ составъ выраженія u для $t<0$. Для этого замѣтимъ, что для всѣхъ точекъ сферы s, лежащихъ въ той ея половинѣ, которая противоположна точкѣ (x, y, z) выраженіе r, равное проэкціи линіи ϱ, соединяющей точку (x, y, z) съ точкою (x_1, y_1, z_1) на направленіе (l, m, n), есть величина отрицательная. По условію для функцій f' и f'' подъинтегральная величина для противуположнаго точкѣ (x, y, z) полушарія будетъ равна нулю, а потому интегрированіе слѣдуетъ производить только по тому полушарію, которое обращено къ этой точкѣ.

Вмѣсто того, чтобы интегрировать по полушарію сферы S, можно интегрировать по сферѣ s, которая построена на линіи ϱ какъ на діаметрѣ. Эта сфера есть геометрическое мѣсто основаній перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точки (x_1, y_1, z_1) на плоскости, проходящія чрезъ точку (x, y, z). Основанія этихъ перпендикуляровъ мы для краткости будемъ называть полюсами плоскостей, а сферу s сферою полюсовъ по отношенію къ точкамъ (x, y, z) и (x_1, y_1, z_1).

Означая чрезъ a, b, c координаты полюса плоскости, выражающейся уравненіемъ

$$l(x-x_1)+m(y-y_1)+n(z-z_1)=r \quad . \quad . \quad . \quad 438$$

мы увидимъ, что

$$r = \sqrt{(a-x_1)^2 + (b-y_1)^2 + (c-z_1)^2}$$

$$l = \frac{a-x_1}{r}, \quad m = \frac{b-y_1}{r}, \quad n = \frac{c-z_1}{r},$$

$$ds = dS.r^2 \frac{1}{Cos(r,\varrho)} = d\,S.r\varrho.$$

Воспользовавшись этими формулами, мы можемъ выраженіе для u (435) преобразовать слѣдующимъ образомъ:

$$u = \int \alpha' E'(l, m, n) \frac{1}{r\varrho} f'\left(\frac{r}{V'} + t\right) ds$$

$$+ \int \alpha'' E''(l, m, n) \frac{1}{r\varrho} f''\left(\frac{r}{V''} + t\right) ds$$

Здѣсь въ первомъ интегралѣ интегрированіе распространено на ту часть сферы S, которая лежитъ между поверхностями описанными изъ точки (x_1, y_1, z_1) радіусами векторами

$$-V'(t-i) \text{ и } -V't \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 439$$

а во второмъ на ту ея часть, которая лежитъ между поверхностями описанными изъ той же точки радіусами векторами

$$-V''(t-i) \text{ и } -V''t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 440$$

ибо только для этихъ частей сферы въ первомъ интегралѣ аргументъ $\left(\frac{r}{V'} + t\right)$, а во второмъ аргументъ $\left(\frac{r}{V''} + t\right)$ таковъ, что функціи f' и f'' не равны нулю.

Положивъ

$$H' = \frac{\alpha' E'(l,m,n)}{r\varrho}, \quad H'' = \frac{\alpha'' E''(l,m,n)}{r\varrho} \quad . \quad . \quad . \quad 441$$

$$\zeta' = \frac{\sqrt{(a-x_1)^2+(b-y_1)^2+(c-z_1)^2}}{V'}, \text{ и } \zeta'' = \frac{\sqrt{(a-x_1)^2+(b-y_1)^2+(c-z_1)^2}}{V''}$$

получимъ для u слѣдующее выраженіе

$$u = \int H f'(\zeta' + t) ds + \int H' f''(\zeta'' + t) ds \quad . \quad . \quad 442$$

§ 134 Вычислимъ сначала первый интегралъ, входящій въ выраженіе для u, и при этомъ для краткости письма на время отбросимъ значекъ

Если функція $E(l, m, n)$ конечна, то и H вездѣ на сферѣ s конечно, за исключеніемъ точки (x_1, y_1, z_1) гдѣ $r = 0$. Если интегралъ содержитъ элементъ ds, на которомъ лежитъ точка (x_1, y_1, z_1), что можетъ случиться только въ томъ случаѣ когда $t = 0$, то мы разобьемъ интегралъ на двѣ части: интегралъ ω, распространенный на безконечно малый элементъ сферы s, лежащій около точки (x_1, y_1, z_1), и другой интегралъ Q на остальную часть сферы s. Въ первомъ интегралѣ введемъ полярные координаты, имѣющія начало въ центрѣ сферы s, а полярную ось направленную къ точкѣ (x_1, y_1, z_1), тогда называя чрезъ θ дополненіе до широты и чрезъ φ долготу точки (a, b, c) сферы s, мы получимъ, что

$$\omega = \iint E \frac{1}{\varrho . r} f(\zeta + t) . {}^1/_2 \varrho d\theta . {}^1/_2 \varrho Sin\theta d\varphi .$$

а такъ какъ

$$Sin\theta = 2Sin \frac{\theta}{2} Cos \frac{\theta}{2} = \frac{r}{\varrho} Cos \frac{\theta}{2}$$

то

$$\omega = \iint Ef(\zeta + t) \, d\theta d\varphi Cos \frac{\theta}{2}$$

здѣсь подъинтегральная величина конечна и непрерывна, а интегрированіе распространяется на безконечно малый конической уголъ, слѣдовательно въ предѣлѣ при уменьшающемся коническомъ углѣ величина интеграла стремится къ нулю.

Займемся теперь изслѣдованіемъ втораго интеграла, который мы обозначили чрезъ Q. Разобьемъ этотъ интегралъ на такіе интегралы q_1, q_2 .... q_n, въ которыхъ интегрированіе распространяется на части сферы s, ограниченныя контурами, ни одна конечная часть которыхъ не совпадаетъ съ одною изъ кривыхъ, образуемыхъ пересѣченіемъ сферы s съ поверхностями, выражающимися уравненіями вида

$$\frac{\sqrt{(a-x_1)^2+(b-y_1)^2+(c-z_1)^2}}{V} = \zeta(a, b, c) = Const. \quad . \quad 443$$

Найдемъ значеніе этихъ интеграловъ для весьма малаго i.

§ 135 Разсмотримъ тотъ случай, когда интегралъ q распространенный на такую часть $\int$ сферы s, на которой функція ζ не имѣетъ ни максимума, ни минимума.

Полагая

$$F(\zeta) = \int H ds. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 444$$

гдѣ интегрированіе распространяется на ту часть элементарной поверхности $\int$, которая находится между поверхностями

$$\zeta(a, b, c) = \zeta$$

и

$$\zeta(a, b, c) = \zeta_0$$

мы будемъ имѣть

$$d\zeta \frac{\partial F(z)}{\partial \xi} = \int H ds \quad \ldots\ldots\ldots \quad 445$$

гдѣ интегрированіе производится по полоскѣ элементарной поверхности $\int$, заключающейся между поверхностями

$$\zeta(a, b, c) = \zeta$$

и

$$\zeta(a, b, c) = \zeta + d\zeta$$

Такъ какъ для такой полоски можно $f(\zeta + t)$ принять постояннымъ, то помноживъ обѣ части равенства (445) на эту величину, получимъ

$$d\zeta f(\zeta + t) \frac{\partial F}{\partial \xi} = \int H f(\zeta + t) ds. \ldots\ldots 446$$

и интегрируя между предѣлами ζ_1 и ζ_2, гдѣ ζ_1 есть наименьшее и ζ_2 наибольшее значеніе функціи ζ на протяженіи части $\int$ сферической поверхности s, получимъ, что

$$q = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\partial F}{\partial \xi} f(\zeta + t) d\zeta \quad \ldots\ldots\ldots \quad 447$$

Интегрируя по частямъ получимъ, что

$$q = + \left[\frac{\partial F}{\partial \xi} \varphi(\zeta + t) \right]_{\xi_1}^{\xi_2} - \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} \varphi(\zeta + t) d\zeta. \ldots\ldots 448$$

гдѣ $\varphi(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(\alpha) d\alpha$. Относительно функціи φ положимъ, что она отлична отъ нуля только для аргументовъ, лежащихъ между 0 и i.

Относительно функціи $E(l, m, n)$ сдѣлаемъ предположеніе, что если эта функція имѣетъ перерывъ вдоль нѣкоторой линіи на сферѣ s, то эта линія не должна ни одною своею конечною частію совпадать съ одной изъ линій, образующихся пересѣченіемъ сферы съ одною изъ поверхностей, уравненіе которыхъ вообще выражается формулой (443). При этомъ ограниченіи, очевидно, какъ сама $F(\zeta)$, такъ и производная ея $\frac{\partial F}{\partial \xi}$ непрерывны.

Вслѣдствіе непрерывности функціи $\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)$ послѣдній интегралъ исчезнетъ. Дѣйствительно, если φ_m есть среднее значеніе функціи $\varphi(\zeta+t)$ для аргументовъ лежащихъ между ζ_1+t и ζ_2+t, то

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\partial F^2}{\partial \xi^2}\, \varphi(\zeta+t)\, d\zeta = \varphi_m \left[\frac{\partial F}{\partial \xi}\right]_{\xi=-t}^{\xi=-t+i}$$

что вслѣдствіе непрерывности $\frac{\partial F}{\partial \xi}$ для i безконечно малаго равно нулю.

Такъ какъ

$$d\zeta \left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)_{\xi_1} \quad \text{и} \quad d\zeta \left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)_{\xi_2}$$

представляютъ изъ себя интегралы, распространенные на безконечно узкія полоски, длина которыхъ при этомъ безконечно мала, то факторы:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)_{\xi_1} \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)_{\xi_2} \ldots \ldots \ldots \quad 449$$

въ выраженіи (448) должны быть безконечно малыя величины, а потому и весь интегралъ q въ предѣлѣ стремится къ нулю.

§ 136 Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію того случая, когда въ нѣкоторой точкѣ p части σ поверхности s, ζ имѣетъ или максимумъ, или минимумъ.

Легко сообразить что кривыя, происшедшія отъ пересѣченія сферы s поверхностями

$$\zeta(a, b, c) = Const.$$

будутъ замкнутыя кривыя, такъ какъ эти кривыя соединяютъ между собою полюсы плоскихъ волонъ единовременно достигшихъ точки x, y, z, распространяясь со скоростію V, или V'', которыя суть однозначныя функціи отъ l, m, n.

Принявъ максимальное или минимальное значеніе, которое функція ζ имѣетъ въ точкѣ p площадки σ и которое мы будемъ обозначать чрезъ Z, за начальное мы получимъ

$$q = -\left[\frac{\partial F}{\partial \xi}\varphi(\zeta+t)\right]_{Z}^{\xi_1} + \int_{Z}^{\xi_1}\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}\varphi(\zeta+t)d\zeta \quad . \quad . \quad 450$$

Точка p есть очевидно точка прикосновенія сферы s съ поверхностью

$$\zeta(a, b, c) = Z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 451$$

Если мы начало координатной системы положимъ въ точкѣ p, ось ζ этой новой системы направимъ по общей нормали сферы s и поверхности, выражающейся въ первоначальной системѣ координатъ уравненіемъ (451), а оси x и y направимъ по линіямъ главныхъ кривизнъ упомянутой по-

поверхности, то уравненіе сферы s въ этихъ въ новыхъ координатахъ выразится такъ:

$$c=\frac{1}{\varrho}a^2+\frac{1}{\varrho}b^2+\frac{1}{\varrho}c^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 452$$

гдѣ a, b, и c координаты точки (a, b, c) сферы въ новой системѣ. Для точекъ сферы, лежащихъ безконечно близко къ точкѣ p, можно написать

$$c=\frac{1}{\varrho}a^2+\frac{1}{\varrho}b^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 453$$

Пусть уравненіе (451) выражается въ новыхъ координатахъ слѣдующимъ образомъ

$$c=g(a, b, Z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 454$$

тогда для другой какой либо поверхности, для которой параметръ ζ весьма мало отличался отъ Z, мы будемъ имѣть уравненіе

$$c=g[a, b, Z-(Z-\zeta]=g(a, b, Z)-(Z-\zeta)\left[\frac{\partial g}{\partial \xi}\right]_{\xi=Z} \quad . \quad . \quad . \quad 455$$

Для точекъ этой поверхности безконечно близкихъ къ точкѣ p мы можемъ писать

$$c=\frac{1}{2\varrho_1}a^2+\frac{1}{2\varrho_2}b^2+(\zeta-Z)\varepsilon_p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 456$$

гдѣ

$$\varepsilon_p=\left[\frac{\partial g}{\partial \xi}\right]_{\xi=Z}$$

а ϱ_1 и ϱ_2 главные радіусы кривизнъ поверхности (453) въ точкѣ p.

Вычитая уравненіе (452), изъ уравненія (455) получимъ уравненіе проэкціи кривой пересѣченія сферы s съ поверхностью

$$\zeta(a, b, c) = \zeta.$$

на общую касательную плоскость въ точкѣ p, или что тоже на плоскость $x\ y$. Уравненіе этой проэкціи слѣдующее:

$$\mu_1 a^2 + \mu_2 b^2 = (\zeta - Z)\,\varepsilon_p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 457$$

гдѣ

$$\mu_1 = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{2\varrho_1} \quad \text{a} \quad \mu_2 = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{2\varrho_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 458$$

Уравненіе (456) представляетъ вообще эллипсисъ, ибо кривыя пересѣченія суть замкнутыя кривыя.

Въ формулѣ (444) H можно принять постояннымъ и тогда

$$F = H_p \int ds = H_p \omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 459$$

гдѣ ω есть площадь, ограниченная вообще частію кривою пересѣченія сферы s съ поверхностью (443), частію контуромъ разсматриваемой небольшой части σ этой сферы s, а если кривая пересѣченія сферы съ поверхностью (443) вся укладывается на разсматриваемой части σ, то одною этою кривою, и въ этомъ послѣднемъ случаѣ площадь ω, ограниченную ею, можно принять равной площади эллипсиса (456), то есть тогда

$$\omega = \frac{\pi \varepsilon_p (\zeta - Z)}{\sqrt{\mu_1 . \mu_2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 460$$

и

$$F = H_p \frac{\pi \varepsilon_p (\zeta - Z)}{\sqrt{\mu_1 . \mu_2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 461$$

Такъ какъ въ этомъ случаѣ $\frac{\partial F}{\partial \xi}$ конечна и непрерывна, а относительно

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)_{\xi_2}$$

можно сказать тоже, что въ предъидущемъ случаѣ было сказано относительно выраженій (450), то

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \xi}\varphi(\zeta+\delta)\right]_Z^{\xi_2} = \left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)_Z \varphi(Z+t) \quad . \quad . \quad 462$$

Но

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)_Z = \frac{\pi \varepsilon_p}{\sqrt{\mu_1 . \mu_2}} . H_p, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 463$$

а, слѣдовательно, выраженіе (450) мы можемъ написать такъ:

$$q = H_p \frac{\pi \varepsilon_p}{\sqrt{\mu_1 . \mu_2}} \varphi(Z+t) \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 464$$

или подставляя вмѣсто H_p его значеніе изъ (441)

$$q = \frac{E(l_p, m_p, n_p)}{r_p} . \frac{\pi \varepsilon_p}{\sqrt{\mu_1 . \mu_2}} . \frac{\alpha_p}{\varrho} \varphi(Z+t) \quad . \quad . \quad . \quad 465$$

Полагая здѣсь

$$\frac{E(l_p\, m_p\, n_p)}{r_p} . \frac{\pi \varepsilon_p}{\sqrt{\mu_1 . \mu_2}} = C_p . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 466$$

получимъ окончательно

$$q = \frac{C_p}{\varrho} \alpha_p \varphi(Z+t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 467$$

§ 137 Разсмотримъ теперь функціи, входящія въ выраженіе для C_p.

Функція $E(l, m, n)$ есть, какъ мы уже положили въ началѣ совершенно произвольная, однозначная функція косинусовъ l, m и n, прерывность которой однако ограничена въ § 135 нѣкоторыми условіями.

Какъ мы видѣли

$$\varepsilon = \frac{\partial g}{\partial \xi} = \frac{\partial c}{\partial \xi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 468$$

Это есть отношеніе разстоянія между двумя точками: точкою p, лежащею на поверхности, выражающейся уравненіемъ

$$\zeta(a, b, c) = \zeta \quad \ldots\ldots\ldots \quad 469$$

и точкою p', лежащей по направленію нормали на поверхности, выражающейся уравненіемъ

$$\zeta(a, b, c) = \zeta - d\zeta \quad \ldots\ldots\ldots \quad 470$$

къ приращенію $d\zeta$, которое получаетъ параметръ этихъ поверхностей при переходѣ отъ первой изъ нихъ ко второй.

Это отношеніе легко вычислить. Для этого обозначимъ координаты точки p, чрезъ a_0, b_0, c_0, тогда координаты точки p' будутъ

$$a_0 - Cos\,(\mathfrak{c}x)\,dc$$

$$b_0 - Cos\,(\mathfrak{c}y)\,dc$$

$$c_0 - Cos\,(\mathfrak{c}z)\,dc$$

Такъ какъ координаты точки p' должны удовлетворять уравненію 469 и координаты точки p уравненію 470, то

$$\zeta(a_0 - Cos(\mathfrak{c}, x)\,d\,\mathfrak{c},\ b_0 - Cos\,(\mathfrak{c}, y)\,d\,\mathfrak{c},\ c_0 - Cos\,(\mathfrak{c}, z)\,dc)$$

$$= \zeta(a_0, b_0, c_0) - \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial a} Cos(\mathfrak{c}x) + \frac{\partial \xi}{\partial b} Cos(\mathfrak{c}y) + \frac{\partial \xi}{\partial c} Cos\,(\mathfrak{c}z) \right\} dc$$

$$=\zeta(a_0, b_0, c_0)-\left\{\frac{\left(\frac{\partial\xi}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial b}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial c}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{\partial\xi}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial b}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial c}\right)^2}}\right\}d\mathfrak{c}=$$

$$=\zeta(a_0, b_0, c_0)-\sqrt{\left(\frac{\partial\xi}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial b}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial c}\right)^2}\,.\,d\mathfrak{c}=\zeta-d\zeta \quad .471$$

и

$$\zeta(a_0, b_0, c_0)=\zeta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 472$$

Вычитая равенство 472 изъ 471 получимъ

$$\sqrt{\left(\frac{\partial\xi}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial b}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial c}\right)^2}\,.\,d\mathfrak{c}=d\zeta \quad . \quad . \quad . \quad 473$$

и отсюда

$$\varepsilon=\frac{dg}{d\xi}=\frac{d\mathfrak{c}}{d\xi}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial\xi}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial b}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial c}\right)^2}} \quad . \quad . \quad . \quad 474$$

Но мы имѣемъ, что

$$\zeta=\frac{\sqrt{(a-x_1)^2+(b-y_1)^2+(c-z_1)^2}}{V} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 475$$

гдѣ V опредѣляется изъ формулы 401.

Отсюда мы видимъ, что ζ есть однородная функція перваго порядка относительно $(a-x_1)$, $(b-y_1)$ и $(c-z_1)$, ибо

$$\left.\begin{aligned} l&=\frac{a-x_1}{\sqrt{(a-x_1)^2+(b-y_1)^2+(c-z_1)^2}}\\ m&=\frac{b-y_1}{\sqrt{(a-x_1)^2+(b-y_1)^2+(c-z_1)^2}}\\ n&=\frac{c-z_1}{\sqrt{(a-x_1)^2+(b-y_1)^2+(c-z_1)^2}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad 476$$

Изъ этого мы заключаемъ, что производныя

$$\frac{\partial\xi}{\partial a},\ \frac{\partial\xi}{\partial b}\text{ и }\frac{\partial\xi}{\partial c}$$

также однородныя функціи отъ $(a-x_1)$, $(b-y_1)$ и $(c-z_1)$, порядокъ которыхъ равенъ нулю, а потому и

$$\varepsilon=\varphi^0[(a-x_1),\ (b-y_1),\ (c-z_1)] \quad . \quad . \quad . \quad 477$$

гдѣ φ^0 есть символъ однородной функціи порядка нулеваго. На основаніи свойствъ однородныхъ функцій мы можемъ написать, что

$$\varepsilon=\varphi^0\left(\frac{a-x_1}{\sqrt{(a-x_1)^2+(b-y_1)^2+(c-z_1)^2}}\right) \quad . \quad . \quad 478$$

$$=\varphi^0(l,\ m,\ n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 479$$

$$\varepsilon_p=\varphi^0(l_p,\ m_p,\ n_p) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 480$$

Разсмотримъ теперь выраженіе:

$$\mu_1\mu_2=\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{2\varrho_2}\right)\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{2\varrho_1}\right)=\frac{1}{\varrho^2}-{}^1/_2\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)\frac{1}{\varrho}+{}^1/_4\,\frac{1}{\varrho_1}\,\frac{1}{\varrho_2} \quad . \quad 481$$

Мы знаемъ, что

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}=\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{3}/_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 482$$

$$\frac{1}{\varrho_1}\cdot\frac{1}{\varrho_2}=\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 483$$

$$\text{гдѣ } p=-\frac{\frac{\partial\xi}{\partial a}}{\frac{\partial\xi}{\partial c}},\ q=-\frac{\frac{\partial\xi}{\partial b}}{\frac{\partial\xi}{\partial c}},\ r=\frac{\partial p}{\partial a},\ s=\frac{\partial p}{\partial b}=\frac{\partial q}{\partial a},\ t=\frac{\partial q}{\partial b} \quad . \quad . \quad 484$$

Такъ p и q суть однородныя функціи нулеваго порядка относительно $(a-x_1)$, $(b-y_1)$ и $(c-z_1)$, то r, s и t будутъ

функціи также однородныя порядка равнаго (—1). На этомъ основаніи выраженіе (482) есть однородная функція (—1)-го, а выраженіе (483) есть однородная функція (—2)-го порядка отъ $(a—x_1)$, $(b—y_1)$ и $(c—z_1)$. Если мы чрезъ φ^{-1} означимъ однородную функцію (—1)-го, а чрезъ φ^{-2} означимъ однородную функцію (—2)-го порядка, то

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)=\frac{1}{\sqrt{(a—x_1)^2+(b—y_1)^2+(c—z_1)^2}}.\varphi^{-1}(l, m, n)$$

$$=\frac{1}{r_p}\varphi^{-1}(l, m, n) \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 485$$

$$\tfrac{1}{4}\frac{1}{\varrho_1}\cdot\frac{1}{\varrho_2}=\frac{1}{(a—x_1)^2+(b—y_1)^2+(c—z_1)^2}.\varphi^{-2}(l, m, n) \quad . \quad 486$$

и наконецъ

$$\mu_2\mu_1=\frac{1}{r^1{}_p}\left[Cos^2(\overset{\wedge}{\varrho r_p})—Cos(\overset{\wedge}{\varrho r_p}).\varphi^{-1}(l_p, m_p, n_p)\right.$$

$$\left.+\varphi^{-2}(l_p, m_p, n_p,)\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 487$$

Докажемъ теперь, что и

$$Cos(\overset{\wedge}{\varrho r_p})=\lambda l_p+\mu m_p+\nu n_p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 488$$

гдѣ λ, μ ν суть косинусы направленія ϱ, также функція отъ l_p, m_p и n_p .

Для этого замѣтимъ, что уравненіе сферы s выразится слѣдующимъ образомъ

$$(a—x_1)^2+(b—y_1)^2+(c—z_1)^2—\varrho[\lambda(a—x_1)+\mu(b—y_1)+\nu(c—z_1)]=0$$

Косинусы угловъ, опредѣляющихъ направленіе радіуса этой сферы, ведущаго отъ точки p касанія сферы съ поверхностью,

$$\zeta\,(a, b, c) = Z$$

будутъ

$$\frac{2(a_p - x_1) - \varrho\lambda}{\sqrt{4(a_p-x_1)^2+(b_p-y_1)^2+(c_p-z_1)^2-4\varrho[\lambda(a_p-x_1)+\mu(b_p-y_1)+\nu(c_p-z_1)]+\varrho^2}}$$

$$= \frac{2(a_p - x_1) - \varrho\lambda}{\varrho} = 2l_p \left\{\lambda l_p + \mu m_p + \nu n_p\right\} - \lambda,$$

$$2m_p \left\{\lambda l_p + \mu m_p + \nu n_p\right\} - \mu,$$

$$2n_p \left\{\lambda l_p + \mu m_p + \nu n_p\right\} - \nu.$$

Эти косинусы должны быть равны косинусамъ, образуемымъ нормалью къ поверхности (451) въ точкѣ p; отсюда

$$\left.\begin{aligned} 2l_p \left\{\lambda l_p + \mu m_p + \nu n_p\right\} - \lambda &= \left[\frac{1}{\Delta_1 \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial a}\right]_p \\ 2m_p \left\{\lambda l_p + \mu m_p + \nu n_p\right\} - \mu &= \left[\frac{1}{\Delta_1 \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial b}\right]_p \\ 2n_p \left\{\lambda l_p + \mu m_p + \nu n_p\right\} - \nu &= \left[\frac{1}{\Delta_1 \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial c}\right]_p \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; 489$$

гдѣ

$$\Delta_1 \zeta = \sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial c}\right)^2}$$

Такъ какъ $\left(\frac{\partial \xi}{\partial a}\right)_p$, $\left(\frac{\partial \xi}{\partial b}\right)_p$ и $\left(\frac{\partial \xi}{\partial c}\right)_p$ суть функціи отъ l_p m_p, n_p, то эти уравненія даютъ возможность опредѣлить λ, μ и ν, а слѣдовательно и $Cos(\varrho r_p)$ въ функціи l_p, m_p и n_p.

Составляя теперь выраженія C_p по формулѣ (466) мы увидимъ, что это выраженіе есть произвольная конечная функція отъ l_p, m_p, n_p.

§ 138 Теперь намъ осталось еще опредѣлить величину и положеніе максимумовъ функціи ζ' и ζ'' на сферѣ s. Это изслѣдованіе удобнѣе провести, разсматривая нѣкоторую двухзначную функцію точки на сферѣ s, два значенія которой суть ζ' и ζ''. Эта функція будетъ

$$\zeta = \frac{\sqrt{(a-x_1)^2+(b-y_1)^2+(c-z_1)^2}}{V},$$

гдѣ V есть одинъ изъ положительныхъ корней уравненія (428).

Если точка (a, b, c) лежитъ на сферѣ s, то

$$\zeta = \frac{l(x-x_1)+m(y-y_1)+n(z-z_1)}{V} \quad \ldots \quad 490$$

такъ что значеніе ζ на сферѣ s можно разсматривать какъ функцію отъ l, m, n и V.

Условіе для максимума или минимума этой функціи будетъ

$$d\zeta = \frac{1}{V}\left\{(x-x_1)dl+(y-y_1)dm+(z-z_1)dn - \frac{l(x-x_1)+m(y-y_1)+n(z-z_1)}{V}dV\right\} = 0 \quad \ldots \quad 491$$

отсюда

$$(x-x_1)dl+(y-y_1)dm+(z-z_1)dn = \zeta dV \quad \ldots \quad 492$$

Дифференціалы dl, dm, dn и dV не независимы, такъ какъ между величинами l, m, n и V существуютъ соотношенія:

$$l^2+m^2+n^2+1 \quad \ldots \quad 493$$

и

$$\frac{l^2}{a^2-V^2}+\frac{m^2}{b^2-V^2}+\frac{n^2}{c^2-V^2}=0, \quad \ldots \quad 494$$

откуда

$$ldl+mdm+ndn=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 495$$

$$\frac{l}{a^2-V^2}dl+\frac{m}{b^2-V^2}dm+\frac{n}{c^2-V^2}dn=$$

$$=-\left[\frac{l^2}{(a^2-V^2)^2}+\frac{m^2}{(b^2-V^2)^2}+\frac{n^2}{(c^2-V^2)^2}\right]VdV \quad . \quad . \quad 496$$

Помноживъ (495) на A, (496) на B и сложивъ съ (491) получимъ

$$\left\{(x-x_1)+Al+\frac{Bl}{a^2-V^2}\right\}dl+\left\{(y-y_1)+Am+\frac{Bm}{b^2-V^2}\right\}dm$$

$$+\left\{(z-z_1)+An+\frac{Bn}{c^2-V^2}\right\}dn$$

$$=dV\left\{\zeta-BV\left[\frac{l^2}{(a^2-V^2)^2}+\frac{m^2}{(b^2-V^2)^2}+\frac{n^2}{(c^2-V^2)^2}\right]\right\} \quad . \quad . \quad 497$$

Изъ входящихъ въ послѣднее равенство четырехъ дифференціаловъ, связанныхъ между собою двумя условіями (495) и (496), два, напр. dl и dm, остаются совершенно произвольными, а потому, выбравъ неопредѣленные множители A и B такъ, чтобы коэффиціенты при dn и dV исчезли, мы замѣтимъ, что условіе (497) можетъ быть выполнено только тогда, когда отдѣльно коэффиціенты при двухъ дифференціалахъ dl и dm будутъ равны нулю. Такимъ образомъ условіе (497) распадается на четыре слѣдующихъ:

$$x-x_1+Al+\frac{Bl}{a^2-V^2}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 498$$

$$y-y_1+Am+\frac{Bm}{b^2-V^2}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 499$$

$$z-z_1+An+\frac{Bn}{c^2-V^2}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 500$$

$$\zeta-BV\left\{\frac{l^2}{(a^2-V^2)^2}+\frac{m^2}{(b^2-V^2)^2}+\frac{n^2}{(c^2-V^2)^2}\right\}=0 \quad . \quad . \quad 501$$

Помноживъ (498) на l, (499) на m и (500) на n, сложивъ и принявъ во вниманіе (490) (493) и (494) получимъ, что

$$A=-\zeta V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 502$$

Перенеся послѣдніе члены равенствъ (498), (499) и (500) во вторую часть, возвышая затѣмъ каждую часть полученныхъ равенствъ въ квадратъ и складывая, получимъ при помощи равенствъ (490), (493) и равенства

$$\varrho^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2 \quad . \quad . \quad . \quad 503$$

что

$$\varrho^2-A^2-2A\zeta V=B^2\left[\frac{l^2}{(a^2-V^2)^2}+\frac{m^2}{(b^2-V^2)^2}+\frac{n^2}{(c^2-V^2)^2}\right] \quad . \quad 504$$

Вставляя сюда вмѣсто A его значеніе изъ (502), получимъ при помощи (501) выраженіе для B

$$B=\frac{V}{\xi}(\varrho^2-\zeta^2V^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 505$$

Полученныя такимъ образомъ выраженія для A и B вставляемъ въ равенства (498), (499) и (500) и послѣ простыхъ преобразованій получаемъ

$$\frac{x-x_1}{a^2-\frac{\varrho^2}{\xi^2}}=\zeta V\frac{l}{a^2-V^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 506$$

$$\frac{y-y_1}{b^2-\frac{\varrho^2}{\xi^2}}=\zeta V\frac{m}{b^2-V^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 507$$

$$\frac{z-z_1}{c^2-\frac{\varrho^2}{\xi^2}}=\zeta V\frac{n}{c^2-V^2} \quad \ldots\ldots 508$$

Изъ послѣднихъ равенствъ опредѣляемъ $\frac{l}{a^2-V^2}$, $\frac{m}{b^2-V^2}$ и $\frac{n}{c^2-V^2}$ и вставляемъ въ равенства (498) (499) и (500); тогда эти послѣднія равенства примутъ слѣдующій видъ:

$$x-x_1-\zeta Vl+\frac{1}{\xi^2}(\varrho^2-\zeta^2V^2)\frac{x-x_1}{a^2-\frac{\varrho^2}{\xi^2}}=0 \quad \ldots\ldots 509$$

$$y-y_1-\zeta Vm+\frac{1}{\xi^2}(\varrho^2-\zeta^2V^2)\frac{y-y_1}{b^2-\frac{\varrho^2}{\xi^2}}=0 \quad \ldots\ldots 510$$

$$z-z_1-\zeta Vn+\frac{1}{\xi^2}(\varrho^2-\zeta^2V^2)\frac{c-z_1}{c^2-\frac{\varrho^2}{\xi^2}}=0 \quad \ldots\ldots 511$$

Помноживъ равенства (509) на $x-x_1$, (510) на $y-y_1$ и (521) на $z-z_1$ и сложивъ почленно получимъ

$$\varrho^2-\xi^2V^2+\frac{1}{\xi^2}(\varrho^2-\xi^2V^2)\left\{\frac{(x-x_1)^2}{a^2-\frac{\varrho^2}{\xi^2}}+\frac{(y-y_1)^2}{b^2-\frac{\varrho^2}{\xi^2}}+\frac{(z-z_1)^2}{c^2-\frac{\varrho^2}{\xi^2}}\right\}=0$$

По сокращеніи общаго множителя $\varrho^2-\zeta^2V^2$, который можетъ быть равенъ нулю только для тѣхъ исключительныхъ положеній сферы s, когда $r_p=\varrho$ и слѣдовательно $l_p=\lambda$, $m_p=\mu$ и $n_p=\nu$ и когда вслѣдствіе (487) λ, μ и ν удовлетворяютъ условіямъ:

$$\lambda=\frac{1}{\Delta_1\xi}\left(\frac{\partial\xi}{\partial a}\right)_p=\chi_1(l_p, m_p, n_p)=\chi_1(\lambda, \mu, \nu)$$

$$\mu=\chi_2(\lambda, \mu, \nu)$$

$$\nu = \chi_3(\lambda, \mu, \nu)$$

получимъ

$$\frac{(x-x_1)^2}{\varrho^2-a^2\xi^2}+\frac{(y-y_1)^2}{\varrho^2-b^2\xi^2}+\frac{(z-z_1)^2}{\varrho^2-c^2\xi^2}=1 \quad . \; . \; . \quad 512$$

Изъ этого уравненія мы можемъ получить наибольшее, или наименьшее значеніе ζ въ функціи x, y и z. Для того чтобы этого проще достигнуть, поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Изъ обѣихъ частей уравненія (512) вычтемъ почленно тождество

$$\frac{(x-x_1)^2}{\varrho^2}+\frac{(y-y_1)^2}{\varrho^2}+\frac{(z-z_1)^2}{\varrho^2}=1 \quad . \; . \; . \; . \; 513$$

тогда, сокративъ общій множитель ζ^2, найдемъ

$$\frac{a^2(x-x_1)^2}{\varrho^2-a^2\xi^2}+\frac{b^2(y-y_1)^2}{\varrho^2-b^2\xi^2}+\frac{c^2(z-z_1)^2}{\varrho^2-c^2\xi^2}=0 \quad . \; . \quad 514$$

откуда получимъ для наибольшаго значенія ζ^2, которое мы уже обозначили чрезъ Z

$$Z_1=\sqrt{-\frac{B}{2C}+\frac{1}{2C}\sqrt{B^2-4AC}} \quad . \; . \; . \quad 515$$

$$Z_2=\sqrt{-\frac{B}{2C}-\frac{1}{2C}\sqrt{B^2-4AC}} \quad . \; . \; . \; 516$$

гдѣ

$$A=\left\{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2\right\}\times$$

$$\times\left\{a^2(x-x_1)^2+b^2(y-y_1)^2+c^2(z-z_1)^2\right\},$$

$$-B=a^2(b^2+c)^2(x-x_1)^2+b^2(c^2+a^2)(y-y_1)^2+c^2(a^2+b^2)(z-z_1)^2,$$

$$C=a^2b^2c^2.$$

Отрицательныя значенія для ζ мы отбросили, потому что ζ—существенно положительная величина. Очевидно, что найденныя два значенія суть максимумы, ибо минимумъ ζ будетъ нуль а это значеніе ζ мы откинули, сокративъ общаго множителя ζ при полученіи равенства (514)

Замѣтимъ здѣсь же, что чрезъ точку (x, y, z) проходятъ двѣ поверхности, которыхъ уравненія суть

$$\frac{(x-x_1)^2}{\varrho^2-a^2Z_1^2}+\frac{(y-y_1)^2}{\varrho^2-b^2Z_1^2}+\frac{(z-z_1)^2}{\varrho^2-c^2Z_1^2}=1 \quad . \; . \; 517$$

и

$$\frac{(x-x_1)^2}{\varrho^2-a^2Z_2^2}+\frac{(y-y_1)^2}{\varrho^2-b^2Z_2^2}+\frac{(z-z_1)^2}{\varrho^2-c^2Z_2^2}=1 \quad . \; . \; 518$$

Первая изъ этихъ двухъ поверхностей называется поверхностію волны фазы Z_1, а вторая поверхностію волны фазы Z_2.

§ 139 Легко опредѣлить построеніемъ положеніе точки p въ которой $\zeta = Z_2$. Для этого докажемъ, что плоскость, проведенная чрезъ точку p_1 перпендикулярно къ линіи, соединяющей точку (x_1, y_1, z_1) съ точкою p_1, касается поверхности волны фазы Z_1 въ точкѣ (x, y, z). Дѣйствительно, если l_1, m_1, n_1 косинусы направленія линіи, соединяющей точку x_1, y_1, z_1 съ точкою p_1 и V значеніе V_1 для направленія (l_1, m_1, n_1), то эти косинусы должны удовлетворять равенствамъ

$$\left.\begin{aligned}\frac{x-x_1}{a^2Z_1^2-\varrho^2}&=\frac{V_1}{Z_1}\frac{l_1}{a^2-V_1^2}\\ \frac{y-y_1}{b^2Z_1^2-\varrho^2}&=\frac{V_1}{Z_1}\frac{m_1}{b^2-V_1^2}\\ \frac{z-z_1}{c^2Z_1^2-\varrho^2}&=\frac{V_1}{Z_1}\frac{n_1}{c^2-V_1^2}\end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; 519$$

вытекающимъ изъ равенствъ (506) (507) и (508). Съ другой стороны, назвавъ первую часть равенства (517) чрезъ F_1, получимъ

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 2\frac{x-x_1}{\varrho^2-a^2Z_1^2} - 2\left\{\frac{(x-x_1)^2}{(\varrho^2-a^2Z_1^2)^2}+\frac{(y-y_1)^2}{(\varrho^2-b^2Z_1^2)^2}+\frac{(z-z_1)^2}{(\varrho^2-c^2Z_1^2)^2}\right\}(x-x_1)$$

$$= 2\frac{x-x_1}{\varrho^2-a^2Z_1^2} - 2\frac{V_1^2}{Z_1^2}\left[\frac{l^2}{(a^2-V_1^2)^2}+\frac{m^2}{(b^2-V_1^2)^2}+\frac{n^2}{(c^2-V_1^2)^2}\right](x-x_1)$$

$$= 2(x-x_1)\left\{\frac{1}{\varrho^2-a^2Z_1^2}-\frac{V_1}{Z_1}\frac{1}{B}\right\} = 2(x-x_1)\left\{\frac{1}{\varrho_1-a^2Z_1^2}-\frac{1}{\varrho_1^2-Z_1^2V_1^2}\right\}$$

$$= 2(x-x_1)\frac{Z_1^2(a^2-V_1^2)}{(\mu^2-a^2Z_1^2)(\varrho-Z_1^2V_1^2} = -2\frac{V_1Z_1l_1}{\varrho^2-Z^2V^2} \quad . \quad . \quad 520$$

и точно также

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -2\frac{V_1Z_1m_1}{\varrho^2-Z_1^2V^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 521$$

и

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = -2\frac{V_1Z_1n_1}{\varrho_1-Z_1^2V_1^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 522$$

откуда

$$Cos(N_1,x)=l_1,\ Cos(N_1,y)=m_1,\ Cos(N_1,z)=n_1 \quad . \quad , \quad 523$$

гдѣ N_1 есть направленіе нормали къ поверхности волны фазы Z_1 въ точкѣ (x, y, z). Такъ какъ кромѣ того плоскость, проведенная перпендикулярно къ направленію (l_1, m_1, n_1) черезъ точку p_1, проходитъ черезъ точку (x, y, z), то эта плоскость дѣйствительно касается поверхности волны фазы Z_1 въ точкѣ (x, y, z).

Точно также докажемъ, что если мы проведемъ черезъ точку p_1 плоскость, перпендикулярную къ линіи соединяющей точку (x_1, y_1, z_1) съ этой точкой, то эта плоскость будетъ касаться поверхности волны фазы Z_1 въ точкѣ (x, y, z)

И такъ, чтобы опредѣлить положеніе точекъ p_1 и p_2, проводимъ чрезъ точку (x, y, z) касательныя плоскости къ поверхностямъ волнъ фазы Z_1 и Z_2, проходящимъ чрезъ эту точку, и опускаемъ на эти плоскости перпендикуляры, тогда основанія этихъ перпендикуляровъ будутъ искомыя точки. Мы нашли, что двузначная на поверхности сферы s функція ζ имѣетъ на ней вообще два максимума Z_1 и Z_2 въ точкахъ p_1 и p_2. Чтобы рѣшить вопросъ, принадлежатъ ли эти максимумы той, или другой вѣтви ζ' и ζ'' двузначной функціи ζ, мы замѣчаемъ, что, очевидно, каждая изъ функцій ζ' и ζ'' имѣетъ на сферѣ s покрайней мѣрѣ одинъ максимумъ, а потому, если одинъ максимумъ принадлежитъ вѣтви ζ', то другой непремѣнно принадлежитъ вѣтви ζ''.

§ 140 Обратимся теперь къ интегралamъ

$$Q' = \int H' f(\zeta' + t) ds$$

$$Q'' = \int H'' f(\zeta'' + t) ds$$

При разсмотрѣніи этихъ интеграловъ могутъ встрѣтиться слѣдующіе два случая: а) когда максимумъ Z_1 принадлежитъ вѣтви ζ', а максимумъ Z_2 вѣтви ζ''. Въ этомъ случаѣ

$$Q' = \frac{C'_1}{\varrho} \alpha'_1 \varphi(Z_1 + t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 524$$

гдѣ C'_1 и α_1' суть значенія функцій C' и α', соотвѣтствующія направленію $(l_1\ m_1\ n_1)$.

$$Q'' = \frac{C''_2}{\varrho} \alpha''_2 \varphi(Z_2 + t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 525$$

гдѣ C_2'' и α_2'' суть значенія C'' и α'', соотвѣтствующія направленію $(l_2\ m_2\ n_1)$ b) когда максимумъ Z_2 принадлежитъ функціи ζ', а максимумъ Z_1 функціи ζ''

$$Q' = \frac{C''_2}{\varrho}\alpha'_2\varphi(Z_2+t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 526$$

гдѣ C'_2 и α'_2 суть значенія функцій C' и α' для направленія $(l_2\ m_2\ n_2)$

$$Q'' = \frac{C''_1}{\varrho}\alpha''_1\varphi(Z_1+t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 527$$

гдѣ C_1'' и α_1'' суть значенія функцій C'' и α'' для направленія $(l_1,\ m_1,\ n_1)$

§ 141 Займемся теперь опредѣленіемъ направленій

$$(\alpha'_1\beta'_1\gamma'_1),\ (\alpha'_2\beta'_2\gamma'_2),\ (\alpha''_1\beta''_1\gamma''_1)\ \text{и}\ (\alpha''_2\beta_2''\gamma_2'').$$

Разсмотримъ сначала случай, когда максимумъ Z_1 принадлежитъ функціи ζ'. Для того, чтобы изслѣдовать этотъ случай, вспомнимъ, что вслѣдствіе соотношенія (431)

$$\frac{\left(\frac{l_1}{a^2-V_1'}\right)}{a'_1} = \frac{\left(\frac{m}{b^2-V_1'}\right)}{b'_1} = \frac{\left(\frac{n}{c^2-V_1'}\right)}{c_1'} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{l_1}{a^2-V_1'^2}\right)^2+\left(\frac{m_1}{b^2-V_1'^2}\right)^2+\left(\frac{n_1}{c^2-V_1'^2}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad 528$$

Но такъ какъ l, m, n и V соотвѣтствуютъ максимуму функціи ζ', то корень въ послѣдней части уравненія (528) будетъ выражаться такъ:

$$\sqrt{\left(\frac{l_1}{a^2-V_1'^2}\right)^2+\left(\frac{m_1}{b^2-V_1'^2}\right)^2+\left(\frac{n_1}{c^2-V_1'^2}\right)^2} =$$

$$-\sqrt{\frac{Z_1}{V_1'}\cdot\frac{1}{B_1'}}=\frac{\frac{Z_1}{V_1'}}{\sqrt{\varrho^2-Z_1^2V_1'^2}}=\frac{\frac{Z_1}{V_1'}}{\sqrt{\varrho^2-r_1^2}} \quad . \; . \; 529$$

гдѣ r_1 разстояніе точки p_1 отъ точки (x_1, y_1, z_1), а слѣдовательно $\sqrt{\varrho^2-r_1^2}$ есть длина линіи, соединяющей точку p_1 съ точкою (x, y, z), которую мы обозначимъ чрезъ d_1. Съ другой стороны

$$\frac{x-x_1}{a^2Z_1^2-\varrho^2}=\frac{V_1'}{Z_1}\left(\frac{l_1}{a^2-V_1'^2}\right) \quad . \; . \; . \; . \; 530$$

вставляя сюда вмѣсто $\frac{l_1}{a^2-V_1'^2}$ его величину $\frac{Z_1}{V_1'}\cdot\frac{a_1'}{d_1}$ изъ уравненія (528) и (529), получимъ

$$\frac{x-x_1}{a^2Z_1^2-\varrho^2}=\frac{a_1'}{d_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; 531$$

Такимъ же образомъ получимъ еще

$$\frac{y-y_1}{a^2Z_1^2-\varrho^2}=\frac{b_1'}{d_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; 532$$

и

$$\frac{z-z_1}{c^2Z_1-\varrho^2}=\frac{c_1'}{d_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; 533$$

Помноживъ равенство (531) на $x-x_1$, (532) на $y-y_1$ и (533) на $z-z_1$, складывая ихъ почленно и принимая во вниманіе формулу (517) получимъ,

$$1=\frac{\varrho}{d_1}\left\{\lambda a_1'+\mu b_1'+\nu c_1'\right\}=Cos\,(\hat{\varrho q_1'})\frac{\varrho}{d_1} \quad . \; . \; 534$$

гдѣ q_1' есть направленіе (a_1', b_1', c_1'), перпендикулярное къ направленіямъ (l_1, m_1, n_1) и $(\alpha_1', \beta_1', \gamma_1')$. Изъ равенства (534) слѣдуетъ, что

$$Cos\,(\hat{\varrho q'_1}) = \frac{d_1}{\varrho} = Cos(\hat{\varrho d_1}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 535$$

Такъ какъ d_1 и q_1' лежатъ въ одной и той же плоскости и, кромѣ того, d_1 перпендикулярно къ r_1, то послѣднее равенство возможно только, когда направленія линіи q'_1 и d_1 совпадаетъ. Изъ этого заключаемъ, что направленіе колебаній, характеризующееся косинусами α_1', β_1' и γ_1' перпендикулярно къ направленію линіи d_1, соединяющей точку p_1, полюсъ касательной плоскости къ поверхности волны фазы Z_1, проходящей черезъ точку (x, y, z) съ этой точкой и къ линіи, соединяющей точку (x_1, y_1, z_1) съ точкой p_1. Точно такимъ же способомъ докажемъ, что направленіе α_1'' β_1'' γ_1'' также перпендикулярно къ d_1 и линіи, соединяющей точку (x_1, y_1, z_1) съ точкой p_1, и что направленія $(\alpha'_2, \beta'_2, \gamma'_2,)$ и $(\alpha_2''\ \beta_2''\ \gamma_2'')$ перпендикулярны къ линіи d_2, соединяющей точку p_2 съ точкою (x, y, z) и вмѣстѣ съ тѣмъ перпендикулярны къ линіи соединяющей точку (x_1, y_1, z_1) съ точкою p_2.

Обозначимъ чрезъ $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ косинусы направленія $(\alpha'_1\ \beta'_1\ \gamma'_1)$ и $(\alpha'_1\ \beta_1''\ \gamma_1'')$, черезъ $\alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2$ косинусы направленія $(\alpha'_2\ \beta'_2\ \gamma'_2)$ и $(\alpha''_2\ \beta''_2\ \gamma''_2)$.

Представимъ равенство (531) въ слѣдующемъ видѣ:

$$a'_1 = \lambda \frac{\sqrt{1 - V_1^2 \frac{Z_1'^2}{\varrho^2}}}{a^2 \frac{Z_1^2}{\varrho^2} - 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 536$$

Такъ какъ $\frac{Z_1}{\varrho}$ есть функція λ, μ и ν, то a_1' и также b'_1 и c'_1 а слѣдовательно и α'_1, β'_1 и γ'_1 не зависятъ отъ ϱ,

Точно тоже докажемъ и относительно α_1'', β_1'', γ_1'', α_2' β_2' γ_2', α_2'' β_2'' и γ_2'', а стало быть и относительно α_1, β_1, γ_1 и α_2, β_2, γ_2.

§ 142 Примемъ теперь, что произвольныя функціи $E'(l_1, m_1, n_1)$ и $E''(l_1, m_1, n)$ равны, тогда $C_1' = C_1'' = C_1$ и $C_2'' = C_2' = C_2$, гдѣ C_1 и C_2 два значенія нѣкоторой совершенно произвольной функціи C отъ l, m и n для направленій (l_1, m_1, n_1) и (l_2, m_2, n_2) линій, ведущихъ отъ точки (x_1, y_1, z_1) къ точкамъ p_1 и p_2.

Тогда мы будемъ имѣть, что

$$u = Q' + Q'' = \frac{C_1}{\varrho}\,\alpha_1\varphi(Z_1 + t) + \frac{C_2}{\varrho}\,\alpha_2\varphi(Z_2 + t). \quad . \quad 537$$

Такимъ образомъ получимъ для v и w

$$v = \frac{C_1}{\varrho}\,\beta_1\varphi(Z_1 + t) + \frac{C_2}{\varrho}\,\beta_2\varphi(Z_2 + t) \quad . \quad . \quad . \quad 538$$

$$w = \frac{C_1}{\varrho}\,\gamma_1\varphi(Z_1 + t) + \frac{C_2}{\varrho}\,\beta_2\varphi(Z_2 + t) \quad . \quad . \quad . \quad 539$$

§ 143 Вообразимъ теперь себѣ такую замкнутую поверхность Σ, окружающую точку (x_1, y_1, z_1). что фазы всѣхъ поверхностей волнъ, проходящихъ чрезъ различныя точки ея, больше i. Мы увидимъ тогда, что полученныя нами выраженія (537) (538) и (539) для u, v и w будутъ, во всемъ внѣшнемъ относительно поверхности Σ пространствѣ, для $t < 0$ удовлетворять дифференціальнымъ уравненіямъ (436), а на поверхности Σ условіямъ, выраженнымъ формулами:

$$\left.\begin{aligned} u_\sigma &= \frac{C_1}{\varrho_\sigma}\alpha_1\varphi(Z_{1,\sigma}+t)+\frac{C_2}{\varrho_\sigma}\alpha_2\varphi(Z_{2,\sigma}+t) \\ v_\sigma &= \frac{C_1}{\varrho_\sigma}\beta_1\varphi(Z_{1,\sigma}+t)+\frac{C_2}{\varrho_\sigma}\beta_2\varphi(Z_{2,\sigma}+t) \\ w_\sigma &= \frac{C_1}{\varrho_\sigma}\gamma_1\varphi(Z_{1,\sigma}+t)+\frac{C_2}{\varrho_\sigma}\gamma_2\varphi(Z_{2,\sigma}+t) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 540,$$

гдѣ индексомъ (σ) отмѣчены значенія функцій для точекъ поверхности Σ.

§ 144 Положимъ

$$u = \frac{C_1}{\varrho}\alpha_1 Y(t)\varphi(Z_1+t)+\frac{C_2}{\varrho}\alpha_2 Y(t)\varphi(Z_2+t) \quad . \quad . \quad 541$$

гдѣ Y есть такая функція, которая для отрицательныхъ значеній аргумента равна единицѣ, а для положительныхъ нулю. Легко убѣдиться, что даже при переходѣ t черезъ значеніе нуль функція u будетъ непрерывна для всѣхъ точекъ внѣшняго по отношенію къ поверхности Σ пространства, ибо въ этомъ пространствѣ для $t=0$ u вездѣ равна нулю, такъ какъ Z_1 и Z_2 во всемъ этомъ пространствѣ большіе i. Такимъ образомъ мы получили для u и также можемъ получить для v и w выраженія, которыя для всякаго положительнаго и отрицательнаго t будутъ во внѣшнемъ относительно Σ пространствѣ непрерывны и будутъ удовлетворять уравненіямъ (436), а на поверхности Σ условіямъ (540).

Если идетъ рѣчь только о внѣшнемъ по отношенію къ поверхности Σ пространствѣ, то функцію $Y(t)\ \varphi\ (Z+t)$ можно выразить такъ: $F(Z+t)$, ограничивъ функцію F тѣмъ, что она отлична отъ нуля только для аргументовъ, лежащихъ между нулемъ и i. Дѣйствительно, такъ какъ

для точекъ этого пространства $Z > i$, то для всякаго положительнаго t $F(Z+t)=0$.

§ 145 Если бы мы въ формулахъ взяли вмѣсто аргументовъ $\frac{r}{V'}+t$ и $\frac{r}{V''}+t$ аргументы $\frac{r}{V'}-t$ и $\frac{r}{V''}-t$ и вычисляли бы значенія интеграловъ, входящихъ въ эту формулу для положительныхъ значеній t, то пришли бы къ выражаніямъ для u вида

$$u=\frac{C_1}{\varrho}\alpha_1 X(t)\,\varphi(z_1-t)+\frac{C_2}{\varrho}\alpha_2 X(t)\,\varphi(z_2+t)\ ,\ .\ 542$$

гдѣ функція $X(t)$ равна нулю для отрицательныхъ и единицѣ для положительныхъ значеній аргумента Эта функція и подобныя же для функцій v и w во всемъ внѣшнемъ относительно поверхности Σ пространствѣ удовлетворяютъ дифференціальнымъ уравненіямъ 436 и кромѣ того остаются непрерывными даже при переходѣ t черезъ нулевое значеніе.

§ 146 Этимъ уравненіямъ и условіямъ мы удовлетворимъ и выраженіемъ вида

$$u\frac{C_1}{\varrho}\alpha_1 X(t-ni)\varphi[Z_1-(t-ni)]$$
$$+\frac{C_2}{\varrho}\alpha_2 X(t-ni)\varphi[Z_2-(t-ni)]\ .\ .\ .\ 543$$

и подобными же выраженіями для v и w. Легко видѣть, что выраженіе (543) также непрерывно во внѣшнемъ пространствѣ даже при переходѣ перемѣннаго t черезъ значенія ni. Дѣйствительно, во внѣшнемъ пространствѣ, для котораго по условію Z_1 и Z_2 всегда больше i, движеніе начинается только съ момента $t=Z_1+(n-1)i=ni+Z_1-i$, а до тѣхъ поръ, слѣдовательно, и u равно нулю.

§ 147 Комбинируя полученныя нами частныя рѣшенія (543) и принимая n цѣлымъ числомъ, эту формулу для $t>Z_2-i$ можно выразить короче, подразумѣвая подъ Ф пе-

ріодическую функцію, періодъ которой есть i, слѣдующимъ образомъ:

$$u=\frac{C_1}{\varrho}\alpha_1\Phi(Z_1-t)+\frac{C_2}{\varrho}\alpha_2\Phi(Z_2-t) \quad . \quad . \quad . \quad 544$$

§ 148 Изъ формулы (486) видно, что косинусы l_p m_p и n_p не зависятъ отъ ϱ, а только отъ косинусовъ λ, μ и ν, опредѣляющихъ направленіе линіи ϱ. Далѣе изъ построенія доказаннаго въ § 141 видно, что если только точка (x, y, z) не коническая точка поверхностей волнъ фазъ Z_1 и Z_2, проходящихъ черезъ нее, то опредѣленному направленію (λ, μ, ν) соотвѣтствуютъ два направленія (l_p, m_p, n_p). Отсюда слѣдуетъ, что функціи C_1, C_2, α_1 и α_2 суть функціи отъ λ, μ, и ν. Можно представить себѣ, что функція C_1 и C_2 суть два значенія одной произвольной двузначной функціи отъ λ, μ и ν, а что α_1 и α_2 суть два значенія одной опредѣленной функціи отъ тѣхъ же перемѣнныхъ.

§ 149 Мы видѣли, что если функція $F(\alpha)$ имѣетъ то свойство, что она отличается отъ нуля только для аргументовъ, лежащихъ между нулемъ и безконечно малой положительной величиной i, то положивъ:

$$u=\frac{C_1\alpha_1}{\varrho}F(Z_1+t)+\frac{C_2\alpha_2}{\varrho}F(Z_2+t) \quad . \quad (3). \quad 545$$

мы удовлетворимъ дифференціальнымъ уравненіямъ движенія упругой средины,

$$c^2\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)-b^2\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (3). \quad 546$$

которыя получаются, если въ уравненіяхъ:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad \ldots\ldots \quad 547$$
$$\frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}=\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

подставимъ вмѣсто X_x, X_y, X_z, Y_x, Y_y, Y_z, Z_x, Z_y и Z_z производныя $\frac{\partial F}{\partial x_x}$, $\frac{\partial F}{\partial x_y}$, $\frac{\partial F}{\partial x_z}$, $\frac{\partial F}{\partial y_x}$, $\frac{\partial F}{\partial y_y}$, $\frac{\partial F}{\partial y_z}$, $\frac{\partial F}{\partial z_x}$, $\frac{\partial F}{\partial z_y}$ и $\frac{\partial F}{\partial z_z}$ функціи

$$F=\frac{1}{2}[a_0(x_x+y_y+z_z)^2+a^2(y_z^2-4y_yz_z)+b^2(z_x^2-4z_xx_x)+c^2(x_y^2-4x_xy_y)], \quad 548$$

въ которой первый членъ $(x_x+y_y+z_z)$, благодаря условію нисжимаемости эфира, равенъ нулю, и замѣнимъ величины x_x, y_y, z_z, ... x_z соотвѣтственно производными $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial z}$.... $\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$.

Посмотримъ, нельзя ли выбрать функцію C, которой два значенія, соотвѣтствующія направленію линіи r, суть C_1 и C_2, такимъ образомъ, чтобы удовлетворить системѣ уравненій (546). Для этого полагаемъ

$$\frac{C\alpha}{\varrho}=A \quad \frac{C\beta}{\varrho}=B \quad \text{и} \quad \frac{C\gamma}{\varrho}=C \quad \ldots\ldots \quad 549$$

и возьмемъ только первые члены выраженій 1 для u, v и w, т. е. положимъ

$$u=AF(Z+t),\ v=BF(Z+t) \text{ и } w=CF(Z+t).$$

Тогда уравненія (546) превратятся въ слѣдующія:

$$AF''(Z+t)=\left\{c^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial x}\right)-b^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial C}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial z}\right)\right\}F(Z+t)$$
$$+\left\{c^2\frac{\partial Z}{\partial y}\left(\frac{\partial A}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial x}\right)-b^2\frac{\partial Z}{\partial z}\left(\frac{\partial C}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial z}\right)+\right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[c^2\left(A\frac{\partial Z}{\partial y}-B\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial z}\left[b^2\left(C\frac{\partial Z}{\partial x}-A\frac{\partial Z}{\partial z}\right)\right]\Bigg\}F'(Z+t)$$

$$-\left\{\left[c^2B\frac{\partial Z}{\partial y}+b^2C\frac{\partial Z}{\partial z}\right]\frac{\partial Z}{\partial x}-\left[Ac^2\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2+b^2\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)^2\right]\right\}F''(Z+t).(3).$$

Приравнивая нулю множители при $F(Z+t)$, $F'(Z+t)$ и $F''(Z+t)$ въ предъидущемъ и подобныхъ ему двухъ другихъ уравненіяхъ, получимъ слѣдующую систему уравненій, которымъ должны удовлетворять функціи A, B и C:

$$c^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial x}\right)-b^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial C}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial z}\right)=0.(3)..550$$

$$c^2\frac{\partial Z}{\partial y}\left(\frac{\partial A}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial x}\right)-b^2\frac{\partial Z}{\partial z}\left(\frac{\partial C}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial z}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[c^2\left(A\frac{\partial Z}{\partial y}-B\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial z}\left[b^2\left(C\frac{\partial Z}{\partial x}-A\frac{\partial Z}{\partial z}\right)\right]=0.(3).551$$

$$A\left\{c^2\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2+b^2\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)-1\right\}=\left\{c^2B.\frac{\partial Z}{\partial y}+b^2C.\frac{\partial Z}{\partial z}\right\}\frac{\partial Z}{\partial x}(3).552$$

Преобразуемъ группу уравненій (552) въ такую группу уравненій, въ которыхъ одно содержало бы только функцію Z.

Для этого представимъ уравненія (552) въ другомъ видѣ.

Помноживъ первое на a^2 и прибавивъ къ обѣимъ частямъ его:

$$b^2.c^2\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2A,$$

тогда получимъ:

$$A\left\{b^2.c.\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2+c^2.a^2\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2+a^2b^2\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)^2-1\right\}=$$

$$= \frac{\partial Z}{\partial x}\left\{ Ab^2c^2\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right) + Bc^2a^2\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) + Ca^2b^2\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)\right\},$$

или, полагая здѣсь для краткости

$$b^2c^2\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2 + c^2a^2\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2 + a^2b^2\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)^2 = F \quad . \quad . \quad 553$$

$$Ab^2c^2\frac{\partial Z}{\partial x} + Bc^2a^2\frac{\partial Z}{\partial y} + Ca^2b^2\frac{\partial Z}{\partial z} = G \quad . \quad . \quad . \quad 554$$

и производя подобныя же преобразованія со вторыми и третьими уравненіями системы 552-ой, получимъ:

$$A = G.\frac{\frac{\partial Z}{\partial x}}{F-a^2}, \quad B = G.\frac{\frac{\partial Z}{\partial y}}{F-a^2} \text{ и } C = G.\frac{\frac{\partial Z}{\partial z}}{F-a^2}. \quad 555$$

Изъ этой группы уравненій легко исключить функціи A, B и C.

Для этого подставимъ выраженія 555 для A, B и C въ формулу 554 и сокращаемъ на G, тогда получимъ уравненія:

$$\frac{b^2c^2\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2}{F-a^2} + \frac{c^2a^2\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2}{F-b^2} + \frac{a^2b^2\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)^2}{F-c^2} = 1 \quad . \quad . \quad 556$$

Можно показать, что равенство 556 тождественно удовлетворяется значеніямъ функціи Z, удовлетворяющимъ уравненію:

$$\frac{a^2(x-x_0)^2}{\varrho^2-a^2Z^2} + \frac{b^2(y-y_0)^2}{\varrho^2-b^2Z^2} + \frac{c^2(z-z_0)^2}{\varrho^2-c^2Z^2} = 0 \quad . \quad . \quad 557$$

Для этого дадимъ уравненію (557) слѣдующій видъ:

$$P\varrho^4 - QZ^2\varrho^2 + R\varrho^2Z^4 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 558$$

гдѣ

$$\varrho^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 \quad . \quad . \quad 559$$

$$P=a^2(x-x_0)^2+b^2(y-y_0)^2+c^2(z-z_0)^2 \quad 560$$

$$Q=a^2(b^2+c^2)(x-x_0)^2+b^2(c^2+a^2)(y-y_0)^2+c^2(a^2+b^2)(z-z_0)^2 \quad 561$$

$$R=a^2b^2c^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 562$$

Опуская въ уравненіи 558 общаго множителя ϱ^2, получимъ:

$$P\varrho^2-QZ^2+RZ^4=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 563$$

откуда

$$2RZ^2=Q\pm\sqrt{Q^2-4RP\varrho^2} \quad . \quad . \quad . \quad 564$$

и

$$2R\frac{\partial Z^2}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}\pm\frac{Q\frac{\partial Q}{\partial x}-2R\frac{\partial(P\varrho^2)}{\partial x}}{\sqrt{Q^2-4RP\varrho^2}}=$$

$$\frac{(\sqrt{Q^2-4RP\varrho^2}\pm Q)\frac{\partial Q}{\partial x}-2R\frac{\partial P\varrho^2}{\partial x}}{\sqrt{Q^2-4RP^2}}=$$

$$=\pm\frac{2RZ^2\frac{\partial Q}{\partial x}-2R\frac{\partial P\varrho^2}{\partial x}}{\sqrt{Q^2-4RP\varrho^2}},$$

или, сокращая на $2R$ и обозначая

$$\sqrt{Q^2-4RP\varrho^2}=D \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 565$$

$$\left.\begin{aligned} DZ\frac{\partial Z}{\partial x}&=\pm\left[a^2(b^2+c^2)Z^2-P-a^2\varrho^2\right](x-x_0)\\ DZ\frac{\partial Z}{\partial y}&=\pm\left[b^2(c^2+a^2)Z^2-P-b^2\varrho^2\right](y-y_0)\\ DZ\frac{\partial Z}{\partial z}&=\pm\left[c^2(a^2+b^2)Z^2-P-c^2\varrho^2\right](z-z_0)\end{aligned}\right\} \quad . \quad 566$$

Каждое уравненіе группы 566 можно представить подъ двумя слѣдующими видами:

$$\left.\begin{aligned} DZ\frac{\partial Z}{\partial x} &= \pm\left[a^2(\chi^2Z^2-\varrho^2)-a^4Z^2-P\right](x-x_0)\\ DZ\frac{\partial Z}{\partial y} &= \pm\left[b^2(\chi^2Z^2-\varrho^2)-b^4Z^2-P\right](y-y_0)\\ DZ\frac{\partial Z}{\partial z} &= \pm\left[c^2(\chi^2Z^2-\varrho^2)-c^4Z^2-P\right](z-z_0)\end{aligned}\right\}\ .\ 567$$

$$\left.\begin{aligned} DZ\frac{\partial Z}{\partial x} &= \pm\left[(pZ^2-P)-b^2c^2Z^2-a^2\varrho^2\right](x-x_0)\\ DZ\frac{\partial Z}{\partial y} &= \pm\left[(pZ^2-P)-c^2a^2Z^2-b^2\varrho^2\right](y-y_0)\\ DZ\frac{\partial Z}{\partial z} &= \pm\left[(pZ^2-P)-a^2b^2Z^2-c^2\varrho^2\right](z-z_0)\end{aligned}\right\}\ .\ 568$$

гдѣ

$$\chi^2=a^2+b^2+c^2 \text{ и } p=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2. \quad . \quad . \quad . \quad 569$$

Помноживъ первое уравненіе группы 567 на $b^2c^2(x-x_0)$, второе на $c^2a^2(y-y_0)$, третье на $a^2b^2(z-z_0)$ и сложивъ, получимъ, замѣтивъ, что вслѣдствіе (563) $RZ^2=Q-\frac{P\varrho^2}{Z^2}$:

$$\pm DZ\left[b^2c^2\frac{\partial Z}{\partial x}(x-x_0)+c^2a^2\frac{\partial Z}{\partial y}(y-y_0)+a^2b^2\frac{\partial Z}{\partial z}(z-z_0)\right]=$$

$$-R(\chi^2Z^2-\varrho^2)\varrho^2-RPZ^2-P\left[b^2c^2(x-x_0)^2+c^2a^2(y-y_0)^2+a^2b^2(z-z_0)^2\right]=$$

$$=R(\chi^2Z^2-\varrho^2)\varrho^2-RPZ^2-P\left[p\varrho^2-Q\right]=$$

$$=R(\chi^2Z^2-\varrho^2)\varrho^2-P\left(Q-\frac{P\varrho^2}{Z^2}\right)-P\left(p\varrho^2-Q\right)\ ,$$

или, обозначая для краткости первую часть этого равенства через $DZSb^2c^2\frac{\partial Z}{\partial x}(x-x_0)$,

$$\pm DZSb^2c^2\frac{\partial Z}{\partial x}(x-x_0)=\left[R(\chi^2Z^2-\varrho^2)-P(p-\frac{P}{Z^2})\right]\varrho^2 \quad . 570$$

Помноживъ первое равенство группы 568 на $a^2(x-x_0)$, второе на $b^2(y-y_0)$, третье на $c^2(z-z_0)$, и сложивъ, употребляя тоже сокращенное обозначеніе, получимъ:

$$\pm DZSa^2\frac{\partial Z}{\partial x}(x-x_0)=P(pZ^2-P)-RZ^2\varrho^2-\varrho^2\left[a^4(x-x_0)^2+\right.$$
$$\left.+b^4(y-y_0)^2+c^4(z-z_0)^2\right]=$$
$$=P(pZ^2-P)-RZ^2\varrho^2-\varrho^2[\chi^2P-Q]=$$
$$=P(pZ^2-P)-\varrho^2(Q-\frac{P\varrho^2}{Z^2})-\varrho^2[\chi^2P-Q]$$

и наконецъ

$$\pm DZSa^2\frac{\partial Z}{\partial x}(x-x_0)=P\left[(pZ^2-P)-\varrho^2(\chi^2-\frac{\varrho^2}{Z^2})\right] \quad . 571$$

Уравненія 570 и 571 можно написать слѣд. образомъ:

$$\pm Sb^2c^2(x-x_0)\frac{\partial Z}{\partial x}=\varrho^2\frac{[RZ^2(\chi^2Z^2-\varrho^2)-P(pZ^2-P)]}{Z^3D} \quad . 572$$

$$\pm Sa^2(x-x_0)\frac{\partial Z}{\partial x}=P.\frac{[Z^2(pZ^2-P)-\varrho^2(\chi^2Z^2-\varrho^2)]}{Z^3D} \quad . 573$$

Умноживъ первое изъ уравненій (567) на $b^2c^2\frac{\partial Z}{\partial x}$, второе на $c^2a^2\frac{\partial Z}{\partial y}$, третье на $a^2b^2\frac{\partial Z}{\partial z}$ и сложивъ, получимъ:

$$\pm DZ\left[b^2c^2\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2+c^2a^2\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2+a^2b^2\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)^2\right]=$$

$$R(\chi^2Z^2-\varrho^2)\left[\frac{\partial Z}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial Z}{\partial y}(y-y_0)\frac{\partial Z}{\partial z}(z-z_0)\right]-$$

$$-RZ^2\left[a^2(x-x_0)\frac{\partial Z}{\partial x}+b^2(y-y_0)\frac{\partial Z}{\partial y}+c^2(z-z_0)\frac{\partial Z}{\partial z}\right]-$$

$$P\left[b^2c^2(x-x_0)\frac{\partial Z}{\partial x}+c^2a^2(y-y_0)\frac{\partial Z}{\partial y}+a^2b^2(z-z_0)\frac{\partial Z}{\partial z}\right]$$

Замѣтивъ, что Z есть однородная функція перваго порядка отъ $x-x_0$, $y-y_0$ и $z-z_0$, получимъ:

$$\frac{\partial Z}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial Z}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial Z}{\partial z}(z-z_0)=Z \quad \ldots \quad 574$$

Положивъ кромѣ того

$$b^2c^2\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2+c^2a^2\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2+a^2b^2\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)^2=F \quad \ldots \quad 575$$

и употребляя тѣ-же сокращенныя обозначенія, какъ и въ формулахъ 572 и 573, получимъ:

$$\pm DZF=RZ(\chi^2Z^2-\varrho^2)-[RZ^2Sa^2(x-x_0)\frac{\partial Z}{\partial x}+PSb^2c^2(x-x_0)\frac{\partial Z}{\partial x}] \ldots 576$$

Помноживъ первую изъ формулъ (568) на $a^2\frac{\partial Z}{\partial x}$, вторую на $b^2\frac{\partial Z}{\partial y}$, третью на $c^2\frac{\partial Z}{\partial z}$ и сложивъ, получимъ такимъ же образомъ, полагая

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)^2=H \quad \ldots \quad 577$$

$$\pm DZH=Z(pZ^2-P)-[Z^2Sb^2c^2(x-x_0)\frac{\partial Z}{\partial x}+\varrho^2Sa^2(x-x_0)\frac{\partial Z}{\partial x}]. \ldots 578$$

Помноживъ уравненіе 572 на P, уравненіе 573 на RZ^2 и складывая, получимъ

$$RZ^2Sa^2(x-x_0)\frac{\partial Z}{\partial x}+PSb^2c^2(x-x_0)\frac{\partial Z}{\partial x}=\pm\frac{P(RZ^4-\varrho^2P)}{Z^3D}(pZ^2-P) \ldots 579$$

Согласно формулѣ (564) и обозначенія (565), имѣемъ:

$$2RZ^2 = Q \pm \sqrt{Q^2 - 4RP\varrho^2} = Q \pm D$$

откуда

$$Q = 2RZ^2 \mp D$$

Подставляя это значеніе Q въ уравненіе 563, получимъ:

$$P\varrho^2 - 2RZ^4 \pm DZ^2 + RZ^4 = 0,$$

откуда

$$RZ^4 - P\varrho^2 = \pm DZ^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 580$$

Воспользовавшись этимъ, получимъ по формулѣ 579

$$RZ^2Sa^2(x-x_0)\frac{\partial Z}{\partial x} + PSb^2c^2(x-x_0)\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{P(pZ^2-P)}{Z} \quad . \quad . \quad 581$$

Такимъ же образомъ получимъ, помножая уравненіе 572 на Z^2, 573-ое на ϱ^2 и складывая:

$$Z^2Sb^2c^2(x-x_0)\frac{\partial Z}{\partial x} + \varrho^2Sa^2(x-x_0)\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\varrho^2(\chi^2Z^2-\varrho^2)}{Z} \quad . \quad . \quad 582$$

Подставляя выраженія 581 и 582 въ уравненія 576 и 578, получимъ:

$$F = \frac{RZ^2(\chi^2Z^2-\varrho^2) - P(pZ^2-P)}{DZ^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 583$$

$$H = \frac{Z^2(pZ^2-P) - \varrho^2(\chi^2Z^2-\varrho^2)}{DZ^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 584$$

Опредѣляя изъ уравненій 583 и 584 $(\chi^2Z^2-\varrho^2)$ и (PZ^2-P), получимъ:

$$\chi^2Z^2 - \varrho^2 = ZF + PH \text{ и } p^2Z^2 - P = \varrho^2F + RZ^2H.$$

Подставляя эти значенія въ первыя изъ формулъ 567 и 568, получимъ:

$$DZ^2\frac{\partial Z}{\partial x} = Z\left[a^2Z^2(F-a^2) + P(a^2H-1)\right](x-x_0) \quad . \quad . \quad 585$$

$$DZ^2.\frac{\partial Z}{\partial x}=Z\left[\varrho^2(F-a^2)+b^2c^2Z^2(a^2H-1)\right](x-x_0)\ldots 586$$

Изъ послѣднихъ двухъ уравненій опредѣляемъ $(F-a^2)$ и (a^2H-1).

Мы получимъ, принимая во вниманіе равенства 580 и 562:

$$\left.\begin{aligned}(b^2c^2Z^2-P)\frac{\partial Z}{\partial x}&=Z(x-x_0)(F-a^2)\\(c^2a^2Z^2-P)\frac{\partial Z}{\partial y}&=Z(y-y_0)\,(F-b^2)\\(a^2b^2Z^2-P)\frac{\partial Z}{\partial z}&=Z(z-z_0)\,(F-c^2)\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad 587$$

$$\left.\begin{aligned}(a^2Z^2-\varrho^2)\frac{\partial Z}{\partial x}&=Z\,(x-x_0)(a^2H-1)\\(b^2Z^2-\varrho^2)\frac{\partial Z}{\partial y}&=Z\,(y-y_0)\,(b^2H-1)\\(c^2Z^2-\varrho^2)\frac{\partial Z}{\partial z}&=Z\,(z-z_0)\,(c^2H-1)\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad 588$$

Помножая уравненія 587 на 588, получимъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2}{(F-a^2)(a^2H-1)}&=\frac{Z^2(x-x_0)^2}{(b^2c^2Z^2-P)(a^2Z^2-\varrho^2)}\\\frac{\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2}{(F-b^2)\,(b^2H-1)}&=\frac{Z^2(y-y_0)^2}{(c^2a^2Z^2-P)(a^2Z^2-\varrho^2)}\\\frac{\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)^2}{(F-c^2)\,(c^2H-1)}&=\frac{Z^2(z-z_0)^2}{(a^2b^2Z^2-P)\,(c^2Z^2-\varrho^2)}\end{aligned}\right\}\ldots 589$$

Преобразуемъ эту систему равенствъ, помноживъ равенство 16 на $-b^2c^2$, равенство 17 на $-a^2$, равенство 18 на $+1$ и сложивъ. Мы получимъ тогда:

$$-b^2c^2\varrho^2-a^2P+Q=(-b^2c^2-a^4+a^2b^2+a^2c^2)(x-x_0)^2$$

Замѣчая, что

$$Q=\frac{P\varrho^2+RZ^4}{Z^2},$$

получимъ:

$$RZ^4-(b^2c^2\varrho+aP)Z^2+P\varrho^2=(c^2-a^2)(a^2-b^2)(x-x^2)^2Z^2$$

или

$$\left.\begin{aligned}(b^2c^2Z^2-P)(a^2Z^2-\varrho^2)&=(c^2-a^2)(a^2-b^2)(x-x_0)^2.Z^2\\(c^2a^2Z^2-P)(b^2Z^2-\varrho^2)&=(a^2-b^2)(b^2-c^2)(y-y_0)^2.Z^2\\(a^2b^2Z^2-P)(c^2Z^2-\varrho^2)&=(b^2-c^2)(c^2-a^2)(z-z_0)^2.Z^2\end{aligned}\right\}\quad 590$$

Воспользовавшись этими равенствами, напишемъ равенство 589 въ такомъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2}{(F-a^2)(a^2H-1)}&=\frac{1}{(c^2-a^2)(a^2-b^2)}=\frac{b^2-c^2}{(b^2-c^2)(a^2-b^2)(b^2-a^2)}\\\frac{\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2}{(F-b^2)(b^2H-1)}&=\frac{1}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}=\frac{c^2-a^2}{(c^2-a^2)(b^2-c^2)(c^2-b^2)}\\\frac{\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)^2}{(F-c^2)(c^2H-1)}&=\frac{1}{(b^2-c^2)(c^2-a^2)}=\frac{a^2-b^2}{(a^2-b^2)(c^2-a^2)(a^2-c^2)}\end{aligned}\right\}\quad 591$$

Помножимъ первое изъ равенствъ 591 на $(a^2H-1)b^2c^2$, второе на $(b^2H-1)c^2a^2$, третье на $(c^2H-1)a^2b^2$, сложивъ и положивъ

$$(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2)=A\quad .\quad .\quad .$$

получимъ:

$$\frac{b^2c^2\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2}{F-a^2}+\frac{c^2a^2\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2}{F-b^2}+\frac{a^2b^2\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)^2}{F-c^2}=$$

$$=\frac{1}{A}\left(b^2c^2(b^2-c^2)(a^2H-1)+c^2a^2(c^2-a^2)(b^2H-1)+a^2b^2(c^2H-1)\right)=$$

$$=\frac{1}{A}\left\{a^2b^2c^2H\left[(b^2-c^2)+(c^2-a^2)+(a^2-b^2)\right]\pm\right.$$

$$\left.\pm\left[b^2c^2(b^2-c^2)+c^2a^2(c^2-a^2)+a^2b^2(a^2-b^2)\right]\right\}=1 \quad \ldots \quad 592$$

Такимъ образомъ доказано, что условіе 556 тождественно удовлетворено.

Чтобы получить два другихъ уравненія, которыя вмѣстѣ съ уравненіемъ 556 замѣняютъ группу уравненій 552 или, что то-же, группу 555, мы замѣтимъ, что вслѣдствіе 553.

$$\frac{b^2c^2\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2}{F}+\frac{c^2a^2\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2}{F}+\frac{a^2b^2\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)^2}{F}=1 \quad . \quad . \quad 593$$

Вычитая 533 изъ 556 и сокращая на $\frac{a^2b^2c^2}{F}$, получимъ:

$$\frac{\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2}{F-a^2}+\frac{\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2}{F-b^2}+\frac{\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)^2}{F-c^2}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 594$$

Помноживъ первое изъ равенствъ 555 на $\frac{\partial Z}{\partial x}$, второе на $\frac{\partial Z}{\partial y}$ и третье на $\frac{\partial Z}{\partial z}$, сложивъ и принявъ во вниманіе 594, получимъ:

$$A\frac{\partial Z}{\partial x}+B\frac{\partial Z}{\partial y}+C\frac{\partial Z}{\partial z}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 595$$

Мы получимъ еще другое уравненіе слѣдующимъ образомъ:

Помноживъ первое равенство группы (590) на $\frac{b^2-c^2}{b^2c^2Z^2-P}$, второе на $\frac{c^2-a^2}{c^2a^2Z^2-P}$, третье на $\frac{a^2-b^2}{a^2b^2Z^2-P}$ и сложивъ, получимъ:

$$AZ^2\left\{\frac{(x-x_0)^2}{b^2c^2Z^2-P}+\frac{(y-y_0)^2}{c^2a^2Z^2-P}+\frac{(z-z_0)^2}{a^2b^2Z^2-P}\right\}=$$

$$=Z^2\left[a^2(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c^2(a^2-b^2)\right]+\varrho^2\left[(b^2-c^2)+(c^2-a)+(a^2-\varrho^2)\right]$$

Откуда:

$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2c^2Z^2-P}+\frac{(y-y_0)^2}{c^2a^2Z^2-P}+\frac{(z-z_0)^2}{a^2b^2Z^2-P}=0 \quad . \quad . \quad 596$$

Помноживъ теперь первое уравненіе группы 555 на $x-x_0$, второе на $y-y_0$, третье на $z-z_0$, сложивъ и принявъ во вниманіе 596, получимъ:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=$$

$$=G\left\{\frac{(x-x_0)\frac{\partial Z}{\partial x}}{E-a^2}+\frac{(y-y_0)\frac{\partial Z}{\partial y}}{F-b^2}+\frac{(z-z_0)\frac{\partial Z}{\partial z}}{F-c^2}\right\} \quad . \quad . \quad 597$$

Написавъ группу уравненій 587 въ слѣдующемъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\frac{\partial Z}{\partial x}}{F-a^2}&=\frac{Z(x-x_0)}{b^2c^2Z^2-P}\\ \frac{\frac{\partial Z}{\partial y}}{F-a^2}&=\frac{Z(y-y_0)}{c^2a^2Z^2-P}\\ \frac{\frac{\partial Z}{\partial z}}{F-a^2}&=\frac{Z(z-z_0)}{a^2b^2Z^2-P}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 598$$

помножимъ первое на $x-x_0$, второе на $(y-y_0)$, третье на $z-z_0$ и сложимъ; тогда получимъ, принявъ во вниманіе формулу 596,

$$\frac{(x-x_0)\frac{\partial Z}{\partial x}}{F-a^2}+\frac{(y-y_0)\frac{\partial Z}{\partial y}}{F-b^2}+\frac{(z-z_0)\frac{\partial Z}{\partial z}}{F-c^2}=0 \quad . \quad . \quad 599$$

Вторая часть уравненія 597 равна, слѣдовательно, нулю, и мы будемъ имѣть

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \quad . \quad . \quad 600$$

Уравненія 556, 595 и 600 вполнѣ замѣняютъ собою систему уравненія 552 или 555. Уравненіе 556, какъ мы видѣли, тождественно удовлетворено каждымъ изъ двухъ положительныхъ корней Z уравненія 557. Уравненія 595 и 600 будутъ также удовлетворены, если положить:

$$\left.\begin{aligned} A&=\omega\left[(y-y_0)\frac{\partial Z}{\partial z}-(z-z_0)\frac{\partial Z}{\partial y}\right]\\ B&=\omega\left[(z-z_0)\frac{\partial Z}{\partial x}-(x-x_0)\frac{\partial Z}{\partial z}\right]\\ C&=\omega\left[(x-x_0)\frac{\partial Z}{\partial y}-(y-y_0)\frac{\partial Z}{\partial x}\right] \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 601$$

гдѣ ω должно быть выбрано такъ, чтобы удовлетворялись уравненія 550 и 551.

Уравненію 550 можно удовлетворить, положивъ

$$A=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ B=\frac{\partial\varphi}{\partial y}\ \text{и}\ C=\frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 602$$

Тогда уравненія примутъ видъ:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{c^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\right\}-\frac{\partial}{\partial z}\left\{b^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial Z}{\partial z}\right)\right\}=0.(3).603$$

Послѣднимъ условіямъ удовлетворимъ, принявъ

$$\left.\begin{aligned} a^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial Z}{\partial z}-\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial Z}{\partial y}\right)&=\frac{\partial\psi}{\partial x}=a^2U\\ b^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial Z}{\partial z}\right)&=\frac{\partial\psi}{\partial y}=b^2V\\ c^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial Z}{\partial x}\right)&=\frac{\partial\psi}{\partial z}=c^2W \end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad 604$$

Такимъ образомъ, если условія 601, 602 и 604 будутъ удовлетворены, то будутъ удовлетворены и условія 550, 551 и 552, а стало быть и система функцій:

$$u=AF(Z+t),\ v=BF(Z+t)\ \text{и}\ w=CF(Z+t),$$

удовлетворитъ дифференціальнымъ уравненіямъ (546).

Попытаемся отыскать такую функцію ω, которая удовлетворяла бы условіямъ 601, 602 и 604. Для этого подставимъ въ уравненія 604 значенія $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ изъ формулъ 602, въ которыхъ A, B и C замѣстимъ ихъ значеніями изъ формулъ 600. Мы получимъ такимъ образомъ систему:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial x}&=a^2\omega\left\{\frac{\partial Z}{\partial x}\left[(y-y_0)\frac{\partial Z}{\partial y}+(z-z_0)\frac{\partial Z}{\partial z}\right]-(x-x_0)\left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)^2\right]\right\}\\ \frac{\partial\psi}{\partial y}&=b^2\omega\left\{\frac{\partial Z}{\partial y}\left[(z-z_0)\frac{\partial Z}{\partial z}+(x-x_0)\frac{\partial Z}{\partial x}\right]-(y-y_0)\left[\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2\right]\right\}\\ \frac{\partial\psi}{\partial y}&=c^2\omega\left\{\frac{\partial Z}{\partial z}\left[(x-x_0)\frac{\partial Z}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial Z}{\partial y}\right]-(z-z_0)\left[\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2\right]\right\} \end{aligned}\right\}\ 605$$

Прибавляя и отнимая по $\omega(x-x_0)\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2$, мы преобразуемъ вторую часть уравненія 605 слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = a^2\omega\left\{\frac{\partial Z}{\partial x}\left[(x-x_0)\frac{\partial Z}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial Z}{\partial y}+(z-z_0)\frac{\partial Z}{\partial z}\right]-\right.$$

$$\left.-(x-x_0)\left[\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)^2\right]\right\} \quad . \quad . \quad . \quad 606$$

Припомнивъ формулы 574 и 577 напишемъ равенство 606 слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = a^2\omega\left\{Z\frac{\partial Z}{\partial x}-(x-x_0)H\right\}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \omega\left\{a^2Z\frac{\partial Z}{\partial x}-(x-x_0)(a^2H-1)-(x-x_0)\right\} . 607$$

Вслѣдствіе 588 вторая часть этого равенства можетъ быть написана короче. Дѣйствительно мы имѣемъ:

$$a^2Z\frac{\partial Z}{\partial x}-(x-x^2)(a^2H-1) = \frac{1}{Z}\varrho^2\frac{\partial Z}{\partial x},$$

а слѣдовательно

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \omega\left\{\frac{\varrho^2}{Z}\frac{\partial Z}{\partial x}-(x-x_0)\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 608$$

Замѣтивъ, что вслѣдствіе (559)

$$x-x_0 = \frac{1}{2}\frac{\partial(\varrho^2)}{\partial x},$$

мы получимъ

$$\frac{\varrho^2}{Z}\frac{\partial Z}{\partial x}-(x-x_0)=\frac{\varrho^2}{Z}\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial\varrho^2}{\partial x}=$$

$$=\frac{\varrho^2\frac{\partial(Z^2)}{\partial x}-Z^2\frac{\partial(\varrho^2)}{\partial x}}{2Z^2}=\frac{\varrho^4}{2Z^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Z^2}{\varrho^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad 609$$

или, обозначивъ $\frac{Z^2}{\varrho^2}$ черезъ θ, получимъ,

$$\theta=\frac{Z^2}{\varrho^2}, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{2Z}{\varrho^4}\left(\varrho^2\frac{\partial Z}{\partial x}-Z(x-x_0)\right) \quad . \quad . \quad 610$$

и слѣдовательно

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial x}&=\omega\varrho^2\cdot\frac{1}{2\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}\\ \frac{\partial\psi}{\partial y}&=\omega\varrho^2\cdot\frac{1}{2\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial y}\\ \frac{\partial\psi}{\partial z}&=\omega\varrho^2\cdot\frac{1}{2\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial z}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 611$$

Чтобы вторыя части уравненій 611 представляли производныя нѣкоторой функціи слѣдуетъ, чтобы

$$\omega\varrho^2=f(\theta) \text{ или } \omega=\frac{1}{\varrho^2}f(\theta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 612$$

Чтобы опредѣлить видъ функціи $f(\theta)$, замѣтимъ, что, вслѣдствіе 602,

$$\frac{\partial B}{\partial z}=\frac{\partial C}{\partial y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 613$$

Подставивъ сюда вмѣсто B и C ихъ значенія изъ выраженія 601, мы получимъ

$$\frac{\partial\omega}{\partial z}\left[(z-z_0)\frac{\partial Z}{\partial x}-(x-x_0)\right]+\omega\left[\frac{\partial Z}{\partial x}+(z-z_0)\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial z}-(x-x_0)\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}\right]-$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial y}\left[(x-x_0)\frac{\partial Z}{\partial y}-(y-y_0)\frac{\partial Z}{\partial x}\right]-\omega\left[(x-x_0)\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}-\frac{\partial Z}{\partial x}-(y+y_0)\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}\right]=0 \quad 614$$

Замѣтимъ теперь, что

$$\frac{\partial\omega}{\partial z}=\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial(\varrho^2\omega)}{\partial z}-\frac{2(z-z_0)\omega}{\varrho^2}=\frac{1}{\varrho^2}f'(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial z}-\frac{2(z-z_0)f(\theta)}{\varrho^4}$$

Подставивъ сюда значеніе $\frac{\partial\theta}{\partial z}$, составленное по образцу 610, получимъ

$$\frac{\partial\omega}{\partial z}=\frac{2Z}{\varrho^6}f'(\theta)\left(\varrho^2\frac{\partial Z}{\partial z}-Z(z-z_0)\right)-\frac{2(z-z_0)f(\theta)}{\varrho^4}. \quad . \quad 615$$

и точно также

$$\frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{2Z}{\varrho^6}f'(\theta)\left(\varrho^2\frac{\partial Z}{\partial y}-Z(y-y_0)\right)-\frac{2(y-y_0)f(\theta)}{\varrho^4}. \quad . \quad 616$$

Обозначивъ временно буквою A члены уравненія 614, умноженные на производныя отъ ω, тогда

$$\begin{aligned}A=\frac{2Z}{\varrho^6}f'(\theta)\Big\{&\varrho^2(z-z_0)\frac{\partial Z}{\partial x}\cdot\frac{\partial Z}{\partial z}-\varrho^2(x-x_0)\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)^2-\\&-(z-z_0)^2Z\frac{\partial Z}{\partial x}+(x-x_0)(z-z_0)Z\frac{\partial Z}{\partial z}+\\&+\varrho^2(y-y_0)\frac{\partial Z}{\partial x}\cdot\frac{\partial Z}{\partial y}-\varrho^2(x-x_0)\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2-\\&-(y-y_0)^2Z\frac{\partial Z}{\partial x}+(x-x_0)(y-y_0)Z\frac{\partial Z}{\partial y}\Big\}-\\-\frac{2f(\theta)}{\varrho^4}\Big\{&(z-z_0)^2\frac{\partial Z}{\partial x}-(x-x_0)(z-z_0)\frac{\partial Z}{\partial z}-\\&-(x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial Z}{\partial y}+(y-y_0)^2\frac{\partial Z}{\partial x}\Big\}\end{aligned}$$

Прибавляя и отнимая въ первыхъ скобкахъ этого выраженія по $\varrho^2(x-x_0)\frac{\partial Z}{\partial x}\cdot\frac{\partial Z}{\partial x}+(x-x_0)^2Z\frac{\partial Z}{\partial x}$, во вторыхъ скобкахъ по $(x-x_0)^2\frac{\partial Z}{\partial x}$ и вспомнивъ, что

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)^2=H \text{ и } (x-x_0)\frac{\partial Z}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial Z}{\partial y}+(z-z_0)\frac{\partial Z}{\partial z}=Z$$

получимъ

$$A=\frac{2Z}{\varrho^6}f'(\theta)\left\{\varrho^2 Z\frac{\partial Z}{\partial x}-\varrho^2(x-x_0)H-\varrho^2 Z\frac{\partial Z}{\partial x}+(x-x_0)Z^2\right\}-$$

$$-\frac{2f(\theta)}{\varrho^4}\left\{\varrho^2\frac{\partial Z}{\partial x}-(x-x_0)Z\right\}$$

или, по приведеніи подобныхъ членовъ:

$$A=\frac{2Z}{\varrho^6}f'(\theta)\left((x-x_0)Z^2-\varrho^2(x-x_0)H\right)-\frac{2(f\theta)}{\varrho^4}\left(\varrho^2\frac{\partial Z}{\partial x}+(x-x_0)Z\right). \quad 617$$

обозначая черезъ B члены уравненія 614 помноженные на ω, получимъ, прибавляя и отнимая по $(x-x_0)\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$ и положивъ

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}=K, \quad \ldots\ldots 618$$

$$B=\frac{f(\theta)}{\varrho^2}\left\{2\frac{\partial Z}{\partial x}+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left((x-x_0)\frac{\partial Z}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial Z}{\partial y}+(z-z_0)\frac{\partial Z}{\partial z}\right)-\frac{\partial Z}{\partial x}\right]-(x-x_0)K\right\}.$$

Замѣтивъ, что выраженіе въ квадратныхъ скобкахъ равно $\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial Z}{\partial x}=0$, получимъ:

$$B=\frac{f(\theta)}{\varrho^2}\left\{2\frac{\partial Z}{\partial x}-(x-x_0)K\right\} \quad \ldots\ldots 619$$

Вычисливъ отдѣльно члены первой части уравненія 614, мы можемъ его написать такъ:

$$\varrho^2(A+B)=\frac{2Z}{\varrho^4}f'(\theta)(x-x_0)(Z^2-\varrho^2 H)-$$

$$-\frac{2f(\theta)}{\varrho^2}\left(\varrho^2\frac{\partial Z}{\partial x}-(x-x_0)Z\right)+f(\theta)\left(2\frac{\partial Z}{\partial x}-(x-x_0)K\right)=0$$

или, производя приведеніе подобныхъ членовъ и раздѣливъ на $(x—x_0)$,

$$\frac{2Z}{\varrho^4}f'(\theta)(Z^2—\varrho^2H)+f(\theta)\left(\frac{2Z}{\varrho^2}—K\right)=0 \quad . \quad . \quad 620$$

Къ тому же уравненію придемъ составивъ условіе

$$\frac{\partial C}{\partial x}—\frac{\partial A}{\partial z}=0 \text{ и } \frac{\partial A}{\partial y}—\frac{\partial B}{\partial x}=0$$

чтобы получить изъ 620 дифференціальное уравненіе для $f(\theta)$, замѣняемъ въ формулахъ 566 D изъ формулы 564 которую, удерживая верхній знакъ, можно написать такъ:

$$D=2RZ^2—Q.$$

Мы получимъ тогда, дифференцируя первую формулу группы 566 по x:

$$4RZ^2\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2—\frac{\partial Q}{\partial x}Z\frac{\partial Z}{\partial x}+D\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2+DZ\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}=$$

$$=a^2(b^2+c^2)Z^2—P—a^2\varrho^2+2a^2(b^2+c^2)Z\frac{\partial Z}{\partial x}(x—x_0)—4a^2(x—x_0)^2.$$

Отсюда получимъ, удерживая и въ формулахъ (556) верхній знакъ:

$$DZ\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}=a^2(b^2+c^2)Z^2—P—a^2\varrho^2+4a^2(b^2+c^2)Z\frac{\partial Z}{\partial x}(x—x_0)—$$

$$—4a^2(x—x_0)^2—4RZ^2\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2—D\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad 621$$

Поступая подобнымъ же образомъ съ двумя остальными формулами группы 566 получимъ еще два равенства подобныхъ 621-ому.

Сложивъ полученную систему уравненій, мы будемъ имѣть:

$$DZK=2pZ^2—3P—\chi^2\varrho^2+4pZ^2—$$

$$-4ZSb^2c^2(x-x_0)\frac{\partial Z}{\partial x}-4P(4RZ^2+D)H \quad . \quad . \quad 622$$

Опредѣливъ изъ формулъ 581 и 582 $S\left[b^2c^2(x-x_0)\frac{\partial Z}{\partial x}\right]$ и принимая въ разсчетъ 530 и 583, получимъ

$$Sb^2c^2(x-x_0)\frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{\varrho^2F}{Z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 623$$

При помощи этой формулы формула 622 упрощается слѣдующимъ образомъ:

$$DZK=2pZ^2-JP-\chi^2\varrho^2+4pZ^2-4(\varrho^2F+RZ^2H)-DH.$$

Принимая во вниманіе равенство $p^2Z^2-P=\varrho^2F+RZ^2H$, вытекающее изъ равенствъ 583 и 584, получимъ:

$$DZK=2pZ^2-7P-\chi^2\varrho^2+4pZ^2-4pZ^2+4P-DH$$

$$=2pZ^2-3P-\chi^2\varrho^2-DH.$$

Замѣтивъ, что по формулѣ 584

$$DH=pZ^2-P-\varrho^2\chi^2+\frac{\varrho^4}{Z^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 624$$

получимъ

$$DZK=pZ^2-2P-\frac{\varrho^4}{Z^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 625$$

По формулѣ 580:

$$\frac{2P}{\varrho^2}=\frac{2RZ^4}{\varrho^4}-\frac{2DZ^2}{\varrho^4}\ ; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 626$$

вставляя это въ предъидущую формулу, получимъ:

$$DZK=\varrho^2\left(p\frac{Z^2}{\varrho^2}-2R\frac{Z^4}{\varrho^4}-\frac{\varrho^2}{Z^2}\right)+\frac{2DZ^2}{\varrho^2},$$

откуда:

$$DZ\left(\frac{2Z}{\varrho^2}-K\right)=\varrho^2\left(2R\frac{Z^4}{\varrho^4}-p\frac{Z^2}{\varrho^2}+\frac{1}{\left(\frac{Z^2}{\varrho^2}\right)}\right) \quad . \quad . \quad 627$$

Изъ равенствъ 624 и 626, получимъ

$$DZ(Z^2-\varrho^2 H)=Z\varrho^4\left(R\frac{Z^4}{\varrho^4}-p\frac{Z^2}{\varrho^2}+\chi^2-\frac{1}{\left(\frac{Z^2}{\varrho^2}\right)}\right). \quad . \quad 628$$

Къ тому же результату мы пришли бы, принявъ въ формулахъ 564 и 566 нижній знакъ. Раздѣливъ 627 на 628 и замѣнивъ $\frac{Z^2}{\varrho_2}$ черезъ θ, получимъ:

$$-\varrho^2 Z\,\frac{\frac{2Z}{\varrho_2}-K}{Z_1-\varrho^2 H}=\frac{2R\theta^3-p\theta^2+1}{(1-a^2\theta)(1-b^2\theta)(1-c^2\theta)} \quad . \quad . \quad 629$$

Съ другой стороны изъ формулы 620:

$$\frac{2\theta f'(\theta)}{f(\theta)}=-\varrho^2 Z.\frac{\frac{2Z^2}{\varrho^2}-K}{Z^2-\varrho^2 H}$$

и слѣдовательно

$$\frac{2\theta f'(\theta)}{f(\theta)}=\frac{2R\theta^3-p\theta^2+1}{(2-a^2\theta)(1-b^2\theta)(1-c^2\theta)}=\frac{2a^2b^2c^2\theta^3-(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)\,\theta+1}{(1-a^2\theta)(1-b^2\theta)(1-c^2\theta)},$$

или, разложивъ вторую часть на сумму дробей

$$\frac{f'(\theta)}{f(\theta)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\theta}+\frac{a^2}{1-a^2\theta}+\frac{b^2}{1-b^2\theta}+\frac{c^2}{1-c^2\theta}\right).$$

Интегрируя, получимъ

$$2\,log f(\theta)=log\theta-log\,(1-a^2\theta)-log\,(1-b^2\theta)-log\,(1-c^2\theta)+log\,C$$

или

$$f^2(\theta)=C.\frac{\theta}{(1-a^2\theta)(1-b^2\theta)(1-c^2\theta)}=C\,\frac{\varrho^4 Z^2}{(\varrho^2-a^2Z^2)(\varrho^2-b^2Z^2)(\varrho^2-c^2Z^2)}.$$

Здѣсь C есть произвольная постоянная величина, знакъ которой долженъ быть такой же, какъ знакъ знаменателя предыдущаго выраженія, для того, чтобы $f(\theta)$ было дѣйствительное количество. Знакъ постоянной C мы опредѣлимъ изъ слѣдующихъ соображеній. Пусть

$$a^2>b^2>c^2\ ,$$

тогда замѣчаемъ, что вторая часть второй формулы группы 590 положительна, и что слѣдовательно и первая часть этой формулы, тоесть произведеніе

$$(c^2a^2Z^2-P)(b^2Z^2-\varrho^2)$$

должно бы положительнымъ, для чего оба множителя входящіе въ него должны имѣть одинъ знакъ. Чтобы опредѣлить этотъ знакъ замѣчаемъ что если въ формулѣ 580 примемъ верхній знакъ, то

$$RZ^4>P\varrho^2$$

или

$$a^2c^2Z^2.b^2Z^2>P.\varrho^2.$$

Это послѣднее неравенство не можетъ имѣть мѣсто въ томъ случаѣ, когда разности $c^2.a^2.Z^2-P$ и $b^2Z^2-\varrho^2$ обѣ отрицательны; эти разности должны, слѣдовательно, быть положительными, и слѣдовательно

$$c^2a^2Z^2>P \quad \text{и} \quad b^2Z^2>\varrho^2.$$

Такъ какъ $a^2>b^2>c^2$, то мы будемъ имѣть

$$b^2a^2>P \text{ и } a^2Z^2>\varrho^2.$$

Но изъ третьяго равенства группы 590 мы замѣчаемъ что первая часть его отрицательна, такъ какъ вторая, вслѣдствіе $a^2>b^2>c^2$, отрицательна. Изъ этого слѣдуетъ что если

$$b^2a^2Z^2>P,$$

то

$$c^2Z^2>\varrho^2.$$

Такимъ образомъ мы имѣемъ

$$a^2Z^2>b^2Z^2>\varrho^2>c^2Z^2,$$

и слѣдовательно знаменатель выраженія $f^2(\theta)$ а потому и C есть положительная величина, которую можно обозначить черезъ E^2.

Мы получимъ такимъ образомъ

$$f(\theta)=E^{\frac{Z^2\varrho^2}{\tilde{\omega}}},$$

гдѣ

$$\tilde{\omega}=\sqrt{(\varrho^2-a^2Z^2).(\varrho^2-b^2Z^2)(\varrho^2-c^2Z^2)}, \quad . \quad . \quad 630$$

и слѣдовательно

$$\omega=\frac{f(\theta)}{\varrho^2}=\frac{EZ}{\tilde{\omega}},$$

и по формуламъ 601

$$\left.\begin{aligned} A&=\frac{EZ}{\tilde{\omega}}\left((y-y_0)\frac{\partial Z}{\partial z}-(z-z_0)\frac{\partial Z}{\partial y}\right)\\ B&=\frac{EZ}{\tilde{\omega}}\left((z-z_0)\frac{\partial Z}{\partial x}-(x-x_0)\frac{\partial Z}{\partial z}\right)\\ C&=\frac{EZ}{\tilde{\omega}}\left((x-x_0)\frac{\partial Z}{\partial y}-(y-y_0)\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . 631$$

Изъ формулъ 566 легко получить

$$(y-y_0)\frac{\partial Z}{\partial z}-(z-z_0)\frac{\partial Z}{\partial y}=\frac{(y-y_0)(z-z_0)(b^2-c^2)(\varrho^2-a^2Z^2)}{DZ}. \quad 632$$

Вычислимъ теперь сумму Π^2, квадратовъ выраженія 632,—мы получимъ по извѣстной формулѣ:

$$\Pi^2=\left\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right\}\left\{\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)^2\right\}-$$

$$-\left[(x-x_0)\frac{\partial Z}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial Z}{\partial y}+(z-z_0)\frac{\partial Z}{\partial z}\right]^2=$$

$$=\varrho^2H-Z^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 633$$

или, по формуламъ 628 и 630,

$$\Pi^2=\frac{\tilde{\omega}^2}{DZ^2} \text{ или } \Pi=\frac{\tilde{\omega}}{Z\sqrt{D}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 634$$

Мы имѣемъ теперь все необходимое, чтобы получить выраженіе C по формуламъ 549. Для этого замѣчаемъ, что

$$C=\varrho\sqrt{A^2+B^2+C^2}=\varrho\frac{E.Z}{\tilde{\omega}}\Pi=\varrho.\frac{E}{\sqrt{D}} \quad . \quad . \quad 635$$

Мы видѣли, что два корня Z_1 и Z_2 уравненія (557) выражаются формулами

$$2RZ_1 = Q + D \text{ и } 2RZ_2 = Q - D \quad . \quad . \quad . \quad 636$$

Направленіе линіи, для точекъ которой эти корни дѣлаются равными мы называли оптическими осями.

Условіе равенства корней выразится такъ:

$$D^2 = Q^2 - 4RP\varrho^2 = 0, \quad \frac{Q}{2\varrho^2} = \frac{2RP}{Q}$$

или

$$[a^2(b^2+c^2)(x-x_0)^2 + b^2(c^2+a^2)(y-y_0)^2 + c^2(a^2+b^2)(z-z_0)^2] =$$

$$= 4a^2b^2c^2\left(a^2(x-x_0)^2 + b^2(y-y_0)^2 + c^2(z-z_0)^2\right)\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right) 637$$

Полагая здѣсь:

$$\frac{x-x_0}{\varrho} = \lambda, \quad \frac{y-y_0}{\varrho} = \mu \text{ и } \frac{z-z_0}{\varrho} = \nu \quad . \quad . \quad . \quad 638$$

получимъ, раздѣливъ обѣ части (637) на $\varrho^4 = [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z)^2]^2$ и обозначая значками $(_1)$ косинусы направленія оптической оси:

$$[a^2(b^2+c^2)\lambda_1^2 + b^2(c^2+a^2)\mu_1^2 + c^2(a^2+b^2)\nu_1^2]^2 =$$

$$= 4a^2b^2c^2[a^2\lambda_1^2 + b^2\mu_1^2 + c^2\nu_1^2](\lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2), \quad . \quad 639$$

гдѣ послѣдній множитель, очевидно, равенъ единицѣ

Производя дѣйствія, получимъ:

$$a^4(b^2+c^2)^2\lambda_1^4 + 2b^2c^2(c^2+a^2)(a^2+b^2)\mu_1^2\nu_1^2 +$$

$$+ b^4(c^2+a^2)^2\mu_1^4 + 2c^2a^2(a^2+b^2)(b^2+c^2)\nu_1^2\lambda_1^2 +$$

$$+ c^4(a^2+b^2)^2\nu_1^4 + 2a^2b^2(b^2+c^2)(c^2+a^2)\lambda_1^2\mu_1^2 =$$

$$= 4a^4b^2c^2\lambda_1^4 + 4a^2b^2c^2(b^2+c^2)\mu_1^2\nu_1^2$$

$$+ 4b^4c^2a^2\mu_1^4 + 4a^2b^2c^2(c^2+a^2)\nu_1^2\lambda_1^2$$

$$+ 4c^4a^2b^2\nu_1^4 + 4a^2b^2c^2(a^2+b^2)\lambda_1^2\mu_1^2,$$

что, по приведеніи подобныхъ членовъ, дастъ:

$$a^4(b^2-c^2)^2\lambda_1^4 + 2b^2c^2(a^2-b^2)(a^2-c^2)\mu_1^2\nu_1^2$$
$$+b^4(c^2-a^2)^2\mu_1^4-2c^2a^2(a^2-b^2)(b^2-c^2)\nu_1^2\lambda_1^2$$
$$+c^4(a^2-b^2)^2\nu_1^4 + 2a^2b^2(a^2-c^2)(b^2-c^2)\lambda_1^2\mu_1^2=0.$$

Послѣднему уравненію можно дать еще слѣдующій видъ:

$$[a^2(b^2-c^2)\lambda_1^2+b^2(a^2-c^2)\mu_1^2+c^2(a^2-b^2)\nu_1^2]^2-$$
$$-4a^2c^2(a^2-b^2)(b^2-c^2)\nu_1^2\lambda_1^2=$$

$$\left\{b^2(a^2-c^2)\mu_1^2+[a^2(b^2-c^2)\lambda_1^2+2ac\lambda_1\nu_1\sqrt{a^2-b^2}.\sqrt{b^2-c^2}+c^2(a^2-b^2)\nu_1^2]\right\}\times$$

$$\times\left\{b^2(a^2-c^2)\mu_1^2+[a^2(b^2-c^2)\lambda_1^2-2ac\lambda_1\nu_1\sqrt{a^2-b^2}.\sqrt{b^2-c^2}+c^2(a^2-b^2)\nu_1^2]\right\}$$

$$=\left\{b^2(a^2-c^2)\mu_1^2+\left[a\sqrt{b^2-c^2}.\lambda_1+c\sqrt{a^2-b^2}.\nu_1\right]^2\right\}$$

$$=\left\{b^2(a^2-c^2)\mu_1^2+\left[a\sqrt{b^2-c^2}.\lambda_1-c\sqrt{a^2-b^2}.\nu_1\right]^2\right\}=0$$

Равенство это можетъ быть справедливо только тогда, когда

$$\mu_1=0 \text{ и } a\sqrt{b^2-c^2}.\lambda_1=\pm c\sqrt{a^2-b^2}.\nu_1.$$

Возвысивъ послѣднее равенство въ квадратъ и воспользовавшись тѣмъ, что $\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1$, а въ нашемъ случаѣ $\lambda^2+\nu^2=1$ получимъ:

$$a^2(b^2-c^2)\lambda_1^2=c^2(a^2-b^2)(1-\lambda_1)^2$$
$$c^2(c^2-b^2)\nu_1^2=a^2(b^2-c^2)(1-\nu_1)^2,$$

откуда:

$$\lambda_1^2=\frac{c^2(a^2-b^2)}{b^2(a^2-b^2)},\quad \mu_1^2=0 \quad \text{и} \quad \nu_1^2=\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)} \quad . \quad . \quad 640$$

Формулы 640 даютъ направленія оптическихъ осей.

Этихъ направленій два и лежатъ они въ плоскости *zx*

Пусть i_1 и i_2 углы которые образуетъ направленіе линіи ρ съ оптическими осями. Тогда

$$Cosi_1 = \lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 + \nu\nu_1 = \frac{c\sqrt{a^2-b^2}.\lambda + a\sqrt{b^2-c^2}.\nu}{b\sqrt{a^2-c^2}} \quad . \quad : \quad 641$$

$$Cos\, i_2 = \frac{c\sqrt{a^2-b^2}\lambda - a\sqrt{b^2-c^2}.\nu}{b\sqrt{a^2-c^2}} \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Составимъ выраженіе

$$= b^2(a^2-c^2)(1-Cos^2 i_1)(1-Cos^2 i_2) =$$

$$= [b^2(a^2-c^2) - (c\sqrt{a^2-b^2}.\lambda + a\sqrt{b^2-c^2}.\nu)^2] \times$$

$$\times [b^2(a^2-c^2) - (c\sqrt{a^2-b^2}.\lambda - a\sqrt{b^2-c^2}.\nu)^2] =$$

$$= [b^2(a^2-c^2) - c^2(a^2-b^2)\lambda^2 - a^2(b^2-c^2)\nu^2 -$$

$$- 2ac\sqrt{a^2-b^2}.\sqrt{b^2-c^2}.\lambda.\nu] \times$$

$$\times [b^2(a^2-c^2) - c^2(a^2-b^2)\lambda^2 - a^2(b^2-c^2)\nu^2 +$$

$$+ 2ac\sqrt{a^2-b^2}.\sqrt{b^2-c^2}.\lambda.\nu] =$$

$$= [b^2(a^2-c^2)(\lambda^2+\mu^2+\nu^2) - c^2(a^2-b^2)\lambda^2 - a^2(b^2-c^2)\nu^2]^2 -$$

$$- 4a^2c^2(a^2-b^2)(b^2-c^2)\lambda^2\nu^2 =$$

$$= [a^2(b^2-c^2)\lambda^2 + b^2(a^2-c^2)\mu^2 + c^2(a^2-b^2)\nu^2]^2 -$$

$$- 4a^2c^2(a^2-b^2)(b^2-c^2)\lambda^2\nu^2 = \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 64$$

Съ другой стороны

$$\frac{D^2}{\rho^2} = [a^2(b^2+c^2)\lambda^2 + b^2(c^2+a^2)\mu^2 + c^2(a^2+c^2)\nu^2]^2 -$$

$$- 4a^2b^2c^2(a^2\lambda^2 + b^2\mu^2 + c^2\nu^2)(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)$$

Раскрывая въ этомъ выраженіи скобки и совершая тѣ-же преобразованія какъ и раньше при преобразованіи формулъ 639, мы получимъ

$$\frac{D^2}{\varrho^2}=\left[a^2(b^2-c^2)\lambda^2+b^2(a^2-c^2)\,\mu^2+c^2(a^2-b^2)\nu^2\right]^2-$$

$$-4a^2c^2(a^2-b^2)(b^2-c^2)\lambda^2\nu^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 644$$

Сравнивая 643 и 644, получимъ

$$D^2=\varrho^2\,b^2(a^2-c^2)\,Sin\,i_1.\,Sin\,i_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 645$$

По формулѣ 635 получимъ

$$C=\frac{E}{b\sqrt{(a^2-c^2)Sin\,i_1.\,Sin\,i_2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 646$$

При помощи формулъ 549, 631 и 646 легко опредѣлить косинусы угловъ образуемыхъ направленіемъ колебаній въ той точкѣ средины, которая опредѣляется координатами x, y и z:

$$\alpha=\varrho\frac{A}{C}=\varrho.\frac{EZ}{\vec{\omega}}\left[(y-y_0)\frac{\partial Z}{\partial z}-(z-z_0)\frac{\partial Z}{\partial y}\right]\frac{1}{C}=$$

$$=\varrho.\frac{E}{\vec{\omega}}\frac{(y-y_0)(z-z_0).(b^2-c^2)(\varrho^2-a^2Z^2)}{D.C}=$$

$$=\frac{(y-y_0)(z-z^2)(b^2-c^2)\sqrt{\varrho^2-a^2Z^2}}{b\varrho\sqrt{\varrho^2-b^2Z^2}.\sqrt{\varrho^2-c^2Z^2}\sqrt{(a^2-c^2)}Sin\,i_1\,Sin\,i_2}=$$

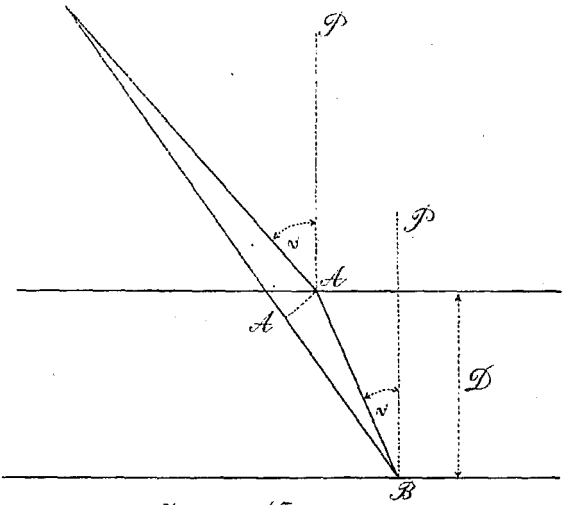
$$=\sqrt{1-\frac{c^2}{b^2}}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}.\frac{\mu.\nu\sqrt{\varrho^2-a^2Z^2}.\varrho}{\sqrt{\varrho^2-b^2Z^2}\sqrt{\varrho^2-c^2Z^2}\sqrt{Sin\,i_1.\,Sin\,i_2}} \ldots . \quad 147$$

ЗАМѢЧЕННЫЯ ПОГРѢШНОСТИ.

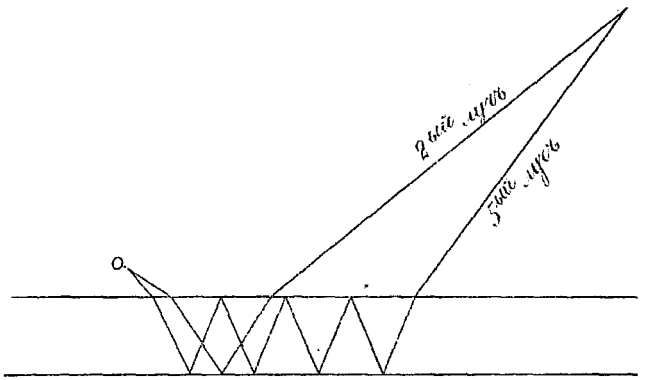
Стр.	*Строк.*	*Напечатано.*	*Слѣдуетъ читать.*
18	6	$X_x,\ Y_y,\ Z_z$	$X_x,\ Y_x,\ Z_z$
28	10	$+Y_z\frac{\partial y_z}{\partial t}+X_x\frac{\partial z_x}{\partial t}+Z_y\frac{\partial x_y}{\partial t}$	$2Y_z\frac{\partial y_z}{\partial t}+2Z_x\frac{\partial z_x}{\partial t}+2X_y\frac{\partial x_y}{\partial t}$
29	1	$\frac{\partial F}{\partial y_z}=Y_z,\frac{\partial F}{\partial z_x}=Z_x,\frac{\partial F}{\partial z_y}=X_y$	$\frac{\partial F}{\partial y_z}=2Y_z,\frac{\partial F}{\partial z_x}=2Z_x,\frac{\partial F}{\partial x_y}=2X_y$
30	11	$F=-\Big(K\Big\{x_x{}^2+y_y{}^2+z_z{}^2+$ $+y_z{}^2+z_z{}^2+x_y{}^2\Big\}+$ $+\frac{1}{2}L(x_x+y_y+z_z)^2\Big)$	$F=-\Big(K\Big\{x_x{}^2+y_y{}^4+z_z{}^2+$ $+2y_z{}^2+2z_x{}^2+2x_y{}^2\Big\}+$ $+\frac{1}{2}L\big(x_x+y_y+z_z\big)^2\Big)$
30	16	$2Kz_x$	$2Kx_x$
37	7	$\xi''=\frac{\partial\Sigma}{\partial y}\Delta V$	$\eta''=\frac{\partial\Sigma}{\partial y}-\Delta V$
64	12	$I+\frac{1}{r^2}\cdot K(A^2{}_1+A^2{}_2+A_3{}^2)$	$I=\frac{1}{r^2}\cdot K(A^2{}_1+A^2{}_2+A^2{}_3)$
72	16	$\int\Big\{U\frac{\partial V}{\partial n}-U\frac{\partial U}{\partial n}\Big\}ds=$	$\int\Big\{U\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial U}{\partial n}\Big\}ds=$
73	7	$-\int U\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}dT$	$-\int U\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}dT$
—	18	$=\int U\frac{\partial V}{\partial n}ds$	$=\int V\frac{\partial U}{\partial n}ds$
74	9	F	T
84	1	(39)	(49)
86	7	$\int ds\int_{-T'}^{+T''}\Big\{\varphi\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big\}dt=$	$\int ds\int_{-T'}^{+T''}\Big\{\varphi\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big\}dt=$
92	3	принятаго при выборѣ $r-aT''$	принятаго при выборѣ T' и T'', $r+aT''$ и $r-aT'$
102	10	$\alpha'=-$	$\alpha'=-1$
103	6	$U_n(t,x,y,z)=U(t,x,y,z)+$	$U_n(t,x,y,z)=U_n(t,x,y,z)+$
115	6	лежитъ на эллипсоидѣ вращенія, имѣющемъ	касается эллипсоида вращенія, имѣющаго
128	19	$F(\xi)=\pm\int ds$	$F(\xi)=\pm\int G\,ds$

Стр.	*Строк.*	*Напечатано.*	*Слѣдуетъ читать.*
142	5	$-\frac{1-\alpha_1^2}{2\varrho_1}$	$-\frac{1-\beta_1^2}{2\varrho_1}$
153	23	наименьшее A_0,	наименьшее значеніе A_0,
173	6	$\frac{D}{Dn}\left(\frac{\mathrm{A}\overline{\overline{U}}}{r_0}\right)-\frac{1}{r_0}\mathrm{B}\overline{\overline{U}}_n-$	$\frac{D}{Dn}\left(\frac{\mathrm{A}\overline{\overline{U}}}{r_0}\right)-\frac{1}{r_0}\mathrm{B}\overline{\overline{U}}_n=$
173	14	то есть когда ψ	то есть для которой ψ
182	21	$=\frac{4\pi}{r_{10}}$	$=-\frac{4\pi}{r_{10}}$
—	23	$Q=\frac{4\pi}{r_{10}}Cos(n\xi_0+\alpha)$	$Q=-\frac{4\pi}{r_{10}}Cos(n\xi_0+\alpha)$
183	4	$U(x_0, y_0, z_0, t)=$	$U(x_0, y_0, z_0, t)=$
		$=\frac{1}{r_{10}}Cos(nr_{10}+\alpha)+\frac{1}{r_{10}}Cos(n\xi+\alpha)$	$=\frac{1}{r_{10}}Cos(nr_{10}+\alpha)-\frac{1}{r_{10}}Cos(n\xi_0+\alpha)$
		$=\frac{2}{r_{10}}Cos\,n\frac{r_{10}-\xi_0}{2}Cos\,(n\frac{r_{10}+\xi_0}{2}+\alpha)$	$=-\frac{2}{r_{10}}Sin\,n\frac{r_{10}-\xi_0}{2}Sin(n\frac{r_{10}-\xi_0}{2}+\alpha)$
		A_0	ξ'
195	9	$nC=\left[\frac{\partial F}{\partial\xi}Sin\,n\xi\right]+$	$nC=\left[\frac{\partial F}{\partial\xi}Sin\,n\xi\right]-$
202	9	2π	$\frac{2\pi}{\lambda}$
—	10		
—	13		
—	15		
203	2	$2\pi($	$\frac{2\pi}{\lambda}($
—	3		
206	2	$\frac{\lambda r_1 r_1}{1}$	$\frac{1}{\lambda r_1 r_0}$
—	4	$\frac{\lambda^2 r_0^2}{I}$	$\frac{I}{\lambda^2 r_0^2}$
262	11	$\Delta+\Delta'$ короче	$\Delta+\Delta'$, которое короче
—	13	K_0	n_0
—	14		
269	12	$=\alpha_0, i$	$=\alpha_0, i\frac{1}{\lambda_0}$
—	13	$=\beta_0, i$	$=\beta_0; i\frac{1}{\lambda_0}$
—	14	$=\gamma_0, i$	$=\gamma_0, i\frac{1}{\lambda_0}$
270	23	x_c-x_c, y_c-x_c	x_0-x_c, y_0-y_c
277	11	$\Psi T=t$, гдѣ t есть	$\Psi T=t$, есть
281	17	13	15
303	19	15	16
309	4	$2A^2$	A^2

Стр.	*Строк.*	*Напечатано.*	*Слѣдуетъ читать.*
142	5	$-\frac{1-\alpha_1^2}{2\varrho_1}$	$-\frac{1-\beta_1^2}{2\varrho_1}$
153	23	наименьшее A_0,	наименьшее значеніе A_0,
173	6	$\frac{D}{Dn}\left(\frac{\mathrm{A}\overline{\overline{U}}}{r_0}\right)-\frac{1}{r_0}\mathrm{B}\overline{\overline{U}}_n-$	$\frac{D}{Dn}\left(\frac{\mathrm{A}\overline{\overline{U}}}{r_0}\right)-\frac{1}{r_0}\mathrm{B}\overline{\overline{U}}_n=$
173	14	то есть когда ψ	то есть для которой ψ
182	21	$=\frac{4\pi}{r_{10}}$	$=-\frac{4\pi}{r_{10}}$
—	23	$Q=\frac{4\pi}{r_{10}}Cos(\varkappa\xi_0+\alpha)$	$Q=-\frac{4\pi}{r_{10}}Cos(\varkappa\xi_0+\alpha)$
183	4	$U(x_0, y_0, z_0, t)=$	$U(x_0, y_0, z_0, t)=$
		$=\frac{1}{r_{10}}Cos(\varkappa r_{10}+\alpha)+\frac{1}{r_{10}}Cos(\varkappa\xi+\alpha)$	$=\frac{1}{r_{10}}Cos(\varkappa r_{10}+\alpha)-\frac{1}{r_{10}}Cos(\varkappa\xi_0+\alpha)$
		$=\frac{2}{r_{10}}Cos\varkappa\frac{r_{10}-\xi_0}{2}Cos\left(\varkappa\frac{r_{10}+\xi_0}{2}+\alpha\right)$	$=-\frac{2}{r_{10}}Sin\varkappa\frac{r_{10}-\xi_0}{2}Sin\left(\varkappa\frac{r_{10}-\xi_0}{2}+\alpha\right)$
		A_0	ξ'
195	9	$\varkappa C=\left[\frac{\partial F}{\partial\xi}Sin\varkappa\xi\right]+$	$\varkappa C=\left[\frac{\partial F}{\partial\xi}Sin\varkappa\xi\right]-$
202	9	}	
—	10	} 2π	$\frac{2\pi}{\lambda}$
—	13	}	
—	15	}	
203	2	} $2\pi($	$\frac{2\pi}{\lambda}($
—	3	}	
206	2	$\frac{\lambda r_1 r_1}{1}$	$\frac{1}{\lambda r_1 r_0}$
—	4	$\frac{\lambda^2 r_0^2}{I}$	$\frac{I}{\lambda^2 r_0^2}$
262	11	$\Delta+\Delta'$ короче	$\Delta+\Delta'$, которое короче
—	13	}	
—	14	} K_0	$\varkappa_0$
269	12	$=\alpha_0, i$	$=\alpha_0, i\frac{1}{\lambda_0}$
—	13	$=\beta_0, i$	$=\beta_0; i\frac{1}{\lambda_0}$
—	14	$=\gamma_0, i$	$=\gamma_0, i\frac{1}{\lambda_0}$
270	23	x_c-x_e, y_c-x_e	x_0-x_c, y_0-y_c
277	11	$\Psi T=t$, гдѣ t есть	$\Psi T=t$, есть
281	17	13	15
303	19	15	16
309	4	$2A^2$	A^2



Черт. 15



Черт. 16

ИЗСЛѢДОВАНІЕ
РЕАКЦІИ ЦИНКЭТИЛА НА БУТИРОНЪ.

П. Меньшикова.

Въ настоящее время цинк-органическія соединенія занимаютъ едва ли не первое мѣсто въ ряду соединеній, примѣняемыхъ для синтетическихъ реакцій. Столь большое примѣненіе они пріобрѣли благодаря своей способности очень легко вступать въ реакцію съ органическими соединеніями, содержащими хлоръ, кислородъ и др.

Такъ какъ синтезъ является главнымъ критеріемъ при сужденіи о химическомъ строеніи вещества, то значеніе цинк-органическихъ соединеній, какъ веществъ, благодаря которымъ примѣненіе синтетическаго метода изслѣдованія значительно расширяется, въ наукѣ химіи довольно велико; поэтому нѣтъ ничего удивительнаго, что цѣлый рядъ химиковъ занятъ былъ разрѣшеніемъ вопроса о дѣйствіи цинк-органическихъ соединеній на различныя органическія соединенія.

Моя работа—изслѣдованіе реакціи цинкэтила на бутиронъ – будетъ служить дополненіемъ къ тѣмъ даннымъ, которыя ведутъ къ разрѣшенію вопроса о дѣйствіи цинк-органическихъ соединеній на кислородъ содержащія органическія вещества, поэтому, прежде чѣмъ излагать свою работу, я позволю себѣ сдѣлать краткій историческій очеркъ хода развитія вышеупомянутаго вопроса

Механизмъ реакцій между названными веществами началъ изучаться гораздо позднѣе, чѣмъ сдѣлались извѣстными цинк-органическія соединенія; хотя дѣйствіе послѣднихъ на кислородныя органическія соединенія наблюдалось вскорѣ послѣ ихъ приготовленія.

Важнѣйшими изслѣдователями въ этомъ направленіи должно назвать Франкланда, впервые приготовившаго цинкорганическія соединенія; затѣмъ его сотрудника Дюппа и наконецъ цѣлый рядъ русскихъ химиковъ, и преимущественно Казанской лабораторіи, которые болѣе всего и подвинули этотъ вопросъ впередъ. Особенно цѣнныя изслѣдованія принадлежатъ профессорамъ А. М. Бутлерову и А. М. Зайцеву.

Франкландъ [1]), говоря о разложеніи іодистыхъ алкиловъ металлами, упоминаетъ, между прочимъ, о томъ, что если цинкъ нагрѣвать съ іодистымъ этиломъ и абсолютнымъ алкоголемъ, то замѣчается выдѣленіе этана, продуктъ же реакціи представляетъ смѣсь эфира и основнаго іодистаго цинка. Ходъ реакціи между названными веществами, по мнѣнію изслѣдователя, можетъ быть выраженъ слѣдующимъ эмпирическимъ уравненіемъ [2])

$$C_4H_5J + C_4H_6O_2 + 2Zn = 2C_2H_3 + C_4H_5O + ZnJ + ZnO.$$

Далѣе тамъ же говорится, что если нагрѣть въ запаянной трубкѣ равные объемы іодистаго этила и эфира съ цинкомъ до температуры 150°, то, по окончаніи реакціи, получается густая маслообразная масса. При вскрытіи трубки выдѣляется незначительное количество газа; болѣе сильное выдѣленіе газа наблюдается при обливаніи продукта реакціи водою.

Выдѣляющійся газъ состоитъ изъ: 27,7% бутана, 68,2% этана и 4,1% этилена.

Какъ на первую, такъ и на вторую реакцію Франкландъ не обратилъ особеннаго вниманія, такъ какъ еще не зналъ хорошенько свойствъ цинк-органическихъ соединеній, которыя, по всей вѣроятности, и реагировали съ алкоголемъ и эфиромъ. Позднѣе Ритъ и Бейльштейнъ [3]) объясняютъ первую реакцію такимъ образомъ, что сначала изъ іодистаго этила и цинка образуется цинкэтилъ, который уже и

---

[1]) Jahresber. 1849, 416.
[2]) Обозначеніе элементовъ по эквивалентному вѣсу.
[3]) Ann. Chem. Pharm. 126, 241.

реагируетъ со спиртомъ. Образованіе въ данномъ случаѣ эфира и этана выражено вышеупомянутыми изслѣдователями слѣдующимъ уравненіемъ:

$$ZnC_2H_5 + 2C_2H_6O = C_4H_{10}O + C_2H_6 + Zn(OH).$$

Стало быть здѣсь цинкэтилъ дѣйствуетъ на алкоголь водуотнимающимъ образомъ.

Франкландъ, послѣ того какъ ему удалось получить цинк-органическія соединенія въ чистомъ видѣ, принялся за изученіе ихъ физическихъ и химическихъ свойствъ (впрочемъ только цинкэтила и цинкметила [1])). Замѣтивъ, что соединенія эти обладаютъ громаднымъ сродствомъ къ кислороду, Франкландъ, уже вмѣстѣ съ Дюппа, примѣнили ихъ для реакціи съ кислородъ содержащими органическими соединеніями. Первой попыткой ихъ было изслѣдованіе дѣйствія цинкэтила на этильный эфиръ борной кислоты [2]). Продуктами реакціи получены были: борэтилъ въ перегонѣ и соединеніе цинкэтила съ цинкалкоголятомъ въ остаткѣ, (цинкэтилъ взятъ былъ въ избыткѣ). Реакція между названными веществами выражена изслѣдователями слѣдующимъ уравненіемъ:

$$C_{12}H_{15}BO_6 + 3ZnC_4H_5 = BC_{12}H_{15} + 3C_4H_5ZnO_2$$

Первая синтетическая реакція произведена была Франкландомъ [3]) только въ 1863 году. Онъ реагировалъ цинкэтиломъ на щавелево-этильный эфиръ.

Во время реакціи замѣчалось выдѣленіе газа въ довольно значительномъ количествѣ; остатокъ, вѣрнѣе продуктъ реакціи, облитый водою также выдѣлялъ газъ, оказавшійся этаномъ.

При отгонкѣ продукта реакціи, смѣшаннаго съ водою, на водяной банѣ, въ пріемникъ переходилъ алкоголь, содержащій въ растворѣ маслянистое вещество. Тоже самое масло получалось и при обливаніи остатка новымъ количествомъ воды и перегонкѣ на песчаной банѣ.

---

[1]) Jahresber. 1855, 576.
[2]) Jahresber. 1860, 386.
[3]) Ann. Chem. Pharm. 126, 109.

Масло, подвергнутое фракціонированной перегонкѣ, болѣе всего переходило при 174 — 176°C. Анализы этой фракціи дали цифры, хорошо согласующіяся съ формулой $C_8H_{16}O_3$. По мнѣнію Франкланда масло это есть ни что иное какъ „этильный эфиръ кислоты такого-же состава, которая была получена впервые Strecker'омъ при дѣйствіи азотной кислоты на лейцинъ". Реакція, по мнѣнію Франкланда, идетъ такъ: сначала цинкэтилъ дѣйствуетъ на щавелевый эфиръ такимъ образомъ, что образуетъ цинклейциновый эфиръ; затѣмъ вода уже разлагаетъ образовавшійся цинклейциновый эфиръ съ образованіемъ лейциноваго эфира и окиси цинка. Весь ходъ реакціи выражается слѣдующими двумя уравненіями:

$$C_2\begin{cases}O\\O\\C_2H_5O\\C_2H_5O\end{cases} + Zn_2<\begin{matrix}C_2H_5\\C_2H_5\end{matrix} = \begin{matrix}C_2H_5\\Zn\end{matrix}>O + C_2\begin{cases}C_2H_5\\C_2H_5\\O\\OZn\\C_2H_5O\end{cases}$$

Цинклейциновый эфиръ.

$$C_2\begin{cases}C_2H_5\\C_2H_5\\O\\OZn\\C_2H_5O\end{cases} + \begin{matrix}H\\H\end{matrix}>O = C_2\begin{cases}C_2H_5\\C_2H_5\\O\\OH\\C_2H_5O\end{cases} + Zn(OH)$$

Лейциновый эфиръ.

При обмыливаніи эфира ѣдкимъ баритомъ получается баритовая соль лейциновой кислоты.

Такимъ образомъ Франклandомъ синтезирована была оксикислота съ помощію цинкоорганическаго соединенія.

Германъ Кольбе [1]) въ своей работѣ „Prognose neuer Isomerie" даетъ точно такое же объясненіе хода реакціи, но онъ думаетъ, что полученная Франклandомъ кислота не идентична съ лейциновой кислотой, полученной Strecker'омъ, а скорѣе гомологъ кислотъ Städler'a, полученной дѣйствіемъ

[1]) Zeitschr. f. Ch. Pharm. 1886, 35.

CNH· и HCl на ацетонъ, поэтому онъ склоненъ назвать ее скорѣе изолейциновой.

А. М. Бутлеровъ [1]) сомнѣвается въ справедливости объясненій данныхъ Франкландомъ и Кольбе относительно хода реакціи, такъ какъ если принять, согласно ихъ объясненію, что водородъ группы (OH) замѣщается на цинкъ, то выдѣленіе этана, на которое указываетъ Франкландъ, совершенно непонятно. Если же предположить, что водородъ воднаго остатка замѣщается на одноатомную группу ($Zn\,C_2H_5$), то выдѣленіе этана становится вполнѣ понятнымъ. Существованіе группы ($Zn\,CH_3$), аналогичной ($Zn\,C_2H_5$), предполагаетъ В. В. Марковниковъ [2]) въ своей работѣ „Ueber Alcohol bromid und die Isomerie einiger Substanzen der Propylreihe". Принимая во вниманіе вышесказанное, А. М. Бутлеровъ даетъ нѣсколько иное объясненіе хода реакціи, а именно: онъ предполагаетъ, что сначала 1 ч. цинкэтила, распадаясь на радикалы (ZnC_2H_5) и (C_2H_5), дѣйствуетъ на кислородъ, связанный съ углероднымъ атомомъ двойной связью, причемъ одна связь разрывается; на счетъ освободившагося сродства радикалы и присоединяются къ эфиру такимъ образомъ, что (ZnC_2H_5) насыщаетъ сродство кислороднаго атома, а C_2H_5 углероднаго; затѣмъ вторая частица цинкэтила дѣйствуетъ уже (также предварительно распадаясь на извѣстные уже радикалы) на это сложное цинк-органическое соединеніе такъ, что (ZnC_2H_5) отнимаетъ одноатомную группу (OC_2H_5) и соединяется съ ней, образуя „цинкмоноэтилэтилятъ" (если можно такъ назвать соединеніе состава $C_2H_5OZnC_2H_5$), а вмѣсто группы (C_2H_5O) встаетъ радикалъ (C_2H_5). Въ результатѣ получается соединеніе, представляющее лейциновый эфиръ, въ которомъ водородъ воднаго остатка замѣщенъ на группу (ZnC_2H_5).

Соединеніе это подъ вліяніемъ воды разлагается съ образованіемъ лейциноваго эфира, этана и окиси цинка. Ходъ реакціи выражается слѣдующими уравненіями:

$$\begin{matrix} C=O.OC_2H_5 \\ | \\ C=O.OC_2H_5 \end{matrix} + 2\,Zn < \begin{matrix} C_2H_5 \\ C_2H_5 \end{matrix} = \begin{matrix} C=OOC_2H_5 \\ | \\ C=(C_2H_5)_2 \\ -OZnC_2H_5 \end{matrix} + \begin{matrix} C_2H_5O \\ C_2H_5 \end{matrix} > Zn;$$

---

[1]) Zeitschr. f. Ch. Pharm. 1864, 406.
[2]) Ibidem 1864, 71.

$$\begin{array}{l} COOC_2H_5 \\ | \\ C \quad (C_2H_5)_2 \\ \quad\diagdown OZnC_2H_5 \end{array} + 2H_2O = \begin{array}{l} COOC_2H_5 \\ | \\ C \quad (C_2H_5)_2 \\ \quad\diagdown O\text{-}H \end{array} + C_2H_6 + Zn(OH)_2$$

Нѣсколько позднѣе Франкландъ [1]) и Дюппа сами даютъ объясненіе хода реакціи между цинкэтиломъ и щавелевымъ эфиромъ.

Для разъясненія этого вопроса они сдѣлали опытъ надъ дѣйствіемъ цинкэтила на лейциновый эфиръ. Во время реакціи они наблюдали выдѣленіе этана, количество котораго ими было измѣрено. Оказалось, что газа выдѣлилось столько, сколько требуется по теоріи въ томъ случаѣ, если-бы реакція шла согласно слѣдующему уравненію:

$$C_2\begin{cases} C_2H_5 \\ C_2H_5 \\ OH \\ O \\ OC_2H_5 \end{cases} + Zn < \begin{matrix} C_2H_5 \\ C_2H_5 \end{matrix} = C_2\begin{cases} C_2H_5 \\ C_2H_5 \\ OZnC_2H_5 \\ O \\ OC_2H_5 \end{cases} + C_2H_6$$

Послѣ нагрѣванія, продуктъ реакціи разлагался водой; полученное при этомъ масло отгонялось на песчаной банѣ. Масло заключало въ себѣ около $^1/_4$ всего, взятаго для реакціи эфира. Въ другомъ опытѣ, когда нагрѣваніе продукта реакціи не производилось, почти весь эфиръ остался неизмѣненнымъ. Несомнѣнно, что реакція здѣсь идетъ именно согласно вышеприведенному уравненію. т. е. результатомъ реакціи является сложное цинк-органическое соединеніе, названное изслѣдователями „цинкмоноэтил-лейциновый эфиръ“, которое при разложеніи водой снова даетъ лейциновый эфиръ. Такое-же соединеніе, конечно, долженъ представлять изъ себя и продуктъ реакціи цинкэтила на щавелевый эфиръ, если онъ, подъ вліяніемъ воды, даетъ также лейциновый эфиръ.

Выходя изъ этого положенія, изслѣдователи считаютъ несомнѣннымъ, что реакція между щавелевымъ эфиромъ и цинкэтиломъ идетъ согласно слѣдующему уравненію:

---

[1]) Ann. Chem. Pharm. 135, 29; Zeitschr. f. Ch. Pharm. 1865, 568.

$$C_2\begin{cases}O\\OC_2H_5\\O\\OC_2H_5\end{cases} + 2\,Zn<\begin{matrix}C_2H_5\\C_2H_5\end{matrix} = C_2\begin{cases}C_2H_5\\C_2H_5\\OZnC_2H_5\\O\\OC_2H_5\end{cases} + Zn<\begin{matrix}C_2H_5\\O\text{-}C_2H_5\end{matrix}$$

$$C_2\begin{cases}C_2H_5\\C_2H_5\\OZnC_2H_5\\O\\OC_2H_5\end{cases} + 2H_2O = C_2\begin{cases}C_2H_5\\C_2H_5\\OH\\O\\OC_2H_5\end{cases} + C_2H_6 + Zn(OH)_2$$

т. е. такъ же, какъ это предполагаетъ и А. М. Бутлеровъ.

Франкландъ и Дюппа не ограничились однако изслѣдованіемъ реакціи цинкэтила на щавелевый эфиръ: такъ, начиная съ 1864 года они произвели рядъ аналогичныхъ реакцій; причемъ ими видоизмѣненъ былъ и самый способъ веденія реакціи.

Для полученія лейциноваго эфира [1]), напр. они дѣйствовали на амальгаму цинка смѣсью іодистаго этила съ щавелевымъ эфиромъ, надѣясь, что іодистый этилъ будетъ реагировать съ цинкомъ, образуя цинкэтилъ, а этотъ послѣдній уже вступитъ въ реакцію съ щавелевымъ эфиромъ указаннымъ выше образомъ. Для подобной-же реакціи они употребляли и другіе іодюры напр. JCH_3 и JC_5H_{11}.

При нагрѣваніи смѣси іодистаго метила и щавелевометильнаго эфира съ амальгамой цинка, изслѣдователи получили цинковую соль кислоты, которую они назвали „диметилщавелевою“; соотвѣтствующаго-же эфира, не смотря на всѣ старанія, получить имъ не удалось.

Щавелевометильный эфиръ [2]) съ іодистымъ этиломъ и цинкомъ далъ лейциновометильный эфиръ, изъ котораго дѣйствіемъ $Ba(OH)_2$ приготовлена была баритовая соль, а послѣдняя, обработанная сѣрной кислотой, дала свободную лейциновую кислоту.

---

[1]) Ann. Chem. Pharm. 133, 80. Zeitschr. f. Ch. Pharm. 1864, 278.
[2]) Ibidem. 135, 25.

Смѣсь іодистаго этила съ щавелевоамильнымъ эфиромъ при дѣйствіи на цинкъ дала диэтил-щавелево-амильный эфиръ [1]).

Диэтил-щавелево-метильный эфиръ [2]) полученъ былъ при дѣйствіи на цинкъ смѣси 2 ч. іодистаго этила и 1 ч. щавелевометильнаго эфира.

Смѣсь 1 ч. щавелево-этильнаго эфира, 2 ч. іодистаго этила и 2 ч. іодистаго метила, реагируя съ цинкомъ, дала этил-метил-щавелево-этильный эфиръ [3]). Реакція здѣсь идетъ, нужно думать, по слѣдующему уравненію:

$$C_2\begin{cases}O\\OC_2H_5\\O\\OC_2H_5\end{cases} + Zn_2 + 2\,{}^{C_2H_5}_{J} > + 2\,{}^{CH_3}_{J} > =$$

$$C_2\begin{cases}C_2H_5\\CH_3\\OZnCH_3\\O\\OC_2H_5\end{cases} + Zn < {}^{C_2H_5}_{OC_2H_5} + 2ZnJ_2;$$

$$C_2\begin{cases}C_2H_5\\CH_3\\OZnCH_3\\O\\OC_2H_5\end{cases} + 2H_2O = C_2\begin{cases}C_2H_5\\CH_3\\OH\\O\\OC_2H_5\end{cases} + CH^4 + Zn(OH)_2$$

Особый интересъ представляетъ реакція смѣси щавелево-этильнаго эфира съ іодистымъ амиломъ на цинкъ, такъ какъ полученное въ этомъ случаѣ масло распалось на три фракціи [4]): 1) съ точкой кипѣнія 203°C, имѣющая составъ $C_9H_{16}O_3$—амил-гидрощавелево-этильнаго эфира; 2) съ т. к.

---

[1]) Jahresb. 1865. 380.
[2]) Zeitschr. f. Ch. Pharm. 1865. 482.
[3]) Ibidem. 1865. 483.
[4]) Jahresb. 1865, 382.

224—225°C съ составомъ $C_{11}H_{22}O_3$ этил-амил-гидрощавелево-этильнаго эфира и наконецъ 3) съ т. к. 262°C состава ди-амил-щавелево-этильнаго эфира формулы $C_{14}H_{28}O_3$.

Образованіе послѣдняго эфира является вполнѣ нормальнымъ, тогда какъ два первые суть аномальные продукты реакціи.

Вполнѣ аналогичная реакція происходитъ при дѣйствіи 2 ч. іодистаго псевдопропила и 1 ч. щавелеваго эфира на цинкъ; здѣсь также получено В. В. Марковниковымъ [1]) масло, заключающее въ себѣ три продукта. 1-й оксиизокаприловый эфиръ состава $C_8H_{15}(C_2H_5)O_3$; 2-й оксиизовалеріановую кислоту (псевдопропил-гидро-щавелевую) состава $C_3H_7CH(OH)CO_2H$ идентичную кислотѣ Fittig'a и Klark'a изъ бромвалеріановой кислоты и, наконецъ, 3-й по всей вѣроятности, аналогичной амил-этил-гидрощавелевой кислотѣ Франкланда и Дюппа состава $(C_3H_7)(C_2H_5O)=CH—CO_2H$.

Относительно образованія псевдопропилгидрощавелеваго эфира, а также амил-гидрощавелеваго Франкланда В. В. Марковниковъ [2]) предполагаетъ, что оно можетъ быть выражено слѣдующимъ уравненіемъ:

$$\begin{array}{l} C{\equiv}O\text{-}O\text{-}Ae \\ | \\ C{\equiv}O\text{-}O\text{-}Ae \end{array} + 2Zn\begin{array}{l} C_3H_7 \\ C_3H_7 \end{array} = \begin{array}{l} (C_3H_7)_2=C-OZnC_3H_7 \\ \quad\quad\quad | \\ \quad\quad\quad C\,OOAe \end{array} + Zn<\begin{array}{l} OC_2H_5 \\ C_3H_7 \end{array}$$

$$(C_3H_7)_2=CO\,ZnC_3H_7 \\ \quad\quad\quad | \\ \quad\quad\quad C{\equiv}OOAe + 2H_2O =$$

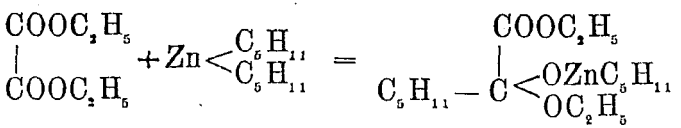
$$(C_3H_7)\begin{array}{l} H \\ | \\ C-OH \\ | \\ C{\equiv}OOAe \end{array} + C_3H_8 + C_3H_6 + Zn(OH)_2$$

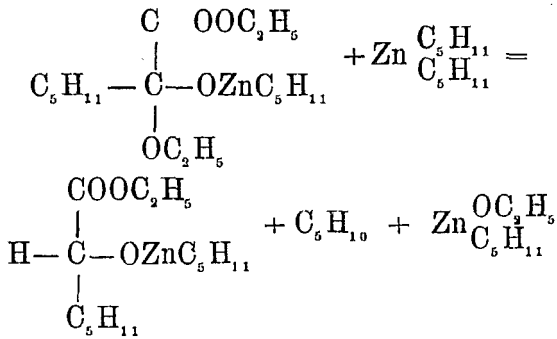
т. е. возстановленіе происходитъ въ моментъ разложенія цинкоорганическаго соединенія водою. И. Богомолецъ [3]) же

---

[1]) Ж. Р. Х. Общ. II, 95. и Zeitschr. f. Ch. Pharm. 1870. 516.
[2]) Ж. Р. Х. Общ. XV, 407.
[3]) Ibidem. XIII, 413.

думаетъ, что возстановленіе происходитъ уже при дѣйствіи второй частицы цинкалкила, послѣ присоединенія первой. Такъ что образованіе амилгидрощавелеваго эфира Франкланда можетъ быть выражено, по его мнѣнію, слѣдующимъ уравненіемъ:





По разложеніи продукта реакціи водою и получится амил-гидрощавелево-этильный эфиръ.

Въ 1880 году А. Рафальскій [1]), дѣйствуя смѣсью іодистаго пропила и щавелево-этильнаго эфира на цинкъ, получилъ дипропил-щавелевую кислоту.

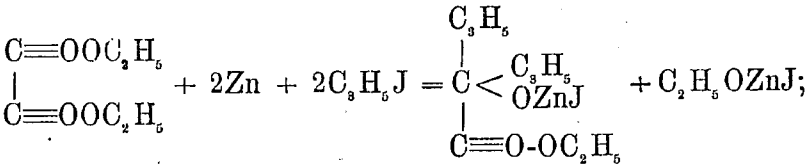
Этой работой и заканчивается изслѣдованіе надъ синтезомъ оксикислотъ предѣльнаго ряда; синтезъ-же непредѣльныхъ оксикислотъ впервые реализованъ былъ только въ 1876 году.

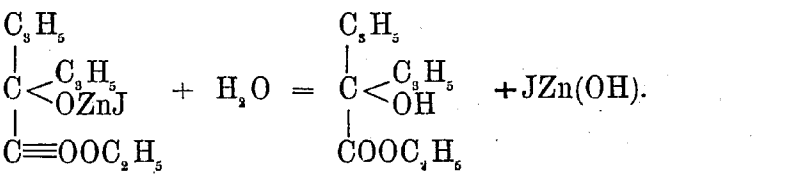
М. М. Зайцевъ [2]) дѣйствіемъ на цинкъ смѣси іодистаго аллила и щавелево-этильнаго эфира, получилъ непредѣльную — диаллилщавелевую кислоту. Относительно образованія этой кислоты нужно замѣтить, что реакція здѣсь происходитъ иначе, чѣмъ при синтезѣ лейциновой кислоты Франкланда; а именно, въ данномъ случаѣ по объясненію проф.

---

[1]) Ж. Р. Х. Общ. XIII, 237.
[2]) Ibidem. VIII, 71.

А. М. Зайцева [1]) іодистый аллилъ и цинкъ реагируютъ не съ образованіемъ цинкалкила, а даютъ соединеніе, подобное іодистому меркураллилу, послѣдній и вступаетъ въ реакцію съ щавелевымъ эфиромъ. Реакція можетъ быть выражена слѣдующимъ уравненіемъ:





Свойства и превращенія діаллилщавелевой кислоты подробно изучены М. М. Зайцевымъ [2]) и Е. Шацкимъ [3]).

С. Баратаевъ [4]) изслѣдовалъ дѣйствіе смѣси іодистаго аллила съ іодистымъ этиломъ и цинка на щавелевый эфиръ, предполагая при этомъ, что реакція можетъ пойти по двумъ направленіямъ: или іодюры будутъ дѣйствовать совмѣстно, тогда образуется аллил-этил-щавелевой эфиръ, аналогично образованію метил-этил-щавелеваго эфира Франкланда и Дюппа [5]); или-же каждый іодюръ будетъ дѣйствовать отдѣльно— результатомъ такой реакціи будетъ механическая смѣсь эфировъ діаллил-щавелеваго и диэтил-щавелеваго. Можно также допустить, что и та и другая реакція будутъ происходить одновременно.

---

[1]) **Ж. Р. Х. Общ. IX, 17.**
[2]) Ibidem. IX, 25.
[3]) Ibidem. XVII, 61.
[4]) Ibidem. XVII, 497.
[5]) Zeitschr. f. Ch. Pharm. 1865. 483.

По изслѣдованіи продукта реакціи оказалось, что въ немъ заключается смѣсь эфировъ діэтил-щавелеваго и діаллил-щавелеваго; что позволяетъ заключать, что каждый іодюръ реагируетъ отдѣльно т. е. также, какъ это наблюдали проф. А. М. Зайцевъ и И. И. Канонниковъ [1]) при дѣйствіи тѣхъ же іодюровъ на муравейный эфиръ. Такимъ образомъ изслѣдованія Франкланда и Дюппа и М. М. Зайцева показали, что щавелевые эфиры могутъ служить для полученія синтетическимъ путемъ оксикислотъ, какъ предѣльнаго ряда, такъ и непредѣльнаго. Въ первомъ случаѣ должны быть примѣнены цинкалкилы общей формулы $Zn(R)_2$, а для втораго іодистые цинкалкилы, общая формула которыхъ будетъ $JZn\ R'$ [2]).

Опытъ Франкланда надъ дѣйствіемъ цинкэтила на лейциновой эфиръ показываетъ, что если кислородъ одной карбонильной группы въ щавелевомъ эфирѣ уже вступитъ въ реакцію съ цинкоорганическимъ соединеніемъ, т. е. послѣднее присоединится къ эфиру, то кислородъ второй карбонильной группы уже утрачиваетъ способность къ подобной же реакціи.

Основываясь на этомъ фактѣ проф. А. М. Зайцевъ и Е. Е. Вагнеръ [3]) предполагаютъ, что „способность кислорода карбонильной группы къ замѣщенію на углеводородные радикалы принадлежитъ лишь такимъ эфирамъ органическихъ кислотъ, въ которыхъ карбонильная группа еще не соединена съ радикаломъ, содержащимъ углеродъ и водородъ въ прямой связи“ и поэтому-то кислородъ второй карбонильной группы въ щавелевыхъ эфирахъ, послѣ того какъ произойдетъ замѣщеніе въ первой, уже утрачиваетъ способность замѣщаться на углеводородные радикалы. Дѣйствительно, опытъ Н. И. Грабовскаго показалъ, что уксусный эфиръ, какъ заключающій въ себѣ карбонильную группу, связанную съ радикаломъ CH_3, не способенъ вступать въ реакцію съ цинкорганическими соединеніями. Не то, конечно, должно быть съ муравейнымъ эфиромъ, такъ какъ здѣсь карбонильная группа связана лишь съ водородомъ, а слѣдовательно и нѣтъ условій, препятствующихъ обмѣну кислорода на углеводородные радикалы.

---

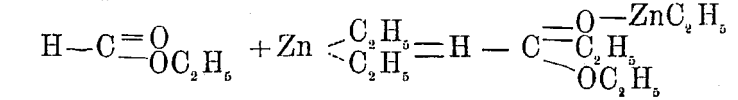
[1]) Ж. Р. Х. Общ. VIII, 359.

[2]) R' радикалъ аллилъ.

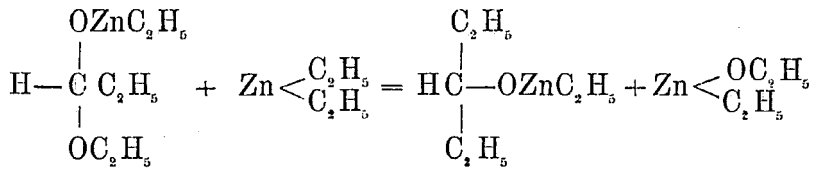
[3]) Ж. Р. Х. Общ. VI, 122.

Руководствуясь послѣднимъ соображеніемъ проф. А. М. Зайцевъ и Е. Е. Вагнеръ[1]) предприняли изслѣдованіе дѣйствія цинк-органическихъ соединеній на муравейный эфиръ. Для перваго опыта они дѣйствовали іодистымъ этиломъ и цинкомъ на муравейно-этильный эфиръ, причемъ предполагалось, что дѣйствіе образовавшагося цинкэтила на кислородъ карбонильной группы должно быть точно такое-же, какъ и при щавелевыхъ эфирахъ, т. е. реакція должна распадаться на двѣ фазы: первая фаза будетъ состоять въ присоединеніи частицы цинкэтила, а вторая—въ обмѣнѣ группы OR изъ эфира на R изъ цинкалкила. Такъ что весь ходъ реакціи долженъ выразиться слѣдующими уравненіями:

1-я фаза.



2 я фраза.



По разложеніи водой продукта первой фазы реакціи должно получиться соединеніе состава: $(C_2H_5)CH(OH)(OC_2H_5)$, продуктъ-же второй фазы при тѣхъ-же условіяхъ даетъ алкоголь состава: $H.(C_2H_5)_2C(OH)$ т. е. диэтилкарбинолъ.

На опытѣ предположеніе изслѣдователей вполнѣ оправдалось, такъ какъ при дѣйствіи іодистаго этила и цинка на муравейно-этильный эфиръ, дѣйствительно, полученъ былъ вторичный спиртъ—диэтилкарбинолъ.

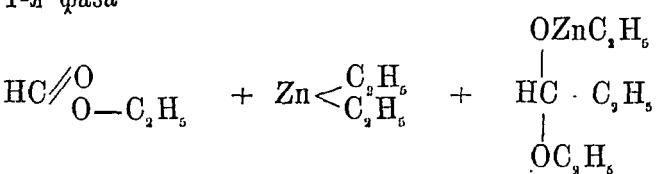
За доказательство того, что реакція распадается на двѣ фазы, изслѣдователи принимаютъ явленія, происходящія въ смѣси указанныхъ веществъ: сначала смѣсь превращается въ густую сиропообразную массу, которая при разложеніи водой не даетъ уже обратно эфира, не получается изъ нея однако и спирта; затѣмъ, съ теченіемъ времени, сиропъ этотъ затвердѣваетъ, этотъ-то продуктъ и даетъ уже алкоголь.

---

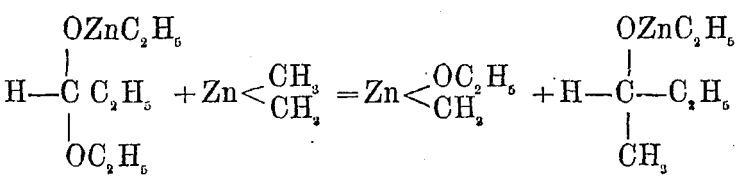
[1]) Ж. Р. Х. Общ. VI 122.

Опыты показали, что для полученія диэтил-карбинола удобнѣе всего брать на 1 ч. муравейно-этильнаго эфира 4 ч. іодистаго этила; смѣсь эта должна приливаться на сухой зерненый цинкъ, къ которому прибавлено нѣкоторое количество цинк-натрія. Колба со смѣсью нѣкоторое время нагрѣвалась, а затѣмъ уже разлагалась смѣсь водою. Всплывшее на поверхности воды масло отгонялось на песчаной банѣ, а потомъ, собранное, сушилось на сплавленномъ поташѣ и подвергнуто было фракціонированной перегонкѣ. Фракціонированной перегонкой, однако, получить спиртъ въ чистомъ видѣ не удалось; поэтому пришлось прямо изъ неочищеннаго продукта приготовить іодюръ. и уже изъ іодюра приготовленъ былъ чистый спиртъ. Спустя нѣсколько времени сдѣлана была попытка полученіи спирта съ двумя различными радикалами. Для этого проф. А. М. Зайцевъ и И. И. Канонниковъ [1]) дѣйствовали на цинкъ смѣсью іодистаго метила съ іодистаго этила и муравейно-этильнаго эфира, надѣясь, что реакція, благодаря образовавшемуся цинкметилу и цинкэтилу, пойдетъ согласно слѣдующему уравненію:

1-я фаза



2-я фраза



т. е. образовавшіеся цинкалкилы будутъ реагировать совмѣстно.

Реакція велась при тѣхъ-же условіяхъ, что и въ предыдущемъ опытѣ. Полученное масло, сырое, обработано было газообразной HJ.

---

[1]) Ж. Р. Х. Общ. VI, 308.

Анализъ порціи іодюра съ точкой кипѣнія 119—120°С далъ результаты, хорошо согласующіеся съ формулой C_4H_9J. Алкоголь, полученный изъ іодюра, кипѣлъ при 98—100°С.

При окисленіи спирта получился метил-этил-кетонъ и уксусная кислота, что говоритъ въ пользу того, что полученный алкоголь есть вторичный бутильный спиртъ.

Слѣдовательно, реакція идетъ здѣсь именно такъ, какъ предполагалось.

Далѣе, проф. А. М. Зайцевъ и И. И. Канонниковъ [1]) пытались приготовить непредѣльный вторичный спиртъ съ радикалами этиломъ и аллиломъ при дѣйствіи на цинкъ смѣси іодистаго этила, іодистаго аллила и муравейно-этильнаго эфира.

Но попытка эта не увѣнчалась успѣхомъ, такъ какъ вмѣсто ожидаемаго этил-аллил-карбинола получился диаллилкарбинолъ. Причина такого, отличнаго отъ предыдущаго, хода реакціи, вѣроятно, та, что образовавшеся здѣсь соединеніе $JZn\,C_3H_5$, какъ болѣе энергичное, реагируетъ сначала, а затѣмъ уже вступаетъ въ реакцію цинкэтилъ.

М. М. Зайцевъ [2]) дѣйствуя на цинкъ смѣсью 2 ч. іодистаго аллила и 1 ч. муравейнаго эфира, получилъ также диаллил-карбинолъ.

Кромѣ диаллил карбинола, какъ побочный продуктъ, получился и диаллилъ. Свойства спирта, подробно изученныя и описанныя М. М. Зайцевымъ, позволяютъ заключать, что полученный спиртъ есть дѣйствительно диаллил-карбинолъ.

Чтобы покончить съ вопросомъ о дѣйствіи цинкоорганическихъ соединеній на эфиры, необходимо упомянуть о дѣйствіи іодистаго аллила и цинка на эфиры жирныхъ кислотъ.

В. И. Сорокинъ [3]), первый произведшій такого рода реакцію, дѣйствовалъ на цинкъ смѣсью 1 ч. уксуснаго эфира съ 2 ч. іодистаго аллила.

Реакція, довольно энергичная, начиналась тотчасъ-же по мѣрѣ приливанія смѣси на цинкъ, поэтому, чтобы умѣрить ее, приходилось охлаждать колбу съ цинкомъ.

При разложеніи продукта реакціи водою выдѣленія газовъ не замѣчалось. Изъ полученнаго масла удалось выдѣ-

---

[1]) Ж. Р. Х. Общ. VII, 328 и VIII, 359.
[2]) Ж. Р. Х. Общ. VII, 328 и VIII, 341.
[3]) Ж. Р. Х. Общ. IX, 12.

лить въ чистомъ видѣ спиртъ, который, по своимъ превращеніямъ, оказался диаллил-метилкарбиноломъ. Позднѣе при тѣхъ-же условіяхъ приготовлены были высшіе аналоги этого спирта, такъ: П. М. и А. М. Зайцевыми [1]) приготовленъ былъ диаллил-пропил-карбинолъ, при дѣйствіи смѣси JC_3H_5 и $C_3H_7COOC_2H_5$ на цинкъ; а изъ смѣси изомаслянаго эфира съ JC_3H_5, при дѣйствіи на цинкъ, К. Рябининъ и А. М. Зайцевъ [2]) получили диаллил-изопропил-карбинолъ.

Іодистый аллилъ съ цинкомъ, по видимому, реагируетъ иначе, чѣмъ предѣльные іодюры; доказательствомъ тому служитъ тотъ фактъ, что іодистый аллилъ, какъ извѣстно изъ работы В. И. Сорокина, въ присутствіи цинка реагируетъ на уксусный эфиръ и конечнымъ продуктомъ является диаллилметил-карбинолъ. Іодистый-же метилъ, при тѣхъ-же условіяхъ, аналогичнаго продукта не даетъ Проф. А. М. Зайцевъ и В. И. Сорокинъ [3]) предполагаютъ что здѣсь реакція идетъ такимъ образомъ: изъ іодистаго аллила и цинка образуется вещество состава $JZn\,C_3H_5$, аналогичное іодистому меркураллилу; это то вещество, распадаясь на радикалы (JZn) и (C_3H_5) и дѣйствуя непосредственно на кислородъ, присоединяется къ уксусному эфиру съ образованіемъ соединенія состава $CH_3—C{\equiv}(OZnJ)\,(C_3H_5)\,(OC_2H_5)$; на это соединеніе снова дѣйствуетъ частица $JZn\,C_3H_5$ при чемъ уже происходитъ реакція двойнаго обмѣна: группа (OC_2H_5) вымѣнивается на C_3H_5 изъ $JZn\,C_3H_5$. Результатомъ такой реакціи будетъ образованіе веществъ: $JZn\,OC_2H_5$ и $CH_3—C{\equiv}(OZnJ)\,(C_3H_5)_2$; послѣднее соединеніе, подъ вліяніемъ воды, и дастъ метил-диаллил-карбинолъ. Вѣрность такого взгляда подтверждается тѣмъ, что при разложеніи продукта реакціи водой, не замѣчается выдѣленія газовъ (пропилена); что должно бы быть, если бы реакція шла также, какъ и при предѣльныхъ іодюрахъ.

Упомянутые выше опыты показываютъ, что реакція между эфирами жирныхъ кислотъ и іодистымъ аллиломъ въ присутствіи цинка можетъ считаться общею для полученія третичныхъ спиртовъ ряда $CnH_{2n-3}OH$ и можетъ быть выражена, согласно мнѣнію проф. А. М. Зайцева, слѣдующимъ общимъ уравненіемъ:

---

[1]) Ж. Р. Х. Общ. X, 273.
[2]) Ж. Р. Х. Общ. XI, 24.
[3]) Ж. Р. Х. Общ. IX, 17.

$$R-C\overset{O}{\underset{O-R}{=}} + Zn + JC_3H_5 = R-\overset{OZnJ}{\underset{OR}{C}}-C_3H_5 \ ;$$

$$R\overset{OZnJ}{\underset{O-R}{C}}-C_3H_5 + Zn + JC_3H_5 = R-\overset{OZnJ}{\underset{C_3H_5}{C}}C_3H_5 + JZnOR.$$

Сложное цинк-органическое соединеніе подъ вліяніемъ воды распадается по слѣдующему уравненію:

$$R\overset{OZnJ}{\underset{C_3H_5}{C}}-C_3H_5 + H_2O = R-C\overset{OH}{=(C_3H_5)_2} + JZn(OH).$$

Изъ всего сказаннаго относительно дѣйствія цинк-органическихъ соединеній на эфиры можно сдѣлать слѣдующіе выводы: щавелевые эфиры, реагируя съ ZnR_2 и $JZnR'$, даютъ сложныя цинковыя соединенія, распадающіяся подъ вліяніемъ воды на эфиры оксикислотъ въ первомъ случаѣ предѣльнаго ряда, а во второмъ непредѣльнаго ($R' =$ радикалъ аллилъ); муравейные эфиры, при тѣхъ же условіяхъ, реагируютъ, образуя „цинкмоалкилалкоголяты“ или „іодцинкалкоголяты“ (предѣльнаго и непредѣльнаго $C_nH_{2n-3}OH$ ряда) вторичныхъ спиртовъ, которые отъ дѣйствія на нихъ воды разлагаются на алкоголи, соотвѣтствующіе углеводороды и окись цинка, или на акоголи и іодокись цинка.

Наконецъ, эфиры жирныхъ кислотъ съ цинкоорганическими соединеніями аналогичнымъ образомъ не реагируютъ, а вступаютъ лишь въ реакцію съ соединеніемъ $JZn\,C_3H_5$, образуя іодцинкалкоголятъ; послѣдній, подъ вліяніемъ воды, даетъ третичный спиртъ ряда $C_nH_{2n-3}OH$.

Теперь обращаюсь къ вопросу о дѣйствіи цинк-органическихъ соединеній на альдегиды.

Впервые по этому вопросу начали изслѣдованія Ритъ и Бейльштейнъ [1]). Названные изслѣдователи изучали дѣйствіе цинкэтила на различные альдегиды: уксусный альдегидъ, валераль; энантолъ и бензойный альдегидъ.

О дѣйствіи цинкэтила на уксусный альдегидъ ими сообщается слѣдующее: реакція при обыкновенной температурѣ идетъ крайне медленно, такъ что приходилось поддерживать ее слабымъ нагрѣваніемъ. Нагрѣваніе производилось до тѣхъ поръ, пока прореагируетъ весь цинкэтилъ, что узнавалось впусканіемъ небольшаго количества воздуха: если не образуется бѣлыхъ паровъ, то реакція окончилась.

По окончаніи реакціи, излишекъ альдегида отгонялся на водяной банѣ. Во время реакціи выдѣленія газа не замѣчалось.

По разложеніи водой продукта реакціи, который, по мнѣнію изслѣдователей, представляетъ соединеніе цинкэтила съ альдегидомъ, получилось масло съ составомъ, отвѣчающимъ формулѣ ацеталя. Реакцію образованія ацеталя изслѣдователи выражаютъ слѣдующимъ уравненіемъ:

$$2\,C_2H_4O + Zn(C_2H_5)_2 + H_2O = C_6H_{14}O_2 + C_2H_6 + ZnO.$$

Желая получить слѣдующій высшій гомологъ ацеталя, Ритъ и Бейльштейнъ реагировали цинкэтиломъ на валераль. Въ данномъ случаѣ реакція идетъ гораздо легче. Во время реакціи выдѣляется газъ, непоглощающійся бромомъ. По разложеніи продукта реакціи водой получилось масло, постоянную точку кипѣнія котораго замѣтить не удалось; болѣе-же всего оно переходило между 220—250°C. Элементарный анализъ порціи съ точкой кипѣнія 220—250°C. и 250—290°C. далъ почти тождественные результаты: C = 76,5%; H = 12,6%. Полученное вещество они считаютъ идентичнымъ съ веществомъ, полученнымъ Fittig'омъ при дѣйствіи на валераль ѣдкой извести. Но Ритъ и Бейльштейнъ думаютъ, что составъ вещества долженъ приближаться къ формулѣ $C_{10}H_{18}O$, тогда какъ Fittig даетъ для него формулу $C_8H_{14}O$.

Происхожденіе вещества съ формулой $C_{10}H_{18}O$ они объясняютъ отнятіемъ отъ валераля элементовъ воды:

$$2\,C_5H_{10}O - H_2O = C_{10}H_{18}O;$$

---

[1]) Ann. Chem. Pharm. 126, 241.

при дѣйствіи-же цинкэтила отнятіе это выразится слѣдующимъ уравненіемъ:

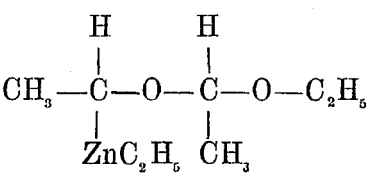
$$2\,C_5H_{10}O + Zn\,(C_2H_5)_2 = C_{10}H_{18}O_2 + 2\,C_2H_6 + ZnO$$

Слѣдовательно, цинкэтилъ дѣйствуетъ на валераль водуотнимающимъ образомъ, результатомъ такого дѣйствія получаются продукты уплотнѣнія.

На энантолъ и бензойный альдегидъ цинкэтилъ дѣйствуетъ точно такимъ-же образомъ.

Чтобы уяснить себѣ происхожденіе ацеталя при дѣйствіи цинкэтила на уксусный альдегидъ — необходимо допустить, что цинкэтилъ распадается на радикалы цинкмоноэтилъ и этилъ; одновременно съ этимъ происходитъ отщепленіе одной связи угля съ кислородомъ; затѣмъ цинкмоноэтилъ присоединяется къ углю одной частицы альдегида, а этилъ къ кислороду другой частицы; на счетъ-же двухъ другихъ свободныхъ сродствъ частицы альдегида соединяются между собою.

Такимъ образомъ получается соединеніе, имѣющее такое строеніе:



Соединеніе это отъ дѣйствія воды распадается на ацеталь, этанъ и окись цинка.

Но такой ходъ реакціи не согласуется съ тѣми данными, которыя получены изъ изслѣдованій надъ дѣйствіемъ цинк-органическихъ соединеній на кислородъ содержащія органическія вещества, такъ какъ извѣстно, что если цинк-органическія соединенія вступаютъ съ ними въ реакцію, то прежде всего дѣйствуютъ на кислородъ, причемъ радикалъ $(ZnR)'$ присоединяется съ кислороду; здѣсь-же приходится допустить, что съ кислородомъ соединяется не $(ZnC_2H_5)'$, а $(C_2H_5)'$.

Выходя изъ этихъ положеній, Е. Е. Вагнеръ[1]) сомнѣвается въ образованіи ацеталя при дѣйствіи цинкэтила на уксусный альдегидъ; ему думается, что если здѣсь и образуется вещество съ составомъ ацеталя, то это должно быть или моноэтилин-бутил-гликола, или монобутилен-этилиден-гликола, когда въ реакцію взято на 1 ч. цинкэтила 2 ч. альдегида; если же взять указанныхъ веществъ частицу на частицу, то должно получиться соединеніе, которое, при разложеніи водой, дастъ вторичный бутильный алкоголь. Ходъ реакціи въ послѣднемъ случаѣ долженъ выразиться такимъ уравненіемъ:

$$CH_3-C\overset{O}{\underset{H}{=}} + Zn\overset{C_2H_5}{\underset{C_2H_5}{}} = CH_3-\overset{C_2H_5}{\overset{|}{C}}<\overset{OZnC_2H_5}{H};$$

$$CH_3-\overset{C_2H_5}{\overset{|}{C}}<\overset{O\,Zn\,C_2H_5}{H} + 2H_2O =$$

$$CH_3-\overset{C_2H_5}{\overset{|}{C}}<\overset{O-H}{H} + C_2H_6 + Zn(OH)_2$$

т. е. конечнымъ продуктомъ реакціи долженъ быть вторичный спиртъ—метил-этил-карбинолъ. Теоретическія соображенія вполнѣ оправдались на опытѣ: въ самомъ дѣлѣ, уксусный альдегидъ съ цинкэтиломъ далъ продуктъ, который, при разложеніи водой, далъ масло, заключающее въ себѣ, какъ главную составную часть, вторичный бутильный спиртъ метил-этил-карбинолъ.

Желая изучить дѣйствіе цинкалкиловъ на другіе альдегиды Е. Е. Вагнеръ[2]) предпринялъ рядъ изслѣдованій, результаты которыхъ я здѣсь кратко и изложу.

1) Цинкэтилъ и валераль.

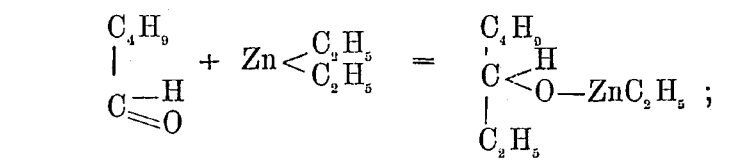
Реакція велась при охлажденіи ледяной водой. Послѣ прилитія альдегида, смѣсь стояла около трехъ недѣль. По

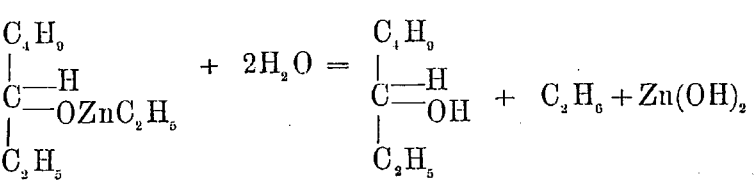
---

[1]) Ж. Р. Х. Общ. VIII, 37.
[2]) Ж. Р. Х. Общ. XVI, 283.

разложеніи водой получилось масло, по видимому, совершенно отличное отъ того, которое получили при этой-же реакціи Ритъ и Бейльштейнъ, такъ какъ при перегонкѣ оно почти все перешло въ предѣлахъ двухъ градусовъ 146—148°С. При вторичной перегонкѣ температура кипѣнія продукта нѣсколько измѣнилась: главная порція перешла при 147 — 148°С. и вторая — значительная при 144 — 147°С. Анализы обѣихъ порцій дали одинаковые результаты, хорошо согласующіеся съ составомъ гептильнаго спирта. Обстоятельство это объясняется тѣмъ что здѣсь находилась смѣсь спиртовъ: этил-изобутил-карбинола и этил-вторичнаго-бутил-карбинола, что зависитъ отъ того, что валеральдегидъ представляетъ смѣсь двухъ изомеровъ, а вслѣдствіе этого и полученный спиртъ также состоитъ изъ смѣси изомерныхъ гептильныхъ спиртовъ, точки кипѣнія которыхъ нѣсколько разняться.

Ходъ реакціи образованія гептильныхъ спиртовъ вполнѣ аналогиченъ тому, какой имѣетъ мѣсто при образованіи бутильнаго и спирта изъ уксуснаго альдегида, т. е.:





2) Цинкэтилъ и энантолъ.

Реакція велась при тѣхъ-же условіяхъ, только здѣсь для окончанія реакціи требуется болѣе времени (почти два мѣсяца).

Масло, вслѣдствіе трудной летучести, прямо отдѣлено было воронкою. При сушкѣ сначала на сплавленномъ поташѣ, а потомъ на баритѣ выдѣляется осадокъ, который можно принять за полимеръ энантола. При вторичной фракціони-

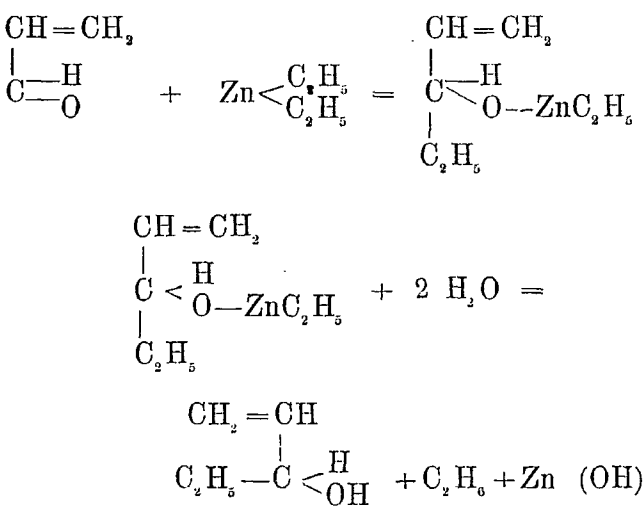
рованной перегонкѣ выдѣлилась, какъ главная порція, часть, кипящая между 193,5—195°С. Анализъ этой порціи далъ результаты, хорошо согласующіеся съ формулой нонильнаго спирта, а реакція окисленія показала, что полученный алкоголь есть этил-гексил-карбинолъ.

Реакція здѣсь, слѣдовательно, идетъ такъ же, какъ и при другихъ альдегидахъ.

3) Цинкэтилъ и акролеинъ.

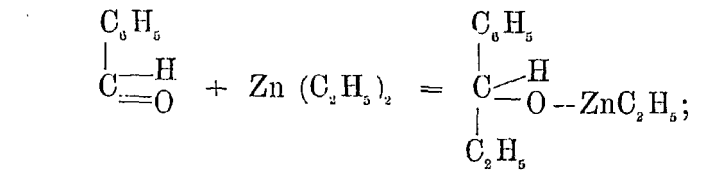
Реакція происходитъ въ моментъ соприкосновенія веществъ. Продуктъ реакціи, разложенный водою, даетъ масло съ точкой кипѣнія 110—120°С. Изъ этой порціи легко выдѣляется вещество съ точкой кипѣнія 114—115°С. Анализы этого вещества дали цифры хорошо согласующіяся съ формулой $C_5H_{10}O$ — этил-винил-карбинола.

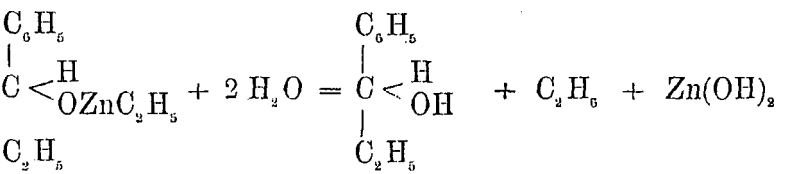
Непредѣльность спирта доказана присоединеніемъ брома. Реакція образованія указаннаго спирта идетъ по слѣдующему уравненію:



4) Цинкэтилъ и бензойный альдегидъ.

И здѣсь реакція идетъ совершенно такъ же, какъ и въ предыдущихъ случаяхъ. Въ результатѣ получается этил-фенил-карбинолъ образованіе котораго согласно слѣдующему уравненію:





Чтобы расширить свѣдѣнія относительно дѣйствія цинкорганическихъ соединеній на альдегиды и отсюда уже заключать объ общности этого дѣйствія, Е. Е. Вагнеръ продѣлалъ еще рядъ опытовъ надъ дѣйствіемъ цинкпропила. Для перваго опыта взятъ былъ энантолъ. Полученное изъ продукта реакціи, извѣстнымъ уже образомъ, масло закипало около 140° и до 208°С. переходило почти все. Изъ этого продукта фракціонированной перегонкой удалось выдѣлить двѣ фракціи: 1) 174°—176°С. и 2) 208°—212° Первая фракція, судя по анализу ея и приготовленнаго изъ нея уксуснаго эфира, оказалась нормальнымъ гептильнымъ спиртомъ. Изъ порціи же, кипящей при 208—212°С, выдѣленъ алкоголь состава $C_{10}H_{22}O$ — пропил - гексил - карбинолъ съ точкой кипѣнія 210°—211°С.

Второй опытъ произведенъ надъ уксуснымъ альдегидомъ. Полученное масло при второй перегонкѣ перешло между 75°С и 125°С. Изъ фракціи, кипящей при 75°100°С, приготовленъ былъ іодюръ, который, при фракціонировкѣ, раздѣлился на двѣ порціи: 1-я, кипящая при 72—73°С и вторая, съ точкой кипѣнія 143 - 144°С. Опредѣленіе іода въ первой порціи дало результаты, хорошо согласующіеся съ формулой C_2H_5J, а во второй съ $C_5H_{11}J$.

Вторая половина масла, кипящая при 100—125°С была обработана калійнымъ щелокомъ, при кипяченіи, для удаленія изъ нея избытка альдегида и продуктовъ его уплотнѣнія: послѣ такой обработки, при фракціонировкѣ, какъ главная порція, выдѣлилась фракція съ точкой кипѣнія

119—119,5°C. При окисленіи этого продукта получился кетонъ, кипящій при 102°C., а кислоты, также полученныя при окисленіи, оказались, по анализу ихъ серебряныхъ солей, уксусной и пропіоновой.

Изъ этихъ изслѣдованій можно заключить, что, при дѣйствіи цинкпропила на уксусный альдегидъ, получаются: метил-карбинолъ и метил-пропил-карбинолъ.

Итакъ, при дѣйствіи цинкпропила на альдегиды, кромѣ вторичныхъ алкоголей получаются еще и первичные, которые и являются какъ-бы аномальными продуктами реакціи. Явленіе это зависитъ, вѣроятно, отъ способности цинкпропила возстановлять альдегиды. Аналогичные случаи наблюдались и при дѣйствіи цинкэтила на альдегиды. Такъ напримѣръ Garzarolli Thurnlakh [1]) наблюдалъ такое явленіе при дѣйствіи цинкэтила на хлораль. А. Щербаковъ [2]) точно также при дѣйствіи цинкпропила на хлористый пропіонилъ получилъ вмѣсто третичнаго трипропил-карбинола—вторичный-дипропилкорбинолъ. Сопоставляя объясненіе реакціи возстановленія съ одной стороны Garzarolli Thurnlackh'a и Богомольца, [3]) а съ другой В. В. Марковникова [4]), изслѣдователь склоняется на сторону первыхъ и думаетъ, что реакція въ данномъ случаѣ идетъ аналогично тому, какъ при дѣйствіи цинкэтила на хлораль, т. е. возстановленіе происходитъ въ моментъ присоединенія цинкпропила къ альдегиду:

$$\begin{matrix} R \\ | \\ C{=}O \end{matrix}{}^{H} + Zn\begin{matrix} C_2H_7 \\ C_3H_7 \end{matrix} = \begin{matrix} R \\ | \\ C{=}O \end{matrix}{}^{H_2}{}_{OZnC_3H_7} + C_3H_6;$$

затѣмъ уже

$$\begin{matrix} R \\ | \\ C{=}O \end{matrix}{}^{H_2}{}_{OZnC_3H_7} + 2H_2O = \begin{matrix} R \\ | \\ C{=}O \end{matrix}{}^{H_2}{}_{OH} + Zn(OH)_2 + C_3H_8$$

Между тѣмъ какъ В. В. Марковниковъ думаетъ, что возстановленіе происходитъ въ моментъ разложенія продукта реакціи водой.

---

[1]) Ann. Chem. Pharm. 210, 63.
[2]) Ж. Р. Х. Общ. XIII, 348.
[3]) Ibidem. XIII, 414.
[4]) Ibidem. XV, 407.

Такъ напримѣръ для случая, имѣвшаго мѣсто у А. Щербакова, реакція, согласно его мнѣнію, должна идти по такому уравненію:

$$\begin{matrix} C_3H_7 \\ | \\ C{=}O \end{matrix}\!\!-Cl \; + \; 2Zn < \begin{matrix} C_3H_7 \\ C_3H_7 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} C_3H_7 \\ C_3H_7 \end{matrix} > C < \begin{matrix} C_3H_7 \\ OZnC_3H_7 \end{matrix} \; + \; Cl-ZnC_3H_7 ;$$

т. е. сначала образованіе цинк-органическаго соединенія идетъ вполнѣ нормально, а затѣмъ уже, при дѣйствіи воды, реакція разложенія идетъ по такому уравненію:

$$\begin{matrix} C_3H_7 \\ C_3H_7 \end{matrix} > C < \begin{matrix} C_3H_7 \\ OZnC_3H_7 \end{matrix} + 2H_2O =$$

$$\begin{matrix} C_3H_7 \\ C_3H_7 \end{matrix} > C < \begin{matrix} H \\ OH \end{matrix} + C_3H_6 + Zn(OH)_2$$

Но такое предположеніе не подтверждается явленіями, сопровождающими реакцію.

Такъ напримѣръ количество выдѣляющагося при разложеніи продукта реакціи водой, пропилена не пропорціонально количеству образующагося вторичнаго спирта. Скорѣе нужно думать, что выдѣленіе пропилена зависитъ отъ того, что цинкмоно-пропилъ отъ дѣйствія воды распадается не только съ образованіемъ пропана, но часть его образуетъ водородъ и пропиленъ; тѣмъ болѣе, что наблюденными ранѣе фактами такое предположеніе вполнѣ подтверждается.

Изъ изслѣдованій Е. Е. Вагнера можно сдѣлать выводы: 1). Всѣ альдегиды съ цинкэтиломъ реагируютъ однообразно: даютъ алкоголяты вторичныхъ спиртовъ, какъ исключительные продукты реакціи 2) Цинкпропилъ относится къ альдегидамъ иначе, чѣмъ цинкэтилъ: его радикалы отчасти распадаются на пропиленъ и водородъ; въ слѣдствіе чего рядомъ съ образованіемъ вторичныхъ спиртовъ происходитъ возстановленіе

альдегидовъ въ первичные спирты 3). Скорость реакціи для одного и того-же цинкалкила, но при различныхъ альдегидахъ—различна: всего скорѣе реагируетъ акролеинъ, а обратно—энантолъ. 4) Для полученія вторичныхъ спиртовъ могутъ быть примѣнены всѣ альдегиды, но не всѣ цинкалкилы, такъ какъ, по мѣрѣ увеличенія вѣса частицы, цинкалкила, послѣдніе присоединяются все труднѣе и труднѣе, а отсюда и выходъ алкоголя все будетъ менѣе и менѣе.

Этой, весьма тщательной работой и заканчивается изученіе дѣйствія цинк-органическихъ соединеній на альдегиды. Работа эта вполнѣ доказала, что реакція между названными соединеніями должна считаться общею для синтеза вторичныхъ алкоголей.

Окончивши разсмотрѣніе реакціи между цинк-органическими соединеніями и альдегидами, я перехожу къ отношенію цинк-органическихъ соединеній къ галоидо-производнымъ замѣщеннымъ альдегидовъ, такъ какъ послѣднія, имѣя одинаково съ альдегидами положенный кислородъ должны показывать и сходную реакцію. Но прежде чѣмъ приступить къ этому вопросу, я упомяну о дѣйствіи цинк-органическихъ соединеній на іодгидринъ гликола; такъ какъ іодгидринъ гликола относится къ этильному алкоголю такъ же, какъ одногалоидозамѣщенное альдегида къ своему альдегиду; поэтому-то, зная отношеніе къ цинк-органическимъ соединеніямъ съ одной стороны, этильнаго спирта и галоид-гидрина гликола, а съ другой альдегида, можно-бы, пожалуй, по аналогіи, предъугадать о ходѣ реакціи между галоидозамѣщенными альдегидовъ и цинк-органическими соединеніями.

Алкоголи, какъ извѣстно [1]). съ цинк-органическими соединеніями реагируютъ такимъ образомъ, что водородъ гидроксильной группы алкоголя замѣщается на одноатомную группу (ZnR); полученный „цинкмоноалкил-алкоголятъ“ отъ дѣйствія воды снова даетъ тотъ-же самый алкоголь. Аналогичная реакція должна-бы быть и при іодгидринѣ гликола, т. е.

---

[1]) А. М. Бутлеровъ Zeitschr. Chem. Pharm. 1864 403. Ритъ и Бейльштенъ Ann. Chem. Pharm. 126, 241.

конечнымъ продуктомъ долженъ бы получиться или опять іодгидринъ или-же, если (J) группы (CH_2J) замѣстится на углеводородный радикалъ, болѣе сложный первичный спиртъ. А. М. Бутлерова и Осокинъ [1]) изслѣдовали реакцію цинкметила и цинкэтила на іодгидринъ гликола, надѣясь, что реакція пойдетъ по слѣдующему уравненію:

1-я фраза.

$$\begin{matrix} CH_2J \\ | \\ C—H_2OH \end{matrix} + ZnR_2 = \begin{matrix} CH_2J \\ | \\ CH_2OZnR \end{matrix} + RH.$$

По разложеніи водой продукта первой фазы реакціи опять получиться іодгидринъ гликола.

2-я фраза.

$$2\begin{matrix} CH_2J \\ | \\ CH_2OZnR \end{matrix} + Zn\begin{matrix} R \\ < \\ R \end{matrix} = 2\begin{matrix} C\equiv H_2—R \\ | \\ C\equiv H_2—OR \end{matrix} + ZnJ_2$$

Послѣднее соединеніе, разложенное водой, и должно дать первичный спиртъ.

Но на опытѣ оказалось, что въ обоихъ случаяхъ, т. е. при цинкэтилѣ и цинкметилѣ получается вмѣсто ожидаемыхъ первичныхъ спиртовъ—вторичные: бутильный и пропильной.

О причинѣ такого ненормальнаго хода реакціи названные выше изслѣдователи ничего не упоминаютъ и только гораздо позднѣе М. Каширскій даетъ объясненіе этому аномальному ходу реакціи. По его мнѣнію реакція распадается на два періода: въ первый періодъ происходитъ образованіе альдегида, а во второй уже дѣйствіе цинк-органическаго соединенія на послѣдній.

---

[1]) Zeitschr. Chem. Pharm. 1867 680.

Образованіе альдегида названный изслѣдователь выражаетъ слѣдующими уравненіями:

$$\begin{array}{l} CH_2J \\ | \\ CH_2OH \end{array} + Zn\!<\!\begin{array}{l} R \\ R \end{array} = \begin{array}{l} CH_2J \\ | \\ CH_2OZnR \end{array} + RH.$$

Изъ сложнаго цинк-органическаго соединенія выдѣляется группа JZnR и въ тоже время происходитъ перегруппировка образовавшейся окиси въ альдегидъ:

$$\begin{array}{l} CH_2J \\ | \\ CH_2OZnR \end{array} - JZnR = \begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ COH \end{array}$$

Послѣ чего цинкалкилъ дѣйствуетъ на $CH_3—COH$ обыкновеннымъ уже образомъ.

Такимъ образомъ, при дѣйствіи $Zn(R)_2$ на іодгидринъ гликола, происходитъ перегруппировка, можетъ быть, исключительно зависящая отъ Gd, положеннаго въ группѣ (CH_2). Имѣя въ виду, что въ галоидозамѣщенныхъ альдегидовъ имѣется аналогично положенный галоидъ, естественно ожидать, что при дѣйствіи цинк-органическихъ соединеній на галоидозамѣщенныя альдегидовъ, произойдетъ перегруппировка въ туже сторону, т. е. конечнымъ продуктомъ долженъ получиться вмѣсто вторичнаго—третичный алкоголь.

Изслѣдованіемъ вопроса о дѣйствіи цинк-органическихъ соединеній на галоидозамѣщенныя альдегида, и именно на хлораль, занялся Garzarolli Thurnlackh [1]). Онъ ожидалъ, что реакція пойдетъ такъ же, какъ и при альдегидахъ, т. е. конечными продуктами должны быть трех-охлоренные спирты, если ZnR_2 успѣетъ подѣйствовать только на кислородъ; если-же и Cl замѣстится на R, то получится дву, одно-охлоренные, или несодержащіе хлора спирты, смотря по тому, сколько атомовъ хлора замѣстится на R.

---

[1]) Ann. Chem. Pharm. 210, 63.

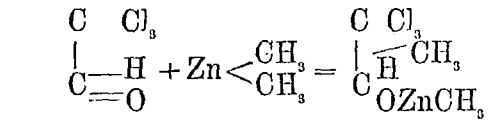
Для перваго опыта реакція велась между цинкэтиломъ и CCl_3COH. И то и другое вещество бралось въ эфирномъ растворѣ. Черезъ нѣсколько времени въ смѣси появились игольчатые кристаллы, составъ которыхъ, по опредѣленіи въ нихъ хлора, оказался подходящимъ къ формулѣ $CCl_3—CH_2(OZnC_2H_5)$. По разложеніи продукта реакціи водой получилось масло, изъ котораго фракціонированной перегонкой удалось выдѣлить продуктъ, кипящій при 151°С.— Совершенно очищенный продуктъ, подвергнутый анализу и опредѣленію плотности пара, оказался, вмѣсто вторичнаго бутильнаго спирта, трехохлорепнымъ этильнымъ алкоголемъ.

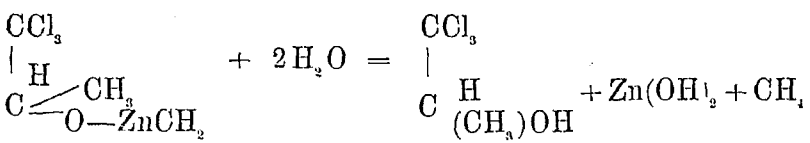
Такимъ образомъ оказывается, что въ данномъ случаѣ реакція идетъ иначе, чѣмъ при альдегидахъ, но и не такъ, какъ можно было ожидать, принимая во вниманіе реакцію цинкэтила на іодгидринъ гликола. Для уясненія происхожденія первичнаго алкоголя, необходимо допустить, что здѣсь происходитъ возстановленіе альдегида въ цинкмоноалкилъ производное первичнаго спирта, благодаря тому, что $Zn(C_2H_5)_2$ распадается на $Zn\,C_2H_5, C_2H_4$ и H; причемъ $Zn\,C_2H_5$ присоединяется къ кислороду, H къ углеродному атому, а C_2H_4 выдѣляется въ газообразномъ видѣ. Слѣдовательно, реакція здѣсь выразится слѣдующимъ уравненіемъ:

$$\begin{matrix} CCl_3 \\ | \\ CH \\ | \\ O \end{matrix} + Zn\begin{matrix} C_2H_5 \\ C_2H_5 \end{matrix} = \begin{matrix} CCl_3 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ OZnC_2H_5 \end{matrix} + C_2H_4\ ;$$

$$\begin{matrix} CCl_3 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ —OZnC_2H_5 \end{matrix} + 2H_2O = \begin{matrix} CCl_3 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ —OH \end{matrix} + Zn(OH)_2 + C_2H_6.$$

Цинкметилъ съ хлоралемъ даетъ, однако, трех-охлоренный пропильный алкоголь; здѣсь, стало быть, реакція идетъ такъ же, какъ и съ альдегидами, т. е. по слѣдующему уравненію:





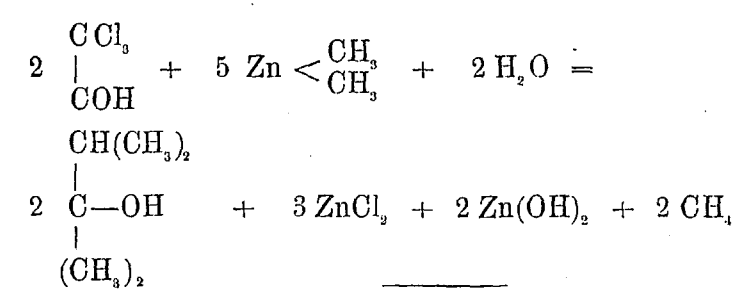
Здѣсь, понятно, и не можемъ произойти возстановленія, такъ какъ CH_3 не можетъ распасться на H и CH_2.

При дѣйствіи цинкэтила и цинкметила на бутил-хлораль тотъ-же изслѣдователь [1]) получилъ: въ первомъ случаѣ первичный трихлор-бутильный алкоголь—$C_4H_7Cl_3O$, а во второмъ $C_5H_9Cl_3O$—трех-охлоренный вторичный амильный алкоголь.

Слѣдовательно, ходъ реакціи въ данномъ случаѣ вполнѣ аналогиченъ предыдущему.

Изслѣдованія Б. Рицца [2]) показываютъ, что при дѣйствіи 5 частицъ цинкметила на 2 ч. CCl_3COH получается не вторичный и не первичный какъ бы слѣдовательно ожидать, а третичный—диметил-изопропил-карбинолъ. Въ данномъ случаѣ, слѣдовательно, также происходитъ перегруппировка, но только аналогичная той, которую имѣли А. М. Бутлеровъ и М. А. Осокинъ при реакціи цинкметила и цинкэтила на іогидринъ гликола и обратная той, которую имѣлъ Garzarolli Thurnlackh.

Реакцію образованія третичнаго спирта изслѣдователь изображаетъ слѣдующимъ эмпирическимъ уравненіемъ:



[1]) Ann. Chem. Pharm. 213, 369.
[2]) Ж. Р. Х. Общ. XIV, 99.

Къ галоидопроизводнымъ альдегидовъ можно причислить и галоидо-ангидриды кислотъ, такъ какъ послѣдніе можно разсматривать какъ альдегиды, въ которыхъ водородъ карбонильный группы замѣщенъ на хлоръ.

Въ виду этого я и обращаюсь теперь къ вопросу объ отношеніи цинк органическихъ соединеній къ галоидо-ангидридамъ кислотъ.

Начну съ хлорангидридовъ.

Еще въ 1853 году Chiozza [1]) высказалъ предположеніе, что цинк-органическія соединенія при дѣйствіи на хлорангидры кислотъ должны дать кетоны. Реакцію полученія кетоновъ такимъ способомъ онъ изображаетъ слѣдующимъ уравненіемъ.

$$C_4H_3O_2Cl + ZnC_2H_3 = ZnCl + C_2H_3C_4H_3O_2.$$

Предположеніе это впослѣдствіи вполнѣ подтвердилось, а именно: въ лабораторіи проф. Небаля A. Freund [2]) въ 1852 году получилъ цѣлый рядъ кетоновъ, дѣйствуя цинкэтиломъ и цинкметиломъ на хлорангидриды различныхъ кислотъ. Такимъ образомъ имъ получены были: метил-этил-кетонъ при дѣйствіи цинкэтила на хлористый ацетилъ; диэтилкетонъ, дѣйствіемъ цинкэтила на хлористый пропіонилъ; ацетонъ изъ хлористаго ацетила и цинкметила; фенил-этилкетонъ изъ хлористаго бензоила и цинкэтила. Реакцію полученія напримѣръ метил-этил-кетона Freund выражаетъ слѣдующимъ уравненіемъ:

$$C_4H_5Zn + C_4H_3O_2Cl = C_4H_3O_2C_4H_5 + Zn\,Cl.$$

т. е. цинкъ соединяется съ хлоромъ, а углеводородные радикалы встаютъ вмѣсто хлора въ карбонильную группу, образуя кетонъ.

Но важнѣйшимъ изслѣдователемъ разбираемаго вопроса, несомнѣнно, является А. М. Бутлеровъ.

---

[1]) Jahresber. Chem. 1853, 396.

[2]) Ann. Chem. Pharm. 118, 1.

Онъ замѣтилъ [1]), что при дѣйствіи цинкметила на фосгенъ одновременно съ хлористымъ ацетиломъ и ацетономъ образуется кристаллическое вещество, дающее, по разложеніи водою, жидкость алкогольнаго характера. Эту жидкость онъ сначала принялъ за смѣсь двухъ алкоголей; C_3H_8O и $C_4H_{10}O$, но потомъ оказалось, что это есть третичный псевдобутильный алкоголь $(CH_3)_3 \equiv COH$.

Чтобы объяснить себѣ происхожденіе, при упомянутой выше реакціи, третичнаго алкоголя А. М. Бутлеровъ принялся за изученіе дѣйствія цинкметила на ацетонъ и хлористый ацетилъ, которые являются продуктами реакціи цинкметила на фосгенъ; такъ какъ, очевидно реагируя съ которымъ нибудь изъ названныхъ веществъ цинкметиль и даетъ вышеупомянутое кристаллическое соединеніе. Цинкметилъ и ацетонъ, какъ извѣстно, дали отрицательные результаты.

Реакція между хлористымъ ацетиломъ и цинкметиломъ производилась нѣсколько при иныхъ условіяхъ чѣмъ у Freund'a, а именно: хлористый ацетилъ А. М. Бутлеровымъ приливался къ чистому цинкметилу, а не къ раствору его въ эфирѣ, какъ у вышеупомянутаго химика. Однако, не смотря на это, первый опытъ вполнѣ подтвердилъ указанія Freund'a, такъ какъ при разложеніи продукта реакціи водой получился ацетонъ. Чтобы умѣрить реакцію и, если можно, дать ей другое направленіе, А. М. Бутлеровъ дѣйствовалъ такимъ образомъ: въ баллонъ, содержащій небольшое количество цинкметила, вносилась пробирка съ хлористымъ ацетиломъ. Такимъ образомъ, названныя вещества дѣйствовали другъ на друга въ парообразномъ видѣ. Спустя нѣсколько дней, стѣнки баллона покрылись кристаллическимъ налетомъ. Собранные отъ нѣсколькихъ опытовъ и разложенные водой, кристаллы дали извѣстную уже алкогольную жидкость.

Особыми приспособленіями А. М. Бутлерову удалось получить кристаллы въ чистомъ видѣ.

Анализы ихъ дали цифры хорошо согласующіеся съ формулой $C_6H_{15}Zn_2ClO$. т. е. они представляютъ соединеніе 2 ч. $Zn(CH_3)_2$ съ CH_3OCl.

Соединеніе это, по мнѣнію изслѣдователя, представляетъ, однако, не простую смѣсь указанныхъ веществъ, (такъ какъ

---

[1]) Zeitschr. Chem. Pharm. 1863.

въ такомъ случаѣ при разложеніи водою не получилась бы алкоголя), а ихъ химическое соединеніе. И необходимо допустить, что кислородъ ацетила въ этомъ соединеніи является замѣщеннымъ на радикалы (CH_3) т. е. здѣсь уже находится радикалъ C_4H_9. При чемъ замѣщеніе можетъ произойти по двумъ способомъ, которые могутъ быть выражены слѣдующими двумя уравненіями:

1) кристаллич. соединеніе.

$$\begin{matrix} CH_3 \\ | \\ COCl \end{matrix} + 2Zn\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} = C_4H_9Cl + \begin{matrix} CH_3Zn \\ CH_3Zn \end{matrix}>O$$

т. е. $(Zn\ CH_3)_2$ отнимаетъ кислородъ, вмѣсто котораго встанутъ радикалы (CH_3) изъ $Zn\ (CH_3)_2$.

2) кристаллич. соединеніе.

$$\begin{matrix} CH_3 \\ | \\ COCl \end{matrix} + 2Zn\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} = \begin{matrix} C_4H_9 \\ CH_3Zn \end{matrix}>O + CH_3ZnCl$$

Въ послѣднемъ случаѣ $Zn(CH_3)_2$ дѣйствуетъ и на кислородъ и на хлоръ, причемъ хлоръ замѣщается на (CH_3), а кислородъ, отщепившись одной единицей сродства отъ углероднаго атома, связывается съ $(Zn\ CH_3)$ а свободное сродство углерода насыщается радикаломъ (CH_3).

Если принять первую формулу, то возможность образованія алкоголя сомнительна, такъ какъ тогда придется допустить, что Cl вымѣнивается при обыкновенной температурѣ на (OH), что едвали возможно. Между тѣмъ вторая формула вполнѣ удовлетворительно объясняетъ происхожденіе алкоголя, поэтому А. М. Бутлеровъ и принимаетъ ее какъ за несомнѣнную. Разложеніе кристаллическаго вещества водою идетъ согласно слѣдующему уравненію:

$$\begin{matrix} C_4H_9 \\ CH_3Zn \end{matrix}>O + \begin{matrix} CH_3 \\ Cl \end{matrix}>Zn + 4H_2O = \begin{matrix} C_4H_9 \\ | \\ OH \end{matrix} +$$

$$+ 2CH_4 + 2Zn(OH)_2 + HCl,$$

Количественное опредѣленіе болотнаго газа, выдѣляющагося при разложеніи кристалловъ водою, говоритъ въ пользу этого уравненія; близко подходитъ къ теоретическому и количество получающагося алкоголя.

Изъ этого изслѣдованія видно, что при дѣйствіи цинкметила на фосгенъ получается сначала хлористый ацетилъ, этотъ уже вступая въ свою очередь въ реакцію съ цинкметиломъ даетъ извѣстное уже кристаллическое соединеніе.

Послѣдняя реакція, по мнѣнію изслѣдователя, подобно образованію лейциноваго эфира Франкланда, состоитъ въ обмѣнѣ двуатомнаго кислорода на эквивалентное количество метила.

Въ слѣдующемъ году А. М. Бутлеровъ получилъ дѣйствіемъ цинкалкиловъ на хлорангидриды кислотъ рядъ третичныхъ алкоголей:

Дѣйствіемъ хлористаго ацетила на цинкэтилъ и хлористаго бутирила на цинкметилъ получены два изомерныхъ спирта-метил-диэтил-карбинолъ и пропил-диметил-карбинолъ; пропил-диэтил-карбинолъ полученъ былъ при дѣйствіи цинкэтила на хлористый бутирилъ. При дѣйствіи цинкметила на хлористый бензоилъ соотвѣтствующаго третичнаго алкоголя не получилось, а получился лишь фенил-метил-кетонъ.

Вообще-же нужно замѣтить, что рядомъ съ карбинолами всегда получаются и кетоны.

Одновременно съ изслѣдованіями А. М. Бутлерова, А. Н. Поповымъ [1]) приготовленъ былъ метил-амил-кетонъ двумя различными способами: 1) изъ 2 ч. цинкметила и 1 ч. хлористаго капроила и 2) изъ 2 ч. цинкамила и 1 ч. хлористаго ацетила. Позднѣе [2]) имъ же полученъ дѣйствіемъ цинкметила на хлористый пропіонилъ этил-диметил-карбинолъ. Въ 1869 году тотъ же А. Н. Поповъ приготовилъ цѣлый рядъ жирныхъ кетоновъ и ароматическихъ такимъ-же способомъ. Г. Вишинъ [3]) совмѣстно съ проф. Кольбе получилъ: 1) дѣйствіемъ цинкэтила на растворъ хлорангидрида фталевой кислоты, въ бензолѣ, вещество состава $C_{12}H_{14}O_2$—фенилъ-диэтил-кетонъ; 2) дѣйствіемъ цинкэтила на хлорангидридъ

---

[1]) Zeitschr. f. Ch. Pharm. 1865, 577.
[2]) Zeitschr. f. Ch. Pharm. 1867, 684.
[3]) Ibidem. 1867, 46.

янтарной кислоты — вещество состава $C_8H_{14}O_2$ — этилен-диэтил-кетонъ.

Такимъ образомъ изъ упомянутыхъ выше работъ видно, что реакція между хлорангидридами кислотъ и цинк-органическими соединеніями идетъ по двумъ направленіямъ: то получаются, какъ конечные продукты реакціи, кетоны, то третичные спирты. Разъясненіемъ вопроса: при какихъ условіяхъ реакція идетъ въ ту или другую сторону и занялся Д. Павловъ [1].

Теоретическія соображенія, высказанныя имъ по этому поводу заключаются въ слѣдующемъ: механизмъ реакціи между цинк-органическими соединеніями и хлорангидридами кислотъ во всякомъ случаѣ сложнѣе того, какой имѣетъ мѣсто при полученіи лейциновой кислоты Франкланда, такъ какъ въ данномъ случаѣ кромѣ кислорода находится еще хлоръ, который также долженъ быть замѣщенъ на углеводородный радикалъ. А. М. Бутлеровъ думаетъ, что кристаллическое тѣло — продуктъ реакціи цинкметила на хлористый ацетилъ — представляетъ такое соединеніе, въ которомъ хлоръ еще не обмѣнился на углеводородный радикалъ; замѣщеніе же хлора происходитъ въ моментъ разложенія кристалловъ водою. Но въ какой послѣдовательности идетъ реакція объ этомъ онъ ничего не упоминаетъ.

Болѣе полное объясненіе хода реакціи даютъ А. М. Зайцевъ и Е. Е. Вагнеръ [2].

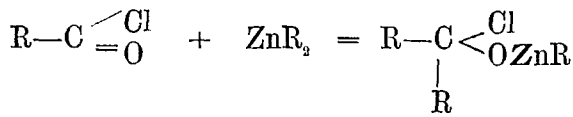
Они предполагаютъ, что реакція здѣсь идетъ совершенно аналогично тому, какъ при дѣйствіи цинк-органическихъ соединеній на муравейный эфиръ. И здѣсь реакція распадается на двѣ фазы: первая состоитъ въ присоединеніи цинкалкила къ хлорангидриду кислоты, а вторая въ обмѣнѣ хлора на R изъ $Zn(R)_2$. Реакція между $Zn(R)_2$ и муравейнымъ эфиромъ выражена ими слѣдующимъ уравненіемъ:

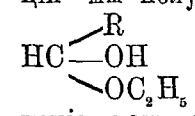
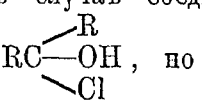
1-яя фраза.

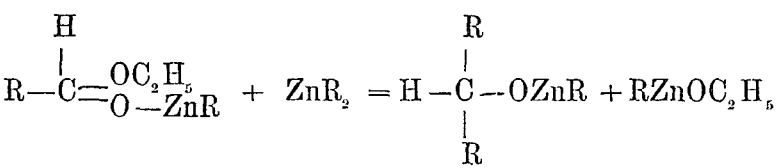
$$H.C\begin{matrix}=O\\-OC_2H_5\end{matrix} + ZnR_2 = H-C\begin{matrix}R\\|\\-O-ZnR\\-OC_2H_5\end{matrix}$$

[1] Ж. Р. Х. Общ. VIII, 291.
[2] Ibidem. VI, 290.

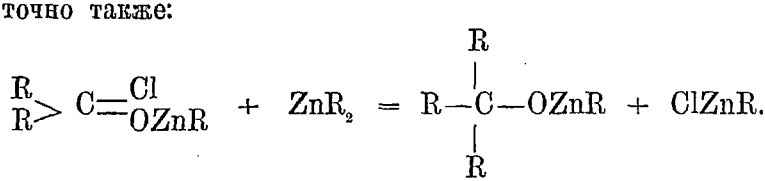
Вполнѣ аналогично и при хлорангидридѣ имѣемъ:



При разложеніи водой продуктовъ первой фазы реакціи мы получимъ въ первомъ случаѣ соединеніе состава , а во второмъ: , но второе соединеніе, какъ содержащіе при одномъ и томъ-же углеродномъ атомѣ Cl и (OH), крайне непрочно: оно легко распадается на кетонъ и HCl. Вторая фаза реакціи состоитъ въ обмѣнѣ въ первомъ случаѣ группы (OC_2H_5) а во второмъ хлора на углеводородный радикалъ.



точно также:



Продукты второй фазы реакціи и дадутъ алкоголи: въ первомъ случаѣ вторичный, а во второмъ третичный. Такимъ образомъ предположенія А. М. Зайцева и Е. Е. Вагнера вполнѣ объясняютъ происхожденіе изъ однихъ и тѣхъ же веществъ кетоновъ и алкоголей.

Д. Павловъ предлагаетъ еще слѣдующія соображенія: 1) Продуктъ первой фазы реакціи, т. е. соединеніе состава

(при реакціи цинкметила на хлористый ацетилъ) $(CH_3)_2C(Cl)(OZnCH_3)$ съ новымъ количествомъ C_2H_3OCl можетъ реагировать согласно слѣдующему уравненію:

$$\begin{matrix} Cl \\ (CH_3)_3 \end{matrix} \gtrless C-O-ZnCH_3 + C_2H_3OCl = 2\,\begin{matrix} CH_3 \\ | \\ C=O \\ | \\ CH_3 \end{matrix} + ZnCl_2$$

т. е. можетъ получиться кетонъ.

2) При дѣйствіи на $(CH_3)_2=C-(Cl).(OZnCH_3) + {}^1/_2\ Zn(CH_3)_2$ можетъ образоваться $\frac{Zn}{2}Cl + (CH_3)_3\ COZnCH_3$. По разложеніи водой послѣдняго соединенія получится столькоже алкоголя, какъ, если-бы взято было въ реакцію на 1 част. хлористаго ацетила 2 ч. цинкметила; только болотнаго газа выдѣлится вдвое меньше.

3) При дѣйствіи на продуктъ первой фазы реакціи (между цинкметиломъ и хлористымъ пропіониломъ) состава $(C_3H_7)(CH_3)\ C-(O\ Zn\ CH^3)\ Cl$ — одной частицы цинкэтила должно получиться соединеніе такого состава: $(C_3H_7)(CH_3)C(C_2H_5)OZnCH_3$; соединеніе это по разложеніи водой можетъ дать метил-этил-пропил-карбинолъ.

Чтобы опытомъ подтвердить эти предположенія Д. Павловъ и произвелъ рядъ изслѣдованій надъ дѣйствіемъ цинкорганическихъ соединеній на хлорангидриды кислотъ.

Согласно предположенію, высказанному А. М. Зайцевымъ и Е. Е. Вагнеромъ, достаточно 1 ч. цинкалкила на 2 ч. хлорангидрида, чтобы получить количество кетона, близкое къ теоретическому. Чтобы провѣрить это предположеніе, изслѣдователь бралъ различныя количества цинкалкила и хлорангидрида, причемъ, чтобы вторая фаза не успѣла еще наступить, смѣси почти тотчасъ-же послѣ прилитія хлорангидрида разлагались водою. Результаты опытовъ получились слѣдующіе:

1) 1 ч. хлорангидрида и 2 ч. цинкметила дали 86% теоретическаго количества ацетона.

2) 1 ${}^1/_2$ ч. $Zn(CH_3)_2$ и 1 ч. C_2H_3OCl дали отъ 80% до 83% ацетона.

3) 1 ч. $Zn(CH_3)_2$ и 1 ч. C_2H_3OCl дали отъ 75% до 82,5%.

4) 2 ч. C_2H_3OCl и 1 ч. $Zn(CH_3)_2$ дали отъ 70% до 80%.

Опыты эти показываютъ, что во всѣхъ случаяхъ получается почти одинаковое количество кетона, такъ что въ первомъ и второмъ опытѣ избытокъ цинкметила ничуть не увеличиваетъ выхода кетона. 3-й и 4-й опыты говорятъ за то, что реакція идетъ такъ, какъ предполагали А. М. Зайцевъ и Е. Е. Вагнеръ.

Количество выдѣляющагося, при обливаніи продукта реакціи водой, газа также подтверждаетъ это предположеніе: въ третьемъ опытѣ выдѣленіе слабѣе, чѣмъ въ двухъ первыхъ, а въ четвертомъ выдѣленія газа почти вовсе не наблюдалось.

Образованіе третичныхъ спиртовъ по А. М. Зайцеву и Е. Е. Вагнеру происходитъ по слѣдующему уравненію:

$$1)\ CH_3-C\equiv OCl + Zn<\begin{matrix}CH_3\\CH_3\end{matrix} = CH_3-\overset{\displaystyle CH_3}{\overset{|}{C}}<\begin{matrix}Cl\\OZnCH_3\end{matrix}$$

$$2)\ CH_3-\overset{\displaystyle CH_3}{\overset{|}{C}}\begin{matrix}-Cl\\-OZnCH_3\end{matrix} + Zn<\begin{matrix}CH_3\\CH_3\end{matrix}$$

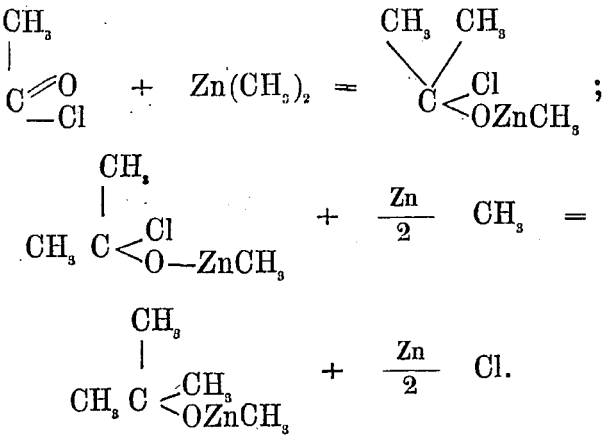
$$= CH_3-\overset{\displaystyle CH_3}{\overset{|}{C}}\begin{matrix}-CH_3\\-OZnCH_3\end{matrix} + Zn<\begin{matrix}CH_3\\Cl\end{matrix}$$

$$3)\ CH_3-\overset{\displaystyle CH_2}{\overset{|}{C}}=\begin{matrix}CH_3\\OZnCH_3\end{matrix} + 2\,H_2O =$$

$$= CH_3-\overset{\displaystyle CH_3}{\overset{|}{C}}=\begin{matrix}CH_3\\OH\end{matrix} + CH_4 + Zn(OH)_2;$$

т. е. для этого нужно на 1 ч. CH_3-COCl 2 ч. цинкметила; но, интересно, какъ пойдетъ реакція, если взять $1^1/_2$ ч. $Zn(CH_3)_2$ на 1 ч. CH_3COCl?

Изслѣдователь предполагаетъ, что реакція можетъ пойти по слѣдующему уравненію:



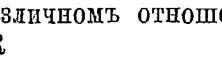
Въ результатѣ должно получиться такое-же количество спирта, какъ и при 2 ч. цинкметила.

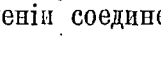
Опытъ далъ слѣдующіе результаты:

1) При 2 ч. цинкметила и 1 ч. хлористаго ацетила получилось триметил-карбинола около 76,8% теоретическаго количества.

2) При 1 ч. хлористаго ацетила и 1 ½ ч. цинкметила получилось 79,6% триметил-карбинола.

Отсюда можно заключить, что высказанное изслѣдователемъ предположеніе вполнѣ справедливо. Второй способъ, т. е. дѣйствіе 1 ч. RCOCl и 1½ ч. Zn (R)$_2$, не можетъ, однако, быть общимъ для полученія третичныхъ алкоголей, такъ какъ реакція указаннымъ выше образомъ идетъ только при хлористомъ ацетилѣ, для полученія же слѣдующаго высшаго гомолога — диметил-этил-карбинола, для лучшаго выхода необходимо брать на 1 ч. хлористаго пропіонила 2 ч. цинкметила. Причина тому, по мнѣнію автора, заключается въ различномъ отношеніи соединенія



къ . Чтобы объяснить это различіе, необходимо разсмотрѣть подробнѣе, ходъ реакціи между 1 ч. RCOCl и 1 ½ ч. Zn (R)$_2$.

При вѣсовыхъ отношеніяхъ 1 ч. RCOCl и 2 ч. $Zn R_2$ реакція, какъ извѣстно, распадается на двѣ фазы, причемъ во вторую фазу Cl вымѣнивается на R изъ $Zn (R)_2$; при вѣсовыхъ же отношеніяхъ 1 ч. RCOCl и $1^1/_2$ ч. $Zn (R)_2$ или, что все равно, 2 ч. RCOCl и 3 ч. $Zn (R)_2$ дѣло идетъ нѣсколько иначе, а именно: здѣсь реакція распадается уже на три фазы: въ первую 2 ч. R—COCl вступаютъ въ реакцію съ 2 ч. $Zn (R)_2$ и образуютъ R Cl соединеніе такого состава: 2 R—COZn R, во вторую фазу вступаетъ въ реакцію 1 частица $R_2C (Cl) O ZnR$ съ оставшейся 1 ч. $Zn R_2$, образуя соединеніе состава $R_3COZn R$ и Cl Zn R: въ третью фазу реагируютъ уже соединеніе ClZnR со второй частицей $R_2 = C(Cl)OZnR$, причемъ Cl вымѣнивается на R изъ Cl Zn R и такимъ образомъ получается $R_3CO Zn R + Zn Cl_2$. Такимъ образомъ весь ходъ реакціи выразится слѣдующими уравненіями:

1-я фаза.

$$2\,RCOCl + 3\,Zn\langle^{R}_{R} = 2\,R—\overset{\overset{Cl}{|}}{\underset{\underset{R}{|}}{C}}OZnR + ZnR_2\,;$$

2-я фраза

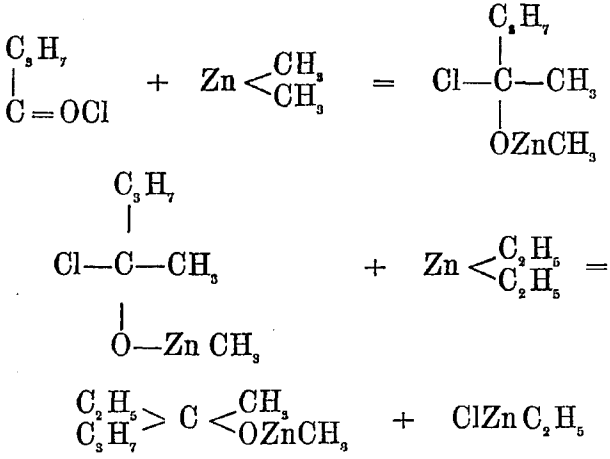
$$R—\overset{\overset{Cl}{|}}{\underset{\underset{R}{|}}{C}}—O—Zn\,R + Zn\langle^{R}_{R} = R—\overset{\overset{R}{|}}{\underset{\underset{R}{|}}{C}}—OZnR + ClZnR\,;$$

3-я фраза

$$R—\overset{\overset{Cl}{|}}{\underset{\underset{R}{|}}{C}}—OZnR + ClZnR = R—\overset{\overset{R}{|}}{\underset{\underset{R}{|}}{C}}—OZnR + ZnCl_2\,.$$

При хлористыт ацетилѣ Cl въ третью фазу легко обмѣнивается на CH_3 изъ $ClZnCH_3$, при высшихъ-же хлорангидридахъ обмѣнъ этотъ идетъ все труднѣе, и труднѣе, такъ какъ C_3H_5OCl даже при 2 ч. цинкалкила обмѣниваетъ Cl на $(CH_3)'$ или вообще $(R)'$ только спустя сутки, а C_5H_9OCl вступаетъ во вторую фазу реакціи только спустя мѣсяцъ.

Далѣе, сдѣланъ былъ опытъ приготовленія метил-этил-пропил-карбинола, для чего постепенно къ 1 ч. цинкметила прибавлена была 1 ч. хлористаго бутирила, затѣмъ, тотчасъ-же, по окончаніи прилитія прибавлена была 1 ч. цинкэтила. Черезъ $1^1/_2$ мѣсяца смѣсь, разложенная снѣгомъ, выдѣлила масло, изъ котораго получено было вещество съ точкой кипѣнія 135—138°C. Іодюръ, полученный изъ этого продукта при анализѣ далъ цифры, хорошо согласующіеся съ формулой іодюра гептильнаго спирта. Реакція образованія упомянутаго спирта можетъ быть выражена слѣдующимъ уравненіемъ:



По разложеніи водой продукта второй фазы реакціи и получится метил-этил-пропил-карбинолъ. Такимъ-же образомъ изъ хлористаго изобутирила приготовленъ былъ метил-этил-изопропил-карбинолъ.

Только что приведенные опыты вполнѣ подтвердили предположенія высказанныя изслѣдователемъ: первое предположеніе подтвердилось тѣмъ, что при дѣйствіи 2 ч. хлористаго ацетила и 1 ч. цинкметила выходъ кетона получается вполнѣ удовлетворительный. Второе предположеніе также

оказалось вполнѣ вѣрнымъ, но только для хлористаго ацетила, и, наконецъ, полученные гептильные спирты съ тремя различными радикалами говорятъ за справедливость третьяго предположенія. Стало быть можно считать доказаннымъ справедливость объясненій, данныхъ. А. М. Зайцевымъ и Е. Е. Вагнеромъ—относительно хода реакціи между цинкорганическими соединеніями и галоидоангидридами кислотъ; такъ что реакція эта можетъ быть выражена слѣдующими общими уравненіями:

$$R\,C{=}O{-}Cl + Zn\,R_2 = R{-}\overset{R\,Cl}{\overset{\vee}{C}}OZnR;$$

По разложеніи водой продукта первой фазы реакціи получится кетонъ.

$$\overset{R\,Cl}{\overset{\vee}{R{-}CO}}ZnR + 2H_2O = R{-}\overset{R}{\overset{|}{C}}{<}^{Cl}_{OH} + Zn(OH)_2 + RH.$$

2-я фраза

$$R\,C{<}^{OZn\,R}_{Cl} + Zn\,R_2 = R{-}\overset{R}{\overset{|}{C}}{<}^{R}_{OZnR} + Cl{\cdot}Zn\,R;$$

Разлагая водой продуктъ второй фазы получимъ третичный алкоголь.

$$\overset{R\,R}{\overset{\vee}{R{-}CO}}Zn\,R + 2H_2O = \overset{R\,R}{\overset{\vee}{R-C.OH}} + Zn(OH)_2 + RH.$$

Дальнѣйшія изслѣдованія показали, однако, что реакція въ нѣкоторыхъ случаяхъ идетъ и не вполнѣ нормально: такъ напримѣръ, А. Щербаковъ [1]), желая получить трипропил-карбинолъ дѣйствіемъ цинкпропила на нормальной хлористый бутирилъ, получилъ вмѣсто ожидаемаго третичнаго алкоголя лишь вторичный—дипропил-карбинолъ. Самъ изслѣдователь не рѣшается дать объясненіе такого ненормальнаго хода реакціи, но высказываетъ по этому поводу слѣдующія соображенія: если здѣсь реакція идетъ также, какъ при образованіи гидрощавелевой кислоты Франкланда, то нужно допустить, что вначалѣ къ C_3H_7COCl присоединяются не радикалы (ZnC_3H_7) и (C_3H_7), а только два радикала $(Zn\,C_3H_7)$, т. е. реакція присоединенія выразится такимъ уравненіемъ:

$$\begin{matrix} C_3H_7 \\ | \\ C=O \\ |\quad\diagdown \\ \quad Cl \end{matrix} + 2Zn < \begin{matrix} C_3H_7 \\ C_3H_7 \end{matrix} = C_3H_7 - \begin{matrix} ZnC_3H_7 \\ | \\ C \\ | \\ Cl \end{matrix} - OZnC_3H_7 + \begin{matrix} C_3H_7 \\ | \\ C_3H_7 \end{matrix}$$

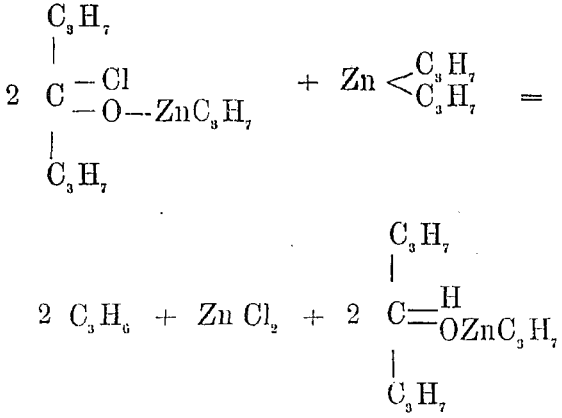
Если затѣмъ хлоръ обмѣнится на (C_3H_7), то получится соединеніе такого состава:
$(C_3H_7)_2 - C - (ZnC_3H_7) - O(ZnC_3H_7)$; соединеніе это, разложенное водой, и дастъ дипропил-карбинолъ.

Но при такомъ ходѣ реакціи нельзя себѣ уяснить полученіе кетона, тогда какъ на самомъ дѣлѣ онъ образуется, если тотчасъ по прилитіи хлорангидрида смѣсь разложить водою.

Если допустить, что первая фаза реакціи идетъ нормально, т. е. получается соединеніе состава $(C_3H_7)_2\,C(Cl)\,OZn\,C_3H_7$ а затѣмъ уже хлоръ вымѣнивается на (ZnC_3H_7), то тогда будетъ понятно и полученіе кетона. Но тогда въ числѣ летучихъ продуктовъ реакціи долженъ-бы находиться $Cl\,C_3H_7$, тогда какъ этого не наблюдается. Болѣе вѣроятное объясненіе на этотъ случай даетъ И. Богомольцъ [2]); онъ принимаетъ,—что „послѣ присоединенія первой частицы цинкпропила къ хлористому бутирилу, наступаетъ не замѣщеніе

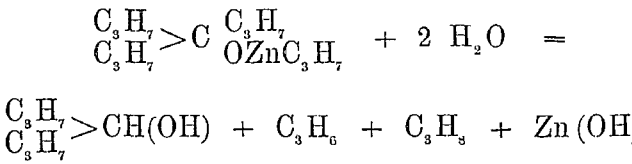
[1]) Ж. Р. Х. Общ. XIII, 343.
[2]) Ж. Р. Х. Общ. XIII, 414.

хлора, а его возстановленіе на счетъ другой частицы цинкорганическаго соединенія". Слѣдовательно, по его мнѣнію вторая фаза реакціи выразится слѣдующимъ уравненіемъ:



Послѣднее соединеніе по разложеніи водою и дастъ вторичный спиртъ.

В. Р. Марковниковъ [1]) даетъ объясненіе другаго характера: онъ предполагаетъ, что сначала реакція идетъ вполнѣ нормально и только при разложеніи водой происходитъ распаденіе пропила на пропиленъ и водородъ, такъ что возстановленіе спирта происходитъ согласно слѣдующему уравненію:



Подтвержденіе этому онъ видитъ въ реакціи цинкпсевдопропила на щавелевый эфиръ [2]), гдѣ рядомъ съ допсевдопропил-щавелевымъ эфиромъ образуется и гидропсевдопропилщавелевый эфиръ, происхожденіе котораго онъ выражаетъ слѣдующимъ уравненіемъ:

---

[1]) Ж. Р. Х. Общ. XV, 407.

[2]) Ibidem II, 95. Zeitschr. f. Ch. Pharm. 1870, 516.

$$\begin{matrix} C\equiv O-O-Ae \\ | \\ C\equiv O-O-Ae \end{matrix} + Zn<\begin{matrix} C_3H_7 \\ C_3H_7 \end{matrix} = \begin{matrix} (C_3H_7)_2 \\ | \\ COZnC_3H_7 \\ | \\ COOAe \end{matrix} + Zn<\begin{matrix} OAe \\ C_3H_7 \end{matrix};$$

$$(C_3H_7)_2 = \begin{matrix} C-O\ Zn\ C_3H_7 \\ | \\ C=OO-Ae \end{matrix} + 2\ H_2O =$$

$$\begin{matrix} C_3H_7C=HOH \\ | \\ C\equiv O.OAe \end{matrix} + C_3H_8 + C_3H_6 + C_2H_6 + Zn(OH)_2$$

Причину распаденія авторъ видитъ въ сложности частицы, такъ какъ до сихъ поръ не извѣстно третичныхъ спиртовъ съ тремя пропилами, бутилами и т. д. также неизвѣстно и предѣльныхъ углеводородовъ съ 4 C_3H_7 и проч.

Изслѣдованія Д. Павлова показали, что хлорангидриды кислотъ могутъ служить для приготовленія третичныхъ спиртовъ съ помощью цинкоорганическихъ соединеній, также, какъ альдегиды для вторичныхъ. Какъ въ томъ, такъ и въ другомъ случаѣ при нѣкоторыхъ условіяхъ можетъ произойти возстановленіе и, такимъ образомъ, получаются: вмѣсто третичныхъ спиртовъ — вторичные, а вмѣсто вторичныхъ первичные.

Полученіе непредѣльныхъ третичныхъ спиртовъ изъ хлорангидридовъ непредѣльныхъ кислотъ также, по видимому, не невозможно, такъ какъ М. Павловскому [1]) дѣйствіемъ цинкметила на хлорангидридъ кротоновой кислоты, удалось получить масло, поглощающее бромъ, которое изслѣдователь не прочь счесть за непредѣльный третичный алкоголь.

---

[1]) Ж. Р. Х. Общ. IV, 135.

Близко къ только что разсмотрѣнному вопросу стоитъ вопросъ о дѣйствіи цинкоорганическихъ соединеній на галоидоангидриды галоидо-замѣщенныхъ кислотъ. Здѣсь реакція будетъ, очевидно, еще сложнѣе, чѣмъ при простыхъ галоидоангидридахъ кислотъ, такъ какъ здѣсь кромѣ галоида, связаннаго съ углеродомъ карбонильной группы, находится еще галоидъ, замѣщающій H въ группѣ CH_3 или CH_2 и проч. Изслѣдованія въ этомъ направленіи начаты, по предложенію А. М. Бутлерова, Н. Ждановымъ [1]) работою надъ изслѣдованіемъ дѣйствія цинкметила на бромобромистый ацетилъ.

При этой реакціи изслѣдователь получилъ, по разложеніи продукта реакціи водой, масло двухъ родовъ: растворимое въ водѣ и нерастворимое. Изслѣдованія производились только надъ первымъ. Оно не содержитъ галоида, кипитъ при 110—112°C; анализъ его опредѣленныхъ указаній на формулу недалъ; анализъ-же хлорюра, полученнаго при дѣйствіи на масло пятихлористымъ фосфоромъ, далъ цифры, соотвѣтствующія хлорюру амильнаго алкоголя. При окисленіи хромовой смѣсью, спиртъ далъ, повидимому, ацетонъ (т. к. 60°C), а потомъ и уксусную кислоту. Отсюда изслѣдователь заключаетъ, что полученный имъ спиртъ есть или этил-диметилкарбинолъ, или-же метил-псевдопропил-карбинолъ. А. Анитовъ [2]), изслѣдуя дѣйствіи цинкэтила на бромо-бромистый ацетилъ, получилъ масло, кипящее при 155—157°C. По теоріи долженъ-бы получиться октильный спиртъ $C_8H_{18}O$; но числа, полученныя при анализѣ, скорѣе согласуются съ формулой $C_{10}H_{22}O$. Изъ этихъ опытовъ, какъ видно, нельзя вывести никакого заключенія о ходѣ реакціи, такъ какъ продукты, полученные Ждановымъ и Анитовымъ хорошенько не опредѣлены.

Чтобы выяснить ходъ этой реакціи В. Виноградовъ [3]) повторилъ эти опыты. Причину неудовлетворительности опытовъ предыдущихъ изслѣдователей онъ видитъ въ томъ, что въ первыхъ они брали мало цинкалкила: на одну частицу бромо-бромистаго ацетила они брали 2 ч. $Zn(R)_2$, между

---

[1]) Ж. Р. Х. Общ. IV, 233.
[2]) Ibidem. IV, 235.
[3]) Ibidem. IX, 255

тѣмъ какъ такое количество цинкалкила едва достаточно для простыхъ галоидоангидридовъ (см. изслѣдованія А. М. Бутлерова); во вторыхъ они разлагали смѣсь водою тотчасъ-же по прилитіи послѣднихъ количествъ бромо-бромистаго ацетила, а въ такомъ случаѣ, какъ извѣстно получаются лишь кетоны.

Въ виду этого В. Виноградовъ, при своихъ опытахъ, бралъ на 1 ч. бромо-бромистаго ацетила 3 ч. цинкметила и смѣсь оставалась неразложенною въ теченіе 20—30 дней.

На другой день стоянія въ жидкости появились кристаллы, которые оказались не аналогичными съ кристаллами, получаемыми при дѣйствіи цинкметила на хлорангидриды кислотъ, такъ какъ при разложеніи водою они недали алкоголя. Анализы этихъ кристалловъ позволяютъ думать, что они состоятъ изъ смѣси $Zn\ CH_3Br$ съ $Zn\ Br_2$. Разложеніе смѣси производилось снѣгомъ и водой, причемъ выдѣлялись въ большомъ количествѣ горючіе газы.

Изъ масла удалось выдѣлить наибольшую порцію съ точкой кипѣнія 113°C. Анализъ этой порціи далъ цифры, согласующіяся съ формулой $C_5H_{12}O$. Анализъ, приготовленныхъ изъ этой порціи, хлорюра и іодюра также далъ цифры, подходящія къ формулѣ $C_5H_{11}\ Gd$.

Полученный алкоголь оказался не третичнымъ, какъ слѣдовало ожидать, а вторичнымъ метил-изопропил-карбиноломъ. Доказательствомъ тому служитъ реакція окисленія алкоголя хромовымъ ангидридомъ: полученный кетонъ оказался метил-изопропил-кетономъ. При дѣйствіи цинкэтила на бромо-бромистый ацетилъ полученъ спиртъ состава $C_8H_{18}O$, который, по всей вѣроятности, представляетъ вторичный спиртъ формулы строенія $(C_2H_5)_2 = CH — CH(OH)\ C_2H_5$— этил-изоамил-карбинолъ.

О ходѣ реакціи между бромо-бромистымъ ацетиломъ и, напримѣръ цинкметиломъ, изслѣдователь дѣлаетъ слѣдующія предположенія: во время первой фазы цинкметилъ дѣйствуетъ на кислородъ бромо-бромистаго ацетила такимъ образомъ, что образуетъ соединеніе состава $CH_2Br—C(Br)(CH_3)—OZnCH_3$. Изъ этого соединенія могутъ произойти: ацетонъ, обромленный ацетонъ и метил-этил-кетонъ, которые и получаются какъ второстепенные продукты реакціи.

Обромленный ацетонъ получится въ томъ случаѣ, если соединеніе $(CH_2Br)\,C(CH_3)\,(Br)-OZnCH_3$ останется неизмѣнившимся до разложенія водой, такъ какъ въ такомъ случаѣ, также, какъ и при хлорангидридахъ кислотъ, по разложеніи водой у одного и того-же атома будетъ находиться Br и OH. Метил-этил-кетонъ получиться въ томъ случаѣ, если бромъ въ группѣ CH_2Br обмѣнится на $(CH_3)'$. Что же касается до происхожденія ацетона, то оно легко объясняется, если принять, что послѣ дѣйствія цинкметила на кислородъ происходитъ замѣщеніе Br въ группѣ CH_2Br на $Zn\,CH_3$, такъ что образованіе ацетона можетъ быть выражено слѣдующими уравненіями:

$$\begin{array}{l} CH_2Br \\ | \\ C<\begin{matrix}Br\\OZnCH_3\end{matrix} \\ | \\ CH_3 \end{array} + Zn<\begin{matrix}CH_3\\CH_3\end{matrix} = CH_3\,Br + \begin{array}{l} CH_2ZnCH_3 \\ | \\ C=\begin{matrix}O-ZnCH_3\\Br\end{matrix} \\ | \\ CH_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} CH_2ZnCH_3 \\ | \\ C=\begin{matrix}OZnCH_3\\Br\end{matrix} \\ | \\ CH_3 \end{array} + 4\,H_2O =$$

$$\begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ C=O \\ | \\ CH_3 \end{array} + Br\,H + 2\,CH_4 + 2\,Zn(OH)_2$$

Но такой ходъ реакціи, по мнѣнію И. Богомольца весьма сомнителенъ, такъ какъ: во первыхъ не доказано выдѣленіе CH_3Br, а во вторыхъ такое объясненіе противорѣчитъ тѣмъ фактамъ, которые наблюдались досихъ поръ

при реакціи цинк-органическихъ соединеній, а именно: извѣстно, что реакція кислородъ содержащихъ органическихъ веществъ съ цинк-органическими соединеніями происходитъ потому, что связь цинка съ алкогольнымъ радикаломъ легко преодолевается сродствомъ цинка къ кислороду, точно также относится $Zn(R)_2$ къ галоиду. Принимая-же объясненія В. Виноградова, приходится допустить обратное явленіе т. е. что цинкметилъ, распадаясь на ($Zn\,CH_3$ и (CH_3) реагируетъ такимъ образомъ, что ($Zn\,CH_3$) присоединяется къ углероду весьма сложнаго цинкоорганическаго соединенія, а не соединяется съ галоидомъ.

Затѣмъ, при такомъ объясненіи выходитъ, что водородъ, потребный для замѣщенія галоида берется изъ воды, между тѣмъ въ химической литературѣ извѣстны факты, гдѣ галоидъ замѣщается на водородъ также и въ отсутствіи воды. Принимая въ соображеніе все вышесказанное И. Богомолецъ склоненъ думать, что механизмъ возстановленія заключается въ томъ, что H отрывается отъ R, связаннаго съ цинкомъ „чтобы удовлетворить свободное сродство угля, послѣ отпаденія отъ него галоида“; такъ что реакція образованія ацетона, по мнѣнію Богомольца, можетъ быть выражена слѣдующимъ уравненіемъ:

$$2\,\begin{array}{l}CH_3\\|\\C{-}Br\\|\\CH_2Br\end{array}\!\!\begin{array}{l}\\O{-}ZnCH_3\\\\\end{array} + 2\,Zn\!<\!\begin{array}{l}CH_3\\CH_3\end{array} =$$

$$C_2H_4 + ZnBr_2 + 2\,\begin{array}{l}CH_3\\|\\C{<}\end{array}\!\!\begin{array}{l}O{-}ZnCH_3\\Br\\|\\CH_3\end{array}.$$

Послѣднее соединеніе, разложенное водой и дастъ ацетонъ. Относительно второй фазы реакціи В. Виноградовъ дѣлаетъ слѣдующія предположенія. Можетъ быть здѣсь реакція идетъ также, какъ и при дѣйствіи цинкметила на

іодгидринъ этилен-гликола: тамъ въ первую фазу реакціи получается соединеніе такого состава: $CH_2J—CH_2OZn\,CH_3$; соединеніе это во вторую фазу обмѣниваетъ іодъ на метильную группу и въ тоже время этиленное строеніе измѣняется въ этилиденное. Время перегруппировки опредѣлить не удается, можно предположить, что группа $(OZn\,CH_3)'$, или іодъ мѣняются мѣстами съ водородомъ сосѣдней группы и, такимъ образомъ, получается соединеніе состава: $CH_3—C{\equiv}HJ\,(OZn\,CH_3)$. Аналогичное соединеніе должно получиться и изъ бромистаго бром-ацетила, т. е. $CH_2Br—CBr(CH_3)\,OZn\,CH_3$. Послѣ замѣщенія Br на (CH_3) въ группѣ $CBr(CH_3)\,OZnCH_3$ получится соединеніе, имѣющее такой составъ: $(CH_3)_2{=}C\begin{matrix}CH_2Br,\\|\\—OZnCH_3\end{matrix}$, а затѣмъ уже наступаетъ перегруппировка, результатомъ которой является соединеніе такого состава $\begin{matrix}CH_3\\CH_3\end{matrix}{>}CH—CH{<}\begin{matrix}Br\\O\,Zn\,CH_3\end{matrix}$.

При дѣйствіи 1 ч. $Zn(CH_3)_2$ соединеніе это обмѣниваетъ Br на CH_3 и, такимъ образомъ, уже получится цинкмонометил-алкоголятъ, который, при дѣйствіи на него, воды, дастъ метил-изопропил-карбинолъ. Но, по мнѣнію самого изслѣдователя, „представленіе это, кромѣ неопредѣленности причинъ перегруппировокъ, грубо и слишкомъ механично“.

Второе предположеніе заключается въ слѣдующемъ: можетъ быть продуктъ первой фазы реакціи распадается подъ вліяніемъ цинкметила по слѣдующему уравненію:

$$\begin{matrix}CH_2Br\ CH_3\\\diagdown\ \ \diagup\\Br—C—OZnCH_3\end{matrix} = \begin{matrix}CHBr\\\|\\(CH_3)COZnCH_3\end{matrix} + BrH$$

HBr вступаетъ въ реакію съ цинкметиломъ и образуетъ соединеніе $Br\,Zn\,CH_3$, CH_3 и H; CH_3 и H не соединяются между собою, а присоединяются къ соединенію $CHBr{=}C(CH_3)\,OZn\,CH_3$ такимъ образомъ, что (CH_3) встаетъ къ группѣ (CHBr) а H къ $C(CH)_3\,OZn\,CH_3$, такъ что въ результатѣ получается соединеніе $CHBr\,(CH_3)—CH(CH_3)\,OZnCH_3$.

Стоитъ въ этомъ соединеніи бромъ обмѣнить на (CH_3) и получится цинкмонометил-алкоголятъ вторичнаго спирта. Но и такое допущеніе мало вѣроятно.

Болѣе вѣроятно допущеніе такого рода что „на мѣсто выдѣлившихся брома и водорода встанутъ метиловая и цинкмонометиловая группа такимъ образомъ, что получается соединеніе такого строенія:

$$\begin{matrix} Br \\ CH_3 \end{matrix} > CH-C(CH_3) < \begin{matrix} OZn\ CH_3 \\ Zn\ CH_3 \end{matrix}.$$

Послѣ обмѣна въ этомъ соединеніи Br на CH_3 получится цинкмонометил-алкоголятъ, дающій при разложеніи водою метил-изопропил-карбинолъ.

Наконецъ послѣднее толкованіе: первыя фазы реакціи идутъ совершенно также, какъ и при хлорангидридахъ кислотъ, т. е. получается соединеніе состава $CH_2Br-C\overset{(CH_3)_2}{=}OZnCH_3$, которое подъ вліяніемъ, можетъ быть теплоты, выдѣляющейся при реакціи, распадается по слѣдующему уравненію:

$$\begin{matrix} CH_2Br \\ | \\ C=(CH_2)_2OZnCH_3 \end{matrix} = \begin{matrix} CH_2 \\ C(CH_3)_2 \end{matrix} > O + BrZnCH_3$$

Затѣмъ, окись эта „изомеризуется“ въ альдегидъ, а альдегиды какъ извѣстно, съ цинк-органическими соединеніями реагируютъ образуя цинкмоналкил-производныя вторичныхъ алкоголей. Послѣднее толкованіе предложено М. Каширскимъ [1]).

Онъ находитъ въ данномъ случаѣ полнѣйшую аналогію съ реакціей іодгидрина гликола на цинкэтилъ. Чтобы выяснить вполнѣ этотъ ненормальный ходъ реакціи М. Каширскій предпринялъ рядъ изслѣдованій надъ дѣйствіемъ цинкоорганическихъ соединеній на бромангидриды α-монобром-кислотъ предѣльнаго ряда.

Первая фаза реакціи, по мнѣнію изслѣдователя, должна идти совершенно также, какъ и при хлорангидридахъ кислотъ, т. е. получаются соединенія, выражающіяся слѣдующими тремя формулами:

---

[1]) Ж. Р. Х. Общ. XIII, 73.

$$(CH_3)_2{=}C\begin{matrix}CH_2Br\\|\\OZnCH_3\end{matrix}\quad;\quad (CH_3)_2C\begin{matrix}R{-}CHBr.\\|\\O{-}ZnCH_3\end{matrix}\quad;\quad (CH_3)_2C\begin{matrix}R_2{=}CBr\\|\\OZnCH\end{matrix}$$

для различныхъ α-моно-бром-замѣщенныхъ бромангидридовъ. Соединенія эти онъ разсматриваетъ какъ цинкмонометил-производныя бромгидрин-гликолей: первично-третичныхъ, вторично-третичныхъ и третично- третичныхъ.

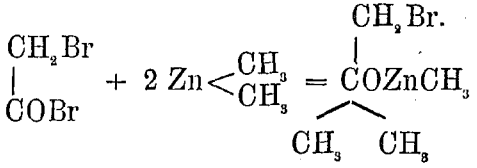
Вторая фаза реакціи сводится уже на дѣйствіе цинкорганическаго соединенія на эти—послѣднія. Вполнѣ аналогичный случай, по его мнѣнію имѣли А. М. Бутлеровъ и М. А. Осокинъ при дѣйствіи цинкметила и цинкэтила на іодгидрин-гликола. Вторая фаза реакціи, какъ уже сказано было раньше, подраздѣляется въ свою очередь на двѣ фазы, причемъ „цинкоорганическій радикалъ вступаетъ не въ непосредственное обмѣнное разложеніе съ галоидомъ гликола, а этотъ послѣдній распадается предварительно съ выдѣленіемъ оксангидридной формы гликола“ На оксангидридъ уже и дѣйствуетъ ZnR_2. Натура оксангидридной формы зависитъ отъ строенія гликола: это или альдегидъ или кетонъ. Альдегиды, какъ извѣстно, реагируютъ съ $Zn\,R_2$, образуя вторичные спирты, что-же касается кетоновъ, то они, по мнѣнію изслѣдователя, по всей вѣроятности способны давать съ $Zn\,R_2$ третичные спирты. Такимъ образомъ реакція между іодгидриномъ гликола и цинкметиломъ, напримѣръ, а также и между бромо-бромистымъ ацетиломъ и цинкметиломъ выразится слѣдующими уравненіями:

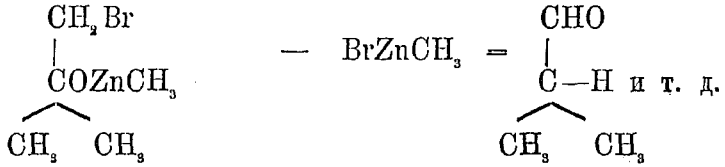
$$\begin{matrix}CH_2J\\|\\CH_2OH\end{matrix} + Zn{<}\begin{matrix}CH_3\\CH_3\end{matrix} = \begin{matrix}CH_2J\\|\\CH_2OZnCH_3\end{matrix} + CH_4\ ;$$

$$\begin{matrix}CH_2J\\|\\CH_2OZnCH_3\end{matrix} - J\,ZnCH_3 = \begin{matrix}CHO\\|\\CH_3\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}CHO\\|\\CH_2\end{matrix} + Zn{<}\begin{matrix}CH_3\\CH_3\end{matrix} + 2H_2O = H{-}\begin{matrix}CH_3\\|\\C{-}OH\\|\\CH_3\end{matrix} + Zn(OH)_2 + CH_4\ .$$

Совершенно также.





Въ доказательство того, что при распаденіи цинкмоно-радикальнаго производнаго происходитъ перегруппировка въ альдегидъ или кетонъ изслѣдователь приводитъ то, что въ томъ случаѣ, когда изъ гликола выдѣляется вода или изъ галоидгидрина—галоидоводородная кислота, то получаются альдегиды или кетоны, а не изомерныя имъ окиси. Если припомнить тотъ фактъ, что гликоли, подходящіе ближе къ третичнымъ, обладаютъ и большею способностію распадаться, то сдѣлается яснымъ, что промежуточныя соединенія, какъ производныя третичныхъ гликолей, обладаютъ способностью легко распадаться, причемъ изъ соединенія $CH_2\,Br—C(CH_3)_2\,OZn\,CH_3$ получится альдегидъ, а изъ двухъ другихъ—кетоны.

Отсюда можно заключить, что только изъ бромо-бромистаго ацетила получится вторичный спиртъ, а при высшихъ его гомологахъ-третичные.

Чтобы убѣдиться, такъ ли это будетъ на самомъ дѣлѣ, М. Каширскій и взялъ для изслѣдованія бромангидриды трехъ а-бромо-кислотъ 1) α бромпропіоновой $CH_3—CHBr—COBr$ 2) α-бромомасляной $C_2H_5—CHBr—COBr$ и 3) α бром-изомасляной $\left.\begin{matrix}CH_3\\CH_3\end{matrix}\right\}$ $CBr\,CO\,Br$. Сущность соображеній, высказанныхъ авторомъ въ этой работѣ, заключается въ слѣдующемъ: если-бы реакція между бромангидридомъ бромоуксусной кислоты и цинкмэтиломъ являлась типической для полученія вторичныхъ спиртовъ, то изъ двухъ первыхъ ея гомологовъ должны бы получиться также вторичные спирты пинаколинаваго ряда, образованіе которыхъ можно выразить слѣдующими схематическими уравненіями:

1)

$$\begin{matrix}CH_2Br\\|\\COBr\end{matrix} + 2\ Zn < \begin{matrix}CH_3\\CH_3\end{matrix} + 2\ H_2O =$$

$$\begin{matrix}(CH_3)_2\ CH\\|\\CH_3\ CH(OH)\end{matrix} + 2\ BrZnOH + CH_4$$

2)

$$\begin{matrix}CH_3\ CHBr\\|\\COBr\end{matrix} + 2\ Zn < \begin{matrix}CH_3\\CH_3\end{matrix} + 2\ H_2O =$$

$$\begin{matrix}C(CH_3)_3\\|\\CH\ (OH)\\|\\CH_3\end{matrix} + 2\ BrZnOH + CH_4$$

3)

$$\begin{matrix}C_2H_5CHBr\\|\\COBr\end{matrix} + 2\ Zn < \begin{matrix}CH_3\\CH_3\end{matrix} + 2\ H_2O =$$

$$\begin{matrix}C_2H_5C(CH_3)_2\\|\\CHOH\\|\\CH_3\end{matrix} + 2\ BrZnOH + CH_4$$

Крайне интересной въ такомъ случаѣ являлась-бы реакція при бромангидридѣ бром-изо-масляной кислоты, такъ какъ здѣсь при углеродѣ, связанномъ съ бромомъ, нѣтъ водорода, такъ что образованіе вторичнаго спирта должно-бы было сопровождаться радикальной перегруппировкой. По опытамъ оказалось, что при всѣхъ трехъ бромангидридахъ получились лишь третичные спирты, а именно: 1) Изъ бромистаго бром-пропіонила получень былъ гексильный алкоголь съ точкой кипѣнія 118—119°C. диметил-изопрпилкарбинолъ. 2) Изъ бромистаго α-бром-бутирила полученъ гептильный алкоголь, который изслѣдователь считаетъ за

метил-этил-изопропил-карбинолъ 3) бромистый α-бром-изобутирилъ далъ алкоголь, который по своимъ свойствамъ оказался вполнѣ тождественнымъ съ пентаметил-этоломъ А. М. Бутлерова [1]).

Такимъ образомъ опыты эти вполнѣ, по видимому, подтвердили справедливость предположеній Каширскаго относительно тождества промежуточныхъ цинкмонорадикальныхъ соединеній съ цинкмонорадикалами бромгидрингликолей. Слѣдовательно, бромангидриды α-моно-бромкислотъ предѣльнаго ряда, за исключеніемъ уксусной, могутъ служить для синтеза третичныхъ алкоголей. И. Богомольцъ [2]), однако, относится съ нѣкоторымъ недовѣріемъ къ предположеніямъ М. Каширскаго относительно перегруппировокъ, такъ какъ, по его мнѣнію, и при простомъ, сначала, присоединеніи $Zn(R)_2$, а затѣмъ замѣщеніи Br на R′ должны получиться третичные спирты.

Случай съ бромангидридомъ α-бромомасляной кислоты представляетъ исключеніе, такъ какъ здѣсь долженъ бы получиться въ такомъ случаѣ диметил-бутил (вторичный) карбинолъ, тогда какъ М. Каширскимъ полученъ былъ метил-этил-изопропил-карбинолъ; но послѣднее обстоятельство едвали вѣрно, такъ какъ самъ М. Каширскій вывелъ заключеніе о строеніи спирта, основываясь лишь „на соотношеніи температуръ кипѣнія третичныхъ изомерныхъ алкоголей“.

Да кромѣ того, чтобы получить этотъ спиртъ, необходимо чтобы произошла перегруппировка въ кетонъ, а послѣдніе, какъ извѣстно изъ работъ Д. Павлова, съ предѣльными цинкалкилами въ реакцію не вступаютъ. На основаніи этихъ соображеній И. Богомолецъ считаетъ вопросъ о ходѣ реакціи между цинкоорганическими соединеніями и $RCH_2Gd—COGd$ еще далеко неразрѣшеннымъ. По его мнѣнію интереснымъ также является изученіе отношеніе цинк-органическимъ соединеній къ такимъ галоидоангидридамъ галоидокислотъ у которыхъ не одинъ водородъ замѣщенъ на галоидъ, а нѣсколько. Съ цѣлью изученія названной реакціи онъ и предпринялъ изученіе дѣйствія цинкметила на хлористый ацетилъ различной степени охлоренія. Для перваго опыта имъ взятъ былъ хлористый трихлорацетилъ.

---

[1]) Ж. Р. Х. Общ. VII, 37.
[2]) Ibidem. XIII, 395.

Смѣсь выдѣляетъ на 2-й или 3-йдень кристаллы, образованіе которыхъ сопровождается отдѣленіемъ газовъ. Кристаллы, по разложеніи водой, въ противуположность кристалламъ, полученнымъ В. Виноградовымъ при дѣйствіи цинкметила на бромобромистый ацетилъ, дали алкогольную жидкость. Загустѣвшая смѣсь кристалловъ и жидкости, разложенная водой, дала гептильный алкоголь—пентаметил-этолъ.

Хлористый дихлорацетилъ съ цинкметиломъ послѣ 4-хъ дней также выдѣлилъ кристаллы, количество которыхъ увеличивается при пониженіи температуры. По разложеніи смѣси водою получилось масло, которое при перегонкѣ съ водою раздѣлилось рѣзко на легкое и тяжелое, причемъ первое растворимо въ водѣ; оно-то и было изслѣдовано.

Изъ выдѣленнаго, сухимъ поташемъ изъ воднаго раствора, масла, фракціонированной перегонкой удалось получить небольшое количество алкоголя (только около 7%) который оказался третичнымъ диметил-изопропил-карбиноломъ. Тяжелое масло изслѣдовано небыло.

Смѣсь хлористаго хлорацетила съ цинкметиломъ начинаетъ выдѣлять недѣли черезъ двѣ кристаллы, которые оказались вполнѣ аналогичными кристалламъ В. Виноградова, такъ какъ спиртъ полученъ былъ только изъ жидкости. Примѣсь къ цинкметилу іодистаго метила въ количествѣ 10% совершенно препятствуетъ образованію кристалловъ. Полученный спиртъ, по температурѣ кипѣнія, отвѣчаетъ метил-изопропил-карбинолу.

Такимъ образомъ продуктами реакціи цинкметила на хлористые три и дихлорацетилы являются третичные спирты, а однохлористый хлорацетилъ даетъ вторичный.

Въ какой послѣдовательности идетъ замѣщеніе хлора, изслѣдователь не берется рѣшать, такъ какъ никакихъ фактовъ для этого не имѣется.

Ходъ реакціи, напримѣръ для хлористаго трихлорацетила, можетъ быть выражена слѣдующими уравненіями:

$$\begin{matrix} CCl_3 \\ | \\ COCl \end{matrix} + Zn\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} + \begin{matrix} CCl_3 \\ | \\ Cl—C(CH_3)OZnCH_3 \end{matrix}$$

По разложеніи водой послѣдняго продукта, долженъ получиться трехохлоренный ацетонъ. Во вторую фазу происходитъ замѣщеніе Cl на (CH_3) въ группѣ CCl_3:

$$\begin{array}{l} CCl_3 \\ | \\ Cl\ C(CH_3)OZnCH_3 \end{array} + 3\ Zn < \begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} =$$

$$\begin{array}{l} C(CH_3)_3 \\ | \\ Cl—C(CH_3)\ OZnCH_3 \end{array} + 3\ ClZnCH_3 .$$

По разложеніи продукта второй фазы реакціи получится метил-третичный бутил-кетонъ.

Промежуточныя соединенія между 1-й и 2-й фазой дадутъ кетоны различной степени охлоренія.

Въ третью фазу происходитъ замѣщеніе хлора въ карбонильной группѣ:

$$\begin{array}{l} C{\equiv}(CH_3)_3 \\ | \\ Cl—C{=}(CH_3)—OZnCH_3 \end{array} + Zn < \begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} =$$

$$Cl—ZnCH_3 + \begin{array}{l} C{\equiv}(CH_3)_3 \\ | \\ (CH_3)_2—C—OZnCH_3 \end{array}$$

Послѣднее соединеніе разложенное водой, даетъ пентаметил-этолъ.

Точно такая-же реакція и при хлористомъ дихлорацетилѣ.

Изъ опытовъ Виноградова, Каширскаго, и Богомольца видно, что цинк-органическія соединенія относятся не ковсѣмъ галоидоангидридамъ галоидо-кислотъ—одинаково: съ одногалоидо замѣщеннымъ галоидонгидрида уксусной кислоты они даютъ цинмоноалкил-производныя вторичныхъ алкоголей, въ прочихъ-же случаяхъ такія-же производныя третичныхъ алкоголей.

Сопоставляя опыты А. М. Бутлерова и Осокина, надъ дѣйствіемъ $Zn\ R_2$ на іодгидринъ гликола, Гарцаролли Турнлака, надъ дѣйствіемъ $Zn\ R_2$ на хлораль, а также только что упомянутыхъ химиковъ: Виноградова, Каширскаго и

Богомольца можно заключить, что галоидъ, положенный не въ карбонильной группѣ, при реакціи соединенія, содержащаго этотъ галоидъ, съ цинк-органическими соединеніями, имѣетъ стремленіе вызывать перегруппировки. И что странно, такъ это то, что перегруппировки происходящія при этихъ реакціяхъ обратны одна другой: такъ напримѣръ у А. М. Бутлерова и М. А. Осокина происходитъ перегруппировка, результатомъ которой является полученіе вторичнаго спирта, вмѣсто первичнаго; тогда какъ у В. Виноградова и Богомольца наоборотъ, получается вторичный спиртъ, вмѣсто третичнаго. Даже, тотъ-же самый хлораль, вмѣсто вторичнаго спирта, какъ-бы слѣдовало ожидать,далъ: у Гарцароллі — Турнлака первичный треаохлоренный алкоголь, а у Рицца триметил-карбинолъ.

Причина такого разнохарактернаго вліянія галоида до сихъ поръ еще не выяснена.

Этимъ я и закончу разсмотрѣніе дѣйствія цинк-органическихъ соединеній на галоидоангидриды кислотъ и ихъ галоидопроизводныя.

Теперь обращаюсь къ дѣйствію цинк-органическихъ соединеній на окиси двуатомныхъ углеводородныхъ радикаловъ, а послѣ этого уже разсмотрю отношеніе тѣхъ-же соединеній къ кетонамъ.

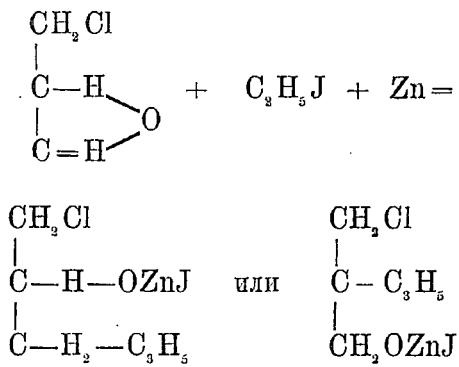
Къ окисямъ двуатомныхъ углеводородныхъ радикаловъ цинк-органическія соединенія, какъ показалъ М. Каширскій [1]), относятся индифферентно: смѣшиваются съ ними и отгонкой могутъ быть отдѣлены одно вещество отъ другаго неизмѣнившимся. Но интересно было знать какъ будутъ относится эти окиси къ смѣси іодистаго аллила и цинка, такъ какъ смѣсь упомянутыхъ веществъ вступаетъ въ реакцію съ такими органическими веществами, на которыя цинк-органическія соединенія не дѣйствуютъ (уксусный эфиръ, кетоны).

Изслѣдованіемъ этого вопроса занялся, въ лабораторіи проф. А. М. Зайцева, сначала г. Садовенъ (неокончившій работы) а потомъ М. И. Лопаткинъ [2]).

---

[1]) Ж. Р. Х. Общ. XIII. 76, см. примѣчаніе.
[2]) Ж. Р. Х. Общ. XV. 514.

Для опыта былъ взятъ эпихлоргидринъ — однохлоропроизводное окиси пропилена, который, какъ извѣстно, имѣетъ слѣдующее строеніе: $CH_2Cl—CH\overset{O}{=\!=}CH_2$. Предполагалось, что если означенное соединеніе вступитъ въ реакцію съ іодистымъ аллиломъ и цинкомъ, подобную той, какая имѣетъ мѣсто, согласно указанію А. М. Зайцева, при муравейномъ и уксусномъ эфирахъ, то, какъ конечный продуктъ реакціи, долженъ получиться одноохлоренный непредѣльный спиртъ. Здѣсь, однако, могутъ имѣть мѣсто два направленія реакціи, которыя выразятся слѣдующими уравненіями:



т. е. по разложеніи водой продукта реакціи можетъ получиться однохлоро-производное вторичнаго спирта, или первичнаго.

Реакція [1]) между названными веществами велась при условіяхъ, одинаковыхъ совсѣми прочими опытами при дѣйствіи JC_3H_5 и Zn.

Изъ полученнаго, при разложеніи водою, масла, спирта въ чистомъ видѣ выдѣлить не удалось, такъ какъ анализъ его показалъ примѣсь іода и только перегонка надъ хлористымъ серебромъ дала возможность получить спиртъ въ чистомъ видѣ. Опредѣленіе хлора по способу Каріуса также не дало удовлетворительныхъ результатовъ; поэтому пришлось прибѣгнуть къ сожженію вещества съ известью, при-

[1]) Ж. Р. Х. Общ. XVI, 732.

чемъ результаты оказались вполнѣ удовлетворяющими формулѣ $C_6H_{11}OCl$. Частичное свѣто-преломленіе и присоединеніе брома позволяютъ заключать, что полученный хлороспиртъ имѣетъ одну двойную связь. Окисленіе хромовой смѣсью дало въ результатѣ хлор-оксивалеріановую кислоту и муравейную; стало быть, строеніе спирта, дѣствительно, таково, какое ожидалось. Но которая изъ двухъ формулъ присуща ему, этого изслѣдователь не берется рѣшать, такъ какъ превращеніе хлор-оксивалеріановой кислоты онъ достаточно еще не изучилъ. Такимъ образомъ изъ работы М. И. Лопаткина можно заключить, что и окиси не остаются индифферентными къ C_3H_5J и Zn, а вступаютъ съ ними въ реакцію подобно муравейному и уксусному эфирамъ.

Вопросъ объ отношеніи цинк-органическихъ соединеній къ кетонамъ въ химической литтературѣ появился одновременно съ вопросомъ о дѣйствіи цинк-органическихъ соединеній на альдегиды.

Именно въ 1863 году Ритъ и Бейльштейнъ [1]) изслѣдовали дѣйствіе цинкэтила на ацетонъ.

Реакція производилась ими при избыткѣ ацетона и при нагрѣваніи. По окончаніи реакціи непрореагировавшій ацетонъ отгонялся, а продуктъ реакціи разлагался водою съ примѣсью сѣрной кислоты. На поверхности воды всплывало масло обладающее сильнымъ мятнымъ запахомъ.

При перегонкѣ этого масла термометръ показывалъ 110°C. когда упали первыя капли и постепенно поднялся до 300°C. Анализы фракцій съ точкой кипѣнія 210°—240°C и 290°—300°C дали почти тѣжецифры, а именно: C = 79,4% — 79,1%, H = 10,8% — 10,1%. Такъ что полученное масло предсавляетъ одно вещество, которое изслѣдователи считаютъ идентичнымъ съ форономъ, полученнымъ Fittig'омъ при дѣйствіи на ацетонъ ѣдкой извести.

Образованіе форона объясняется ими водуотнимающимъ дѣйствіемъ цинкэтила и можетъ быть выражено, по ихъ мнѣнію, слѣдующимъ уравненіемъ:

$3C_3H_6O - 2H_2O = C_9H_{14}O$, а при дѣйствіи цинкэтила:

$3\,C_3H_6O + Zn(C_2H_5)_2 = C_9H_{14}O + Zn(OH)_2 + 2\,C_2H_6$

---

[1]) Ann. Chem. Pharm. 126, 241.

А. М. Бутлеровъ, [1]) отыскивая причину образованія третичнаго бутильнаго алкоголя при дѣйствіи цинкметила на фосгенъ и изучая, для этой цѣли, дѣйствіе цинкметила на ацетонъ, нашелъ, что при обыкновенной температурѣ цинкметилъ на ацетонъ дѣйствуетъ довольно медленно; при нагрѣваніи же довольно быстро.

Продуктъ реакціи представляетъ бѣлую, просвѣчивающую, аморфную массу (которую онъ принимаетъ за окись цинка) и маслообразное непріятно пахучее вещество, которое, по всей вѣроятности, представляетъ углеводородъ. На основаніи этихъ данныхъ изслѣдователь тоже склоненъ принять, что цинк-метилъ дѣйствуетъ на ацетонъ водуотнимающимъ образомъ.

Съ этого времени вопросъ о дѣйствіи цинк-органическихъ соединеній на кетоны долго не затрогивался и только 12 лѣтъ спустя Д. Павловъ [2]) повторилъ опыты надъ дѣйствіемъ цинкметила и цинкэтила на ацетонъ.

Д. Павловъ также замѣтилъ, что цинкэтилъ на ацетонъ дѣйствуетъ при нагрѣваніи очень энергично, такъ что и охлажденіе уже не въ состояніи остановить разъ начавшуюся реакцію. Продуктъ реакціи представляетъ скорозастывающую смолообразную массу, которая, по разложеніи водой, выдѣляетъ много гидроокиси цинка и сильно окрашенное масло. Масло это обладаетъ запахомъ продуктовъ уплотнѣнія ацетона.

Выдѣленіе газовъ, во время разложенія водою, не значительно. Масло, промытое водой и высушенное на сплавленномъ поташѣ закипало около 110°C затѣмъ термометръ постепенно поднимался до 300°C.

Повторными перегонками удалось выдѣлить фракцію съ точкой кипѣнія 128—133°C обладающую запахомъ окиси мезитила. Анализъ іодо-производнаго этого вещества далъ цифры хорошо согласующіеся съ формулой $C_6H_{11}J$. Форона получить въ чистомъ видѣ не удалось.

Реакція, произведенная при охлажденіи, въ результатѣ дала тотъ же продуктъ, только окиси мезитила оказалось больше относительно всей массы продуктовъ уплотнѣнія.

---

[1]) Zeitschr. Chem. Pharm. 1864, 385.
[2]) Ж. Р. Х. Общ. VIII, 315.

Цинкметилъ дѣйствуетъ на ацетонъ болѣе энергично: даже при обыкновенной температурѣ, черезъ $^1/_4$ часа по прилитіи ацетона къ цинкметилу, смѣсь превращается въ студенистую массу, а черезъ недѣлю совершенно затвердѣваетъ. Разложеніе водою идетъ трудно даже необходимо было прибавить соляной кислоты чтобы выдѣлить все масло. Масло по точкѣ кипѣнія, оказалось вполнѣ тождественнымъ съ полученнымъ при опытахъ съ цинк-этиломъ: анализъ фракціи съ точкой кипѣнія 128°—133С°, обработанной HJ также далъ цыфры, подходящія къ формулѣ $C_6H_{11}COJ$. Форона получить также не удалось.

Изъ этихъ опытовъ видно, что цинк-метилъ и цинк-этилъ при различныхъ условіяхъ дѣйствуютъ всегда въ одномъ и томъ-же направленіи, а именно водуотнимающимъ образомъ.

Реакція эта можетъ быть выражена такимъ уравненіемъ.

$$2\,C_3H_6O + ZnR_2 = C_6H_{10}O + 2\,RH + ZnO.$$

Но не одинъ ацетонъ способенъ уплотняться отъ дѣйствія цинкалкиловъ, какъ это показали изслѣдованія того-же Д. Павлова.

Метил-этил-кетонъ, по видимому, также способенъ давать продукты уплотнѣнія съ формулой $C_8H_{14}O$, потому что названный аналогъ окиси мезитила полученъ былъ изслѣдователемъ вмѣстѣ съ метил-этил-кетономъ при реакціи цинкметила на хлористый пропіонилъ.

Вмѣстѣ съ метил-изопропил-кетономъ, при реакціи хлористаго изобутирила съ цинкметиломъ полученъ, какъ побочный продуктъ $C_{10}H_{18}O$, который, очевидно, есть продуктъ уплотнѣнія метил-изо пропил-кетона. При приготовленіи метил-изобутил-карбинола рядомъ съ метил-изобутилкетономъ получается и продуктъ его уплотнѣнія.

Такимъ образомъ всѣ эти опыты приводятъ къ тому заключенію, что, если не всѣ кетоны, то, по крайней мѣрѣ, содержащіе метильную группу, реагируя съ цинк-органическими соединеніями даютъ лишь продукты уплотнѣнія, вступать же въ реакцію съ образованіемъ „цинк-моно-алкилалкоголята“, неспособны, а потому означенные кетоны не могутъ служить для полученія изъ нихъ третичныхъ алкоголей

синтетическимъ путемъ, какъ это можно было предположить по аналогіи съ альдегидами.

Иначе относится къ кетонамъ смѣсь цинка и іодистаго аллила. Здѣсь, по изслѣдованіямъ А. М. и М. М. Зайцевыхъ [1]) получаются, какъ конечные продукты, непредѣльные третичные спирты.

Первый опытъ произведенъ былъ указанными изслѣдователями надъ дѣйствіемъ цинка и іодистаго аллила на ацетонъ.

Результатомъ этой реакціи полученъ былъ алкоголь оказавшійся аллил-диметил-карбинолъ. Для реакціи бралось на 1 ч. ацетона 1 ч. іодистаго аллила. При разложеніи продукта реакціи водой выдѣленія газовъ не замѣчалось. Полученное и высушенное на сплавленномъ поташѣ масло выдѣлило при перегонкѣ, какъ главныя фракціи: 1) 50°—100°С и 2) 115° - 125°С. Послѣдняя порція, вновь высушенная на баритѣ раздѣлилась на слѣдующія три фракціи: 115°—118°С; 118°—119°С и 119°—121°С.

Средняя фракція была самая большая и анализъ ея далъ цыфры близко подходящія къ формулѣ $C_6H_{12}O$. Нисшія порціи представляютъ смѣсь безводнаго аллил-диметил-карбинола съ его гидратомъ. (Высшіе побочные продукты съ точкой кипѣнія 165—185°С подробно изслѣдованы. В. Діевымъ [2]). Оказывается, что своимъ происхожденіемъ они обязаны іодистому изопропилу, который является всегда, какъ постоянная примѣсь къ іодистому аллилу.) Бромо-производныя и ацетильныя производныя аллил-диметил-карбинола а также и реакція окисленія этого спирта приводятъ изслѣдователей къ тому заключенію, что полученный ими алкоголь „есть третичный изъ ряда $C_nH_{2n-1}OH$, содержащій въ составѣ радикалъ аллилъ (C_3H_5) съ тѣмъ же строеніемъ, съ какимъ онъ входитъ въ JC_3H_5, а потому можетъ быть названъ аллил-диметил-карбиноломъ и ему можно приписать слѣдующую формулу строенія $\begin{matrix}CH_3\\CH_3\end{matrix}>C(OH)-CH_2-CH=CH_2$“.

Въ данномъ случаѣ реакція образованія цинк-органическихъ соединеній, дающихъ, по разложеніи водою, третичные спирты, различна отъ той, которую мы имѣемъ при

---

[1]) **Ж. Р. Ф. Общ. VIII, 363.**
[2]) **Ж. Р. Ф. Общ. XV, 113.**

дѣйствіи Zn и JR на муравейный эфиръ. Различіе здѣсь заключается въ томъ, что составъ цинк-органическихъ соединеній, распадающихся подъ вліяніемъ воды на алкоголь и другіе продукты, не одинаковъ. Проф. А. М. Зайцевъ [1]) объясняетъ ходъ реакціи такимъ образомъ: іодистый аллилъ реагируя съ цинкомъ, образуетъ соединеніе $JZn\,C_3H_5$, которое распадаясь на ZnJ и C_3H_5, присоединяется уже къ кетону такимъ образомъ, что (JZn) связывается съ кислороднымъ атомомъ, а C_3H_5 присоединяется къ углю. Такимъ образомъ и получается соединеніе состава $\begin{matrix}CH_3\\CH_3\end{matrix}\!>\!C\!<\!\begin{matrix}O—JZn\\C_3H_5,\end{matrix}$ которое, по разложеніи водой и дастъ третичный спиртъ.

Весь ходъ реакціи между кетонами, цинкомъ и іодистымъ аллиломъ можетъ быть выраженъ слѣдующими уравненіями:

$$\begin{matrix}CH_3\\CH_3\end{matrix}\!>\!CO + Zn + JC_3H_5 = \begin{matrix}CH_3\\CH_3\end{matrix}\!>\!C\!<\!\begin{matrix}OZnJ\\C_3H_5\end{matrix};$$

$$\begin{matrix}CH_3\\CH_3\end{matrix}\!>\!C\!<\!\begin{matrix}OZnJ\\C_3H_5\end{matrix} + H_2O = \begin{matrix}CH_3\\CH_3\end{matrix}\!>\!C\!<\!\begin{matrix}OH\\C_3H_5\end{matrix} + JZn(OH).$$

Еслибы реакція шла также, какъ и при дѣйствіи Zn и JR на муравейный эфиръ, т. е. образовался-бы $Zn\,(C_3H_5)_2$, который и присоединялся-бы къ кетону, то, при разложеніи продукта реакціи водою, долженъ бы выдѣляться пропиленъ, что видно изъ слѣдующихъ уравненій:

$$\begin{matrix}CH_3\\CH_3\end{matrix}\!>\!CO + 2\,JC_3H_5 + 2Zn = \begin{matrix}CH_3\\CH_3\end{matrix}\!>\!C\!<\!\begin{matrix}OZnC_3H_5\\C_3H_5\end{matrix} + ZnJ_2;$$

$$\begin{matrix}CH_3\\CH_3\end{matrix}\!>\!C\!<\!\begin{matrix}OZnC_3H_5\\C_3H_5\end{matrix} \quad 2\,H_2O =$$

$$\begin{matrix}CH_3\\CH_3\end{matrix}\!>\!C\!<\!\begin{matrix}OH\\C_3H_5\end{matrix} + Zn(OH)_2 + C_3H_6$$

---

[1]) Ж. Р. Х. Общ. IX, 17.

Выдѣленія же пропилена на самомъ дѣлѣ не наблюдается; слѣдовательно, съ кетонами реагируетъ, дѣйствительно, $JZn\,C_3H_5$, а не $Zn\,(C_3H_5)_2$ т. е. также, какъ это происходитъ при щавелевомъ и уксусномъ эфирахъ.

Чтобы обобщить реакцію полученія третичныхъ непредѣльныхъ алкоголей дѣйствіемъ Zn и C_3H_5J на кетоны, въ лабораторіи А. М. Зайцева былъ произведенъ рядъ изслѣдованій въ этомъ направленіи. П. М. и А. М. Зайцевы [1]) получили, дѣйствуя JC_3H_5 и Zn на $(C_3H_7)_2=CO$, аллил-дипропил-карбинолъ; диэтил-кетонъ [2]) при подобной-же реакціи далъ аллил-диэтил-карбинолъ и т. д. [3]).

Такимъ образомъ, благодаря вышеприведеннымъ изслѣдованіямъ, реакція между кетонами, іодистымъ аллиломъ и цинкомъ можетъ считаться, общею для полученія третичныхъ алкоголей ряда $C_nH_{2n-1}OH$.

Опыты, произведенные въ лабораторіи А. М. Зайцева, показали, что при дѣйствіи на цинкъ смѣси ацетона или метил-этил-кетона съ предѣльными іодистыми алкилами, не получаются цинк-органическія соединенія могущія дать третичный спиртъ, подобно тому, какъ это происходитъ при іодистомъ аллилѣ, а получаются лишь, какъ исключительные продукты реакціи, продукты уплотнѣнія этихъ кетоновъ.

Стало-быть, цинкъ и іодистый алкилъ дѣйствуетъ на вышеупомянутые кетоны также, какъ и $Zn(R)_2$.

Между тѣмъ опыты съ кетонами, несодержащими метильной группы, дали положительные результаты, т. е. при дѣйствіи на такіе кетоны іодистыхъ алкиловъ и цинка получились сложныя цинк-органическія соединенія, которыя, по разложеніи водой, дали третичные спирты.

Такимъ образомъ синтезированъ былъ А. М. Зайцевымъ и А. Чеботаревымъ [4]) этил-дипропил-карбинолъ—дѣйствіемъ смѣси іодистаго этила и цинка на бутиронъ. Выдѣленіе газовъ, при разложеніи продукта реакціи водою, было довольно значительное. (Реакція велась при тѣхъ же условіяхъ, какъ и ранѣе, при дѣйствіи $J\,C_3H_5$ и Zn). Масло,

---

[1]) Ж. Р. Х. Общ. X, 339.
[2]) А. Широковъ и А. М. Зайцевъ. Ж. Р. Х. Общ. X, 398.
[3]) Ж. Р. Х. Общ. XI, 400, XIII, 37.
[4]) Ж. Р. Х. Общ. XVII, 517.

полученное послѣ разложенія водою, перегнано было съ дефлегматоромъ. Анализъ фракціи, съ точкой кипѣній 176°—178° далъ цифры, согласующіяся съ формулой $C_9H_{19}OH$. Изъ этого алкоголя приготовленъ былъ уксусный эфиръ. При окисленіи этил-дипропил-карбинола, образуются кислоты: угольная, уксусная, пропіоновая и бутириновая.

При тѣхъ-же самыхъ условіяхъ реакціи, дѣйствіемъ цинка на смѣсь бутирона и іодистаго метила А. М. Зайцевымъ и А. Горталовымъ [1]) полученъ былъ метил-дипропилкарбинолъ. Точно такимъ-же способомъ полученъ былъ триэтил-карбинолъ [2]).

Изслѣдователи предполагаютъ, что здѣсь реакція идетъ точно также, какъ и при синтезѣ вторичныхъ алкоголей дѣйствіемъ цинк-органическихъ соединеній на альдегиды и муравейный эфиръ. Сначала образуется цинк-органическое соединеніе $Zn(R)_2$, которое и дѣйствуетъ уже на кислородъ кетона такимъ образомъ, что $(ZnR)'$ присоединяется къ кислороду, а R къ углеродному атому. Въ результатѣ получается сложное цинк-органическое соединеніе, дающее по разложеніи водою, третичный спиртъ.

Весь ходъ реакціи можетъ быть выраженъ слѣдующими уравненіями:

$$\begin{matrix}R\\R\end{matrix}\!\!<\!CO + 2\,Zn + 2\,J\,R = \begin{matrix}R\\R\end{matrix}\!\!>\!C\!<\!\begin{matrix}OZnR\\R\end{matrix} + ZnJ_2;$$

$$\begin{matrix}R\\R\end{matrix}\!\!>\!C\!<\!\begin{matrix}OZnR\\R\end{matrix} + 2H_2O = \begin{matrix}R\\R\end{matrix}\!\!>\!C\!<\!\begin{matrix}OH\\R\end{matrix} + RH + Zn(OH)_2.$$

Особый интересъ представляетъ реакція іодистаго пропила и цинка на бутиронъ, такъ какъ попытка А., Щербакова [3]) получить трипропил-карбинолъ не увѣнчалась успѣхомъ. Реакція C_3H_7J и Zn на бутиронъ произведена была Д. Устиновымъ. Оказывается, что и здѣсь вмѣсто третичнаго спирта получается лишь дипропил-карбинолъ; слѣдовательно, и въ данномъ случаѣ также, какъ и при дѣйствіи цинкпропила на хлористый бутирилъ, происходитъ распаде-

---

[1]) Ж. Р. Х. Общ. XVII, 524.
[2]) С. Баратаевъ. Ж. Р. Х. Общ. XVII, 498.
[3]) Ж. Р. Х. Общ. XIII, 343.

ніе пропила на пропиленъ и водородъ, причемъ первый выдѣляется въ свободномъ видѣ, а второй присоединяется къ углю сложнаго цинк-органическаго соединенія.

Въ результатѣ и получается цинкмоноалкил-алкоголятъ вторичнаго спирта, который, подъ вліяніемъ воды и дастъ вторичный алкоголь.

Сопоставляя съ одной стороны опыты Рита и Бейльштейна, А. М. Бутлерова, Д. Павлова и др., а съ другой, только что упомянутые опыты Казанской лабораторіи проф. А. М. Зайцева, можно сдѣлать тотъ выводъ, что съ цинкорганическими соединеніями способны вступать въ реакцію съ образованіемъ "цинкмоноалкил-алкоголята" только такіе кетоны, которые не содержатъ метильной группы (связанной съ карбониломъ); такъ какъ кетоны, содержащіе $(CH_3)'$ обладаютъ способностію скорѣе уплотняться, чѣмъ вступать въ вышеуказанную реакцію Но можно также предположить, что реакція полученія предѣльныхъ третичныхъ спиртовъ сходна съ реакціею полученія непредѣльныхъ третичныхъ алкоголей, т. е. что и предѣльные іодистые алкилы реагируютъ съ кетонами въ видѣ соединенія формулы JZnR, аналогичнаго іодистому цинкаллилу.

Такъ что реакція образованія предѣльныхъ третичныхъ алкоголей при дѣйствіи JR и Zn на „неметильные" кетоны выразится слѣдующимъ уравненіемъ:

$$\begin{matrix} R \\ R \end{matrix}\!\!<\!CO + Zn + JR = \begin{matrix} R \\ R \end{matrix}\!\!>\!C\!<\!\begin{matrix} OZnJ \\ R \end{matrix} ;$$

$$\begin{matrix} R \\ R \end{matrix}\!\!>\!C\!<\!\begin{matrix} OZnJ \\ R \end{matrix} + H_2O = \begin{matrix} R \\ R \end{matrix}\!\!>\!C\!<\!\begin{matrix} OH \\ R \end{matrix} + JZn(OH).$$

Чтобы рѣшить, которое изъ этихъ двухъ предположеній справедливо, я и предпринялъ изслѣдованіе реакціи цинк-этила на бутиронъ—кетонъ, несодержащій радикала (CH_3), такъ какъ до сихъ поръ съ подобными котонами реакція непосредственно съ цинкалкилами не была изслѣдована.

Къ описанію самыхъ опытовъ и ихъ результатовъ я теперь и приступаю.

Опытныя данныя.

Бутиронъ приготовленъ былъ мною сухой перегонкой бутириноваго кальція.

Для реакціи взята была фракція съ точкой кипѣнія 144°—145°С.

Цинкэтилъ приготовлялся прямо нагрѣваніемъ іодистаго этила съ сухимъ, мелкозернепымъ цинкомъ, по способу Е. Е. Вагнера [1]).

Опытъ первый.

Къ полученному цинкэтилу въ количествѣ 20 гр. приливался, при охлажденіи, черезъ воронку съ краномъ, по каплямъ бутиронъ, взятый въ соотвѣтственномъ количествѣ, расчитывая частица на частицу. Во время приливанія бутирона никакихъ особенныхъ явленій не замѣчалось. Послѣ того, какъ прилитъ былъ весь бутиронъ, колба со смѣсью оставлена была стоять при обыкновенной температурѣ. На другой день стоянія начали, изрѣдка, выдѣляться пузырьки газа, но въ крайне незначительномъ количествѣ. Дней черезъ пять колба помѣщена была въ котелокъ съ водой и здѣсь нагрѣвалась, сначала слабо, а потомъ до кипѣнія воды въ теченіе 8—9 часовъ.

Послѣ сего смѣсь, значительно загустѣвшая, вынесена была на холодъ, гдѣ она уже окончательно затвердѣла. Продуктъ реакціи разложенъ былъ ледяной водой, причемъ вода сразу въ большомъ количествѣ приливалась въ колбу.

Тотчасъ-же начиналась разложеніе, сопровождавшееся сильнымъ выдѣленіемъ газа.

Для растворенія окиси цинка прилита была слабая сѣрная кислота. Въ то-же время на поверхности воды показался слой масла, который и отогнанъ былъ на песчаной банѣ.

Полученное масло, въ количествѣ 12 гр., высушенное на сплавленномъ поташѣ, подвергнуто было фракціонированной перегонкѣ.

---

[1]) Ж. Р. Х. Общ. XVI, 346, см. примѣчаніе.

Закипало оно около 100°С и до 185°С перегонялось почти безъ остатка, причемъ большая часть переходила до 165°С. Такъ какъ перегонка съ дефлегматоромъ г. Глинскаго при такихъ малыхъ количествахъ крайне затруднительна, то я пока и оставилъ фракціонировку съ тѣмъ, чтобы сдѣлать новый опытъ и, полученное вновь, масло присоединить сюда-же.

Опытъ второй.

На этотъ разъ условія реакціи были нѣсколько видоизмѣнены: цинкэтилъ прямо отгонялся въ колбу съ бутиромъ, взятомъ въ количествѣ 30 гр. Но, на этотъ разъ, отгонъ цинк-этила былъ неудаченъ, такъ какъ колба, изъ которой отгонялся цинкэтилъ, лопнула и всего успѣло отогнаться лишь 24 гр. цинкэтила, такъ что реакція въ данномъ опытѣ происходила при избыткѣ бутирона. Смѣсь стояла съ недѣлю при обыкновенной температурѣ, послѣ чего также, какъ и въ первомъ опытѣ, нагрѣвалась въ теченіе 10—11 часовъ. На этотъ разъ затвердѣніе произошло при самомъ нагрѣваніи, такъ что выносъ на холодъ оказался излишнимъ. Затвердѣвшая масса разлагалась водою со льдомъ также, какъ и въ предыдущій разъ. Разложеніе шло очень медленно, такъ что массу приходилось размѣшивать стеклянной палочкой, чтобы сдѣлать ее болѣе доступною водѣ. Выдѣленіе-же газовъ довольно значительное.

По окончаніи разложенія прилита была сѣрная кислота для растворенія окиси цинка. Выдѣлившееся на поверхности воды масло отогнано было на песчаной банѣ. Сыраго продукта получилось 27 гр. (Значительно болѣе, чѣмъ въ предыдущій разъ).

Высушенное на сплавленномъ поташѣ, масло подвергнуто было перегонкѣ съ дефлегматоромъ, причемъ оно раздѣлилось на 2 порціи: 1) съ точкой кипѣнія до 165°С(18 гр.) и 2) отъ 165° до 185°С (7 гр.). Къ этимъ фракціямъ присоединено было масло, полученное ранѣе и все вновь подвергнуто перегонкѣ. На этотъ разъ тутъ въ термометрѣ особенно долго остонавливалась на 138°, 141° и 144°С послѣ чего равномѣрно поднялась (довольно скоро) до 205°С. Такъ что какой либо постоянной точки кипѣнія не замѣчалось; поэтому собраны были свѣдующія порціи:

1) до 145°; 2) 145° — 155°; 3) 155° — 165° 4) 165° — 185° и 5) 185° — 205°. Изъ нихъ самая большая была съ точк. кип. до 145°; затѣмъ 145° — 155°, а слѣдующія порціи были уже весьма незначительны. Желая еще болѣе имѣть подъ руками масла, я еще сдѣлалъ опытъ.

Опытъ третій.

Условія реакціи соблюдены были тѣ-же, что и въ первомъ опытѣ, но на этотъ разъ взято 70 гр. цинкэтила. Колба со смѣсью оставалась стоять на 2 недѣли. Послѣ двѣнадцати-часоваго нагрѣванія смѣсь разлагалась водою со льдомъ.

Масло, высушенное на сплавленномъ поташѣ, (59 гр.) перегнано было съ дефлегматоромъ.

Главная порція перешла при 141°—144°С; затѣмъ, меньшая при 144°—165°С и самая малая при 165°—185°С. Здѣсь также, какъ и ранѣе термометръ послѣ 144° поднимался постепенно, нигдѣ не останавливаясь, поэтому и пришлось собирать порціи въ довольно большихъ предѣлахъ. Къ этому маслу, присоединено было и масло, полученное въ 1-й 2-й опыты и все снова нѣсколько разъ фракціонировалось. Результатомъ повторныхъ перегонокъ было то, что почти все масло переходило въ предѣлахъ 141°—147°С.

Интересно было рѣшить вопросъ: имѣется-ли въ полученномъ маслѣ чистый бутиронъ, или-же съ примѣсью углеводорода, который могъ получиться изъ этил-дипропил-карбинола подъ вліяніемъ непрореагировавшаго цинкэтила. Такъ какъ точки кипѣнія этихъ соединеній близки, то можно было предполагать, что масло это состоитъ изъ смѣси вышеупомянутыхъ веществъ. Анализъ фракціи съ точкой кипѣнія 147° — 150°С далъ слѣдующіе результаты: О, 1635 гр. вещества дали:

О, 4425 гр. CO_2 и О, 1865 гр. H_2O что составитъ

въ % %	—	найдено:	треб. для. $(C_3H_7)_2$ CO
C	=	73, 81%	73, 68%
H	=	12, 67%	12, 28%

Анализъ показалъ, такимъ образомъ, что и въ этой фракціи находится почти чистый бутиронъ и только развѣ самое незначительное количество веществъ, содержащихъ

болѣе углерода, которые, во всякомъ случаѣ, не могутъ считаться существенными продуктами реакціи. (Можетъ быть отчасти образуются продукты уплотнѣнія).

Такимъ образомъ эти опыты показываютъ, что цинкэтилъ съ бутирономъ не реагируютъ въ томъ-же направленіи, какъ это происходитъ при дѣйствіи на бутиронъ цинка и іодистаго этила.

Не играетъ ли здѣсь какой нибудь роли іодистый этилъ, и цинкъ? Не имѣютъ ли они, такъ сказать, каталитическаго значенія при образованіи „цинкмоно-этил-алкоголята“?

Вотъ вопросы, которые явились послѣ вышеизложенныхъ опытовъ и рѣшеніе которыхъ мнѣ казалось необходимымъ.

Вопросы эти я попытался разрѣшить слѣдующимъ опытомъ: въ колбу, служащую пріемникомъ при отгонѣ цинкэтила, помѣщено было 5 гр. сухихъ цинковыхъ опилокъ и 20 гр. іодистаго этила. Затѣмъ, когда цинкэтилъ былъ отогнанъ (въ количествѣ 54 грм)., черезъ воронку съ краномъ приливался бутиронъ.

Смѣсь эта оставлена была стоять въ теченіе 10 дней, а затѣмъ нагрѣвалась, какъ и въ предыдущихъ опытахъ. Во время стоянія замѣчалось легкое выдѣленіе газовъ. На этотъ разъ смѣсь не затвердѣвала, а представляла медоподобную массу. Разложеніе водой шло довольно энергично; выдѣленіе газовъ также было довольно сильное. Масла получено 42 грм.

При перегонкѣ съ дефлегматоромъ оно было раздѣлено на слѣдующія фракціи: 4) до 150°C 2) 150° — 165°C и наконецъ выше 165°C.

Болѣе всѣхъ была порція переходящая до 150°C. И здѣсь также, вѣроятно, находится бутиронъ, такъ какъ эта порція по запаху и виду совершенно одинакова съ предыдущими порціями такой-же точки кипѣнія.

Въ данномъ опытѣ, однако и выше 165°C порція довольно значительная, сравнительно съ прежними опытами, такъ что безъ труда удалось выдѣлить фракцію съ точкой кипѣнія 170°—180°C, а изъ этой въ свою очередь съ точк. кип. 174° — 180°C. Однако анализъ послѣдней фракціи далъ неудовлетворительные результаты, а именно: 62, 07% C и 12,58% H; тогда какъ для формулы $(C_3H_7)_2=C—(OH)—C_3H_5$ тресуется 75% C и 13, 81%—H.

Очевидно, что въ данномъ случаѣ, если и образовался спиртъ, то въ количествѣ пропорціональномъ взятому въ реакцію іодистому этилу и цинку. Слѣдовательно, іодистый этилъ и цинкъ каталитическаго значенія не имѣютъ, а сами принимаютъ непосредственное участіе при образованіи спирта, т. е. необходимо допустить, что реакція между кетонами, JR и Zn идетъ также, какъ и при дѣйствіи на кетоны цинка и іодистаго аллила [1]). Если такое допущеніе справедливо, то бутиронъ, реагируя съ $JZn\,C_2H_5$, долженъ дать, какъ конечный продуктъ этил-дипропил-карбинолъ.

Съ цѣлью рѣшить этотъ вопросъ, мною произведенъ слѣдующій опытъ: въ колбу помѣщался мелкозерненый цинкъ (500 гр.), къ которому примѣшано было небольшое количество цинк-натрія (20 гр.), затѣмъ къ этой смѣси былъ прилитъ іодистый этилъ (230 гр.).

Колба снабженная обратнопоставленнымъ холодильникомъ нагрѣвалась на водяной банѣ въ теченіе 11 часовъ.

По истеченіи этого времени жидкое содержимое колбы сплошь закристаллизовалось.

Кристаллы эти, какъ извѣстно, представляютъ вещество состава $ZnJC_2H_5$. Къ этой то кристаллической массѣ мною прилитъ былъ бутиронъ. По мѣрѣ соприкосновенія бутирона съ кристаллами замѣтно было разгрѣваніе и выдѣленіе газовъ. Но проникнуть внутрь, до дна, бутиронъ не могъ, такъ какъ кристаллы вмѣстѣ съ цинкомъ представляютъ твердую и непористую массу.

Для того чтобы привести вещества въ соприкосновеніе, приходилось смѣсь нагрѣвать и перемѣшивать лучиной.

Послѣ того, какъ такое перемѣшиваніе произведено было 3 или 4 раза смѣсь представляла пористую, похожую на пемзу, массу. На воздухѣ эта масса слегка потрескивала. Такъ какъ реакція производилась въ небольшой колбѣ, то разложеніе въ ней-же производить было неудобно, поэтому пришлось колбу разбить и продуктъ реакціи небольшими кусочками вносить въ реторту съ холодной водой. При разложеніи замѣчалось выдѣленіе газовъ, но не столько сильное, какъ въ первыхъ опытахъ.

Когда весь продуктъ былъ разложенъ въ реторту прилита была сѣрная кислота для растворенія окиси цинка.

---

[2]) А. М. Зайцевъ Ж. Р. Х. Общ. IX, 17.

Затѣмъ, масло, всплывшее на поверхности воды, отгонялось, сушилось на сплавленномъ поташѣ и подвергнуто было фракціонированной перегонкѣ.

Закипало оно около 130°С а затѣмъ температура быстро поднялась до 140°С. Отъ 140° до 150° перешла большая часть масла, затѣмъ отъ 140° до 170°С термометръ поднимался довольно быстро, такъ что въ этихъ предѣлахъ получилось довольно незначительное количество масла, наконецъ, начиная съ 170° до 185° перешло довольно значительное количество. Изъ послѣдней фракціи удалось выдѣлить порцію съ точкой кипѣнія 174°—178°С причемъ термометръ дольше всего стоялъ на 176°. Анализъ порціи кипящей при 174 — 178°С далъ слѣдующіе результаты: О. 148 гр. вещества дали: О, 402 гр. CO_2 и О, 1895 гр. H_2O.; откуда въ % %.

	Найдено.	Треб. для $(C_2H_7)_2 = C—(OH)\,C_2H_5$
C =	74, 12 %	75, %.
H =	14, 22 %	13, 81 %.

Цифры эти, какъ видно, достаточно согласуются съ формулой спирта полученнаго проф. А. М. Зайцевымъ и А. Чеботаревымъ при дѣйствіи $J\,C_2H_5$ и цинка на бутиронъ.

Нижекипящіе продукты, очевидно, представляютъ непрореагировавшій бутиронъ, такъ какъ благодаря компактности массы послѣдній весь не могъ вступить во взаимодѣйствіе съ $J\,Zn\,C_2\,H_5$.

При такомъ способѣ веденія реакціи выходъ спирта, сравнительно, не великъ, поэтому способъ этотъ не можетъ быть рекомендованъ для полученія третичныхъ спиртовъ.

Тѣмъ не менѣе, мнѣ кажется, опытъ этотъ можетъ служить подтвержденіемъ справедливости мнѣнія, высказаннаго мною, относительно хода реакціи между кетонами, предѣльными іодкалкилами и цинкомъ. Въ данномъ случаѣ, очевидно, образуется изъ Zn и JR соединеніе состава JZnR, которое и присоединяется къ кетону такимъ образомъ, что (ZnJ) присоединяется къ кислородному атому, а R къ углеродному. Въ результатѣ получается соединеніе состава $R_2C\,(R)\,OZnJ$., которое по разложеніи водою дастъ третичный алкоголь.

Слѣдовательно, весь ходъ реакціи полученія третичныхъ алкоголей можетъ быть выраженъ слѣдующими уравненіями: (Наприм. для этил-дипропил-карбинола).

$$\begin{matrix} C_3H_7 \\ C_3H_7 \end{matrix} > C = O + Zn + JC_2H_5 = \begin{matrix} C_3H_7 \\ C_3H_7 \end{matrix} > C < \begin{matrix} OZnJ \\ C_2H_5 \end{matrix};$$

$$\begin{matrix} C_3H_7 \\ C_3H_7 \end{matrix} > C < \begin{matrix} OZnJ \\ C_2H_5 \end{matrix} + H_2O = \begin{matrix} C_3H_7 \\ C_3H_7 \end{matrix} > C < \begin{matrix} C-OH \\ C_2H_5 \end{matrix} + JZn(OH)$$

т. е. JC_2H_5 или вообще JR съ цинкомъ дѣйствуетъ на кетоны вполнѣ аналогично іодистому аллилу. Разница между соединеніями $JZn\,C_3H_5$ и JZnR заключается лишь въ томъ, что $JZnC_3H_5$ не способенъ уплотнять кетоны, тогда какъ предѣльные іодистые цинкалкилы, реагируя съ метильными кетонами даютъ продукты уплотнѣнія послѣднихъ.

Сопоставляя мои опыты и опыты упомянутыхъ уже ранѣе Рита и Бейльштейна проф. А. М. Бутлерова, проф. А. М. Зайцева, Д. Павлова и др. можно сдѣлать слѣдующіе общіе выводы.

1) Кетоны съ цинк-органическими соединеніями не способны вступать въ реакцію съ образованіемъ „цинк-моноалкил-алкоголята"; метильные кетоны цинк-органическими соединеніями уплотняются, прочіе-же относятся къ нимъ индифферетно, такъ какъ, по разложеніи смѣси цинк-органическаго соединенія и кетона водою, кромѣ крайне незначительнаго количества продуктовъ уплотнѣнія получается тотъ-же кетонъ не измѣнившимся.

2) Іодистые цинкалкилы (предѣльные) и Zn реагируютъ съ кетонами совершенно также, какъ и іодистый аллилъ и цинкъ, т. е. образуютъ „іодо-цинк-алкоголятъ" третичнаго спирта.

Исключеніе представляютъ метильные кетоны, которые и при этой реакціи уплотняются также, какъ и при дѣйствіи на нихъ $Zn(R)_2$.

Такимъ образомъ моя работа доказала, что цинк-органическія соединенія неспособны дѣйствовать на кислородъ

такой группы $(C=O)''$, которая связана непосредственно съ двумя углеводородными радикалами.

Такой, именно, исходъ реакціи предполагалъ и Е. Е. Вагнеръ [1]), основываясь на сравнительной способности различно положенныхъ группъ $(C=O)''$ вступать въ реакцію съ цинкорганическими соединеніями.

---

[1]) Ж. Р. Х. Общ. XVI, 349.