УЧЕНЫЯ ЗАПИСКИ

КАЗАНСКАГО УНИВЕРСИТЕТА.

ПО ОТДѢЛЕНІЮ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХЪ И МЕДИЦИНСКИХЪ НАУКЪ.

1864.

ВЫПУСКЪ II.

СОДЕРЖАНІЕ:

I. Объ интегрированіи уравненій съ частными производными перваго порядка. **В. Г. ИМШЕНЕЦКАГО.**

II. Продукты пищеваренія въ крови. **А. Я. ЩЕРБАКОВА.**

III. Сѣрная кислота и сода. **А. К. ЧУГУНОВА.**

КАЗАНЬ.

ВЪ УНИВЕРСИТЕТСКОЙ ТИПОГРАФІИ.

1865.

Digitized by Google

Digitized by Google

УЧЕНЫЯ ЗАПИСКИ

ИМПЕРАТОРСКАГО

КАЗАНСКАГО УНИВЕРСИТЕТА,

по отдѣленію физико-математическихъ и медицинскихъ наукъ.

1864.

ВЫПУСКЪ II.

КАЗАНЬ.
ВЪ УНИВЕРСИТЕТСКОЙ ТИПОГРАФІИ.
1865.

Digitized by Google

Одобрено Совѣтомъ Университета къ печатанію.

Digitized by Google

ОБЪ
ИНТЕГРИРОВАНІИ УРАВНЕНІЙ
СЪ ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВАГО ПОРЯДКА.

(*В. Г. Имшенецкаго.*)

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Теорія интегрированія уравненій общаго вида съ частными производными перваго порядка, созданная трудами первоклассныхъ геометровъ новаго времени, составляетъ наиболѣе обработанную и совершенную часть интегральнаго вычисленія. Въ исторіи развитія ея особенно замѣчателенъ тотъ фактъ, что ближайшимъ послѣдователямъ Лагранжа, положившаго основанія этой теоріи (въ 1772 г.), казалось невозможнымъ продолжать проложенный имъ путь, между тѣмъ какъ окончательные успѣхи этой теоріи снова привели ея къ началамъ Лагранжа. Пфаффъ первый избралъ новую точку зрѣнія и выходя изъ нея достигъ (въ 1814 г.) полнаго рѣшенія задачи; но его способъ, точный теоретически, оказался мало примѣнимымъ вслѣдствіе излишнихъ затрудненій, представляемыхъ послѣдовательнымъ интегрированіемъ нѣсколькихъ системъ дифференціальныхъ уравненій. Дѣйствительно Коши (въ 1819 г.) и Якоби (въ 1837 г.) показали различнымъ образомъ, и второй не зная объ открытіи перваго, что цѣль, къ которой вела теорія Пфаффа, достигается гораздо проще — полнымъ интегрированіемъ только первой изъ системъ дифференціальныхъ уравненій, встрѣчающихся въ способѣ Пфаффа. Такимъ образомъ вопросъ

Digitized by Google

казался исчерпаннымъ; однако Якоби, среди своей блестящей и плодовитой ученой дѣятельности, не оставлялъ этого предмета, усовершенствованнаго его трудами и получившаго особенный интересъ, когда изслѣдованія Гамильтона показали связь его съ интегрированіемъ уравненій динамики. Пока Якоби приготовлялъ свое новое изслѣдованіе двухъ упомянутыхъ сейчасъ вопросовъ, успѣли появиться въ свѣтъ замѣчательныя произведенія другихъ математиковъ: Ліувилля, Бертрана, Донкина, Бура и пр., относящіяся къ тѣмъ же предметамъ, результаты которыхъ частію можетъ быть облегчили трудъ германскаго математика, но вѣроятно также иногда совпадали съ его собственными открытіями. Въ этомъ отношеніи должно остановиться только на однихъ догадкахъ, потому что изслѣдованіе Якоби издано уже послѣ смерти его, на основаніи оставленныхъ имъ бумагъ, подъ редакціею г. Клебша. Предъидущее обстоятельство объясняетъ притязанія на первенство, заявленныя въ печати нѣкоторыми авторами, то относительно основныхъ теоремъ «новаго способа Якоби», то относительно основной его мысли. Но вѣроятно имя великаго геометра навсегда будетъ соединено съ теоріею, созданною по его идеѣ и имъ-же самимъ приведенною въ полный систематическій видъ, хотя бы отдѣльныя части ея и принадлежали другимъ, второстепеннымъ исполнителямъ.

Ограничиваясь здѣсь предъидущимъ краткимъ очеркомъ постепеннаго развитія вопроса, я предоставляю себѣ возвратиться къ бо́льшимъ историческимъ подробностямъ въ надлежащихъ мѣстахъ самого текста разсужденія и перехожу теперь къ общему обзору его содержанія.

Въ I-й главѣ я разсматриваю различные виды интеграловъ уравненія съ частными производными 1-го порядка и вывожу изъ полнаго интеграла особенные и общіе способомъ измѣненія произвольныхъ постоянныхъ, основываясь на свойствѣ функціональныхъ опредѣлителей.

Во II-й главѣ разсмотрѣны тѣ частные виды общаго интеграла, которые приводятъ къ уравненіямъ линейнымъ въ отношеніи частныхъ производныхъ и представленъ очеркъ теоріи интегрированія этихъ послѣднихъ, слѣдуя Лагранжу и Якоби.

Въ III-й главѣ изложена постановка общаго вопроса согласно взгляду, выраженному въ послѣднемъ произведеніи

Digitized by Google

Якоби и выведены условія интегрируемости Ліувилля и Донкина. Показавъ, что въ частномъ случаѣ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ способъ Якоби совершенно одинаковъ со способомъ Лагранжа и Шарпи, я возвращаюсь къ общему вопросу и дѣлаю первое упрощеніе въ уравненіяхъ черезъ исключеніе входящей непосредственно неизвѣстной функціи; при этомъ указаню на недостаточность употребленнаго для той-же цѣли пріема Якоби.

Изъ содержанія предъидущихъ главъ видно, что главнымъ предметомъ изученія я избралъ «новый способъ» Якоби. Вскорѣ послѣ изданія его было высказано мнѣніе печатно г. Буромъ и устно г. Бертраномъ, въ одномъ изъ его курсовъ, что аналитическому построенію своей теоріи Якоби не далъ возможной простоты. Руководствуясь этими указаніями и согласнымъ съ ними собственнымъ убѣжденіемъ, я старался въ гл. IV вывести основныя теоремы способа Якоби изъ самыхъ простыхъ началъ.

Въ V главѣ подробно объясненъ ходъ интегрированій, требуемыхъ способомъ Якоби. Сначала, чтобы представить основные пріемы въ возможно простомъ видѣ, интегрируемыя уравненія не приводятся къ наименьшему числу перемѣнныхъ; при этомъ указаны могущія встрѣтиться затрудненія и разобраны случаи, гдѣ этотъ пріемъ прилагается весьма просто. Далѣе, черезъ постепенное исключеніе излишнихъ перемѣнныхъ, теоріи способа дана надлежащая полнота и приведенъ примѣръ поясняющій ходъ вычисленій.

VI глава посвящена совокупному интегрированію уравненій съ частными производными перваго порядка. Показавъ, что для рѣшенія этого болѣе общаго вопроса задача изложенная въ предъидущихъ главахъ, представляетъ достаточныя средства для поясненія теоріи, я прилагаю ее къ вопросамъ опредѣленнымъ и неопредѣленнымъ съ частными производными 1-го порядка, приводящимъ къ совокупному интегрированію линейныхъ и нелинейныхъ уравненій. Въ заключеніе разсмотрѣнъ съ новой точки зрѣнія общій вопросъ, нелишенный интереса самъ по себѣ, о выводѣ условій непосредственной интегрируемости обыкновеннаго дифференціальнаго выраженія какого угодно порядка.

Въ главѣ VII изложена теорія интегрированія обыкновенныхъ совмѣстныхъ уравненій канонической формы; объяснена связь теоремы Пуассона относительно интеграловъ

Digitized by Google

этихъ уравненій съ основною теоремою способа Якоби и показанъ пріемъ Бертрана интегрированія уравненій динамики помощію теоремы Пуассона. Обѣ теоріи приложены къ одному и тому-же примѣру.

Наконецъ въ главѣ VIII, для дополненія обзора способовъ интегрированія уравненій съ частными производными 1-го порядка, я счелъ нелишнимъ изложить въ общемъ видѣ теорію Коши.

При изученіи предмета моего разсужденія я пользовался различными академическими изданіями, математическими журналами и отдѣльными сочиненіями, которые указаны въ надлежащихъ мѣстахъ текста. Я старался соединить въ моемъ изложеніи возможную общность съ математическою точностію и ясностію; но не могу скрыть опасенія, что строгій судъ ученой критики откроетъ многія несоблюденія этихъ трехъ условій и обнаружитъ еще другіе недостатки моей работы. Прошу въ такихъ случаяхъ принять въ оправданіе, что при первыхъ опытахъ предположенная цѣль достигается только приблизительно.

Digitized by Google

II.

§ 1. Дифференціальное уравненіе съ частными производными 1-го порядка представляетъ данное отношеніе между нѣсколькими независимыми перемѣнными, ихъ неизвѣстною функціей и ея частными производными перваго порядка.

Пусть $x_1, x_2, \ldots x_n$ означаютъ n независимыхъ перемѣнныхъ; z — ихъ неизвѣстную функцію; $p_1, p_2, \ldots p_n$ — ея частныя производныя 1-го порядка, такъ что $p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$. При этихъ означеніяхъ общій типъ упомянутыхъ уравненій представится такимъ образомъ

$$F(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0, \qquad (1)$$

разумѣя подъ знакомъ F данную функцію.

Задача интегрированія уравненія (1) состоитъ въ опредѣленіи самаго общаго выраженія функціи z, по вставкѣ котораго и его частныхъ производныхъ, уравненіе (1) приводится къ тождеству. Но прежде изложенія различныхъ способовъ интегрированія не безполезно разсмотрѣть различныя формы первообразной зависимости между перемѣнными $x_1, \ldots x_n, z$, изъ которыхъ путемъ дифференцированій и алгебраическихъ исключеній, возможно образовать одно и тоже уравненіе вида (1).

Простѣйшая форма такой зависимости есть выраженіе z, какъ явной функціи независимыхъ перемѣнныхъ,

$$z = f(x_1, x_2, \ldots x_n, a_1, a_2, \ldots a_n), \qquad (2)$$

въ которое сверхъ того входятъ n произвольныхъ постоянныхъ $a_1, \ldots a_n$. Дифференцируя по каждому изъ независимыхъ перемѣнныхъ, получимъ отсюда n уравненій вида

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad (3)$$

изъ которыхъ, въ совокупности со (2) можно исключить и величинъ $a_1, \ldots a_n$. Если полученное такимъ образомъ уравненіе съ частными

Digitized by Google

производными будетъ данное (1), тогда (2) представитъ его интегралъ. Такой интегралъ, заключающій въ своемъ выраженіи столько же произвольныхъ постоянныхъ, сколько данное уравненіе содержитъ независимыхъ перемѣнныхъ, Лагранжъ назвалъ *полнымъ*.

§ 2. Не трудно однако убѣдиться, что полный интегралъ (2) еще не представляетъ самаго общаго выраженія функціи z, могущей удовлетворить уравненіе (1). Дѣйствительно это послѣднее происходитъ изъ (2), при посредствѣ уравненій (3); и если уравненія (3) не измѣнятъ своего вида, уравненіе (2) всегда будетъ интеграломъ (1), какъ-бы мы ни объобщили первоначальныя значенія $a_1, .. a_n$. По этому предположимъ, что $a_1, .. a_n$ означаютъ функціи перемѣнныхъ $x_1, .. x_n$ и посмотримъ какія условія должны выполнять эти функціи, для того чтобы выраженія частныхъ производныхъ $p_1, .. p_n$ сохраняли свой первоначальный видъ (3).

Дифференцируя уравненіе (2) по каждому изъ перемѣнныхъ, сообразно новымъ предположеніямъ, получимъ n уравненій вида:

$$p_i = \frac{df}{dx_i} + \frac{df}{da_1}\frac{da_1}{dx_i} + \frac{df}{da_2}\frac{da_2}{dx_i} + \cdots + \frac{df}{da_n}\frac{da_n}{dx_i},$$

которыя очевидно примутъ видъ (3), если функціи $a_1, .. a_n$ выполнятъ условіе

$$\frac{df}{da_1}\frac{da_1}{dx_i} + \frac{df}{da_2}\frac{da_2}{dx_i} + \cdots + \frac{df}{da_n}\frac{da_n}{dx_i} = o, \tag{4}$$

для всѣхъ значеній i отъ 1 до n. Эти n условій представляются подъ видомъ системы линейныхъ уравненій относительно частныхъ производныхъ $\frac{df}{da_1}, .. \frac{df}{da_n}$, выключая которыя всѣ, кромѣ одной, находимъ уравненія вида

$$\frac{df}{da_i} R = o, \tag{5}$$

имѣющія мѣсто для всѣхъ значеній i отъ 1 до n.

Условія (5) можно удовлетворить двоякимъ образомъ: Во 1-хъ полагая

$$\frac{df}{da_i} = o, \tag{6}$$

для всѣхъ значеній i отъ 1 до n; мы получимъ такимъ образомъ n уравненій, достаточныхъ для опредѣленія значеній функцій $a_1, .. a_n$, по вставкѣ которыхъ во (2) функція z не будетъ заключать ничего произвольнаго въ своемъ выраженіи. Интегралъ, образуемый совокупностію уравненій (2) и (6), Лагранжъ назвалъ *особеннымъ*.

Во 2-хъ, мы можемъ удовлетворить условія (5) болѣе общимъ образомъ, полагая

$$R = o.$$

Digitized by Google

Но очевидно R есть опредѣлитель системы уравненій (4), составленный изъ n^2 элементовъ слѣдующей таблицы

$$\begin{array}{cccc} \frac{da_1}{dx_1}, & \frac{da_2}{dx_1}, & \cdots & \frac{da_n}{dx_1} \\ \frac{da_1}{dx_2}, & \frac{da_2}{dx_2}, & \cdots & \frac{da_n}{dx_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{da_1}{dx_n}, & \frac{da_2}{dx_n}, & \cdots & \frac{da_n}{dx_n}. \end{array} \qquad (A)$$

Опредѣлитель, составленный такимъ образомъ изъ частныхъ производныхъ n функцій, каждая n независимыхъ перемѣнныхъ, Якоби назвалъ *функціональнымъ* и доказалъ, что если функціональный опредѣлитель тождественно равенъ нулю, то функціи его образующія не независимы между собою, но одна или нѣкоторыя изъ нихъ должны выразиться посредствомъ остальныхъ.

§ 3. По плану, принятому въ этомъ разсужденіи, должно будетъ нѣсколько разъ опереться на эту основную теорему; поэтому считаю умѣстнымъ привести здѣсь ея доказательство, которое при томъ весьма просто.

Представимъ систему уравненій $a_1 = \varphi_1$, $a_2 = \varphi_2$, .. $a_n = \varphi_n$, выражающую a_1, a_2, .. a_n въ функціяхъ x_1, x_2, .. x_n. Помощію одного изъ нихъ, содержащаго x_1, положимъ 1-го, выразимъ это перемѣнное въ функціи a_1, x_2, .. x_n; вставивъ это выраженіе въ одно изъ остальныхъ уравненій, содержащихъ x_1 и x_2, положимъ во 2-е, выразимъ a_2 въ функціи a_1, x_2, x_3, .. x_n и отсюда x_2 выразится функціей a_1, a_2, x_3, .. x_n; вставивъ выраженія x_1 и x_2 въ одно изъ остальныхъ уравненій, содержащее сверхъ того x_3, положимъ въ 3-е, выразимъ a_3 въ функціи a_1, a_2, x_3, .. x_n и отсюда x_3 выразится функціей a_1, a_2, a_3, x_n, .. x_n. Продолжая такимъ образомъ первоначальныя выраженія a_1, a_2, .. a_n преобразуемъ въ другія, такъ что вообще a_l представится какъ функція a_1, a_2, .. a_{l-1}, x_l, x_{l+1}, .. x_n. Чтобы отличить частныя производныя первоначальныхъ выраженій a_l отъ частныхъ производныхъ преобразованныхъ выраженій, будемъ заключать послѣднія въ скобки. Такимъ образомъ будемъ имѣть

$$\frac{da_l}{dx_k} = \left(\frac{da_l}{da_1}\right)\left(\frac{da_1}{dx_k}\right) + \left(\frac{da_l}{da_2}\right)\left(\frac{da_2}{dx_k}\right) + \cdots + \cdots + \left(\frac{da_l}{da_{l-1}}\right)\left(\frac{da_{l-1}}{dx_k}\right) + \left(\frac{da_l}{dx_k}\right). \qquad (M)$$

На основаніи этой формулы заключаемъ, что опредѣлитель системы элементовъ (A) можно представить произведеніемъ опредѣлителей двухъ

Digitized by Google

другихъ системъ

$$\begin{matrix} 1 & , & 0 & , & 0 & , \ldots 0 \\ \left(\frac{da_2}{da_1}\right), & & 1 & , & 0 & , \ldots 0 \\ \left(\frac{da_3}{da_1}\right), & \left(\frac{da_3}{da_2}\right), & & & 1 & , \ldots 0 \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & \\ \left(\frac{da_n}{da_1}\right), & \left(\frac{da_n}{da_2}\right), & \left(\frac{da_n}{da_3}\right), & \ldots & & 1 \end{matrix} \qquad (B)$$

и

$$\begin{matrix} \left(\frac{da_1}{dx_1}\right), & 0 & , & 0 & , \ldots & 0 \\ \left(\frac{da_1}{dx_2}\right), & \left(\frac{da_2}{dx_2}\right), & & 0 & , \ldots & 0 \\ \left(\frac{da_1}{dx_3}\right), & \left(\frac{da_2}{dx_3}\right), & \left(\frac{da_3}{dx_3}\right), & \ldots & & 0 \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & \\ \left(\frac{da_1}{dx_n}\right), & \left(\frac{da_2}{dx_n}\right) & \left(\frac{da_3}{dx_n}\right), & \ldots & \left(\frac{da_n}{dx_n}\right). & \end{matrix} \qquad (C)$$

Дѣйствительно формула (M) показываетъ, что сумма произведеній соотвѣтствующихъ элементовъ горизонтальнаго ряда l системы (B) и горизонтальнаго ряда k системы (C) образуетъ элементъ системы (A), находящійся въ ней на пересѣченіи вертикальнаго ряда l и горизонтальнаго k. Но въ системахъ (B) и (C) элементы по одну сторону главныхъ діагоналей равны нулю, поэтому опредѣлители этихъ системъ равны соотвѣтственно произведеніямъ элементовъ главныхъ діагоналей. Слѣдовательно

$$(7) \qquad R = \left(\frac{da_1}{dx_1}\right) \cdot \left(\frac{da_2}{dx_2}\right) \cdot \left(\frac{da_3}{dx_3}\right) \cdot \cdot \left(\frac{da_{n-1}}{dx_{n-1}}\right) \cdot \left(\frac{da_n}{dx_n}\right).$$

Если опредѣлитель R тождественно равенъ нулю, тогда одинъ изъ множителей произведенія во 2-й части равенства (7) долженъ быть равенъ нулю. Но первые $n-1$ множителей этого произведенія вообще различны отъ нуля, потому что предположено, что функція a_1 содержитъ x_1, a_2 содержитъ x_2, .. a_{n-1} содержитъ x_{n-1}; поэтому послѣдній множитель $\left(\frac{da_n}{dx_n}\right)$ долженъ быть равенъ тождественно ну-

Digitized by Google

лю, т. е. послѣ описанныхъ выше послѣдовательныхъ подстановокъ, функція a_n не должна болѣе содержать x_n явнымъ образомъ, но выражаться посредствомъ однихъ $a_1, a_2, .. a_{n-1}$. Однако можетъ случиться также, что вслѣдствіе упомянутыхъ подстановокъ ни одна изъ функцій a_n, a_{n-1}, .. a_{n-k} не будетъ содержать явнымъ образомъ перемѣнныхъ x_n, x_{n-1}, .. x_{n-1}; тогда очевидно будемъ имѣть тождественно

$$\left(\frac{da_n}{dx_n}\right) = 0, \left(\frac{da_{n-1}}{dx_{n-1}}\right) = 0, \ldots \left(\frac{da_{n-k}}{dx_{n-k}}\right) = 0 \qquad (q)$$

и каждая изъ функцій a_n, a_{n-1}, .. a_{n-k} выразится посредствомъ однихъ только $a_1, a_2, .. a_{n-k-1}$.

Обратная теорема очевидна: если функціи $a_1, .. a_n$ не независимы одна отъ другихъ, но напротивъ одна a_n или нѣкоторыя изъ нихъ a_n, a_{n-1}, .. a_{n-k} могутъ быть выражены только посредствомъ остальныхъ $a_1, a_2, .. a_{n-k-1}$, тогда 1-е изъ равенствъ (q), или всѣ они имѣютъ мѣсто и поэтому опредѣлитель R тождественно равенъ нулю.

§ 4. И такъ условіе $R = 0$ можно удовлетворить самымъ общимъ образомъ, принявъ одну изъ функцій $a_1, a_2, .. a_n$ совершенно произвольною функціей всѣхъ остальныхъ, напр. полагая

$$a_n = \pi(a_1, a_2, .. a_{n-1}); \qquad (8)$$

или менѣе общимъ образомъ принявъ нѣкоторыя изъ нихъ функціями остальныхъ, напр.

$$a_n = \pi_n(a_1, a_2, .. a_{n-k-1}), \quad a_{n-1} = \pi_{n-1}(a_1, a_2, .. a_{n-k-1}), ..$$
$$a_{n-k} = \pi_{n-k}(a_1, a_2, .. a_{n-k-1}). \qquad (9)$$

Введя послѣднее предположеніе въ условія (4) и замѣчая при томъ, что для всякаго m, не большаго n и не меньшаго $n-k$, будетъ

$$\frac{da_m}{dx_i} = \frac{d\pi_m}{da_1}\frac{da_1}{dx_i} + \ldots + \frac{d\pi_m}{da_{n-k-1}}\frac{da_{n-k-1}}{dx_i},$$

приведемъ эти условія къ слѣдующему виду

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{df}{da_1} + \frac{df}{d\pi_{n-k}}\cdot\frac{d\pi_{n-k}}{da_1} + \cdots + \frac{df}{d\pi_n}\frac{d\pi_n}{da_1}\right)\frac{da_1}{dx_i} + \cdots \\ \cdots + \left(\frac{df}{da_{n-k-1}} + \frac{df}{d\pi_{n-k}}\cdot\frac{d\pi_{n-k}}{da_{n-k-1}} + \cdots \right. \\ \left. \cdots + \frac{df}{d\pi_n}\frac{d\pi_n}{da_{n-k-1}}\right)\frac{da_{n-k-1}}{dx_i}\end{aligned}\right\} = 0.$$

Умноживъ это уравненіе на dx_i и, по умноженіи, взявъ сумму

Digitized by Google

такихъ уравненій при всѣхъ значеніяхъ i отъ 1 до n, получимъ

$$\left(\frac{\partial f}{\partial a_1}+\frac{\partial f}{\partial \pi_{n-k}}\cdot\frac{\partial \pi_{n-k}}{\partial a_1}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial \pi_n}\cdot\frac{\partial \pi_n}{\partial a_1}\right)da_1+\cdots$$

$$\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial a_{n-k-1}}+\frac{\partial f}{\partial \pi_{n-k}}\cdot\frac{\partial \pi_{n-k}}{\partial a_{n-k-1}}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial \pi_n}\cdot\frac{\partial \pi_n}{\partial a_{n-k-}}\right)da_{n-k-1}=o$$

[здѣсь кстати замѣчу, что я употребляю знакъ ∂ для выраженія частнаго и d—полнаго дифференцированія].

Такъ какъ по предположенію функціи $a_1, a_2, \ldots a_{n-k-1}$ совершенно между собою независимы, то чтобы предъидущее уравненіе имѣло мѣсто при всѣхъ значеніяхъ $da_1, \ldots da_{n-k-1}$ необходимо положить

$$(10)\qquad \frac{\partial f}{\partial a_1}+\frac{\partial f}{\partial \pi_{n-k}}\cdot\frac{\partial \pi_{n-k}}{\partial a_i}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial \pi_n}\cdot\frac{\partial \pi_n}{\partial a_i}=o$$

при всѣхъ значеніяхъ i отъ 1 до $n-k-1$.

При данномъ видѣ произвольныхъ функцій $\pi_{n-k}, \ldots \pi_n$ изъ уравненій (10) можно опредѣлить значенія функцій $a_1, \ldots a_{n-k-1}$, затѣмъ помощію уравненій (9)—значенія функцій $a_{n-k}, \ldots a_n$; послѣ чего уравненіе (2) дастъ совершенно опредѣленное выраженіе функціи z въ перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_n$. Такимъ образомъ система уравненій (2), (9) и (10) представляетъ интегралъ уравненія (1). Въ этомъ случаѣ выраженіе z (2) заключаетъ $k+1$ произвольныхъ функцій отъ $n-k-1$ данныхъ функцій и чѣмъ менѣе число k, тѣмъ общнѣе будетъ выраженіе z; при $k=o$ оно достигаетъ наибольшей общности. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ $k+1$ уравненій (9) замѣнятся однимъ (8) и уравненія (10) замѣнятся уравненіями

$$(11)\qquad \frac{\partial f}{\partial a_i}+\frac{\partial f}{\partial \pi}\cdot\frac{\partial \pi}{\partial a_i}=o,$$

имѣющими мѣсто при всѣхъ значеніяхъ i отъ 1 до $n-1$.

Интегралъ, составляемый совокупностію уравненій (2) (8) и (11) Лагранжъ назвалъ *общимъ*.

§ 5. Въ дополненіе предъидущаго изслѣдованія формъ функцій, могущихъ быть интегралами уравненія съ частными производными перваго порядка, докажемъ, что всякая данная функція z перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$, удовлетворяющая уравненіе (1), заключается, какъ частный случай, въ системѣ его рѣшеній, состоящей изъ полнаго интеграла и произведенныхъ изъ него особеннаго и общаго.

Дѣйствительно, пусть

$$(12)\qquad z=\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

будетъ данная функція, удовлетворяющая уравненіе

$$(1)\qquad F(x_1, \ldots x_n, z, p_1, \ldots p_n)=o$$

Digitized by Google

и $$z = f(x_1, .. x_n, a_1, .. a_n), \qquad (2)$$

представляетъ полный его интегралъ.

Написавъ систему n уравненій

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \qquad (13)$$

можно вообще опредѣлить значенія n величинъ $a_1, .. a_n$, постоянныя или перемѣнныя, повѣряющія эти уравненія; эти значенія необходимо удовлетворятъ также уравненіе

$$f = \varphi. \qquad (14)$$

Въ самомъ дѣлѣ, представивъ уравненіе (1) подъ видомъ

$$z = F(x_1, .. x_n, p_1, .. p_n),$$

по вставкѣ двухъ выраженій z (12) и (2) обратимъ его въ тождества

$$\varphi = F\left(x_1, .. x_n \ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, .. \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right) \qquad (15)$$

и $$f = F\left(x_1, .. x_n, \frac{\partial f}{\partial x_1}, .. \frac{\partial f}{\partial x_n}\right). \qquad (16)$$

Послѣднее изъ нихъ имѣетъ мѣсто при какихъ угодно значеніяхъ $a_1, .. a_n$; слѣдовательно и при тѣхъ, которыя выведены изъ уравненій (13): но по вставкѣ этихъ послѣднихъ 2-я часть (16) сдѣлается совершенно одинаковою со 2-й частью (15); поэтому и первыя части ихъ будутъ тождественно равны, т. е. $f = \varphi$. Точно также доказывается вообще, что если найдены значенія $a_1, .. a_n$, повѣряющія какія нибудь n уравненій изъ системы (13) и (14), то они удовлетворятъ также и $n+1$-е.

Дифференцируя равенство (14) по каждому изъ независимыхъ перемѣнныхъ, причемъ $a_1, .. a_n$ входящіе въ 1-ю его часть и опредѣленные уравненіями (13) должно разсматривать какъ функціи перемѣнныхъ,—находимъ n равенствъ вида

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i},$$

которыя на основ. (13) приведутся къ слѣдующимъ

$$\frac{\partial f}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial x_i} = 0.$$

Но эти послѣднія имѣютъ видъ уравненій (4); поэтому значенія $a_1, .. a_n$, выводимыя изъ уравненій (13) и приводящія полный интегралъ (2) къ виду (12), заключаются въ системѣ тѣхъ общихъ значеній $a_1, .. a_n$, которыя обращаютъ полный интегралъ въ особенный или общій.

Digitized by Google

Если значенія $a_1, .. a_n$, выведенныя изъ уравненій (13) и (14) будутъ всѣ постоянныя, тогда интегралъ (12) будетъ частнымъ случаемъ полнаго; если же значенія будутъ функціи перемѣнныхъ, удовлетворяющія одно или нѣсколько необходимыхъ отношеній вида

$$\varphi(a_1, a_2, a_3, .. a_n) = o,$$

въ такомъ случаѣ интегралъ (12) будетъ частнымъ случаемъ общаго; наконецъ, если ни тотъ, ни другой случай не имѣютъ мѣста, то интегралъ (12) будетъ особеннымъ.

§ 6. Мы разсматривали полный интегралъ уравненія (1) подъ видомъ явной функціи z перемѣнныхъ $x_1, .. x_n$: но если онъ полученъ въ видѣ неявной функціи, опредѣляемой уравненіемъ

$$\varphi(x_1, .. x_n, z, a_1, .. a_n) = o,$$

то способъ измѣненія произвольныхъ постоянныхъ прилагается въ этомъ случаѣ совершенно также, какъ и въ предъидущемъ. Въ самомъ дѣлѣ, разсматривая $a_1, .. a_n$ какъ функціи перемѣнныхъ $x_1, .. x_n, z$, мы можемъ опредѣлить ихъ во 1-хъ, помощію уравненій

$$\frac{d\varphi}{da_i} = o,$$

взятыхъ при всѣхъ значеніяхъ i отъ 1 до n. Такимъ образомъ получится особенный интегралъ.

Во 2-хъ, предполагая $a_n, a_{n-1}, .. a_{n-k}$ совершенно произвольными функціями $a_1, a_2, .. a_{n-k-1}$, можно опредѣлить послѣднія какъ функціи перемѣнныхъ изъ уравненій

$$\frac{d\varphi}{da_i} + \frac{d\varphi}{da_{n-k}} \cdot \frac{da_{n-k}}{da_i} + \cdots + \frac{d\varphi}{da_n} \frac{da_n}{da_i} = o,$$

взятыхъ для $i = 1, .. n - k - 1$. Полученный такимъ образомъ интегралъ будетъ общимъ и достигаетъ наибольшей общности для $k=o$.

Дѣйствительно не трудно удостовѣриться, что при каждомъ изъ трехъ предъидущихъ опредѣленій величинъ $a_1, .. a_n$, дифференцируя по каждому изъ независимыхъ перемѣнныхъ уравненіе $\varphi = o$, мы получимъ n уравненій

$$\frac{d\varphi}{dx_i} + \frac{d\varphi}{dz} p_i = o$$

всегда одного и того-же вида. Слѣдовательно исключеніе $a_1, .. a_n$ изъ этихъ уравненій и $\varphi = o$ во всѣхъ трехъ случаяхъ приведетъ къ одному и тому-же уравненію съ частными производными, потому что результатъ исключенія не зависитъ отъ значеній, приписываемыхъ исключаемымъ величинамъ.

Замѣтимъ, что если уравненіе съ частными производными заключаетъ только двѣ независимыхъ перемѣнныхъ и функцію ихъ, то эти три перемѣнныя можно разсматривать какъ координаты точекъ

Digitized by Google

пространства. Тогда полный интегралъ представитъ уравненіе поверхности, заключающее два произвольныхъ параметра. Способъ-же нахожденія особеннаго и общаго интеграловъ, посредствомъ измѣненія произвольныхъ постоянныхъ, будетъ въ этомъ случаѣ совершенно одинаковъ съ пріемомъ, употребляемымъ въ геометріи для опредѣленія обертывающихъ поверхностей (surfaces-enveloppes): въ 1-мъ случаѣ—при независимомъ измѣненіи обоихъ параметровъ, во 2-мъ—предполагая между параметрами произвольную зависимость.

III.

§ 7. Мы видѣли, (§ 4, I), что самая общая форма явной функціи z, удовлетворяющей уравненіе съ частными производными перваго порядка

$$F\left(x_1, \ldots x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0,$$

есть слѣдующая

$$z = f\left[x_1, \ldots x_n, a_1, \ldots a_{n-1}, \pi\left(a_1, \ldots a_{n-1}\right)\right].$$

Она заключаетъ въ своемъ выраженіи n независимыхъ перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_n$,—$n-1$ независимыхъ между собою данныхъ функцій $a_1, \ldots a_{n-1}$ тѣхъ-же перемѣнныхъ и наконецъ произвольную функцію π этихъ функцій.

Разсмотримъ частный случай этой общей формы: когда въ f не входятъ непосредственно $x_1, \ldots x_n$ и $a_1, \ldots a_n$; тогда мы будемъ имѣть

$$z = f\left[\pi\left(a_1, \ldots a_{n-1}\right)\right] \text{ или } z = \pi\left(a_1, \ldots a_{n-1}\right), \qquad (1)$$

потому что π произвольная функція.

Уравненіе съ частными производными 1-го порядка, соотвѣтствующее этой формѣ интеграла, получится очень просто на основаніи теоремы (§ 3, I), вслѣдствіе которой функціональный опредѣлитель функцій $z, a_1, \ldots a_{n-1}$, долженъ быть равенъ нулю, такъ какъ между ними существуетъ отношеніе (1). Поэтому имѣемъ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x_1}, & \frac{\partial z}{\partial x_2}, & \ldots & \frac{\partial z}{\partial x_n} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial a_1}{\partial x_2}, & \ldots & \frac{\partial a_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_1}, & \frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_2}, & \ldots & \frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0, \qquad (2)$$

или развивая опредѣлитель n порядка 1-й части этого уравненія по

опредѣлители $n-1$-го порядка, не заключающіе элементовъ 1-го горизонтальнаго ряда, получимъ уравненіе

$$(3) \qquad R_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + R_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + R_n \frac{\partial z}{\partial x_i} = o,$$

котораго коеффиціэнты $R_1, R_2, .. R_n$ будутъ опредѣлители $n-1$-го порядка, составляемые изъ элементовъ предъидущаго постоянно опуская 1-й горизонтальный рядъ и послѣдовательно 1-й, 2-й, ... вертикальные ряды, такъ что

$$R_i = \pm \begin{vmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_{i+1}}, .. & \frac{\partial a_1}{\partial x_n}, & \frac{\partial a_1}{\partial x_1}, & .. & \frac{\partial a_1}{\partial x_{i+1}} \\ \cdot \quad .. & \cdot & \cdot & .. & \cdot \\ \cdot \quad .. & \cdot & \cdot & .. & \cdot \\ \frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_{i+1}}, .. & \frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_n}, & \frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_1}, & .. & \frac{\partial a}{\partial x_{i-1}} \end{vmatrix}.$$

Уравненіе (3) линейнаго вида относительно частныхъ производныхъ $\frac{\partial z}{\partial x_1}, .. \frac{\partial z}{\partial x_n}$; оно не имѣетъ члена, въ который-бы частныя производныя вовсе не входили и коеффиціенты его не содержатъ функціи z.

Возьмемъ теперь вторую формулу общаго интеграла (§ 6, I):

$$\varphi [x_1, .. x_n, z, a_1, .. a_{n-1}, \pi (a_1, .. a_{n-1})] = o,$$

посредствомъ которой неизвѣстная z опредѣляется какъ неявная функція независимыхъ перемѣнныхъ. Здѣсь φ означаетъ данную, π произвольную функцію и данныя функціи $a_1, .. a_{n-1}$ содержитъ, кромѣ независимыхъ перемѣнныхъ, самую функцію z.

Разсмотримъ частный случай, когда $a_1, .. a_{n-1}$ не входятъ въ φ непосредственно, тогда предъидущее уравненіе приметъ видъ

$$\varphi [x_1, .. x_n, z, \pi (a_1, .. a_{n-1})] = o,$$

рѣшая это уравненіе относительно π, получимъ $\pi (a_1 .. a_{n-1}) = \varphi (x_1, .. x_n, z)$, гдѣ φ означаетъ извѣстную функцію. Полагая для однообразія $\varphi = a_n$ и пользуясь произвольностію функціи π, можемъ предъидущую зависимость замѣнить равнозначущей ей слѣдующей

$$(4) \qquad \pi (a_1, a_2, .. a_{n-1} a_n) = o.$$

Посмотримъ какой формы уравненіе въ частныхъ производныхъ функціи z соотвѣтственно интегралу вида (4). Чтобы привести этотъ случай къ предъидущему возьмемъ сначала уравненіе

$$(5) \qquad \gamma = \pi (a_1, .. a_n);$$

вслѣдствіе этого отношенія между функціями $\gamma, a_1, .. a_n$ заключаемъ,

Digitized by Google

что функціональный опредѣлитель ихъ равенъ нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \gamma}{\partial x_1}, & \frac{\partial \gamma}{\partial x_2}, \cdots & \frac{\partial \gamma}{\partial z} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial a_1}{\partial x_2}, \cdots & \frac{\partial a_1}{\partial z} \\ \cdot & \cdot \quad \cdots & \cdot \\ \frac{\partial a_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial a_n}{\partial x_2}, \cdots & \frac{\partial a_n}{\partial z} \end{vmatrix} = 0, \qquad (6)$$

или, $$R^{(1)} \frac{\partial \gamma}{\partial x_1} + R^{(2)} \frac{\partial \gamma}{\partial x_2} + \cdots + R^{(n+1)} \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0, \qquad (7)$$

гдѣ $R^{(i)}$ опредѣлитель n-го порядка составленъ подобно тому, какъ въ предъидущемъ случаѣ R_i.

Но если между функціями $a_1, \ldots a_n$ существуетъ отношеніе (4), то

$$\gamma = 0$$

и z можетъ быть разсматриваемо какъ функція $x_1, \ldots x_n$. Дифференцируя въ этомъ предположеніи послѣднее уравненіе по каждому изъ независимыхъ перемѣнныхъ, находимъ n уравненій

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x_i} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0, \quad \text{для } i = 1, 2, \ldots n,$$

посредствомъ которыхъ уравненіе (7) преобразуется въ слѣдующее

$$R^{(1)} \frac{\partial z}{\partial x_1} + R^{(2)} \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + R^{(n)} \frac{\partial z}{\partial x_n} = R^{(n+1)}; \qquad (8)$$

это послѣднее также линейное въ отношеніи частныхъ производныхъ функціи z, но болѣе общаго вида чѣмъ (3), потому что имѣетъ членъ $R^{(n+1)}$ не заключающій частныхъ производныхъ z и въ коеффиціентахъ его кромѣ независимыхъ перемѣнныхъ входитъ самая функція z.

Такимъ образомъ показаны самыя общія формы первообразной зависимости между независимыми перемѣнными и ихъ функціею, которыя приводятъ къ линейнымъ уравненіямъ относительно частныхъ производныхъ. Эти уравненія слѣдовательно могутъ быть одной изъ 2-хъ общихъ формъ (3) или (8); но предъидущій анализъ показываетъ, что отъ уравненія (8) можно возвратиться къ (7), которое того же самаго вида какъ (3), только содержитъ однимъ независимымъ перемѣннымъ болѣе. Уравненіе (6), однозначущее съ (7), повѣряется тождественно, если вмѣсто функціи γ будутъ вставлены каждая изъ функцій $a_1, \ldots a_n$, потому что тогда первая часть его представляетъ опредѣлитель заключающій по два одинаковыхъ горизонтальныхъ ря-

Digitized by Google

да. Слѣдовательно $a_1, \ldots a_n$ будутъ n различныхъ частныхъ рѣшеній или интеграловъ уравненія (7) и самое общее значеніе функціи γ будетъ, какъ показываетъ формула (5),—произвольная функція этихъ частныхъ интеграловъ. Наконецъ эта произвольная функція уравненная нулю (или произвольному постоянному, что ни сколько не общнѣе) будетъ, какъ показываетъ формула (4), общимъ интеграломъ уравненія (8).

Отсюда уже можно предвидѣть общій ходъ интегрированія линейнаго уравненія вида (8), когда въ немъ $R^{(i)}$ будутъ какія нибудь данныя функціи $x_1, \ldots x_n$, z. Должно будетъ привести его къ виду (7), потомъ опредѣлить n независимыхъ функцій повѣряющихъ это послѣднее; тогда произвольная функція этихъ функцій, уравненная нулю, будетъ самымъ общимъ интеграломъ разсматриваемаго уравненія.

Это предположеніе вполнѣ подтверждается теоріею, изложенною въ слѣдующихъ 2-хъ параграфахъ.

§ 8. Лагранжъ, предложившій первый теорію интегрированія линейныхъ уравненій, представилъ ее окончательно въ слѣдующемъ видѣ.

Возьмемъ уравненіе линейное въ отношеніи частныхъ производныхъ общаго вида

$$A_1 \frac{dz}{dx_1} + A_2 \frac{dz}{dx_2} + \cdots + A_n \frac{dz}{dx_n} = A, \tag{9}$$

въ которомъ A, $A_1, \ldots A_n$ означаютъ данныя функціи $x_1, \ldots x_n$ и z.

Представимъ интегралъ его уравненіемъ

$$\gamma (x_1, \ldots x_n z) = 0, \tag{10}$$

изъ котораго z можно опредѣлить какъ функцію $x_1, \ldots x_n$. Дифференцируя его въ этомъ предположеніи по каждому изъ независимыхъ перемѣнныхъ, получимъ n равенствъ

$$\frac{d\gamma}{dz} \cdot \frac{dz}{dx_i} = - \frac{d\gamma}{dx_i}, \text{ для } i = 1, 2, \ldots n.$$

Слѣдовательно, умноживъ данное уравненіе на $\frac{d\gamma}{dz}$ и перенеся потомъ всѣ члены его во 2-ю часть, получимъ равенство

$$0 = A \frac{d\gamma}{dz} + A_1 \frac{d\gamma}{dx_1} + \cdots + A_n \frac{d\gamma}{dx}. \tag{11}$$

Съ другой стороны, разсматривая z какъ функцію опредѣляемую уравненіемъ (10) и взявъ полный дифференціалъ γ въ этомъ предположеніи, будемъ имѣть тождественно

$$d\gamma = 0;$$

Digitized by Google

но $$dy = \frac{\partial y}{\partial z}\,dz + \frac{\partial y}{\partial x_1}\,dx_1 + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_n}\,dx_n;$$

поэтому, вставивъ сюда значеніе одной изъ частныхъ производныхъ y, напр. $\frac{\partial y}{\partial z}$, выведенное изъ равенства (11), будемъ имѣть

$$dy = (dx_1 - \frac{A_1}{A}\,dz)\,\frac{\partial y}{\partial x_1} + \cdots + (dx_n - \frac{A_n}{A}\,dz)\,\frac{\partial y}{\partial x_n}.$$

Это выраженіе показываетъ, что dy будетъ тождественно нулемъ, если между перемѣнными $x_1, \ldots x_n, z$ будутъ установлены отношенія удовлетворяющія уравненія

$$dx_1 - \frac{A_1}{A}\,dz = o, \quad \ldots \quad dx_n - \frac{A_n}{A}\,dz = 0. \qquad (12)$$

Но для n обыкновенныхъ совокупныхъ уравненій (12) 1-го порядка между $n+1$ перемѣнными, можно опредѣлить n различныхъ интеграловъ, заключающихъ n произвольныхъ постоянныхъ $a_1, \ldots a_n$. Положимъ эти интегралы, разрѣшенные въ отношеніи произвольныхъ постоянныхъ будутъ

$$\varphi_1(x_1, \ldots x_n, z) = a_1,\ \varphi_2(x_1, \ldots x_n, z) = a_2,\ \ldots\ \varphi_n(x_1, \ldots x_n z) = a_n. \qquad (13)$$

Помощію n уравненій, представляемыхъ интегралами уравненій (12) можно также n изъ перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_n$ z выразить функціями остальнаго и произвольныхъ постоянныхъ. При вставкѣ этихъ выраженій въ функцію $y(x_1, \ldots x_n, z)$ и остальное перемѣнное, функціями котораго выражены всѣ прочія, должно само собою исчезнуть, потому что dy должно быть нулемъ; слѣдовательно послѣ вставки y будетъ содержать только произвольныя постоянныя $a_1, \ldots a_n$.

Отсюда очевидно слѣдуетъ, что самый общій видъ, который можетъ имѣть функція y, чтобы удовлетворить предъидущее требованіе,—есть слѣдующій

$$\pi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n)$$

гдѣ π означаетъ совершенно произвольную функцію, и $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ функціи составляющія первыя части уравненій (13). Дѣйствительно, разрѣшивъ уравненія (13) относительно которыхъ нибудь n изъ величинъ $x_1, \ldots x_n, z$ и вставивъ обратно найденныя рѣшенія въ тѣ уравненія, изъ которыхъ онѣ выведены, мы должны привести эти послѣднія въ тождества; такимъ образомъ φ_1 обратится въ a_1, φ_2 въ a_2 и т. д. Слѣдовательно общій интегралъ уравненія (9) будетъ

$$\pi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n) = 0.$$

Почти въ такомъ видѣ изложена теорія линейныхъ уравненій въ XX урокѣ «sur le calcul des fonctions» (изданіе 1806 г.) Лагранжа, гдѣ показавъ ея примѣненіе при 2-хъ и 3-хъ независимыхъ

Digitized by Google

перемѣнныхъ, онъ говоритъ «предъидущій анализъ проще и прямѣе даннаго мною въ теоріи функцій, что и побудило меня помѣстить его здѣсь, тѣмъ болѣе что онъ прилагается съ равною легкостію къ подобнымъ уравненіямъ и съ большимъ числомъ перемѣнныхъ. Въ берлинскихъ же мемуарахъ 1779 года я ограничился доказательствомъ a posteriori законности и общности этого метода».

§ 9. По теоріи Лагранжа интегрированіе линейнаго уравненія съ частными производными (9) приводится къ интегрированію системы обыкновенныхъ совокупныхъ уравненій (12). Но, какъ показалъ Якоби (J. v. Crelle B. II.), рѣшеніе этихъ двухъ вопросовъ можно привести въ обратную зависимость. Доказательство этого предложенія дополняетъ и еще болѣе уясняетъ теорію Лагранжа и вмѣстѣ съ тѣмъ даетъ случай представить въ общемъ очеркѣ теорію интегрированія совокупныхъ уравненій вида (12).

Уравненія (12) можно написать въ видѣ отношеній

$$\frac{dz}{A} = \frac{dx_1}{A_1} = \cdots = \frac{dx_n}{A_n},$$

которыя выражаютъ задачу: установить между перемѣнными $z, x_1, .. x_n$ такія зависимости, чтобы дифференціалы этихъ перемѣнныхъ были пропорціональны даннымъ функціямъ $A, A_1, .. A_n$. Принявъ одно изъ перемѣнныхъ, напр. z, независимымъ, можемъ всѣ остальныя $x_1, .. x_n$ разсматривать функціями его и предъидущія уравненія, написанныя такимъ образомъ

$$\frac{dx_1}{dz} = \frac{A_1}{A}, \cdots \qquad \frac{dx_n}{dz} = \frac{A_n}{A},$$

дадутъ выраженія первыхъ производныхъ этихъ функцій посредствомъ $z, x_1, .. x_n$. Нетрудно вывести подобныя выраженія для производныхъ высшихъ порядковъ тѣхъ-же функцій. Для этого, дифференцируя напр. уравненіе

$$\frac{dx_i}{dz} = \frac{A_i}{A}$$

послѣдовательно въ отношеніи z, какъ независимаго перемѣннаго, притомъ разсматривая, сообразно сдѣланному условію, $x_1, .. x_n$ функціями его и каждый разъ, когда встрѣтятся во 2-й части $\frac{dx_1}{dz}, .. \frac{dx_n}{dz}$, замѣняя ихъ соотвѣтственными значеніями $\frac{A_1}{A}, .. \frac{A_n}{A}$,—получимъ требуемыя выраженія, которыя пусть будутъ

$$(14) \quad \frac{dx_i}{dz} = \frac{A_i}{A} = \psi_1(z, x_1, .. x_n), \quad \frac{d^2x_i}{dz^2} = \psi_2(z, x_1, .. x), ..$$

$$.. \frac{d^nx_i}{dz^n} = \psi_n(z, x_1, .. x_n), \cdots$$

Digitized by Google

Подобнымъ образомъ найдутся выраженія высшихъ производныхъ всѣхъ функцій $x_1, .. x_n$.

Положивъ теперь, что данному частному значенію z^0 независимого перемѣннаго z соотвѣтствуютъ совершенно произвольно выбранныя значенія x_1^0 функціи x_1, x_2^0 функціи $x_2, .. x_n^0$ функціи x_n, можемъ каждую изъ функцій $x_1, .. x_n$ по Тейлоровой формулѣ разложить въ безконечную строку. Такимъ образомъ будемъ имѣть

$$x_i = x_i^0 + \psi_1 (z^0, x_1^0, .. x_n^0) \frac{z - z^0}{1} +$$

$$+ \psi_2 (z^0, x_1^0, .. x_n^0) \frac{(z - z^0)^2}{1 .. 2} + \text{ и т. д.}$$

Такимъ образомъ доказано существованіе искомыхъ n функцій выполняющихъ требуемыя условія и вмѣстѣ съ тѣмъ мы видимъ, что въ ихъ выраженіяхъ заключаются однѣ и тѣже произвольныя постоянныя $x_1^0, .. x_n^0$; что касается величины z^0, то она должна быть разсматриваема какъ данная постоянная, напр. какъ данное число. Замѣтимъ еще, что вмѣсто произвольныхъ постоянныхъ $x_1^0, .. x_n^0$ можно ввести другія, связанныя съ первыми произвольными отношеніями, лишъ бы новыя произвольныя постоянныя можно было опредѣлить такъ, чтобы для какого нибудь даннаго значенія z функціи $x_1, .. x_n$ принимали произвольно избранныя значенія.

Чтобы опредѣлить конечныя выраженія n искомыхъ функцій $x_1, .. x_n$, надобно вообще найти n уравненій, называемыхъ интегралами, между этими функціями, независимымъ перемѣннымъ z и n произвольными постоянными. Эта задача можетъ быть рѣшена, въ нѣкоторыхъ случаяхъ, не возвышая дифференціальнаго порядка уравненій (12) и успѣхъ конечно будетъ зависѣть отъ вида данныхъ функцій $A, A, .. A_n$. Существуетъ еще другой пріемъ: исключеніе $n-1$ неизвѣстныхъ функцій и приведеніе вопроса къ интегрированію одного обыкновеннаго уравненія n-го порядка. Для этого возьмемъ напр. первыя n уравненій (14) и исключимъ изъ нихъ $n-1$ величинъ $x_1, .. x_{i-1}, x_{i+1}, .. x_n$; такимъ образомъ получимъ одно уравненіе между z, его функціею x_i и ея производными до n-го порядка, которое пусть будетъ

$$f\left(z, x_i, \frac{dx_i}{dz}, .. \frac{d^n x_i}{dz^n}\right) = 0.$$

Уравненіе съ 2-мя перемѣнными n-го порядка имѣетъ, какъ извѣстно, n первыхъ интеграловъ, представляющихся въ видѣ дифференціальныхъ уравненій $n-1$-го порядка и заключающихъ каждое по одному произвольному постоянному; разрѣшивъ эти уравненія относительно произвольныхъ постоянныхъ $c_1, .. c_n$, будемъ имѣть n уравненій вида

$$f_1\left(z, x_i, \frac{dx_i}{dz}, .. \frac{d^{n-1}x_i}{dz^{n-1}}\right) = c_1, \ldots f_n\left(z, x_i, \frac{dx_i}{dz}, .. \frac{d^{n-1}x_i}{dz^{n-1}}\right) = c_n. \quad (15)$$

Digitized by Google

Мы можемъ получить равнозначущую послѣдней систему уравненій, найдя полный интегралъ уравненія n-го порядка, содержащій n произ. пост., дифференцируя его n—1 разъ и выведя изъ полученныхъ n уравненій значенія постоянныхъ.

Вставивъ въ уравненія (15) значенія производныхъ функціи x_i (14), получимъ n искомыхъ отношеній между $z, x_1, .. x_n$, или интеграловъ уравненій (12), которые пусть будутъ

$$(16) \quad \varphi_1(z, x_1, .. x_n) = c_1, \ldots \qquad \varphi_n(z, x_1, .. x_n) = c_n.$$

Уравненія (16), будучи интегралами уравненій (12), должны имѣть такое свойство, что выведенныя помощію тѣхъ и другихъ отношенія между перемѣнными $z, x_1, .. x_n$, не заключающія произвольныхъ постоянныхъ, должны быть тождественныя; въ противномъ случаѣ мы не могли бы для даннаго значенія z назначить произвольно соотвѣтствующія значенія функцій $x_1, .. x_n$.

Замѣтимъ еще, что уравненія (16) представляютъ n функцій, остающихся постоянными при одновременномъ измѣненіи $z, x_1, .. x_n$; слѣд. дифференціалы ихъ равны нулю.

Поэтому

$$d\varphi_i = o$$

или

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial z} + \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_1}\frac{dx_i}{dz} + \cdots + \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dz} = 0.$$

Вставивъ сюда значенія производныхъ $\frac{dx_i}{dz}, .. \frac{dx_n}{dz}$ изъ уравненій (12) получимъ, по умноженію результата на A,

$$A\frac{\partial\varphi_i}{\partial z} + A_1\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_1} + \cdots + A_n\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_n} = 0$$

уравненіе, представляющее отношеніе между перемѣнными $z, x_1, .. x_n$ и не заключающее произвольныхъ постоянныхъ, которое поэтому, и на основаніи предъидущаго замѣчанія, должно быть тождественное.

Слѣдовательно функціи, составляющія 1-я части уравненій (16), удовлетворяютъ уравненіе съ частными производными

$$(11) \quad A\frac{\partial\gamma}{\partial z} + A_1\frac{\partial\gamma}{\partial x_1} + \cdots + A_n\frac{\partial\gamma}{\partial x_n} = 0,$$

которое мы имѣли въ предъидущемъ §. Даже болѣе, произвольная функція одной, нѣкоторыхъ или всѣхъ этихъ функцій также удовлетворитъ предъидущее уравненіе. Дѣйствительно, означивъ условно для краткости 1-ю часть предъидущаго уравненія такимъ образомъ $A(\gamma)$, мы будемъ имѣть тождественно

$$A(\varphi_1) = 0, \quad \ldots \quad A(\varphi_n) = 0.$$

Digitized by Google

Взявъ произвольную функцію π функцій $\varphi_1, .. \varphi_n$, находимъ

$$\frac{d\pi}{dz} = \frac{d\pi}{d\varphi_1}\frac{d\varphi_1}{dz} + .. + \frac{d\pi}{d\varphi_n}\frac{d\varphi_n}{dz},$$

$$\frac{d\pi}{dx_i} = \frac{d\pi}{d\varphi_1}\frac{d\varphi_1}{dx_i} + .. + \frac{d\pi}{d\varphi_n}\frac{d\varphi_n}{dx_i}.$$

Умноживъ 2-е изъ этихъ равенствъ на A_i и приложивъ сумму подобныхъ для всѣхъ значеній $i = 1, 2, .. n$ къ 1-му, получимъ

$$A(\pi) = \frac{d\pi}{d\varphi_1} A(\varphi_1) + \cdots \frac{d\pi}{d\varphi_n} A(\varphi_n).$$

Но 2-я часть этого равенства тождественно равна нулю, слѣд. и 1-я также.

Наконецъ положеніе $\gamma = o$ позволитъ разсматривать z или одно изъ $x_1, .. x_n$, напр. x_i, функціею всѣхъ остальныхъ перемѣнныхъ; въ такомъ случаѣ уравненіе (11) приведется къ одному изъ слѣдующихъ

$$A_1 \frac{dz}{dx_1} + \cdots\cdots + A_n \frac{dz}{dx_n} = A,$$

$$A \frac{dx_i}{dz} + .. + A_{i-1} \frac{dx_i}{dx_{i-1}} + A_{i-1} \frac{dx_i}{dx_{i+1}} + .. + A_n \frac{dx_i}{dx_n} = A_i,$$

а

$$\pi(\varphi_1, .. \varphi_n) = 0$$

будетъ полнымъ интеграломъ этихъ уравненій.

Эти заключенія вполнѣ согласуются съ теоріей Лагранжа и на основаніи ихъ можно разсматривать способъ интегрированія линейныхъ уравненій съ частными производными, какъ простое приложеніе доказанныхъ сейчасъ свойствъ интеграловъ совокупныхъ уравненій вида (12).

Въ дополненіе объясненія тѣсной внутренней связи и взаимной зависимости рѣшеній двухъ вопросовъ—интегрированія уравненія (11) и уравненій (12)—докажемъ еще слѣдующую теорему:

Всякая функція ψ перемѣнныхъ $z, x_1, .. x_n$, удовлетворяющая линейное уравненіе съ частными производными (11), сохранитъ постоянное значеніе при одновременномъ измѣненіи этихъ перемѣнныхъ, если будемъ разсматривать $x_1, .. x_n$ какъ функціи z, опредѣленныя уравненіями (12); и поэтому слѣдовательно

$$\psi = \text{const.}$$

будетъ однимъ изъ интеграловъ системы совокупныхъ уравненій (12). Дѣйствительно, взявъ дифференціалъ ψ, разсматривая $x_1, .. x_n$ функціями z, имѣемъ

$$d\psi = \left(\frac{d\psi}{dz} + \frac{d\psi}{dx_1}\frac{dx_1}{dz} + .. + \frac{d\psi}{dx_n}\frac{dx_n}{dz}\right) \cdot dz,$$

Digitized by Google

но на основаніи уравненій (12) $\frac{dx_1}{dz} = \frac{A_1}{A}, \ldots \frac{dx_n}{dz} = \frac{A_n}{A}$, поэтому

$$d\psi = A(\psi).\frac{dz}{A}$$

По условіямъ теоремы $A(\psi)$ тождественно равно нулю,

слѣд. $d\psi = 0$, откуда $\psi = \text{const}$,

что и требовалось доказать.

Отсюда слѣдуетъ во 1-хъ, что опредѣливъ какимъ нибудь образомъ n различныхъ или независимыхъ между собою функцій $\varphi_1 \ldots \varphi_n$, удовлетворяющихъ уравненіе (11), мы будемъ имѣть полную систему интеграловъ уравненій (12), подъ видомъ

$$\varphi_1 = \text{const.} = c_1, \quad \varphi_2 = \text{const.} = c_2, \ldots \quad \varphi_n = \text{const.} = c_n.$$

2) Зная одну систему интеграловъ уравненій (12), положимъ предъидущую, можно образовать безчисленное множество другихъ системъ вида

$$\pi_1(\varphi_1, \ldots \varphi_n) = \text{const} = c^{(1)}, \quad \pi_2(\varphi_1, \ldots \varphi_n) = \text{const} = c^{(2)}, \ldots$$

$$\pi_n(\varphi_1, \ldots \varphi_n) = \text{const} = c^{(n)}.$$

Ясно, что этотъ переходъ отъ одной системы интеграловъ къ другимъ, равнозначителенъ замѣненію первоначальныхъ произвольныхъ постоянныхъ новыми, посредствомъ произвольно выбранныхъ отношеній:

$$\pi_1(c_1, \ldots c_n) = c^{(n)}, \ldots \quad \pi_n(c_1, \ldots c_n) = c^{(n)}.$$

Между различными системами интеграловъ уравненій (12) во многихъ случаяхъ заслуживаетъ предпочтенія та, въ которую входятъ, какъ произвольныя постоянныя, произвольно выбранныя значенія $x_1^0, \ldots x_n^0$ функцій $x_1, \ldots x_n$, соотвѣтствующія какому нибудь частному значенію z^0 независимаго перемѣннаго z. Эту систему интеграловъ нетрудно получить изъ какой нибудь данной, напримѣръ (16). Полагая, что $z = z^0$ соотвѣтствуютъ значенія $x_1 = x_1^0, \ldots x_n = x_n^0$, получимъ между первоначальными и новыми произвольными постоянными отношенія

$$\varphi_1(z^0, x_1^0, \ldots x_n^0) = c_1, \ldots \quad \varphi_n(z^0, x_1^0, \ldots x_n^0) = c_n$$

или, разрѣшая эти уравненія относительно $x_1^0, \ldots x_n^0$,

$$x_1^0 = \psi_1(c_1, \ldots c_n), \ldots \quad x_n^0 = \psi_n(c_1, \ldots c_n).$$

Вставивъ сюда значенія $c_1, \ldots c_n$ изъ уравненій (16) получимъ требуемую систему интеграловъ подъ видомъ

$$\varphi_1(z, x_1, \ldots x_n) = \varphi_1(z^0, x_1^0, \ldots x_n^0), \ldots$$

$$\varphi_n(z, x_1, \ldots x_n^0) = \varphi_n(z^0, x_1^0, \ldots x_n^0),$$

или $\psi_1(\varphi_1, \ldots \varphi_n) = x_1^0, \ldots \psi_n(\varphi_1, \ldots \varphi_n) = x^0_n.$

Digitized by Google

III.

§ 10. Теперь мы будемъ разсматривать вопросъ объ интегрированіи уравненія съ частными производными перваго порядка въ общемъ видѣ, т. е. не ограничивая ни числа независимыхъ перемѣнныхъ, ни формы уравненія.

Удержавъ означенія, принятыя въ § 1, снова представимъ общій типъ такихъ уравненій слѣдующимъ образомъ

$$F(x_1, \ldots x_n, z, p_1, \ldots p_n) = 0. \qquad (1)$$

Непосредственное опредѣленіе общаго интеграла уравненія (1) представило бы сложную задачу; поэтому обыкновенно находятъ сначала полный его интегралъ, заключающій n произвольныхъ постоянныхъ, изъ котораго, какъ показано выше (§§ 2—6, I), выводятся посредствомъ измѣненія произвольныхъ постоянныхъ, общій и особенный интегралы. Второе упрощеніе задачи состоитъ въ томъ, что вмѣсто непосредственнаго опредѣленія полнаго интеграла, представляющаго уравненіе между независимыми перемѣнными $x_1, \ldots x_n$, ихъ функціею z и n произвольными постоянными, отъискиваютъ сначала выраженія частныхъ производныхъ $p_1, \ldots p_n$ функціи z; по вставкѣ ихъ въ уравненіе

$$dz = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \cdots + p_n\,dx_n, \qquad (2)$$

представляющее полный дифференціалъ функціи z, и по интегрированіи его получится искомый полный интегралъ. Представляя этотъ послѣдній въ видѣ уравненія разрѣшеннаго въ отношеніи одного изъ произвольныхъ постоянныхъ $a_1, \ldots a_n$, имѣемъ

$$f(x_1, \ldots x_n, z, a_1, \ldots a_{n-1}) = a_n; \qquad (3)$$

отсюда, дифференцируя по каждому изъ независимыхъ перемѣнныхъ, находимъ

$$p_1 = -\frac{\partial f}{\partial x_1} : \frac{\partial f}{\partial z}, \ldots \quad p_n = -\frac{\partial f}{\partial x_n} : \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Слѣдовательно $p_1, \ldots p_n$ должны быть функціями $x_1, \ldots x_n$, z и заключать въ ихъ выраженіяхъ $n-1$ произвольныхъ постоянныхъ $a_1, \ldots a_{n-1}$.

Сверхъ того, чтобы уравненіе (2) имѣло интегралъ (3), функціи $p_1, \ldots p_n$ необходимо должны выполнять условія интегрируемости слѣдующаго вида

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_k} + \frac{\partial p_i}{\partial z} p_k = \frac{\partial p_k}{\partial x_i} + \frac{\partial p_k}{\partial z} p_i,$$

въ которыхъ i и k представляютъ различныя сочетанія по два изъ чиселъ $1, 2, \ldots n$. Слѣдовательно этихъ условій будетъ $\frac{n(n-1)}{2}$ и они напишутся всѣ безъ пропусковъ и повтореній, если указателю i дадимъ послѣдовательно значенія $1, 2, \ldots, n-1$ и для каждаго зна-

Digitized by Google

ченія i будемъ давать указателю k послѣдовательно значенія большія i до n включительно.

Введемъ для краткости слѣдующее означеніе: если какая нибудь функція u будетъ кромѣ независимыхъ перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_n$ заключать также ихъ функцію z, то частную производную u въ отношеніи одного изъ независимыхъ перемѣнныхъ, напр. x_i, будемъ писать $\left(\frac{du}{dx_i}\right)$, вмѣсто $\frac{du}{dx_i} + \frac{du}{dz} p_i$. При такомъ означеніи общій типъ условій интегрируемости приметъ видъ

$$\left(\frac{dp_i}{dx_k}\right) = \left(\frac{dp_k}{dx_i}\right). \tag{4}$$

§ 11. Чтобы опредѣлить n функцій $p_1, \ldots p_n$, приводящихъ посредствомъ интегрированія уравненія (2), къ полному интегралу (1), должно вообще найти n уравненій между ними, перемѣнными $x_1, \ldots x_n$, z и n—1 произвольными постоянными $a_1, \ldots a_{n-1}$. Одно изъ этихъ уравненій—данное уравненіе съ частными производными (1), мы уже имѣемъ, остается опредѣлить n—1 другихъ. Предполагая эти послѣднія разрѣшенными относительно производныхъ постоянныхъ, представимъ разсматриваемую систему n уравненій слѣд. образомъ

$$F = o, \quad F_1 = a_1, \quad F_2 = a_2, \ldots \quad F_{n-1} = a_{n-1}, \tag{5}$$

гдѣ $F_1, \ldots F_{n-1}$, подобно 1-й части F даннаго уравненія (1), означаютъ функціи $x_1, \ldots x_n, z, p_1, \ldots p_n$, не заключающія произвольныхъ постоянныхъ.

Такимъ образомъ вмѣсто опредѣленія n функцій $p_1, \ldots p_n$, заключающихъ, кромѣ $n+1$ перемѣнныхъ, $n-1$ произвольныхъ постоянныхъ, задача приводится къ отысканію n—1 функцій $F_1, \ldots F_{n-1}$ каждая $2n+1$ перемѣнныхъ, но не заключающихъ произвольныхъ постоянныхъ. Для опредѣленія функцій $p_1, \ldots p_n$ даны условія (4); посмотримъ какія условія должны выполнять функціи $F_1, \ldots F_{n-1}$, предполагая, что выведенныя изъ уравненій (5) значенія $p_1, \ldots p_n$ выполняютъ условія (4). Для этого возьмемъ которыя нибудь два изъ уравненій (5), напр.

$$F_i = a_i \text{ и } F_k = a_k$$

и продифференцируемъ ихъ послѣдовательно относительно каждаго изъ независимыхъ перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_n$. Находимъ дифференцируя по x_1,

$$\left(\frac{dF_i}{dx_1}\right) + \frac{dF_i}{dp_1}\left(\frac{dp_1}{dx_1}\right) + \frac{dF_i}{dp_2}\left(\frac{dp_2}{dx_1}\right) + \cdots + \frac{dF_i}{dp_n}\left(\frac{dp_n}{dx_1}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dF_k}{dx_1}\right) + \frac{dF_k}{dp_1}\left(\frac{dp_1}{dx_1}\right) + \frac{dF_k}{dp_2}\left(\frac{dp_2}{dx_1}\right) + \cdots + \frac{dF_k}{dp_n}\left(\frac{dp_n}{dx_1}\right) = 0;$$

Digitized by Google

дифференцируя по x_2,

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial F_i}{\partial p_1}\left(\frac{\partial p_1}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial F_i}{\partial p_2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial x_2}\right)+\cdots+\frac{\partial F_i}{\partial p_n}\left(\frac{\partial p_n}{\partial x_2}\right)=0,$$

$$\left(\frac{\partial F_k}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial F_k}{\partial p_1}\left(\frac{\partial p_1}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial F_k}{\partial p_2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial x_k}\right)+\cdots+\frac{\partial F_k}{\partial p_n}\left(\frac{\partial p_n}{\partial x_2}\right)=0;$$

и т. д. наконецъ дифференцированіе по x_n даетъ

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_n}\right)+\frac{\partial F_i}{\partial p_1}\left(\frac{\partial p_1}{\partial x_n}\right)+\frac{\partial F_i}{\partial p_2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial x_n}\right)+$$

$$+\frac{\partial F_i}{\partial p_{n-1}}\left(\frac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n}\right)+\frac{\partial F_i}{\partial p_n}\left(\frac{\partial p_n}{\partial x_n}\right)=0,$$

$$\left(\frac{\partial F_k}{\partial x_n}\right)+\frac{\partial F_k}{\partial p_1}\left(\frac{\partial p_1}{\partial x_n}\right)+\frac{\partial F_k}{\partial p_2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial x_n}\right)+$$

$$+\frac{\partial F_k}{\partial p_{n-1}}\left(\frac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n}\right)+\frac{\partial F_k}{\partial p_n}\left(\frac{\partial p_n}{\partial x_n}\right)=0.$$

Исключивъ изъ 1-й пары предъидущихъ уравненій $\left(\frac{\partial p_1}{\partial x_1}\right)$,—изъ 2-й $\left(\frac{\partial p_2}{\partial x_2}\right)$, и т. д. наконецъ изъ послѣдней $\left(\frac{\partial p_n}{\partial x_n}\right)$, получимъ слѣдующія n уравненій:

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_1}\right)\frac{\partial F_k}{\partial p_1}-\frac{\partial F_i}{\partial p_1}\left(\frac{\partial F_k}{\partial x_1}\right)+\left[\frac{\partial F_i}{\partial p_2}\frac{\partial F_k}{\partial p_1}-\frac{\partial F_i}{\partial p_1}\frac{\partial F_k}{\partial p_2}\right]\left(\frac{\partial p_2}{\partial x_1}\right)+\cdots$$

$$\cdots+\left[\frac{\partial F_i}{\partial p_n}\frac{\partial F_k}{\partial p_1}-\frac{\partial F_i}{\partial p_1}\frac{\partial F_k}{\partial p_n}\right]\left(\frac{\partial p_n}{\partial x_1}\right)=0,$$

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_2}\right)\frac{\partial F_k}{\partial p_2}-\frac{\partial F_i}{\partial p_2}\left(\frac{\partial F_k}{\partial x_2}\right)+\left[\frac{\partial F_i}{\partial p_1}\frac{\partial F_k}{\partial p_2}-\frac{\partial F_i}{\partial p_2}\frac{\partial F_k}{\partial p_1}\right]\left(\frac{\partial p_1}{\partial x_2}\right)+\cdots$$

$$\cdots+\left[\frac{\partial F_i}{\partial p_n}\frac{\partial F_k}{\partial p_2}-\frac{\partial F_i}{\partial p_2}\frac{\partial F_k}{\partial p_n}\right]\left(\frac{\partial p_n}{\partial x_2}\right)=0, \qquad (6)$$

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_n}\right)\frac{\partial F_k}{\partial p_n}-\frac{\partial F_i}{\partial p_n}\left(\frac{\partial F_k}{\partial x_n}\right)+\left[\frac{\partial F_i}{\partial p_1}\frac{\partial F_k}{\partial p_n}-\frac{\partial F_i}{\partial p_n}\frac{\partial F_k}{\partial p_1}\right]\left(\frac{\partial p_1}{\partial x_n}\right)+\cdots$$

$$\cdots+\left[\frac{\partial F_i}{\partial p_{n-1}}\frac{\partial F_k}{\partial p_n}-\frac{\partial F_i}{\partial p_n}\frac{\partial F_k}{\partial p_{n-1}}\right]\left(\frac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n}\right)=0.$$

Digitized by Google

Введемъ теперь условія интегрируемости (4) и замѣтимъ, что въ уравненіяхъ (6) коэффиціенты при $\left(\frac{\partial p_i}{\partial x_k}\right)$ и $\left(\frac{\partial p_k}{\partial x_i}\right)$, равныхъ вслѣдствіе этихъ условій, также равны по величинѣ, но съ противными знаками; поэтому, если сложимъ всѣ уравненія предъидущей системы, то всѣ члены ихъ первыхъ частей, кромѣ первыхъ, взаимно уничтожатся и мы находимъ уравненіе

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_1}\right)\frac{\partial F_k}{\partial p_1} - \frac{\partial F_i}{\partial p_1}\left(\frac{\partial F_k}{\partial x_1}\right) + \cdots + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_n}\right)\frac{\partial F_k}{\partial p_n} - \frac{\partial F_i}{\partial p_n}\left(\frac{\partial F_k}{\partial x_n}\right) = 0, \tag{7}$$

которое должны удовлетворять каждыя двѣ функціи, составляющія 1-я части уравненій (5).

Законъ составленія 1-й части уравненія (7) изъ частныхъ производныхъ функцій F_i и F_k очевиденъ; мы примемъ для обозначенія ея условный знакъ $(F_i; F_k)$, поэтому общій типъ условій, которыя должны удовлетворить функціи $F, F_1, \ldots F_{n-1}$ будетъ

$$(F_i; F_k) = 0, \tag{8}$$

здѣсь i и k представляютъ всѣ различныя сочетанія по два изъ указателей $0, 1, 2, \ldots n-1$, полагая при томъ $F_0 = F$. Слѣдовательно условій (8) столько-же сколько (4), т. е. $\frac{n(n-1)}{2}$.

Необходимо замѣтить также, что если въ уравненіи (7) одна изъ двухъ функцій F_i, F_k будетъ дана, то въ отношеніи частныхъ производныхъ другой, неизвѣстной функціи, оно будетъ линейнаго вида. Такъ напр. полагая въ уравненіи (7) $F_k = F$ и написавъ его слѣдующимъ образомъ

$$\frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial F_i}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial p_2}\cdot\frac{\partial F_i}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial F_i}{\partial x_n} + \left[p_1\frac{\partial F}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial F}{\partial p_2} + \cdots + p_n\frac{\partial F}{\partial p_n}\right]\frac{\partial F_i}{\partial z} - \left[\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial F}{\partial z}\right]\frac{\partial F_i}{\partial p_1} - \left[\frac{\partial F}{\partial x_2} + p_2\frac{\partial F}{\partial z}\right]\frac{\partial F_i}{\partial p_2} + \cdots \cdots - \left[\frac{\partial F}{\partial x_n} + p_n\frac{\partial F}{\partial z}\right]\frac{\partial F_i}{\partial p_n} = 0,$$

имѣемъ линейное уравненіе въ отношеніи частныхъ производныхъ F_i, интегрированіе котораго на основаніи (§§ 8, 9; II) приводится къ

Digitized by Google

интегрированію слѣдующей системы обыкновенныхъ совокупныхъ уравненій

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \frac{dx_2}{\frac{\partial F}{\partial p_2}} = \cdots = \frac{dx_n}{\frac{\partial F}{\partial p_n}} = \frac{dz}{p_1\frac{\partial F}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial F}{\partial p_2} + \cdots + p_n\frac{\partial F}{\partial p_n}} =$$

$$= \frac{-dp_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{-dp_2}{\frac{\partial F}{\partial x_2} + p_2\frac{\partial F}{\partial z}} = \cdots = \frac{-dp_n}{\frac{\partial F}{\partial x_n} + p_n\frac{\partial F}{\partial z}} \quad (10)$$

§ 12. Обративъ вниманіе на число и видъ уравненій (8), къ интегрированію которыхъ приведена теперь разсматриваемая нами задача, легко замѣтить, что случай двухъ независимыхъ перемѣнныхъ по простотѣ своей стоитъ отдѣльно отъ прочихъ. Дѣйствительно, когда $n = 2$, тогда въ дополненіе къ данному уравненію

$$F(x_1, x_2, z, p_1, p_2) = 0$$

нужно опредѣлить еще одно уравненіе

$$F_1(x_1, x_2, z, p_1, p_2) = a_1,$$

котораго первая часть F_1 должна повѣрять единственное условіе

$$(F; F_1) = 0.$$

Оно выражается, какъ мы видѣли, линейнымъ уравненіемъ въ отношеніи частныхъ производныхъ функціи F_1, интегрированіе котораго приводится къ интегрированію системы обыкновенныхъ совокупныхъ уравненій (10), принимающей въ настоящемъ случаѣ слѣдующій видъ:

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \frac{dx_2}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \frac{dz}{p_1\frac{\partial F}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial F}{\partial p_2}} =$$

$$\frac{-dp_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{-dp_2}{\frac{\partial F}{\partial x_2} + p_2\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Притомъ очевидно достаточно опредѣлить только одинъ интегралъ $F_1 = a_1$, этой системы, заключающій по крайней мѣрѣ одну изъ величинъ p_1, p_2 и произвольное постоянное a_1. Помощію этого интеграла и даннаго уравненія опредѣлятся выраженія p_1 и p_2; затѣмъ интегрированіе уравненія

$$dz - p_1\,dx_1 - p_2\,dx_2 = 0,$$

по вставкѣ этихъ выраженій умноженнаго, если необходимо, на факторъ интегрируемости, доставитъ искомый полный интегралъ.

Digitized by Google

Для приложенія этого способа возьмемъ напримѣръ уравненіе

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^2+1\right]+(a-z)\frac{\partial z}{\partial x_2}=0,$$

или

$$p_1(p_2^2+1)+(a-z)p_2=0.$$

Предъидущая система совокупныхъ уравненій приметъ въ настоящемъ случаѣ слѣдующій видъ

$$\frac{dx_1}{p_2^2+1}=\frac{dx_2}{2p_1p_2+a-z}=\frac{dz}{3p_1p_2^2+(a-z)p_1+p_2}=$$

$$=\frac{dp_1}{p_1p_2}=\frac{dp_2}{p_2^2}.$$

Взявъ уравненіе, составляемое первымъ и послѣднимъ отношеніями и интегрируя его, получимъ

$$a_1+x_1=p_2-\frac{1}{p_2}.$$

Отсюда и помощію даннаго уравненія находимъ

$$p_1=\frac{z-a}{\pm 2\sqrt{\frac{(x_1+a_1)^2}{4}+1}},\quad p_2=\frac{x_1+a_1}{2}\pm\sqrt{\frac{(x_1+a_1)^2}{4}+1}.$$

Вставивъ значенія p_1 и p_2 въ уравненіе $dz-p_1\,dx_1-p_2\,dx_2=0$, имѣемъ

$$dz-\frac{z-a}{\pm 2\sqrt{\frac{(x_1+a_1)^2}{4}+1}}dx_1-$$

$$-\left(\frac{x_1+a_1}{2}\pm\sqrt{\frac{(x_1+a_1)^2}{4}+1}\right)dx_2=0.$$

Умноживъ послѣднее уравненіе на

$$\pm\sqrt{\frac{(x_1+a_1)^2}{4}+1}-\frac{x_1+a_1}{2},$$

приведемъ его къ слѣдующему виду

$$d.\left\{(z-a)\left(\pm\sqrt{\frac{(x_1+a_1)^2}{4}+1}-\frac{x_1+a_1}{2}\right)-x_2\right\}=0.$$

Digitized by Google

Слѣдовательно полный интегралъ даннаго уравненія будетъ

$$(z-a)\left[\pm\sqrt{\frac{(x_1+a_1)^2}{4}+1}-\frac{x_1+a_1}{2}\right]-x_2=a_2,$$

или

$$z-a=\left[\pm\sqrt{\frac{(x_1+a_1)^2}{4}+1}+\frac{x_1+a_1}{2}\right](x_2+a_2).$$

Если возьмемъ изъ системы совокупныхъ уравненіе, составляемое двумя послѣдними отношеніями, то интегрируя его, получимъ

$$p_1=\alpha_1\,p_2,$$

означивъ α_1 новое произвольное постоянное. Помощію этого уравненія и даннаго находимъ

$$p_1=\alpha_1\sqrt{\frac{z-a}{\alpha_1}-1},\qquad p_2=\sqrt{\frac{z-a}{\alpha_1}-1}.$$

поэтому

$$dz-p_1\,dx_1-p_2\,dx_2=dz-(\alpha_1\,dx_1+dx_2)\sqrt{\frac{z-a}{\alpha_1}-1}=0.$$

Раздѣливъ это уравненіе на $\sqrt{\frac{z-a}{\alpha_1}-1}$ и интегрируя, находимъ полный интегралъ даннаго уравненія еще въ другомъ видѣ

$$2\sqrt{\alpha_1}\sqrt{z-a-\alpha_1}-(\alpha_1 x_1+x_2)=\alpha_2,$$

или

$$z-a=\frac{(\alpha_1 a_1+x_2+\alpha_2)^2}{4\alpha_1}+\alpha_1,$$

гдѣ α_2 означаетъ второе произвольное постоянное.

Предъидущій способъ интегрированія уравненія съ частными производными при двухъ независимыхъ перемѣнныхъ указанъ Лагранжемъ еще въ 1772 году.

Линейное уравненіе, къ интегрированію котораго онъ приводитъ задачу, не имѣетъ симметрическаго вида $(F;\ F_1)=0$, но заключаетъ менѣе перемѣнныхъ. Изложимъ въ немногихъ словахъ пріемъ Лагранжа.

Частныя производныя p_1 и p_2 должно разсматривать какъ функціи x_1, x_2, z, при чемъ достаточно опредѣлить одну изъ нихъ, такъ какъ значеніе другой выведется изъ даннаго уравненія

$$F(x_1, x_2, z\,p_1, p_2)=0.$$

Если это значеніе вставимъ обратно въ тоже уравненіе, оно обратится въ тождество; слѣдовательно мы можемъ дифференциро-

Digitized by Google

вать его не только въ отношеніи x_1, но и z, какъ независимыхъ перемѣнныхъ. Такимъ образомъ получимъ

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial x_1} = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial z} = 0.$$

Присоединивъ сюда еще условіе интегрируемости

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_2} + \frac{\partial p_1}{\partial z}p_2 = \frac{\partial p_2}{\partial x_1} + \frac{\partial p_2}{\partial z}p_1$$

и исключая изъ трехъ предъидущихъ уравненій частныя производныя функціи p_2, получимъ линейное уравненіе въ отношеніи частныхъ производныхъ функціи p_1:

$$\frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial p_2}\cdot\frac{\partial p_1}{\partial x_2} + \left[p_1\frac{\partial F}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial F}{\partial p_2}\right]\frac{\partial p_1}{\partial z} + \\ + \frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

въ коеффиціентахъ котераго p_2 должно замѣнить его значеніемъ, выведеннымъ изъ даннаго уравненія $F = 0$. Поэтому p_1 опредѣлится какъ функція x_1, x_2, z; затѣмъ значеніе функціи p_2 выведется изъ даннаго уравненія. Обѣ функціи выполнятъ условіе интегрируемости, которое принято въ основаніи при ихъ опредѣленіи; слѣдовательно, по вставкѣ ихъ значеній, уравненіе

$$dz - p_1\,dx_1 - p_2\,dx_2 = 0$$

можетъ быть интегрируемо и интегралъ его будетъ рѣшеніемъ разсматриваемой задачи.

Должно замѣтить, что предъидущее линейное уравненіе приводитъ къ системѣ совокупныхъ

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \frac{dx_2}{\frac{\partial F}{\partial p_2}} = \frac{dz}{p_1\frac{\partial F}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial F}{\partial p_2}} = \frac{-dp_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial F}{\partial z}}$$

очевидно той-же самой, которую мы имѣли выше, если въ ней отбросить послѣднее отношеніе и замѣнить p_2 его значеніемъ, выведеннымъ изъ уравненія $F = 0$. Поэтому оба пріема въ сущности совершенно одинаковы и приведутъ къ одному и тому-же рѣшенію, если ограничимся выводомъ одного интеграла предъидущей системы совокупныхъ уравненій, заключающаго p_1 и произвольное постоянное. Но Лагранжъ полагалъ сначала, что для выраженія p_1 должно

Digitized by Google

опредѣлить общій интегралъ предъидущаго линейнаго уравненія, который долженъ быть вида

$$\varphi_3 = \pi(\varphi_1, \varphi_2),$$

если интегралы соотвѣтствующей системы совокупныхъ уравненій разрѣшенные относительно произвольныхъ постоянныхъ означимъ

$$\varphi_1(x_1, x_2, z, p_1) = \text{const} = \alpha, \qquad \varphi_2(x_1, x_2, z, p_1) = \text{const} = \beta,$$

$$\varphi_3(x_1, x_2, z, p_1) = \text{const} = \gamma$$

и знакомъ π представимъ произвольную функцію

Полагая, что изъ уравненія представляющаго общій интегралъ можно вывести значеніе p_1, не давая частнаго вида функціи π, мы будемъ имѣть ее также въ выраженіи p_2, а слѣд. и въ выраженіи общаго интеграла даннаго уравненія $F = 0$. Между тѣмъ какъ очевидно изъ первообразной зависимости между x_1, x_2 и z вида

$$f[x_1, x_2, z, \pi(\varphi_1, \varphi_2)] = 0,$$

гдѣ f данная и π произвольная функціи, и двухъ уравненій получаемыхъ дифференцированіемъ предъидущаго въ отношеніи x_1 и x_2, не возможно исключить трехъ функцій π, $\frac{\partial\pi}{\partial\varphi_1}$, $\frac{\partial\pi}{\partial\varphi_2}$.

Въ calcul des fonctions (p. 390) Лагранжъ предлагаетъ соображенія, разрѣшающія это противорѣчіе. Но должно замѣтить, что оно вовсе не встрѣтится, если сообразно совершенно вѣрному замѣчанію Charpit (*), вмѣсто общаго интеграла линейнаго уравненія возьмемъ частный, заключающій перемѣнное p_1. Послѣдній пріемъ приводитъ вмѣсто общаго къ полному интегралу даннаго уравненія $F = 0$ и имѣетъ еще то преимущество, что не требуетъ полнаго интегрированія системы совокупныхъ уравненій. Лагранжъ въ заключеніе своего объясненія указываетъ и на этотъ пріемъ, не упоминая впрочемъ имени Шарпи, которому онъ принадлежитъ.

§ 13. Если число независимыхъ перемѣнныхъ въ уравненіи съ частными производными 1-го порядка болѣе двухъ, то задача интегрированія его получаетъ болѣе сложный характеръ. Дѣйствительно уже при трехъ независимыхъ перемѣнныхъ требуется (на осн. §§ 10 и 11) по данной функціи F перемѣнныхъ $x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3$, составляющей 1-ю часть даннаго уравненія $F = 0$, опредѣлить двѣ функціи F_1, F_2 тѣхъ же перемѣнныхъ, удовлетворяющія условія

$$(F;\ F_1) = 0 \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} (F;\ F_2) = 0 \\ (F_1;\ F_2) = 0 \end{cases}.$$

(*) Mémoire présenté à l'Acad. des Sciences par Charpit, le 30 juin, 1784.

Digitized by Google

Слѣд. функція F_1 можетъ быть опредѣлена, также какъ въ случаѣ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ,—какъ частный интегралъ 1-го линейнаго уравненія; но для опредѣленія F_2 должно найти частный интегралъ, удовлетворяющій совокупно два остальныя линейныя уравненія съ частными производными.

Если число независимыхъ перемѣнныхъ будетъ n, то по данной функціи F перемѣнныхъ $x_1, .. x_n, z, p_1, .. p_n$, составляющей 1-ю часть даннаго уравненія $F = 0$, должно опредѣлить $n-1$ функцій $F_1, F_2, .. F_{n-1}$ тѣхъ же перемѣнныхъ, удовлетворяющихъ условія

$$(F; F_1) = 0; \quad \begin{cases} (F; F_2) = 0 \\ (F_1; F_2) = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} (F; F_3) = 0 \\ (F_1; F_3) = 0 \\ (F_2; F_3) = 0 \end{cases}; \ldots$$

$$\begin{cases} (F; \quad F_{n-1}) = 0 \\ (F_1; \quad F_{n-1}) = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (F_{n-2}; F_{n-1}) = 0 \end{cases}$$

Функція F_1 опредѣлится какъ частный интегралъ 1-го изъ предъидущихъ уравненій; F_2—какъ частный интегралъ, удовлетворяющій совокупно 2-е и 3-е уравненія; и т. д. наконецъ F_{n-1} должна быть частнымъ интеграломъ, удовлетворяющимъ совокупно $n-1$ послѣднихъ уравненій.

Такимъ образомъ представлена задача интегрированія уравненія съ частными производными 1-го порядка въ сочиненіи Якоби Nova methodus etc (Jour. v. Crelle B. LX.). Хотя этотъ новый пріемъ рѣшенія по времени открытія представился позже другихъ, но по сущности онъ составляетъ прямое продолженіе первыхъ шаговъ, сдѣланныхъ въ теоріи разсматриваемаго нами вопроса Лагранжемъ и Шарпи. Поэтому я изложу его прежде другаго способа рѣшенія, предложеннаго Пфаффомъ и усовершенствованнаго также Якоби и Коши.

§ 14. Якоби начинаетъ упрощеніемъ даннаго уравненія

(a) $$F(x_1, .. x_n, z, p_1, .. p_n) = 0,$$

преобразуя его въ другое, также съ частными производными 1-го порядка, но въ которомъ сама неизвѣстная функція не войдетъ непосредственно и независимыхъ перемѣнныхъ будетъ однимъ болѣе.

Но при этомъ преобразованіи вкрался недосмотръ, замѣченный г. Бертраномъ, состоящій въ томъ, что Якоби связываетъ новую неизвѣстную функцію съ прежнею частнаго вида зависимостію, вслѣдствіе чего переходъ отъ интеграла преобразованнаго уравненія къ интегралу даннаго становится въ большей части случаевъ невозможнымъ.

Digitized by Google

Дѣйствительно, вводя новое независимое перемѣнное t и означивъ новую неизвѣстную функцію γ, слѣдуя Якоби положимъ

$$\gamma = zt.$$

Отсюда, дифференцируя по каждому изъ независимыхъ перемѣнныхъ, находимъ

$$z = \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \quad \frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{1}{t}\frac{\partial \gamma}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n} = \frac{1}{t}\frac{\partial \gamma}{\partial x_n}$$

Вставивъ предъидущія значенія функціи z и ея частныхъ производныхъ въ данное уравненіе, преобразуемъ его въ слѣдующее:

$$F\left(x_1, \ldots x_n, \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{1}{t}\frac{\partial \gamma}{\partial x_1}, \ldots \frac{1}{t}\frac{\partial \gamma}{\partial x_n}\right) = 0.$$

Въ этомъ уравненіи независимыхъ перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_n$, t однимъ болѣе, чѣмъ въ данномъ, неизвѣстная же функція γ входитъ только посредствомъ ея частныхъ производныхъ 1-го порядка.

Но чтобъ изъ интеграла преобразованнаго такимъ образомъ уравненія возможно было получить интегралъ даннаго, необходимо, согласно предположенной между ними связи, чтобы въ первомъ независимое перемѣнное t входило только общимъ множителемъ, что очевидно можетъ быть только въ исключительныхъ случаяхъ. Слѣдовательно предъидущее преобразованіе въ большей части случаевъ не достигаетъ предположенной цѣли; поэтому лучше не предполагать произвольно вида зависимости между двумя интегралами, но употребить для преобразованія тотъ-же общій пріемъ, которымъ мы пользовались при интегрированіи линейныхъ уравненій съ частными производными.

Дѣйствительно, представивъ интегралъ даннаго уравненія такимъ образомъ

$$\gamma(x_1, \ldots x_n, z) = 0$$

и дифференцируя его по каждому изъ независимыхъ перемѣнныхъ, находимъ, для каждаго изъ значеній $i = 1, 2, \ldots n$,

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x_i} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} p_i = 0, \qquad \text{откуда} \quad p_i = -\frac{\dfrac{\partial \gamma}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial \gamma}{\partial z}}$$

по вставкѣ этихъ значеній p_i данное уравненіе приметъ видъ

$$F\left(x_1, \ldots x_n, z, -\frac{\dfrac{\partial \gamma}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial \gamma}{\partial z}}, \ldots -\frac{\dfrac{\partial \gamma}{\partial x_n}}{\dfrac{\partial \gamma}{\partial z}}\right) = 0. \qquad (b)$$

Digitized by Google

Въ послѣднемъ уравненіи должно разсматривать независимыми перемѣнными $x_1, .. x_n, z$. Способъ Якоби, какъ мы сейчасъ увидимъ, доставляетъ полный интегралъ предъидущаго уравненія въ видѣ явной функціи γ:

$$\gamma = f(x_1, .. x_n, a_1, a_2, .. a_n) + a_{n+1}, \qquad (c)$$

гдѣ $a_1, .. a_n, a_{n+1}$ означаютъ произвольныя постоянныя. Слѣдоват., отнявъ отъ второй части предъидущаго равенства просто приданное произвольное постоянное a_{n+1} и уравнявъ ее нулю, получимъ интегралъ даннаго уравненія въ видѣ неявной функціи z, опредѣляемой уравненіемъ

$$\gamma - a_{n+1} = 0, \quad \text{или} \quad f(x_1, .. x_n, z, a_1, a_2, .. a_n) = 0 \qquad (d)$$

Дѣйствительно, такъ какъ уравненіе (c) представляетъ интегралъ уравненія (b), то вставивъ въ послѣднее функцію f вмѣсто γ, получимъ тождество

$$F\left(x_1, .. x_n, z, -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial z}}, \ldots -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_n}}{\frac{\partial f}{\partial z}}\right) = 0, \qquad (f)$$

имѣющее мѣсто при всякихъ значеніяхъ перемѣнныхъ $x_1, .. x_n, z$. Пусть теперь послѣднее изъ нихъ опредѣлится какъ функція всѣхъ остальныхъ посредствомъ уравненія (d), тогда оно будетъ интеграломъ уравненія (a); потому что изъ уравненія (d) находимъ

$$\frac{dz}{dx_1} = p_1 = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial z}}, .. \quad \frac{dz}{dx_1} = p_n = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_n}}{\frac{\partial f}{\partial x_1}}$$

и вставивъ эти значенія частныхъ производныхъ въ уравненіе (a), снова получимъ тождество (f), имѣющее мѣсто для всякаго значенія z, слѣд. и для того, которое выведется изъ уравненія (d).

И такъ доказано, что интегрированіе уравненія, въ которое неизвѣстная функція входитъ не только посредствомъ частныхъ производныхъ 1-го порядка, но и непосредственно, всегда можетъ быть приведено къ интегрированію другаго, въ кототоромъ независимыхъ перемѣнныхъ будетъ однимъ болѣе и неизвѣстная функція войдетъ только посредствомъ ея частныхъ производныхъ перваго порядка.

§ 15. Если въ данное уравненіе неизвѣстная функція входитъ только посредствомъ частныхъ производныхъ 1-го порядка, то общій типъ его можно представить такимъ образомъ

$$H\left(x_1, .. x_n, \frac{dz}{dx_1}, .. \frac{dz}{dx_n}\right) = a$$

Digitized by Google

или $H(x_1, .. x_n, p_1, .. p_n) = a$, полагая вообще $p_i = \frac{dz}{dx_i}$.

Здѣсь H означаетъ данную функцію, a — опредѣленное постоянное, которое можетъ быть также равно нулю.

Задача полнаго интегрированія предъидущаго уравненія можетъ быть приведена къ опредѣленію $n-1$ уравненій

$$H_1 = a_1, \quad H_2 = a_2, \quad \ldots \quad H_{n-1} = a_{n-1},$$

въ которыхъ $a_1, a_2, .. a_{n-1}$ означаютъ произвольныя постоянныя, $H_1, .. H_{n-1}$,—также какъ H,—функціи перемѣнныхъ $x_1, .. x_n$ и частныхъ производныхъ $p_1, .. p_n$, независимыя между собою въ отношеніи послѣднихъ (*) и несодержащія произвольныхъ постоянныхъ $a_1, .. a_{n-1}$. Если функціи $H_1, .. H_{n-1}$ будутъ опредѣлены такимъ образомъ, что выведенныя изъ уравненій

$$H = a, \quad H_1 = a_1, \quad \ldots \quad H_{n-1} = a_{n-1} \tag{1}$$

значенія $p_1, p_2, .. p_n$ обратятъ 2-ю часть уравненія

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n \tag{2}$$

въ точный дифференціалъ, то искомый полный интегралъ получится посредствомъ интегрированія послѣдняго уравненія и будетъ вида

$$z = f(x_1, .. x_n, a_1, .. a_{n-1}) + a_n.$$

По предположенію функціи $H, H_1, .. H_{n-1}$ не содержатъ z, слѣдовательно значенія $p_1, .. p_n$, выведенныя изъ уравненій (1) выразятся посредствомъ однихъ независимыхъ перемѣнныхъ $x_1, .. x_n$ и условія интегрируемости 2-й части уравненія (2) будутъ въ настоящемъ случаѣ вида

$$\frac{dp_i}{dx_k} = \frac{dp_k}{dx_i}. \tag{3}$$

Предположивъ что значенія $p_1, .. p_n$, выведенныя изъ уравненій (1), выполняютъ условія (3), можемъ вывести условія, которыя должны въ такомъ случаѣ выполнять функціи $H_1, H_2, .. H_{n-1}$, точно такимъ же образомъ, какимъ найдены въ § 11 подобныя условія для функцій $F_1, .. F_{n-1}$. Поэтому для избѣжанія повтореній ограничимся замѣчаніемъ, что выводы § 12 приложатся къ настоящему случаю, если въ нихъ замѣнимъ $F, F_1, .. F_{n-1}$ соотвѣтственно на $H, H_1, ..$

(*) т. е. между функціями $H, H_1, .. H_{n-1}$ не должно быть никакого необходимаго отношенія вида $\Phi(H, H_1, .. H_{n-1}, x_1, .. x_n) = 0$, въ которое не входятъ явнымъ образомъ перемѣнныя $p_1, .. p_n$. На основ. § 3 это условіе будетъ выполнено, если функціональный опредѣлитель $H, H_1, ... H_{n-1}$, разсматриваемыхъ какъ функціи $p_1, p_2, .. p_n$, не будетъ равенъ нулю.

Digitized by Google

H_{n-1} и отбросимъ скобки, заключающія частныя производныя, въ которыхъ теперь нѣтъ надобности, потому что разсматриваемыя функціи не содержатъ болѣе x.

На основаніи предъидущаго заключаемъ что каждыя двѣ изъ функцій $H, H_1, \ldots H_{n-1}$ должны удовлетворять условіе

$$\frac{\partial H_i}{\partial x_1}\frac{\partial H_k}{\partial p_1} - \frac{\partial H_i}{\partial p_1}\frac{\partial H_k}{\partial x_1} + \frac{\partial H_i}{\partial x_2}\frac{\partial H_k}{\partial p_2} - \frac{\partial H_i}{\partial p_2}\frac{\partial H_k}{\partial x_2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\partial H_i}{\partial x_n}\frac{\partial H_k}{\partial p_n} - \frac{\partial H_i}{\partial p_n}\frac{\partial H_k}{\partial x_n} = 0, \tag{4}$$

которое условно представляютъ такимъ образомъ

$$(H_i, H_k) = 0. \tag{5}$$

Полагая въ уравненіи (5) послѣдовательно $i = 0, 1, 2, \ldots n-2$ (при этомъ принимая $H_0 = H$) и для каждаго значенія i давая указателю k всѣ значенія большія до $n-1$ включительно, получимъ всѣ $\frac{n(n-1)}{2}$ условій, вытекающихъ изъ формулы (5), которыя можно расположить въ слѣдующемъ порядкѣ

$$(H, H_1) = 0, \quad \left.\begin{matrix}(H, H_2) = 0\\ (H_1, H_2) = 0\end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix}(H, H_3) = 0\\ (H_1, H_3) = 0\\ (H_2, H_3) = 0\end{matrix}\right\}, \ldots$$

$$\left.\begin{matrix}(H, H_{n-1}) = 0\\ (H_1, H_{n-1}) = 0\\ (H_2, H_{n-1}) = 0\\ \cdots\\ \cdots\\ (H_{n-2}, H_{n-1}) = 0\end{matrix}\right\} \tag{6}$$

Разсматривая эти условія какъ дифференціальныя уравненія, служащія для опредѣленія искомыхъ функцій, можемъ найти H_1 интегрированіемъ перваго уравненія; вставивъ значеніе H_1 въ уравненія 2-й строки, должно опредѣлить H_2 какъ интегралъ, удовлетворяющій два совокупныя уравненія втораго столбца; вставивъ значеніе H_2 въ уравненія 3-й строки, должно опредѣлить функцію H_3 какъ интегралъ удовлетворяющій совокупно три уравненія 3-го столбца. И такъ далѣе.

Но чтобы выполнить этотъ планъ рѣшенія, надобно найти способъ интегрированія двухъ совокупныхъ уравненій 2-го столбца, трехъ 3-го, наконецъ $n-1$ уравненія $n-1$-го.

Кромѣ того всѣ уравненія (6) однообразной формы и содержатъ каждое $2n$ независимыхъ перемѣнныхъ; но ясно, что можно воспользоваться данным уравненіемъ $H = a$ и постепенно опредѣле-

Digitized by Google

мыми уравненіями $H_1 = a_1$, $H_2 = a_2$, ... такъ чтобы при переходѣ къ каждой новой группѣ совокупныхъ уравненій понижать въ нихъ болѣе и болѣе первоначальное число $2n$ независимыхъ перемѣнныхъ.

Наконецъ, замѣтимъ еще, что мы доказали, если выведенныя изъ уравненій (1) значенія $p_1, .. p_n$ повѣряютъ условія (3), то функціи $H_1, H_2, .. H_{n-1}$ удовлетворятъ уравненія (6). Но чтобы имѣть право принять эти послѣднія для опредѣленія функцій $H_1, .. H_{n-1}$, должно быть увѣреннымъ и въ обратномъ заключеніи, т. е. доказать что если независимыя между собою (въ томъ смыслѣ какъ объяснено выше) функціи $H, H_1, .. H_{n-1}$ повѣряютъ условія (6), то уравнявъ ихъ произвольнымъ постояннымъ получимъ уравненія, изъ которыхъ выведенныя значенія $p_1, .. p_n$ удовлетворятъ условія (3).

Ближайшее изученіе свойствъ выраженія (H_i, H_k), изложенное въ слѣдующихъ 2-хъ §§, дастъ средства достигнуть упомянутыхъ выше цѣлей и кромѣ того позволитъ вывести еще другія заключенія, полезныя въ примѣненіи къ интегрированію совокупныхъ уравненій какъ обыкновенныхъ, такъ и съ частными производными 1-го порядка.

IV.

§ 16. Положимъ φ и ψ означаютъ какія нибудь двѣ функціи перемѣнныхъ $x_1, .. x_n$, $p_1, .. p_n$. Возьмемъ частныя производныя этихъ двухъ функцій сначала по перемѣннымъ $x_1, .. x_n$; потомъ по $p_1, .. p_n$ и напишемъ первыя подъ вторыми въ слѣдующемъ порядкѣ:

$$\frac{d\varphi}{dx_1}, \frac{d\psi}{dx_1}, \frac{d\varphi}{dx_2}, \frac{d\psi}{dx_2}, \quad \cdots \quad \frac{d\varphi}{dx_n}, \frac{d\psi}{dx_n}$$

$$\frac{d\varphi}{dp_1}, \frac{d\psi}{dp_1}, \frac{d\varphi}{dp_2}, \frac{d\psi}{dp_2}, \quad \cdots \quad \frac{d\varphi}{dp_n}, \frac{d\psi}{dp_n}.$$

Разбивъ два предъидущіе ряда членовъ на группы такъ, чтобы первую составляли два первые члена перваго и 2-го ряда, вторую два слѣдующіе члена 1-го и 2-го ряда и т. д.—перемножимъ производныя каждой группы на крестъ, причемъ произведенія по направленію однихъ діагоналей возьмемъ съ +, по направленію другихъ съ —. Такимъ образомъ получимъ рядъ опредѣлителей 2-го порядка, которыхъ сумма составитъ выраженіе

$$\begin{vmatrix} \frac{d\varphi}{dx_1}, & \frac{d\psi}{dx_1} \\ \frac{d\varphi}{dp_1}, & \frac{d\psi}{dp_1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{d\varphi}{dx_2}, & \frac{d\psi}{dx_2} \\ \frac{d\varphi}{dp_2}, & \frac{d\psi}{dp_1} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \frac{d\varphi}{dx_n}, & \frac{d\psi}{dx_n} \\ \frac{d\varphi}{dp_n}, & \frac{d\psi}{dp_n} \end{vmatrix},$$

означаемое условно такимъ образомъ (φ, ψ).

Digitized by Google

И такъ по предъидущему опредѣленію имѣемъ

$$(1)\ (\varphi, \psi) = \Sigma_i \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, & \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}, & \frac{\partial \psi}{\partial p_i} \end{vmatrix} = \Sigma_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right),$$

распространяя сумму на всѣ значенія i отъ 1 до n.

Изслѣдуя измѣненія вида выраженія (φ, ψ), при различныхъ предположеніяхъ относительно φ и ψ, замѣтимъ сначала слѣдующіе очевидные выводы:

$$(2)\quad (\varphi, \varphi) = 0,\quad (\varphi, \psi) = -(\psi, \varphi),\quad (-\varphi, \psi) = -(\varphi, \psi)$$

$$(3)\begin{cases} (x_i, \psi) = \frac{\partial \psi}{\partial p_i},\quad (p_i, \psi) = -\frac{\partial \psi}{\partial x_i},\quad (a = \text{const.}, \psi) = 0, \\ (x_i, p_i) = -(p_i, x_i) = 1,\quad (x_i, x_k) = (p_i, p_k) = (x_i, p_k) = 0. \end{cases}$$

Относительно вида зависимости функцій φ и ψ отъ перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n$ мы не сдѣлали никакого ограниченія, поэтому положимъ, что эти перемѣнныя входятъ въ разсматриваемыя функціи явнымъ и неявнымъ образомъ. Пусть напр.

$$\varphi = F(x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n, a_1, \ldots a_r),$$
$$\psi = f(x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n, b_1, \ldots b_s),$$

гдѣ $a_1, \ldots a_r$ и $b_1, \ldots b_s$ означаютъ функціи $x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n$.

На основаніи опредѣленія имѣемъ

$$[F, f] = \Sigma_i \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right), & \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \\ \left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\right), & \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \end{vmatrix} =$$

$$\Sigma_i \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial a_r}\frac{\partial a_r}{\partial x_i}, & \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial b_1}\cdot\frac{\partial b_1}{\partial x_i} + \ldots \\ & \ldots + \frac{\partial f}{\partial b_s}\frac{\partial b_s}{\partial x_i} \\ \frac{\partial F}{\partial p_i} + \frac{\partial F}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_i} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial a_r}\frac{\partial a_r}{\partial p_i}, & \frac{\partial f}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial b_1}\cdot\frac{\partial b_1}{\partial p_i} + \ldots \\ & \ldots + \frac{\partial f}{\partial b_s}\cdot\frac{\partial b_s}{\partial p_i} \end{vmatrix}$$

Digitized by Google

Примѣняя послѣдовательно очевидныя формулы

$$\begin{vmatrix} A+a, & A' \\ B+b, & B' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A, & A' \\ B, & B' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a, & A' \\ b, & B' \end{vmatrix} \qquad (4)$$

$$\begin{vmatrix} mA, & nA' \\ mB, & nB' \end{vmatrix} = mn \begin{vmatrix} A, & A' \\ B, & B' \end{vmatrix},$$

выводимъ отсюда $[F, f] = (F, f) +$

$$+ \frac{\partial f}{\partial b_1}(F, b_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial b_s}(F, b_s) + \frac{\partial F}{\partial a_1}(a_1, f) + \cdots + \frac{\partial F}{\partial a_r}(a_r, f) +$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial a_1}\frac{\partial f}{\partial b_1}(a_1, b_1) + \frac{\partial F}{\partial a_1}\frac{\partial f}{\partial b_2}(a_1, b_2) + \cdots + \frac{\partial F}{\partial a_1}\frac{\partial f}{\partial b_s}(a_1, b_s) +$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial a_2}\frac{\partial f}{\partial b_1}(a_2, b_1) + \frac{\partial F}{\partial a_2}\frac{\partial f}{\partial b_2}(a_2, b_2) + \cdots + \frac{\partial F}{\partial a_2}\frac{\partial f}{\partial b_s}(a_2, b_s) +$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial a_r}\frac{\partial f}{\partial b_1}(a_r, b_1) + \frac{\partial F}{\partial a_r}\frac{\partial f}{\partial b_2}(a_r, b_2) + \cdots + \frac{\partial F}{\partial a_r}\frac{\partial f}{\partial b_1}(a_r, b_s) \cdot$$

или $$[F, f] = (F, f) + \Sigma_k \frac{\partial f}{\partial b_k}(F, b_k) + \Sigma_i \frac{\partial F}{\partial a_i}(a_i, f) +$$

$$\Sigma_i \Sigma_k \frac{\partial F}{\partial a_i}\frac{\partial f}{\partial b_k}(a_i, b_k). \qquad (5)$$

Ясно, что здѣсь выраженія $[F, f]$ и (F, f) не имѣютъ одного и того-же значенія: первое предполагаетъ полную измѣняемость функцій F и f, вслѣдствіе измѣненія перемѣнныхъ, входящихъ какъ явнымъ, такъ и неявнымъ образомъ; второе — только частную ихъ измѣняемость, вслѣдствіе измѣненія перемѣнныхъ входящихъ явно.

Вообще не трудно замѣтить аналогію между дѣйствіемъ, выражаемымъ знакомъ $[F, f]$ и дифференцированіемъ сложныхъ функцій. Дѣйствительно можно получить всѣ члены второй части формулы (5), принимая во вниманіе поочередно только по одному элементу измѣняемости двухъ функцій F и f.

Полагая $s = r$ и $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, .. $a_r = b_r$, изъ формулы (5) находимъ

$$[F, f] = (F, f) + \Sigma_i \left\{ (F, a_i)\frac{\partial f}{\partial a_i} - (f, a_i)\frac{\partial F}{\partial a_i} \right\} +$$

$$+ \Sigma_{i,k} \left(\frac{\partial F}{\partial a_i}\frac{\partial f}{\partial a_k} - \frac{\partial F}{\partial a_k}\frac{\partial f}{\partial a_i} \right)(a_i, a_k); \qquad (6)$$

Digitized by Google

въ послѣдней суммѣ 2-й части должно полагать послѣдовательно $i = 1, 2, .. r-1$ и для каждаго значенія i брать для k всѣ значенія большія до r включительно.

Если функціи F и f не содержатъ перемѣнныхъ $x_1, .. x_n$, $p_1, .. p_n$ явнымъ образомъ, то формула (6) приметъ слѣдующій видъ

$$(7) \qquad [F, f] = \Sigma_{i,k} \left(\frac{\partial F}{\partial a_i} \frac{\partial f}{\partial a_k} - \frac{\partial E}{\partial a_k} \frac{\partial f}{\partial a_i} \right) (a_i a_k).$$

Если функція F содержитъ перемѣнныя $x_1, .. x_n$, $p_1, .. p_n$ только явнымъ образомъ, а функція f — только посредствомъ функцій $a_1, .. a_r$, то по формулѣ (6) получимъ

$$[F, f] = \Sigma_i (F, a_i) \frac{\partial f}{\partial a_i} = (F, a_1) \frac{\partial f}{\partial a_1} + (F, a_2) \frac{\partial f}{\partial a_2} + ..$$

$$(8) \qquad .. + (F, a_r) \frac{\partial f}{\partial a_r}.$$

Выраженія частныхъ производныхъ отъ (φ, ψ) получаются очень просто. Означивъ черезъ u одно изъ перемѣнныхъ $x_1, .. x_n, p_1, .. p_n$, находимъ

$$\frac{\partial (\varphi, \psi)}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \Sigma_i \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, & \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}, & \frac{\partial \psi}{\partial p_i} \end{vmatrix} =$$

$$= \Sigma_i \begin{vmatrix} \partial . \frac{\partial \varphi}{\partial u} \\ \frac{\partial x_i}{\partial x_i}, & \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \\ \partial . \frac{\partial \varphi}{\partial u} \\ \frac{\partial p_i}{\partial p_i}, & \frac{\partial \psi}{\partial p_i} \end{vmatrix} + \Sigma_i \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, & \partial . \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial x_i}{\partial x_i} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}, & \partial . \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial p_i}{\partial p_i} \end{vmatrix},$$

$$(9) \text{ или } \qquad \frac{\partial (\varphi, \psi)}{\partial u} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \psi \right) + \left(\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial u} \right).$$

Хотя въ теоріи интегрированія уравненій съ частными производными 1-го порядка мы не встрѣтимъ надобности въ производныхъ высшихъ порядковъ отъ (φ, ψ), однако замѣтимъ кстати весьма простой видъ ихъ выраженія, подобный тому, который Лейбницъ далъ для

$$\frac{d^n \varphi (x) . \psi (x)}{dx^n}.$$

Digitized by Google

Дѣйствительно по формулѣ (9) находимъ

$$\frac{\partial^2(\varphi,\psi)}{\partial u^2} = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}, \varphi\right) + 2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\psi}{\partial u}\right) + \left(\varphi, \frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\right).$$

Отсюда обыкновеннымъ приложеніемъ доказательства по аналогіи заключаемъ

$$\frac{\partial^n(\varphi,\psi)}{\partial u^n} = \left(\frac{\partial^n\varphi}{\partial u^n}, \varphi\right) + n\left(\frac{\partial^{n-1}\varphi}{\partial u^{n-1}}, \frac{\partial\psi}{\partial u}\right) +$$

$$+\frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{\partial^{n-2}\varphi}{\partial u^{n-2}}, \frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\right) + \cdots + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}, \frac{\partial^{n-2}\psi}{\partial u^{n-2}}\right) +$$

$$+ n\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial^{n-1}\psi}{\partial u^{n-1}}\right) + \left(\varphi, \frac{\partial^n\psi}{\partial u^n}\right).$$

§ 17. Какъ простыя примѣненія общихъ формулъ предъидущаго § мы выведемъ всѣ теоремы, на которыхъ основывается «новый способъ интегрированія уравненій съ частными производными 1-го порядка» Якоби.

Теорема 1.

Возьмемъ три функціи A, B, C перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n$ и для краткости будемъ означать частныя производныя ихъ, приписывая къ функціи указателемъ то перемѣнное, въ отношеніи котораго произведено частное дифференцированіе. Такимъ образомъ будемъ имѣть

$$\frac{\partial A}{\partial x_i} = A_{x_i}, \quad \frac{\partial B}{\partial x_i} = B_{x_i}, \quad \frac{\partial C}{\partial x_i} = C_{x_i}$$

$$\frac{\partial A}{\partial p_i} = A_{p_i}, \quad \frac{\partial B}{\partial p_i} = B_{p_i}, \quad \frac{\partial C}{\partial p_i} = C_{p_i}.$$

Положивъ въ формулѣ (8) $F = A$, $f = (B, C) = B_{x_1} C_{p_1} - B_{p_1} C_{x_1} + \cdots + B_{x_n} C_{p_n} - B_{p_n} C_{x_n}$, находимъ

$$[A,(B,C)] = (A, B_{x_1}) C_{p_1} - (A, B_{p_1}) C_{x_1} + \cdots$$
$$\cdots + (A, B_{x_n}) C_{p_n} - (A, B_{p_n}) C_{x_n}$$
$$+ (A, C_{p_1}) B_{x_1} - (A, C_{x_1}) B_{p_1} + \cdots$$
$$\cdots + (A, C_{p_n}) B_{x_n} - (A, C_{x_n}) B_{p_n},$$

или $$[A,(B,C)] = \Sigma_i \begin{vmatrix} (A, B_{x_i}), & C_{x_i} \\ (A, B_{p_i}), & C_{p_i} \end{vmatrix} - \Sigma_i \begin{vmatrix} (A, C_{x_i}), & B_{x_i} \\ (A, C_{p_i}), & B_{p_i} \end{vmatrix} \quad (a)$$

Digitized by Google

Перемѣщеніемъ буквъ A, B, C въ круговомъ порядкѣ, находимъ

$$(b)\quad [B,(C,A)] = \Sigma_i \begin{vmatrix} (B, C_{x_i}), A_{x_i} \\ (B, C_{p_i}), A_{p_i} \end{vmatrix} - \Sigma_i \begin{vmatrix} (B, A_{x_i}), C_{x_i} \\ (B, A_{p_i}), C_{p_i} \end{vmatrix}$$

Такимъ же образомъ можно получить выраженіе $[C,(A,B)]$, но лучше употребимъ для этого другой пріемъ: на основаніи формулъ (1), (9) и (4) находимъ

$$[C,(A,B)] = \Sigma_i \begin{vmatrix} \frac{\partial C}{\partial x_i}, \frac{\partial (A,B)}{\partial x_i} \\ \frac{\partial C}{\partial p_i}, \frac{\partial (A,B)}{\partial p_i} \end{vmatrix} = \Sigma_i \begin{vmatrix} C_{x_i}, (A_{x_i}, B) \\ C_{p_i}, (A_{p_i}, B) \end{vmatrix} +$$

$$(c)\qquad + \Sigma_i \begin{vmatrix} C_{x_i}, (A, B_{x_i}) \\ C_{p_i}, (A, B_{p_i}) \end{vmatrix}$$

складывая равенства (a), (b), (c) непосредственно замѣчаемъ, что въ суммѣ вторыхъ частей ихъ произойдутъ сокращенія:

1-й суммы 2-й части равенства (a) со 2-й суммою 2-й части равенства (c), и 2-й суммы 2-й части равенства (b) съ 1-ю суммою 2-й части равенства (c), послѣ которыхъ находимъ:

$$[A,(B,C)] + [B,(C,A)] + [C,(A,B)] =$$

$$(')\qquad = \Sigma_i \begin{vmatrix} (B, C_{x_i}), A_{x_i} \\ (B, C_{p_i}), A_{p_i} \end{vmatrix} - \Sigma_i \begin{vmatrix} (A, C_{x_i}), B_{x_i} \\ (A, C_{p_i}), B_{p_i} \end{vmatrix}$$

Отсюда круговыми перемѣщеніями буквъ A, B, C, получимъ

$$[B,(C,A)] + [C,(A,B)] + [A,(B,C)] =$$

$$(b')\qquad = \Sigma_i \begin{vmatrix} (C, A_{x_i}), B_{x_i} \\ (C, A_{p_i}), B_{p_i} \end{vmatrix} - \Sigma_i \begin{vmatrix} (B, A_{x_i}), C_{x_i} \\ (B, A_{p_i}), C_{p_i} \end{vmatrix},$$

$$[C,(A,B)] + [A,(B,C)] + [B,(C,A)] =$$

$$(c')\qquad = \Sigma_i \begin{vmatrix} (A, B_{x_i}), C_{x_i} \\ (A, B_{p_i}), C_{p_i} \end{vmatrix} - \Sigma_i \begin{vmatrix} (C, B_{x_i}), A_{x_i} \\ (C, B_{p_i}), A_{p_i} \end{vmatrix}.$$

Сложимъ равенства (a'), (b'), (c'), замѣчая при этомъ, что первыя части ихъ одинаковы, во вторыхъ-же, на основаніи формулы (4),

Digitized by Google

по двѣ суммы соединятся въ одну и на основаніи формулъ (9) и (1), составятъ:

1-я сумма 2-й части равен. (a′) и 2-я сумма 2-й части равен. (c′)— выраженіе— $[A, (B, C)]$;

1-я сумма 2-й части равен. (b′) и 2-я сумма 2-й части равен. (a′)— выраженіе — $[B, (C, A)]$;

1-я сумма 2-й части равен. (c′) и 2-я сумма 2-й части равен. (b′)— выраженіе — $[C, (A, B)]$.

Поэтому $3\left\{[A,(B,C)]+[B,(C,A)]+[C,(A,B)]\right\}=-\left\{[A,(B,C)]+[B,(C,A)]+[C,(A,B)]\right\}$;

слѣдовательно $$[A,(B,C)]+[B,(C,A)]+[C,(A,B)]=0.$$

Отсюда мы видимъ, что теорема, выражаемая предъидущимъ тождествомъ и составляющая главнѣйшее основаніе въ «новомъ способѣ» Якоби выводится непосредственно и весьма просто изъ элементарныхъ свойствъ выраженія (φ, ψ).

Переходимъ къ доказательству другихъ теоремъ.

Теорема 2.

Возьмемъ n уравненій $$H=a_1 \quad H_1=a_2, \ldots H_{n-1}=a_n, \qquad (h)$$

въ которыхъ $a, a_1, \ldots a_{n-1}$ означаютъ произвольныя постоянныя, $H, H_1, \ldots H_{n-1}$ функціи перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n$, повѣряющія тождественно условіе

$$(H_i, H_k)=0,$$

въ которомъ i и k могутъ быть два какія угодно числа изъ ряда $0, 1, 2, \ldots n-1$.

Докажемъ, что выведенныя изъ предъидущей системы n уравненій значенія $p_1, \ldots p_n$ повѣрятъ тождественно условіе

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_k}=\frac{\partial p_k}{\partial x_i}$$

при всѣхъ значеніяхъ i и k, взятыхъ въ ряду чиселъ $1, 2, \ldots n$.

Положимъ изъ уравненій (h) найденныя значенія

$p_i=F(x_1, \ldots x_n, a, a_1, \ldots a_{n-1})$ и $p_k=f(x_1, \ldots x_n, a, a_1, \ldots a_{n-1})$.

Digitized by Google

Разсматривая $a, a_1, .. a_{n-1}$ какъ функціи перемѣнныхъ $x_1, .. x_n$, $p_1, .. p_n$, опредѣленныя уравненіями (h), находимъ по формулѣ (6):

$$[F, f] = (F, f) + \Sigma_i \left\{ (F, a_i) \frac{\partial f}{\partial a_i} - (f, a_i) \frac{\partial F}{\partial a_i} \right\} +$$
$$+ \Sigma_{i,k} \left(\frac{\partial F}{\partial a_i} \frac{\partial f}{\partial a_k} - \frac{\partial F}{\partial a_k} \frac{\partial f}{\partial a_i} \right) (a_i, a_k)$$

Но по вставкѣ значеній $a = H_1 .. a_{n-1} = H_{n-1}$ функція F обратится въ p_i, f въ p_k и первая часть предъидущаго равенства приметъ видъ $[p_i, p_k]$ слѣд. будетъ тождественно равна нулю. Первый членъ второй части будетъ также нулемъ, потому что выраженіе (F, f) опредѣляется разсматривая $a, .. a_{n-1}$ постоянными и функціи F и f не содержатъ явнымъ образомъ перемѣнныхъ $p_1, .. p_n$. Третій членъ второй части будетъ нулемъ вслѣдствіе условія

$$(a_i, a_k) = (H_i, H_k) = 0.$$

Слѣд. второй членъ 2-й части долженъ быть нулемъ, т. е. будемъ имѣть тождественно

$$\Sigma_i \left\{ (F, a_i) \frac{\partial f}{\partial a_i} - (f, a_i) \frac{\partial F}{\partial a_i} \right\} = 0.$$

Первую часть этого равенства можно представить въ болѣе простомъ видѣ, вставивъ значенія (F, a_i) и (f, a_i). Дѣйствительно мы имѣемъ

$$(F, a) = \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial a}{\partial p_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial a}{\partial x_2} + .. + \frac{\partial F}{\partial x_k} \frac{\partial a}{\partial p_k} + ..$$
$$\vdots \qquad .. + \frac{\partial F}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial a}{\partial p_n}$$
$$(F, a_{n-1}) = \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial a_{n-1}}{\partial p_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial a_{n-1}}{\partial p_2} + .. + \frac{\partial F}{\partial x_k} \frac{\partial a_{n-1}}{\partial p_k} + ..$$
$$.. + \frac{\partial F}{\partial x_n} \frac{\partial a_{n-1}}{\partial p_n}$$

Сложимъ эти равенства по умноженіи ихъ соотвѣтственно на $\frac{\partial f}{\partial a} \cdots \frac{\partial f}{\partial a_{n-1}}$, что доставитъ

$$\Sigma_i (F, a_i) \frac{\partial f}{\partial a_i} = \frac{\partial F}{\partial x_1} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial p_1} + .. + \frac{\partial f}{\partial a_{n-1}} \cdot \frac{\partial a_{n-1}}{\partial p_1} \right) + ..$$
$$.. + \frac{\partial F}{\partial x_k} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial p_k} + .. + \frac{\partial F}{\partial a_{n-1}} \cdot \frac{\partial a}{\partial p_k} \right) + ..$$
$$.. + \frac{\partial F}{\partial x_n} \left(\frac{\partial f}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial p_n} + .. + \frac{\partial f}{\partial a_{n-1}} \cdot \frac{\partial a_{n-1}}{\partial p_n} \right).$$

Digitized by Google

Но если мы будемъ въ уравненіи

$$p_k = f(x_1, \ldots x_n, a, \ldots a_{n-1})$$

разсматривать $a = H$, $a_1 = H_1, \ldots a_{n-1} = H_{n-1}$, тогда оно будетъ тождественное. Дифференцируя его въ отношеніи p, которымъ означимъ одно изъ перемѣнныхъ $p_1, \ldots p_n$, получимъ

$$\frac{\partial p_k}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial p} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial a_{n-1}} \cdot \frac{\partial a_{n-1}}{\partial p}$$

и отсюда ясно, что 2-я часть послѣдняго равенства обратится въ 1, если $p = p_k$, во всѣхъ же другихъ случаяхъ она равна нулю. Слѣдовательно

$$\Sigma_i (F, a_i) \frac{\partial f}{\partial a_i} = \frac{\partial F}{\partial x_k}.$$

Точно такимъ же образомъ докажемъ, что

$$\Sigma_i (f, a_i) \frac{\partial F}{\partial a_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

И такъ имѣемъ тождественно

$$\Sigma_i \left[(F, a_i) \frac{\partial f}{\partial a_i} - (f, a_i) \frac{\partial F}{\partial a_i} \right] =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x_k} - \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial p_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p_k}{\partial x_i} = 0.$$

что и требовалось доказать.

На основаніи доказаннаго въ §§ 11 и 15 и предъидущей теоремы должно разсматривать уравненія $\frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial x_i}$ и $(H_i, H_k) = 0$ однѣ, какъ слѣдствія другихъ и можно назвать вторыя, подобно первымъ условіями интегрируемости дифференціальнаго выраженія

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n.$$

Якоби даетъ еще двѣ формулы условій интегрируемости, которыя мы выведемъ тѣмъ-же путемъ, какъ и предъидущую.

Теорема 3.

Удержавъ предположенія предъидущей теоремы представимъ, что помощію системы уравненій (h), каждая изъ n первыхъ величинъ ряда

$$p_1, p_2, p_3, \ldots p_n, x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$$

Digitized by Google

выражена функціею всѣхъ слѣдующихъ за нею въ этомъ ряду перемѣнныхъ и необходимаго числа постоянныхъ $a, a_1, \ldots a_{n-1}$. Такимъ образомъ положимъ будетъ найдено

$$p_i - F(p_{i+1}, \ldots p_n, x_1, \ldots x_n, a, a_1, \ldots a_{i-1}) = 0,$$

$$p_k - f(p_{k+1}, \ldots p_n, x_1, \ldots x_n, a, a_1, \ldots a_{k-1}) = 0, \text{ гдѣ } i < k.$$

Докажемъ, что первыя части этихъ уравненій повѣрятъ тождественно условіе

$$(p_i - F,\ p_k - f) = 0$$

при всѣхъ значеніяхъ i и k, заключающихся въ ряду чиселъ $1, 2, \ldots n$.

Разсматривая $a, a_1, \ldots a_{n-1}$ какъ функціи перемѣнныхъ, опредѣляемыя уравненіями (k) по формулѣ (5), находимъ

$$[F, f] = (F, f) + \sum_{m=o}^{m=k-1} (F, a_m) \frac{\partial f}{\partial a_m} - \sum_{m=o}^{m=i-1} (f, a_m) \frac{\partial F}{\partial a_m} +$$

$$+ \sum_{m=o}^{m=i-1} \sum_{l=o}^{l=k-1} \frac{\partial F}{\partial a_m} \frac{\partial f}{\partial a_l} (a_m, a_l)$$

По вставкѣ значеній $a = H$, $a_1 = H_1$ и пр. функція F обратится въ p_i, функція f въ p_k и 1-я часть предъидущаго равенства приметъ видъ $[p_i, p_k]$, слѣд. будетъ тождественно равна нулю. Послѣдній членъ 2-й части будетъ нулемъ вслѣдствіе условія

$$(a_m, a_l) = (H_m, H_l) = 0;$$

слѣдовательно имѣемъ тождественно

$$0 = (F, f) + \sum_{m=o}^{m=k-1} (F, a_m) \frac{\partial f}{\partial a_m} - \sum_{m=o}^{m=i-1} (f, a_m) \frac{\partial F}{\partial a_m}.$$

Двѣ суммы 2-й части этого равенства можно привести къ простѣйшему виду. Для этого возьмемъ равенства

$$(F, a) = \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial a}{\partial p_1} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \frac{\partial a}{\partial p_n} - \frac{\partial F}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial a}{\partial x_{i+1}} - \cdots$$

$$\vdots \qquad \cdots - \frac{\partial F}{\partial p_n} \frac{\partial a}{\partial x_n},$$

$$(F, a_{k-1}) = \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial a_{k-1}}{\partial p_1} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \frac{\partial a_{k-1}}{\partial p_n} - \frac{\partial F}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial a_{k-1}}{\partial x_{i+1}} - \cdots$$

$$\cdots - \frac{\partial F}{\partial p_n} \frac{\partial a_{k-1}}{\partial x_n}.$$

Digitized by Google

Умноживъ ихъ соотвѣтственно на $\frac{\partial f}{\partial a}, \ldots \frac{\partial f}{\partial a_{k-1}}$ и потомъ складывая, находимъ

$$\sum_{m=o}^{m=k-1}(F, a_m)\frac{\partial f}{\partial a_m} = \frac{\partial F}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial p_1}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial a_{k-1}}\cdot\frac{\partial a_{k-1}}{\partial p_1}\right)+\cdots$$

$$\cdots+\frac{\partial F}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial p_n}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial a_{k-1}}\frac{\partial a_{k-1}}{\partial p_n}\right)$$

$$-\frac{\partial F}{\partial p_{i+1}}\left(\frac{\partial F}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial x_{i+1}}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial a_{k-1}}\cdot\frac{\partial a_{k-1}}{\partial x_{i+1}}\right)-\cdots$$

$$\cdots-\frac{\partial F}{\partial p_n}\left(\frac{\partial f}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial x_n}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial a_{k-1}}\cdot\frac{\partial a_{k-1}}{\partial x_n}\right).$$

Но если $a=H$, $a_1=H_1$, .. то уравненіе $f=pk$ обратится въ тождество; дифференцируя его находимъ

$$\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial p_1}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial a_{k-1}}\frac{\partial a_{k-1}}{\partial p_1}=0, \ldots \frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial p_{k-1}}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{\partial f}{\partial a_{k-1}}\frac{\partial a_{k-1}}{\partial p_{k-1}}=0,\ \frac{\partial f}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial p_k}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial a_{k-1}}\frac{\partial a_{k-1}}{\partial p_k}=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial p_{k+1}}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial a_{k-1}}\frac{\partial a_{k-1}}{\partial p_{k+1}}=-\frac{\partial f}{\partial p_{k+1}}, \ldots$$

$$\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial p_n}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial a_{k-1}}\frac{\partial a_{k-1}}{\partial p_n}=-\frac{\partial f}{\partial p_n},$$

$$\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x_{i+1}}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial a_{k-1}}\frac{\partial a_{k-1}}{\partial x_{i+1}}=-\frac{\partial f}{\partial x_{i+1}}, \ldots$$

$$\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x_n}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial a_{k-1}}\frac{\partial a_{k-1}}{\partial x_n}=-\frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Поэтому предъидущему равенству можно дать слѣдующій видъ

$$\sum_{m=o}^{m=k-1}(F, a_m)\frac{\partial f}{\partial a_m}=\frac{\partial F}{\partial x_k}-\frac{\partial F}{\partial x_{k+1}}\frac{\partial f}{\partial p_{k+1}}-\cdots$$

$$\cdots-\frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{\partial f}{\partial p_n}+\frac{\partial F}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial f}{\partial x_{i+1}}+\cdots+\frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial f}{\partial x_n}$$

Digitized by Google

Замѣнивъ F на f, k на i и обратно, получимъ

$$\sum_{m=o}^{m=i-1}(f, a_m)\frac{\partial F}{\partial a_m} = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_{i+1}}\frac{\partial F}{\partial p_{i+1}} - \cdots$$
$$\cdots - \frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{\partial F}{\partial p_n} + \frac{\partial f}{\partial p_{k+1}}\frac{\partial F}{\partial x_{k+1}} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial p_n}\frac{\partial F}{\partial x_n};$$

вычитая, находимъ

$$\sum_{m=o}^{m=k-1}(F, a_m)\frac{\partial f}{\partial a_m} - \sum_{m=o}^{m=i-1}(f, a_m)\frac{\partial F}{\partial a_m} = \frac{\partial F}{\partial x_k} - \frac{\partial f}{\partial x_i} - 2(F, f);$$

слѣдовательно будемъ имѣть тождественно

$$(F, f) + \frac{\partial F}{\partial x_k} - \frac{\partial f}{\partial x_i} - 2(F, f) = 0,$$

или
$$\frac{\partial F}{\partial x_k} - \frac{\partial f}{\partial x_i} - (F, f) = -\left[(F, f) - \frac{\partial F}{\partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial x_i}\right] = 0,$$

или
$$(F - p_i, f - p_k) = 0.$$

Совершенно подобнымъ образомъ мы можемъ доказать слѣдующую, также необходимую впослѣдствіи теорему.

Теорема 4.

Удержавъ условія 2-хъ предъидущихъ теоремъ, представимъ что изъ n уравненій (h) взяты которыя нибудь m уравненій, положимъ первыя $H = a$, $H_1 = a_1, \ldots H_{m-1} = a_{m-1}$, при чемъ конечно подразумѣвается $m < n$; помощію ихъ мы можемъ которыя нибудь m изъ величинъ $p_1, p_2, \ldots p_n$ выразить функціями остальныхъ $n-m$, перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_n$ и постоянныхъ $a, a_1, \ldots a_{m-1}$. Пусть такимъ образомъ опредѣлены $p_1, p_2, \ldots p_m$ и означая i и k два какія нибудь числа не большія m, положимъ будетъ

$$p_i - \varphi(x_1, \ldots x_n, p_{m+1}, \ldots p_n, a, a_1, \ldots a_{m-1}) = 0,$$
$$p_k - \psi(x_1, \ldots x_n, p_{m+1}, \ldots p_n, a, a_1, \ldots a_{m-1}) = 0.$$

Докажемъ, что первыя части такихъ уравненій удовлетворятъ условіе

$$(p_i - \varphi, p_k - \psi) = 0.$$

Дѣйствительно полагая $a = H$, $a_1 = H_1, \ldots a_{m-1} = H_{m-1}$, по формулѣ (6) имѣемъ

$$[\varphi, \psi] = (\varphi, \psi) + \sum_{r=o}^{r=m-1}\left\{(\varphi, a_r)\frac{\partial \psi}{\partial a_r} - (\psi, a_r)\frac{\partial \varphi}{\partial a_r}\right\} +$$
$$+ \Sigma_{r,s}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial a_r}\frac{\partial \psi}{\partial a_s} - \frac{\partial \varphi}{\partial a_s}\frac{\partial \psi}{\partial a_r}\right)(a_r, a_s).$$

Digitized by Google

Но по вставкѣ значеній $a_1, \ldots a_{m-1}$ первая часть и послѣдній членъ 2-й части предъидущаго равенства обратятся въ нуль; слѣдовательно

$$(\varphi, \psi) + \sum_{r=o}^{r=m-1} \left\{ (\varphi, a_r) \frac{\partial \psi}{\partial a_r} - (\psi, a_r) \frac{\partial \varphi}{\partial a_r} \right\} = 0.$$

Далѣе имѣемъ

$$(\varphi, a) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial a}{\partial p_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial a}{\partial p_2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \frac{\partial a}{\partial p_n} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_{m+1}} \frac{\partial a}{\partial x_{m+1}} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_{m+2}} \frac{\partial a}{\partial x_{m+2}} - \ldots$$

$$\ldots - \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} \frac{\partial a}{\partial x_n}, \ldots$$

$$(\varphi, a_{m-1}) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial a_{m-1}}{\partial p_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial a_{m-1}}{\partial p_2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial a_{m-1}}{\partial p_n} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_{m+1}} \frac{\partial a_{m-1}}{\partial x_{m+1}} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_{m+2}} \frac{\partial a_{m-1}}{\partial x_{m+2}} - \ldots$$

$$\ldots - \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} \frac{\partial a_{m-1}}{\partial x_n}.$$

Складывая эти равенства, по умноженіи ихъ соотвѣтственно на $\frac{\partial \psi}{\partial a}, \ldots \frac{\partial \psi}{\partial a_{m-1}}$, и вынося во 2-й части общими множителями частныя производныя функціи φ, убѣждаемся точно также какъ при доказательствѣ предъидущей теоремы, что множители при $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}$ будутъ нули, исключая множителя при $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$, который равенъ единицѣ; множители при $\frac{\partial \varphi}{\partial x_{m+1}}, \ldots \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}, \frac{\partial \varphi}{\partial p_{m+1}}, \ldots \frac{\partial \varphi}{\partial p_n}$ будутъ соотвѣтственно, $\frac{\partial \psi}{\partial p_{m+1}}, \ldots - \frac{\partial \psi}{\partial p_n}, \frac{\partial \psi}{\partial x_{m+1}}, \ldots \frac{\partial \psi}{\partial x_n}$; поэтому

$$\sum_{r=o}^{r=m-1} (\varphi, a_r) \frac{\partial \psi}{\partial a_r} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_{m+1}} \frac{\partial \psi}{\partial p_{m+1}} - \ldots$$

$$\ldots - \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_{m+1}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{m+1}} + \ldots + \frac{\partial \psi}{\partial p_n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}.$$

Digitized by Google

Замѣнивъ φ на ψ, k на i и обратно, получимъ

$$\sum_{r=o}^{r=m-1}(\psi, a_r)\frac{d\varphi}{da_r} = \frac{d\psi}{dx_i} - \frac{d\psi}{dx_{m+1}}\frac{d\varphi}{dp_{m+1}} - \ldots$$

$$\ldots - \frac{d\psi}{dx_n}\frac{d\varphi}{dp_n} + \frac{d\psi}{dp_{n+1}}\frac{d\varphi}{dx_{m+1}} + \ldots + \frac{d\psi}{dp_n}\frac{d\varphi}{dx_n}.$$

Вычитая одно равенство изъ другаго, находимъ

$$\sum_{r=o}^{r=m-o}\left\{(\varphi, a_r)\frac{d\psi}{da_r} - (\psi, a_r)\frac{d\varphi}{da_r}\right\} = \frac{d\varphi}{dx_k} - \frac{d\psi}{dx_i} - 2(\varphi, \psi).$$

Вставивъ найденное значеніе суммы въ равенство данное выше, будемъ имѣть

$$\frac{d\varphi}{dx_k} - \frac{d\psi}{dx_i} - (\varphi, \psi) = 0,$$

или

$$(p_i - \varphi, p_k - \psi) = 0.$$

V.

§ 18. Предложенія, доказанныя въ двухъ предъидущихъ §§, можно разсматривать какъ вспомогательныя леммы, доказавъ которыя предварительно, мы можемъ теперь, не дѣлая отступленій, изложить способъ Якоби интегрированія системы уравненій (6) § 15, къ рѣшенію которой была приведена разсматриваемая нами задача интегрированія уравненія съ частными производными 1-го порядка при какомъ угодно числѣ перемѣнныхъ независимыхъ.

Сначала мы изложимъ этотъ способъ пользуясь только теоремою 1 и 2, потомъ, при помощи теоремъ 3 и 4, покажемъ какимъ образомъ упрощается и совершенствуется теорія рѣшенія.

По данному уравненію съ частными производными 1-го порядка

$$H(x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n) = a,$$

должно во первыхъ опредѣлить уравненіе подобнаго-же вида

$$H_1(x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n) = a_1,$$

въ которомъ a_1 означаетъ произвольное постоянное и H_1 неизвѣстную функцію; послѣдняя должна быть опредѣлена такимъ образомъ, чтобы удовлетворяло линейное уравненіе

$$(H_1, H) = \frac{dH_1}{dx_1}\frac{dH}{dp_1} - \frac{dH_1}{dp_1}\frac{dH}{dx_1} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{dH_1}{dx_n}\frac{dH}{dp_n} - \frac{dH_1}{dp_n}\cdot\frac{dH}{dx_n} = 0. \qquad (1)$$

Digitized by Google

Поэтому, взявъ систему обыкновенныхъ совокупныхъ уравненій:

$$(\alpha) \qquad \frac{dx_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = \frac{-dp_1}{\frac{\partial H}{\partial x_1}} = \ldots = \frac{dx_n}{\frac{\partial H}{\partial p_n}} = \frac{-dp_n}{\frac{\partial H}{\partial x_n}}$$

и опредѣливъ одинъ изъ ея интеграловъ

$$f_1(x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n) = \text{const.},$$

можемъ положить $H_1 = f_1$ и означая произвольное постоянное черезъ a_1, будемъ имѣть

$$H = a, \quad H_1 = f_1 = a_1.$$

Далѣе должно опредѣлить уравненіе

$$H_2(x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n) = a_2,$$

гдѣ a_2 означаетъ произвольное постоянное и H_2 неизвѣстную функцію, которая должна быть опредѣлена такъ, чтобы удовлетворяла совокупно два линейныхъ уравненія:

$$(2) \qquad (H_2, H) = 0 \qquad \text{и} \quad (H_2, f_1) = 0.$$

Изъ нихъ одно есть тоже самое уравненіе (1), а другое получится изъ (1) черезъ замѣну функціи H на f_1.

Основываясь на теоремѣ 1, Якоби показалъ, что зная интегралъ одного изъ уравненій (2) можно найти ихъ общее рѣшеніе посредствомъ интегрированія вспомогательнаго линейнаго уравненія съ числомъ перемѣнныхъ меньшимъ $2n$.

И такъ должно начать опредѣленіемъ интеграла одного изъ уравненій (2); если возьмемъ интегралъ перваго изъ нихъ, то онъ долженъ быть различенъ отъ 2-хъ уже извѣстныхъ $H = a$ и $f_1 = a_1$. Положимъ этотъ 3-й интегралъ будетъ

$$\varphi(x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n) = \text{const.}$$

Дѣлая послѣдовательныя вставки во 2-ое изъ уравненій (2), находимъ

$$(\varphi, f_1) = \varphi_1, \ (\varphi_1, f_1) = \varphi_2, \ (\varphi_2, f_1) = \varphi_3, \ldots (\varphi_{i-1}, f_1) = \varphi_i, \ldots \qquad (\beta)$$

Этотъ рядъ можетъ вообще продолжаться неопредѣленно; но если одинъ изъ результатовъ подстановки, положимъ φ_i, равенъ постоянному, тогда рядъ окончится на этомъ членѣ.

Докажемъ, что функціи $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ удовлетворяютъ 1-е изъ уравненій (2). Для этого возьмемъ тождество теоремы 1,

$$[A, (B, C)] + [B, (C, A)] + [C, (A, B)] = 0,$$

и положимъ $A = H$, $B = f_1$, тогда оно приметъ видъ

$$[H, (f_1, C)] + [f_1, (C, H)] = 0.$$

Digitized by Google

Полагая теперь послѣдовательно $C = \varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ находимъ одно за другимъ тождества

$$[H, (f_1, \varphi)] = 0, \quad \text{или} \quad (H, \varphi_1) = 0,$$
$$[H, (f_1, \varphi_1)] = 0, \quad \text{или} \quad (H, \varphi_2) = 0,$$
$$[H, (f_1, \varphi_2)] = 0, \quad \text{или} \quad (H, \varphi_3) = 0,$$

и т. д.

доказывающія теорему. — Отсюда, какъ очевидное слѣдствіе, выводится весьма важное заключеніе относительно интеграловъ системы уравненій (α). извѣстное подъ названіемъ *теоремы Пуассона*.

Дѣйствительно, полагая $\varphi_1 = \text{const}$, $\varphi_2 = \text{const}$, $\varphi_3 = \text{const}$... Мы получимъ (на основ. § 9) интегралы уравненій (α). Слѣдовательно зная два интеграла этихъ уравненій $f_1 = \text{const}$ и $\varphi = \text{const}$, различные отъ $H = \text{const}$, находимъ третій, полагая $(f_1, \varphi) = \text{const}$, отсюда четвертый полагая $(f_1, (f_1, \varphi)) = \text{const}$ и т. д.

Чтобы не отклоняться отъ главнаго предмета разсужденія мы ограничимся здѣсь только этимъ замѣчаніемъ, предполагая впослѣдствіи еще разъ возвратиться къ теоремѣ Пуассона.

Такъ какъ уравненія (α) имѣютъ только $2n - 1$ различныхъ интеграловъ, то продолжая неопредѣленно рядъ (β), мы неможемъ постоянно получать различныя функціи, но необходимо должны наконецъ встрѣтить такую, которая будетъ функціею раньше найденныхъ различныхъ интеграловъ. Пусть первая изъ такихъ функцій будетъ φ_i и положимъ

$$\varphi_i = F(H, f_1, \varphi, \varphi_1, \ldots \varphi_{i-1}), \text{ гдѣ } i \text{ должно быть } < 2n.$$

Продолжать вычисленіе ряда (β) далѣе функціи φ_i безполезно п. ч. такимъ образомъ не получимъ новыхъ интеграловъ. Дѣйствительно по формулѣ (8) § 16 имѣемъ

$$\varphi_{i+1} = [F, f_1] = (H, f_1)\frac{\partial F}{\partial H} + (f_1, f_1)\frac{\partial F}{\partial f_1} + (\varphi, f_1)\frac{\partial F}{\partial \varphi_1} + \ldots$$
$$\ldots + (\varphi_{i-1}, f_1)\frac{\partial F}{\partial \varphi_1}$$
$$= 0 + 0 + \varphi_1 \frac{\partial F}{\partial \varphi} + \ldots$$
$$\ldots + F(H, f_1, \varphi, \ldots \varphi_{i-1})\frac{\partial F}{\partial \varphi_{i-1}};$$

отсюда очевидно, что φ_{i+1}, выразится посредствомъ однихъ перемѣнныхъ $H, f_1, \varphi, \ldots \varphi_{i-1}$.

Поэтому предложимъ себѣ отыскать, если возможно, такую функцію найденныхъ уже интеграловъ $H, f_1, \varphi, \varphi_1, \ldots \varphi_{i-1}$, которая

Digitized by Google

будучи вставлена вмѣсто H_2 удовлетворитъ уравненія (2). Означивъ искомую функцію черезъ f_2 и полагая

$$H_2 = f_2(H, f_1, \varphi, \varphi_1, \ldots \varphi_{i-1}),$$

находимъ, что на основ. формулы (8) § 16 первыя части уравненій (2) примутъ видъ

$$(f_2, H) = (H, H)\frac{\partial f_2}{\partial H} + (f_1, H)\frac{\partial f_2}{\partial f_1} + (\varphi, H)\frac{\partial f_2}{\partial \varphi} +$$
$$+ (\varphi_1, H)\frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1} + \cdots + (\varphi_{i-1}, H)\frac{\partial f_2}{\partial \varphi_{i-1}},$$

$$(f_2, f_1) = (H, f_1)\frac{\partial f_2}{\partial H} + (f_1, f_1)\frac{\partial f_2}{\partial f_1} + (\varphi, f_1)\frac{\partial f_2}{\partial \varphi} +$$
$$+ (\varphi_1, f_1)\frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1} + \cdots + (\varphi_{i-1}, f_1)\frac{\partial f_2}{\partial \varphi_{i-1}}.$$

И такъ какъ имѣемъ тождественно

$$(H, H) = 0, \quad (f_1, H) = 0, \quad (\varphi, H) = 0, \quad (\varphi_1, H) = 0, \ldots$$
$$(\varphi_{i-1}, H) = 0,$$

$$(H, f_1) = (f_1, f_1) = 0, \quad (\varphi, f_1) = \varphi_1, \quad (\varphi_1, f_1) = \varphi_2, \ldots$$
$$(\varphi_{i-1}, H) = \varphi_i;$$

то уравненіе $(H_2, H) = 0$ будетъ удовлетворено положеніемъ $H_2 = f_2$, какова-бы ни была функція f_2, чего и должно было ожидать; уравненіе-же $(H_2, f_1) = 0$ преобразуется, при этомъ положеніи, въ другое линейное:

$$\varphi_1\frac{\partial f_2}{\partial \varphi} + \varphi_2\frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1} + \cdots + \varphi_{i-1}\frac{\partial f_2}{\partial \varphi_{i-2}} +$$
$$+ F(H, f_1, \varphi, \varphi_1, \ldots \varphi_{i-1})\frac{\partial f_2}{\partial \varphi_{i-1}} = 0, \qquad (\gamma),$$

заключающее только одни новыя перемѣнныя $H, f_1, \varphi, \varphi_1, \ldots \varphi_{i-1}$, между тѣмъ какъ старыя $x_1, \ldots x_n\ p_1, \ldots p_n$ исключились.

Въ уравненіи (γ) H и f_1 можно разсматривать постоянными п. ч. частныя производныя въ отношеніи этихъ перемѣнныхъ въ него не входятъ; поэтому въ функцію F можно вмѣсто H и f_1 поставить соотвѣтственно a и a_1.

Намъ достаточно опредѣлить частный интегралъ уравненія (γ) или одинъ изъ интеграловъ системы обыкновенныхъ совокупныхъ

Digitized by Google

уравненій

$$\frac{d\varphi}{\varphi_1} = \frac{d\varphi_1}{\varphi_2} = \ldots = \frac{d\varphi_{i-2}}{\varphi_{i-1}} = \frac{d\varphi_{i-1}}{F(a, a_1, \varphi, \ldots \varphi_{i-1})},$$

которую можно замѣнить однимъ обыкновеннымъ уравненіемъ порядка $i-1$. Если-же введемъ новое вспомогательное перемѣнное τ, полагая рядъ предъидущихъ отношеній равнымъ $d\tau$; то эта система можетъ быть замѣнена однимъ обыкновеннымъ уравненіемъ порядка i, но сравнительно простѣйшаго вида.

Дѣйствительно, полагая

$$d\tau = \frac{d\varphi}{\varphi_1} = \frac{d\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{d\varphi_2}{\varphi_3} = \ldots = \frac{d\varphi_{i-2}}{\varphi_{i-1}} = \frac{d\varphi_{i-1}}{F}, \text{ имѣемъ}$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \varphi_1, \frac{d\varphi_1}{d\tau} = \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} = \varphi_2, \frac{d\varphi_2}{d\tau} = \frac{d^3\varphi}{d\tau^3} = \varphi_3, \ldots$$

$$\frac{d\varphi_{i-2}}{d\tau} = \frac{d^{i-1}\varphi}{d\tau^{i-1}} = \varphi_{i-1}, \frac{d\varphi_{i-1}}{d\tau} = \frac{d^i\varphi}{d\tau^i} =$$

$$= F(a, a_1, \varphi, \varphi_1, \ldots \varphi_{i-1}).$$

Или вставивъ въ послѣднее уравненіе вмѣсто $\varphi_1, \ldots \varphi_{i-1}$ ихъ предъидущія значенія получимъ упомянутое выше обыкновенное уравненіе порядка i

$$\frac{d^i\varphi}{d\tau^i} = F\left(a, a_1, \varphi, \frac{d\varphi}{d\tau}, \ldots \frac{d^{i-1}\varphi}{d\tau^{i-1}}\right).$$

Положимъ одинъ изъ первыхъ интеграловъ послѣдняго уравненія будетъ

$$\Phi\left(\varphi, \frac{d\varphi}{d\tau}, \ldots \frac{d^{i-1}\varphi}{d\tau^{i-1}}\right) = \text{const.};$$

вставивъ въ него вмѣсто $\frac{d\varphi}{d\tau}, \ldots \frac{d^{i-1}\varphi}{d\tau^{i-1}}$ ихъ предъидущія значенія, получимъ

$$\Phi(\varphi, \varphi_1, \ldots \varphi_{i-1}) = \text{const.}$$

и можемъ положить $f_2 = \Phi$. Означая притомъ черезъ a_2 производное постоянное, будемъ теперь имѣть уже три уравненія съ частными производными 1-го порядка:

$$H = a, \quad H_1 = f_1 = a_1, \quad H_2 = f_2 = a_2,$$

удовлетворяющія требуемыя условія.

Примѣчаніе 1. Если въ ряду функцій $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{i-1}, \varphi_i$ послѣдняя $\varphi_i = 0$, то очевидно предпослѣдняя будетъ искомымъ общимъ

Digitized by Google

интегралом уравненій (2). Если φ_i равна нѣкоторой постоянной K, то рѣшеніе упростится, п. ч. тогда имѣемъ

$$\frac{d\varphi_{i-2}}{\varphi_{i-1}} = \frac{d\varphi_{i-1}}{K},$$

откуда по интегрированіи находимъ

$2K\varphi_{i-2} - \varphi_{i-1}^2 = \text{const}$; слѣд. $f_2 = 2K\varphi_{i-2} - \varphi_{i-1}^2 = a_2$.

Но въ этомъ случаѣ i должно быть болѣе 1, ибо въ противномъ случаѣ предъидущій методъ опредѣленія f_2 не можетъ быть примѣненъ. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ $\varphi_1 = K$, гдѣ K данное постоянное, или функція φ; тогда уравненіе (γ) приметъ видъ

$$K\frac{\partial f_2}{\partial \varphi} = 0,$$

показывающій, что никакая функція одного φ не можетъ быть общимъ интегралом двухъ совокупныхъ уравненій (2).

Въ такомъ случаѣ надобно начинать опредѣленіемъ интеграла втораго изъ уравненій (2), $(H_2, f_1) = 0$; или опредѣлить еще одинъ интегралъ 1-го изъ этихъ уравненій,

$$\theta(x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n) = \text{const},$$

различный отъ $H = a_1$, $f_1 = a_1$, $\varphi = \text{const}$; или, наконецъ слѣдовать методу, который будетъ показанъ ниже.

Если-бы интегралъ $\theta = \text{const}$ представилъ случай подобный интегралу $\varphi = \text{const}$, т. е. еслибъ мы получили тождества

$$(\varphi, f_1) = K \quad \text{и} \quad (\theta, f_1) = L,$$

гдѣ K и L постоянныя, или какія нибудь функціи, соотвѣтственно φ и θ; то значеніе H_2 получилось-бы очень просто. Дѣйствительно, полагая $H_2 = f_2(\varphi, \theta)$, находимъ, что первыя части уравненій (2) примутъ видъ

$$[f_2, H] = (\varphi, H)\frac{\partial f_2}{\partial \varphi} + (\theta, H)\frac{\partial f_2}{\partial \theta},$$

$$[f_2, f_1] = (\varphi, f_1)\frac{\partial f_2}{\partial \varphi} + (\theta, f_1)\frac{\partial f_2}{\partial \theta};$$

но такъ какъ имѣемъ тождества $(\varphi, H) = 0$, $(\theta, H) = 0$, $(\varphi, f_1) = K$, $(\theta, f_1) = L$; то 1-е изъ уравненій (2) будетъ удовлетворено при какомъ угодно видѣ функціи f_2, 2-е, же изъ этихъ уравненій приметъ видъ

$$K\frac{\partial f_2}{\partial \varphi} + L\frac{\partial f_2}{\partial \theta} = 0,$$

откуда находимъ $f_2 = \pi\left(\int\frac{d\varphi}{K} - \int\frac{d\theta}{L}\right)$, гдѣ π означаетъ произвольную функцію.

Digitized by Google

Помощію трехъ уже извѣстныхъ уравненій

$$H = a, \quad H_1 = f_1 = a_1, \qquad H_2 = f_2 = a_2,$$

должно опредѣлить четвертое $H_3 = a_3$, въ которомъ a_3 означаетъ произвольное постоянное и функція H_3 должна быть опредѣлена такъ, чтобы удовлетворяла три совокупныхъ линейныхъ уравненія

$$(3) \qquad (H_3, H) = 0, \quad (H_3, f_1) = 0, \quad (H_3, f_2) = 0.$$

Слѣдуя методу изложенному выше и найдя общій интегралъ двухъ изъ нихъ, положимъ 1-го и 2-го (для чего очевидно достаточно напр. опредѣлить еще одинъ изъ первыхъ интеграловъ уравненія $\frac{d^i\varphi}{dt^i} = F$, различный $\Phi = \text{const.}$) который пусть будетъ

$$H_3 = \psi(x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n),$$

должно будетъ опредѣлить общій интегралъ всѣхъ трехъ уравненій (3). Для этого послѣдовательными вставками въ уравненіе $(H_3, f_2)=0$ находимъ

$$(\psi, f_2) = \psi_1, \ (\psi_1, f_2) = \psi_2, \ (\psi_2, f_2) = \psi_3, \ \ldots (\psi_{k-1}, f_2) = \psi_k,$$

Въ ряду функцій $\psi_1, \ldots \psi_k, \ldots$ необходимо встрѣтится наконецъ такая, которая выразится посредствомъ предъидущихъ. Положимъ первая изъ такихъ функцій будетъ

$$\psi_k = f(\psi, \psi_1, \psi_2, \ldots \psi_{k-1}).$$

Точно также какъ выше убѣждаемся, что $\psi_1, \psi_2, \ldots$ будутъ интегралами двухъ первыхъ уравненій (3). Дѣйствительно, полагая въ тождествѣ

$$[A, (B, C)] + [B, (C, A)] + [C, (A, B)] = 0$$

сначала $A = H$, $B = f_2$, потомъ $A = f_1$, $B = f_2$, находимъ два другія тождества:

$$[H, (f_2, C)] + [f_2, (C, H)] = 0 \quad \text{и} \quad [f_1, (f_2, C)] + [f_2, (C, f_1)] = 0.$$

Дѣлая въ нихъ послѣдовательно $C = \psi, \psi_1, \psi_2, \ldots \psi_{k-1}$, найдемъ одно за другомъ два ряда тождествъ:

$$[H, (f_2, \psi)] = (\psi_1, H) = 0, \quad [H, (f_2, \psi_1)] = (\psi_2, H) = 0, \ldots$$
$$[f_1, (f_2, \psi)] = (\psi_1, f_1) = 0, \quad [f_1, (f_2, \psi_1)] = (\psi_2, f_1) = 0, \ldots$$

доказывающихъ теорему.

Далѣе должно отъискивать такую функцію f_3 перемѣнныхъ $H, f_1, f_2, \psi, \psi_1, \ldots \psi_{k-1}$, которая бы удовлетворяла всѣ три уравненія (3), будучи поставлена на мѣсто H_3.

Но, также какъ и прежде, не трудно убѣдиться, что первыя два изъ этихъ уравненій будутъ удовлетворены функціею f_3 произ-

Digitized by Google

вольнаго вида; что-же касается третьяго изъ уравненій (3), то оно, по вставкѣ $H_2 = f_3$, преобразуется въ слѣдующее линейное

$$\psi_1 \frac{\partial f_2}{\partial \psi} + \psi_2 \frac{\partial f_2}{\partial \psi_1} + \cdots + f(\psi, \psi_1, .. \psi_{k-1}) \frac{\partial f_3}{\partial \psi_{k-1}} = 0,$$

заключающее только перемѣнныя $\psi, \psi_1, .. \psi_{k-1}$. Если бы функція f содержала перемѣнныя H, f_1, f_2, то ихъ можно замѣнить соотвѣтственно постоянными a, a_1, a_2, п. ч. предъидущее уравненіе не содержитъ частныхъ производныхъ въ отношеніи H, f_1 и f_2.

Такимъ образомъ функція f_3 должна быть опредѣлена какъ частный интегралъ предъидущаго линейнаго уравненія, или какъ одинъ изъ интеграловъ слѣдующей системы совокупныхъ уравненій

$$d\sigma = \frac{d\psi}{\psi_1} = \frac{d\psi_1}{\psi_2} = .. = \frac{d\psi_{k-1}}{f},$$

гдѣ σ означаетъ вспомогательное перемѣнное. Что наконецъ приводится къ опредѣленію одного изъ первыхъ интеграловъ уравненія съ 2-мя перемѣнными порядка k,

$$\frac{d^k\psi}{d\sigma_k} = f\left(\psi, \frac{d\psi}{d\sigma}, .. \frac{d^{k-1}\psi}{\partial\sigma^{k-1}}\right).$$

Если этотъ интегралъ будетъ

$$\Psi\left(\psi, \frac{d\psi}{d\sigma}, .. \frac{d^{k-1}\psi}{d\sigma^{k-1}}\right) = \text{const};$$

то вставивъ значенія $\frac{d\psi}{d\sigma} = \psi_1, .. \frac{d^{k-1}\psi}{d\sigma^{k-1}} = \psi_{k-1}$, можемъ положить

$$f_3 = \Psi(\psi, \psi_1, .. \psi_{k-1}) = \text{const} = a_3.$$

Такимъ образомъ будутъ теперь извѣстны уже 4 уравненія

$$H = a, \; H_1 = f_1 = a_1, \; H_2 = f_2 = a_2, \; H_3 = f_3 = a_3,$$

удовлетворяющія условія (1), (2) и (3).

Примѣчаніе 2. Здѣсь необходимо замѣтить, что если результатъ первой подстановки (ψ, f_1), или ψ_1, будетъ функціею ψ, или какимъ нибудь постояннымъ, неравнымъ нулю, то предъидущій способъ опредѣленія функціи f_3 обнаружитъ недостаточность, подобную той, о которой мы говорили при опредѣленіи функціи f_2 въ примѣчаніи 1.

Теперь уже доетаточно объясненъ ходъ послѣдовательнаго опредѣленія функцій $H_1, H_2, .. H_{n-1}$ помощію данной H, выполняющихъ условія $(H_i, H_k) = 0$. Когда эти функціи будутъ найдены, то нужно будетъ только алгебраически вывести значенія $p_1, .. p_n$ изъ

Digitized by Google

уравненій

$$H = a,\ H_1 = a_1, \ldots\ H_{n-1} = a_{n-1}.$$

Вставивъ эти значенія въ дифференціальное уравненіе

$$dz = p_1\ dx_1 + p_2\ dx_2 + \ldots + p_n\ dx_n,$$

мы всегда можемъ интегрировать это послѣднее, такъ какъ функціи $p_1, \ldots p_n$ должны, на основаніи теоремы 2, выполнять условія интегрируемости, и получимъ полный интегралъ задачи въ слѣдующемъ видѣ

$$z = f(x_1, \ldots x_n,\ a, a_1, \ldots a_{n-1}) + a_n.$$

Желая представить сущность способа Якоби въ возможно простомъ видѣ, мы изложили его принявъ въ основаніе только теоремы 1 и 2. Но при такомъ изложеніи въ немъ обнаруживается теоретическій недостатокъ, указанный въ примѣчаніяхъ 1 и 2 и кромѣ того уравненіямъ, посредствомъ интегрированія которыхъ выводятся искомыя функціи, еще не дано возможно простѣйшаго вида, черезъ исключеніе излишнихъ перемѣнныхъ. Далѣе мы покажемъ, что пользуясь теоремами 3 и 4 мы не встрѣтимъ упомянутаго недостатка въ теоріи способа и можемъ привести интегрируемыя уравненія къ наименьшему числу перемѣнныхъ. Но прежде того, считаемъ небезполезнымъ примѣнить способъ Якоби въ томъ видѣ, какъ онъ изложенъ выше, къ нѣсколькимъ примѣрамъ легко интегрируемыхъ формъ уравненій съ частными производными 1-го порядка.

§ 19. Изъ предъидущаго видно, что сущность и главная трудность задачи интегрированія уравненія съ частными производными 1-го порядка

$$H(x_1, \ldots x_n,\ p_1, \ldots p_n) = a$$

заключается въ опредѣленіи $n-1$ различныхъ частныхъ интеграловъ

$$H_1 = a_1,\ H_2 = a_2, \ldots\ H_{n-1} = a_{n-1}$$

линейнаго уравненія $(H, \psi) = 0$, которые, взятые по парно, должны сверхъ того выполнять условіе

$$(H_i, H_k) = 0$$

при всѣхъ значеніяхъ i и k взятыхъ въ ряду чиселъ $0, 1, \ldots n-1$.

Поэтому болѣе или менѣе легко интегрируемыя формы уравненія $H = a$ будутъ тѣ, изъ которыхъ можно непосредственно, т. е. безъ всякаго интегрированія, получить всю сполна, или часть системы уравненій $H_1 = a_1, \ldots H_{n-1} = a_{n-1}$, дополняющихъ данное.

На основаніи общихъ соображеній, которыя сейчасъ будутъ изложены, легко убѣдиться, что къ легко интегрируемымъ формамъ уравненій съ частными производными 1-го порядка, подобно тому какъ и въ классѣ обыкновенныхъ уравненій, преимущественно при-

Digitized by Google

надлежатъ тѣ, въ которыхъ перемѣнныя могутъ быть *отдѣлены*. Но понятно, что выраженіе «отдѣленіе перемѣнныхъ» въ уравненіяхъ съ частными производными должно имѣть другое и болѣе обширное значеніе, чѣмъ въ уравненіяхъ съ однимъ независимымъ перемѣннымъ.

Положимъ что данное уравненіе съ частными производными 1-го порядка будетъ вида

$$H(x_1, \ldots x_n,\ p_1, \ldots p_n,\ \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_m) = a,$$

въ которомъ $\varphi_1, \ldots \varphi_m$ означаютъ функціи перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_n$, $p_1, \ldots p_n$, выполняющія условіе

$$(\varphi_r, \varphi_s) = 0 \qquad (\alpha)$$

для всѣхъ значеній r и s, взятыхъ въ ряду чиселъ $1, 2, \ldots m$.

Посмотримъ какія условія, сверхъ этого, должны выполнить функціи $\varphi_1, \ldots \varphi_m$, для того чтобы при интегрированіи даннаго уравненія можно было ихъ разсматривать постоянными. Для этого представимъ, что прилагая способъ Якоби мы нашли часть системы уравненій, дополняющей данное

$$H_1 = a_1,\ H_2 = a_2, \ldots\ H_l = a_l, \qquad \text{гдѣ } l < n$$

и функціи $H, \ldots H_l$, не заключающія произвольныхъ постоянныхъ $a_1, \ldots a_l$, но могущія содержать $\varphi_1, \ldots \varphi_m$, которыя принимались постоянными, выполнятъ, при этомъ предположеніи, условіе

$$(H_i, H_k) = 0,$$

для всѣхъ значеній i и k, взятыхъ въ ряду чиселъ $0, 1, 2, \ldots l$.

Разсматривая теперь $\varphi_1, \ldots \varphi_m$ снова функціями $x_1, \ldots x_n$, $p_1, \ldots p_n$ находимъ, что первая часть уравненія, выражающаго предъидущее условіе, приметъ (на основ. форм. (5) § 16, IV) видъ

$$[H_i, H_k] = (H_i, H_k) + \sum_{r=1}^{r=m} \left[(H_i, \varphi_r) \frac{\partial H_i}{\partial \varphi_r} - (H_k, \varphi_r) \frac{\partial H_k}{\partial \varphi_r} \right] +$$

$$+ \sum_{r,s} \left(\frac{\partial H_i}{\partial \varphi_r} \frac{\partial H_k}{\partial \varphi_r} - \frac{\partial H_i}{\partial \varphi_s} \frac{\partial H_k}{\partial \varphi_r} \right) (\varphi_r, \varphi_s).$$

Первый и третій члены 2-й части этого равенства равны нулю, на основаніи предъидущихъ условій; чтобы и второй членъ ея также приводился къ нулю, очевидно функціи $\varphi_1, \ldots \varphi_m$ должны еще выполнять условіе

$$(H_i, \varphi_r) = 0 \qquad (\beta)$$

для всѣхъ значеній $i = 0, 1, 2, \ldots l$, и $r = 1, 2, \ldots m$.

Замѣтимъ теперь, что если въ данномъ уравненіи открыто присутствіе функцій $\varphi_1, \ldots \varphi_m$, выполняющихъ условія (α) и часть условій (β), соотвѣтствующую значенію указателя $i=0$, т. е. $(H, \varphi_1)=0$,

Digitized by Google

$(H, \varphi_2) = 0, \ldots (H, \varphi_m) = 0$; то, чтобы выполнить остальныя условія (β), достаточно принять

$$H_1 = \psi_1 (\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_m) = a_1, \ldots H_l = \psi_l (\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_m) = a_l,$$

гдѣ $\psi_1, \ldots \psi_l$ означаютъ функціи, ограниченныя только однимъ условіемъ, чтобы изъ предъидущей системы уравненій нельзя было вывести отношенія между одними $H_1, \ldots H_l$ или, что равнозначительно, между $a_1, \ldots a_l$. Но очевидно это было-бы возможно если $l < m$; слѣдовательно опредѣляемое такимъ образомъ число уравненій, дополняющихъ данное, должно быть равно или менѣе m.

Если m не болѣе $n-1$ и всѣ функціи $\varphi_1, \ldots \varphi_m$ дѣйствительно содержатъ перемѣнныя $p_1, \ldots p_n$, притомъ въ отношеніи ихъ различныя и независимыя, тогда всего проще полагать

$$H_1 = \varphi_1 = a_1, \ldots \quad H_m = \varphi_m = a_m.$$

Что касается того, какимъ образомъ обнаружить въ данномъ уравненіи присутствіе функцій $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, выполняющихъ упомянутыя выше условія, то для этого конечно нельзя дать общаго правила; однако есть одинъ случай, когда существованіе этихъ функцій становится очевидно и когда поэтому предъидущій пріемъ можетъ быть приложенъ безъ затрудненія.

Пусть данное уравненіе представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$H[x_1, \ldots x_{i-1}, p_1, \ldots p_{i-1}, \varphi_1, \ldots \varphi_m] = 0,$$

такъ что функція H содержитъ непосредственно только перемѣнныя $x_1, p_1, \ldots x_{i-1}, p_{i-1}$; функція φ_1 — перемѣнныя $x_i, p_i \ldots x_{i+k-1}, p_{i+k-1}, \ldots$ функція φ_m—перемѣнныя: $x_{i+k+\ldots l}, p_{i+k+\ldots l}, \ldots x_n, p_n$. Тогда можно сказать, что въ немъ перемѣнныя отдѣлены. Въ этомъ случаѣ очевидно условія:

$$(H, \varphi_r) = 0 \qquad \text{и} \quad (\varphi_r, \varphi_s) = 0$$

будутъ удовлетворены для всѣхъ значеній $1, 2, \ldots m$ указателей r и s. Поэтому, на основаніи предъидущихъ заключеній, вмѣсто даннаго уравненія можно интегрировать отдѣльно каждое изъ уравненій съ частными производными 1-го порядка:

$$H(x_1, \ldots x_{i-1}, \; p_1, \ldots p_{i-1}, \; a_1, \ldots a_l) = a,$$

$$\varphi_1 = a_1, \ldots \varphi_m = a_m,$$

гдѣ $a_1, \ldots a_l$ означаютъ произвольныя постоянныя. Если полные интегралы этихъ уравненій будутъ соотвѣтственно

$$z_0 + \alpha_0, \qquad z_1 + \alpha_1, \ldots \qquad z_m + \alpha_m,$$

то полный интегралъ даннаго уравненія будетъ равенъ ихъ суммѣ

$$z_0 + z_1 + \cdots + z_m + \alpha = z + \alpha,$$

гдѣ α означаетъ сумму просто приданныхъ произвольныхъ постоян-

Digitized by Google

ныхъ $\alpha_0, \alpha_1, .. \alpha_m$. Въ самомъ дѣлѣ не трудно убѣдиться, что онъ удовлетворяетъ предложенное уравненіе и заключаетъ n произвольныхъ постоянныхъ.

Замѣтимъ, что если одна изъ функцій $\varphi_1, .. \varphi_m$ будетъ заключать только одну пару соотвѣтственныхъ перемѣнныхъ, напр. x_i и p_i, тогда уравнявъ ея произвольному постоянному a_i, выведемъ изъ этого уравненія выраженіе p_i въ x_i и a_i, откуда соотвѣтственный интегралъ z_i получится посредствомъ квадратуры. — Если въ данномъ уравненіи одно изъ перемѣнныхъ, положимъ x_k, вовсе невходитъ, тогда будемъ имѣть уравненіе $p_k = a_k$, которому соотвѣтствуетъ интегралъ $z_k = a_k x_k$. Поэтому полные интегралы уравненій

$$\frac{dz}{dx_n} = f\left(\frac{dz}{dx_1}, \frac{dz}{dx_2}, .. \frac{dz}{dx_{n-1}}\right),$$

и

$$\varphi_n\left(x_n, \frac{dz}{dx_n}\right) = F\left[\varphi_1\left(x_1, \frac{dz}{dx_1}\right), \varphi_2\left(x_2, \frac{dz}{dx_2}\right), .. \varphi_{n-1}\left(x_{n-1}, \frac{dz}{dx_{n-1}}\right)\right]$$

могутъ быть написаны не спеціализируя вида функціи f и F и очевидно будутъ соотвѣтственно

$$z + \alpha = a_1 x_1 + a_2 x_2 + .. + a_{n-1} x_{n-1} + f(a_1, .. a_{n-1}) . x_n$$

и

$$z + \beta = \int \psi_1(a_1, x_1)\, dx_1 + \int \psi_2)a_2, x_2)\, dx_2 + ..$$
$$.. + \int \psi_{n-1}(a_{n-1}, x_{n-1})\, dx_{n-1} + \int \psi_n [F(a_1, .. a_n), x_n]\, dx,$$

гдѣ $\psi_1, \psi_2, .. \psi_n$ представляютъ соотвѣтственно значенія, $p_2, p_2, .. p_n$, выведенныя изъ уравненій $\varphi = a$, $\varphi_2 = a_2, .. \varphi_n = F(a, a_{n-1})$.

Возьмемъ уравненіе $z = F\left(\frac{dz}{dx_1}, \frac{dz}{dx_2}, .. \frac{dz}{dx_n}\right)$.

Представляя интегралъ его подъ видомъ уравненія

$$v(x_1, .. x_n, z) = 0$$

и выводя отсюда $\frac{dz}{dx_1} = -\frac{p_1}{p_{n+1}}, .. \frac{dz}{dx_n} = -\frac{p_n}{p_{n+1}}$,

гдѣ $\frac{dv}{dx_i} = p_i$ и $\frac{dv}{dz} = p_{n+1}$,

по вставкѣ этихъ значеній дадимъ предложенному уравненію слѣдующій видъ

$$z = F\left(-\frac{p_1}{p_{n+1}}, -\frac{p_2}{p_{n+1}}, .. -\frac{p_n}{p_{n+1}}\right),$$

Digitized by Google

въ которомъ теперь перемѣнныя отдѣлены; поэтому интегралъ преобразованнаго уравненія представится суммою интеграловъ обыкновенныхъ уравненій

$$p_1 = a_1, p_2 = a_2, \ldots p_n = a_n, z = F\left(-\frac{a_1}{p_{n+1}}, \ldots -\frac{a_n}{p_{n+1}}\right).$$

Послѣднее изъ нихъ рѣшается въ особенности просто, если функція F будетъ однородною степени μ въ отношеніи $\frac{dz}{dx_1}, \ldots \frac{dz}{dx_n}$; тогда оно принимаетъ видъ

$$z = \frac{(-1)^\mu}{p_{n+1}^\mu} F(a_1, \ldots a_n), \quad \text{откуда } p_{n+1} = -F^{\frac{1}{\mu}}(a_1, \ldots a_n).\ z^{-\frac{1}{\mu}}$$

поэтому полный интегралъ преобразованнаго уравненія будетъ

$$v + \alpha = a_1 x_1 + a_2 x_2, \ldots + a_n x_n - \frac{\mu}{\mu - 1} F^{\frac{1}{\mu}}(a_1, \ldots a_n)\ z^{\frac{\mu-1}{\mu}};$$

откуда, уравнявъ 2-ю часть нулю, выведемъ значеніе z, удовлетворяющее предложенное уравненіе,

$$z = \left(\frac{\mu - 1}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{\mu-1}} \frac{(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n)^{\frac{\mu}{\mu-1}}}{F^{\frac{1}{\mu-1}}(a_1, a_2, \ldots a_n)}.$$

Представимъ случай общнѣе предъидущаго: пусть будетъ

$$z = F\left(x_1, \ldots x_n, \frac{dz}{dx_1}, \ldots \frac{dz}{dx_n}\right),$$

гдѣ f означаетъ функцію однородную степени μ относительно $\frac{dz}{dx_1}, \ldots \frac{dz}{dx_n}$. Помощію предъидущаго преобразованія и при тѣхъ же означеніяхъ данное уравненіе приметъ видъ

$$z\, p_{n+1}^{\mu} = (-1)^{\mu} f(x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n).$$

Поэтому задача приводится къ интегрированію двухъ слѣдующихъ уравненій:

$$z\, p_{n+1}^{\mu} = (-1)^{\mu} A, \text{ и } F(x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n) = A.$$

Интегралъ перваго изъ нихъ будетъ $v' + \alpha' = -\frac{\mu}{\mu - 1} A^{\frac{1}{\mu}} z^{\frac{\mu-1}{\mu}}$;

интегралъ втораго означимъ $v'' + \alpha'' = F(x_2, \ldots x_n, A, a_2, \ldots a_{n-1})$;

Digitized by Google

поэтому интегралъ преобразованнаго уравненія будетъ

$$V+\alpha = F(x_1, \ldots x_n, A, a_1, \ldots a_{n-1}) - \frac{\mu}{\mu-1} A^{\frac{1}{\mu}} z^{\frac{\mu-1}{\mu}};$$

откуда наконецъ выводимъ интегралъ предложеннаго уравненія

$$z = \frac{\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{\mu-1}\mu-1}}{A^{\frac{1}{\mu-1}}} \sqrt{\left\{F(x_1, \ldots x_n, A, a_1, \ldots a_n)\right\}^{\mu}}.$$

Для примѣра къ этому случаю возьмемъ уравненіе

$$z = \frac{1}{x_1}\left(\frac{dz}{dx_1}\right)^2 + x_2 \frac{dz}{dx_2}\left(\frac{1}{x_1}\frac{dz}{dx_1} + \frac{dz}{dx_3}\right) + x_2^2 x_3 \left(\frac{dz}{dx_2}\right)^2,$$

которое по преобразованіи приметъ видъ

$$z p_4^2 = \frac{p_1^2}{x_1} + x_2 p_2 \left(\frac{p_1}{x_1} + p_3\right) + x_2^2 x_3 p_2^2.$$

Здѣсь мы замѣчаемъ сначала, что соотвѣтственныя перемѣнныя z и p_4, x_2 и p_2 отдѣлены; поэтому задача приводится къ интегрированію слѣдующихъ уравненій

$$z p_4^2 = a, \quad x_2 p_2 = b$$

и

$$\frac{p_1^2}{x_1} + \frac{b}{x_1} p_1 + b p_3 + b^2 x_3 = a;$$

но теперь очевидно, что въ послѣднемъ уравненіи перемѣнныя x_1, p_1 и x_3, p_3 также отдѣлены, поэтому мы имѣемъ интегрировать четыре слѣдующихъ обыкновенныхъ уравненія:

$$z p_4^2 = a, \; x_2 p_2 = b, \; \frac{p_1^2}{x_1} + \frac{b}{x_1} p_1 = c, \; b p_3 + b^2 x_3 = a - c,$$

интегралы которыхъ будутъ соотвѣтственно:

$$V' + \alpha' = \mp 2 a^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}}, \; V'' + \alpha'' = b \log x_2,$$

$$V''' + \alpha''' = -\frac{b x_1}{2} \mp \frac{2}{3c}\left(\tfrac{1}{4} b^2 + c x_1\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$V'''' + \alpha'''' = \frac{(a-c) x_3}{b} - \frac{b x_3^2}{2}.$$

Слѣдовательно полный интегралъ преобразованнаго уравненія будетъ

Digitized by Google

$$V + a = -\frac{b x_1}{2} \pm \frac{2}{3c}\left(\tfrac{1}{4} b^2 + c x_1\right)^{\frac{3}{2}} +$$

$$+ b \log x_2 + \frac{(a-c) x_3}{b} - \frac{b x_3^2}{2} \pm 2 a^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}}.$$

Наконецъ уравнявъ нулю 2-ю часть этого равенства, получимъ полный интегралъ предложеннаго уравненія.

Въ предъидущихъ примѣрахъ полныя рѣшенія получились посредствомъ одного отдѣленія перемѣнныхъ; теперь не будетъ излишнимъ выбрать такой случай, гдѣ приложеніе этого пріема хотя упрощаетъ задачу и даетъ часть рѣшенія ея, однако полный интегралъ выводится только помощію общаго способа Якоби.

Пусть данное уравненіе будетъ

$$H = \left(x_2 \frac{dz}{dx_1} + x_1 \frac{dz}{dx_2}\right) x_3 + \left(\frac{dz}{dx_1} - \frac{dz}{dx_2}\right) \frac{dz}{dx_3} \left(\frac{dz}{dx_4}\right)^2$$

$$+ \left(\frac{dz}{dx_1} - \frac{dz}{dx_2}\right)\left(\frac{dz}{dx_5} + x_4\right)\left(\frac{dz}{dx_5} + x_6\right) \frac{dz}{dx_3} \frac{dz}{dx_6} = a.$$

Оно заключаетъ шесть независимыхъ перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_6$ и не содержитъ самой неизвѣстной функціи z, но только ея частныя производныя $\frac{dz}{dx_1}, \ldots \frac{dz}{dx_6}$. Означая эти послѣднія соотвѣтственно черезъ $p_1, \ldots p_6$ и дѣлая небольшое измѣненіе формы предъидущаго уравненія, напишемъ его слѣдующимъ образомъ

$$p_1(x_2 p_1 + x_1 p_2) x_3 +$$

$$+ p_3 (p_1 - p_2) \left\{ p_4^2 + (p_5 + x_4)\ (p_5 + x_6) p_6 \right\} = a.$$

Теперь очевидно, что перемѣнныя x_1, p_1, x_2, p_2, x_3, p_3 и x_4, p_4, x_5, p_5, x_6, p_6 отдѣлены. Поэтому уравнявъ произвольному постоянному α выраженіе въ скобкахъ, составляемое второю групою перемѣнныхъ, приводимъ задачу къ независимому интегрированію двухъ слѣдующихъ уравненій:

$$p_4^2 + (p_5 + x_4)\ (p_5 + x_6) p_6 = \alpha,$$

$$(x_2 p_1 + x_1 p_2) x_3 + \alpha\ p_3 (p_1 - p_2) = a.$$

Первое изъ нихъ интегрируется весьма просто посредствомъ отдѣленія перемѣнныхъ. Дѣйствительно сначала замѣчаемъ, что независимое перемѣнное x_5 въ него не входитъ; поэтому полагаемъ

$$p_5 = \beta;$$

послѣ чего уравненіе приметъ видъ

$$p_4^2 + (\beta + x_4)\ (\beta + x_6) p_6 = \alpha.$$

Digitized by Google

Теперь очевидно, что остальныя двѣ пары перемѣнныхъ x_4, p_4 и x_6, p_6 отдѣльны; поэтому полагая

$$(\beta + x_6)\, p_6 = \gamma, \text{ имѣемъ } p_4^2 + \gamma\,(\beta + x_4) = \alpha$$

и отсюда находимъ

$$p_6 = \frac{\gamma}{\beta + x_6}, \quad p_4 = \sqrt{\alpha - \gamma\,\beta - \gamma\, x_4};$$

слѣдовательно

$$p_4\, dx_4 + p_5\, dx_5 + p_6\, dx_6 =$$

$$\sqrt{\alpha - \gamma\,\beta - \gamma\, x_4}\, dx_4 + \beta\, dx_5 + \frac{\gamma\, dx_6}{\beta + x_6};$$

откуда, интегрируя, находимъ часть искомой функціи

$$z' + A' = \frac{2}{3\gamma}\sqrt{\{\alpha - \gamma\,\beta - \gamma\, x_4\}^3} + \beta\, x_5 + \log\,(\beta + x_6)^\gamma.$$

Переходимъ къ интегрированію втораго изъ предъидущихъ уравненій

$$H = (x_2\, p_1 + x_1\, p_2)\, x_3 + \alpha\, p_3\,(p_1 - p_2) = a.$$

Здѣсь не видится возможности отдѣлить перемѣнныя, поэтому, слѣдуя общей теоріи Якоби, будемъ отыскивать двѣ функціи перемѣнныхъ x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3:

Сначала функцію H_1, которая-бы удовлетворяла линейное уравненіе

$$(H, H_1) = \frac{\partial H}{\partial x_1}\frac{\partial H_1}{\partial p_1} - \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_2}\frac{\partial H_1}{\partial p_2} - \frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial H_1}{\partial x_2} +$$

$$+ \frac{\partial H}{\partial x_3}\frac{\partial H_1}{\partial p_3} - \frac{\partial H}{\partial p_3}\frac{\partial H_1}{\partial x_3} = 0;$$

потомъ функцію H_2, которая-бы удовлетворяла совокупно два линейныхъ уравненія подобнаго же вида

$$(H, H_2) = 0 \quad \text{и} \quad (H_1, H_2) = 0. \qquad \text{(m)}$$

Поэтому функція H_1 должна быть опредѣлена, какъ одинъ изъ интеграловъ системы совокупныхъ уравненій:

$$\frac{dp_1}{\frac{\partial H}{\partial x_1}} = \frac{dp_2}{\frac{\partial H}{\partial x_2}} = \frac{dp_3}{\frac{\partial H}{\partial x_3}} = \frac{-dx_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = \frac{-dx_2}{\frac{\partial H}{\partial p_2}} = \frac{-dx_3}{\frac{\partial H}{\partial p_3}} \qquad \text{(n)},$$

Digitized by Google

которая, по вставкѣ даннаго значенія H, приметъ видъ:

$$\frac{dp_1}{x_3 p_2} = \frac{dp_2}{x_3 p_1} = \frac{dp_3}{x_2 p_1 + x_1 p_2} =$$

$$= \frac{-dx_1}{x_2 x_3 + \alpha p_3} = \frac{-dx_2}{x_1 x_3 - \alpha p_3} = \frac{-dx_3}{\alpha (p_1 - p_2)}.$$

По извѣстному свойству равныхъ отношеній, первое и второе,

	H	H_1	φ	ψ
$\frac{\partial.}{\partial p_1}$	$p_2 x_3$	$p_1 + p_2$	0	0
$\frac{\partial.}{\partial x_1}$	$x_2 x_3 + \alpha p_3$	$x_1 + x_2$	p_1	α
$\frac{\partial.}{\partial x_2}$	$p_1 x_3$	$p_1 + p_2$	0	0
$\frac{\partial.}{\partial p_2}$	$x_1 x_3 - \alpha p_3$	$x_1 + x_2$	$-p_2$	$-\alpha$
$\frac{\partial.}{\partial x_3}$	$x_2 p_1 + x_1 p_2$	0	0	$-x_3$
$\frac{\partial.}{\partial p_3}$	$\alpha (p_1 - p_2)$	0	0	0

$(H, H_1)=0$, $(H, \varphi)=0$, $(H, \psi)=0$,
$(H_1, \varphi)=p_1^2-p_2^2$, $(H_1, \psi)=0$,
$=2\varphi$.

въ ней вверху каждаго столбца написаны знаки функцій, входящихъ въ вычисленіе, а въ самыхъ столбцахъ — частныя производныя соотвѣтствующихъ функцій; знаки $\frac{\partial.}{\partial x_1}$, $\frac{\partial.}{\partial p_1}$, и пр. написанные слѣва таблицы, указываютъ перемѣнное, въ отношеніи котораго взяты производныя; наконецъ внизу каждаго столбца показаны значенія комби-

Digitized by Google

четвертое и пятое предъидущей системы доставятъ уравненіе

$$\frac{d(p_1+p_2)}{p_1+p_2} = -\frac{d(x_1+x_2)}{x_1+x_2},$$

котораго интегралъ $(x_1+x_2)\ (p_1+p_1) = \text{const.}$

Слѣдовательно можемъ положить $H_1 = (x_1+x_2)(p_1+p_2)$.

Далѣе надобно опредѣлить функцію H_2, удовлетворяющую совокупно два уравненія (m). При этомъ вычисленіи удобно пользоваться слѣдующей табличкой:

θ	θ'
0	0
1	$-x_3$
0	0
-1	x_3
0	p_2-p_1
0	0

$(H_1, \theta)=0$, $(H_1, \theta')=0$,

$(H, \theta)=(p_2-p_1)x_3$, $(H, \theta')=\theta''=(p_1-p_2)x_3^2+\alpha(p_1-p_2)^2$

$=-x_3\theta=\theta'$. $=\frac{\theta'^2}{\theta}+\alpha\theta^2$.

націй вида (A, B) функціи этого столбца съ предъидущими. Собственно для вычисленія въ умѣ этихъ комбинацій и удобна предъидущая таблица.

Слѣдуя теоріи вычисленіе H_2 мы должны начать опредѣленіемъ интеграла 1-го или 2-го изъ уравненій (m). Если возьмемъ для этого 1-ое уравненіе, то должно будетъ опредѣлить одинъ изъ интеграловъ системы (n), различный отъ $H_1 = \text{const}$. Первое и второе

Digitized by Google

отношенія этой системы доставятъ уравненіе

$\frac{dp_1}{p_2} = \frac{dp_2}{p_1}$, котораго интегралъ $\varphi = \frac{p_1^2}{2} - \frac{p_2^2}{2} = \text{const.}$

Помощію 1-го, 2-го и послѣдняго отношеній системы (n) получимъ уравненіе $\frac{d(p_1-p_2)}{-x_3(p_1-p_2)} = \frac{-dx_1}{\alpha(p_2-p_1)}$, или $\alpha\, d(p_1-p_2) = x_3\, dx_3$, котораго интегралъ будетъ $\psi = \alpha(p_1-p_2) - \frac{x_3^2}{2} = \text{const.}$

Предъидущія таблица показываетъ, что интегралъ φ не можетъ представлять значенія H_2, п. ч. результатъ подстановки (H_1, φ) не равенъ нулю; и такъ какъ этотъ результатъ есть функція φ, то, на основаніи примѣчанія 1 къ § 18, функція φ не можетъ служить и для вычисленія значенія H_2, когда уже выбрано значеніе H_1.

Изъ той-же таблицы видно, что интегралъ ψ удовлетворяетъ оба совокупныя уравненія (m), поэтому можно положить $H_2 = \psi$.

Уравнявъ найденныя значенія H_1 и H_2 соотвѣтственно произвольнымъ постояннымъ b и c, будемъ имѣть вмѣстѣ съ даннымъ три уравненія

$$H = (x_2 p_1 + x_1 p_2) x_3 + \alpha p_3 (p_1 - p_2) = a,$$

$$H_1 = (x_1 + x_2)(p_1 + p_2) = b, \quad H_2 = \alpha(p_1 - p_2) - \frac{x_3^2}{2} = c,$$

изъ которыхъ алгебраически выводимъ

$$p_1 = \frac{b}{2(x_1+x_2)} + \frac{c}{2\alpha} + \frac{x_3^2}{4\alpha},$$

$$p_2 = \frac{b}{2(x_1+x_2)} - \frac{c}{2\alpha} - \frac{x_3^2}{4\alpha},$$

$$p_3 = \frac{2a - b x_3}{2c - x_3^2} + \frac{1}{2\alpha}(x_1 - x_2) x_3;$$

слѣдовательно

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3 =$$

$$= \frac{b}{2}\frac{d(x_1+x_2)}{x_1+x_2} + \frac{1}{2\alpha}(dx_1 - dx_2)\left(c + \frac{x_3^2}{2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2\alpha}(x_1 - x_2) x_3\, dx_3 + \frac{2a - b x_3}{2c + x_3^2} dx_3.$$

Интегрируя это выраженіе, получимъ вторую часть искомаго

Digitized by Google

интеграла

$$z'' + A'' = \frac{b}{2}\log(x_1 + x_2) + \frac{1}{2\alpha}(x_1 - x_2)\left(c + \frac{x_3^2}{2}\right) + \\ + \frac{\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{c}}\operatorname{arctg}\frac{x_3}{\sqrt{2c}} - \frac{b}{2}\log(2c + x_3^2).$$

Слѣдовательно полный интегралъ задачи будетъ

$$z + A = z' + z'' + (A' + A'') = \log\frac{(x_1 + x_3)^{\frac{b}{2}}\,(\beta + x_6)^{\gamma}}{(2c + x_3)^{\frac{3b}{2}}} + \\ + \frac{1}{2\alpha}(x_1 - x_2)\left(c + \frac{x_3^2}{2}\right) + \frac{\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{c}}\operatorname{arctg}\frac{x_3}{\sqrt{2c}} + \\ + \frac{2}{3\gamma}\sqrt{\{\alpha - \gamma\beta - \gamma x_4\}^3} + \beta x_5;$$

въ немъ $A = (A' + A'')$, b, c, α, β, γ означаютъ шесть различныхъ произвольныхъ постоянныхъ.

Посмотримъ нельзя-ли получить рѣшенія задачи начиная вычисленія функціи H_2 опредѣленіемъ интеграла втораго изъ уравненій (m).

Интегрированіе уравненія

$$(H_1, H_2) = (p_1 + p_2)\frac{\partial H_2}{\partial p_1} - (x_1 + x_2)\frac{\partial H_2}{\partial x_1} + \\ + (p_1 + p_2)\frac{\partial H_2}{\partial p_2} - (x_1 + x_2)\frac{\partial H_2}{\partial x_2} = 0$$

приводится къ системѣ уравненій

$$\frac{dp_1}{p_1 + p_2} = \frac{dp_2}{p_1 + p_2} = \frac{-dx_1}{x_1 + x_2} = \frac{-dx_2}{x_1 + x_2},$$

очевидные интегралы которыхъ суть:

$$p_1 - p_2 = \text{const.} \quad \text{и} \quad p_1 - p_2 + x_1 - x_2 = \text{const.}$$

Возьмемъ 1-ый изъ нихъ, какъ простѣйшій, и положимъ

$$\theta = p_1 - p_2.$$

Предъидущая таблица показываетъ, что результатъ подстановки θ вмѣсто H_2 въ первое изъ уравненій (m) будетъ $-x_3\theta$ и эта функція, которую означимъ черезъ θ', будетъ, согласно теоріи, новымъ интеграломъ 2-го изъ уравненій (m); результатъ подстановки θ' вмѣ-

Digitized by Google

сто H_2 въ 1-ое изъ уравненій (m) будетъ

$$\theta'' = \frac{\theta'^2}{\theta} + \alpha\,\theta^2.$$

Функція θ'' будетъ очевидно также интеграломъ 2-го изъ уравненій (m), но онъ выражается функціею двухъ предъидущихъ θ и θ'; поэтому прекратимъ подстановки и будемъ искать такую функцію F двухъ различныхъ интеграловъ θ и θ', которая-бы удовлетворяла оба уравненія (m). Для этого составимъ уравненія

$$[H_2, F(\theta, \theta')] = (H_1, \theta)\frac{\partial F}{\partial \theta} + (H_1, \theta')\frac{\partial F}{\partial \theta'} =$$

$$= 0.\ \frac{\partial F}{\partial \theta} + 0.\ \frac{\partial F}{\partial \theta'} = 0$$

$$[H,\ F(\theta, \theta)] = (H,\ \theta)\frac{\partial F}{\partial \theta} + (H, \theta)\frac{\partial F}{\partial \theta'} = \theta'\ \frac{\partial F}{\partial \theta} +$$

$$+ \left(\frac{\theta'^2}{\theta} + \alpha\,\theta^2\right)\frac{\partial F}{\partial \theta'} = 0$$

Первое изъ нихъ удовлетворяется при всякомъ видѣ функціи F, второе-же—если F будетъ опредѣлена, какъ интегралъ уравненія

$$\frac{d\theta}{\theta'} = \frac{d\theta'}{\frac{\theta'^2}{\theta} + \alpha\,\theta^2}$$

При изложеніи теоріи мы вводили въ подобную систему уравненій еще новое перемѣнное τ, уравнивая предъидущія равныя отношенія дифференціалу $d\tau$; но въ настоящемъ случаѣ будетъ проще обойтись безъ вспомогательнаго перемѣннаго. Въ самомъ дѣлѣ предъидущее уравненіе можно написать такимъ образомъ

$$\frac{d\theta'}{d\theta} = \frac{\theta'}{\theta} + \alpha\,\frac{\theta^2}{\theta'},$$

гдѣ полагая $\theta' = u.\,\theta$, откуда $\frac{d\theta'}{d\theta} = u + \theta\frac{du}{d\theta}$, имѣемъ

$$u + \theta\frac{du}{d\theta} = u + \alpha\,\frac{\theta}{u},\ \text{или}\ u\,du = \alpha\,d\theta.$$

Интегрируя находимъ $\alpha\,\theta = \text{const} + \frac{u^2}{2}$;

слѣдовательно

$$F(\theta, \theta') = \alpha\,\theta - \frac{\theta'^2}{2\theta^2} = \alpha\,(p_1 - p_2) - \frac{x_3^2}{2}.$$

Этотъ интегралъ 1-го изъ уравненій (m) мы уже вывели раньше непосредственно изъ системы (n) и означали буквою ψ. Слѣдовательно новая дорога приведетъ къ тому-же полному интегралу, однако она хотя длиннѣе, но интереснѣе прежней въ томъ отношеніи, что представляетъ болѣе полное приложеніе теоріи способа Якоби.

§ 20. Теперь мы введемъ въ изложеніе способа Якоби тѣ упрощенія и дополненія, о которыхъ было упомянуто въ концѣ предпослѣдняго параграфа.

Представимъ снова данное уравненіе

$$H(x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n) = a,$$

въ которое неизвѣстная функція z независимыхъ перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_n$ входитъ только посредствомъ ея частныхъ производныхъ $p_1, \ldots p_n$, и дополняющую его систему $n-1$ искомыхъ уравненій:

$$H_1 = a_1,\ H_2 = a,\ \ldots\ H_{n-1} = a_{n-1},$$

гдѣ первыя части представляютъ функціи перемѣнныхъ $p_1, \ldots p_n$, $x_1, \ldots x_n$, несодержащія произвольныхъ постоянныхъ $a_1, \ldots a_{n-1}$.

Эту систему n уравненій можно очевидно замѣнить другою равнозначущею. Напримѣръ первое изъ нихъ позволяетъ выразить p_1 функціею остальныхъ перемѣнныхъ и a; вставивъ это выраженіе p_1 во второе уравненіе, можемъ послѣ того выразить p_2 функціею всѣхъ остальныхъ перемѣнныхъ, кромѣ p_1, p_2, заключающею постоянныя a, a_1. Продолжая такимъ образомъ очевидно возможно вообще каждую изъ n первыхъ величинъ ряда

$$p_1,\ p_2, \ldots p_n,\ x_1, \ldots x_n,\ a, a_1, \ldots a_{n-1}$$

выразить посредствомъ $2n$ величинъ, слѣдующихъ за нею въ этомъ ряду. Называя эти выраженія соотвѣтственно ω_1, $\omega_2, \ldots \omega_n$, будемъ имѣть, вмѣсто предъидущей системы слѣдующую, ей равнозначущую, также состоящую изъ n уравненій:

$$p_1 - \omega_1 = 0,\ p_2 - \omega_2 = 0, \ldots\ p_n - \omega_n = 0$$

Такъ какъ выше подразумѣвалось, что первыя части уравненій $H = 0$, $H_1 = 0, \ldots$ тождественно повѣряютъ условіе

$$(H_i, H_k) = 0 \qquad (a)$$

для всѣхъ значеній указателей i и k, взятыхъ въ ряду чиселъ $0, 1, \ldots n-1$; то, на основаніи теоремы 3, § 17, первыя части ура-

Digitized by Google

вненій $p_1-\omega_1=0$, $p_2-\omega_2=0, \ldots$ должны тождественно повѣрять условіе

$$(b) \qquad (p_{i+1}-\omega_{i+1},\ p_{k+1}-\omega_{k+1})=0$$

для тѣхъ-же значеній указателей i и k. И подобно тому, какъ уравненія (a) служили намъ для послѣдовательнаго опредѣленія функцій $H_1, \ldots H_{n-1}$, по данной H, — уравненія (b) могутъ служить для опредѣленія функцій $\omega_2, \ldots \omega_n$, по данной ω_1. Но не трудно убѣдиться, что уравненія (b) проще соотвѣтственныхъ уравненій (a). Дѣйствительно послѣднія всѣ однообразной формы

$$(H_i, H_k)=\sum_{m=1}^{m=n}\left(\frac{\partial H_i}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial H_k}{\partial p_m}-\frac{\partial H_i}{\partial p_m}\frac{\partial H_k}{\partial x_m}\right)=0;$$

и такъ какъ функціи H_i, H_k содержатъ всѣ $2n$ перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_n$, $p_1, \ldots p_n$, то эти уравненія имѣютъ по $2n$ членовъ. Соотвѣтствующее уравненіе системы (b) образовано потому-же закону, именно:

$$(p_{i+1}-\omega_{i+1},\ p_{k+1}-\omega_{k+1})=$$

$$=\sum_{m=1}^{m=n}\left\{\frac{\partial(p_{i+1}-\omega_{i+1})}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial(p_{k+1}-\omega_{k+1})}{\partial p_m}-\frac{\partial(p_{i+1}-\omega_{i+1})}{\partial p_m}\cdot\frac{\partial(p_{k+1}-\omega_{k+1})}{\partial x_m}\right\}=0,$$

но если примемъ во вниманіе, что функціи ω_{i+1}, ω_{k+1}, могущія заключать всѣ перемѣнныя $x_1, \ldots x_n$, должны содержать изъ перемѣнныхъ $p_1, \ldots p_n$ только тѣ, которыхъ указатели болѣе соотвѣтствующихъ указателей этихъ функцій; то легко убѣждаемся, что предъидущее уравненіе будетъ имѣть тѣмъ менѣе членовъ, чѣмъ болѣе числа $i+1$ и $k+1$. На основаніи этого замѣчанія и принимая $i<k$, можемъ разложить сумму, представляющую первую часть предъидущаго уравненія слѣдующимъ образомъ:

Digitized by Google

$$
\begin{array}{l}
+\begin{vmatrix} \cdot & -\frac{\partial\omega_{i+1}}{\partial x_{i+1}} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (m=i+1) \\
+\begin{vmatrix} \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (m=i) \\
+\begin{vmatrix} \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (m=2) \\
\begin{vmatrix} -\frac{\partial\omega_{i+1}}{\partial x_1} & -\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_1} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (m=1)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
+\begin{vmatrix} \cdot & -\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_{i+1}} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (m=k+1) \\
+\begin{vmatrix} \cdot & -\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_k} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (m=k) \\
+\begin{vmatrix} \cdot & -\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_{i+2}} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (m=i+2) \\
\begin{vmatrix} -\frac{\partial\omega_{i+1}}{\partial x_{k+2}} & -\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_{k+2}} \\ -\frac{\partial\omega_{i+1}}{\partial x_{k+2}} & -\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial p_{k+2}} \end{vmatrix} \quad (m=k+2)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
+\begin{vmatrix} \cdot & -\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_{i+1}} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (m=i+1) \\
+\begin{vmatrix} \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (m=i) \\
+\begin{vmatrix} \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (m=2) \\
\begin{vmatrix} -\frac{\partial\omega_{i+1}}{\partial x_1} & -\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_1} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (m=1)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
+\begin{vmatrix} \cdot & -\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_{i+1}} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (m=i+1) \\
+\begin{vmatrix} \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (m=i) \\
+\begin{vmatrix} \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (m=2) \\
\begin{vmatrix} -\frac{\partial\omega_{i+1}}{\partial x_1} & -\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_1} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (m=1)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
+\begin{vmatrix} \cdot & -\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_{i+1}} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (m=i+1) \\
+\begin{vmatrix} \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (m=i) \\
+\begin{vmatrix} \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (m=2) \\
\begin{vmatrix} -\frac{\partial\omega_{i+1}}{\partial x_1} & -\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_1} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (m=1)
\end{array}
$$

Въ этомъ разложеніи на мѣстѣ тѣхъ элемснтовъ опредѣлителей, которые должны быть умножены на 0, поставленъ знакъ *. От-

сюда очевидно, что предъидущее уравненіе можетъ быть написано слѣдующимъ образомъ

$$(p_{i+1} - \omega_{i+1}, p_{k+1} - \omega_{k+1}) =$$
$$= \frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial x_{i+1}} - \frac{\partial \omega_{i+1}}{\partial x_{k+1}} - \sum_{m=i+2}^{m=k+1} \frac{\partial \omega_{i+1}}{\partial p_m} \cdot \frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial x_m} +$$
$$+ \sum_{m=k+2}^{m=n} \left(\frac{\partial \omega_{i+1}}{\partial x_m} \frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial p_m} - \frac{\partial \omega_{i+1}}{\partial p_m} \frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial x_m} \right) = 0 \qquad (c)$$

и что число членовъ его равно $2n-k-i$. Поэтому напр. въ первомъ уравненіи системы (b), для котораго $i=0$, $k=1$, имѣемъ $2n-1$ членовъ; въ послѣднемъ, гдѣ $i=n-2$, $k=n-1$, будетъ только три члена.

И такъ функція ω_2 перемѣнныхъ $p_2, \ldots p_n$, $x_1, \ldots x_n$ должна быть опредѣлена помощію данной ω_1 посредствомъ интегрированія линейнаго уравненія

$$(p_1 - \omega_1, p_2 - \omega_2) = -\frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} +$$
$$+ \sum_{m=3}^{m=n} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_m} \frac{\partial \omega_2}{\partial p_m} - \frac{\partial \omega_1}{\partial p_m} \cdot \frac{\partial \omega_2}{\partial x_m} \right) = 0, \qquad (1)$$

въ которомъ искомая функція $p_2 = \omega_2$ входитъ не только ея частными производными, но и въ коэффиціентахъ; число членовъ его $2n-1$ и одинъ изъ нихъ не содержитъ частныхъ производныхъ искомой функціи.

Функція ω_3 перемѣнныхъ $p_4, \ldots p_n$, $x_1, \ldots x_n$ должна быть опредѣлена помощію извѣстныхъ ω_1, ω_2 такъ, чтобы удовлетворяла совокупно два слѣдующихъ линейныхъ уравненія:

$$(p_1 - \omega_1, p_3 - \omega_3) =$$
$$= -\frac{\partial \omega_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial p_3} \frac{\partial \omega_3}{\partial x_3} - \frac{\partial \omega_1}{\partial p_3} \frac{\partial \omega_3}{\partial x_3} +$$
$$+ \sum_{m=4}^{m=n} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_m} \frac{\partial \omega_3}{\partial p_m} - \frac{\partial \omega_1}{\partial p_m} \frac{\partial \omega_3}{\partial x_m} \right) = 0,$$
$$(p_2 - \omega_2, p_3 - \omega_3) =$$
$$= -\frac{\partial \omega_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \omega_2}{\partial p_3} \frac{\partial \omega_3}{\partial x_3} +$$
$$+ \sum_{m=4}^{m=n} \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x_m} \frac{\partial \omega_3}{\partial p_m} - \frac{\partial \omega_2}{\partial p_m} \frac{\partial \omega_3}{\partial x_m} \right) = 0, \qquad (2)$$

которыхъ коэффиціенты также содержатъ искомую функцію $p_3 = \omega_3$ и число членовъ 1-го равно $2n-2$, 2-го $2n-3$.

Digitized by Google

Вообще когда будутъ уже опредѣлены функціи $\omega_2, \omega_3, \ldots \omega_k$, то помощію ихъ и данной ω_1 должно будетъ опредѣлить ω_{k+1}— функцію $p_{k+2}, \ldots p_n, x_1, \ldots x_n$, которая должна совокупно удовлетворить систему k линейныхъ уравненій:

$$(p_1 - \omega_1, p_{k+1} - \omega_{k+1}) = 0, \quad (p_2 - \omega_2, p_{k+1} - \omega_{k+1}) = 0, \ldots$$
$$(p_k - \omega_k, p_{k+1} - \omega_{k+1}) = 0, \qquad (k)$$

которыя будутъ вида уравненія (c) и получатся изъ него полагая послѣдовательно $i = 0, 1, \ldots k-1$. О формѣ ихъ должно сказать тоже, что было уже выше замѣчено объ уравненіяхъ предъидущихъ системъ и числа членовъ въ нихъ заключающихся будутъ соотвѣтственно:

$$2n - k, \; 2n - k - 1, \; 2n - k - 2, \ldots \; 2n - 2k + 1. \qquad (k')$$

Слѣдовательно такимъ образомъ могутъ быть написаны всѣ n системъ уравненій, служащихъ для послѣдовательнаго опредѣленія функцій $\omega_2, \omega_3, \ldots \omega_n$. Но изъ предъидущаго видно, что въ различныхъ уравненіяхъ одной и той-же системы числа перемѣнныхъ, также какъ и членовъ, не одинаковыя. Напр. въ уравненіяхъ (k) первыя очевидно представятся слѣдующимъ рядомъ:

$$2n - 1, \; 2n - 2, \; 2n - 3, \ldots \; 2n - k;$$

вторыя-же выражаются рядомъ (k'). Поэтому полученныя выше уравненія надобно преобразовать такъ, чтобы сдѣлать число перемѣнныхъ, также какъ и членовъ, во всѣхъ уравненіяхъ одной и той-же системы одинаковыми и равными соотвѣтственно числу перемѣнныхъ и членовъ послѣдняго уравненія системы. Такимъ образомъ въ уравненіяхъ (k) должно привести число перемѣнныхъ къ $2n-k$ и число членовъ къ $2n-2k+1$.

Начнемъ это преобразованіе съ уравненій (2). Первое изъ нихъ можно составить непосредственно, такъ какъ функція ω_1 перемѣнныхъ $p_2, \ldots p_n, x_1, \ldots x_n$ выводится алгебраически изъ даннаго уравненія; но второе—не иначе какъ опредѣливъ интегралъ $p_2 = \omega_2$ уравненія (1); когда-же этотъ послѣдній, въ которомъ ω_2 означаетъ функцію $p_3, \ldots p_n, x_1, \ldots x_n$, извѣстенъ, тогда очевидно значеніе p_2 можно вставить въ ω_1 и такимъ образомъ выразить эту функцію въ тѣхъ-же перемѣнныхъ, какъ и ω_2, вслѣдствіе чего первое изъ уравненій (2) должно упроститься. Означая функцію ω_1 послѣ вставки черезъ ω_1' и одно изъ перемѣнныхъ $p_3, \ldots p_n, x_1, \ldots x_n$ черезъ t, будемъ очевидно имѣть

$$\frac{d\omega_1'}{dt} = \frac{d\omega_1}{dt} + \frac{d\omega_1}{dp_2} \cdot \frac{d\omega_2}{dt}.$$

Эта формула сама собою показываетъ какимъ образомъ произвести требуемое преобразованіе. Для этого нужно очевидно придать къ

Digitized by Google

первому изъ уравненій (2) второе, умноженное на $\frac{\partial \omega_1}{\partial p_2}$, такимъ образомъ получимъ

$$-\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_3}+\frac{\partial \omega_1}{\partial p_2}\cdot\frac{\partial \omega_2}{\partial x_3}\right)+\frac{\partial \omega_3}{\partial x_1}-\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial p_2}\cdot\frac{\partial \omega_2}{\partial x_2}-\frac{\partial \omega_1}{\partial p_2}\cdot\frac{\partial \omega_2}{\partial x_3}\right)-$$

$$-\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial p_3}+\frac{\partial \omega_1}{\partial p_2}\cdot\frac{\partial \omega_2}{\partial p_3}\right)\frac{\partial \omega_3}{\partial x_3}+$$

$$+\sum_{m=4}^{m=n}\left\{\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_m}+\frac{\partial \omega_1}{\partial p_2}\frac{\partial \omega_2}{\partial x_m}\right)\frac{\partial \omega_3}{\partial p_m}-\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial p_m}+\frac{\partial \omega_1}{\partial p_2}\cdot\frac{\partial \omega_2}{\partial p_m}\right)\frac{\partial \omega_3}{\partial x_m}\right\}=0,$$

или, замѣчая что $\frac{\partial \omega_1}{\partial p_2}\frac{\partial \omega_2}{\partial x_2}-\frac{\partial \omega_1}{\partial p_2}\frac{\partial \omega_2}{\partial x_2}=0$ и принимая во вниманіе предъидущую формулу, будемъ имѣть

$$-\frac{\partial \omega_1'}{\partial x_3}+\frac{\partial \omega_3}{\partial x_1}-\frac{\partial \omega_1'}{\partial p_3}\frac{\partial \omega_3}{\partial x_3}+$$

$$+\sum_{m=4}^{m=n}\left(\frac{\partial \omega_1'}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial \omega_3}{\partial p_m}-\frac{\partial \omega_1'}{\partial p_m}\cdot\frac{\partial \omega_3}{\partial x_m}\right)=0$$

Этимъ послѣднимъ уравненіемъ должно замѣнить первое изъ (2), послѣ чего оба они будутъ заключать однѣ и тѣ-же перемѣнныя $p_3, p_4, \ldots p_n, x_1, \ldots x_n$ и одинаковое число членовъ $2n-3$, такъ что одно уравненіе перейдетъ въ другое черезъ замѣну ω_1' на ω_3 и обратно.

Очевидно также, что эти два уравненія символически можно представить слѣдующимъ образомъ

$$\left.\begin{array}{l}(p_1-\omega_1',\ p_3-\omega_3)=0 \quad \text{и} \quad (p_2-\omega_2,\ p_3-\omega_3)=0 \\ \text{и къ нимъ присоединить еще третье тождественное} \\ (p_1-\omega_1',\ p_2-\omega_2)=0,\end{array}\right\} \quad (2')$$

которое должно имѣть мѣсто на основаніи теоремы 4 § 17-го.

Употребляя тотъ-же пріемъ можно произвести требуемыя преобразованія во всѣхъ слѣдующихъ системахъ уравненій, служащихъ для опредѣленія функцій $\omega_4, \omega_5, \ldots$; поэтому, не останавливаясь на каждой изъ нихъ въ частности, покажемъ ходъ этого преобразованія для уравненій (k), которыя могутъ представлять каждую изъ разсматриваемыхъ системъ.

Мы можемъ составить уравненія (k) только тогда, когда уже получены значенія:

$$p_1=\omega_1(p_2, \ldots p_n, x_1, \ldots x_n),\ p_2=\omega_2(p_3, \ldots p_n, x_1, \ldots x_n), \ldots$$
$$p_{k-1}=\omega_{k-1}(p_k, \ldots p_n, x_1, \ldots x_n),\ p_k=\omega_k(p_{k+1}, \ldots p_n, x_1, \ldots x_n),$$

Digitized by Google

первое—алгебраически изъ даннаго уравненія, слѣдующія-же соотвѣтственно посредствомъ интегрированій уравненій (1), (2′) и т. д.

Производя вставку значеній p_k, $p_{k-1}, \ldots p_2$, представляемыхъ послѣдующими уравненіями, въ предъидущія, мы выразимъ всѣ функціи ω_1, $\omega_2, \ldots \omega_{k-1}$, подобно ω_k, въ перемѣнныхъ $p_{k+1}, \ldots p_n, x_1, \ldots x_n$. Означая эти функціи послѣ вставки соотвѣтственно черезъ $\omega'_1, \omega'_2, \ldots \omega'_{k-1}$ и одно изъ перемѣнныхъ, отъ которыхъ они будутъ зависѣть, черезъ t, находимъ:

$$(d)\quad \begin{cases} \dfrac{d\omega'_{k-1}}{dt} = \dfrac{d\omega_{k-1}}{dt} + \dfrac{d\omega_{k-1}}{dp_k} \cdot \dfrac{d\omega_k}{dt}, \\ \dfrac{d\omega'_{k-2}}{dt} = \dfrac{d\omega_{k-2}}{dt} + \dfrac{d\omega_{k-2}}{dp_{k-1}} \cdot \dfrac{d\omega'_{k-1}}{dt} + \dfrac{d\omega_{k-2}}{dp_k} \cdot \dfrac{d\omega_k}{dt}, \\ \quad\vdots \\ \dfrac{d\omega'_1}{dt} = \dfrac{d\omega_1}{dt} + \dfrac{d\omega_1}{dp_2}\dfrac{d\omega'_2}{dt} + \dfrac{d\omega_1}{dp_3} \cdot \dfrac{d\omega'_3}{dt} + \cdots \\ \quad \cdots + \dfrac{d\omega_1}{dp_{k-1}} \cdot \dfrac{d\omega'_{k-1}}{dt} + \dfrac{d\omega_1}{dp_k} \cdot \dfrac{d\omega_k}{dt}. \end{cases}$$

Эти формулы сами собою показываютъ какимъ образомъ должно произвести требуемое преобразованіе. Возьмемъ уравненія (k):

$$(p_1 - \omega_1,\ p_{k+1} - \omega_{k+1}) = 0,\ (p_2 - \omega_2, p_{k+1} - \omega_{k+1}) = 0, \ldots$$
$$(p_k - \omega_k,\ p_{k+1} - \omega_{k-1}) = 0$$

и будемъ ихъ называть соотвѣтственно:

уравненіе (k_1), (k_2), ... (k_k).

Чтобы привести ихъ къ виду послѣдняго изъ нихъ (k_k), должно начать преобразованіе съ уравненія (k_{k-1}) и для этого, какъ показываетъ 1-ая изъ формулъ (d), слѣдуетъ къ уравненію (k_{k-1}) придать уравненіе (k_k), умноженное на $\dfrac{d\omega_{k-1}}{dp_k}$, что доставитъ уравненіе

$$(k_{k-1}) + (k_k)\ \frac{d\omega_{k-1}}{dp_k} = 0,$$

или, на основаніи упомянутой формулы, уравненіе

$$(k'_{k-1})\quad \begin{cases} -\dfrac{d\omega'_{k-1}}{dx_{k+1}} + \dfrac{d\omega_{k+1}}{dx_{k-1}} - \dfrac{d\omega'_{k-1}}{dp_{k+1}} \cdot \dfrac{d\omega_{k+1}}{dx_{k+1}} + \\ + \sum_{m=k+2}^{m=n} \left(\dfrac{d\omega'_{k-1}}{dx_m} \cdot \dfrac{d\omega_{k+1}}{dp_m} - \dfrac{d\omega'_{k-1}}{dp_m} \cdot \dfrac{d\omega_{k+1}}{dx_m} \right) = 0, \end{cases}$$

которымъ должно замѣнить уравненіе (k_{k-1}) въ системѣ (k).

Digitized by Google

Чтъбы преобразовать уравненіе (k_{k-2}) должно, слѣдуя 2-ой изъ формулъ (d), къ уравненію (k_{k-2}) придать уравненіе (k'_{k-1}), умноженное на $\frac{\partial\omega_{k-2}}{\partial p_{k-1}}$ и уравненіе (k_k), умноженное на $\frac{\partial\omega_{k-2}}{\partial p_k}$, такимъ образомъ получимъ

$$(k_{k-2}) + (k'_{k-1})\frac{\partial\omega_{k-2}}{\partial p_{k-1}} + (k_k)\frac{\partial\omega_{k-2}}{\partial p_k} = 0, \text{ или уравненіе}$$

$$(k'_{k-2}) \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial\omega'_{k-2}}{\partial x_{k+1}} + \frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_{k-2}} - \frac{\partial\omega'_{k-1}}{\partial p_{k+1}} \cdot \frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_{k+1}} + \\ + \sum_{m=k+2}^{m=n} \left(\frac{\partial\omega'_{k-2}}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial p_m} - \frac{\partial\omega_{k-2}}{\partial p_m} \cdot \frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_m} \right) = 0 \end{array} \right.$$

Положимъ, что продолжая такимъ образомъ мы преобразовали всѣ уравненія системы (k) кромѣ 1-го, тогда, чтобы преобразовать и его, должно составить уравненіе

$$(k_1) + (k'_2)\frac{\partial\omega_1}{\partial p_2} + (k'_3)\frac{\partial\omega_1}{\partial p_3} + \cdots$$

$$\cdots + (k'_{k-1})\frac{\partial\omega_1}{\partial p_{k-1}} + (k_k)\frac{\partial\omega_1}{\partial p_k} = 0,$$

которое на основаніи послѣдней изъ формулъ (d) приметъ видъ

$$-\frac{\partial\omega'_1}{\partial x_{k+1}} + \frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_1} - \frac{\partial\omega'_1}{\partial p_{k+1}} \cdot \frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_{k+1}} +$$

$$+ \sum_{m=k+2}^{m=n} \left(\frac{\partial\omega'_1}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial p_m} - \frac{\partial\omega'_1}{\partial p_m} \cdot \frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_m} \right) = 0 \qquad (k'_1)$$

Этимъ уравненіемъ должно замѣнить уравненіе (k_1).

И такъ преобразованную систему составятъ уравненія

$$(k'_1), \ldots (k'_{k-2}), (k'_{k-1}), (k_k).$$

Въ каждое изъ нихъ входятъ однѣ и тѣ-же перемѣнныя $p_{k+1}, \ldots p_m$, $x_1, \ldots x_n$ и одинаковое число членовъ $2n-2k+1$.

Притомъ очевидно онѣ переходятъ одно въ другое черезъ перестановки функцій $\omega'_1, \omega'_2, \ldots \omega'_{k-1}, \omega_k$; поэтому могутъ быть всѣ представлены одною общей формулой

$$-\frac{\partial\omega'_l}{\partial x_{k+1}} + \frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_l} - \frac{\partial\omega'_l}{\partial p_{k+1}} \cdot \frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_{k+1}} +$$

$$+ \sum_{m=k+2}^{m=n} \left(\frac{\partial\omega'_l}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial p_m} - \frac{\partial\omega_l}{\partial p_m} \cdot \frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_m} \right) = 0, \qquad (e)$$

если въ ней послѣдовательно полагать $l = 1, 2, \ldots k$.

Digitized by Google

Эта же формула можетъ служить представительницею уравненій всѣхъ другихъ системъ, которыя всѣ получатся изъ нея, если давать указателю k по порядку значенія 1, 2, ... $n-1$ и для каждаго изъ этихъ значеній приписывать указателю l всѣ значенія не большія k.

Наконецъ возвращаясь къ преобразованной системѣ (k) должно еще замѣтить, что она очевидно символически напишется еще слѣдующимъ образомъ

$$(p_1 - \omega'_1,\ p_{k+1} - \omega_{k+1}) = 0,\ (p_2 - \omega'_2,\ p_{k+1} - \omega_{k+1}) = 0, \ldots$$

$$(p_k - \omega_k,\ p_{k+1} - \omega_{k+1}) = 0,$$

при чемъ $\omega'_1,\ \omega'_2 \ldots \omega'_k$ будутъ означать функціи однихъ перемѣнныхъ $p_{k+1}, \ldots p_n,\ x_1, \ldots x_n$. Къ этимъ уравненіямъ можно присоединить еще слѣдующія тождественныя

$$(p_l - \omega'_l,\ p_{l'} - \omega'_{l'}) = 0,$$

имѣющія мѣсто, на основаніи теоремы 4, § 17, при всѣхъ значеніяхъ l и l' взятыхъ въ ряду чиселъ 1, 2, ... k.

§ 21. Прежде чѣмъ мы изложимъ интегрированіе системъ уравненій, выведенныхъ въ предъидущемъ §, сдѣлаемъ въ нихъ еще одно, уже послѣднее преобразованіе, впрочемъ весьма простое и однообразное для всѣхъ, которое поэтому достаточно показать на уравненіи (e), представляющемъ ихъ общій типъ.

Въ уравненіи (e) $p_{k+1} = \omega_{k+1}$ представляетъ искомую функцію перемѣнныхъ $p_{k+2},\ p_{k+3}, \ldots p_n,\ x_1, \ldots x_n;\ \omega' l$ — данную функцію, въ которую кромѣ этихъ перемѣнныхъ входитъ сама опредѣляемая функція $p_{k+1} = \omega_{k+1}$. Поэтому, слѣдуя обыкновенному пріему, должно его преобразовать въ другое также линейное уравненіе, въ которомъ къ прежнимъ независимымъ перемѣннымъ прибавится еще p_{k+1}, новая-же искомая функція въ коеффиціэнты уравненія не войдетъ.

Для этой цѣли положимъ

$$f_k(p_{k+1},\ p_{k+2}, \ldots p_n,\ x_1, \ldots x_n) = \text{const} = a_k$$

будетъ уравненіе, изъ котораго выведется значеніе

$$p_{k+1} = \omega_{k+1},$$

удовлетворяющее уравненіе (e). Уравненіе $f_k = a_k$ по вставкѣ значенія $p_{k+1} = \omega_{k+1}$ обратится въ тождество, слѣдовательно дифференцируя его въ отношеніи t, которымъ означимъ одно изъ перемѣнныхъ $p_{k+2}, \ldots p_n,\ x_1, \ldots x_n$, будемъ имѣть также тождественно

$$\frac{df_k}{dt} + \frac{df_k}{dp_{k+1}} \cdot \frac{d\omega_{k+1}}{dt} = 0, \text{ или } - \frac{df_k}{dp_{k+1}} \cdot \frac{d\omega_{k+1}}{dt} = \frac{df_k}{dt}$$

Digitized by Google

Поэтому умноживъ уравненіе (e) на $-\frac{\partial f_k}{\partial p_{k+1}}$, получимъ

$$\frac{\partial f_k}{\partial p_{k+1}} \cdot \frac{\partial \omega'_l}{\partial x_{k+1}} - \frac{\partial f_k}{\partial p_{k+1}} \cdot \frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial x_l} - \frac{\partial \omega'_l}{\partial p_{k+1}} \cdot \left(- \frac{\partial f_k}{\partial p_{k+1}} \cdot \frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial x_{k+1}} \right) +$$

$$+ \sum_{m=k+2}^{m=n} \left[\frac{\partial \omega'_l}{\partial x_m} \left(- \frac{\partial f_k}{\partial p_{k+1}} \cdot \frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial p_m} \right) - \frac{\partial \omega'_l}{\partial p_m} \left(- \frac{\partial f_k}{\partial p_{k+1}} \cdot \frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial x_m} \right) \right] = 0,$$

или, на основаніи предъидущаго равенства,

$$(g) \qquad \frac{\partial f_k}{\partial x_l} + \sum_{m=k+1}^{m=n} \left(\frac{\partial \omega'_l}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial f_k}{\partial p_m} - \frac{\partial \omega'_l}{\partial p_m} \frac{\partial f_k}{\partial x_m} \right) = 0.$$

Наконецъ это уравненіе можно представить еще въ символической формѣ слѣдующимъ образомъ

$$(p_l - \omega'_l,\ f_k) = 0,$$

гдѣ ω'_l и f_k представляютъ функціи однѣхъ и тѣхъ-же перемѣнныхъ $p_{k+1}, p_{k+2} \ldots p_n, x_1, \ldots x_n$.

Приведя окончательно всѣ уравненія къ надлежащему виду, мы можемъ теперь изложить ходъ ихъ интегрированія. Общій планъ и существенные пріемы, обусловливающіе его успѣхъ, въ настоящемъ случаѣ сходны съ тѣми, которые изложены въ § 18 при интегрированіи соотвѣтственныхъ уравненій еще не упрощеннаго вида; различіе подробностей происходитъ въ настоящемъ случаѣ главнымъ образомъ отъ постепеннаго исключенія излишнихъ перемѣнныхъ изъ интегрируемыхъ уравненій при послѣдовательномъ опредѣленіи $n-1$ неизвѣстныхъ функцій. Такимъ образомъ теперь мы должны интегрировать также $n-1$ системъ, состоящихъ изъ прежняго числа уравненій; но при опредѣленіи каждой новой функціи число перемѣнныхъ будетъ уменьшено двумя, вслѣдствіе исключенія помощію функціи передъ нею опредѣленной. Съ происходящимъ такимъ образомъ упрощеніемъ теоріи соединяется ея усовершенствованіе еще въ другомъ отношеніи: уравненія одной и той-же системы и теперь содержатъ равное число перемѣнныхъ, но не всѣ онѣ между собою одинаковы, а это обстоятельство ведетъ, какъ мы вскорѣ увидимъ, къ тому, что теорія освобождается отъ недостатка, указаннаго въ примѣчаніи 1 къ § 18, уменьшавшаго вѣроятность ея примѣнимости.

Послѣдовательное опредѣленіе $n-1$ неизвѣстныхъ функцій, необходимыхъ для рѣшенія разсматриваемой нами задачи, можетъ быть представлено въ общемъ видѣ слѣдующимъ образомъ.

Изъ даннаго уравненія съ частными производными 1-го порядка

$$H(x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n) = a$$

Digitized by Google

должно вывести алгебраически значеніе p_1, одной изъ частныхъ производныхъ, въ функціи остальныхъ и перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_n$; положимъ оно будетъ

$$p_1 = \omega_1 (p_2, \ldots p_n, x_1, \ldots x_n, a).$$

Чтобы опредѣлить уравненіе

$$f_1 (p_2, \ldots p_n, x_1, \ldots x_n, a) = \text{const.} = a_1,$$

изъ котораго выведется выраженіе p_2 въ функціи $p_3, \ldots p_n, x_1, \ldots x_n, a, a_1$, должно взять линейное уравненіе

$$(p_1 - \omega_1, f_1) = 0,$$

которое на основаніи формулы (g) имѣетъ видъ

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \sum_{m=2}^{m=n} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial p_m} - \frac{\partial \omega_1}{\partial p_m} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \right) = 0,$$

и опредѣлить одинъ изъ его частныхъ интеграловъ, заключающій p_2, что приводится къ опредѣленію одного изъ интеграловъ системы $2n-2$ обыкновенныхъ совокупныхъ уравненій съ $2n-1$ перемѣнными

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{-\frac{\partial \omega_1}{\partial p_2}} = \ldots = \frac{dx_n}{-\frac{\partial \omega_1}{\partial p_n}} = \frac{dp_2}{\frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}} = \ldots = \frac{dp_n}{\frac{\partial \omega_1}{\partial x_n}}.$$

Если этотъ интегралъ будетъ

$$\varphi (p_2, \ldots p_n, x_1, \ldots x_n, a) = \text{const.}$$

то можемъ положить $f_1 = \varphi$ и изъ уравненія $f_1 = a_1$ вывести требуемое выраженіе p_2, которое пусть будетъ

$$p_2 = \omega_2 (p_3, \ldots p_n, x_1, \ldots x_n, a, a_1).$$

Вставивъ найденное выраженіе p_2 въ функцію ω_1 и означая ее послѣ подстановки черезъ ω'_1, будемъ имѣть

$$p_1 = \omega'_1$$

—значеніе p_1, выраженное въ тѣхъ-же перемѣнныхъ, какъ и p_2.

Далѣе, чтобы опредѣлить уравненіе

$$f_2 (p_3, \ldots p_n, x_1, \ldots x_n, a, a_1) = \text{const.} = a_2$$

изъ котораго выведется выраженіе p_3 въ функціи $p_4, \ldots p_n, x_1, \ldots x_n, a, a_1, a_2$, должно взять два совокупныхъ линейныхъ уравненія

$$(p_1 - \omega'_1, f_2) = 0 \quad \text{и} \quad (p_2 - \omega_2, f_2) = 0, \qquad (\alpha)$$

Digitized by Google

имѣющія, на основаніи формулы (g), видъ

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \sum_{m=3}^{m=n} \left(\frac{\partial \omega_1'}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial p_m} - \frac{\partial \omega_1'}{\partial p_m} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \sum_{m=3}^{m=n} \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x_m} \frac{\partial f_2}{\partial p_m} - \frac{\partial \omega_2}{\partial p_m} \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \right) = 0, \qquad (\alpha)$$

и опредѣлить ихъ общее рѣшеніе. Къ нимъ можно присоединить еще тождество

$$(\alpha') \qquad (p_1 - \omega_1',\ p_2 - \omega_2) = 0\ ,$$

имѣющее мѣсто на основаніи теоремы 4, § 17.

Опредѣленіе функціи f_2, удовлетворяющей совокупныя линейныя съ частными производными уравненія (α), дѣлается на основаніи тооремы 1 § 17 при помощи тождества (α').

Сначала должно опредѣлить частный интегралъ одного изъ уравненій (α), заключающій p_3, что приводится къ отысканію одного изъ интеграловъ системы $2n-4$ обыкновенныхъ совокупныхъ уравненій съ $2n-3$ перемѣнными:

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_3}{-\frac{\partial \omega_1'}{\partial p_3}} = \cdots = \frac{dx_n}{-\frac{\partial \omega_1'}{\partial p_n}} = \frac{dp_3}{\frac{\partial \omega_1'}{\partial x_3}} = \cdots = \frac{dp_n}{\frac{\partial \omega_1'}{\partial x_n}}, \qquad (\beta)$$

если хотимъ опредѣлить интегралъ 1-го изъ уравненій (α), или —

$$\frac{dx_2}{1} = \frac{dx_3}{-\frac{\partial \omega_2}{\partial p_3}} = \cdots = \frac{dx_n}{-\frac{\partial \omega_2}{\partial p_n}} = \frac{dp_3}{\frac{\partial \omega_2}{\partial x_3}} = \cdots = \frac{dp_n}{\frac{\partial \omega_2}{\partial x_n}},$$

если хотимъ имѣть интегралъ 2-го изъ уравненій (α).

Положимъ напр. мы опредѣлили интегралъ 1-й изъ этихъ системъ

$$\psi(p_3, \ldots p_n,\ x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ a,\ a_1) = \text{const.},$$

въ который можетъ входить и x_2 и какъ постоянное.

Функцію ψ, представляющую частный интегралъ 1-го изъ уравненій (α) вставимъ во 2-ое изъ нихъ вмѣсто f_2; результатъ этой подстановки ψ_1 вставимъ въ тоже уравненіе вмѣсто f_2 и т. д. такимъ образомъ произойдетъ слѣдующій рядъ функцій:

$$(p_2 - \omega_2, \psi) = \psi_1,\ (p_2 - \omega_2, \psi_1) = \psi_2, \ldots$$

$$(p_2 - \omega_2, \psi_{i-1}) = \psi_i, \ldots$$

Легко доказать помощію теоремы 1 § 17, что функціи $\psi_1, \psi_2, \ldots$ будутъ интегралами 1-го уравненія (α). Дѣйствительно, взявъ вы-

Digitized by Google

ражающее эту теорему тождество

$$[A, (B, C)] + [B, (C, A)] + [C, (A, B)] = 0,$$

полагая въ немъ $A = p_1 - \omega'_1$, $B = p_2 - \omega_1$ и принимая во вниманіе тождество (α'), находимъ

$$[p_1 - \omega'_1, (p_2 - \omega_2, C)] + [p_2 - \omega_2, (C, p_1 - \omega_1)] = 0$$

тождество, имѣющее мѣсто для всякой функціи C перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n$.

Полагая теперь послѣдовательно $C = \psi, \psi_1, \ldots \psi_i, \ldots$ выводимъ одно за другимъ слѣдующія тождества:

$$[p_1 - \omega'_1, (p_2 - \omega_2, \psi)] = 0, \text{ или } (p_1 - \omega'_1, \psi_1) = 0,$$

$$[p_1 - \omega'_1, (p_2 - \omega_2, \psi_1)] = 0, \text{ или } (p_1 - \omega'_1, \psi_2) = 0, \text{ и т. д.}$$

доказывающія теорему.

Такъ какъ ψ, ψ_1, ψ_2, ... представляютъ интегралы 1-го изъ уравненій (α), то слѣдовательно $\psi = \text{const.}$, $\psi_1 = \text{const.}$, $\psi_2 = \text{const.}$,... будутъ интегралами системы $2n - 4$ обыкновенныхъ совокупныхъ уравненій (β); но эта система можетъ имѣть только $2n - 4$ независимыхъ между собою или различныхъ интеграловъ, которыхъ всѣ прочіе будутъ функціями; поэтому если при вычисленіи ряда $\psi, \psi_1, \psi_2, \ldots \psi_i, \ldots$ мы не встрѣтимъ члена тождественно приводящагося къ какому нибудь постоянному или нулю, то необходимо должны встрѣтить членъ ψ_i, выражающійся функціею предъидущихъ, въ которую сверхъ того можетъ войти x_2, какъ постоянное. И такъ пусть будетъ

$$\psi_i = F(x_2, \psi, \psi_1, \ldots \psi_{i-1}),$$

гдѣ очевидно указатель i долженъ быть не болѣе $2n-4$.

Продолжать вычисленіе предъидущаго ряда безполезно, потому что новые члены его конечно будутъ интегралами 1-го изъ уравненій (α), но всѣ они выразятся функціями уже найденныхъ интеграловъ, а намъ извѣстно à priori, что произвольная функція нѣсколькихъ интеграловъ линейнаго уравненія съ частными производными есть также интегралъ этого уравненія. Пользуясь возможностью произвольнаго назначенія вида функціи перемѣнныхъ $x_2, \psi, \psi_1, \ldots \psi_{i-1}$, удовлетворяющей 1-ое изъ уравненій (α), можемъ опредѣлить этотъ видъ такъ, чтобы она удовлетворяла вмѣстѣ съ тѣмъ и 2-е изъ уравненій (α).

Означивъ искомую функцію черезъ $\theta(x_2, \psi, \psi_1, \ldots \psi_{i-1})$ и вставивъ ее вмѣсто f_2 во 2-ое изъ уравненій (α), находимъ, что на основаніи формулы (8) § 16 оно приметъ видъ

$$(p_1 - \omega_2, \theta) = (p_2 - \omega_2, x_2)\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + (p_2 - \omega_2, \psi)\frac{\partial\theta}{\partial\psi} +$$

$$+ (p_2 - \omega_2, \psi_1)\frac{\partial\theta}{\partial\psi_1} + \cdots + (p_2 - \omega_2, \psi_{i-1})\frac{\partial\theta}{\partial\psi_{i-1}} = 0,$$

Digitized by Google

или

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + \psi_1 \frac{\partial\theta}{\partial\psi} + \psi_2 \frac{\partial\theta}{\partial\psi_1} + \cdots + F(x_2, \psi, \ldots \psi_{i-1}) \frac{\partial\theta}{\partial\psi_{i-1}} = 0,$$

интегрированіе этого линейнаго уравненія приводится къ системѣ обыкновенныхъ совокупныхъ уравненій

$$\frac{dx_2}{1} = \frac{d\psi}{\psi_1} = \frac{d\psi_1}{\psi_2} = \cdots = \frac{d\psi_{i-1}}{F(x_2, \psi, \ldots \psi_{i-1})},$$

которая весьма просто преобразуется въ обыкновенное уравненіе порядка i съ двумя перемѣнными x_2 и ψ

$$\frac{d^i\psi}{dx_2^i} = F\left(x_2, \psi, \frac{d\psi}{dx_2}, \ldots \frac{d^{i-1}\psi}{dx_2^{i-1}}\right).$$

Опредѣливъ одинъ изъ первыхъ интеграловъ этого послѣдняго

$$\chi\left(x_2, \psi, \frac{d\psi}{dx_2}, \ldots \frac{d^{i-1}\psi}{dx_2^{i-1}}\right) = \text{const.}$$

и вставивъ въ него значенія $\frac{d\psi}{dx_2} = \psi_1$, $\frac{d^2\psi}{dx_2^2} = \psi_2, \ldots$ получимъ интегралъ предъидущей системы совокупныхъ уравненій

$$\chi(x_2, \psi, \psi_1, \ldots \psi_{i-1}) = \text{const.}$$

Слѣдовательно $f_2 = \theta = \chi$ будетъ общимъ интеграломъ уравненій (α). Полагая-же

$$f_2 \text{ или } \chi = \text{const.} = a_2,$$

выведемъ отсюда требуемое выраженіе p_2 въ функціи $p_4, \ldots p_n$, $x_1, \ldots x_n$, a, a_1, a_2, которое пусть будетъ

$$p_2 = \omega_2(p_4, \ldots p_n, x_1, \ldots x_n, a, a_1, a_2).$$

Если при вычисленіи ряда $\psi_1, \psi_2, \ldots$ встрѣтится членъ, приводящійся къ постоянному, тогда опредѣленіе общаго интеграла уравненій (α) становится весьма просто. Въ самомъ дѣлѣ, полагая $\psi_i = k$, гдѣ k постоянное, будемъ имѣть

$$\frac{d^{i-1}\psi}{dx_2^{i-1}} = k,$$

откуда интегрируя находимъ $\frac{d^{i-1}\psi}{dx_2^{i-1}} - k x_2 = \text{const.}$, слѣдовательно $f_2 = \psi_{i-1} - kx_2$. Если $k = 0$, то $f_2 = \psi_{i-1}$.

Изложенный выше способъ опредѣленія общаго интеграла уравненій (α) не представляетъ недостаточности и въ обстоятельствахъ подобныхъ тѣмъ, о которыхъ было говорено въ примѣчаніи 1 къ § 18. Это зависитъ отъ того, что во 2-мъ изъ уравненій (α) нахо-

Digitized by Google

дится перемѣнное x_2, входящее въ 1-ое изъ нихъ какъ постоянное; еслибъ мы перемѣнили роли двухъ уравненій (α), тогда-бы подобное-же слѣдствіе произошло отъ того, что въ 1-мъ находится перемѣнное x_1, входящее во 2-ое какъ постоянное. Дѣйствительно, если ψ_1 будетъ функціею x_2 и ψ, которую означимъ $F(x_2, \psi)$, то общимъ интеграломъ уравненій (α) будетъ частный интегралъ уравненія

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + F(x_2, \psi)\frac{\partial\theta}{\partial\psi} = 0,$$

или интегралъ обыкновеннаго уравненія 1-го порядка

$$\frac{d\psi}{dx_2} = F(x_2, \psi).$$

Отсутствіе одного или обоихъ перемѣнныхъ x_2, ψ въ F очевидно только упроститъ интегрированіе предъидущаго уравненія.

Вставивъ найденное выше значеніе $p_3 = \omega_3$ въ функціи ω', и ω_2, которыя послѣ этой подстановки будемъ означать соотвѣтственно ω_1'' и ω_2', получимъ $p_1 = \omega_1''$, $p_2 = \omega_2'$—значенія p_1 и p_2, выраженныя въ тѣхъ-же перемѣнныхъ, какъ и p_3. Затѣмъ, чтобы опредѣлить уравненіе

$$f_3(p_4, \ldots p_n, x_1, \ldots x_n, a, a_1, a_2) = \text{const.} = a_3,$$

изъ котораго выведется значеніе p_4 въ функціи $p_5, \ldots p_n, x_1, \ldots x_n, a, a_1, a_2, a_3$, должно взять три совокупныя линейныя уравненія съ частными производными:

$$(p_1 - \omega_1'', f_3) = 0, \quad (p_2 - \omega_2', f_3) = 0, \quad (p_3 - \omega_3, f_3) = 0, \quad (\gamma)$$

которыя по формулѣ (g) имѣютъ видъ

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f_3}{\partial x_1} + \sum_{m=4}^{m=n}\left(\frac{\partial\omega_1''}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial f_3}{\partial p_m} - \frac{\partial\omega_1''}{\partial p_m}\cdot\frac{\partial f_3}{\partial x_m}\right) = 0,\\
&\frac{\partial f_3}{\partial x_2} + \sum_{m=4}^{m=n}\left(\frac{\partial\omega_2'}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial f_3}{\partial p_m} - \frac{\partial\omega_2'}{\partial p_m}\cdot\frac{\partial f_3}{\partial x_m}\right) = 0, \qquad (\gamma)\\
&\frac{\partial f_3}{\partial x_3} + \sum_{m=4}^{m=n}\left(\frac{\partial\omega_3}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial f_3}{\partial p_m} - \frac{\partial\omega_3}{\partial p_m}\cdot\frac{\partial f_3}{\partial x^m}\right) = 0
\end{aligned}$$

и опредѣлить ихъ общій интегралъ f_3.

Къ нимъ должно присоединить еще тождества:

$$\begin{aligned}
&(p_1 - \omega_1'', p_2 - \omega_2') = 0, \quad (p_2 - \omega_2', p_3 - \omega_3) = 0,\\
&(p_3 - \omega_3, p_1 - \omega_1'') = 0, \qquad (\gamma')
\end{aligned}$$

имѣющія мѣсто на основаніи теоремы 4, § 17.

Digitized by Google

Уравненія (γ) той-же формы, какъ и (α), только заключаютъ менѣе перемѣнныхъ; слѣдовательно по способу сей-часъ объясненному мы можемъ опредѣлить общій интегралъ которыхъ нибудь двухъ изъ нихъ. Положимъ такимъ образомъ опредѣлена функція

$$\Phi(p_1, \ldots p_n, x_1, x_2, x_3, \ldots x_n),$$

которая будучи вставлена вмѣсто f_3 удовлетворитъ напр. 1-ое и 2-ое изъ уравненій (γ). Хотя количество x_3 не входитъ какъ перемѣнное въ эти уравненія, но оно заключается въ ихъ коефиціэнтахъ, поэтому можно допустить его присутствіе и въ Φ.

Вставимъ Φ вмѣсто f_3 въ 3-е изъ уравненій (γ); результатъ этой подстановки вставимъ опять вмѣсто f_3 въ тоже уравненіе и т. д. Такимъ образомъ получится рядъ функцій

$$(p_3 - \omega_3, \Phi) = \Phi_1, (p_3 - \omega_3, \Phi_1) = \Phi_2, \ldots$$
$$(p_3 - \omega_3, \Phi_{k-1}) = \Phi_k \ldots,$$

которыя будутъ интегралами 1-го и 2-го уравненій (γ).

Дѣйствительно въ теоремѣ 1 § 17 полагая сначала $A = p_1 - \omega_1''$, $B = p_3 - \omega_3$, потомъ $A = p_2 - \omega_2'$, $B = p_3 - \omega_3$ и принимая во вниманіе 2-ое и 3-е изъ тождествъ (γ'), находимъ

$$[p_1 - \omega_1'', (p_3 - \omega_3, C)] + [p_3 - \omega_3, (C, p_1 - \omega_1'')] = 0,$$
$$[p_2 - \omega_2', (p_3 - \omega_3, C)] + [p_3 - \omega_3, (C, p_2 - \omega_2')] = 0,$$

тождества, имѣющія мѣсто для всякой функціи C перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n$. Полагая въ нихъ послѣдовательно

$$C = \Phi, \Phi_1, \Phi_2, \ldots$$

и помня при томъ, что Φ представляетъ общій интегралъ 1-го и 2-го изъ уравненій (γ), находимъ двойной рядъ тождествъ:

$$\left.\begin{array}{l} [p_1 - \omega_1'', (p_3 - \omega_3, \Phi)] = 0, \text{ или } (p_1 - \omega_1'', \Phi_1) = 0 \\ [p_2 - \omega_2', (p_3 - \omega_3, \Phi)] = 0, \text{ или } (p_2 - \omega_2', \Phi_1) = 0 \end{array}\right\};$$
$$\left.\begin{array}{l} [p_1 - \omega_1'', (p_3 - \omega_3, \Phi_1)] = 0, \text{ или } (p_1 - \omega_1'', \Phi_2) = 0 \\ [p_2 - \omega_2', (p_3 - \omega_3, \Phi_1)] = 0, \text{ или } (p_2 - \omega_2', \Phi_2) = 0 \end{array}\right\}; \text{ и т. д.}$$

доказывающихъ предложеніе.

Если рядъ $\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \ldots$ не оканчивается членомъ равнымъ постоянному или нулю, то необходимо долженъ получиться членъ, выражающійся функціею предъидущихъ, потому что какъ 1-ое такъ и 2-ое изъ уравненій (γ) можетъ допустить только $2n-6$ различныхъ частныхъ интеграловъ. Пусть такой членъ будетъ Φ_k; въ выраженіе его кромѣ $\Phi, \Phi_1, \ldots \Phi_{k-1}$ можетъ входить также x_3, поэтому положимъ

$$\Phi_k = F(x_3, \Phi, \Phi_1, \ldots \Phi_{k-1}),$$

гдѣ k неболѣе $2n-6$.

Digitized by Google

Такъ какъ произвольная функція перемѣнныхъ x_3, Φ, Φ_1,.. Φ_{k-1} удовлетворяетъ 1-ое и 2-ое изъ уравненій (γ), то достаточно опредѣлить видъ ея такъ, чтобы она удовлетворяла 3-е изъ уравненій (γ), тогда она удовлетворитъ и два первыя. Означая искомую функцію черезъ π, находимъ для опредѣленія ея линейное уравненіе

$$(p_3 - \omega_3, \pi) = \frac{d\pi}{dx_3} + \Phi_1 \frac{d\pi}{d\Phi} + \Phi_2 \frac{d\pi}{d\Phi_1} + \ldots + F \frac{d\pi}{d\Phi_{k-1}} = 0,$$

интегрированіе котораго приводится къ системѣ совокупныхъ

$$\frac{dx_3}{1} = \frac{d\Phi}{\Phi_1} = \frac{d\Phi_1}{\Phi_2} = \ldots = \frac{d\Phi_{k-1}}{F},$$

или къ уравненію съ 2-мя перемѣнными порядка k

$$\frac{d^k \Phi}{dx_3^k} = F\left(x_3, \Phi, \frac{d\Phi}{dx_3}, \ldots \frac{d^{k-1}\Phi}{dx_3^{k-1}}\right).$$

Опредѣливъ одинъ изъ первыхъ интеграловъ его

$$\xi\left(x_3, \Phi, \frac{d\Phi}{dx_3}, \ldots \frac{d^{k-1}\Phi}{dx_3^{k-1}}\right) = \text{const}$$

и вставивъ въ него значенія $\frac{d\Phi}{dx_3} = \Phi_1$, $\frac{d^2\Phi}{dx_3} = \Phi_2$, .. получимъ искомое значеніе

$$f_3 = \pi = \xi\,(x_3, \Phi, \Phi_1, \ldots \Phi_{i-1})$$

функціи f_3, удовлетворяющей совокупныя уравненія (γ).

Если въ равенствѣ $\Phi_k = F$ указатель $k = 1$, то функція F будетъ имѣть одну изъ слѣдующихъ формъ $F(x_3, \Phi)$, $F(\Phi)$, $F(x_3)$, $F =$ постоянному, $F = 0$. Во всѣхъ этихъ случаяхъ, какъ уже объяснено выше, предъидущій способъ опредѣленія общаго интеграла уравненій (γ) не только не оказывается недостаточнымъ, но напротивъ приложеніе его упрощается.

Полагая $f_3 = \xi = \text{const.} = a_3$, выведемъ изъ этого уравненія выраженіе p_4 въ функціи $p_6, \ldots p_n$, $x_1, \ldots x_n$, a, a_1, a_2, a_3, которое пусть будетъ

$$p_4 = \omega_4.$$

Вставляя это значеніе p_4 въ функціи ω_1'', ω_2', ω_3 и означая ихъ соотвѣтственно ω_1''', ω_2'', ω_3' послѣ подстановки, получимъ

$$p_1 = \omega_1''', \quad p_2 = \omega_2'', \quad p_3 = \omega_3'$$

выраженія p_1, p_2, p_3 въ тѣхъ-же перемѣнныхъ, какъ и p_4.

Теперь для опредѣленія уравненія $f_4 = \text{const.} = a_4$, изъ котораго выведемъ выраженіе p_5 въ функціи $p_6, \ldots p_n$, $x_1, \ldots x_n$, нужно

Digitized by Google

интегрировать систему 4-хъ линейныхъ совокупныхъ уравненій съ частными производными

$$(p_1 - \omega_1''', f_4) = 0,\ (p_2 - \omega_2''', f_4) = 0,\ (p_3 - \omega_4', f_4) = 0,$$
$$(p_4 - \omega_4, f_4) = 0.$$

Но сущность способа уже достаточно уяснилась въ изложеніи общаго хода интегрированія двухъ предъидущихъ системъ (α) и (γ), такъ что теперь весьма легко представить дальнѣйшее приложеніе его къ системѣ 4-хъ уравненій выше написанныхъ и къ уравненіямъ слѣдующихъ системъ. Положимъ такимъ образомъ проинтегрированы уже $n-2$ системы и остается интегрировать только послѣднюю $n-1$-ю. Данное уравненіе и интегралы $n-2$ проинтегрированныхъ системъ будутъ

$$H(p_1, \ldots p_n, x_1, \ldots x_n) = a,\ f_1(p_2, \ldots p_n, x_1, \ldots x_n, a) = a_1,$$
$$f_2(p_3, \ldots p_n, x_1, \ldots x_n, a, a_1) = a_2, \ldots$$
$$\ldots f_{n-2}(p_{n-1}, \ldots p_n, x_1, \ldots x_n, a, a_1, \ldots a_{n-3}) = a_{n-2}.$$

По ходу предъидущаго интегрированія требуется, чтобы изъ этихъ уравненій были выведены выраженія каждой изъ $n-1$ первыхъ величинъ ряда $p_1, p_2, \ldots p_{n-1}, p_n, x_1, \ldots x_n, a, a_2, \ldots a_{n-2}$ посредствомъ $2n$ величинъ слѣдующихъ за ними. Удерживая прежнія означенія, представимъ эти выраженія такимъ образомъ

$$p_1 = \omega_1,\ p_2 = \omega_2, \ldots\ p_{n-1} = \omega_{n-1}$$

Затѣмъ должно значенія $p_{n-1}, p_{n-2}, \ldots p_2$, доставляемыя соотвѣтственно послѣднимъ, предпослѣднимъ и т. д. уравненіями предъидущей системы вставить во всѣ уравненія, предшествующія каждому изъ нихъ. Придерживаясь прежняго способа означеній выразимъ число такихъ подстановокъ въ каждой изъ функцій $\omega_1, \omega_2, \ldots$ числомъ единицъ указателей, написанныхъ надъ ними вверху. Такимъ образомъ получимъ

$$p_1 = \omega_1^{(n-2)},\ p_2 = \omega_2^{(n-3)}, \ldots\ p_{n-2} = \omega_{n-2}', p_{n-1} = \omega_{n-1},$$

выраженія $p_1, \ldots p_{n-1}$ посредствомъ $p_n, x_2, \ldots x_n, a_1, \ldots a_{n-2}$.

Теперь можемъ приступить къ опредѣленію уравненія

$$f_{n-1}(p_n, x_1, \ldots x_n, a, \ldots a_{n-2}) = \text{const.} = a_{n-1},$$

изъ котораго p_n выразится функціею $x_1, \ldots x_n, a, a_1, \ldots a_{n-1}$. Для этого возьмемъ систему $n-1$ совокупныхъ линейныхъ уравненій съ частными производными:

$$(p_1 - \omega_1^{(n-2)}, f_{n-1}) = 0,\ (p_2 - \omega_2^{(n-3)}, f_{n-1}) = 0, \ldots$$
$$(p_{n-1} - \omega_{n-1}, f_{n-1}) = 0,$$

Digitized by Google

которыя на основаніи формулы (g) имѣютъ слѣдующій видъ

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega_1^{(n-2)}}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial f_{n-1}}{\partial p_n} - \frac{\partial \omega_1^{(n-2)}}{\partial p_n}\cdot\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} = 0\\
&\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_2} + \frac{\partial \omega_2^{(n-3)}}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial f_{n-1}}{\partial p_n} + \frac{\partial \omega_2^{(n-3)}}{\partial p_n}\cdot\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} = 0\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial f_{n-1}}{\partial p_n} - \frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial p_n}\cdot\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} = 0
\end{aligned}\right\} \quad (\delta')$$

и опредѣлимъ ихъ общій интегралъ f_n. Основанія пріемовъ интегрированія подобной системы уравненій подробно объяснены выше, поэтому въ настоящемъ случаѣ ограничимся болѣе сжатымъ изложеніемъ.

Должно начать опредѣленіемъ частнаго интеграла одного изъ уравненій (δ); если возьмемъ для этого первое изъ нихъ, то должно будетъ найти одинъ изъ двухъ интеграловъ системы обыкновенныхъ уравненій

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_n}{-\dfrac{\partial \omega_1^{(n-2)}}{\partial p_n}} = \frac{dp_n}{\dfrac{\partial \omega_1^{(n-2)}}{\partial x_n}}.$$

Пусть этотъ интегралъ будетъ $\eta = \text{const.}$, гдѣ η есть функція перемѣнныхъ p_n, x_1, x_n и можетъ содержать $x_2, .., x_{n-1}$, какъ постоянныя. Вставимъ эту функцію на мѣсто f_{n-1} въ одно изъ остальныхъ уравненій (δ), напр. во 2-е, результатъ подстановки опять вставимъ вмѣсто f_2 въ тоже уравненіе. Такимъ образомъ получимъ

$$(p_2 - \omega_2^{(n-3)}, \eta) = \eta', \quad (p_2 - \omega_2^{(n-3)}, \eta') = \eta''.$$

Если η' выражается функціею η, x_2, $x_3, .. x_n$, то общій интегралъ двухъ первыхъ уравненій (δ) опредѣлится какъ интегралъ обыкновеннаго уравненія 1-го порядка

$$\frac{d\eta}{dx_2} = \eta'$$

съ 2-мя перемѣнными η и x_2, ибо количества $x_3, .. x_n$ можно разсматривать постоянными. Въ противномъ случаѣ η'' необходимо выразится какъ функція η, η' и x_2, $x_3, .. x_n$; тогда искомый общій интегралъ двухъ первыхъ уравненій (δ) будетъ одинъ изъ двухъ первыхъ интеграловъ уравненія 2-го порядка

$$\frac{d^2\eta}{dx_2^2} = \eta''$$

съ 2-мя перемѣнными η и x_2, потому что и здѣсь $x_3, .. x_n$ должно

Digitized by Google

разсматривать постоянными. Притомъ во 2-ю часть предъидущаго уравненія должно вмѣсто η' поставить $\frac{d\eta}{dx_2}$.

Пусть интегралъ того или другаго изъ двухъ предъидущихъ уравненій и слѣдовательно общій интегралъ двухъ первыхъ уравненій (δ) будетъ

$$\eta_1 = \text{const.}$$

Если онъ выведенъ изъ уравненія 1-го порядка, тогда η_1 будетъ функціею η, x_2, x_3, .. x_n; если-же изъ уравненія 2-го порядка, то въ η_1 войдетъ сверхъ того производная $\frac{d\eta}{dx_2}$ которую должно замѣнить функціей η'.

Далѣе, чтобы опредѣлить общій интегралъ трехъ первыхъ уравненій (δ), составимъ функціи

$$(p_3 - \omega_3^{(n-4)}, \eta_1) = \eta'_1, \quad (p_3 - \omega_3^{(n-4)}, \eta'_1) = \eta''_1$$

Здѣсь или η'_1 выразится какъ функція η_1, x_2, .. x_n, или, если этого не случится, то необходимо η_1'' выразится посредствомъ η_1, η_1', x_3, .. x_n. Въ первомъ случаѣ должно опредѣлить интегралъ уравненія 1-го порядка между перемѣнными η_1 и x_3:

$$\frac{d\eta_1}{dx_3} = \eta'_1;$$

во 2-мъ—одинъ изъ первыхъ интеграловъ уравненія 2-го порядка между тѣми-же перемѣнными:

$$\frac{d^2\eta_1}{dx_3^2} = \eta''_1,$$

при чемъ во 2-ю часть послѣдняго уравненія должно вставить $\frac{d\eta_1}{dx_3}$ вмѣсто η_1'. Пусть интегралъ того или другаго изъ двухъ предъидущихъ уравненій и слѣдовательно общій интегралъ 3-хъ первыхъ уравненій (δ) будетъ

$$\eta_2 = \text{const.}$$

Если онъ выведенъ изъ уравненія 2-го порядка, то въ функцію η_2 нужно еще вставить η_1' вмѣсто $\frac{d\eta_1}{dx_3}$.

Такимъ-же образомъ помощію η_2 опредѣлимъ η_3 — интегралъ общій 4-мъ первымъ уравненіямъ (δ); помощію этого послѣдняго найдется η_4—интегралъ общій 5-ти первымъ уравненіямъ δ, и т. д. Положимъ, продолжая это вычисленіе мы уже опредѣлили интегралъ η_{n-3} общій $n-2$ первымъ уравненіямъ (δ); чтобы опредѣлить на-

Digitized by Google

конецъ интегралъ общій всѣмъ уравненіямъ этой системы, вычислимъ функціи

$$(p_{n-1} - \omega_{n-1}, \eta_{n-2}) = \eta'_{n-2}, \quad (p_{n-1} - \omega_{n-1}, \eta'_{n-2}) = \eta''_{n-2}.$$

Искомый общій интегралъ системы уравненій (δ) найдется посредствомъ интегрированія уравненія 1-го порядка

$$\frac{d\eta_{n-2}}{dx_{n-2}} = \eta'_{n-2},$$

если η'_{n-2} есть функція η_{n-2}, x_{n-1}, x_n; въ противномъ-же случаѣ—какъ одинъ изъ 2-хъ первыхъ интеграловъ уравненія 2-го порядка

$$\frac{d^2\eta_{n-2}}{dx^2_{n-1}} = \eta''_{n-2},$$

гдѣ η''_{n-2} должно быть необходимо функціею η_{n-2}, η'_{n-2}, x_{n-1}, x_n, въ которую должно вмѣсто η'_{n-2} вставить $\frac{d\eta_{n-2}}{dx_{n-1}}$. Притомъ ясно, что x_n должно разсматривать постояннымъ въ обоихъ уравненіяхъ. И такъ пусть интегралъ того или другаго изъ 2-хъ предъидущихъ уравненій, а слѣдовательно общій интегралъ уравненій (δ) будетъ

$$f_{n-1} = \text{const.} = a_{n-1}.$$

Если онъ выведенъ изъ уравненія 2-го порядка, то въ него должно вмѣсто $\frac{d\eta_{n-2}}{dx_n}$ обратно вставить η'_{n-2}.

По опредѣленіи уравненія $f_{n-1} = a_{n-1}$ разсматриваемая задача приводится къ окончанію слѣдующимъ образомъ. Изъ этого уравненія выведемъ выраженіе p_n въ функціи $x_2 \ldots x_n$, $a_1, a_2 \ldots a_{n-1}$, которое пусть будетъ

$$p_n = \omega_n;$$

вставимъ его въ функціи $\omega_1^{(n-2)}, \ldots \omega_{n-1}$, которыя послѣ подстановки означимъ соотвѣтственно $\omega_1^{(n-1)}, \ldots \omega'_{n-1}$, будемъ имѣть

$$p_1 = \omega_1^{(n-1)}, \quad p_2 = \omega_2^{(n-2)}, \ldots \quad p_{n-1} = \omega'_{n-1}, \quad p_n = \omega_n, \qquad (\rho)$$

выраженія частныхъ производныхъ искомой функціи z посредствомъ независимыхъ перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_n$ и $n-1$ произвольныхъ постоянныхъ $a_1, \ldots a_{n-1}$. Эти выраженія по самому способу ихъ опредѣленія таковы, что должны выполнять условія интегрируемости вида

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial x_i} \qquad (\varphi)$$

для всѣхъ значеній i и k взятыхъ въ ряду чиселъ $1, 2, \ldots n$. По-

Digitized by Google

этому, вставивъ ихъ въ общую формулу дифференціала искомой функціи

$$dz = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \ldots + p_n\,dx_n,$$

будемъ имѣть $dz = \omega_1^{(n-1)}\,dx_1 + \omega_2^{(n-2)}\,dx_2 + \ldots + \omega_n\,dx_n$.

Интегрируя это послѣднее равенство, получимъ

$$z = \int (\omega_1^{(n-1)}\,dx_1 + \ldots + \omega_n\,dx_n) + a_n,$$

искомое выраженіе функціи z независимыхъ перемѣнныхъ $x_1, \ldots x^n$, заключающее n произвольныхъ постоянныхъ $a_1, \ldots a_n$, т. е. полный интегралъ задачи, изъ котораго способомъ измѣненія произвольныхъ постоянныхъ можетъ быть образованъ самый общій интегралъ.

Сейчасъ было сказано, что выраженія (p) частныхъ производныхъ $p_1, \ldots p_n$ по самому способу ихъ опредѣленія таковы, что должны повѣрять условія интегрируемости (q).

Докажемъ это предложеніе. Выраженія (p) выведены изъ системы уравненій:

$$H(x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n) = a,\quad f_1(x_1, \ldots x_n, p_2, \ldots p_n, a) = a_1,$$

$$f_2(x_1, \ldots x_n, p_3, \ldots p_n, a, a_1) = a_2, \ldots$$

$$(f)\qquad f_{n-1}(x_1, \ldots x_n, p_n, a, a_1, \ldots a_{n-2}) = a_{n-1}$$

Вставивъ значеніе a, опредѣляемое 1-мъ изъ этихъ уравненій во всѣ остальныя; потомъ—значеніе a_1, опредѣляемое 2-мъ, во всѣ слѣдующія и такимъ-же образомъ исключая постоянныя $a_2, \ldots a_{n-2}$, мы сдѣлаемъ первыя части $f_1, \ldots f_{n-1}$ предъидущихъ уравненій функціями однихъ только перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_n$, $p_1, \ldots p_n$, означая которыя соотвѣтственно $H_2, \ldots H_{n-1}$, получимъ вмѣсто предъидущей слѣдующую систему ей равнозначущую

$$(h)\qquad H = a,\quad H_1 = a_1,\quad H_2 = a_2, \ldots\quad H_{n-1} = a_{n-1}.$$

Очевидно изъ системы (h) выведутся тѣ-же самыя значенія $p_1, \ldots p_n$, какъ и изъ системы (f); поэтому на основаніи теоремы 2 § 17 достаточно доказать, что первыя части уравненій (h) повѣрятъ тождественно условіе

$$(a)\qquad (H_i, H_k) = 0$$

для всѣхъ значеній i и k, взятыхъ въ ряду чиселъ $0, 1, \ldots n-1$, тогда будетъ доказано предъидущее предложеніе.

Докажемъ сначала, что первыя части уравненій (f) повѣряютъ тождественно условіе

$$(b)\qquad (f_i, f_k) = 0$$

для тѣхъ-же значеній i и k и принимая притомъ $f_0 = H$.

Дѣйствительно $n-1$ системъ совокупныхъ уравненій, интегрированія которыхъ доставили уравненія (f), составляютъ, какъ мы

Digitized by Google

видѣли непосредственныя слѣдствія другихъ $n-1$ системъ совокупныхъ уравненій, данныхъ въ § 20, и которыхъ общій типъ есть

$$(p_{i+1} - \omega_{i+1},\ p_{k+1} - \omega_{k+1}) = 0 \qquad (c)$$

или, полагая $i<k$,

$$\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_{i+1}} - \frac{\partial\omega_{i+1}}{\partial x_{k+1}} - \sum_{m=i+2}^{m=k+1} \frac{\partial\omega_{i+1}}{\partial p_m}\cdot\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_m} +$$

$$+ \sum_{m=k+2}^{m=n}\left(\frac{\partial\omega_{i+1}}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial p_m} - \frac{\partial\omega_{i+1}}{\partial p_m}\cdot\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_m}\right) = 0 \qquad (c)$$

Слѣдовательно интегралы двухъ упомянутыхъ системъ доставляются одними и тѣми-же уравненіями (f). Поэтому, взявъ между этими послѣдними два уравненія

$$f_i(x_1, \ldots x_n, p_{i+1}, \ldots p_n, a, \ldots a_{i-1}) = a_i,$$

$$f_k(x_1, \ldots x_n, p_{k+1}, \ldots p_n, a_1, \ldots a_{k-1}) = a_k,$$

выведя изъ перваго значенія p_{i+1} въ функціи $p_{i+2}, \ldots p_n$, $x_1, \ldots x_n$, изъ втораго значенія p_{k+1} въ функціи $p_{k+2}, \ldots p_n$, $x_1, \ldots x_n$ и означая ихъ соотвѣтственно $p_{i+1} = \omega_{i+1}$, $p_{k+1} = \omega_{k+1}$, мы приведемъ уравненіе (c) вставкою этихъ значеній функцій ω_{i+1} и ω_{k+1} къ тождеству. Но не трудно убѣдиться, что это послѣднее есть не что иное, какъ условіе (b), написанное въ другой формѣ. Дѣйствительно, вставляя въ уравненіе $f_i = a_i$ значеніе $p_{i+1} = \omega_{i+1}$ и въ уравненіе $f_k = a_k$ значеніе $p_{k+1} = \omega_{k+1}$ мы обратимъ ихъ въ тождества. Поэтому означая черезъ t одно изъ перемѣнныхъ входящихъ въ ω_{k+1} и ω_{k+1} и дифференцируя въ отношеніи его упомянутыя тождества, находимъ

$$\frac{\partial f_i}{\partial p_{i+1}}\cdot\frac{\partial\omega_{i+1}}{\partial t} = -\frac{\partial f_i}{\partial t}, \qquad \frac{\partial f_k}{\partial p_{k+1}}\cdot\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial t} = -\frac{\partial f_k}{\partial t}.$$

Поэтому умноживъ равенство (c) на $\frac{\partial f_i}{\partial p_{i+1}}\cdot\frac{\partial f_k}{\partial p_{k+1}}$, получимъ

$$-\sum_{m=i+1}^{m=k}\frac{\partial f_i}{\partial p_m}\cdot\frac{\partial f_k}{\partial x_m} +$$

$$+\sum_{m=k+1}^{m=n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_m}\frac{\partial f_k}{\partial p_m} - \frac{\partial f_i}{\partial p_m}\cdot\frac{\partial f_k}{\partial x_m}\right) = 0;$$

но это послѣднее равенство есть не что иное, какъ развитіе символически представленнаго условія (b).

Наконецъ чтобы показать, что условія (a) будутъ удовлетворены, какъ скоро выполнены условія (b), достаточно замѣтить, что первыя выражаются посредствомъ вторыхъ линейнымъ образомъ.

Digitized by Google

Дѣйствительно, по объясненному выше переходу отъ уравненій (*f*) къ уравненіямъ (*h*), имѣемъ

$$H_i = f_i(x_1, \ldots x_n, p_{i+1}, \ldots p_n, H, H_1, \ldots H_{i-1}),$$

$$H_k = f_k(x_1, \ldots x_n, p_{k+1}, \ldots p_n, H, H_1, \ldots H_{k-1}).$$

Замѣтивъ это, покажемъ сначала, что выраженія вида

$$(f_i, H_k)$$

представятся линейнымъ образомъ посредствомъ выраженій, составляющихъ первыя части равенствъ (*b*). Въ самомъ дѣлѣ на основаніи формулы 8 § 16 имѣемъ

$$[f_i, H_k] = (f_i, f_k) + \sum_{k'=o}^{k'=k-1} (f_i, H_{k'}) \frac{\partial f_k}{\partial H_{k'}},$$

гдѣ очевидно $k' < k$.

Примѣняя ту-же формулу къ разложенію выраженій $(f_i, H_{k'})$, представимъ ихъ посредствомъ $(f_i, f_{k'})$ и $(f_i, H_{k''})$ гдѣ $k'' < k'$. Продолжая такимъ образомъ выразимъ окончательно $[f_i, H_k]$ линейнымъ образомъ посредствомъ (f_i, f_k), $(f_i, f_{k'})$ $(f_i, f_{k''}), \ldots (f_i, f_0) = (f_i, H)$ и такъ какъ эти послѣднія на основаніи (*b*) тождественно равны нулю, то

$$[f_i, H_k] = 0 \qquad \text{(d)}$$

для всѣхъ значеній i и k взятыхъ въ ряду чиселъ 0, 1, 2, .. $n-1$.

Далѣе на основаніи формулы (5) § 16 имѣемъ:

$$(H_i, H_k) = (f_i, f_k) +$$

$$+ \sum_{k'=o}^{k'=k-1} (f_i, H_{k'}) \frac{\partial f_k}{\partial H_{k'}} + \sum_{i'=o}^{i'=i-1} (H_{i'}, f_k) \frac{\partial f_i}{\partial H_{i'}} +$$

$$+ \sum_{i'=o}^{i'=i-1} \sum_{k'=o}^{k'=k-1} (H_{i'}, H_{k'}) \frac{\partial f_i}{\partial H_{i'}} \cdot \frac{\partial f_k}{\partial H_{k'}} \cdot$$

Но на основаніи равенствъ (*b*) и (*d*) первый, второй и третій члены 2-й части послѣдняго равенства приводятся къ нулю; слѣдовательно $[H_i, H_k]$ представятся линейнымъ образомъ посредствомъ выраженій $(H_{i'}, H_{k'})$, въ которыхъ $i' < i$, $k' < k$. Примѣняя къ этимъ послѣднимъ ту-же формулу, найдемъ, что они выразятся линейно посредствомъ $(H_{i''}, H_{k''})$, гдѣ $i'' < i'$, $k'' < k'$. Продолжая такимъ образомъ представимъ окончательно $[H_i, H_k]$ линейно посредствомъ выраженій, составляющихъ первыя части равенствъ (*b*) и (*d*), которыя тождественно приводятся къ нулю. Слѣдовательно

$$(H_i, H_k) = 0$$

для всѣхъ значеній i и k, взятыхъ въ ряду чиселъ 0, 1, 2, .. $n-1$.

Digitized by Google

Точно также, какъ предъидущую теорему можно доказать, что если каждыя двѣ функціи, составляющія первыя части уравненій (f), повѣряютъ тождество

$$(f_i, f_k) = 0;$$

то оно будетъ существовать и тогда, когда въ одну или обѣ функціи f_i, f_k, прежде вычисленія частныхъ производныхъ, будутъ вставлены вмѣсто одной или нѣсколькихъ произвольныхъ постоянныхъ, въ нихъ входящихъ, функціи имъ равнозначущія на основаніи уравненій (f); или общнѣе: предъидущее тождество будетъ существовать, какому-бы преобразованію ни были подвергнуты функціи f_i, f_k посредствомъ уравненій (f).

§ 22. При оцѣнкѣ теоретическаго достоинства изложеннаго выше способа интегрированія уравненій съ частными производными 1-го порядка, нельзя не обратить вниманія на слѣдующій вопросъ: сколько требуется всѣхъ интегрированій для полученія полнаго интеграла въ случаѣ n независимыхъ перемѣнныхъ, которыхъ неизвѣстная функція входитъ въ данное уравненіе только въ видѣ ея частныхъ производныхъ 1-го порядка?

Способъ Якоби послѣдовательно приводитъ къ различнымъ системамъ совокупныхъ уравненій вида:

$$\frac{dx}{F(x, y, \ldots u)} = \frac{dy}{f(x, y, \ldots u)} = \cdots = \frac{du}{\varphi(x, y, \ldots u)} \qquad (\alpha)$$

съ постепенно понижающимся числомъ перемѣнныхъ $x, y, \ldots u$, и требуетъ не полнаго ихъ интегрированія, но опредѣленія только одного интеграла каждой системы. Вообще трудность выполненія подобнаго требованія зависитъ отъ *порядка* интегрируемаго уравненія, который опредѣляется числомъ произвольныхъ постоянныхъ, получаемыхъ при полномъ интегрированіи системы вида (α) и слѣдовательно равенъ числу перемѣнныхъ $x, y, \ldots u$, уменьшенному единицею. Системы вида (α), встрѣчающіяся въ способѣ Якоби, онъ раздѣляетъ на *главныя* и *вспомогательныя*. Первыя совершенно опредѣленнаго порядка, который не можетъ быть пониженъ; между тѣмъ какъ для вторыхъ можно назначать только высшій предѣлъ, котораго можетъ достигать ихъ порядокъ. Для поясненія различія главныхъ и вспомогательныхъ системъ достаточно указать по одному представителю того и другаго класса. Въ предъидущемъ § мы видѣли, что напр. при опредѣленіи функціи f_2, которая должна совокупно удовлетворять два уравненія

$$(p_1 - \omega_1', f_2) = 0 \quad \text{и} \quad (p_2 - \omega_2, f_2) = 0, \qquad (a)$$

требуется отъискать одинъ изъ интеграловъ одной изъ двухъ си-

Digitized by Google

стемъ уравненій:

$$(b)\qquad \frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{-\frac{d\omega_1'}{dp_2}} = \cdots = \frac{dx_n}{-\frac{d\omega_2'}{dp_n}} = \frac{dp_2}{\frac{d\omega_1'}{dx_2}} = \cdots = \frac{dp_n}{\frac{d\omega_1'}{dx_n}},$$

$$\frac{dx_2}{1} = \frac{dx_2}{-\frac{d\omega_2}{dp_2}} = \cdots = \frac{dx_n}{-\frac{d\omega_2}{dp_n}} = \frac{dp_2}{\frac{d\omega_2}{dx_2}} = \cdots = \frac{dp_n}{\frac{d\omega_2}{dx_n}}$$

порядка $2n-4$, который не можетъ быть пониженъ. Подобныя системы называются главными.

Когда интегралъ $\varphi = \text{const}$ одного изъ уравненій (b), положимъ 1-го, найденъ, тогда послѣдовательными подстановками во 2-е изъ уравненій (a) найдемъ рядъ интеграловъ 1-го изъ уравненій (b):

$$\varphi = \text{const.},\quad \varphi_1 = \text{const.}, \ldots \quad \varphi_i = \text{const}, \ldots$$

Но такъ какъ число различныхъ интеграловъ этого уравненія равно его порядку $2n-4$, то въ ряду функцій $\varphi, \varphi_1, \ldots$ необходимо встрѣтится такая, которая первая выразится функціею предыдущихъ. Положимъ такою будетъ φ_i; указатель ея i долженъ быть не болѣе $2n-4$. Теперь мы можемъ написать непосредственно систему уравненій

$$(c)\qquad \frac{dx_2}{1} = \frac{d\varphi}{\varphi_1} = \cdots = \frac{d\varphi_{i-1}}{\varphi_i},$$

порядка i, одинъ изъ интеграловъ которой будетъ искомымъ значеніемъ f_2.

Система (c) называется вспомогательною; о ней извѣстно только, что порядокъ ея i не можетъ быть выше порядка $2n-4$ соотвѣтственныхъ главныхъ уравненій (b). Но очевидно порядокъ ея можетъ быть менѣе этого предѣла и вообще долженъ измѣняться, если вмѣсто интеграла $\varphi = \text{const}$ возьмемъ другой интегралъ 1-го изъ уравненій (b), или—интегралъ 2-го изъ уравненій (b).

Принявъ объясненныя сейчасъ названія, мы можемъ теперь отвѣтить на поставленный выше вопросъ, предполагая при этомъ самый невыгодный случай, именно: когда всѣ вспомогательныя системы доходятъ до самаго высшаго порядка, который для нихъ возможенъ.

Въ такомъ случаѣ по изложенному въ предъидущемъ § способу Якоби требуется опредѣлить по одному интегралу каждаго изъ $\frac{n(n-1)}{2}$ уравненій, изъ которыхъ

Digitized by Google

одно	порядка	$2n-2$	служитъ	для	опредѣленія	функціи	f_1,
два	—	$2n-4$	служатъ	—	—	—	f_2,
три	—	$2n-6$	—	—	—	—	f_3,
. . . . .							
i	—	$2n-2i$	—	—	—	—	f_i,
. . . . .							
$n-1$	—	2	—	—	—	—	f_{n-1}.

Должно замѣтить впрочемъ, что самый невыгодный случай, предположенный въ предъидущемъ разсчетѣ, обыкновенно въ приложеніяхъ не встрѣчается и порядокъ вспомогательныхъ уравненій по большей части ниже высшаго предѣла. Что касается числа всѣхъ требуемыхъ интеграловъ $\frac{n(n-1)}{2}$, которое, какъ число треугольное, возрастаетъ довольно быстро съ увеличеніемъ числа независимыхъ перемѣнныхъ n, то относительно его можно замѣтить слѣдующее. Разсматриваемая задача по сущности своей неопредѣленная и теорія Якоби на каждой ступени развитія рѣшенія ея представляетъ значительный просторъ въ выборѣ уравненія, котораго должно опредѣлить одинъ интегралъ, чтобы подвинуть рѣшеніе задачи впередъ. Поэтому во многихъ случаяхъ можно выбирать такія уравненія, которыхъ интегралы очевидны; такимъ образомъ общій итогъ всѣхъ интегрированій $\frac{n(n-1)}{2}$ приведется къ гораздо меньшему числу интегрированій дѣйствительно произведенныхъ.

Чтобы показать приложеніе способа Якоби въ томъ видѣ, какъ онъ изложенъ въ предъидущемъ § и вмѣстѣ съ тѣмъ привести образцикъ сейчасъ упомянутыхъ упрощеній, рѣшимъ еще одинъ частный примѣръ.

Возьмемъ уравненіе перваго порядка

$$t\left(\frac{dz}{dt}\right)^2+\frac{dz}{du}\left\{\left[u+t\left(\frac{dz}{dw}-\frac{dz}{dv}\right)\right]\frac{dz}{dt}+\right.$$

$$\left.+(4w+5r)\frac{dz}{dv}+(3w+2v)\frac{dz}{dw}+\frac{dz}{dy}\right\}=0$$

съ частными производными функціи z независимыхъ перемѣнныхъ t, u, v, w, y.

Принявъ означенія: $y=x_1$, $w=x_2$, $v=x_3$, $u=x_4$, $t=x_5$,

$$\frac{dz}{dy}=p_1,\ \frac{dz}{dw}=p_2,\ \frac{dz}{dv}=p_3,\ \frac{dz}{du}=p_4,\ \frac{dz}{dt}=p_5,$$

и выведя изъ предъидущаго уравненія выраженіе $\frac{dz}{dy}$ или p_1, кото-

Digitized by Google

рое для краткости означимъ ω_1, будемъ имѣть

$$p_1 = -(3x_2 + 2x_3)p_2 - (4x_2 + 5x_3)p_3 -$$
$$-[x_4 + x_5(p_2 - p_3)]p_5 - \frac{x_5 p_5^2}{p_4} = \omega_1.$$

Чтобы найти четыре уравненія

$$f_1(p_2, p_3, p_4, p_5, x_1, \ldots x_5) = a_1,\ f_2(p_3, p_4, p_5, x_1, \ldots p_5, a_1) = a_2,$$
$$f_3(p_4, p_5, x_1, \ldots x_5, a_1, a_2) = a_3,\ f_4(p_5, x_1, \ldots x_5, a_1, a_2, a_3) = a_4,$$

(гдѣ $a_1, \ldots a_4$ означаютъ произвольныя постоянныя) которыя въ совокупности съ даннымъ доставили-бы значенія $p_1, \ldots p_5$, дѣлающія выраженіе $p_1 dx_1 + \ldots + p_5 dx_5$ точнымъ дифференціаломъ, должно, согласно изложенной выше теоріи, поступать слѣдующимъ образомъ.

Функцію f_1 нужно опредѣлить какъ частный интегралъ линейнаго уравненія

$$(p_1 - \omega_1, f_1) = 0,$$

т. е. какъ интегралъ системы обыкновенныхъ уравненій

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{-\frac{\partial\omega_1}{\partial p_2}} = \frac{dx_3}{-\frac{\partial\omega_1}{\partial p_3}} = \frac{dx_4}{-\frac{\partial\omega_1}{\partial p_4}} = \frac{dx_5}{-\frac{\partial\omega_1}{\partial p_5}} =$$
$$= \frac{dp_2}{\frac{\partial\omega_1}{\partial x_2}} = \frac{dp_3}{\frac{\partial\omega_1}{\partial x_3}} = \frac{dp_4}{\frac{\partial\omega_1}{\partial x_4}} = \frac{dp_5}{\frac{\partial\omega_1}{\partial x_5}},$$

помощію которыхъ находимъ

$$dx_1 = \frac{d(p_2 - p_3)}{\frac{\partial\omega_1}{\partial x_2} - \frac{\partial\omega_1}{\partial x_3}} = \frac{d(p_2 - p_3)}{-(p_2 - p_3)};$$

откуда, по интегрированіи, легко получить

$$f_1 = (p_2 - p_3)e^{x_1} = a_1.$$

Выведя отсюда выраженіе p_2, которое означимъ ω_2, и вставивъ его въ ω_1, которую послѣ постановки означимъ ω_1', — будемъ имѣть

$$p_2 = p_3 + a_1 e^{-x_1} = \omega_2$$
$$p_1 = \omega_1'.$$

Функцію f_1 должно опредѣлить какъ частный интегралъ сово-

Digitized by Google

купныхъ линейныхъ уравненій

$$(p_2 - \omega_2,\ f_2) = 0,$$
$$(p_1 - \omega_1',\ f_2) = 0.$$

Интегралъ перваго изъ нихъ получится изъ системы уравненій

$$\frac{dx_2}{1} = \frac{dx_3}{-\frac{\partial\omega_2}{\partial p_3}} = \frac{dx_4}{-\frac{\partial\omega_2}{\partial p_4}} = \frac{dx_5}{-\frac{\partial\omega_2}{\partial p_5}} =$$
$$= \frac{dp_3}{\frac{\partial\omega_2}{\partial x_3}} = \frac{dp_4}{\frac{\partial\omega_2}{\partial x_4}} = \frac{dp_5}{\frac{\partial\omega_2}{\partial p_5}}.$$

Уравненіе $\frac{dp_3}{dx_3} = \frac{\partial\omega_2}{\partial x_3} = 0$ доставитъ интегралъ

$$\varphi = p_3 = \text{const.}$$

Вставивъ его вмѣсто f_2 во второе изъ предъидущихъ линейныхъ уравненій, находимъ

$$(p_1 - \omega_1', \varphi) = \varphi_1 = \frac{\partial\omega_1'}{\partial x_3} =$$
$$= \frac{\partial\omega_1}{\partial x_3} + \frac{\partial\omega_1}{\partial p_2}\frac{\partial\omega_2}{\partial x_3}, \text{ но } \frac{\partial\omega}{\partial x_3} = 0, \quad \text{слѣд.}$$
$$\varphi_1 = -2p_2 - 5p_3 = -7\varphi - 2a_1 e^{-x_1}.$$

Поэтому на основаніи предъидущаго § искомое значеніе f_2 получится какъ интегралъ уравненія

$$\frac{d\varphi}{dx_1} + 7\varphi + 2a_1 e^{-x_1} = 0$$

и будетъ

$$f_2 = \left(\varphi + \frac{1}{3}a_1 e^{-x_1}\right) e^{7x_1} = a_2.$$

Выводя отсюда выраженіе $p_3 = \omega_3$ и вставивъ его въ ω_1', которую послѣ подстановки означимъ ω_1'',—будемъ имѣть

$$p_3 = a_2 e^{-7x_1} - \frac{1}{3}a e^{-x_1} = \omega_3,$$
$$p_2 = \omega_2,$$
$$p_1 = \omega_1'',$$

Digitized by Google

Функція f_3 должна быть опредѣлена какъ частный интегралъ совокупныхъ линейныхъ уравненій

$$(p_3 - \omega_3, f_3) = 0,\ (p_2 - \omega_2, f_3) = 0,\ (p_1 - \omega_1'', f_3) = 0.$$

Интегралъ перваго изъ нихъ получится изъ системы уравненій

$$\frac{dx_3}{1} = \frac{dx_4}{-\frac{\partial\omega_3}{\partial p_4}} = \frac{dx_5}{-\frac{\partial\omega_3}{\partial p_5}} = \frac{dp_4}{\frac{\partial\omega_3}{\partial x_4}} = \frac{dp_5}{\frac{\partial\omega_3}{\partial x_5}}.$$

Уравненіе $\frac{dp_4}{dx_3} = \frac{\partial\omega_2}{\partial x_4} = 0$ даетъ интегралъ $\psi = p_4 = \text{const}$; вставивъ его во второе изъ предъидущихъ линейныхъ уравненій, находимъ

$$(p_2 - \omega_2, \psi) = \frac{\partial\omega_2}{\partial x_4} \text{ тождественно} = 0$$

Вставивъ ψ вмѣсто f_3 въ третье изъ предъидущихъ линейныхъ уравненій, получимъ

$$(p_1 - \omega_1'', \psi) = \psi_1 = \frac{\partial\omega_1'''}{\partial x_4} = \frac{\partial\omega_1}{\partial x_4},$$

потому что

$$\frac{\partial\omega_2}{\partial x_4} = 0,\ \frac{\partial\omega_3}{\partial x_4} = 0;\quad \text{слѣд.}\quad \psi_1 = -p_5.$$

Вставивъ ψ_1 вмѣсто f_3 опять въ тоже уравненіе, находимъ

$$(p_1 - \omega_1'', \psi_1) = \psi_2 = -\frac{\partial\omega_1'''}{\partial x_5} = -\frac{\partial\omega_1}{\partial x_5} =$$

$$= (p_2 - p_3)\ p_5 + \frac{p_5^2}{p_4} = -a_1 e^{-x_1}\psi_1 + \frac{\psi_1^2}{\psi}.$$

Слѣдовательно искомое значеніе f_3 получится какъ первый интегралъ уравненія втораго порядка

$$\frac{d^2\psi}{dx_1^2} + a_1 e^{-x_1}\left(\frac{d\psi}{dx_1}\right) - \frac{1}{\psi}\left(\frac{d\psi}{dx_1}\right)^2 = 0.$$

Умноживъ первую часть предъидущаго уравненія на $\frac{dx}{\frac{d\psi}{dx_1}}$, слѣлаемъ ее точнымъ дифференціаломъ, по интегрированіи котораго находимъ первый интегралъ предъидущаго уравненія и слѣдовательно

Digitized by Google

значеніе

$$f_3 = \log \frac{\frac{d\psi}{dx_1}}{\psi} - a_1 e^{-x_1} = \text{const.}$$

Вставивъ сюда ψ_1 вмѣсто $\frac{d\psi}{dx_1}$, имѣемъ

$$f_3 = \log \frac{\psi_1}{\psi} - a_1 e^{-x_1} = \log\left(-\frac{p_5}{p_4}\right) - a_1 e^{-x_1} = \text{const.}$$

Отсюда, выведемъ выраженіе $p_4 = \omega_4$ и вставивъ его въ ω_1'', которую послѣ подстановки означимъ ω_1''', получимъ

$$p_4 = -e^{-\text{const} - a_1 e^{-x_1}} \cdot p_5 = a_3 e^{-a_1 e^{-x_1}} \cdot p_5 = \omega_4$$

$$p_3 = \omega_3,\ p_2 = \omega_2,\ p_1 = \omega_1'''.$$

Функцію f_4 должно опредѣлить какъ частный интегралъ совокупныхъ линейныхъ уравненій

$$(p_4 - \omega_4, f_4) = 0,\ (p_3 - \omega_3, f_4) = 0,\ (p_2 - \omega_2, f_4) = 0,$$
$$(p_1 - \omega_1''', f_4) = 0;$$

интегрированіе перваго изъ нихъ приводитъ къ системѣ

$$\frac{dx_4}{1} = \frac{dx_5}{-\frac{\partial\omega_4}{\partial p_5}} = \frac{dp_5}{\frac{\partial\omega_4}{\partial x_5}},$$

одно изъ уравненій которой

$$\frac{dp_5}{dx_4} = \frac{\partial\omega_4}{\partial x_5} = 0$$

имѣетъ интеграломъ

$$\theta = p_5 = \text{const.}$$

Вставляя его въ остальныя линейныя уравненія, вмѣсто f_4, находимъ, что второе и третье приводятся тождественно къ нулю, четвертое-же доставитъ

$$(p_1 - \omega_1''', \theta) = \frac{\partial\omega_1'''}{\partial x_5} = -(p_2 - p_3)\, p_5 - \frac{p_4^2}{p_4}$$
$$= -a_1 e^{-x_1}\theta - \frac{1}{a_3} e^{a_1 e^{-x_1}} \cdot \theta = \theta_1.$$

Digitized by Google

Поэтому значеніе f_4 опредѣлится какъ интегралъ уравненія

$$\frac{d\theta}{dx_1} + \left(a_1 e^{-x_1} + \frac{e^{a_1 e^{-x_1}}}{a_3}\right)\theta = 0$$

и будетъ

$$f_4 = \log\,\theta - a_1 e^{-x_1} + \frac{1}{a_3}\int e^{a_1 e^{-x_1}}\, dx_1 = \text{const.}$$

Отсюда находимъ

$$p_3 = a_4\left(e^{a_1 e^{-x_1}} - \frac{\int e^{a_1 e^{-x_1}}\, dx_1}{a_3}\right);$$

слѣдовательно

$$p_4 = a_3 a_4\, e^{-\frac{1}{a_3}\int e^{a_1 e^{-x_1}}\, dx_1};$$

сверхъ того имѣемъ

$$p_3 = a_2 e^{-7x_1} - \frac{1}{3} a_1 e^{-x_1},$$

$$p_2 = a_2 e^{-7x_1} + \frac{2}{3} a_1 e^{-x_1}$$

и наконецъ

$$p_1 = -7(x_2 + x_3)\, a_2 e^{-7x_1} - \frac{a_1}{3}(2x_2 - x_3)\, e^{-x_1} -$$

$$- a_4\left[x_4 + \left(a_1 e^{-x_1} + \frac{e^{a_1 e^{-x_1}}}{a_3}\right)x_5\right] e^{\left(a_3 e^{-x_1} - \frac{1}{a_3}\int e^{a_1 e^{-x_1}}\, dx\right)}$$

Вставивъ предъидущія значенія p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 въ выраженіе

$$p_1\, dx_1 + p_2\, dx_2 + \cdots + p_5\, dx_5,$$

должно получить точный дифференціалъ; и дѣйствительно, интегри-

Digitized by Google

руя его находимъ полный интегралъ задачи въ слѣдующемъ видѣ:

$$z = \frac{a_1}{3}(2x_2 - x_6)\,e^{-x_2} + a_2(x_2 + x_3)\,e^{-7x_3} +$$

$$+ a_4\left[a_3 x_4 + x_6\, e^{a_1 e^{-x_6}}\right] e^{-\frac{1}{a_5}\int e^{a_1 e^{-x_1}}\,dx_1} + \text{const.}$$

Ограничимся здѣсь этимъ простымъ примѣромъ; такъ какъ вслѣдъ за нимъ мы разсмотримъ примѣненіе началъ, заключающихся въ теоріи Якоби, къ вопросамъ болѣе общимъ, въ частныхъ приложеніяхъ которыхъ приведется употреблять тѣ-же самые пріемы интегрированія.

VII.

Совокупное интегрированіе уравненій съ частными производными 1-го порядка.

§ 22. Изложенный выше способъ приводитъ задачу интегрированія какого угодно уравненія съ частными производными 1-го порядка къ совокупному интегрированію нѣсколькихъ системъ особеннаго вида совмѣстныхъ линейныхъ уравненій съ частными производными 1-го порядка. Якоби не остановился на общемъ вопросѣ совокупнаго интегрированія нѣсколькихъ уравненій съ частными производными 1-го порядка и какого угодно вида, но ограничился представившимся ему частнымъ случаемъ, въ которомъ, по его замѣчанію (Nova Meth. § 18), для интегрированія можно употребить искусственный пріемъ, основанный главнымъ образомъ на теоремѣ 1 § 17. Между тѣмъ до общаго рѣшенія вопроса оставалось сдѣлать небольшой шагъ. Дѣйствительно г. Буръ (Bour) въ 39-й тетради Journ. de l'Ec. Polyt. въ статьѣ «Sur l'intégration des équations différentielles partielles du 1-er et du 2-d ordre» показалъ, что совокупное интегрированіе уравненій съ частными производными 1-го порядка какого угодно вида приводится весьма просто къ совокупному интегрированію уравненій того вида, которымъ Якоби ограничилъ свое изслѣдованіе.

Чтобы подвести подъ одну общую точку зрѣнія вопросы интегрированія одного и нѣсколькихъ уравненій съ частными производными 1-го порядка, мы возвратимся въ немногихъ словахъ къ первоначальной постановкѣ первой изъ этихъ задачъ, которая по содержанію составляетъ частный случай второй, между тѣмъ какъ по способу рѣшенія вторая заключается, какъ простѣйшій случай, въ первой.

Digitized by Google

Неизвѣстная функція z независимыхъ перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_n$ можетъ быть опредѣлена, если даны выраженія всѣхъ ея частныхъ производныхъ 1-го порядка: $\frac{dz}{dx_1} = p_1, \ldots \quad \frac{dz}{dx_n} = p_n$, въ функціяхъ независимыхъ перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_n$. Для этого должно только увѣриться, принадлежатъ-ли дѣйствительно данныя выраженія $p_1, \ldots p_n$ частнымъ производнымъ одной и той-же функціи, т. е. удовлетворяютъ-ли онѣ условія

$$\frac{dp_i}{dx_k} = \frac{dp_k}{dx_i} \tag{1}$$

для всѣхъ значеній i и k взятыхъ въ ряду чиселъ 1, 2, $\ldots n$.

Въ случаѣ когда эти условія выполнены, функція z найдется посредствомъ интегрированія ея дифференціальнаго выраженія

$$p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \cdots + p_n\,dx_n. \tag{2}$$

Если вмѣсто явныхъ выраженій $p_1, \ldots p_n$ въ функціяхъ независимыхъ перемѣнныхъ дано n уравненій:

$$H = 0, \quad H_1 = 0, \ldots \quad H_{n-1} = 0, \tag{3}$$

которыхъ первыя части суть функціи $x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n$; то существуютъ общіе аналитическіе признаки, по которымъ можно судить, возможно-ли алгебраически разрѣшить эти уравненія въ отношеніи n неизвѣстныхъ $p_1, \ldots p_n$ и будутъ-ли выраженія этихъ величинъ повѣрять условія (1). Если одна или нѣкоторыя изъ функцій H, $H_1, \ldots H_{n-1}$ выражаются посредствомъ остальныхъ изъ этихъ функцій и перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_n$; то предъидущія уравненія будутъ или недостаточны для опредѣленія неизвѣстныхъ $p_1, \ldots p_n$, или противорѣчивы. Въ самомъ дѣлѣ положимъ

$$H_i = \varphi\,(x_1, \ldots x_n,\ H, H_1, \ldots),$$

въ силу данныхъ уравненій будемъ имѣть

$$H_i = \varphi\,(x_1, \ldots x_n,\ 0,\ 0, \ldots) = 0.$$

Если это отношеніе тождественное, то оно должно быть откинуто изъ числа данныхъ уравненій и эти послѣднія становятся недостаточными для опредѣленія n неизвѣстныхъ $p_1, \ldots p_n$; если-же отношеніе $\varphi = 0$ не тождественное то оно противорѣчитъ условію независимости перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_n$. Выше, въ § 3, выведенъ аналитическій признакъ, указанный Якоби, по которому всегда можно судить, находятся-ли между функціями $H, \ldots H_{n-1}$ такія, какою мы сей-часъ предполагали H_i. Для этого, разсматривая $H, \ldots H_{n-1}$, какъ функціи однихъ только перемѣнныхъ $p_1, \ldots p_n$, должно соста-

Digitized by Google

вить функціональный опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_1}, & \cdots & \frac{\partial H}{\partial p_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial H_{n-1}}{\partial p_n}, & \cdots & \frac{\partial H_{n-1}}{\partial p_n} \end{vmatrix} = \Delta. \qquad (4)$$

Если Δ приводится тождественно къ нулю, тогда одно или нѣсколько изъ уравненій $H = 0, \ldots H_{n-1} = 0$ противорѣчивы съ остальными, или тождественны.

Но положимъ, что Δ не равна нулю; теперь представляется второй вопросъ, будутъ-ли выраженія $p_1, \ldots p_n$, выведенныя изъ уравненій (3) удовлетворять условія (1)? Представимъ, что выраженія $p_1, \ldots p_n$, выведенныя изъ уравненій (3) удовлетворяютъ условія (1). Вставивъ ихъ обратно вмѣсто $p_1, \ldots p_n$ въ уравненія (3), мы обратимъ эти послѣднія въ тождества. Взявъ два изъ полученныхъ такимъ образомъ тождествъ

$$H_i = 0 \quad \text{и} \quad H_k = 0$$

и поступая съ ними точно также, какъ въ § 11 поступали съ тождествами

$$F_i = a_i, \quad F_k = a_k,$$

подобнымъ-же образомъ прійдемъ къ заключенію, что функціи H_i, H_k должны удовлетворять условіе

$$(H_i, H_k) = 0 \qquad (5)$$

для всѣхъ значеній i и k, взятыхъ въ ряду чиселъ $0, 1, \ldots n-1$.

Обратно, если условія (5) удовлетворены, тогда на основаніи теоремы 2 § 17 заключимъ, что выраженія $p_1 \ldots p_n$, выведенныя изъ уравненій (3), удовлетворятъ условія (1); слѣдовательно должно будетъ только вставить ихъ въ выраженіе (2), по интегрированіи котораго получится функція z (*).

Замѣтимъ, что условія (5) могутъ быть удовлетворены тождественно или въ силу, нѣкоторыхъ изъ уравненій (3). Въ 1-мъ случаѣ очевидно вмѣсто данныхъ уравненій (3) можно-бы было взять

(*) Г. Буръ въ упомянутой выше статьѣ своей повсюду называетъ условіе (5) теоремою Ліувилля и даже прибавляетъ, что она была доказана послѣднимъ въ курсѣ, читанномъ въ Collège de France въ 1853 году, между тѣмъ въ статьѣ г. Donkin «On a class of differentiel equations, etc.» помѣщенной въ Philosophical Transactions, 1854 г. Part. 1., находимъ эту самую теорему (Theorem 12, p. 83), упоминаемою (p. 71) въ числѣ новыхъ результатовъ имъ полученныхъ.

Digitized by Google

болѣе общія уравненія, написавъ во 2-хъ частяхъ (3) произвольныя постоянныя вмѣсто нулей; во 2-мъ можно такимъ образомъ обобщить только тѣ изъ уравненій (3), которыя не были приняты въ соображеніе при выполненіи условій (5).

Предъидущій вопросъ, совершенно опредѣленный, сдѣлается неопредѣленнымъ, если вмѣсто полной системы n уравненій (3) мы имѣемъ неполную систему m уравненій между частными производными 1-го порядка, предполагая конечно $m < n$. Случай, когда $m = 1$ составляетъ задачу интегрированія одного уравненія съ частными производными 1-го порядка. Мы выше видѣли, что рѣшеніе этой задачи, покрайней мѣрѣ теоретически, всегда возможно, т. е. по данному уравненію

$$H = 0,$$

между перемѣнными $x_1, \ldots x_n$, $p_1, \ldots p_n$, всегда можно опредѣлить еще $n-1$ уравненій, между тѣми-же перемѣнными

$$H_1 = \text{const} = a_1, \ldots \quad H_{n-1} = \text{const} = a_{n-1},$$

первыя части которыхъ выполняютъ условіе

$$(H_i, H_k) = 0$$

для всѣхъ значеній i и k, взятыхъ въ ряду чиселъ $0, 1, \ldots n-1$.

Если мы предположимъ теперь число данныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка, m, болѣе единицы; то такимъ образомъ прійдемъ къ вопросу совокупнаго интегрированія нѣсколькихъ уравненій съ частными производными 1-го порядка. Не трудно убѣдиться, что, при одинаковомъ числѣ независимыхъ перемѣнныхъ, эта новая задача не только не сложнѣе предъидущей, но напротивъ проще ея; и что изъ теоріи рѣшенія послѣдней естественнымъ образомъ вытекаетъ способъ рѣшенія первой.

Существенное различіе двухъ вопросовъ заключается въ томъ, что для одного уравненія съ частными производными 1-го порядка, всегда возможенъ интегралъ и общая теорія, предлагая способъ его опредѣленія, не ограничиваетъ ни чѣмъ выбора даннаго уравненія; между тѣмъ для нѣсколькихъ данныхъ уравненій съ частными производными 1-го порядка тогда только возможенъ общій интегралъ, когда онѣ выполнятъ нѣкоторыя условія. Дѣйствительно, если мы произвольно выберемъ m уравненій

$$(6) \qquad H_1 = 0, \; H_2 = 0, \ldots \; H_m = 0$$

между перемѣнными $x_1, \ldots x_n$, $p_1, \ldots p_n$; то можемъ встрѣтить случаи двоякаго рода ихъ несовмѣстности: алгебраической и интегральной. Первая будетъ имѣть мѣсто, если одна или нѣкоторыя изъ функцій $H_1, \ldots H_m$ выражаются функціями остальныхъ и перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_n$; въ такомъ случаѣ одно или нѣсколько изъ уравненій (6) будутъ или тождественны, или противорѣчивы съ остальными. Если данныя уравненія свободны отъ разсмотрѣннаго сейчасъ недо-

Digitized by Google

статка, то должно еще убѣдиться могутъ ли онѣ принадлежать системѣ n уравненій, изъ которыхъ выведенныя значенія $p_1, .. p_n$ повѣрятъ условія (1); т. е.—возможенъ-ли интегралъ совокупно удовлетворяющій данныя уравненія. Для этого должно только разсмотрѣть могутъ-ли быть удовлетворены и какимъ образомъ условія

$$(H_i . H_k) = 0, \qquad (7)$$

для всѣхъ значеній i и k, взятыхъ въ ряду чиселъ $1, 2, .. m$.

Если условія (7) будутъ удовлетворены тождественно, или въ силу данныхъ уравненій (6), тогда интегралъ, удовлетворяющій каждое изъ этихъ послѣднихъ и заключающій въ своемъ выраженіи, кромѣ независимыхъ перемѣнныхъ, $n-m+1$ произвольныхъ постоянныхъ, найдется помощію пріемовъ, изложенныхъ при интегрированіи одного уравненія съ частными производными 1-го порядка. Дѣйствительно для рѣшенія задачи такимъ образомъ должно только дополнить данную систему $n-m$ уравненіями

$$H_{m+1} = \text{const} = a_1, \; H_{m+2} = \text{const} = a_2, \ldots$$
$$H_n = \text{const} = a_{n-m}, \qquad (8)$$

которыхъ первыя части, представляющія неизвѣстныя функціи $x_1, .. x_n$ $p_1, .. p_n$, должны быть опредѣлены такъ, чтобы удовлетворяли условіе

$$(H_i, \; H_k) = 0$$

при всѣхъ значеніяхъ $i = 1, 2, .. n$ и $k = m+1, m+2, .. n$.

Поэтому функція H_{m+1} можетъ быть опредѣлена по способу, изложенному въ § 18, какъ общій интегралъ системы m линейныхъ уравненій

$$(H_1, \; H_{m+1}) = 0, \; (H_2, \; H_{m+1}) = 0, \ldots \; (H_m, H_{m+1}) = 0.$$

Подобнымъ-же образомъ опредѣлятся первыя части остальныхъ уравненій (8), которыя въ совокупности съ данными дадутъ выраженія $p_1, .. p_n$ заключающія $n-m$ произвольныхъ постоянныхъ; слѣдовательно искомый интегралъ z будетъ содержать $m-n+1$ произвольное постоянное.

Если предъидущій способъ оказывается непримѣнимымъ (въ обстоятельствахъ, указанныхъ въ примѣчаніяхъ къ § 18), или если и по другимъ причинамъ мы хотимъ привести интегрируемыя уравненія къ наименьшему числу перемѣнныхъ, тогда должно помощію уравненій (6) выразить $p_1, .. p_m$ функціями $p_{m+1}, .. p_n$, $x_1, .. x_n$; пусть эти выраженія будутъ

$$p_1 = \omega_1, \; p_2 = \omega_2, \ldots \; p_m = \omega_m.$$

Замѣтимъ, что на основаніи теоремы 3 § 17 должны имѣть мѣсто тождества

$$(p_i - \omega_i, \; p_k - \omega_k) = 0 \qquad (9)$$

для всѣхъ значеній i и k, взятыхъ въ ряду чиселъ $1, 2, .. m$.

Digitized by Google

Далѣе, чтобы опредѣлить уравненіе

$$f_1(p_{m+1}, \ldots p_n, x_1, \ldots x_n) = \text{const.} = a_1,$$

изъ котораго будетъ выведено значеніе $p_{m+1} = \omega_{m+1}$, гдѣ ω_{m+1} представляетъ функцію $p_{m+2}, \ldots p_n, x_1, \ldots x_n, a_1$, — составимъ систему m совокупныхъ линейныхъ уравненій

$$(p_1 - \omega_1, f_1) = 0, \ (p_2 - \omega_2, f_1) = 0, \ldots (p_m - \omega_m, f_1) = 0$$

съ числомъ перемѣнныхъ $2(n-m)+1$. Общій ихъ интегралъ можетъ быть найденъ при помощи тождествъ (9) по способу изложенному въ § 21.

Опредѣливъ значеніе $p_{m+1} = \omega_{m+1}$, вставимъ его въ функціи $\omega_1, \ldots \omega_m$; означивъ послѣднія послѣ подстановки чрезъ $\omega'_1, \omega'_2, \ldots \omega'_m$, составимъ систему $m+1$ совокупныхъ линейныхъ уравненій

$$(p_1 - \omega'_1, f_2) = 0, (p_2 - \omega'_2 f_2) = 0, \ldots$$

$$(p_m - \omega'_m, f_2) = 0, \ (p_{m+1} - \omega_{m+1}, f_2) = 0$$

съ $2(n-m)-1$ перемѣнными. Общій ихъ интегралъ f_2 доставитъ уравненіе

$$f_2(p_{m+2}, \ldots p_n, x_1, \ldots x_n, a_1) = \text{const} = a_2$$

изъ котораго найдется значеніе p_{m+2}. И т. д.

Такимъ образомъ при послѣдовательномъ опредѣленіи $n-m$ требуемыхъ интеграловъ

$$f_1 = a_1, \ f_2 = a_2, \ldots f_{n-m} = a_{n-m}$$

число совокупныхъ линейныхъ уравненій увеличивается однимъ, число-же входящихъ въ нихъ перемѣнныхъ уменьшается двумя. Ясно, что такимъ путемъ полученный общій интегралъ уравненій (6) будетъ заключать въ своемъ выраженіи число произвольныхъ постоянныхъ, равное числу независимыхъ перемѣнныхъ безъ числа данныхъ уравненій, уменьшеннаго единицею, т. е. $n-m+1$.

Такое выраженіе общаго интеграла уравненій (6) можно назвать полнымъ; изъ него можно образовать самое общее, заключающее произвольную функцію отъ $n-m$ перемѣнныхъ количествъ, посредствомъ измѣненія произвольныхъ постоянныхъ (§§ 2—4).

Изъ предъидущаго видно, что интегрированіе m совокупныхъ уравненій (6), удовлетворяющихъ условія (7), производится точно такъ, какъ-бы должно было оканчивать интегрированіе одного уравненія съ частными производными 1-го порядка

$$H_1 = 0,$$

когда помощію его уже найдены $m-1$ уравненій

$$H_2 = 0, \ H_3 = 0, \ldots H_m = 0$$

Digitized by Google

удовлетворяющихъ условія (7), и требовалось бы опредѣлить еще остальныя $n - m$ уравненій

$$H_{m+1} = a_1, \ldots H_n = a_{n-m}$$

Съ этой точки зрѣнія очевидно, что задача совокупнаго интегрированія нѣсколькихъ уравненій проще задачи интегрированія одного уравненія съ частными производными 1-го порядка, при одинаковомъ числѣ независимыхъ перемѣнныхъ; потому что 1-я требуетъ только часть тѣхъ вычисленій, которыя необходимы для рѣшенія 2-й.

Теперь разсмотримъ въ какихъ случаяхъ данныя уравненія (6) будутъ несовмѣстны интегрально, т. е. не допускаютъ общаго интеграла; въ какихъ обстоятельствахъ можетъ оставаться сомнѣніе относительно ихъ совмѣстности и какъ тогда должно поступать, чтобы опредѣлить самое полное рѣшеніе (т. е. заключающее наибольшее число произвольныхъ постоянныхъ) если оно возможно.

Уравненія (6) будутъ несовмѣстны, если условія (7) не могутъ быть удовлетворены ни тождественно, ни въ силу данныхъ уравненій, ни въ силу тѣхъ $n - m$ уравненій, которыя еще неизвѣстны и должны бы были дополнить данную систему (6). Такой случай очевидно будетъ имѣть мѣсто, когда одно или нѣкоторыя изъ выраженій

$$(H_i, H_k),$$

входящихъ въ условія (7), приводятся къ какому нибудь опредѣленному постоянному неравному нулю, или представятся какъ функціи $x_1, \ldots x_n, H_1, \ldots H_m$, не уничтожающіяся въ силу данныхъ уравненій.

Но если нѣкоторыя изъ выраженій, входящихъ въ условія (7) будутъ вида

$$(H_i, H_k) = H_{m+1}, \ldots (H_i, H_k) = H_{m+l},$$

гдѣ $H_{m+1}, \ldots H_{m+l}$ означаютъ функціи не только $x_1, \ldots x_n$ $H_1, \ldots H_m$, но и $p_1, \ldots p_n$, не уничтожающіяся въ силу данныхъ уравненій (6), тогда мы не имѣемъ еще основанія утверждать, что данныя уравненія несовмѣстны; потому что функціи $H_{m+1}, \ldots H_{m+l}$ могутъ быть равны нулю въ силу нѣкоторыхъ изъ $n-m$ уравненій, которыя еще неизвѣстны и должны дополнить данную систему (6). Чтобы это обстоятельство дѣйствительно имѣло мѣсто, должно только принять, что уравненія

$$H_{m+1} = 0, \ldots H_{m+l} = 0$$

будутъ изъ числа $n - m$ неизвѣстныхъ уравненій. Но прибавивъ такимъ образомъ къ данной системѣ (6) новыя l уравненій, должно подвергнуть эти послѣднія такому-же испытанію, какое было необходимо для 1-хъ, т. е. изслѣдовать какимъ образомъ можно удовлетворить условія

$$(H_i, H_k) = 0$$

для значеній $i = 1, 2, \ldots m + l$ и $k = m + 1, \ldots m + l$.

Digitized by Google

Вычисленіе выраженій входящихъ въ эти условія составляетъ утомительную часть разсматриваемаго пріема, поэтому не безполезно замѣтить, что теор. 1 § 17 можемъ избавить отъ значительной части этаго счета. Напр. означая j одинъ изъ указателей $1, 2, \ldots m$, на основаніи этой теоремы имѣемъ

$$(H_j, H_{m+1}) = (H_j, (H_i, H_k)) = -(H_i, (H_k, H_j)) - [H_k, (H_j, H_i)];$$

слѣдовательно, если при повѣркѣ условій (7) мы уже нашли, что

$$(H_k, H_j) = 0, \quad (H_j, H_i) = 0,$$

то безъ новаго счета ясно, что и

$$(H_j, H_{m+1}) = 0.$$

Прилагая изложенный сейчасъ пріемъ однажды или нѣсколько разъ послѣдовательно мы увеличимъ данную систему (6) положимъ r уравненіями. При этомъ необходимо встрѣтится одинъ изъ трехъ случаевъ:

1. число $m+r$ будетъ равно n и условія $(H_i, H_k) = 0$ не будутъ еще удовлетворены для всѣхъ значеній $1, 2, \ldots m+r$ указателей i и k; тогда данныя уравненія (6) не могутъ имѣть общаго интеграла;

2. число $m+r$ менѣе n, но одно или нѣкоторыя изъ выраженій, входящихъ въ предъидущія условія приводятся къ постоянному или функціямъ $x_1, \ldots x_n$, $H_1, \ldots H_{m+r}$ не равнымъ нулю; тогда разсматриваемыя уравненія также несовмѣстны;

3. число $m+r$ не болѣе n и всѣ предъидущія условія удовлетворены; тогда вышеобъясненнымъ способомъ можно опредѣлить общій интегралъ уравненій (6), заключающій $n - m - r + 1$ произвольныхъ постоянныхъ.

Въ предъидущемъ очеркѣ заключается общая теорія рѣшенія вопросовъ опредѣленныхъ и неопредѣленныхъ съ частными производными 1-го порядка; остается дополнить ее однимъ замѣчаніемъ и пояснить примѣрами. Мы разсматривали уравненія съ частными производными 1-го порядка съ однимъ ограниченіемъ ихъ вида: предполагая, что въ нихъ не входитъ сама неизвѣстная функція z, но только ея частныя производныя $p_1, \ldots p_n$. Если и сама функція z входитъ въ данныя уравненія, то этотъ случай можетъ быть приведенъ къ предъидущему, помощію того преобразованія, которое показано въ § 14. Именно, представляя интегралъ z подъ видомъ неявной функціи

$$Y(x_1, \ldots x_n, z) = 0 \qquad (a)$$

и дифференцируя это уравненіе, находимъ

$$p_m = -\frac{\partial Y}{\partial x_m} : \frac{\partial Y}{\partial z} = -\frac{q_m}{q_{n+1}}, \text{ гдѣ } q_m = \frac{\partial Y}{\partial x_m}, \; q_{n+1} = \frac{\partial Y}{\partial z} \qquad (b)$$

Digitized by Google

Вставивъ значенія p_m для $m = 1, 2, \ldots n$ въ данныя уравненія, мы приведемъ ихъ къ виду, въ которомъ онѣ будутъ заключать $n+1$ независимыхъ перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_n$, z и частныя производныя $q_1, \ldots q_n$, q_{n+1} функціи Y, которая сама въ нихъ не войдетъ. Получивъ интегралъ преобразованныхъ уравненій, отбросивъ просто приданное произвольное постоянное и уравнявъ его нулю, получимъ уравненіе изъ котораго выведемъ значеніе z, удовлетворяющее данныя уравненія до преобразованія, доказательство чего уже было дано въ концѣ § 14.

Чтобы показать примѣненіе теоремы Ліувилля или Донкина къ опредѣленнымъ вопросамъ съ частными производными 1-го порядка, возьмемъ слѣдующую геометрическую задачу.

Представимъ линію, которой уравненіе въ полярныхъ координатахъ пусть будетъ

$$r = F(\sin\theta, \cos\theta), \qquad (1)$$

гдѣ θ полярный уголъ и r радіусъ векторъ, и изъ каждой точки ея проведемъ перпендикуляръ къ соотвѣтствующему радіусу вектору. Требуется опредѣлить ортогональную траэкторію этихъ перпендикуляровъ, т. е. кривую, къ которой разсматриваемые перпендикуляры будутъ нормалами.

Уравненіе одного изъ перпендикуляровъ въ прямоугольныхъ координатахъ x, y, которыхъ начало въ полюсѣ и ось x совпадаетъ съ полярною осью,—будетъ

$$x\cos\theta + y\sin\theta = F(\sin\theta, \cos\theta). \qquad (2)$$

Уравненіе искомой траэкторіи дастъ y въ функціи x, или обратно. Тангенсы угловъ, составляемыхъ съ осью x нормалемъ къ искомой кривой и прямою (2) выразятся соотвѣтственно такимъ образомъ

$$-\frac{dx}{dy} \quad \text{и} \quad -\frac{\cos\theta}{\sin\theta};$$

такъ какъ по условію они равны, то дифференціальное уравненіе задачи будетъ

$$\sin\theta . dx - \cos\theta . dy = 0. \qquad (3)$$

Теперь остается только выразить $\sin\theta$ и $\cos\theta$ въ x и y, помощію уравненія (2), и интегрировать уравненіе съ 2-мя перемѣнными (3). Но не трудно убѣдится, что какова-бы ни была функція F, $\sin\theta$ и—$\cos\theta$ должны выразиться такимъ образомъ въ x и y, что условіе

$$\frac{\partial \sin\theta}{dy} + \frac{\partial \cos\theta}{dx} = 0$$

будетъ выполнено; слѣдовательно первая часть уравненія (3) представитъ точный дифференціалъ. Дѣйствительно, полагая для кратко-

Digitized by Google

сти $\sin\theta = p$,—$\cos\theta = q$, напишемъ уравненіе (2) такимъ образомъ

$$-qx + py - F(p, -q) = 0$$

и къ нему можемъ присоединить еще слѣдующее

$$p^2 + q^2 - 1 = 0.$$

Означивъ первыя части этихъ двухъ уравненій соотвѣтственно черезъ φ и ψ легко повѣрить, что условіе

$$(\varphi, \psi) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial p} - \frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \\ + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial q} - \frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$$

будетъ удовлетворено тождественно. Слѣдовательно

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Возьмемъ частный случай, когда вмѣсто функціи F будемъ имѣть постоянное a; тогда уравненіе данной кривой

$$r = a$$

представляетъ окружность; система перпендикуляровъ образуетъ касательныя къ этой окружности и ихъ ортогональная траэкторія составляетъ развертку (la développante) окружности.

Уравненія для опредѣленія p и q будутъ

$$-qx + py - a = 0 \quad \text{и} \quad p^2 + q^2 - 1 = 0;$$

рѣшая ихъ находимъ

$$p = \frac{ay \pm x\sqrt{(x^2 + y^2 - a^2)}}{x^2 + y^2},$$

$$q = \frac{-ax \pm y\sqrt{(x^2 + y^2 - a^2)}}{x^2 + y^2}.$$

Слѣдовательно уравненіе (3) приметъ видъ

$$\frac{ay \pm x\sqrt{(x^2 + y^2 - a^2)}}{x^2 + y^2}dx + \\ + \frac{-ax \pm y\sqrt{(x^2 + y^2 - a^2)}}{x^2 + y^2}dy = 0$$

и первая часть его должна быть точнымъ дифференціаломъ. Для-

Digitized by Google

ствительно оно можетъ быть написано такимъ образомъ

$$a\,\frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2} \pm \frac{(x\,dx + y\,dy)\sqrt{(x^2+y^2-a^2)}}{x^2+y^2} =$$

$$= d\,\mathrm{arctg}\frac{x}{y} \pm \frac{1}{3}\,\frac{d(x^2+y^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2+y^2} = 0,$$

или, полагая

$$\mathrm{arctg}\,\frac{x}{y} = v,\quad x^2+y^2-a^2 = u^2,$$

$$a\,dv \pm \frac{u^2\,du}{u^2+a^2} = 0;\ \text{но}\ \int\frac{u^2\,du}{u^2+a^2} = u - a\,\mathrm{arctg}\,\frac{u}{a};$$

слѣдовательно интегралъ предъидущаго уравненія будетъ

$$a\,v \pm u \mp a\,\mathrm{arctg}\,\frac{u}{a} = \text{const.},$$

или

$$a\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{y} \pm \sqrt{(x^2+y^2-a^2)} \mp$$

$$\mp a\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{(x^2+y^2-a^2)}}{a} = \text{const.}$$

Возьмемъ теперь неопредѣленную задачу съ частными производными 1-го порядка. Пусть требуется опредѣлить общій интегралъ двухъ уравненій

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial z}{\partial x_2} = x_2\,x_4 \quad\text{и}\quad \frac{\partial z}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial z}{\partial x_4} = x_1\,x_3.$$

Полагая

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = p_1,\ \frac{\partial z}{\partial x_2} = p_2,\ \frac{\partial z}{\partial x_3} = p_3,\ \frac{\partial z}{\partial x_4} = p_4,$$

напишемъ ихъ слѣдующимъ образомъ

$$H_1 = p_1\,p_3 - x_2\,x_4 = 0 \quad\text{и}\quad H_2 = p_2\,p_4 - x_1\,x_3 = 0$$

Чтобы испытать ихъ совмѣстность, составимъ выраженіе

$$(H_1, H_2) = \begin{vmatrix} 0, & -x_3 \\ p_3, & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x_4, & 0 \\ 0, & p_4 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 0, & -x_1 \\ p_1, & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x_2, & 0 \\ 0, & p_2 \end{vmatrix} =$$

$$= x_3\,p_3 - x_4\,p_4 + x_1\,p_1 - x_2\,p_2;$$

Digitized by Google

оно не приводится къ нулю въ силу данныхъ уравненій, но можетъ уничтожаться вслѣдствіе уравненій еще неизвѣстныхъ. Чтобы это обстоятельство дѣйствительно имѣло мѣсто положимъ, что одно изъ 2-хъ неизвѣстныхъ уравненій будетъ

$$H_3 = x_1 p_1 - x_2 p_2 + x_3 p_3 - x_4 p_4 = 0.$$

Теперь условіе $(H_1, H_2) = 0$ удовлетворено и остается посмотрѣть могутъ ли быть приведены къ нулю выраженія

$$(H_1, H_3) = \begin{vmatrix} 0, & p_1 \\ p_3, & x_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x_4, & -p_2 \\ 0, & -x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0, & p_3 \\ p_2, & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x_2, & -p_4 \\ 0, & -x_4 \end{vmatrix} =$$

$$= -p_1 p_3 + x_2 x_4 - p_1 p_3 + x_2 x_4 = -2 H_1,$$

$$(H_2 H_3) = \begin{vmatrix} -x_3, & p_1 \\ 0, & x_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0, & -p_2 \\ p_4, & -x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x_1, & p_3 \\ 0, & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0, & -p_4 \\ p_2, & -x_3 \end{vmatrix} =$$

$$= -x_1 x_3 + p_2 p_4 - x_1 x_3 + p_2 p_4 = 2 H_2.$$

Но очевидно они уничтожаются въ силу данныхъ уравненій; слѣдовательно уравненія

$$H_1 = 0, \quad H_2 = 0, \quad H_3 = 0$$

совмѣстны и допускаютъ общій интегралъ, въ самое полное выраженіе котораго войдетъ $4 - 3 + 1 = 2$ произвольныхъ постоянныхъ. Займемся опредѣленіемъ его.

Чтобы привести интегрируемыя уравненія къ наименьшему числу перемѣнныхъ, разрѣшимъ предъидущія уравненія относительно p_1, p_2, p_3. Изъ уравненій $H_1 = 0$ и $H_2 = 0$ находимъ

$$p_1 = \frac{x_2 x_4}{p_3}, \qquad p_2 = \frac{x_1 x_3}{p_4}.$$

Вставивъ эти значенія въ уравненіе $H_3 = 0$, получимъ для опредѣленія p_3 уравненіе 2-й степени нѣсколько сложное. Поэтому лучше опредѣлимъ одинъ изъ корней его, котораго намъ и достаточно,

Digitized by Google

слѣдующимъ образомъ. Умноживъ одно на другое данныя уравненія:

$$p_1 p_3 = x_2 x_4 \quad \text{и} \quad x_1 x_3 = p_2 p_4,$$

находимъ

$$p_1 x_1 . p_3 x_3 = p_2 x_2 . p_4 x_4,$$

откуда имѣемъ

$$\frac{p_1 x_1}{p_2 x_2} = \frac{p_4 x_4}{p_3 x_3} = \frac{p_1 x_1 - p_4 x_4}{p_2 x_2 - p_3 x_3}.$$

Но по уравненію $H_3 = 0$, $p_2 x_2 - p_3 x_3 = p_1 x_1 - p_4 x_4$; слѣдовательно

$$p_3 = \frac{p_4 x_4}{x_3} = \omega_3.$$

Вставивъ это значеніе въ выраженіе p_1, получимъ

$$p_1 = \frac{x_2 x_3}{p_4} = \omega_1;$$

сверхъ того имѣемъ

$$p_2 = \frac{x_1 x_3}{p_4} = \omega_2.$$

Далѣе, чтобы опредѣлить уравненіе $f(p_4, x_1, x_2, x_3, x_4) = \text{const}$, изъ котораго выведется выраженіе p_4 въ независимыхъ перемѣнныхъ, должно совокупно интегрировать три линейныя уравненія

$$(p_1 - \omega_1, f) = 0, \quad (p_2 - \omega_2, f) = 0, \quad (p_3 - \omega_3, f).$$

Системы обыкновенныхъ уравненій, соотвѣтствующія 1-му и 2-му изъ предъидущихъ линейныхъ, будутъ

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_4}{\frac{x_2 x_3}{p_4^2}} = \frac{dp_4}{0} \quad \text{и} \quad \frac{dx_2}{1} = \frac{dx_4}{\frac{x_1 x_3}{p_4^2}} = \frac{dp_4}{0}.$$

Слѣдовательно интегралъ $\varphi = p_4 = \text{const}$. будетъ общимъ для 1-го и 2-го линейнаго уравненія; вставляя его въ 3-е вмѣсто f, находимъ

$$(p_3 - \omega_3, \varphi) = \frac{d\omega_3}{dx_4} = \frac{p_4}{x_3} = \frac{\varphi}{x_3} = \varphi_1.$$

Поэтому общій интегралъ трехъ линейныхъ уравненій получится посредствомъ интегрированія уравненія

$$\frac{d\varphi}{dx_3} - \frac{1}{x_3}\varphi = 0 \quad \text{и будетъ} \quad l\varphi - lx_3 = \text{const},$$

Digitized by Google

$$\text{или } \frac{p_4}{x_3} = \text{const.} = \alpha.$$

Слѣдовательно

$$p_4 = \alpha x_3,\ p_1 = \frac{x_2}{\alpha},\ p_2 = \frac{x_1}{\alpha},\ p_3 = \alpha x_4;$$

Поэтому

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3 + p_4 dx_4 =$$
$$= \frac{x_1 dx_2 + x_2 dx_1}{\alpha} + \alpha (x_4 dx_3 + x_3 dx_4)$$

Откуда интегрированіемъ получаемъ искомый общій интегралъ данныхъ уравненій

$$z = \frac{x_1 x_2}{\alpha} + \alpha x_3 x_4 + \text{const.}$$

§ 23. Разсмотримъ совокупное интегрированіе въ *примѣненіи* къ уравненіямъ линейнымъ въ отношеніи частныхъ производныхъ перваго порядка. Положимъ данныя уравненія будутъ

$$\overset{(1)}{a_1}\ p_1 + \overset{(1)}{a_2}\ p_2 + \cdots + \overset{(1)}{a_{n-1}}\ p_{n-1} + \overset{(1)}{a_n}\ p_n = 0,$$
$$\cdots\cdots$$
$$\overset{(m)}{a_1}\ p_1 + \overset{(m)}{a_2}\ p_2 + \cdots + \overset{(m)}{a_{n-1}}\ p_{n-1} + \overset{(m)}{a_n}\ p_n = 0,$$

гдѣ $p_1 = \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots p_n = \frac{\partial z}{\partial x_n}$ и $\overset{(1)}{a_1}, \overset{(1)}{a_2}, \ldots \overset{(m)}{a_{n-1}}, \overset{(m)}{a_n}$

означаютъ данныя $m.n$ функцій независимыхъ перемѣнныхъ $x_1 \ldots x_n$.

Мы будемъ означать первыя части предъидущихъ уравненій двоякимъ образомъ: или соотвѣтственно буквами $H_1, \ldots H_m$, или еще знаками $A_1(z), \ldots A_m(z)$. При второй системѣ означеній результатъ вставки какой нибудь функціи φ вмѣсто z напр. въ 1-ое уравненіе выразится такимъ образомъ $A_1(\varphi)$, результатъ той-же вставки въ послѣднее уравненіе будетъ $A_m(\varphi)$.

Предполагая данныя уравненія алгебраически совмѣстными, должно изслѣдовать, могутъ-ли быть приведены къ нулю выраженія

$$(H_i, H_k)$$

для всѣхъ значеній i и k, взятыхъ въ ряду чиселъ $1, 2, \ldots m$.

Эти выраженія будутъ очевидно функціями линейными относительно $p_1, \ldots p_n$, которыхъ общій видъ легко находится слѣдующимъ

Digitized by Google

образомъ. По опредѣленію, данному въ началѣ § 16 имѣемъ

$$(H_i, H_k) =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial a_1^{(i)}}{\partial x_1} p_1 + \cdots + \frac{\partial a_{n-1}^{(i)}}{\partial x_1} p_{n-1} + \frac{\partial a_n^{(i)}}{\partial x_1} p_n, & a_1^{(i)} \\ \frac{\partial a_1^{(k)}}{\partial x_1} p_1 + \cdots + \frac{\partial a_{n-1}^{(k)}}{\partial x_1} p_{n-1} + \frac{\partial a_n^{(k)}}{\partial x_1} p_n, & a_1^{(k)} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$\cdots + \begin{vmatrix} \frac{\partial a_1^{(i)}}{\partial x_n} p_1 + \cdots + \frac{\partial a_{n-1}^{(i)}}{\partial x_n} p_{n-1} + \frac{\partial a_n^{(i)}}{\partial x_n} p_n, & a_n^{(i)} \\ \frac{\partial a_1^{(k)}}{\partial x_n} p_1 + \cdots + \frac{\partial a_{n-1}^{(k)}}{\partial x_n} p_{n-1} + \frac{\partial a_n^{(k)}}{\partial x_n} p_n, & a_n^{(k)} \end{vmatrix}.$$

Соединяя во 2-й части этого равенства члены, заключающіе общими множителями $p_1, \ldots p_n$ и примѣняя принятые выше знаки, находимъ

$$(H_i, H_k) = \left[A_k(a_1^{(i)}) - A_i(a_1^{(k)})\right] p_1 + \cdots$$

$$\cdots + \left[A_k(a_{n-1}^{(i)}) - A_i(a_{n-1}^{(k)})\right] p_{n-1} +$$

$$+ \left[A_k(a_n^{(i)}) - A_i(a_n^{(k)})\right] p_n.$$

Отсюда видно, что выраженія (H_i, H_k) приведутся къ нулю 1) въ силу данныхъ уравненій, если представятся линейными однородными функціями нѣкоторыхъ изъ величинъ $H_1, \ldots H_m$; 2)—тождественно, если коефиціенты ихъ при $p_1, \ldots p_n$ порознь равны нулю. Если же они не уничтожаются ни тѣмъ, ни другимъ образомъ, то полагая ихъ равными нулю мы прибавимъ къ даннымъ линейнымъ уравненіямъ уравненія также линейныя.

Прилагая этотъ пріемъ и ко вновь образуемымъ линейнымъ уравненіямъ, положимъ такимъ образомъ будетъ прибавлено къ даннымъ всего r уравненій

$$H_{m+1} = 0, \quad H_{m+2} = 0, \ldots H_{m+r} = 0,$$

гдѣ $m+r$ не болѣе n и условія $(H_i, H_k) = 0$ удовлетворены для всѣхъ значеній i и k, взятыхъ въ ряду чиселъ $1, 2, \ldots m+r$; въ такомъ случаѣ можетъ быть найденъ интегралъ, удовлетворяющій совокупно данныя уравненія, въ полномъ выраженіи котораго должны заключаться $n-m-r+1$ произвольныхъ постоянныхъ (включая сюда просто приданное), а изъ него выведется весьма просто выраженіе

Digitized by Google

самаго общаго интеграла, заключающее произвольную функцію отъ $n-m-r$ данныхъ функцій.

Ходъ вычисленій для вывода полнаго интеграла показанъ выше въ болѣе общемъ случаѣ — совокупныхъ нелинейныхъ уравненій и остается здѣсь безъ измѣненія; поэтому, чтобы только показать приложеніе новой формы условій интегрируемости, возьмемъ частный примѣръ: найдемъ, если возможно, интегралъ, удовлетворяющій совокупно два линейныя уравненія:

$$H_1 = \frac{\partial z}{\partial x} + (t + x y + x u)\frac{\partial z}{\partial u} + (y + u - 3x)\frac{\partial z}{\partial t} = 0,$$

$$H_2 = \frac{\partial z}{\partial y} + (x u t + y - y x)\frac{\partial z}{\partial u} + (u t - y)\frac{\partial z}{\partial t} = 0.$$

Представивъ первыя части этихъ уравненій соотвѣтственно знаками $A(z)$ и $B(z)$, чтобы увѣриться въ ихъ совмѣстности составимъ выраженіе

$$(H_2, H_1) = [A(0) - B(1)]\frac{\partial z}{\partial x} + [A(1) - B(0)]\frac{\partial z}{\partial y} +$$
$$+ [A(x u t + y - x y) - B(t + x y + x u)]\frac{\partial z}{\partial u} +$$
$$+ [A(u t - y) - B(y + u - 3x)]\frac{\partial z}{\partial t};$$

первые два члена его равны нулю; для вычисленія остальныхъ находимъ

$$A(x u t + y - x y) = u t - y + (t + x y + x u) x t +$$
$$+ (y + u - 3x) x u$$
$$B(t + x y + x u) = x + (x u t + y - x y) x + u t - y$$
$$A(u t - y) = (t + x y + x u) t + (y + u - 3x) u$$
$$B(y + u - 3x) = 1 + (x u t + y - x y)$$

Вставивъ эти значенія въ коефиціенты предъидущаго выраженія, приведемъ его къ слѣдующему виду

$$(x y t + t^2 + u^2 + y u - 3 x u + x y - y - 1)\left(x\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial t}\right).$$

Отсюда ясно, что условіе $(H_2, H_1) = 0$ будетъ удовлетворено, если положимъ

$$H_3 = x\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial t} = 0.$$

Digitized by Google

Представляя первую часть послѣдняго уравненія знакомъ $C(x)$, находимъ

$$(H_3, H_1) = [A(0) - C(1)]\frac{\partial z}{\partial x} + [A(0) - C(0)]\frac{\partial z}{\partial y} +$$
$$+ [A(x) - C(t + xy + xu)]\frac{\partial z}{\partial u} +$$
$$+ [A(1) - C(y + u - 3x)]\frac{\partial z}{\partial t};$$
$$(H_3, H_2) = [B(0) - C(0)]\frac{\partial z}{\partial x} + [B(0) - C(1)]\frac{\partial z}{\partial y} +$$
$$+ [B(x) - C(xut + y - xy)]\frac{\partial z}{\partial u} +$$
$$+ [B(1) - C(ut - y)]\frac{\partial z}{\partial t}.$$

Но $A(x) = 1$, $C(t + xy + xu) = x^2 + 1$,
$C(y + u - 3x) = x$,
$B(x) = 0$, $C(xut + y - xy) = x^2 t - xu$,
$C(ut - y) = xt + u$;

слѣдовательно

$$(H_3, H_1) = -x^2\frac{\partial z}{\partial u} - x\frac{\partial z}{\partial t} = -xH_3,$$
$$(H_3, H_2) = -(x^2 t + xu)\frac{\partial z}{\partial u} - (xt + u)\frac{\partial z}{\partial t} = -(xt + u)H_3$$

Поэтому условія $(H_3, H_1) = 0$, $(H_3, H_2) = 0$ удовлетворяются въ силу уравненія $H_3 = 0$.

И такъ три линейныя уравненія

$$H_1 = 0,\ H_2 = 0 \text{ и } H_3 = 0$$

выполняютъ всѣ условія интегрируемости; слѣдовательно сообразно заключеніямъ теоріи способа, интегралъ, принадлежащій этимъ тремъ уравненіямъ совокупно, долженъ имѣть въ самомъ полномъ своемъ выраженіи два произвольныхъ постоянныхъ, (изъ которыхъ одно просто приданное); изъ него-же получится самый общій интегралъ, выражающійся произвольной функціей отъ нѣкоторой данной функціи.

Выведемъ сначала полный интегралъ. Полагая для краткости

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p_1,\ \frac{\partial z}{\partial y} = p_2,\ \frac{\partial z}{\partial t} = p_3,\ \frac{\partial z}{\partial u} = p_4$$

Digitized by Google

опредѣлимъ, помощію предъидущихъ уравненій, выраженія трехъ первыхъ изъ этихъ величинъ посредствомъ четвертой и независимыхъ перемѣнныхъ. Означая для краткости эти выраженія соотвѣтственно ω_1, ω_2, ω_3, будемъ имѣть

$$p_1 = -(3x^2 + t)\,p_4 = \omega_1,$$
$$p_2 = -y\,p_4 = \omega_2,\ p_3 = -x\,p_4 = \omega_3.$$

Затѣмъ для опредѣленія уравненія $f(p_4, x, y, t, u) = \text{const}$, изъ котораго найдется выраженіе p_4, опредѣлимъ общій интегралъ трехъ линейныхъ уравненій:

$$(p_1 - \omega_1, f) = 0,\ (p_2 - \omega_2, f) = 0,\ (p_3 - \omega_3, f) = 0.$$

Принадлежащія имъ системы обыкновенныхъ уравненій будутъ соотвѣтственно

$$\frac{dx}{1} = \frac{du}{-\frac{\partial\omega_1}{\partial p_4}} = \frac{dp_4}{\frac{\partial\omega_1}{\partial u}},\quad \frac{dy}{1} = \frac{du}{-\frac{\partial\omega_2}{\partial p_4}} = \frac{dp_4}{\frac{\partial\omega_2}{\partial u}},$$
$$\frac{dt}{1} = \frac{du}{-\frac{\partial\omega_3}{\partial p_4}} = \frac{dp_4}{\frac{\partial\omega_3}{\partial u}};$$

но такъ какъ

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial u} = \frac{\partial\omega_2}{\partial u} = \frac{\partial\omega_3}{\partial u} = 0,$$

то интегралъ

$$f = p_4 = \text{const} = \alpha$$

принадлежитъ каждой изъ трехъ системъ обыкновенныхъ и каждому изъ трехъ предъидущихъ линейныхъ уравненій. Слѣдовательно выраженія частныхъ производныхъ искомой функціи z будутъ

$$p_1 = -(3x^2 + t)\,\alpha,\ p_2 = -y\alpha,\ p_3 = -x\alpha,\ p_4 = \alpha.$$

Поэтому

$$dz = -\alpha\,[(3x^2 + t)\,dx + y\,dy + x\,dt - du].$$

Отсюда посредствомъ интегрированія находимъ выраженіе полнаго интеграла

$$z = \alpha\left(u - x^3 - xt - \frac{y^2}{2}\right) + \text{const}.$$

Наконецъ выраженіе самаго общаго интеграла можетъ быть дано въ

Digitized by Google

двухъ видахъ: или посредствомъ двухъ уравненій

$$\begin{cases} z = \alpha\left(u - x^2 - xt - \frac{y^2}{2}\right) + \pi(\alpha), \\ 0 = u - x^2 - xt - \frac{y^2}{2} + \frac{\partial\pi(\alpha)}{\partial\alpha}, \end{cases}$$

или посредствомъ одного

$$z = \pi\left(u - x^2 - xt - \frac{y^2}{2}\right),$$

означая черезъ π въ обоихъ случаяхъ совершенно произвольную функцію. Очевидно оба выраженія общаго интеграла равнозначущи.

§ 24. Въ предъидущей задачѣ мы пользовались особенной формой, которую принимаютъ условія интегрируемости линейныхъ совокупныхъ уравненій съ частными производными 1-го порядка. Здѣсь будетъ кстати показать еще другую форму этихъ условій, помощію которой Якоби вывелъ основную теорему 1 § 17.

Возьмемъ два линейныя выраженія относительно частныхъ производныхъ функціи z:

$$a_1\frac{dz}{dx_1} + a_2\frac{dz}{dx_2} + \cdots + a_n\frac{dz}{dx_n} \quad \text{и} \quad b_1\frac{dz}{dx_1} + b_2\frac{dz}{dx_2} + \cdots + b_n\frac{dz}{dx_n},$$

въ которыхъ $a_1, a_2, \ldots a_n$ и $b_1, b_2, \ldots b_n$ представляютъ функціи $x_1, \ldots x_n$, и означимъ первое черезъ $A(z)$, второе черезъ $B(z)$.

A и B можно разсматривать какъ знаки совершенно опредѣленныхъ дѣйствій и называть 1-ое дѣйствіемъ A, 2-ое дѣйствіемъ B. Подвергнувъ какую нибудь функцію z перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_n$ дѣйствію A, мы получимъ въ результатѣ снова функцію тѣхъ-же перемѣнныхъ, надъ которою можемъ произвести дѣйствіе B. Результатъ этихъ двухъ дѣйствій символически выразится такимъ образомъ

$$B[A(z)],$$

производя-же ихъ въ обратномъ порядкѣ можемъ представить результатъ слѣдующимъ образомъ

$$A[B(z)].$$

Посмотримъ какова вообще будетъ разность этихъ двухъ результатовъ. Для этого находимъ

$$B[A(z)] = b_1\frac{\partial A(z)}{\partial x_1} + b_2\frac{\partial A(z)}{\partial x_2} + \cdots + b_n\frac{\partial A(z)}{\partial x_n}$$

$$= b_1\left\{\frac{da_1}{dx_1}\frac{dz}{dx_1} + \frac{da_2}{dx_1}\frac{dz}{dx_2} + \cdots + \frac{da_n}{dx_1}\frac{dz}{dx_n} + \right.$$

$$\left. + a_1\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + a_2\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_2} + \cdots + a_n\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_n}\right\}$$

Digitized by Google

$$+ b_2 \left\{ \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial a_n}{\partial x_2} \frac{\partial z}{\partial x_n} + \right.$$

$$\left. + a_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} + a_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \cdots + a_n \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_n} \right\}$$

. . . . . .

$$+ b_n \left\{ \frac{\partial a_1}{\partial x_n} \frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_n} \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial a_n}{\partial x_n} \frac{\partial z}{\partial x_n} + \right.$$

$$\left. + a_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n} + a_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_n} + \cdots + a_n \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} \right\},$$

или

$$B[A(z)] = B(a_1) \frac{\partial z}{\partial x_1} + B(a_2) \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + B(a_n) \frac{\partial z}{\partial x_n} +$$

$$+ b_1 a_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + b_2 a_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \cdots + b_n a_n \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} +$$

$$+ (b_1 a_2 + b_2 a_1) \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} + \cdots + (b_1 a_n + b_n a_1) \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n} + \cdots$$

$$\cdots + (b_{n-1} a_n + b_n a_{n-1}) \frac{\partial^2 z}{\partial x_{n-1} \partial x_n} \cdots$$

Точно также находимъ

$$A[B(z)] = A(b_1) \frac{\partial z}{\partial x_1} + A(b_2) \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + A(b_n) \frac{\partial z}{\partial x_n} +$$

$$+ a_1 b_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + a_2 b_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \cdots + a_n b_n \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} +$$

$$+ (a_1 b_2 + a_2 b_1) \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} + \cdots + (a_1 b_n + a_n b_1) \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n} + \cdots$$

$$\cdots + (a_{n-1} b_n + a_n b_{n-1}) \frac{\partial^2 z}{\partial x_{n-1} \partial x_n} \cdot$$

Сравнивая два предъидущія выраженія замѣчаемъ, что въ нихъ члены, содержащіе одинаковыя частныя производныя 2-го порядка функціи z, — одинаковы; поэтому при вычитаніи одного выраженія изъ другаго эти члены уничтожатся и разность выразится слѣдующею линейною функціей частныхъ производныхъ 1-го порядка функ-

Digitized by Google

ціи z

$$B[A(z)] - A[B(z)] = [B(a_1) - A(b_1)]\frac{\partial z}{\partial x_1} +$$

$$+ [B(a_2) - A(q_2)]\frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots [B(a_n) - A(b_n)]\frac{\partial z}{\partial x_n}.$$

Означивъ теперь $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial z}{\partial x_n}$ соотвѣтственно черезъ $p_1, \cdots p_n$ положимъ

$$a_1 p_1 + \cdots + a_n p_n = A(z) = H,$$

$$b_1 p_1 + \cdots + b_n p_n = B(z) = G.$$

По доказанному въ § 23 будемъ имѣть

$$(H, G) = [B(a_1) - A(b_1)] p_1 + \cdots + [B(a_n) - A(b_n)] p_n.$$

Сравнивая этотъ выводъ съ предъидущимъ, находимъ что

$$(H, G) = B[A(z)] - A[B(z)].$$

Отсюда-же слѣдуетъ, что линейныя уравненія $A(z) = 0$ и $B(z) = 0$ будутъ совмѣстны интегрально, если удовлетворено условіе

$$B[A(z)] = A[B(z)].$$

и очевидно эта новая форма условій интегрируемости совокупныхъ линейныхъ уравненій однозначительна съ прежнею.

Слѣдствіе. Положимъ теперь φ, ψ и z представляютъ какія нибудь функціи $2n$ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \cdots x_n, p_1, p_2, \cdots p_n$ и возьмемъ два выраженія линейныя относительно частныхъ производныхъ перваго порядка функціи z слѣдующаго вида

$$A(z) = (\varphi, z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\frac{\partial z}{\partial p_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\frac{\partial z}{\partial x_1} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\frac{\partial z}{\partial p_n} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_n}\frac{\partial z}{\partial x_n},$$

$$B(z) = (\psi, z) = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}\frac{\partial z}{\partial p_1} - \frac{\partial \psi}{\partial p_1}\frac{\partial z}{\partial x_1} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\frac{\partial z}{\partial p_n} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_n}\frac{\partial z}{\partial x_n}.$$

На основаніи выведенной выше формулы имѣемъ

$$(\alpha) \qquad B[A(z)] - A[B(z)] =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} \left\{ \left[B\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) - A\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right) \right] \frac{\partial z}{\partial p_i} - \left[B\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\right) - A\left(\frac{\partial \psi}{\partial p_i}\right) \right] \frac{\partial z}{\partial x_i} \right\}.$$

Digitized by Google

Но $A(z) = (\varphi, z)$, $B(z) = (\psi, z)$;
слѣдовательно

$$B[A(z)] = [\psi, (\varphi, z)],\ A[B(z)] = [\varphi, (\psi, z)] \text{ и}$$
$$B[A(z)] - A[B(z)] = [\psi, (\varphi, z)] - [\varphi, (\psi, z)] =$$
$$= [\psi, (\varphi, z)] + [\varphi, (z, \psi)];$$

далѣе

$$B\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) = \left(\psi, \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right), \quad -A\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right) = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}, \varphi\right),$$
$$B\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\right) = \left(\psi, \frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\right), \quad -A\left(\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\right) = \left(\frac{\partial\psi}{\partial p_i}, \varphi\right).$$

Поэтому

$$B\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) - A\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right) = \left(\psi\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}, \varphi\right) = \frac{\partial(\psi, \varphi)}{\partial x_i},$$

на основаніи формулы 9 § 16, также

$$B\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\right) - A\left(\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\right) = \frac{\partial(\psi, \varphi)}{\partial p_i}.$$

Слѣдовательно равенство (α) приметъ видъ

$$[\psi, (\varphi, z)] + [\varphi, (z, \psi)] =$$
$$= \sum_{i=1}^{i=n} \left\{ \frac{\partial(\psi, \varphi)}{\partial x_i} \frac{\partial z}{\partial p_i} - \frac{\partial(\psi, \varphi)}{\partial p_i} \frac{\partial z}{\partial x_i} \right\} = -[z, (\psi, \varphi)]$$

или, перенося всѣ члены его въ 1-ю часть,

$$[\psi, (\varphi, z)] + [\varphi, (z, \psi)] + [z, (\psi, \varphi)] = 0.$$

Таково въ сущности доказательство, данное этому предложенію Якоби (Nova Methodus §§ 23 — 26); но такъ какъ оно тѣсно связано съ теоріею интегрированія совокупныхъ линейныхъ уравненій съ частными производными 1-го порядка, то я счелъ за лучшее представить его вмѣстѣ съ изложеніемъ этой части предмета и выше (въ § 17) далъ другое доказательство, какъ мнѣ кажется, также не сложное и выведенное непосредственно изъ основныхъ свойствъ выраженій вида (φ, ψ). Должно замѣтить, что эта теорема была извѣстна еще прежде изданія «Nova Methodus» Якоби; такъ въ упомянутомъ выше (§ 22) сочиненіи Donkin'a «On a Class of diff. Equations etc» находимъ ее на стр. 92 (Section 11, § 21) и на страницѣ 71, въ сноскѣ, она упоминается въ числѣ результатовъ вновь найденныхъ или новымъ образомъ доказанныхъ авторомъ.

Доказательство Донкина скорѣе можно назвать повѣркою разсматриваемой теоремы; впрочемъ по краткости оно можетъ быть удобно при сжатомъ изложеніи теоріи Якоби, поэтому считаю не лишнимъ привести его.

Digitized by Google

«*Теорема*. Если p, q, r будутъ какія нибудь функціи $2n$ перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_n$; то

$$(\alpha) \qquad [(p, q), r] + [(q, r), p] + [(r, p), q] = 0.$$

Если развернуть предъидущее выраженіе, то очевидно каждый членъ его будетъ состоять изъ производной 2-го порядка одной изъ функцій p, q, r, умноженной на производныя 1-го порядка каждой изъ остальныхъ двухъ функцій.

Разсмотримъ члены съ производными 2-го порядка p; они будутъ вида

$$\frac{d^2 p}{dx_i\, dy_j} \cdot \frac{dq}{dx_j} \cdot \frac{dr}{dy_i}, \qquad \frac{d^2 p}{dx_i\, dx_j} \cdot \frac{dq}{dy_i} \cdot \frac{dr}{dy_j} \qquad \text{и}$$

$$\frac{d^2 p}{dy_i\, dy_j} \cdot \frac{dq}{dx_i} \cdot \frac{dr}{dx_j}$$

и каждый изъ нихъ получится изъ перваго или третьяго члена уравненія (α). (Должно замѣтить, что i можетъ быть $= j$).

Теперь изслѣдуя каждую изъ этихъ формъ легко видѣть, что для каждаго члена, происходящаго изъ перваго члена уравненія (α), находится подобный членъ *съ противнымъ знакомъ*, происходящій изъ третьяго члена этого уравненія; и такъ какъ тоже самое будетъ справедливо въ отношеніи членовъ, въ которые входятъ вторыя производныя q, r, то все выраженіе первой части уравненія (α) тождественно уничтожится. Слѣдовательно теорема доказана».

§ 25. Разсмотримъ еще примѣненіе способа интегрированія совокупныхъ уравненій съ частными производными 1-го порядка къ выводу условій непосредственной интегрируемости дифференціальнаго выраженія, содержащаго независимое перемѣнное, его функціи и ихъ производныя до какого угодно порядка.

Этотъ вопросъ рѣшенный первоначально, какъ извѣстно, Эйлеромъ и Кондорсе и бывшій предметомъ изслѣдованій Лекселля, Лагранжа, Пуассона, Сарюса, Бертрана, Бине и мн. др., представляетъ не сложную и интересную задачу для приложенія разсматриваемой нами теоріи. Новый пріемъ рѣшенія по элементарности можно сравнить съ тѣмъ, который далъ Кондорсе (*) и дополнилъ Сарюсъ (**) и точно также, доставляя выраженія частныхъ производныхъ 1-го порядка искомой функціи по всѣмъ входящимъ въ нее перемѣннымъ, приводитъ ея опредѣленіе къ интегрированію полнаго дифференціала. Но вмѣстѣ съ этимъ получаются одно за другимъ всѣ необходимыя

(*) Въ его интегральномъ вычисленіи. См. также Lacroix «Traité du calc. diff. et du calc. integral» T. 2, p. 238—249.

(**) Gergonne «Annales de Mathématiques» T. XIV, также Todhunter's «History of the Progress of the Calculus of Variations» p. 523—529.

Digitized by Google

условія, которыя должна выполнить данная функція, для того чтобы быть точною производною другой функціи. Если въ данномъ случаѣ существованіе послѣдней функціи оказывается невозможнымъ, то это вообще обнаруживается прежде, чѣмъ мы придемъ къ извѣстному Эйлерову условію, которое въ разсматриваемомъ способѣ рѣшенія является самымъ послѣднимъ. Кстати замѣтить, что это условіе дается здѣсь въ новой символической формѣ, довольно замѣчательной. Для полноты рѣшенія по этому способу должно-бы было только найти простой путь къ доказательству, что всѣ необходимыя условія будутъ выполнены, какъ скоро удовлетворено одно Эйлерово; за недостаткомъ-же такого доказательства должно пока дать преимущество при рѣшеніи разсматриваемой задачи менѣе прямымъ и простымъ пріемамъ варіаціоннаго вычисленія. Упоминаемый выше пріемъ рѣшенія указалъ г. Буль (Bool) (*), приведя эту задачу какъ примѣръ для приложенія предлагаемаго имъ способа интегрированія обыкновенныхъ совокупныхъ уравненій перваго порядка, въ которыхъ число перемѣнныхъ превышаетъ болѣе чѣмъ единицею число уравненій. Но изъ его изслѣдованія видно, что этотъ общій вопросъ тѣсно связанъ съ задачею интегрированія совокупныхъ линейныхъ уравненій съ частными производными 1-го порядка. Авторъ разсматривая послѣднюю задачу не съ такой общей точки зрѣнія, которую указалъ г. Буръ (въ упомянутой выше на стр. 99 статьѣ, которая, какъ изданная одновременно вѣроятно была еще неизвѣстна г. Булю) примѣняетъ условія совмѣстности двухъ линейныхъ уравненій

$$H = A(z) = 0 \qquad \text{и} \qquad G = B(z) = 0$$

исключительно подъ видомъ

$$B[A(z)] = A[B(z)],$$

или, какъ онъ пишетъ,

$$(AB - BA)z = 0;$$

вслѣдствіе этого въ примѣненіи къ разсматриваемой задачѣ онъ вводитъ цѣлый рядъ символовъ, которые хотя и позволяютъ выразить рѣшеніе въ очень сжатой формѣ, однако лишаютъ его необходимой ясности и простоты. Поэтому я воспользуюсь указаніемъ г. Бертрана, который (на одной изъ лекцій, читанныхъ въ 1863 г. въ Collége de France) замѣтилъ, что въ примѣненіи къ настоящей задачѣ лучше пользоваться условіемъ совмѣстности линейныхъ уравненій подъ видомъ

$$(H, G) = 0$$

и показалъ какимъ образомъ выведется Эйлерово условіе въ частномъ случаѣ, когда данное дифференціальное выраженіе содержитъ

(*) Въ статьѣ «On simultaneous differential equat. of the 1-st order etc.» Philosoph. Transactions, 1862, Part I, p. 453.

Digitized by Google

независимое перемѣнное, его функцію и ея производныя до 2-го порядка. Я изложу впрочемъ рѣшеніе вопроса въ общемъ видѣ, потому что въ частномъ случаѣ не обнаруживаются нѣкоторыя стороны рѣшенія, нелишенныя интереса.

Представимъ данное выраженіе, содержащее независимое перемѣнное x, его неизвѣстную функцію y и ея производныя до n-го порядка

$$\frac{dy}{dx} = y', \frac{d^2y}{dx^2} = y'', \ldots \frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)}$$

слѣдующимъ образомъ

$$F(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)})$$

и предложимъ себѣ задачу: опредѣлить, если возможно, такую функцію V перемѣнныхъ $x, y, y', \ldots y^{(n)}$, которая будучи дифференцирована въ отношеніи x не только входящаго явнымъ образомъ, но и посредствомъ функцій $y, y', \ldots y^n$, доставила бы выраженіе F. Употребляя означеніе $\frac{d}{dx} \cdot V$ для такого полнаго дифференцированія, будемъ имѣть

$$\frac{d}{dx} \cdot V = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} y' + \frac{\partial V}{\partial y'} y'' + \cdots$$
$$\cdots + \frac{\partial V}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)} + \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}} \cdot y^{(n+1)}$$

и основное уравненіе задачи будетъ:

$$(1) \quad \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} y' + \cdots + \frac{\partial V}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)} + \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}} y^{(n+1)} =$$
$$= F(x, y, y', \ldots y^{(n)}).$$

Далѣе замѣчаемъ: 1) что еслибъ функція V была уже извѣстна, то уравненіе (1) было-бы тождественнымъ, когда функція y остается совершенно неопредѣленною; но F не содержитъ $y^{(n+1)}$, поэтому членъ $\frac{\partial V}{\partial y^{(n)}} \cdot y^{(n+1)}$, не имѣя себѣ подобнаго ни во 2-ой, ни въ 1-ой части уравненія (1), долженъ уничтожаться самъ собою, слѣдовательно необходимо должно быть

$$(2) \quad \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}} = 0.$$

2) Очевидно, если данная функція F произошла дѣйствительно черезъ полное дифференцированіе въ отношеніи x другой функціи V, то первая должна быть линейнаго вида относительно $y^{(n)}$, потому что такой видъ имѣетъ первая часть уравненія (1). Слѣдовательно

Digitized by Google

необходимо должно быть

$$F = A + B.y^{(n)}, \qquad (a)$$

гдѣ A и B нѣкоторыя функціи $x, y, y', \ldots y^{(n-1)}$ и чтобы уравненіе (1) повѣрялось тождественно при всякомъ значеніи y должно еще прибавить условіе

$$\frac{\partial V}{\partial y^{(n-1)}} = B,$$

гдѣ B легко выразить помощію F. Дѣйствительно взявъ частныя производныя въ отношеніи $y^{(n)}$ обѣихъ частей равенства (a) находимъ

$$B = \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}.$$

Слѣдовательно три уравненія задачи, выраженныя въ частныхъ производныхъ искомой функціи V, будутъ:

$$\left\{\begin{array}{l} H = V_x + V_y.y' + V_{y'}.y'' + \cdots \\ \cdots + V_{y^{(n-1)}}.y^{(n)} + V_{y^{(n)}}.y^{(n+1)} - F = 0, \qquad (1) \\ G = V_{y^{(n)}} = 0, \qquad (2) \\ H_1 = V_{y^{(n-1)}} - F_{y^{(n)}} = 0, \qquad (3) \end{array}\right.$$

гдѣ для краткости частныя производныя данной функціи F и искомой V означены тѣми же буквами, приписывая къ нимъ внизу указателемъ перемѣнное, въ отношеніи котораго произведено частное дифференцированіе, поэтому напр. $V_x = \frac{\partial V}{\partial x}$ и $F_{y^{(n)}} = \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}$; первыя-же части предъидущихъ уравненій представляются соотвѣтственно черезъ H, G, H_1.

Имѣя такимъ образомъ три совокупныя уравненія съ частными производными перваго порядка, для интегрированія ихъ нужно только примѣнить способъ изложенный въ предъидущихъ §§. Для этого разсматривая H, G, H_1 какъ функціи $2(n+2)$ перемѣнныхъ x, V_x, y, V_y, y', $V_{y'}, \ldots y^{(n)}$, $V_{y^{(n)}}$, составимъ выраженія:

$$(H, G) = V_{y^{(n-1)}} - F_{y^{(n)}}, \quad (G, H_1) = \frac{\partial F_{y^{(n)}}}{\partial y^{(n)}} \quad \text{и}$$

$$(H, H_1) = V_{y^{(n-2)}} + \left[\frac{\partial F_{y^{(n)}}}{\partial x} + \frac{\partial F_{y^{(n)}}}{\partial y}.y' + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + \frac{\partial F_{y^{(n)}}}{\partial y^{(n-1)}} + \frac{\partial F_{y^{(n)}}}{\partial y^{(n)}} y^{(n+1)}\right] - F_{y^{(n-1)}}.$$

Первое изъ этихъ выраженій приводится къ нулю въ силу уравне-

Digitized by Google

нія $H_1 = 0$; второе равно нулю тождественно, потому что $F_{y^{(n)}} = B$ и B не содержитъ $y^{(n)}$, слѣдовательно $\frac{\partial F_{y^{(n)}}}{\partial y^{(n)}} = \frac{\partial B}{\partial y^{(n)}} = 0$; третье выраженіе не уничтожается ни тождественно, ни въ силу данныхъ уравненій, но оно содержитъ частную производную $V_{y^{(n-2)}}$ искомой функціи, поэтому полагая его равнымъ нулю, мы прибавимъ къ даннымъ еще 4-ое уравненіе

$$(H, H_1) = H_2 = 0.$$

Замѣчая, что въ этомъ уравненіи

$$\frac{\partial F_{y^{(n)}}}{\partial x} + \frac{\partial F_{y^{(n)}}}{\partial y} \cdot y' + \cdots + \frac{\partial F_{y^{(n)}}}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)} = \frac{d}{dx} \cdot F_{y^{(n)}},$$

мы можемъ написать его слѣдующимъ образомъ

$$H_2 = V_{y^{(n-2)}} + \frac{d}{dx} \cdot F_{y^{(n)}} - F_{y^{(n-1)}} = 0,$$

или

$$H_2 = V_{y^{(n-2)}} - \omega_{n-2} = 0,$$

гдѣ для краткости положено

$$\omega_{n-2} = F_{y^{(n-1)}} - \frac{d}{dx} F_{y^{(n)}}.$$

Далѣе находимъ

$$(G, H_2) = \frac{\partial \omega_{n-2}}{\partial y^{(n)}} = \frac{\partial \left(F_{y^{(n-1)}} - \frac{d}{dx} F_{y^{(n)}}\right)}{\partial y^{(n)}},$$

$$(H_1, H_2) = \frac{\partial \omega_{n-2}}{\partial y^{(n-1)}} - \frac{\partial F_{y^{(n)}}}{\partial y^{(n-2)}}$$

и

$$(H, H_2) = V_{y^{(n-2)}} + \left[\frac{\partial \omega_{n-2}}{\partial x} + \frac{\partial \omega_{n-2}}{\partial y} y' + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + \frac{\partial \omega_{n-2}}{\partial y^{(n)}} y^{(n+1)}\right] - F_{y^{(n-2)}}.$$

Первое изъ этихъ выраженій тождественно равно нулю, что можно доказать принявъ въ основаніе равенство (a), или другимъ пріемомъ, который лучше, потому что съ равною легкостію прилагается и впослѣдствіи въ подобныхъ случаяхъ, когда примѣненіе перваго становится затруднительно. Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи теоремы 1 § 17 имѣемъ

$$(G, H_2) = [G, (H, H_1)] = -[H, (H_1, G)] - [H_1, (G, H)];$$

но $(G, H_1) = 0$, $(H, G) = H_1$; слѣд. $(G, H_2) = (H_1, H_1) = 0$.

Digitized by Google

Далѣе, полученное выше значеніе (H_1, H_2) выражается функціею однихъ перемѣнныхъ $x, y, \ldots y^{(n)}$, слѣдовательно она должна приводиться къ нулю тождественно, иначе рѣшеніе задачи невозможно. И такъ положимъ данная функція F выполняетъ условіе

$$(H_1, H_2) = 0,$$

необходимость котораго еще яснѣе обнаружится, если замѣтимъ, что оно приводитъ къ равенству

$$\frac{\partial V_{y^{(n-2)}}}{\partial y^{(n-1)}} = \frac{\partial V_{y^{(n-1)}}}{\partial y^{(n-2)}}.$$

Наконецъ значеніе (H, H_2) можно положить равнымъ нулю, потому что въ него входитъ частная производная $V_{y^{(n-3)}}$. Такимъ образомъ къ четыремъ предъидущимъ уравненіямъ прибавляемъ 5-е

$$H_3 = (H, H_2) = V_{y^{(n-3)}} + \frac{d}{dx} \cdot \omega_{n-2} - F_{y^{(n-2)}} =$$

$$= V_{y^{(n-3)}} - \frac{d^2}{dx^2} \cdot F_{y^{(n)}} + \frac{d}{dx} F_{y^{(n-1)}} - F_{y^{(n-2)}} = 0,$$

или

$$H_3 = V_{y^{(n-3)}} - \omega_{n-3} = 0,$$

гдѣ полагаемъ

$$\omega_{n-3} = F_{y^{(n-2)}} - \frac{d}{dx} F_{y^{(n-1)}} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y^{(n)}}$$

Затѣмъ не трудно получить выраженія:

$$(G, H_3) = \frac{\partial \omega_{n-3}}{\partial y^{(n)}} = \frac{\partial \left(F_{y^{(n-2)}} - \frac{d}{dx} F_{y^{(n-1)}} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y^{(n)}}\right)}{\partial y^{(n)}},$$

$$(H_1, H_3) = \frac{\partial \omega_{n-3}}{\partial y^{(n-1)}} - \frac{\partial F_{y^{(n)}}}{\partial y^{(n-3)}}, \quad (H_2 H_3) = \frac{\partial \omega_{n-3}}{\partial y^{(n-2)}} - \frac{\partial \omega_{n-2}}{\partial y^{(n-3)}},$$

и $$(H, H_3) = V_{y^{(n-4)}} + \frac{d}{dx} \cdot \omega_{n-3} - F_{y^{(n-3)}}.$$

Первое изъ этихъ выраженій равно нулю въ силу сдѣланныхъ выше условій. Дѣйствительно помощію теоремы 1 § 17 находимъ

$$(G, H_3) = [G, (H, H_2)] = -[H, (H_2, G)] - [H_2, (G, H)],$$

но $(G, H_2) = 0$ и $(G, H) = -H_1$; слѣд. $(G, H_3) = (H_2, H_1) = 0$.

Далѣе значенія (H_1, H_3) и (H_2, H_3), выражающіяся въ однихъ перемѣнныхъ $x, y, \ldots y^{(n)}$, должны приводиться тождественно къ нулю,

Digitized by Google

если существуетъ искомая функція V; и дѣйствительно условія $(H_1, H_3) = 0$ и $(H_2, H_3) = 0$ выражаютъ не что иное, какъ требованіе, чтобы имѣли мѣсто равенства

$$\frac{\partial V_{y(n-3)}}{\partial y^{(n-1)}} = \frac{\partial V_{y(n-1)}}{\partial y^{(n-3)}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial V_{y(n-3)}}{\partial y^{(n-2)}} = \frac{\partial V_{y(n-2)}}{\partial V_{y(n-3)}}.$$

Наконецъ полагая равнымъ нулю выраженіе (H, H_3), получаемъ новое уравненіе, которое, по замѣненіи ω_{n-3} его значеніемъ приметъ слѣдующій видъ

$$H_4 = (H, H_3) = V_{y(n-4)} - F_{y(n-3)} +$$

$$+ \frac{d}{dx} F_{y(n-2)} - \frac{d^2}{dx^2} F_{y(n-1)} + \frac{d^3}{dx^3} F_{y(n)} = 0.$$

Теперь уже видѣнъ весь дальнѣйшій ходъ рѣшенія разсматриваемой задачи. Если функція F выполнитъ всѣ необходимыя условія, которыя окончательно приводятся къ тому, чтобы постепенно опредѣляемыя значенія частныхъ производныхъ удовлетворяли условія

$$\frac{\partial V_{y(n-i)}}{\partial y^{(n-k)}} = \frac{\partial V_{y(n-k)}}{\partial V_{y(n-i)}};$$

то мы получимъ сверхъ предъидущихъ еще слѣдующія уравненія:

$$H_5 = 0, \ldots H_i = 0, \ldots H_n = 0,$$

которыхъ общій видъ будетъ

$$H_i = V_{y(n-i)} - F_{y(n-i+1)} + \frac{d}{dx} F_{y(n-i+2)} - \cdots$$

$$\cdots - \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} F_{y(n)} = 0$$

и слѣдовательно для $i = n$,

$$H_n = V_y - F_{y'} + \frac{d}{dx} F_{y''} - \cdots \pm \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} F_{y(n)} = 0.$$

Чтобы испытать возможность разсматривать послѣднее уравненіе совокупно съ предъидущими, положимъ

$$\omega_{\cdot} = F_{y'} - \frac{d}{dx} F_{y''} + \cdots \pm \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} F_{y(n)}$$

Digitized by Google

и составимъ выраженія:

$$(G, H_n) = \frac{\partial \omega_0}{\partial y^{(n)}}, \quad (H_1, H_n) = \frac{\partial \omega_0}{\partial y^{(n-1)}} - \frac{\partial F_{y^{(n)}}}{\partial y},$$

$$(H_2, H_n) = \frac{\partial \omega_0}{\partial y^{(n-2)}} - \frac{\partial \omega_{n-2}}{\partial y}, \ldots$$

$$(H, H_n) = -F_y + \frac{d}{dx} \cdot \omega_0 =$$

$$= -F_y + \frac{d}{dx} F_{y'} - \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \cdots \mp \frac{d^n}{dx^n} \cdot F_{y^{(n)}}.$$

Всѣ эти выраженія представляются какъ функціи однѣхъ перемѣнныхъ $x, y, y', \ldots y^{(n)}$ и слѣдовательно должны тождественно приводиться къ нулю. Но выраженіе (G, H_n) приводится къ нулю уже вслѣдствіе условій, необходимость которыхъ обнаружена ранѣе. Дѣйствительно по теоремѣ 1 § 17, имѣемъ

$$(G, H_n) = [G, (H, H_{n-1})] = -[H, (H_{n-1}, G)] - [H_{n-1}, (G, H)] =$$

$$= [H_1, (G, H_{n-1})] + (H_1, H_{n-1});$$

слѣдовательно (G, H_n) будетъ равно нулю вслѣдствіе того, что

$$(G, H_{n-1}) = 0 \text{ и } (H_1, H_{n-1}) = 0.$$

Далѣе условія

$$(H_1, H_n) = 0, \ (H_2, H_n) = 0, \ldots \ (H_{n-1}, H_n) = 0$$

необходимы для того, чтобы имѣли мѣсто равенства

$$\frac{\partial V_y}{\partial y^{(n-1)}} = \frac{\partial V_{y^{(n-1)}}}{\partial y}, \ \frac{\partial V_y}{\partial y^{(n-2)}} = \frac{\partial V_{y^{(n-2)}}}{\partial y}, \ldots$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial y'} = \frac{\partial V_{y'}}{\partial y}.$$

Предъидущій рядъ всѣхъ необходимыхъ условій, которыя должна выполнять данная дифференціальная функція F, заключается слѣдующимъ

$$E = (H, H_n) = F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} - \cdots$$

$$\cdots \pm \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0,$$

найденнымъ какъ извѣстно помощію варіаціоннаго вычисленія, Эйле-

Digitized by Google

ромъ, показавшимъ не только необходимость, но и достаточность этого условія (*).

На основаніи предъидущаго имѣемъ

$$H_n = (H, H_{n-1}),\ H_{n-1} = (H, H_{n-2}), \ldots H_1 = (H, G).$$

Поэтому, дѣлая весьма простыя послѣдовательныя подстановки, можемъ написать Эйлерово условіе слѣдующимъ образомъ

$$[H, (H, (\ldots (H, G)))] = 0,$$

гдѣ H и G имѣютъ данныя выше значенія.

Предполагая, что функція F выполняетъ всѣ необходимыя условія, можно весьма просто опредѣлить интегралъ ея V. Въ самомъ дѣлѣ уравненія

$$G = 0,\ H_1 = 0, \ldots .\ H_n = 0$$

доставляютъ значенія всѣхъ частныхъ производныхъ искомой функціи, кромѣ одной, именно:

$$V_{y(n)} = 0,\ V_{y(n-1)} = F_{y(n)},\ V_{y(n-2)} = \omega_{n-2}, \ldots\ V_y = \omega_0.$$

Вставляя ихъ въ уравненіе $H = 0$, находимъ

$$V_x = F - \omega_0 y' - \ldots - \omega_{n-2} y^{(n-1)} - F_{y(n)} \cdot y^{(n)}.$$

Слѣдовательно функція V опредѣлится посредствомъ интегрированія точнаго дифференціала

$$dV = [F - \omega_0 y' - \ldots - \omega_{n-2} y^{(n-2)} - F_{y(n)} \cdot y^{(n)}]\, dx + \omega_0\, dy + \ldots + \omega_{n-1}\, dy^{(n-2)} + F_{y(n)}\, dy^{(n)}.$$

Въ примѣненіяхъ къ частнымъ случаямъ всего удобнѣе располагать вычисленіе такъ, какъ показываетъ слѣдующая таблица

(A)

$F_{y(n)}$,	$F_{y(n-1)}$, ...	$F_{y'}$,	F_y	
	$-\frac{d}{dx} F_{y(n)}$, ...	$-\frac{d}{dx} F_{y''}$,	$-\frac{d}{dx} F_{y'}$,	
	. . . . .			
	$\pm \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} F_{y(n)}$,	$\mp \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} F_{y(n-1)}$		
		$\pm \frac{d^n}{dx^n} F_{y(n)}$		
F_{yn},	ω_{n-2}, ...	ω_0,	E	

гдѣ можно вычислять одинъ за другимъ горизонтальные ряды или

(*) Г. Бертранъ указалъ ошибку Лагранжа, Пуассона и др. утверждавшихъ, что Эйлеръ не доказалъ *достаточность* своего условія (Jour. de l'Ec. Polyt. XXVIII Cahier, p. 250—251)

Digitized by Google

вертикальные отъ лѣвой руки къ правой. Сумма членовъ крайняго столбца справа даетъ значеніе выраженія E; если оно равно нулю, то суммы членовъ слѣдующихъ за нимъ столбцовъ представятъ соотвѣтственно значенія частныхъ производныхъ V_y, $V_{y'}$, .. $V_{y^{(n-2)}}$, $V_{y^{(n-1)}}$.

Примѣръ. $F = \varphi(x) + y^2 + (2xy - 1)y' + xy'' + x^2 y'''$.

Составляя табличку по образцу (A), находимъ

x^2,	x,	$2xy - 1$,	$2y + 2xy'$
	$-2x$,	-1,	$-2y - 2xy'$
		$+2$,	0
			0

$V_{y''} = x^2$, $V_{y'} = -x$, $V_y = 2xy$, $E = 0$.

Слѣдовательно

$$V_x = F - x^2 y''' + xy'' - 2xyy' = 2xy'' - y' + y^2 + \varphi(x).$$

Поэтому

$$dV = [2xy'' - y' + y^2 + \varphi(x)]\,dx + x^2\,dy' - x\,dy' + 2xy\,dy,$$

откуда по интегрированіи находимъ

$$V = x^2 y'' - xy' + y^2 x + \int \varphi(x)\,dx + \text{const.}$$

Хотя достаточно составить одно выраженіе E, входящее въ Эйлерово условіе, чтобы заключить о непосредственной интегрируемости данной дифференціальной функціи F; однако оно сложнѣе всѣхъ другихъ необходимыхъ условій, поэтому вообще удобнѣе пользоваться этими послѣдними. Поясникъ сказанное примѣромъ. Положимъ

$$F = xy'''y^{IV} + (x + yy'')y''' + \sqrt{xy' + y}.$$

Здѣсь первое необходимое условіе, по которому F должно быть линейною функціею высшей производной,—выполнено; посмотримъ удовлетворится-ли необходимое условіе непосредственно слѣдующее; для этого составляя два первые столбца таблицы (A), находимъ

xy''',	$xy^{IV} + yy'' + x$
	$-y''' - xy^{IV}$

$$F_{y^{IV}} = xy''', \quad \omega_2 = -y''' + yy'' + x$$

Необходимое условіе $\dfrac{d\omega_2}{dy'''} - \dfrac{dF_{y^{IV}}}{dy''} = 0$ здѣсь очевидно не удовлетворено. Такимъ образомъ очень просто убѣждаемся, что данная функція F не можетъ быть непосредственно интегрируема, между

Digitized by Google

тѣмъ какъ составленіе выраженія E потребовало бы довольно сложнаго счета.

Замѣтимъ въ заключеніе, что предъидущій пріемъ для вывода условій непосредственной интегрируемости очень просто распространяется на случай, когда данная дифференціальная функція содержитъ нѣсколько неопредѣленныхъ функцій y, z, u,.. независимаго перемѣннаго x и ихъ производныя различныхъ порядковъ; но это обобщеніе такъ просто, что я считаю излишнимъ на немъ останавливаться.

VIII.

Объ интегрированіи канонической системы обыкновенныхъ совмѣстныхъ уравненій 1-го порядка.

§ 26. Общій видъ системы обыкновенныхъ совмѣстныхъ уравненій 1-го порядка между $2n$ неизвѣстными функціями $x_1,..x_n$ $y_1,..y_n$ независимаго перемѣннаго t можно представить слѣдующимъ образомъ

$$\frac{dx_1}{dt}=A_1,\quad \frac{dx_2}{dt}=A_2,\ldots\ \frac{dx_n}{dt}=A_n,$$

$$\frac{dy_1}{dt}=B_1,\quad \frac{dy_2}{dt}=B_2,\ldots\ \frac{dy_n}{dt}=B_n,$$

означая черезъ A_1, B_1,.. A_n, B_n данныя функціи независимаго перемѣннаго t и зависимыхъ x_1, y_1,.. x_n, y_n.

Частный случай предъидущей общей формы называется *каноническою системою*, если коефиціэнты A_1, B_1,.. A_n, B_n образованы помощію одной и той-же данной функціи,

$$H=F(t,x_1,..x_n,\ y_1,..y_n),$$

посредствомъ частныхъ дифференцированій ея въ отношеніи зависимыхъ перемѣнныхъ, именно такъ, что вообще

$$A_i=\frac{\partial H}{\partial y_i}\ \text{и}\ B_i=-\frac{\partial H}{\partial x_i},$$

гдѣ i означаетъ каждый изъ указателей $1, 2, \ldots n$.

Поэтому каноническая система совмѣстныхъ уравненій представится слѣдующимъ образомъ:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx_1}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y_i},\ \frac{dx_2}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y_2},\ldots\ \frac{dx_n}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y_n},\\ &\frac{dy_1}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_1},\ \frac{dy_2}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_2},\ldots\ \frac{dy_n}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_n}.\end{aligned}\right\}(1)$$

Digitized by Google

Въ частномъ случаѣ, когда данная функція H будетъ вида

$$H = f(x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_n),$$

т. е. не содержитъ явно независимое перемѣнное t, тогда уравненія (1) называются гамильтоновою формою.

Послѣднее названіе происходитъ отъ имени извѣстнаго англійскаго математика (W. R. Hamilton), который привелъ къ описанному сейчасъ виду общія уравненія движенія системы матеріальныхъ точекъ, подверженныхъ дѣйствію только силъ взаимнаго притяженія или отталкиванія (*). Другими словами гамильтонова система представляетъ въ самомъ простомъ видѣ уравненія всякой задачи динамики, въ которой имѣетъ приложеніе *начало живыхъ силъ;* поэтому два вопроса этого класса отличаются одинъ отъ другаго только числомъ перемѣнныхъ и формою функціи $H = f$. Обративъ вниманіе на предъидущее замѣчаніе не трудно понять всю важность задачи: найти общіе пріемы интегрированія системы совокупныхъ уравненій вида (1). Рядъ открытій на пути, направленномъ къ этой цѣли, началъ Гамильтонъ, показавшій, въ упомянутомъ выше изслѣдованіи, что $2n$ различныхъ интеграловъ уравненій (1), въ которыхъ $H = f$, выражаются посредствомъ частныхъ производныхъ одной и той-же функціи, названной имъ *главною;* опредѣленіе-же главной функціи онъ привелъ къ интегрированію двухъ уравненій съ частными производными 1-го порядка. Открытіе Гамильтона, въ то время когда оно было сдѣлано, не подвигало еще само собою рѣшенія вопроса впередъ, потому что по извѣстнымъ тогда способамъ интегрированіе уравненія съ частными производными 1-го порядка обратно приводилось къ полному интегрированію системы совокупныхъ уравненій вида (1). Оно однако обнаружило еще болѣе тѣсную связь между двумя вопросами и побудило заняться ими Якоби, который показалъ во 1-хъ, что для опредѣленія главной функціи достаточно найти полный интегралъ одного уравненія съ частными производными 1-го порядка и что теорема Гамильтона распространяется на уравненія вида (1), въ которыхъ $H = F$, т. е. содержитъ явно независимое перемѣнное t; во 2-хъ, не зная еще въ то время о пріемѣ Коши (**) и принимая способъ Пфаффа за единственно извѣстный общій методъ интегрированія уравненія съ частными производными 1-го порядка для числа независимыхъ перемѣнныхъ большаго двухъ, Якоби сдѣлалъ въ послѣднемъ важное упрощеніе, которое въ сущности одинаково съ пріемомъ Коши, указаннымъ еще въ 1819 г. (***). Но какъ

(*) См. Philosophical Transactions 1835. P. I. «Second Essay on a General Method in Dynamics. By W. R. Hamilton (p. 96—98).

(**) См. Exercices d'Analyse, par Cauchy. T. 2. (p. 239).

(***) Journal v. Crelle, 1837, XVII Band, «Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen» v. Jacobi.

Digitized by Google

уже замѣчено выше, способъ Коши, или способъ Пфаффа, исправленный Якоби, требовали для интегрированія уравненія съ частными производными 1-го порядка, къ которому приводилось интегрированіе уравненій (1), обратно полнаго интегрированія этихъ послѣднихъ, т. е., какъ выразился г. Буръ «on etait seulement parvenu à ramener les difficultés les unes aux autres, sans sortir du cercle vicieux». Поэтому Якоби, уже начиная съ эпохи упомянутаго выше его изслѣдованія, былъ занятъ изысканіемъ способа интегрированія уравненія съ частными производными 1-го порядка при какомъ угодно числѣ независимыхъ перемѣнныхъ, который былъ-бы продолженіемъ пути указаннаго Лагранжемъ при рѣшеніи этой задачи въ случаѣ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ, — пути, на которомъ Шарпи встрѣтилъ неодолимыя затрудненія и оставленномъ по той-же причинѣ Пфаффомъ. Для обобщенія способа Лагранжа, Якоби долженъ былъ искать пособія въ свойствахъ интеграловъ уравненія динамики вида (1); главнѣйшее изъ нихъ онъ открылъ въ одной теоремѣ Пуассона, доказанной послѣднимъ въ первомъ мемуарѣ «Sur la variation de constantes arbitraires» (Jour. de l'Ec. Polyt. XV cahier), чѣмъ и объясняется энтузіазмъ, съ которымъ Якоби отозвался объ этой теоремѣ въ письмѣ къ парижской академіи наукъ вскорѣ послѣ смерти Пуассона (Comptes rendus 1840 p. 529).— Открытія Гамильтона и Якоби послужили основаніемъ изслѣдованій многихъ другихъ математиковъ и трудами г.г. Ліувилля, Бертрана, Донкина и Бура значительно развита теорія интегрированія уравненій канонической формы и расширенъ кругъ ея приложеній. Полный трактатъ Якоби объ этомъ предметѣ, изданіе котораго было имъ обѣщано еще въ 1840 г., появился уже послѣ смерти автора только въ 1861 г. (*). Въ немъ изложенъ новый способъ интегрированія уравненій съ частными производными 1-го порядка и, какъ приложеніе его, теорія интегрированія уравненій вида (1) съ важнѣйшими ея примѣненіями. Это сочиненіе заключаетъ систематическое изложеніе какъ собственныхъ открытій Якоби въ этой части анализа, такъ и результаты, полученные другими математиками, труды которыхъ наиболѣе способствовали ея совершенствованію. Совокупность всѣхъ упомянутыхъ выше изслѣдованій составляетъ самое важное изъ прибавленій къ общей теоріи дифференціальныхъ уравненій, сдѣланныхъ въ новѣйшее время.

Изложивъ въ началѣ моего разсужденія способъ Якоби интегрированія уравненій съ частными производными 1-го порядка, я представлю въ заключеніе важнѣйшія теоремы на которыхъ основана теорія интегрированія уравненій канонической формы.

(*) Journ. v. Crelle (1861—62 г.) LX B. 1-tes u. 2-tes Hefte. «Nova methodus aequat. different. partiales primi ordinis etc.» C. G. I. Jacobi.

Digitized by Google

Возьмемъ каноническую систему уравненій:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial y_1}, \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial y_2}, \ldots \dfrac{dx_n}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial y_n}, \\ \dfrac{dy_1}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1}, \dfrac{dy_2}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2}, \ldots \dfrac{dy_n}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_n}, \end{cases}$$

гдѣ полагая

$$H = F(t, x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_n),$$

означаемъ черезъ F данную функцію $x_1, \ldots x_n$, $y_1, \ldots y_n$ и t.

Интеграломъ дифференціальныхъ уравненій (1) называется уравненіе

$$U = \alpha,$$

гдѣ α произвольное постоянное и U функція t, $x_1, \ldots x_n$, $y, \ldots y_n$, не заключающая α и притомъ такая, которой полная производная въ отношеніи t приведется тождественно къ нулю, по исключеніи изъ нея производныхъ въ отношеніи того-же перемѣннаго функцій $x_1, \ldots x_n$, $y_1, \ldots y_n$, данныхъ уравненіями (1).

Полная производная функціи U въ отношеніи t выразится слѣдующимъ образомъ

$$\frac{d}{dt}U = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dt} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{\partial U}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y_n}\cdot\frac{dy_n}{dt};$$

вставляя сюда значенія $\frac{dx_1}{dt}, \ldots \frac{dy_n}{dt}$ изъ уравненій (1) должны получить тождество

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{\partial H}{\partial y_1} - \frac{\partial U}{\partial y_1}\frac{\partial H}{\partial x_1} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{\partial U}{\partial x_n}\frac{\partial H}{\partial y_n} - \frac{\partial U}{\partial y_n}\frac{\partial H}{\partial x_n} = 0,$$

которое, помощію означенія Пуассона, напишется еще слѣдующимъ образомъ

$$(2)\qquad \frac{\partial U}{\partial t} + (U, H) = 0.$$

Поэтому уравненіе (2) представляетъ критеріумъ, по которому можно судить будетъ или нѣтъ данная функція U, уравненная произвольному постоянному, представлять интеграль уравненій (1). Вставивъ, напр. H вмѣсто U въ уравненіе (2), находимъ что 2-й

Digitized by Google

членъ 1-й части приметъ видъ (H, H) и слѣдовательно приводится къ нулю; затѣмъ остается членъ $\frac{\partial H}{\partial t}$, который также равенъ нулю, если H не содержитъ явно t. Это обстоятельство дѣйствительно встрѣчается въ уравненіяхъ динамики гамильтоновой формы, когда прилагается начало живыхъ силъ; тогда

$$H = \text{const.}$$

будетъ однимъ изъ интеграловъ уравненій (1) и называется интеграломъ живыхъ силъ; но оно не имѣетъ болѣе мѣста въ общемъ случаѣ, который мы теперь разсматриваемъ, предполагая H содержащимъ явно t.

Полное рѣшеніе уравненій (1) составляютъ $2n$ различныхъ интеграловъ, заключающихъ $2n$ произвольныхъ постоянныхъ; разрѣшая интегральныя уравненія въ отношеніи произвольныхъ постоянныхъ, можно привести ихъ къ слѣдующему виду

$$\varphi_1 = a_1,\ \varphi_2 = a_2, \ldots\ \varphi_n = a_n,$$
$$\psi_1 = b_1,\ \psi_2 = b_2, \ldots\ \psi_n = b_n,$$

гдѣ $a_1, b_1 \ldots a_n, b_n$ означаютъ произвольныя постоянныя и $\varphi_1, \psi_1, \ldots \varphi_n, \psi_n$ функціи $t, x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_n$, незаключающія этихъ постоянныхъ и удовлетворяющія условіе (2).

Докажемъ теперь предложеніе, служащее основаніемъ теоріи интегрированія уравненій (1):

Теорема 1. Если извѣстны n интеграловъ уравненій (1), положимъ

$$\varphi_1 = a_1,\ \varphi_2 = a_2, \ldots\ \varphi_n = a_n, \qquad (3)$$

такихъ, что условіе

$$(\varphi_i, \varphi_k) = \sum_{m=1}^{m=n} \left\{ \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_m} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_m} \right\} = 0 \qquad (4)$$

будетъ удовлетворено для всѣхъ значеній $1, 2, \ldots n$ указателей i и k; то остальныя n интеграловъ, составляющихъ съ данными (3) полную систему рѣшеній уравненій (1), получатся:

1) интегрируя точный дифференціалъ

$$y_1\, dx_1 + \cdots + y_n\, dx_n - F(t, x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_n)\, dt,$$

въ которомъ $y_1, \ldots y_n$ должно замѣнить ихъ значеніями, выведенными изъ уравненій (3);

и 2) уравнивая новымъ произвольнымъ постояннымъ $b_1, \ldots b_n$ частныя производныя интеграла предъидущаго дифференціала, взятыя въ отношеніи $a_1, \ldots a_n$.

Данныя условія (4) показываютъ, что значенія $y_1, \ldots y_n$, выведенныя изъ уравненій (3) на основаніи теоремы 2 § 17 удовлетво-

Digitized by Google

рятъ условія

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \tag{5}$$

для всѣхъ значеній $1, 2, \ldots n$ указателей i и k; слѣдовательно выраженіе

$$y_1 dx_1 + \cdots + y_n dx_n$$

будетъ точный дифференціалъ. Далѣе означивъ результатъ подстановки значеній $y_1, \ldots y_n$ въ функцію $F(t, x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_n) = H$ черезъ (H), докажемъ что выраженіе

$$y_1 dx_1 + \cdots + y_n dx_n - (H) dt \tag{6}$$

будетъ также точный дифференціалъ. Для этого достаточно убѣдиться, что условія

$$\frac{\partial (H)}{\partial x_i} = -\frac{\partial y_i}{\partial t}$$

будутъ удовлетворены для всѣхъ значеній $i = 1, 2, \ldots n$.

Но мы имѣемъ

$$\frac{\partial (H)}{\partial x_i} = \frac{\partial H}{\partial x_i} + \frac{\partial H}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial H}{\partial y_n} \cdot \frac{\partial y_n}{\partial x_i},$$

или, на основаніи равенствъ (5) и данныхъ уравненій (1),

$$\frac{\partial (H)}{\partial x_i} = -\frac{dy_i}{dt} + \frac{dx_1}{dt} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial x_1} + \cdots + \frac{dx_n}{dt} \frac{\partial y_i}{\partial x_n},$$

Сверхъ того мы предполагаемъ, что помощію уравненій (3) y_i выражено функціею $t, x_1, \ldots x_n$; слѣдовательно

$$\frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial y_i}{\partial t} + \frac{\partial y_i}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial y_i}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}.$$

Вставивъ это значеніе $\frac{dy_i}{dt}$ въ предъидущее равенство по приведеніи очевидно получимъ

$$\frac{\partial (H)}{\partial x_i} = -\frac{\partial y_i}{\partial t}$$

и подобное равенство найдется для всѣхъ значеній $i = 1, 2, \ldots n$, что пока и нужно было доказать.

Интегрируя извѣстнымъ образомъ точный дифференціалъ (6), опредѣлимъ его интегралъ V — функцію перемѣнныхъ $t, x_1, \ldots x_n$, заключающую постоянныя $a_1, \ldots a_n$, къ которой можетъ быть при-

Digitized by Google

дано еще одно произвольное постоянное. Слѣдовательно мы будемъ имѣть

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = y_1, \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = y_2, \quad \cdots \quad \frac{\partial V}{\partial x_n} = y_n \qquad (7)$$

и

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -(H) \qquad (a)$$

первыя n изъ этихъ уравненій представляютъ очевидно уравненія (3), разрѣшенныя въ отношеніи $y_1, \ldots y_n$; послѣднее-же есть тождественное равенство.

Теперь обратимся къ послѣдней части теоремы, т. е. докажемъ, что уравненія

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = b_2, \quad \cdots \quad \frac{\partial V}{\partial a_n} = b_n \qquad (8)$$

будутъ интегралами уравненій (1). Для этого, на основаніи даннаго выше опредѣленія, должно только убѣдиться, что полныя производныя въ отношеніи t первыхъ частей уравненій (8) приводятся къ нулю, по исключеніи производныхъ $\frac{dx_1}{dt}, \ldots \frac{dx_n}{dt}$ помощію уравненій (1). Дѣйствительно

$$\frac{d\,\frac{\partial V}{\partial a_i}}{dt} = \frac{\partial\,\frac{\partial V}{\partial a_i}}{\partial t} + \frac{\partial\,\frac{\partial V}{\partial a_i}}{\partial x_1}\,\frac{dx_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial\,\frac{\partial V}{\partial a_i}}{\partial x_n}\,\frac{dx_n}{dt},$$

или, измѣняя порядокъ частныхъ дифференцированій функціи V,

$$\frac{d\,\frac{\partial V}{\partial a_i}}{dt} = \frac{\partial\,\frac{\partial V}{\partial t}}{\partial a_i} + \frac{\partial\,\frac{\partial V}{\partial x_1}}{\partial a_i}\cdot\frac{dx_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial\,\frac{\partial V}{\partial x_n}}{\partial a_i}\cdot$$

Далѣе, пользуясь уравненіями (7) и (a) и исключая помощію (1) производныя $\frac{dx_1}{dt}, \ldots \frac{dx_n}{dt}$, будемъ имѣть

$$\frac{d\,\frac{\partial V}{\partial a_i}}{dt} = -\frac{\partial(H)}{\partial a_i} + \frac{\partial y_1}{\partial a_i}\,\frac{\partial H}{\partial y_1} + \cdots + \frac{\partial y_n}{\partial a_i}\,\frac{\partial H}{\partial y_n}\cdot$$

Но на основаніи объясненнаго выше происхожденія выраженія (H) изъ H имѣемъ

$$\frac{\partial(H)}{\partial a_i} = \frac{\partial H}{\partial y_1}\,\frac{\partial y_1}{\partial a_i} + \cdots + \frac{\partial H}{\partial y_n}\cdot\frac{\partial y_n}{\partial a_i};$$

Digitized by Google

слѣдовательно вторая, а потому и первая части предъидущаго равенства тождественно приводятся къ нулю, т. е.

$$\frac{d\,\frac{\partial V}{\partial a_i}}{dt} = 0$$

тождественно для всѣхъ значеній $i = 1, 2, \ldots n$. Такимъ образомъ теорема доказана.

Предъидущее доказательство приводитъ къ слѣдующимъ важнымъ заключеніямъ: 1) задача интегрированія уравненій (1) будетъ рѣшена, какъ скоро будетъ извѣстна функція V, потому что тогда уравненія (7) и (8) доставятъ полную систему $2n$ интеграловъ данныхъ уравненій; 2) функція V можетъ быть опредѣлена непосредственно на слѣдующемъ основаніи. Уравненіе

$$(a) \qquad \frac{\partial V}{\partial t} + (H) = 0,$$

какъ уже замѣчено, должно быть тождественное. Но 2-й его членъ (H) представляетъ результатъ подстановки въ функцію $F(t, x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_n)$ значеній $y_1, \ldots y_n$, выведенныхъ изъ уравненій (3), а эти послѣднія суть тѣ-же самыя, которыя представляютъ уравненія (7); слѣдовательно функція V должна обращать въ тождество, т. е. удовлетворять уравненіе

$$(9) \qquad \frac{\partial V}{\partial t} + F\left(t, x_1, \ldots x_n, \frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial V}{\partial x_n}\right) = 0.$$

Такъ какъ функція V кромѣ перемѣнныхъ $t, x_1, \ldots x_n$ должна содержать n произвольныхъ постоянныхъ $a_1, \ldots a_n$ (не считая просто приданнаго); слѣдовательно она должна быть опредѣлена, какъ одинъ изъ *полныхъ* интеграловъ уравненія съ частными производными 1-го порядка (9).

Предъидущія заключенія, выведенныя какъ слѣдствія теоремы 1, такъ важны для теоріи интегрированія уравненій (1), что не будетъ излишнимъ дать имъ прямое доказательство или лучше сказать повѣрку.

Теорема 2. Если V представляетъ одинъ изъ полныхъ интеграловъ уравненія (9) [т. е. интегралъ заключающій, кромѣ постояннаго просто приданнаго, n произвольныхъ постоянныхъ $a_1, \ldots a_n$ такимъ образомъ, что эти послѣднія не могутъ быть исключены *всѣ* иначе, какъ пользуясь *всѣми* $n+1$ уравненіями, выражающими значенія частныхъ произвольныхъ функціи V въ отношеніи $x_1, \ldots x_n$ и t]; то этотъ полный интегралъ обладаетъ свойствами гамильтоновой главной функціи, т. е. даетъ полную систему $2n$ интеграловъ уравненій (1) въ видѣ уравненій (7) и (8); потому что пра-

Digitized by Google

мое слѣдствіе такихъ интегральныхъ уравненій будутъ дифференціальныя уравненія (1).

Взявъ одно изъ уравненій (8), напр.

$$\frac{\partial V}{\partial a_i} = b_i$$

и дифференцируя его въ отношеніи t, находимъ

$$(b) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial x_n}\frac{dx_n}{dt} = 0.$$

За тѣмъ дифференцируя уравненіе (9) въ отношеніи a_i и принимая при этомъ во вниманіе уравненія (7), получимъ

$$(c) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial a_i} + \frac{\partial F}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial a_i} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial y_n}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial x_n \partial a_i} = 0.$$

Каждое изъ уравненій (b) и (c) служитъ представителемъ системы n уравненій, получаемыхъ для всѣхъ значеній $i = 1, 2, \ldots n$; сравнивая ихъ не трудно видѣть, что значенія выведенныя изъ 1-ой для $\frac{dx_1}{dt}, \ldots \frac{dx_n}{dt}$ будутъ тождественно равны соотвѣтствующимъ значеніямъ $\frac{\partial F}{\partial y_1}, \ldots \frac{\partial F}{\partial y_n}$, выведеннымъ изъ 2-ой. Слѣдовательно n изъ уравненій (1) вида:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}$$

составляютъ необходимое слѣдствіе интегральныхъ уравненій (7) и (8), т. е. удовлетворяются этими послѣдними.

Можно дать предъидущему заключенію болѣе строгости и вмѣстѣ съ тѣмъ яснѣе показать необходимость условія, по которому V должна представлять полный интегралъ уравненія (9).

Вычитая уравненіе (c) изъ (b) получимъ n уравненій вида

$$(d) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial x_1}\left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{\partial F}{\partial y_1}\right) + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial x_n}\left(\frac{dx_n}{dt} - \frac{\partial F}{\partial y_n}\right) = 0$$

для всѣхъ значеній $i = 1, 2, \ldots n$. Разсматривая въ этихъ уравненіяхъ величины $\frac{dx_1}{dt} - \frac{\partial F}{\partial y_1}, \ldots \frac{dx_n}{dt} - \frac{\partial F}{\partial y_n}$ какъ неизвѣстныя, мы имѣемъ право сдѣлать одно изъ двухъ заключеній:

1) или каждая изъ неизвѣстныхъ равна нулю,

2) или опредѣлитель, составленный изъ коефиціэнтовъ уравненій (d) равенъ нулю.

Digitized by Google

Но этотъ опредѣлитель можно представить слѣдующимъ образомъ

$$\Delta = \begin{vmatrix} \partial \dfrac{\partial V}{\partial x_1} & \cdots & \partial \dfrac{\partial V}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial a_1}{\partial a_1} & & \dfrac{\partial a_1}{\partial a_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \partial \dfrac{\partial V}{\partial x_1} & \cdots & \partial \dfrac{\partial V}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial a_n}{\partial a_n} & & \dfrac{\partial a_n}{\partial a_n} \end{vmatrix}$$

и предположеніе $\Delta = 0$ влекло-бы за собою слѣдствіе, что можно исключить всѣ постоянныя $a_1, \ldots a_n$ пользуясь только n первыми изъ уравненій

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \omega_1 (t, x_1, \ldots x_n, a_1, \ldots a_n), \ldots$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_n} = \omega_n (t, x_1, \ldots x_n, a_1, \ldots a_n),$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -F (t, x_1, \ldots x_n, \omega_1, \ldots \omega_n),$$

которыя представляютъ значенія частныхъ производныхъ функціи V въ отношеніи $x_1, \ldots x_n$, t, что противорѣчитъ условію, по которому V должна представлять полный интегралъ уравненій (9). Слѣдовательно и проч.

Подобныя соображенія удостовѣряютъ также, что значенія

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_1} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ldots \frac{dx_n}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_n} = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

выведенныя изъ уравненій (*b*) и (*c*) будутъ совершенно опредѣленными, потому что $\Delta_1, \ldots \Delta_n$ не могутъ уничтожаться на томъ же основаніи какъ Δ.

Теперь покажемъ, что и вторая половина дифференціальныхъ уравненій (1) удовлетворяется интегральными уравненіями (7) и (8). Дифференцируя уравненіе (9) въ отношеніи x_i, примѣняя притомъ условія $\dfrac{\partial y_i}{\partial x_k} = \dfrac{\partial y_k}{\partial x_i}$ и имѣя въ виду уравненія (7), находимъ

$$\frac{\partial y_i}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial y_1}\frac{\partial y_i}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial y_n}\frac{\partial y_i}{\partial x_n} = 0.$$

Затѣмъ дифференцируя въ отношеніи t уравненіе $y_i = \dfrac{\partial V}{\partial x_i}$, получимъ

Digitized by Google

$$\frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial y_i}{\partial t} + \frac{\partial y_i}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial y_i}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}.$$

Складывая это уравненіе съ предъидущимъ, въ которомъ сначала всѣ члены кромѣ $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ перенесемъ во 2-ю часть, находимъ

$$\frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial y_i}{\partial x_1}\left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{\partial F}{\partial y_1}\right) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{\partial y_i}{\partial x_n}\left(\frac{dx_n}{dt} - \frac{\partial F}{\partial y_n}\right);$$

но какъ доказано

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_1}, \ldots \frac{dx_n}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_n};$$

слѣдовательно

$$\frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i}$$

и подобныя равенства будутъ имѣть мѣсто для всѣхъ значеній $i=1, 2, \ldots n$. Такимъ образомъ теорема доказана.

Доказательство предъидущаго предложенія можно представить еще въ слѣдующемъ видѣ.

Прилагая способъ Якоби къ интегрированію уравненія съ частными производными перваго порядка

$$f = y + F(t, x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_n) = 0, \qquad (9)$$

гдѣ для краткости положено $\frac{\partial V}{\partial t} = y$ и вообще $\frac{\partial V}{\partial x_i} = y_i$, найдемъ n уравненій:

$$f_1(t, x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_n) = a_1,$$
$$f_2(t, x_1, \ldots x_n y_2, \ldots y_n, a_1) = a_2, \ldots$$
$$\ldots f_n(t, x_1, \ldots x_n, y_n, a_1, \ldots a_{n-1}) = a_n, \qquad (10)$$

гдѣ $a_1, \ldots a_n$ произвольныя постоянныя и функціи $f_1, \ldots f_n$ опредѣлены такъ, что удовлетворятъ условія

$$(f, f_i) = 0 \quad \text{и} \quad (f_i, f_k) = 0$$

для всѣхъ значеній $1, \ldots n$ указателей i и k.

Исключая постоянныя $a_1, \ldots a_n$ изъ первыхъ частей уравненій (10) при помощи тѣхъ-же самыхъ уравненій, приведемъ эти послѣднія къ виду

$$H_1 = a_1, \; H_2 = a_2, \ldots \; H_n = a_n, \qquad (11)$$

Digitized by Google

гдѣ $H_1, .. H_n$ функціи $t, x_1, .. x_n, y_1, .. y_n$, не содержащія перемѣннаго y и вообще

$$H_i = f_i\,(t, x_1, .. x_n, y_i, .. y_n, f_1, H_2, .. H_{i-1})$$

На основаніи доказаннаго въ § 21 первыя части уравненій (11) должны удовлетворять условія

$$(f, H_i) = 0 \quad \text{и} \quad (H_i, H_k) = 0$$

для всѣхъ значеній $1, .. n$ указателей i и k.

Первый рядъ этихъ условій показываетъ, что уравненія (11) будутъ интегралами уравненій (1). Дѣйствительно

$$(f, H_i) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial t}, & \frac{\partial H_i}{\partial t} \\ 1, & 0 \end{vmatrix} + \sum_{m=1}^{m=n} \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_m}, & \frac{\partial H_i}{\partial x_m} \\ \frac{\partial F}{\partial y_m}, & \frac{\partial H_i}{\partial y_m} \end{vmatrix} =$$

$$= -\left\{\frac{\partial H_i}{\partial t} + (H_i, F)\right\} = 0,$$

что на основаніи условія (2) показываетъ, что уравненіе $H_i = a_i$ будетъ интеграломъ уравненій (1).

Условія-же

$$(H_i, H_k) = 0$$

суть тѣ-же самыя, которыя въ теоремѣ 1 должны были выполнять функціи $\varphi_2, .. \varphi_n$. Слѣдовательно интегралу выраженія

$$y_1\,dx_1 + \cdot\cdot + y_n\,dx_n - F\,(t, x_1, .. x_n, y_1, .. y_n)\,dt,$$

въ которомъ $y_1, .. y_n$ должно замѣнить ихъ значеніями, выведенными изъ уравненій (10) принадлежатъ тѣ-же свойства какъ и функціи V теоремы 1.

Примѣчаніе. При доказательствѣ теоремы 1 мы видѣли, что выраженіе (6) должно быть точнымъ дифференціаломъ; подобнымъ образомъ можно доказать, что выраженіе

$$x_1\,dy_1 + \cdot\cdot + x_n\,dy_n + F\,(t, x_1, .. x_n, y_1, .. y_n)\,dt$$

должно быть точнымъ дифференціаломъ, если $x_1, .. x_n$ будутъ замѣнены ихъ значеніями, выведенными изъ уравненій (3). Затѣмъ не трудно видѣть, что означая черезъ W интегралъ предъидущаго дифференціала, или полный интегралъ уравненія съ частными производными 1-го порядка

$$(12) \qquad \frac{\partial W}{\partial t} - F\,(t, \frac{\partial W}{\partial y_1}, .. \frac{\partial W}{\partial y_n}\, y_1, .. y_n) = 0,$$

Digitized by Google

можно представить полную систему $2n$ интеграловъ уравненій (1) слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{\partial W}{\partial y_1} = x_1, \frac{\partial W}{\partial y_2} = x_2, \ldots \frac{\partial W}{\partial y_n} = x_n,$$
$$\frac{\partial W}{\partial a_1} = b'_1, \frac{\partial W}{\partial a_2} = b'_2, \ldots \frac{\partial W}{\partial a_n} = b'_n.$$

§ 27. Предъидущее примѣчаніе показываетъ примѣръ, какимъ образомъ одна и та-же задача полнаго рѣшенія уравненій (1) можетъ быть приведена къ интегрированію уравненія съ частными производными вида (9) или (12), смотря по выбору независимыхъ перемѣнныхъ. Это даетъ намъ поводъ изложить весьма общій способъ, указанный Якоби (Nova Meth. p. 122, § 57) для измѣненія перемѣнныхъ, какъ въ уравненіи съ частными производными 1-го порядка, такъ и въ соотвѣтствующей ему системѣ каноническихъ уравненій,—способъ, доставляющій преобразованныя уравненія того-же общаго типа, который имѣютъ преобразуемыя.

Общій видъ уравненія съ частными производными 1-го порядка можно представить слѣдующимъ образомъ

$$\frac{\partial V}{\partial t} + F\left(t, x_1, \ldots x_n, \frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial V}{\partial x_n}\right) = 0, \qquad (A)$$

или, полагая вообще $y_i = \frac{\partial V}{\partial x_i}$,

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -F(t, x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_n).$$

Соотвѣтствующая система каноническая, полное интегрированіе которой зависитъ отъ опредѣленія полнаго интеграла уравненія (*A*), будетъ состоять изъ $2n$ уравненій

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i}, \qquad (B)$$

гдѣ i можетъ означать каждое изъ чиселъ $1, 2, \ldots n$.

Уравненіе (*A*) даетъ выраженіе одной изъ частныхъ производныхъ, $\frac{\partial V}{\partial t}$, функціею остальныхъ частныхъ производныхъ $y_1, \ldots y_n$ и независимыхъ перемѣнныхъ $t, x_1, \ldots x_n$; поэтому оно однозначительно со слѣдующимъ уравненіемъ

$$dV = -F(t, x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_n)\,dt + y_1\,dx_1 + \cdots + y_n\,dx_n \qquad (C)$$

и если мы выразимъ въ новыхъ перемѣнныхъ уравненіе (*C*), то вмѣстѣ съ тѣмъ будетъ преобразовано уравненіе (*A*), а слѣдовательно и уравненія (*B*).

Digitized by Google

Оставимъ перемѣнное t безъ измѣненія и введемъ вмѣсто $x_1,..x_n$ новыя перемѣнныя $q_1,..q_n$. Для этого между старыми и новыми перемѣнными должно быть дано n уравненій; но пока не специализируя ихъ вида, однако предполагая ихъ существованіе, возьмемъ совершенно произвольную функцію U старыхъ перемѣнныхъ $t, x_1,..x_n$ и новыхъ $q_1,..q_n$. Представляя безконечно малыя измѣненія въ одной системѣ перемѣнныхъ, получимъ соотвѣтствующія безконечно малыя измѣненія въ другой и полный дифференціалъ функціи U выразится слѣдующимъ образомъ

$$dU = \frac{\partial U}{\partial t}dt + \frac{\partial U}{\partial x_1}dx_1 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{\partial U}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial U}{\partial q_1}dq_1 + \cdots + \frac{\partial U}{\partial q_n}dq_n.$$

Вычитая-же отсюда уравненіе (C) получимъ

$$d(U - V) = \left(\frac{\partial U}{\partial t} + F(t, x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_n)\right)dt +$$
$$+ \left(\frac{\partial U}{\partial x_1} - y_1\right)dx_1 + \cdots + \left(\frac{\partial U}{\partial x_n} - y_n\right)dx_n$$
$$+ \frac{\partial U}{\partial q_1}dq_1 + \cdots + \frac{\partial U}{\partial q_n}dq_n.$$

Такъ какъ зависимость между старыми и новыми перемѣнными еще неустановлена, то предположимъ ея такою, чтобы было

$$(D) \qquad \frac{\partial U}{\partial x_1} = y_1 = \frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial U}{\partial x_n} = y_n = \frac{\partial V}{\partial x_n}.$$

Означая сверхъ того разность двухъ функцій U и V черезъ W, дадимъ предъидущему уравненію слѣдующій видъ

$$dW = \left[\frac{\partial U}{\partial t} + F(t, x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_n)\right]dt +$$
$$+ \frac{\partial U}{\partial q_1}dq_1 + \cdots + \frac{\partial U}{\partial q_n}dq_n$$

Во 2-й части послѣдняго уравненія коэфиціэнтъ при dt очевидно представляетъ частную производную въ отношеніи t функціи $W = U - V$; посмотримъ какимъ образомъ выразятся частныя производныя этой функціи въ отношеніи $q_1,..q_n$.

Digitized by Google

Для этого дифференцируя W въ отношеніи q_i и разсматривая $x_1, \ldots x_n$ какъ функціи этого перемѣннаго, находимъ

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = \frac{\partial (U - V)}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial q_i} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\partial U}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial q_i} - \frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial q_i} + \ldots - \frac{\partial V}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial q_i}$$

$$= \frac{\partial U}{\partial q_i} + \left(\frac{\partial U}{\partial x_1} - \frac{\partial V}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial q_i} + \ldots + \left(\frac{\partial U}{\partial x_n} - \frac{\partial V}{\partial x_n}\right)\frac{\partial x_n}{\partial q_i},$$

или, на основаніи уравненій (D),

$$\text{(E)} \qquad \frac{\partial W}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

Подобныя уравненія будутъ имѣть мѣсто для всѣхъ значеній $i = 1, 2, \ldots n$. Слѣдовательно

$$dW = \left(\frac{\partial U}{\partial t} + F(t, x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_n)\right) dt +$$

$$+ \frac{\partial W}{\partial q_1} dq_1 + \ldots + \frac{\partial W}{\partial q_n} dq_n$$

Теперь остается только выразить коефиціэнтъ при dt посредствомъ частныхъ производныхъ функціи W и перемѣнныхъ $q_1, \ldots q_n$; для этого пользуясь уравненіями (D) приводимъ его къ виду

$$\frac{\partial U}{\partial t} + F\left(t, x_1, \ldots x_n, \frac{\partial U}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial U}{\partial x_n}\right),$$

въ которомъ онъ содержитъ только перемѣнныя $t, x_1, \ldots x_n$ и $q_1, \ldots q_n$. Далѣе при помощи уравненій (E) выражая $x_1, \ldots x_n$ функціями $t, q_1, \ldots q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \ldots \frac{\partial W}{\partial q_n}$ мы приведемъ разсматриваемый коефиціэнтъ къ требуемому виду, который пусть будетъ

$$-\varphi\left(t, q_1, \ldots q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \ldots \frac{\partial W}{\partial q_n}\right)$$

и слѣдовательно

$$dW = -\varphi\left(t, q_1, \ldots q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \ldots \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) dt +$$

$$+ \frac{\partial W}{\partial q_1} dq_1 + \ldots + \frac{\partial W}{\partial q_n} dq_n.$$

Digitized by Google

Такимъ образомъ уравненіе (C) уже выражено въ новыхъ перемѣнныхъ и такъ какъ теперь оно равнозначуще со слѣдующимъ

$$(A') \qquad \frac{\partial W}{\partial t} + \varphi\left(t, q_1, \ldots q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \ldots \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) = 0,$$

то это послѣднее представляетъ преобразованное уравненіе (A). Наконецъ полагая вообще $\frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i$, мы можемъ написать непосредственно каноническую систему, соотвѣтствующую уравненію (A'), состоящую изъ $2n$ уравненій для $i = 1, 2, \ldots n$:

$$(B') \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial q_i},$$

которая представляетъ въ новыхъ перемѣнныхъ систему (B).

Какъ скоро полный интегралъ одного изъ уравненій (A) или (A') будетъ извѣстенъ, то интегралъ другого можно опредѣлить посредствомъ отношенія

$$W + V = U.$$

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ извѣстенъ полный интегралъ уравненія (A'):

$$W = \chi(t, q_1, \ldots q_n, \alpha_1, \ldots \alpha_n) + \text{const},$$

гдѣ $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ произвольныя постоянныя. Помощію предъидущаго отношенія имѣемъ

$$V = U - \chi - \text{const}$$

и перемѣнныя $q_1, \ldots q_n$, входящія въ функціи U и χ могутъ быть выражены въ $t, x_1, \ldots x_n$ посредствомъ n уравненій (E).

Если наоборотъ полный интегралъ уравненія (A) извѣстенъ и будетъ

$$V = \psi(t, x_1, \ldots x_n, a_1, \ldots a_n) + \text{const},$$

тогда

$$W = U - \psi - \text{const}.$$

и въ выраженіи W перемѣнныя $x_1, \ldots x_n$ могутъ быть исключены посредствомъ n уравненій (D).

Въ частномъ случаѣ, полагая

$$U = x_1 q_1 + \cdots + x_n q_n,$$

находимъ что уравненія (D) и (E) примутъ видъ

$$q_i = y_i = \frac{\partial V}{\partial x_1}, \qquad p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} = x_i$$

Digitized by Google

Слѣдовательно уравненія (C), (A) и (B) преобразуются въ слѣдующія:

$$dW = F\left(t, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \ldots \frac{\partial W}{\partial q_n}, q_1, \ldots q_n\right) dt + \\ + \frac{\partial W}{\partial q_1} dq_1 + \cdots + \frac{\partial W}{\partial q_n} dq_n \qquad (C_1)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} - F\left(t, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \ldots \frac{\partial W}{\partial q_n}, q_1, \ldots q_n\right) = 0 \qquad (A_1)$$

$$\frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \qquad (B_1)$$

гдѣ $i = 1, 2, \ldots n$.

Очевидно уравненія (A) и (A_1) находятся въ такомъ-же соотношеніи, въ какомъ были (9) и (12) въ предъидущемъ §, слѣдовательно зависимость между интегралами двухъ первыхъ или двухъ послѣднихъ уравненій выразится слѣдующимъ образомъ

$$W + V = x_1 q_1 + \cdots + x_n q_n = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

§ 28. Общія заключенія относительно теоріи интегрированія каноническихъ уравненій общаго вида (1) прилагаются конечно и къ частному случаю, (который представляютъ уравненія движенія въ такихъ вопросахъ, гдѣ имѣетъ мѣсто начало живыхъ силъ) когда данная функція H не содержитъ явнымъ образомъ t, т. е. будетъ вида

$$H = f(x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_n).$$

Дифференціальныя уравненія сохранятъ свой первоначальный типъ:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad (1)$$

гдѣ должно послѣдовательно полагать $i = 1, 2, \ldots n$; но теперь перемѣнное t входитъ въ нихъ явнымъ образомъ только въ видѣ дифференціала dt, исключивъ который имѣемъ $2n - 1$ уравненій:

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial H}{\partial y_1}} = \cdots = \frac{dx_n}{\frac{\partial H}{\partial y_n}} = \frac{dy_1}{-\frac{\partial H}{\partial x_1}} = \cdots = \frac{dy_n}{-\frac{\partial H}{\partial x_n}}$$

между одними перемѣнными $x_1, y_1, \ldots x_n y_n$. Полное интегрированіе предъидущей системы можетъ доставить выраженія всѣхъ перемѣнныхъ въ функціи одного изъ нихъ, положимъ x_1, и $2n - 1$ произвольныхъ постоянныхъ $\alpha_1, \ldots \alpha_{2n-1}$. Вставивъ эти выраженія въ

Digitized by Google

уравненіе

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_1},$$

можемъ получить послѣдній интегралъ системы (1) и единственный, заключающій явно t, посредствомъ квадратуры

$$t + a_{2n} = \int \frac{dx_1}{\frac{\partial H}{\partial y_1}}.$$

Это показываетъ, что полная система интеграловъ уравненій (1), разрѣшенная въ отношеніи произвольныхъ постоянныхъ, можетъ быть представлена $2n-1$ уравненіями вида

$$a_i = \varphi_i$$

и еще однимъ вида

$$a_{2n} = \varphi_{2n} - t$$

гдѣ φ_i и φ_{2n} означаютъ функціи несодержащія явно t. Общій способъ § 26 доставитъ интегралы уравненій (1) именно въ такомъ видѣ но болѣе простымъ путемъ.

На основаніи замѣчанія сдѣланнаго въ началѣ § 26, полагая

(2) $$H = \text{const} = h$$

мы имѣемъ непосредственно одинъ изъ интеграловъ, несодержащихъ явно t, уравненій (1). Пусть сверхъ того извѣстны еще $n-1$ интеграловъ этихъ уравненій:

(3) $$\varphi_1 = a_1,\ \varphi_2 = a_2,\ \ldots\ \varphi_{n-1} = a_{n-1},$$

гдѣ $a_1, \ldots a_{n-1}$ произвольныя постоянныя, $\varphi_1, \ldots \varphi_{n-1}$ функціи $x_1, y_1, \ldots x_n, y_n$ несодержащія явно t и удовлетворяющія условія

(4) $$(\varphi_i, \varphi_k) = 0$$

для всѣхъ значеній i и k, взятыхъ въ раду чиселъ $1, 2, \ldots n-1$.

При этихъ условіяхъ легко опредѣлить на основаніи теоремы 1 § 26 остальные интегралы уравненій (1). Самое доказательство этой теоремы теперь упрощается. Дѣйствительно выраженіе

$$y_1\, dx_1 + \cdots + y_n\, dx_n - f(x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_n)\, dt$$

по вставкѣ значеній $y_1, \ldots y_n$, выведенныхъ изъ уравненій (2) и (3), будетъ точнымъ дифференціаломъ, потому что равенства

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \frac{\partial y_k}{\partial x_i}$$

будутъ имѣть мѣсто для всѣхъ значеній $1, 2, \ldots n$ указателей i и k, вслѣдствіе условій (4) и предположенія что уравненія (3) пред-

Digitized by Google

ставляютъ интегралы, несодержащіе явно t, уравненій (1). Далѣе равенства

$$\frac{\partial y_i}{\partial t} = -\frac{\partial (H)}{\partial x_i},$$

гдѣ (H) представляетъ выраженіе f по вставкѣ значеній $y_1, .. y_n$,— удовлетворены для всѣхъ значеній $i = 1, 2, .. n$; потому что y_i не содержитъ явно t и такъ какъ уравненіе (2) было въ числѣ тѣхъ, помощію которыхъ опредѣлены значенія $y_1, .. y_n$, то по вставкѣ этихъ значеній 1-я часть его тождественно приведется къ постоянному h.

Интегралъ предъидущаго точнаго дифференціала выразится слѣдующимъ образомъ

$$U = V - ht,$$

гдѣ V означаетъ интегралъ точнаго дифференціала

$$y_1 dx_1 + \cdots + y_n dx_n.$$

На основаніи теоремы 1 § 26 искомые n интеграловъ уравненій (1) находятся, полагая

$$\frac{\partial U}{\partial a_1} = \frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1, \ldots \frac{\partial U}{\partial a_{n-1}} = \frac{\partial V}{\partial a_{n-1}} = b_{n-1},$$

$$\frac{\partial U}{\partial h} = \frac{\partial V}{\partial h} - t = g, \qquad (5)$$

гдѣ $b_1, .. b_{n-1}$ g означаютъ новыя произвольныя постоянныя. Дѣйствительно, означая черезъ a одно изъ произвольныхъ постоянныхъ $a_1, .. a_{n-1}$, h, имѣемъ

$$\frac{d\frac{\partial V}{\partial a}}{dt} = \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial a}}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + .. + \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial a}}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} =$$

$$= \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial x_1}}{\partial a}\frac{\partial H}{\partial y_1} + .. + \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial x_n}}{\partial a}\frac{\partial H}{\partial y_n} =$$

$$= \frac{\partial H}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial a} + .. + \frac{\partial H}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial a},$$

или

$$\frac{d\frac{\partial V}{\partial a}}{dt} = \frac{\partial (H)}{\partial a}.$$

Digitized by Google

Но выраженіе (H) тождественно равно h; поэтому для $a = a_1, .. a_{n-1}$

$$\frac{d\frac{\partial V}{\partial a}}{dt} = 0, \text{ и для } a = h, \frac{d\frac{\partial V}{\partial h}}{dt} = 1.$$

Слѣдовательно

$$\frac{d\frac{\partial U}{\partial a}}{dt} = 0$$

тождественно при всѣхъ значеніяхъ $a = a_1, .. a_{n-1}, h$.

Замѣтимъ, что равенство $\frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \frac{\partial y_k}{\partial x_i}$ не нарушается если возьмемъ частныя производныя обѣихъ его частей въ отношеніи a; слѣдовательно будемъ имѣть для всѣхъ значеній 1, 2, .. n указателей i и k:

$$\frac{\partial \frac{\partial y_i}{\partial a}}{\partial x_k} = \frac{\partial \frac{\partial y_k}{\partial a}}{\partial x_i}$$

Поэтому система интеграловъ (5) можетъ быть получена не опредѣляя функціи V, но интегрируя рядъ точныхъ дифференціаловъ и представится въ общемъ видѣ слѣдующимъ образомъ

$$\int \left[\frac{\partial y_1}{\partial a_i} dx_1 + .. + \frac{\partial y_n}{\partial a_i} dx_n \right] = b_i$$

$$\int \left[\frac{\partial y_1}{\partial h} dx_1 + .. + \frac{\partial y_n}{\partial h} dx_n \right] = g + t$$

гдѣ должно полагать послѣдовательно $i = 1, 2, .. n-1$.

Что касается непосредственнаго опредѣленія функціи V, то ясно, что значенія $y_1 = \frac{\partial V}{\partial x_1}, .. y_n = \frac{\partial V}{\partial x_n}$ должны быть однозначущи съ тѣми, которыя выводятся изъ уравненій (2) и (3); слѣдовательно функція V должна необходимо приводить къ тождеству слѣдующее уравненіе

$$f\left(x_1, .. x_n, \frac{\partial V}{\partial y_1}, .. \frac{\partial V}{\partial y_n}\right) = h$$

и достаточно, если она будетъ опредѣлена какъ полный интегралъ его.

Изложенный выше способъ прилагается конечно не съ одинаковымъ удобствомъ къ рѣшенію различныхъ вопросовъ динамики,

Digitized by Google

по сущности своей болѣе или менѣе сложныхъ. Имѣя въ виду только пояснить на частномъ примѣрѣ изложенную выше теорію интегрированія уравненій канонической формы, я разсмотрю одинъ изъ простѣйшихъ вопросовъ, къ рѣшенію котораго она прилагается безъ всякаго затрудненія.

Разсмотримъ задачу о движеніи матеріальной точки, притягиваемой къ постоянному центру силою, выражающеюся функціей разстоянія.

Принимая плоскость, въ которой должно происходить движеніе, за плоскость прямоугольныхъ координатъ xy, которыхъ начало въ центрѣ притяженія, означимъ черезъ r радіусъ векторъ движущейся точки и черезъ $\varphi(r)$ ускорительную силу, дѣйствующую на точку въ направленіи къ притягивающему центру. Разсматривая координаты x и y движущейся точки какъ функціи времени t, имѣемъ общія выраженія составляющихъ ускорительной силы параллельныхъ осямъ координатъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{и} \quad \frac{d^2y}{dt^2}.$$

Съ другой стороны тѣ-же величины въ настоящемъ случаѣ выразятся соотвѣтственно чрезъ

$$\frac{-x}{r}\varphi(r) \quad \text{и} \quad \frac{-y}{r}\varphi(r).$$

Слѣдовательно уравненія движенія будутъ

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{x}{r}\varphi(r) \quad \text{и} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{y}{r}\varphi(r), \quad (1), \quad \text{гдѣ } r^2 = x^2 + y^2.$$

Чтобы получить интегралъ живой силы сложимъ предъидущія уравненія, умноживъ предварительно 1-е $2dx$ и 2-е на $2dy$, что даетъ

$$\frac{2\,dx\,d^2x + 2\,dy\,d^2y}{dt^2} = -2\varphi(r)\,\frac{x\,dx + y\,dy}{r},$$

или

$$\frac{1}{2}d\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] = -\varphi(r)\,dr,$$

откуда интегрируя, находимъ

$$H = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) + \int\varphi(r)\,dr = \text{const} = h, \qquad (2)$$

гдѣ x' и y' означаютъ составляющія скорости движущейся точки, параллельныя осямъ x и y, т. е.

$$\frac{dx}{dt} = x' \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dt} = y'. \qquad (3)$$

Digitized by Google

Замѣтивъ теперь, что

$$\frac{\partial H}{\partial x'} = x', \quad \frac{\partial H}{\partial y'} = y', \quad \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial \int \varphi(r)\,dr}{\partial r}\,\frac{\partial r}{\partial x} = \varphi(r)\,\frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial \int \varphi(r)\,dr}{\partial r}\,\frac{\partial r}{\partial y} = \varphi(r)\,\frac{y}{r},$$

можемъ привести уравненія движенія (3) и (1) къ обыкновенному каноническому виду:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x'}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y'}$$

$$\frac{dx'}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{dy'}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y}.$$

Такъ какъ въ эти уравненія входятъ только четыре неизвѣстныя функціи перемѣннаго t, то достаточно знать, для полнаго рѣшенія задачи, кромѣ интеграла (2) еще одинъ интегралъ, несодержащій явно времени. Начало площадей доставитъ требуемый интегралъ. Именно, исключая изъ уравненій (1) члены заключающіе r, находимъ

$$x\,\frac{d^2y}{dt^2} - y\,\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \text{ или } \frac{d}{dt}\left(x\,\frac{dy}{dt} - y\,\frac{dx}{dt}\right) = 0,$$

откуда по интегрированіи, находимъ

$$\varphi = xy' - yx' = \text{const} = a. \tag{4}$$

Условіе $(H, \varphi) = 0$ очевидно должно быть выполнено, въ чемъ впрочемъ легко убѣдиться прямой повѣркой, потому что

$$(H, \varphi) = -\varphi(r)\,\frac{x}{r}\cdot y - x'\cdot y' + \varphi(r)\,\frac{y}{r}\cdot x + y'\cdot x'.$$

За тѣмъ нужно вывести изъ уравненій (2) и (4) значенія x' и y', которыя обратятъ выраженіе $x'dx + y'dy$ въ точный дифференціалъ. Для этого исключая y' изъ (2) помощію (4) имѣемъ уравненіе 2-й степени относительно x':

$$(x^2 + y^2)\,x'^2 + 2\,a\,y\,.\,x' = 2\left(h - \int \varphi(r)\,dr\right)x^2 - a^2,$$

откуда

$$x' = \frac{-2\,xy \pm \sqrt{4\,a^2\,y^2 + 4\,(x^2 + y^2)\left\{2\left(h - \int \varphi(r)\,dr\right) - a^2\right\}}}{2\,(x^2 + y^2)},$$

или

$$x' = \frac{-a\,y \pm x\sqrt{2\left(h - \int \varphi(r)\,dr\right)r^2 - a^2}}{r^2}.$$

Digitized by Google

Подобнымъ-же образомъ находимъ

$$y' = \frac{a\,x \pm y\sqrt{2\left(h - \int \varphi(r)\,dr\right)r^2 - a^2}}{r^2}.$$

Слѣдовательно

$$dV = a\,\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} \pm$$

$$\pm \frac{x\,dx + y\,dy}{r^2}\sqrt{2\left(h - \int \varphi(r)\,dr\right)r^2 - a^2}$$

$$= a\,d.\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} \pm$$

$$\pm \frac{dr}{r}\sqrt{2\left(h - \int \varphi(r)\,dr\right)r^2 - a^2}.$$

Осюда, интегрируя, получимъ

$$V = a\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} \pm \int \frac{dr}{r}\sqrt{2\left(h - \int \varphi(r)\,dr\right)r^2 - a^2}.$$

Теперь два остальные интеграла задачи выразятся слѣдующимъ образомъ.

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} \mp a\int \frac{dr}{r\sqrt{2\left(h - \int \varphi(r)\,dr\right)r^2 - a^2}} = b = \mathrm{const.}$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} - t = \pm \int \frac{r\,dr}{\sqrt{2\left(h - \int \varphi(r)\,dr\right)r^2 - a^2}} - t = g = \mathrm{const.}$$

Первый изъ этихъ интеграловъ дастъ уравненіе траэкторіи движущейся точки, второй — время въ функціи радіуса вектора; входящія въ нихъ квадратуры вообще могутъ быть опредѣлены, когда будетъ данъ видъ функціи $\varphi(r)$. Полагая напр. $\varphi(r) = \frac{\mu}{r^2}$, гдѣ μ постоянное, получимъ результаты, согласные съ тѣми, которые въ трактатахъ механики выводятся обыкновенно другимъ путемъ. Замѣтимъ еще, что функція V представляетъ полный интегралъ уравненія съ частными производными 1-го порядка

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 = 2\left(h - \int \varphi(r)\,dr\right),$$

которое получится изъ уравненія (2), замѣнивъ въ немъ x' и y' ихъ соотвѣтственными значеніями $\frac{\partial V}{\partial x}$ и $\frac{\partial V}{\partial y}$.

Digitized by Google

§ 29. Въ заключеніе предъидущаго очерка теоріи интегрированія обыкновенныхъ совмѣстныхъ уравненій канонической формы разсмотримъ весьма замѣчательное свойство ихъ интеграловъ, выражаемое *теоремой Пуассона*, уже выведенной выше, косвеннымъ образомъ въ § 18 и указанной въ началѣ этого отдѣла, какъ оказавшей большое пособіе въ теоріи интегрированія уравненій съ частными производными 1-го порядка. Дѣйствительно прямое и самое простое доказательство этой теоремы, которое сейчасъ будетъ изложено, показываетъ, что она есть прямое слѣдствіе трехчленнаго тождества, составляющаго теорему 1 § 17; отсюда не трудно видѣть, что о существованіи этого тождества могли заключать только на основаніи теоремы Пуассона.

Возьмемъ снова каноническую систему $2n$ уравненій вида

$$(1)\quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i} \quad \text{и} \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \text{гдѣ } H = F(t, x_1, y_1, \ldots x_n y_n)$$

и указатель i принимаетъ всѣ значенія отъ 1 до n.

Представимъ два интеграла этой системы

$$(2)\quad \varphi(t, x_1, y_1, \ldots x_n, y_n) = \text{const} \text{ и } \psi(t, x_1, y_1, \ldots x_n, y_n) = \text{const},$$

гдѣ φ и ψ данныя функціи.

Теорема Пуассона состоитъ въ томъ, что выраженіе

$$\sum_{m=1}^{m=n} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} \frac{\partial \psi}{\partial y_m} - \frac{\partial \varphi}{\partial y_m} \frac{\partial \psi}{\partial x_m} \right\}, \text{ или } (\varphi, \psi),$$

уравненное произвольному постоянному, будетъ также интеграломъ уравненій (1).

Такъ какъ уравненія (2) представляютъ интегралы (1), то функціи φ и ψ, на основаніи доказаннаго въ § 26, должны тождественно повѣрять условія

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\varphi, H) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\psi, H) = 0.$$

Если уравненіе

$$(\varphi, \psi) = \text{const.}$$

будетъ также интеграломъ уравненій (1); то функція (φ, ψ) должна тождественно повѣрить условіе

$$\frac{\partial (\varphi, \psi)}{\partial t} + [(\varphi, \psi), H] = 0.$$

Но на основаніи формулы (9) § 16 имѣемъ

$$\frac{\partial (\varphi, \psi)}{\partial t} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi\right) + \left(\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right)$$

Digitized by Google

и вставивъ сюда значенія

$$\frac{d\varphi}{dt} = (H, \varphi), \quad \frac{d\psi}{dt} = (H, \psi).$$

получимъ

$$\frac{d(\varphi, \psi)}{dt} = [(H, \varphi), \psi] + [\varphi, (H, \psi)].$$

Поэтому предъидущее условіе для функціи (φ, ψ) приметъ видъ уравненія

$$[(H, \varphi), \psi] + [\varphi, (H, \psi)] + [(\varphi, \psi), H] = 0,$$

или

$$[(H, \varphi), \psi] + [(\varphi, \psi), H] + [(\psi, H), \varphi] = 0,$$

первая часть котораго на основаніи теоремы 1 § 17 тождественно равна нулю, каковы бы ни были функціи H, φ, ψ. Такимъ образомъ теорема доказана.

Сложное доказательство, которое Пуассонъ далъ своей теоремѣ разсматривалось какъ образецъ аналитическаго искусства. Гамильтонъ, приведя уравненія динамики къ простѣйшему виду, упростилъ также и доказательство Пуассона. Предъидущее доказательство, прилагающееся къ каноническимъ уравненіямъ общаго вида, далъ Донкинъ.

Якоби первый обратилъ вниманіе на значеніе теоремы Пуассона. Косвенныя примѣненія, данныя ей впослѣдствіи въ общихъ вопросахъ интегрированія уравненій съ частными производными 1-го порядка и уравненій динамики, вполнѣ обнаружили теоретическую важность теоремы Пуассона. Что-же касается прямого, практическаго примѣненія ея, т. е. возможности помощію двухъ данныхъ интеграловъ системы каноническихъ уравненій вычислять, посредствомъ однихъ дифференцированій, третій интегралъ, потомъ четвертый и т. д., то подробное изслѣдованіе этого вопроса г. Бертраномъ (*) показало, что методъ интегрированія, основанный такимъ образомъ на теоремѣ Пуассона, далеко не имѣетъ той важности, которую ему приписывали сначала. На самомъ дѣлѣ случаи, въ которыхъ эта теорема дѣйствительно приводитъ къ новымъ интеграламъ, встрѣчаются гораздо рѣже такихъ, гдѣ она не достигаетъ этой цѣли. Иногда всѣ интегралы, составляющіе полное рѣшеніе, комбинированные посредствомъ теоремы Пуассона не даютъ новыхъ интеграловъ, въ другихъ случаяхъ большая часть изъ нихъ имѣютъ это свойство. Г. Бертранъ воспользовался этимъ обстоятельствомъ, которое повидимому исключаетъ возможность примѣненій теоремы Пуассона къ разсматриваемой цѣли, и осно-

(*) Mémoire sur l'intégration des équat. diff. de la Mec. par. J. Bertrand (Journ. de Math. de Liouville, 1852. T. XVII.).

Digitized by Google

валъ на немъ особый пріемъ интегрированія уравненій динамики гамильтоновой формы. Теоретическое основаніе этого пріема весьма просто, поэтому я изложу его въ сжатомъ видѣ и поясню примѣненіемъ къ тому-же примѣру, который рѣшенъ въ предъидущемъ § чтобы было удобнѣе сравнить результаты.

Сначала замѣтимъ случаи, въ которыхъ два данные интеграла $\varphi = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$ не приводятъ къ новому интегралу. Это обстоятельство встрѣтится: 1) если выраженіе (φ, ψ) тождественно приводится къ какому нибудь опредѣленному постоянному; 2) если это выраженіе представляется функціею φ и ψ, такъ что уравненіе $(\varphi, \psi) = \text{const}$ не даетъ новаго интеграла, но алгебраическую комбинацію уже извѣстныхъ.

Напримѣръ предполагая въ уравненіяхъ (1) функцію H несодержащею явно t, имѣемъ интегралъ

$$H = \text{const.}$$

Комбинируя его съ другимъ какимъ нибудь интеграломъ

$$\varphi = \text{const},$$

гдѣ φ не содержитъ явно t, находимъ тождество

$$(\varphi, H) = 0;$$

если-же возьмемъ интегралъ $\psi - t = \text{const}$, гдѣ ψ не содержитъ явно t, то получимъ тождество

$$(\psi, H) = 1.$$

Вообще можно доказать, что если $\varphi = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$ будутъ два интеграла уравненій (1), то существуютъ одинъ или нѣсколько интеграловъ вида $\omega = \text{const}$, для которыхъ выраженіе (φ, ω) приведется тождественно къ нулю или къ единицѣ —Дѣйствительно произведемъ послѣдовательныя подстановки, выражаемыя рядомъ

$$(\varphi, \psi) = \psi_1, (\varphi, \psi_1) = \psi_2, \ldots \; (\varphi, \psi_{m-1}) = \psi_m, \ldots$$

Продолженный неопредѣленно онъ не можетъ давать различныхъ функцій ψ, ψ_1, $\psi_2 \ldots$, потому что уравненія (1) имѣютъ только $2n$ различныхъ интеграловъ; поэтому положимъ ψ_m будетъ первый членъ, который равенъ опредѣленному постоянному или выражается функціею предъидущихъ членовъ, такъ что

$$\psi_m = F(\psi, \psi_1, \ldots \psi_{m-1}).$$

Взявъ произвольную функцію ω перемѣнныхъ $\psi, \psi_1, \ldots \psi_{m-1}$, имѣемъ

$$(\varphi, \omega) = \psi_1 \frac{d\omega}{d\psi} + \psi_2 \frac{d\omega}{d\psi_1} + \cdots + F(\psi, \psi_1, \ldots \psi_{m-1}) \frac{d\omega}{d\psi_{m-1}}.$$

Слѣдовательно, если хотимъ опредѣлить ω такъ чтобы (φ, ω) было тождественно равно 1 или 0, то должно интегрировать линейное

Digitized by Google

уравненіе

$$\psi_1 \frac{\partial\omega}{\partial\psi} + \psi_2 \frac{\partial\omega}{\partial\psi_1} + \ldots + F(\psi, \psi_1, \ldots \psi_{m-1}) \frac{\partial\omega}{\partial\psi_m} = \begin{cases} 1, \\ \text{или} \\ 0. \end{cases}$$

Поэтому интегралы системы совокупныхъ уравненій

$$\frac{d\psi}{\psi_1} = \frac{d\psi_1}{\psi_2} = \ldots = \frac{d\psi_{m-1}}{F} = \frac{d\omega}{1\ (\text{или}\ 0)}$$

дадутъ частныя значенія функціи ω, помощію которыхъ образуется самое общее ея выраженіе, составляющее общій интегралъ предъидущаго линейнаго уравненія.

Пріемъ Бертрана интегрированія уравненій динамики гамильтоновой формы (1), гдѣ $H = f(x_1, y_1, \ldots x_n, y_n)$, состоитъ въ слѣдующемъ. Должно опредѣлить интегралъ уравненій (1)

$$\varphi(x_1, y_1, \ldots x_n, y_n) = \text{const},$$

различный отъ интеграла живыхъ силъ, и отыскивать другіе интегралы вида

$$\psi(x_1, y_1, \ldots x_n, y_n) = \text{const},$$

по условію, чтобы функція ψ давала тождественно

$$(\varphi, \psi) = \begin{cases} 0, \\ \text{или} \\ 1. \end{cases}$$

Для приложенія возьмемъ задачу о движеніи матеріальной точки, притягиваемой къ постоянному центру силою, выражающеюся функціей разстоянія.

При тѣхъ-же условіяхъ, какъ въ предъидущемъ §, уравненія движенія будутъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x', \qquad \frac{dy}{dt} = y' \\ \frac{dx'}{dt} &= -\frac{x}{r}\varphi(r), \quad \frac{dy'}{dt} = -\frac{y}{r}\varphi(r). \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Начало площадей доставляетъ интегралъ

$$f = x y' - y x' = \text{const}. \quad (2)$$

Пусть

$$\psi(x, y, x', y', t) = \text{const} \quad (3)$$

будетъ 2-й интегралъ.

Выражая условіе, что этотъ послѣдній, комбинированный съ первымъ, даетъ тождественно (ψ, f) равно нулю или единицѣ, полу-

Digitized by Google

чимъ два линейныя уравненія

$$(4) \qquad -\frac{\partial\psi}{\partial x}y - \frac{\partial\psi}{\partial x'}y' + \frac{\partial\psi}{\partial y}x + \frac{\partial\psi}{\partial y'}x' = \begin{cases} 0, \\ \text{или} \\ 1. \end{cases}$$

Интегрированіе перваго изъ нихъ приводитъ къ системѣ совокупныхъ уравненій

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dx'}{-y'} = \frac{dy}{x} = \frac{dy'}{x'} = \frac{d\psi}{0},$$

одинъ изъ интеграловъ которой

$$\psi = c_1$$

и легко найти три остальные

$$x^2 + y^2 = c_2, \quad x'^2 + y'^2 = c_3, \quad x\,x' + y\,y' = c_4,$$

гдѣ c_1, c_2, c_3, c_4 означаютъ произвольныя постоянныя.

Слѣдовательно, полагая для краткости

$$u = x^2 + y^2, \quad v = x'^2 + y'^2, \quad w = x\,x' + y\,y',$$

будемъ имѣть самое общее выраженіе функціи ψ, удовлетворяющей первое изъ условій (4):

$$(a) \qquad \psi = \pi\,(u, v, w),$$

гдѣ π означаетъ произвольную функцію. Если-же въ интегралѣ (3) должно входить явно t, тогда можно положить

$$(a') \qquad \psi = t + \pi\,(u, v, w).$$

Принимая для опредѣленія функціи ψ второе изъ линейныхъ уравненій (4), должно интегрировать систему уравненій

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dx'}{-y'} = \frac{dy}{x} = \frac{dy'}{x'} = \frac{d\psi}{1},$$

или

$$\frac{dx}{d\psi} = -y, \quad \frac{dy}{d\psi} = x, \quad \frac{dx'}{d\psi} = -y', \quad \frac{dy'}{d\psi} = x',$$

которой интегралами будутъ уравненія:

$$x = A\cos(\psi + \alpha), \quad y = A\sin(\psi + \alpha),$$
$$x' = B\cos(\psi + \beta), \quad y' = B\sin(\psi + \beta),$$

гдѣ α, β, A, B означаютъ произвольныя постоянныя.

Digitized by Google

Изъ предъидущихъ уравненій не трудно вывести слѣдующія:

$$x^2 + y^2 = C', \quad x'^2 + y'^2 = C''$$

$$x\,x' + y\,y' = c''', \quad \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \psi = C^{IV} \qquad (b)$$

гдѣ C', C'', C''' C^{IV} произвольныя постоянныя. Поэтому общее выраженіе функціи ψ, удовлетворяющей второе изъ условій (4), будетъ

$$\psi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \omega\,(u, v, w),$$

гдѣ ω совершенно произвольная функція.

Теперь надобно дополнить опредѣленіе найденныхъ выраженій (a), (a'), (b) функціи ψ условіемъ, что каждое изъ нихъ будучи уравнено произвольному постоянному, будетъ представлять интегралъ уравненій (1). Для этого надобно выразить, что полныя производныя этихъ функцій въ отношеніи t приводятся тождественно къ нулю, по исключеніи производныхъ въ отношеніи t функцій x, y, x', y'. Начиная выраженіемъ (a) находимъ

$$\frac{d}{dt}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial x'}\frac{dx'}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial y'}\frac{dy'}{dt};$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\pi}{\partial u}2x + \frac{\partial\pi}{\partial w}x', \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\pi}{\partial u}2y + \frac{\partial\pi}{\partial w}y',$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x'} = \frac{\partial\pi}{\partial v}2x' + \frac{\partial\pi}{\partial w}x, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y'} = \frac{\partial\pi}{\partial v}2y' + \frac{\partial\pi}{\partial w}y;$$

и, полагая для краткости $-\frac{\varphi(r)}{r} = \Phi(u)$, имѣемъ, на основаніи уравненій (1),

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{du}{dt} = y', \quad \frac{dx'}{dt} = x\,\Phi(u), \quad \frac{dy'}{dt} = y\,\Phi(u).$$

Слѣдовательно условіе

$$\frac{d}{dt}\psi = 0$$

выразится слѣдующимъ образомъ

$$2\frac{\partial\pi}{\partial u}(x\,x' + y\,y') + 2\frac{\partial\pi}{\partial v}(x\,x' + y\,y')\,\Phi(u) +$$
$$\frac{\partial\pi}{\partial w}[x'^2 + y'^2 + (x^2 + y^2)\,\Phi(u)] = 0,$$

Digitized by Google

или

$$2\frac{\partial\pi}{\partial u}w+2\frac{\partial\pi}{\partial v}w\,\Phi(u)+\frac{\partial\pi}{\partial w}[v+u\,\Phi(u)]=0.$$

Предъидущее уравненіе линейное въ отношеніи частныхъ производныхъ π, позволяетъ опредѣлить видъ этой функціи, требуемымъ образомъ, посредствомъ интегрированія уравненій

$$\frac{du}{2w}=\frac{dv}{2w\,\Phi(u)}=\frac{dw}{v+u\,\Phi(u)}=\frac{d\pi}{0}$$

Одинъ изъ интеграловъ этихъ уравненій будетъ $\pi=c_1$;

другой получится изъ уравненія

$$du=\frac{dv}{\Phi(u)}\text{ и будетъ }v-\int\Phi(u)\,du=c_2.$$

Наконецъ, написавъ данныя уравненія слѣдующимъ образомъ

$$\frac{v\,du}{v}=\frac{u\,dv}{u\,\Phi(u)}=\frac{2w\,dw}{v+u\,\Phi(u)}=\frac{v\,du+u\,dv}{v+u\,\Phi(u)},$$

получимъ уравненіе

$$2w\,dw=v\,du+u\,dv,$$

откуда находимъ третій интегралъ

$$w^2-u\,v=c_3.$$

Слѣдовательно выраженіе функціи π должно быть

$$\pi=\pi_1(v-\int\Phi(u)\,du,\ uv-w^2),$$

гдѣ π_1 означаетъ произвольную функцію, или, замѣняя u, v, w и $\Phi(u)$ ихъ значеніями и замѣчая что $du=2rdr$,

$$u\,v-w^2=(x^2+y^2)(x'^2+y'^2)-(x\,x'+y\,y')^2=(x\,y'-y\,x')^2,$$

находимъ

$$\psi=\pi=\pi_1(x'^2+y'^2+2\int\varphi(r)\,dr,\ (x\,y'-y\,x')^2)$$

т. е. полученный такимъ образомъ интегралъ уравненій (1)

$$\psi=\text{const.}$$

будетъ представлять произвольную алгебраическую комбинацію уравненій живыхъ силъ и площадей, которая не можетъ образовать новаго интеграла.

Принявъ теперь форму (a') для представленія функціи ψ и выражая условіе что $\psi=\text{const}$ должно быть интеграломъ уравненій (1),

Digitized by Google

имѣемъ условіе

$$\frac{d}{dt}\psi = 1 + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial x'}\frac{dx'}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial y'}\frac{dy'}{dt} = 0$$

или, вставляя данныя выше значенія производныхъ ψ и x, x', y, y',

$$2w\frac{\partial\pi}{\partial u} + 2w\Phi(u)\frac{\partial\pi}{\partial v} + [v - u\Phi(u)]\frac{\partial\pi}{\partial w} = -1.$$

Для опредѣленія функціи π должно интегрировать уравненія

$$\frac{du}{2w} = \frac{dv}{2w\Phi(u)} = \frac{dw}{v - u\Phi(u)} = -d\pi,$$

которыхъ два интеграла будутъ тѣже самыя какъ и въ предъидущемъ случаѣ:

$$v - \int\Phi(u)\,du = c_1,\quad w^2 - uv = c_2.$$

Помощію двухъ предъидущихъ уравненій находимъ

$$w = \sqrt{c_2 + uv} = \sqrt{c_2 + u(c_1 + \int\Phi(v)\,du)};$$

слѣдовательно

$$d\pi = -\frac{du}{2w} = -\frac{du}{2\sqrt{c_2 + u(c_1 + \int\Phi(u)\,du)}};$$

откуда находимъ третій интегралъ

$$\pi + \int\frac{du}{\{2\sqrt{c_2 + u(c_1 + \int\Phi(u)\,du)}\}} = c_3.$$

Поэтому общее выраженіе ψ будетъ

$$\psi = t - \int\frac{du}{\{2\sqrt{c_2 + u(c_1 + \int\Phi(u)\,du)}\}} + \\ + \pi'(v - \int\Phi(u)\,du,\ uv - w^2),$$

гдѣ π' означаетъ произвольную функцію; поэтому дѣлая ея равною нулю и полагая

$$\psi = \text{const} \qquad (5)$$

получимъ новый интегралъ задачи, выражающій время въ функціи радіуса вектора и того-же самаго вида, который мы получили по другому способу въ предъидущемъ §.

Чтобы дополнить рѣшеніе задачи посмотримъ еще, допускаютъ ли уравненія (1) интегралы вида

$$\psi = \text{arctg}\frac{y}{x} + \omega(u, v, w) = \text{const.}$$

Digitized by Google

Для этого имѣемъ условіе

$$\frac{d}{dt}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial x'}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial x'}\frac{dx'}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial y'}\frac{dy'}{dt} = 0,$$

въ которое должно вставить:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{y}{u} + \frac{\partial\omega}{\partial u}2x + \frac{\partial\omega}{\partial w}x',$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{x}{u} + \frac{\partial\omega}{\partial u}2y + \frac{\partial\omega}{\partial w}y',$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x'} = \frac{\partial\omega}{\partial v}2x' + \frac{\partial\omega}{\partial w}x, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y'} = \frac{\partial\omega}{\partial v}2y' + \frac{\partial\omega}{\partial w}y$$

и замѣнить производныя x, y, x', y' данными выше ихъ значеніями, послѣ чего разсматриваемое условіе приметъ видъ линейнаго уравненія

$$2w\frac{\partial\omega}{\partial u} + 2w\Phi(u)\frac{\partial\omega}{\partial v} + [v + u\Phi(u)]\frac{\partial\omega}{\partial w} + \frac{xy' - yx'}{u} = 0,$$

или, такъ какъ

$$xy' - yx' = \sqrt{uv - w^2},$$

$$2w\frac{\partial\omega}{\partial u} + 2w\Phi(u)\frac{\partial\omega}{\partial v} + [v + u\Phi(u)\frac{\partial\omega}{\partial w} = -\frac{\sqrt{uv - w^2}}{u}.$$

Для опредѣленія функціи ω должно интегрировать уравненія

$$\frac{du}{2w} = \frac{dv}{2w\Phi(u)} = \frac{dw}{v + u\Phi(u)} = -\frac{u\,d\omega}{\sqrt{uv - w^2}},$$

которыхъ два интеграла будутъ тѣже, какъ и въ предъидущихъ случаяхъ:

$$v - \int\Phi(u)\,du = c_1, \quad uv - w^2 = c_2.$$

Помощію ихъ находимъ

$$w = \sqrt{[c_1 + \int\Phi(u)\,du]\,u - c_2};$$

слѣдовательно

$$d\omega = -\frac{du.\sqrt{uv - w^2}}{2uw} = -\frac{\sqrt{c_2}.\,du}{2u\sqrt{[c_1 + \int\Phi(u)\,du]\,u - c_2}},$$

Digitized by Google

откуда находимъ третій интегралъ

$$\omega + \int \frac{\sqrt{c_2}\, du}{2u\sqrt{[c_1 + \int \Phi(u)\, du]\, u - c_2}} = c_3.$$

Слѣдовательно

$$\omega = -\int \frac{\sqrt{c_2}\, du}{2u\sqrt{[c_1 + \int \Phi(u)\, du] - c_2}} + \\ + \omega_1 [v - \int \Phi(u)\, du,\ uv - w^2].$$

Вставляя это выраженіе ω въ формулу (b) находимъ самое общее выраженіе ψ:

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \int \frac{\sqrt{c_2}\, du}{2u\sqrt{[c_1 + \int \Phi(u)\, du] - c_2}} + \\ + \omega_1 [v - \int \Phi(u)\, du,\ uv - w^2].$$

Здѣсь функція ω_1 совершенно произвольна, поэтому дѣлая ея равною нулю и полагая

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \int \frac{\sqrt{c_2}\, du}{2u\sqrt{[c_1 + \int \Phi(u)\, du]\, u - c_2}} = \text{const} \quad (6)$$

находимъ еще одинъ новый интегралъ задачи, доставляющій уравненіе траэкторіи движущейся точки, совершенно одинаковое съ тѣмъ, которое мы нашли въ предъидущемъ §.

Если къ интеграламъ (2), (5) и (6) присоединимъ интегралъ живыхъ силъ

$$H = (x'^2 + y'^2) - \int \varphi(r)\, dr = \text{const},$$

то мы такимъ образомъ будемъ имѣть полное рѣшеніе задачи.

Просматривая ходъ рѣшенія предъидущей задачи видимъ, что онъ состоялъ въ слѣдующемъ. Опредѣливъ интегралъ, различный отъ интеграла живыхъ силъ, мы нашли другой, заключающій время, по условію, чтобы въ комбинаціи съ первымъ онъ приводилъ Пуассонову скобку къ нулю; третій интегралъ, дающій траэкторію, полученъ по условію, чтобы въ комбинаціи съ 1-мъ онъ приводилъ Пуассонову скобку къ единицѣ. Интегралъ живыхъ силъ дополнилъ рѣшеніе. Г. Бертранъ показалъ, что этотъ ходъ рѣшенія не случайный и долженъ быть таковъ во всѣхъ задачахъ разсматривающихъ движеніе въ плоскости или общнѣе, когда координаты точекъ системы могутъ выражаться функціями двухъ независимыхъ перемѣнныхъ. Доказательство этого предложенія весьма просто, но изложивъ сущность пріема, я считаю излишнимъ входить въ дальнѣйшія подробности.

Digitized by Google

VIII.

Способъ Коши интегрированія общаго уравненія съ частными производными 1-го порядка.

§ 30. Способъ интегрированія одного или нѣсколькихъ совмѣстныхъ уравненій съ частными производными 1-го порядка и, какъ слѣдствіе его, теорія интегрированія уравненій каноническаго вида составили главный предметъ предъидущихъ главъ этого разсужденія. Но, прежде чѣмъ этотъ способъ получилъ полное развитіе въ произведеніяхъ Якоби и другихъ математиковъ, задача интегрированія общаго уравненія съ частными производными 1-го порядка была уже вполнѣ разрѣшена Пфаффомъ, Коши и Якоби. Способы, предложенные этими математиками, различные по основаніямъ и формѣ, имѣютъ однако одну общую цѣль: привести задачу къ *полному* интегрированію системы обыкновенныхъ совмѣстныхъ уравненій вида (10) § 11. Новый способъ Якоби, изложенный выше, отличается отъ прежнихъ способовъ тѣмъ что ограничивается опредѣленіемъ половины полнаго числа интеграловъ, удовлетворяющихъ извѣстныя условія, упомянутой системы совмѣстныхъ уравненій. Отысканіе-же этихъ интеграловъ приводитъ ко многимъ системамъ обыкновенныхъ совмѣстныхъ уравненій, полнаго интегрированія которыхъ никогда не требуется, но всегда достаточно бываетъ опредѣлить какой нибудь одинъ изъ интеграловъ каждой системы. Пфаффъ нашелъ теоретическое рѣшеніе вопроса интегрированія общаго уравненія съ частными производными 1-го порядка, какъ частный случай другой рѣшенной имъ задачи (*): интегрированія уравненія вида

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \cdots + X_{2n}\,dx_{2n} = 0,$$

въ которомъ $X_1, \ldots X_{2n}$ представляютъ четное число данныхъ функцій $x_1, \ldots x_{2n}$, не удовлетворяющихъ извѣстныя условія Фонтеня или Эйлера. Способъ Пфаффа приводитъ къ полному интегрированію нѣсколькихъ системъ обыкновенныхъ совмѣстныхъ уравненій, изъ которыхъ только первая получается непосредственно изъ данныхъ задачи, каждая-же изъ слѣдующихъ можетъ быть написана только послѣ полнаго интегрированія предшествующей системы. Коши, избравъ другой пріемъ рѣшенія, и Якоби, занимаясь упрощеніемъ способа Пфаффа, показали, что для полученія полнаго интеграла уравненія съ частными производными 1-го порядка, достаточно вполнѣ интегрировать первую изъ системъ совмѣстныхъ уравненій способа Пфаффа. Имѣя въ виду совершенное сходство окончательныхъ заключеній способовъ Коши и Якоби, я ограничусь изложеніемъ въ самомъ общемъ видѣ только перваго изъ нихъ.

(*) Abhandlungen der Berliner Akademie. 1814—1815.

Digitized by Google

Пусть $x_1, \ldots x_n$ представляютъ n независимыхъ перемѣнныхъ, z — ихъ неизвѣстную функцію, для частныхъ производныхъ которой примемъ означеніе

$$\frac{dz}{dx_i} = p_i,$$

при всѣхъ значеніяхъ $i = 1, 2, \ldots n$.

Общій видъ уравненія съ частными производными 1-го порядка представится слѣдующимъ образомъ

$$F(x_1, \ldots x_n, z, p_1, \ldots p_n) = 0. \qquad (1)$$

Опредѣленіе функціи z, удовлетворяющей уравненіе (1), составляетъ задачу по сущности своей неопредѣленную; и дѣйствительно самое общее выраженіе z должно заключать произвольную функцію. Но Коши дѣлаетъ вопросъ совершенно опредѣленнымъ, присоединяя дополнительное условіе: чтобы для даннаго частнаго значенія одного изъ независимыхъ перемѣнныхъ, положимъ

$$x_n = a,$$

функція z и ея частныя производныя $p_1, \ldots p_n$ принимали соотвѣтственно значенія $\zeta, \omega_1, \ldots \omega_n$. Здѣсь ζ означаетъ произвольно данную функцію $x_1, \ldots x_{n-1}$, положимъ

$$f(x_1, \ldots x_{n-1}),$$

и $\omega_1, \ldots \omega_{n-1}$ — частныя производныя этой функціи, такъ что вообще

$$\omega_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

при всѣхъ значеніяхъ $i = 1, 2, \ldots n-1$; наконецъ ω_n представляетъ значеніе выведенное изъ уравненія

$$F(x_1, \ldots x_n, a, \zeta, \omega_1, \ldots \omega_{n-1}, \omega_n) = 0.$$

Для опредѣленія функціи z, удовлетворяющей всѣ предъидущія требованія, Коши употребляетъ способъ измѣненія независимыхъ перемѣнныхъ, примѣненный въ первый разъ Ампероиъ для рѣшенія разсматриваемой задачи въ частномъ случаѣ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ.

Представимъ $n-1$ перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_{n-1}$ выраженными такимъ же числомъ различныхъ функцій $n-1$ новыхъ перемѣнныхъ $\xi_1, \ldots \xi_{n-1}$ и стараго x_n. Вслѣдствіе этого z и p_i будутъ функціями x_n и ξ_i; дифференцируя въ этомъ предложеніи, находимъ уравненія:

$$\frac{dz}{dx_n} = p_1 \frac{dx_1}{dx_n} + \cdots + p_{n-1} \frac{dx_{n-1}}{dx_n} + p_n, \qquad (2)$$

$$\frac{dz}{d\xi_i} = p_1 \frac{dx_1}{d\xi_i} + \cdots + p_{n-1} \frac{dx_{n-1}}{d\xi_i}, \qquad (3)$$

Digitized by Google

На основаніи равенства

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi_i \partial x_n} - \frac{\partial^2 z}{\partial x_n \partial \xi_i} = 0$$

изъ предъидущихъ уравненій получатся слѣдующія:

$$(4) \qquad \frac{\partial p_n}{\partial \xi_i} = \left(\frac{\partial p_1}{\partial x_n}\frac{\partial x_1}{\partial \xi} - \frac{\partial p_1}{\partial \xi_i}\frac{\partial x_1}{\partial x_n}\right) + \cdots$$
$$\cdots = \sum_{k=1}^{k=n-1}\left(\frac{\partial p_k}{\partial x_n}\frac{\partial x_k}{\partial \xi_i} - \frac{\partial p_k}{\partial \xi_i}\frac{\partial x_k}{\partial x_n}\right).$$

Далѣе, выраженія $x_1, \ldots x_{n-1}$, z, $p_1, \ldots p_n$ въ перемѣнныхъ $\xi_1, \ldots \xi_{n-1}$, x_n предполагаются такими, что по вставкѣ ихъ уравненіе (1) приведется къ тождеству; поэтому дифференцируя его въ отношеніи каждаго изъ перемѣнныхъ x_n и ξ_i, получимъ

$$(5) \qquad \frac{\partial F}{\partial x_n} + \frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_n} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}}\frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n} +$$
$$+ \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_n} + \frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_n} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial x_n} = 0,$$

$$(5') \qquad \frac{\partial F}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}}\frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_i} +$$
$$+ \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi_i} + \frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial \xi_i} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial \xi_i} = 0.$$

Воспользуемся сначала послѣднимъ изъ двухъ предъидущихъ уравненій, которое должно имѣть мѣсто для $i = 1, \ldots n-1$; вставивъ въ него значенія $\frac{\partial z}{\partial \xi_i}$ и $\frac{\partial p_n}{\partial \xi_i}$ (3) и (4) находимъ

$$(6) \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial p_1}{\partial x_n}\frac{\partial F}{\partial p_n}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} + \cdots$$
$$\cdots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_{n-1}} + p_{n-1}\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial F}{\partial p_n}\right)\frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_i} +$$
$$+ \left(\frac{\partial F}{\partial p_1} - \frac{\partial x_1}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial F}{\partial p_n}\right)\frac{\partial p_1}{\partial \xi_i} + \cdots$$
$$\cdots + \left(\frac{\partial F}{\partial p_{n-1}} - \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n}\frac{\partial F}{\partial p_n}\right)\frac{\partial p_{n-1}}{\partial \xi_i} = 0.$$

Функціи $\xi_1, \ldots \xi_{n-1}$, x_n представляющія значенія $x_1, \ldots x_{n-1}$ остаются до сихъ поръ неопредѣленными; мы можемъ воспользо-

Digitized by Google

ваться этимъ обстоятельствомъ и выбрать для нихъ такія выраженія, которыя удовлетворятъ уравненіямъ:

$$\frac{\partial F}{\partial p_1} - \frac{\partial x_1}{\partial x_n}\frac{\partial F}{\partial p_n} = 0, \quad \ldots \quad \frac{\partial F}{\partial p_{n-1}} - \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n}\frac{\partial F}{\partial p_n} = 0 \qquad (7)$$

и, чтобы дополнить опредѣленіе $n-1$ разсматриваемыхъ функцій, присоединимъ условіе, чтобъ для частнаго значенія $x_n = a$ функціи $x_1, \ldots x_{n-1}$ принимали соотвѣтственно значенія $\xi_1, \ldots \xi_{n-1}$. При этихъ условіяхъ уравненіе (6) приметъ видъ

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial p_1}{\partial x_n}\frac{\partial F}{\partial p_n}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} + \cdots$$

$$\cdots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_{n-1}} + p_{n-1}\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n}\frac{\partial F}{\partial p_n}\right)\frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_i} = 0$$

и при различныхъ значеніяхъ $i = 1, 2, \ldots n-1$, мы будемъ имѣть $n-1$ подобныхъ уравненій. Функціональный опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}, & \cdots & \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_1} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_{n-1}}, & \cdots & \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_{n-1}} \end{vmatrix}$$

не долженъ быть равенъ нулю, потому что иначе (на основаніи теоремы § 3) между перемѣнными $x_1, \ldots x_n$ существовало-бы одно или нѣсколько уравненій; поэтому необходимымъ слѣдствіемъ предъидущихъ уравненій будутъ уравненія вида

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial p_i}{\partial x_n}\frac{\partial F}{\partial p_n} = 0, \qquad (8)$$

имѣющія мѣсто при всѣхъ значеніяхъ $i = 1, 2, \ldots n-1$.

Теперь мы имѣемъ всѣ уравненія, необходимыя для рѣшенія вопроса. Соображая всѣ постепенно введенныя условія, находимъ что задача состоитъ въ слѣдующемъ: требуется опредѣлить $2n$ неизвѣстныхъ функціи $x_1, \ldots x_{n-1}$, z, $p_1, \ldots p_n$ перемѣнныхъ $\xi_1, \ldots \xi_{n-1}$, x_n, такимъ образомъ: 1) чтобы для частнаго значенія $x_n = a$ онѣ принимали соотвѣтственно значенія $\xi_1, \ldots \xi_{n-1}$, ζ, $\omega_1, \ldots \omega_{n-1}$, гдѣ $\zeta = f(\xi_1, \ldots \xi_{n-1})$ и вообще $\omega_i = \frac{\partial f(\xi_1, \ldots \xi_{n-1})}{\partial \xi_i}$ при $i = 1, 2, \ldots n-1$, наконецъ значеніе ω_n выводится изъ уравненія

$$F(\xi_1, \ldots \xi_{n-1}, a, \zeta, \omega_1, \ldots \omega_{n-1}, \omega_n) = 0;$$

2) чтобы эти функціи удовлетворяли $3n-1$ уравненіямъ: (1), (2), (3), (7) и (8).

Digitized by Google

Мы не беремъ въ расчетъ уравненій (4), которыя суть слѣдствія уравненій (2) и (3), и уравненія (5), равнозначительнаго (1).

Но для опредѣленія $2n$ неизвѣстныхъ функцій достаточно вообще $2n$ уравненій; слѣдовательно въ предъидущей системѣ $3n-1$ уравненій $n-1$ оказываются излишними. И дѣйствительно можно доказать: 1) что система $2n$ уравненій, состоящая изъ (1), (2), (7) и (8) достаточна для опредѣленія требуемыхъ значеній $2n$ искомыхъ функцій и 2) что эти значенія приведутъ къ тождествамъ $n-1$ остальныхъ уравненій (3).

Займемся сначала первою частью доказательства. Уравненія (2), (7) и (8) можно написать слѣдующимъ образомъ

$$\frac{dz}{dx_n} = \frac{p_1 \frac{\partial F}{\partial p_1} + \cdots + p_n \frac{\partial F}{\partial p_n}}{\frac{\partial F}{\partial p_n}},$$

$$(9) \qquad \frac{dx_i}{dx_n} = \frac{\frac{\partial F}{\partial p_i}}{\frac{\partial F}{\partial p_n}}, \qquad -\frac{dp_i}{dx_n} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial p_n}};$$

два послѣднія изъ этихъ уравненій имѣютъ мѣсто при всѣхъ значеніяхъ $i = 1, 2, \ldots n-1$.

Къ уравненіямъ (9) должно присоединить еще (1); но это послѣднее, можно замѣнить равнозначущимъ ему уравненіемъ (5), которое по вставкѣ значеній $\frac{dx_i}{dx_n}$, $\frac{dz}{dx_n}$, $\frac{dp_i}{dx_n}$ изъ уравненій (9) легко приводится къ виду

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p_n \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{dp_n}{dx_n} \frac{\partial F}{\partial p_n} = 0.$$

или

$$(10) \qquad -\frac{dp_n}{dx_n} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial p_n}},$$

симметричному съ послѣднимъ изъ уравненій (9).

Система $2n$ уравненій (9) и (10) заключаетъ собственно говоря частныя производныя $2n$ искомыхъ функцій; но такъ какъ частныя дифференцированія повсюду въ нихъ обозначены въ отношеніи одного только x_n, между тѣмъ какъ остальныя независимыя перемѣнныя $\xi_1 \ldots \xi_{n-1}$ не входятъ даже явнымъ образомъ въ разсматри-

Digitized by Google

ваемыя уравненія, то эти послѣднія можно разсматривать, какъ систему обыкновенныхъ уравненій 1-го порядка. На этомъ основаніи уравненія (9) и (10) можно представить слѣдующимъ образомъ

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \cdots = \frac{dx_n}{\frac{\partial F}{\partial p_n}} = \frac{dz}{p_1\frac{\partial F}{\partial p_1} + \cdots + p_n\frac{\partial F}{\partial p_n}} =$$

$$= \frac{-dp_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial F}{\partial z}} = \cdots = \frac{-dp_n}{\frac{\partial F}{\partial x_n} + p_n\frac{\partial F}{\partial z}} \qquad (11)$$

Посредствомъ интегрированія системы уравненій (11) можно вообще, какъ извѣстно, найти конечныя и опредѣленныя выраженія функцій $x_1, \ldots x_{n-1}, z, p_1, \ldots p_n$ перемѣннаго x_n, которыя для частнаго значенія $x_n = a$ примутъ соотвѣтственно значенія $\xi_1, \ldots \xi_{n-1}$, $\zeta, \omega_1, \ldots \omega_n$. Положимъ эти выраженія будутъ

$$\left.\begin{aligned}
z &= \varphi \quad (x_n, \xi_1, \ldots \xi_{n-1}, \zeta, \omega_1, \ldots \omega_n),\\
x_1 &= \varphi_1 \quad (x_n, \xi_1, \ldots \xi_{n-1}, \zeta, \omega_1, \ldots \omega_n),\\
&\vdots\\
x_{n-1} &= \varphi_{n-1} (x_n, \xi_1, \ldots \xi_{n-1}, \zeta, \omega_1, \ldots \omega_n),\\
p_1 &= \psi_1 \quad (x_n, \xi_1, \ldots \xi_{n-1}, \zeta, \omega_1, \ldots \omega_n),\\
&\vdots\\
p_n &= \psi_n \quad (x_n, \xi_1, \ldots \xi_{n-1}, \zeta, \omega_1, \ldots \omega_n).
\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Вставивъ въ первыя n уравненій (12) значенія

$$\zeta = f(\xi_1, \ldots \xi_{n-1}),\ \omega_1 = \frac{\partial f(\xi_1, \ldots \xi_{n-1})}{\partial \xi_1}, \ldots$$

$$\omega_{n-1} = \frac{\partial f(\xi_1, \ldots \xi_{n-1})}{\partial \xi_{n-1}}$$

и выраженіе ω_n, выведенное изъ уравненія

$$F(\xi_1, \ldots \xi_{n-1}, a, \zeta, \omega_1, \ldots \omega_n) = 0,$$

получимъ n уравненій между первоначальными перемѣнными $z, x_1, \ldots x_n$ и вспомогательными $\xi_1, \ldots \xi_{n-1}$; слѣдовательно если видъ функціи f будетъ данъ, то вспомогательныя перемѣнныя могутъ быть исключены и такимъ образомъ получится уравненіе, изъ котораго выведется значеніе z въ функціи $x_1, \ldots x_n$, выполняющее всѣ предположенныя условія, т. е. искомый интегралъ задачи. Если-же видъ функціи f остается неопредѣленнымъ, то исключеніе величинъ $\xi_1, \ldots \xi_{n-1}$,

Digitized by Google

становится вообще невозможнымъ, однако систему первыхъ n уравненій (12) можно разсматривать какъ равнозначущую общему интегралу уравненія (1). При неопредѣленномъ видѣ функціи f исключеніе $\xi_1, \ldots \xi_{n-1}$ будетъ возможно только въ одномъ частномъ случаѣ, когда первыя n уравненій (12) не будутъ содержать величинъ $\omega_1 \ldots \omega_n$; тогда разрѣшая ихъ относительно ζ, $\xi_1, \ldots \xi_{n-1}$ найдемъ значенія вида

$$\zeta = \pi(x_1, \ldots x_n, z), \xi_1 = \pi_1(x_1, \ldots x_n, z), \ldots \xi_{n-1} = \pi_{n-1}(x_1, \ldots x_n, z),$$

вставляя которыя въ уравненіе

$$\zeta = f(\xi_1, \ldots \xi_{n-1})$$

получимъ общій интегралъ въ видѣ уравненія

$$\pi = f(\pi_1, \ldots \pi_{n-1}).$$

По такому виду общаго интеграла не трудно заключить, что данное уравненіе (11) должно быть линейнымъ относительно $p_1, \ldots p_n$; а при этомъ условіи для вывода первыхъ n интеграловъ системы (12) очевидно достаточно пользоваться первыми n уравненіями (11), т. е.

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \cdots = \frac{dx_n}{\frac{\partial F}{\partial p_n}} = \frac{dz}{p_1 \frac{\partial F}{\partial p_1} + \cdots + p_n \frac{\partial F}{\partial p_n}}.$$

Такимъ образомъ теорія Коши обнимаетъ въ общемъ пріемѣ рѣшеніе линейныхъ и нелинейныхъ уравненій.

Остается доказать, что выраженія (12) функцій $z, x_1, \ldots x_{n-1}, p_1, \ldots p_n$ по вставкѣ ихъ въ $n-1$ уравненія (3) обратятъ эти послѣднія въ тождества. Допустимъ, что результаты упомянутой подстановки въ 1-ю и 2-ю части уравненій (3) не будутъ одинаковы и представимъ разность ихъ черезъ $J^{(i)}$, означая такимъ образомъ неизвѣстную функцію $\xi_1, \ldots \xi_{n-1}, x_n$, т. е. положимъ

$$\frac{\partial z}{\partial \xi_1} = p_1 \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} + \cdots + p_{n-1} \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_i} + J^{(i)}$$

Присоединяя къ этому равенству уравненіе (2), которое по вставкѣ въ него значеній (12) будетъ тождественное, и комбинируя его съ предъидущимъ точно такъ, какъ для вывода уравненія (4), находимъ

$$\frac{\partial p_n}{\partial \xi_i} = \frac{\partial p_1}{\partial x_n} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} - \frac{\partial p_1}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_1}{\partial x_n} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n} \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_i} - \frac{\partial p_{n-1}}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n} + \frac{\partial J^{(i)}}{\partial x_n}.$$

Вставляя предъидущія выраженія $\frac{\partial z}{\partial \xi_i}$ и $\frac{\partial p_n}{\partial \xi_i}$ въ уравненіе (5'), будемъ

Digitized by Google

имѣть:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}+p_1\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial p_1}{\partial x_n}\frac{\partial F}{\partial p_n}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \xi_i}+\cdots$$
$$\cdots+\left(\frac{\partial F}{\partial x_{n-1}}+p_{n-1}\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n}\frac{\partial F}{\partial p_n}\right)\frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_i}+$$
$$+\left(\frac{\partial F}{\partial p_1}-\frac{\partial x_1}{\partial x_n}\frac{\partial F}{\partial p_n}\right)\frac{\partial p_1}{\partial \xi_i}+\cdots$$
$$\cdots+\left(\frac{\partial F}{\partial p_{n-1}}-\frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n}\frac{\partial F}{\partial p_n}\right)\frac{\partial p_{n-1}}{\partial \xi_i}+$$
$$+\frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial J^{(i)}}{\partial x_n}+\frac{\partial F}{\partial z}J^{(i)}=0.$$

Но въ силу уравненій (7) и (8), которыя удовлетворяются значеніями (12), всѣ члены предъидущаго уравненія, исключая двухъ послѣднихъ, тождественно равны нулю; поэтому для опредѣленія $J^{(i)}$ получимъ уравненіе

$$\frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial J^{(i)}}{\partial x_n}+\frac{\partial F}{\partial z}J^{(i)}=0,$$

или

$$\frac{\partial \log J^{(i)}}{\partial x_n}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial z}}{\dfrac{\partial F}{\partial p_n}}.$$

По умноженіи обѣихъ частей послѣдняго уравненія на dx_n и интегрированіи отъ a до x_n, получимъ

$$\log\frac{J^{(i)}}{J_a^{(i)}}=-\int_a^{x_n}\frac{\dfrac{\partial F}{\partial z}}{\dfrac{\partial F}{\partial p_n}}dx_n,$$

откуда

$$J^{(i)}=J_a^{(i)}\,e^{-\int_a^{x_n}\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial p_n}}dx_n}.$$

Digitized by Google

Здѣсь $J_a^{(i)}$ представляетъ значеніе $J^{(i)}$ при $x_n = a$ и не трудно убѣдиться, что оно равно нулю.

Въ-самомъ дѣлѣ, положивъ $x_n = a$, вспомнимъ что въ то же время функціи $z, x_1, \ldots x_{n-1}, p_1, \ldots p_{n-1}$ должны принять соотвѣтственно значенія $\zeta, \xi_1, \ldots \xi_{n-1}, \omega_1, \ldots \omega_{n-1}$; слѣдовательно уравненіе (3) приметъ видъ

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\xi_i} = \omega_1 \frac{\partial\xi_1}{\partial\xi_i} + \ldots + \omega_i \frac{\partial\xi_i}{\partial\xi_i} + \ldots + \omega_{n-1} \frac{\partial\xi_{n-1}}{\partial\xi_i} + J_a^{(i)},$$

откуда

$$J_a^{(i)} = \frac{\partial\zeta}{\partial\xi_i} - \omega_i = 0.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ очевидно, что вообще и $J^{(i)} = 0$; т. е. уравненія (3) будутъ удовлетворены интегралами (12), которые, выполняя такимъ образомъ всѣ требуемыя условія, доставятъ самое общее рѣшеніе задачи.

Противъ предъидущаго заключенія было сдѣлано возраженіе г. Бертраномъ (Comptes rendus, T. XLV, p. 617), состоящее въ томъ, что это заключеніе вѣрно только при условіи, если интегралъ

$$(14) \qquad -\int_a^{x_n} \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial p_n}} dx_n$$

не принимаетъ ни неопредѣленнаго, ни безконечнаго значенія и что съ другой стороны для произвольной функціи $\zeta = f(\xi_1, \ldots \xi_{n-1})$ можно всегда выбрать такой видъ, что тотъ или другой случай будутъ имѣть мѣсто.

По поводу предъидущаго замѣчанія г. Серре предпринялъ изслѣдованіе этихъ исключительныхъ случаевъ и доказалъ (Comptes rendus, T. LIII, Séances des 7 et 28 octobre 1861), что если интегралъ (14) не имѣетъ конечнаго и опредѣленнаго значенія для опредѣленнаго вида функціи $f(\xi_1, \ldots \xi_{n-1})$; то вмѣстѣ съ тѣмъ уравненія (12) неспособны доставить общее рѣшеніе задачи. Оно, въ такомъ случаѣ, получится помощію полнаго интеграла, т. е. интеграла, заключающаго столько-же произвольныхъ постоянныхъ, сколько въ данномъ уравненіи независимыхъ перемѣнныхъ. Я считаю впрочемъ излишнимъ приводить подробности изслѣдованія г. Серре, тѣмъ болѣе, что оно изъ упомянутаго выше академическаго сборника перепечатано имъ со многими поясненіями и примѣрами въ послѣднемъ изданіи руководства Лакроа (Traité élémentaire de calc. diff. et de calc. integr. par. S. F. Lacroix, 6-ème ed. augmentée de notes par M. M. Hermite et Serret. Note II).

Digitized by Google

ПРОДУКТЫ ПИЩЕВАРЕНІЯ

ВЪ КРОВИ.

(*А. Я. Щербакова*).

Кюне (1) былъ первый наблюдатель, который показалъ, что синтонинъ нельзя считать за мышечный фибринъ, какъ его считали прежніе химики. Онъ же показалъ, что синтонинъ получается не исключительно только при дѣйствіи разведенной кислоты на мясо, но также и при дѣйствіи щелочи, кислоты или известковой воды на Kalialbuminat и фибринъ, и считаетъ поэтому синтонинъ продуктомъ дѣйствія кислоты на бѣлки во время акта желудочнаго пищеваренія.

К. Дьяконовъ, (2) подтвердивъ эти наблюданія Кюне, показалъ еще, что синтонинъ образуется при дѣйствіи кислоты и щелочи на створоженный жаромъ бѣлокъ, и потомъ, что синтонинъ является результатомъ дѣйствія на бѣлокъ не одной кислоты, а также и кислоты съ примѣсью пепсина, и такимъ образомъ заставляетъ смотрѣть на синтонинъ не какъ на промежуточный, но какъ на окончательный продуктъ желудочнаго пищеваренія.

Изъ изслѣдованій же К. Дьяконова въ первый разъ стало извѣстно, что продукты дѣйствія на бѣлки сока поджелудочной железы не имѣютъ ничего общаго съ продуктами желудочнаго пищеваренія; между тѣмъ какъ здѣсь главнымъ образомъ являются синтонинъ и тѣла, называемыя пептонами, сокъ поджелудочной железы сообщаетъ бѣлкамъ способность не растворяться въ разведенныхъ кислотахъ и тѣмъ рѣзко отличаетъ продукты своего дѣйствія отъ всѣхъ извѣстныхъ доселѣ бѣлковъ.

(1) Kühne. Untersuch. über das Protoplasma und die Contractilität, 1864.

(2) К. Дьяконовъ. Къ ученію о перевариваніи бѣлковыхъ веществъ. Казань. 1865.

Digitized by Google

Пока продуктами дѣйствія кишечныхъ соковъ на бѣлки считались пептоны, тѣла неимѣющія ни одной отличительной реакціи,—до тѣхъ поръ искать присутствія этихъ продуктовъ въ крови было дѣломъ почти невозможнымъ; когда же мѣсто этихъ продуктовъ заняли тѣла, имѣющія такія характеристическія реакціи, какъ синтонинъ и тѣло нерастворимое въ кислотахъ, тогда попытка—показать присутствіе этихъ тѣлъ въ крови стала уже болѣе или менѣе выполнимою.

Я поставилъ себѣ задачею слѣдующее:

1) Доказать присутствіе помянутыхъ продуктовъ въ крови V. portae во время акта пищеваренія.

2) Опредѣлить ихъ отношенія къ прочимъ бѣлковымъ веществамъ крови.

3) Опредѣленіемъ эндосмотическаго ихъ эквивалента показать вѣроятность поступленія ихъ изъ кишечнаго канала въ кровь.

Когда при какомъ либо изслѣдованіи затрогиваются вопросы, имѣющіе болѣе или менѣе общее значеніе, то эти вопросы болѣе всего занимаютъ умъ изслѣдователя и при этомъ частности на нѣкоторое время отодвигаются въ сторону. Занимаясь опредѣленіемъ продуктовъ желудочнаго пищеваренія въ крови, я напалъ на нѣкоторыя сближенія относительно многихъ бѣлковыхъ веществъ, сближенія, упрощивающія изученіе этой группы тѣлъ и очень просто объясняющія кажущіяся различія между ними: понятно, что этотъ важный вопросъ отвлекъ мое вниманіе, и вышеизложенная программа моей работы должна была уклониться нѣсколько въ сторону, а сама работа принять болѣе широкіе размѣры, нежели какіе предполагалось дать ей сначала. Это обстоятельство составляетъ также причину, почему упущены многія частности относительно объясненія хода реакцій, нѣкоторая неполнота опытовъ и т. д.

Но и въ этомъ видѣ, по случаю наступившихъ жаровъ моя работа не могла быть доведена до конца. Опытовъ относительно эндосмотическаго эквивалента продуктовъ пищеваренія такъ мало, что они еще не могутъ быть опубликованы въ настоящее время; также мало наблюденій касательно мѣста, занимаемаго въ организмѣ продуктомъ поджелудочной железы. На предлагаемую теперь статью не нужно смотрѣть поэтому, какъ на оконченный трудъ, а скорѣе какъ на сообщеніе, дѣлаемое съ цѣлью упроченія за собою работы въ сказанномъ выше направленіи.

---

15 іюля 1865 года.

Digitized by Google

РЕАКЦІИ СИНТОНИНА И ЕГО ОТНОШЕНІЕ КЪ ПРОЧИМЪ БѢЛКОВЫМЪ ВЕЩЕСТВАМЪ.

Синтонинъ по Кюне (1) имѣетъ слѣдующія реакціи: нерастворимъ въ водѣ, легко же растворимъ въ разведенныхъ кислотахъ и щелочахъ, откуда осѣдаетъ при нейтрализаціи. Щелочные и кислые растворы опаловые, при кипяченіи не свертываются. Растворъ синтонина въ 0,1% соляной кислотѣ осаждается на холодѣ отъ среднихъ солей. Осадокъ имѣетъ видъ желеобразный.

Растворъ въ углекислой 0,1% щелочи съ средними солями на холодѣ даетъ только мутность, переходящую при кипяченіи въ осадокъ.

Растворы синтонина въ известковой водѣ пѣнятся; при долгомъ кипяченіи пѣну можно стянуть въ тонкіе, непрозрачные, бѣлые хлопья. Жидкость, отфильтрованная отъ этихъ хлопьевъ, при нейтрализаціи даетъ еще сильный осадокъ неизмѣненнаго синтонина.

Это самыя выдающіяся реакціи синтонина. Остается еще прибавить, что въ концентрированныхъ кислотахъ синтонинъ не растворимъ и потомъ, что въ кислыхъ растворахъ синтонина, для полученія осадка отъ среднихъ солей щелочей, требуется тѣмъ болѣе соли, чѣмъ концентрированнѣе кислота, употребленная для растворенія.

Нѣкоторыя изъ этихъ реакцій, какъ то нерастворимость въ водѣ и легкая растворимость въ разведенныхъ кислотахъ и щелочахъ, общи синтонину, фибринородному и фибринопластическому веществу. Чтобы эти реакціи служили дока-

---

(1) W. Kühne. Unters. u. s. w. Lepzig. 1864.

Digitized by Google

зательствомъ присутствія въ крови синтонина, нужно было поэтому выдѣлить послѣднія два тѣла. Онѣ какъ извѣстно легко даютъ осадокъ съ углекислотою, эту-то реакцію я и выбралъ для отдѣленія этихъ веществъ, потому что указаній на то, что синтонинъ осаждается при этихъ условіяхъ, въ литературѣ я не знаю. Но прежде чѣмъ считать эти реакціи за строго установленныя, я хотѣлъ самъ сравнить реакціи синтонина и фибринопластическаго вещества, которое только одно и можетъ встрѣчаться въ сывороткѣ.

Сыворотка артеріальной или венозной крови была разбавляема въ 5—10 разъ большимъ количествомъ воды и обработывалась струею углекислоты до тѣхъ поръ, пока отфильтрованная жидкость не давала осадка съ углекислотою. Выдѣленное такимъ образомъ фибринопластическое вещество, собранное на фильтрѣ, взбалтывалось съ водою и снова обработывалось струею углекислоты. Промытое такимъ образомъ, вещество растворялось въ 0,1% щелочи и еще разъ осажденное углекислотою подвергалось уже изслѣдованію въ щелочномъ 0,1% растворѣ. Подобный растворъ я считалъ свободнымъ отъ примѣсей другихъ бѣлковъ.

Я получилъ слѣдующія реакціи:

Растворъ опаловый.

При нейтрализаціи осадокъ, уничтожающійся въ свободной кислотѣ.

Кислый растворъ опаловый.

Кислые и щелочные растворы при кипяченіи не мутятся.

Съ поваренною солью подкисленный уксусною кислотою растворъ на холодѣ даетъ желеобразный осадокъ, переходящій при кипяченіи въ непрозрачный и хлопчатый.

Щелочный растворъ съ известковою водою осадка на холодѣ не даетъ, при кипяченіи же въ пѣнѣ является бѣлый хлопчатый осадокъ, пристающій къ стѣнкамъ трубочки. Отфильтрованная отъ осадка жидкость при нейтрализаціи даетъ сильный, хлопчатый, прозрачный осадокъ.

Всѣ вышеприведенныя реакціи тождественны съ подобными же реакціями синтонина. Это вещество имѣетъ еще слѣдующія реакціи: слабо кислые и слабо щелочные растворы осаждаются углекислотою. Осадки, произведенные углекислотою въ кислыхъ и щелочныхъ растворахъ, растворяются при обработкѣ жидкости кислородомъ.

Digitized by Google

Подобное совпаденіе реакцій синтонина съ веществомъ по способу полученія и по главнымъ реакціямъ фибринопластическимъ, побудило меня приложить къ синтонину реакціи фибринопластическаго вещества, какъ ихъ описываетъ А. Шмидтъ. Для этой цѣли синтонинъ приготовлялся или обыкновеннымъ образомъ изъ лягушечьяго мяса настаиваніемъ съ 0,1% соляною кислотою и нейтрализованіемъ, или по способу К. Дьяконова — настаиваніемъ яичнаго бѣлка съ 0,1% щелочью при температурѣ 40°С. Такъ какъ по А. Шмидту яичный бѣлокъ содержитъ вещество, осаждаемое углекислотою и дѣйствующее фибринопластически, то для устраненія всякихъ недоразумѣній, разведенный водою и профильтрованный яичный бѣлокъ до настаиванія со щелочью былъ долгое время обрабатываемъ углекислотою и образующійся мелкій осадокъ отфильтровываемъ.

Теперь я приведу всѣ главныя реакціи фибринопластическаго вещества по А. Шмидту, (¹) и покажу отношеніе этихъ же реагентовъ къ синтонину. Цифры будутъ означать реакціи фибринопластическаго вещества, буквы—реакціи синтонина.

1) Растворъ фибринопластическаго вещества въ разведенной щелочи прозраченъ, иногда опалесцируетъ.

а) Концентрированные щелочные растворы синтонина опаловы; опалесценція кислыхъ растворовъ сильнѣе. Разведенные растворы опалесцируютъ только слегка.

2) Осадокъ, произведенный углекислотою въ щелочныхъ растворахъ, растворяется въ кислородѣ или атмосферномъ воздухѣ. Малѣйшій избытокъ кислоты или щелочи растворяетъ осадокъ. Вода растворяетъ только слѣды. Вода, содержащая въ растворѣ слѣды этого вещества, мутится отъ углекислоты и осаждаетъ произвольно вещества черезъ 5—10 дней при обыкновенной температурѣ и черезъ 2—4 дня при температурѣ 25°—28°С. Слѣдовательно фибринопластическое вещество растворяется частію въ водѣ, откуда, какъ и изъ щелочныхъ растворовъ, осаждается углекислотою; растворяется въ разведенныхъ кислотахъ и щелочахъ; осадокъ отъ углекислоты растворяется при обработкѣ жидкости кислородомъ или атмосфернымъ воздухомъ.

(¹) A. Schmidt. Weiteres über Faserstoff und seine Gerinnung. Arch. f. Anat. 1862.

Digitized by Google

b) Если свѣже-осажденный синтонинъ прожать между пропускною бумагою и взболтать съ водою, то въ скоромъ времени онъ безъ остатка растворяется въ ней. Реакція такого раствора бываетъ въ большинствѣ случаевъ нейтральна, иногда слабо кислая, но растворъ, какъ легко понятно, всегда содержитъ незначительное количество средней соли. Если свѣже-осажденный синтонинъ промывать водою только до тѣхъ поръ, пока стекающая жидкость будетъ вполнѣ нейтральна, то синтонинъ послѣ этого все еще хорошо растворяется въ водѣ, хотя не такъ быстро и не въ такомъ большомъ количествѣ, какъ въ первомъ случаѣ. Такіе растворы содержатъ уже очень незначительное количество средней соли. Чтобы вполнѣ удалить образующуюся при нейтрализаціи среднюю соль, нужно промывать синтонинъ довольно долгое время,—часъ, два, иногда и болѣе. Тогда синтонинъ уже трудно растворяется въ водѣ (¹). Чтобы получить растворъ синтонина такой концентраціи, чтобы можно было видѣть ясно всѣ реакціи, то нужно около часу держать его подъ водою при частомъ взбалтываніи. Продолжительнымъ промываніемъ можно достигнуть того, что содержаніе неорганическихъ солей въ растворѣ сведется на нѣтъ.

Въ этихъ трехъ случаяхъ реакціи раствора, если онъ нейтраленъ, и въ первомъ случаѣ—одинѣ и тѣ же.

Ниже будетъ показано, что реакціи синтонина, растворенная въ среднихъ соляхъ совершенно другія, такъ что на эти растворы нужно смотрѣть какъ на водяные. Несомнѣнно только то, что небольшое количество соли усиливаетъ способность синтонина растворяться въ водѣ.

Водный растворъ синтонина, равно какъ и слабо кислые и слабо щелочные растворы осаждаются углекислотою. При повторенной обработкѣ послѣдніе фильтраты не даютъ ясныхъ реакцій на синтонинъ. Изъ 0,1% уксуснокислыхъ растворовъ синтонинъ осѣдаетъ въ видѣ крупныхъ хлопьевъ, изъ щелочныхъ же—въ видѣ очень мелкихъ. Осажденіе изъ кислыхъ растворовъ идетъ труднѣе и не такъ полно какъ изъ щелочныхъ; изъ растворовъ же въ 0,1% соляной кислотѣ, — синтонинъ почти не осѣдаетъ. Послѣ получасовой

(¹) Такой синтонинъ также сравнительно очень трудно растворяется въ кислотахъ и щелочахъ.

Digitized by Google

обработки подобныхъ растворовъ углекислотою едва можно замѣтить нѣсколько хлопьевъ осѣвшаго синтонина;—вѣроятно это и была причина, почему отношеніе синтонина къ углекислотѣ не было до сихъ поръ подмѣчено, такъ какъ въ большинствѣ случаевъ имѣли дѣло съ растворомъ синтонина въ этой кислотѣ.

Осадокъ отъ углекислоты, отфильтрованный отъ жидкости, легко растворяется въ разведенныхъ кислотахъ и щелочахъ. Осадки, произведенные въ слабо кислыхъ и слабо щелочныхъ растворахъ синтонина, при обработкѣ жидкости кислородомъ сбиваются въ большіе хлопья; растворенія при этомъ не замѣтно. Осадокъ же, произведенный углекислотою въ водяномъ растворѣ синтонина, при обработкѣ его атмосфернымъ воздухомъ, лишеннымъ углекислоты—растворяется. Раствореніе идетъ довольно медленно, около двухъ или трехъ часовъ, при чемъ хлопья осадка дѣлаются все мельче и мельче, пока наконецъ совершенно не исчезнутъ. Въ водяномъ растворѣ синтонина осадокъ отъ углекислоты образуется очень скоро и минутъ черезъ 5—10 достигаетъ своего maximum; если образовавшійся осадокъ растворить при помощи атмосфернаго воздуха, или кислорода, и жидкость опять обработывать углекислотою, то образованіе осадка идетъ медленно и не полно.

При стояніи водныхъ растворовъ синтонина въ теченіе однихъ или двухъ сутокъ, можно замѣтить выдѣленіе части синтонина въ видѣ мелкаго осадка (¹). Выдѣленія же всего синтонина я не могъ замѣтить въ теченіе недѣли. Далѣе растворы загнивали.

Слѣдовательно синтонинъ, какъ и фибринопластическое вещество, растворяется въ водѣ и осаждается изъ всѣхъ растворовъ углекислотою; растворяется въ разведенныхъ кислотахъ и щелочахъ; осадокъ, произведенный углекислотою въ водяныхъ растворахъ синтонина растворяется при помощи кислорода или атмосфернаго воздуха.

3) Фибринопластическое вещество, осѣвшее при нейтрализаціи, при нагрѣваніи собирается въ большіе, вязкіе хлопья, которые растворяются только въ концентрированной уксусной кислотѣ и въ концентрированныхъ щелочахъ. При на-

(¹) Не отъ вліянія ли углекислоты воздуха?

Digitized by Google

грѣваніи кислыхъ и щелочныхъ растворовъ мути не бываетъ и вещество сохраняетъ свои химическія свойства.

c) Отношенія къ этимъ реакціямъ у синтонина тѣ же.

4) Происходитъ сильный хлопчатый, бѣлый осадокъ, если щелочные и кислые растворы фибринопластическаго вещества будутъ вскипячены съ небольшимъ количествомъ средней соли щелочей. Для этого требуется самое незначительное количество соли. Осадокъ уже не растворяется въ разведенныхъ кислотахъ и щелочахъ. Вещество далѣе растворяется въ среднихъ соляхъ, и осѣдаетъ при кипяченіи какъ упорно нерастворимое тѣло, При разбавленіи такихъ растворовъ водою, жидкость тѣмъ болѣе мутится, чѣмъ сильнѣе разбавляютъ, но при этомъ не все вещество осѣдаетъ. Болѣе сильный осадокъ происходитъ тогда, когда разведенные растворы обработать углекислотою или прибавить разведенной уксусной кислоты. Чѣмъ болѣе избытокъ растворяющей соли, тѣмъ болѣе нужно разбавлять, чтобы получить осадокъ. Уксусная кислота впрочемъ производитъ и въ неразбавленныхъ растворахъ осадокъ, растворимый въ избыткѣ кислоты.

d) Выше мы видѣли, что кислые растворы синтонина съ поваренною солью даютъ на холодѣ желеобразный осадокъ, а щелочные даютъ осадокъ только при кипяченіи.

Если къ 1 с. с. водянаго раствора синтонина прибавить каплю не очень концентрированнаго раствора поваренной соли, то при взбалтываніи жидкости является въ короткое время сильный желеобразный, впослѣдствіи хлопчатый осадокъ, растворимый въ разведенныхъ кислотахъ.

Эти отношенія синтонина къ среднимъ солямъ съ перваго раза не имѣютъ какъ бы ничего общаго съ отношеніемъ фибринопластическаго вещества къ этимъ реагентамъ. Фибринопластическое вещество по А. Шмидту на холодѣ съ поваренною солью осадка не даетъ, тогда какъ кислые и нейтральные растворы синтонина при этихъ условіяхъ даютъ осадокъ.

Чтобы получить осадокъ съ поваренною солью только при кипяченіи, нужно по А. Шмидту самое незначительное количество реагента. Если это приложить къ синтонину, то отношеніе его къ поваренной соли будетъ тоже, что и фибринопластическаго вещества. И дѣйствительно:

Digitized by Google

Если прибавить къ 1 с. с. водянаго раствора синтонина 5—7 капель 0,1% уксусной кислоты и потомъ каплю неконцентрированнаго раствора поваренной соли, то осадка не происходитъ. Осадка также не будетъ, если сравнительно гораздо меньшее количество поваренной соли будетъ прибавлено къ неподкисленному водному раствору синтонина. Осадокъ въ этихъ случаяхъ является только при кипяченіи и прибавленіи бо́льшаго количества реагента.

Осадокъ, произведенный поваренною солью въ водномъ растворѣ синтонина, въ избыткѣ реагента растворяется. Если свѣже-осажденный синтонинъ перелить концентрированнымъ растворомъ поваренной соли, то синтонинъ въ немъ растворяется. Эти послѣдніе растворы сильно опалесцируютъ и при долгомъ стояніи осаждаютъ часть синтонина. Синтонинъ въ этихъ растворахъ не загниваетъ. Отношеніе его къ реагентамъ слѣдующее: при кипяченіи и разбавленіи водою является хлопчатый осадокъ (1). Осадокъ отъ кипяченія растворимъ только въ концентрированной уксусной кислотѣ и концентрированномъ щелокѣ, въ разведенныхъ кислотахъ и щелочахъ при дѣйствіи бо́лѣе высокой температуры и въ довольно продолжительное время. Осажденіе при этомъ не полно (2). Бо́лѣе полное осажденіе происходитъ, если растворы обработать углекислотою или прибавить къ нимъ разведенной уксусной кислоты.

Эти отношенія обоихъ веществъ къ поваренной соли можно формулировать такъ:

1) Щелочные растворы синтонина и фибринопластическаго вещества съ поваренною солью даютъ осадокъ только при кипяченіи.

2) Кислые и водяные растворы съ малымъ количествомъ реагента осадка на холодѣ не даютъ,—даютъ же его при кипяченіи. Чтобы получить осадокъ на холодѣ нужно бо́льшее количество реагента. Кислые растворы для произведенія осадка требуютъ тѣмъ больше соли, чѣмъ больше они содержатъ свободной кислоты.

---

(1) Чѣмъ болѣе избытокъ растворяющей соли, тѣмъ болѣе нужно разбавлять, чтобы получить осадокъ.

(2) Если отфильтровать образующійся при этомъ осадокъ, то фильтратъ съ углекислотою или разведенною уксусною кислотою даетъ еще осадокъ или муть.

Digitized by Google

3) Синтонинъ и фибринопластическое вещество въ среднихъ соляхъ растворяются. Такіе растворы даютъ осадки при кипяченіи, пропусканіи углекислоты и прибавленіи разведенныхъ кислотъ; если растворъ соли былъ взятъ концентрированный, то осадокъ получается также и при разбавленіи водою.

—

5) Углекислыя щелочи содержатся относительно фибринопластическаго вещества какъ ѣдкія, только способность растворять при этомъ меньше. Двойныя углекислыя щелочи растворяютъ еще меньше, но болѣе нежели среднія соли. И тутъ, какъ при среднихъ соляхъ, при кипяченіи является мутность; мутность получается еще при разведеніи водою, при пропусканіи углекислоты и прибавленіи разведенной уксусной кислоты.

e) Если къ водяному раствору синтонина прибавить каплю не очень концентрированнаго раствора дву-углекислаго калія, то при взбалтываніи жидкости черезъ нѣкоторое время является не очень обильный, желеобразный, удивительно прозрачный осадокъ. Осадокъ исчезаетъ при кипяченіи (отъ выдѣленія углекислоты?), въ избыткѣ реактива и въ разведенной кислотѣ.

Если въ водный растворъ синтонина положить кристаллъ двууглекислаго калія, то сначала является обильный, хлопчатый, прозрачный осадокъ, который по мѣрѣ растворенія соли дѣлается все меньше и меньше, пока совершенно не исчезнетъ.

Если свѣже-осажденный синтонинъ положить въ крѣпкій растворъ двууглекислаго калія, или положить избытокъ твердой соли въ водяной растворъ синтонина и профильтровать, то получается мало опалесцирующій, почти прозрачный фильтратъ, который даетъ слѣдующія реакціи: при кипяченіи является мутность, переходящая въ мелкій осадокъ, растворяющійся въ уксусной кислотѣ. При разведеніи водою является осадокъ, равно какъ и при обработкѣ жидкости углекислотою. Растворъ синтонина въ двууглекисломъ каліѣ относится къ реагентамъ, также какъ и растворъ этого вещества въ поваренной соли, только реакціи здѣсь не такъ ясны какъ тамъ; особенно трудно получается осадокъ отъ углекислоты, мутность же или осадокъ отъ разведенной уксус-.

Digitized by Google

ной кислоты становится ясною только тогда, когда къ слабокислому раствору синтонина прибавить нѣсколько капель концентрированнаго раствора двууглекислаго калія. Тогда при взбалтываніи жидкости чрезъ нѣсколько времени является прозрачный, желеобразный осадокъ, исчезающій при кипяченіи и прибавленіи большаго количества кислоты.

Реакціи синтонина въ двууглекислomъ калiѣ, какъ сказано, не всегда бываютъ ясны. Чтобы быть вполнѣ увѣреннымъ въ присутствіи хотя и незначительнаго осадка, я дѣлалъ эти реакціи съ большими количествами раствора только что профильтрованнаго. Реактивы, нужные для этого, фильтровались прямо въ растворъ.

А. Шмидтъ приводитъ еще слѣдующія реакціи для фибринопластическаго вещества: въ уксуснокислomъ растворѣ ferrocyankalium даетъ осадокъ; концентрированныя кислоты осаждаютъ вещество изъ кислыхъ и щелочныхъ растворовъ; алкоголь даетъ только осадокъ въ присутствіи среднихъ солей; въ алкогольныхъ растворахъ эѳиръ не производитъ измѣненія, уксусная же кислота производитъ осадокъ неизмѣненнаго вещества; осадокъ отъ кислоты или щелочи подъ алкоголемъ не измѣняется (1); при выпариваніи растворовъ является пленка.

Всѣ эти реакціи присущи также и синтонину.

Отношенія къ солямъ тяжелыхъ металловъ у синтонина и фибринопластическаго вещества тѣ же что и у бѣлка куриныхъ яицъ.

Если къ водяному раствору синтонина прибавить разведенной кислоты, щелочи или известковой воды, то тогда синтонинъ относится къ реагентамъ какъ и растворы его въ этихъ жидкостяхъ.

—

Реакціи того и другого вещества, какъ легко видѣть, тождественны, и подобное сходство отнимаетъ поэтому всякую возможность отдѣленія одного тѣла отъ другаго. Остается

(1) Синтонинъ, пролежавъ около двухъ недѣль подъ слоемъ абсолютнаго алькоголя, еще на столько растворяется въ водѣ, что въ растворѣ можно ясно видѣть всѣ главныя реакціи его.

Digitized by Google

еще одна реакція, характеристическая для вещества фибринопластическаго, — это его фибринопластическое свойство,—но полагая даже, что синтонинъ не имѣетъ этихъ свойствъ, на ваніи одной этой реакціи все же нельзя доказать присутствіе или отсутствіе синтонина въ крови, потому, что смѣсь обоихъ тѣлъ будетъ обладать въ бо́льшей или меньшей степени этимъ свойствомъ (1).

—

Приступая къ разбору отношеній синтонина къ прочимъ бѣлковымъ веществамъ, я долженъ сдѣлать оговорку, что все излагаемое здѣсь ограничивается лишь сообщеніемъ только нѣсколькихъ фактовъ, которые хотя и не лишены нѣкотораго интереса, но на столько малочисленны, что не позволяютъ еще сдѣлать какое либо общее заключеніе о сущности бѣлковыхъ веществъ,—заключеніе, которое было бы прочно и не преждевременно. Мои изслѣдованія относительно этого вопроса пока ограничиваются только нѣсколькими фактами касательно отношеній синтонина къ бѣлку куриныхъ яицъ, къ фибрину и къ такъ называемымъ пептонамъ. Отношеніе синтонина къ бѣлкамъ крови, не осѣдающимъ отъ дѣйствія углекислоты, составляютъ предметъ моихъ настоящихъ изслѣдованій и не могутъ еще быть опубликованы по недостатку опытовъ.

—

Если мы будемъ разсматривать бѣлокъ куриныхъ яицъ, то увидимъ, что количество бѣлка, соотвѣтствующее по своимъ химическимъ свойствамъ щелочному раствору синтонина,

(1) Обладаетъ ли синтонинъ фибринородными или фибринопластическими свойствами, имѣетъ ли вліяніе способъ приготовленія, особенно участіе пепсина на эти свойства синтонина, можетъ ли озонъ, дѣятель, съ которымъ синтонинъ встрѣчается при нереходѣ его въ кровь, сообщать ему эти свойства,—эти вопросы возникаютъ сами собою при разсматриваніи такого сходства тѣлъ, считаемыхъ доселѣ за вещества, не имѣющія какъ бы ничего общаго между собою. Рѣшеніе этихъ вопросовъ, по нѣкоторымъ обстоятельствамъ, я отложилъ на будущее время.

Digitized by Google

очень незначительно; бо́льшая же часть бѣлка отличается отъ щелочнаго раствора синтонина своимъ свойствомъ створаживаться отъ дѣйствія высокой температуры.

Мы выше видѣли, что растворы синтонина въ водѣ и въ среднихъ соляхъ при кипяченіи свертываются. Нѣтъ ли чего общаго между этими свертками?

Разсмотримъ еще разъ реакціи синтонина, растворенаго въ поваренной соли. Такіе растворы, какъ уже сказано, при кипяченіи, разведеніи ихъ водою, при пропусканіи углекислоты и прибавленіи разведенной кислоты, даютъ осадки (1), отличающіеся въ высшей степени трудною растворимостію въ разведенныхъ кислотахъ и щелочахъ, — обстоятельство уже замѣченное А. Шмидтомъ. Если собрать на фильтрѣ довольно значительное количество подобныхъ осадковъ, промыть ихъ водою до полнаго удаленія поваренной соли и потомъ, снявъ съ фильтры, держать часъ или два въ водѣ при частомъ взбалтываніи жидкости, то малая часть осадка растворится, и въ фильтратѣ можно ясно видѣть всѣ реакціи воднаго раствора синтонина.

Уже давно извѣстенъ тотъ фактъ, что если бѣлокъ куриныхъ яицъ разбавлять водою, то получится большой, хлопчатый осадокъ. Я приведу теперь нѣсколько фактовъ касательно химическаго характера этого осадка, а также и реакціи фильтрата, содержащаго въ растворѣ остальную часть бѣлка.

Если свѣжій яичный бѣлокъ, разрѣзавши пленки, развести въ 10 разъ бо́льшимъ количествомъ воды, то образуется сильный осадокъ. Часть осадка состоитъ изъ бѣлыхъ хлопьевъ, другая же часть изъ неизмѣненнаго бѣлка, окруженнаго слоемъ нерастворимаго, бѣлаго вещества. Эта часть осадка имѣетъ обыкновенно видъ круглыхъ, довольно большихъ зеренъ, середина которыхъ просвѣчиваетъ. Если долгое время стричь подобный осадокъ ножницами, то въ послѣдствіи весь осадокъ принимаетъ хлопчатый видъ.

---

(1) Часть синтонина изъ растворовъ въ поваренной соли можетъ быть выдѣлена также простымъ взбиваніемъ лучинками, или пропусканіемъ въ жидкость атмосфернаго воздуха, лишеннаго углекислоты. Эти осадки, какъ кажется, также трудно растворимы въ водѣ, кислотахъ и щелочахъ, но за трудностью ихъ полученія въ бо́льшемъ количествѣ, я не подвергалъ ихъ прямому изслѣдованію.

Digitized by Google

ОСАДОКЪ.

Осадокъ, собранный на фильтрѣ и промытый водою до тѣхъ поръ, пока стекающая жидкость не содержала неорганическихъ солей, снятъ съ фильтры и положенъ на нѣсколько часовъ въ воду, послѣ чего жидкость отфильтрована.

Жидкость показываетъ слѣдующія реакціи:

Едва опалесцируетъ.

При кипяченіи мутится, пѣнится и въ пѣнѣ является хлопчатый осадокъ.

Съ поваренною солью на холодѣ—желеобразный осадокъ, переходящій при кипяченіи въ непрозрачный и хлопчатый.

Съ двууглекислымъ каліемъ на холодѣ—желеобразный осадокъ.

Съ известковою водою осадокъ образуется только при кипяченіи (осадокъ собирается въ пѣнѣ). Если отфильтровать образовавшійся осадокъ и жидкость нейтрализовать, то при нейтрализаціи является мутность и осадокъ, исчезающій въ свободной кислотѣ.

Отъ углекислоты образуется въ жидкости хлопчатый, большой осадокъ, растворяющійся при обработкѣ жидкости кислородомъ.

Если къ жидкости прибавить каплю уксусной кислоты и сейчасъ нейтрализовать, то образуется хлопчатый осадокъ, растворимый въ свободной щелочи или кислотѣ.

Если прибавить не слишкомъ разведенной щелочи, то жидкость при кипяченіи не свертывается и при нейтрализаціи, до и послѣ кипяченія, даетъ осадокъ. Если щелочи прибавлено очень мало, напр. 3 капли 0,1% раствора на 2 с. с. жидкости, то при кипяченіи въ пѣнѣ является свертокъ; тѣмъ не менѣе отфильтрованная отъ осадка жидкость при нейтрализаціи мутится.

Если осадокъ отъ разведенія бѣлка водою обработать въ теченіе одной минуты 0,1% кислотою, или щелочью такой же концентраціи, то отфильтрованныя жидкости даютъ всѣ реакціи щелочныхъ и кислыхъ растворовъ синтонина.

При обыкновенной температурѣ въ разведенныхъ кислотахъ и щелочахъ, а также и въ водѣ, осадокъ растворяется очень мало, хотя растворы даютъ очень ясныя реакціи. При температурѣ въ 40°C раствореніе идетъ гораздо легче, такъ что разведенныя кислоты и щелочи въ нѣсколько часовъ

Digitized by Google

могутъ растворить довольно значительное количество осадка. Водяные растворы при этихъ условіяхъ получаются также концентрированнѣе.

Концентрированные растворы поваренной соли довольно легко растворяютъ осадокъ; такіе растворы при разведеніи ихъ водою, кипяченіи, пропусканіи углекислоты и прибавленіи разведенныхъ кислотъ даютъ осадки.

ФИЛЬТРАТЪ.

Отфильтрованный отъ осадка бѣлокъ былъ долгое время обрабатываемъ углекислотою. Образовавшійся мелкій осадокъ отфильтрованъ и фильтратъ разбавленъ равнымъ количествомъ воды, при чемъ осадка уже не образовалось.

Содержаніе къ реагентамъ слѣдующее:

Если прибавить нѣсколько капель щелочи или кислоты и прокипятить, то жидкость остается свѣтлою. Безъ кислоты или щелочи жидкость при кипяченіи сильно мутится.

Съ небольшимъ количествомъ поваренной соли при взбалтываніи жидкости является чрезъ нѣсколько времени желеобразный осадокъ. Тоже самое, если прилить бо́льшее количество соли къ подкисленной уксусною кислотою жидкости.

Если прилить нѣсколько капель 0,1% щелочи и потомъ поваренной соли, то на холодѣ осадка не образуется. Осадокъ образуется только при кипяченіи.

Съ двууглекислымъ каліемъ—прозрачный осадокъ. Осадокъ является, если подкисленную или подщелоченную жидкость нейтрализовать.

Если приготовленный такимъ образомъ бѣлокъ обрабатывать углекислотою, или атмосфернымъ воздухомъ, лишеннымъ углекислоты, или просто взбивать лучинками, то жидкость сильно пѣпится и въ пѣнѣ являются крупные хлопья осѣвшаго бѣлка. Такіе хлопья были собраны и положены въ большое количество дестилированной воды, съ которою тщательно перемѣшаны. Эти хлопья легче воды и держатся на ея поверхности; хлопья, промытые такимъ образомъ, сгараютъ на платиновой пластинкѣ почти не оставляя золы.

Промытые хлопья были положены въ новую небольшую порціо дестилированной воды и опять тщательно и долго съ нею смѣшаны. Послѣ получаса жидкость отфильтрована. Ея

Digitized by Google

реакціи тѣ же самыя, что и реакціи водянаго раствора осадка, образующагося при разведеніи бѣлка водою. Вообще отношеніе обоихъ осадковъ къ растворяющимъ жидкостямъ вполнѣ аналогично.

Выдѣляя бѣлокъ посредствомъ такихъ пріемовъ, какъ разбавленіе водою и пропусканіе атмосфернаго воздуха, или взбиваніе, я не рисковалъ встрѣтить возраженіе, что имѣю дѣло съ бѣлкомъ, уже измѣненнымъ самымъ ходомъ операціи. Съ этою же цѣлью всѣ реакціи были изучены мною на водяныхъ растворахъ, приготовленныхъ при обыкновенной температурѣ и въ возможно короткій срокъ, хотя вещество гораздо легче растворяется въ кислотахъ и щелочахъ, а также и при дѣйствіи болѣе высокой температуры.

Всѣ приведенныя реакціи этихъ осадковъ суть реакціи водянаго раствора синтонина; трудная растворимость ихъ въ водѣ, кислотахъ и щелочахъ напоминаетъ такую же трудную растворимость синтонина, изъ котораго долгимъ промываніемъ были удалены среднія соли.

Помощію же какихъ веществъ растворенъ синтонинъ въ яичномъ бѣлкѣ?

Бѣлокъ по Леманну (1) на 866,84 ч. ч. воды содержитъ твердыхъ частей 133,16. Изъ нихъ: бѣлка 122,74, экстрактовъ 3,82; неорган. солей 6,60.

Зола состоитъ изъ:

ClK a—41,29; ClNa—9,16; натра—23,04; кали—2,23; извести—1, 74; магнезіи—1,60; окиси желѣза—0,44; PH_3O_4—4,83; CO_2—11,60; SH_2O_4—2, 63; кремневой кислоты—0,49.

Если на 1000 грм. воды взять смѣсь, состоящую изъ 5 грм. поваренной соли, 4 грм. соды содержащей желѣзо, $^1/_2$ грм. сѣрнокислаго натра и столько фосфорной кислоты, чтобы жидкость была только едва щелочна, то эта жидкость, соотвѣтствующая приблизительно раствору неорганическихъ солей натуральнаго бѣлка, растворяетъ въ огромномъ количествѣ свѣже-осажденный, промытый водою и прожатый синтонинъ. Растворы густы, совершенно прозрачны, свѣтло-янтарнаго цвѣта, видомъ напоминаютъ неразбавленный яичный бѣлокъ. Такіе растворы почти не фильтруются. Если реакція раствора нейтральна или едва щелочна, то при кипяченіи

(1) Gorup-Besanez, Physiolog. Chemie. S. 276.

Digitized by Google

получается осадокъ, который, смотря по концентраціи жидкости, бываетъ или очень обильный, такъ что жидкость въ трубочкѣ едва переливается, или незначительный. Если реакція жидкости замѣтно щелочна, или растворъ жидокъ, то вмѣсто осадка является только мутность.

При разбавленіи такихъ растворовъ водою получается мутность или осадокъ только въ томъ случаѣ, если жидкость очень густа. За трудностью полученія въ большемъ количествѣ такого осадка мнѣ не удалось его ближе изслѣдовать.

Такимъ образомъ приготовленные растворы синтонина при взбиваніи ихъ деревянными палочками, при обработываніи углекислотою или лишеннымъ углекислоты атмосфернымъ воздухомъ, даже въ случаѣ если они сильно разбавлены, даютъ осадки. Здѣсь осадокъ является въ видѣ довольно крупныхъ хлопьевъ, собирающихся въ пѣнѣ. Промытые водою, хлопья трудно и мало растворяются въ новой порціи воды. Растворы къ реагентамъ относятся какъ водяные растворы синтонина.

На основаніи этихъ фактовъ смѣю думать, что яичный бѣлокъ есть не что иное какъ сгущенный растворъ синтонина въ соляхъ, содержащихся въ золѣ натуральнаго яичнаго бѣлка.

—

Можно ли помощію вышеописанныхъ пріемовъ (взбиванія, пропусканія атмосфернаго воздуха и т. д.) выдѣлить изъ раствора весь бѣлокъ?

Если разбавленный водою бѣлокъ отфильтровать отъ осадка и продолжительно обработывать атмосфернымъ воздухомъ, то не смотря на то, что бѣлокъ при этомъ осѣдаетъ въ очень большомъ количествѣ, въ жидкости его остается на столько много, что при кипяченіи она замѣтно мутится, хотя при новой обработкѣ атмосфернымъ воздухомъ осадка уже не даетъ. Такая жидкость даетъ всѣ реакціи водиаго раствора синтонина съ тѣмъ исключеніемъ, что при обработкѣ углекислотою осадка не появляется.

—

Можно подумать, что осадки, производимые углекислотою въ водныхъ, щелочныхъ и кислыхъ растворахъ синто-

Digitized by Google

нина аналогичны съ осадкомъ, производимымъ атмосфернымъ воздухомъ въ разведенномъ яичномъ бѣлкѣ и въ растворахъ синтонина въ поваренной соли и др. Оставляя въ сторонѣ то обстоятельство, что осадки, производимые углекислотою, къ растворяющимъ средствамъ относятся совершенно *иначе*, нежели осадки отъ атмосфернаго воздуха, далѣе, что осадки, произведенные углекислотою въ водяномъ растворѣ синтонина отъ дѣйствія атмосфернаго воздуха даже растворяются,— прямой опытъ опровергаетъ подобное предположеніе. Отличительнымъ признакомъ этихъ осадковъ можно считать то обстоятельство, что осадки отъ атмосфернаго воздуха появляются только въ *пѣнѣ* и почти всегда въ видѣ крупныхъ хлопьевъ. Въ разведенномъ яичномъ бѣлкѣ, въ растворахъ синтонина, въ поваренной соли и пр. роль углекислоты, какъ кажется, можетъ быть вполнѣ замѣнена атмосфернымъ воздухомъ или другимъ какимъ либо болѣе индеффферентнымъ газомъ. Впрочемъ ближе этотъ вопросъ я еще не изслѣдовалъ.

—

Особенности осадковъ, произведенныхъ *разбавленіемъ* водою и дѣйствіемъ атмосфернаго воздуха въ бѣлкѣ и въ растворахъ синтонина въ поваренной соли и др. заключаются въ ихъ трудной растворимости въ водѣ, кислотахъ и щелочахъ. Однако при болѣе продолжительномъ дѣйствіи разведенной кислоты или щелочи, особенно съ участіемъ *болѣе* высокой температуры, нежели комнатная, удастся вполнѣ растворить эти осадки. Такіе растворы, какъ уже сказано, относятся къ реагентамъ, какъ соотвѣтствующіе *растворы* синтонина.

По наружному виду такіе осадки, особенно произведенные въ яичномъ бѣлкѣ, напоминаютъ собою хлопки фибрина, добытаго взбиваніемъ крови. Имѣетъ ли фибринъ что либо общее съ этими осадками?

Что хлопки фибрина, хотя трудно, но все же растворяются въ разведенныхъ кислотахъ и щелочахъ, и что такіе растворы даютъ всѣ реакціи синтонина—это уже давно извѣстные факты. Вопросъ по этому сводится на то, растворяется ли фибринъ хотя отчасти въ водѣ?

Digitized by Google

Если фибринъ, добытый взбиваніемъ собачьей крови совершенно освободить промываніемъ и прожиманіемъ отъ кровяныхъ шариковъ, положить въ воду и, часто мѣняя послѣднюю, продержать его тамъ около часу и даже болѣе, то вынутый оттуда и прожатый фибринъ, положенный въ новую порцію дестилированной воды, черезъ полчаса отчасти растворяется въ ней. Такіе растворы фибрина мутятся при кипяченіи, и съ поваренною солью, съ двууглекислымъ калі-емъ и углекислотою даютъ ясные осадки; осадокъ отъ углекислоты легко растворяется при обработкѣ жидкости атмосферным воздухомъ.

Если продержать фибринъ подъ водою около шести часовъ и прожавши положить на полчаса въ новую порцію воды, то въ жидкости можно получить еще всѣ реакціи водянаго раствора синтонина.

Я много разъ продѣлалъ эти реакціи и не вижу серьознаго возраженія противъ того, чтобы относительно химическихъ свойствъ нельзя было считать фибринъ тождественнымъ съ помянутыми выше осадками бѣлка и синтонина.

—

Разобравши отношеніе синтонина къ бѣлкамъ крови, осѣдающимъ отъ дѣйствія углекислоты, и растворимымъ въ разведенныхъ кислотахъ и щелочахъ, къ бѣлку куриныхъ яицъ и къ фибрину, я скажу теперь нѣсколько словъ объ отношеніи синтонина къ такъ называемымъ пептонамъ.

Если растворить фибринъ или свернутый жаромъ бѣлокъ въ искусственномъ или натуральномъ желудочномъ сокѣ, или просто въ разведенной кислотѣ (Дьяконовъ), и нейтрализованіемъ жидкости удалить синтонинъ, то въ фильтратѣ остаются еще бѣлковыя вещества, которыя называются пептонами. Синтонинъ и пептоны считаютъ въ этомъ случаѣ за продукты дѣйствія кислоты и пепсина, или одной только кислоты (Кюне и Дьяконовъ) на бѣлокъ и фибринъ, какъ бы продуктами превращенія послѣднихъ тѣлъ подъ вліяніемъ упомянутыхъ дѣятелей.

Дѣйствительно ли бѣлокъ и фибринъ измѣняются подъ вліяніемъ этихъ дѣятелей на столько, что происходящіе отъ этого продукты не имѣютъ ничего общаго съ первоначаль-

Digitized by Google

ными тѣлами? На сколько это справедливо относительно синтонина, мы уже видѣли. Смѣю думать, что все вышеизложенное скорѣе ведетъ къ тому заключенію, что нерастворенныя бѣлковыя тѣла подъ вліяніемъ кислотъ и щелочей только растворяются, какъ растворяется напр. фибринъ и осадки бѣлка и синтонина, выдѣленные взбиваніемъ и пр. или переходятъ изъ одной формы раствора въ другую, какъ въ случаѣ дѣйствія этихъ агентовъ на жидкій куриный бѣлокъ (1).

Думаю не лишнимъ будетъ привести здѣсь мои наблюденія относительно вліянія времени при дѣйствіи щелочи на жидкій куриный бѣлокъ. Вотъ въ короткихъ словахъ результаты, къ которымъ я пришелъ:

Если брать равныя порціи одинаковой концентраціи разведеннаго водою бѣлка, прибавлять равныя количества щелочи и приливать кислоту, то осадокъ, полученный отъ прилитія кислоты, тотчасъ по прибавленіи щелочи, по количеству почти не отличается отъ осадка, полученнаго отъ прибавленія кислоты спустя часъ или нѣсколько часовъ (до 24) по прилитіи щелочи (2).

Степень разведенности бѣлка при одинаковомъ его содержаніи не имѣетъ большаго вліянія на количество осадка (3).

Количество щелочи, если оно не меньше 20% неразбавленнаго бѣлка, не оказываетъ какъ кажется большаго вліянія на скорость процесса.

Чтобы считать эти выводы окончательными, нужно производить опыты съ вѣсами въ рукахъ, чего я еще не дѣлалъ.

---

(1) Можно ли эти растворы синтонина считать за химическія соединенія— неизвѣстно.

(2) Приготовленіе синтонина по этому упрощается. Стоитъ только яичный бѣлокъ развести въ 20—30 разъ водою (чѣмъ больше разведенъ бѣлокъ, тѣмъ онъ легче фильтруется), отфильтровать отъ образовавшагося осадка и прибавить щелочи до сильно щелочной реакціи. Спустя 5—10 минутъ прибавленіемъ кислоты до слабо или сильно кислой реакціи, смотря по количеству взятой щелочи, получается осадокъ синтонина.

(3) Я употреблялъ для изслѣдованія бѣлокъ, разведенный водою по крайней мѣрѣ въ 10—15 разъ, и уже бѣлокъ такой концентраціи разбавлялъ еще большимъ количествомъ воды и сравнивалъ дѣйствіе щелочи. При сильномъ разбавленіи, напр. въ 60 и болѣе разъ, какъ и слѣдовало предполагать, количество осадка было уже значительно меньше.

Digitized by Google

Что касается вліянія температуры, то изъ изслѣдованія К. Дьяконова очень хорошо видно, что если дѣйствію кислотъ и щелочей подвергаются трудно растворимыя формы бѣлковъ, какъ то фибринъ и створоженная бѣлковина, то температура до извѣстныхъ предѣловъ помогаетъ этому процессу растворенія. Къ сожалѣнію мои собственныя наблюденія относительно вліянія температуры на дѣйствіе этихъ агентовъ еще такъ незначительны, что на нихъ едва ли можно ссылаться. Можно вывести одно только заключеніе, что если щелочь дѣйствуетъ на сильно разбавленный водою бѣлокъ, то дѣйствіе температуры въ 40° въ продолженіе часа или нѣсколькихъ часовъ не увеличиваетъ количество осадка отъ прибавленія кислоты.

Наконецъ, какъ главный доводъ въ пользу предположенія, что бѣлокъ при дѣйствіи кислотъ и щелочей качественно не измѣняется, я приведу то обстоятельство, что куриный бѣлокъ можно разсматривать какъ сгущенный растворъ синтонина. Эти послѣднія положенія смѣю считать доказанными. Что касается фибрина, то фактъ, что онъ хотя отчасти, но все же растворимъ въ водѣ, и что этотъ растворъ даетъ реакціи синтонина,—этотъ фактъ уже самъ по себѣ устраняетъ предположенія о качественномъ измѣненіи фибрина подъ вліяніемъ кислотъ и щелочей.

Обращаюсь теперь къ пептонамъ.

Исходя изъ того положенія, что бѣлокъ и фибринъ подъ вліяніемъ кислотъ качественно не измѣняются, но только растворяются,—существованіе пептоновъ какъ отдѣльныхъ индивидуумовъ становится невѣроятнымъ.

Я уже сказалъ выше, что если растворить въ кислотѣ (1) фибринъ или свернутый жаромъ бѣлокъ и *нейтрализованіемъ* удалить оттуда синтонинъ, то тѣла остающіяся въ жидкости называются пептонами.

Можно ли нейтрализованіемъ или слабымъ подкисленіемъ жидкости удалить весь синтонинъ? Этотъ вопросъ очень важенъ, ибо реакціи, на основаніи которыхъ судятъ о присутствіи въ жидкости пептоновъ, общи всѣмъ бѣлкамъ (2), и мы

(1) Дьякововъ доказалъ, что пепсинъ только ускоряетъ раствореніе бѣлковъ въ искусственномъ желудочномъ сокѣ.

(2) Таковы реакціи съ дубильною кислотою, съ ferrocyankalium и уксус-

Digitized by Google

тогда только можемъ судить о присутствіи новаго бѣлковаго тѣла, когда въ состояніи будемъ доказать отсутствіе всѣхъ уже извѣстныхъ намъ формъ бѣлка.

Если мы возьмемъ кислый или щелочный растворъ синтонина и нейтрализуемъ его, положимъ хоть соляною или уксусною кислотою, то при этомъ образуется средняя соль щелочи, которая смотря по количеству своему будетъ играть различную роль.

Разберемъ сначала случай, гдѣ содержаніе кислоты или щелочи въ растворѣ синтонина равняется приблизительно 0,1%. Кислота и щелочь такой концентраціи могутъ растворить довольно значительное количество синтонина, на столько значительное, что по нейтрализаціи жидкости остающаяся вода и средняя соль уже не въ состояніи держать въ растворѣ всего синтонина, и мы получаемъ осадокъ. Но мы выше видѣли, что вода, особенно съ небольшимъ содержаніемъ средней соли, все же довольно хорошо растворяетъ синтонинъ, поэтому въ фильтратѣ всегда остается *растворенною* часть синтонина, эквивалентная растворяющей силѣ воды и средней соли. Такой фильтратъ даетъ иногда муть при кипяченіи, постоянно осадокъ съ дубильною кислотою и т. д. Въ случаѣ, если количество синтонина очень незначительно, такъ что онъ можетъ держаться въ растворѣ помощію одной только воды, осадка при нейтрализаціи мы не получаемъ.

Если синтонинъ растворенъ въ болѣе концентрированной кислотѣ, какъ-то 1%, 2%, и т. д., то чтобы получить осадокъ при нейтрализаціи, нужно уже бо́льшее количество синтонина, ибо образовавшаяся здѣсь соль сама по себѣ можетъ удерживать довольно значительную часть синтонина въ растворѣ. Мнѣ возразятъ, что разведенность соли уже нѣкоторымъ образомъ исключаетъ возможность предположенія, что здѣсь синтонинъ можетъ быть растворенъ помощію средней соли; но хотя синтонинъ изъ растворовъ въ поваренной соли и осѣдаетъ при разведеніи водою, но этотъ осадокъ всегда очень незначителенъ, и при этомъ осѣдаетъ только малая

ною кислотою, съ сулемою, съ азотной кислотою и т. д. Онѣ общи всѣмъ бѣлкамъ и отличаются тѣмъ свойствомъ, что въ состояніи показать присутствіе самаго незначительнаго количества какого-либо бѣлка.

Digitized by Google

часть синтонина, большая же часть его держится еще въ растворѣ. Слѣдовательно, если мы имѣемъ предъ собою такой растворъ синтонина, то нейтрализацiей мы хотя и удаляемъ большую часть его, но далеко не весь. Тутъ въ фильтратѣ мы получимъ, кромѣ мутности при кипяченiи и т. д., еще осадокъ отъ разведенной кислоты—метапептонъ, такъ какъ разведенные растворы синтонина въ поваренной соли при прибавленiи кислоты даютъ осадокъ (1).

Этихъ двухъ разобранныхъ нами случаевъ думаю достаточно, чтобы сказать, что пептоны какъ отдѣльныя тѣла не существуютъ въ дѣйствительности, и всѣ реакцiи, на основанiи которыхъ думали доказать ихъ присутствiе и даже отличiе между собою, были прилагаемы къ растворамъ синтонина или въ водѣ, или въ средней соли (2).

Изъ этихъ же отношенiй синтонина къ растворяющимъ жидкостямъ ясно, что онъ при нейтрализацiи кислыхъ или щелочныхъ его растворовъ осѣдаетъ не въ силу того, что нерастворимъ въ водѣ, а потому, что въ кислотахъ и щелочахъ онъ растворяется больше нежели въ водѣ и среднихъ соляхъ,—осѣдаетъ слѣдовательно только избытокъ синтонина. Если же мы будемъ приготовлять синтонинъ изъ разведеннаго водою бѣлка съ избыткомъ щелочи или кислоты, будемъ слѣдовательно имѣть предъ собою не насыщенные растворы,— то здѣсь при нейтральной реакцiи жидкости, въ силу большаго содержанiя средней соли, все количество синтонина, какъ показываетъ опытъ, осѣдаетъ только тогда, когда реакцiя жидкости сильно кисла. Если же реакцiя нейтральна, или

---

(1) Чтобы получить метапептонъ изъ раствора синтонина въ 0,1% соляной кислотѣ нужно очень осторожно нейтрализовать жидкость; малѣйшiй избытокъ кислоты мѣшаетъ появленiю этой реакцiи. Напротивъ, реакцiя удается очень хорошо, если къ подкисленной жидкости прибавить немного поваренной соли.

(2) Что по удаленiи синтонина изъ растворовъ въ 1% соляной кислотѣ, остатокъ его держится также и помощiю средней соли видно изъ того, что такiе фильтраты съ углекислотою, хотя и даютъ осадокъ, но этотъ осадокъ въ атмосферномъ воздухѣ нерастворимъ; на оборотъ, фильтраты отъ синтонина въ 0,1% соляной кислотѣ даютъ съ углекислотою осадокъ, вполнѣ растворимый при обработкѣ его атмосфернымъ воздухомъ.

Digitized by Google

только слабокислая, то осадка не получается и жидкость остается прозрачною.

—

Еще недавно синтонинъ смотря по способу приготовленія носилъ различныя названія. Собственно синтониномъ называли вещество, добытое изъ мышцъ настаиваніемъ ихъ съ 0,1% соляною кислотою и послѣдующимъ нейтрализованіемъ жидкости; когда подобной обработкѣ подвергался фибринъ или яичный бѣлокъ, то тѣло называлось «Neutralisationsprăcipität» (Meissner); если вмѣсто кислоты былъ взятъ желудочный сокъ, то осадокъ при нейтрализаціи носилъ названіе «парапептона» (Meissner). Наконецъ, если бѣлковина вмѣсто кислоты обрабатывалась щелочью, то осадокъ называли «нерастворимою бѣлковиною». (Emerson F. Reynolds).

Кюне, а за тѣмъ Дьяконовъ признали эти *осадки тождественными.*

Ссылаясь на мои приведенныя въ началѣ этой главы наблюденія, я думаю, что къ этой же категоріи бѣлковъ слѣдуетъ причислить и вещества фибринородное и фибринопластическое и тождественные съ ними глобулинъ и Serum casein Panum'a. Всѣ эти тѣла сводятся относительно ихъ химическихъ реакцій на щелочный или кислый растворъ одного и того же индивидуума, называемаго *синтониномъ.*

Это послѣднее тѣло, въ высшей степени сходное съ фибриномъ, можно выдѣлить помощію очень простыхъ пріемовъ также и изъ бѣлка куриныхъ яицъ, и оно же, растворенное извѣстнымъ образомъ, даетъ возможность *полученія* жидкости, относящейся къ реагентамъ какъ натуральный куриный бѣлокъ.

Наконецъ извѣстные растворы этого вещества относятся къ реагентамъ какъ тѣла, называемыя пептонами.

Слѣдуетъ-ли называть это тѣло синтониномъ?—названіе, указывающее только на полученіе его изъ мяса, не лучше ли вернуться къ прежнему названію «бѣлковины» или «альбумина». Тогда мы будемъ имѣть «кислые» или «щелочные растворы бѣлковины» — «Acidalbumin» и «Alkalialbuminat» — растворы

Digitized by Google

бѣлковины въ солях̀ъ, и т. д. Здѣсь по крайней мѣрѣ названіе будетъ болѣе точно обозначать предметъ, къ которому относится.

—

Въ заключеніе считаю нужнымъ принести искреннюю благодарность профессору А. Я. Данилевскому за его совѣты, которыми я не рѣдко пользовался въ теченіе моей работы.

Digitized by Google

СѢРНАЯ КИСЛОТА И СОДА.

Необходимость въ развитіи химическихъ заводовъ и въ особенности необходимость и выгодность содоваго производства въ Россіи. (1)

(А. К. Чугунова.)

«Что работаете, мой другъ?» спросилъ однажды Георгъ III знаменитаго Уатта. «Работаю я, государь, надъ тѣмъ, что всего болѣе любятъ монархи, отвѣчалъ Уаттъ,—*приготовляю я силу, могущество.*»—Понравился отвѣтъ Королю; только не понялъ онъ настоящаго значенія той силы, на которую намекнулъ Уаттъ, и остался онъ въ убѣжденіи, что сила эта покоритъ ему сто мильоновъ новыхъ подданныхъ, что это именно та сила, которая заставитъ 370 мильоновъ китайцевъ трепетать передъ кликомъ его ланкастерскихъ воиновъ. Уаттъ былъ правъ, сказавши королю Георгу, что онъ работаетъ надъ тѣмъ, что можетъ дать государству могущество. Въ словахъ его было предсказаніе о развитіи промышленныхъ силъ страны, которой суждено было ранѣе другихъ примѣнить его изобрѣтеніе и примѣнить въ громадныхъ размѣрахъ. Повторяю, правъ былъ Уаттъ, видѣвшій въ своей паровой машинѣ зародышъ величія и могущества своего отечества.

Однакожъ не скоро, а длиннымъ и тяжолымъ путемъ достигли народы до сознанія, что главный источникъ ихъ благосостоянія лежитъ не въ грубой матеріальной силѣ, а въ ихъ предпріимчивости, изобрѣтательности, въ ихъ, однимъ словомъ, производительной силѣ. Производительная сила человѣка опредѣляетъ, созидаетъ производительную силу общества, страны.

---

(1) Въ началѣ этой статьи и въ нѣкоторыхъ другихъ мѣстахъ ея я удержалъ изложеніе публичной лекціи, читанной мною о томъ же предметѣ, прошедшимъ великимъ постомъ, по приглашенію казанскаго купеческаго собранія.

Digitized by Google

Производительная сила общества создаетъ его богатство. Какъ же или чѣмъ можно выразить производительную силу человѣка? Она выражается въ каждой отрасли промышленности количествомъ продуктовъ, сработанныхъ, при среднемъ трудѣ, человѣкомъ въ данное время, напр. въ рабочій день. Возмемъ для примѣра филатуру. Производительная сила человѣка въ этой фабрикаціи выразится количествомъ сработанныхъ въ день или въ годъ пудовъ пряжи, извѣстнаго нумера, раздѣленныхъ на число рабочихъ, участвовавшихъ въ приготовленіи этого количества пряжи.—Но гдѣ же источникъ этой силы и постепеннаго, видимаго ея возрастанія? Въ мускулахъ человѣка? Въ его умѣньи приспособить свои члены къ работѣ? Ни въ томъ, ни въ другомъ. Мы знаемъ, что для развитія силы мышцъ положены весьма тѣсные предѣлы, ограниченные самой природой человѣка, его организмомъ. Физическая сила француза или англичанина, германца или сѣверо-американца почти таковаже теперь, какою была за сто лѣтъ, а между тѣмъ какъ возрасли за это время ихъ производительныя силы! Человѣкъ, въ предѣлахъ дѣйствій своихъ органовъ, своей физической силы, осаждаемый со всѣхъ сторонъ различными нуждами, былъ бы самымъ жалкимъ и безпомощнымъ существомъ, если бы не имѣлъ дара проникать тайны окружающей его природы и достигать господства надъ ней посредствомъ ея же силъ, покоряющихся могуществу разума. Такимъ образомъ онъ пріобрѣлъ для своего труда многочисленныхъ и дѣятельныхъ помощниковъ. Это были сначала животныя, потомъ различныя неодушевленныя силы природы, изъ которыхъ нѣкоторыя были вызваны имъ изъ недѣятельности, покоя. А для возможности и удобства пользоваться этими силами, человѣкъ изобрѣлъ машины, снаряды. Съ другой стороны, убѣдившись въ слабости и ограниченности своей личной матеріальной силы, коль скоро она проявляется безоружными его органами, человѣкъ открылъ, что если нельзя развить физическую силу мышцъ далѣе опредѣленныхъ предѣловъ, за то можно увеличить полезное ея дѣйствіе. Это повело за собой изобрѣтеніе различныхъ инструментовъ, механическихъ орудій.

Благодаря такимъ-то машинамъ и орудіямъ, производительная сила человѣка возросла до громадныхъ размѣровъ и продолжаетъ возрастать. Такъ, въ производствѣ желѣза она увеличилась въ 300 разъ въ теченіе 600 лѣтъ. Производство

Digitized by Google

бумажной пряжи представляетъ еще болѣе разительный примѣръ, Не прошло и ста лѣтъ со времени изобрѣтенія Аркрайта, между тѣмъ человѣкъ при прядильномъ станѣ производитъ въ 300—400 разъ болѣе пряжи, нежели лучшая работница—пряха. Въ 1860 году изобрѣтена машина, видѣнная мной на лондонской всемірной выставкѣ, назначенная для плетенія рыболовныхъ сѣтей. Машина эта дѣлаетъ отъ 250 до 300 тысячъ узловъ въ день, чего не сдѣлаетъ хорошая работница и въ мѣсяцъ. 12 лѣтъ тому назадъ добываніе золота требовало много рабочихъ рукъ и расхода, и только тѣ розсыпи считались выгодными для разработки, которыя содержатъ 0,00001, т. е. 1 пудъ золота въ 100.000 пуд песку. Теперь же, когда нерѣдко приходится довольствоваться бѣднѣйшими розсыпями, находятъ выгоднымъ промывать и такіе пески, которые содержатъ не болѣе $^1/_4$-хъ мильонной, т. е. не болѣе 1 пуда золота въ 4 мильонахъ пудовъ песку. Находятъ выгоднымъ потому, что, вслѣдствіе усовершенствованія машинъ и способовъ добыванія золота, *достигли возможности* вести промывку песковъ вполнѣ механически, почти безъ содѣйствія человѣка, и на что расходовали прежде 2500 руб. теперь расходуютъ только 1 руб.

Таковы успѣхи производительной силы человѣка и нѣтъ почти имъ предѣла. Да они и должны быть велики при тѣхъ громадныхъ средствахъ, какими можетъ располагать современная намъ промышленность и какія способенъ создать человѣкъ. На той же лондонской выставкѣ я видѣлъ главныя части паровой машины для фрегата, номинальная сила которой была показана въ 1400 паровыхъ лошадей; дѣйствительная же, т. е. та, которую она способна обнаружить въ случаѣ нужды,—впятеро больше; т. е. равна 7000 паровыхъ лошадей. Паровая лошадь вдвое сильнѣе живой лошади; работаетъ безъ устали 24 часа въ сутки, живая же только 8 часовъ, такъ что одна паровая лошадь можетъ сдѣлать въ сутки тоже, что 6 живыхъ лошадей. Вотъ, слѣдовательно, одна машина, способная произвести работу, для которой потребовалось бы 42,000 лошадей! Сколько же потребовалось бы рабочихъ животныхъ для замѣны всѣхъ паровыхъ машинъ, устроенныхъ со времени изобрѣтенія Уатта? Сколько бы потребовалось одушевленной физической силы въ замѣнъ тѣхъ неодушевленныхъ силъ природы, которыми располагаетъ теперь человѣкъ. Какъ же не сказать, что правъ

Digitized by Google

былъ Уаттъ, видѣвшій въ своей паровой машинѣ зародышъ величія, силы и могущества народовъ. Но далеко не были бы правы мы, если бы всю силу и все могущество современныхъ промышленныхъ націй стали приписывать умѣнью человѣка пользоваться одною механической силой.

Въ природѣ есть другая, не менѣе дѣятельная и сильная сила—химическая. Не столь рѣзкая, за то несравненно болѣе разнообразная въ своихъ проявленіяхъ, сила эта труднѣе достается человѣку; человѣкъ же всегда склоненъ выбирать для своего труда болѣе легкое, оттого-то нерѣдко отдаетъ онъ механической силѣ предпочтеніе предъ химическою. Сверхъ того, механическая сила способна къ скопленію и при помощи приноровленныхъ къ тому машинъ и приборовъ можетъ проявляться въ громадныхъ размѣрахъ, можетъ дѣйствовать на большихъ разстояніяхъ. Химическая сила не обладаетъ такими свойствами и потому кажется ничтожною въ сравненіи съ механической. На самомъ же дѣлѣ она можетъ творить то, чего не въ состояніи произвести никакая другая сила. Не будь ея или не овладѣй ею человѣкъ, онъ остался бы такимъ же жалкимъ и безпомощнымъ существомъ, какъ и безъ механической силы, потому что онъ не былъ бы въ состояніи воспользоваться этою послѣднею. Только благодаря химической силѣ, человѣкъ можетъ добывать, извлекать изъ природы тѣ матеріалы, изъ которыхъ онъ строитъ свои машины, приборы, орудія. Только благодаря химической силѣ, онъ можетъ добывать желѣзо и другіе металлы, приготовлять изъ сѣры купоросное масло, изъ муки или изъ свѣтильнаго газа спиртъ, изъ дегтя великолѣпныя краски и т. д., словомъ безчисленное множество продуктовъ, сколько удовлетворяющихъ прямымъ потребностямъ человѣка, столько же, если не болѣе, служащихъ ему средствами, безъ которыхъ производительная сила машинъ и механическихъ орудій не достигла бы современнаго развитія. Едва ли найдется хотя одно механическое производство, которое могло бы обойтись безъ химическихъ дѣятелей или продуктовъ, безъ употребленія какого-либо химическаго матеріала.

Столь тѣсна связь между механическою и химическою сторонами производительной силы. Другими словами: производительная сила человѣка слагается изъ результатовъ дѣйствій двухъ, находящихся въ рукахъ его силъ—механической и химической. На этомъ основаніи, едва ли я оши-

Digitized by Google

бусь, если скажу, что—по мимо общечеловѣческаго и промышленнаго образованія, по мимо солидарности и полноправности въ общественной жизни и экономическихъ отношеніяхъ населенія данной страны, состояніе или ростъ ея промышленности можно опредѣлить по двумъ существеннымъ признакамъ: по степени развитія въ странѣ механическаго искусства, механическихъ заведеній и по степени развитія въ ней химическаго искусства, химическихъ заводовъ. Чѣмъ болѣе въ странѣ заведеній, работающихъ машины, приборы и орудія, и заводовъ, приготовляющихъ химическіе матеріалы, тѣмъ выше ея производительныя силы, тѣмъ она богаче. На томъ же основаніи далеко не правы тѣ многія лица промышленнаго сословія, которыя стараются причину застоя или покрайней мѣрѣ слабаго развитія нашей промышленности приписать главнымъ образомъ недостатку у насъ механическихъ заведеній. Что недостатокъ этотъ весьма чувствителенъ для насъ—не спорно; но не болѣе ли чувствителенъ другой—непростительно слабое для такой богатой отъ природы страны развитіе химическихъ заводовъ. Покупать за границей машины, аппараты—конечно въ этомъ мало говорящаго въ пользу успѣшнаго роста производительной силы въ одной изъ первостепенныхъ державъ, которая такимъ образомъ отказывается отъ самостоятельности и оригинальности во всѣхъ тѣхъ производствахъ, гдѣ необходима и выгодна механическая сила; но несравненно менѣе говоритъ въ эту пользу наша слабость — покупать за границей химическіе продукты, особенно тѣ, которые выдѣлываются изъ нашихъ же матеріаловъ. Есть, правда, защитники такого порядка, не дошедшіе до познанія самой сущности дѣла, увлекающіеся отвлеченными теоретическими возрѣніями; надобно только желать, чтобы подобныя возрѣнія не могли препятствовать и безъ того слабому движенію впередъ нашей промышленности. Для этихъ-то защитниковъ мы повторимъ еще разъ, что, по мимо вышеуказанныхъ условій (образованія и т. д.), какія бы не предлагались и не принимались мѣры, нѣтъ возможности поднять промышленную дѣятельность страны и дать ей не временное, лихорадочное, а прочное, послѣдовательное и самостоятельное развитіе, пока не разовьются въ этой странѣ механическія заведенія и химическіе заводы. Что же касается тѣхъ односторонніхъ мнѣній, въ силу которыхъ причина, почему мы не можемъ конкурировать въ

Digitized by Google

фабричныхъ издѣліяхъ съ иностранцами, приписывается главнымъ образомъ недостатку у насъ механическихъ заведеній, то они, эти мнѣнія, объясняются легко. Большинство нашихъ крупныхъ, капитальныхъ и вліятельныхъ производителей заинтересовано преимущественно въ дѣлѣ филатурномъ, ткацкомъ и т. п., гдѣ дѣйствительно всего болѣе нужны машины, потому и не мудрено, что намъ чаще всего приходится слышать голоса за механическія заведенія. Но какъ бы то ни было, хотя въ этихъ голосахъ не рѣдко выдаются частные интересы, все же идутъ они изъ прямаго сознанія настоятельныхъ нуждъ нашей промышленности и, конечно, слѣдуетъ желать, чтобы они были услышаны. Только никакъ нельзя остановиться на одномъ этомъ желаніи; параллельно съ нимъ должно быть другое: должны раздаваться голоса за химическіе заводы. Надобно непремѣнно усвоить себѣ ту истину, что производительная сила человѣка, слѣдовательно и народа, работаетъ, если можно такъ выразиться, одновременно двумя рычагами—механическимъ и химическимъ и что только тамъ можетъ быть настоящій прогрессъ промышленности, гдѣ она, эта сила, прилагается съ равномѣрнымъ усиліемъ къ обоимъ рычагамъ. Къ сожалѣнію, далеко не то оказывается у насъ на дѣлѣ. Сознавъ важность механической стороны производительной силы, готовые ратовать за нее всѣми средствами, мы почти совершенно забываемъ о другой сторонѣ—химической.

Много времени потребовалось бы на то, чтобы перечислить всѣ, по крайней мѣрѣ главные, виды химическихъ производствъ, которые у насъ въ застоѣ, или которыхъ у насъ не достаетъ; всѣ тѣ сырые матеріалы, которыми такъ богата природа нашего отечества, но которые и по сихъ поръ остаются мертвымъ капиталомъ или идутъ за границу, чтобы возвратиться къ намъ въ видѣ продуктовъ въ нѣсколько разъ болѣе цѣнныхъ. Считаю достаточнымъ ограничиться указаніемъ на два первостепенныя производства: на добываніе *сѣрной кислоты и соды*. Намъ извѣстно то значеніе для промышленности, которое принадлежитъ изобрѣтенію паровой машины. Въ параллель съ этимъ изобрѣтеніемъ я долженъ теперь поставить другое, не менѣе важнаго значенія,—изобрѣтеніе камернаго способа приготовленія сѣрной кислоты, представляющей собою главнѣйшій источникъ химической силы. Подобно тому, какъ почти ни одно экономически по-

Digitized by Google

ставленное механическое дѣло не можетъ теперь обойтись безъ паровой машины, такъ равно не много найдется производствъ, которыя бы не нуждались въ прямомъ или косвенномъ примѣненіи сѣрной кислоты. Являясь такимъ образомъ необходимымъ матеріаломъ для каждаго почти фабричнаго и заводскаго дѣла, сѣрная кислота естественно имѣетъ сильное вліяніе на количество и цѣнность мануфактурныхъ издѣлій. Съ увеличеніемъ ея производства, съ улучшеніями, вводимыми въ способы ея добыванія, слѣдовательно съ удешевленіемъ ея, почти всѣ остальныя производства становятся дешевле; является возможность увеличивать и удешевлять выработку мануфактурныхъ издѣлій. На этомъ основаніи, едва ли будетъ справедливо назвать парадоксомъ высказанную англійскимъ химикомъ Юромъ мысль, что состояніе мануфактурной промышленности страны можно опредѣлять количествомъ сѣрной кислоты, производимой и потребляемой въ той странѣ. Не покажется удивительнымъ и то, почему Англія въ 1840 году, когда правительство обѣихъ Сицилій обложило *высокой пошлиной* вывозъ сѣры изъ Сициліи, отвѣчала на это угрозой войны.

Какъ же велико производство сѣрной кислоты у насъ въ Россіи? Если взять 900,000 пудовъ за величину *ежегодной* выработки у насъ обыкновенной камерной кислоты, то эта цифра скорѣе будетъ велика, нежели мала въ сравненіи съ дѣйствительною. 900 тысячъ пудовъ! Цифра, кажется, почтенная. Но она становится почти ничтожною въ сравненіи съ тѣми, какими выражается величина производства сѣрной кислоты въ болѣе промышленныхъ государствахъ Европы. Въ статьѣ своей, напечатанной въ журналѣ «Промышленность» за 1861 годъ подъ заглавіемъ «Сѣрная кислота и сода», я *привелъ* для примѣра заводъ Tennents and C° въ Глазговѣ. На немъ работается до 350 тоннъ кислоты въ недѣлю. Полагая въ году 50 рабочихъ недѣль, а тонну въ 61 пудъ, получимъ 17500 тоннъ или 1,087.500 пуд. въ годъ. Слѣдовательно, одинъ заводъ въ Англіи работаетъ сѣрной кислоты болѣе, нежели всѣ заводы въ Россіи. Правда, это одинъ изъ громадпѣйшихъ заводовъ въ мірѣ, но не единственный; подобные ему есть и во Франціи. Такъ, химическій заводъ въ Шонѣ, принадлежащій обществу знаменитой сенгобеновской зеркальной мануфактуры, работаетъ до 1,150,000 пуд. камерной кислоты и до 185,000 пуд. купороснаго масла. Химическій заводъ

Digitized by Google

Перрена и сына въ Ліонѣ приготовляетъ до 950,000 пуд. купороснаго масла въ годъ. Недостатокъ данныхъ не позволяетъ намъ опредѣлить приблизительную цифру всего производства сѣрной кислоты въ упомянутыхъ государствахъ, но что она велика, можно видѣть изъ расчета употребленія этой кислоты на выработку соды. Въ Англіи насчитывается до 50 содовыхъ заводовъ, на которыхъ ежегодно перерабатывается до 260,000 тоннъ или до 16 мильоновъ пудовъ соли; содовые заводы Франціи перерабатываютъ ея до 70,000 тоннъ или до 4,300,000 пуд. На 100 пуд. соли требуется среднимъ числомъ 135 пуд. камерной кислоты. Слѣдовательно, для одного только содоваго производства приготовляется и расходуется въ Англіи 21½ мильоновъ пуд., а во Франціи 5,800,000 пуд. сѣрной кислоты.

Но какъ бы то ни было, хотя и мало, все же производимъ мы сѣрную кислоту и не покупаемъ ея за-границей, и есть надежда, что недавнее разрѣшеніе правительства на повсемѣстносвободную и безпошлинную добычу колчедановъ, замѣняющихъ теперь почти повсюду сицилійскую сѣру, поведетъ за собой столь желаемое и необходимое развитіе у насъ этого производства. Надобно только желать, чтобы наши химическіе заводчики не встрѣчали, особенно на первыхъ порахъ, препятствій въ пользованіи тѣми колчеданами, въ которыхъ окажется содержаніе небольшаго количества мѣди, напр. не болѣе 4%. Хотя горное вѣдомство и считаетъ такіе колчеданы подлежащими выплавкѣ на мѣдь и хотя упомянутое разрѣшеніе правительства, выраженное въ общихъ словахъ, касается, какъ надобно полагать, только чисто-желѣзныхъ колчедановъ, но въ виду той пользы, какую ожидаетъ наша промышленность отъ развитія химическихъ заводовъ, будетъ расчетливѣе для казны предоставить этимъ заводамъ въ безпошлинное пользованіе и залежи небогатыхъ мѣдисто-желѣзныхъ колчедановъ, подъ условіемъ пользоваться ими для выработки только химическихъ продуктовъ. Считаемъ это тѣмъ болѣе расчетливымъ, что при изобиліи въ горныхъ округахъ мѣсторожденій колчедановъ съ высшимъ содержаніемъ мѣди, залежи болѣе бѣдныя не рѣдко оставались и остаются до сихъ поръ въ землѣ лежащими втунѣ, безъ всякой для кого-либо пользы. Отчего бы напр. не предоставить химическимъ заводчикамъ тѣ мѣсторожденія мѣдистыхъ колчедановъ, которыя разработывались казенными мѣди-

Digitized by Google

плавильными заводами, и потомъ оставлены за убогостію содержанія въ нихъ мѣди? Это было бы безобидно для казны и выгодно для частныхъ лицъ; выгодно во 1-хъ потому, что убогость такихъ залежей слѣдуетъ считать относительною, а во 2-хъ потому, что произведенныя уже разработки должны значительно облегчить дальнѣйшую добычу колчедана. Пермская губернія, куда, по нашему мнѣнію, должны тянуть химическіе заводы, представляетъ много такихъ мѣстностей. Все это считалъ я нужнымъ оговорить съ одной стороны потому, что непостоянная возможность пользоваться безпрепятственно мѣдисто-желѣзными колчеданами была, по нашему мнѣнію, одной изъ главныхъ причинъ паденія нѣсколькихъ заводовъ, владѣльцы которыхъ старались ввести у насъ производство сѣрной кислоты, независимое отъ привознаго матеріала—сицилійской сѣры, а съ другой стороны потому, что свободное пользованіе такими колчеданами постоянно гарантировало бы, такъ сказать, заводчиковъ всѣмъ тѣмъ количествомъ мѣднаго купороса, который *они могли бы* получать какъ побочный продуктъ производства сѣрной кислоты.

Какъ бы то ни было, повторяю, все же мы работаемъ эту кислоту; но у насъ нѣтъ вовсе производства другаго химическаго матеріала, который по своему значенію *для* промышленности долженъ быть поставленъ вслѣдъ за сѣрной кислотой. У насъ нѣтъ производства *соды*. Намъ приходится выписывать ее изъ-за границы и ежегодно среднимъ числомъ до 500,000 пудовъ. Уже эта цифра показываетъ на довольно сильную у насъ потребность въ содѣ, и если привозъ ея не возрастаетъ, то не потому, чтобы не возрастала на нее потребность, а единственно вслѣдствіе ея *дороговизны*. Пудъ соды стоитъ на петербургской биржѣ не менѣе 1 руб. 50 коп., а съ провозомъ на мѣста потребленія, на фабрики и на заводы, обходится до 2 руб., въ два рубля слишкомъ и даже до 2 руб. 50 коп. Я сказалъ, что у насъ потребность на соду возрастаетъ; да и должно быть такъ. Сода нужна намъ, какъ и вездѣ, для заводовъ мыловаренныхъ, гдѣ она съ большою выгодою замѣняетъ поташъ съ поваренною солью; такъ что, имѣя свою соду, болѣе дешевую, чѣмъ заграничная, мы стали бы, вмѣсто безполезной траты на мыло, сбывать поташъ въ большемъ количествѣ за границу. Сода нужна намъ для заводовъ стеклянныхъ,

Digitized by Google

гдѣ она также съ выгодою замѣнила бы поташъ, особенно для заводовъ зеркальнаго стекла, которые не развиваются у насъ именно благодаря дорогой содѣ. Нужна она для заводовъ стеариновыхъ, которые могли бы увеличить и удешевить свое производство, такъ какъ своя сода дала бы имъ возможность усилить сбытъ побочнаго продукта—олеиновой кислоты, въ видѣ мраморнаго мыла. Необходима намъ сода и для многихъ химическихъ заводовъ. Сильно нуждается въ ней фабрикація хлопчато-бумажныхъ и льняныхъ тканей, гдѣ требуются щелока при промывкѣ и бѣлкѣ товара. При фабрикаціи ткацкаго товара (также въ писчебумажномъ производствѣ) требуется кромѣ того бѣлильная или хлорная известь, а этотъ матеріалъ, покупаемый нами также изъ-за границы, работается въ связи съ приготовленіемъ соды; такъ что основаніе и развитіе содовыхъ заводовъ въ Россіи имѣло бы прямое и косвенное, въ обоихъ случаяхъ огромное вліяніе на развитіе нашей льняной промышленности, столь мало подвигающейся впередъ. Содовое производство, давая побочнымъ продуктомъ весьма дешевую соляную кислоту, принесло бы не малую пользу во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, гдѣ употребляется эта кислота, и породило бы такія примѣненія ея, въ которыхъ настоитъ существенная потребность, но на которыя нельзя расчитывать до тѣхъ поръ, пока у насъ не будетъ содовыхъ заводовъ.

Я еще не кончилъ,—но и этихъ указаній, полагаю, достаточно для того, чтобы составить себѣ понятіе о безотлагательной необходимости заведенія у насъ содоваго производства, равно о необходимости содѣйствовать этому заведенію или основанію содовыхъ заводовъ, если мы желаемъ поднять уровень нашей мануфактурной промышленности. Многое теперь благопріятствуетъ этому дѣлу. Если до сихъ поръ не зарождалось у насъ содовое производство, то единственною причиною тому была дороговизна главныхъ матеріаловъ—сѣрной кислоты и поваренной соли, изъ которыхъ работается сода. Сѣрная кислота у насъ дорога потому, что до сихъ поръ заводчики находили болѣе выгоднымъ приготовлять ее изъ привозной, слѣдовательно дорогой сѣры, чѣмъ изъ своего колчедана, пользованіе которымъ не было обусловлено общими и положительными правилами. Поваренная соль дорога вслѣдствіе высокаго соляного акциза. Экономической невозможности основанія содовыхъ заводовъ въ Россіи помогала

Digitized by Google

и неравномѣрность акциза на соль съ пошлиной, взимаемой съ привозной соды. Начиная съ 1858 года, мы видимъ, что съ пуда привозной соды взималось по 10 коп. пошлины, а съ пуда своей поваренной соли отъ 28 до 30 коп. акциза. А такъ какъ на выработку 100 пуд. соды (кальцинированной, въ 52°) требуется 140 пуд. соли, то русскому содовому заводчику пришлось бы платить пошлины отъ 39 до 42 к. съ пуда своей соды, вмѣсто 10 коп., взимаемыхъ съ соды иностраннаго приготовленія. Теперь же обстоятельства измѣнились и измѣняются. Мы можемъ имѣть дешовую сѣрную кислоту, потому что Высочайше утвержденнымъ 4 декабря 1861 года мнѣніемъ Государственнаго Совѣта постановлено: 1) «допустить повсемѣстное добываніе сѣрныхъ колчедановъ, безъ отвода на то узаконенныхъ (ст. 1044 Уст. Гор.) площадей, и съ освобожденіемъ отъ платежа установленныхъ пошлинъ, а равно и отъ другихъ формальностей по заявкѣ и разработкѣ мѣсторожденій; 2) освободить заводы, обрабатывающіе сѣрный колчеданъ, на 10 лѣтъ, отъ платежа горной подати». (Биржевыя вѣд. 1862 г. N 21). Можемъ имѣть и дешовую соль, потому что Высочайше утвержденнымъ въ 1862 году мнѣніемъ Государственнаго Совѣта, которымъ положены основанія для составленія проэкта новаго Устава о соли, между прочимъ постановлено: «освобождаются отъ платежа акциза не только негодныя въ пищу, естественныя горькія соли, но и поваренная соль, идущая въ кормъ скоту и для техническихъ и фабричныхъ производствъ». (Тамъ же, N 122). И хотя новый Уставъ о соли находится еще и по настоящее время въ проэктѣ, но есть основаніе думать, что правительство не затруднится выполненіемъ приведеннаго постановленія тотчасъ, какъ будетъ заявлено ему желаніе устроить содовый заводъ. Есть также основаніе думать, что при отпускѣ безакцизной соли правительство, въ предупрежденіе употребленія ея въ пищу, ограничится только необходимыми мѣрами контроля, напр. по образцу бельгійской системы, опредѣленіемъ надзирателей на заводы, употребляющіе такую соль, и не найдетъ нужнымъ портить ее различными примѣсями, какъ предполагается, и основательно, поступать съ солью, идущею въ кормъ скоту. Не могу сказать вообще, но для содовыхъ заводовъ — портить соль значило бы портить самое дѣло, дѣло новое, требующее, по крайней мѣрѣ на первыхъ порахъ, содѣйствія и поддержки всѣми рациональными мѣрами и средствами.

Digitized by Google

Какая же мѣстность Россіи наиболѣе благопріятствуетъ устройству содовыхъ заводовъ? По нашему мнѣнію, такою мѣстностію слѣдуетъ считать пермскую губернію и именно тѣ части ея, которыя лежатъ по р. Камѣ и около; куда, какъ я выразился, должны тянуть наши химическіе заводы, для которыхъ существованіе во внутреннихъ губерніяхъ становится тяжолымъ и даже убыточнымъ. Дѣйствительно, ни одна изъ мѣстностей Россіи не можетъ въ этомъ отношеніи равняться съ пермскою, гдѣ природа сосредоточила почти бокъ-о-бокъ всѣ средства, благопріятныя для развитія химическихъ заводовъ вообще и содовыхъ въ особенности. Тамъ, изобиліе рудъ и между ними колчедановъ, простыхъ желѣзныхъ и мѣдисто-желѣзныхъ; богатство соляныхъ источниковъ и выварочной соли, которая въ скоромъ времени, съ передачею казенныхъ варницъ въ частную собственность или въ арендное содержаніе, должна значительно понизиться въ цѣнѣ и быть не дороже 10 коп. за пудъ; наконецъ изобиліе прочихъ матеріаловъ— извести, мѣлу, огнеупорной глины и топлива. Изъ такихъ мѣстностей я могу указать, какъ на наиболѣе извѣстную мнѣ, около дедюхинскихъ соляныхъ варницъ, гдѣ на одной сторонѣ Камы добывается соль, а на другой находятся залежи мѣдистыхъ колчедановъ, изъ коихъ нѣкоторыя были разработываемы казной, а потомъ по убогости ихъ, какъ говорятъ, заброшены.

Принимая все это въ соображеніе, я составилъ расцѣнку стоимости производства соды, чтобы показать, на сколько оно можетъ быть выгоднымъ для предпринимателя. При чемъ, имѣя въ виду новизну дѣла, слѣдовательно неизбѣжныя на первыхъ порахъ неудачи, я старался въ своихъ расчетахъ, при опредѣленіи количества матеріаловъ и расходовъ, держаться не среднихъ, а высшихъ цифръ. Думаю также, что цѣны на все почти показаны выше умѣренныхъ. Но, прежде чѣмъ перейдти къ исчисленію стоимости производства, считаю не лишнимъ дать нѣкоторыя поясненія. Я составилъ расцѣнку на выработку 100.000 пуд. соды кальцинированной въ 52°. На это количество необходимо употребить до 155.000 пуд. сѣрнокислаго натра или глауберки, а чтобы приготовить 155.000 пуд. глауберки нужно до 140.000 пуд. поваренной соли и до 190.000 пуд. сѣрной кислоты въ 50°, т. е. обыкновенной камерной кислоты. Но такъ какъ для приготовленія сѣрной кислоты нужна натро-

Digitized by Google

вая селитра, а отъ селитры остаются огарки, или двусѣрнокислый натръ, который пойдетъ въ примѣсь къ глауберкѣ, то количества поваренной соли и кислоты должны быть соотвѣтственно уменьшены. Въ данномъ случаѣ отъ 5300 пуд. селитры, причитающихся на выработку 190.000 пуд. сѣрной кислоты, получится 6200 пуд. селитряныхъ огарковъ, состоящихъ изъ 3968 пуд. средняго сѣрнокислаго натра или глауберки и 2232 пуд. безводной сѣрной кислоты, равныхъ 4368 пуд. камерной кислоты въ 50°. Слѣдовательно, примѣшивая огарки къ приготовляемой глауберкѣ, надобно сократить расходъ поваренной соли на 3600 пуд., а расходъ сѣрной кислоты на 9000 пуд. (слишкомъ), т. е, для 100.000 пуд. соды потребуется 136.400 пуд. соли и 181.000 пуд. кислоты. Остальные 9000 пуд. кислоты пойдутъ на разложеніе селитры. Далѣе—для производства 190.000 пуд. сѣрной кислоты я полагаю три камеры и силу каждой—около 200 пуд. кислоты въ сутки. Матеріаломъ беру желѣзный колчеданъ (не расчитывая на содержаніе въ немъ мѣди) и принимаю среднее содержаніе въ немъ сѣры въ 40%, изъ коихъ пусть только 33% пойдутъ въ дѣло, а 7% составятъ потерю. Для приготовленія 155.000 пуд. глауберки полагаю 4 печи, такъ чтобы каждая разлагала до 100 пуд. поваренной соли въ сутки, а для приготовленія соды—три каленки, изъ коихъ каждая, дѣлая 8 прокалокъ въ сутки, давала бы въ это время до 240 пуд. сырой соды. Наконецъ, количество дровъ потребное на три операціи содоваго производства, основано мною на слѣдующемъ расчетѣ. За границей, на выработку 100 пуд. кальцинированной соды расходуется до 335 пуд. каменнаго угля. При замѣнѣ угля деревомъ, для прокалки, плавки и т. п., выходитъ отъ 2 до $2\frac{1}{2}$ разъ болѣе дровъ. Взявъ послѣднюю величину, мы найдемъ, что на 100 пуд. соды нужно $837\frac{1}{2}$ пуд. или около $2\frac{3}{4}$ куб. сажени дровъ, полагая вѣсъ такой сажени въ 300 пуд., а на 100.000 пуд. соды 2791 куб. саж. или 5582 саж. шестичетвертныхъ дровъ. Это количество распредѣляется на три операціи такимъ образомъ: 1) на выработку 100 пудъ глауберки 45 пуд. каменнаго угля или $112\frac{1}{2}$ пуд. дровъ, а на 155.000 пуд. 1162 сажени 6-ти четвертныхъ дровъ; 2) на 100 пуд. сырой соды—50 пуд. угля или 125 пуд. дровъ, а на 250.000 пуд. 2084 саж., и 3) на выработку 100 пуд. кальцинированной соды изъ 250 пуд. сырой—140 пуд. угля или 350 пуд. дровъ, а на 100.000 пуд. 2340 саженъ.

Digitized by Google

СТОИМОСТЬ ПРОИЗВОДСТВА

100.000 пуд. соды кальцинированной въ 52°.

А.

Стоимость производства 190.000 пуд. сѣрной кислоты въ 50°.

Слѣдуетъ употребить:

145000 пуд. колчедана, по 8 коп. за пудъ	на	11600 руб.
5300 пуд. селитры, по 2 руб. 65 коп....	—	14045
7000 пуд. сѣрной кислоты въ 60°, по 40 к.	—	2800
Расхода:		
На содержаніе паровиковъ (дрова, плата рабочимъ и проч.).....	—	1800
На работу: жалованье камерному мастеру....		1000
— плата и содержаніе 16 рабочихъ.		3100
На освѣщеніе камерныхъ корпусовъ.....		400
На страхованіе (завода стоимостію 65000 руб. и постоянно содержащейся въ камерахъ кислоты до 9000 пуд.).....		1850
Разныхъ общихъ расходовъ.....		2005

Получится:

190.000 пуд. кислоты.....	на	38600 руб.
6200 пуд. селитряныхъ огарковъ, состоящихъ изъ 3968 пуд. сѣрнокислаго натра, по 41 коп., на 1627 р. и 2232 пуд. безвод. сѣрной кислоты, равныхъ 4368 пуд. кислоты въ 50°, по 27 к., на 1179 р., а всего кругл. чис.	на	2800
		35800 руб.

Слѣдовательно, производство 1 пуда кислоты будетъ стоить 18,84 коп.

Расходы накладные:

На окупку завода, стоимостію 65000 руб., въ теченіе 12 лѣтъ.....				5417
На ремонтъ завода 1½%.....				975
9% на капиталъ	въ заводѣ.....		65000	
	оборотный	въ колчеданѣ	11600	
		въ селитрѣ	14045	
			90645.....	8158
				14550 руб.

а на пудъ кислоты 7,66 коп.

Слѣд. 1 пудъ кислоты обойдется заводу въ 26½ к.

Digitized by Google

B.

Стоимость производства 155.000 пудъ глауберки.

Слѣдуетъ употребить:

136400 пуд. поваренной соли, по $12^1/_2$ коп.. на	17050 руб.
181000 пуд. сѣрной кисл. въ 50°, по $26^1/_2$ к.....	47965
6200 пуд. селитряныхъ огарковъ.....	2800
1160 саженъ 6-ти четвертныхъ дровъ, по 1 руб. 30 коп.....	1508

Расхода:

На работу: плата и содержаніе 12 рабочихъ...	2300
— часть жалованья мастеру (изъ 3000 р.).	700
На освѣщеніе, страхованіе и разныхъ общихъ расходовъ.....	3277

Получится:

155000 пуд. глауберки..... на 75600 руб.

100 пуд. соли даютъ отъ 105 до 110 пуд. соляной кислоты въ 20—22°, слѣдовательно отъ 136400 пуд. должно получить среднимъ числомъ 146000. Положимъ, что на первыхъ порахъ для заводчика будетъ затруднительно и безвыгодно собирать столь значительное количество этой кислоты. Но такъ какъ содовый заводъ долженъ работать и хлорную известь, то будетъ немного, если принять количество сбора соляной кислоты въ 75000 пуд. (для приготовленія 30000 пуд. хлорной извести), по 25 коп..... 18750

56850 руб.

Т. е. производство 1 пуда глауберки будетъ стоить $36^2/_3$ коп.
накладныхъ расходовъ $4^1/_3$ —

Всего 41 коп.

Digitized by Google

C.

Стоимость производства 250.000 пуд. сырой соды.

Слѣдуетъ употребить:

155000 пуд. глауберки, по 41 коп.....	на	63550 руб.
160000 пуд. мѣлу, по 5 коп.....		8000
77500 пуд. угля, по 8 коп.....		6200
2100 саженъ 6-ти четверт. дровъ, по 1 р 30 к.		2730
Расхода:		
На работу: плата и содержаніе 12 рабочихъ .		2300
— часть жалованья мастеру.....		1000
На освѣщеніе, страхованіе и разныхъ общихъ расходовъ.....		3420
Получится:		
250000 пуд. сырой соды, въ 34—36°.....		87200 руб.

Т. е. производство 1 пуда сырой соды будетъ стоить 34,88 коп.
накладныхъ расходовъ 3,62
Всего 38,50 коп.

D.

Стоимость производства 100.000 пуд. кальцинированной соды.

Слѣдуетъ употребить:

250000 пуд. сырой соды, по 38½ коп....	на	96250 руб.
2340 саженъ дровъ, по 1 р. 30 коп.....		3042
Расхода:		
На работу: плата и содержаніе 18 рабочихъ..		3500
— остальная часть жалованья мастеру		1300
На освѣщеніе, страхованіе и разныхъ общихъ расходовъ.....		3408
Накладные расходы и укупорка.....		10500
Получится:		
100000 пуд. кальцинированной соды въ 52°	на	118000 руб.

Итакъ, 1 пудъ кальцинированной соды обойдется заводу въ *1 руб. 18 коп.*

Digitized by Google

Въ Англіи производство 1 пуда такой соды обходится около 95 коп., при выработкѣ сѣрной кислоты изъ сѣры, и до 85 коп., при выработкѣ кислоты изъ колчедановъ.

Въ Бельгіи 1 пудъ соды обходится заводамъ отъ 1 р. 5 коп. до 1 р. 20 коп.

Во Франціи, вслѣдствіе акциза на соль, стоимость производства соды достигаетъ 1 руб. 60 коп. на пудъ.

Слѣдовательно, производство соды въ Россіи, даже при столь высокомъ учетномъ процентѣ на капиталъ (9%), должно находиться въ неменѣе выгодныхъ условіяхъ, какъ и за границей, за исключеніемъ Англіи. При цѣнѣ англійской соды на петербургской биржѣ въ 1 р. 50 к.—1 р. 60 к. можно продавать свою соду съ завода по 1 р. 40 к. за пудъ, т. е. имѣть по 22 коп. на пудъ пользы. Но такъ какъ въ сѣрной кислотѣ и содѣ мы видимъ главнѣйшія средства къ развитію нашей мануфактурной промышленности, то желательно, чтобы продажныя цѣны на нихъ были возможно дешевле. Это удешевленіе и будетъ имѣть мѣсто, когда самое дѣло, разъ установившись, вызоветъ подражателей и покажетъ на возможность нѣкоторыхъ въ немъ упрощеній и сокращенія расходовъ (противъ показанныхъ мною въ расцѣнкѣ), и особенно коль скоро на приготовленіе сѣрной кислоты будетъ употребляться вмѣсто обыкновеннаго колчедана мѣдисто-желѣзный. Такъ, предположимъ, что содовый заводъ можетъ имѣть небогатый колчеданъ—такой, отъ котораго получится 5% мѣднаго купороса, т. е. въ нашемъ примѣрѣ отъ 145000 пуд. колчедана 7250 пуд. купороса, по 4 руб. 30 коп. за пудъ, на 31175 руб. Тогда, 190000 пуд. сѣрной кислоты обойдутся въ 19175 руб.; слѣдовательно

пудъ сѣрной кислоты въ 50° будетъ стоить *10 коп.*
— глауберки — — — — 22
— сырой соды — — — — 26½

а пудъ кальцинированной соды *88 коп.*

Такую разницу дѣлаютъ какіе-нибудь 2% мѣди въ колчеданѣ! Вотъ почему, какъ я замѣтилъ выше, свободное пользованіе мѣдисто-желѣзными колчеданами можетъ служить самой раціональной гарантіей (вмѣсто всякой другой) для химическихъ заводовъ вообще и для содовыхъ въ особенно-

Digitized by Google

сти. Отсюда же не трудно заключить, какъ много должна ожидать наша промышленность отъ неважнаго, по видимому, средства,—отъ возможности употребленія въ дѣло матеріала, пользованіе которымъ было до сихъ поръ сопряжено съ затрудненіями.

Digitized by Google

ОГЛАВЛЕНІЕ 2-го ВЫПУСКА.

Стр.

1. Объ интегрированіи уравненій съ частными производными перваго порядка. *В. Г. Имшенецкаго*.... 1.
2. Продукты пищеваренія въ крови. *А. Я. Щербакова*. 173.
3. Сѣрная кислота и сода. *А. К. Чугунова*..... 198.

—

Digitized by Google

Digitized by Google

УЧЕНЫЯ ЗАПИСКИ, по отдѣленію физико-математическихъ и медицинскихъ наукъ, выходятъ выпусками, которые составляютъ ежегодно томъ, не менѣе какъ въ 15 печатныхъ листовъ.

Подписная цѣна за годовое изданіе 3 р. 50 к. съ перес.

ПОДПИСКА ПРИНИМАЕТСЯ:

Въ Казани: въ Редакціи «Ученыхъ Записокъ».

Въ Москвѣ: въ книжныхъ магазинахъ Глазунова и Свѣшникова.

Въ Санктпетербургѣ: въ книжныхъ магазинахъ Кожанчикова и Давыдова.

КАЖДЫЙ ВЫПУСКЪ ПРОДАЕТСЯ ОТДѢЛЬНО.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google