azan. Universitet. Fiziko-matematicheskoe obshchest

BULLETIN DE LA SOCIETÉ PHYSICO-MATHEMATIQUE
de Kasan.
Deuxième série. Tome XXI.

Q
60
.K21
A2

ИЗВѢСТІЯ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ.

ВТОРАЯ СЕРІЯ

ТОМЪ XXI.

№ 4.

КАЗАНЬ.
Типо-литографія Императорскаго Университета.
1915.

Digitized by Google

Печатано по опредѣленію Совѣта Физико-Математическаго Общества при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ.

Предсѣдатель проф. Д. Гольдгаммеръ.

Digitized by Google

О возможности представленія простыхъ чиселъ нѣкоторыми простѣйшими квадратичными формами.

Я. Успенскаго.

Хотя въ настоящее время извѣстно много доказательствъ возможности представленія простыхъ чиселъ извѣстнаго вида простѣйшими квадратичными формами, какъ то: x^2+y^2 x^2+2y^2, x^2+3y^2 и т. п., тѣмъ не менѣе я думаю, что излагаемыя въ этой замѣткѣ доказательства, построенныя на совершенно иныхъ началахъ, могутъ представить нѣкоторый интересъ.

Условимся прежде всего въ обозначеніяхъ. Обозначимъ черезъ $\varrho(m)$ и $\varphi(m)$ числовыя функціи, опредѣляемыя равенствами

$$\varrho(m)=\sum\left(\frac{-1}{\varrho}\right),$$

$$\varphi(m)=\sum\left(\frac{-3}{\varrho}\right),$$

гдѣ суммы распространяются на всѣ нечетные дѣлители числа m; согласимся также сумму всѣхъ дѣлителей числа m обозначать знакомъ $\zeta(m)$.

Докажемъ теперь слѣдующія свойства функціи $\varrho(m)$ и $\varphi(m)$: если $\varrho(m)$ нечетное число, то $m=\sigma^2$ или $m=2\sigma^2$, т. е. m или квадратъ или удвоенный квадратъ; равнымъ образомъ, если $\varphi(m)$ нечетное число, то $m=\sigma^2$ или $m=2\sigma^2$ или $m=3\sigma^2$ или $m=6\sigma^2$.

Digitized by Google

Достаточно ограничиться при доказательствѣ какой нибудь одной изъ функцій $\varrho(m)$ и $\varphi(m)$, такъ какъ для другой доказательство совершенно аналогично. Остановимся на функціи $\varphi(m)$.

Обозначимъ черезъ $p_1, p_2, \ldots p_s$ простые дѣлители m формы $6l+1$, а черезъ $q_1, q_2, \ldots q_\sigma$ простые дѣлители формы $6l-1$ и положимъ

$$m = 2^{\lambda} . 3^{\mu} . p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s} . q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \ldots q_\sigma^{\beta_\sigma} ,$$

гдѣ показатели λ и μ могутъ быть и нулями. Изъ опредѣленія функціи $\varphi(m)$ нетрудно вывести, что

$$\varphi(m) = \varphi(p_1^{\alpha_1}) \varphi(p_2^{\alpha_2}) \ldots \varphi(p_s^{\alpha_s}) . \varphi(q_1^{\beta_1}) \varphi(q_2^{\beta_2}) \ldots \varphi_\sigma(q_\sigma^{\beta}) .$$

Но такъ какъ $\varphi(q_i^{\beta_i})$ будетъ равно 0 или 1 въ зависимости отъ того, будетъ-ли β_i нечетнымъ или четнымъ, то ясно, что $\varphi(m)$ можетъ быть нечетнымъ числомъ только тогда, когда всѣ показатели $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\sigma$ четные. Равнымъ образомъ $\beta(p_i^{\alpha_i}) = \alpha_i + 1$ будетъ нечетнымъ числомъ только при α_i четномъ, откуда ясно, что $\varphi(m)$ будетъ тогда и только тогда нечетнымъ числомъ, когда всѣ показатели $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_s$ и $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\sigma$ четные. Принявъ же во вниманіе, что λ и μ могутъ быть какъ четными, такъ и нечетными, видимъ, что сравненіе $\varphi(m) \equiv 1 (Mod.\ 2)$ возможно только въ одномъ изъ случаевъ:

$$m = s^2, \; m = 2s^2, \; m = 3s^2, \; m = 6s^2.$$

Выведемъ еще нѣкоторыя соотношенія между функціями $\varrho(m), \varphi(m)$ и $\zeta(m)$, легко получаемыя изъ общихъ формулъ (formules générales) Ліувилля. Обозначимъ черезъ $f(x)$ произвольную четную функцію и черезъ m нечетное число; тогда имѣемъ три слѣдующія формулы:

$$\sum \left\{ f(d' - d'') - f(d' + d'') \right\} = \sum d \left(f(0) - f(2d) \right) \ldots . (1)$$

Digitized by Google

$$2\sum\left\{f(\delta'-\delta'')-f(\delta'+\delta'')\right\}=$$

$$=f(0)\zeta(m)-\sum\left\{f(0)+2f(2)+\ldots+2f(d-1)\right\}\ldots\ldots(2)$$

$$2\sum\left\{f(d'-d'')-f(d'+d'')\right\}=\sum(\delta-d)f(d)\ .\ \ldots(3)$$

Во всѣхъ этихъ формулахъ въ правыхъ частяхъ суммы распространяются на всѣ представленія m въ формѣ: $m=\delta d$; въ лѣвой части формулы (1) сумма распространена на всѣ представленія $2m$ въ формѣ

$$2m=d'\delta'+d''\delta'',$$

гдѣ d',δ',d'',δ''—нечетныя числа; въ лѣвыхъ частяхъ формулъ (2) и (3) суммы распространяются на всѣ представленія m въ формѣ

$$m=d'\delta'+d''\delta'',$$

гдѣ d',δ',δ'' нечетныя числа, d'' четное и не равное нулю.

Если мы положимъ въ формулѣ (1)

$$f(x)=\cos\frac{\pi x}{2}\ ,$$

то получимъ соотношеніе между $\varrho(m)$ и $\zeta(m)$, которое можно представить въ такомъ видѣ:

$$\varrho(1)\varrho(2m-1)+\varrho(3)\varrho(2m-3)+\ldots+\varrho(m-2)\varrho(m+2)$$

$$=\frac{\zeta(m)-\varrho(m)^2}{2}\ .$$

Замѣняя здѣсь m простымъ числомъ $p=4\mu+1$, найдемъ

$$\varrho(1)\varrho(2p-1)+\varrho(3)\varrho(2p-3)+\ldots+\varrho(p-2)\varrho(p+2)=2\mu-1,$$

Digitized by Google

откуда ясно, что по крайней мѣрѣ одно слагаемое въ лѣвой части нечетное число.

Пусть $\varrho(i)\varrho(2p-i)$, гдѣ $i<p$, будетъ нечетнымъ; тогда, по доказанному выше, необходимо

$$i=s^2 \text{ и } 2p-i=t^2,$$

т. е.

$$2p=s^2+t^2.$$

Отсюда уже сразу вытекаетъ возможность представить простое число формы $4\mu+1$ суммой двухъ квадратовъ. Потомъ дополнительно можно обнаружить, что такое представленіе будетъ единственнымъ, если не принимать во вниманіе знаки и считать первый квадратъ нечетнымъ.

Положимъ въ формулѣ (2) опять $f(x)=\cos\frac{\pi x}{2}$; тогда получимъ новое соотношеніе между $\varrho(m)$ и $\zeta(m)$, которое можно написать такъ

$$\varrho(1)\varrho\left(\frac{m-1}{2}\right)+\varrho(3)\varrho\left(\frac{m-3}{2}\right)+\ldots+\varrho(m-2)\varrho(1)$$
$$=\frac{1}{4}\left(\zeta(m)-\varrho(m)\right).$$

Если здѣсь возьмемъ вмѣсто m простое число p вида $8\mu+3$ или $8\mu+1$, то соотвѣтственно получимъ

$$\varrho(1)\varrho\left(\frac{p-1}{2}\right)+\varrho(3)\varrho\left(\frac{p-3}{2}\right)+\ldots+\varrho(p-2)\varrho(1)=2\mu+1 \quad (4)$$

$$\varrho(1)\varrho\left(\frac{p-1}{2}\right)+\varrho(3)\varrho\left(\frac{p-3}{2}\right)+\ldots+\varrho(p-2)\varrho(1)=2\mu \quad (5)$$

Равенство (4) показываетъ, что по крайней мѣрѣ одно слагаемое лѣвой части (и во всякомъ случаѣ нечетное число слагаемыхъ) будетъ нечетнымъ, т. е. для нѣкотораго нечет-

Digitized by Google

наго i числа $\varrho(i)$ и $\varrho\left(\frac{p-i}{2}\right)$ оба нечетныя; а это возможно только тогда, когда или

$$i=s^2,\ \frac{p-i}{2}=t^2$$

или

$$i=s^2,\ \frac{p-i}{2}=2t^2$$

Послѣдняя возможность отпадаетъ, какъ влекущая невозможное равенство $p=s^2+4t^2$; остается только первая, въ силу которой уравненіе

$$a=s^2+2t^2$$

удовлетворяется положительными числами s и t нечетное число разъ, а именно одинъ разъ, какъ можно убѣдиться дополнительно.

Равенство (5) показываетъ, что въ лѣвой части имѣется четное число нечетныхъ слагаемыхъ, и это число не можетъ быть нулемъ, такъ какъ уже доказано, что уравненіе

$$p=s^2+4t^2$$

при положительныхъ s и t имѣетъ мѣсто одинъ разъ (или во всякомъ случаѣ нечетное число разъ). Слѣдовательно, должно существовать еще нечетное число такихъ значеній i, для которыхъ одновременно

$$i=s^2,\ \frac{p-i}{2}=t^2,$$

т. е. уравненіе

$$p=s^2+2t^2$$

имѣетъ нечетное число рѣшеній въ положительныхъ числахъ, а именно одно. Такъ доказана возможность представленія простыхъ чиселъ формы $8\mu+1$ и $8\mu+3$ въ видѣ суммы квадрата и удвоеннаго квадрата.

Digitized by Google

Возвращаясь вновь къ формулѣ (2), положимъ въ ней

$$f(x)=\cos\frac{2\pi x}{3}.$$

Принявъ во вниманіе, что при нечетномъ δ

$$Sin\frac{2\pi\delta}{3}=\left(\frac{-3}{\delta}\right)\frac{\sqrt{3}}{2},$$

получимъ соотношеніе между $\varphi(m)$ и $\zeta(m)$, которое можно представить такъ:

$$\sum\varphi(i)\varphi(m-i)=\frac{1}{3}\Big(\zeta(m)-\varphi(m)\Big)\ldots.(6);$$

здѣсь сумма распространена на всѣ нечетныя значенія $i=1, 3, 5,\ldots,$ меньшія m.

Если взять $f(x)=\cos\frac{2\pi x}{3}$ въ формулѣ (3) и положить $m=3^\beta n$, гдѣ n на 3 не дѣлится, то нетрудно получить другое соотношеніе между $\varphi(m)$ и $\zeta(m)$:

$$\sum\varphi(i)\varphi(m-i)-\sum\varphi(j)\varphi(m-j)=-\frac{3^\beta-1}{2}\zeta(n)\ldots(7);$$

здѣсь первая сумма распространена на такія нечетныя $i<m$, для которыхъ высшая степень 2, дѣлящая $m-i$, четная, а вторая сумма—на такія нечетныя $j<m$, для которыхъ наивысшая степень 2, дѣлящая $m-j$, нечетная. Если m не дѣлится на 3, то изъ (6) и (7) выведемъ слѣдующія два равенства

$$\sum\varphi(i)\varphi(m-i)=\frac{1}{6}\Big(\zeta(m)-\varphi(m)\Big)\ldots.(8)$$

$$\sum\varphi(j)\varphi(m-j)=\frac{1}{6}\Big(\zeta(m)-\varphi(m)\Big)\ldots.(9)$$

въ которыхъ перемѣнныя суммированія i и j подчиняются

Digitized by Google

тѣмъ же условіямъ, какъ въ равенствѣ (7). Замѣнимъ въ (8) m простымъ числомъ $p=6\lambda+1$; получимъ

$$\sum\varphi(i)\varphi(p-i)=\lambda \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Если λ нечетное, то хотя бы при одномъ i будетъ существовать нечетный членъ $\varphi(i)\varphi(p-i)$, т. е. будетъ

$$i=s^2,\ p-i=t^2,$$

$$i=s^2,\ p-i=3t^2,$$

или

$$i=3s^2,\ p-i=t^2.$$

Первое предположеніе влечетъ невозможное равенство $p=s^2+t^2$; при двухъ же другихъ получаемъ представленіе p въ видѣ

$$p=x^2+3y^2.$$

Если λ четное, то уравненіе $p=s^2+t^2$, гдѣ s нечетное, имѣемъ одно рѣшеніе; слѣдовательно, существуетъ по крайней мѣрѣ еще одно значеніе i такое, что одновременно

$$i=s^2,\ p-i=3t^2$$

или

$$i=3s^2,\ p-i=t^2,$$

откуда опять получается то же заключеніе, какъ раньше. Такъ доказана возможность представленія всякаго простого числа $p=6\lambda+1$ формой x^2+3y^2.

Если въ равенствѣ (9) замѣнимъ m простымъ числомъ $p=6\lambda+1$, то получимъ

$$\sum\varphi(j)\varphi(p-j)=\lambda.$$

Различая затѣмъ случаи λ четнаго и нечетнаго, докажемъ подобно предыдущему, что всякое простое число одной

Digitized by Google

изъ формъ $24\mu + 1$ или $24\mu + 7$ представляется формой $x^2 + 6y^2$. Наконецъ, если въ (9) возьмемъ $m = p = 6\lambda + 5$, то совершенно такъ же докажемъ, что всякое простое число одной изъ формъ $24\mu + 5$ или $24\mu + 11$ представляется формой $2x^2 + 3y^2$.

Изложенный способъ доказательства можно распространить и на нѣкоторыя другія квадратичныя формы, но мы считаемъ излишнимъ входить въ разсмотрѣніе другихъ случаевъ, такъ какъ основная идея доказательства уже достатотно выяснена.

Digitized by Google

Правила для опредѣленія знака въ сравненіи

$$1.2.3...\frac{p-1}{2}\equiv\pm 1 \pmod{p.},$$

гдѣ p простое число формы $4\mu+3$.

Я. Успенскаго.

Извѣстно, что при простомъ $p\equiv 3 \pmod 4$ имѣетъ мѣсто сравненіе

$$1.2.3...\frac{p-1}{2}\equiv\pm 1 \pmod{p} \qquad (1)$$

съ тѣмъ или другимъ знакомъ. Изъ различныхъ правилъ, позволяющихъ a priori опредѣлить знакъ въ этомъ сравненіи, наиболѣе замѣчательнымъ является правило, предложенное Кронекеромъ. Можно однако предложить правила того же характера, но еще болѣе удобныя; это именно и составитъ предметъ настоящей замѣтки.

Мы начнемъ съ разсмотрѣнія случая $p\equiv 3 \pmod 8$, такъ какъ для этого случая разсужденія болѣе элементарны, нежели для случая $p\equiv 7 \pmod 8$.

Если обозначить черезъ A число квадратичныхъ невычетовъ модуля p, заключенныхъ въ ряду чиселъ $1,2,3,...\frac{p-1}{2}$, то ясно, что въ сравненіи (1) долженъ имѣть мѣсто верхній знакъ, если A четное, и нижній знакъ, если A нечет-

Digitized by Google

ное. Обозначивъ черезъ B число квадратичныхъ вычетовъ, заключенныхъ въ томъ же ряду чиселъ, будемъ имѣть очевидно

$$A+B=\frac{p-1}{2}.$$

Съ другой стороны, если $F(n)$ обозначаетъ число классовъ формъ опредѣлителя—n, у которыхъ одинъ изъ крайныхъ коэффиціентовъ нечетный, то по извѣстной формулѣ Дирихле

$$-A+B=F(p),$$

и, слѣдовательно,

$$A=\frac{p-1}{4}-\frac{1}{2}F(p). \qquad (2)$$

Весь вопросъ приводится къ опредѣленію вычета числа $F(p)$ по модулю 4.

Если $p\equiv 3 \pmod 8$, то, какъ извѣстно, число рѣшеній уравненія

$$p=\xi^2+\eta^2+\zeta^2,$$

гдѣ ξ,η,ζ положительныя нечетныя числа, равно $F(p)$; такое же точно будетъ число рѣшеній уравненія

$$p=8x^2+2y^2+z^2,$$

гдѣ y и z нечетныя положительныя числа, а x произвольное цѣлое число. Но то же число рѣшеній можетъ быть выражено иначе. Именно, если обозначимъ черезъ $\psi(m)$ числовую функцію, опредѣляемую равенствомъ

$$\psi(m)=\sum\left(\frac{-2}{\delta}\right),$$

гдѣ сумма берется по всѣмъ нечетнымъ дѣлителямъ δ числа m, то для упомянутаго выше числа рѣшеній будемъ имѣть

Digitized by Google

выраженіе

$$1+\sum_{x=1,2,3,\ldots}\psi(p-8x^2)$$

Замѣняя $F(p)$ этимъ выраженіемъ въ равенствѣ (2) и полагая $p=8\mu+3$, получимъ

$$A=2\mu-\frac{1}{2}\sum\psi(p-8x^2)\,. \qquad (3$$

Теперь нужно только узнать, будетъ-ли число

$$\frac{1}{2}\sum\psi(p-8x^2) \qquad (4)$$

четнымъ или нечетнымъ. Изъ самаго опредѣленія функціи $\psi(m)$ легко вывести, что $\psi(m)$ будетъ нечетнымъ тогда и только тогда, когда $m=s^2$ или $m=2s^2$. Такъ какъ уравненіе

$$p=8x^2+y^2$$

невозможно, то въ суммѣ (4) всѣ слагаемыя будутъ четными. Посмотримъ, сколько имѣется въ этой суммѣ слагаемыхъ $\equiv 2 \pmod 4$. Если для нечетнаго m

$$\psi(m)\equiv 2 \pmod 4,$$

то простые дѣлители m формы $8\mu+5$ или $8\mu+7$ входятъ въ составъ m съ четными показателями; ибо иначе было бы $\psi(m)=0$. Пусть простые дѣлители $p_1,p_2,\ldots p_s$ одной изъ двухъ формъ $8\mu+1$ или $8\mu+3$ входятъ съ показателями $\alpha_1,\alpha_2,\ldots \alpha_s$; тогда

$$\psi(m)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_s+1)\equiv 2 \pmod 4.$$

Это сравненіе показываетъ, что изъ чиселъ $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_s$ одно и только одно нечетное, имѣющее форму $4i+1$. Такимъ образомъ, сравненіе $\psi(m)\equiv 2 \pmod 4$ будетъ соблюдено толь-

Digitized by Google

ко тогда, когда m имѣетъ форму

$$m=q^{4i+1}y^2,$$

гдѣ q простое число $\equiv 1$ или $\equiv 3 \pmod 8$; для i не исключено значеніе 0. На основаніи этого ясно, что число ε представле-ній p, въ формѣ

$$p=8x^2+q^{4i+1}y^2,$$

гдѣ x, y положительныя цѣлыя числа, q простое число (необходимо $\equiv 3 \pmod 8$), $i \geqq 0$, будетъ одной четности съ суммой (4). Равенство же (3) показываетъ, что

$$A \equiv \varepsilon \pmod 2.$$

Это сравненіе даетъ первое правило для опредѣленія знака въ сравненіи (1).

Чтобы вывести дальнѣйшія и болѣе удобныя правила, вновь обращаемся къ разсмотрѣнію уравненія

$$p=\xi^2+\eta^2+\zeta^2, \qquad (5)$$

гдѣ ξ, η, ζ нечетныя положительныя числа. Остановимся сначала на случаѣ $p \equiv 3 \pmod{16}$. Обозначимъ черезъ P число тѣхъ рѣшеній уравненія (5), для которыхъ

$$\xi^2 \equiv 1,\ \eta^2 \equiv \zeta^2 \equiv 9 \pmod{16},$$

и черезъ Q число тѣхъ рѣшеній, для которыхъ

$$\xi^2 \equiv \eta^2 \equiv \zeta^2 \equiv 1 \pmod{16}.$$

Докажемъ, что сумма $P+Q$ всегда нечетная. Эта сумма выражаетъ число всѣхъ рѣшеній уравненія (5), для которыхъ $\xi^2 \equiv 1 \pmod{16}$. Число тѣхъ рѣшеній, для которыхъ η не $= \zeta$ будетъ четное, ибо всякому такому рѣшенію ξ, η, ζ соотвѣтствуетъ отличное отъ него рѣшеніе ξ, ζ, η; сверхъ того,

Digitized by Google

существуетъ одно и только одно рѣшеніе, для котораго $\eta=\zeta$, именно $\xi=a$, $\eta=\zeta=b$, гдѣ a и b положительныя числа, удовлетворяющія уравненію

$$p=a^2+2b^2.$$

Поэтому

$$P+Q\equiv 1 \pmod 2. \qquad (6)$$

Подобнымъ же образомъ убѣждаемся, что Q будетъ нечетнымъ, когда $b^2\equiv 1 \pmod{16}$, и четнымъ, когда $b^2\equiv 9 \pmod{16}$; это можно выразить однимъ сравненіемъ

$$Q\equiv n+1 \pmod 2, \qquad (7)$$

если положить

$$\frac{a^2-b^2}{8}=n.$$

Изъ (6) и (7) найдемъ

$$P\equiv n \pmod 2.$$

Для случая $p\equiv 11 \pmod{16}$ слѣдуетъ подъ P понимать число рѣшеній уравненія (5), для которыхъ

$$\xi^2\equiv 9,\ \eta^2\equiv\zeta^2\equiv 1 \pmod{16};$$

тогда аналогичнымъ способомъ опять получится сравненіе

$$P\equiv n \pmod 2.$$

Установивъ это важное сравненіе, обращаемся къ разсмотрѣнію уравненія

$$p=8x^2+2y^2+z^2,$$

въ которомъ предполагаемъ x,y,z нечетными положительными числами.

Число рѣшеній этого уравненія съ одной стороны выражается суммой

$$\frac{1}{2}\sum_{x=1,3,5\ldots}\psi(p-8x^2);$$

Digitized by Google

а съ другой стороны то же число, какъ легко убѣдится, будетъ равно P.

Поэтому

$$\sum\psi(p-8x^2)\equiv 2n \pmod 4.$$

Если обозначимъ черезъ η число представленій p въ формѣ

$$p=8x^2+q^{4i+1}y^2,$$

гдѣ x и y нечетныя положительныя числа, q—число простое, $i\geqq 0$, то получимъ, въ силу предыдущаго сравненія,

$$\eta\equiv n \pmod 2.$$

Обозначивъ же черезъ ε' число представленій p въ формѣ

$$p=32x^2+q^{4i+1}y^2,$$

гдѣ опять x и y положительны, q простое и $i\geqq 0$, будемъ имѣть

$$\varepsilon'+\eta=\varepsilon,$$

откуда выведется, въ силу ранѣе доказаннаго, сравненіе

$$A\equiv\varepsilon'+\frac{a^2-b^2}{8} \pmod 2.$$

Это даетъ второе правило для опредѣленія знака въ сравненіи (1).

Послѣднее правило, а также еще два другихъ, можно вывести и другимъ путемъ, основаннымъ на представленіи p нѣкоторыми квадратичными формами съ 4-я перемѣнными.

Разсмотримъ представленія p квадратичной формой

$$p=x^2+2y^2+8z^2+16t^2,$$

гдѣ x и y считаются нечетными и положительными. Полное число такихъ представленій, какъ будетъ показано въ дру-

Digitized by Google

гомъ мѣстѣ, равно

$$\frac{p+1}{4}=2\mu+1,$$

число же представленій, гдѣ z и t не равны нулю заразъ, будетъ 2μ. Но то же число можно выразить суммой

$$\sum\psi(v)\psi(v'),$$

распространенной на всѣ представленія p въ формѣ

$$p=v+8v'$$

съ положительными v и v'. Изъ равенства

$$\sum\psi(v)\psi(v')=2\mu,$$

такъ какъ v не можетъ быть квадратомъ, выводится такое заключеніе. Если ε'' обозначаетъ число представленій p въ формѣ

$$p=16x^2+q^{4i+1}y^2$$

при положительныхъ x и y, при простомъ q и $i\geq 0$, то

$$\varepsilon+\varepsilon''\equiv\mu \pmod 2,$$

откуда получится

$$A\equiv\varepsilon''+\mu \pmod 2$$

Это сравненіе даетъ третье правило. Для вывода второго правила разсматриваемъ представленія p формой

$$p=x^2+2y^2+16z^2+16t^2$$

съ положительными (нечетными) x и y. Въ другомъ мѣстѣ будетъ показано, что полное число такихъ представленій выражается слѣдующимъ образомъ: если α и β числа, удовлетворяющія условіямъ

$$\alpha^2+2\beta^2=p;\quad \alpha\equiv 1 \pmod 4,$$

Digitized by Google

то упомянутое число будетъ

$$\frac{p-1+2\alpha}{8}$$

Число же представленій, гдѣ z и t не равны нулю заразъ, будетъ

$$\frac{p-5+2\alpha}{8} = \mu + \frac{\alpha-1}{4};$$

то же число представляется суммой

$$\sum \psi(v)\varrho(v'),$$

распространенной на всѣ представленія p въ формѣ

$$p = v + 16v'; \quad v > 0, v' > 0.$$

Изъ равенства

$$\sum \psi(v)\varrho(v') = \mu + \frac{\alpha-1}{4}$$

выведемъ

$$2\varepsilon'' + 2\varepsilon' \equiv \mu + \frac{\alpha-1}{4} \pmod 4$$

и

$$A \equiv \varepsilon' + \frac{\alpha-1-4\mu}{8} \pmod 2.$$

Это, очевидно, ранѣе полученное сравненіе, представленное въ другой формѣ.

Наконецъ, чтобы получить послѣднее правило, разсматриваемъ представленія p квадратичной формой

$$p = x^2 + 2y^2 + 32z^2 + 32t^2,$$

предполагая опять x и y положительными числами. Число представленій, гдѣ z и t не равны нулю заразъ, будетъ

$$\frac{4\mu+\alpha+2\beta-3}{8}.$$

Digitized by Google

гдѣ $\alpha\equiv\beta\equiv 1 \pmod 4$ удовлетворяютъ уравненію

$$p=\alpha^2+2\beta^2$$

То же число представляется суммой

$$\sum\psi(v)\varrho(v'),$$

распространенной на всѣ представленія p въ видѣ

$$p=v+32v';\quad v>0,\quad v'>0.$$

Отсюда нетрудно вывести, обозначивъ черезъ ε'' число представленій p въ формѣ

$$p=64x^2+q^{4i+1}y^2,$$

что

$$\varepsilon'+\varepsilon''\equiv\frac{4\mu+\alpha+2\beta-3}{16}\pmod 2.$$

Въ силу ранѣе доказаннаго, получится

$$A\equiv\varepsilon''+\frac{3\alpha+2\beta-4\mu-5}{16}\pmod 2.$$

Поясним теперъ выведенныя правила примѣромъ. Пусть $p=971$. Для примѣненія второго правила составляемъ рядъ чиселъ вида $971-16x^2$ и подчеркиваемъ тѣ изъ нихъ, которыя представляются въ формѣ $q^{4i+1}y^2$; получаются слѣдующія числа

$971-16.1^2=5.191$ $\qquad$ $971-16.4^2=5.143$

$971-16.2^2=\underline{907.1^2}$ $\qquad$ $971-16.5^2=\underline{571.1^2}$

$971-16.3^2=\underline{827.1^2}$ $\qquad$ $971-16.6^2=5.79$

$971-16.7^2=11.17$

Отсюда видно, что $\varepsilon''=3$; а такъ какъ для нашего примѣра $\mu=121$, то

$$A\equiv 0 \pmod 2$$

Digitized by Google

и, слѣдовательно, имѣетъ мѣсто сравненіе

$$1.2.3...485 \equiv +1 \pmod{971}.$$

Составленная выше таблица даетъ

$$971 - 64.1^2 = 907.1^2$$
$$971 - 64.2^2 = 5.143$$
$$971 - 64.3^2 = 5.79;$$

слѣдовательно, будетъ $\varepsilon'' = 1$. Равенство $971 = 27^2 + 2.11^2$ показываетъ, что $\alpha = -27$, $\beta = -11$, откуда опять

$$A \equiv \varepsilon'' + \frac{3\alpha + 2\beta - 4\mu - 5}{16} \equiv 0 \pmod{2}.$$

Переходимъ теперь къ разсмотрѣнію простыхъ чиселъ $p = 8\mu + 7$. Относящіяся къ такимъ простымъ числамъ правила получаются изъ извѣстныхъ соотношеній Кронекера между числами классовъ. Сохраняя прежнее обозначеніе, возьмемъ соотношеніе

$$F(p) + 2F(p - 4.1^2) + 2F(p - 4.2^2) + \ldots = \frac{p-1}{2}.$$

Съ помощью этого соотношенія изъ (1) найдемъ

$$A \equiv \sum_{k=1,2,3,\ldots} F(p - 4k^2) \pmod{2} \qquad (8)$$

Нетрудно показать, что при $n \equiv 3 \pmod{4}$ число $F(n)$ будетъ нечетнымъ только тогда, когда n будетъ вида $q^{4i+1}y^2$, гдѣ q простое число, а $i > 0$. Въ самомъ дѣлѣ, если $n \equiv 3 \pmod{4}$, то всѣ приведенныя формы опредѣлителя $-n$ будутъ принадлежать къ различнымъ классамъ. Каждой приведенной формѣ (a,b,c) въ случаѣ b не $= 0$ соотвѣтствуетъ не эквивалентная противоположная форма $(a,-b,c)$; слѣдовательно, чис-

Digitized by Google

ло классовъ будетъ той же четности, какъ число приведенныхъ формъ вида $(a,0,c)$, т. е. какъ число рѣшеній уравненія

$$ac=n,$$

удовлетворяющихъ условію $a<c$. Это же число будетъ

$$\frac{1}{2}(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_s+1),$$

если $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_s$ — показатели, съ которыми входятъ различныя простыя числа въ составъ m; чтобы оно было нечетнымъ необходимо и достаточно, чтобы одинъ и только одинъ изъ показателей былъ нечетнымъ числомъ вида $4i+1$, откуда слѣдуетъ справедливость сдѣланнаго выше утвержденія. Изъ сравненія (8) теперь нетрудно уже вывести, что A будетъ той же четности, какъ число h представленій p въ формѣ

$$p=4x^2+q^{4i+1}y^2.$$

Въ этомъ состоитъ правило Кронекера, примѣнимое къ простому числу вида $4\mu+3$. Другія два правила получаются подобнымъ же образомъ изъ разсмотрѣнія соотношеній, справедливыхъ только для простыхъ чиселъ $p=8\mu+7$:

$$F(p)+2F(p-16.1^2)+2F(p-16.2^2)+\ldots=\frac{p-3}{4}=2\mu+1$$

$$(F)p+2F(p-64.1^2)+2F(p-64.2^2)+\ldots=\mu+\frac{(-1)^\mu+1}{2},$$

и вытекающихъ изъ восьми основныхъ соотношеній Кронекера.

Если обозначимъ черезъ h' и h'' числа представленій p въ формахъ

$$p=16x^2+q^{4i+1}y^2$$

$$p=64x^2+q^{4i+1}y^2,$$

то будемъ имѣть правила, выражаемыя слѣдующими сравненіями:

Digitized by Google

$$A \equiv h' + \mu + 1 \pmod 2,$$

$$A \equiv h'' + \left[\frac{\mu}{2}\right] + 1 \pmod 2.$$

Взявъ для примѣра $p=983$, получимъ

$$983 - 64.1^2 = \underline{919.1^2}$$

$$983 - 64.2^2 = \underline{727.1^2}$$

$$983 - 64.3^2 = 11.37;$$

слѣдовательно, будемъ имѣть $h''=2$, а такъ какъ $\mu=122$, то окажется $A \equiv 0 \pmod 1$.

Поэтому имѣетъ мѣсто сравненіе

$$1.2.3...491 \equiv +1 \pmod{983}.$$

Digitized by Google

Объ одной системѣ треугольниковъ.

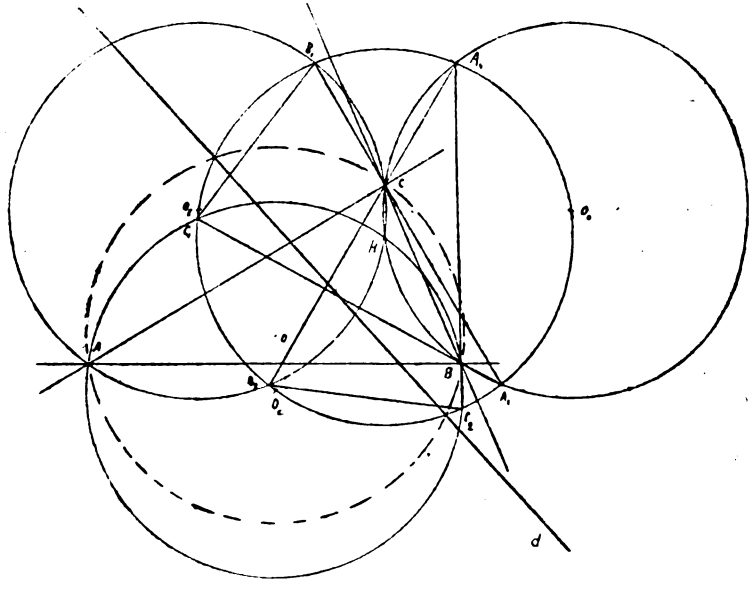
Н. Агрономова.

Въ плоскости треугольника ABC всегда можно построить два равныхъ и подобныхъ ABC треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, обладающихъ тѣмъ свойствомъ, что стороны B_1C_1 и B_2C_2 проходятъ черезъ A, C_1A_1 и C_2A_2—черезъ B и A_1B_1 съ A_2B_2 черезъ C. Кромѣ того, въ той же плоскости можно построить два тр-ка $A_3B_3C_3$ и $A_4B_4C_4$ такъ, чтобы вершины A_3 и A_4, B_3 и B_4, C_3 и C_4 лежали соотвѣтственно на BC, CA,AB. Система треугольниковъ $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, $A_4B_4C_4$, ABC обладаетъ многими весьма интересными свойствами. Выяснить ихъ—цѣль нашей статьи.

1. Остановимся сначала только на тр-кахъ $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. Очевидно, что точки A_1 и A_2,B_1 и B_2,C_1 и C_2 лежатъ соотвѣтственно на окружностяхъ, проходящихъ черезъ B и C, C и A, A и B и вмѣщающихъ углы A,B,C, т. е. на трехъ окружностяхъ съ радіусомъ R, равнымъ радіусомъ описаннаго круга тр-ка ABC (окружности Карно). Обозначая центры этихъ окружностей черезъ O_a, O_b, O_c, возьмемъ прямоугольную систему координатъ съ началомъ O въ точкѣ A и съ осью Ox параллельной $O_b\,O_c$. Чтобы рѣшить вопросъ о томъ, какъ пройдетъ ось OY, замѣтимъ, что окружности (O_a),(O_b),(O_c), какъ окружности Карно, пересѣкаются въ одной точкѣ, а именно въ ортоцентрѣ тр-ка ABC (Д. Ефремовъ.

Digitized by Google

Новая геометрія тр-ка, стр. 275). Слѣдовательно, ось OY совпадаетъ съ высотой h_a.



Черт. 1.

Обозначая черезъ d растоянія точекъ O_b и O_c отъ OY, мы для окружностей (O_b) и (O_c) получимъ слѣдующія уравненія:

$$\left.\begin{aligned}(x-d)^2+(y+\sqrt{R^2-d^2})^2&=R^2\\(x+d)^2+(y+\sqrt{R^2-d^2})^2&=R^2\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Такъ какъ

$$\angle O_bAO_c=\angle A+\angle O_bAC+\angle O_cAB=A+90-B+90-C=2A,$$

то изъ тр-ка O_bO_cA слѣдуетъ, что

$$d=R\sin A \quad (2)$$

Слѣдовательно, уравненія (1) можно переписать такъ:

$$\left.\begin{aligned}x^2-2Rx\sin A+y^2+2Ry\cos A&=0\\x^2+2Rx\sin A+y^2+2Ry\cos A&=0\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Digitized by Google

Пусть уравненіемъ прямой $B_1C_1(B_2C_2)$ будетъ

$$y = tx. \tag{4}$$

Тогда для координатъ точекъ $B_1(B_2), C_1(C_2)$ будемъ имѣть:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{2R(\sin A - t\cos A)}{1+t^2} \\ \dfrac{2Rt(\sin A - t\cos A)}{1+t^2} \end{array}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{2R(-\sin A - t\cos A)}{1+t^2} \\ \dfrac{2Rt(-\sin A - t\cos A)}{1+t^2} \end{array}\right\} \tag{6}$$

Такъ какъ разстояніе между B_1 и C_1, или B_2 и C_2, должно равнятся a, то выраженія (5) и (6), подчиненныя этому условію даютъ намъ:

$$a = \frac{4R\sin A}{\sqrt{1+t^2}}. \tag{7}$$

Отсюда $t = \pm\sqrt{3}$, т. е. прямыя B_1C_1 и B_2C_2 образуютъ съ осью OX углы въ 60° и 120°. Другими словами, *прямыя* B_1C_1 *и* B_2C_2, C_1A_1 *и* C_2A_2, A_1B_1 *и* A_2B_2 *образуютъ между собой углы въ* 60°, *при чемъ высоты* h_a, h_b, h_c *являются биссектрисами этихъ угловъ.*

Слѣдовательно, координатами точекъ B_1, B_2, C_1, C_2 будутъ послѣ упрощеній

$$\left.\begin{array}{ll} -R\cos(30^\circ + A), & -\sqrt{3}R\cos(30^\circ + A) \\ R\cos(30^\circ - A), & -\sqrt{3}R\cos(30^\circ - A) \\ -R\cos(30^\circ - A), & -\sqrt{3}R\cos(30^\circ - A) \\ R\cos(30^\circ + A), & \sqrt{3}R\cos(30 + A) \end{array}\right\} \tag{8}$$

§ 2. Формулы (8) позволяютъ сдѣлать нѣкоторые выводы. Такъ какъ

Digitized by Google

$$B_2B_1=\sqrt{R^2[\cos(30+A)]^2+3R^2[\cos(30+A)-\cos(30-A)]^2}$$
$$=R\sqrt{3}$$

и такое-же значеніе получается для C_1C_2, то вообще мы можемъ заключить, что *разстоянія между соотвѣтственными вершинами тр-ковъ* $A_1B_1C_1$ *и* $A_2B_2C_2$ *равны между собой и въ частности равны сторонѣ правильнаго вписаннаго въ окружность радіуса* R *тр-ка.*

Легко вычислить, что

$$B_1B_2.C_1C_2=B_1C_2.C_1B_2+B_1C_1.C_2B_2$$

Слѣдовательно, по теоремѣ Птоломея чет-къ $B_1C_1B_2C_2$ будетъ вписанный.

При другомъ выборѣ координатныхъ осей можно показать, что чет-ки $C_1A_1C_2A_2$ и $A_1B_1A_2B_2$ будутъ также вписанными. Слѣдовательно, *вершины тр-ковъ* $A_1B_1C_1$ *и* $A_2B_2C_2$ *лежатъ на одной окружности съ радіусомъ* R. Простыми вычисленіями мы покажемъ, что *центръ окружности, описанной около тр-ковъ* $A_1B_1C_1$ *и* $A_2B_2C_2$, *совпадаетъ съ ортоцентромъ тр-ка* ABC.

Далѣе, на основаніи формулъ (8) можно сдѣлать и слѣдующія заключенія

$$AB_1=AC_2,\ BC_1=BA_2;\ CA_1=CB_2$$
$$AC_1=BB_2;\ BA_1=BC_2;\ CB_1=CA_2.$$

Кромѣ того, можно замѣтить, что *разстоянія* B_1 *и* C_2 *отъ* BC *равны, разстоянія* C_1 *и* B_2 *отъ* BC *равны и т. д.*

Можно еще указать, что

$$B_2C_1 \parallel B_1C_2 \parallel BC$$
$$C_2A_1 \parallel C_1A_2 \parallel CA$$
$$A_2B_1 \parallel A_1B_2 \parallel AB.$$

Digitized by Google

§ 3. Изложеннымъ выше удобно воспользоваться для построенія тр-ковъ $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. Построеніе очевидно можно формулировать такъ: вершинами тр-ковъ $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ будутъ точки пересѣченія окружностей Карно съ окружностью радіуса R, описанной изъ ортоцентра, какъ центра.

§ 4. Для дальнѣйшаго необходимо опредѣлить координаты точекъ A и A_1. Съ этой цѣлью перенесемъ начало координатъ въ точку O, оставляя направленія осей параллельными прежнимъ. Въ новой координатной системѣ уравненія окружности (O_a) будетъ имѣть слѣдующій видъ

$$x^2+2Rx\sin A+y^2+2Ry\cos A=0. \qquad (9)$$

Такъ какъ прямыя A_1B_1 и A_2B_2 образуютъ съ BC углы $60+B$ и $60-B$, то ихъ уравненія будутъ

$$\left.\begin{aligned} y&=-x\,tg(60+B)\\ y&=-x\,tg(60-B)\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Рѣшая совмѣстно уравненія (9′) и (10), найдемъ слѣдующія координаты точекъ A_1 и A_2

$$\left.\begin{aligned} &2R\cos(60+B)\sin(60-C), \quad 2R\sin(60+B(\sin(60-C)\\ &-2R\cos(60-B)\sin(60+C), \quad 2R\sin(60-B)\sin(60+C)\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Возвращаясь къ прежней системѣ координатъ, получимъ для координатъ точекъ A_1 и A_2 слѣдующія выраженія

$$\left.\begin{aligned} &2R\cos(60+B)\sin(60-C)+b\cos C,\\ &2R\sin(60+B)\sin(60-C)-ha\\ &-2R\cos(60-B)\sin(60+C)+b\cos C,\\ &2R\sin(60-B)\sin(60+C)-ha\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Digitized by Google

Совокупность формулъ (8) и (12) позволяетъ намъ вычислить барицентрическія координаты точекъ $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ въ такомъ видѣ:

$$\left|\begin{array}{ccc} -a\sin(60+B)\sin(60-C), & b\sin(60-C)\sin(60-A), & c\sin(60+A)\sin(60+B) \\ -a\sin(60-B)\sin(60+C), & b\sin(60+C)\sin(60+A), & c\sin(60-A)\sin(60-B) \\ a\sin(60+B)\sin(60+C), & -b\sin(60+C)\sin(60-A), & c\sin(60-A)\sin(60-B) \\ a\sin(60+B)\sin(60-C), & -b\sin(60-C)\sin(60+A), & -c\sin(60+A)\sin(60-B) \\ a\sin(60-B)\sin(60-C), & b\sin(60+C)\sin(60-A), & c\sin(60+A)\sin(60-B) \\ a\sin(60+B)\sin(60+C), & b\sin(60-C)\sin(60+A), & -c\sin(60-A)\sin(60+B) \end{array}\right| \quad (13)$$

§ 5. Основываясь на формулахъ (13) мы безъ большихъ затрудненій можемъ доказать, что *тр-къ ABC и тр-къ, образованный прямыми* A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 *гомологичны, при чемъ осью гомологіи является прямая d съ уравненіемъ*

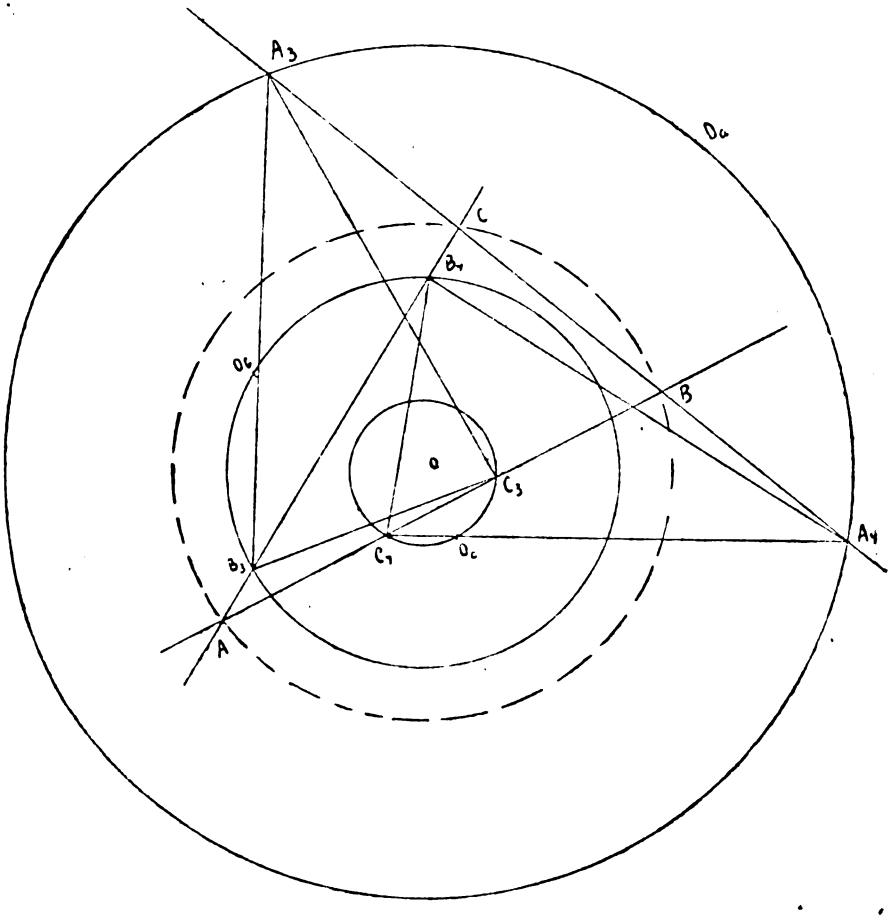
Digitized by Google

$$x\sin(60-A)\sin(60+A)+y\sin(60-B)\sin(60+B)+$$

$$+z\sin(60-C)\sin(60+C)=0, \qquad (14)$$

а центромъ гомологіи ортоцентръ тр-ка ABC.

Можно еще отмѣтить, что *прямая d 1) перпендикулярна къ линіи, соединяющей ортоцентръ съ центромъ описаннаго круга, 2) является радикальной осью окружности ABC*



Черт. 2.

и $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, 3) проходитъ черезъ ортоцентры тр-ковъ $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$.

§ 6. Изложеннымъ выше можно воспользоваться слѣдую-

Digitized by Google

щимъ образомъ для построенія тр-ковъ $A_3B_3C_3$ и $A_4B_4C_4$. Изъ точекъ A,B,C радіусами равными $R\sqrt{3}$ опишемъ три окружности. Шесть точекъ пересѣченія этихъ окружностей съ описанной окружностью являются вершинами двухъ тр-ковъ $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ и $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ равныхъ и подобныхъ тр-ку ABC. Соотвѣтственныя стороны паръ тр-ковъ ABC и $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, ABC и $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ являются, очевидно, вершинами тр-ковъ $A_3B_3C_3$ и $A_4B_4C_4$.

§ 7. Путемъ несложныхъ вычисленій мы найдемъ для координатъ точекъ B_3,B_4,C_3 и C_4 слѣдующія выраженія

$$\left.\begin{array}{ll} -2R\sin(60-B)\cos C, & 2R\sin(60-B)\sin C \\ 2R\sin(60+B)\cos C, & -2R\sin(60+B)\sin C \\ -2R\sin(60+C)\cos B, & -2R\sin(60+C)\sin B \\ 2R\sin(60-C)\cos B, & 2R\sin(60-C)\sin B \end{array}\right\} \quad (14)$$

Основываясь на этихъ формулахъ мы можемъ показать что *стороны тр-ка $A_4B_4C_4$ параллельны сторонамъ тр-ка, $A_1B_1C_1$ и проходятъ черезъ вершины тр-ка $A_2B_2C_2$; стороны тр-ка $A_3B_3C_3$ параллельны сторонамъ тр-ка $A_2B_2C_2$ и проходятъ черезъ вершины тр-ка $A_1B_1C_1$.*

Кромѣ того, изъ этихъ формулъ можно вывести, что

$$\left.\begin{array}{l} A_3A_4=2R\sqrt{3}\cos A \\ B_3B_4=2R\sqrt{3}\cos B \\ C_3C_4=2R\sqrt{3}\cos C \end{array}\right\} \quad (15)$$

и

$$\left.\begin{array}{l} 2R\cos A=OA_3=OA_4 \\ 2R\cos B=OB_3=OB_4 \\ 2R\cos C=OC_3=OC_4 \end{array}\right\} \quad (16)$$

(O центръ описаннаго круга).

Digitized by Google

Послѣднія формулы позволяютъ намъ построить тр-ки $A_3B_3C_3$ и $A_4B_4C_4$ болѣе простымъ способомъ, чѣмъ въ § 6. Въ самомъ дѣлѣ, $2R\cos A, 2R\cos B, 2R\cos C$ суть разстоянія центра O описаннаго круга отъ центровъ O_a, O_b, O_c. Поэтому описавъ изъ O окружности радіусами OO_a, OO_b, OO_c, мы найдемъ вершины тр-ковъ $A_3B_3C_3$ и $A_4B_4C_4$, какъ точки пересѣченія указанныхъ окружностей со сторонами BC, AC, AB.

§ 8. Въ заключеніе отмѣтимъ нѣкоторыя теоремы, доказательство коихъ опускаемъ, не желая затягивать статью.

a) центръ O описаннаго круга тр-ка ABC является ортоцентромъ какъ тр-ка $A_3B_3C_3$, такъ и тр-ка $A_4B_4C_4$,

b) ортоцентры тр-ковъ $A_2B_2C_2$ и $A_1B_1C_1$ суть центры описанныхъ круговъ тр-ковъ $A_4B_4C_4$ и $A_3B_3C_3$.

Ревель 6 іюля 1915 г.

Résumé.

I. Soient $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$ deux triangles circonscits au triangle ABC. Si $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1 \equiv \Delta A_2B_2C_2$, 1) les points $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ sont sur une même circonference 2) $A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2 = R\sqrt{3}$; 3) le centre de cette circonference est l'orthocentre H du triangle ABC; 4) $\angle(B_1C_1, B_2C_2) = \angle(C_1A_1, C_2A_2) = \angle(A_1B_1, A_2B_2) = 60^\circ$, 5) les triangles ABC et (A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2) sont homologiques; 6) le centre d'homologie est l'orthocentre du triangle ABC; 7) l'axe d'homologie d passe par les orthocentres des triangles $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$; 8) les droites d et OH sont rectangulaires etc.

Digitized by Google

II. Soient $A_3B_3C_3$ et $A_4B_4C_4$ deux triangles inscrits au triangle ABC. Si $\Delta ABC \overset{m}{=} \Delta A_3B_3C_3 \overset{m}{=} \Delta A_4B_4C_4$, 1) les côtes C_4B_4 (C_3B_3), $A_4C_4(A_3C_3)$, $B_4A_4(B_3A_3)$ passent par les $A_2(A_1)$, $B_2(B_1)$, $C_2(C_1)$; 2) $C_4B_4 \parallel C_1B_1$; $A_4C_4 \parallel A_1C_1$; $B_4A_4 \parallel B_1A_1$; $C_3B_3 \parallel C_2B_2$, $A_3C_3 \parallel A_2C_2$; $B_3A_3 \parallel B_2A_2$; 3) l'orthocentre du triangle $A_3B_3C_3$ $(A_4B_4C_4)$ est le centre du cercle circonscrit au ABC; 4) le centre du cercle circonscrit au triangle $A_2B_2C_2(A_1B_1C_1)$ est l'orthocentre de $A_4B_4C_4$ $(A_3B_3C_3)$ 4) $OC_4 = OC_3 = 2R\cos C$; $OA_4 = OA_3 = 2R\cos A$; $OB_4 = OB_3 = 2R\cos B$.

N. Agronomof.

Digitized by Google

О нѣкоторыхъ обобщеніяхъ и слѣдствіяхъ теоремы о геометрическомъ и ариѳметическомъ среднихъ.

Н. Агрономова.

1. Допустимъ, что у насъ имѣется уравненіе

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0,\ a_0>0 \qquad (1)$$

всѣ корни котораго суть вещественныя положительныя числа. Обозначая далѣе черезъ S_k сумму всѣхъ произведеній по k множителей изъ n корней нашего уравненія, по извѣстной теоремѣ алгебры получимъ

$$\left.\begin{aligned} S_1&=-\frac{a_1}{a_0}\\ S_2&=\frac{a_2}{a_0}\\ &\cdots\cdots\\ S_n&=(-1)^n\frac{a_n}{a_0}\end{aligned}\right| \qquad (2)$$

Извѣстно далѣе, что при положительныхъ $x_1,x_2,\ldots x_n$ имѣетъ мѣсто равенство или неравенство

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \qquad (3)$$

Въ силу этого, предполагая, что корнями уравненія явля-

Digitized by Google

ются именно числа

$$x_1, x_2, \ldots x_n \tag{4}$$

и примѣняя неравенство (3) къ выраженіямъ $-\frac{a_1}{na_0}$, $\frac{a_2}{C_n^2 a_0}$, $\frac{a_3}{C_n^3 a_0}$ и т. д., получимъ

$$\left.\begin{aligned} -\frac{a_1}{na_0} = \frac{S_1}{n} &\geq \sqrt[n]{(-1)^n \frac{a_n}{a_0}} \\ \frac{a_2}{C_n^2 a_0} = \frac{S_2}{C_n^2} &\geq \sqrt[n]{\left[(-1)^n \frac{a_n}{a_0}\right]^2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

и вообще, что

$$\frac{(-1)^k a_k}{C_n^k a_0} = \frac{S_k}{C_n^k} \geq \sqrt[n]{\left[(-1)^n \frac{a_n}{a_0}\right]^k} = \sqrt[n]{S_n^k} \tag{6}$$

или

$$\sqrt[k]{\frac{S_k}{C_n^k}} \geq \sqrt[n]{S_n}. \tag{7}$$

2. Пользуясь теоремой Ролля, можно утверждать, что если всѣ корни уравненія $f(x)=0$ положительны, то положительными будутъ и корни уравненій

$$\left.\begin{aligned} f'(x)&=0 \\ f''(x)&=0 \\ \cdots\cdots& \\ f^{(n-1)}(x)&=0 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Digitized by Google

Примѣняя къ каждому изъ этихъ уравненій неравенство (6), получимъ слѣдующій рядъ неравенствъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{(-1)^k(n-k-1)a^k}{C^k_{n-1}na_0} &\geqslant \sqrt[n-1]{\left[(-1)^{n-1}\frac{a_{n-1}}{na_0}\right]^k} \\ \frac{(-1)^k(n-k-1)(n-k-2)}{C_{n-2}{}^k n(n-1)a_0} &\geqslant \sqrt[n-2]{\left[(-1)^{n-2}\frac{2a_{n-2}}{n(n-1)a_0}\right]^k} \text{ и т. д.} \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

или

$$\left.\begin{aligned} \frac{(-1)^k a_k}{a_0 C_n{}^k} &\geqslant \sqrt[n-1]{\left[(-1)^{n-1}\frac{a_{n-1}}{C_n{}^{n-1}}\right]^k} \\ \frac{(-1)^k a_k}{a_0 C_n{}^k} &\geqslant \sqrt[n-2]{\left[(-1)^{n-2}\frac{a_{n-2}}{C_n{}^{n-2}}\right]^k} \text{ и т.} \end{aligned}\right\} \quad (9')$$

или вообще

$$\sqrt[k]{\frac{S_k}{C_n{}^k}} \geqslant \sqrt[t]{\frac{S_t}{C_n{}^t}} \quad (10)$$

гдѣ $t<k$

Т. к. корнями уравненія могутъ быть предполагаемы произвольныя числа, то ясно, что неравенство (10) вѣрно для любыхъ n положительныхъ чиселъ. Все вмѣстѣ взятое позволяетъ формулировать такую теорему

Теорема.

$$\frac{S_1}{n} \geqslant \sqrt{\frac{S_2}{C_n{}^2}} \geqslant \sqrt[3]{\frac{S_3}{C_n{}^3}} \geqslant \ldots \geqslant \sqrt[n]{S_n}, \quad (11)$$

гдѣ S_p обозначаетъ сумму произведеній по p множителей, выбранныхъ изъ числа n произвольныхъ положительныхъ чиселъ. Несомнѣнно, что эту теорему можно считать обобщеніемъ теоремы о среднихъ

Digitized by Google

3. Перемѣняя обозначенія съ S на обозначенія съ a получимъ слѣдующую теорему

Теорема. *Если всѣ корни уравненія*

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$$

положительны (*отрицательны*), *то*

$$-\frac{a_1}{na_0}\geqslant\sqrt{\frac{a_2}{C_n^{\,2}a_0}}\geqslant\sqrt[3]{-\frac{a_3}{C_n^{\,3}a_0}}\geqslant\ldots\geqslant\sqrt[n]{\frac{(-1)^na_n}{a_0}} \quad (12)$$

Примѣръ. Для уравненія $x^3-4x^2+5x-2=0$, имѣющаго корнями 1, 1, 2, находимъ:

$$\frac{4}{3}>\sqrt{\frac{5}{3}}>\sqrt[3]{2}$$

или

$$1{,}33\ldots>1{,}29\ldots>1{,}25\ldots$$

Подставляя въ неравенство (11) вмѣсто $x_1,x_2,\ldots x_n$ обратныя величины $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_n},\ldots\frac{1}{x_n}$, получимъ слѣдующія неравенства:

$$\frac{S_{n-1}}{nS_n}\geqslant\sqrt{\frac{S_{n-2}}{C_n^{\,2}S_n}}\geqslant\sqrt[3]{\frac{S_{n-3}}{C_n^{\,3}S_n}}\geqslant\ldots\geqslant\sqrt[n]{\frac{1}{S_n}}, \quad (13)$$

$$-\frac{a_{n-1}}{na_n}\geqslant\sqrt{\frac{a_{n-2}}{C_n^{\,2}a_n}}\geqslant\sqrt[3]{-\frac{a_{n-3}}{C_n^{\,3}a_n}}\geqslant\ldots\geqslant\sqrt[n]{\frac{(-1)^na_0}{a_n}} \quad (14)$$

4. Неравенство (12) даетъ намъ

$$\left.\begin{array}{l} a_0=a_0 \\ -a_1\geqslant kna_0 \\ a_2\geqslant k^2C_n^{\,2}a_0 \\ -a_3\geqslant k^3C_n^{\,3}a_0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ (-1)^na_n=k^nC^n{}_na \end{array}\right| \quad (15) \quad \left|\begin{array}{c} l^na_0\geqslant a_n(-1)^n \\ l^{n-1}C_n^{\,2}a_0\geqslant a_{n-1}(-1)^{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ nla_0=-a_1 \\ a_0=a_0 \end{array}\right. \quad (15')$$

Digitized by Google

гдѣ $k=\sqrt[n]{\frac{(-1)^n a_n}{a_0}}$, $l=-\frac{a_1}{na_0}$

Складывая эти неравенства получимъ

$$a_0\left(1-\frac{a_1}{na_0}\right)^n \geqslant a_0 - a_1 + a_2 + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n a_n \geqslant a_0\left(1+\sqrt[n]{\frac{(-1)^n a_n}{a_0}}\right)^n \qquad (16)$$

или

Теорема. *Если всѣ корни уравненія положительны (отрицательны), то верхнимъ и нижнимъ предѣлами суммъ модулей коэффиціентовъ являются числа*

$$a_0\left(1-\frac{a_1}{na_0}\right)^n,\ a_0\left(1+\sqrt[n]{\frac{(-1)^n a_n}{a_0}}\right)^n$$

Примѣръ: Для уравненія $x^3-9x^2+11x-6=0$ съ корнями 1, 2, 3 имѣемъ

$$(1+2)^3 > 1+6+11+6 > \left(1+\sqrt[3]{6}\right)^3$$

или

$$27 > 24 > 23{,}66\ldots$$

Неравенство (16) при перемѣнѣ обозначеній принимаетъ такой видъ:

$$1+\frac{S_1}{n} \geqslant \sqrt[n]{1+S_1+S_2+\ldots+S_n} \geqslant 1+\sqrt[n]{S_n} \qquad (17)$$

т. е. *корень n-ой степени изъ всѣхъ произведеній, которыя можно получить безъ повтореній изъ n положительныхъ чи-*

Digitized by Google

селъ, заключенъ между среднимъ геометрическимъ и ариѳметическимъ тѣхъ-же чиселъ, увеличенныхъ каждое на 1.

5. При помощи подобныхъ же разсужденій изъ неравенствъ 14) можно получить слѣдующее

$$a^n\left(1-\frac{a_{n-1}}{na_n}\right)^n \geqslant a_n-a_{n-1}+a_{n-2}-\ldots$$

$$\ldots+(-1)^n a_0 \geqslant a_n\left(1+\sqrt[n]{\frac{(-1)^n a_0}{a_n}}\right)^n \qquad (18)$$

т. е. *при n четномъ (нечетномъ) сумма модулей всѣхъ коэффиціентовъ уравненія* $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$ *съ положительными корнями имѣетъ для верхняго (нижняго) и нижняго (верхняго) предѣловъ выраженія*

$$a_n\left(1-\frac{a_{n-1}}{na_n}\right)^n,\quad a_n\left(1+\sqrt[n]{\frac{(-1)^n a_0}{a_n}}\right)^n$$

Примѣръ. Для уравненія $x^2-10x+16=0$, имѣемъ

$$16\left(1+\frac{5}{16}\right)^2>1+10+16>16\left(1+\frac{1}{4}\right)^2$$

или

$$27{,}5>27>25$$

Отмѣтимъ мимоходомъ, что примѣненіе формулы

$$C^0{}_m+C^1{}_m+\ldots+C_m{}^m=2^m$$

даетъ намъ слѣдующее неравенство

$$a_0-\frac{a_1}{k}+\frac{a_2}{k^2}-\ldots$$

$$\ldots+\frac{(-1)^n a_n}{k^n}\geqslant a_0 2^n\geqslant a_0-\frac{a_1}{l}+\frac{a_2}{l^2}-\ldots+\frac{(-1)^n a_n}{l^n}, \qquad (19)$$

Digitized by Google

где $k=\sqrt[n]{\frac{(-1)^n a_n}{a_0}}$, $l=-\frac{a_1}{na_0}$.

6. Отъ перемноженія неравенствъ (14) и (12) получается такое неравенство

$$\frac{a_1 a_{n-1}}{n^2 a_0 a_n} \geqslant \sqrt{\frac{a_2 a_{n-2}}{(C_n^2)^2 a_0 a_n}} \geqslant \sqrt[3]{\frac{a_3 a_{n-3}}{(C_n^3)^3 a_0 a_n}} \geqslant \ldots \geqslant 1 \quad (20)$$

Отсюда вытекаетъ такая теорема.

Теорема. *Если всѣ корни уравненія*

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

положительны (отрицательны), то

$$\frac{a_k a_{n-k}}{a_0 a_n} \geqslant (C_n^k)^2 \text{*)} \quad (21)$$

при $0 \leqslant k \leqslant n$.

Если n число четное, то a_n число положительное и мы получимъ

$$a_k a_{n-k} \geqslant (C_n^k)^2 a_0 a_n \quad (22)$$

въ противномъ же случаѣ

$$-a_k a_{n-k} \geqslant -(C_n^k)^2 a_0 a_n \quad (23)$$

Оба эти неравенства можно записать совмѣстно такъ

$$|a_k| \cdot |a_{n-k}| \geqslant [C_n^k]^2 |a_0| \cdot |a_n| . \quad (24)$$

Извѣстно теперь, что

$$[C_m^0]^2 + [C_m^1]^2 + \ldots + [C_m^m]^2 = C_{m2}^m$$

---

*) Ср. «В. Оп. Ф.» № 445, теорема В. Шлыгина.

Digitized by Google

Примѣняя это равенство къ неравенству (24), а, равнымъ образомъ помня, что

$$C_m^{\,0}+C_m^{\,1}+\ldots+C_m^{\,m}=2^m,$$

получимъ слѣдующую теорему.

Теорема. *Если всѣ корни уравненія*

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$$

положительны (*отрицательны*), *то*

$$a)\quad |a_0|.|a_n|+|a_1|.|a_{n-1}|+|a_2|.|a_{n-2}|+\ldots$$

$$\ldots+|a_n|.|a_0|\geqslant C^n_{2n}|a_n|.|a_0| \qquad (25)$$

$$b)\quad \sqrt{|a_0|.|a_n|}+\sqrt[2n]{|a_1|.|a_{n-1}|}+$$

$$+\sqrt{|a_2|.|a_{n-2}|}+\ldots$$

$$\ldots+\sqrt{|a_n|.|a_0|}\geqslant 2^n\sqrt{|a_n|.|a_0|} \qquad (26)$$

Примѣръ. Для уравненія $x^3-4x^2+5x-2=0$, имѣемъ

$$a)\quad 2+20+20+2\geqslant 20.2$$

$$b)\quad \sqrt{2}+\sqrt{20}+\sqrt{20}+\sqrt{2}\geqslant 8\sqrt{2}$$

или

$$a)\quad 44>40$$

$$b)\quad 11{,}972\ldots>11{,}313\ldots$$

Примѣняя обозначенія S къ двумъ послѣднимъ теоре-

Digitized by Google

мамъ получимъ:

$$\frac{S_k S_{n-k}}{S_n} \geqq [C_n^k]^2 \tag{27}$$

$$S_0 S_n + S_1 S_{n-1} + \ldots + S_n S_0 \geqq C^n_{2n} S_n \tag{28}$$

$$\sqrt{S_0 S_n} + \sqrt{S_1 S_{n-1}} + \ldots + \sqrt{S_n S_0} \geqq 2^n \sqrt{S_n} \tag{29}$$

Ревель
4 іюня 1915 г.

Digitized by Google

Къ вопросу объ униформизаціи многозначныхъ аналитическихъ функцій.

Въ 1883 и 1907 году Пуанкаре доказалъ въ двухъ мемуарахъ, появившихся въ Bulletin de la Société Mathemat. de France t.XI и Acta Mathematica t. 31 стр. 1—63, что всякую многозначную аналитическую функцію можно путемъ введенія вспомогательнаго параметра t представить черезъ двѣ однозначныя функція, т. е. если имѣемъ $y=f(x)$, гдѣ y многозначная функція отъ x, то можно найти двѣ такія однозначныя функціи $\psi(t)$ и $\chi(t)$, чтобы по исключеніи t изъ равенствъ

$$y=\psi(t)$$

$$x=\chi(t)$$

получить именно соотношеніе $y=f(x)$.

Методъ употребленный Пуанкаре состоялъ существенно въ слѣдующемъ: онъ бралъ поверхность принадлежащую функціямъ $y, y_1 \ldots y_n$, строилъ поверхность односвязную правильно многократную данной и методомъ выметанія (см. American Journal t. 12) находилъ функцію Грина для этой односвязной поверхности. Затѣмъ Пуанкаре доказывалъ, что многократныя точки односвязной поверхности суть линейныя функціи точки основной. Такимъ образомъ приходилось строить функцію, не измѣняющуюся отъ указанныхъ субституцій.

Digitized by Google

Въ моей работѣ я поставилъ себѣ задачей рѣшить этотъ вопросъ не прибѣгая къ безконечнымъ процессамъ Шварца [alternierendes Verfahren], какъ напр. у Köbe, ни къ методѣ выметанія Пуанкаре.

Я избѣгаю, слѣдовательно, и построенія подходящаго логариѳмическаго потенціала.

Въ работѣ выясняется также вопросъ, почему аутоморфныя функціи призваны играть такую исключительную роль въ этой задачѣ.

Въ предлагаемой 1-ой части моей работы я прежде всего занимаюсь рѣшеніемъ этого послѣдняго вопроса, затѣмъ провожу униформизацію аналитическихъ функцій. При этомъ я выдѣляю вопросъ о существованіи аутоморфныхъ функцій рода одинъ и нуль во вторую часть, такъ какъ доказательства ихъ существованія [въ иной постановкѣ и въ общемъ видѣ уже данное Köbe] сильно усложнило бы пониманіе моего метода.

Существеннымъ упрощеніемъ вопроса объ униформизаціи является именно простое сведеніе аутоморфныхъ функцій, вводимыхъ при рѣшеніи этой задачи, къ роду единица и нуль.

Кромѣ того, насколько мнѣ извѣстно, новою теоремою является основное предложеніе главы 1-ой о единственно возможныхъ группахъ подстановокъ, не мѣняющихъ данной аналитической функціи, точнѣе, не измѣняющихъ ея значенія.

Въ заключеніе я считаю необходимымъ выразить искреннюю благодарность Владимиру Ивановичу Смирнову за цѣнныя указанія.

I.

Характеръ развѣтвленій аналитическихъ функцій.

Докажемъ прежде всего слѣдующую теорему:

Если вѣтви аналитической функціи находятся въ анали-

Digitized by Google

тической зависимости другъ отъ друга, при чемъ зависимости эти составляютъ *группу*, то данная функція если она не постоянная, но аналитическая, въ нѣкоторой конечной области, а слѣдовательно во всей области, гдѣ она существуетъ, есть функція полиморфная въ широкомъ смыслѣ этого термина или ея вырожденіе. Другими словами группа состоитъ изъ линейныхъ подстановокъ.

Подъ вырожденіемъ полиморфныхъ функцій понимаются функціи обратныя эллиптическимъ, круговымъ и показательнымъ.

Чтобы доказать эту теорему, достаточно показать, что ни одна функція не можетъ испытать въ конечной области при прохожденіи аргументомъ замкнутаго пути иной составляющей группу субституціи, кромѣ *линейной*.

Предположимъ противное. Пусть нѣкоторая функція при прохожденій аргументомъ замкнутаго пути испытываетъ нелинейную аналитическую субституцію. Это значитъ, что обратная функція не мѣняетъ своего значенія, когда вмѣсто x мы подставляемъ $\lambda(x)$, гдѣ $\lambda(x)$ и есть данная субституція. Аналитически существенной особенностью всѣхъ такихъ субституцій, кромѣ линейныхъ является обстоятельство, что либо она либо обратная ей многозначна. Предположимъ, что она r,s—значна, т. е., что прямая r—значна, а обратная s—значна (Напр. $x^r y^s = 1$).

Разсмотримъ плоскость функціи*.

Пусть p число различныхъ субституцій, принадлежащихъ

*) Предполагаемъ для начала, что имѣемъ дѣло съ функціей, обратной нѣкоторой однозначной. (Таковыя и вводятся, главнымъ образомъ, для униформизаціи). Основная область такой функціи должна содержать только одинъ листъ. Когда функція многозначна и многозначно-обратима, теорема будетъ примѣнима, если различать Риманову поверхность не только по листамъ, но и по областямъ однозначной обратимости отдѣльныхъ вѣтвей. Для этихъ областей и существуетъ означенное предложеніе.

Digitized by Google

нашей функціи. Возьмемъ нѣкоторый произвольный по мѣстоположенію и величинѣ отрѣзокъ, лежащій цѣликомъ въ области существованія функціи.

Продѣлаемъ надъ нимъ одну изъ нашихъ p субституцій. Тогда онъ трансформируется въ r аналитическихъ отрѣзковъ прямой или s аналитическихъ отрѣзковъ обратной (см. черт. 1).

Предположимъ далѣе, что точки A всѣ переходятъ другъ въ друга, т е. A_ν въ $A_{\nu+1}$; B_ρ въ $B_{\rho+1}$.

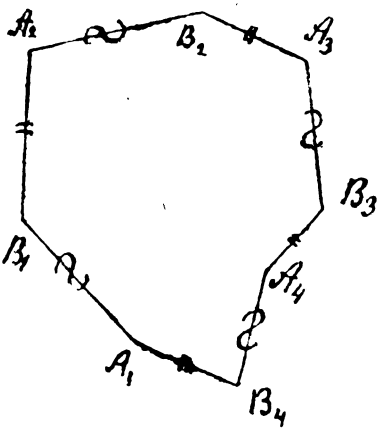


Рис. 1.

Соединимъ конецъ какого-нибудь отрѣзка, напр. B_1 съ A_2 и продѣлаемъ надъ нимъ субституцію $[x^r y^s = 1]$ (на черт. взятъ случай когда прямая субституція трехзначна, обратная однозначна)

Мы разсматриваемъ всегда ту субституцію прямую или обратную, которая многозначна. Тогда получимъ замкнутую область, которая будетъ, напр., имѣть видъ указанный на черт. 1. Станемъ теперь деформировать нашу область существованія такъ, чтобы совпали отрѣзки переходящіе другъ въ друга при пользованіи нашей субституціей.

Это деформированіе можно замѣнить переходомъ отъ плоскости Коши—Римана прямой функціи къ поверхности

Digitized by Google

Коши—Римана обратной. Подъ плоскостью Коши—Римана понимаемъ поверхность Римана на метрически неизмѣненной плоскости Коши.

Мы получаемъ замкнутую Риманову поверхность, которую съ точки зрѣнія анализа положенія можно отождествить съ поверхностью существованія аргумента.

Но вдоль всѣхъ надрѣзовъ (мы предполагаемъ, что вырѣзали нашу фигуру изъ плоскости) по которымъ мы соединяли основную область, сходятся три листа нашей функціи, т. е. надрѣзы представляютъ изъ себя существенно особенныя линіи. Очевидно, что эти надрѣзы можно непрерывнымъ образомъ передвигать по поверхности, ибо первоначальный отрѣзокъ былъ взятъ нами произвольно въ области предполагаемаго существованія функціи.

Мы видимъ, что каждая конечная область, въ которой только функція существуетъ, представляетъ, изъ себя повсюду плотное множество точекъ развѣтвленія. Функція, слѣдовательно, не можетъ быть аналитической, что и треб. док. Очевидно, что надрѣзы которыми мы пользовались аналогичны системѣ надрѣзовъ которыми пользуется Клейнъ (Mathematische Annalen Bd. 21) для аутоморфныхъ функцій не измѣняющихся отъ линейныхъ субституцій.

Только тамъ по каждому надрѣзу сходится только 2, сливающихся въ одинъ, листа функціи, такъ что надрѣзъ не является существенно особенной линіей.

Остановимся подробнѣе на этой теоремѣ. Разъяснимъ ея значеніе и смыслъ на примѣрахъ.

Возьмемъ алгебраическій примѣръ:

Пусть y и x связаны зависимостью $y^2-2xy+x^2-x=0$.

Отсюда $y_1=x+\sqrt{x}$ $\qquad$ $x_1=y+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{4y+1}$

$y_2=x-\sqrt{x}$ $\qquad$ $x_2=y+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{4y+1}$

Digitized by Google

Вѣтви аналит. функцій y_1 и y_2 связаны слѣдующей зависимостью:

$$(\alpha)\qquad \begin{aligned} y_1 &= y_2 + 1 + \sqrt{4y_2 + 1} = S(y_2) \\ y_2 &= y_1 + 1 - \sqrt{4y_1 + 1} = S^{-1}(y_1) \end{aligned}$$

Но по теоремѣ зависимость эта не можетъ составить группы и функція не можетъ обладать субституціей, представляющей всѣ значенія (вѣтви) нѣкоторой аналитической функціи. Дѣйствительно, субституція $S^2 = y_2 + 4 + 2\sqrt{y_2 + 1}$ не соотвѣтствуетъ ни какой вѣтви данной функціи.

Мало того: функція цѣликомъ, т. е. всюду, гдѣ существуютъ ея вѣтви, не „обладаетъ данной субституціей". Въ выраженіе для функціи нельзя подставить обѣ вѣтви выраженія: (α) и надѣятся, что функція не измѣнится, ибо это равносильно признанію за (α) значенія производящей субституціи нѣкоторой группы. Субституція S не мѣнятъ значенія x при переходѣ отъ $x - \sqrt{x}$ къ $x + \sqrt{x}$, S^{-1} при обратномъ переходѣ. Такимъ образомъ, каждая вѣтвь имѣетъ разныя субституціи, которыя переводятъ вѣтви другъ въ друга и не составляютъ группы.

Возьмемъ болѣе общую аналитическую зависимость $y = f(x)$.

Отграничимъ область, въ которой нѣкоторая вѣтвь y_λ функціи $y = f(x)$ принимаетъ всѣ значенія, отображающія данную область, для опредѣленности, наприм., на верхнюю полуплоскость не болѣе одного раза; тогда въ этой самой области всякая другая вѣтвь y_ν функціи $y = f(x)$ будетъ въ общемъ случаѣ принимать нѣкоторыя значенія по нѣсколько разъ, иныхъ значеній не приметъ вовсе. Случай совпаденія „основныхъ" областей вѣтвей приводитъ къ линейной зависимости вѣтвей другъ отъ друга: $y_\nu[y_\lambda]$ отображаетъ полуплоскость или окружность самое на себя или на другую окружность.

Digitized by Google

Какая либо зависимость можетъ повести къ образованію конечной или безконечной групы, но тогда каждая изъ послѣдующихъ вѣтвей должна заключать въ своей основной области таковую же предыдущихъ вѣтвей, а въ случаѣ конечной групы должна существовать подстановка $S^n=1$.

Возможно ли это при соблюденіи условій нашей теоремы?

Исхожу отъ субституціи:

$$S[x]=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots in.\ inf..$$

Если $S_{n-1}[x]=A_{n-1}x+B_{n-1}x^2+C_{n-1}x^3+\ldots\ldots$

то

$$A_n=A_{n-1}a_1=a_1{}^n,$$

$$B_n=A_{n-1}a_2+B_{n-1}a^2{}_1=a_2a_1{}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{n-1}a^\nu{}_1$$

$$C_n=A_{n-1}a_3+2B_{n-1}a_1a_2+C_{n-1}a_1{}^3=$$

$$=\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n-1}\left[A_{n-\lambda}a_3+2B_{n-\lambda}a_1a_2\right]a_1{}^{3(\lambda-1)}=$$

$$=\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n-1}a_1{}^{2\lambda+n-3}\left[a_3+2a_2{}^2\sum_{\nu=0}^{\nu=\lambda-1}a_1{}^\nu\right].$$

Возьмемъ слѣдующія равенства, которыя необходимо удовлетворить

$$S_n(x)=x \text{ и для провѣрки } S_{n+1}(x)=S(x)$$

Сравнимъ коэффиціенты: a_1 есть корень n-ой степени изъ единицы.

Тогда само собою удовлетворяется $B_n=0$, ибо $\sum_{\lambda=0}^{n-1}z_1{}^\nu=0$.

Изъ $C_n=0$ получаемъ, подставляя $a_1{}^n=1$,

$$0=a_3\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n-1}a_1{}^{2\lambda-3}+2a^2{}_2\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n-1}\sum_{\nu=0}^{n-\lambda-1}a_1{}^{2\lambda+\nu-3}.$$

Digitized by Google

Упростимъ это выраженіе:

$$\sum_{\lambda=1}^{n-1} = a_1^{n-1} + a_1 + a_1^3 + \ldots a_1^{2n-5} = \Omega;$$

$$a_1\Omega + a_1^{2n-2} = 0; \quad \Omega = -a_1^{2n-1} = -\frac{1}{a_1}.$$

Так. обр.

$$a_3 = 2a_2^2 a_1 \sum_{\lambda=1}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{n=\lambda-1} a_1^{2\lambda+\nu-3}.$$

Если a_2 равно нулю, то легко показать, что субституція будетъ линейной, ибо всѣ остальные коэффиціенты тоже обращаются въ нуль.

Итакъ предполагаемъ a_2 не нуль. Представимъ субст. слѣдующимъ образомъ:

$z = a_1 x + a_2 x^2 + xQ(x)$; $a_2 x^2 + [a_1 + Q(x)]x - z = 0$; $Q(x)$ имѣетъ x^2 множителемъ:

Рѣшимъ ее относительно x.

$$x = \frac{-[a_1 + Q(x)] \pm \sqrt{[a_1 + Q(x)]^2 + 4a_2 z}}{2a_2}$$

$$= [a_1 + Q(x)] \left[-1 \pm \left\{ 1 + \frac{2a_2 z}{a_1 + Q_2(x)} + \ldots \right\} \right] \frac{1}{2a_2}$$

Для достаточно малыхъ x имѣемъ двѣ вѣтви:

$$x_1 = \frac{z}{a_1}; \quad x_2 = -\frac{a_1}{a_2} - \frac{z}{a_1}.$$

Отсюда заключаемъ, что если конечное число разъ повторенная субституція даетъ намъ тождественную, то либо она даетъ намъ группу, тогда она линейна, либо она группы не составляетъ (ибо обратная либо не входитъ въ число разсматриваемыхъ, либо по доказанной теоремѣ входитъ одной

Digitized by Google

своей вѣтвью, при чемъ возможно, что каждая вѣтвь нашей функціи обладаетъ своею субституціей, а общей не существуетъ).

Если въ основной области существуетъ незамкнутый или безконечный рядъ вѣтвей, переходящихъ другъ въ друга, то мы должны помнить, что въ различныхъ областяхъ существуютъ между вѣтвями различныя функціональныя зависимости. Если бы эти зависимости представляли элементы одной и той же аналитической функціи, то для каждаго ряда значеній можно было бы положить, взявъ обратную функцію

1) $$f[\psi(x)]=f(x).$$

Очевидно, $\psi(x)$ однозначна (по построенію основныхъ областей); но изъ равенства 1) слѣдуетъ $f[\psi^{-1}(x)]=f(x)$, гдѣ $\psi^{-1}(x)$ тоже однозначна. Это явствуетъ изъ конформнаго отображенія даваемаго нашими функціями въ ихъ основныхъ областяхъ (см. чертежъ 2).

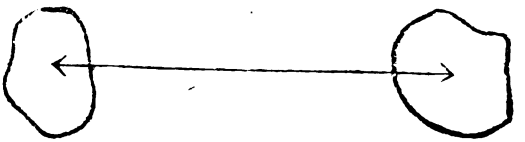


Рис. 2.

Слѣдовательно, остается предположить, что во всей области существованія данной функціи наша субституція не имѣетъ точекъ развѣтвленія и каждый разъ представляетъ не совокупность элементовъ аналит. функціи, а только одну изъ вѣтвей ея. Другая вѣтвь той же аналитич. функціи ни въ коемъ случаѣ не переведетъ вѣтви, которую переводитъ уже иная вѣтвь въ какую либо изъ другихъ вѣтвей данной функціи *).

*) Т. е. если имѣемъ рядъ вѣтвей субституціи $\xi_1(x)..\xi_\lambda(x)...$, то невозможно совмѣстное существованіе 2-хъ или болѣе равенствъ:

$$\xi_\lambda[y_\nu]=y_\rho\ ;\quad \xi_\varkappa[y_\nu]=y_\sigma\ .$$

Digitized by Google

Вопроса о томъ, представляетъ ли зависимость вѣтвей единую аналитическую функцію или часть ея или рядъ различныхъ вѣтвей различныхъ функцій я намѣренъ коснуться въ отдѣльной работѣ.

Если въ данной точкѣ мы имѣемъ развѣтвленіе для функціи рода нуль, то нѣкоторая производная n-го порядка становится безконечной въ этой точкѣ.

Пусть намъ дана функція $f(z)$, у которой точка нуль есть точка развѣтвленія и $f^{(n)}(z)=\infty$.
$z=0$

Предположимъ, что въ точкѣ развѣтвленія $f^{(n)}(z)$ ведетъ себя, какъ $z^{-\lambda}$ т. е. въ смыслѣ развѣтвленія $f(z)$ ведетъ себя, какъ $z^{n-\lambda}$, гдѣ $0<\lambda<1$.

Чтобы проуниформизировать такой элементъ достаточно найти функцію не измѣняющуюся отъ произвольной параболической субституціи съ вершиной въ точкѣ нуль. Такой субституціей можетъ быть напримѣръ: $\left|\frac{1}{t}, \frac{1}{t}+S_0\right|$

Тогда функція обладающая этой субституціей не будетъ существовать въ точкѣ нуль.

Возьмемъ функцію $e^{\frac{1}{t}}$. Пусть въ окрестности точки нуль $w=z^{n-\lambda}H_1$ (такимъ путемъ будемъ изображать голоморфные ряды: H_ν); положимъ $z=e^{\frac{1}{t}}$, тогда $w=e^{\frac{n-\lambda}{t}}H_2$.

Элементъ развѣтвленія проуниформизированъ.

Слѣдуетъ еще разсмотрѣть случай, когда функція имѣетъ въ данной точкѣ, напр. въ нулѣ, существенно особенную точку.

Тогда и производная будетъ обладать въ этой точкѣ существенными особенностями.

Digitized by Google

Пусть въ этой точкѣ функція $f(z)$ ведетъ себя, какъ $e^{\frac{1}{z^\mu}}$.

При этомъ условіи поступаемъ такъ: введемъ обозначеніе $f(z)\, e^{\frac{1}{z^\mu}} = f_1(z)$ найдемъ, что $f_1(z) = z^{n-\lambda} H_1$, откуда $f(z) = z^{n-\lambda}\, e^{\frac{1}{z^\mu}} H_1$.

Для униформизаціи этого элемента поступаемъ совершенно, какъ раньше: $z = e^{\frac{1}{t}}$; $f(z) = e^{\frac{n-\lambda}{t}} \cdot e^{-\frac{\mu}{t}} H_2$.

Перейдемъ теперь къ слѣдующему классу особенностей функцій.

До сихъ поръ мы разсматривали контуры, которые могли быть непрерывно переведены въ безконечно малые (обходъ особенной точки).

Но существуютъ такого рода пути на Римановой поверхности, которые не могутъ быть сведены на такой малый контуръ. Достаточно вспомнить поверхности рода p, при p больше 0.

Изслѣдуемъ особенности такихъ путей.

Функціей рода p мы будемъ называть функціи, обладающія свойствомъ, что по исключеніи непрерывнаго ряда значеній аргумента или функціи, образующаго замкнутую кривую, ограничивающую конечную площадь, площадь эта остается доступной соотвѣтственно для функціи или аргумента, при чемъ число этихъ непереводимыхъ другъ въ друга непрерывными измѣненіями путей и есть p.

При пробѣгѣ, по полученной послѣ проведенія p надрѣзовъ односвязной поверхности аргумента или функціи, съ одной стороны надрѣза къ другой, функція или аргументъ совершаютъ незамкнутый путь; тогда очевидно (см. черт. 2), что существуетъ въ общемъ случаѣ путь переходящій съ

Digitized by Google

„правой“ на „лѣвую“ сторону незамкнутаго надрѣза, слѣдовательно, съ внѣшней на внутреннюю (или наоборотъ) замкнутаго.

Пусть функція $f(z)$ обладаетъ свойствомъ, что въ плоскости можно провести p замкнутыхъ, неприводимыхъ къ безконечно малымъ контурамъ надрѣзовъ, не нарушающихъ связности и что при пробѣгѣ по такому надрѣзу $f(z)$ мѣняетъ опредѣленіе (change de détermination). На основаніи теоремы доказанной въ началѣ можемъ утверждать, что не су-

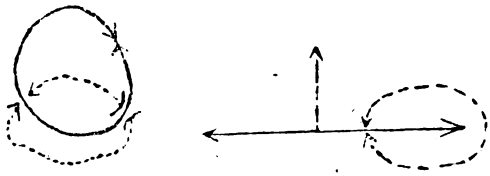


Рис. 3.

ществуетъ (линейныя мы исключимъ) единой аналитической субституціи, составляющей группу для значеній функціи по переводимымъ другъ въ друга непрерывнымъ путемъ надрѣзамъ. При безконечно маломъ измѣненіи пути варьируется и субституція (если ассимптотически вычислить линейную подстановку для данной точки), варьируется въ общемъ непрерывно за счетнымъ числомъ возможныхъ исключеній. Предположимъ, что обратная функція $z(f)$ не обладаетъ свойствомъ мѣнять опредѣленія отъ неприводимыхъ къ малымъ замкнутыхъ путей въ плоскости f, разсматриваемой какъ независимая перемѣнная.

Ограниченіе это вводится только временно.

Введемъ слѣдующія обозначенія: A_ν будетъ означать нѣкоторую однозначную аутоморфную функцію. F_ν обратную ей полиморфную функцію *). Обозначенія A и P безъ индексовъ

*) Основнымъ кругомъ можетъ быть любая окружность конечнаго радіуса въ плоскости. Замѣчаніемъ этимъ придется воспользоваться въ § 4. стр. 26.

Digitized by Google

сохранимъ для функцій 1-аго семейства по терминологіи Poincaré (Acta Mathematica t. I.) (функціи будемъ разсматривать какъ нѣкоторыя операціи, аналогично субституціямъ).

Операцію $f[\psi(\{\chi\lambda(x)\})]$ будемъ сокращенно обозначать: $f\psi\chi\lambda$.

Законъ перестановокъ не будетъ имѣть мѣста, но будетъ имѣть мѣсто законъ ассоціативности.

Очевидно, что $fA_\nu P_\nu = f$. Построимъ A и P, такъ, чтобы по путямъ, надлежащимъ образомъ уничтожающимъ многосвязность поверхности x, P испытывало субституціи группы 1-аго семейства, т. е. чтобы вершины основного полигона этой функціи лежали всѣ внутри основного круга. Будемъ затѣмъ разсматривать $fA[P(z)]$, взявъ на плоскости, вмѣсто z, въ качествѣ независимаго перемѣннаго $P(z)$.

Вопросъ о возможности такого построенія долженъ быть разсмотрѣнъ отдѣльно. Ниже мы приводимъ общій случай къ случаю, когда родъ поверхности равенъ единицѣ.

Когда z пробѣгаетъ замкнутый путь, понижающій многосвязность, $P(z)$ пробѣгаетъ незамкнутый путь, олицетворяющій ея линейную субституцію; функція A остается безъ измѣненія, пробѣгая нѣкоторый изъ надрѣзовъ понижающей системы, f мѣняетъ опредѣленіе. Если введемъ $P[z]=z'$ и будемъ разсматривать fA какъ функцію отъ z', то незамкнутому пути въ z' будетъ соотвѣтствовать незамкнутый путь въ плоскости fA. Пусть z' пробѣгаетъ замкнутый путь, отличный отъ системы надрѣзовъ Клейна *), тогда аргументъ пробѣгаетъ также нѣкоторый замкнутый путь. Путь функціи долженъ лежать цѣликомъ внутри односвязной поверхности, полученной послѣ примѣненія системы надрѣзовъ, либо долженъ распадаться на отдѣльныя внутреннія замкнутыя звенья.

*) Math. Ann. Bd. 21. Система уничтожаетъ многосвязность.

Digitized by Google

Всѣ критическіе контуры функціи fA могутъ быть сведены на безконечно малые. Слѣдовательно, fA въ критическихъ точкахъ ведетъ себя какъ $(z'-a_n)^{\frac{m_\nu-\lambda_\nu}{n}}$ или какъ $(z'-b_n)^{\frac{l_n-\nu_n}{n}} e^{\frac{1}{(z'-b_n)^{\mu_n}}}$; λ, μ, ν могутъ принимать также и трансцендентныя значенія, $l.m.n$,— цѣлыя числа:— Субституируя $z'=P(z)$, получаемъ около критической точки

$$f(z)=(P(z)-a_n)^{\frac{m_n-\lambda_n}{n}} H_1$$

или

$$f(z)=[P(z)-b_n]^{\frac{l_n-\nu_n}{n}} e^{\frac{1}{[P(z)-b_n]^{\mu_n}}} H_2.$$

Здѣсь слѣдуетъ отмѣтить слѣдующее интересное явленіе. Точки развѣтвленія функціи fA только въ томъ случаѣ являются точками развѣтвленія функціи f, если лежать внутри или на границѣ основного круга функціи $P(x)$. Объ этомъ далѣе. Пока вернемся въ униформизаціи. Нужно найти функцію не измѣняющуюся отъ параболической субституціи $\left[\frac{1}{t-a_n}, \frac{1}{t-a_n}+S_n\right]$. Въ видахъ обобщенія мы возьмемъ однако функцію неизмѣнную не при этой субституціи, а при субституціи $\left[\frac{1}{t-a'_n}, \frac{1}{t-a'_n}+S_n\right]$, гдѣ a'_n есть та предѣльная точка, лежащая на основномъ кругѣ функціи P, которую эта многозначная функція достигаетъ одновременно съ a_n *).

Положимъ тогда:

$$1)\quad P(z)-a_n=e^{\frac{1}{t-a'_n}};\quad z=A\left[e^{\frac{1}{t-a'_n}}+a_n\right]$$

$$f=e^{\frac{m_n-\lambda_n}{t-a'_n}} H_4$$

*) Вершина параболической субституціи можетъ быть выбрана и иначе. Нашъ выборъ имѣетъ то преимущество, что имъ не вводится новыхъ особенныхъ точекъ.

Digitized by Google

$$2)\ P(z)-b_n=e^{\frac{1}{t-b'_n}};\quad z=A\left[e^{\frac{1}{t-b'_n}}+b_n\right]$$

$$f=e^{\frac{l_n-\nu_n}{t-b'_n}}+e^{\frac{-\mu_n}{t-b'_n}}.\ H_1$$

Снимемъ теперь ограниченіе, которому мы подвергли функцію f, состоявшее въ томъ, что f не должно было пробѣгать замкнутыхъ надрѣзовъ, несводящихся на безконечно малый контуръ, когда x пробѣгалъ незамкнутый надрѣзъ. Пусть теперь такіе случаи существуютъ. Тогда строимъ полиморфную функцію, которая по системѣ этихъ замкнутыхъ надрѣзовъ функціи претерпѣваетъ группы подстановокъ 1-го семейства. Обозначимъ эту функцію P_1. Тогда P_1f' будетъ функціей уже разсмотрѣннаго класса $[f'=fA]$. Всѣ ея критическія точки смогутъ быть окруженными безконечно малыми контурами. Униформизація критическаго элемента представится въ видѣ слѣдующихъ формулъ:

$$1)\ f=A_1\left[e^{\frac{m_n-\lambda_n}{t-a'_n}}H\right];$$

$$z=A\left[e^{\frac{1}{t-a'_n}}+a_n\right];$$

$$2)\ f=A_1\left[e^{\frac{l_n-\lambda_n}{t-b'_n}}+e^{\frac{-\mu_n}{t-b'_n}}.\ H_1\right]$$

$$z=A\left[e^{\frac{1}{t-b'_n}}+b_n\right]$$

Здѣсь необходимо сдѣлать разъясненіе. До сихъ поръ обыкновенно разсматривались функціи, родъ которыхъ опредѣлялся по одной системѣ надрѣзовъ, напримѣръ, по формулѣ $w-2m=2p-2$, w—число точекъ развѣтвленія, m—число листовъ, p—родъ. Но такой способъ опредѣленія удобенъ только для алгебраическихъ функцій съ конечнымъ чис-

Digitized by Google

ломъ листовъ и точекъ развѣтвленія, а также ихъ интегралов и функцій, удовлетворяющихъ уравненіямъ подобнымъ уравненію, изученному Пуэнкаре $\frac{d^2v}{dx^2}=v\varphi(x,y)$.

Однако, если возьмемъ функцію составленную изъ двухъ разнородныхъ аутоморфныхъ функцій, то этотъ способъ окажется менѣе удобенъ, нежели слѣдующій: пусть A_1 и A_2 двѣ аутоморфныя функціи разнаго рода. Возьмемъ неявную функцію y отъ x, опредѣляемую уравненіемъ $A_1(y)-A_2(x)=0$.

Въ явномъ видѣ получимъ слѣдующую формулу для функціи $y=P_1A_2(x)$.

Взявъ неявную функцію $P_1(y)-P_2(y)=0$ получимъ $y=A_1P_2(x)$.

Обѣ эти функціи представляютъ примѣръ того, что иногда удобно брать сумму соотвѣтствующихъ другъ другу критическихъ путей: замкнутыхъ и незамкнутыхъ, которымъ соотвѣтствуетъ въ плоскости аргумента или функціи незамкнутые плюсъ замкнутые пути. Число ихъ (сумма) одно и то же для прямой и обратной функціи.

Такой способъ разсмотрѣнія понижаетъ родъ униформизирующей функціи, а „разбиваніе“ Римановой поверхности приводитъ къ тому, что достаточно доказать существованіе аутоморфныхъ функцій рода одинъ для наиболѣе общей Римановой поверхности, чтобы затѣмъ по нашему методу рѣшить задачу униформизаціи.

Въ такомъ видѣ методъ можетъ быть примѣненъ для рѣшенія задачи униформизаціи функцій безконечнаго p, только тогда функцію P_1fA, которую я ввожу въ рѣшеніе пришлось бы замѣнить алгоритмомъ безконечнымъ

$$...in\ inf...P_n...P_3P_2P_1fA_1A_2...A_n...in\ inf...,$$

гдѣ я не пишу скобокъ, долженствующихъ показать, что дан-

Digitized by Google

ныя функціи P и A рода одинъ не перемножаются, а субституируютъ аргументъ у функціи стоящей слѣва.

Пусть P_1 по одной изъ ретросекцій {(retrosection) въ общепринятомъ значеніи этого термина, см. напр., Picard Traité d'analyse t. II. *p.* 423 2-ое изд.} испытываетъ двѣ линейныхъ субституціи, тогда если f для соотвѣтствующей ретросекціи совершаетъ незамкнутый путь въ плоскости своего аргумента, то $P_1 f$ будетъ обладать свойствомъ, что незамкнутыхъ путей, возвращающихъ функцію къ прежнему значенію будетъ на единицу меньше.

Разсуждая аналогичнымъ путемъ мы въ исчислимое число шаговъ придемъ къ функціи рода нуль.

II.

Свойства функціи $P_1 f A$.

Если построимъ функцію, которая во всѣхъ точкахъ развѣтвленія и существенно особенныхъ точкахъ ведетъ себя какъ функція $P_1 f A$, то частное этихъ двухъ функцій будетъ представлять изъ себя функцію мероморфную рода нуль безъ существенно особенныхъ точекъ, т. е. функцію раціональную.

Если то же продѣлать для обратной функціи, то снова получимъ функцію раціональную. Если условиться принимать при первой операціи также и тѣ точки во вниманіе, которыя являются особенными перечисленныхъ характеровъ только для обратныхъ функцій, то полученная въ результатѣ функція будетъ линейной.

Отсюда интересно вывести число постоянныхъ, отъ которыхъ зависитъ функція f.

Строимъ функцію $P_1 f A$.

Число постоянныхъ, которыя при этомъ должны быть употреблены равно прежде всего числу вещественныхъ чиселъ,

Digitized by Google

потребныхъ для опредѣленія $3p-3$ модулей поверхности рода p.

Это число получается изъ $6p_1-6$ постоянныхъ функціи A (если предположить, что эллиптическихъ и параболическихъ субституцій мы въ функцію не введемъ), $6p_2-6$ постоянныхъ функціи P_1, и 6 постоянныхъ линейной субституціи, съ точностью до которой можно опредѣлить функцію P_1fA по ея точкамъ развѣтвленія, заворота и существенно особеннымъ.

Такъ какъ по нашему условію $p_1+p_2=p$, то получаемъ всего $6p-6$ вещественныхъ постоянныхъ, т. е. то же, что и у $3p-3$ модулей (комплексныхъ) поверхности рода p.

Пусть ϱ,σ,δ соотвѣтственное число точекъ развѣтвленія 1-го рода, 2-го рода и логарифмическихъ. Въ виду того, что нужно принять во вниманіе экспоненты особенностей, то къ числу $2(\varrho+\sigma+\delta)$ нужно прибавить $\varrho+2\sigma$. Затѣмъ обозначимъ черезъ k число особенныхъ точекъ, въ которыхъ функція конечна; тогда $2k$ будетъ число постоянныхъ, которыя получимъ давая въ этихъ точкахъ функціи произвольныя значенія. Но эти постоянныя суть тѣ, отъ которыхъ зависитъ любая цѣлая функція. Общее же число постоянныхъ, отъ которыхъ зависитъ аналитическая функція равно $6p+3\varrho+4\sigma+$ $+2\delta+2k-6$.

Возьмемъ нѣкоторое множество точекъ a_n,b_n,c_n (c_n—логарифмическія особенныя точки). Предположимъ, чтобы стать въ болѣе крайній случай, что число этихъ точекъ безконечно. Для начала, сдѣлаемъ, однако, ограниченіе, которое послѣ снимемъ, что число точекъ сгущенія особенностей конечно, или выражаясь языкомъ теоріи множествъ, производное множество особенныхъ точекъ конечно. (Можно даже предположить, что только n-ое производное множество конечно).

Обозначимъ точки эти черезъ $A_1,A_2\ldots A_n$, тогда субсти-

Digitized by Google

туція $z'=\frac{1}{(z-A_1)(z-A_2)\ldots(z-A_n)}$ вымететъ всѣ эти точки сгущенія въ безконечность и точки a'_n, b'_n, c'_n въ кругѣ конечнаго радіуса будутъ всегда находиться въ конечномъ числѣ. Слѣдуя методу Вейерштрасса построенія сходящихся безконечныхъ произведеній, мы построимъ функцію $P_1 fA$ и затѣмъ анализомъ ея поведенія въ точкѣ ∞ покажемъ связь характера этой точки со значеніями, которыя $P_1 fA$ можетъ принимать въ критическихъ мѣстахъ.

Разберемъ произведеніе $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z'}{a'_n}\right)^{m_n-\lambda_n}$. Условіе его сходимости—сходимость суммы:

$$\sum(m_n-\lambda_n)log\left(1-\frac{z'}{a'_n}\right)=$$

$$=\sum(m_n-\lambda_n)\left[-\frac{z'}{a'_n}-\frac{1}{2}\left(\frac{z'}{a'_n}\right)^2-\ldots\right].$$

Число m_n конечно, но въ точкахъ, гдѣ это условіе не выполнено мы усвоили другой способъ выраженія функціи*, $0\leqslant\lambda<1$. Въ виду того, что $|a'_n|$ неограниченно возрастаетъ вмѣстѣ съ n, можно указать такой показатель k_1, что $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z'}{a'_n}\right)^{k_1}$ сходится; прибавляя несходящіеся элементы къ $\sum$, получимъ сходящійся рядъ:

$$\sum(m_n-\lambda_n)log\left(1-\frac{z'}{a'_n}\right)+(m_n-\lambda_n)\left[\frac{z'}{a'_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z'}{a'_n}\right)^2+\ldots+\frac{1}{k_1-1}\left(\frac{z'}{a'_n}\right)^{k_1-1}\right].$$

*) Если m_n не имѣемъ верхняго предѣла, то приходится разсуждать, какъ въ случаѣ цѣлыхъ функцій безконечнаго рода (въ иномъ значеніи этого слова, т. е. fonctions entières du genre infini), показатель степени конвертрующаго множителя можетъ быть безконечнымъ рядомъ.

Digitized by Google

Потенцируя:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z'}{a'_n}\right)^{m_n-\lambda_n} e^{(m_n-\lambda_n)\left[\frac{z'}{a'_n}+\ldots+\frac{1}{k_2-1}\left(\frac{z'}{a'_n}\right)^{k_1-1}\right]}$$

Произведеніе это сходится.

Обратимся къ особеннымъ точкамъ b_n, въ которыхъ P_1/A ведетъ себя какъ $\left(1-\frac{z'}{b'_n}\right)^{l_n-\lambda_n} e^{\left[1-e^{\frac{z'}{b'}}\right]^{\mu_n}}$. Если μ_n становятся $-\infty$, то можно замѣнить 2-ой множитель черезъ обратную функцію отъ $1-\frac{z'}{a'_n}=1$; т. е. z' постоянно; когда $\mu_n\to+\infty$, то черезъ $\left(1-\frac{z'}{b'_n}\right)=\lim_{\mu=\infty}[\log w]^{\frac{-1}{\mu}}$.

Такимъ образомъ, можно предположить μ_n конечнымъ.

Образуемъ $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z'}{b'_n}\right)^{l_n-\nu_n} e^{\left(1-\frac{z'}{b'_n}\right)^{-\mu_n}} =$

$$= e^{\sum_n\left(1-\frac{z'}{b'_n}\right)^{-\mu_n}} \prod_n\left(1-\frac{z'}{b'_n}\right)^{l_n-\nu_n}.$$

Логариѳмъ этого выраженія равенъ

$$\sum_n\left[1+\mu_n\frac{z'}{b'_n}+\frac{\mu_n(\mu_n+1)}{1.2}\left(\frac{z'}{b'_n}\right)^2+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{\mu_n(\mu_n+1)\ldots(\mu_n+k_2-2)}{(k_2-1)!}\left(\frac{z'}{b'_n}\right)^{k_2-1}+\ldots\right]+$$

$$+\sum_n(l_n-\nu_n)\left[-\frac{z'}{b'_n}-\frac{1}{2}\left(\frac{z'}{b'_n}\right)^2-\ldots-\frac{1}{k_2-1}\left(\frac{z'}{b'_n}\right)^{k_2-1}-\ldots\right]$$

k_2 опредѣлимъ такъ, чтобы $\sum_n\left(\frac{z'}{b'_n}\right)^{k_2}$ сходилось. Если уда-

Digitized by Google

лить члены порядка ниже k_2—ого, то произведеніе станетъ сходящимся, т. е. равнымъ

$$e^{\sum_n \left[\left(1-\frac{z'}{b'_n}\right)^{-\mu_n} - 1 + (l_n - \nu_n - \mu_n)\frac{z'}{b'_n} + \right.}$$

$$+\left(\frac{l_n-\nu_n}{2} - \frac{\mu_n(\mu_n+1)}{1.2}\right)\left(\frac{z'}{b'_n}\right)^2 + \ldots +$$

$$\left. \ldots + \left(\frac{l_n-\nu_n}{k_2-1} - \frac{\mu_n(\mu_n+1)\ldots(\mu_n+k_2-2)}{(k_2-1)!}\right)\left(\frac{z'}{b'_n}\right)^{k_2-1} \right] \cdot$$

$$\prod \left(1-\frac{z'}{b'_n}\right)^{l_n-\nu_n},$$ соединяя одинаковые n въ одинъ членъ

Множество логариѳмическихъ точекъ дастъ

$$log \left\{ \prod_{n=1}^{n=\infty} \left(1-\frac{z'}{c'_n}\right) e^{\frac{z'}{c'_n} + \ldots + \frac{1}{k_3-1}\left(\frac{z'}{c'_n}\right)^{k_3-1}} \right\}$$

Коэффиціенты сходимости измѣнили характеръ функціи въ точкѣ безконечность.

Чтобы найти $P_1 fA$ нужно учесть это измѣненіе.

Для этого можно ввести подходящую цѣлую функцію аддитивно.

Точки a_n, b_n, c_n сгущаются въ безконечности.

Число ихъ въ кругѣ конечнаго радіуса конечно. Только въ конечномъ числѣ случаевъ при $|z| = R, |z| > |a_n|, |b_n|, |c_n|$. Тѣмъ не менѣе можно предположить, что точка ∞ не является развѣтвленіемъ функціи $P_1 fA$. Противоположный случай разрѣшается безъ труда аналогично данному.

Итакъ, безконечность принадлежитъ только къ производному множеству точекъ развѣтвленія.

Тогда $\prod'_\Sigma$ отличается отъ $P_1 fA$ на нѣкоторую цѣлую функцію съ существенно особенной точкой въ безконечности.

Digitized by Google

Окончательно получаемъ:

1) $f=A_1\prod_{\Sigma}P$, если разсматривать f какъ функцію отъ z'. Если $z'=\Delta(z)$, то 1') $f=A_1\prod_{\Sigma}P\Delta$.

III.

Образованіе униформизующей трансцеденты.

Для функціи f въ результатѣ получили мы слѣдующую формулу:

$$(2)\qquad f=A_1\Bigg[\Big\{\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{P(z')}{a'_n}\Big)^{m_n-\lambda_n}e^{(m_n-\lambda_n)\Big[\frac{P(z')}{a'_n}+\cdots+\frac{1}{k_1-1}\Big(\frac{P(z')}{a'_n}\Big)^{k_1-1}\Big]}\Big\}\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{P(z')}{b'_n}\Big)^{l_n-\nu_n}e^{\Big(1-\frac{P(z')}{b'_n}\Big)^{-\mu_n-1}+1\cdots-1+(l_n-\nu_n-\mu_n)\frac{P(z')}{b'_n}+\cdots+\Big(\frac{l_n-\lambda_n}{k_2-1}\cdot\frac{\mu_n(\mu_n+1)\cdots(\mu_n+k_2-2)}{(k_2-1)!}\Big)\Big(\frac{P(z')}{b'_n}\Big)^{k_2-1}}\Bigg]$$

$$\cdot\log\Big\{\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{P(z')}{c'_n}\Big)\cdot e^{\Big[\frac{P(z')}{c'_n}+\cdots+\frac{1}{k_3-1}\Big(\frac{P(z')}{c'_n}\Big)^{k_3-1}\Big]}\xi(P(z'))\Big]+\Xi[P(z')]^{*}).$$

ξ и Ξ цѣлыя функціи.

---

*) Если подъ символомъ $P(z')$ понимать совокупность всѣхъ вѣтвей полиморфной функціи, то это разложеніе представляетъ одновременно всѣ вѣтви данной многозначной функціи, переводящіяся другъ въ друга по неприводимымъ къ безконечно малымъ путямъ. Если выраженіе a^{λ} понимать также, какъ совокупность вѣтвей многозначной функціи $a^{\frac{p}{q}}$, гдѣ $\frac{p}{q}=\lambda$, или a^{λ}, гдѣ λ трансцедентное число, то данное разложеніе представитъ намъ всю аналитическую функцію такимъ образомъ, что всякое аналитическое продолженіе ея не дастъ намъ новыхъ элементовъ.

Digitized by Google

Пусть A_1 и A существуютъ только внутри главнаго круга радіуса единицы; тогда мы должны принять во вниманіе только конечное число точекъ развѣтвленія $|a'_n|<1$, $|b'_n|<1$ и $|c'_n|<1$. Кажущаяся парадоксальность этого факта находитъ себѣ объясненіе въ двухъ обстоятельствахъ: 1-ое—въ выметаніи точекъ сгущенія въ безконечность, 2-ое въ той зависимости, которая существуетъ между листами многозначной функціи и листами нѣкоторой полиморфной функціи.

Остается построить функцію не принимающую указаннаго конечнаго множества значеній a,b,c. Обозначимъ эти точки черезъ r'_ν. $P(z')$ вслѣдствіе своей многозначности принимаетъ одновременно всѣ значенія $r'_{\nu,\sigma}$, которыя трансформируютъ изъ r'_ν линейными субституціями группы P.

Одно изъ этихъ значеній лежитъ на основномъ кругѣ.

Если, слѣдовательно, запретить униформизующей трансцедентѣ $A_2(t)$ существовать въ этихъ предѣльныхъ точкахъ

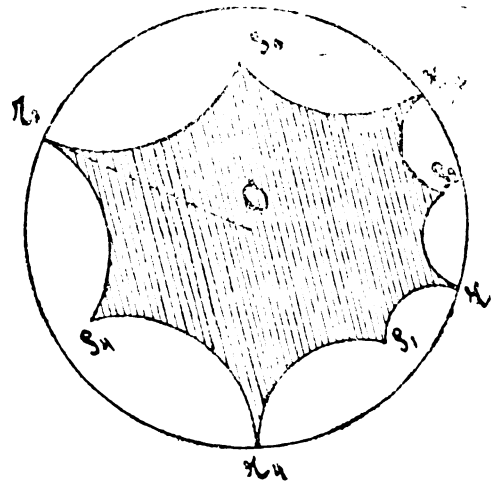


Рис. 4.

r_ν. то $A(z_n)$ приближаясь къ какой либо критической точкѣ будетъ одновременно стремится и къ этой предѣльной точкѣ *).

*) Этимъ опредѣленіемъ мы избѣгаемъ введенія новыхъ особенныхъ точекъ.

Digitized by Google

Въ частныхъ случаяхъ мы видѣли, что наипростѣйшей функціей униформизующей элементъ являлась показательная, имѣвшая въ данной точкѣ параболическую субституцію.

Чтобы рѣшить эту задачу въ общемъ случаѣ нужно построить функцію не измѣняющуюся отъ параболическихъ субституцій:

$\left[\frac{1}{t-r_\nu}, \frac{1}{t-r_\nu}+S_\nu\right]$, гдѣ S_ν должны быть опредѣлены такъ, чтобы $\angle\varrho_\nu = \frac{2\pi}{\alpha}$, гдѣ α цѣлое число.

Слѣдуя Пуанкаре, опредѣлимъ раньше функцію

$$\theta_\lambda = \sum H_\lambda\left(\frac{\alpha_i t+\beta_i}{\gamma_i t+\delta_i}\right)\frac{1}{(\gamma_i t+\delta_i)^{2m}}$$

и функцію

$$A_2(t) = \frac{\theta_{\lambda_1}(t)}{\theta_{\lambda_2}(t)}; \text{ здѣсь } \frac{\alpha_i t+\beta_i}{\gamma_i t+\delta_i}$$

нѣкоторая субституція, скомбинированная изъ

$$\left[t, \frac{t(1-n_\nu s_\nu r_\nu)+n_\nu s_\nu r^2_\nu}{-n_\nu s_\nu t_\nu+1+n_\nu s_\nu r_\nu}\right] \text{при разныхъ } \nu.$$

Раціональную функцію H_{λ_1}, а также H_{λ_2} слѣдуетъ опредѣлить такъ, чтобы идя *по радіусу вектору* Or_ν *въ особенную точку*, $A_2(t)$ *стремилась къ значенію* r'_ν.

Подробно на этомъ вопросѣ я остановлюсь во 2-ой части своей работы, посвященной существованію аутоморфныхъ функцій рода ноль и единица.

Опредѣлимъ родъ только что введенной функціи.

На какіе циклы распадаются углы ея основного полигона?

Начнемъ съ $\angle r_1$ (см. черт. 4).

$\angle r_1$, сторона $r_1\varrho_2$, сопряженная $\varrho_1 r_1$, $\angle r_1$

. . . . . .

. . . . . .

$\angle r_\nu$, сторона $r_\nu\varrho_{\nu+1}$ сопряженная $\delta_\nu\gamma_\nu$, $\angle r_\nu$

Т. е. n цикловъ по 1-ому углу.

Digitized by Google

Возьмемъ за начальный $\angle\varrho_1$.
$\angle\varrho_1$—сторона $\varrho_1 r_1$,—сопряженая $r_1\varrho_2$,—$\angle\varrho_2$,—сторона $\varrho_2 r_2$ —сопряженная $r_2\varrho_3$ и т. д. Одинъ циклъ изъ n угловъ.

Итого $n+1$ циклъ. Если непосредственной деформаціей превратить основной полигонъ въ замкнутую поверхность и примѣнить извѣстную формулу $F+S-A=-2p+2$, гдѣ F число односвязныхъ полигоновъ, S—число вершинъ, A—число сторонъ, то получимъ: $F=1$; $S=n+1$; $A=n$. Подставляя въ формулу, получаемъ $p=0$. $A_2(t)$ принимаетъ слѣдовательно внутри каждаго полигона каждое значеніе по одному разу; слѣдовательно, не принимаетъ вовсе значеній r'_ν. Въ томъ, что родъ этой функціи равенъ нулю можно непосредственно убѣдиться по соображеніямъ изложеннымъ на стр. 11. Всѣ незамкнутые критическіе контуры, которые не измѣняютъ функціи, могутъ быть сведены на безконечно малые.

Согласно изслѣдованіямъ Пуанкаре и подобно предыдущимъ частнымъ случаямъ, въ точкахъ r_ν функція $A_2(t)$ будетъ имѣть логариѳмическія особенныя точки. Т. е. наша аутоморфная функція рода 0 будетъ вести себя въ окрестностяхъ особенныхъ точекъ, какъ

$$(3)\qquad e^{\frac{2\pi i}{s_\nu}\frac{1}{t-r_\nu}}\left[H_1+r'_\nu e^{-\frac{2\pi i}{s_\nu}\frac{1}{t-r_\nu}}\right]=P(z'),$$

т. е.

$$1-\frac{P(z')}{r'_\nu}=e^{\frac{2\pi i}{s_\nu}\frac{1}{t-r_\nu}}H_1,$$

откуда

$$\left[1-\frac{P(z')}{r'_\nu}\right]^{m_\nu-\lambda_\nu}=e^{\frac{2\pi i}{s_\nu}\frac{m_\nu-\lambda_\nu}{t-r_\nu}}H_2$$

гдѣ 2-ой рядъ полученъ разложеніемъ 1-аго по биному Ньютона въ окрестностяхъ точки $t=r_\nu$.

Одинаково можно убѣдиться, что во всѣхъ точкахъ развѣтвленія, f какъ функція отъ t ведетъ себя регулярно.

Digitized by Google

Обозначимъ алгоритмъ (2) черезъ формулу (1) $f=A_1 \Pi_\Sigma P(z')$, но изъ формулы (3) слѣдуетъ, что $Z'=AA_2(t)$ слѣдовательно

(4) $$f=A_1 \Pi_\Sigma A_2(t),$$

(5) $$z'=AA_1(t).$$

То рѣшеніе, которое мы получили, будемъ называть униформизаціей 2-ого рода, ибо при переходѣ отъ z' къ z получимъ

(6) $$f=A_1 \Pi_\Sigma A_2(t),$$
$$\Delta(z)=AA_2(t),$$

гдѣ $\Delta(z)$ есть раціональная функція отъ z.

Чтобы получить рѣшеніе Пуанкарэ нужно перейти къ вопросу о построеніи функцій, точки развѣтвленія которыхъ сгущаются въ конечномъ разстояніи. Чтобы рѣшить задачу въ наиболѣе общемъ видѣ, нужно предположить, что у $P_1 fA$ существуютъ совершенныя множества особенныхъ точекъ.

IV.

Униформизація 1-го рода для функцій со сгущеніями особенностей.

Вопросъ сводится къ построенію Π_Σ безъ выметанія точекъ сгущенія въ безконечность.

Въ виду того, что для безконечно удаляющихся точекъ равно какъ и для сгущающихся въ нулѣ, построеніе Π_Σ не представляетъ затрудненій, предположимъ, что имѣемъ дѣло съ ограниченнымъ множествомъ. Пусть растояніе крайнихъ точекъ сгущенія$=M$. Разсмотримъ произведеніе:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)^{m_n-\lambda_n} K_n,$$

гдѣ K_n опредѣлимъ подходящимъ образомъ

$$\Sigma\left[\log\left(1-\frac{z}{a_n}\right)+\log K_n\right]=\Sigma\left[\log K_n-\frac{z}{a_n}-\frac{1}{2}\frac{z^2}{a_n^2}-\ldots\right];$$

Digitized by Google

пусть $log\ K_n = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{K'_{\nu,n}}{\nu\lambda}$; тогда образуемъ:

$$\sum \left[\frac{K'_{1,n}}{1^\lambda} \frac{z}{a_n} + \frac{K'_{2,n}}{2^\lambda} \frac{1}{2} \frac{z^2}{a_n^2} + \ldots + \frac{K'_{l,n}}{l^\lambda} \frac{1}{l} \frac{z^l}{a_n^l} + \ldots \right].$$

Условіе сходимости этого ряда $\sum$ есть

$$\frac{K'_{l,n+1}}{r^{\lambda-1}} \frac{z^l}{a^l{}_{n-1}} : \frac{K'_{l,n}}{r^{\lambda-1}} \frac{z^l}{a^l{}_n} < 1.$$

Отсюда получаемъ:

$$K'_{l,n+1} - K'_{l,n} < z^l l^{\lambda-1} \left[\frac{1}{a^l{}_{n+1}} - \frac{1}{a^l{}_n} \right].$$

Предполагаемъ, что линейная субституція сдѣлала 0 и ∞ регулярными точками, тогда можемъ положить

$$\left[\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \right] \leqslant N,$$

откуда

$$\frac{1}{|a_{n+1}|^l} - \frac{1}{|a_n|^l} < \pm N^l; \quad K'_{l,n+1} < \pm N^l z^l l^{\lambda-1} + K'_{l,n}$$

или, вводя вмѣсто неравенства, равенство можемъ положить:

$$(1) \qquad K'_{l,n+1} = K'_{l,n} - N^l z^l l^{\lambda-1}; \quad (1)' K'_{l,1} = 0$$

$$(2)\ log K_n = \sum_{\nu=1}^{\infty} -(n-1) \left[\frac{N^\nu z^\nu}{\nu} \right] = (n-1) log(1-Nz)$$

Такимъ образомъ, вблизи точки 0 наше произведеніе будетъ сходится на разстояніи $\frac{1}{N}$ отъ нуля. Разстояніе это конечно, коль скоро имѣемъ дѣло съ аналитической функціей. Видъ безконечнаго произведенія слѣдующій:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)^{m_n} e^{-\lambda_n} (1-Nz)^{n-1}; \quad |z| < \frac{1}{N}.$$

Digitized by Google

(какъ и въ предыдущемъ случаѣ $\Pi\Xi$ данная функція опредѣлена съ точностью до 2 мероморфныхъ функцій).

Чтобы аналитически продолжить, если это возможно, полученную функцію возьмемъ произведеніе

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{z}\right)^{m_n-\lambda_n},$$

которое имѣетъ тѣ же точки развѣтвленія. Аналогичнымъ путемъ получимъ, что

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{z}\right)^{m_n-\lambda_n}\left(1-\frac{M}{z}\right)^{n-1}$$

сходится, коль скоро $z>M.M$ имѣетъ здѣсь значеніе, которое мы дали ему на страницѣ 26.

Въ виду значенія M и N, зависящихъ отъ точекъ сгущенія a_n можемъ утверждать, что въ районѣ сходимости этихъ въ крайнемъ случаѣ *двухъ* функцій, (ибо можетъ существовать купюра) * существуетъ только конечное число точекъ развѣтвленія. Задача сводится къ построенію аутоморфной функціи, неизмѣняющейся отъ ряда параболическихъ субституцій и не принимающей значеній этихъ точекъ развѣтвленія.

Для того, чтобы стать въ положеніе аналогичное предыдущему, $A_2(t)$ должно существовать въ томъ кругѣ, гдѣ нѣтъ сгущеній особенностей у P_1fA. Пусть каждая субституція нашей группы испытаетъ нѣкоторую комплексную подстановку (одну и ту же), зависящую отъ замѣны главнаго круга

*) Одной функціей безъ купюры оба произведенія могутъ быть по внесеніи соотвѣтствующей мероморфной поправки, пусть Ξ_1 и Ξ_2 мероморфныя функціи, ξ_1 и ξ_2 цѣлыя функціи.

Равенство въ функціональномъ смыслѣ можетъ существовать для $\Pi_1\Xi_1+\xi_1$ съ одной стороны и $\Pi_2\Xi_2+\xi_2$ съ другой.

Digitized by Google

другимъ. Тогда, если только существуетъ конечная область, свободная отъ точекъ сгущенія особенностей, униформизація перваго рода можетъ быть произведена.

V.

Области сопряженія функціи и аргумента.

Въ данномъ методѣ рѣшенія были введены функціи ограниченныя, какъ въ области существованія, такъ (другія функціи) и въ области тѣхъ значеній, которыя онѣ могли принимать. Нужно поэтому изслѣдовать вопросъ, можетъ ли быть выражено нашей униформизаціей соотвѣтствіе между наприм., всею плоскостью z-овъ и всею плоскостью f. Очевидно, что это такъ.

Вспомнимъ видъ $f=A_1 \Pi\Sigma P(z)$. $P[z]$ существуетъ во всей плоскости, A_1 принимаетъ всѣ значенія. Въ общемъ случаѣ послѣ униформизаціи можетъ быть выражена самая широкая зависимость въ томъ же самомъ объемѣ, какъ и у первоначальной функціи. Возьмемъ униформизующія формулы

$$f=A_1 \Pi\Sigma A_2(t)$$

$$z=AA_2(t)$$

z можетъ принимать всѣ значенія (съ конечнымъ числомъ исключеній), хотя по отношенію къ плоскости t существуетъ въ тѣхъ частяхъ основныхъ полигоновъ, гдѣ $|A_2|<1$. Z не принимаетъ значеній A отъ точекъ развѣтвленія. $[A_2(t)=r'_\nu]$. функція f можетъ также принимать всѣ значенія, за исключеніемъ тѣхъ, къ которымъ стремилась, можетъ быть, въ нѣкоторыхъ критическихъ точкахъ. По отношенію къ t, f существуетъ въ тѣхъ частяхъ основныхъ полигоновъ функціи $A_2(t)$ гдѣ $|\Pi\Sigma A_2(t)|<1$.

Digitized by Google

Слѣдовательно, области сосуществованія въ плоскости t у z и у f таковы, что функціональная зависимость не уже нежели безъ посредства униформизующей функціи.

VI.

Дифференціальныя уравненія, которымъ удовлетворяютъ униформизующія функціи.

Начнемъ съ вывода дифференціальнаго уравненія, которому удовлетворяетъ функція $A_2(t)$, какъ со случая простѣйшаго. Положимъ $A_2(t)=x$. Какъ функція отъ t рода 0, x будетъ обладать такимъ свойствомъ, что всякая иная функція того же рода и тѣхъ же подстановокъ будетъ выражаться раціонально черезъ нее. Тутъ есть свобода въ выборѣ: взять ли самое функцію x или нѣкоторую линейную отъ нея. Мы закрѣпимъ характеръ функціи тѣмъ, что положимъ: въ углахъ ϱ_ν, образующихъ одинъ циклъ, функція будетъ обращаться въ безконечность порядка β *). Пуанкарэ показалъ что, положивъ

$$v_1=\sqrt{\frac{dx}{dt}};\quad v_2=t\sqrt{\frac{dx}{dt}}, \tag{1}$$

можемъ получить для v_1 и v_2 слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$\frac{d^2v}{dx^2}=v\varphi(x)\ [\text{разъ } p=0], \tag{2}$$

гдѣ $\varphi(x)$ раціональная функція отъ x. Въ этомъ случаѣ x есть аутоморфная функція отъ отношенія частныхъ интеграловъ $\frac{v_1}{v_2}$ этого уравненія. Каковъ же будетъ видъ функціи $\varphi(x)$ въ нашемъ случаѣ?

---

*) p не произвольное число.

Digitized by Google

Элементарныя вычисленія приводятъ къ равенству

$$(3) \qquad \varphi(x)=\frac{2\dfrac{d^3x}{dt^3}\dfrac{dx}{dt}-3\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)^2}{4\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^4}.$$

Пользуясь разложеніями $x-r'_\nu$ по степенямъ $t-r_\nu$ $\left[\text{съ множителемъ вида } e^{\frac{2\pi i}{s_\nu}\frac{1}{t-r_\nu}}\right]$ приходимъ къ равенству:

$$(4) \qquad \varphi(x)=\frac{P(x)}{(x-r'_1)^2(x-r'_2)^2\ldots(x-r'_n)^2}=\frac{P(x)}{Q^2(x)}.$$

По изслѣдованіи разложенія x въ окрестностяхъ точекъ ρ_ν и r'_ν приходимъ къ заключенію, что $P(x)$ будетъ полиномъ степени $2n-2$. Существеннымъ является опредѣленіе неравенства, которымъ подчиняются коэффиціенты $P(x)$. Если въ уравненіе (3) поставить разложенія по степенямъ $(t-r_\nu)$ и продѣлать разсужденіе аналогичное тому, которое намъ понадобилось для полученія (4), то получимъ соотношеніе:

$$(5) \qquad P(r'_\nu)=-Q'^2(r'_\nu)$$

(при выводѣ была употреблена формула разложенія въ частныя дроби).

Коэффиціентъ x^{2n-2} въ полиномѣ $P(r'_\nu)$ равенъ

$$-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4\beta^2}\right)$$

Въ нашемъ случаѣ величины r_ν и r'_ν должны считаться данными, поэтому подсчетъ условій, которымъ долженъ удовлетворять полиномъ $P(x)$ будетъ слѣдующій:

Мы опредѣлили $n+1$ необходимое условіе, остаются неиспользованными $n-2$ комплексныхъ параметра, что соот-

Digitized by Google

вѣтствуетъ $2n-4$ вещественнымъ. Группа G параболическихъ подстановокъ опредѣляла полигонъ R_0.

Онъ зависитъ отъ $4n-3$ параметровъ (первая дуга два условія, слѣдующія по одному, кромѣ послѣдней, которая уже опредѣлена сосѣдними отрѣзками), но полигонъ R_0 долженъ удовлетворять такимъ условіямъ: каждый изъ угловъ основаній подстановокъ $=0$, $\Sigma < \rho_\nu$ равенъ цѣлочисленной части 2τ, откуда $n+1$ условій. Остается такимъ образомъ $2n-4$ параметровъ, т. е. ровно столько, сколько неиспользованныхъ постоянныхъ въ $F(x)$.

Функціи A_1 и A удовлетворяютъ аналогичнымъ уравненіямъ

$$\frac{d^2v}{dx^2}=v\varphi(x,y), \tag{6}$$

гдѣ $\varphi(x,y)$ раціональная функція отъ двухъ аутоморфныхъ функцій, связанныхъ алгебраическою зависимостью, соотвѣтствующаго рода p_ν.

Возьмемъ функцію $f=A_1 \Pi_\Sigma P(x)$.

Дифференцируемъ по правилу о сложныхъ функціяхъ. Получимъ

$$\frac{df}{dx}=\frac{dA_1(\Pi_\Sigma P(x))}{d[\Pi_\Sigma P(x)]}\cdot\frac{d\Pi_\Sigma(P(x))}{dP(x)}\cdot\frac{dP}{dx};\ \frac{dP}{dx}=\frac{1}{\frac{dA}{dx}}. \tag{7}$$

Изъ уравненій (1) стр. 30 можемъ подставить

$$\frac{dA_1(\Pi_\Sigma P(x))}{d[\Pi_\Sigma P(x)]}=v_1{}^2{}_{,1}(\Pi_\Sigma P(x));\frac{dA}{dx}=v^2{}_{1,0},$$

гдѣ $v_{1,1}$ и $v_{1,0}$ суть частные интегралы уравненій вида (6).

Такимъ образомъ, уравненіе (7) приводится къ виду

$$\frac{df}{dx}=\frac{v_1{}^2{}_{,1}(\Pi_\Sigma P(x))\Pi'_\Sigma(P(x))}{v_1{}^2{}_{,0}(x)}, \tag{8}$$

*) A_1 или A суть аутоморфныя функціи отъ отношенія интеграловъ этого уравненія.

Digitized by Google

гдѣ подъ Π'_Σ можно понимать производную наиболѣе общей функціи, всѣ пути развѣтвленія которой могутъ быть сведены на безконечно малые контуры. Вмѣсто независимаго перемѣннаго въ нее введена функція $P(x)$. $v_{1,1}$ есть частный интегралъ уравненія (6), послѣ этого въ $v_{1,1}$ введена вмѣсто аргумента функція $\Pi_\Sigma P(x)$.

Функціи $v_{1,0}$, $v_{1,1}$ многозначны. Онѣ испытываютъ измѣненія опредѣленія при обходѣ нѣкоторыхъ, несводящихся на безконечно малые, путей.

Замѣна x черезъ $\Pi_\Sigma P(x)$ еще болѣе усложняетъ ихъ свойства.

Единственнымъ ограниченіемъ для функціи f является то, что существуетъ любое, но *конечное* число критическихъ путей несводящихся на безконечно малый контуръ. Униформизація функціи безконечнаго рода можетъ быть выполнена путемъ либо соотвѣтствующихъ аутоморфныхъ функцій, либо посредствомъ введенія исчислимаго числа аутоморфныхъ функцій рода p конечнаго, въ частности рода единица.

A_2 остается въ обоихъ способахъ рода нуль.

Здѣсь умѣстно объяснить откуда берутся у функціи $P_1 f A$ развѣтвленія, которыхъ нѣтъ ни въ функціи f, ни въ P_1, ни въ A.

Вводя P_1 и A мы въ сущности замѣнили многозначную функцію другою функціей такъ, чтобы каждый листъ ея являлся функціей *одного* листа у нѣкоторой полиморфной функціи. Но эта зависимость можетъ имѣть особенныя точки, а именно тѣ значенія, у которыхъ однозначная зависимость между листами нарушается и при обходѣ которыхъ тотъ же листъ функціи f становится функціей другого листа функціи полиморфной.

23 декабря 1915 года.

Ф. Сирвинтъ.

Digitized by Google

II.

ЛѢТОПИСЬ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

при ИМПЕРАТОРСКОМЪ Казанскомъ Университетѣ.

Протоколъ 177-го засѣданія,

происходившаго 7-го февраля 1915 года.

(Присутствовали 16 членовъ).

Засѣданіе происходило подъ предсѣдательствомъ Члена Совѣта Д. И. Дубяго.

1. Былъ заслушанъ отчетъ г. Секретаря о дѣятельности О-ва за 1914 годъ и отчетъ г. Казначея. За отсутствіемъ г. Библіотекаря отчетъ по библіотекѣ былъ прочитанъ г. Секретаремъ. Послѣ оглашенія протокола засѣданія Ревизіонной Комиссіи отчеты были утверждены. (Отчеты и протоколъ засѣданія Рев. Ком. напечатаны въ этомъ выпускѣ Извѣстій).

2. Во время обсужденія смѣты на 1915 годъ былъ поднятъ вопросъ о накопившемся за 1912—1914 годы долгѣ Университетской типографіи въ размѣрѣ 250 рублей 50 коп. Было постановлено уплатить ту часть этого долга, которая обязана своимъ происхожденіемъ печатанію отчета о присужденіи преміи имени Н. И. Лобачевскаго—изъ процентовъ съ фонда Н. И. Лобачевскаго и относить также и въ будущемъ расходы на печатаніе отчетовъ о присужденіи премій на счетъ этого фонда.

Проф. В. А. Ульянинъ предложилъ, въ виду затруднительнаго финансоваго положенія О ва, просить А. В. Васильева похлопотать въ Министерствѣ объ ускореніи движенія вопро-

Digitized by Google

са о субсидіи О-ву. Онъ же обратилъ вниманіе на то, что выигрышный билетъ, принадлежащій О-ву, обременяетъ кассу О-ва, т. к. необходимо тратить каждый разъ возрастающія средства на его страховку. По предложенію Д. И. Дубяго вопросъ о билетѣ рѣшено отложить до наведенія о немъ справокъ.

Н. Н. Іовлевъ предложилъ для увеличенія средствъ О-ва возобновить лекціонную дѣятельность. Д. И. Дубяго предложилъ это предложеніе передать въ особую комисію.

Былъ также поднятъ вопросъ о томъ, не слѣдуетъ ли принять какихъ-нибудь мѣръ для усиленія притока членскихъ взносовъ.

Затѣмъ обсуждался вопросъ о томъ, изъ какихъ источниковъ ассигновать сумму въ 300 р. на устройство новыхъ шкафовъ для библіотеки. Было предложено заимствовать эти деньги изъ лекціоннаго фонда, но В. А. Ульянинъ замѣтилъ, что нѣтъ надежды въ будущемъ ихъ вернуть и такъ какъ въ лекціонномъ фондѣ накопилась крупная сумма, то можно эти деньги взять (безвозвратно) изъ лекціоннаго фонда. Это предложеніе принято.

Послѣ этого принимается смѣта (напечатана въ этомъ выпускѣ Извѣстій).

3. Г. Секретарь докладываетъ о полученномъ отъ Римской Академіи dei Lincei запросѣ о томъ, желаетъ ли О во, чтобы изданія Академіи высылались ему безъ перерыва, не смотря на рискъ ихъ потери въ пути вслѣдствіе неправильности сообщеній въ настоящее время, или предпочитаетъ, чтобы до наступленія болѣе благопріятнаго времени посылка изданій была прервана съ тѣмъ, чтобы по возобновленіи нормальныхъ сообщеній все изданное за истекшее время было выслано сразу.—Собраніе принимаетъ второе предложеніе.

4. Докладывается предложеніе г. Ректора объ исключеніи изъ числа членовъ О-ва подданныхъ воюющихъ съ Россіей державъ. Постановлено исключить этихъ членовъ.

5. По предложенію Н. Н. Парфентьева и Н. И. Порфирьева избранъ единогласно въ дѣйствительные члены Общества преподаватель Перваго Казанскаго Реальнаго Училища *Николай Петровичъ Пономаревъ*.

6. Собраніе приступаетъ къ выборамъ должностныхъ лицъ на 1915 и 1916 годы. А. А. Яковкинъ бывшій въ истекшемъ двухлѣтіи Казначеемъ, заявляетъ, что въ виду того что ему приходится жить на Энгельгардтовской Обсерваторіи и вслѣдствіе недостатка времени онъ не сможетъ въ будущемъ исполнять обязанности Казначея.

Digitized by Google

Предсѣдателемъ Общества избирается *Д. И. Дубяго*, но онъ отказывается отъ этой должности и, несмотря на просьбы В. А. Ульянина, поддержанныя другими членами Собранія, не соглашается взять свой отказъ обратно.

Избираются: Предсѣдателемъ Общества—*Д. А. Гольдгаммеръ*, Товарищемъ Предсѣдателя—*Н. Н. Парфентьевъ*, Секретаремъ—*Ю. Г. Рабиновичъ*, Библіотекаремъ—*Н. И. Порфирьевъ*, Казначеемъ—*Н. П. Пономаревъ*, Членами Совѣта—*Е. А. Болотовъ*, *Э. Я. Вильковискій*, *Д. И. Дубяго*, *А. Л. Лаврентьевъ*, *И. А. Соколовъ*, *В А. Ульянинъ* и *А. А. Яковкинъ*.

Въ Члены Ревизіонной Комиссіи на 1915 годъ избираются *В. А. Богородицкій*, *Н. В. Нечаевъ* и *А. Ф. Самойловъ*.

Протоколъ 178-го засѣданія,

происходившаго 21-го февраля 1915-го года.

(Присутствовало 14 членовъ, 16 посторонних лицъ).

Засѣданіе открываетъ по порученію Совѣта Членъ Совѣта Д. И. Дубяго. Послѣ прочтенія и утвержденія протокола предыдущаго засѣданія Д. А. Гольгаммеръ по предложенію Д. И. Дубяго занимаетъ предсѣдательское мѣсто, благодаритъ О-во за избраніе Предсѣдателемъ и предоставляетъ слово И. А. Соколову, который произноситъ рѣчь памяти профессоровъ И. И. Боргмана и Н. А. Умова. Память ихъ почтена вставаніемъ (Рѣчь И. А. Соколова напечатана въ „Извѣстіяхъ“).

Затѣмъ Д. А. Гольгаммеръ дѣлаетъ сообщеніе „Новая теорія электромагнитныхъ явленій въ движущихся средахъ“. По поводу этого сообщенія, которое будетъ помѣщено въ „Извѣстіяхъ, дѣлаютъ нѣкоторыя замѣчанія и задаютъ вопросы Е. А. Болотовъ, Ю. Г. Рабиновичъ, В. А. Ульянинъ и Н. Н. Парфентьевъ.

Обсуждется вопросъ, поднятый въ предыдущемъ засѣданіи Н. Н. Іовлевымъ о возобновленіи публичныхъ лекцій. Послѣ обмѣна мнѣній, въ которомъ принимаютъ участіе Д. А. Гольдгаммеръ, В. А. Ульянинъ, Н. Н. Іовлевъ, Н. И. Порфирьевъ и Н. Н. Парфентьевъ, собраніе постановляетъ поручить Совѣту, при наступленіи благопріятныхъ обстоятельствъ принять мѣры къ возобновленію лекцій.

Digitized by Google

По вопросу о выигрышномъ билетѣ, принадлежащемъ О-ву, послѣ прочтенія письма М. Ѳ. Ефимова, помѣщеннаго въ протоколѣ 41-го засѣданія Общества, изъ котораго видно, что жертвователь не поставилъ относительно реализаціи билета никакихъ условій, принято слѣдующее рѣшеніе: поручить г. Казначею продать билетъ, а на вырученныя деньги купить облигаціи новаго государственнаго займа и зачисляютъ ихъ, вмѣсто билета, въ неприкосновенный капиталъ Кассы О-ва.

По вопросу о мѣрахъ для усилія поступленія членскихъ взносовъ постановлено: посылать нѣсколько разъ въ теченіе года книгу для записи членскихъ взносовъ на домъ къ живущимъ въ Казани членамъ О-ва, за которыми числятся недоимки; иногороднимъ членамъ О-ва разослать напоминаніе объ уплатѣ взносовъ съ указаніемъ на затруднительное финансовое положеніе, въ которомъ находится О-во.

Въ концѣ засѣданія Н. Н. Парфентьевъ сообщаетъ, что отъ Д. Н. Зейлигера получено письмо, въ которомъ онъ отказывается отъ участія въ Комиссіи по присужденію преміи Н. И. Лобачевскаго въ 1915 г.

Избраны въ члены Общества

1. По предложенію Д. А. Гольдгаммера и В. А Ульянина—Лаборантъ при физической лабораторіи Томскаго Технологическаго Института *Анатолій Васильевичъ Инатовъ*,

2. По предложенію Н. Н. Парфентьева и Ю. Г. Рабиновича—*Александръ Егоровичъ Артемьевъ*.

Протоколъ 179-го засѣданія,

происходившаго 7 марта 1915 года.

(Присутствовало 9 членовъ, 10 постороннихъ лицъ).

Послѣ прочтенія и утвержденія протокола предыдущаго засѣданія Предсѣдатель Д. А. Гольдгаммеръ предоставляетъ слово проф. Н. Н. Парфентьеву, который произноситъ рѣчь: „Академикъ Н. Я. Сонинъ (научная характеристика)“. По поводу этой рѣчи (которая будетъ напечатана въ „Извѣстіяхъ“) нѣсколько замѣчаній сдѣлалъ Н. И. Порфирьевъ. По предложенію Предсѣдателя Собраніе поблагодарило Н. Н. Парфентьева и почтило память Н. Я. Сонина вставаніемъ. Н. Н. Іовлевъ дѣлаетъ докладъ „О выпуклости и вогнутости кривыхъ

Digitized by Google

въ тангенціальныхъ координатахъ" (докладъ будетъ напечатанъ въ „Извѣстіяхъ")

Въ дѣловой части засѣданія избираются въ Члены Общества

1. по предложенію А. В. Васильева и Н. Н. Парфентьева— профессоръ Женскаго Педагогическаго Института въ Петроградѣ *Стефанъ Александровичъ Богомоловъ*

и 2. по предложенію Д. А. Гольдгаммера и Н. И. Порфирьева лаборантъ при физическомъ кабинетѣ Казанскаго Университета *Борисъ Ивановичъ Смирницкій.*

Н. Н. Парфентьевъ сообщаетъ, что А. В. Васильевъ изъявилъ согласіе войти въ составъ Комиссіи по присужденію преміи имени Н. И. Лобачевскаго въ 1915 году.

Н. И. Порфирьевъ предлагаетъ по случаю исполняющагося въ текущемъ году 25-лѣтія Общества выпустить юбилейный номеръ Извѣстій.

Протоколъ 180-го засѣданія,

происходившаго 11 апрѣля 1915 года.

(Присутствовало 11 членовъ, 9 посторонних лицъ).

Послѣ прочтенія и утвержденія протокола предыдущаго засѣданія Предсѣдатель Д. А. Гольдгаммеръ предоставляетъ слово Т. А. Банахевичу, который дѣлаетъ сообщеніе: „Графическое опредѣленіе геоцентрическаго разстоянія въ способѣ Ольберса" и демонстрируетъ соотвѣтственную номограмму. Д.И. Дубяго указываетъ на то, что введеніе множителя $\frac{1+M}{2}=\varrho_2/\varrho_1$ полезно не всегда, а только въ нѣкоторыхъ случаяхъ, на то что не вполнѣ выясненъ вопросъ о томъ, что не можетъ быть больше 3-хъ рѣшеній и на то, что способъ, о которомъ говорилъ докладчикъ не есть уже, собственно говоря, способъ Ольберса, т. к. искомымъ въ немъ является не ϱ_1, какъ у Ольберса, а ϱ_2; эти замѣчанія не умаляютъ, однако, значенія предложеннаго докладчикомъ метода, который даетъ очень красивое толкованіе извѣстному уже раньше рѣшенію. Д. А. Гольдгаммеръ указываетъ, что какъ уравненію изъ котораго опредѣляется ϱ_2, такъ и номограммѣ, можно дать толкованіе въ терминахъ теоріи потенціала и ставитъ вопросъ о томъ, не можетъ ли это

Digitized by Google

толкованіе принести пользу при рѣшеніи данной задачи. Замѣчанія дѣлаютъ еще А. А. Яковкинъ и Ю. Г. Рабиновичъ (Авторефератъ сообщенія Т. А. Банахевича будетъ помѣщенъ въ „Извѣстіяхъ“).

Затѣмъ Ю. Г. Рабиновичъ дѣлаетъ сообщеніе: „Къ вопросу о мощностяхъ меньшихъ, чѣмъ мощность континуума“. По поводу этаго доклада Н. Н. Парфентьевъ замѣчаетъ, что обнаружить мощности промежуточныя между мощностью натуральнаго ряда и мощностью континуума быть можетъ удастся въ будущемъ, но не при помощи разсужденій типа математической индукціи, а натолкнувшись случайно на новыя мощности, приблизительно такъ, какъ математики пришли къ понятію о континуумѣ.

По вопросу о выпускѣ юбилейнаго номера „Извѣстій Физико-Математическаго Общества“ постановлено обратиться къ членамъ Общества, а также къ лицамъ, состоявшимъ въ прежнее время членами Общества, съ просьбой о присылкѣ не позже конца октября статей для этого номера.

Digitized by Google

ОТЧЕТЪ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ

за двадцать четвертый годъ его существованія.

(Январь 1914 г.—Январь 1915 г.)

Въ теченіе отчетнаго года Физико-Математическое Общество понесло очень большую утрату въ лицѣ профессоровъ Д. Н. Зейлигера и А. П. Котельникова съ переводомъ ихъ въ другіе города: первый, бывшій Предсѣдатель Общества, перешелъ на службу въ Петроградскій Неврологическій Институтъ, а второй, Тов. Предсѣдателя Общества, въ Кіевъ въ Университетъ св. Владиміра.

Благодаря этому обстоятельству Общество съ іюня прошлаго года оставалось безъ президіума. Обязанности президіума несли временно старшій членъ Совѣта Общества заслуж. орд. проф. Д. И. Дубяго и секретарь Общества проф. Н. Н. Парфентьевъ.

2. За отчетный годъ Общество избрало слѣдующихъ лицъ своими дѣйствительными членами (6 лицъ):

1) *Андреевъ* Александръ Григорьевичъ, Капитанъ 6-го Стрѣлковаго Сибирскаго полка (съ 7 декабря 1914 г.).

2. *Грабакъ* Мирославъ Карловичъ, ассистентъ Казанской Астрономической Обсерваторіи (съ 8 февраля 1914 г.)

3. *Кутиловъ* Василій Николаевичъ, преподаватель математики Новоузенскаго Реальнаго училища (съ 8-го февраля 1914 г.)

4. Священникъ *Исаія Максимовъ* изъ села Карамышева Чеборскаго уѣзда (съ 7-годекабря 1914 г.)

5. *Рынинъ* Николай Алексѣевичъ, адъюнктъ-профессоръ

Digitized by Google

Института Инженеровъ Путей Сообщенія въ Петроградѣ (съ 10 мая 1914 г.)

6. *Хрусталевъ* Михаилъ Константиновичъ преподаватель женской гимназіи имени г-жи Ряхиной въ Казани (съ 7-го декабря 1914 г.)

Если прибавить этихъ 6 новыхъ членовъ и выключить двухъ за неимѣніемъ о нихъ свѣдѣній, то Общество будетъ имѣть всего къ 1-му январю 1915 года 9 почетныхъ членовъ, 96 дѣйствительныхъ и 8 иностранныхъ членовъ.

Въ общемъ можно констатировать скорѣй убыль за послѣднее десятилѣтіе въ числѣ членовъ Общества.

3. Въ теченіе отчетнаго года Общество внимательно и точно изслѣдовано финансовое и матеріальное положеніе Общества по иниціативѣ члена Совѣта Общества проф. Д. И. Дубяго. Принимая въ вниманіе тяжелое матеріальное положеніе Общества и сознавая въ тоже время высокое значеніе дѣятельности Общества какъ для русской науки, такъ и для иноземной, Общество можетъ сказать, что оно имѣетъ какъ государственное значеніе, такъ и интернаціональное. По порученію Совѣта Общества было предложено профессорамъ Д. Н. Зейлигеру и Н. Н. Парфентьеву составить особую историческую записку на имя Министерства Народнаго Просвѣщенія съ ходатайствомъ передъ Министерствомъ о ежегодной субсидіи Обществу въ 3000 рублей.

Записка была составлена и отправлена по назначенію, но отвѣтъ на ходатайство еще до сихъ поръ изъ Министерства не полученъ.

4. Для увѣковѣченія имени геніальнаго покойнаго математика Франціи *Henri Poincaré* въ Парижѣ образовался особый „*Comité International de la Médaille et de la Fondation Henri Poincaré*“.

Общество приняло участіе въ этомъ дѣлѣ: проф. Н. Н. Парфентьевъ организовалъ сборъ между членами; собрано было 100 франковъ, которыя и отправлены имъ на имя „Trésorier du Comité „m-eur *E. Lebon*“; сумма эта даетъ право Обществу получить особую медаль за взносъ больше 50 франковъ.

5. Въ теченіе отчетнаго года были сдѣланы слѣдующія сообщенія въ засѣданіяхъ Общества разными лицами:

I) Проф. *Д. И. Дубяго.* Памяти покойнаго проф. Кэмбриджскаго Университета *Robert Ball'a.*

II) *Т. А. Банахевичъ.* а) Къ вопросу о невязкѣ при опредѣленіи измѣненія широтъ. b) О годовой невязкѣ при

Digitized by Google

опредѣленія географической широты. c) О долготѣ луны въ настоящее время.

III) *М. А. Грачевъ.* Къ вопросу о невязкѣ въ наблюденіяхъ широты.

IV) Проф. *Д. Н. Зейлигеръ.* Задача о трехъ тѣлахъ (по поводу работъ финскаго ученаго *Sundmann*'а).

V) *Н. А. Демчинскій.* Динамика атмосферы.

VI) *И. А. Износковъ.* О магическихъ квадратахъ (реферировалъ Н. Н. Парфентьевъ).

VII) *Агрономовъ.* О нѣкоторыхъ неопредѣленныхъ уравненіяхъ, рѣшаемыхъ въ цѣлыхъ числахъ (*два* сообщенія; реферированы Н. Н. Парфентьевымъ).

VIII) *Д. Крюковскій.* О четырехмѣрномъ пространствѣ (реферировано Ю. Г. Рабиновичемъ).

IX) *О. Житомірскій.* О кривизнѣ многогранныхъ поверхностей (реферировано Ю. Г. Рабиновичемъ).

X) *Н. Н. Парфентьевъ.* a) О магическихъ квадратахъ. b) Разборъ работы *П. К. Соколова.* „О пятомъ постулатѣ Эвклида".

XI) *Ю. Г. Рабиновичъ.* О максимальномъ свойствѣ окружности.

XII) *Fichtenholz.* Sur la dérivation des intégrales définies. (Реферировано Ю. Г. Рабиновичемъ).

XIII) *А. А. Яковкинъ.* О кратныхъ рѣшеніяхъ въ способѣ Ольберса.

6. 22-го октября 1914 года истекъ срокъ представленій авторами сочиненій на премію имени *Н. И. Лобачевскаго,* присужденіе коей должно состояться 22 октября 1915 года.

На конкурсъ поступили работы отъ одного только лица проф. Лейпцигскаго университета *Dr. Paul Koebe* (22 брошюры и одна рукопись на сюжеты объ „*Uniformisierung der Funktionen*). Послѣ обсужденія вопроса о томъ, принимать-ли сочиненіе на конкурсъ отъ лица подданнаго воюющей съ нами державы, было постановлено оставить вопросъ о конкурсѣ открытымъ.

7. Въ теченіе отчетнаго года вышли въ свѣтъ только лишь два номера „Извѣстій Физико-Мат. Общества" тома XX-го за 1914-ый годъ; но № 3 уже почти готовъ, а № 4 составляется; перерыва въ выходѣ томовъ не будетъ, такъ какъ томъ XXI-ый за 1915 годъ начнетъ выходить въ свѣтъ весной.

Digitized by Google

8. Администрація Общества, выбранная на 2 года въ 1913-мъ году, состояла изъ слѣдующихъ лицъ: Предсѣдатель — проф. *Д. Н. Зейлигеръ*, Тов. Предсѣдателя—проф. *А. П. Котельниковъ*, Секретарь — *Н. Н. Парфентьевъ*, Библіотекарь—прив.-доц. *Н. И. Порфирьевъ*, Казначей Общества — ассистентъ Астрономической Обсерваторіи *А. А. Яковкинъ*; членами Совѣта Общества были: проф. *Д. И. Дубяго*, проф. *Д. А. Гольдгаммеръ*, проф. *В. А. Ульянинъ* и преподаватель Казанской 3-ей мужской гимназіи *Э. Я. Вильковискій*.

Членами ревизіонной Комиссіи были: проф. *В. А. Богородицкій*, прив.-доц. *А. Л. Лаврентьевъ* и прив.-доц. *Ю. Г. Рабиновичъ*.

Казань, 5 февраля 1915 г.

Секретарь Общества проф. *Н. Н. Парфентьевъ*.

Digitized by Google

Протоколъ

ЗАСѢДАНІЯ РЕВИЗІОННОЙ КОМИССІИ КАЗАНСКАГО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА 7 ФЕВРАЛЯ 1915 ГОДА.

Ревизіонная комиссія, обревизовавъ дѣлопроизводство отчетнаго 1914 года, нашла:

I. Дѣлопроизводство ведется удовлетворительно, каждая статья прихода и расхода подтверждена оправдательными документами.

II. Отчетъ составленъ правильно.

III. На 1 января 1915 года имущество Общества представлялось въ слѣдующемъ видѣ:

1) $3^1/_2\%$ листовъ Госуд. Двор. Зем. Банка на сумму 9650 руб. номинально, удостовѣряемую роспис憂 о храненіи въ Казанскомъ отдѣленіи Госуд. Банка за № 58284.

2) 4% Государ. ренты на сумму 7900 руб. номинально, хранящейся въ Казанскомъ отдѣленіи Государ. Банка, на что имѣются росписки за слѣдующими №№:

№	58283 на	7500 р.
№	58582 на	100 р.
№	59346 на	200 р.
№	59366 на	100 р.
	Итого	7900 р.

3) Одинъ 5% билетъ 2-го внутренняго съ выигрышами займа, серія 02190, № 45 на сумму 100 руб. номинально, хранящійся въ Казанск. отдѣленіи Госуд. Банка, на что имѣется расписка за № 50806.

4) Наличныхъ денегъ на сумму 934 руб. 38 коп., изъ которыхъ 902 руб. 17 к. хранятся въ сберегательной кассѣ Казанск. отдѣл. Госуд. Банка по книжкѣ № 33415, а 32 руб. 21 коп. находятся на рукахъ у г. казначея.

Члены ревизіонной комиссіи { *Ю. Рабиновичъ.*
А. Лаврентьевъ.

Digitized by Google

ДЕНЕЖНЫЙ ОТЧЕТЪ

КАЗНАЧЕЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА ЗА 24-Й ГОДЪ ЕГО СУЩЕСТВОВАНІЯ

(Январь 1914—Январь 1915 г.)

I. Касса Общества.

На 1 января 1914 года въ кассѣ Общества состояло:

1) **Наличными деньгами** 78.71

2) **Неприкосновенный капиталъ**

a) **Четыре закл. листа** ($3^1/_2\%$) **Г. Д. З. Банка. по 100 р.** 400.00

b) **Билетъ 2-го съ выигрыш. займа** (сер. 02190, № 45) 100.00

Итого 578.71

Приходъ.

A. Членскихъ взносовъ отъ 20 лицъ 60.00

B. Проценты на проц. бумаги 18.75

C. Подписка на „Извѣстія“ и продажа изданій Общества 49.55

Итого . . . 128.30

Digitized by Google

Расходъ.

A. Страховка выигр. билета и храненіе бумагъ .	22.31
B. Жалованіе служителю Общества	60.00
C. Печатаніе диплома	8.00
D. Почтовые и мелкіе расходы	19.08
Итого	109.39

На 1 января 1915 года въ кассѣ Общества состоитъ:

I. Неприкосновенный капиталъ.

1) Четыре закл. листа Г. Д. З. Банка ($3^1/_2\%$) по 100 р.	400.00
2) Билетъ 2-го съ выигрыш. займа (сер. 02190 № 45)	100.00
Итого нарицательно . . .	500.00

II. Собственно въ Кассѣ Общества.

Наличными деньгами	97 62
Итого	97.62

II. Лекціонный фондъ.

На 1-е января 1914 года состояло	
1) Наличными деньгами	48.87
2) Заклад. лист. Г. Д. З. Банка ($3^1/_2\%$) . .	800.00
Итого	848.87

Digitized by Google

Приходъ.

Проценты	28.00
Итого	28.00

Расходъ.

1) За храненіе процентныхъ бумагъ	0.32
Итого	0.32

На 1-е января 1915 года состоитъ:

1) Наличными деньгами	76.55
2) Восемь закл. листовъ Г. Д. З. Б. ($3^1/_2\%$) на	800.00
Итого	876.55

III. Фондъ Н. И. Лобачевскаго.

На 1-е января 1915 года въ фондѣ состояло:

1) Наличными деньгами	480.96
2) Закл. листовъ Г. Д. З. Б. ($3^1/_2\%$) на . .	7400.00
Итого	7880.96

Приходъ.

А. Проценты на процентныя бумаги	264.25
В. Проценты по сбер. кассѣ	20.25
Итого	284.50

Digitized by Google

Расходъ.

А. Покупка одного $3^1/_2\%$ закл. листа Г. Д. З. Б. на 150 р.	124.98
В. Храненіе процентныхъ бумагъ	3.59
Итого	128.57

На 1-е января 1915 года состоитъ:

1) Наличными деньгами	636.89
2) Закл. листовъ Г. Д. З. Б. ($3^1/_2\%$) на . . .	7550.00
Итого	8186.89

IV. Капиталъ для учрежденія астрономической преміи проф. Д. И. Дубяго.

На 1-е января 1914 года состояло

1) Наличными деньгами	57.83
2) 4% Государств. ренты на	7500.00
Итого	7557.83

Приходъ.

1) Проценты на процентныя бумаги	290.70
2) Проценты по сберегат. кассѣ	2.81
Итого	293.51

Расходъ.

А. Покупка 4% Гос. ренты на 400 р.	349.65
В. Храненіе процентныхъ бумагъ	4.61
Итого	354.26

Digitized by Google

На 1-е января 1915 года состоитъ:

1) Расходъ въ счетъ будущаго года	2.92
2) 4% Госуд. ренты на	7900.00
Итого	7897.08

V. Капиталъ библіотеки Лобачевскаго, собранный по поводу празднованія двадцатипятилѣтія ученопедагогической дѣятельности проф. А. В. Васильева.

На 1-е января 1914 года состояло:

1) Наличными деньгами	95.10
2) Закл. листовъ Г. Д. З. Б. ($3^1/_2$%)	900.00
Итого	995.10

Приходъ

Проценты	31.50
Итого	31.50

Расходъ.

За храненіе процентныхъ бумагъ	0.36
Итого	0.36

На 1-е января 1915 года состоитъ:

1) Наличными деньгами	126.24
2) Закл. лист. Г. Д. З. Б. ($3^1/_2$%)	900.00
Итого	1026.24

Казначей *А. Яковкинъ.*

Члены ревизіонной комиссіи: *А. Лаврентьевъ.*

Ю. Рабиновичъ.

Digitized by Google

Смѣта приходовъ и расходовъ по Кассѣ О-ва на 1915 годъ, принятая въ засѣданіи 7 февраля 1915 г.

ПРИХОДЪ.

Остатокъ на 1-ое января 1915 г. . . .	97 руб.
Членскіе взносы.	60 руб.
% съ бумагъ.	18 руб.
Продажа изданій.	50 руб.
	225 руб.

РАСХОДЪ.

Почтовые расходы.	20 руб.
Страховка и храненіе цѣнныхъ бумагъ. .	30 руб.
Расходъ по библіотекѣ.	50 руб.
Жалованіе служителю.	60 руб.
Печатаніе.	50 руб.
Мелкіе расходы.	15 руб.
	225 руб.

Digitized by Google

гдѣ подъ Π'_Σ можно понимать производную наиболѣе общей функціи, всѣ пути развѣтвленія которой могутъ быть сведены на безконечно малые контуры. Вмѣсто независимаго перемѣннаго въ нее введена функція $P(x)$. $v_{1,1}$ есть частный интегралъ уравненія (6), послѣ этого въ $v_{1,1}$ введена вмѣсто аргумента функція $\Pi_\Sigma P(x)$.

Функціи $v_{1,0}$, $v_{1,1}$ многозначны. Онѣ испытываютъ измѣненія опредѣленія при обходѣ нѣкоторыхъ, несводящихся на безконечно малые, путей.

Замѣна x черезъ $\Pi_\Sigma P(x)$ еще болѣе усложняетъ ихъ свойства.

Единственнымъ ограниченіемъ для функціи f является то, что существуетъ любое, но *конечное* число критическихъ путей несводящихся на безконечно малый контуръ. Униформизація функціи безконечнаго рода можетъ быть выполнена путемъ либо соотвѣтствующихъ аутоморфныхъ функцій, либо посредствомъ введенія исчислимаго числа аутоморфныхъ функцій рода p конечнаго, въ частности рода единица.

A_2 остается въ обоихъ способахъ рода нуль.

Здѣсь умѣстно объяснить откуда берутся у функціи $P_1 f A$ развѣтвленія, которыхъ нѣтъ ни въ функціи f, ни въ P_1, ни въ A.

Вводя P_1 и A мы въ сущности замѣнили многозначную функцію другою функціей такъ, чтобы каждый листъ ея являлся функціей *одного* листа у нѣкоторой полиморфной функціи. Но эта зависимость можетъ имѣть особенныя точки, а именно тѣ значенія, у которыхъ однозначная зависимость между листами нарушается и при обходѣ которыхъ тотъ же листъ функціи f становится функціей другого листа функціи полиморфной.

23 декабря 1915 года.

Ф. Сирвинтъ.

Digitized by Google

II.

ЛѢТОПИСЬ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

при ИМПЕРАТОРСКОМЪ Казанскомъ Университетѣ.

Протоколъ 177-го засѣданія,

происходившаго 7-го февраля 1915 года.

(Присутствовали 16 членовъ).

Засѣданіе происходило подъ предсѣдательствомъ Члена Совѣта Д. И. Дубяго.

1. Былъ заслушанъ отчетъ г. Секретаря о дѣятельности О-ва за 1914 годъ и отчетъ г. Казначея. За отсутствіемъ г. Библіотекаря отчетъ по библіотекѣ былъ прочитанъ г. Секретаремъ. Послѣ оглашенія протокола засѣданія Ревизіонной Комиссіи отчеты были утверждены. (Отчеты и протоколъ засѣданія Рев. Ком. напетатаны въ этомъ выпускѣ Извѣстій).

2. Во время обсужденія смѣты на 1915 годъ былъ поднятъ вопросъ о накопившемся за 1912—1914 годы долгѣ Университетской типографіи въ размѣрѣ 250 рублей 50 коп. Было постановлено уплатить ту часть этого долга, которая обязана своимъ происхожденіемъ печатанію отчета о присужденіи преміи имени Н. И. Лобачевскаго—изъ процентовъ съ фонда Н. И. Лобачевскаго и относить также и въ будущемъ расходы на печатаніе отчетовъ о присужденіи премій на счетъ этого фонда.

Проф. В. А. Ульянинъ предложилъ, въ виду затруднительнаго финансоваго положенія О ва, просить А. В. Васильева похлопотать въ Министерствѣ объ ускореніи движенія вопро-

Digitized by Google

са о субсидіи О-ву. Онъ же обратилъ вниманіе на то, что выигрышный билетъ, принадлежащій О-ву, обременяетъ кассу О-ва, т. к. необходимо тратить каждый разъ возрастающія средства на его страховку. По предложенію Д. И. Дубяго вопросъ о билетѣ рѣшено отложить до наведенія о немъ справокъ.

Н. Н. Іовлевъ предложилъ для увеличенія средствъ О-ва возобновить лекціонную дѣятельность. Д. И. Дубяго предложилъ это предложеніе передать въ особую комисію.

Былъ также поднятъ вопросъ о томъ, не слѣдуетъ ли принять какихъ-нибудь мѣръ для усиленія притока членскихъ взносовъ.

Затѣмъ обсуждался вопросъ о томъ, изъ какихъ источниковъ ассигновать сумму въ 300 р. на устройство новыхъ шкафовъ для библіотеки. Было предложено заимствовать эти деньги изъ лекціоннаго фонда, но В. А. Ульянинъ замѣтилъ, что нѣтъ надежды въ будущемъ ихъ вернуть и такъ какъ въ лекціонномъ фондѣ накопилась крупная сумма, то можно эти деньги взять (безвозвратно) изъ лекціоннаго фонда. Это предложеніе принято.

Послѣ этого принимается смѣта (напечатана въ этомъ выпускѣ Извѣстій).

3. Г. Секретарь докладываетъ о полученномъ отъ Римской Академіи dei Lincei запросѣ о томъ, желаетъ ли О во, чтобы изданія Академіи высылались ему безъ перерыва, не смотря на рискъ ихъ потери въ пути вслѣдствіе неправильности сообщеній въ настоящее время, или предпочитаетъ, чтобы до наступленія болѣе благопріятнаго времени посылка изданій была прервана съ тѣмъ, чтобы по возобновленіи нормальныхъ сообщеній все изданное за истекшее время было выслано сразу.—Собраніе принимаетъ второе предложеніе.

4. Докладывается предложеніе г. Ректора объ исключеніи изъ числа членовъ О-ва подданныхъ воюющихъ съ Россіей державъ. Постановлено исключить этихъ членовъ.

5. По предложенію П. Н. Парфентьева и Н. И. Порфирьева избранъ единогласно въ дѣйствительные члены Общества преподаватель Перваго Казанскаго Реальнаго Училища *Николай Петровичъ Пономаревъ*.

6. Собраніе приступаетъ къ выборамъ должностныхъ лицъ на 1915 и 1916 годы. А. А. Яковкинъ бывшій въ истекшемъ двухлѣтіи Казначеемъ, заявляетъ, что въ виду того что ему приходится жить на Энгельгардтовской Обсерваторіи и вслѣдствіе недостатка времени онъ не сможетъ въ будущемъ исполнять обязанности Казначея.

Digitized by Google

Предсѣдателемъ Общества избирается *Д. И. Дубяго*, но онъ отказывается отъ этой должности и, несмотря на просьбы В. А. Ульянина, поддержанныя другими членами Собранія, не соглашается взять свой отказъ обратно.

Избираются: Предсѣдателемъ Общества—*Д. А. Гольдгаммеръ*, Товарищемъ Предсѣдателя—*Н. Н. Парфентьевъ*, Секретаремъ—*Ю. Г. Рабиновичъ*, Библіотекаремъ—*Н. И. Порфирьевъ*, Казначеемъ—*Н. П. Пономаревъ*, Членами Совѣта—*Е. А. Болотовъ*, *Э. Я. Вильковискій*, *Д. И. Дубяго*, *А. Л. Лаврентьевъ*, *И. А. Соколовъ*, *В А. Ульянинъ* и *А. А. Яковкинъ*.

Въ Члены Ревизіонной Комиссіи на 1915 годъ избираются *В. А. Богородицкій*, *П. В. Нечаевъ* и *А. Ф. Самойловъ*.

Протоколъ 178-го засѣданія,

происходившаго 21-го февраля 1915-го года.

(Присутствовало 14 членовъ, 16 посторонних лицъ).

Засѣданіе открываетъ по порученію Совѣта Членъ Совѣта Д. И. Дубяго. Послѣ прочтенія и утвержденія протокола предыдущаго засѣданія Д. А. Гольгаммеръ по предложенію Д. И. Дубяго занимаетъ предсѣдательское мѣсто, благодаритъ О-во за избраніе Предсѣдателемъ и предоставляетъ слово И. А. Соколову, который произноситъ рѣчь памяти профессоровъ И. И. Боргмана и Н. А. Умова. Память ихъ почтена вставаніемъ (Рѣчь И. А. Соколова напечатана въ „Извѣстіяхъ“).

Затѣмъ Д. А. Гольгаммеръ дѣлаетъ сообщеніе „Новая теорія электромагнитныхъ явленій въ движущихся средахъ“. По поводу этого сообщенія, которое будетъ помѣщено въ „Извѣстіяхъ, дѣлаютъ нѣкоторыя замѣчанія и задаютъ вопросы Е. А. Болотовъ, Ю. Г. Рабиновичъ, В. А. Ульянинъ и Н. Н. Парфентьевъ.

Обсуждется вопросъ, поднятый въ предыдущемъ засѣданіи Н. Н. Іовлевымъ о возобновленіи публичныхъ лекцій. Послѣ обмѣна мнѣній, въ которомъ принимаютъ участіе Д. А. Гольдгаммеръ, В. А. Ульянинъ, Н. Н. Іовлевъ, Н. И. Порфирьевъ и Н. Н. Парфентьевъ, собраніе постановляетъ поручить Совѣту, при наступленіи благопріятныхъ обстоятельствъ принять мѣры къ возобновленію лекцій.

Digitized by Google

По вопросу о выигрышномъ билетѣ, принадлежащемъ О-ву, послѣ прочтенія письма М. Ѳ. Ефимова, помѣщеннаго въ протоколѣ 41-го засѣданія Общества, изъ котораго видно, что жертвователь не поставилъ относительно реализаціи билета никакихъ условій, принято слѣдующее рѣшеніе: поручить г. Казначею продать билетъ, а на вырученныя деньги купить облигаціи новаго государственнаго займа и зачисляютъ ихъ, вмѣсто билета, въ неприкосновенный капиталъ Кассы О-ва.

По вопросу о мѣрахъ для усиленія поступленія членскихъ взносовъ постановлено: посылать нѣсколько разъ въ теченіе года книгу для записи членскихъ взносовъ на домъ къ живущимъ въ Казани членамъ О-ва, за которыми числятся недоимки; иногороднимъ членамъ О-ва разослать напоминаніе объ уплатѣ взносовъ съ указаніемъ на затруднительное финансовое положеніе, въ которомъ находится О-во.

Въ концѣ засѣданія Н. Н. Парфентьевъ сообщаетъ, что отъ Д. Н. Зейлигера получено письмо, въ которомъ онъ отказывается отъ участія въ Комиссіи по присужденію преміи Н. И. Лобачевскаго въ 1915 г.

Избраны въ члены Общества

1. По предложенію Д. А. Гольдгаммера и В. А Ульянина—Лаборантъ при физической лабораторіи Томскаго Технологическаго Института *Анатолій Васильевичъ Ипатовъ*,

2. По предложенію Н. Н. Парфентьева и Ю. Г. Рабиновича—*Александръ Егоровичъ Артемьевъ*.

Протоколъ 179-го засѣданія,

происходившаго 7 марта 1915 года.

(Присутствовало 9 членовъ, 10 постороннихъ лицъ).

Послѣ прочтенія и утвержденія протокола предыдущаго засѣданія Предсѣдатель Д. А. Гольдгаммеръ предоставляетъ слово проф. Н. Н. Парфентьеву, который произноситъ рѣчь: „Академикъ Н. Я. Сонинъ (научная характеристика)“. По поводу этой рѣчи (которая будетъ напечатана въ „Извѣстіяхъ“) нѣсколько замѣчаній сдѣлалъ Н. И. Порфирьевъ. По предложенію Предсѣдателя Собраніе поблагодарило Н. Н. Парфентьева и почтило память Н. Я. Сонина вставаніемъ. Н. Н. Іовлевъ дѣлаетъ докладъ „О выпуклости и вогнутости кривыхъ

Digitized by Google

въ тангенціальныхъ координатахъ" (докладъ будетъ напечатанъ въ „Извѣстіяхъ")

Въ дѣловой части засѣданія избираются въ Члены Общества

1. по предложенію А. В. Васильева и Н. Н. Парфентьева— профессоръ Женскаго Педагогическаго Института въ Петроградѣ *Стефанъ Александровичъ Богомоловъ*

и 2. по предложенію Д. А. Гольдгаммера и Н. И. Порфирьева лаборантъ при физическомъ кабинетѣ Казанскаго Университета *Борисъ Ивановичъ Смирницкій.*

Н. Н. Парфентьевъ сообщаетъ, что А. В. Васильевъ изъявилъ согласіе войти въ составъ Комиссіи по присужденію преміи имени Н. И. Лобачевскаго въ 1915 году.

Н. И. Порфирьевъ предлагаетъ по случаю исполняющагося въ текущемъ году 25-лѣтія Общества выпустить юбилейный номеръ Извѣстій.

Протоколъ 180-го засѣданія,

происходившаго 11 апрѣля 1915 года.

(Присутствовало 11 членовъ, 9 посторонних лицъ).

Послѣ прочтенія и утвержденія протокола предыдущаго засѣданія Предсѣдатель Д. А. Гольдгаммеръ предоставляетъ слово Т. А. Банахевичу, который дѣлаетъ сообщеніе: „Графическое опредѣленіе геоцентрическаго разстоянія въ способѣ Ольберса" и демонстрируетъ соотвѣтственную номограмму. Д.И. Дубяго указываетъ на то, что введеніе множителя $\frac{1+M}{2}=\varrho_2/\varrho_1$ полезно не всегда, а только въ нѣкоторыхъ случаяхъ, на то что не вполнѣ выясненъ вопросъ о томъ, что не можетъ быть больше 3-хъ рѣшеній и на то, что способъ, о которомъ говорилъ докладчикъ не есть уже, собственно говоря, способъ Ольберса, т. к. искомымъ въ немъ является не ϱ_1, какъ у Ольберса, а ϱ_2; эти замѣчанія не умаляютъ, однако, значенія предложеннаго докладчикомъ метода, который даетъ очень красивое толкованіе извѣстному уже раньше рѣшенію. Д. А. Гольдгаммеръ указываетъ, что какъ уравненію изъ котораго опредѣляется ϱ_2, такъ и номограммѣ, можно дать толкованіе въ терминахъ теоріи потенціала и ставитъ вопросъ о томъ, не можетъ ли это

Digitized by Google

толкованіе принести пользу при рѣшеніи данной задачи. Замѣчанія дѣлаютъ еще А. А. Яковкинъ и Ю. Г. Рабиновичъ (Авторефератъ сообщенія Т. А. Банахевича будетъ помѣщенъ въ „Извѣстіяхъ“).

Затѣмъ Ю. Г. Рабиновичъ дѣлаетъ сообщеніе: „Къ вопросу о мощностяхъ меньшихъ, чѣмъ мощность континуума“. По поводу этаго доклада Н. Н. Парфентьевъ замѣчаетъ, что обнаружить мощности промежуточныя между мощностью натуральнаго ряда и мощностью континуума быть можетъ удастся въ будущемъ, но не при помощи разсужденій типа математической индукціи, а натолкнувшись случайно на новыя мощности, приблизительно такъ, какъ математики пришли къ понятію о континуумѣ.

По вопросу о выпускѣ юбилейнаго номера „Извѣстій Физико-Математическаго Общества“ постановлено обратиться къ членамъ Общества, а также къ лицамъ, состоявшимъ въ прежнее время членами Общества, съ просьбой о присылкѣ не позже конца октября статей для этого номера.

Digitized by Google

ОТЧЕТЪ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ

за двадцать четвертый годъ его существованія.

(Январь 1914 г.—Январь 1915 г.)

Въ теченіе отчетнаго года Физико-Математическое Общество понесло очень большую утрату въ лицѣ профессоровъ Д. Н. Зейлигера и А. П. Котельникова съ переводомъ ихъ въ другіе города: первый, бывшій Предсѣдатель Общества, перешелъ на службу въ Петроградскій Неврологическій Институтъ, а второй, Тов. Предсѣдателя Общества, въ Кіевъ въ Университетъ св. Владиміра.

Благодаря этому обстоятельству Общество съ іюня прошлаго года оставалось безъ президіума. Обязанности президіума несли временно старшій членъ Совѣта Общества заслуж. орд. проф. Д. И. Дубяго и секретарь Общества проф. Н. Н. Парфентьевъ.

2. За отчетный годъ Общество избрало слѣдующихъ лицъ своими дѣйствительными членами (6 лицъ):

1) *Андреевъ* Александръ Григорьевичъ, Капитанъ 6-го Стрѣлковаго Сибирскаго полка (съ 7 декабря 1914 г.).

2. *Грабакъ* Мирославъ Карловичъ, ассистентъ Казанской Астрономической Обсерваторіи (съ 8 февраля 1914 г.)

3. *Кутиловъ* Василій Николаевичъ, преподаватель математики Новоузенскаго Реальнаго училища (съ 8-го февраля 1914 г.)

4. Священникъ *Исаія Максимовъ* изъ села Карамышева Чеборскаго уѣзда (съ 7-годекабря 1914 г.)

5. *Рынинъ* Николай Алексѣевичъ, адъюнктъ-профессоръ

Digitized by Google

Института Инженеровъ Путей Сообщенія въ Петроградѣ (съ 10 мая 1914 г.)

6. *Хрусталевъ* Михаилъ Константиновичъ преподаватель женской гимназіи имени г-жи Ряхиной въ Казани (съ 7-го декабря 1914 г.)

Если прибавить этихъ 6 новыхъ членовъ и выключить двухъ за неимѣніемъ о нихъ свѣдѣній, то Общество будетъ имѣть всего къ 1-му январю 1915 года 9 почетныхъ членовъ, 96 дѣйствительныхъ и 8 иностранныхъ членовъ.

Въ общемъ можно констатировать скорѣй убыль за послѣднее десятилѣтіе въ числѣ членовъ Общества.

3. Въ теченіе отчетнаго года Общество внимательно и точно изслѣдовано финансовое и матеріальное положеніе Общества по иниціативѣ члена Совѣта Общества проф. Д. И. Дубяго. Принимая въ вниманіе тяжелое матеріальное положеніе Общества и сознавая въ тоже время высокое значеніе дѣятельности Общества какъ для русской науки, такъ и для иноземной, Общество можетъ сказать, что оно имѣетъ какъ государственное значеніе, такъ и интернаціональное. По порученію Совѣта Общества было предложено профессорамъ Д. Н. Зейлигеру и Н. Н. Парфентьеву составить особую историческую записку на имя Министерства Народнаго Просвѣщенія съ ходатайствомъ передъ Министерствомъ о ежегодной субсидіи Обществу въ 3000 рублей.

Записка была составлена и отправлена по назначенію, но отвѣтъ на ходатайство еще до сихъ поръ изъ Министерства не полученъ.

4. Для увѣковѣченія имени геніальнаго покойнаго математика Франціи *Henri Poincaré* въ Парижѣ образовался особый „*Comité International de la Médaille et de la Fondation Henri Poincaré*“.

Общество приняло участіе въ этомъ дѣлѣ: проф. Н. Н. Парфентьевъ организовалъ сборъ между членами; собрано было 100 франковъ, которыя и отправлены имъ на имя „Trésorier du Comité „m-eur *E. Lebon*“; сумма эта даетъ право Обществу получить особую медаль за взносъ больше 50 франковъ.

5. Въ теченіе отчетнаго года были сдѣланы слѣдующія сообщенія въ засѣданіяхъ Общества разными лицами:

I) Проф. *Д. И. Дубяго.* Памяти покойнаго проф. Кэмбриджскаго Университета *Robert Ball'a.*

II) *Т. А. Банахевичъ.* а) Къ вопросу о невязкѣ при опредѣленіи измѣненія широтъ. b) О годовой невязкѣ при

Digitized by Google

опредѣленія географической широты. c) О долготѣ луны въ настоящее время.

III) *М. А. Грачевъ.* Къ вопросу о невязкѣ въ наблюденіяхъ широты.

IV) Проф. *Д. Н. Зейлигеръ.* Задача о трехъ тѣлахъ (по поводу работъ финскаго ученаго *Sundmann*'а).

V) *Н. А. Демчинскій.* Динамика атмосферы.

VI) *И. А. Износковъ.* О магическихъ квадратахъ (реферировалъ Н. Н. Парфентьевъ).

VII) *Агрономовъ.* О нѣкоторыхъ неопредѣленныхъ уравненіяхъ, рѣшаемыхъ въ цѣлыхъ числахъ (*два* сообщенія; реферированы Н. Н. Парфентьевымъ).

VIII) *Д. Крюковскій.* О четырехмѣрномъ пространствѣ (реферировано Ю. Г. Рабиновичемъ).

IX) *О. Житомірскій.* О кривизнѣ многогранныхъ поверхностей (реферировано Ю. Г. Рабиновичемъ).

X) *Н. Н. Парфентьевъ.* a) О магическихъ квадратахъ. b) Разборъ работы *П. К. Соколова.* „О пятомъ постулатѣ Эвклида".

XI) *Ю. Г. Рабиновичъ.* О максимальномъ свойствѣ окружности.

XII) *Fichtenholz.* Sur la dérivation des intégrales définies. (Реферировано Ю. Г. Рабиновичемъ).

XIII) *А. А. Яковкинъ.* О кратныхъ рѣшеніяхъ въ способѣ Ольберса.

6. 22-го октября 1914 года истекъ срокъ представленій авторами сочиненій на премію имени *Н. И. Лобачевскаго*, присужденіе коей должно состояться 22 октября 1915 года.

На конкурсъ поступили работы отъ одного только лица проф. Лейпцигскаго университета *Dr. Paul Koebe* (22 брошюры и одна рукопись на сюжеты объ „*Uniformisierung der Funktionen*). Послѣ обсужденія вопроса о томъ, принимать-ли сочиненіе на конкурсъ отъ лица подданнаго воюющей съ нами державы, было постановлено оставить вопросъ о конкурсѣ открытымъ.

7. Въ теченіе отчетнаго года вышли въ свѣтъ только лишь два номера „Извѣстій Физико-Мат. Общества" тома XX-го за 1914-ый годъ; но № 3 уже почти готовъ, а № 4 составляется; перерыва въ выходѣ томовъ не будетъ, такъ какъ томъ XXI-ый за 1915 годъ начнетъ выходитьвъ свѣтъ весной.

Digitized by Google

8. Администрація Общества, выбранная на 2 года въ 1913-мъ году, состояла изъ слѣдующихъ лицъ: Предсѣдатель — проф. *Д. Н. Зейлигеръ*, Тов. Предсѣдателя—проф. *А. П. Котельниковъ*, Секретарь — *Н. Н. Парфентьевъ*, Библіотекарь—прив.-доц. *Н. И. Порфирьевъ*, Казначей Общества — ассистентъ Астрономической Обсерваторіи *А. А. Яковкинъ*; членами Совѣта Общества были: проф. *Д. И. Дубяго*, проф. *Д. А. Гольдгаммеръ*, проф. *В. А. Ульянинъ* и преподаватель Казанской 3-ей мужской гимназіи *Э. Я. Вильковискій*.

Членами ревизіонной Комиссіи были: проф. *В. А. Богородицкій*, прив.-доц. *А. Л. Лаврентьевъ* и прив.-доц. *Ю. Г. Рабиновичъ*.

Казань, 5 февраля 1915 г.

Секретарь Общества проф. *Н. Н. Парфентьевъ*.

Digitized by Google

Протоколъ

ЗАСѢДАНІЯ РЕВИЗІОННОЙ КОМИССІИ КАЗАНСКАГО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА 7 ФЕВРАЛЯ 1915 ГОДА.

Ревизіонная комиссія, обревизовавъ дѣлопроизводство отчетнаго 1914 года, нашла:

I. Дѣлопроизводство ведется удовлетворительно, каждая статья прихода и расхода подтверждена оправдательными документами.

II. Отчетъ составленъ правильно.

III. На 1 января 1915 года имущество Общества представлялось въ слѣдующемъ видѣ:

1) $3^1/_2\%$ листовъ Госуд. Двор. Зем. Банка на сумму 9650 руб. номинально, удостовѣряемую роспис憂 о храненіи въ Казанскомъ отдѣленіи Госуд. Банка за № 58284.

2) 4% Государ. ренты на сумму 7900 руб. номинально, хранящейся въ Казанскомъ отдѣленіи Государ. Банка, на что имѣются росписки за слѣдующими №№:

№ 58283 на	7500 р.
№ 58582 на	100 р.
№ 59346 на	200 р.
№ 59366 на	100 р.
Итого	7900 р.

3) Одинъ 5% билетъ 2-го внутренняго съ выигрышами займа, серія 02190, № 45 на сумму 100 руб. номинально, хранящійся въ Казанск. отдѣленіи Госуд. Банка, на что имѣется расписка за № 50806.

4) Наличныхъ денегъ на сумму 934 руб. 38 коп., изъ которыхъ 902 руб. 17 к. хранятся въ сберегательной кассѣ Казанск. отдѣл. Госуд. Банка по книжкѣ № 33415, а 32 руб. 21 коп. находятся на рукахъ у г. казначея.

Члены ревизіонной комиссіи { *Ю. Рабиновичъ.*
А. Лаврентьевъ.

Digitized by Google

ДЕНЕЖНЫЙ ОТЧЕТЪ

КАЗНАЧЕЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА ЗА 24-Й ГОДЪ ЕГО СУЩЕСТВОВАНІЯ

(Январь 1914—Январь 1915 г.)

I. Касса Общества.

На 1 января 1914 года въ кассѣ Общества состояло:

1) Наличными деньгами 78.71

2) Неприкосновенный капиталъ

a) Четыре закл. листа ($3^1/_2\%$) Г. Д. З. Банка. по 100 р. 400.00

b) Билетъ 2-го съ выигрыш. займа (сер. 02190, № 45) 100.00

Итого 578.71

Приходъ.

A. Членскихъ взносовъ отъ 20 лицъ 60.00

B. Проценты на проц. бумаги 18.75

C. Подписка на „Извѣстія“ и продажа изданій Общества 49.55

Итого . . . 128.30

Digitized by Google

Расходъ.

A. Страховка выигр. билета и храненіе бумагъ .	22.31
B. Жалованіе служителю Общества	60.00
C. Печатаніе диплома	8.00
D. Почтовые и мелкіе расходы	19.08
Итого	109.39

На 1 января 1915 года въ кассѣ Общества состоитъ:

I. Неприкосновенный капиталъ.

1) Четыре закл. листа Г. Д. З. Банка ($3^1/_2\%$) по 100 р.	400.00
2) Билетъ 2-го съ выигрыш. займа (сер. 02190 № 45)	100.00
Итого нарицательно . . .	500.00

II. Собственно въ Кассѣ Общества.

Наличными деньгами	97 62
Итого	97.62

II. Лекціонный фондъ.

На 1-е января 1914 года состояло

1) Наличными деньгами	48.87
2) Заклади. лист. Г. Д. З. Банка ($3^1/_2\%$) . .	800.00
Итого	848.87

Digitized by Google

Приходъ.

Проценты	28.00
Итого	28.00

Расходъ.

1) За храненіе процентныхъ бумагъ	0.32
Итого	0.32

На 1-е января 1915 года состоитъ:

1) Наличными деньгами	76.55
2) Восемь закл. листовъ Г. Д. З. Б. ($3^1/_2\%$) на	800.00
Итого	876.55

III. Фондъ Н. И. Лобачевскаго.

На 1-е января 1915 года въ фондѣ состояло:

1) Наличными деньгами	480.96
2) Закл. листовъ Г. Д. З. Б. ($3^1/_2\%$) на . .	7400.00
Итого	7880.96

Приходъ.

А. Проценты на процентныя бумаги	264.25
В. Проценты по сбер. кассѣ	20.25
Итого	284.50

Digitized by Google

Расходъ.

А. Покупка одного $3^1/_2\%$ закл. листа Г. Д. З. Б. на 150 р.	124.98
В. Храненіе процентныхъ бумагъ	3.59
Итого	128.57

На 1-е января 1915 года состоитъ:

1) Наличными деньгами	636.89
2) Закл. листовъ Г. Д. З. Б. ($3^1/_2\%$) на . . .	7550.00
Итого	8186.89

IV. Капиталъ для учрежденія астрономической преміи проф. Д. И. Дубяго.

На 1-е января 1914 года состояло

1) Наличными деньгами	57.83
2) 4% Государств. ренты на	7500.00
Итого	7557.83

Приходъ.

1) Проценты на процентныя бумаги	290.70
2) Проценты по сберегат. кассѣ	2.81
Итого	293.51

Расходъ.

А. Покупка 4% Гос. ренты на 400 р.	349.65
В. Храненіе процентныхъ бумагъ	4.61
Итого	354.26

Digitized by Google

На 1-е января 1915 года состоитъ:

1) Расходъ въ счетъ будущаго года	2.92
2) 4% Госуд. ренты на	7900.00
Итого	7897.08

V. Капиталъ библіотеки Лобачевскаго, собранный по поводу празднованія двадцатипятилѣтія ученно-педагогической дѣятельности проф. А. В. Васильева.

На 1-е января 1914 года состояло:

1) Наличными деньгами	95.10
2) Закл. листовъ Г. Д. З. Б. ($3^1/_2$%)	900.00
Итого	995.10

Приходъ

Проценты	31.50
Итого	31.50

Расходъ.

За храненіе процентныхъ бумагъ	0.36
Итого	0.36

На 1-е января 1915 года состоитъ:

1) Наличными деньгами	126.24
2) Закл. лист. Г. Д. З. Б. ($3^1/_2$%)	900.00
Итого	1026.24

Казначей *А. Яковкинъ.*

Члены ревизіонной комиссіи: *А. Лаврентьевъ.*

Ю. Рабиновичъ.

Digitized by Google

Смѣта приходовъ и расходовъ по Кассѣ О-ва на 1915 годъ, принятая въ засѣданіи 7 февраля 1915 г.

ПРИХОДЪ.

Остатокъ на 1-ое января 1915 г. . . .	97 руб.
Членскіе взносы.	60 руб.
% съ бумагъ.	18 руб.
Продажа изданій.	50 руб.
	225 руб.

РАСХОДЪ.

Почтовые расходы.	20 руб.
Страховка и храненіе цѣнныхъ бумагъ. .	30 руб.
Расходъ по библіотекѣ.	50 руб.
Жалованіе служителю.	60 руб.
Печатаніе.	50 руб.
Мелкіе расходы.	15 руб.
	225 руб.

Digitized by Google

Отчетъ

ПО БИБЛІОТЕКѢ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

за 1914 годъ.

За первую половину года путемъ обмѣна изданіями съ 63 учрежденіями въ Россіи и 87 учрежденіями за границей журнальная библіотека обогатилась выпусками свыше 300 номеровъ. Во второмъ полугодіи правильный обмѣнъ нарушился и получено около 100. Подробный списокъ полученныхъ номеровъ прилагается къ отчету.

Вновь вступили въ обмѣнъ изданіями 1) Общество изученія Олонецкой губерніи (г. Петрозаводскъ). 2) Метеорологическое Бюро Амурскаго Района (Благовѣщенскъ). 3) *Universidad National de La—Plata*[1]. Facultad de Ciencias Fisicas, Matemáticas y Astronómicas, издающее на испанскомъ языкѣ журналъ „*Annuario*“.

Работа по разстановкѣ старыхъ изданій журнальной библіотеки въ новыхъ желѣзныхъ шкафахъ, сооруженныхъ въ 1909 году, пріостановилась въ виду того, что шкафы оказались къ 1914 году настолько заполненными, что оставалось мѣсто только на установку текущихъ выпусковъ на ближайшіе 2—3 года тѣхъ коллекцій, которыя уже были помѣщены въ шкафы.

По ходатайству Библіотекаря Общество разрѣшило изготовить новую серію шкафовъ, ассигновавъ на это 300 рублей.

Библіотекарь *Н. Порфирьевъ.*

---

[1] Аргентинская Республика.

Digitized by Google

СПИСОКЪ УЧЕНЫХЪ ОБЩЕСТВЪ, УЧРЕЖДЕНІЙ И РЕДАКЦІЙ, СЪ КОИМИ ПРОИСХОДИЛЪ ОБМѢНЪ ИЗДАНІЯМИ ВЪ 1914 ГОДУ.

(Общество, выражая благодарность за присланныя ему изданія, покорнѣйше проситъ принимать свѣдѣнія этого списка за извѣщеніе о полученіи).

A. Въ Россіи.

1) *Благовѣщенскъ.* Извѣстія Метеор. Бюро Амурскаго Района. В. 1. (1913), В. 2. (1914).

Ежегодникъ Вып. I, 3.

Варшава. 2) Императорскій Варшавскій Университетъ: Варшавскія Университ. Извѣстія.

3) Редакція журн. „Prace matematyczno-fizyczne", изд. *С. Дикштейнъ.*

Wiadomosci matematyczne.

4) Общество Естествоиспытателей при И. В. Ун.

Прот. Зас. и Труды. Отд. Ф. Х. Отд. Біол.

5) *Вологда.* Извѣстія Вологдскаго Общества изученія Сѣвернаго Края. Вып. I. (1914).

6) *Вятка.* Журналы Общ. Собр. и Сов. В. Кружка Люб. Естествознанія.

7) *Гельсингфорсъ.* Финское Ученое Общество.

Acta T. XLV: 1—7. XLVI. Öfversigt Förhandlingar LV: A—Matem. C—Redogörelser och Förhandl LVI: A. Bidrag 75; 76 Observations p.p. l'inst. météorol. de la Soc.

Meteorolog. Jahrbuch f. Finland.

8) *Екатеринославъ.* Высшее Горное Училище.

Извѣстія. Годъ 10. В. I. (1914).

9) *Иркутскъ.* Магнитно-Метеорологическая Обсерваторія (Дир. Ар. Вознесенскій).

Digitized by Google

Казань. 10) Императорскій Университетъ:
Ученыя Записки 1914: 1—12.

11) Общество Естествоиспытателей при И. К. У.

12) Астрономическая Обсерваторія И. К. У.
Труды. Publications de l'Observ. Engelgardt.

13) Магнитная и Метеорологическая Обсерваторія И. К. У.

Кіевъ. 14) Императорскій Университетъ Св. Владиміра:
Университетскія Извѣстія, 1913: 11—12; 1914: 1—11.

15) Физико-Математическое Общество при Имп. Ун. Св. Владиміра.
Отчетъ и Протоколы. 1913 г. (1914).

16) Общество Естествоиспытателей.
Записки. Т. XXIII: 4; XXIV: 1—3 (1914).

17) Политехническій Институтъ Императора Александра II.
Извѣстія. Инж.-Мех. и Хим.-Агр. 1913: 3. 4. 1914: 1, 2.

18) *Кучино.* Аэродинамическій институтъ Д. П. Рябушинскаго. Bulletin.

Москва. 19) Импер. Моск. Университетъ.
Учен. Зап. Отд. Физ. Мат.

20) Математическое Общество при И. М. У.
Математич. Сборникъ.

21) Отдѣленіе физическихъ наукъ Общества Люб. Ест.
Труды.

22) Императорское Общество Испытателей Природы.
Bulletin. Nouvelle Sèrie.

23) Моск. Отдѣленіе Импер. Русскаго Технич. Общества:
Записки.

24) Метеорологическая Обсерваторія И. М. У.
Наблюденія. Приложенія.

25) Сельско-Хозяйственный Институтъ.
Извѣстія. Т. XIX: 5—7. XX: 1—3. (1914). Отчетъ. (1913 г.) Труды Машиноиспыт. Ст. Вып. 1—3 (1914). Селекціонн. Ст. № 1—4 (13—14). Лабор. Общ. Зоотехн. Москва 1913 г.

26) Императорское Техническое Училище.
(Извѣстія).

27) Константиновскій Межевой Институтъ.
Памятная книжка. 15-ый годъ: 1914. Извѣстія Констант. Межев. Инст. Вып. V и VI. (1914).

Digitized by Google

28) Общество содѣйствія успѣхамъ опытныхъ наукъ и ихъ практическихъ примѣненій имени Х. С. Леденцова.

Временникъ. 1914. Вып. 1. Прил. № 4 (Біол.) № 5 (Оп. Науки) 1914.

29) Московскій Коммерческій Институтъ. Извѣстія

30) *Нижній Новгородъ*. Нижегородскій Кружокъ Любителей Физики и Астрономіи.

Р. Астрон. Календарь. 1914.

31) *Новочеркасскъ*. Алексѣевскій Донской Политехническій Институтъ. Извѣстія. 1913г. Томъ II. 1914; Т. III, Вып. 1.

Одесса. 32) Императорскій Новороссійскій Университетъ.

Записки. Физ. Мат. Ф. Вып. V. VI. VII. (Од. 1914). Ежегодникъ магн.—мет. обсерватор. И. Н. Ун. 1913 (Од. 1914).

33) Новороссійское Общ. Естествоиспытателей.

Записки.

34) Математическое Отдѣленіе Нов. О. Ест.

Записки.

35) Ред. ж. „Вѣстникъ Оп. Физики и Элем. Матем."

36) Метеорологическая Обсерваторія И. Н. Ун.

Ежегодникъ.

37) *Оренбургъ*. Оренб. отдѣлъ Имп. Р. Геогр. О.

Извѣстія.

38) *Пермь*. Научно-Промышленный музей.

С.-Петербургъ. 39) Императорская Академія Наукъ.

Записки (по Физико-Матем. Отдѣлу). VIII серія. XXXI: 10. XXXII: 4. 5. XXXIII: 1. Извѣстія. VI сер. 1914: 1—18. Ежегодникъ Зоологическаго Музея XVIII: 4; XIX: 1. Отчетъ. Труды геолог. Музея имени П. В. Русская Библіографія по Ест. и Математ.

40) Главная Николаевская Физическая Обсерваторія.

Лѣтописи. Отчетъ.

41) Кабинетъ физической географіи И. С-П. У. Сборникъ Трудовъ, изд. п. р. А. И. Воейкова.

42) Николаевская Главная Астрономич. Обсерваторія.

Отчетъ.

43) Военно-Топографич. Отдѣлъ Генеральнаго Штаба.

Записки.

44) Практическій Технологическій Институтъ.

Digitized by Google

Извѣстія Технологич. Институт. Императора Николая I.

45) Императорское Русское Географическое Общество.

Извѣстія.

46) Импер. Р. Техническое Общество.

Записки. Сводъ привилегій.

47) Русское Астрономическое Общество.

Извѣстія. XIX: 7—9. Ежегодникъ Р. А. О. Отчетъ.

48) Русское Физико-Химическое Общество.

Журналъ Р. Ф.-Х. О. Физ. Отдѣлъ. Т. XLV: 7—9. Т. XLVI: 1—7.

49) Математическое Общество. Протоколы.

50) Императорское Минералогическое Общество.

Записки. Сер. 2-я. Матеріалы для геологіи Россіи.

51) Техническій Отдѣлъ Собранія Инженеровъ Путей Сообщенія.

Извѣстія.

52) „Морской Сборникъ".

53) Горный Институтъ Имп. Екатерины II.

«Записки».

54) С. П. Политехническій Институтъ.

Извѣстія Т. XX: 1—2 (1913); XXI: 1—2 (1914).

55) *Петрозаводскъ.* Общество Изученія Олонецкой Губерніи. Извѣстія. 1914: 6 7.

56) *Полтава.* Кружокъ Любителей Ф. М. Наукъ.

Отчеты.

57) *Ташкентъ.* Извѣстія Туркест. Отд. И. Р. Г. О. Т. X: 1. (14).

58) *Тифлисъ.* Кавк. Отд. И. Р. Г. О.

Извѣстія. Томъ XXII: 2, 3. Записки. Т. XXX (Добавл.).

Томскъ. 59) Императорскій Университетъ.

Извѣстія.

60) Технол. Инст. Имп. Николая II.

«Извѣстія Т. Т. И—та».

61) *Хабаровскъ.* Приамурскій Отдѣлъ Импер Р. Геогр. Общества. Записки. X: 1. (1914).

Digitized by Google

Харьковъ. 62) Императорскій Университетъ.

Записки, 1914: 1; 2. 3. 1913: 4.

63) Математическое Общество.

Сообщенія—XIV: 3—4. (1914).

64) Технологич. Институтъ И. А. III.

Извѣстія.

65) *Юрьевъ.* Императорскій Университетъ:

Ученыя Записки. 1913: 12; 1914: 1—12. Личный составъ. Обозрѣніе лекцій.

В. За границей.

Австро-Венгрія.

1) *Буда-Пештъ.* Венгерская Академія Наукъ.

Mathematische u. Naturwiss. Berichte aus Ungarn. Rapport s. l. travaux d. l'Ac. H. d. Sc.

2) *Вѣна.* Академія Наукъ.

Sitzungsber. d. math.—naturw. Classe Abth. IIa.

3) *Вѣна.* Ред. Ж. Monatshefte f. Mathem. u. Physik.

Jahrg. XXV: (1914) 1, 2.

4) *Вѣна.* Naturwissenschaftlicher Verein an d. Universität.

Mitteilungen.

5) *Загребъ.* Югославянская Академія.

Rad, razr. Matem.—Prirod.—sl. Ljetopis za godinu.

6) *Львовъ.* Науковое товариство имени Шевченка.

Збірник секцыі матем.-природ.-лікарскоі.

7) *Краковъ.* Akad. Umiejętności w Krakowie.

Bulletin international. Rozprawy, wydział matem.—pryr. serya III, T. 13—A; T. 13—B; Katal. lit. nauk. polsk.

8) *Прага.* Чешская Академія Импер. Франца Іосифа.

Rospravy obsahu mathem. a přirod. Bulletin international. Classe des sciences mathém. et naturelles.

9) *Прага.* Кор. Чешское Ученое Общество:

Vestnik. Sitzungsberichte:

10) *Прага.* Jednota Ceskych Mathematikŭ.

Časopis pro pěstování mathem. a fysiky, Roč. Sbornik.

Digitized by Google

11) *Бухарестъ.* Румынія.
Académie Roumaine. Bulletin II-ème année. $^{13}/_{14}$. № 3.

Болгарія.

12) *София.* Българското Природоиспитателно Дружество.
Годишникъ. Трудове.

13) *София.* Физико-математическое Общество.
Списание на физ.-мат. дружество. Година VIII: 6—8 (1914).

Сербія.

14) *Бѣлградъ.* Српска Краљевска Академија:
Годишњак.
Глас. (Први разред.) Споменикъ. Етногр. Зборн.

Англія.

15) *Лондонъ.* Королевское Общество.
Proceedings. A—Series: 613—620.

16) *Лондонъ.* Физическое Общество.
Science abstracts.

17) *Лондонъ.* Ред. The Mathematical Gazette.
№№ 109—112.

18) *Эдинбургъ.* Королевское Общество.
Proceedings.

19) *Эдинбургъ.* Математическое Общество.
Proceedings. XXXIII: 1—316; XXXIV: 113—208 - 371.
Mathem. Notes. Edited by P. Pinkerton.

Бельгія.

20) *Брюссель.* Королевская Бельгійская Обсерваторія.
Annuaire Astronom. Annales Astronom.

21) *Гентъ.* П. Мансіонъ. Ред. „Mathésis“.

Digitized by Google

22) *Люттихъ.* Société Royale des sciences de Liège.
Mémoires.

Германія.

23) *Вюртемберіъ.* Math. Nat. w. Verein.
Mitteilungen.

24) *Гамбурі.* Mathematische Gesellschaft.
Mittheilungen.

25) *Гёттингенъ.* Kgl. Gesellschaft d. Wissenschaften.
Nachrichten Mathem.—physik. Klasse.
Geschäftliche Mittheilungen.

26) *Кёнигсберіъ.* Physikalisch—ökonomische Gesellschaft.
Schriften.

27) *Лейпцигъ.* Kgl. Sächsische Gesellschaft d. Wissenschaften.
Berichte. 1913: V. 1914: 1.

28) *Лейпцигъ.* Ред. Zeitschrift f. Math. u. Physik.

29) *Мюнхенъ.* Kgl. Akademie d. Wissenschaften.
Sitzungsber. d. mat.—physical. Classe: Abhandlungen.

30) *Эрлангенъ.* Physikalisch-medicinische Societät.
Sitzungsberichte.

Голландія.

31) *Амстердамъ.* Королевская Академія Наукъ.
Verslagen wis-en natuurk. XXI: 1, 2. Verhandlingen. Proceedings of Sect. of Sciences. XV: 1, 2 (1912—13). Jaarbock 1912.

32) *Амстердамъ.* Математическое Общество.
Nieuw Arch. voor Wiscunde. 1913. Deel X: 3—4.
Wiskundige Opgaven. Programma.
Revue sémestrielle des publications mathématiques.

Испанія.

33) *Валенсія* Проф. D. L. G. Gascò, Ред. „Archivo de Matematicas“.

Digitized by Google

34) *Мадридъ.* R. Accademia de ciencias exactas, fisicas y naturales. Revista. T. XII: 1—7. Memorias.

35) Испанское математическое общество въ Мадридѣ. Revista de la Sociedad Matem. Española. (IV—XI 1913).

36) *Сарагосса.* Dr. Zoel G. de Galdeano.

Boletin de Crítica, Enseñanza y Bibliografía Matemática.

Италія.

37) *Болонья.* R. Accademia delle scienze delle Istituto di Bologna.

Memoire. Serie VI. Tomo IX (12). Rendiconto Vol XVI (1911—12).

38) *Ливорно* Ред. (Dott. G. Lazzeri) журн. Periodico di Matematica. Anno XXX: I. Supplemento al Periodico di Matem.

39) *Мессина.* R. Accademia Peloritana. Resoconti. V. XXV. (1913).

40) *Миланъ.* R. Istituto Lombardo, di Scienze e Lettere

Memorie. Cl. sc. mat. e nat. Rendiconti. XLV: 1—20; XLVI: 1—15.

41) *Неаполь.* R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli).

Rendiconto, ser. 3. Vol. XIX: 6°—16° (1913). XX: 1°—6°. (1914).

42) *Падуя.* R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti.

Atti e memorie. Nuova serie.

43) *Палермо.* Circolo Matematico di P.

Rendiconti. Tomo XXXVII: I—II—III. (13) Suppl. T. IX: 1—4. (1914).

44) *Пиза.* Ред. журн. „Il nuovo Cimento".

Ser. VI. LIX (1913): 9—12°. LX (1914). 1°—10°.

45) *Пиза.* R. Scuola Normale Superiore.

46) *Римъ.* Accademia Reale dei Lincei:

Atti. Rendiconti classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.— Serie 5-a Vol. XXII$_1$: 12 XXIII$_1$: 1—4. 6—12. XXIII$_2$: 1. Rend. d. adun. sol. 1913.

Digitized by Google

47) *Римъ.* Società italiana per il progresso delle scienze
Atti.

48) *Туринъ.* Проф. G. Peano, ред. „Rivista di Mitematica".

49) *Туринъ.* R. Accademia delle scienze:
Atti. XLVIII: 4—15. Osserv. meteorol. n. anno 1912 (1913).

Люксембургъ.

50) *Люксембургъ.* L'Institut Grand-Ducal.
Publications. Archives trimestrielles.

Португалія.

51) *Коимбра.* Ред. Journ. de Sciencias Mathematicas e Astronomicas.

52) *Коимбра.* Academia Polytechnica do Porto. Annaes scientificos (F. G. Teixera). Vol. VIII: 4; IX: 1—2. (1914).

53) *Лиссабонъ.* Sociedade de Geographia.
Boletim. 32ª s. 1914: 1—8. 31ª s. 1913: 10—12.

Франція.

54) *Дижонъ.* Académie des Sciences, Lettres et Arts.
Mémoires.

55) *Марсель.* Faculté des sciences.
Annales. XX: I—III (Tables). XXI: I—III.

56) *Парижъ.* Académie des sciences.
Comptes Rendus des séances. T. CLVIII: 1—26; CLIX: 1—4 (1914). Tables des matières. T. 155.

57) *Парижъ.* Association amicale des élèves et anc. él. de la Faculté des sciences de Paris.
Bulletin Scientifique. Annuaire.

Digitized by Google

58) *Парижъ.* Société mathématique de France.
Bulletin. T. XLI: IV. (1913). T. XLII: I. III. IV+C. R. 1913. (1914).

59) *Парижъ.* Association Francaise pour l' avancement des sciences.

60) *Парижъ.* C. A. Laisant, ред. „Intermédiaire des mathématiciens.

61) *Тулуза.* Faculté des Sciences.
Annales.

Швейцарія.

62) *Базель.* Naturforschende Gesellschaft.
Verhandlungen. XXV. (1913).

63) *Бернъ.* Société Helvétique des Sciences Naturelles.
Atti.

64) *Женева.* Société de Physique et d'Histoire naturelle
Comptes rendus des séances. 96 sess. (1913). Frauenfeld. I—II.

65) *Женева.* Comm. Intern. d. l'Enseign. Mathématique.
«L'enseignem. Mathém.» XVI. 1—5 (1914).

Швеція.

66) *Гётеборгъ.* Кор. Ученое Общество.
Handlingar.

67) *Стокгольмъ.* Корол. Академія Наукъ.
Arkiv för Matematik, Astr., och Fysik. Bd. 8. H: 3, 4. Bd. 9: H: 1—2.

68) *Стокгольмъ.* Проф. Энестрёмъ, ред. „Bibliotheca Mathematica".

69) *Упсала.* Кор. Университетъ.
Bulletin of Geolog. Instit. XII (Upsala 1914).

Сѣверо-Американскіе Соединенные Штаты.

70) *Аустинъ.* Texas Academy of science.
Transactions.

Digitized by Google

71) *Бальтимора.* Университетъ Дж. Гопкинса.

Amer. Journ. of Mathem. XXXV: 1—4 (1913); XXXVI: 1 (1914).

72) *Беркли.* University of California. Publications in Mathematics Vol. I. № 3 (55—85).

73) *Вашингтонъ.* Smithsonian Institution.

Annual Report. To 1 Juli 1912, (13).

74) *Колорадо.* College.

Science Series. General Series. (Вошло въ изд. 79).

75) *Лауренсъ.* Университетъ Канзасскій.

Science Bulletin. (Contin. of Quarterly). Vol. VI: 2—7; VII: 1—17: (1913; VIII 1—10 (1914).

76) *Анн-Арборъ.* Michigan Academy of science.

Reports.

77) *Нью-Гэвенъ.* Connecticut Academy of Arts and Sciences. Transactions. Vol. 18 Pg. 209—224. (X. 1913).

78) *Нью-Іоркъ.* American Mathematical Society:

Bulletin. № 224—230. Registers. Transactions.

79) *Спрингфильдъ.* Ред. „The American Mathematical Monthly". Новая серія; Lancaster, PA., and Chicago.

Vol. XXI (2 Ser.) № 1—10, (1914).

80) *Топека.* Kansas Academy of science.

Transactions. The University Geological Survey of Kansas. Bulletin № 1. (Topeka. 1913).

81) *Филадельфія.* American Philosophical Society.

Proceedings. Vol. LI. № 208. 212.

82) *Филадельфія.* University of Philadelphia.

Proceedings of Commencement.

83) *Филадельфія.* University of Pennsylvania.

Bulletin. Report. Catalogue of U.

84) Кэмбриджъ. (Массачузетсъ). University.

Annals of Mathematics.

Digitized by Google

Мексика.

85) *Мексико.* Sociedad cientifica „Antonio Alzate".
Memorias y Revista. Tomo 32: 7—10; 33: 1—10.

Японія.

86) *Токіо.* Физико-Математическое Общество.
Maki. Vol. VII: 11—21.

87) *Сендаи.* Проф. T. Hayachi.
The Tôhoku Mathematical Journal. Vol 4 № 4. Vol. V. № 1—4. Vol VI: № 1.

Бразилія.

88) *С. Пауло.* Sociedad cientifica de S. Paulo.
Revista. Vol. VII (Nov. 1913).

Digitized by Google

Книги, полученныя въ даръ отъ разныхъ лицъ и Учрежденій.

А. В. Васильевъ. Николай Ивановичъ Лобачевскій (1793—1806). СПБ. 1914. (Изъ „Русск Біогр. Словаря").

— Принципъ экономіи въ математикѣ (Докл. на 2 Съѣздѣ прел. мат. 31. XII. 13) СПБ.

— Le bicentenaire de la loi des grands nombres. (Extr. d. l'Enseignement mathématique, N 2, 16 An. mars 1914).

Paul Koebe. Ueber konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Bereiche, insbesondere solcher Bereiche, deren Begrenzung von Kreisen gebildet wird. (D. Math. Ver. XV. 1906).

— Ueber konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Bereiche. (D. M. Ver. XVI. 1907).

— Ueber Uniformisierung reeler algebraischer Kurven. (Gött. Nachr. 1907).

— Ueber Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. I. (G. N. 1907).

— Zur Uniform. d. algebraischen Kurven. (G. N. 1907).

— Ueber Unif. belib. anal. Kurven. II. (G. N. 1907).

— Ueber d. Uniform. d. algebr. Kurven. (Imagin. Substit.—gruppen). (G. N. 1908).

— Ueb Unif. bel. anal. Kurven III. (G. N. 1908)

— Ueber Uniform. d. algebr. Kurven durch autom. Funktionen mit imag. Subst.—gr. (G. N. 1909).

— Ueber ein allgemeines Uniformisierungsprinzip. (Atti d. IV Congresso. Roma 1908).

— Sur un principe général d'uniformisation. (C R. 29 III 1909).

— Fonction potentielle et fonct. analytique, ayant un domaine d'existence donné à un nombre quelconque (fini ou infini) de feuillets. (C. R. 1. VI 1909).

— Ueber d. Uniform. d. algebr. Kurven I. (Math. Ann. LXVII. 1909).

Digitized by Google

— Ueber d. Unif. belieb anal. Kurven IV. (G. N. 1909)

— Ueber d. Hilbertsche Uniform.—methode. (G. N. 1910).

— Ueber d. Unif. d. alg. K. durch autom. Funktionen mit imag. Substit.—gr. (G. N. 1910).

— Ueb. d. Unif. belieb. anal. K. I. (J. Cr. Bd. 138).

— Ueb. d. konf. Abbild. mehrfach zusam.—häng. Bereiche. (D. M.V. XIX. 1910).

— Ueb. d. Unif. bel. anal. K. II. (J. Cr. Bd. 139).

— Ueb. d. Unif. d. alg. K. III. (M. Ann. LXXII).

— Referat über autom. Funktionen und Unif. (D. M. V. XXI. 1912)

— Begründung d. Kontinuitätsmethode im Geb. d. konf. Abbild. und Uniform. (G. N. 1912).

— Zur Begründung d. Kontinuitätsmethode. (Leipz. Ber. 1912)

— Ueber eine neue Meth. d. konf. Abbildung und Uniform. (G. N. 1912).

— Das allgemeine zentrale Uniformisierungsteor. und seine Bedeut. für d. Uniform.—theorie, Funktionentheorie und nicht-euklidische Geometrie. (Annali di Matematica. Lagrange—Tomo. April 1913.)

Н. Агрономовъ. О представленіи числа въ видѣ суммы послѣдовательныхъ чиселъ. Москва 1912. (Отт. Мат. Обр. 12).

— Su alcune formole di analisi combinatoria. Livorno 1914. (Отт. Period. d. Matem.)

— Числовыя тождества, находящіяся въ связи со свойствами символовъ, подобныхъ символу E. Москва 1911. (Отт. Мат. Сб.)

— О суммѣ цифръ всѣхъ чиселъ по N включительно. Москва 1914. (Отт.).

Д. Мордухай-Болтовской. Объ алг. ф., опредѣл. метациклическими уравненіями. Варш. 1914 (Отт.)

— Второй Всероссійскій Съѣздъ преподавателей математики. Варшава 1914.

Пистракъ. О нѣкоторыхъ взаимныхъ свойствахъ плоскихъ кривыхъ. Варшава 1914 (Отт).

Digitized by Google

Юрьевскій Университетъ. Диссертація К. Н. Шапшева, Э. М. Будула, Е. Е. Беттака, А. В. Фомина (Бот.) Л. Г. Горуновича.

K. Grass. Andre Blochin und s. Gemeinde. Juriew 1913.

Ph.—A. Guye. Rapport sur l'unification des abbréviations bibliographiques dans les mémoires de chimie. Genève 1914.

Digitized by Google

СПИСОКЪ ЧЛЕНОВЪ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

при ИМПЕРАТОРСКОМЪ Казанскомъ университетѣ

къ 1 января 1915 года.

Почетные члены.

1) *Васильевъ*, Александръ Васильевичъ, профессоръ Казанск. унив. (дѣйств. чл. съ 4 апр. 1880 г.; почетн. съ 16 нояб. 1899 г.)

2) *Дубяго*, Димитрій Ивановичъ, проф. Казанск. унив. (дѣйств. съ 29 окт. 1883 г., почетн. съ 17 нояб. 1897 г.)

3) *Жуковскій*, Николай Егоровичъ, проф. Московск. унив. (дѣйств. съ 26 сент. 1887 г.; почетн. съ 8-го дек. 1910 г.).

4) *Зейлигеръ*, Дмитрій Николаевичъ, проф. Психоневрологическаго Института въ Петроградѣ (дѣйствит. членъ со 2-го мая 1892 г., почетный съ 16-го ноября 1913 г.)

5) *C. Laisant*, редакторъ журнала „L'Intermédiaire“ (съ 14 февр. 1904 г.).

6) *P. Mansion*, проф. Гентскаго университета (съ 14 февр. 1904 г.).

7) *G. Peano*, проф. Туринскаго университета (съ 14 февр. 1904 г.).

Digitized by Google

† 8) *Энгельгардтъ*, Василій Павловичъ, докторъ астрономіи, въ Дрезденѣ (дѣйств. съ 23 февр. 1885 г.; почетн. съ 29 мая 1898 г.).

9) *Шиффъ*, Вѣра Іосифовна, проф. Высшихъ женскихъ курсовъ въ Петроградѣ (съ 16-го ноября 1913 г.)

Дѣйствительные члены.

1) *Андреевъ* Александръ Григорьевичъ, Капитанъ 6-го стрѣлковаго Сибирскаго полка (съ 7-го декабря 1914 г).

2) *Арбековъ*, Яковъ Васильевичъ, преп. Казанскаго реальнаго училища (съ 13 марта 1904 г.).

3) *Аристовъ*, Иванъ Ивановичъ, лабор. физ. каб. Казанск. унив. (съ сент. 1900 г.)

4) *Арцыбашевъ*, Сергѣй Александровичъ, преподаватель 2-го Реальнаго Казанскаго училища (съ 29 окт. 1911 г.).

5) *Банахевичъ*, Ѳаддей Артуровичъ, ассистентъ Энгельгардтовской астрономическ. обсерваторіи (съ 29-го окт. 1911 г.).

6) *Бирановъ*, Владимиръ Андреевичъ, прив.-доц. Казанск. унив. (съ 19 дек. 1898 г.).

7) *Бекѣевъ* Александръ Петровичъ, преподаватель 1-го реальнаго учил. въ Казани (съ 2 окт. 1912 г.)

8) *Бехтеревъ*, Владиміръ Михайловичъ, проф. военно-медиц. академіи (съ 3 нояб. 1890 г.).

9) *Блажеевскій*, Ромуальдъ Осиповичъ, приватъ-доц. Казанск. унив. (съ 10 сент. 1888 г.)

10) *Бобылевъ*, Дмитрій Константиновичъ, проф. Петроград. универс. (съ 17 нояб. 1892 г.)

11) *Бобынинъ*, Викторъ Викторовичъ, прив. доц. Московск. унив. (съ 28 сент. 1885 г.)

12) *Богородицкій*. Василій Алексѣевичъ, проф. Каз. Унив. (съ 14 мая 1883 г.)

13) *Богоявленскій*, Веніаминъ Порфирьевичъ, предсѣдатель педаг. сов. гимназіи въ Шадринск. уѣзда Пермск. губ. (съ 20 февр. 1893 г.).

14) *Богоявленскій*, Петръ Порфирьевичъ, акциз. надзир. въ г. Камышловъ Перм. г. (съ 30 апр. 1895 г.).

Digitized by Google

15) *Болотовъ*, Евгеній Александровичъ, проф. Казанскаго Университета. (съ 28 сент. 1892 г.).

16) *Брюсовъ*, Евграфъ Ивановичъ, лабор. физич. каб. Моск. унив. (съ 24 февр. 1890 г.)

17) *Васильевъ*, Николай Александровичъ, приватъ-доц. Казанскаго унив. (съ 26 марта 1911 г.).

18) *Вильковискій*, Эммануилъ Яковлевичъ, препод. Каз. 3-ей муж. гимн. (съ 24 сент. 1883 г.)

19) *Витевскій*, Гавріилъ Владимировичъ, инспекторъ Реальн. уч. въ г. Алатырѣ (Симб. губ.) (съ 24 нояб. 1901 г.).

20) *Витковскій*, Василій Васильевичъ, проф. академіи генер. штаба (съ 29 окт. 1883 г.)

21) *Воейковъ*, Александръ Ивановичъ, проф. Петроград. универс. (съ 20 апр. 1892 г.)

22) *Волковъ*, Михаилъ Сергѣевичъ, препод. 2-го Петерб. реальн. учил. (съ 28 сент. 1885 г.).

23) *Воробьевъ*, Александръ Николаевичъ, препод. Симбирск. мужск. гимн. (съ 6 апр. 1891 г.)

24) *Воронецъ*, Петръ Васильевичъ, проф. Кіевскаго Политехникума (съ 28 сент. 1898 г.)

25) *Вульфъ*, Юрій Викторовичъ, проф. Шанявск. унив. въ Москвѣ (съ 17 нояб. 1897 г.)

26) *Гвоздецкій*, Іосифъ Ромуальдовичъ, военный инженеръ въ Ташкентѣ (съ 20 сент. 1897 г.).

27) *Гвоздевъ*, Николай Александровичъ, директоръ Петроградск технол. инст. (съ 10 сент. 1888 г.)

28) *Гернетъ*, Надежда Николаевна, проф. математики на Высшихъ Женскихъ курсахъ въ Петроградѣ (съ 17 февр. 1902 г.)

29) *Гольдгаммеръ*, Дмитрій Александровичъ, проф. Казанск. унив. (съ 10 сент. 1888 г.)

30) *Грабакъ*, Мирославъ Карловичъ, ассистентъ Казанской Астрономической Обсерваторіи (съ 22 марта 1914 г.).

31) *Граве*, Платонъ Платоновичъ, проф. Юрьевскаго универс. (съ 3 нояб. 1890 г.)

32) *Грачевъ*. Михаилъ Авраамовичъ, астрономъ-наблюд. Казанск. астр. обс. (съ 14 мая 1894 г.)

Digitized by Google

33) *Григорьевъ*, Евгеній Ивановичъ, инсп. реальнаго учил. въ Саратовѣ. (съ 19 февраля 1901 г.)

34) *Делоне*, Николай Борисовичъ, проф. политехническ. института въ Кіевѣ (съ 18 сент. 1898 г.)

35) *Де-Метцъ*, Георгій Георгіевичъ, проф. Кіевскаго унив. (съ 24 февр. 1890 г.)

36) *Добросердовъ*, Дмитрій Константиновичъ, проф. Кіевскаго Политехническаго инст. (съ 17-го февр. 1902 г.)

37) *Егоровъ*, Дмитрій Ѳедоровичъ, проф. Московск. универс. (съ 28 сент. 1898 г.)

38) *Жаковъ*, Павелъ Николаевичъ, препод. промышл. училищ. въ Казани (съ 16 окт. 1899 г.)

39) *Ждановъ*, Александръ Маркеловичъ, докторъ астрономіи Москов. Унив. (съ 27 апр. 1902 г.).

40) *Загулинъ*, Василій Ермолаевичъ, препод. высшаго горнаго учил. въ Екатериносл. (съ 26 марта 1894 г.)

41) *Зылевъ*, Владимиръ Петровичъ, преподаватель Томскаго Технологическаго Института (съ 8 февраля 1914 г.)

42) *Ивановскій*, Владимиръ Николаевичъ, проф. высшихъ женскихъ курсовъ (съ 13 матра 1904 г.).

43) *Ивановъ*, Михаилъ Николаевичъ, преподав. Технолог. Инст. въ Томскѣ (съ окт. 1899 г.)

44) Свящ. *Исайя Максимовъ* изъ села Карамышева Чебоксарскаго уѣзда (съ 7-го декабря 1914 г.)

45) *Іовлевъ*, Николай Николаевичъ, прив.-доц. Казанск. унив. (съ 16 марта 1907 г.).

46) *Каганъ*, Веніаминъ Ѳедоровичъ, прив.-доц. Новоросс. унив. (съ 28 сент. 1898 г.)

47) *Картиковскій*, Иванъ Александровичъ, наблюдатель Казанской метеорол. станціи (съ 30 января 1908 году).

48) *Кленковъ* Петръ Борисовичъ, преподаватель Астраханской 1-ой мужской гимназіи (съ 2-го окт. 1912 г.)

49) *Коровинъ*, Алексѣй Евгеньевичъ, препод. Казанской Маріинской гимназіи (съ 29-го окт. 1911).

50) *Котеловъ*, Константинъ Ивановичъ, проф. Горнаго Училища въ Екатеринославѣ. (съ 6 февр. 1888 г.)

51) *Котельникова*, Елизавета Петровна препод. Ксенінинск. гимназіи въ Казани (съ 15 апр. 1880 г.)

Digitized by Google

52) *Конельчиковъ*, Александръ Петровичъ, проф. Кіевскаго университета (съ 10 сент. 1889 г.)

53) *Кульжинскій*, Сергѣй Клементьевичъ, Лубны, Полтавской губ. (съ 30 марта 1891).

54) *Куриловъ*, Венедиктъ Викторовичъ Екатеринославское Горное Учил. (съ 3 нояб. 1890 г.)

55) *Кутиловъ* Василій Николаевичъ, преподаватель Новоузенскаго Реальнаго училища (съ 8 февраля 1914 г.)

56) *Лаврентьевъ*, Алексѣй Лаврентьевичъ, прив. доц. Казанскаго унив. (съ 5 февр. 1900 г.)

57) *Лопаткинъ*, Михаилъ Ивановичъ, (съ 22 нояб. 1886 г.)

58) *Малисъ*, Леонидъ Германовичъ, Редакторъ „Извѣстій Русскаго Астрон., Общества", (съ 28 марта 1901 г.)

59) *Мещерскій*, Иванъ Всеволодовичъ, проф. Петрогр. Ун. (съ 28 мая 1888 г.)

60) *Мирославскій*, Николай Александровичъ, проф. Казанск. универс. (съ 8 окт. 1888 г.)

61) *Михайловскій*, Арсеній Алексѣевичъ, ассист. Казанск. астрон. обсерваторіи (съ 28 сент. 1898 г.)

62) *Михельсонъ*, Владиміръ Александровичъ, Проф. Сельско-Хозяйственнаго Инст. въ Москвѣ (съ 24 февр. 1890 г.)

63) *Некрасовъ*, Владиміръ Леонидовичъ, профессоръ технологич. инст. въ Томскѣ (съ 6 февр. 1888 г.)

64) *Нефедьевъ*, Александръ Николаевичъ, препод. 2-го Реальнаго училища (съ 29-го окт. 1911 г.).

65) *Нечаевъ*, Николай Владимировичъ, препод. Казанской 1-й гимназіи (съ 17 мая 1880 г.)

66) *Остроумовъ* Борисъ Андреевичъ, преподаватель 2-го Реальнаго Казанскаго училища (съ 26 окт. 1913 г.)

67) *Охитовичъ*, Александръ Павловичъ, чиновникъ удѣльнаго округа въ Самарѣ съ 12-го февр. 1911 г.).

68) *Пайкинъ*, Андрей Михайловичъ, инженеръ, фабричный инспекторъ въ Петроковѣ (съ 30 янв. 1910 г.).

69) *Парфентьевъ*, Николай Николаевичъ, проф. Каз.

Digitized by Google

Унив. (съ 4 сент. 1899 г.)

70) *Пельцъ*, Алексѣй Николаевичъ. директоръ женской гимназіи въ Глазовѣ Вятской губ. (съ29 го окт. 1911 г.).

71) *Полосухина* Ольга Андреевна, преподавательница Высшихъ Бестужевскихъ курсовъ (со 2-го окт. 1912 г.).

72) *Попруженко*, Михаилъ Григорьевичъ, инспекторъ классовъ Неплюевск. кадет. корп. въ Оренбургѣ (съ 31 янв. 1893 г.)

73) *Порфирьевъ*, Николай Ивановичъ, приватъ-доцентъ Казанск. унив. (съ 30 сент. 1886 г.)

74) *Пшеборскій*, Антонъ Павловичъ, проф. Харьковскаго университета (съ 28 сент. 1898 г.)

75) *Рабиновичъ*, Юрій Германовичъ, прив.-доц. Казан. Унив. (со 2-го окт. 1912 г.)

76) *Рынинъ*, Николай Алексѣевичъ. адъюнктъ-профессоръ Инст. Путей Сообщенія въ Петроградѣ (съ 10 мая 1914 г.

77) *Самойловъ*, Александръ Филипповичъ, проф. физіологіи Казанскаго унив. (съ 13 марта 1904 г.).

78) *Свѣшниковъ*, Павелъ Иваповичъ, директ. войсков. реальн. учил. въ Уфѣ (съ 26 сент. 1887 г.)

79) *Селезневъ*, Павелъ Семеновичъ, преп. Технолог. Инст. въ С.-Петербургѣ (съ 17 го февр. 1902 г.)

80) *Селивановъ*, Дмитрій Ѳедоровичъ, проф. техн. инст. въ С.-Петербургѣ (съ 27 янв. 1890 г.)

81) *Синцовъ*, Дмитрій Матвѣевичъ, проф. Харьковск. Унив. (съ 3 нояб. 1890 г.)

82) *Слугиновъ*, Серапіонъ Петровичъ, пр.-доц. Казанск. Универ. (съ 30 января 1910 г.)

83) *Соколовъ*, Илья Аркадіевичъ, преп. коммерческаго училища (со 2 октября 1904 г.).

84) *Соколовъ*, Николай Николаевичъ, инженеръ путей сообщ. въ Казани (съ 29 окт. 1911 г.).

85) *Соколовъ*, Николай Павловичъ, Петроградъ. Департ. гражд. отчет. (съ 28 сент. 1898 г.)

86) *Тороповъ*, Константинъ Александровичъ, дир. Оренбургскаго Реальнаго учил. (съ 21 нояб. 1888 г.)

87) *Ульянинъ*, Всеволодъ Александровичъ, проф. Казанск. универс. (съ 24 февр. 1890 г.)

Digitized by Google

88) *Успенскій*, Яковъ Викторовичъ проф. Петроградскаго Унив. (со 2-го окт. 1912 г.)

89) *Флавицкій*, Флавіанъ Михайловичъ, проф. Казанск. универс. (съ 4 апр. 1880 г.)

90) *Хвольсонъ*, Орестъ Даниловичъ, Професс. Петроград. унив. (съ 16 сент. 1889 г.)

91) *Хорватъ*, Климентъ Алексѣевичъ, прив.-доц. Казанскаго Унив. (со 2 окт. 1904 г.).

92) *Хрусталевъ* Михаилъ Капитоновичъ преподаватель женской гимназіи имени Ряхиной въ Казани (съ 7-го Декабря 1914 г.)

92) *Чигирь*, Гейнрихъ Игнатьевичъ, препод. матем. въ Казан (съ 25 сен. 1882 г.)

93) *Шатуновскій*, Самуилъ Осиповичъ прив.-доц. Новоросс. Унив. (съ 28 сент. 1898 г.)

94) *Шохоръ-Троцкій*, Семенъ Ильичъ, Петроградъ. Бассейная 15 (съ 2 мая 1892 г.)

95) *Шубинъ*, Сергѣй Ивановичъ, Астрахань (съ 4 сент. 1899 г.)

96) *Яковкинъ*, Авениръ Александровичъ, професс. стип. при каѳедрѣ астрономіи въ Казани (съ 12 февр. 1911 г.)

Иностранные дѣйствительные члены.

1) *Autonne*, Leon, проф. Ліонскаго универс. (съ 20 сент. 1897 г.)

2) *Бетхеръ* Люціанъ Эмиль, докторъ чистой математики, проф. Политехникума въ Львовѣ (съ 1-го февраля 1903 г.)

3) *Cabreirá*, Antonio, проф. математики въ Лиссабонѣ (съ 22 янв. 1897 г.)

4) *De Cordon*, Antonio, проф. универс. въ Гаванѣ на Кубѣ (съ 1898 г.)

5) *Laugel*, Leonce, членъ Société Mathématique de France (съ 15 мар. 1897 г.)

Digitized by Google

6) *Maggi*, Gian Antonio, проф. Пизанскаго универс. (съ 20 сент. 1897 г.)

7) *Pell*, Alexander, проф. University of South Dacota (съ 16 сент. 1900 г.)

8) *Ventura*, Prospéry Réyes, проф. универс. въ Толедо (съ 28 сент. 1898 г.)

Digitized by Google

Digitized by Google

II.

ЛѢТОПИСЬ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

при ИМПЕРАТОРСКОМЪ Казанскомъ Университетѣ.

Протоколъ 181-го засѣданія,

происходившаго 2-го мая 1915 года.

(Присутствовали 8 членовъ и 10 постороннихъ лицъ).

1. Читается и утверждается протоколъ предыдущаго засѣданія.

2. М. А. Грачевъ сдѣлалъ сообщеніе: „къ вопросу о значеніи аберраціоннаго постояннаго". По поводу сообщенія сдѣлалъ замѣчанія проф. Д. А. Гольдгаммеръ.

3. Н. Н. Іовлевъ сдѣлалъ сообщеніе: „о нѣкоторыхъ приложеніяхъ линейныхъ координатъ въ дифференціальной геометріи".

4. Избраны единогласно въ дѣйствительные члены Общества:

1) Заслуженный профессоръ университета Св. Владимира *Гавріилъ Константиновичъ Сусловъ* (по предложенію Д. А. Гольдгаммера и А. Л. Лаврентьева).

2) Инженеръ-технологъ *Борисъ Лавровичъ Макашинъ*, кандидатъ математическихъ наукъ, казанскій городской инженеръ (по предложенію Н. Н. Парфентьева и Э. Я. Вилькowискаго).

5. Одобренъ предложенный г. казначеемъ текстъ обращенія къ г. г. членамъ Общества съ просьбой объ уплатѣ членскаго взноса.

Digitized by Google

Протоколъ 182-го засѣданія,

происходившаго 23 мая 1915 года.

(Присутствовало 13 членовъ, 13 постороннихъ лицъ).

Открывъ засѣданіе, Предсѣдатель Общества Д. А. Гольдгаммеръ предлагаетъ избрать предсѣдателемъ засѣданія проф. Г. К. Суслова. Послѣдній благодаритъ за избраніе и, послѣ прочтенія и утвержденія протокола предыдущаго засѣданія, предоставляетъ слово Д. А. Гольдгаммеру, который заканчиваетъ свое сообщеніе „Новая теорія электромагнитныхъ явленій въ движущихся средахъ", начало котораго было доложено въ 178-мъ засѣданіи. Въ обмѣнѣ мнѣній послѣ доклада принимали участіе Г. К. Сусловъ и Ю. Г. Рабиновичъ.

Затѣмъ читаются замѣчанія отсутствующаго проф. Н. Н. Парфентьева о работѣ, присланной въ О-во священникомъ И. Максимовымъ, носящей заглавіе „Теорія двучленныхъ сравненій съ простымъ модулемъ и первообразныхъ корней". Изложивъ содержаніе присланной работы, Н. Н. Парфентьевъ говоритъ: „Положительнымъ достоинствомъ работы свящ. Исаіи Максимова является стремленіе получить рѣшеніе сравненіе $x^m - A \equiv 0 \pmod{p}$ въ видѣ *одной общей* формулы, изъ коей *сразу* можно получить *всѣ* корни сравненія. Правда, задача эта рѣшалась уже русскимъ математикомъ *Коркинымъ*, но пріемъ отца Исаіи отличается непосредственностью и крайней элементарностью. Другой характерной признакъ работы отца Исаіи заключается въ введеніи имъ особаго понятія *„первообразный корень первоначальнаго числа p порядка w"*. Въ виду этихъ достоинствъ работы предлагаю Обществу напечатать ее; я ходатайствую объ этомъ съ удовольствіемъ уже по одному тому, что отецъ Исаія Максимовъ—самоукъ, и наше Общество должно поддержать его въ его изслѣдованіяхъ"

Слово предоставляется потомъ Ю. Г. Рабиновичу, который дѣлаетъ сообщеніе: „Изъ области векторфункцій". Замѣчанія по поводу этаго сообщенія дѣлаютъ Н. И. Порфирьевъ, Г. К. Сусловъ и Д. А. Гольдгаммеръ.

Въ дѣловой части засѣданія избирается въ коммиссію по присужденію преміи имени Н. И. Лобачевскаго, вмѣсто отказавшагося А. П. Котельникова—*Е. А. Болотовъ*.

По предложенію А. В. Васильева и Н. Н. Парфентьева избирается единогласно дѣйствительнымъ членомъ Общества *Федоръ Лазаревичъ Сирвинтъ* (Петроградъ).

Digitized by Google

II.

ЛѢТОПИСЬ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

при ИМПЕРАТОРСКОМЪ Казанскомъ Университетѣ.

Протоколъ 183-го засѣданія,

происходившаго 12 сентября 1915 года.

(Присутствовали 17 членовъ и 11 постороннихъ лицъ).

Послѣ прочтенія и утвержденія протокола предыдущаго засѣданія Предсѣдатель Д. А. Гольдгаммеръ представляетъ слово Е. А. Болотову, который дѣлаетъ сообщеніе: „О принципѣ Гаусса“ (будетъ напечатано въ „Извѣстіяхъ“).

Затѣмъ, Н. Н. Парфентьевъ дѣлаетъ сообщеніе „Объ одномъ эллиптическомъ интегралѣ“ и реферируетъ двѣ работы Н. А. Агрономова: „Нѣкоторыя обобщенія и слѣдствія теоремы о геометрическомъ и ариѳметическомъ среднемъ“ и „Объ одной системѣ треугольниковъ“ (все сообщенное Н. Н. Парфентьевымъ будетъ напечатано въ „Извѣстіяхъ“).

Ю. Г. Рабиновичъ излагаетъ содержаніе работъ г. Крюковскаго: „Основныя начала геометріи четырехъ измѣреній“ и „Общія аксіомы“ и сопровождаетъ это изложеніе критическими замѣчаніями.

Избраны въ члены Общества по предложенію Н. Н. Парфентьева и Ю. Г. Рабиновича.

1. Преподаватель Дворянской Гимназіи въ Ревелѣ *Николай Александровичъ Агрономовъ.*

2. Преподаватель Казанскаго Коммерческаго Училища *Августъ Ивановичъ Штейнъ.*

Digitized by Google

Протоколъ 184-го засѣданія,

происходившаго 20 октября 1915 года.

(Присутствовало 8 членовъ, 10 постороннихъ лицъ).

1. Читается и утверждается протоколъ предыдущаго засѣданія.

2. Н. Н. Парфентьевъ излагаетъ содержаніе присланнаго членомъ Общества Ф. Л. Сирвинтомъ сообщенія: „Объ униформизаціи функцій", предпославъ этому изложенію общій очеркъ состоянія вопроса.

3. Ю. Г. Рабиновичъ излагаетъ содержаніе присланной членомъ Общества свящ. о. И. Максимовымъ работы: „Примѣненіе теоріи опредѣлителей при рѣшеніи системъ сравненій".

Приводимъ ее въ краткомъ изложеніи автора.

Рѣшеніе линейныхъ сравненій.

„Теорія опредѣлителей имѣетъ примѣненіе въ вопросахъ, возникающихъ при разсмотрѣніи системъ уравненій. Цѣль настоящей статьи указать на аналогію существующую въ этомъ отношеніи между уравненіями и сравненіями

Пусть дается намъ система изъ n сравненій съ n неизвѣстными:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n \equiv A_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n \equiv A_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nn}x_n \equiv A \end{array}\right\} (\text{mod. } p) \quad \ldots (1)$$

Число p—первоначальное, а коэффиціенты суть числа цѣлыя, или нули.

Если $A_1 \equiv 0$, $A_2 \equiv 0, \ldots A_n \equiv 0$ (mod. p), то система (1) есть система однородныхъ сравненій.

Возмемъ опредѣлитель

$$\Delta = \left|\begin{array}{l} a_{11}, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \ldots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}, a_{n2}, \ldots a_{nn} \end{array}\right| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

Digitized by Google

который называемъ опредѣлителемъ системы (1).

Пусть опредѣлители—миноры Δ, соотвѣтствующіе каждому элементу k-ой колонны будутъ $\Delta_{1k}, \Delta_{2k}, \Delta_{3k}, \ldots \Delta_{nk}$. Умножая на Δ_{1k} первое сравненіе изъ системы (1), на Δ_{2k} второе сравненіе, на Δ_{3k} третье сравненіе...и, наконецъ, на Δ_{nk} n-ое сравненіе и складывая по частямъ полученныя сравненія, имѣемъ:

$$x_1 \sum_i a_{i1}\Delta_{i1} + x_2 \sum_i a_{i2}\Delta_{i2} + \ldots$$

$$+ x_n \sum_i a_{in}\Delta_{in} \equiv \sum_i A_i\Delta_{ik} \pmod{p}.$$

Сравненіе послѣднее составлено изъ всѣхъ сравненій системы (1); въ него вошли условія всѣхъ сравненій системы (1). Очевидно, что, если сравненія системы совмѣстны, то сравненіе предъидущее возможно, т. е.

$$x_1 \sum_i a_{i1}\Delta_{i1} + \ldots$$

$$\ldots + x_n \sum_i a_{in}\Delta_{in} \equiv \sum_i A_i\Delta_{ik} \pmod{p} \quad \ldots (A)$$

Такъ какъ

$$\sum_i a_{i2}\Delta_{i1} = \sum_i a_{i2}\Delta_{i2} = \ldots \sum_i a_{ik-1}\Delta_{ik-1} =$$

$$= \sum_i a_{ik+1} \quad \Delta_{ik+1} = \ldots$$

$$= \sum_i a_{in}\Delta_{in} = 0 \text{ и } \sum_i a_{ik}\Delta_{ik} = \Delta,$$

то сравненіе (A) перепишется въ видѣ

$$x_k\Delta \equiv \sum_i A_i\Delta_{ik} \pmod{p} \quad \ldots\ldots (3)$$

Если $A_i \equiv 0 \pmod{p}$ для каждаго значенія индекса i, то получаемъ

$$x_k\Delta \equiv 0 \pmod{p}.$$

Такъ какъ въ этомъ случаѣ система (1) есть система сравненій однородныхъ, то можетъ высказать слѣдующее положеніе, являющееся слѣдствіемъ положенія (A):

$B)$ если система однородныхъ сравненій

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n \equiv 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \equiv 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \equiv 0 \end{array}\right\} (\text{mod. } p) \ldots\ldots (4)$$

совмѣстна, то

$$\Delta x_k \equiv 0 \ (\text{mod. } p) \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Зададимъ теперь относительно системы сравненій (4) такое условіе, чтобы по меньшей мѣрѣ существовало одно число α_k, не сравнимое съ нулемъ по модулю p, но удовлетворяющее системѣ сравненій (4) при подстановкѣ его вмѣсто x_k. Итакъ,

$$x_k \equiv \alpha_k \ (\text{mod. } p) \ldots\ldots\ldots\ldots (6),$$

Сопоставляя сравненія (5) и (6), получаемъ

$\Delta\alpha_k \equiv 0$ (mod. p). Но $\alpha_k \equiv 0$ (mod. p), слѣд.,

$$\Delta \equiv 0 \ (\text{mod. } p) \ldots\ldots\ldots\ldots (7).$$

Отсюда вытекаетъ истинность положенія (C), которое высказываемъ такъ:

C) если существуетъ по меньшей мѣрѣ одно число α_k съ выше уьазанными свойствами, и если система сравненій (4) совмѣстна, то

$$\Delta \equiv 0 \ (\text{mod. } p).$$

Рѣшеніе уравненій со многими неизвѣстными.

Пусть дается намъ n сравненій съ m неизвѣстными

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots x_m) \equiv 0, \varphi_2(x_1, x_2, \ldots x_m), \ldots \varphi_n(x_1, x_2, \ldots x_m) \equiv 0 \ (\text{mod. } p).$$

Исключаемъ изъ этихъ сравненій неизвѣстное x_1. Пусть $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots x_m)$ есть цѣлая функція степени p_1 относит. x_1, $\varphi_2(x_1, x_2, \ldots x_m)$ есть цѣлая функція степени p_2 относит. x_2, ... $\varphi_n(x_1, x_2, \ldots x_m)$—степени p_n относит. x_n.

Располагаемъ каждую функцію $\varphi_s(x_1, x_2, \ldots x_m)$ по нисходящимъ степенямъ x_1.

Digitized by Google

Умножаемъ первое изъ данныхъ сравненій на степень $x_1^{s_1}$, $x_1^{s_1-1}$, $x_1^{s_1-2}$,...x_1^0, послѣдовательно, второе сравненіе на $x_1^{s_2}$, $x_1^{s_2-1}$, $x_1^{s_2-2}$,...x_1^0, третье сравненіе на $x_1^{s_3}$, $x_1^{s_3-1}$, $x_1^{s_3-2}$,...x_1^0, и т. д., при чемъ, если $p_1+p_2+p_3+\ldots+p_n=S$, то $S_1=S-p_1-1; S_2=S-p_2-1; S_3=S-p_3-1;\ldots S_n=S-p_n-1$.

Оперируя такъ съ сравненіями данными, мы получаемъ всего S сравненій, считая въ томъ числѣ и данныя сравненія. Въ эти сравненія вводимъ новыя неизвѣстныя $y_0, y_1, y_2, \ldots y_{s-1}$ по уравненію $y_k=x^k$. Очевидно мы получимъ S сравненій съ S неизвѣстными $y_0, y_1, \ldots y_{s-1}$, коэффиціентами при которыхъ будутъ цѣлыя функціи отъ извѣстныхъ $x_2, x_3, \ldots x_m$.

Обозначимъ теперь полученную систему сравненій черезъ N, опредѣлитель этой системы черезъ R_s. Пусть система N обладаетъ такимъ свойствомъ, что она способна удовлетвориться по меньшей мѣрѣ однимъ такимъ значеніемъ неизвѣстнаго x_1, которое не сравнимо съ нулемъ по модулю p. Тогда по положенію (C)

$$R_s \equiv 0 \pmod{p}.$$

R_s есть функція только неизвѣст. $x_2, x_3, \ldots x_m$.

Значитъ, сравненія $R_s \equiv 0 \pmod{p}$ есть результатъ исключенія изъ данныхъ сравненій неизвѣстнаго x_1. Если положимъ $m=2$, то очевидно, R_s есть функція только одного неизвѣстнаго. Когда $m>2$ и требуется исключить всѣ неизвѣстныя за исключеніемъ одного, то нужно прибѣгнуть къ другому способу, анологичному способу Безу въ теоріи уравненій.

И. Максимовъ.

4. Ю. Г. Рабиновичъ дѣлаетъ сообщеніе: „О разложеніи линейной векторной дроби и о степенныхъ рядахъ въ области векторовъ". Замѣчанія дѣлаютъ Е. А. Болотовъ и Н. Н. Парфентьевъ, при чемъ послѣдній указываетъ на аналогію приведеннаго докладчикомъ разложенія съ разложеніями теоріи линейныхъ интегральныхъ уравненій.

5. Согласно предложенію Совѣта Общества *рѣшено* отложить обсужденіе вопроса о 7-омъ присужденіи преміи имени Н. И. Лобачевскаго, которое должно было состояться 22 октября 1915 г.

6. Постановлено отложить въ виду настоящихъ событій празднованіе 25-лѣтія Общества.

Digitized by Google

7. Избранъ въ члены Общества по предложенію В. Л. Некрасова, Д. А. Гольдгаммера и Н. Н. Парфентьева.

Профессоръ по каѳедрѣ прикладной механики Томскаго Технологическаго Института *Василій Николаевичъ Пинегинъ*.

Протоколъ 185-го засѣданія,

происходившаго 7 ноября 1915 года.

(Присутствовало 15 членовъ, 16 посторонних лицъ).

1. Послѣ прочтенія и утвержденія протокола предыдущаго засѣданія Предсѣдатель Д. А. Гольдгаммеръ реферируетъ присланную членомъ Общества О. Д. Хвольсономъ для юбилейнаго выпуска статью „Объ атомныхъ вѣсахъ". Д. А. Гольдгаммеръ сопровождаетъ свое изложеніе замѣчаніемъ, что наблюдаемыя отклоненія атомныхъ вѣсовъ отъ цѣлыхъ чиселъ можетъ быть объясняются тѣмъ, что, напр., въ тѣлахъ одноатомныхъ есть нѣкоторое число многоатомныхъ молекулъ и это вліяетъ на точность опредѣленія атомнаго вѣса. Съ этимъ объясненіемъ не соглашается А. Ѳ. Герасимовъ. Замѣчаніе дѣлаетъ еще И. А. Соколовъ.

2. Д. А. Гольдгаммеръ излагаетъ содержаніе своей, также предназначенной для юбилейнаго выпуска статьи „Теорія квантъ и структура молекулъ". По поводу этого дѣлаютъ замѣчанія и просятъ разъясненій А. Ѳ. Герасимовъ, А. А. Ивановъ и Ю. Г. Рабиновичъ.

3. Н. П. Пономаревъ излагаетъ содержаніе присланной для юбилейнаго выпуска статьи Н. А. Агрономова „О нѣкоторыхъ общихъ теоремахъ, относящихся къ рѣшенію въ цѣлыхъ числахъ неопредѣленныхъ уравненій высшихъ степеней".

4. Ю. Г. Рабиновичъ реферируетъ присланную Я. В. Успенскимъ статью „О возможности представленія простыхъ чиселъ нѣкоторыми простѣйшими квадратичными формами". Остальныя сообщенія, стоящія на повѣсткѣ, откладываются за позднимъ временемъ до слѣдующаго засѣданія.

5. Собраніе переходитъ къ обсужденію вопроса объ изданіи сочиненій Н. И. Лобачевскаго. Н. И. Порфирьевъ считаетъ необходимымъ начать съ составленія описи всѣхъ оставшихся сочиненій Лобачевскаго и предлагаетъ для этой цѣли избрать комиссію. Д. А. Гольдгаммеръ предлагаетъ этой ко-

Digitized by Google

миссіи поручить также выяснить приблизительное число листовъ, которое придется напечатать, и составить финансовую смѣту. Собраніе соглашается съ этими предложеніями и рѣшаетъ избрать комиссію въ слѣдующемъ засѣданіи. Н. Н. Іовлевъ предлагаетъ немедленно напечатать, хотя бы въ „Извѣстіяхъ", нѣкоторыя сохранившіяся, но до сихъ поръ ненапечатанныя сочиненія Лобачевскаго.

6. Собраніе рѣшаетъ благодарить С. Г. Петровича и члена Общества Н. А. Рынина за ихъ книги присланная въ библіотеку Общества.

7. Въ числѣ текущихъ дѣлъ докладывается бумага о томъ, что Министерство въ отвѣтъ на ходатайство Общества назначило ему на первое время субсидію въ 1000 р. въ годъ.

Протоколъ 186-го засѣданія,

происходившаго 21-го ноября 1915-го года.

(Присутствовало 6 членовъ и около 10 посторонних лицъ).

Послѣ прочтенія и утвержденія протокола предыдущаго засѣданія предсѣдательствующій въ засѣданіи Товарищъ Предсѣдателя Общества Н. Н. Парфентьевъ предоставляетъ слово Ю. Г. Рабиновичу, который реферируетъ слѣдующія присланныя въ Общество статьи: Я. В. Успенскаго „Правила для опредѣленія знака въ сравненіи $1.2...\frac{p-1}{2} \equiv \pm 1 (\mathrm{mod}.p)$, гдѣ p простое число вида $4\mu + 3$", Д. А. Крыжановскаго „Геометрическая интерпретація зависимости между двумя функціями отъ двухъ перемѣнныхъ" и К. А. Торопова „Объ одномъ линейномъ дифференціальномъ уравненіи второго порядка". Затѣмъ, Ю. Г. Рабиновичъ дѣлаетъ сообщеніе „Объ аналитическихъ векторфункціяхъ". Замѣчаніе по поводу этого сообщенія дѣлаетъ Н. Н. Парфентьевъ.

Избираются въ члены Общества по предложенію Н. Н. Парфентьева и Ю. Г. Рабиновича.

1) Преподаватель Казанской Художественной Школы *Павелъ Александровичъ Безсоновъ*.

и 2) Преподаватель Казанской Гимназіи Пономаревой *Всеволодъ Александровичъ Малѣевъ*.

Digitized by Google

Digitized by Google

II.

ЛѢТОПИСЬ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

при ИМПЕРАТОРСКОМЪ Казанскомъ Университетѣ.

Протоколъ 187-го засѣданія,

происходившаго 28 ноября 1915 года.

(Засѣданіе происходило въ аудиторіи физическаго кабинета Казанскаго Коммерческаго Училища; присутствовало 13 членовъ и 36 постороннихъ лицъ).

Послѣ чтенія и утвержденія протокола предыдущаго засѣданія Предсѣдатель Д. А. Гольдгаммеръ предоставляетъ слово И. А. Соколову, который дѣлаетъ сообщеніе „Броуновское движеніе и простые способы его демонстраціи"; докладъ сопровождается демонстраціей Броуновскаго движенія на матовомъ стеклѣ фотографическаго аппарата и подъ микроскопомъ. По поводу этого сообщенія Д. А. Гольдгаммеръ указываетъ на возможность использовать для демонстраціи этого явленія флуоресценцію.

Послѣ это Предсѣдатель благодаритъ присутствующаго на засѣданіи директора Коммерческаго Училища А. І. Немировскаго за любезно предоставленное помѣщеніе и радушное гостепріимство. А. І. Немировскій отвѣчая выражаетъ надежду, что Коммерческое Училище еще не разъ увидитъ въ своихъ стѣнахъ засѣданія Физико-Математическаго Общества.

Сообщеніе Н. Н. Парфентьева „Молекулярныя физическія теоріи и современная математика" было отложено за позднимъ временемъ.

Въ дѣловой части засѣданія принимается постановленіе уплатить изъ суммы субсидіи за 1915 годъ весь долгъ типографіи. Затѣмъ для составленія описи сочиненій Н. И. Лобачевскаго для предполагаемаго изданія его сочиненій избираетъ-

Digitized by Google

ся комиссія въ составѣ Н. Н. Парфентьева, Н. И. Порфирьева, Е. А. Болотова и А. Л. Лаврентьева. Принимается рѣшеніе выписать выходящій въ Ревелѣ журналъ „Математическій Листокъ“.

Избираются въ дѣйствительные члены Общества:

1. По предложенію Н. И. Порфирьева и А. Л. Лаврентьева преподаватель Виленскаго Техническаго Училища инженеръ-технологъ *Степанъ Казимировичъ Линде.*

и 2. По предложенію Н. Н. Парфентьева и Ю. Г. Рабиновича окончившій Физико-математическій факультетъ И. К. У. *Владиміръ Николаевичъ Русановъ.*

Digitized by Google

ОБЪЯВЛЕНІЯ.

ЕЯ ИМПЕРАТОРСКОМУ ВЕЛИЧЕСТВУ ГОСУДАРЫНѢ ИМПЕРАТРИЦѢ АЛЕКСАНДРѢ ѲЕОДОРОВНѢ благоугодно было образовать въ составѣ Верховнаго Совѣта Особую Комиссію по призрѣнію пострадавшихъ за время настоящей войны офицерскихъ и нижнихъ воинскихъ чиновъ, вольнонаемныхъ лицъ и служащихъ на желѣзныхъ дорогахъ, въ районахъ военныхъ дѣйствій, а также служащихъ въ тѣхъ же районахъ на правительственныхъ и земскихъ шоссейныхъ и грунтовыхъ дорогахъ, а равно на водныхъ путяхъ, а также семей всѣхъ этихъ лицъ, какъ погибшихъ, такъ и пострадавшихъ на войнѣ, а предсѣдательствованіе въ этой Комиссіи ВСЕМИЛОСТИВѢЙШЕ возложить на меня.

Стремясь возможно полнѣе осуществить возложенныя на Особую Комиссію задачи и считая, что самою главною ея цѣлью должно быть повышеніе трудоспособности пострадавшихъ, я буду добиваться всѣми способами, дабы, по возвращеніи пострадавшихъ въ свои родныя семьи, они не только не были имъ въ тягость, а были бы такими же, какъ другіе, работниками, работающими, по волѣ ВСЕВЫШНЯГО, на другомъ поприщѣ.

Сознавая всю трудность поставленной цѣли, я вѣрю, однако, что милостью БОЖІЕЮ и благодаря содѣйствію всѣхъ русскихъ людей своими знаніями, трудами и пожертвованіями, по всей Россіи будутъ устроены необходимыя временныя и постоянныя убѣжища для возстановленія здоровья пострадавшихъ, обученія каждаго посильнымъ для него знаніямъ и ремесламъ, которыя дадутъ имъ душевную бодрость трудового человѣка, достатокъ, а, вмѣстѣ съ ними, всѣ остальныя радости жизни, а тяжело увѣчнымъ не могущимъ обходиться

Digitized by Google

безъ посторонней помощи и требующимъ помѣщенія въ постоянныя убѣжища, душевный и тѣлесный покой.

Для дѣтей павшихъ и пострадавшихъ героевъ предположено устраивать пріюты, школы и вообще всемѣрно заботиться объ ихъ воспитаніи и обученіи.

Всѣ, кто согласенъ работать въ указанномъ направленіи, всегда найдутъ во мнѣ и особой Комиссіи полное сочувствіе, нравственную и посильную денежную помощь своимъ начинаніямъ.

Откликнитесь Русскіе люди.

Помогите устроить тяжело увѣчныхъ, а кто можетъ изъ нихъ работать, тѣмъ дать вѣрный заработокъ.

Дѣтей же героевъ-воиновъ, отдавшихъ жизнь свою за Вѣру, ЦАРЯ и Отечество, воспитать достойными ихъ отцовъ.

Великая Княгиня КСЕНІЯ АЛЕКСАНДРОВНА.

20 Августа 1915 года.

Digitized by Google

СОЛДАТУ ВЪ ОКОПЫ.

Приближается вторая зимняя кампанія съ неизбѣжными лишеніями. Наши герои-солдаты уже стынутъ въ окопахъ, гдѣ пошевельнуться нельзя отъ урагана свинца, чугуна и стали...

Стынутъ во влажныхъ землянкахъ Курляндіи, въ Литвѣ, близъ Пинскихъ болотъ, на мелкихъ рѣченкахъ Полѣсья, въ Галиціи и по всему боевому фронту.

И холодно, очень холодно имъ...

Они съ нетерпѣніемъ ждутъ—„не пришлютъ-ли имъ съ родины чего-нибудь теплаго, не пришлютъ-ли табачку, любимой махорочки...“ и вѣрятъ, глубко вѣрятъ въ то, что имъ не придется горько плакать отъ обиды и съ тоской и отчаяніемъ говорить, что ихъ забыли на родинѣ.

Наша святая обязанность поддержать эту вѣру въ солдатѣ.

Нашъ долгъ всегда помнить, что мы всѣмъ своимъ благополучіемъ и покоемъ обязаны нашимъ самоотверженнымъ, позабывшимъ свое собственное я-и безгранично храбрымъ защитникамъ.

Всѣ наши жертвы на пользу ихъ, какъ-бы онѣ велики ни были, ничто въ сравненіи съ тѣмъ, что они дали и даютъ намъ.

Мы обязаны забыть о себѣ и помнить только о нихъ.

Всю нашу душевную благодарность за ихъ заботы о насъ, восторгъ передъ ихъ доблестью и глубокую скорбь о потеряхъ мы должны превратить въ груды теплаго платья, въ неизсякаемый потокъ средствъ.

Комитетъ „Табакъ—Солдату“, открывъ сборъ пожертвованій на подарки „Солдату въ окопы“, глубоко убѣжденъ въ томъ, что въ великой Россіи „рука дающаго еще не оскудѣла“ и во всей странѣ не найдется человѣка, который не

Digitized by Google

принялъ-бы участія въ этомъ святомъ дѣлѣ помощи тѣмъ, которые отдаютъ безропотно за насъ здоровье и жизнь свою.

Слившись воедино, всѣ мы съ великой радостью устроимъ достойный ихъ доблести праздникъ въ окопахъ.

Всѣ собранные подарки будутъ при любезномъ посредствѣ Генеральнаго Штаба, отправлены на фронтъ и лично розданы уполномоченными Комитета въ окопахъ. Поѣздъ съ подарками на фронты будетъ отправленъ изъ Москвы въ первыхъ числахъ декабря с/г.

Пожертвованія принимаются: деньгами, теплыми вещами, портянками и прочими предметами солдатскаго обихода, въ Комитетѣ „Табакъ Солдату“ (**Москва, Ильинка, 14**), ежедневно съ 10 часовъ утра и до 5 часовъ дня, а также по телеграфу и почтѣ.

На табакъ и папиросы просимъ жертвовать деньгами, такъ какъ Комитетъ пріобрѣтаетъ табакъ съ фабрикъ по оптовой цѣнѣ и безъ акциза (бандероли), что на двѣ трети дешевле.

Предсѣдатель Московскаго Комитета по снабженію табакомъ и предметами первой необходимости воиновъ передовыхъ позицій:

Дѣйствительный Статскій Совѣтникъ *А. Н. Тимоѳеевъ.*

Секретарь Комитета: *Д. П. Ефимовъ.*

Digitized by Google

Мы получили отъ шведскаго математика **Миттагъ-Леффлера** *слѣдующее сообщеніе:*

Conformément au souhait exprimé de différents côtés et vu la situation générale actuelle, S. M. le Roi Gustave V a décidé que le délai fixé pour la remise des travaux qui sont présentés en vue de concourir pour le prix de mathématiques fondé par S. M. sera prolongé du 31 octobre 1915 au 31 octobre 1916*).

G. Mittag-Leffler.

---

*) Согласно выраженнымъ съ разныхъ сторонъ пожеланіемъ и принимая во вниманіе нынѣшнее общее положеніе, Е. В. Король Шведскій Густавъ V рѣшилъ срокъ, назначенный для представленія работъ на соисканіе учрежденной Е. В. математической преміи, перенести съ 31 октября (н. ст.) 1915 года на 31 октября 1916 года.

Digitized by Google

ПОПРАВКА:

Въ протоколѣ 178-го засѣданія, помѣщенномъ въ № 1 тома XXI „Извѣстій", на 23-ьей сверху строчкѣ 4-й страницы Лѣтописи напечатано, что избранъ въ члены Общества Анатолій Васильевичъ Игнатовъ; слѣдуетъ читать: *Анатолій Васильевичъ Игнатьевъ*.

Digitized by Google