Kazan. Universitet. Fiziko-matematicheskoe obshchestvo

BULLETIN DE LA SOCIETE PHYSICO-MATHEMATIQUE
de Kasan.
Deuxième série. Tome XXI.

Q
60
.K21
A2

ИЗВѢСТІЯ

Izvestiâ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ.

ВТОРАЯ СЕРІЯ

ТОМЪ XXI.

№ 1.

КАЗАНЬ.
Тип.-литографія Императорскаго Университета.
1915.

Digitized by Google

Печатано по опредѣленію Совѣта Физико-Математическаго Общества при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ.

Предсѣдатель проф. Д. Гольдгаммеръ.

Digitized by Google

СОДЕРЖАНІЕ.

I.

Н. Н. Парфентьевъ. Академикъ Н. Я. Сонинъ (научная характеристика) . . . . . 1—19.
Д. А. Гольдгаммеръ. Новая теорія электромагнитныхъ явленій въ движущихся средахъ . . . . . 20—34.

II.

Лѣтопись Физико-Математическаго Общества

при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ.

Протоколы 177-го, 178-го, 179-го и 180-го засѣданій Ф.-Мат. Общества . . . . . 1— 6.
Отчетъ г. Секретаря за 1914-ый годъ . . . . 7—10.
Протоколъ засѣданій Ревизіонной Комиссіи. . . 11.
Отчетъ г. Казначея за 1914-ый годъ . . . . . 12—16.
Смѣта на 1915-ый годъ . . . . . 17.
Отчетъ г. Библіотекаря за 1914-ый годъ . . . 18—33.
Списокъ членовъ Общества . . . . . 34—41.

Table des matières.

N. Parfentieff. L'académicien N. Sonine (revue de ses travaux scientifiques) . . . . . 1—19
D. Goldhammer. Nouvelle theorie des phénomènes électromagnetiques dans les milieux mouvants. . . . . 20—34.
Procès-verbaux des séances de la Société Phys-Math. 177, 178, 179 et 180 . . . . . 1— 6.
Comptes rendues de m-eurs le Sécrétaire, Bibliothécaire et Trésorier . . . . . 7—33.
Liste des membres . . . . . 33—41.

Digitized by Google

Digitized by Google

СОДЕРЖАНІЕ.

I.

И. А. Соколовъ. Памяти профессоровъ И. И. Боргмана и Н. А. Умова . . . . . 35—52.

Д. А. Гольдгаммеръ. Новая теорія электромагнитныхъ явленій въ движущихся средахъ (Продолженіе). 53—69.

Свящ. И. Максимовъ. Теорія двучленныхъ сравненій и первообразныхъ корней . . . . . 70—95.

Н. Н. Парфентьевъ. Вычисленіе одного интеграла 96—98.

II.

Лѣтопись Физико-Математическаго Общества

при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ.

Протоколы 181-го и 182-го засѣданій Физ.-Мат. Общества . . . . . 43—44.

Table des matières.

I. Socoloff. A la mémoire des professeurs I. Borgman et N. Oumoff . . . . . 35—52.

D. Goldhammer. Nouvelle théorie des phénoménes électromagnétiques dans les milieux mouvants (Continuation) 53—69.

J. Maximoff. Théorie des congruences binomes et des racines primitives . . . . . 70—95.

N. Parfentieff. Evaluation d'une intégrale définie. 96—98.

Procés-verbaux des séances de la Société Phys-Math. 181 et 182 . . . . . 43—44.

Digitized by Google

Digitized by Google

СОДЕРЖАНІЕ.

I.

Е. А. Болотовъ. О принципѣ Гаусса . . . . 99—152.
Т. А. Банахевичъ. Графическое опредѣленіе разстоянія кометы въ способѣ Ольберса . . . . . 153—155.
Д. А. Гольдгаммеръ. Новая теорія электромагнитныхъ явленій въ движущихся средахъ. (Окончаніе). 156—178.

II.

Лѣтопись Физико-Математическаго Общества

при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ.

Протоколы 183-го, 184-го, 185-го и 186-го засѣданій Физ.-Мат. Общества . . . . . 45—52.

Table des matières.

E. A. Bolotoff. Sur le principe de Gauss . . . . 99—152.
Th. Banachevicz. Détermination graphique de la distance d'une comète dans la méthode de Olbers . . . . . 153—155.
D. Goldhammer. Nouvelle théorie des phénomènes électromagnétiques dans les milieux mouvants (suite et fin) 156—178.
Procès-verbaux des séances de la Société Phys-Math. 183, 184, 185 et 186 . . . . . 45—52.

Digitized by Google

Digitized by Google

СОДЕРЖАНІЕ.

I.

Я. Успенскій О возможности представленія простыхъ чиселъ нѣкоторыми простѣйшими квадратичными формами . . . . . 179—186.

Онъ-же. Правила для опредѣленія знака въ сравненіи $1.2.3...\frac{p-1}{2} \equiv \pm 1 \pmod{p.}$ . . . . . 187—198.

Н. Агрономовъ. Объ одной системѣ треугольниковъ. . . . . 199—208.

Онъ же. О нѣкоторыхъ обобщеніяхъ и слѣдствіяхъ теоремы о геометрическомъ и ариѳметическомъ среднихъ. . . . . 209—217.

Ф. Сирвинтъ. Къ вопросу объ униформизаціи многозначныхъ аналитическихъ функцій . . . . . 218—250.

II.

Лѣтопись Физико-Математическаго Общества

при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ.

Протоколъ 187-го заданія Физ.-Мат. Общества 53— 54.

Table des matières.

J Ouspensky. Sur la possibilité de la representation des nombres par certaines formes quadratiques. 179—186.

J. Ouspenski. Règle pour déterminer le signe dans la congruence $1.2.3...\frac{p-1}{2} \equiv \pm 1 \pmod{p}$. . . . . 187—198.

N. Agronomoff. Sur un système remarquable des triangles . . . . . 199—208.

N. Agronomoff. Quelques généralisations et corollaires du théorème relatif au moyen géométrique et arithmétique . . . . . 209—217.

F. Sirvinte. Sur l'uniformisation des fonctions analytiques. . . . . 218—250.

Procés-verbal de la séance de la Société Phys.-Math. 187-ème . . . . . 53— 54.

Digitized by Google

Digitized by Google

ПАМЯТИ

ординарнаго академика Н. Я. Сонина

(род. 1846, ум. 14. II. 1915).

(Научное значеніе его работъ—критическій этюдъ).

14-го февраля 1915-го года скончался въ Петроградѣ ординарный академикъ Императорской Академіи Наукъ по каѳедрѣ чистой математики Николай Яковлевичъ Сонинъ.

Въ настоящей статьѣ я хочу обрисовать ученую дѣятельность покойнаго и его научные труды. Съ внѣшней стороны жизнь Н. Я. Сонина протекала вся въ научномъ трудѣ, причемъ ученая каррьера его шла блестящимъ темпомъ: въ 1869 г. Сонинъ окончилъ Математическое отдѣленіе Московскаго Университета 20-лѣтнимъ юношей и былъ оставленъ при Университетѣ къ приготовленію къ профессорскому званію, а въ 1871 г. онъ уже получаетъ ученую степень магистра Чистой математики за сочиненіе „*О разложеніи функцій въ ряды*“ (Московскій Матем. Сборн. 1870, т. 5). Черезъ 3 года послѣ магистерской диссертаціи онъ выпускаетъ свою докторскую диссертацію „*Объ интегрированіи уравненій съ частными производными второго порядка*“ (Моск. Мат. Сбор. 1874, т. 7), и слѣд. въ 1874 году онъ, 25-лѣтній юноша,—уже докторъ Чистой математики.

Digitized by Google

Въ 1872 году Н. Я. Сонинъ становится доцентомъ Варшавскаго университета и въ 1877 году онъ — экстраординарный профессоръ, а съ 1879 г. ординарный того же университета.

Въ 1890 году онъ удостаивается преміи имени академика *Буняковскаго* за представленный имъ сборникъ своихъ статей, а черезъ 3 года послѣ этого событія въ 1893-мъ году онъ занимаетъ каѳедру въ Императорской Петроградской Академіи Наукъ, занимаемую до него какъ разъ самимъ Буняковскимъ.

Отдаваясь всецѣло ученой дѣятельности, Сонинъ тѣмъ не менѣе въ 1899-мъ году становится Попечителемъ Петроградскаго округа, но занималъ эту должность недолго.

Послѣдніе годы своей жизни Н. Я. провелъ въ качествѣ Предсѣдателя Ученаго Комитета при Министерствѣ Народнаго Просвѣщенія.

Я не буду вдаваться въ детали жизнеописанія дѣятельности Н. Я. Сонина внѣ ученой сферы и поставлю себѣ цѣлью лишь задачу нарисовать научный обликъ сошедшаго въ могилу ученаго.

Всѣ работы Н. Я. Сонина въ сущности относятся къ слѣдующимъ областямъ анализа:

a) разложеніе функцій въ ряды по функціямъ опредѣленнаго характера,

b) теорія кратныхъ интеграловъ,

c) приближенное опредѣленіе значеній опредѣленныхъ интеграловъ и суммованіе рядовъ,

e) символическое счисленіе въ анализѣ и его примѣненія къ теоріи функцій.

Одна изъ самыхъ раннихъ его работъ—его магистерская диссертація „*О разложеніи функцій въ безконечные ряды*“ по содержанію своему и по постановкѣ вопроса до извѣстной степени родственна современной проблемѣ *интегральныхъ*

Digitized by Google

уравненій по стольку, по скольку интегралы Фурье въ родѣ

$$\varphi(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} Cos(ux)\,du\int_a^b \varphi(t).Cos(ut)dt,$$

или интегралы Liouville'я типа

$$\varphi(x)=\frac{1}{\omega x}\int_0^{\infty} dz\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,z,zy-zx).\varphi(y)dy,$$

гдѣ $\varphi(x,z,\theta)=\frac{z}{\theta}\cdot\frac{\partial t}{\partial z}+\frac{\partial t}{\partial\theta}$,

или интегралы Schlömilch'a въ родѣ

$$f(x)=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\infty}\frac{u^2du}{u^2-x^2}\int_0^{\infty}\frac{f(t)dt}{u^2-t^2}\ ,\quad o<x<\infty$$

и другіе, всецѣло базируются или отчасти связаны съ интегральными уравненіями.

Интегралъ Cauchy, само собой разумѣется, принадлежитъ къ этой категоріи интеграловъ; его то и положилъ въ основу Н. Я. Сонинъ. Что говоритъ намъ интегралъ

$$f(\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int_K\frac{f(z)dz}{z-\alpha}$$

относительно возможности представленія рядомъ функціи $f(x)$? Да то, что, умѣя разложить въ степенной рядъ дробь $\frac{1}{z-\alpha}$, мы тѣмъ самымъ при помощи интеграла Cauchy находимъ возможность разложенія и $f(x)$ въ рядъ Taylor'a. Интегральное исчисленіе здѣсь является инструментомъ, опредѣляющимъ всѣ коэффиціенты Тайлоровскаго разложенія для $f(x)$. Но очевидно можно поставить себѣ *общую* проблему: найти вообще *возможность* разложенія $f(x)$ въ рядъ:

Digitized by Google

$$f(x)=A_0.\omega_0(x)+A_1\omega_1(x)+\ldots+A_n.\omega_n(x)+\ldots,$$

гдѣ $\omega_k(x)$ суть функціи опредѣленной природы, характеризуемыя, напр., тѣмъ, что

$$\int_a^b \omega_m(x).\omega_n(x)dx=0 \text{ при } m\neq n,$$

$$\int_a^b \omega^2{}_n(x)dx=const=c^{-1},$$

тогда очевидно

$$\int_a^b f(\alpha).\omega_n(\alpha)d\alpha=\psi(n)=A_nc^{-1}, \text{ т. е. } A_n=c.\psi(n),$$

и, если рядъ вышеуказанный сходится, то функціи $f(x)$ разложена въ рядъ по функціямъ типа $\omega_n(x)$; такого типа, напр., представляетъ собой разложеніе функцій $f(x)$ въ тригонометрическую строку.

Разложенія функцій по функціямъ Бесселевскимъ, шаровымъ, цилиндрическимъ и т. п. были, конечно, извѣстны и изучены весьма детально до Сонина, но Сонинъ поставилъ себѣ задачей въ разбираемомъ нами мемуарѣ слѣдующую проблему: въ сущности непрерывная функція можетъ быть различно представлена при помощи опредѣленныхъ интеграловъ; такъ вотъ указать на возможность различныхъ формъ представленія непрерывной функціи опредѣленными интегралами, *основываясь исключительно на интегралѣ* Cauchy, и есть задача Сонина, очень удачно имъ разработанная. При такой постановкѣ вопроса все дѣло обусловлено исключительно возможностью представить дробь $\frac{1}{z-\alpha}$ не только въ видѣ степеннаго ряда, а вообще

$$\frac{1}{\alpha-z}=\sum_0^\infty A_n(\alpha)\,Z_n(z),$$

Digitized by Google

гдѣ $Z_n(z)$ суть нѣкоторыя функціи. Если ставить проблему такъ обще, то при $Z_m(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_{m,k} z^k$, мы найдемъ, что

$$\frac{1}{\alpha-z}=\sum_{m=0}^{\infty} A_m(\alpha).\sum_{k=0}^{\infty} a_{m,k}\, z^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\alpha^{k+1}}\,,\ \text{причемъ}$$

$$\frac{1}{\alpha^{k+1}}=A_0.a_{k,0}+A_1.a_{k,1}+\ldots+A_n.a_{k,n}+\ldots\,,$$

и здѣсь Сонинъ вынужденъ былъ оперировать съ *безконечными* детерминантами; простѣшіе *случаи* такихъ детерминантовъ имъ разсмотрѣны. Такимъ путемъ Сонинъ находитъ для дроби $\frac{1}{\alpha-z}$ разложеніе по Бесселевскимъ функціямъ.

Отмѣчу здѣсь также интересныя размышленія Сонина относительно возможности и единственности существованія функціи $\Phi(\alpha,\beta)$ и предѣловъ a и b такихъ, что при заданной $\varphi(\beta,z)$

$$\int_a^b \varphi(\beta,z).\Phi(\alpha,\beta)d\beta=\frac{1}{\alpha-z}\,,$$

хотя, скажу, основная идея о постановкѣ такого вопроса была уже высказана до Сонина Абелемъ и Liouville'емъ (Journ. Math. Vol. II); Liouville'ъ даже трактовалъ подобную задачу.

Разложенію непрерывныхъ функцій уже по цилиндрическимъ только функціямъ Сонинъ позже посвятилъ еще одинъ очень обширный мемуаръ „*Recherches sur les fonctions cylindriques et le developpement des fonctions continues en séries*“. (Math. Ann. B. 16, 1879).

Мемуаръ этотъ безусловно—одинъ изъ самыхъ интересныхъ у Сонина. Всѣмъ извѣстно, что цилиндрическія функціи суть интегралы уравненія

Digitized by Google

$$\frac{d^2y}{d^2x}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0 \qquad (1),$$

и H. Hankel, напр., исходя изъ этого уравненія, приходитъ къ построенію цилиндрической функціи

$$J^n(x)=\frac{x^n}{\sqrt{\pi}.2^n\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{+1}e^{ixt}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}dt.$$

Сонинъ поступаетъ для построенія цилиндрическихъ функцій иначе: онъ совершенно не интересуется дифференціальнымъ уравненіемъ (1), а исходитъ изъ рекуррентнаго уравненія вида

$$\begin{cases} S_{n+1}(x)+2\frac{dS_n}{dx}-S_{n-1}(x)=0 \qquad (2) \\ -\frac{dS_0}{dx}=S_1(x), \end{cases}$$

опредѣляющаго, какъ извѣстно, одно изъ свойствъ цилиндрическихъ функцій.

Полагая въ рекуррентномъ уравненіи $\frac{d}{dx}=D$, можно писать символически:

$$D^{n+1}+2D^n-D^{n-1}=0,$$

отсюда конечной интеграціей находимъ

$$S_n=\frac{(-D+\sqrt{D^2+1})^n+(-D-\sqrt{D^2+1})^n}{2}S_0. \qquad (3)$$

Оригинальность Сонина—до него символическій методъ уже не разъ примѣнялся*)—состоитъ въ томъ, что онъ въ дальнѣйшихъ своихъ изысканіяхъ пользовался введеннымъ имъ *новымъ* символомъ

$$D=iCos\,\Delta,$$

тогда формула (3) превращается въ такую лаконичную Сонин-

*) Сравни у Hargreave (Phil. Trans. 1848).

Digitized by Google

скую, тоже символическую:

$$S_n = (-1)^n \, Cos \, n\Delta . S_0 .$$

Пользуясь все время символическимъ счисленіемъ и пытаясь потомъ выразить S_n черезъ

(4) $$\int_a^b \Phi(t,x) . \frac{dt}{t^{n+1}},$$ причёмъ a и b фиксированы;

онъ строитъ всю теорію цилиндрическихъ функцій и получаетъ нѣкоторыя новыя формы ихъ.

Указаны также и нѣкоторыя примѣненія ихъ: попутно авторомъ получены многіе результаты Schläfli, Bessel'я, Lommel'я и др..

Мемуаръ Сонина между прочимъ подчеркнулъ значеніе теоріи конечныхъ разностей для теоріи цилиндрическихъ функцій и значеніе метода „*функцій—женератриссъ*“ [мы имѣемъ въ виду интегралы вида (4), гдѣ $S_n(x)$ пытаются выражать черезъ $\Phi(t,x)$].

Позже Сонинъ вернулся еще разъ къ теоріи цилиндрическихъ функцій въ мемуарѣ „*Sur les fonctions cylindriques*“ (Math. Ann. B. 59).

Результаты Сонина нѣсколько разъ цитируются знатокомъ аналитической теоріи опредѣленныхъ интеграловъ, рядовъ, и факторіальныхъ рядовъ *Nielsen*'омъ въ его „*Handbuch der Theorie der Zylinderfunctionen*“ (1904) и въ книжкѣ „*Theorie des Integrallogarithmus und verwandter Transzendenten*“, гдѣ Nielsen выдѣляетъ теоремы Сонина.

Какъ читатель уже замѣтилъ, Сонинъ видѣлъ въ опредѣленномъ интегралѣ сильное математическое орудіе; поэтому неудивительно, что Сонинъ попробовалъ примѣнить какъ разъ именно это орудіе и къ другому вопросу „вопросу о дифференцированіи съ произвольнымъ указателемъ“. Его мемуаръ „*O*

Digitized by Google

дифференцированіи съ произвольнымъ указателемъ (Моск. Мат. Сбор. 1872: 6) трактуетъ этотъ въ высшей степени привлекательный вопросъ съ точки зрѣнія интеграла Cauchy. Въ самомъ дѣлѣ, если въ формулѣ Коши

$$f^{(n)}(x)=\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi i}\int_{(k)}\frac{f(z)dz}{(z-x)^{n+1}}$$

не обращать вниманія на лѣвую часть, то несомѣнно правая существуетъ при всякихъ n, даже комплексныхъ, лишь бы n не было цѣлымъ отрицательнымъ.

Но это съ точки зрѣнія функціональной, а что нужно мыслить подъ $f^{(\mu)}(x)$ при μ комплексномъ съ точки зрѣнія оперативной? Послѣдній вопросъ Сонинъ не рѣшаетъ и пытается помощью интеграла Коши опредѣлить аналитическую природу функціи, заданной символъ D^{μ} при произвольномъ μ; до извѣстной степени ему удалось достичь этого, хотя у него есть неточности и нѣкоторая недосказанность; бо́льшую разработку тотъ же вопросъ получилъ въ работахъ талантливаго современника Сонина *А. В. Лѣтникова*, усовершенствовавшаго и сильно подвинувшаго идеи Liouville'я по тому же вопросу, но точка зрѣнія Лѣтникова была уже иная: Лѣтниковъ опредѣлялъ общее дефференцированіе при помощи такого алгоритма

$$D^{\xi}f(x)=\lim_{n=\infty}\frac{1}{\delta^{\xi}}\sum_{0}^{\infty}(-1)^{n}C_{\xi}^{n}.f(x-n\delta)$$

и значительно развилъ теоріи *Liouville'я* и особенно *Grünwald'a*, основанныя на томъ же опредѣленіи обобщенной производной D^{μ}.

Короче разницу въ методахъ Сонина и Лѣтникова можно такъ формулировать: Лѣтниковъ понималъ задачу обобщеннаго дифференцированія какъ *интерполяціонную*: функціи съ

Digitized by Google

какимъ угодно, нецѣлымъ, но реальнымъ указателемъ производной должны найти себѣ мѣсто между двумя какими либо функціями ряда

$$\ldots f^{(-n)}(x),\ldots f^{(-1)}(x).f(x).f'(x).f''(x),\ldots f^{(n)}(x),\ldots\ldots$$

съ цѣлыми индексами, гдѣ отрицательный индексъ нужно понимать какъ интегрированіе, т. е.

$$f^{(-1)}(x)=\int f(x)dx,\quad f^{(-2)}(x)=\int\int f(x)dx^2,\ldots$$

При такой постановкѣ вопроса обобщенныя производныя вводятся въ анализъ подобно ирраціональнымъ или дробнымъ числамъ и притомъ интерполяціонно; у Сонина же обобщенныя производныя вводятся въ анализъ функціонально при помощи алгоріема интеграла Коши. Для анализа, конечно,и та, и другая точка зрѣнія одинаково полезна и важна. Замѣчательно, что въ данномъ случаѣ *два* діаметрально противоположныхъ алгоріема дифференцированія и интегрированія замѣняются *нѣкоторымъ единымъ.*

Въ анализѣ есть масса формулъ, соотношеній и тождествъ, въ коихъ фигурируютъ цѣлые положительные, а иногда и отрицательные индексы; можно-ли вообще говоря, придавать смыслъ этимъ соотношеніямъ при *какихъ—угодно индексахъ?* Этотъ вопросъ часто задавалъ себѣ Сонинъ и, гдѣ могъ, давалъ на него отвѣтъ.

Поясникъ мысль примѣромъ самого Сонина, взятымъ нами изъ его уже цитированнаго выше мемуара въ Math. Annalen B. 59; тамъ, напр., Сонинъ далъ формулу

$$F^{m+n+1}(aq)=\frac{q^{n+1}}{2^n.\Pi(n).a^{m+n+1}}\int_0^a F^m(xq).x^{m+1}(a^2-x^2)^n dx\ (*)$$

и о ней онъ между прочимъ говоритъ: „*Lorsqu'on donne une*

Digitized by Google

valeur cosntante quelconque à m et qu'on choisit arbitrairement la fonction d'une variable x pour $F^m(x)$, *la formule* (*) *servira à former une fonction* $F^{m+n+1}(x)$ *de deux variables x et* $m+n+1>m$ *qui possedera la propriété exprimée par la formule* (*), *où m est supposé variable*".

Числовые ряды тоже интересовали Сонина, но опять таки съ точки зрѣнія суммированія ихъ при помощи опредѣленныхъ интегралов; естественно поэтому, что Сонинъ обратился для этой цѣли къ строкѣ Эйлера и функціямъ Бернулли, и вотъ въ этой области онъ тоже достигъ очень замѣчательныхъ результатовъ.

Прежде всего онъ упростилъ теорію самихъ Бернулліевыхъ функцій: его теорія ихъ—*наипростѣйшая* изъ всѣхъ данныхъ до нея.

Примѣняя свои соображенія къ самой строкѣ Эйлера, Сонинъ далъ очень изящныя выраженія для остаточнаго члена ея, что дало возможность ему усовершенствовать формулу Стирлинга нумерически (Сравни Annales de l'Ecole Normale, 1889) въ его мемуарѣ" *Sur les termes complementaires de la formule sommatoire d'Euler et de celle de Stirling*". Насколько Сонинъ стремился къ точности, показываетъ, напр., слѣдующій фактъ: Сонинъ не довольствовался обычной классической формулой Стирлинга

$$\Gamma(1+x)=\sqrt{2\pi x}.x^x e^{-x+\frac{\theta}{12x}},\ 0<\theta<1$$

и далъ другую

$$\Gamma(1+x)=\sqrt{2\pi x}.x^x.e^{-x+\frac{(x+\theta)^{-1}}{12}},\ 0<\theta<\frac{1}{2}*).$$

Сдѣлать онъ это могъ при помощи своего остаточнаго члена въ строкѣ Эйлера, болѣе удачнаго Якобіевскаго и въ *практическомъ*, и въ *теоретическомъ* отношеніяхъ. Из-

*) Еще точнѣе $0<\theta<\frac{1}{\pi\sqrt{2e}}$.

Digitized by Google

слѣдованія эти прозведены Сониным̀ въ Варшавскихъ Унив. Изв. 1889, кн. 7 и 8, также въ 1888, кн. 3 и 4.

Этим̀ мемуаром̀ впослѣдствіи, какъ видно изъ переписки *Hermite*'а и Сонина, заинтересовался очень Hermite, ибо Сонинъ получилъ нѣкоторые результаты раньше его; такъ въ 116 томѣ Crelle's Hermite пишетъ Сонину: „.....et j'ai vu une fois de plus combien nos recherches ont été voisines".

Размышляя надъ формулой Стирлинга, Сонинъ заинтересовался вообще *проблемой асимптотическихъ значеній* интеграловъ разностнаго уравненія типа

$$H(x+1)-H(x)=\varphi(x),$$

ибо $log\Gamma(x)$ есть именно интегралъ уравненія

$$log\Phi(x+1)-log\Phi(x)=logx.$$

Попытка—очень интересная и важная; навѣяны эти изслѣдованія были вѣроятно работами французскаго ученаго *Guichard*'а, но только методъ Сонина — совершенно новый: онъ трактовалъ этотъ вопросъ при помощи развитой имъ теоріи функціи „*Entier* отъ x", означенной имъ $[x]$*, примѣняя выведенныя имъ слѣдующія двѣ формулы:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[t]df(t)=-\sum_{k=1}^{\infty}f(k),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\prod\Big[\psi(t).\Big]df(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\prod(z).d\Big(f(\psi(z))\Big).,$$

Пользуясь этими двумя формулами и искусно примѣняя ихъ, *С.* суммировалъ множество рядовъ и вывелъ очень много

*) См. Варш. унив. Изв. 1889, кн. 7 «О прерывной функціи $[x]$ и ея примѣненіяхъ».

Digitized by Google

числовыхъ формулъ Liouville'я и Hermite'а, полученныхъ этими учеными помощью эллиптическихъ функцій въ родѣ, напр., такихъ:

$$\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \sum_{k=1}^{\infty} f(2m-1).k = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} f(m^2+k^2).$$

Самъ Hermite, напр., придавалъ очень большое значеніе формулѣ Сонина, формулѣ асимптотической, такой:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2h^2}\,\frac{1}{nh} = \frac{C}{2h} - \frac{\log h}{h},$$

гдѣ C—Эйлеровская постоянная (Crelle's, B. 116). Уже изъ всего сказаннаго нами читатель видитъ, что интегралomъ, какъ орудіемъ, Сонинъ владѣлъ превосходно. Среди его многихъ теоремъ упомяну одну, выдѣленную Nielsen'омъ:

„*Если* $f(t)$*—такая функція, что* $f(t).\log t$ *въ безконечности есть нуль, въ то время какъ*

$$f(0)=a, \quad \int_0^{\infty} f(t).\log t\, dt = A$$

суть конечныя величины не колеблющіяся, то

$$\int_0^{\infty} \frac{f(t)-ae^{-at}}{t}\,dt = \int_0^{\infty} \frac{f(t)-a\,Cos\,(\alpha t)}{t}\,dt = a(C+\log\alpha) - A,$$

гдѣ C—Эйлеровская постоянная".

Мнѣ кажется, что теорема въ родѣ указанной должна быть очень полезной въ изученіи различныхъ интегральныхъ трансцендентностей въ родѣ

$$li(x), \quad Si(x) = \frac{li(e^{xi}) - li(e^{-xi})}{2i} \quad \text{и др.} \quad —$$

Digitized by Google

Задачи вычисленія интеграловъ приближенно путемъ заданія верхняго и нижняго предѣловъ его значеній также интересовали Сонина; въ этой области онъ основывалъ свои изслѣдованія на знаменитыхъ неравенствахъ и методѣ *Чебышева*; нѣкоторыя Чебышевскія формулы были Сониным очень усовершенствованы; это видно напр., изъ его мемуара въ „Запискахъ Имп. Академіи Наукъ“ (за 1898 г.) „*О нѣкоторыхъ неравенствахъ, относящихся къ опредѣленнымъ интеграламъ*“.

Въ этомъ мемуарѣ Сонинъ вывелъ очень элементарно нѣкоторыя изъ неравенствъ П. Л. Чебышева.

Насколько сложные интегралы можно вычислять помощью Сонинскихъ неравенствъ, показываетъ, напр., слѣдующій примѣръ:

$$0{,}662541\ldots<\int_0^{\infty}\frac{4x^3e^{-x^2}dx}{e^{-x^2}+\left(2x+\frac{1}{x}\right)\int_0^x e^{-z^2}dz}<0{,}677995\ldots$$

На одно изъ блестящихъ примѣненій метода функцій жевератриссъ я могу указать на обобщеніе задачи Абеля (Acta math. 1884), сводящейся къ опредѣленію $\varphi(s)$, если дана $F(s)$, изъ условія:

$$F(x)=\int_0^x\frac{\varphi(s)ds}{(x-s)^{\alpha}},\qquad 0<\alpha<1.$$

По поводу искуснаго обобщенія задачи Абеля Сониным и ея рѣшенія *Lalesco* въ своей книжечкѣ „Introduction à la théorie des équations intégrales“ между прочимъ пишетъ:

„Historiquement, la première équation résolue a été

$$F(x)=\int_0^x\frac{\varphi(s)ds}{(x-s)^{\alpha}},\qquad 0<\alpha<1,$$

Digitized by Google

rencontrée par Abel dans un problème élémentaire de Mécanique. Longtemps après un mathématicien russe N. Sonine étudia une équation de la même forme que celle d'Abel mais un peu plus générale. Sonine épuisait pour ainsi dire la portée de l'artifice de calcul employé par Abel, et la question semblait close"...

Но въ 1876 г. Vito Volterra, выдающійся современный математикъ Италіи, представилъ свои, создавшіе эпоху, мемуары по интегральнымъ уравненіямъ въ Римѣ и Туринѣ.

Если припомнить то, что я сказалъ выше о родствѣ нѣкоторыхъ результатовъ Сонина съ интегральными уравненіями, то можно думать, что матеріалы Сонина, созданные имъ въ теоріи самихъ опредѣленныхъ простыхъ и кратныхъ интеграловъ и интегральныхъ уравненій, могутъ быть полезными при занятіяхъ интегральными уравненіями. Я хочу этими словами сказать, что у Сонина есть отрывки современной теоріи, есть матеріалъ для теоріи, но не сама современная теорія; Сонинъ рѣшалъ проблему интегральныхъ уравненій при помощи классическихъ до него существовавшихъ формулъ; можетъ быть, скорѣе можно заключить изъ его произведеній, что такая теорія, какъ современная, должна была быть изобрѣтена.

Интересовался Сонинъ и дифференціальными уравненіями. Самая выдающаяся его работа въ этой области—его докторская диссертація „*Объ интегрированіи уравненій съ частными производными второго порядка*" ****.

Въ этой небольшой, но богатой по содержанію работѣ, Сонинъ объединилъ мысли объ интегрированіи уравненій съ частными производными, принадлежащія *Ampère*'у *, *Lagrange*'у ** и *Darboux* ***. Работа носитъ характеръ удиви-

* Cahier 17 du journal de l'Ecole Polytéchnique.

** Oeuvres T. IV.

*** Journal de l'Ecole Normale, 1870.

**** Работа эта переведена на нѣмецкій языкъ въ Math. Ann. 49 проф. *Engel*'емъ.

Digitized by Google

тельной естественности, ясности, полноты и досказанности.

Интересна также большая работа Сонина по поводу интеграціи уравненія

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{R(x)}{y}.$$

Авторъ воспользовался идеей высказанной впервые еще *Minding*'омъ въ 1862 г. (въ Изв. И. А. Н. Т. 5) о возможности находить частныя рѣшенія при помощи интегрирующаго множителя и наоборотъ, разъ рѣчь идетъ объ уравненіяхъ I-го порядка. Сонинъ въ своемъ мемуарѣ и показалъ, какимъ образомъ можно комбинировать группы частныхъ рѣшеній для полученія интегрирующихъ множителей даннаго уравненія. Мемуаръ этотъ напечатанъ въ Т. 2 и Т. 3 „Изв. Имп. А. Н." за 1895 годъ.

Очень интересенъ также мемуаръ „*Объ опредѣленіи максимальныхъ и минимальныхъ свойствъ плоскихъ кривыхъ*" (посвященный *А. Ю. Давидову*). [Варш. Унив. И. 1886, кн. I и II.].

Если задать семейство кривыхъ дифференціальнымъ уравненіемъ второго порядка

$$q = \varphi(x,y,p), \quad p = \frac{dy}{dx}, \quad q = \frac{d^2y}{dx^2}$$

и искать minimum или maximum интеграла

$$\int_a^b f(x,y,p)dx,$$

то при помощи ур-ія Lagrange'a

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) = 0$$

задача сводится на интеграцію ур-й

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{p} = \frac{dp}{\varphi(x,y,p)} = \frac{dz}{-\frac{\partial \varphi}{\partial p} z},$$

Digitized by Google

$$z=\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}.$$

Отсюда можно найти $f(x,y,p)$, а слѣд. можно сказать, какіе интегралы будутъ minima или maxima для кривыхъ даннаго семейства.

Есть еще и другія интересныя работы у Сонина, но я хочу остановиться, думая, что я уже достаточно охарактеризовалъ научное значеніе только что сошедшаго въ могилу ученаго.

Я хочу только обратить еще вниманіе читателя на мемуаръ Сонина „*Рядъ Ивана Бернулли*“ (Изв. Имп. Ак. Н. 1897, В. VII, 4).

Мемуаръ этотъ важенъ въ научноисторическомъ значеніи: Сонинъ убѣдительно и ярко доказываетъ намъ, что элементарная справедливость требуетъ, чтобы рядомъ съ именами Taylor'a, Maclaurin'a, но *на первомъ мѣстѣ*, было поставлено имя Ивана Бернулли и 1694-ый годъ—годъ обнародованія всеобъемлющаго ряда „series universalissima“.

Судьба иногда такъ несправедливо разсыпаетъ лавры и увѣковѣчиваетъ однихъ съ тѣмъ, чтобы набросить покрывало неизвѣстности и забвенія на настоящихъ творцовъ и создателей.

Такъ случилось и съ Иваномъ Бернулли, и хвала и честь Н. Я. Сонину, сорвавшему это покрывало забвенія и людской несправедливости по отношенію къ великому мыслителю Ивану Бернулли.

Въ Johannis Bernoulli „Opera omnia“ 1742. T. I, p. 125 стоитъ между прочимъ такой рядъ:

$$ndz=ndz+zdn-zdn-\frac{z^2}{1.2}\frac{d^2n}{dz}+\frac{z^2}{2}\frac{d^2n}{dz}+\frac{z^3}{3!}\frac{d^3n}{dz^2}-\frac{z^3}{3!}\frac{d^3n}{dz^2}-\ldots$$

или иначе

$$ndz=d(nz)-d\left(\frac{z^2}{2}\frac{dn}{dz}\right)+d\left(\frac{z^3}{3!}\frac{d^2n}{dz^2}\right)-\ldots,$$

Digitized by Google

откуда по интеграціи находимъ:

$$\int ndz = nz - \frac{z^2}{2}\frac{dn}{dz} + \frac{z^3}{3!}\frac{d^2n}{dz^2} - \ldots .$$

Помощью этого ряда Ив. Бернулли получаетъ многія разложенія и интегрируетъ даже нѣкоторыя дифференціальныя уравненія.

Вотъ образчикъ его разсужденія: напр., изъ

$$dy = \frac{dx}{a+x}$$

онъ находитъ:

$$y = log\,(a+x) - log\,a = \frac{x}{a+x} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a+x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{a+x}\right)^3 + \ldots$$

Формула эта по той эпохѣ — замѣчательная.

Въ 1695 г. Ив. Бернулли вывелъ еще двѣ другія формулы также примѣчательныя:

$$\int ndz = nz - \frac{dn}{dx}\int zdx + \frac{d^2n}{dx^2}\int dx \int zdx - \ldots,$$

$$\int ndz = \frac{dz}{dx}\int ndx - \frac{d^2z}{dx^2}\int dx \int ndx + \ldots .$$

Помощью этихъ формулъ Ив. Бернулли находитъ, напр., такую интересную формулу:

$$\int_0^1 x^x dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \ldots .$$

Taylor же опубликовалъ свой *Methodus incrementorum directa et inversa* лишь въ 1715 г., но выводъ его ряда менѣе совершенъ, нежели у Ивана Бернулли, и тоже нужно сказать о *Treatise of fluxions* Маклорена (1749 г.)

Для современнаго читателя выводы Ивана Бернулли безу-

Digitized by Google

коризненны въ томъ отношеніи, что помощью его метода *можно вывести строку Taylor'a съ остаточнымъ членомъ.*

На этомъ я остановлюсь! Мы видимъ, что Н. Я. Сонинъ былъ крупнымъ математикомъ, но сосредоточеннымъ на опредѣленныхъ лишь частяхъ Высшаго анализа.

Въ заключеніе я приведу нѣкоторыя выдержки изъ отзыва Комиссіи по присужденію преміи имени *В. Я. Буняковскаю* Н. Я. Сонину въ 1890 за совокупность тѣхъ 7 его работъ, кои онъ представилъ Академіи Наукъ на соисканіе этой преміи.

Вотъ эти 7 работъ:

1) Объ опредѣленіи максимальныхъ и минимальныхъ свойствъ плоскихъ кривыхъ. 1886 г.

2) О приближенномъ вычисленіи опредѣленныхъ интеграловъ и вычисленіи входящихъ при этомъ цѣлыхъ функцій. 1887 г.

3) О Бернулліевыхъ полиномахъ и ихъ приложеніяхъ. 1889 г.

4) Объ одной формулѣ приведенія кратныхъ интеграловъ. 1889 г.

5) О приведеніи одного кратнаго интеграла 1889 г.

6) О представленіи логариома и Эйлерова постояннаго опредѣленнымъ интеграломъ. 1889 г.

7) О прерывной функціи $[x]$ и ея примѣненіяхъ. 1889 г.

За исключеніемъ статьи № 5, помѣщенной въ Московскомъ Математическомъ Сборникѣ, всѣ прочія изданы въ Варшавскихъ Университетскихъ Извѣстіяхъ.

Докладчиками и критиками были такіе извѣстные математики какъ покойные *П. Л. Чебышевъ*, *В. А. Имшенецкій* и нынѣ здравствующій *А. А. Марковъ*. Вотъ ихъ заключительныя слова, взятыя нами изъ „Записокъ И. А. Н. Т. 67, 1892 г.“

„..... Изъ предыдущаго общаго очерка содержанія и характера произведеній Н. Я. Сонина можно видѣть, что, внося

Digitized by Google

свои собственные взгляды или проводя новыя мысли въ какомъ-либо вопросѣ, онъ вообще всегда опирался на основательное критическое изученіе совокупности соотвѣтствующихъ произведеній спеціальной литературы, вслѣдствіе чего каждый изъ его трудовъ имѣетъ вообще значеніе цѣннаго научнаго вклада".

Казань.
1915. III. 8.

Проф. Н. Н. Парфентьевъ.

Digitized by Google

Новая теорія электромагнитныхъ явленій въ движущихся средахъ [1].

(Предварительное сообщеніе).

Д. А. Гольдгаммера.

Теорія *Лорентца*, какъ извѣстно, требуетъ для объясненія знаменитаго опыта *Майкельсона* спеціальнаго допущенія о сжатіи движущихся тѣлъ; но тогда является непонятнымъ, почему нѣтъ, напр., двойного преломленія въ стеклѣ, движущемся вмѣстѣ съ землей. Теорія *Эйнштейна* устраняетъ это противорѣчіе, но зато вноситъ черезчуръ большія измѣненія въ наши представленія о времени и пространствѣ и ведетъ къ инымъ затрудненіямъ, значеніе которыхъ, повидимому, весьма велико.

При такихъ условіяхъ невольно возникаетъ вопросъ, нѣтъ ли возможности подойти къ теоріи интересующихъ насъ явленій съ третьей стороны, оставаясь при этомъ на почвѣ идей *Фарадея*, *Максвелля* и *Гертца*. Мнѣ думается, что эта возможность есть.

Пусть мы имѣемъ тѣло, создающее вокругъ себя электромагнитное поле; такое тѣло назовемъ „*источникомъ*“ и допу-

---

[1] Доложено въ засѣданіи Физико-математическаго Общества при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ 21 февраля 1915.

Digitized by Google

стимъ сначала, что онъ находитъ въ безвоздушномъ пространствѣ. Если E_0 есть электрическая сила поля (X_0, Y_0, Z_0 ея слагающія по осямъ координатъ) и H_0 — магнитная сила (слагающія L_0, M_0, N_0), то уравненія *Максвелля* для названнаго пространства суть

$$\frac{\partial X_0}{\partial t} = c\left(\frac{\partial M_0}{\partial z} - \frac{\partial N_0}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial L_0}{\partial t} = c\left(\frac{\partial Z_0}{\partial y} - \frac{\partial Y_0}{\partial z}\right)$$

и аналогично для другихъ компонентъ; c—скорость свѣта и

$$\frac{\partial X_0}{\partial x} + \frac{\partial Y_0}{\partial y} + \frac{\partial Z_0}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial L_0}{\partial x} + \frac{\partial M_0}{\partial y} + \frac{\partial N_0}{\partial z} = 0.$$

Приведемъ источникъ въ движеніе по оси x *съ постоянной скоростью* q. По опредѣленію E_0 и H_0 это суть числа силовыхъ электрическихъ и магнитныхъ линій, проходящихъ черезъ единицы площадей, имъ нормальныхъ. Вмѣстѣ съ *Гертцемъ* мы примемъ, что эти линіи приводятся источникомъ въ движеніе и тоже со скоростью q. Тогда для *неподвижнаго* наблюдателя, т. е. въ неподвижной точкѣ x, y, z электромагнитное поле дается уравненіями

$$\frac{dX_0}{dt} = c\left(\frac{\partial M_0}{\partial z} - \frac{\partial N_0}{\partial y}\right), \quad \frac{dL_0}{dt} = c\left(\frac{\partial Z_0}{\partial y} \quad \partial y.\right.$$

и т. д., причемъ

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + q\frac{\partial}{\partial x},$$

гдѣ $\frac{\partial}{\partial t}$ означаетъ дифференцированіе по времени, входящему явно.

Уравненія эти по виду тожественны съ *Гертцовскими*, но по существу отъ нихъ отличны; мы разсматриваемъ силовыя линіи, какъ линіи извѣстнаго состоянія *неподвижнаго* эѳира, тогда какъ у *Гертца* принимается и эѳиръ движущимся со ско-

Digitized by Google

ростію q. Разумѣется, теперь $X_0 \ldots, L_0$,—не тѣ, что были ранѣе въ отсутствіе движенія.

Теперь замѣнимъ часть эѳира, окружавшаго нашъ источникъ, нѣкоторой діэлектрической средой.

Пока источникъ неподвиженъ, ур. поля суть *для среды*

$$\frac{\partial \Xi}{\partial t} = c\left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial L}{\partial t} = c\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right),$$

гдѣ Ξ,Н Z слагающія электростатической индукціи, а намагниченіемъ среды мы пренебрегаемъ; при этомъ X, Y, Z отличны отъ X_0, Y_0, Z_0 и

$$\Xi = \varepsilon X, \ldots$$

гдѣ ε — діэлектрическая постоянная среды.

Всякая теорія дисперсіи даетъ далѣе

$$\Xi = X + 4\pi \Sigma e\xi, \ldots$$

гдѣ $\Sigma e\xi$ есть слагающая по x діэлектрическаго момента единицы объема среды, обусловленная поляризаціей, т. е. движеніемъ электроновъ и атомовъ среды съ зарядами e, смѣщаемыхъ изъ положенія равновѣсія на разстоянія ξ по оси x.

Отчего X, Y, Z отличны отъ X_0, Y_0, Z_0? Вообще говоря, отъ разныхъ причинъ, напр., оттого что на мѣстахъ касанія среды и эѳира появляются *индуцированные* заряды, частью уничтожающіе дѣйствіе начальнаго заряда источника и т. д. Такъ въ случаѣ шара съ зарядомъ Q электрическая сила въ эѳирѣ, какъ извѣстно, есть

$$E_0 = \frac{Q}{r^2},$$

(гдѣ r разстояніе разсматриваемой точки отъ центра шара),

Digitized by Google

а въ средѣ сила будетъ, если ε —діэлектрическая постоянная

$$E=\frac{Q}{\varepsilon r^2};$$

зато индукція будетъ прежняя

$$E_o=\frac{Q}{r^2}=\frac{Q}{\varepsilon r^2}+4\pi\Sigma e\xi=\varepsilon E.$$

Остановимся сначала на случаяхъ электромагнитнаго излученія и волнъ. Эти процессы состоятъ, какъ извѣстно, въ томъ, что отъ источника отрываются силовыя линіи и въ видѣ замкнутыхъ кривыхъ движутся со скоростью свѣта.

Если источникъ движется, то его скорость получаютъ и оторвавшіяся силовыя линіи (X_0, Y_0, Z_0), а входя внутрь среды (ε), онѣ „превращаются“ въ линіи X, Y, Z.

Соотвѣтственно сказанному, движеніе источника вызываетъ въ *средѣ* движеніе силовыхъ линій именно E, тогда какъ силовыя линіи, даваемыя величиной $4\pi\Sigma e\xi$,... остаются неподвижными.

Слѣдовательно уравненія электромагнитнаго поля *въ средѣ* для *неподвижнаго* наблюдателя теперь будутъ съ одной стороны

$$\frac{\partial(\Xi-X)}{\partial t}+\frac{dX}{dt}=c\left(\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial y}\right) \text{ и т. д.,}$$

съ другой все число магнитныхъ силовыхъ линій H связано съ индукціей Ξ, H, Z такъ, что съ силой X, Y, Z связано ихъ лишь $H\frac{X}{\Xi}=\frac{H}{\varepsilon}$; поэтому движеніе силовыхъ линій E приведетъ въ движеніе лишь *часть* $\frac{H}{\varepsilon}$ магнитныхъ силовыхъ линій, а остальныя линіи числомъ $H\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}$ останутся неподвижными

мы будемъ имѣть

Digitized by Google

$$\frac{\partial \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} L}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{dL}{dt} = c\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right).$$

Вводя въ эти уравненія вмѣсто $\frac{d}{dt}$ его выраженіе и замѣняя X,.. черезъ Ξ,... имѣемъ, напр.,

$$\frac{\partial \Xi}{\partial t} + \frac{q}{\varepsilon}\frac{\partial \Xi}{\partial x} = c\left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}\right) \text{ и т. д.}$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{q}{\varepsilon}\frac{\partial L}{\partial x} = c\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) \text{ и т. д.}$$

и эти уравненія опять имѣютъ видъ уравненій *Гертца*, какъ будто бы среда имѣла вмѣстѣ съ эѳиромъ скорость

$$q' = \frac{q}{\varepsilon},$$

и конечно снова эти Ξ,... L,... не тѣ, что были въ отсутствіе движенія.

Пусть, наконецъ, источникъ неподвиженъ, а движется разсматриваемая нами среда съ скоростью q. Тогда движеніе будутъ имѣть только силовыя линіи „поляризаціи“

$$(\varepsilon - 1)E$$

и связанныя съ ними магнитныя линіи

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} H$$

и мы получимъ

$$\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{d(\Xi - X)}{dt} = c\left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}\right) \text{ и т. д.}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\frac{dL}{dt} = c\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) \text{ и т. д.,}$$

что даетъ просто

Digitized by Google

$$\frac{\partial \Xi}{\partial t} + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} q \frac{\partial \Xi}{\partial x} = c\left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} q \frac{\partial L}{\partial x} = c\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)$$

и аналогично для другихъ осей.

Теперь у насъ „кажущаяся" скорость движенія среды съ эѳиромъ есть

$$q' = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} q.$$

Далѣе очевидно, что уравненія, вполнѣ совпадающія съ таковыми *Гертца*

$$\frac{\partial \Xi}{\partial t} + q \frac{\partial \Xi}{\partial t} = c\left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}\right) \text{ и т. д.}$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} + q \frac{\partial L}{\partial x} = c\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) \text{ и т. д.}$$

получатся у насъ, когда въ движеніи со скоростью q находятся всѣ силовыя линіи среды, т. е когда движется и источникъ, и среда, и лишь наблюдатель неподвиженъ.

Изъ самого вывода всѣхъ этихъ уравненій ясно, что уравненія остаются въ силѣ и тогда, когда q ест скорость движенія не абсолютнаго, а *относительнаго*, т. е. скорость движенія *относительно наблюдателя*. А въ такомъ случаѣ, полагая въ послѣднихъ уравненіяхъ

$$q = 0,$$

получаемъ обычныя уравненія *Максвелля*.

Такимъ образомъ съ точки зрѣнія предлагаемой теоріи прямолинейное движеніе источника, среды и наблюдателя съ общей постоянной скоростью не вноситъ ни малѣйшихъ измѣненій въ наблюдаемыя электромагнитныя явленія. Стало быть

Digitized by Google

при помощи этихъ явленій обнаружить поступательное движеніе земли *невозможно* и отрицательный результатъ опытовъ *Майкельсона* получаетъ свое объясненіе, вполнѣ строгое. Механическій принципъ относительности въ разсматриваемыхъ электромагнитныхъ явленіяхъ соблюдается.

Изъ формы полученныхъ уравненій ясно, что въ разбираемыхъ случаяхъ движенія въ средѣ возможны поперечныя волны; заряды ϱ, опредѣляемые извѣстнымъ соотношеніемъ

$$\frac{\partial \Xi}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial z}=4\pi\varrho,$$

движеніемъ не создаются $\left(\frac{d\varrho}{dt}=0\right)$ и электрическая сила въ плоской волнѣ нормальна магнитной силѣ, если она нормальна въ случаѣ отсутствія движенія, ибо

$$\frac{d(\Xi L+\mathrm{H}M+\mathrm{Z}N)}{dt}=0.$$

Съ другой стороны форма нашихъ уравненій такова, что она получается изъ уравненій для *неподвижныхъ* средъ

$$\frac{\partial \Xi}{\partial t}=c\left(\frac{\partial M}{\partial z_0}-\frac{\partial N}{\partial y_0}\right),\ \frac{\partial L}{\partial t}=c\left(\frac{\partial Z}{\partial y_0}-\frac{\partial Y}{\partial z_0}\right)\text{ и т. д.}$$

простымъ преобразованіемъ координатъ x_0,y_0,z_0 въ x,y,z, связанныя уравненіями

$$x=x_0+q't,\ y=y_0,\ z=z_0.$$

Отсюда слѣдуетъ: имѣя опредѣленныя электромагнитныя явленія въ неподвижныхъ средахъ и переходя въ выраженіяхъ величинъ, характеризующихъ эти явленія, отъ x_0,y_0,z_0, къ x,y,z, мы получимъ выраженія тѣхъ же величинъ для случая движенія. Но опять то, что мы въ томъ и другомъ случаѣ

Digitized by Google

принимаемъ за электрическую и магнитную силу, не одно и то же. Разумѣется, этотъ пріемъ не можетъ дать болѣе того, что даютъ непосредственно дифференціальныя уравненія.

Перейдемъ теперь къ приложеніямъ теоріи.

Принципъ Допплера. Для плоской волны въ неподвижной средѣ мы имѣемъ, напр., въ обычныхъ обозначеніяхъ

$$X = A\sin\frac{2\pi}{T_0}\left(t - \frac{a_0x_0 + b_0y_0 + c_0z_0}{V_0}\right) = A\sin\Theta.$$

Источникъ этой волны пришелъ въ движеніе со скоростью q; *окружающая* его среда (ε) и наблюдатель неподвижны, q образуетъ съ V_0 *острый* уголъ Согласно выше сказанному теперь

$$q' = \frac{q}{\varepsilon}, \quad x_0 = x - q't, \quad y_0 = y, \quad z_0 = z$$

и мы имѣемъ для неподвижнаго наблюдателя

$$\Theta = \frac{2\pi}{T_0}\left[t - \frac{a_0x + b_0y + c_0z}{V_0} + \frac{a_0q't}{V_0}\right]$$

$$\Theta = \frac{2\pi}{T_0}\left[t\left(1 + \frac{a_0q'}{V_0}\right) - \frac{a_0x + b_0y + c_0z}{V_0}\right]$$

$$\Theta = \frac{2\pi}{T_0}\left(1 + \frac{a_0q_0'}{V_0}\right)\left[t - \frac{a_0x + b_0y + c_0z}{V_0\left(1 + \frac{a_0q'}{V_0}\right)}\right],$$

т. е.

$$\Theta = \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{a_0x + b_0y + c_0z}{V}\right)$$

и отсюда слѣдуетъ (благодаря тому, что T у насъ ничѣмъ болѣе не опредѣлено)

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{T_0}\left(1 + \frac{a_0q'}{V_0}\right), \quad V = V_0 + a_0q'.$$

Digitized by Google

Такимъ образомъ неподвижный наблюдатель увидитъ періодъ волны T вмѣсто T_0 и $T<T_0$. Это—объясненіе принципа *Доплера*. Въ то же время оказывается, что направленіе нормали плоской волны актомъ движенія не измѣняется, но скорость по нормали измѣняется. Оторвавшіяся отъ источника силовыя линіи сохраняютъ свою кажущуюся скорость (q'), которая и слагается геометрически со скоростью свѣта V_0.

Если затѣмъ свѣтъ переходитъ изъ среды, окружающей источникъ, въ иныя, подвижныя или неподвижныя, направленіе скорости свѣта въ этихъ тѣлахъ опредѣляется уже актомъ преломленія (законъ *Декарта*): нужныя соотношенія даются условіями на границѣ перехода изъ одной среды въ другую, при чемъ, напр., очевидно, что періодъ T останется во всѣхъ средахъ одинъ и тотъ же для того же неподвижнаго наблюдателя.

Наша теорія предполагаетъ q независимымъ отъ времени. Если сохранить наши уравненія и для случая q перемѣннаго со временемъ, то, очевидно, рѣшеніе дифференціальныхъ уравненій будетъ гораздо сложнѣе и вліяніе движенія не сведется просто къ измѣненію T_0, V_0 на T, V.

Подобные случаи во всѣхъ теоріяхъ представляютъ большія затрудненія. Поэтому и наша теорія не приложима, напр., въ случаѣ лучеиспусканія двойныхъ звѣздъ, когда V и T оказываютъ сами функціями времени; тогда не будетъ просто

$$V = V_0 + q' a_0$$

и тѣ возраженія, которыхъ сдѣлалъ *de Ситтеръ* [1]) теоріи *Ритца* отпадаютъ. Я впрочемъ не имѣю подъ руками справки и не знаю, допускаетъ ли и названная теорія перемѣнныя со временемъ скорости.

---

[1]) *B. de Ситтеръ* Ж. Р. Ф. Х. О. 45, p. 147, 1913

Digitized by Google

Опытъ Физо. Пусть свѣтъ отъ неподвижнаго источника, распространяясь въ нѣкоторой средѣ (напр., воздухъ), переходитъ затѣмъ въ иную среду, имѣющую движеніе по оси x со скоростью q (текущая вода). Наблюдатель неподвиженъ.

Для всякаго періода скорость свѣта по нормали волны въ движущейся въ средѣ есть по предыдущему

$$V = V_0 + q' \cos(q V_0) .$$

и теперь у насъ для воды согласно стр. 24.

$$q' = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} q .$$

Направленіе V опредѣляется закономъ *Декарта*. Если волна входитъ въ движущуюся среду нормально къ границѣ, какъ это имѣло мѣсто въ опытѣ *Физо*, то уголъ преломленія есть 0. А такъ какъ теченіе воды идетъ параллельно q, то

$$\cos(q V_0) = \pm 1$$

и скорость свѣта въ двухъ отдѣленіяхъ съ противоположными теченіями воды есть

$$V = V_0 \pm q'$$

или же, такъ какъ

$$\varepsilon = n^2 ,$$

гдѣ n показатель преломленія неподвижной воды, имѣемъ

$$V = V_0 \pm q\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) .$$

Это—знаменитая формула *Френеля*, вполнѣ согласная съ опытомъ.

Въ данномъ случаѣ наша теорія близка къ идеямъ, высказаннымъ *Рейффомъ*[1]).

---

[1]) *R. Reiff*, Wied. Ann. 55, p. 82, 1895.

Digitized by Google

Аберрація свѣта. Если въ нашихъ уравненіяхъ электромагнитнаго поля фигурируетъ скорость q', то въ средѣ возможны плоскія, строго поперечныя волны со скоростью

$$V = V_0 + q' \cos(q V_0),$$

гдѣ V_0 скорость свѣта въ отсутствіе движенія.

Въ такомъ случаѣ, если, напр., у насъ электрическая сила въ плоской волнѣ направлена по оси x, а магнитная по оси y, т. е. мы имѣемъ

$$\Xi = H = Z = 0, \; L = N = 0, \; M,$$

то обычнымъ способомъ докажемъ, что

$$M = -\frac{V_0}{c}\Xi;$$

а такъ какъ энергія единицы объема среды, какъ магнитная, такъ и электрическая, опредѣляются и въ случаѣ движенія формулами

$$e_m = \frac{1}{8\pi}(L^2 + M^2 + N^2), \quad e_e = \frac{\varepsilon}{8\pi}(X^2 + Y^2 + Z^2),$$

то легко видѣть, что и соотношеніе

$$e_e = e_m = \frac{e_e + e_m}{2} = \frac{e}{2}$$

остается въ силѣ для плоскихъ волнъ.

Далѣе векторъ *Пойнтинга* P и его слагающія

$$P_x = \frac{c}{4\pi}(YN - ZM) \text{ и т. д.}$$

имѣютъ и въ случаѣ движенія подобныя же выраженія[1]).

---

[1]) *W. Wien*, Wied. Ann. 47, p. 327, 1892.

Digitized by Google

Поэтому получаемъ и теперь

$$P^2=\frac{c^2}{(4\pi)^2}\left\{(L^2+M^2+N^2)(X^2+Y^2+Z^2)-(XL+YM+ZN)^2\right\},$$

что въ силу взаимной нормальности $X,Y,Z,$ и L,M,N даетъ

$$P^2=\frac{c^2}{\varepsilon(4\pi)^2}8\pi e_m.8\pi e_e$$

или

$$P^2=\frac{1}{\varepsilon}c^2e^2=V_0^2e^2,\quad P=V_0e,$$

какъ и въ случаѣ, когда $q'=0$.

Такимъ образомъ у насъ и въ случаѣ движенія

$$P_x=eV_0\cos(V_0x) \text{ и т. д.}$$

Пусть наблюдатель и среда, въ которой онъ находится, имѣютъ скорость q по оси x; очевидно теперь вліянія обоихъ движеній сложатся и въ нашихъ уравненіяхъ надо взять

$$q'=\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}q-q, \text{ т. е. } q'=-\frac{q}{\varepsilon}$$

и мы имѣемъ

$$V=V_0+q'\cos(V_0x)$$

для всякаго направленія нормали плоской волны. Но въ то же время изъ уравненій электромагнитнаго поля для случая движенія слѣдуетъ [1])

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint ed\tau=-\iint P_n dS-\iint eq'_n dS,$$

гдѣ n внѣшняя нормаль къ поверхности S, ограничивающей нѣкоторый объемъ съ элементомъ его $d\tau$.

Такимъ образомъ теперь энергія переносится не по нор-

[1]) *D. A. Goldhammer*, Ann. d. Physik 4, p. 831, 1904.

Digitized by Google

мали волны и *роль* вектора *Пойнтинга* играетъ векторъ P', при чемъ, очевидно, у насъ

$$P'_x = P_x + eq', \quad P'_y = P_y, \quad P'_z = P_z.$$

Полагая поэтому

$$P' = eW,$$

гдѣ W скорость свѣта по лучу (т. е. по направленію P'), имѣемъ

$$W\cos(Wx) = V_0\cos(V_0x) + q'$$
$$W\cos(Wy) = V_0\cos(V_0y)$$
$$W\cos(Wz) = V_0\cos(V_0z).$$

Умноженіе этихъ уравненій на $\cos qx$, $\cos qy$, $\cos qz$ соотвѣтственно и сложеніе даетъ

$$W\cos(Wq) = V_0\cos(V_0q) + q',$$

откуда заключаемъ: при

$$\cos(Wq) = 0$$

будетъ

$$\cos(V_0q) = -\frac{q'}{V_0} = \frac{q}{\varepsilon V_0}.$$

Такимъ образомъ при углѣ

$$Wq = \frac{\pi}{2}$$

уголъ V_0q оказывается острымъ, т. е. направленіе луча уклоняется отъ направленія нормали волны *въ сторону движенія наблюдателя*.

Далѣе, умножая наши уравненія на $\cos(Wx)$, $\cos(Wy)$ и $\cos(Wz)$ и складывая ихъ, получаемъ

$$W = V_0\cos(WV_0) + q'\cos(Wq)$$
$$W - q'\cos(Wq) = V_0\cos(WV_0);$$

Digitized by Google

наконецъ, переписывая наши уравненія въ видѣ

$$W\cos(Wx) - q' = V_0\cos(V_0x)$$

$$W\cos(Wy) \quad = V_0\cos(V_0y)$$

$$W\cos(Wz) \quad = V_0\cos(V_0z),$$

квадрируя ихъ и складывая, имѣемъ

$$W^2 - 2Wq'\cos(Wq) + q'^2 = V_0^2$$

или

$$[W - q'\cos(Wq)]^2 = V_0^2 - q'^2\sin^2(Wq).$$

Отсюда слѣдуетъ, на основаніи послѣдняго уравненія стр. 13

$$q'^2\sin^2(Wq) = V_0^2\sin^2(WV_0)$$

$$\sin(WV_0) = \frac{q}{\varepsilon V_0}\sin(Wq),$$

причемъ знакъ второй части долженъ быть +, ибо *направленіе* V_0 у насъ уже опредѣлено.

Какъ видимъ, величина уклоненія луча отъ нормали волны зависитъ отъ оптическихъ свойствъ *движущейся съ наблюдателемъ среды*. Если послѣдняя эѳиръ или газъ обычной плотности, будетъ

$$\varepsilon = 1, \quad V_0 = c$$

$$\sin(WV_0) = \frac{q}{c}\sin(Wq).$$

Стало быть, если источникомъ свѣта являетъ неподвижная звѣзда, а наблюдатель находится въ воздухѣ, движущемся съ землею поступательно около солнца со скоростью q, мы имѣемъ въ полученныхъ соотношеніяхъ *объясненіе явленія аберраціи свѣта.*

Чтобы увидѣть неподвижную звѣзду на крестѣ нитей зри-

Digitized by Google

тельной трубы, мы направляемъ оптическую ось трубы по лучу свѣта; хотя движеніемъ земли скорость свѣта въ *стеклѣ и мѣняется*, но это *не вліяетъ на положеніе оптической оси трубы*. Стало быть, безразлично, будетъ ли труба наполнена воздухомъ или, напр., водой (опытъ *Эри*).

(Окончаніе въ слѣдующемъ выпускѣ).

Digitized by Google