I 4,3,3,4

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ PHYSICO-MATHÉMATIQUE

de Kasan

Deuxième serie. Tome I. № 1.

Q
60
.K21
A2

ИЗВѢСТІЯ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ.

Вторая серія

ТОМЪ I

№ 1

КАЗАНЬ
Типографія Императорскаго Университета
1891

Digitized by Google

СОДЕРЖАНІЕ.

I.

А. Васильевъ. Изъ исторіи и философіи понятія о цѣломъ положительномъ числѣ.

Г. Шебуевъ. Къ вопросу о распространеніи теплоты въ текущей жидкости путемъ теплопроводности и конвекціи.

И. Долбня. Объ интегрированіи посредствомъ эллиптическихъ функцій.

Я. Корнухъ-Троцкій. Наблюденіе съ Казанской обсерваторіи метеорнаго потока «персеидъ» 10 августа 1890 года.

II.

Лѣтопись Физико-математическаго Общества.

Уставъ Физико-математическаго Общества.

Списокъ членовъ Физико-математическаго Общества въ октябрѣ 1890 г.

Протоколы 1—5 засѣданій Физико-математическаго Общества.

Списокъ книгъ поступившихъ въ библіотеку Общества.

Ѳ. Суворовъ. Библіографическій отзывъ о «Сборникѣ упражненій въ умственномъ счетѣ» Н. Бобровникова.

Объявленія.

Table des matiéres.

A. Wassilieff. Sur l'histoire et philosophie de la notion du nombre entier et positif.

G. Schebouieff. Sur la propagation de la chaleur dans le fluide coulant au moyen de la conductibilité et de la convection.

I. Dolbnia. Intégration au moyen des fonctions elliptiques.

J. Cornoukh-Trotzky. Observation des Perséides à l'Observatoire de Kasan, le 10 aout 1890.

Statuts de la Société Physico-mathématique.

Liste des membres de la Société Physico-mathématique.

Procès-verbaux des séances (1—5) de la Société Physico-mathématique.

Liste des ouvrages reçus par la bibliothèque de la Société.

Th. Souvoroff. Notice bibliographique.

Annonces.

Digitized by Google

Kazan. Universitet. Fiziko-matematicheskoe obshchestvo.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ PHYSICO-MATHÉMATIQUE

de Kasan

Deuxième serie. Tome I. № 1.

Q
60
.K21
A2

ИЗВѢСТІЯ

Izviestiia

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ.

ВТОРАЯ СЕРІЯ

ТОМЪ I

№ 1

КАЗАНЬ
Типографія Императорскаго Университета
1891

Digitized by Google

Печатано по опредѣленію Совѣта Физико-математическаго Общества при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ.

Предсѣдатель *А. Васильевъ.*



Digitized by Google

Sen.
Gift
Flex Zuw
12-5-37 n.m.

ИЗЪ ИСТОРІИ И ФИЛОСОФІИ ПОНЯТІЯ О ЦѢЛОМЪ ПОЛОЖИТЕЛЬНОМЪ ЧИСЛѢ.

(Рѣчь, произнесенная 28 октября 1890 г. при открытіи Физико-математическаго общества при Императорскомъ Казанскомъ университетѣ)

Физико-математическое общество имѣетъ своею цѣлью содѣйствіе развитію наукъ физико-математическихъ, тѣхъ наукъ, которыя прилагаютъ математическій методъ къ познанію феноменовъ окружающаго насъ міра. Область этихъ наукъ постепенно расширяется. Уже давно стало достояніемъ исторіи средневѣковое „quadrivium“, состоявшее изъ ариѳметики, геометріи, астрономіи и музыки. За созданіемъ аналитической механики послѣдовало созданіе математической физики. На очереди стоитъ приложеніе математики къ химіи, физіологіи, психологіи и логикѣ. Математическій методъ является необходимымъ орудіемъ и въ области наукъ общественныхъ. Не говоря о томъ, что правильное приложеніе статистическаго метода, безъ котораго едва-ли возможны какіе-либо успѣхи въ области изученія массовыхъ явленій общественной жизни, не мыслимо безъ контроля той вѣтви знаній, которая носитъ названіе математической статистики, не говоря о томъ, что развитіе благодѣтельной операціи страхованія, которой предстоитъ такая важная роль въ смягченіи золъ общественной жизни, не возможно безъ приложенія математическаго метода, мы имѣемъ въ трудахъ Gossen'a, Jevons'a, Walras'a, Cournot вполнѣ разработанные трактаты „чистой“ политической экономіи, основанной на приложеніи математическаго метода къ изученію явленій хозяйственной жизни общества и причисляемой авторами къ наукамъ физико-математическимъ.

Digitized by Google

Причина, почему человѣческій духъ можетъ стремиться и надѣяться подчинить математическому методу всѣ вопросы человѣческаго знанія, заключается въ томъ первостепенномъ значеніи, которое во всякомъ точномъ знаніи не можетъ не имѣть то основное понятіе, которое составляетъ предметъ чистой математики: понятіе о числѣ. Мы приходимъ къ числу всякій разъ, когда мы прибѣгаемъ къ счету и измѣренію, этимъ „основаніямъ плодотворнѣйшихъ, точнѣйшихъ и вѣрнѣйшихъ научныхъ методовъ“ (Гельмгольцъ). Только численно выражающіеся законы природы могутъ привести насъ къ полному объясненію и предсказанію явленій, къ этой конечной цѣли всякаго познанія—мысль, которую Кантъ выразилъ словами: „въ каждомъ знаніи заключается только на столько науки, на сколько въ немъ математики“.

Такимъ высокимъ значеніемъ понятія о числѣ объясняется и оправдывается, надѣюсь, та смѣлость, съ которою я рѣшаюсь первую рѣчь, прочитанную на первомъ засѣданіи физико-математическаго общества, посвятить понятію о цѣломъ положительномъ числѣ и остановить Ваше благосклонное вниманіе на нѣкоторыхъ фактахъ изъ исторіи этого понятія и на новѣйшихъ пріобрѣтеніяхъ въ его логикѣ.

Для насъ является конечно невозможнымъ прослѣдить по непосредственнымъ источникамъ генезисъ понятія о цѣломъ положительномъ числѣ. Древнѣйшій письменный математическій памятникъ, дошедшій до насъ, папирусъ, написанный Египетскимъ писцемъ Аамесу за 1700 лѣтъ до Р. Х. свидѣтельствуетъ намъ, что и въ это отдаленное время Египтяне были знакомы съ дѣйствіями не только надъ цѣлыми числами, но и надъ дробями. За неимѣніемъ непосредственныхъ свидѣтельствъ мы должны обратиться къ свидѣтельствамъ косвеннымъ. Такими косвенными свидѣтельствами являются данныя этнологіи, относящіяся къ современнымъ

Digitized by Google

дикарямъ, данныя, которыя можно почерпнуть, изучая развитіе дѣтей и наконецъ данныя, извлекаемыя изъ изученія съ одной стороны-народныхъ преданій, съ другой-языка, который является несомнѣнно памятникомъ психологической работы давно отжившихъ поколѣній.

И всѣ эти косвенныя свидѣтельства одинаково освѣщаютъ и подтверждаютъ двѣ истины, имѣющія важное значеніе и для исторіи человѣческаго духа и для психологіи понятія о числѣ.

Многотрудною и продолжительною психологическою работою пріобрѣтало постепенно человѣчество понятіе о послѣдовательныхъ цѣлыхъ числахъ, расширяло, если позволено такъ выразиться, свой численный кругозоръ; при этомъ понятію о числѣ отвлеченномъ всегда предшествовало и сначала съ нимъ тѣсно сливалось понятіе о числѣ какихъ-нибудь опредѣленныхъ предметовъ, большею частью органовъ человѣка, служившихъ ему пособіемъ при счетѣ. Мы можемъ даже съ помощью преимущественно данныхъ лингвистики видѣть въ дали вѣковъ, намъ предшествующихъ, тѣ этапы, на которыхъ останавливалась по временамъ психологическая работа человѣчества, чтобы, постоянно затѣмъ возобновляясь, привести насъ наконецъ къ тому понятію о безконечномъ рядѣ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ, который составляетъ предметъ изученія чистой математики и исходя изъ котораго математика, расширяя послѣдовательно понятіе о числѣ, достигла до понятія о комплексномъ числѣ, введеніе котораго составляетъ характеристическую черту математики XIX столѣтія.

Съ трудомъ можемъ мы представить себѣ народъ, у котораго не существуетъ особенныхъ названій для чиселъ большихъ трехъ, именъ числительныхъ, отличныхъ отъ двухъ и трехъ, народъ, для котораго всѣ прочія числительныя выра-

Digitized by Google

жаются однимъ словомъ куча, а между тѣмъ многія свидѣтельства путешественниковъ и этнологовъ указываютъ на то, что такіе народы существуютъ. Какъ ребенокъ, не научившійся считать, не отвѣтитъ числомъ на вопросъ, сколько у него куколъ, но подробно опишетъ всѣ свои куклы, такъ и эскимосы, по словамъ путешественника Парри, не могутъ правильно сосчитать своихъ дѣтей, если ихъ больше трехъ. Они отличаютъ похожіе предметы не отвлеченными числами: первый, второй, третій и т. д., но названіемъ, индивидуально связаннымъ съ каждымъ пересчитываемымъ предметомъ. Не общее число своихъ собакъ держитъ въ памяти Эскимосъ, но отдѣльныя представленія о бѣлой собакѣ съ черными крапинами, о собакѣ, родившейся въ голодную зиму и т. п. Поэтому пересчитываніе является для него, какъ указываютъ данныя, разбросанныя въ сочиненіяхъ по примитивной культурѣ Леббока, Тайлора и др., операціею тяжелою, трудною, послѣ которой дикарь сейчасъ-же начинаетъ жаловаться на боль въ головѣ.

Эту стадію умственнаго развитія, на которой находятся теперь также Ботокуды Бразиліи и Папуасы Новой Голландіи, проходила несомнѣнно и арійская раса, „audax Japeti genus“, которая затѣмъ въ лицѣ высшихъ представителей своего генія открыла численную закономѣрность и въ движеніи отдаленныхъ небесныхъ свѣтилъ и въ движеніи неизмѣримо-малыхъ молекуль матеріи. Что и для арійской расы было время, когда понятіе о числѣ не представлялось съ достаточной отчетливостью, подтверждаютъ прежде всего преданія народовъ, указывающія на тѣхъ благодѣтелей человѣчества, которые научили его числу. У грековъ напримѣръ такими изобрѣтателями числа являются то Паламедъ, то Прометей. Припомнимъ ту поэтическую картину, въ которой передаетъ преданіе объ изобрѣтеніи числа въ словахъ Про-

Digitized by Google

метея греческій трагикъ Эсхилъ въ его безсмертной трагедіи: „Прикованный Прометей.“

„Послушайте, что смертнымъ сдѣлалъ я.
Ихъ прежде неразумныхъ, какъ дѣтей
Разумными я сдѣлалъ.....
. . . . . .
. . . . . .
Ничего ни признака зимы,
Ни убранной въ цвѣтахъ весны, ни лѣта,
Они не знали, жили безъ сознанія.
Я-же объяснилъ восходы звѣздъ, закаты неясные,
Число имъ изобрѣлъ
И буквы научилъ соединять,
Имъ память далъ, мать музъ, всего причину.“

Данныя языка, подобно народнымъ преданіямъ, указываютъ намъ на первыя стадіи выработки названій для чиселъ и на первыя стадіи развитія понятія объ отвлеченномъ числѣ.

Существованіе во многихъ языкахъ единственнаго, двойственнаго и множественнаго чиселъ указываетъ повидимому на ту пройденную ступень развитія, при которой ясно различались понятія объ одномъ предметѣ и о двухъ предметахъ, но начиная съ трехъ такое различіе прекращается и является только одно понятіе о множествѣ, изъ котораго еще не дифференцировались другія числительныя.

Но есть данныя, указывающія намъ и на слѣдующую ступень развитія, на которой явились отдѣльныя названія для трехъ и четырехъ, но вмѣстѣ съ тѣмъ эти числа, являясь крайними предѣлами чиселъ, имѣвшихъ названіе, служили символами множества, громадности. Припомнимъ изрѣченіе Овидія:

„terque quaterque beati“,

Digitized by Google

и сопоставимъ съ нимъ изображеніе множества въ египетскихъ іероглифахъ четырьмя чертами или китайское „четыре моря“ вмѣсто всѣхъ морей.

Не лишено значеніе и указаніе лингвистики на то, что по грамматическому строю первыя три числительныя во многихъ языкахъ рѣзко отличаются отъ всѣхъ прочихъ числительныхъ; первыя три числительныя измѣняются по родамъ (два, двѣ, tres, tria), всѣ прочія не измѣняются. Первыя числительныя принадлежатъ очевидно болѣе ранней эпохѣ, чѣмъ та, въ которую выработывались названія прочихъ. То обстоятельство, что корни первыхъ трехъ числительныхъ общи народамъ арійской и народамъ семитской расъ, между тѣмъ какъ сходство пропадаетъ для дальнѣйшихъ числительныхъ, показываетъ, что названія прочихъ числительныхъ появились уже въ ту сравнительно недавнюю эпоху, когда арійскіе и семитскіе народы покинули свою общую прародину.

Если названія числительнаго: *два* связаны у разныхъ народовъ съ различными органами человѣка или животныхъ (у Китайцевъ два—пу (уши); въ Тибетѣ два—patscha (крыло), у Готтентотовъ два—t'koam (рука)), то выработка дальнѣйшихъ названій для чиселъ находится, что признаютъ филологи, въ связи со счетомъ по пальцамъ. Имена числительныя во многихъ языкахъ указываютъ намъ, что у первобытнаго человѣка пальцы являются преимущественнымъ орудіемъ счета т. е. постояннымъ неизмѣннымъ рядомъ значковъ, съ которымъ при пересчитываніи сравнивается всякій другой новый рядъ перечитываемыхъ предметовъ. Когда зулусу напр. нужно сказать шесть, онъ говоритъ tatisitupa, что значитъ взять большой палецъ руки; въ Гренландіи, въ долинѣ Ориноко, въ Австраліи шесть равнозначуще съ фразою: одинъ съ другой руки, десять—двѣ руки, одиннадцать—двѣ руки и палецъ, двадцать—человѣкъ. У Эскимосовъ береговъ Гудзонова залива названія числительныхъ для восьми,

Digitized by Google

девяти, десяти несомнѣнно совпадаютъ съ среднимъ, четвертымъ и малымъ пальцемъ; тоже самое замѣчается у Абипоносовъ и Гуарани Южной Америки и у Малайцевъ. У Таманаковъ съ Ориноко двадцать одинъ—одинъ съ руки другаго человѣка; такое выраженіе объясняется, если мы сопоставимъ съ нимъ разсказъ путешественниковъ о томъ, что у нѣкоторыхъ народовъ Южной Африки счетъ чиселъ и теперь производится съ помощью двухъ, трехъ человѣкъ, при чемъ пальцы одного соотвѣтствуютъ единицамъ, пальцы другаго—десяткамъ, пальцы третьяго—сотнямъ.

Что касается до языковъ арійской расы, то только корень числительнаго пять (penta) несомнѣнно тожественъ съ корнемъ санскритскаго pankam или персидскаго penjeh (распростертая рука). Но нельзя не упомянуть и о гипотезѣ Потта, объясняющей подобнымъ же образомъ и слѣдующія числительныя названіями мизинца и прочихъ пальцевъ правой руки. Поттъ сопоставляетъ напримѣръ названіе мизинца въ латинскомъ языкѣ (auricularis—чистящій уши) съ тожествомъ въ арійскихъ языкахъ корня числительнаго шесть и глагола скребсти. Подобныя же натянутыя объясненія даетъ Поттъ и для слѣдующихъ числительныхъ. Но и независимо отъ гипотезы Потта раньше приведенныя лингвистическія данныя несомнѣнно подтверждаютъ ту истину, что названія для первыхъ чиселъ получались отъ конкретныхъ предметовъ, которыми пользовались для счета, что понятіе объ отвлеченномъ цѣломъ числѣ выработывалось изъ прикладнаго цѣлаго числа, изъ названій предметовъ, служившихъ для счета.

На извѣстной стадіи развитія человѣчества расширеніе области ясно представляемыхъ и называемыхъ чиселъ пошло быстрѣе, но мы можемъ все таки указать, основываясь на культурно-историческихъ данныхъ, какъ только постепенно

Digitized by Google

расширялась область чиселъ, какъ постепенно то тѣ, то другія все большія и большія числа являлись предѣлами чиселъ, имѣвшихъ свои опредѣленныя названія, и потому символами неопредѣленнаго множества. Мы находимъ напримѣръ объясненіе, почему число *тринадцать* считалось и до сихъ поръ считается суевѣрными людьми приносящимъ несчастіе, если допустимъ, что число *двенадцать* являлось въ извѣстное время символомъ множества, синонимомъ полноты, и слѣдующее за нимъ число являлось лишнимъ и потому нечестивымъ.

Въ тюркскихъ легендахъ, въ скиѳскихъ сагахъ синонимомъ неопредѣленнаго множества является или сорокъ или сорокъ сороковъ. Вліяніе туранскихъ сказаній на наши былины, изученное Стасовымъ, позволяетъ отнести къ туранскому источнику и наше русское *сорокъ сороковъ*, часто употребляемое, какъ символъ несчетнаго множества.

Но еще большій культурно-историческій интересъ связанъ съ числомъ *шестьдесятъ*, которое такъ часто фигурируетъ въ преданіяхъ вавилонскихъ, персидскихъ и греческихъ, являясь въ нихъ всегда синонимомъ большаго числа. *Шестьдесятъ* является числомъ вавилонскихъ боговъ, шестьдесятъ локтей — вышина золотаго идола, поставленнаго въ храмѣ Навуходоносора. Позднѣе съ тѣмъ-же значеніемъ несчетнаго множества являются нѣкоторыя кратныя шестидесяти: 300, 360. Ксерксъ далъ Геллеспонту 300 ударовъ, Киръ раздробилъ рѣку Гиндесъ, въ которой потонула одна изъ его любимыхъ лошадей, на 360 ручьевъ. Въ одной персидской пѣснѣ воспѣваются 360 полезныхъ употребленій пальмы. Числа, встрѣчающіяся въ вавилонскихъ преданіяхъ, представляютъ культурно-историческій интересъ въ двоякомъ отношеніи. Вавилонъ представляется намъ съ одной стороны родиною гаданій, основанныхъ на числахъ, родиною различ-

Digitized by Google

ныхъ числовыхъ суевѣрій, которыя имѣли обширное вліяніе съ одной стороны на Китай, съ другой на идеи Пиѳагорейской школы, придававшей числамъ особое мистическое значеніе. Это мистическое значеніе, придававшееся числамъ, можетъ служить новымъ указаніемъ на новость и трудность понятія о числѣ на извѣстной ступени человѣческаго развитія [1]).

Съ другой стороны число *60*, встрѣчающееся въ легендахъ Вавилонскаго происхожденія, впослѣдствіи въ Вавилонѣ-же при развитіи научныхъ знаній явилось основаніемъ системы счисленія, слѣды которой сохранились у насъ въ дѣленіи времени и угловъ.

По мѣрѣ развитія десятичной системы счисленія ея единицы различныхъ разрядовъ являлись символами множества. Въ церковно-славянскомъ языкѣ *тьма* т. е. неизмѣримое множество есть синонимъ то тысячи, то десяти тысячъ. Но существовало еще и „великое словенское число“, употреблявшееся, „коли прилучался великій счетъ и перечень“. Этотъ великій счетъ шелъ до единицы 48-го разряда и даже иногда до единицы 49-го разряда. Въ этомъ великомъ счетѣ тьма означаетъ уже тысячу тысячъ, являются и высшія единицы: *легіонъ* т. е. тьма темъ (милліонъ милліоновъ), *леодръ* т. е. легіонъ легіоновъ и наконецъ *воронъ* или леодръ леодровъ. „И болѣе сего“, говорится въ славянскихъ рукописяхъ, „нѣсть человѣку разумѣвати“. Но иногда (въ одной рукописи XVII столѣтія) доходили и до десяти вороновъ или *колоды* и затѣмъ наивно прибавляли: „сего числа нѣсть больше“.

Такимъ образомъ и здѣсь есть предѣлъ числамъ, но какъ далеко отстоитъ этотъ предѣлъ отъ тѣхъ первыхъ предѣловъ, на которыя указываютъ данныя лингвистики.

---

[1]) Вопросу о числовой мистикѣ посвящена моя статья: «О числовыхъ суевѣріяхъ.» Казань 1885.

Digitized by Google

Мы можемъ съ большею вѣроятностью указать ту вѣтвь арійской расы, которая относилась съ особенною любовью къ громаднымъ числамъ и старалась по мѣрѣ возможности расширить предѣлы употребляемыхъ чиселъ, изобрѣтая для нихъ особенныя названія. Эта вѣтвь—древніе индусы. Имъ принадлежитъ честь поразительнаго развитія искусства счета, какъ имъ-же человѣчество обязано ариѳметикою положенія. Подобно тому, какъ боги грековъ сходятъ иногда съ Олимпа и, принимая участіе въ людскихъ битвахъ, гордятся силою своихъ мускуловъ, учитель Нирваны и закона, владыка Будда еще въ юномъ возрастѣ отличался искусствомъ счета. Я приведу отрывокъ изъ прекраснаго русскаго перевода прелестной поэмы Эдвина Арнольда: „Свѣтъ Азіи или Великое Отреченіе,“ съ необыкновенною точностью передающей легенду о Буддѣ.

Восьмилѣтній царевичъ, будущій Будда, подвергается испытанію Висвамитрою, „наукъ, искуствъ учителемъ превосходнымъ.“

„И сказалъ Висвамитра:

Довольно перейдемъ къ цифрамъ! Повторяй за мной, считай такъ, какъ я буду считать, пока дойдемъ до лакхи (лакха=100.000): одинъ, два, три, четыре, затѣмъ десятки, и сотни, и тысячи.

И вслѣдъ за нимъ назвалъ отрокъ единицы, десятки, сотни и не остановился на лакхѣ; нѣтъ онъ шепталъ дальше до тѣхъ чиселъ, которыми можно счесть все, начиная отъ зеренъ на полѣ и до самой мелкой песчинки. Потомъ онъ перешелъ къ катхѣ, къ счету звѣздъ ночныхъ, къ кати катхѣ, счету морскихъ капель, и далѣе къ счету песчинокъ Ганга и къ счету, единицами котораго изображается весь песокъ десятка лакхъ рѣкъ такихъ, какъ Гангъ. Затѣмъ пошли еще болѣе громадныя числа: сумма всѣхъ дождевыхъ

Digitized by Google

капель, которыя при ежедневномъ дождѣ упадутъ на всю вселенную въ теченіе десяти тысять лѣтъ, и наконецъ число, при помощи котораго боги вычисляютъ свое прошедшее и будущее.

Хорошо, сказалъ мудрецъ, если ты, благороднѣйшій царевичъ, знаешь все это, то не научить-ли мнѣ тебя измѣренію длины?

О Ачарья! Будь милостивъ, смиренно отвѣчалъ отрокъ, выслушай меня: десять параманусовъ составляютъ парасукшну, десять-же парасукшнъ образуютъ трасарену, а десять трасаренъ одну пылинку, играющую въ лучѣ солнца; семь пылинокъ равняются кончику уса мыши; десять кончиковъ уса мыши образуютъ ликью, десять-же ликій юку, а десять юкъ равняются сердцевинѣ ячменнаго зерна, что семь разъ уложится въ перехватѣ туловища осы; затѣмъ идетъ зерно манги, затѣмъ зерно горчицы и далѣе зерно ячменя, десять зеренъ ячменя равняются суставу пальца; двѣнадцать суставовъ составляютъ пядень; затѣмъ идетъ локоть, жердь, длина лука, длина копья; длина лука, взятая двадцать разъ, называется вздохомъ и показываетъ пространство, какое можетъ пройти человѣкъ, набравъ воздухъ въ легкія и ни разу не выдыхнувъ его; сорокъ вздоховъ составляютъ округъ; четыре округа равняются іоджанѣ. И, о учитель, если желаешь, я пересчитаю сколько атомовъ можетъ умѣститься въ іоджанѣ отъ одного ея конца до другаго?

И затѣмъ молодой царевичъ, ни мало не колеблясь, правильно опредѣлилъ число всѣхъ этихъ атомовъ (параманъ)“ [1]).

Lalitavistara (жизнеописаніе Будды) даетъ и самое число атомовъ въ іоджанѣ; оно равно 108. 470. 495. 616. 000.

---

[1]) Свѣтъ Азіи-переводъ А. Анненской стр. 8—9. Мѣсто это передано подробнѣе въ стихотворномъ переводѣ г. Юринскаго (С. П. 1891). ст. 12—13).

Digitized by Google

Задача выполненія неопредѣленно далеко простирающагося счета, которую поставили и разрѣшали Индійскіе мудрецы за три столѣтія до начала нашей эры, перешла и къ эллинамъ. Подъ индійскимъ вліяніемъ, можетъ быть, написано знаменитое сочиненіе Архимеда: „Псаммитъ или исчисленіе песку въ пространствѣ равномъ шару неподвижныхъ звѣздъ.“ [1]) Но задача, которая на индійской почвѣ явилась удовлетвореніемъ простаго любопытства, имѣетъ въ твореніи греческаго мудреца высокое научное значеніе.

Псаммитъ Архимеда имѣетъ цѣлью доказать, что не трудно, въ противность мнѣнію тѣхъ, которые думаютъ, что число песчинокъ безконечно и не можетъ быть сосчитано, составить понятіе о такихъ числахъ, которыя больше числа песчинокъ, вмѣщающихся въ пространствѣ равномъ величинѣ не только земли, наполненной пескомъ со всѣми своими пропастями и глубиною морскою, даже до вершинъ высочайшихъ горъ, но и цѣлаго міра или шара неподвижныхъ звѣздъ. Міръ для Архимеда шаръ, котораго центръ въ землѣ, радіусъ-же равенъ разстоянію отъ центра земли до центра солнца; поперечникъ шара неподвижныхъ звѣздъ меньше десять тысячь разъ взятаго поперечника міра.

Чтобы рѣшить поставленную себѣ задачу, Архимедъ показываетъ на основаніи предположеній современныхъ ему астрономовъ и собственныхъ наблюденій надъ величиною видимаго поперечника солнца, что поперечникъ міра меньше ста миріадъ миріадъ стадій (миріада = 10.000; греческая стадія имѣла въ себѣ 504 фута $4^1/_2$ дюйма). Относительно величины песчинокъ онъ дѣлаетъ предположенія, что число песчинокъ, содержащихся въ количествѣ песку не больше маковаго зерна, будетъ не больше миріады и что поперечникъ ма-

[1]) Русскій переводъ этого сочиненія изданъ въ 1824 г. Ѳ. Петрушевскимъ.

Digitized by Google

ковaго зерна не меньше сороковой части дюйма (греческій дюймъ былъ не много больше $^9/_4$ нашего). Послѣ этихъ предположеній Архимедъ переходитъ къ изложенію своей номенклатуры чиселъ.

Числа отъ единицы до миріады миріадъ (отъ 1 до 10^8) называются первыми; миріада миріадъ первыхъ чиселъ (10^8) называется единицею вторыхъ чиселъ и вторыя числа идутъ отъ этой единицы до миріады миріадъ этихъ единицъ (отъ 10^8 до 10^{16}). Миріада миріадъ вторыхъ чиселъ называется единицею третьихъ чиселъ и третьи числа идутъ до миріады миріадъ этой единицы (отъ 10^{16} до 10^{24}). Подобнымъ-же образомъ миріаду миріадъ третьихъ чиселъ назовемъ единицею четвертыхъ, миріаду миріадъ четвертыхъ чиселъ назовемъ единицею пятыхъ и будемъ продолжать такимъ образомъ называть слѣдующія числа даже до миріады миріадъ чиселъ миріадомиріадныхъ. Всѣ эти числа называются числами перваго періода и послѣднее изъ нихъ (очевидно равное $10^{8.10^8}$ или единицѣ съ восемью стами милліоновъ нулей) назовемъ единицею втораго періода, и опять миріаду миріадъ первыхъ чиселъ втораго періода $\left(10^{8.10^8+8}\right)$ назовемъ единицею вторыхъ чиселъ этого-же періода и т. д. будемъ продолжать вводить числа даже до миріады миріадъ чиселъ миріадомиріадныхъ втораго періода. $\left(10^{2.8.10^8}\right)$. Это послѣднее число втораго періода назовемъ единицею первыхъ чиселъ третьяго періода; подобнымъ-же образомъ вводятся единицы чиселъ четвертаго $\left(10^{3.8.10^8}\right)$, пятаго $\left(10^{4.8.10^8}\right)$ и т. д. даже до миріады миріадъ чиселъ миріадомиріадныхъ періода миріадомиріаднаго $\left(10^{10^8.8.10^8}\right)$. Это число изобразится единицею съ восемьюдесятью тысячъ билліоновъ ну-

Digitized by Google

лей; чтобы написать его, нужно потратить около 2.000.000.000 лѣтъ непрерывной работы днемъ и ночью.

Архимедъ показываетъ, что для рѣшенія поставленной имъ себѣ задачи объ опредѣленіи числа песчинокъ въ шарѣ міра или даже въ шарѣ неподвижныхъ звѣздъ нѣтъ никакой необходимости въ столь громадныхъ числахъ. Послѣдовательно вычисляетъ Архимедъ число песчинокъ въ шарѣ, поперечникъ котораго равенъ ста дюймамъ, въ шарахъ съ поперечникомъ въ миріаду дюймовъ, сто стадій, миріаду стадій и т. д. и т. д. постоянно пользуясь свойствомъ геометрической и ариѳметической прогрессіи, въ которомъ можно видѣть начало теоріи логариѳмовъ, окончательно разработанной только въ XVII столѣтіи, и, доходя до шара міра, показываетъ, что число песчинокъ въ немъ заключающихся, выражается числомъ меньшимъ тысячи единицъ чиселъ седьмыхъ (10^{51}); число песчинокъ, заключающихся въ шарѣ неподвижныхъ звѣздъ, меньше тысячи миріадъ чиселъ восьмыхъ (10^{63}).

Трудно указать въ математической литературѣ сочиненіе, которое превосходило-бы Псаммитъ Архимеда по интересу, смѣлости и богатству заложенныхъ въ немъ идей. Оно развивало понятіе о безконечно-большемъ подобно тому какъ въ своихъ сочиненіяхъ о квадратурѣ параболы, объ измѣреніи круга Архимедъ касался понятія о безконечно-маломъ, лежащемъ въ основаніи современнаго анализа.

Псаммитъ Архимеда ввелъ въ науку понятіе о безконечно-продолжающемся рядѣ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ. Многотрудная работа человѣческаго духа была окончена. Рядъ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ, безконечно продолжающихся, предметъ благоговѣйнаго удивленія для индусовъ и таинственнаго толкованія для мудрецовъ Вавилона и Пиѳагорейцевъ, явился могущественнымъ орудіемъ для познанія

Digitized by Google

природы. Исходя изъ него чистая математика строитъ понятіе о дробномъ, отрицательномъ, несоизмѣримомъ, комплексномъ числѣ и это обобщенное понятіе о числѣ составляетъ единственный объектъ чистой математики, которая можетъ поэтому быть названа „ариѳметикою". „Ариѳметика", говоритъ Гауссъ, „стоитъ въ томъ-же отношеніи къ математикѣ (включая въ нее геометрію и механику), въ какомъ послѣдняя стоитъ къ изученію природы. Математика есть царица естествознанія и ариѳметика есть царица математики".

Но громаднымъ успѣхамъ въ области приложеній понятій о числѣ не вполнѣ соотвѣтствовали успѣхи въ области логики и психологіи этого понятія.

Математическія понятія издавна стали излюбленною почвою, на которой давались другъ другу битвы представителями различныхъ философскихъ школъ. Эта борьба философскихъ воззрѣній вмѣстѣ съ развитіемъ математической мысли способствовала мало по малу уясненію философіи математической науки и основныхъ математическихъ понятій. Въ этомъ отношеніи впрочемъ больше всего посчастливилось понятію о пространствѣ и аксіомамъ геометріи.

Вопросъ о происхожденіи геометрическихъ аксіомъ (аксіомы о возможности наложенія одной фигуры на другую, аксіомы, что двѣ прямыя не могутъ заключать пространства и наконецъ такъ называемаго Эвклидова постулатума), вопросъ, имѣющій громадное значеніе для философіи и геометріи, былъ предметомъ многихъ оживленныхъ споровъ. Вопросъ заключается въ томъ, суть-ли эти аксіомы происхожденія опытнаго, какъ утверждали Гоббсъ, Локкъ, Беркли, Юмъ, Дж. Ст. Милль, Гельмгольцъ, философы такъ называемой эмпирической или номиналистической школы, или-же истинность этихъ аксіомъ усматривается a priori, въ силу свойствъ нашего духа, съ первой минуты, какъ понимается смыслъ

Digitized by Google

предложенія. Послѣдняго мнѣнія объ апріорности происхожденія геометрическихъ аксіомъ, мнѣнія, что истинность ихъ не требуетъ для оправданія и подтвержденія повторенія опытовъ, какъ это требуется въ тѣхъ случаяхъ, когда истины получаютъ свою достовѣрность дѣйствительно путемъ наблюденія, придерживается такъ называемая идеалистическая школа философовъ: Декартъ, Лейбницъ, Кантъ, Уэвель и др., причемъ Кантъ и его школа отрицаютъ объективное существованіе пространства и смотрятъ на него лишь какъ на форму нашего познанія.

Извѣстно, какое важное значеніе въ этомъ спорѣ имѣли работы Берлинскаго Академика Германа Гельмгольца, семидесятилѣтнюю годовщину со дня рожденія котораго готовится праздновать вся ученая Европа. Дѣйствительно рѣшеніе вопроса требовало и серьезныхъ математическихъ знаній, необходимыхъ для правильной оцѣнки значенія пангеометріи Н. И. Лобачевскаго и знакомства съ физіологическими и психологическими данными. [1]) Соединенныя въ Гельмгольцѣ высокія математическія и физіологическія познанія дали ему возможность сказать вѣское слово въ вопросѣ о происхожденіи аксіомъ геометріи. Признавая вмѣстѣ съ Кантомъ пространство за трансцедентальную форму нашего созерцанія, Гельмгольцъ вмѣстѣ съ эмпирическою школою философовъ утверждаетъ опытное происхожденіе геометрическихъ аксіомъ.

Менѣе чѣмъ аксіомамъ геометріи посчастливилось въ философіи понятію о цѣломъ положительномъ числѣ и вопросу объ аксіомахъ, лежащихъ въ основаніи науки о числахъ, „ариѳметики“. Какъ мачиха, говоритъ Михаэлисъ въ

---

[1]) Весьма важное значеніе имѣютъ напримѣръ изслѣдованія D-r Суоп'а и проф. В. М. Бехтерева о полуциркулярныхъ каналахъ, находящихся въ ухѣ животныхъ и тѣснѣйшимъ образомъ связанныхъ съ пространственными воспріятіями.

Digitized by Google

брошюрѣ, [1]) посвященной понятію о числѣ въ философіи Канта, обходится Кантъ съ ариѳметикою. И дѣйствительно изъ брошюры Михаэлиса мы видимъ, что въ сочиненіяхъ Канта не находится опредѣленнаго выработаннаго понятія на ариѳметику и ея основныя понятія. Всего чаще Кантъ ставитъ понятіе о числѣ въ связь съ понятіемъ о времени. Признавши время и пространство трансцедентальными формами нашего сознанія, безъ которыхъ не возможно никакое познаніе и найдя въ одной изъ вѣтвей математической науки, въ геометріи, науку о пространствѣ, Кантъ видѣлъ въ понятіи о числѣ, лежащемъ въ основаніи другой вѣтви, ариѳметики, связь съ временемъ. Отсюда происходитъ взглядъ Канта, по которому ариѳметика нуждается въ воспріятіи времени, также какъ геометрія въ созерцаніи пространства. Этого взгляда Канта держался Уэвель, авторъ „Исторіи индуктивныхъ наукъ“; изъ числа математиковъ, державшихся того-же взгляда, упомянемъ знаменитаго изобрѣтателя исчисленія Кватерніоновъ William'a Rowan'a Hamilton'a, издавшаго сочиненіе подъ заглавіемъ: „Алгебра или наука о чистомъ времени.“

Въ сочиненіи одного изъ выдающихся противниковъ Канта, въ „Логикѣ“ Джона Стюарта Милля, мы имѣемъ развитіе и доказательство той мысли, что и понятіе о числѣ и основныя теоремы ариѳметики и алгебры основываются на опытѣ. Опытное индуктивное происхожденіе имѣетъ напр. основная истина ариѳметики: независимость числа предметовъ отъ порядка, въ которомъ мы будемъ ихъ пересчитывать. Но Милль не даетъ подробнаго анализа аксіомъ ариѳметики, не сводитъ ихъ къ возможно меньшему числу. Эта задача была рѣшена математиками, показавшими, что въ основаніе ариѳметики могутъ быть положены слѣдующія пять аксіомъ:

---

[1]) Michaelis. Ueber Kants Zahlbegriff. Berlin. 1884.

Digitized by Google

Аксіома I. Если двѣ величины равны третьей, онѣ равны между собою.

Аксіома II. Равное, приданное къ равному, даетъ равное.

Аксіома III. Равное, приданное къ неравному, даетъ неравное.

Аксіома IV. Законъ ассоціативности сложенія:

$$a+(b+c)=(a+b)+c.$$

Аксіома V. Законъ коммутативности сложенія:

$$a+b=b+a.$$

Нѣсколько далѣе пошли въ анализѣ аксіомъ братья Грассманны, показавъ, что двѣ послѣднія аксіомы составляютъ логическое слѣдствіе одной, выражающейся равенствомъ:

$$(a+b)+1=a+(b+1).$$

Выясненіе психологическихъ основаній аксіомъ ариѳметики есть новая заслуга Г. Гельмгольца передъ теоріею познанія и передъ чистою математикою; задача эта рѣшается имъ въ статьѣ „Счетъ и измѣреніе“, помѣщенной въ сборникѣ философскихъ статей, посвященныхъ Целлеру по случаю его пятидесятилѣтняго докторскаго юбилея, [1]) слѣдующимъ образомъ.

Для счета предметовъ необходимъ рядъ значковъ, произвольно избранныхъ, но для которыхъ должна быть строго и неизмѣнно опредѣлена извѣстная послѣдовательность; при счетѣ предметовъ мы сравниваемъ ихъ рядъ съ рядомъ нашихъ значковъ. Значками нормальнаго ряда могутъ быть матеріальные предметы, взятые въ опредѣленной послѣдовательности какъ напр. пальцы или камешки (calculi-calculare счи-

---

[1]) Philosophische Aufsätze. Eduard Zeller zu seinem fünfzigjährigen Doctor—Iubiläum gewidmet. Leipzig 1887.

Digitized by Google

тать); при дальнѣйшемъ развитіи человѣчества такимъ рядомъ значковъ является рядъ чиселъ. Такъ какъ во всякомъ нормальномъ рядѣ, служащемъ для счета, преимущественное значеніе имѣетъ строго опредѣленная послѣдовательность, то каждое число опредѣляется своимъ положеніемъ въ разъ на всегда выбранномъ нормальномъ рядѣ. Значекъ *единица* мы приписываемъ тому члену ряда, съ котораго начинаемъ. *Два* есть число, которое слѣдуетъ непосредственно за единицею; *три* есть число, которое слѣдуетъ непосредственно за двумя и т. д.

Если какое-нибудь число обозначается a, то число, непосредственно слѣдующее за нимъ въ нормальномъ ряду, обозначается $a+1$; $a+b$ обозначаетъ то число нормальнаго ряда, которое получается при счетѣ до b, если при числѣ $a+1$ считать *единица*, при числѣ $a+2$ — *два* и т. д. Изъ сопоставленія этихъ обозначеній вытекаетъ Грассмановская ариѳметическая аксіома: $(a+b)+1=a+(b+1)$, а слѣдовательно и законы ассоціативности и коммутативности. Анализъ понятія о нормальномъ рядѣ приводитъ также къ прочимъ аксіомамъ ариѳметики. Наконецъ понятіе о рядѣ чиселъ и ихъ сложеніи, выведенное изъ разсматриванія ряда чиселъ, какъ нормальнаго ряда значковъ, совпадаетъ съ тѣми, которыя получаются при опредѣленіи численности предметовъ и соединеніи двухъ или большаго числа группъ предметовъ въ одну; но тотъ-же анализъ указываетъ, что внѣшніе предметы должны удовлетворять извѣстнымъ условіямъ для того, чтобы они могли быть пересчитываемы. Они не должны пропадать, не должны сливаться одинъ съ другимъ, не могутъ дѣлиться на два или болѣе во время пересчитыванія и къ нимъ не могутъ прибавляться во время этой операціи новые предметы. Поэтому только опытъ можетъ указать на возможность примѣненія къ данному ряду предметовъ ариѳметическихъ

Digitized by Google

аксіомъ и слѣдовательно сами эти аксіомы не могутъ имѣть того трансцедентальнаго, независимаго отъ опыта значенія, какое имъ приписывалъ Кантъ.

Зависимое отъ опыта происхожденіе понятія о цѣломъ числѣ и связанныхъ съ нимъ аксіомъ подтверждается вмѣстѣ съ тѣмъ и вышеприведенными данными изъ исторіи числа. Мы видѣли, съ какимъ трудомъ и съ какою постепенностью расширялся численный кругозоръ и какую важную роль играли при этомъ органы человѣка, сначала двѣ руки или два уха, потомъ пальцы, представлявшіе такимъ образомъ матеріальные значки, употреблявшіеся при счетѣ, которые только постепенно замѣнялись рядомъ отвлеченныхъ цѣлыхъ чиселъ.

Философія математическихъ понятій важна не только для математики, которая не можетъ обратиться въ искусство пользоваться орудіемъ, внутренній смыслъ и происхожденіе котораго не понятны. Ея разработка представляетъ конечно особенную важность для педагогіи математики. Только стройная система знаній, въ которой рѣзко отдѣлены аксіомы и постулатумы отъ теоремъ, можетъ имѣть серьезное педагогическое значеніе. Наконецъ она не можетъ не имѣть громаднаго значенія для философіи. Даже сама исторія понятія о числѣ, полагаю, представляетъ много поучительнаго для философа. Если мы припомнимъ, какія трудности приходилось преодолѣвать сознанію человѣка при выработкѣ элементарнѣйшаго философскаго и математическаго понятія, понятія о цѣломъ числѣ, то намъ сдѣлается ясною тщета тѣхъ иногда горделивыхъ философскихъ системъ, которыя стремятся основать всю философію на непосредственномъ сознаніи. Если мы припомнимъ, что для рѣшенія вопросовъ объ аксіомахъ геометріи понадобились продолжительныя математическія и физіологическія изслѣдованія, то намъ сдѣлается съ

Digitized by Google

другой стороны ясною грубость многихъ изъ тѣхъ слишкомъ простыхъ философскихъ системъ, которыя находили особенно широкое распространеніе въ нашемъ мало привыкшемъ къ философскому мышленію обществѣ.

Изученіе какъ философіи математики, такъ и самой математики является поэтому лучшею и необходимою пропедевтикою для изученія философіи.

Въ началѣ своей рѣчи я старался обрисовать вамъ значеніе математической науки для другихъ частныхъ наукъ; теперь обнаруживается передъ нами и значеніе математики для философіи, для выработки философскаго міросозерцанія. Это значеніе математики издревле сознавалось выдающимися философами. На Академіи Платона красовалась надпись: „сюда дозволяется входить только геометрамъ."

Principales règles de la methode Декарта, Этика Спинозы, ordine geometrico demonstrata, философическое исчисленіе—Лейбница, критика чистаго разума Канта и положительная философія Конта одинаково исходятъ изъ признанія высокой важности математики для философіи.

Наше физико-математическое общество окажетъ громадную услугу русской философской мысли и умственному развитію нашего общества, если своею неутомимою дѣятельностью на пользу науки и просвѣщенія роднаго края будетъ способствовать распространенію сознательнаго и высокаго уваженія къ математикѣ, которымъ проникнуты слова великаго мудреца Эллады.

А. Васильевъ.

Digitized by Google

КЪ ВОПРОСУ О РАСПРОСТРАНЕНІИ ТЕПЛОТЫ ВЪ ТЕКУЩЕЙ ЖИДКОСТИ ПУТЕМЪ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И КОНВЕКЦІИ.

§ 1. Пусть R_1, R_2 и R_3 суть слагающія по направленіямъ осей ортогональной системы координатъ нѣкотораго установившагося теченія жидкости въ точкѣ $m(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$, θ— температура жидкости въ этой точкѣ, K коэфиціентъ теплопроводности жидкости, C ея удѣльная теплота и D плотность. Означимъ черезъ h_1, h_2 и h_3 координатные параметры и, выражая, что приращеніе количества тепла

$$CD\frac{\partial\theta}{dt}\frac{d\varrho_1}{h_1}\frac{d\varrho_2}{h_2}\frac{d\varrho_3}{h_3}dt$$

въ элементѣ

$$d\tau = \frac{d\varrho_1}{h_1}\frac{d\varrho_2}{h_2}\frac{d\varrho_3}{h_3}$$

пространства, занятаго разсматриваемой нами текущей жидкостью, за промежутокъ времени dt равно количеству тепла, притекающему въ этотъ элементъ путемъ конвекціи и путемъ теплопроводности, мы получимъ, полагая $\frac{K}{CD} = k^2$, дифференціальное уравненіе:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \left\{ -\frac{\partial}{\partial\varrho_1}\left(R_1\frac{\theta}{h_2h_3}\right) - \frac{\partial}{\partial\varrho_2}\left(R_2\frac{\theta}{h_3h_1}\right) - \frac{\partial}{\partial\varrho_3}\left(R_3\frac{\theta}{h_1h_2}\right) + \right.$$
$$\left. + k^2\left[\frac{\partial}{\partial\varrho_1}\left(\frac{h_1}{h_2h_3}\frac{\partial\theta}{\partial\varrho_1}\right) + \frac{\partial}{\partial\varrho_2}\left(\frac{h_2}{h_3h_1}\frac{\partial\theta}{\partial\varrho_2}\right) + \frac{\partial}{\partial\varrho_3}\left(\frac{h_3}{h_1h_2}\frac{\partial\theta}{\partial\varrho_3}\right)\right]\right\} h_1h_2h_3 \quad 1.$$

Digitized by Google

Функціи R_1, R_2 и R_3, какъ извѣстно, должны удовлетворять условію

$$\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{R_1}{h_2 h_3}\right)+\frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{R_2}{h_3 h_1}\right)+\frac{\partial}{\partial \varrho_3}\left(\frac{R_3}{h_1 h_2}\right)=0. \qquad 2$$

Означая черезъ x, y и z координаты точки m въ Декартовой системѣ и черезъ u, v и w слагающія теченія въ точкѣ m, параллельныя осямъ координатъ, мы получимъ ур. 1 и 2 подъ видомъ:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}(u\theta)-\frac{\partial}{\partial y}(v\theta)-\frac{\partial}{\partial z}(w\theta)+k^2\left[\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right]$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Въ томъ случаѣ, когда скорости теченія имѣютъ потенціалъ φ, можно ур. 1 и 2 привести къ болѣе простому виду. Въ этомъ случаѣ

$$R_1=h_1\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho_1},\quad R_2=h_2\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho_2}\quad \text{и}\quad R_3=h_3\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho_3}. \qquad 3$$

Принимая во вниманіе 3, а также условіе несжимаемости, которое въ нашемъ случаѣ приметъ видъ

$$\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{h_1}{h_2 h_3}\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho_1}\right)+\frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{h_2}{h_3 h_1}\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho_2}\right)+\frac{\partial}{\partial \varrho_3}\left(\frac{h_3}{h_1 h_2}\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho_3}\right)=0, \qquad 4$$

мы можемъ ур. 1 привести къ виду

$$e^{-\frac{\varphi}{k^2}}\frac{\partial \theta}{\partial t}=h_1 h_2 h_3\left[\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(e^{-\frac{\varphi}{k^2}}\frac{h_1}{h_2 h_3}\frac{\partial \theta}{\partial \varrho_1}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(e^{-\frac{\varphi}{k^2}}\frac{h_2}{h_3 h_1}\frac{\partial \theta}{\partial \varrho_2}\right)+\frac{\partial}{\partial \varrho_3}\left(e^{-\frac{\varphi}{k^2}}\frac{h_3}{h_1 h_2}\frac{\partial \theta}{\partial \varrho_3}\right)\right], \qquad 5$$

справедливость котораго легко провѣрить непосредственно.

Digitized by Google

Послѣднее дифференціальное уравненіе тождественно съ условіемъ распространенія теплоты въ такой неподвижной неоднородной средѣ, удѣльная теплота которой въ точкѣ m есть $\frac{e^{-\frac{\varphi}{k^2}}}{D}$, а коэффиціентъ теплопроводности равенъ $e^{-\frac{\varphi}{k^2}}$.

§ 2. Пусть на поверхности S, ограничивающей односвязный объемъ τ, занимаемый текущею жидкостью, температура $\overline{\theta}$ дана въ каждой точкѣ этой поверхности какъ функція времени t, кромѣ того, дана температура для каждой точки пространства τ въ моментъ $t=0$, и требуется опредѣлить температуру въ каждой точкѣ пространства τ въ данный моментъ t. Вопросъ этотъ по существу своему непремѣнно долженъ имѣть рѣшеніе, хотя и можетъ представить непреодолимыя аналитическія трудности. Легко показать, что этотъ вопросъ имѣетъ единственное рѣшеніе. Дѣйствительно, пусть θ_1 и θ_2 будутъ двѣ функціи, удовлетворяющія дифференціальному уравненію 1, и притомъ такія, значенія которыхъ для точекъ поверхности S равны между собой и равны θ. Означая черезъ ϑ разность функцій $\theta_1 - \theta_2$, мы замѣтимъ, что ϑ также удовлетворяетъ уравненію 1, а потому ϑ можно разсматривать какъ температуру разсматриваемой нами текущей жидкости для того случая, когда на поверхности S температура всегда равна нулю и равнялась нулю во всякой точкѣ пространства τ въ моментъ $t=0$; а при такихъ условіяхъ температура ϑ должна оставаться равной нулю постоянно и во всѣхъ точкахъ пространства τ. Изъ этого мы заключаемъ, что θ_1 должно быть тождественно равнымъ θ_2.

Примѣняя подобныя же разсужденія, легко доказать тоже самое для того случая, когда на поверхности S будетъ задана не температура, а ея производныя по нормали $\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial n}$.

Digitized by Google

§ 3. Остановимся на случаѣ теченія жидкости съ потенціаломъ скоростей и докажемъ возможность рѣшенія задачи, предложенной въ предыдущемъ § для того частнаго случая, когда температура на поверхности S постоянно равна нулю, а въ моментъ $t = 0$ въ точкѣ $m(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$ пространства $\theta = F(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$.

Полагая

$$\theta = e^{-\sigma^2 t}\vartheta, \qquad 6$$

гдѣ $\vartheta = F(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$, мы удовлетворимъ условію для $t=0$ и получимъ для ϑ дифференціальное уравненіе

$$\sigma^2 e^{-\frac{\varphi}{k^2}} + h_1 h_2 h_3 \Big[\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\Big(\frac{h_1}{h_2 h_3} e^{-\frac{\varphi}{k^2}} \frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho_1}\Big) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \varrho_2}\Big(\frac{h_2}{h_3 h_1} e^{-\frac{\varphi}{k^2}} \frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho_2}\Big) + \frac{\partial}{\partial \varrho_3}\Big(\frac{h_3}{h_1 h_2} e^{-\frac{\varphi}{k^2}} \frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho_3}\Big)\Big] = 0, \qquad 7$$

которое въ Декартовыхъ координатахъ приметъ видъ

$$\Delta\vartheta + \sigma^2 \alpha^2 \vartheta = 0, \qquad 8$$

гдѣ

$$\Delta\vartheta = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\alpha^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\alpha^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial y}\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(\alpha^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\Big) \qquad 9$$

и

$$\alpha^2 = e^{-\frac{\varphi}{k^2}}. \qquad 10$$

Здѣсь ϑ во всемъ объемѣ τ должна быть конечной, однозначной и непрерывной функціей и равняться нулю на поверхности S.

Уравненіе 8 для случая $\alpha^2 = 1$ было изучено Matieu и Weber'омъ и нѣкоторые результаты этихъ изслѣдованій были обобщены на тотъ случай, когда α есть функція координатъ, И. С. Громекою въ статьѣ его: „Нѣкоторые случаи движенія несжимаемой жидкости".

Digitized by Google

Результатъ изслѣдованія Громеки состоитъ въ томъ, что если $\vartheta = 0$ на поверхности S, то существуетъ безконечный рядъ значеній σ: $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_i, \ldots \sigma_n \ldots$, для каждаго изъ которыхъ ур. 8 имѣетъ по крайней мѣрѣ одно рѣшеніе. Здѣсь σ'_n есть минимумъ интеграла

$$\int \left[\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right)^2 \right] \alpha^2 d\tau \qquad 11$$

при условіи, что значеніе $\overline{\vartheta}$ на поверхности S равно нулю, и еще при слѣдующихъ условіяхъ:

$$\int \vartheta^2 \alpha^2 d\tau = 1, \int \vartheta \vartheta_i \alpha^2 d\tau = 0; \; i = 1,2, \ldots n-1, \qquad 12$$

гдѣ ϑ_i въ свою очередь есть одна изъ функцій, доставляющихъ минимальное значеніе интегралу 11 при условіяхъ: $\vartheta = 0$ на поверхности S и

$$\int \vartheta^2 \alpha^2 d\tau = 1, \int \vartheta \vartheta_k \alpha^2 d\tau = 0; \; k = 1, 2, \ldots i-1.$$

Дѣйствительно, для опредѣленія такой функціи ϑ_n, которая, доставляя интегралу 11 минимальное значеніе, равнялась бы на поверхности S нулю и удовлетворяла бы условіямъ 12, найдемъ по правиламъ варіаціоннаго исчисленія дифференціальное уравненіе

$$\Delta \vartheta_n + \alpha^2 \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_n^{(i)} \vartheta_i = 0, \qquad 13$$

гдѣ $\lambda_n^{(i)}$ суть неопредѣленные множители, величину которыхъ получимъ изъ слѣдующихъ соображеній.

Формулу 13 можно написать такъ:

$$\Delta \vartheta_n + \alpha^2 \sum_{i=1}^{i=\infty} \lambda_n^{(i)} \vartheta_i = 0, \qquad 13$$

Digitized by Google

если при томъ условиться, что для $i > n$

$$\lambda_n^{(i)} = 0. \qquad 13''$$

Въ силу уравненія 13′ имѣемъ:

$$\Delta\vartheta_n = -\alpha^2 \sum_{k=1}^{k=\infty} \lambda_n^{(k)} \vartheta_k, \qquad 14$$

$$\Delta\vartheta_i = -\alpha^2 \sum_{k=1}^{k=\infty} \lambda_i^{(k)} \vartheta_k. \qquad 15$$

Помножая первое изъ этихъ равенствъ на $\vartheta_n d\tau$, интегрируя по объему τ, замѣчая, что вслѣдствіе теоремы Грина и того условія, что на поверхности S $\vartheta_n = 0$,

$$\int \vartheta_n \Delta\vartheta_n d\tau =$$

$$= -\int \left(\left(\frac{\partial\vartheta_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\vartheta_n}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\vartheta_n}{\partial z}\right)^2 \right) \alpha^2 d\tau = -\sigma^2{}_n$$

и принимая въ разсчетъ условія 12 и 13″, мы получимъ, что

$$\lambda_n^{(n)} = \sigma_n.$$

Помножая 14 на $\vartheta_i d\tau$, 15 на $\vartheta_n d\tau$, интегрируя по объему τ и замѣчая, что вслѣдствіе теоремы Грина и условія, что на поверхности S $\vartheta_n = \vartheta_i = 0$,

$$\int (\vartheta_i \Delta\vartheta_n - \vartheta_n \Delta\vartheta_i) d\tau =$$

$$-\int \alpha^2 \left(\vartheta_n \frac{\partial\vartheta_i}{\partial N} - \vartheta_i \frac{\partial\vartheta_n}{\partial N}\right) dS = 0,$$

получимъ, принимая въ разсчетъ условія 12 и 13″,

$$\lambda_n^{(i)} = \lambda_i^{(n)}.$$

Такъ какъ одна изъ этихъ величина для $n \gtrless i$ есть нуль, то и другая также равна нулю.

Digitized by Google

Вслѣдствіе этихъ соображеній уравненіе 13 приметъ видъ

$$\Delta\vartheta_n + \sigma_n^2 a^2 \vartheta_n = 0,$$

откуда видимъ, что функціи ϑ_n удовлетворяютъ ур. 7.

Легко вывести одно весьма важное свойство функцій ϑ_n и ϑ_m, удовлетворяющихъ уравненіямъ

$$\Delta\vartheta_n + \sigma_n^2 a^2 \vartheta_n = 0,$$
$$\Delta\vartheta_m + \sigma_m^2 a^2 \vartheta_m = 0.$$

Для этого помножимъ первое изъ этихъ равенствъ на $\vartheta_m d\tau$, второе на $\vartheta_n d\tau$; вычитая одно изъ другаго и интегрируя по пространству τ, получимъ:

$$(\sigma_n^2 - \sigma_m^2)\int a^2 \vartheta_n \vartheta_m d\tau = \int (\vartheta_n \Delta\vartheta_m - \vartheta_m \Delta\vartheta_n) d\tau =$$
$$= \int a^2 \left(\vartheta_m \frac{\partial\vartheta_n}{\partial N} - \vartheta_n \frac{\partial\vartheta_m}{\partial N}\right) dS = 0$$

и слѣдовательно

$$\int a^2 \vartheta_n \vartheta_m d\tau = 0. \qquad 16$$

Пусть $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n$ суть функціи, удовлетворяющія уравненіямъ:

$$\Delta\vartheta + \sigma_1^2 a^2 \vartheta = 0,$$
$$\Delta\vartheta + \sigma_2^2 a^2 \vartheta = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta\vartheta + \sigma_n^2 a^2 \vartheta = 0,$$

расположенныя въ убывающемъ порядкѣ. Тогда, положивъ

$$\theta = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n e^{-\sigma_n^2 t} \vartheta_n,$$

Digitized by Google

мы удовлетворимъ уравненію

$$\Delta\theta = e^{-\frac{\varphi}{k^2}} \frac{\partial\theta}{\partial t}$$

и условію, что $\theta = 0$ на поверхности S; коэффиціентъ A_n можно опредѣлить при помощи свойствъ

$$\int \vartheta_n{}^2 \alpha^2 d\tau = 1 \quad \text{и} \quad \int \vartheta_m \vartheta_n \alpha^2 d\tau = 0$$

такъ, чтобы для момента $t = 0$ θ было равно $F(x, y, z)$.

Мы получимъ:

$$A_n = \int \alpha^2 F(x,y,z) \vartheta_n d\tau = \int e^{-\frac{\varphi}{k^2}} F(x,y,z) \vartheta_n d\tau.$$

Если строка получится сходящаяся, то она и представляетъ единственное рѣшеніе вопроса.

§ 4. Уравненіе 5 значительно упрощается въ томъ случаѣ, когда распредѣленія скорости теченія и температуры одинаковы въ плоскостяхъ перпендикулярныхъ нѣкоторому направленію z. Въ этомъ случаѣ координатами, опредѣляющими положеніе точки m въ пространствѣ τ, можно принять разстояніе z точки отъ одной изъ плоскостей, перпендикулярныхъ къ направленію z, значеніе потенціала φ въ этой точкѣ и значеніе въ этой точкѣ функціи теченія ψ. Въ силу изотермическихъ свойствъ функцій φ и ψ и вслѣдствіе того, что

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 = v^2,$$

гдѣ v есть скорость теченія, мы будемъ имѣть вмѣсто 5-го уравненія

$$v^2\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(e^{-\frac{\varphi}{k^2}}\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}\right) + e^{-\frac{\varphi}{k^2}}\frac{\partial^2\theta}{\partial\psi^2}\right] = e^{-\frac{\varphi}{k^2}}\frac{\partial\theta}{\partial t}. \qquad A.$$

Digitized by Google

§ 5. Послѣднее уравненіе въ случаѣ стаціонарнаго распредѣленія температуры, если v не равно нулю, приметъ видъ

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(e^{-2b\varphi}\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}\right)+e^{-2b\varphi}\frac{\partial^2\theta}{\partial\psi^2}=0$$

гдѣ $b=\frac{1}{2k^2}$. Частный интегралъ этого уравненія будетъ:

$$\theta=\frac{1}{\pi}e^{b\varphi}\int_o^\infty d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\left\{\left[\left(1-\frac{f_2(\lambda)}{f_1(\lambda)}e^{-\sqrt{\alpha^2+b^2}(\psi_2-\psi_1)}\right)f_1(\lambda)e^{-\sqrt{\alpha^2+b^2}(\psi-\psi_1)}+\right.\right.$$
$$+\left(1-\frac{f_1(\lambda)}{f_2(\lambda)}e^{-\sqrt{\alpha^2+b^2}(\psi_2-\psi_1)}\right)f_2(\lambda)e^{-\sqrt{\alpha^2+b^2}(\psi_2-\psi)}\Big]\times$$
$$\left.\left.\frac{e^{b\lambda}cs\alpha(\lambda-\varphi)}{1-e^{-2\sqrt{\alpha^2+b^2}(\psi_2-\psi_1)}}\right\}.\right.$$

Эта формула даетъ намъ возможность опредѣлить температуру θ въ данной точкѣ пространства τ, ограниченнаго цилиндрами $\psi=\psi_1$ и $\psi=\psi_2$ и цилиндрами $\varphi=+\infty$ и $\varphi=-\infty$, при чемъ на поверхности ψ и ψ_1 температура $\theta=f(\varphi)$, а на поверхности $\psi=\psi_2$ $\theta=f_2(\varphi)$, если только функціи f_1 и f_2 таковы, что для очень большихъ отрицательныхъ аргументовъ равны нулю, ибо въ противномъ случаѣ θ становится безконечнымъ.

§ 6. Въ томъ случаѣ, когда $f_2(\varphi)=0$, мы получимъ, опуская указатель при $f(\lambda)$:

$$\theta=\frac{1}{\pi}e^{b\varphi}\int_o^\infty d\alpha\frac{e^{-\sqrt{\alpha^2+b^2}(\psi-\psi_1)}}{1-e^{-2\sqrt{\alpha^2+b^2}(\psi_2-\psi_1)}}\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda f(\lambda)e^{-b\lambda}cs\alpha(\lambda-\varphi).$$

Если предположить, что поверхность ψ_2 удалилась отъ ψ_1 на безконечное разстояніе, такъ что $\psi_2-\psi_1=\infty$, то для

Digitized by Google

ψ, отличающагося на конечную величину отъ ψ_1, мы будемъ имѣть $\psi_2 - \psi = \infty$, и наша формула приметъ видъ:

$$\theta = \frac{1}{\pi} e^{b\varphi} \int_0^{\infty} d\alpha e^{-\sqrt{\alpha^2+b^2}(\psi-\psi_1)} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{-b\lambda} f(\lambda) cs\alpha(\lambda-\varphi)$$

или, принимая ψ_1 за нуль,

$$\theta = \frac{e^{b\varphi}}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha e^{-\sqrt{\alpha^2+b^2}.\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda f_1(\lambda) e^{-b\lambda} cs\alpha(\lambda-\varphi).$$

§ 7. Остановимся на томъ случаѣ, когда для $\varphi < \varphi_1$ и $\varphi > \varphi_2$ $f(\varphi) = 0$, а для $\varphi > \varphi_1$ и $\varphi < \varphi_2$

$$f(\varphi) = \sum_{n=0}^{n=\infty} (A_n csn\varphi + B_n snn\varphi) =$$
$$= \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n cs(n\varphi - \Delta_n).$$

Въ этомъ случаѣ, будемъ имѣть:

$$\theta = \frac{e^{b\varphi}}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\psi\sqrt{\alpha^2+b^2}} \left\{ \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{-b\lambda} cs(n\lambda - \Delta_n) cs\alpha(\lambda-\varphi) d\lambda \right\} d\alpha.$$

Здѣсь интегрированіе по отношенію къ λ можетъ быть произведено на самомъ дѣлѣ; для этого замѣчаемъ, что

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{-b\lambda} cs(n\lambda - \Delta_n) cs(\alpha\lambda - \alpha\varphi) d\lambda =$$
$$= \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{-b\lambda} cs[(\alpha+n)\lambda - (\alpha\varphi + \Delta_n)] d\lambda +$$
$$+ \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{-b\lambda} cs[(\alpha-n)\lambda - (\alpha\varphi - \Delta_n)] d\lambda,$$

а полагая въ первомъ интегралѣ второй части

$$(\alpha+n)\lambda - (\alpha\varphi + \Delta_n) = x,$$

Digitized by Google

получимъ:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{-b\lambda} cs[(\alpha+n)\lambda-(\alpha\varphi+\Delta_n)]d\lambda = \int_{(\alpha+n)\varphi_1-(\alpha\varphi+\Delta_n)}^{(\alpha+n)\varphi_2-(\alpha\varphi+\Delta_n)} e^{-b\frac{\alpha\varphi+\Delta_n+x}{\alpha+n}} csx\frac{dx}{\alpha+n} =$$

$$= -e^{-b\varphi_2}\left(b+\frac{\partial}{\partial\varphi_2}\right)\frac{cs[(\alpha+n)\varphi_2-(\alpha\varphi+\Delta_n)]}{(\alpha+n)^2+b^2} +$$

$$+ e^{-b\varphi_1}\left(b+\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\right)\frac{cs[(\alpha+n)\varphi_1-(\alpha\varphi+\Delta_n)]}{(\alpha+n)^2+b^2}.$$

Полагая же во второмъ интегралѣ

$$(\alpha-n)\lambda-(\alpha\varphi-\Delta_n)=x,$$

получаемъ

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{-b\lambda} cs[(\alpha-n)\lambda-(\alpha\varphi-\Delta_n)]d\lambda = \int_{(\alpha-n)\varphi_1-(\alpha\varphi-\Delta_n)}^{(\alpha-n)\varphi_2-(\alpha\varphi-\Delta_n)} e^{-b\frac{\alpha\varphi-\Delta_n+x}{\alpha-n}} csx\frac{dx}{\alpha-n} =$$

$$= -e^{-b\varphi_2}\left(b+\frac{\partial}{\partial\varphi_2}\right)\frac{cs[(\alpha-n)\varphi_2-(\alpha\varphi-\Delta_n)]}{(\alpha-n)^2+b^2} +$$

$$+ e^{-b\varphi_1}\left(b+\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\right)\frac{cs[(\alpha-n)\varphi_1-(\alpha\varphi-\Delta_n)]}{(\alpha-n)^2+b^2}.$$

Подставляя наконецъ значеніе этихъ двухъ интегралов въ выраженіе для θ, мы приведемъ его къ виду:

$$\theta = -\frac{e^{b(\varphi-\varphi_2)}}{4\pi}\left(b+\frac{\partial}{\partial\varphi_2}\right)\sum_{n=0}^{n=\infty}A_n\left\{\int_0^\infty \frac{e^{-\phi\sqrt{\alpha^2+b^2}}}{(\alpha+n)^2+b^2} cs[\alpha(\varphi_2-\varphi)+(n\varphi_2-\Delta_n)]d\alpha+\right.$$

$$\left.+\int_0^\infty \frac{e^{-\phi\sqrt{\alpha^2+b^2}}}{(\alpha-n)^2+b^2} cs[\alpha(\varphi_2-\varphi)-(n\varphi_2-\Delta_n)]d\alpha\right\}+$$

$$+\frac{e^{b(\varphi-\varphi_1)}}{4\pi}\left(b+\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\right)\sum_{n=0}^{n=\infty}A_n\left\{\int_0^\infty \frac{e^{-\phi\sqrt{\alpha^2+b^2}}}{(\alpha+n)^2+b^2} cs[\alpha(\varphi_1-\varphi)+(n\varphi_1-\Delta_n)]d\alpha+\right.$$

$$\left.+\int_0^\infty \frac{e^{-\phi\sqrt{\alpha^2+b^2}}}{(\alpha-n)^2+b^2} cs[\alpha(\varphi_1-\varphi)-(n\varphi_1-\Delta_n)]d\alpha\right\}.$$

Digitized by Google

§ 8. Въ томъ случаѣ, когда $f(\varphi)$ для $\varphi<\varphi_2$ и $>\varphi_1$ есть постоянная величина ϑ, мы получимъ

$$\theta = -\frac{e^{b(\varphi-\varphi_2)}}{\pi}\left(b+\frac{\partial}{\partial\varphi_2}\right)\vartheta U_2 + \frac{e^{b(\varphi-\varphi_1)}}{\pi}\left(b+\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\right)\vartheta U_1,$$

гдѣ

$$U=\int_0^\infty \frac{e^{-\psi\sqrt{\alpha^2+b^2}}}{\alpha^2+b^2}\,cs\alpha(\varphi_i-\varphi)d\alpha.$$

Этотъ интегралъ можно привести подстановкой

$$x=\sqrt{b^2+\alpha^2}-\alpha,\ \varphi-\varphi_i=\beta$$

къ слѣдующему виду

$$U=\frac{1}{b}\int_0^b \frac{e^{-\frac{b\psi}{2}\left(\frac{x}{b}+\frac{b}{x}\right)}}{\frac{x}{b}+\frac{b}{x}}\,cs\frac{b\beta}{2}\left(\frac{x}{b}-\frac{b}{x}\right)\frac{dx}{x},$$

а этотъ послѣдній подстановкой

$$x=be^{-z}$$

къ виду

$$U=-\frac{2}{b}\int_0^\infty \frac{e^{-b\psi csiz}}{csiz}\,cs(ib\beta sniz)dz,$$

гдѣ $i=\sqrt{-1}$, или

$$U=-2\int_\psi^\infty d\psi\int_0^\infty e^{-b\psi csiz}\,cs(ib\beta sniz)dz.$$

Замѣчая, что

$$cs(ib\beta sniz)=\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n(ib\beta)^{2n}\frac{sn^{2n}iz}{2n!},$$

получимъ

$$U=-2\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{2n!}(b\beta)^{2n}\int_\psi^\infty d\psi\int_0^\infty e^{-b\psi csiz}\,sn^{2n}iz\,dz.$$

Digitized by Google

Означая черезъ $K_n(x)$ Бесселеву функцію n-аго порядка второго рода (Heine, Handbuch der Kugelfunctionen Bd. I. S. 248) и замѣчая при этомъ, что

$$K_n(ix) = \frac{(ix)^n}{(2n-1)!}\int_0^\infty e^{-xcsiz} sn^{2n} iz dz,$$

получимъ

$$U = -2\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{2n}(b\beta)^{2n} \int_\psi^\infty (ib\psi)^{-n} K_n(ib\psi) d\psi.$$

Замѣчая, что

$$K_n(ib\psi) = \frac{2^n}{b^{2n}}(ib\psi)^n \frac{d^n}{d(\psi^2)^n} K(ib\psi)$$

(Heine l. c. S. 237) и что для $\psi = \infty$, $K_n(ib\psi) = 0$ (Heine l. c. S. 248), получимъ

$$U = -2\sum_{n=0}^{n=\infty} 2^n \frac{\beta^{2n}}{2n}\int_\psi^\infty \frac{d^n}{d(\psi^2)^n} K(ib\psi) d\psi.$$

Но

$$K(ib\psi) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{xJ_0(bx)dx}{x^2+\psi^2}$$

гдѣ J_n есть Бесселева функція перваго рода (Heine l. c. S. 197), и слѣдовательно

$$u_n = \int_\psi^\infty \frac{d^n}{d(\psi^2)^n} K(ib\psi) d\psi = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty xJ_0(bx)dx \int_\psi^\infty \frac{d^n}{d(\psi^2)^n}\left[\frac{1}{x^2+\psi^2}\right] d\psi$$

или

$$u_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty xJ_0(bx)dx \frac{d^n}{d(x^2)^n}\int_\psi^\infty \frac{d\psi}{x^2+\psi^2} =$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty J_0(b\sqrt{z})\frac{d^n}{dz^n}\left\{\frac{1}{\sqrt{z}}\, arctg\, \frac{\sqrt{z}}{\psi}\right\} dz.$$

Digitized by Google

Интегрируя по частямъ, получимъ

$$u_n = \frac{1}{2\pi}\Big|_0^{\infty} \sum_{i=0}^{i=n}(-1)^i \frac{d^i}{dz^i} J_0(b\sqrt{z}) \frac{d^{n-i-1}}{dz^{n-i-1}} \left(\frac{1}{\sqrt{z}} arctg \frac{\sqrt{z}}{\psi}\right) +$$

$$+ (-1)^n \int_0^{\infty} \frac{d^n}{dz^n} J_0(b\sqrt{z}) \frac{1}{\sqrt{z}} arctg\left(\frac{\sqrt{z}}{\psi}\right) dz.$$

Замѣчаемъ далѣе, что

$$\frac{d^i}{dz^i} J_0(b\sqrt{z}) = \left(-\frac{b^2}{2}\right)^i (b\sqrt{z})^{-i} J_i(b\sqrt{z})$$

$$= \left(-\frac{b^2}{2}\right)^i \frac{1}{2^i i!} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(-1)^p}{2^{2p}\, p!\,(p+i)!} b^{2p} z^p$$

и что слѣдовательно

$$\left[\frac{d^i}{dz^i} J_0(b\sqrt{z})\right]_{z=0} = \left(-\frac{b^2}{2}\right)^i \frac{1}{2^i . i!}$$

и что точно также

$$\frac{d^{n-i-1}}{dz^{n-i-1}} \left(\frac{1}{\sqrt{z}} arctg \frac{\sqrt{z}}{\psi}\right) = \sum_{k=n-i-1}^{k=\infty} \frac{(-1)^k k!}{(k-n+i+1)!} \cdot \frac{z^{k-n+i+1}}{\psi^{2k+1}},$$

откуда

$$\left[\frac{d^{n-i-1}}{dz^{n-i-1}} \left(\frac{1}{\sqrt{z}} arctg \frac{\sqrt{z}}{\psi}\right)\right]_{z=0} = (-1)^{n-i-1}(n-i-1)!\,\psi^{-[2(n-i)-1]},$$

получимъ

$$u_n = \frac{(-1)^n}{2\pi\psi^{2n}} \sum_{i=0}^{i=n-1} \frac{(n-i-1)!}{2^{2i} i!} b^{2i} \psi^{2i+1} +$$

$$+ \frac{(-1)^n}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{z}} arctg\left(\frac{\sqrt{z}}{\psi}\right) \frac{d^n}{dz^n} J_0(b\sqrt{z})\, dz.$$

Интегралъ

$$v_n = \int_0^{\infty} \frac{1}{z} arctg\left(\frac{\sqrt{z}}{\psi}\right) \frac{d^n}{dz^n} J_0(b\sqrt{z})\, dz$$

Digitized by Google

можно представить подъ видомъ

$$v_n = b^{2n}\int_0^{\infty} arctg\left(\frac{y}{\psi}\right)\frac{J_n(by)}{y^n}\,dy$$

$$= b^{2n}\psi\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{\frac{y}{\psi}}\,J_n(by)}{y^n}\cdot\frac{arctg\left(\frac{y}{\psi}\right)}{\sqrt{\frac{y}{\psi}}}\,d\left(\frac{y}{\psi}\right).$$

Означая черезъ θ неопредѣленное положительное количество, мы можемъ написать предыдущую формулу еще такъ

$$v_n = b^{2n}\psi.\frac{\sqrt{\theta}J_n(b\theta)}{\theta^n}\int_0^{\infty}\frac{arctg\left(\frac{y}{\psi}\right)}{\sqrt{\frac{y}{\psi}}}\,d\left(\frac{y}{\psi}\right)$$

$$= -\frac{\pi}{4}\,b^{2n}sec\left(\frac{\pi}{4}\right)\frac{\sqrt{\theta}J_n(b\theta)}{\theta^n}\sqrt{\psi}.$$

Такъ какъ

$$\frac{J_n(b\theta)}{\theta^n} = \frac{b^n}{2^n n!}\left\{1 - \frac{\theta^2}{2(2n+2)b^2} + \frac{\theta^4}{2.4.(2n+2)(2n+4)b^4}\cdots\right\}$$

а величина

$$\sqrt{b\theta}J_n(b\theta),$$

даже для $\theta = \infty$, есть величина конечная (Heine l. c. S 248), то интегралъ v_n есть величина конечная.

Легко видѣть что u_n есть величина убывающая съ возрастаніемъ n быстрѣе чѣмъ $\frac{1}{(2n-1)!}$, ибо

$$u_n = \int_{\psi}^{\infty}\frac{d^n}{d(\psi^2)^n}K(ib\psi)d\psi = \frac{b^{2n}}{2^n}\int_{\psi}^{\infty}(ib\psi)^{-n}K_n(ib\psi)d\psi,$$

а

$$K_n(ib\psi) = \frac{(ib\psi)^n}{(2n-1)!}\int_0^{\infty}e^{-b\psi csiz}sn^{2n}iz\,dz,$$

Digitized by Google

изъ чего и заключаемъ что строка для U есть строка сходящаяся.

§ 9. Выраженіе для θ въ концѣ § 7 также можетъ быть нѣсколько упрощено слѣдующимъ образомъ:

$$\theta = -\frac{e^{b(\varphi-\varphi_2)}}{4\pi}\left(b+\frac{\partial}{\partial\varphi_2}\right)\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n\left\{ cs\Delta_n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\psi\sqrt{\alpha^2+b^2}}}{(\alpha+n)^2+b^2} cs[\alpha(\varphi_2-\varphi)+n\varphi_2]d\alpha \right.$$

$$\left. + sn\Delta_n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\psi\sqrt{\alpha^2+b^2}}}{(\alpha+n)^2+b^2} sn[\alpha(\varphi_2-\varphi)+n\varphi_2]d\alpha \right\}$$

$$+\frac{e^{b(\varphi-\varphi_1)}}{4\pi}\left(b+\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\right)\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n\left\{ cs\Delta_n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\psi\sqrt{\alpha^2+b^2}}}{(\alpha+n)^2+b^2} cs[\alpha(\varphi_1-\varphi)+n\varphi_1]d\alpha \right.$$

$$\left. + sn\Delta_n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\psi\sqrt{\alpha^2+b^2}}}{(\alpha+n)^2+b^2} sn[\alpha(\varphi_1-\varphi)+n\varphi_1]d\alpha \right\}$$

$$= -\frac{e^{b(\varphi-\varphi_2)}}{4\pi}\left(b+\frac{\partial}{\partial\varphi_2}\right)\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\psi\sqrt{\alpha^2+b^2}}}{(\alpha+n)^2+b^2} cs[\alpha(\varphi_2-\varphi)+(n\varphi_2-\Delta_n)]d\alpha$$

$$+\frac{e^{b(\varphi-\varphi_1)}}{4\pi}\left(b+\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\right)\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\psi\sqrt{\alpha^2+b^2}}}{(\alpha+n)^2+b^2} cs[\alpha(\varphi_1-\varphi)+(n\varphi_1-\Delta_n)]d\alpha.$$

Справедливость этой формулы для $\psi = 0$ можно провѣрить замѣчая, что

$$\int_0^\infty \frac{a+bx}{g^2+2hx+x^2} cspxdx = \left\{ \frac{a-bh}{\sqrt{g^2-h^2}} csph + bsnph \right\} \pi e^{\mp\sqrt{g^2-h^2}.p},$$

$$\int_0^\infty \frac{a+bx}{g^2+2hx+x^2} snpxdx = \left\{ \frac{a-bh}{\sqrt{g^2-h^2}} snph - bcsph \right\} \pi e^{\mp\sqrt{g^2-h^2}.p},$$

гдѣ знаки — и + соотвѣтствуютъ случаямъ положительнаго и отрицательнаго p (Laplace, Probab. L. I. p. 26).

Комбинируя эти двѣ формулы, получимъ

$$\int_0^\infty \frac{cs(N\alpha+M)}{(\alpha+n)^2+b^2} d\alpha = \frac{cs(Nn-M)}{b} \pi e^{\mp bN},$$

Digitized by Google

гдѣ знаки — и + соотвѣтствуютъ положительному и отрицательному N. Прилагая эту формулу къ нашему случаю, получимъ

$$\int_0^\infty \frac{cs[\alpha(\varphi_i-\varphi)+(n\varphi_i-\Delta_n)]d\alpha}{(\alpha+n)^2+b^2} = \frac{cs(n\varphi-\Delta_n)}{b}\pi e^{\mp b(\varphi_i-\varphi)},$$

$$\int_0^\infty \frac{cs[\alpha(\varphi_i-\varphi)-(n\varphi_i-\Delta_n)]d\alpha}{(\alpha-n)^2+b^2} = \frac{cs(n\varphi-\Delta_n)}{b}\pi e^{\mp b(\varphi_i-\varphi)}$$

и, слѣдовательно,

$$\left(b+\frac{\partial}{\partial\varphi_i}\right)\int_0^\infty \frac{cs[\alpha(\varphi_i-\varphi)+(n\varphi_i-\Delta_n)]}{(\alpha+n)^2+b^2}d\alpha = (1\mp 1)cs(n\varphi-\Delta^n)e^{\mp b(\varphi_i-\varphi)},$$

$$\left(b+\frac{\partial}{\partial\varphi_i}\right)\int_0^\infty \frac{cs[\alpha(\varphi_i-\varphi)-(n\varphi_i-\Delta_n)]}{(\alpha-n)^2+b^2}d\alpha = (1\mp 1)cs(n\varphi-\Delta^n)e^{\mp b(\varphi_i-\varphi)}.$$

Эти выраженія въ случаѣ $\varphi_i > \varphi$ равны нулю, а въ случаѣ $\varphi < \varphi_i$ равны

$$2cs(n\varphi-\Delta_n)e^{b(\varphi_i-\varphi)},$$

чѣмъ и оправдывается формула для θ.

Задача объ опредѣленіи температуры въ этомъ случаѣ сводится къ квадратурамъ вида

$$У_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\psi\sqrt{\alpha^2+b^2}}}{(\alpha+n)^2+b^2} cs\beta\alpha.d\alpha,$$

гдѣ $\beta=\varphi_i-\varphi$. Этотъ интегралъ, полагая

$$\sqrt{\alpha^2+b^2}-\alpha = x,$$

можно привести къ виду

$$У_n = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\psi b}{2}\left(\frac{x}{b}+\frac{b}{x}\right)}}{\left[\frac{b}{2}\left(\frac{x}{b}+\frac{b}{x}\right)+n\right]^2+b^2}\frac{b}{2}\left(\frac{x}{b}+\frac{b}{x}\right) cs\beta\,\frac{b}{2}\left(\frac{x}{b}-\frac{b}{x}\right)\frac{dx}{x}.$$

Полагая здѣсь

$$be^z = x,\ i=\sqrt{-1},$$

Digitized by Google

получимъ

$$y_n = \frac{b}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-b\psi \operatorname{csiz}} \operatorname{cs}[b\beta \operatorname{isniz}]}{[ib\operatorname{sniz}+n]^2+b^2} \operatorname{csiz}.dz.$$

Квадратуры

$$y_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\psi\sqrt{b^2+\alpha^2}} \operatorname{cs}\beta\alpha d\alpha}{(\alpha+n)^2+b^4},$$

къ которымъ приводится наша задача и которыя по виду сложнѣе квадратуры

$$U = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\psi\sqrt{b^2+\alpha^2}} \operatorname{cs}\beta\alpha d\alpha}{\alpha^2+b^2},$$

могутъ быть рѣшены въ конечной формѣ.

Дѣйствительно, легко убѣдиться въ томъ, что

$$\frac{\partial^2 y_n}{\partial\psi^2} + \frac{\partial^2 y_n}{\partial\beta^2} = b^2 y_n,$$

при чемъ мы должны имѣть

$$(y_n)_{\psi=0} = 2\frac{\pi}{b} e^{\mp b\beta} \operatorname{csn}\beta \text{ и } (y_n)_{\psi=\infty} = 0.$$

Этимъ условіямъ мы удовлетворимъ, полагая

$$y_n = 2\frac{\pi}{b} e^{(\mp b\beta - p_n\psi)} \operatorname{cs}(n\beta + q_n\psi),$$

гдѣ

$$p_n = n\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4\frac{b^2}{n^2}}\right)},\quad q_n = \mp\frac{bn}{p_n} = \mp\frac{b}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4\frac{b^2}{n^2}}\right)}}$$

и знакъ — соотвѣтствуетъ положительному, а знакъ + отрицательному значенію β.

Digitized by Google

Такимъ образомъ окончательное выраженіе для температуры θ будетъ

$$\theta = -e^{b(\varphi-\varphi_2)}\left(b+\frac{\partial}{\partial\varphi_2}\right)\frac{A_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\psi\sqrt{\alpha^2+b^2}}}{\alpha^2+b^2}cs\alpha(\varphi_2-\varphi)d\alpha$$

$$+e^{b(\varphi-\varphi_1)}\left(b+\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\right)\frac{A_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\psi\sqrt{\alpha^2+b^2}}}{\alpha^2+b^2}cs\alpha(\varphi_1-\varphi)d\alpha$$

$$-(1\mp1)e^{(1\pm1)b(\varphi-\varphi_2)}\Sigma A_n e^{-p_n\psi}cs(n\varphi\mp q_n\psi-\Delta_n)$$

$$+(1\mp1)e^{(1\pm1)b(\varphi-\varphi_1)}\Sigma A_n e^{-p_n\psi}cs(n\varphi\mp q_n\psi-\Delta_n).$$

Выраженіе, полученное нами, даетъ температуру тѣла въ пространствѣ, для котораго $\psi<0$ и $\varphi_1<\varphi<\varphi_2$, а въ остальномъ пространствѣ двѣ послѣднія строки этого выраженія равняются тождественно нулю. Чтобы получить функцію, выражающую температуру во всемъ пространствѣ, для котораго $\psi>0$, найдемъ функцію θ_2, удовлетворяющую дифференціальному уравненію

$$-2b\frac{\partial\theta_2}{\partial\varphi}+\frac{\partial^2\theta_2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\theta_2}{\partial\psi^2}=0,$$

которая при этомъ для $\varphi=\varphi_2$ имѣла бы значеніе

$$(\theta)_{\varphi=\varphi_2}=\frac{A_0b}{2\pi}\Big[-\int_0^\infty\frac{e^{-\psi\sqrt{\alpha^2+b^2}}}{\alpha^2+b^2}d\alpha+e^{-b(\varphi_2-\varphi_1)}\int_0^\infty\frac{e^{-\psi\sqrt{\alpha^2+b^2}}}{\alpha^2+b^2}cs\alpha(\varphi_2-\varphi_1)d\alpha$$

$$+\frac{1}{b}e^{b(\varphi_2-\varphi_1)}\int_0^\infty\frac{e^{-\psi\sqrt{\alpha^2+b^2}}}{\alpha^2+b^2}\alpha sn\alpha(\varphi_2-\varphi_1)d\alpha\Big]+$$

$$+\Sigma A_n e^{-p\psi}cs(n\varphi_2\pm q_n\psi-\Delta_n)=F_2(\psi)$$

и для $\varphi=\infty$, $\psi=0$ и $\psi=\infty$ превращалась бы въ нуль.

Такая функція будетъ

$$\theta_2=(1\pm1)\frac{1}{\pi}e^{b(\varphi-\varphi_2)}\int_0^\infty dx e^{-\sqrt{b^2+x^2}(\varphi-\varphi_2)}snx\psi\int_0^\infty d\lambda F_2(\lambda)snx\lambda,$$

Digitized by Google

гдѣ знакъ + соотвѣтствуетъ положительному, а знакъ — отрицательному зниченію множителя при b въ показателѣ.

Дѣйствительно

$$\int_0^\infty dx e^{-\sqrt{b^2-x^2}(\varphi-\varphi_2)} sn x\psi \int_0^\infty d\lambda F_2(\lambda) sn\lambda x =$$

$$= \int_0^\infty F(x) \frac{sn\psi x}{x} dx,$$

гдѣ

$$F(x) = xe^{-\sqrt{b^2+x^2}(\varphi-\varphi_2)} \int_0^\infty d\lambda F_2(\lambda) sn\lambda x$$

есть функція, непрерывная, и конечная для всѣхъ положительныхъ значеній x и равная нулю для $x=\infty$, ибо

$$lim._{x=\infty} \frac{x}{e^{\sqrt{b^2+x^2}}} = \left(\frac{\sqrt{b^2+x^2}}{2x} e^{-\sqrt{b^2+x^2}}\right)_{x=\infty} = 0.$$

Изъ этого слѣдуетъ, что для $\psi=\infty$,

$$lim \int_0^\infty dx e^{-\sqrt{b^2+x^2}(\varphi-\varphi_2)} sn\psi x \int_0^\infty d\lambda F_2(\lambda) sn x\lambda = \frac{\pi}{2} F(0) = 0.$$

Подставляя въ выраженіе для θ_2 вмѣсто $F_2(\psi)$ ея величину, получимъ послѣ нѣкоторыхъ преобразованій слѣдующее равенство

$$\theta_2 = (1\pm 1)\frac{A_0}{8\pi}\Big[e^{b(\varphi-\varphi_1)}\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\left(b+\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{b^2+x^2}(\varphi-\varphi_1)}}{x^2+b^2} \frac{sn\psi x}{x} dx$$

$$- e^{b(\varphi-\varphi_2)}\frac{\partial}{\partial\varphi_2}\left(b+\frac{\partial}{\partial\varphi_2}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{b^2+x^2}(\varphi-\varphi_2)}}{x^2+b^2} \frac{sn\psi x}{x} d\lambda\Big]$$

$$(1\pm 1)\frac{1}{2\pi}\Sigma A_n\, {}^{b(\varphi-\varphi_2)}\Big\{sn(n\varphi_2-\Delta_n)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p_n e^{-\sqrt{b^2+x^2}(\varphi-\varphi_2)}}{(x+q_n)^2+q_n^2} sn\psi x.dx$$

$$+ cs(n\varphi_2-\Delta_n)\int_{-\infty}^{+\infty} (q_n+k)\frac{e^{-\sqrt{b^2+x^2}(\varphi-\varphi_2)}}{(x+q_n)^2+p^2 n} sn\psi x.dx\Big\}.$$

Digitized by Google

Подобнымъ же образомъ найдемъ функцію θ_1, которая во всемъ пространствѣ, для котораго $\psi > 0$ и $\varphi < \varphi_1$ удовлетворяла-бы дифференціальному уравненію

$$-2b\frac{\partial\theta_1}{\partial\varphi} + \frac{\partial^2\theta_1}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\theta_1}{\partial\psi^2} = 0,$$

имѣла-бы для $\varphi = \varphi_1$ значеніе

$$(\theta)_{\varphi=\varphi_1} = F_1(\psi)$$

и превращалась бы въ нуль для $\psi = 0$, $\psi = \infty$ и $\varphi = -\infty$.

Такая функція, очевидно, будетъ

$$\theta_1 = (1 \mp 1)\frac{1}{\pi}e^{b(\varphi-\varphi_1}\int_0^\infty dx e^{+\sqrt{b^2+x^2}(\varphi-\varphi_1)}\sin x\psi \int_0^\infty d\lambda F_1(\lambda)\sin x\lambda.$$

§ 10. Задача рѣшенная нами въ предыдущемъ § посредствомъ интеграловъ Фурье можетъ быть рѣшена еще слѣдующимъ образомъ.

Дифференціальному уравненію

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(e^{-2b\varphi}\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}\right) + e^{-2b\varphi}\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi^2} = 0$$

можно удовлетворить, полагая

$$\theta = e^{b\varphi}U,$$

гдѣ U есть функція φ и ψ, удовлетворяющая дифференціальному уравненію

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial\psi^2} = b^2 U.$$

Разсматриваемъ φ и ψ какъ прямолинейныя Декартовы координаты нѣкоторой точки на плоскости и полагаемъ

$$r = \sqrt{(\varphi-x)^2 + (\psi-y)^2},$$

гдѣ x и y координаты нѣкоторой другой точки на плоскости.

Digitized by Google

Пусть V есть нѣкоторая непрерывная, однозначная вмѣстѣ съ своими производными, функція отъ координатъ x и y, не имѣющая критическихъ точекъ внутри пространства, ограниченнаго, контуромъ S, удовлетворяющая въ этомъ пространствѣ дифференціальному уравненію

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=b^2 V$$

и на контурѣ имѣющая значніе равное—$K_0(ibr)$.

Полагая

$$U_1=K_0(ibr)+V,$$

замѣтимъ, что функціи $U(x,y)$ и $U_1(x,y)$ удовлетворяютъ дифференціальнымъ уравнніямъ

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=b^2 U,\quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}=b^2 U_1,$$

откуда получимъ

$$\iint\left\{U_1\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)-U\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}\right)\right\}dxdy=0,$$

гдѣ интегралъ распространенъ на часть плоскости, ограниченную контуромъ S. Преобразуя этотъ интегралъ помощью формулы Грина, получимъ

$$\int\left(U_1\frac{\partial U}{\partial n_i}-U\frac{\partial U_1}{\partial n_i}\right)dS=0,$$

гдѣ n_i направленіе внутренней нормали къ dS, а интегралъ взять по контуру S и всѣмъ контурамъ выдѣляющимъ критическія точки функцій U и U_1.

Пусть точка $x=\varphi$, $y=\psi$ лежитъ внутри площади, ограниченной контуромъ S, а функція U на этой площади непре-

Digitized by Google

рывна; тогда замѣчая, что для $x=\varphi$, $y=\psi$, $K_0(ibr)=lg(br)$ и $\frac{d}{dr}[K_0(ibr)]=\frac{1}{r}$, получимъ

$$U(\psi,\ \varphi)=-\frac{1}{2\pi}\int U\frac{\partial U_1}{\partial n_i}dS.$$

§ 11. Приложимъ эту формулу къ случаю, когда площадь, разсматриваемая нами, есть безконечная часть плоскости, для которой $y>0$ и которая ограничена контуромъ, состоящимъ изъ частей

$$y=0,\ x=\infty,\ y=\infty \text{ и } x=-\infty.$$

Положимъ, что функція U отлична отъ нуля только на той части контура, на которой $y=0$. Если значеніе U на этой части контура дано формулой

$$\overline{U}=e^{-b\bar{x}}\overline{F(x)},$$

гдѣ чертою отмѣчены значенія x и функціи U для линіи $y=0$, то

$$U(\varphi,\psi)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-b\bar{x}}F(\bar{x})\frac{d\overline{U_1}}{dn_i}d\bar{x}.$$

Положимъ

$$V=-K_0(ibr_1),$$

гдѣ

$$r_1=\sqrt{(\varphi-x)^2+(\psi+y)^2};$$

получимъ

$$\frac{\partial\overline{U_1}}{\partial n_i}=\left(\frac{\partial U_1}{\partial y}\right)_{y=0}=bi\left[K_1(ibr)\frac{\psi-y}{r}+K_1(ibr_1)\frac{\psi+y}{r}\right]_{y=0}$$

и слѣдовательно

$$\frac{\partial U_1}{\partial n_i}=2bi\frac{\psi}{r}K_1(ibr)$$

Digitized by Google

Воспользовавшись этою формулою, получимъ

$$\theta = e^{b\varphi} U(\varphi, \psi) = \frac{bi\psi}{\pi} e^{b\varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K_1 ib\sqrt{(\varphi-\bar{x})^2+\psi^2}}{\sqrt{(\varphi-\bar{x})^2+\psi^2}} e^{-b\bar{x}} F(\bar{x}) d\bar{x}.$$

Легко рѣшается подобнымъ же образомъ, болѣе интересный въ практическомъ отношеніи, вопросъ о распредѣленіи температуры въ текущей жидкости при условіи, что для $\psi = 0$ и $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ задана температура θ или ея производная $\frac{\partial\theta}{\partial\psi}$, а для $\psi = 0$ и $\varphi > \varphi_2$ или $\varphi < \varphi_1$ $\frac{\partial\theta}{\partial\psi} = 0$. Изложеніе рѣшенія этой задачи составитъ предметъ особой статьи.

Digitized by Google

ОБЪ ИНТЕГРИРОВАНІИ ПОСРЕДСТВОМЪ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХЪ ФУНКЦІЙ.

§ 1.

Въ посмертномъ мемуарѣ „Théorie des transcendantes elliptiques“ (1) Абель занимается приведеніемъ интеграла

$$\int \frac{F_1(x)}{F(x)} \frac{dx}{\sqrt{R}},$$

тдѣ F и F_1 цѣлыя раціональныя функціи,

$$R = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4.$$

Алгебраическое изученіе вопроса приводитъ знаменитаго автора къ заключенію, что всякій эллиптическій интегралъ можетъ быть выраженъ при помощи четырехъ интеграловъ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{x dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}.$$

Въ настоящее время задача, поставленная Абелемъ, можетъ быть рѣшена, съ большимъ успѣхомъ, при помощи эллиптическихъ функцій Weierstrass'a. Употребляя эти функціи, можно доказать, что всякій эллиптическій интегралъ выражается алгебраическою функціею и тремя неприводимыми эллиптическими интегралами

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}} = \frac{u}{\sqrt{a_0}}, \int \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right) du, \int \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right)^2 du.$$

(1) Oeuvres complètes, t. 2., 1881, p. 87.

Digitized by Google

Кромѣ того можно дать простые пріемы выраженія всякаго эллиптическаго интеграла функціями Weierstrass'a. Рѣшеніе этой задачи, только въ другой формѣ, составляетъ содержаніе VII главы сочиненія Halphen'a „Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications", t. 1, 1886. Но въ этой главѣ покойный авторъ рѣшаетъ, въ сущности, очень частный вопросъ, а именно: приведеніе къ интегрируемой формѣ раціональной функціи отъ z и $\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}$. Кромѣ того Halphen показываетъ лишь духъ методы; осуществленіе-же методы на практикѣ сопряжено съ большими трудностями. Въ этой статьѣ я излагаю методъ рѣшенія задачи Абеля во всей ея общности и даю простѣйшее средство приведенія всякаго эллиптическаго интеграла къ функціямъ Weierstrass'a. Предлагаемая задача находится въ связи съ обращеніемъ эллиптическихъ интеграловъ, которымъ займемся прежде всего.

Полагая

$$x=-\frac{a_1}{a_0}+\xi,$$

получимъ

$$R=a_0(\xi^4+6\alpha_2\xi^2+4\alpha_3\xi+\alpha_4)=a_0R_1,$$

гдѣ

$$\alpha_4=\frac{a_2a_0-a_1^2}{a_0^2},\quad \alpha_3=\frac{a_0^2a_3-3a_0a_1a_2+2a_1^3}{a_0^3}.$$

Положимъ

$$\sqrt{R_1}=\sqrt{\xi^4+6\alpha_2\xi^2+4\alpha_3\xi+\alpha_4}=\xi^2+\alpha_2-2z.$$

Уничтожая здѣсь радикалъ, дадимъ уравненію двѣ формы:

$$4(\alpha_2+z)\xi^2+4\alpha_3\xi-(4z^2-4\alpha_2z+\alpha_2^2-\alpha_4)=0,$$
$$4z^2-4(\alpha_2+\xi^2)z-4(\alpha_3\xi^2+4\alpha_3\xi-\alpha_2^2+\alpha_4)=0,$$

Digitized by Google

откуда имѣемъ

$$\xi = \frac{-\alpha_3 \pm \sqrt{4z^3 - (3\alpha_2^2 + \alpha_4)z - (\alpha_2\alpha_4 - \alpha_3^2 - \alpha_2^3)}}{2(z+\alpha_2)}.$$

$$z = \frac{\alpha_2 + \xi^2 \pm \sqrt{\xi^4 + 6\alpha_2\xi^2 + 4\alpha_3\xi + \alpha_4}}{2}.$$

На этомъ основаніи

$$\frac{d\xi}{\sqrt{R_1}} = \pm \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}},$$

гдѣ

$$g_2 = 3\alpha_2^2 + \alpha_4,\ g_3 = \alpha_2\alpha_4 - \alpha_3^2 - \alpha_2^3.$$

Полагая $\alpha_2 = -pv$, получимъ $\alpha_3 = p'v$,

$$\xi = \frac{1}{2} \cdot \frac{p'u - p'v}{pu - pv},$$

$$x = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{2} \cdot \frac{p'u - p'v}{pu - pv},\ \sqrt{R_1} = \pm \left\{ p(u+v) - pu \right\}.$$

Значитъ

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{R}} = \frac{1}{\sqrt{a_0}} \int \left[-\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{2} \cdot \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right]^m du.$$

Займемся теперь приведеніемъ подъинтегральной функціи

$$\left(-\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{2} \cdot \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right)^m \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

къ интегрируемой формѣ. Раскрывая скобки въ (1), мы получимъ совокупность членовъ вида

$$A \left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right)^n.$$

Если $n = 2k$, то преобразованію подлежитъ формула

$$\left[\left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right)^2 \right]^k;$$

Digitized by Google

если же $n=2k+1$, то преобразованію подлежитъ формула

$$\left[\left(\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^2\right]^k \cdot \frac{p'u-p'v}{pu-pv} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Отсюда слѣдуетъ, что прежде всего надлежитъ привести къ интегрируемой формѣ двѣ дроби

$$\left(\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^2 \text{ и } \frac{p'u-p'v}{pu-pv}.$$

§ 2.

Эллиптическая функція

$$У=\left(\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^2$$

обращается въ безконечность для $u=o$, $u+v=o$. При $u=o$ функція имѣетъ безконечность втораго порядка, и для безконечно-малаго u главный членъ въ разложеніи $У$ будетъ, очевидно,

$$\left(-\frac{2}{u^3}:\frac{1}{u^2}\right)^2=\frac{4}{u^2},$$

и потому можно взять

$$У=4pu+У_1,$$

гдѣ $У_1$ есть двояко-періодическая функція, не обращающаяся въ безконечность для $u=o$. Въ самомъ дѣлѣ

$$У_1=\frac{p'^2u-2p'vp'u+p'^2v-4p^3u+8pvp^2u-4p^2vpu}{(pu-pv)^2}=$$
$$=\frac{8pvp^2u-(g_2+4p^2v)pu-2p'vp'u+p'^2v-g_3}{(pu-pv)^2}.$$

Дѣлая $u=o$, получимъ

$$lim\left[У_1\right]_{u=o}=\frac{8pv}{u^4}:\frac{1}{u^4}=8pv.$$

Итакъ при $u=o$ $У_1$ стремится къ конечному предѣлу $8pv$. Видно, кромѣ того, что $У_1$ имѣетъ безконечность втораго порядка при $u+v=o$.

Digitized by Google

При безконечно-маломъ $(u+v)$ главный членъ въ разложеніи $У_1$, или, что все равно, въ разложеніи $У$ найдется слѣдующимъ образомъ. Имѣемъ

$$p(u)=p(-v+u+v)=pv-(u+v)p'v+\frac{(u+v)^2}{2}p''v-\ldots\ldots,$$

слѣдовательно

$$pu-pv=-(u+v)p'v+\frac{(u+v)^2}{2}p''v-\frac{(u+v)^3}{6}p'''v+\ldots\ldots$$

Ясно отсюда, что искомый главный членъ есть

$$\frac{4}{(u+v)^2},$$

а потому

$$У_1=4p(u+v)+У_2,$$

гдѣ $У_2$ не обращается въ безконечность при $u+v=o$. Чтобы это доказать, замѣтимъ, что

$$\left(\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^2-4p(u+v)=$$

$$=\frac{\left[-2pv+(u+v)p''v-\frac{(u+v)^2}{2}p'''v+\ldots\right]^2}{(u+v)^2\left[-p'v+\frac{u+v}{2}p''v-\frac{(u+v)^2}{6}p'''v+\ldots\right]^2}-\frac{4}{(u+v)^2}+\varphi,$$

гдѣ φ обращается въ нуль вмѣстѣ съ $(u+v)$.

Или

$$\left(\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^2-4p(u+v)=\frac{(u+v)^2\left[\frac{2}{3}p'vp'''v+\psi\right]}{(u+v)^2\left[-p'v+\frac{u+v}{2}p''v-\ldots\right]^2}+\varphi,$$

гдѣ ψ обращается въ нуль вмѣстѣ съ $(u+v)$. А потому

$$lim\left[\left(\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^2-4p(u+v)\right]_{u+v=o}=\frac{2}{3}\frac{p'''v}{p'v}=8pv.$$

Digitized by Google

А потому

$$\left(\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^2 = 4pu + 4p(u+v) + f(v),$$

гдѣ $f(v)$ не зависитъ отъ u. Перемѣняя въ этомъ равенствѣ u на v, получимъ

$$\left(\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^2 = 4pv + 4p(u+v) + fu,$$

отсюда

$$4pv + 4p(u+v) + fu = 4pu + 4p(u+v) + fv,$$

отсюда

$$fu - fv = 4(pu - pv),$$

слѣд.

$$f'v = 4p'v,$$
$$fv = 4pv + \text{ постоян.},$$

слѣдов.

$$\left(\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^2 = 4pu + 4pv + 4p(u+v) + \text{ пост.};$$

постоянная второй части не зависитъ ни отъ u, ни отъ v; для опредѣленія ея положимъ

$$u = \omega, \; v = \omega',$$

тогда

$$p'u = o, \; p'v = o, \; pu = e_1, \; pv = e_2, \; p(u+v) = e_3,$$

и мы получимъ

$$\text{постоян.} = -4(e_1 + e_2 + e_3) = o.$$

А потому окончательно

$$\frac{1}{4}\left(\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^2 = p(u+v) + pu + pv \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

извѣстная формула сложенія аргументовъ.

Digitized by Google

Другую основную формулу

$$p'v.\frac{p'u-p'v}{pu-pv}=p''v-2(pu-pv)[p(u+v)-pv] \quad \ldots \quad (5)$$

заимствуемъ прямо изъ сочиненія *Halphen'a* „Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications", 1886, T. 1, p. 118. Доказательство этой формулы не представляетъ никакихъ затрудненій.

§ 3.

Всякая функція вида

$$\left(\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^{2k}=\left(4pu+4pv+4p(u+v)\right)^{k},$$

по раскрытіи скобокъ представится суммою членовъ вида

$$Ap^{\alpha}up^{\beta}(u+v),$$

гдѣ A постоянный коеффиціентъ, α и β цѣлыя положительныя числа. Чтобы дать этому члену интегрируемую форму, достаточно обнаружить духъ методы на частномъ примѣрѣ. Изслѣдуемъ для этой цѣли двоякоперіодическую функцію

$$z=p^{3}up'(u+v).$$

Функція эта обращается въ безконечность шестаго порядка при $u=o$ и въ безконечность четвертаго порядка при $u+v=o$. На этомъ основаніи z содержитъ слагаемое

$$z_1=p'vp^{3}u.$$

Имѣемъ

$$z-z_1=p^{3}up'(u+v)-p'vp^{3}u,$$

или

$$z-z_1=p^{3}u[p(u+v)+pv][p(u+v)-pv];$$

Но

$$p^{3}u=\left[\frac{1}{u^{2}}+\frac{1}{20}g_2u^{2}+\frac{1}{28}g_3u^{4}+\ldots\right]^{3},$$

Digitized by Google

а потому содержитъ члены

$$\frac{1}{u^6},\ \frac{3}{20}g_2\frac{1}{u^2};$$

кромѣ того

$$p(u+v)-pv=up'v+\frac{u^2}{2}p''v+$$

$$+\frac{u^3}{6}p'''v+\frac{u^4}{24}p^{(IV)}v+\frac{u_5}{120}p^{(V)}v+\ \ldots\ldots$$

На этомъ основаніи z_1-z содержитъ члены

$$\frac{2pvp'v}{u^4},\ \frac{pvp''v}{u^4},\ \frac{pvp'''v}{3u^3},\ \frac{1}{12}\frac{pvp^{(IV)}v}{u^2},\ \frac{1}{60}\frac{pvp^{(V)}v}{u},\ \frac{3}{10}g_2\frac{pvp'v}{u}.$$

Слѣдовательно нужно взять

$$z-z_1=-\frac{pvp'v}{12}p'''u+\frac{pvp''v}{6}p''u-\frac{pvp'''v}{6}p'u+\frac{pvp^{(IV)}v}{12}pu+$$

$$+\left(\frac{pvp^{(V)}v}{60}+\frac{3}{10}g_2pvp'v\right)\zeta u+z_2,$$

гдѣ z_2 зависитъ отъ безконечности $u+v=o$.

Поэтому нужно взять

$$z_2=p^2vp^2(u+v).$$

Имѣемъ

$$z-z_2=p^2(u+v)(p^2u-p^2v),$$

или

$$z-z_2=p^2(u+v)(p^2u+pvpu+p^2v)(pu-pv).$$

Извѣстно, что

$$p^2(u+v)=\left[\frac{1}{(u+v)^2}+\frac{1}{20}g_2(u+v)^2+\ \ldots\ldots\right]^2,$$

а потому содержитъ членъ

$$\frac{1}{(u+v)^4},$$

$$pu-pv=-(u+v)p'v+\frac{(u+v)^2}{2}p''v-\frac{(u+v)^3}{6}p'''v+\ \ldots\ldots$$

Digitized by Google

Значитъ $z-z_1$ содержитъ члены

$$-3p^2vp'v.\frac{1}{(u+v)^3},\ \frac{3}{2}p^2vp''v.\frac{1}{(u+v)^2},\ -\frac{p^2vp'''v}{2}.\frac{1}{(u+v)}.$$

На этомъ основаніи въ составъ $z-z_1$ входятъ члены

$$\frac{3}{2}p^2vp'vp'(u+v)+\frac{3}{2}p^2vp'''vp(u+v)-\frac{1}{2}p^2vp'''v\zeta(u+v);$$

слѣдовательно

$$p^2up^2(u+v)=p^2vp^2u-\frac{1}{2}pvp'vp'''u+\frac{1}{6}pvp''vp''u-\frac{1}{6}pvp'''vp'u+$$

$$+\frac{1}{12}pvp^{(IV)}vpu+\left(\frac{1}{60}pvp^{(V)}v+\frac{3}{10}g_2pvp'v\right)\zeta u+p^2vp^2(u+v)+$$

$$+\frac{3}{2}p^2vp'vp'(u+v)+\frac{3}{2}p^2vp''vp(u+v)-\frac{1}{2}p^2vp'''v\zeta(u+v)+C,$$

гдѣ C не зависитъ отъ u. Или

$$p^2up^2(u+v)=\frac{1}{120}p^2vp^{(IV)}u+\frac{3}{20}g_2p^2vpu+\frac{1}{6}p^2vp''(u+v)-$$

$$-\frac{1}{12}pvp'vp'''u+\frac{1}{6}pvp''vp''u-\frac{1}{6}pvp'''vp'u+$$

$$+\frac{1}{12}pvp^{(IV)}u+\frac{3}{20}p^2vp'vp'(u+v)+\frac{3}{2}p^2vp''vp(u+v)+$$

$$+\frac{1}{12}p^2vp'''v[\zeta(u+v)-\zeta u]+\frac{1}{10}g_2p^2v+\frac{1}{12}g_2p^2v+C.$$

Постоянная C всегда можетъ быть найдена, полагая $u=v$, но нахожденіе это въ данномъ случаѣ безполезно. Полученная форма есть, очевидно, интегрируемая, такъ что

$$\int p^2up^2(u+v)du=\frac{1}{120}p^2vp'''u+\frac{1}{6}p^2vp'(u+v)-\frac{1}{12}pvp'vp''u+$$

$$+\frac{1}{6}pvp''vp'u-\frac{1}{6}pvp'''vpu+\frac{3}{2}p^2vp'vp(u+v)+$$

$$+\left(\frac{3}{20}g_2p^2v+\frac{1}{12}pvp^{(IV)}v\right)\zeta u-\frac{3}{2}p^2vp''v\zeta(u+v)-$$

$$-\frac{1}{2}p^2vp'''v\,log\frac{\sigma(u+v)}{\sigma u}+\left(\frac{1}{10}g_2p^2v+\frac{1}{12}g_2p^2v+C\right)u+$$

Digitized by Google

§ 4.

Приложимъ выясненную методу къ нахожденію интеграла

$$\int \left[\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right]^6 du.$$

Имѣемъ

$$\frac{1}{4}\left(\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^2 - pv = pu + p(u+v),$$

слѣдовательно

$$\frac{1}{16}\left(\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^4 - \frac{1}{2}pv\left(\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^2 = p^2u + p^2(u+v) - p^2v +$$

$$+ 2pup(u+v) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

$$\frac{1}{64}\left(\frac{pu'-p'v}{pu-pv}\right)^6 - \frac{3}{16}pv\left(\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^4 + \frac{3}{4}p^2v\left(\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^2 = p^3u +$$

$$+ p^3(u+v) + p^3v + 3p^2up(u+v) + 3pup^2(p+v) \quad \ldots \quad (7).$$

Надлежитъ найти интегрируемую форму для трехъ произведеній

а) $2pup(u+v)$, б) $3p^2up(u+v)$, в) $3pup^2(u+v)$.

а) Имѣемъ

$$pup(u+v) - pupv = pu[p(u+v) - pv] = pu[up'v + \frac{u^2}{2}p'''v + \ldots.];$$

значитъ

$$pup(u+v) = pvpu + p'v\zeta u + \quad \ldots\ldots\ldots,$$

гдѣ точками обозначены члены, не зависящіе отъ безконечности $u = 0$.

Имѣемъ

$$pup(u+v) - pvp(u+v) = p(u+v)(pu-pv) =$$

$$= p(u+v)[-(u+v)p'v + \frac{(u+v)^2}{2}p''v - \ldots],$$

значитъ

$$pup(u+v) = pvp(u+v) - p'v\zeta(u+v) + \ldots\ldots\ldots,$$

Digitized by Google

слѣдовательно

$$pup(u+v)=pupv+pvp(u+v)+p'v\left\{\zeta u-\zeta(u+v)+\zeta v\right\}+C,$$

гдѣ C постоянная. Полагая $u=v$, имѣемъ

$$C+p^2v-\frac{p'v}{2}\frac{p''v}{p'v}=0,$$

$$C=-p^2v+\frac{p''v}{2}=2p^2v-\frac{1}{4}g_2;$$

слѣдовательно

$$2pup(u+v)=2pvpu+2pvp(u+v)+2p'v\left\{\zeta u-\zeta(u+v)+\zeta v\right\}+$$

$$+4p^2v-\frac{1}{2}g_2 \quad \ldots\ldots \quad (8).$$

б) Имѣемъ

$$p^2up(u+v)-p^2upv=p^2u\ \left(up'v+\frac{u^2}{2}p''v+\frac{u^3}{6}p'''v+\ldots.\right);$$

или

$$p^2up(u+v)-p^2upv=\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{20}g_2u^2+\ldots.\right)^2$$

$$\left(up'v+\frac{u^2}{2}p''v+\frac{u^3}{6}p'''v+\ldots.\right);$$

слѣдовательно

$$p^2up(u+v)=p^2upv-\frac{1}{2}p'vp'u+\frac{1}{2}p''vpu+\frac{1}{6}p'''v\zeta u+\ldots\ldots$$

Еще имѣемъ

$$p^2up(u+v)-p^2vp(u+v)=p(u+v)(pu+pv)(pu-pv),$$

или

$$p^2up(u+v)-p^2vp(u+v)=(pu+pv)\left[\frac{1}{(u+v)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{20}g_2(u+v)+\ldots\right]\left[-(u+v)p'v+\ldots\right],$$

Digitized by Google

а потому

$$p^2up(u+v)=p^2vp(u+v)-2pvp'v\zeta(u+v)+\ldots\ldots=$$
$$=p^2vp(u+v)-\frac{1}{6}p'''v\zeta(u+v)+\ldots\ldots,$$

слѣдовательно

$$p^2up(u+v)=pvp^2u+p^2vp(u+v)-\frac{1}{2}p'vp'u+\frac{1}{2}p''vpu+$$
$$+\frac{1}{6}p'''v\left\{\zeta u-\zeta(u+v)+\zeta v\right\}+C.$$

Полагая $u=v$, получимъ

$$C-\frac{1}{12}\frac{p'''vp'v}{p'v}+\frac{1}{2}pvp''v-\frac{1}{2}p'^2v+p^2v=0,$$

откуда

$$C=pvp''v-\frac{1}{2}pvp''v+2p^2v-\frac{1}{2}g_2pv-\frac{1}{2}g_3-p^2v,$$

или

$$C=4p^2v-\frac{3}{4}g_2pv-\frac{1}{3}g_3,$$

слѣдовательно

$$3p^2up(u+v)=3pvp^2u+3p^2vp(u+v)-\frac{3}{2}p'vp'u+\frac{3}{2}p''vpu+$$
$$+\frac{1}{2}p'''v\left\{\zeta u-\zeta(u+v)+\zeta v\right\}+12p^2v-\frac{9}{4}p'''v-\frac{3}{2}g_3 \quad (9).$$

в) Имѣемъ

$$pup^2(u+v)-p^2vpu=pu[p(u+v)+pv][p(u+v)-pv]=$$
$$=[p(u+v)+pv][\frac{1}{u^2}+\frac{1}{20}g_2u^2+\ldots\ldots][up'v+$$
$$+\frac{1}{2}u^2p'''v+\ldots\ldots];$$

слѣдовательно

$$pup^2(u+v)=p^2vpu+2pvp'v\zeta u+\ldots\ldots=p^2vpu+\frac{1}{6}p'''v\zeta u+\ldots\ldots$$

Digitized by Google

Далѣе

$$pup^2(u+v)-pvp^2(u+v)=p^2(u+v)[-(u+v)p'v+$$
$$+\frac{1}{2}(u+v)^2p''v-\frac{1}{6}(u+v)^3p'''v\ldots],$$

или

$$pup^2(u+v)=pvp^2(u+v)+\frac{1}{2}p'vp'(u+v)+\frac{1}{2}p''vp(u+v)-$$
$$-\frac{1}{6}p'''v\zeta(u+v)+\ldots;$$

а потому

$$pup^2(u+v)=p^2vpu+pvp^2(u+v)+\frac{1}{2}p'vp'(u+v)+\frac{1}{2}p''vp(u+v)+$$
$$+\frac{1}{6}p'''v\left\{\zeta u-\zeta(u+v)+\zeta v\right\}+C.$$

Полагая

$$u=v,$$

получимъ

$$C=5p^3v-\frac{1}{2}g_2pv-\frac{1}{2}(p''vp2v+p'vp'2v).$$

На этомъ основаніи

$$3p^2(u+v)pu=3p^2vpu+3pvp^2(u+v)+\frac{3}{2}p'vp'(u+v)+$$
$$+\frac{3}{2}p''vp(u+v)+\frac{1}{2}p'''v\left\{\zeta u-\zeta(u+v)+\zeta v\right\}+15p^3v-$$
$$-\frac{3}{2}g_2pv-\frac{3}{2}(p''vp2v+p'vp'2v).\ldots.\ (10).$$

При помощи (8), (9), (10) получимъ послѣдовательно:

$$\frac{1}{16}\left(\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^4=p^2u+p^2(u+v)+4pvpu+4pvp(u+v)+2p'v\left\{\zeta u-\right.$$
$$\left.-\zeta(u+v)+\zeta v\right\}+5p^2v-\frac{1}{2}g_2-\frac{1}{6}p''u+\frac{1}{6}p''(u+v)+$$

Digitized by Google

$$+4pvpu+4pvp(u+v)+2'pv\left\{\zeta u-\zeta(u+v)+\right.$$

$$\left.+\zeta v\right\}+5p^2v-\frac{1}{3}g_2;$$

$$\frac{1}{64}\left(\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^6=\frac{1}{120}p^{(IV)}u+\frac{1}{120}p^{(IV)}(u+v)+pvp''(u+v)+$$

$$+21p^2vpu+21p^2vp(u+v)-\frac{9}{10}g_2pu-$$

$$-\frac{9}{10}g_2p(u+v)-\frac{3}{2}p'vp'u+\frac{3}{2}p'vp'(u+v)+$$

$$+\frac{3}{2}p''v\left\{\zeta u-\zeta(u+v)+\zeta v\right\}+40p^3v-\frac{17}{4}g_2pv+$$

$$+2g_2-\frac{3}{2}(p''vp2v+p'vp'2v).$$

Поэтому

$$(A)\frac{1}{16}\int\left(\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^4du=\frac{1}{6}p'u+\frac{1}{6}p'(u+v)-4pv\left\{\zeta u+\zeta(u+v)\right\}$$

$$+2p'vloge^{u\zeta v}\frac{\sigma u}{\sigma(u+v)}+\left(5p^2v-\frac{1}{3}g_2\right)u+C;$$

$$(B)\frac{1}{64}\int\left(\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^6du=\frac{1}{120}p'''u+\frac{1}{120}p'''(u+v)+pv\left\{p'u+\right.$$

$$\left.+p'(u+v)\right\}-\frac{3}{2}p'v\left\{pu-p(u+v)\right\}+$$

$$+\left(\frac{9}{10}g_2-21p^2v\right)\left\{\zeta u+\zeta(u+v)\right\}+$$

$$+\frac{3}{2}p''vloge^{u\zeta v}\frac{\sigma u}{\sigma(u+v)}+\left\{40p^3v-\frac{17}{4}g_2pv+\right.$$

$$\left.+2g_2-\frac{3}{2}(p''vp2v+p'vp'2v)\right\}u+C.$$

Digitized by Google

§ 5.

Для того, чтобы показать, какъ примѣняется метода къ нахожденію интегрируемой формы для

$$\left[\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right]^{2k+1}$$

разсмотримъ простѣйшій случай, когда $k=1$, т. е. найдемъ

$$\int\left[\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right]^3 du,$$

Перемножая два уравненія

$$p'v\frac{p'u-p'v}{pu-pv}+2p^2v-p''v=-2pupu+2pvpu+2pvp(u+v),$$

$$-pv+\frac{1}{4}\left(\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^2=pu+p(u+v),$$

находимъ

$$\frac{p'v}{4}\left(\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^3+\frac{2p^2v-p''v}{4}\left(\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^2-pvp'v\frac{p'u-p'v}{pu-pv}-2p^2v+pvp''v=$$

$$=-2p^2up(u+v)-2pup^2(u+v)+$$

$$+2pvp^2u+4pvpup(u+v)+2pvp^2(u+v) \quad . \quad . \quad (11).$$

Внося въ (11) результаты, выраженные уравн. (8), (9) и (10), будемъ имѣть

$$\frac{p'v}{4}\left(\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^3-(4p^2v-\frac{1}{2}g_2)(pu+p(u+v)+pv)+2pvp'v\left\{\zeta u-\right.$$

$$\left.-\zeta(u+v)+\zeta v\right\}+4p^3v-\frac{1}{2}g_2pv=2pvp^2u+$$

$$+2pvp^2(u+v)+4p^2vpu+4p^2vp((u+v)+\frac{1}{3}p''v\left\{\zeta u-\right.$$

$$\left.-\zeta(u+v)+\zeta v\right\}+8p^3v-g_2pv-2p^2vpu-$$

$$-2pvp^2(u+v)-p'vp'(u+v)-p''pv(u+v)-$$

$$-\frac{1}{3}p''v\left\{\zeta u-\zeta(u+v)+\zeta v\right\}-10p^3v+g_2pv+$$

Digitized by Google

$$+p''vp2v+p'vp'2v-2pvp^2u-2p^2vp(u+v)+$$
$$+p'vp'u-p''vpu-\frac{1}{3}p'''v\left\{\zeta u-\zeta(u+v)+\zeta v\right\}-$$
$$-8p^3v+\frac{3}{2}p''v+g_3.$$

Отсюда

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^3du=\frac{1}{2}\left\{p'u-p'(u+v)\right\}-3pv\left\{\zeta u-\zeta(u+v)+\right.$$
$$\left.+\zeta v\right\}+\frac{1}{2p'v}\left\{p''v2v+p'vp'2v+\frac{3}{2}p''v+g_3-10p^3v\right\},$$

$$(C)\int\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^3du=\frac{1}{2}\left\{pu-p(u+v)\right\}-3pvLog\frac{\sigma u}{\sigma(u+v)}+$$
$$+\frac{1}{2p'v}\left\{p''vp2v+p'vp'2v+\frac{3}{2}p''v+g_3-\right.$$
$$\left.-10p^3v-3pv\zeta v\right\}u+C.$$

§ 6.

Найденныя разложенія можно представить въ формѣ:

I) $$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^4=\frac{1}{6}p''u+\frac{1}{6}p''(u+v)+4pv\left\{pu+p(u+v)+\right.$$
$$\left.+pv\right\}+2p'v\left\{\zeta u-\zeta(u+v)+\zeta v\right\}+p^2v-\frac{1}{3}g_2=$$
$$=\frac{1}{6}[p''u+p''(u+v)]+4pv\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^2-$$
$$-2p'v\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)+p^2v-\frac{1}{3}g_2;$$

II) $$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^6=\frac{1}{120}p^{(IV)}u+\frac{1}{120}p^{(IV)}(u+v)+pvp''(u+v)+$$
$$+\left(21p^2v-\frac{9}{10}g_2\right)\left\{pu+p(u+v)+pv\right\}+$$
$$+\frac{3}{2}p'''v\left\{\zeta u-\zeta(u+v)+\zeta v\right\}+19p^3v-$$

Digitized by Google

$$-2g_2p\nu+2g_3-\frac{3}{2}(p''\nu p2\nu+p'\nu p'2\nu)=$$

$$=\frac{1}{120}p^{(IV)}u+\frac{1}{120}p^{(IV)}(u+\nu)+p\nu p''u+$$

$$+p\nu p''(u+\nu)+(21p^2\nu-\frac{9}{10}g_2)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{p'u-p'\nu}{pu-p\nu}\right)^2+$$

$$+\frac{3}{2}p'''\nu\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{p'u-p'\nu}{pu-p\nu}\right)+19p^2\nu-2g_2p\nu+2g_3-$$

$$-\frac{3}{2}(p''\nu p2\nu+p'\nu p'2\nu);$$

$$\text{III)}\quad\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{p'u-p'\nu}{pu-p\nu}\right)^3=\frac{1}{2}\left\{p'u-p'(u+\nu)\right\}+3p\nu\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{p'u-p'\nu}{pu-p\nu}\right)+$$

$$+\frac{1}{2p'\nu}\left\{p''\nu p2\nu+p'\nu p'2\nu+\frac{3}{2}p''\nu+g_2-10p^2\nu\right\}.$$

Изъ этихъ формулъ видно, что интегралы

$$\int\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{p'u-p'\nu}{pu-p\nu}\right)^3du,\int\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{p'u-p'\nu}{pu-p\nu}\right)^4du,\int\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{p'u-p'\nu}{pu-p\nu}\right)^6du,$$

кромѣ алгебраической части, могутъ содержать только три трансцендентныхъ функціи:

$$\int du,\ \int\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{p'u-p'\nu}{pu-p\nu}\right),\ \int\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{p'u-p'\nu}{pu-p\nu}\right)^2du.$$

Можно, съ чрезвычайною простотою, доказать, что этимъ свойствомъ обладаетъ всякій интегралъ вида

$$\int\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{p'u-p'\nu}{pu-p\nu}\right)^l du,$$

гдѣ l цѣлое, положительное число. Въ самомъ дѣлѣ интегрируемая форма для

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{p'u-p'\nu}{pu-p\nu}\right)^l$$

Digitized by Google

будетъ, очевидно,

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^l = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=l-2} A_\alpha p^{(\alpha)}(u) + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=l-2} A'_\alpha p^{(\alpha)}(u+v) + \\ + Bpu + B'p(u+v) + C\zeta u + C'\zeta(u+v) + D,$$

гдѣ $A, B, \ldots D$ нѣкоторые постоянные коефиціенты.

Замѣняя здѣсь u на $(-u-v)$, получимъ

$$\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{p'(u+v)+p'v}{p(u+v)-pv}\right]^l = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=l-2}(-1)^\alpha A'_\alpha p^{(\alpha)}(u) + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=l-2}(-1)^\alpha A_\alpha p(u+v) + \\ + Bp(u+v) + B'pu - C\zeta(u+v) - C'\zeta u + D.$$

Дѣлая подобную же замѣну въ уравненіи

$$\zeta(+v) - \zeta u - \zeta v = \frac{1}{2}\cdot\frac{p'u-p'v}{pu-pv},$$

получимъ

$$-\zeta u + \zeta(u+v) - \zeta v = -\frac{1}{2}\frac{p'(u+v)+p'v}{p(u+v)-pv},$$

слѣдовательно

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{p'u-p'v}{pu-pv} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{p'(u+v)+p'v}{p(u+v)-pv},$$

а потому

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^l = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=l-2}\frac{A\alpha+(-1)^\alpha A'_\alpha}{2}p^{(\alpha)}u + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=l-2}\frac{A'\alpha+(-1)^\alpha A_\alpha}{2}p^{(\alpha)}(u+v) + \\ + \frac{B+B'}{2}\left\{pu+p(u+v)+pv\right\} + \frac{C-C'}{2}\left\{\zeta u-\zeta(u+v)+\zeta v\right\} + E = \\ = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=l-2}\frac{A\alpha+(-1)^\alpha A'_\alpha}{2}p^{(\alpha)}u + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=l-2}\frac{A'\alpha+(-1)^\alpha A_\alpha}{2}p^{(\alpha)}(u+v) + \\ + \frac{B+B'}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^2 + \frac{C-C'}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right) + E.$$

Digitized by Google

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\int \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^l du,$$

сверхъ алгебраической части будетъ содержать три неприводимыхъ интеграла

$$\int du, \int \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right) du, \int \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^2 du.$$

Этотъ результатъ указанъ Абелемъ и достигнутъ имъ чисто алгебраическимъ путемъ.

§ 7.

Сложность результатовъ, получаемыхъ для интегралов

$$\int \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^{2k+1} du,$$

вынуждаетъ насъ изложить методу приведенія этихъ интегралов къ виду

$$\int \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^{2k} du.$$

Сущность метода вполнѣ выяснится изъ разсмотрѣнія частнаго примѣра. Возьмемъ интегралъ

$$\int \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^5 du = \int \frac{\xi^5 \partial\xi}{\sqrt{\xi^4+6\alpha_2\xi^2+4\alpha_3\xi+\alpha_4}}$$

Легко догадаться, на основаніи § 6, что приведеніе этого интеграла можетъ быть достигнуто при помощи равенства

$$\int \frac{\xi^5 d\xi}{\sqrt{\xi^4+6\alpha_2\xi^2+4\alpha_3\xi+\alpha_4}} = k\xi^3\sqrt{\xi^4+6\alpha_2\xi^2+4\alpha_3\xi+\alpha_4} + \int \frac{(A\xi^3+B\xi^2+C\xi+D)\partial\xi}{\sqrt{\xi^4+6\alpha_2\xi^2+4\alpha_3\xi+\alpha_4}} \ldots (12),$$

Digitized by Google

гдѣ k, A, B, C, D неопредѣленные коефиціенты.

Дифференцируя (12), находимъ

$$\frac{\xi^5}{\sqrt{\xi^4+6\alpha_2\xi^2+4\alpha_3\xi+\alpha_4}}=\frac{4k\xi^5+18k\alpha_2\xi^3+10k\alpha_3\xi^2+2k\alpha_4\xi}{\sqrt{\xi^4+6\alpha_2\xi^2+4\alpha_3\xi+\alpha_4}}$$

$$+\frac{A\xi^3+B\xi^2+C\xi+D}{\sqrt{\xi^4+6\alpha_2\xi^2+4\alpha_3\xi+\alpha_4}},$$

или

$$\xi^5=4k\xi^5+(18k\alpha_2+A)\xi^3+(10k\alpha_3+B)\xi^2+(2k\alpha_4+C)\xi+D,$$

откуда

$$k=\frac{1}{4}, A=-\frac{9}{2}\alpha_2, B=-\frac{5}{2}\alpha_3, C=-\frac{\alpha_4}{2}, D=0;$$

слѣдовательно

$$\int\frac{\xi^5 d\xi}{\sqrt{\xi^4+6\alpha_2\xi^2+4\alpha_3\xi+\alpha_4}}=\frac{1}{4}\xi^2\sqrt{\xi^4+6\alpha_2\xi^2+4\alpha_3\xi+\alpha_4}-$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{(9\alpha_2\xi^3+5\alpha_3\xi^2+\alpha_4\xi)\partial\xi}{\sqrt{\xi^4+6\alpha_2\xi^2+4\alpha_3\xi+\alpha_4}}\ldots(13).$$

Положимъ

$$\int\frac{\xi^3 d\xi}{\sqrt{\xi^4+6\alpha_2\xi^2+4\alpha_3\xi+\alpha_4}}=i\sqrt{\xi^4+6\alpha_2\xi^2+4\alpha_3\xi+\alpha_4}+$$

$$+\int\frac{(A'\xi+B')\partial\xi}{\sqrt{\xi^4+6\alpha_2\xi^2+4\alpha_3\xi+\alpha_4}}.$$

Дифференцируя это уравненіе, имѣемъ

$$\frac{\xi^3}{\sqrt{\xi^4+6\alpha_2\xi^2+4\alpha_3\xi+\alpha_4}}=\frac{2i(\xi^3+3\alpha_2\xi+\alpha_3)+A'\xi+B'}{\sqrt{\xi^4+6\alpha_2\xi^2+4\alpha_3\xi+\alpha_4}};$$

$$\xi^3=2i\xi^3+(6i\alpha_2+A')\xi+(2i\alpha_3+B');$$

отсюда

$$i=\frac{1}{2}, A'=-3\alpha_2, B'=-\alpha_3;$$

Digitized by Google

а потому

$$\int \frac{\xi^3 d\xi}{\sqrt{\xi^4+6\alpha_2\xi^2+4\alpha_3\xi+\alpha_4}} = \frac{1}{2}\sqrt{\xi^4+6\alpha_2\xi^2+4\alpha_3\xi+\alpha_4} - \int \frac{(3\alpha_2\xi+\alpha_3)\partial\xi}{\sqrt{\xi^4+6\alpha_2\xi^2+4\alpha_3\xi+\alpha_4}} \ldots (14),$$

или

$$\int \left(\frac{1}{2}\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^3 du = \frac{1}{2}[pu-p(u+v)] + 3pv\int \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)\partial u - p'v.\ u \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

Далѣе умножая (14) на $\frac{9}{2}\alpha_3$, получимъ

$$\int \frac{\frac{9}{2}\alpha_3\xi^3 d\xi}{\sqrt{\xi^4+6\alpha_2\xi^2+4\alpha_3\xi+\alpha_4}} = \frac{9}{4}\alpha_3\sqrt{\xi^4+6\alpha_2\xi^2+4\alpha_3\xi+\alpha_4} - \int \frac{\left(\frac{27}{2}\alpha^2_2\xi+\frac{9}{2}\alpha_2\alpha_3\right)\partial\xi}{\sqrt{\xi^4+6\alpha_2\xi^2+4\alpha_3\xi+\alpha_4}};$$

слѣдовательно

$$\int \frac{\xi^5 d\xi}{\sqrt{\xi^4+6\alpha_2\xi^2+4\alpha_3\xi+\alpha_4}} = \left(\frac{1}{4}\xi^2-\frac{9}{4}\alpha_2\right)\sqrt{\xi^4+6\alpha_2\xi^2+4\alpha_3\xi+\alpha_4} - \frac{5}{2}\alpha_3\int \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\xi^4+6\alpha_2\xi^2+4\alpha_3\xi+\alpha_4}} + \int \frac{\left(\frac{27}{2}\alpha^2_2-\frac{\alpha_4}{2}\right)\xi d\xi}{\sqrt{\xi^4+6\alpha_2\xi^2+4\alpha_3\xi+\alpha_4}} + \frac{9}{2}\alpha_2\alpha_3\int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4+6\alpha_2\xi^2+4\alpha_3\xi+\alpha_4}} \ldots (16).$$

Нетрудно (16) выразить въ эллиптическихъ функціяхъ, замѣчая, что

$$\xi = \frac{1}{2}\cdot\frac{p'u-p'v}{pu-pv},\ \alpha_2 = -pv,\ \alpha_3 = p'v,\ \alpha_4 = g_2-3p^2v,$$

$$\sqrt{\xi^4+6\alpha_2\xi^2+4\alpha_3\xi+\alpha_4} = pu-p(u+v)\ (^1).$$

(1) Journal de Mathem. pures et ap. 4-e série T. VI. p 293—311. 1890.

Digitized by Google

Дѣлая надлежащія подстановки, получимъ:

$$\int\left[\frac{1}{2}\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right]^5 du=\frac{1}{24}\left[p''u-p''(u+v)\right]+\frac{5}{2}pv\left[pu-p(u+v)\right]-$$

$$-\frac{5}{2}p'v\int\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right]^3 du+\left(\frac{33}{2}p^2v-g_2\right)\int\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right]du-$$

$$-\frac{9}{2}pvp'.v.\ u\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (17).$$

§ 8.

Для провѣрки найденныхъ результатовъ рѣшимъ вопросъ, поставленный Абелемъ: (1) изыскать условія, необходимыя и достаточныя, для того, чтобы интегралъ

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4}}$$

выражался алгебраическою функціею.

Имѣемъ

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4}}=\int\frac{(\xi-a_1)^4dx}{\sqrt{\xi^4+6a^2\xi^2+4a_3\xi+a_4}}=$$

$$\int\frac{\xi^4d\xi}{\sqrt{R_1}}-4a_1\int\frac{\xi^3d\xi}{\sqrt{R_1}}+6a_1^2\int\frac{\xi^2d\xi}{\sqrt{R_1}}-4a_1^3\int\frac{\xi d\xi}{\sqrt{R_1}}+a_1^4\int\frac{d\xi}{\sqrt{R_1}},$$

гдѣ

$$R_1=\xi^4+6a_2\xi^2+4a_3\xi+a_4$$

Пользуясь формулой I) § 6 и формулой (15) § 7, получимъ

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4}}=\frac{1}{6}\left\{p'u+p'(u+v)\right\}-$$

$$-2a_1\left\{pu-p(u+v)\right\}+(6a_1^2-4a_2)\int\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{p'u-p'v}{pu+pv}\right]^2du+$$

(1) Oeuvres complètes t. 2 p. 95, 96, 1881.

Digitized by Google

$$+(12a_1a_2-2a_3-4a_1^3)\int\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right]^2du+(a_1^4+4a_1a_3+a_2^2-\frac{1}{3}g_2)u$$

Искомыя условія будутъ:

$$1)\quad 6a_1^2-4a_2=6a_1^2-4a_2+4a_1^2=10a_1^2-4a_2=0,$$

$$a_2=\frac{5}{2}a_1^2;$$

откуда

$$2)\quad 12a_1a_2-2a_3-4a_1^3=18a_1a_3-2a_3-20a_1^3=25a_1^3-2a_3=0;$$

$$a_3=\frac{25}{2}a_1^3;$$

$$3)\quad a_1^4+4a_1a_3+a_2^2-\frac{1}{3}g_2\ (^2)=a_1^4+4a_1a_3-12a_1^2a_2+8a_1^4+$$

$$+a_2^2-2a_1^3a_2+a_1^4-\frac{1}{3}a_4+\frac{4}{3}a_1a_3-a_2^2=0,$$

$$a_4=125a_1^4$$

слѣдовательно

$$x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4=x^4+4a_1x^3+15a_1^2x^2+$$

$$+50a_1^3x+125a_1^4.$$

Имѣемъ поэтому

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{x^4+4a_1x^3+15a_1^2x^2+50a_1^3x+125a_1^4}}=\frac{1}{6}\left\{p'u+p'(u+v)\right\}-$$

$$-2a_1\left\{pu-p(u+v)\right\}\ (18).$$

---

(2) Выраженіе g_2 въ функціи коффиціентовъ полинома R можно найти въ соч. Halphen'a: Traite des fonct. ellipt. t. I. p. 120, 1886.

Digitized by Google

Но

$$pu—p(u+v)=\sqrt{x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4}=$$
$$=\sqrt{x^4+4a_1x^3+15a_1^2x^4+50a_1^3x+125a_1^4};$$
$$pu+p(u+v)+pv=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{p'u—p'v}{pu—pv}\right)^2=\xi^2,$$

слѣдовательно

$$p'u+p'(u+v)=2\xi\frac{d\xi}{du}=2\xi\sqrt{\xi^4+6a_2\xi^2+4a_3\xi+a_4}=$$
$$=2(x+a_1)\sqrt{x^4+4a_1x^3+15a_1^2x^2+50a_1^3x+125a_1^4};$$

а потому

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{x^4+4a_1x^3+15a_1^2x^2+50a_1^3x+125a_1^4}}=$$
$$=\frac{1}{3}(x-5a_1)\sqrt{x^4+4a_1x^3+15a_1^2x^3+50a_1^3x+125a_1^4}.$$

Для того, чтобы получить тотъ самый интегралъ, который приводится у Абеля, положимъ $a_1=\frac{1}{5}$; тогда

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{x^4+\frac{4}{5}x^3+\frac{3}{5}x^2+\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}}=\frac{1}{3}(x—1)\sqrt{x^4+\frac{4}{5}x^3+\frac{3}{5}x^2+\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}},$$

или

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{5x^4+4x^3+3x^2+2x+1}}=\frac{1}{15}(x—1)\sqrt{5x^4+4x^3+3x^2+2x+1}.$$

Этотъ же примѣръ приводится въ сочиненіи Сомова „Основанія теоріи эллип. функцій“, 1850, ст. 9. Легко составить безчисленное множество подобныхъ примѣровъ. Поставленная въ этомъ n^0 задача могла бы быть рѣшена еще слѣдующимъ путемъ. Если предложенный интегралъ выражается алгебраически, то мы должны имѣть

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_1x+a_4}}=\frac{1}{6}\left\{p'u+p'(u+v)\right\}—$$
$$—2a_1\left\{pu—p(u+v)\right\},$$

Digitized by Google

или

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_1x+a_4}} =$$

$$= \frac{1}{3}(x - 5a_1)\sqrt{x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4}.$$

Дифференцируя это уравненіе, находимъ

$$\frac{x^4}{\sqrt{x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4}} = \frac{1}{3}\sqrt{x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4} +$$

$$+\frac{2}{3}\cdot\frac{(x-5a_1)(x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3)}{\sqrt{x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4}};$$

откуда

$$1)\ 4a_2 - 10a_1^2 = 0,\ a_1 = \frac{5}{2}a_1^2;$$

$$2)\ 2a_3 - 10a_1a_2 = 0,\ a_3 = \frac{25}{2}a_1^3;$$

$$3)\ a_4 - 10a_1a_3 = 0,\ a_4 = 125a_1^4.$$

Мы получаемъ вышенайденные результаты.

§ 9. Докажемъ теперь, что при обращеніи интеграла

$$\int \frac{fx\,dx}{\varphi(x)\sqrt{R}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

никакихъ новыхъ эллиптическихъ функцій мы не получимъ.

Интегралъ (19) есть совокупность интеграловъ вида

$$\int \frac{dx}{(x-a)^l\sqrt{R}} = \int \frac{du}{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{p'u-p'v}{pu-pv} - b\right)^l},$$

гдѣ положено, для краткости

$$\frac{a_1}{a_0} + a = b.$$

Займемся преобразованіемъ двояко-періодической функціи

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{p'u-p'v}{pu-pv} - b} = 2\cdot\frac{pu-pv}{p'u-p'v-2b(pu-pv)} \quad (20)$$

Digitized by Google

Безконечности этой функціи найдутся изъ уравненія

$p'u - p'v - 2b(pu - pv) = 0$, или $p'u - p'v = 2b(pu - pv)$, или

$$4z^3 - g_2 z - g_3 = (2bz + 2ba_2 + a_3)^2$$

Это кубическое уравненіе дастъ три корня

$$z_1 = pv = -a_2, \quad z_2 = pt, \quad z_3 = pw$$

такого рода, что

$$v + t + w = 0,$$

по теоремѣ Абеля (1).

Такъ какъ при $u = v$ имѣемъ

$$\mathfrak{A} = \frac{2p'v}{p''v - 2bp'v}$$

то $\mathfrak{A}$ имѣетъ лишь двѣ безконечности t и w, удовлетворяющія уравненію

$$t + w = -v,$$

откуда

$$t = -(v + w).$$

Тѣ-же безконечности имѣетъ функія

$$\mathfrak{B} = \frac{p'(u-w) - p'(v+2w)}{p(u-w) - p(v+2w)};$$

а потому можно взять

$$2\frac{pu - pv}{p'u - p'v - 2b(pu - pv)} = \lambda\frac{p'(u-w) - p'(v+2w)}{p(u-w) - p(v+w)} + \mu$$

гдѣ λ и μ постоянные коефиціенты. Дѣлая $u = w$ и уравнивая главные члены обѣихъ частей, получимъ

$$\frac{2(pw - pv)}{(u-w)p''w} = \frac{-2\lambda}{u-w},$$

---

(1) Halphen «Traité des fonctions elliptiques etc». t. 1. 1886 p. 59.

Digitized by Google

откуда

$$\lambda = \frac{pv - pw}{p'w},$$

слѣдовательно

$$\mathfrak{A} = \frac{pv - pw}{p'w} \cdot \frac{p'(u-w) - p'(v+2w)}{p(u-w) - p(v+2w)} + \mu.$$

Полагая

$$u = v,$$

находимъ

$$\mu = \frac{2p'v}{p''v - 2p'v} - \frac{pv - pw}{p'w} \cdot \frac{p'(v-w) - p'(v+2w)}{p(v-w) - p(v+2w)}.$$

И такъ λ и μ найдены и могутъ быть вычислены алгебраически.

Поэтому

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^t \sqrt{R}} = \int \left\{ \lambda \frac{p'(u-w) - p'(v+2w)}{p(u-w) - p(v+2w)} + \mu \right\}^t du.$$

Этотъ послѣдній интегралъ приводится къ тремъ слѣдующимъ

$$\int \left\{ \frac{p'(u-w) - p'(v+2w)}{p(u-w) - p(v+2w)} \right\}^2 du, \quad \int \left\{ \frac{p'(u-w) - p'(v+2w)}{p(u-w) - p(v+2w)} \right\} du, \int du,$$

между которыми нѣтъ ни одного новаго. По формуламъ сложенія эллиптическихъ аргументовъ имѣемъ.

$$\frac{p'(u-w) - p'(v+2w)}{p(u-w) - p(v+2w)} = 2\zeta(u+v+w) - 2\zeta(u-w) - 2\zeta(v+2w),$$

$$\left[\frac{p'(u-w) - p'(v+2w)}{p(u-w) - p(v+2w)} \right]^2 = 4p(u+v+w) + 4p(u-w) + 4p(v+2w),$$

слѣдовательно

$$1) \int \frac{p'(u-w) - p'(v+2w)}{p(u-w) - p(v+2w)} du = 2\,Loge^{-u\zeta(v+2w)} \frac{\sigma(u+v+w)}{\sigma(u-w)}$$

$$2) \int \left[\frac{p'(u-w) - p'(v+2w)}{p(u-w) - p(v+2w)} \right]^2 du = -4\left\{ \zeta(u+v+w) + \zeta(u-w) \right\} + 4p(v+2w).u$$

Digitized by Google

Изслѣдованіе интеграла

$$\int \frac{F(x)dx}{F_1(x)\sqrt{a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4}} \quad \ldots\ldots (21)$$

приводитъ насъ къ заключенію, что, сверхъ алгебраической части, интегралъ этотъ будетъ содержать трансцендентные члены

$$\sum_{i=0}^{i=i} l_i \left\{\zeta(u+v+w_i)+\zeta(u-w_i)\right\} + \sum_{i=0}^{i=i} K_i \, Log\frac{\sigma(u+v+w_i)}{\sigma(u-w_i)} +$$

ти, гдѣ $w_0 = 0$. Если интегралъ (21) принадлежитъ къ категоріи *псевдо-эллиптическихъ*, то

$$1)\ \Sigma l_i\left\{\zeta(u+v+w_i)+\zeta(u-w_i)\right\} = 0,$$

$$2)\ v = \frac{2\tilde{\omega}}{n}.$$

И. Долбня.

НАБЛЮДЕНІЕ

СЪ КАЗАНСКОЙ ОБСЕРВАТОРІИ МЕТЕОРНАГО ПОТОКА „ПЕРСЕИДЪ“ 10 АВГУСТА 1890 ГОДА.

Въ августовской книжкѣ „The Observatory“ появилась статья Монка, въ которой онъ, считая ошибочной теорію Деннинга, состоящую въ томъ, что радіантъ метеорнаго потока „Персеидъ“, перемѣщаясь съ каждой ночью, непрерывно подвиженъ отъ іюля до декабря, вмѣстѣ съ тѣмъ высказываетъ желаніе, чтобы потокъ 10 августа былъ тщательно наблюдаемъ.

Этотъ метеорный потокъ былъ наблюдаемъ въ настоящемъ году съ казанской обсерваторіи 4-мя лицами: Д. И. Дубяго, А. В. Красновымъ, П. П. Граве и М. А. Грачевымъ. Видимый путь звѣздъ былъ отмѣчаемъ на картѣ, спеціально для этого составленной. Кромѣ того записывался моментъ появленіе звѣзды, видимая величина и продолжительность. Изъ списка наблюдавшихся звѣздъ видно, что въ продолженіи $2^1/_2$ часовъ наблюденія (отъ $10^h\ 17^m$ — $12^h\ 48^m$ Каз. ср. вр.) появилось всего 112 звѣздъ; такимъ образомъ въ среднемъ въ теченіи одного часа появлялось 45 звѣздъ. Кромѣ того изъ того-же списка видно, что 2 наблюдателей, обозрѣвающіе преимущественно сѣверо-западную часть неба, нанесли 89 звѣздъ, тогда какъ 2 наблюдателя на сѣверо-востокѣ нанесли только 35 звѣздъ. Слѣдовательно большая часть видимыхъ звѣздъ появлялась на сѣверо-западѣ. Это могло зависѣть и отъ того, что наблюдатели, обозрѣвающіе эту часть неба, имѣли болѣе открытый горизонтъ, тогда какъ другіе были поставлены въ невыгодныя условія, такъ какъ, имѣя съ одной стороны башню, съ другой деревья, могли ви-

Digitized by Google

дѣть сравнительно небольшое пространство неба. Изъ всѣхъ 112 звѣздъ нами нанесено на карту только 51, и прежде всего звѣзды общія для всѣхъ наблюдателей, остальныя имѣли направленіе или прямо—противоположное, или-же слишкомъ уклонялись отъ общаго пути, Времена появленія и величины нанесенныхъ звѣздъ слѣдующія:

№	Каз. ср. вр.	величина	№	Каз. ср. вр.	величина.
1	$10^h\ 17^m$	8—1	28	$11^h\ 35^m$	1
2	18.	9 3	29	35. 4	слаба
3	19	1	30	36. 5	3
4	22.	9 2 (слѣдъ)	31	39	2
5	27	1	32	40. 4	слаба
6	27.	5 1	33	46. 1	1 (хвостъ)
8	72	3	34	47	2
8	42.	5 1	35	52. 3	3
9	43.	9 1	36	53. 9	3
10	47.	4 слаба	37	54	2
			38	54. 9	3
11	47.	45 1 вес. ярк.	39	56. 0	3
12	59.	5 2	40	12 2. 1	
13	11 2.	5 2	41	6	
14	7.	9 — (хвостъ)	42	8. 8	2
15	8	2	43	9. 0	слаба
16	9.	9 ярк. (слѣдъ)	44	9. 3	
17	11.	4	45	10	1
18	11.	8 оч. слаба	46	11	2
19	15.	3	47	14	2 (оч. длинная).
20	15.	3 средняя	48	15	3
21	18.	6 слаба	49	17	3
22	18.	7	50	17. 3	
23	21.	5 3	51	21. 5	2
24	25.	9 3 (оч. быстр.)			
25	26.	8 3			
36	27	2			
27	31.	2 слаба			

Digitized by Google

Звѣзды для которыхъ не указана величина, были кратковременны и очень слабы. Пересѣченіе направленій этихъ звѣздъ обнимаетъ довольно тѣсное пространство неба (площадь круга отъ 3°—5°), служившее какъ бы общимъ центромъ исхода. Вычисленіе по способу наименьшихъ квадратовъ дало для этого центра (радіанта) положеніе: 45° AR и 56° сѣверн. склон. Съ этимъ радіантомъ были найдены слѣдующіе элементы Персеидъ въ предположеніи параболичности орбиты:

Наклонность орбиты	i	= 115°	41′
Долгота угла	Ω	137	43
— перигелія	π	343	43
Разстояніе перигелія	q	0.	9494

Прохожденіе черезъ перигелій іюля 23. Движеніе обратное.

Эти элементы согласуются съ тѣми, которые въ первый разъ далъ Скіапарелли.

Что касается наблюденій на другихъ обсерваторіяхъ, то до сихъ поръ опубликовано только 2:

Наблюденія въ Бостонѣ (40 метеоровъ) даютъ для радіанта положеніе: $AR = 44°$, $\delta = +57°$ [1]) и наблюденія въ Италіи (на 30 станціяхъ наблюдалось 10000 звѣздъ) даютъ для радіанта—$AR = 46°$, $\delta + = 55°$ [2]). Казанскія наблюденія даютъ положеніе радіанта какъ разъ среднее. Посмотримъ на сколько эти результаты согласуются съ прежними наблюденіями. Наблюденія Итальянской метеорной ассоціаціи въ 1872 г. даютъ положеніе радіанта „Персеидъ“ въ ноябрѣ 25—3 дек.: $AR = 46°$ $\delta + 57°$ [3]). Изъ наблюденій Хейса, Вейса, Цеціоли, Скіапарелли и Конколи Деннингъ выводитъ поло-

---

[1]) Astronomical journal Volum. X. стр. 60.
[2]) Comptes rendus. томъ CXI стр. 416.
[3]) Monthly Notices XXXVIII стр. 318.

Digitized by Google

женіе радіанта для іюля 25—31:—$AR = 45°$ $\delta = +57°$ [1]). Наблюденія Деннинга въ 1878 г. въ іюлѣ 26—31 даютъ для радіанта: $AR = 43°$ $\delta = +58°$ [2]). Отсюда можно заключить, что этотъ радіантъ, будучи дѣятеленъ отъ іюля до декабря, не мѣняетъ своего положенія относительно неподвижныхъ звѣздъ. Это заключеніе не согласуется съ выводомъ Деннинга, который въ майской книжкѣ Monthly Notices (1890 г.) даетъ для радіанта „Персеидъ“ слѣдующія положенія:

Для іюля	8	AR	3°,	δ +	49°
— авг.	10	—	44° —	+	55°
— дек.	4,8	—	70° —	+	67°

Такимъ образомъ согласно Деннингу этотъ радіантъ оказывается подвижнымъ. Эти противоложныя заключенія, намъ кажется, происходятъ отъ различнаго взгляда, что, именно, считать „Персеидами“.

Я. Корнухъ-Троцкій.

[1]) Monthly Notices XXXIX стр. 22.
[2]) Reports of. the British Association 1879 г. стр. 123.

Digitized by Google

Digitized by Google