BULLETIN DE LA SOCIETE PHYSICO-MATHEMATIQUE
de Kasan.
Deuxième série. Tome X. № 2.

ИЗВѢСТІЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ.

ВТОРАЯ СЕРІЯ

ТОМЪ X.

№ 2.

КАЗАНЬ.
Типо-литографія Императорскаго Университета.
1900.

Digitized by Google

СОДЕРЖАНІЕ.

I.

И. И. Аристовъ. Объ итераціи функцій.

P. S. Poretzky. Quelques lois ultérieures de la théorie des égalités logiques.

И. Вѣлянкинъ Второй дифференціальный параметръ квадратичной въ дифференціалахъ формы *n* независимыхъ перемѣнныхъ.

Д. Н. Зейлигеръ. Объ одномъ функціональномъ уравненіи.

II.

Лѣтопись Физико-Математическаго Общества.

Протоколы, 95—96 засѣданій Ф.—М. Общества.

Н. В. Нечаевъ. А. К. Жбиковскій.

Д. Гильбертъ. Понятіе о числѣ (переводъ А. В. Васильева.)

Объявленія.

Table des matiéres.

I. Aristof. Sur l'itération des fonctions.

P. S. Poretzky. Quelques lois ultérieures de la théorie des egalités logiques.

I. Beljaukine. Sur le second paramètre de la forme differentielle quadratique.

D. N. Seiliger. Sur une équation fonctionnelle.

Procès-verbaux de seance 95—96 de la Société Physico-mathématique.

N. Netchaief. A. K. Jbikovsky (nécrologue).

D. Hilbert. La notion du nombre (trad. par A. Vassilief).

Annonces.

Digitized by Google

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ PHYSICO-MATHÉMATIQUE
de Kasan.
Deuxième série. Tome X. № 2.

ИЗВѢСТІЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ.

ВТОРАЯ СЕРІЯ

ТОМЪ X.

№ 2.

КАЗАНЬ.
Типо-литографія Императорскаго Университета.
1900.

Digitized by Google

Печатано по опредѣленію Совѣта Физико-Математическаго Общества при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ.

Предсѣдатель *А. Васильевъ.*

Digitized by Google

Объ итераціи функцій.

Глава III.

Разсмотрѣвъ свойства предѣльныхъ точекъ итераціи, обратимся къ изслѣдованію уравненій Schröder'a и Abel'я.

Изслѣдованіе это основывается на нижеслѣдующихъ леммахъ и теоремахъ данныхъ Koenigs'омъ [1].

§ 1. **Лемма** I. *Если $f(z)$ есть функція z, голоморфная въ точкѣ x и обращающаяся въ нуль въ этой точкѣ, то можно найти число h настолько большое, что строка*

$$\sum_{h}^{\infty} f[\varphi_i(z)]$$

будетъ имѣть конечную величину и будетъ равномѣрно сходящеюся во всемъ кругѣ C_x.

Мы можемъ положить

$$f(z) = (z-x)^m \theta(z),$$

гдѣ m число цѣлое $\geqq 1$, а съ $\theta(z)$ функція, голоморфная внутри круга C_θ съ центромъ въ x.

Будемъ называть *высотою* точки z относительно круга C_θ, лежащаго внутри C_x, число подстановокъ, необходимое и достаточное, чтобы перейти отъ точки z къ точкѣ, лежащей внутри круга C_θ.

Пусть h есть наибольшая высота точекъ круга C_x относительно C_θ. Мы будемъ считать $h=0$ если C_θ не находится внутри C_x.

---

[1] Recherches sur les intégrales des certaines équations fonctionnelles Ann. de l'Ec. Norm., 1. 1884.

Digitized by Google

Назовемъ Θ количество, удовлетворяющее неравенству

$$mod\theta(z)<\Theta$$

для точекъ z, лежащихъ внутри круга C_θ. Тогда достаточно условія $i\geqq h$, чтобы функція $\theta[\varphi_i(z)]$ была голоморфна въ кругѣ C_x и чтобы удовлетворялось неравенство

$$mod\theta[\varphi_i(z)]<\Theta.$$

Пусть H есть количество, заключенное между 0 и 1. Въ предыдущей главѣ мы видѣли, что

$$mod\frac{\varphi(z)-x}{z-x}<H,\ mod\frac{\varphi(z_1)-x}{z_1-x}<H,\ldots,mod\frac{\varphi(z_i)-x}{z_i-x}<H,$$

а потому

$$mod(z_i-x)<H^i r,$$

гдѣ r есть радіусъ круга C_x.

Слѣдовательно, такъ какъ для $q\geqq h$

$$\sum_q^\infty modf[\varphi_i(z)]<\Theta\sum_q^\infty mod(z_i-x)^m,$$

то

$$\sum_q^\infty modf[\varphi_i(z)]<\frac{\Theta r^m}{1-H^m}\cdot H^{mq}.$$

Если въ этомъ неравенствѣ положимъ $q=h$, то абсолютная сходимость строки

$$\sum_h^\infty f[\varphi_i(z)]$$

будетъ доказана; если же остановимся въ этой строкѣ на членѣ съ индексомъ q и назовемъ остатокъ R_q, то предыдущее неравенство показываетъ, что

$$modR_q<\frac{\Theta r^m}{1-H^m}\cdot H^{mq},$$

откуда равномѣрная сходимость очевидна.

Digitized by Google

Лемма II. *Если $F(z)$ есть функція, голоморфная въ точкѣ x и равная единицѣ въ этой точкѣ, то можно всегда найти настолько большее число g, что произведеніе*

$$\prod_{g}^{\infty} F[\varphi_i(z)]$$

будетъ имѣть конечную величину и можетъ быть представлено въ видѣ

$$G(z) \cdot e^{\sum_{h}^{\infty} f[\varphi_i(z)]}$$

гдѣ $G(z)$ есть функція, голоморфная въ кругѣ C_x и строка $\sum_{h}^{\infty}$ равномѣрно сходится въ томъ же кругѣ.

Положимъ

$$F(z) = 1 + (z-x)^m \psi(z),$$

гдѣ m есть цѣлое число $\geqq 1$, а $\psi(z)$ функція, голоморфная въ кругѣ C_ϕ. Пусть g есть наибольшая высота точекъ круга C_x относительно круга C_ϕ. Пусть Ψ есть количество, удовлетворяющее неравенству

$$mod\,\psi(z) < \Psi$$

для внутреннихъ точекъ круга C_ϕ.

Мы будемъ имѣть

$$mod(z-x)^m \psi(z) < 1$$

для внутреннихъ точекъ круга Γ съ центромъ въ x и съ радіусомъ $\frac{1}{\sqrt[m]{\Psi}}$. Слѣдовательно всѣ вѣтви функціи

$$log[1 + (z-x)^m \psi(z)]$$

голоморфны въ кругѣ Γ. Пусть $f(z)$ есть та изъ нихъ, которая обращается въ нуль въ точкѣ x. Если h есть наибольшая высота точекъ круга C_x относительно круга Γ, то достаточно взять $i \geqq h$, чтобы $f[\varphi_i(z)]$ была голоморфна въ кругѣ C_x и чтобы строка

Digitized by Google

$$\sum_{h}^{\infty} f[\varphi_i(z)]$$

была бы равномѣрно сходящеюся въ этомъ кругѣ.

Можно взять Ψ достаточно большимъ, чтобы кругъ I находился внутри круга C_ψ, т. е. всегда можно предположить $h \geqq g$; и если $i \geqq h$, то можно положить

$$F[\varphi_i(z)] = e^{f[\varphi_i(z)]},$$

а слѣдовательно

$$\prod_{h}^{\infty} F[\varphi_i(z)] = e^{\sum_{h}^{\infty} f[\varphi_i(z)]}.$$

Произведеніе

$$\prod_{g}^{h-1} F[\varphi_i(z)] = G(z)$$

голоморфно въ кругѣ C_x, такъ что

$$\prod_{g}^{\infty} f[\varphi_i(z)] = G(z) \cdot e^{\sum_{h}^{\infty} f[\varphi_i(z)]}$$

и теорема доказана.

Возьмемъ произведеніе

$$\prod_{p}^{q} F[\varphi_i(z)] = e^{\sum_{p}^{q} f[\varphi_i(z)]}$$

гдѣ

$$q > p \geqq h.$$

Пусть

$$f(z) = (z - x)^m \theta(z).$$

Тогда по предыдущему

$$\sum_{p}^{q} mod f[\varphi_i(z)] < \Theta[mod(z_p - x)^m + mod(z_{p+1} - x)^m + \ldots + mod(z_q - x)^m]$$

Digitized by Google

и тѣмъ болѣе

$$\sum_{p}^{q} mod f[\varphi_i(z)] < \Theta[(H^p r)^m + (H^{p+1} r)^m + \ldots + (H^q r)^m]$$

и слѣдовательно

$$\sum_{p}^{q} mod f[\varphi_i(z)] < \frac{\Theta r^m}{1-H^m} \cdot H^{mp} < \frac{\Theta r^m}{1-H^m}.$$

Такъ какъ всегда

$$mode^u < e^{modu}$$

то

$$mod \prod_{p}^{q} F[\varphi_i(z)] < e^{\frac{\Theta r^m}{1-H^m}}$$

Слѣдовательно, каковы бы ни были p и q, лишь бы $q > p \geqq h$, можно всегда найти количество, независящее отъ p и q и конечное, такое, что $mod \prod_{p}^{q} F[\varphi_i(z)]$ будетъ меньше его.

Это замѣчаніе послужитъ намъ при доказательствѣ слѣдующей леммы.

Лемма III. *Строка*

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{d\varphi_i(z)}{dz}$$

равномѣрно сходится въ кругѣ C_x.

Можно представить функцію $\varphi(z)$ слѣдующимъ образомъ

$$\varphi(z) = x + (z-x)\varphi'(x)[1 + (z-x)^m . \eta(z-x)],$$

гдѣ $(\eta z - x)$ есть функція, голоморфная въ кругѣ C_x, а m цѣлое число $\geqq 1$.

Означимъ для краткости

$$z - x = \zeta, \; z_i - x = \zeta_i, \; \varphi'(x) = a;$$

тогда

$$\zeta_{i+1} = a\zeta_i[1 + \zeta_i^m \eta_i(\zeta_i)]$$

Digitized by Google

Функція $1+\zeta^m r_1(\zeta)$ имѣетъ всѣ свойства функціи $F(z)$ леммы II. Вѣтвь ея логариѳма, обращающаяся въ нуль въ точкѣ x голоморфна внутри круга Γ; для $i \geq h$, гдѣ h есть наибольшая высота точекъ круга C_x относительно круга Γ, можно написать

$$1+\zeta_i^m r_1(\zeta_i) = e^{\lambda(\zeta_i)},$$

гдѣ $\lambda(\zeta_i)$ есть функція, голоморфная внутри круга C_x; слѣдовательно

$$\zeta_{i+1} = a\zeta_i e^{\lambda(\zeta_i)},$$

что даетъ

$$\frac{d\zeta_{i+1}}{d\zeta_i} = a e^{\lambda(\zeta_i)}[1+\zeta_i\lambda'(\zeta_i)]$$

Функція $1+\zeta_i\lambda'(\zeta_i)$ также имѣетъ свойства функціи $F(z)$ леммы II, такъ что можно положить

$$1+\zeta_i\lambda'(\zeta_i) = e^{\mu(\zeta_i)}$$

гдѣ $\mu(\zeta_i)$, есть функція, голоморфная въ кругѣ C_x, если $i \geq h' \geq h$. Тогда

$$\frac{d\zeta_i}{d\zeta} = \frac{d\zeta_i}{d\zeta_{h'}} \cdot \frac{d\zeta_{h'}}{d\zeta};$$

здѣсь

$$\frac{d\zeta_i}{d\zeta_{h'}} = \frac{d\zeta_i}{d\zeta_{i-1}} \cdot \frac{d\zeta_{i-1}}{d\zeta_{i-2}} \cdots \frac{d\zeta_{h'+1}}{d\zeta_{h'}}$$

и на основаніи предыдущаго

$$\frac{d\zeta_i}{d\zeta_{h'}} = a^{i-h'} e^{\sum_{h'}^{i-1}\lambda(\zeta_k)} \cdot e^{\sum_{h'}^{i-1}\mu(\zeta_k)}$$

На основаніи замѣчанія къ леммѣ II можно найти два количества, конечныхъ и независящихъ отъ i, такихъ, что модули

$$e^{\sum_{h'}^{i-1}\lambda(\zeta_k)} \quad \text{и} \quad e^{\sum_{h'}^{i-1}\mu(\zeta_k)}$$

Digitized by Google

будутъ меньше этихъ количествъ, какъ бы велико ни было i. Пусть A есть произведеніе этихъ количествъ; мы можемъ написать

$$e^{\sum_{k}^{i-1}\lambda(\zeta_k)} \cdot e^{\sum_{k}^{i-1}\mu(\zeta_k)} = A\xi_i ,$$

гдѣ ξ_i есть количество, зависящее отъ i, модуль котораго меньше единицы; поэтому

$$\frac{d\zeta_i}{d\zeta} = \frac{A}{a^{h'}} \cdot \frac{d\zeta_{h'}}{d\zeta} a^i \xi_i$$

и

$$\sum_{h'}^{\infty} \frac{d\zeta_i}{d\zeta} = \frac{A}{a^{h'}} \cdot \frac{d\zeta_{h'}}{d\zeta} \sum_{h'}^{\infty} a^i \xi_i .$$

Строка

$$\sum_{h'}^{\infty} a^i \xi_i$$

будетъ сходящеюся равномѣрно въ кругѣ C_x если $moda<1$, а слѣдовательно и строка

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{d\varphi_i(z)}{dz}$$

будетъ сходящеюся въ томъ же кругѣ, если

$$mod\varphi'(x)<1.$$

§ 2. Докажемъ слѣдующія теоремы:

Теорема I. *Если $f(z)$ есть функція, голоморфная въ точкѣ x и обращающаяся въ этой точкѣ въ нуль, то можно найти число h настолько большое, что строка*

$$\sum_{h}^{\infty} f[\varphi_i(z)]$$

будетъ функціей, голоморфной во всемъ кругѣ C_x.

Digitized by Google

На основаніи леммы I строка

$$\sum_{h}^{\infty} f[\varphi_i(z)]$$

есть функція конечная и непрерывная въ кругѣ C_x. Остается, слѣдовательно, доказать, что она есть функція моногенная, т. е. что строка

$$\sum_{h}^{\infty} \frac{df[\varphi_i(z)]}{dz}$$

равномѣрно сходится въ кругѣ C_x.

Функція $f'(z)$ голоморфна въ томъ же кругѣ C_x съ центромъ въ x, въ которомъ голоморфна $f(z)$. Слѣдовательно, если $i \geqq h$, то функція $f'[\varphi_i(z)]$ голоморфна во всемъ кругѣ C_x. Пусть

$$mod f'(z) < A$$

въ кругѣ голоморфизма $f'(z)$; тогда для $i \geqq h$

$$mod f'[\varphi_i(z)] < A,$$

такъ что

$$\sum_{h}^{\infty} mod \frac{df[\varphi_i(z)]}{dz} < A \sum_{h}^{\infty} mod \frac{d\varphi_i(z)}{dz}.$$

По леммѣ III строка

$$\sum_{h}^{\infty} mod \frac{d\varphi_i(z)}{dz}$$

равномѣрно сходится въ кругѣ C_x; слѣдовательно и строка

$$\sum_{h}^{\infty} mod \frac{df[\varphi_i(z)]}{dz}$$

будетъ также сходится въ кругѣ C_x, и теорема доказана.

Теорема II. *Если функція $F(z)$ голоморфна и обращается въ единицу въ точкѣ x, то можно найти достаточно большое число g, чтобы произведеніе*

Digitized by Google

$$\prod_{g}^{\infty} F[\varphi_i(z)]$$

было функціей, голоморфной во всемъ кругѣ C_x

По леммѣ II имѣемъ

$$\prod_{g}^{\infty} F[\varphi_i(z)] = G(z) \cdot e^{\sum_{h}^{\infty} f[\varphi_i(z)]};$$

по предыдущей теоремѣ строка

$$\sum_{h}^{\infty} f[\varphi_i(z)]$$

голоморфна въ кругѣ C_x; функція $F(z)$ голоморфна въ томъ же кругѣ, а слѣдовательно теорема доказана.

Теорема III. *Предѣлъ отношенія*

$$\frac{\varphi_p(z)-x}{[\varphi'(x)]^p}$$

голоморфенъ во всемъ кругѣ C_x.

Согласно обозначеніямъ леммы III это отношеніе можно представить въ видѣ

$$\frac{\zeta_p}{a^p} = \frac{\zeta_p}{a\zeta_{p-1}} \cdot \frac{\zeta_{p-1}}{a\zeta_{p-2}} \cdots \frac{\zeta_{h+1}}{a\zeta_h} \cdot \frac{\zeta_h}{a^h} \cdot$$

$$= \frac{\zeta_h}{a^h} \prod_{h}^{p-1} [1 + \zeta^{m_i} \gamma_i(\zeta_i)].$$

Если $i \geq h$, то

$$1 + \zeta_i^{m} \gamma_i(\zeta_i) = e^{\lambda(\zeta_i)},$$

гдѣ $\lambda(\zeta_i)$ есть функція, голоморфная въ кругѣ C_x; слѣдовательно

$$\frac{\zeta_p}{a^p} = \frac{\zeta_h}{a^h} \cdot e^{\sum_{h}^{p-1} \lambda(\zeta_i)} = \frac{\varphi_h(z)-x}{a^h} \cdot e^{\sum_{h}^{p-1} \lambda(\zeta_i)}$$

Digitized by Google

Когда p стремится къ безконечности, $\sum_{h}^{p-1} \lambda(\zeta_i)$ стремится къ нѣкоторой функціи $\omega(z)$, голоморфной въ кругѣ C_x поэтому

$$lim \frac{\varphi_p(z)-x}{[\varphi'(x)]^p} = \frac{\varphi_h(z)-x}{[\varphi'(x)]^h} \cdot e^{\omega(z)}$$

Эту функцію мы будемъ обозначать чрезъ $B(z)$, такъ что

$$B(z)=\frac{\varphi_h(z)-x}{[\varphi'(x)]^h} \cdot e^{\omega(x)}.$$

§ 3. Займется теперь изслѣдованіемъ свойствъ функціи $B(z)$.

Очевидно $B(z)$ обращается въ нуль для всѣхъ корней уравненія $\varphi_h(z)-x=0$, лежащихъ внутри круга C_x, съ той же степенью кратности. Предѣльная точка x есть однократный корень этой функціи.

Напишемъ тожество

$$\frac{\varphi_{p+1}(z)-x}{a^{p+1}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\varphi_p\varphi(z)-x}{a^p};$$

перейдя къ предѣлу, получимъ

$$B(z)=\frac{1}{a} B[\varphi(z)]$$

Слѣдовательно функція $B(z)$ представляетъ рѣшеніе уравненія

$$\Xi[\varphi(z)]=C\Xi(z),$$

которое есть ничто иное, какъ уравненіе *Schröder'a* (Гл. I), гдѣ $\Xi(z)$ есть неизвѣстная функція, а C—постоянная.

Итакъ, рѣшеніе этого уравненія будетъ

$$\Xi(z)=B(z), \quad C=a.$$

Мы будемъ обозначать это рѣшеніе символомъ

$$\{ B(z), a \}.$$

Digitized by Google

Если n—цѣлое положительное число и a произвольная постоянная, то очевидно, что системы

$$\left\{ B^n,\ a^n \right\} \text{ и } \left\{ aB,\ a \right\}$$

будутъ также удовлетворять уравненію *Schröder'a*. Слѣдовательно общимъ рѣшеніемъ этого уравненія будетъ система

$$\left\{ a[B(z)]^n,\ a^n \right\}$$

содержащая ∞^2 частныхъ рѣшеній.

Если n положительно, эти рѣшенія голоморфны въ кругѣ C_x; если n отрицательно, они мероморфны въ этомъ кругѣ и въ точкѣ x. n есть всегда показатель степени кратности точекъ x.

Слѣдовательно имѣетъ мѣсто такая

Теорема: *Всякое рѣшеніе уравненія Schröder'a, голоморфное или мероморфное въ точкѣ x, отличается только постояннымъ множителемъ отъ цѣлой положительной или отрицательной степени функціи $B(z)$.*

Изъ уравненія Schröder'a получаемъ

$$\Xi[\varphi_i(z)] = C^i \Xi(z),$$

что для $z=x$ обращается въ

$$(1-C^i)\Xi(x) = 0.$$

Здѣсь $1-C^i \neq 0$, ибо въ такомъ случаѣ $C=1$ и

$$\Xi[\varphi_i(z)] = \Xi(z),$$

что для $i=\infty$ даетъ

$$\Xi(z) = \Xi(x) = Const.$$

Слѣдовательно

$$\Xi(x) = 0,$$

Digitized by Google

т. е. всякое рѣшеніе уравненія Schröder'a, голоморфное въ точкѣ x, обращается въ нуль въ этой точкѣ.

Точка эта можетъ быть и n кратной.

Допустимъ, что

$$\Xi(z)=(z-x)^n\varphi(z),$$

гдѣ $\varphi(z)$ функція голоморфная и $\neq 0$ въ точкѣ x; тогда

$$\Xi[\varphi(z)]=[\varphi(z)-x]^n\varphi[\varphi(z)]=C\varphi(z)\ (\zeta-x)^n,$$

$$\therefore \left[\frac{\varphi(z)-x}{z-x}\right]^n\varphi[\varphi(z)]=C\varphi(z);$$

когда z стремится къ x, въ предѣлѣ получимъ

$$C=[\varphi'(x)]^n=a,$$

такъ что

$$[\varphi(z)-x]^n\varphi[\varphi(z)]=a^n\Xi(z)$$

и

$$[\varphi_i(z)-x]^n\varphi[\varphi_i(z)]=a^{ni}\Xi(z),$$

$$\therefore \left[\frac{\varphi_i(z)-x}{a^i}\right]^n\varphi[\varphi_i(z)]=\Xi(z);$$

въ предѣлѣ, когда i стремится къ безконечности

$$[B(z)]^n\varphi(x)=\Xi(z),$$

что и требовалось доказать. Въ случаѣ мероморфнаго рѣшенія получимъ тотъ же результатъ для отрицательнаго n.

Слѣдовательно система

$$\left\{\ \alpha[B(z)]^n,\ a^n\ \right\}$$

представляетъ всѣ ∞^2 рѣшеній уравненія Schröder'a.

Въ главѣ I мы видѣли, что если возьмемъ логариѳмъ отъ обѣихъ частей уравненія Shröder'a, то получимъ уравненіе Abel'я. Раздѣливъ обѣ части полученнаго уравненія на lgC приведемъ уравненіе Abel'я къ виду

$$\Xi[\varphi(z)]=1+\Xi(z).$$

Digitized by Google

Рѣшеніемъ этого уравненія будетъ

$$b(z)=\frac{lgB(z)}{lga}.$$

Найдемъ теперь выраженіе общаго интеграла уравненій Schröder'a Abel'я въ кругѣ C_x по извѣстной $B(z)$.

Уравненію

$$\Xi[\varphi(z)]=\Xi(z)$$

удовлетворяетъ частное двухъ рѣшеній уравненія Schröder'a и разность двухъ рѣшеній уравненія Abel'я. Слѣдовательно, если означимъ чрезъ $X(z)$ общій интегралъ этого уравненія, то общимъ интеграломъ уравненія Schröder'a будетъ

$$B(z).\ X(z),$$

а общимъ интеграломъ уравненія Abel'я

$$b(z)+X(z).$$

Слѣдовательно необходимо найти $X(z)$. Предположимъ, что

$$X(z)=\Omega[b(z)]$$

и опредѣлимъ Ω. Имѣемъ

$$X[\varphi(z)]=\Omega\left\{b[\varphi(z)]\right\}=\Omega[b(z)+1];$$

но такъ какъ

$$X[\varphi(z)]=X(z),$$

то

$$\Omega[b(z)+1]=\Omega[b(z)]$$

Слѣдовательно за Ω можно взять всякую періодическую функцію, съ періодомъ равнымъ единицѣ.

Такимъ образомъ общій интегралъ найденъ.

§ 4. Мы разсматривали до сихъ поръ уравненіе Schröder'a въ предположеніи, что итерація функціи $\varphi(z)$ правильно сходится. Предположимъ теперь, что итерація функціи $\varphi(z)$ сходится періодически съ періодомъ k.

Digitized by Google

На основаніи сказаннаго въ главѣ II о періодической сходимости итераціи и на основаніи теоремы III § 2 этой главы не трудно видѣть, что предѣлъ отношенія

$$\frac{\varphi_{kp}(z)-x_i}{[\varphi'_k(x)]^p}$$

голоморфенъ въ кругѣ C_i. Назовемъ этотъ предѣлъ $\mathfrak{B}_i(z)$ и положимъ $\varphi'_k(x_i)=a$ для краткости, такъ что

$$\mathfrak{B}_i(z)=lim\,\frac{\varphi_{kp}(z)-x_i}{a^p}$$

Точка x_i есть простой корень этой функціи.

Функція $\mathfrak{B}_i$ удовлетворяетъ уравненію

$$\mathfrak{B}_i[\varphi_k(z)]=a\mathfrak{B}_i(z),$$

но мы не можемъ теперь ничего сказать о томъ, какова будетъ эта функція внѣ круга C_i и будетъ ли $\mathfrak{B}_i[\varphi(z)]$ голоморфна для значеній z, взятыхъ внутри этого круга, или нѣтъ.

Поэтому возьмемъ точку z внутри нѣкотораго круга C'_i; точка $\varphi_j(z)$, гдѣ $j<k$, будетъ лежать внутри круга C_{i+j} и функція $\mathfrak{B}_{i+j}[\varphi_j(z)]$ будетъ голоморфна во всемъ кругѣ C'_i.

Имѣемъ слѣдовательно

$$\mathfrak{B}_{i+j}[\varphi_j(z)]=lim\,\frac{\varphi_{kp}[\varphi_j(z)]-x_{i+j}}{a^p}.$$

Возьмемъ отношеніе

$$\frac{\mathfrak{B}_{i+j}[\varphi(z)]}{\mathfrak{B}_i(z)}=lim\,\frac{\dfrac{\varphi_{kp}[\varphi_j(z)]-x_{i+j}}{a^p}}{\dfrac{\varphi_{kp}(z)-x_i}{a^p}}=lim\,\frac{\varphi_{kp}[\varphi_j(z)]-x_{i+j}}{\varphi_{kp}(z)-x_i};$$

Digitized by Google

согласно обозначеніямъ главы II

$$\frac{\varphi_{kp}[\varphi_j(z)]-x_{i+j}}{\varphi_{kp}(z)-x_i}=\frac{\varphi_j(z_{kp})-\varphi_j(x_i)}{\varphi_{kp}(z)-x_i};$$

въ предѣлѣ, когда p стремится къ безконечности $z_{kp}=x_i$ и мы получимъ

$$\frac{\mathfrak{B}_{i+j}[\varphi_j(z)]}{\mathfrak{B}_i(z)}=\varphi'(x_i)\varphi'(x_{i+1})\ldots\varphi'(x_{i+j-1}),$$

или, полагая $a_i=\varphi'(x_i)$

$$\mathfrak{B}_{i+j}[\varphi_j(z)]=a_ia_{i+1}\ldots a_{i+j-1}\cdot\mathfrak{B}_i(z).$$

Это уравненіе имѣетъ мѣсто при $j<k$ для всѣхъ точекъ z внутри круга C_i

При $j=1$ оно обращается въ

$$\mathfrak{B}_{i+1}[\varphi(z)]=a_i\mathfrak{B}_i(z),$$

а при $j=k$ въ

$$\mathfrak{B}_i[\varphi_k(z)]=a\mathfrak{B}_i(z).$$

Въ случаѣ разсматриваемой нами періодической сходимости съ періодомъ k мы имѣемъ круговую группу изъ k корней. Пусть $f(z)$ есть функція, совпадающая съ $B_0(z)$ въ кругѣ C_0, соотвѣтствующемъ первому корню группы, съ $\mathfrak{B}_1(z)$ въ кругѣ $C_1,\ldots,$ съ $\mathfrak{B}_{k-1}(z)$ въ кругѣ C_{k-1}. Согласно только что изложенному отношеніе

$$\frac{f[\varphi(z)]}{f(z)}$$

въ кругѣ C_0 будетъ имѣть постоянное значеніе a_0, въ кругѣ C'_1—значеніе a_1, и т. д., т. е. съ переходомъ отъ одного круга къ другому это значеніе будетъ мѣняется.

Функція $f(z)$ еще не есть рѣшеніе уравненія Schröder'a въ случаѣ періодической сходимости, а потому постараемся найти общее выраженіе функціи $\Xi(z)$, голоморфное или ме-

Digitized by Google

роморфное для всѣхъ точекъ круговой группы, которое, сохраняя постоянное значеніе отношенія

$$\frac{\Xi[\varphi(z)]}{\Xi(z)}$$

въ каждомъ отдѣльномъ кругѣ C_i группы, мѣняло бы это значеніе съ переходомъ отъ одного круга къ другому.

Пусть C''_i есть кругъ, концентрическій съ C_i и лежащій внутри его, такой, что если возьмемъ точку z внутри его, то точки $z_1, z_2, \ldots, z_{k-1}$ будутъ находиться соотвѣтственно въ кругахъ $C_{i+1}, C_{i+2}, \ldots, C_{i+k-1}$; положимъ

$$\frac{\Xi[\varphi(z)]}{\Xi(z)}=\lambda_i, \quad \frac{\Xi[\varphi_2(z)]}{\Xi[\varphi(z)]}=\lambda_{i+1}, \ldots, \frac{\Xi[\varphi_k(z)]}{\Xi[\varphi_{k-1}(z)]}=\lambda_{i+k-1},$$

а слѣдовательно

$$\frac{\Xi[\varphi_k(z)]}{\Xi(z)}=\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{k-1},$$

точно также

$$\frac{\Xi[\varphi_{2k}(z)]}{\Xi[\varphi(z)]}=\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{k-1},$$

такъ что

$$\Xi[\varphi_{2k}(z)]=(\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{k-1})^2\Xi(z)$$

и вообще

$$\Xi[\varphi_{kp}(z)]=(\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{k-1})^p\Xi(z).$$

Слѣдовательно въ случаѣ періодической сходимости $\Xi(z)$ есть рѣшеніе уравненія

$$\Xi[\varphi_k(z)]=C\Xi(z)$$

и общая система рѣшеній будетъ

$$\left\{ a_i[\mathfrak{B}_i(z)]^n,\ a^n \right\}$$

гдѣ a произвольная постоянная и n цѣлое положительное или отрицательное число.

Digitized by Google

Итакъ, въ кругѣ C'_i функція $\Xi(z)$ имѣетъ общее выраженіе

$$\alpha_i[\mathfrak{B}_i(z)]^{n_i}.$$

Такъ какъ необходимо, чтобы

$$\lambda_0\lambda_1 \ldots \lambda_{k-1} = a^{n_0} = a^{n_1} = \ldots,$$

т. е.

$$n_0 = n_1 = \ldots = n,$$

то всѣ точки группы суть корни, или полюсы одной и той же кратности функціи $\Xi(z)$.

Такъ какъ

$$\lambda_i = \frac{\alpha_{i+1}\left\{\mathfrak{B}_{i+1}[\varphi(z)]\right\}^n}{\alpha_i[\mathfrak{B}_i(z)]^n}$$

и въ тоже время

$$\mathfrak{B}_{i+1}[\varphi(z)] = a_i\mathfrak{B}_i(z),$$

то λ_i выражается чрезъ a слѣдующимъ образомъ

$$\lambda_i = \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}a_i{}^n.$$

§ 5. Самое общее рѣшеніе уравненія Schröder'a получимъ, опредѣляя постоянныя α_i такъ, чтобы λ_i сдѣлались равными. Пусть λ ихъ общее значеніе, такъ что

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_0}a_0{}^n = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}a_1{}^n = \ldots = \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_{k-2}}a^n{}_{k-2} = \frac{a_0}{\alpha_{k-1}}a^n{}_{k-1} = \lambda;$$

$$\therefore\ a_1 = a_0\frac{\lambda}{a_0{}^n},\ a_2 = a_0\frac{\lambda^2}{a_0{}^n a_1{}^n},\ \ldots,\ a_{k-1} = a_0\frac{\lambda^{k-1}}{a_0{}^n a_1{}^n \ldots a^n{}_{k-2}}$$

и

$$\lambda^k = a_0{}^n a_1{}^n \ldots a^n{}_{k-1} = a$$

Положимъ общій множитель $a_0 = 1$; это равносильно умноженію $\Xi(z)$ на постоянную; кромѣ того положимъ $n = 1$;

Digitized by Google

очевидно, чтобы возвратиться къ случаю произвольнаго n нужно возвысить α и $\mathfrak{B}_i(z)$ въ степень n.

Возьмемъ для λ корень двучленнаго уравненія

$$\lambda^k = a$$

и означимъ $B(z)$ функцію, которая будетъ имѣть значеніе

$$\frac{\lambda_i}{a_0 a_1 \ldots a_{i-1}} \mathfrak{B}_i(z)$$

въ кругѣ C_i. Эта функція голоморфна въ каждой точкѣ круговой группы и удовлетворяетъ уравненію

$$B[\varphi(z)] = \lambda B(z)$$

а слѣдовательно есть рѣшеніе уравненія Schröder'a

Функція $B(z)$ можетъ имѣть k значеній, отношеніе которыхъ для каждаго круга C_i постоянно.

Общій видъ голоморфныхъ и мероморфныхъ рѣшеній уравненія Schröder'a будетъ слѣдовательно,

$$\Xi(z) = \alpha_0 [B(z)]^n, \quad C = \lambda^n,$$

гдѣ α_0 произвольная постоянная и n число цѣлое положительное или отрицательное.

Рѣшеніемъ уравненія Abel'я будетъ

$$b(z) = \frac{\log B(z)}{\log \lambda}.$$

§ 6. Если для данной $\varphi(z)$ функція $B(z)$ можетъ быть выражена, то задача итераціи можетъ считаться рѣшенной. Мы видѣли въ главѣ I, что

$$F(p, z) = \Xi_{-1}[C^p \Xi(z)]$$

есть выраженіе p—кратной итераціи; поэтому теперь мы можемъ написать

$$F(p, z) = B_{-1}[\lambda^p B(z)] = \varphi_p(z).$$

Digitized by Google

Но *Koenigs* [1]) далъ еще другую функцію, дающую непосредственное рѣшеніе уравненія итераціи

$$\Xi_q(z)=\varphi(z)$$

Это уравненіе мы будемъ называть *уравненіемъ Koenigs'a*. Опредѣлимъ функцію, ему удовлетворяющую.

Будемъ искать функцію, имѣющую предѣльную точку x, голоморфную въ этой точкѣ и для которой имѣется функція $B(z)$. Назовемъ такую функцію $Z(z)$. Очевидно для нее имѣетъ мѣсто соотношеніе

$$B[Z(z)]=Z'xB(z).$$

Возьмемъ уравненіе

$$B(Z)=cB(z),$$

гдѣ c произвольная постоянная, и найдемъ изъ функцій, опредѣляемыхъ этимъ уравненіемъ, ту, которая представляетъ рѣшеніе нашей задачи.

Если положимъ въ послѣднемъ уравненіи $z=x$, то получимъ

$$B(Z)=0;$$

это уравненіе очевидно имѣетъ простой корень $z=x$, потому что $B(x)=0$ и $B'(x)=1$.

Слѣдовательно уравненіе $B(Z)=cB(z)$ опредѣляетъ функцію, голоморфную въ x и обращающуюся въ $z-x$ въ этой точкѣ; назовемъ ее $Z(z, c)$.

Продифференцировавъ вышенаписанное уравненіе, получимъ

$$B'(Z)\frac{dZ}{dz}=cB'(z)$$

Пусть $Z=x$ и $z=x$; тогда

[1]) Nouvelles recherces sur les équations fonctionnelles. Ann. de l'Ec. Norm. (3) II, 1885, p. 385.

Digitized by Google

$$c=\left[\frac{dZ}{dz}\right]_x=Z'(x,\ c).$$

Если x есть предѣльная точка функціи $Z(z,\ c)$, то $modZ'(x,\ c)=modc<1$. Слѣдовательно и обратно: тѣ изъ функцій $Z(z,\ c)$ имѣютъ x предѣльной точкой, для которыхъ $modc<1$.

Такъ какъ

$$B[Z(z,\ c)]=Z'(x,\ c)B(z)$$

то ясно, что $B(z)$ есть предѣльная функція для $Z(z,\ c)$; и обратно: функціи $Z(z,\ c)$, для которыхъ $modc<1$, и только эти, имѣютъ предѣльной функцій $B(z)$.

Функція $\varphi(z)$ есть одна изъ функціи $Z(z,\ c)$, а именно

$$\varphi(z)=Z[z,\ \varphi'(x)].$$

Если въ уравненіи

$$B[Z(z,\ c)]=cB(z)$$

подставимъ вмѣсто z $Z(z,\ c')$, то получимъ

$$B\{Z[Z(z,\ c'),\ c]\}=cB[Z(z,\ c')]$$
$$=cc'B(z).$$

Функція $Z[Z(z,\ c'),\ c]$ голоморфна въ области x и, по предыдущему,

$$Z[Z(z,\ c'),\ c]=Z(z,\ cc').$$

Если вмѣсто z будемъ подставлять $Z(z,\ c)$ p разъ, то $Z_p(z,\ c)$ будетъ голоморфна въ области точки x и мы будемъ имѣть

$$Z_p(z,\ c)=Z(z,\ c^p).$$

Полагая здѣсь $p=-1$, получимъ

$$Z_{-1}(z,\ c)=Z\left(z,\ \frac{1}{c}\right),$$

Digitized by Google

т. е. функціи

$$Z(z,\ c) \text{ и } Z\left(z, \frac{1}{c}\right)$$

суть функціи взаимно обратныя.

§ 7. Кривая равныхъ модулей функціи $B(z)$, голоморфной въ области, окружающей ея корень

$$mod B(z) = \mu = const,$$

представляетъ замкнутый контуръ O_μ вокругъ простого корня x функціи $B(z)$ для весьма малыхъ значеній μ.

Найдемъ число M такое, чтобы для $\mu < M$ кривая представляла замкнутый контуръ безъ кратныхъ точекъ, внутри котораго $B(z)$ оставалась бы голоморфной, ея производная $B'(z)$ не обращалась бы въ нуль и сама функція $B(z)$ не имѣла бы корней кромѣ x.

Контуры O_M будутъ лежать внутри контура O_μ и для всѣхъ точекъ, лежащихъ внѣ O_μ и внутри O_M будемъ имѣть

$$mod B(z) > \mu,$$

а для всѣхъ точекъ, лежащихъ внутри O_M будетъ

$$mod B(z) < \mu.$$

Кривыя равныхъ аргументовъ, ортогональныя траэкторіи кривыхъ равныхъ модулей, всѣ проходятъ черезъ точку x. Если на вѣтви Ax (черт. 1) одной изъ этихъ кривыхъ аргументъ $B(z)$ равенъ α, то на вѣтви xB онъ будетъ равенъ $\alpha + \pi$. Двѣ вѣтви xA и xA' пересѣкаются въ x подъ угломъ $\alpha - \beta$, если аргументъ, соотвѣтствующій xA есть α, а соотвѣтствующій xA' есть β. Два аргумента, различающіеся на 2π, опредѣляютъ одну и туже вѣтвь. Внутри O_M всякій аргументъ опредѣляетъ единственнымъ образомъ вѣтвь, проходящую чрезъ x.

Докажемъ слѣдующія теоремы:

Digitized by Google

Теорема I. *Уравненіе*

$$B(Z)=cB(z)$$

для z взятаго внутри O_M и для $mod c<1$ имѣетъ покрайней мѣрѣ одно рѣшеніе внутри O_M.

Пусть

$$c=\varrho e^{\theta i},\ mod B(z)=\mu,\ arg B(z)=\alpha.$$

Для всѣхъ точекъ Z удовлетворяются уравненія

$$mod B(z)=\varrho\mu$$
$$arg B(z)=\alpha+\theta$$

$O_{\rho\mu}$ лежитъ внутри O_M, такъ какъ $\varrho<1$.

Кривая $arg B(z)=\alpha+\theta$ пересѣкаетъ $O_{\rho\mu}$ въ точкѣ Z, которая лежитъ внутри O_M и удовлетворяетъ уравненію

$$B(Z)=cB(z).$$

Теорема II. *Функція $Z(z)$, которая изображается только что найденной точкой Z, голоморфна въ контурѣ O_M.*

Если бы Z была критической точкой, то было бы одновременно

$$B(Z)=cB(z),$$
$$B'(Z)=0,$$

что невозможно по сдѣланному относительно $B'(z)$ предположенію.

Теорема III. *Функція Z единственна и есть ничто иное, какъ функція $Z(z, c)$, опредѣленная выше.*

Если бы уравненіе

$$B(Z)=cB(z)$$

имѣло въ O_M, нѣсколько корней, то каждый изъ нихъ былъ бы голоморфенъ въ O_M, что противно теоремѣ II.

Далѣе, для $z=x$ $B(Z)=0$. Такъ какъ x есть единственный корень $B(z)$ въ O_M, то всѣ эти голоморфныя функціи

Digitized by Google

имѣли бы въ x одно и тоже значеніе x. Это невозможно, а слѣдовательно Z единственна и есть ничто иное, какъ $Z(z, c)$.

§ 8. Функція Z даетъ непосредственное рѣшеніе уравненія Koenigs'a

$$\Xi_p(z)=\varphi(z),$$

которое въ свою очередь даетъ отвѣтъ на основной вопросъ итераціи.

Положимъ, что $\varphi(z)$ есть одна изъ функцій Z (см. § 6) и пусть

$$\varphi(z)=Z(z, c_0),$$

гдѣ c_0 произвольная постоянная, неравная нулю и безконечности.

Соотношеніе

$$Z_p(z, \sqrt[p]{c_0})=Z(z, c_0)=\varphi(z)$$

показываетъ, что уравненіе Koenigs'a имѣетъ p голоморфныхъ рѣшеній въ области точки x, предѣльной точки функцій $Z(z, c)$, имѣющихъ $mod c<1$.

Докажемъ слѣдующую теорему.

Функція $\varphi(z)$ есть одна изъ функцій Z, если уравненіе

$$z=\varphi(z)$$

имѣетъ такой корень x, что

$$mod\varphi'(x)\neq 1 \quad и \quad \neq 0.$$

Положимъ сначала, что

$$mod\varphi'(x)<1.$$

Точка x въ этомъ случаѣ есть предѣльная точка функціи $\varphi(z)$. Слѣдовательно мы можемъ найти функціи $B(z)$ и $Z(z, c)$ и

$$\varphi(z)=Z[z, \varphi'(x)].$$

Если

$$mod\varphi'(x)>1,$$

Digitized by Google

то

$$mod\varphi'_{-1}(x)=\frac{1}{mod\varphi'(x)}<1,$$

причемъ φ_{-1} голоморфна въ точкѣ x и имѣетъ x предѣльной точкой.

Слѣдовательно

$$\varphi_{-1}(z)=Z[z,\ \varphi'_{-1}(x)]=Z\left[z,\ \frac{1}{\varphi'(x)}\right],$$

а такъ какъ $Z(z,\ c)$ и $Z(z,\ \frac{1}{c})$ суть функціи взаимно обратныя, то и въ этомъ случаѣ

$$\varphi(z)=Z[z,\ \varphi'(x)]$$

Отсюда такое

Слѣдствіе: *Если x есть корень уравненія*

$$z=\varphi(z)$$

и если $mod\varphi'(x)$ неравенъ ни единицѣ, ни нулю, то уравненіе Koenigs'a

$$\Xi_p(z)=\varphi(z)$$

имѣетъ p голоморфныхъ рѣшеній въ области точки x; если $\varphi_{\frac{1}{p}}(z)$ есть одно изъ такихъ рѣшеній, то

$$\varphi_{\frac{1}{p}}(z)=Z[z,\ \sqrt[p]{\varphi'(x)}].$$

Такъ какъ значенія индексовъ итераціи могутъ быть какія угодно вещественныя (гл. I), то вообще

$$\varphi_n(z)=Z[z,\ [\varphi'(x)]^n]$$

—выраженіе n—кратной итераціи функціи $\varphi(z)$, представляющее, вообще говоря, безконечное число функцій, голоморфныхъ въ области точки x.

Digitized by Google

Примѣръ. Пусть

$$\varphi(z)=\sqrt{\alpha z^2+\beta}.$$

Предѣльная точка опредѣлится изъ уравненія

$$z=\sqrt{\alpha z^2+\beta} \quad \therefore \quad x^2=\frac{\beta}{1-\alpha};$$

слѣдовательно

$$\varphi(z)=\sqrt{x^2+\alpha(z^2-x^2)}$$

или

$$[\varphi(z)]^2-x^2=\alpha(z^2-x^2)$$

Точки $\pm x$ будутъ предѣльными, если $mod\alpha<1$. Въ этомъ случаѣ $B(z)=z^2-x^2$. Функція Z опредѣляется изъ уравненія

$$Z^2-x^2=c(z^2-x^2)$$

и интеграломъ уравненія Koenigs'a

$$\Xi_p(z)=\sqrt{\alpha z^2+\beta}$$

будетъ

$$\Xi(z)=\sqrt{\alpha^{\frac{1}{p}} z^2+\frac{\beta}{1-\alpha}(1-\alpha^{\frac{1}{p}})},$$

такъ что

$$\varphi_n(z)=\sqrt{\alpha^n z^2+\frac{\beta}{1-\alpha}(1-\alpha^n)}.$$

Digitized by Google

Глава IV.

§ I. Къ изложеннымъ выше способамъ нахожденія $\varphi_n(z)$ по данной $\varphi(z)$ необходимо присоединить еще способъ, данный проф. *Коркинымъ* [1]).

Пусть $\varphi(z)$ есть функція, голоморфная въ области точки α. Если α есть корень уравненія

$$z=\varphi(z)$$

и если $mod\varphi'(\alpha)<1$, то и $\varphi_y(z)$ будетъ голоморфна въ той же области.

Замѣтивъ это, разложимъ $\varphi(z)$ въ строку по степенямъ $z-\alpha$; получимъ

$$\varphi(z)=\alpha+A_0(z-\alpha)+A_1(z-\alpha)^2+A_2(z-\alpha)^3+\ldots$$

Разложимъ теперь въ строку $\varphi_y(z)$; такъ какъ $\varphi_y(\alpha)=\alpha$, то это разложеніе будетъ имѣть видъ

$$\varphi_y(z)=\alpha+\alpha_0(z-\alpha)+\alpha_1(z-\alpha)^2+\alpha_2(z-\alpha)^3+\ldots,$$

гдѣ коэффиціенты

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ldots$$

суть неизвѣстныя пока функціи y. Для $y=0$ получимъ

$$\alpha_0=1,\ \alpha_1=\alpha_2=\ldots=0;$$

для $y=1$

$$\alpha_0=A_0,\ \alpha_1=A_1,\ \alpha_2=A_2,\ldots$$

---

[1]) Korkine. Sur un problème d'interpolation. Bull. des Sc. Math., (2) T. VI, 1882, p. 228.

Digitized by Google

Наша задача состоитъ въ опредѣленіи $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ въ функціи y и коэффиціентовъ разложенія $\varphi(z)$.

Мы видѣли выше (Гл. I) что отношеніе частныхъ производныхъ

$$\frac{\partial \varphi_y(z)}{\partial y} : \frac{\partial \varphi_y(z)}{\partial z}$$

не зависитъ отъ y и есть функція одного z. Означимъ эту функцію чрезъ $\lambda(z)$, такъ что

$$\frac{\partial \varphi_y(z)}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_y(z)}{\partial z} \cdot \lambda(z)$$

Разложеніе $\lambda(z)$ въ строку будетъ имѣть видъ

$$\lambda(z) = \beta_0(z-\alpha) + \beta_1(z-\alpha)^2 + \beta_2(z-\alpha)^3 + \ldots,$$

такъ что предыдущее уравненіе даетъ тожественно

$$\frac{\partial \alpha_0}{\partial y}(z-\alpha) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y}(z-\alpha)^2 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial y}(z-\alpha)^3 + \ldots$$
$$= [\alpha_0 + 2\alpha_1(z-\alpha) + 3\alpha_2(z-\alpha)^2 + \ldots][\beta_0(z-\alpha) + \beta_1(z-\alpha)^2 + \beta_2(z-\alpha)^3 + \ldots].$$

Если сравнимъ коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ $z-\alpha$ въ этомъ тожествѣ, то получимъ

$$\frac{\partial \alpha_0}{\partial y} = \beta_0 \alpha_0, \quad \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} = 2\beta_0 \alpha_1 + \beta_1 \alpha_0, \ldots$$

Интегрируя первое уравненіе, находимъ

$$\alpha_0 = C e^{y \cdot \beta}$$

гдѣ C постоянная. Такъ какъ для $y=0$ $\alpha_0=1$ и для $y=1$ $\alpha_0=A_1$, то

$$C=1, \ \beta_0 = lg A_0, \ \alpha_0 = A_0^y .$$

Точно также изъ второго уравненія найдемъ.

$$\alpha_1 = A_1 A_0^{y-1} \frac{A_0^y - 1}{A_0 - 1};$$

Digitized by Google

и т. д.

§ 2. Можно иначе, болѣе непосредственно получить значенія коэффиціентовъ разложенія функціи $\varphi_\gamma(z)$.

Напишемъ тожество

$$\varphi_\gamma\varphi(z)-\alpha=\varphi\varphi_\gamma(z)-\alpha$$

и возьмемъ разложенія

$$\varphi_\gamma\varphi(z)-\alpha=\alpha_0(\varphi(z)-\alpha)+\alpha_1(\varphi(z)-\alpha)^2+\alpha_2(\varphi(z)-\alpha)^3+\ldots$$

$$\varphi\varphi_\gamma(z)-\alpha=A_0(\varphi_\gamma(z)-\alpha)+A_1(\varphi_\gamma(z)-\alpha)^2+A_2(\varphi_\gamma(z)-\alpha)^3+\ldots;$$

но, если положимъ для краткости $z-\alpha=\zeta$

$$\varphi(z)-\alpha=A_0\zeta+A_1\zeta^2+A_2\zeta^3+\ldots$$

$$\varphi_\gamma(z)-\alpha=\alpha_0\zeta+\alpha_1\zeta^2+\alpha_2\zeta^3+\ldots,$$

такъ что

$$\begin{aligned}\varphi_\gamma\varphi(z)-\alpha=&\alpha_0(A_0\zeta+A_1\zeta^2+A_2\zeta^3+\ldots)\\&+\alpha_1(A_0\zeta+A_1\zeta^2+A_2\zeta^3+\ldots)^2\\&+\alpha_2(A_0\zeta+A_1\zeta^2+A_2\zeta^3+\ldots)^3+\ldots,\\\varphi\varphi_\gamma(z)-\alpha=&A_0(\alpha_0\zeta+\alpha_1\zeta^2+\alpha_2\zeta^3+\ldots)\\&+A_1(\alpha_0\zeta+\alpha_1\zeta^2+\alpha_2\zeta^3+\ldots)^2\\&+A_2(\alpha_0\zeta+\alpha_1\zeta^2+\alpha_2\zeta^3+\ldots)^3+\ldots\end{aligned}$$

Въ силу написаннаго нами тожества эти два разложенія равны между собой. Сравнивая коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ ζ мы получимъ уравненія, изъ которыхъ опредѣлимъ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, зная что $\alpha_0=A_0^\gamma$

Эти уравненія будутъ:

$$A_1\alpha_0+A_0^2\alpha_1=A_0\alpha_1+A_1\alpha_0^2,$$

$$A_2\alpha_0+2A_0A_1\alpha_1+A_0^3\alpha_2=A_0\alpha_2+2A_1\alpha_0\alpha_1+A_2\alpha_0^3,$$

$$\begin{aligned}&A_3\alpha_0+(2A_0A_2+A_1^2)\alpha_1+3A_0^2A_1\alpha_2+A_0^4\alpha_3\\&=A_0\alpha_3+A_1(2\alpha_0\alpha_2+\alpha_1^2)+3A_2\alpha_0^2\alpha_1+A_3\alpha_0^4,\end{aligned}$$

Digitized by Google

$$A_4\alpha_0 + 2(A_0A_3 + A_1A_2)\alpha_1 + 3(A^2{}_0A_2 + A_0A_1{}^2)\alpha_2 + 4A_0{}^3A_1\alpha_3 + \\ + A_0{}^5\alpha_4$$
$$= A_0\alpha_4 + 2A_1(\alpha_0\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2) + 3A_2(\alpha_0{}^2\alpha_2 + \alpha_0\alpha_1{}^2) + 4A_3\alpha_0{}^3a_1 + \\ + A_4\alpha_0{}^5,$$

и т. д.

Подставивъ въ эти уравненія $\alpha_0 = A_0{}^\gamma$, найдемъ

$$\alpha_1 = A_1A_0{}^{\gamma-1}\frac{A_0{}^\gamma - 1}{A_0 - 1},$$

$$\alpha_2 = 2A_1{}^2A_0{}^{\gamma-1}\frac{(A_0{}^\gamma - 1)(A_0{}^{\gamma-1} - 1)}{(A_0{}^2 - 1)(A_0 - 1)} + A_2A_0{}^{\gamma-1}\frac{A_0{}^{2\gamma} - 1}{A_0{}^2 - 1}$$

$$\alpha_3 = A_1{}^3A_0{}^{\gamma-2}\frac{(A^\gamma{}_0 - 1)(A_0{}^{\gamma-1} - 1)[(A_0 + 5)A_0{}^\gamma - 5A_0{}^2 - 1]}{(A_0 - 1)(A_0{}^2 - 1)(A_0{}^3 - 1)}$$

$$+ A_1A_2A_0{}^{\gamma-1}\frac{(A_0{}^\gamma - 1)(A_0{}^{\gamma-1} - 1)[(3A_0 + 5)A_0{}^\gamma + 5A_0 + 2]}{(A_0{}^2 - 1)(A_0{}^3 - 1)}$$

$$+ A_3A_0{}^{\gamma-1}\frac{A_0{}^{3\gamma} - 1}{A_0{}^3 - 1},$$

и т. д.

Вышенаписанныя уравненія позволяютъ также опредѣлить $\beta_1, \beta_2, \ldots$, —коэффиціенты разложенія функціи $\lambda(z)$ Производная

$$\frac{d\varphi_y(z)}{dy} = \frac{d\alpha_2}{dy}(z - \alpha) + \frac{d\alpha_1}{dy}(z - \alpha)^2 + \ldots$$

для $y = 0$ обращается въ $\lambda(x)$, а слѣдовательно производныя $\frac{d\alpha_0}{dy}$, $\frac{d\alpha_1}{dy}$, ... для $y = 0$ суть соотвѣтственно $\beta_0, \beta_1, \ldots$

Поэтому продифференцировавъ вышеупомянутыя уравненія по y и сдѣлавъ $y = 0$ получимъ

$$A_1\beta_0 + A_0{}^2\beta_1 = A_0\beta_1 + 2A_1\beta_0,$$
$$A_2\beta_0 + 2A_0A_1\beta_1 + A_0{}^3\beta_2 = A_0\beta_2 + 2A_1\beta_1 + 3A_2\beta_0$$
$$A_3\beta_0 + (2A_0A_2 + A_1{}^2)\beta_1 + 3A_0{}^2A_1\beta_2 + A_0{}^4\beta_3$$
$$= A_0\beta_3 + 2A_1\beta_2 + 3A_2\beta_1 + 4A_3\beta_0,$$

и т. д.

Digitized by Google

Изъ этихъ уравненій опредѣлимъ $\beta_1, \beta_2, \ldots$, замѣчая, что $\beta_0 = lgA_0$; такъ

$$\beta_1 = \frac{A_1}{A_0(A_0-1)}\, lgA_0$$

$$\beta_2 = \frac{2(A_0A_2-A_1^2)}{A_0^2(A_0-1)(A_0+1)}\, lgA_0$$

$$\beta_6 = -\frac{3A_0^2(A_0+1)A_3-(8A_0+7)A_0A_1A_2+(5A_0+4)A_1^3}{A_0^3(A_0^3-1)(A_0+1)}\, lgA_0$$

и т. д.

Изъ разложенія проф. Коркина получаются, какъ частные случаи, разложенія *Collins*'а [1], *Schröder*'а [2] и *Caylcy* [3] если положимъ

$$\alpha=0 \quad \text{и} \quad A_0=1$$

---

[1] Nouvelles recherches sur la théorie des puissanses fonctionnelles, 1827

[2] Über iterirte Functionen. Math. Ann. B. III, 1871, p. 310.

[3] Quarterly Journal. B. III, p. 366.

Digitized by Google

Глава V.

§ 1. Займемся теперь геометрическимъ опредѣленіемъ предѣльныхъ точекъ итераціи [1]).

Извѣстно, что если мы имѣемъ уравненіе

$$F(x)=0,$$

то геометрически корни его могутъ быть опредѣлены слѣдующимъ образомъ. Представимъ данное уравненіе подъ видомъ

$$f(x)=g(x),$$

перенеся нѣкоторое число членовъ его, содержащихъ x въ правую часть. Пусть

$$y=f(x) \text{ и } y=g(x)$$

—кривыя AB и $A'B'$ (черт. 2). Точки ихъ пересѣченія P_1, $P_2, \ldots$ пусть имѣютъ абсциссы $OQ_1=\alpha_1$, $OQ_2=\alpha_2, \ldots$; α_1, $\alpha_2, \ldots$ будутъ корнями уравненія $F(x)=0$.

Чтобы примѣнить этотъ способъ къ нахожденію предѣльныхъ точекъ итераціи, которыя будутъ корнями уравненія

$$x=\varphi(x),$$

мы строимъ кривую

$$y=\varphi(x)$$

---

[1]) *Lémeray.* Sur les conditions de convergence de certains développements ver les racines des équations. Ass. Fr. 1894.

— Sur les fonctions iteratives. Ass. Fr. 1895.

= Sur la convergence des Subsitutions uniformes. Nouv. Ann. 1897.

Isenkrahe, Das Verfahren der Functionswiederholung., Lp. 1897.

Digitized by Google

и прямую

$$y=x;$$

абсциссы точекъ пересѣченія этихъ линій дадутъ намъ значенія корней уравненія $x=\varphi(x)$. Корень α_i будетъ предѣльной точкой итераціи функціи $\varphi(x)$, если

$$|\varphi'(\alpha_i)|<1.$$

Но $\varphi'(\alpha_i)$ есть *tang.* угла касательной съ осью x въ точкѣ (α_i, α_i); слѣдовательно итерація будетъ сходящеюся въ томъ случаѣ, когда кривая лежитъ, близъ точки пересѣченія съ прямой $y=x$ въ углахъ MPN и QPO (черт. 3), образованныхъ прямой $y=x$ и перпендикуляромъ къ ней, проведеннымъ чрезъ точку (α_i, α_i).

§ 2. Производя итерацію функціи $y=\varphi(x)$ мы поступаемъ слѣдующимъ образомъ: даемъ x опредѣленное значеніе x_1; для этого значенія $y=y_1$; дѣлаемъ $y_1=x_2$; тогда $\varphi(x_2)=y_2$, и т. д. Не трудно видѣть, что такая подстановка изобразится ломаной $P_1Q_1P_2Q_2\ldots$ (черт. 4 *a*, *b*); въ самомъ дѣлѣ, давая x значеніе x_1 и находя y_1 мы опредѣляемъ на кривой точку P_1; подставляя y_1 вмѣсто x_1, т. е. полагая $y_1=x_2$ мы переходимъ отъ точки кривой къ точкѣ прямой $y=x$; пусть эта точка будетъ Q_1; на кривой ей соотвѣтствуетъ точка P_2 съ координатами $(x_2, y_2=\varphi(x_2))$; и т. д.

Пусть [1]) α одинъ изъ корней уравненія $x=\varphi(x)$ и пусть

$$|\varphi'(\alpha)|<1.$$

Дадимъ x начальное значеніе x_1 такое, чтобы

$$|\varphi'(x_1)|<1;$$

тогда

$$\alpha=x_1+\delta_1=x_2+\delta_2,$$

гдѣ δ_1 и δ_2 величины достаточно малыя и $|\delta_2|<|\delta_1|$, а слѣдовательно x_2 ближе къ α, чѣмъ x_1. Имѣемъ

---

[1] *Netto.* Vorlesungen über Algebra. B. 1, 1896, p. 302.

Digitized by Google

$$\alpha-\delta_2=\varphi(\alpha-\delta_1)=\varphi(\alpha)-\delta_1\varphi'(\alpha-\theta\delta_1)$$
$$\therefore\ \delta_2=\delta_1\varphi'(\alpha-\theta\delta_1),$$

гдѣ θ—правильная дробь.

Если $\varphi'(\alpha)$ положительна, то δ_1 и δ_2 имѣютъ одинаковыя знаки и мы будемъ при итераціи приближаться къ α съ одной лишь стороны, такъ что всѣ x_i будутъ больше, или меньше α.

Если же $\varphi'(\alpha)$ отрицательна, то δ_1 и δ_2 имѣютъ разные знаки и мы будемъ съ двухъ сторонъ приближаться α, такъ что $x_1, x_2, \ldots$ будутъ поперемѣнно то больше, то меньше α.

Геометрически, въ случаѣ $\varphi'(\alpha)$ положительной, мы будемъ приближаться точкѣ пересѣченія R (черт. 5) кривой $y=\varphi(x)$ и прямой $y=x$ по ломаной $P_1Q_1P_2Q_2\ldots$ если начальное значеніе ближе къ O, чѣмъ α. или по ломаной $P'_1Q'_1P'_2Q'_2\ldots$ если α ближе къ O, чѣмъ начальное значеніе.

Въ случаѣ $\varphi'(\alpha)$ отрицательной. ломаная $P_1Q_1P_2Q_2\ldots$ (черт. 6) будетъ обходить кругомъ точку R; въ этомъ случаѣ возьмемъ ли мы начальное значеніе ближе къ O, чѣмъ α, или дальше, ломаная въ одномъ и томъ же направленіи будетъ огибать точку R; въ первомъ случаѣ это будетъ $P_1Q_1P_2Q_2\ldots$, а во второмъ $KLP_1Q_1P_2Q_2\ldots$,

Формула

$$\delta_2=\delta_1\varphi'(\alpha-\theta\delta')$$

показываетъ, что чѣмъ меньше $|\varphi'(\alpha)|$, тѣмъ быстрѣе будетъ сходиться итерація. На черт. 7 кривая $A'B'$ имѣетъ большій tg угла наклоненія касательной въ точкѣ k къ оси x, чѣмъ кривая AB; при одинаковомъ начальномъ значеніи x, ломаная между x_1 и k для кривой $A'B'$ состоитъ изъ шести отрѣзковъ, между тѣмъ какъ ломаная для кривой AB между тѣми же точками состоитъ только изъ двухъ.

Самую быструю сходимость будемъ имѣть, очевидно, если $\varphi'(\alpha)=0$. Если вообще

Digitized by Google

$$\varphi'(\alpha)=0,\ \varphi''(\alpha)=0,\ \ldots\ \varphi^{(\lambda-1)}(\alpha)=0,\ \varphi^{(\lambda)}(\alpha)\neq 0,$$

то

$$\delta_2=\frac{\delta_1^{\lambda}}{\lambda!}\varphi^{(\lambda)}(\alpha-\theta\delta_1).$$

Возможные здѣсь случаи достаточно ясны изъ чертежей 8, 9, 10, 11.

§ 3. Въ § 2 главы II мы оставили безъ разсмотрѣнія случай

$$|\varphi'(\alpha)|=1$$

являющійся сомнительнымъ для сходимости итераціи. Займемся теперь его изслѣдованіемъ.

Пусть

$$\alpha-\delta_2=\varphi(\alpha-\delta_1)=\varphi(\alpha)-\delta_1\varphi'(\alpha)+\frac{\delta_1^2}{2}\varphi''(\alpha-\theta\delta_1)$$

$$\ldots\ \delta_2=\delta_1\varphi'(\alpha)-\frac{\delta_1^2}{2}\varphi''(\alpha-\theta\delta_1).$$

Пусть сначала

$$\varphi'(\alpha)=+1;$$

тогда

$$\delta_2=\delta_1-\frac{\delta_1^2}{2}\varphi''(\alpha-\theta\delta_1)=\delta_1\left(1-\frac{\delta_1}{2}\varphi''(\alpha-\theta\delta_1)\right)$$

Итерація будетъ сходящеюся, если количество

$$1-\frac{\delta_1}{2}\varphi''(\alpha-\theta\delta_1)$$

меньше единицы. Это можетъ быть, если одновременно

δ_1 *положительно и* $\varphi''(\alpha)$ *положительна*

или δ_1 *отрицательно и* $\varphi''(\alpha)$ *отрицательна*

Въ обоихъ случаяхъ будемъ приближаться къ корню съ одной стороны.

Если

$$\varphi'(\alpha)=-1,$$

Digitized by Google

то

$$\delta_2 = -\delta_1 - \frac{\delta_1^2}{2}\varphi''(\alpha - \theta\delta_1);$$

въ этомъ случаѣ предыдущія разсужденія непримѣнимы, ибо можетъ быть

$$|\delta_1| > |\delta_2|, \quad \text{но} \quad |\delta_2| < |\delta_3|.$$

Поэтому беремъ

$$\delta_2 = -\delta_1 - \frac{1}{2}\delta_1^2\varphi''(\alpha) + \frac{1}{6}\delta_1^3\varphi'''(\alpha) - \ldots,$$

$$\delta_3 = -\delta_2 - \frac{1}{2}\delta_2^2\varphi''(\alpha) + \frac{1}{6}\delta_2^3\varphi'''(\alpha) - \ldots$$

и исключаемъ отсюда δ_2; получимъ

$$\delta_3 = \delta_1 - \frac{1}{6}\delta_1^3[3(\varphi''(\alpha))^2 + 2\varphi'''(\alpha)] + \ldots$$

$$= \delta_1\left\{1 - \frac{1}{6}\delta_1^2[3(\varphi'(\alpha))^2 + 2\varphi'''(\alpha)]\right\} + \ldots;$$

отсюда слѣдуетъ, что *итерація въ случаѣ* $\varphi'(\alpha) = 1$ *будетъ сходящеюся, если количество*

$$[3(\varphi''(\alpha))^2 + 2\varphi'''(\alpha)]$$

положительно

Чертежи 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 изображаютъ случаи, возможные при $|\varphi'(\alpha)| = 1$.

Если, при $\varphi'(\alpha) = -1$, количество $3[\varphi''(\alpha)]^2 + 2\varphi'''(\alpha)$ равно нулю, то итерація не будетъ ни сходящейся, ни расходящейся, но мы будемъ получать постоянно чередующіяся значеніо x_1 и $\varphi(x_1)$. Дѣйствительно, изъ формулы

$$\delta_3 = \delta_1 - \frac{1}{6}\delta_1^3[3(\varphi''(\alpha))^2 + 2\varphi'''(\alpha)] + \ldots$$

при

$$3(\varphi''(\alpha))^2 + 2\varphi'''(\alpha) = 0$$

Digitized by Google

слѣдуетъ

$$\delta_3 = \delta_1,$$

а такъ какъ

$$\alpha = x_1 + \delta_1 = x_2 + \delta_2 = x_3 + \delta_3 = \ldots,$$

то

$$x_1 = x_3 = x_5 = \ldots$$

и

$$x_2 = x_4 = x_6 = \ldots$$

при всякомъ начальномъ значеніи x_1.

Въ этомъ случаѣ, какъ не трудно видѣть, кривая $y = \varphi(x)$ симметрична относительно прямой $y = x$ какъ оси (черт. 21).

Подобный же случай, но лишь для одного или нѣсколькихъ *опредѣленныхъ* начальныхъ значеній x можетъ имѣть мѣсто и для всякой функціи $\varphi(x)$. Дѣйствительно, достаточно опредѣлить ξ и η изъ уравненій

$$\varphi(\xi) = \eta$$
$$\varphi(\eta) = \xi$$

и начать итерацію, давая x значеніе ξ или η, чтобы получать непремѣнно тѣже величины η или ξ. Конечно отъ вида функціи φ зависитъ, будутъ ли ξ и η вещественны, конечны, комплексны или безконечно велики.

Ходъ итераціи въ разсмотрѣнномъ случаѣ показанъ на чертежахъ 22 и 23.

Digitized by Google

Глава VI.

§ 1. Изъ теоріи предѣльныхъ точекъ итераціи непосредственно слѣдуетъ возможности примѣненія итераціи къ вычисленію корней уравненій.

Всякое уравненіе съ одной неизвѣстной, алгебраическое или трансцендентное, можетъ быть приведено къ виду

$$z=\varphi(z). \tag{1}$$

Въ самомъ дѣлѣ, пусть

$$F(x)+\Phi(x)+\Psi(x)+\ldots=0 \tag{2}$$

есть уравненіе въ которомъ F, Φ, Ψ, ... суть знаки какихъ угодно сложныхъ функцій.

Положимъ

$$F(x)=z. \cdot . \quad x=F_{-1}(z);$$

тогда (2) обратится въ

$$z+\Phi F_{-1}(z)+\Psi F_{-1}(z)+\ldots=0;$$

полагая

$$\Phi F_{-1}(z)+\Psi F_{-1}(z)+\ldots=-\varphi(z)$$

получимъ

$$z=\varphi(z),$$

т. е. уравненіе (1). Зная корни (1), можемъ найти корни (2).

Къ типу уравненій (1) не принадлежатъ уравненія вида

$$\psi\xi\ldots\chi(x)=c;$$

Digitized by Google

но для нихъ непосредственно

$$x=\chi_{-1}\ldots\xi_{-1}\psi_{-1}(c).$$

§ 2. **Теорема.** *Если уравненіе*

$$x=\varphi(x),$$

гдѣ $\varphi(x)$ *есть функція голоморфная въ кругѣ* C_α *конечнаго радіуса съ центромъ въ* α, *имѣетъ корень* α, *то этотъ корень можетъ быть вычисленъ съ какой угодно точностью* 1) *посредствомъ итераціи функціи* $\varphi(x)$, *если* $mod\varphi'(\alpha)<1$, *и* 2) *посредствомъ итераціи* $\varphi_{-1}(x)$, *если* $mod\varphi'(\alpha)>1$.

1) слѣдуетъ изъ обратной теоремы главы II § 2, а 2) мы встрѣтили при доказательствѣ теоремы § 8 главы III, гдѣ было найдено, что если

$$mod\varphi'(\alpha)>1,$$

то

$$mod\varphi'_{-1}(\alpha)<1,$$

а слѣдовательно итерація функціи $\varphi_{-1}(x)$ сходится къ предѣльной точкѣ α.

Геометрическое толкованіе можетъ быть примѣнено къ случаю $|\varphi'(\alpha)|>1$ слѣдующимъ образомъ.

Пусть AB (черт. 24) есть кривая, уравненіе которой $y=\varphi(x)$; тогда кривая $A'B'$ симметричная кривой AB относительно прямой $y=x$ какъ оси, будетъ имѣть уравненіе $x=\varphi(y)$, или $y=\alpha_{-1}(x)$. Кривая $A'B'$ пересѣкаетъ ось симметріи въ тѣхъ же точкахъ, въ которыхъ ее пересѣкаетъ $A'B$.

Если касательная къ кривой AB въ точкѣ R_1 образуетъ уголъ θ съ осью x, то касательная къ кривой $A'B'$ въ той же точкѣ k_1 образуетъ уголъ θ съ осью y, а слѣдовательно уголъ $\frac{\pi}{2}-\theta$ съ осью x. Если $tg\theta>1$, то $tg\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=ctg\theta<1$ и наоборотъ

Слѣдовательно, если рядъ отрѣзковъ для кривой AB бу-

Digitized by Google

детъ расходящимся, то для кривой $A'B'$ онъ будетъ сходящимся, и наоборотъ.

Можно также и пользуясь кривой AB приближаться къ точкѣ B_1; для этого нужно лишь начать рядъ отрѣзковъ отъ точки, лежащей на оси y, а не на оси x. Аналитически же очевидно безразлично, будемъ ли мы производить итерацію $\varphi_{-1}(x)$, или въ уравненіи $y=\varphi(x)$ дадимъ y значеніе y_1 и вычислимъ $x=\varphi_{-1}(y_1)$, и т. д.

§ 3. Пусть имѣемъ уравненіе

$$x=\varphi(x);$$

дадимъ x два значенія a и b.

Если

$$a>\varphi(a),\ b<\varphi(b),$$

или

$$a>\varphi(a),\ b>\varphi(b),$$

то уравненіе $x=\varphi(x)$ имѣетъ между a и b одинъ, или вообще нечетное число корней, предполагая, что между этими корнями нѣтъ такого корня γ, что $\varphi'(\gamma)=1$.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть AB (черт. 25) есть кривая, уравненіе которой $y=\varphi(x)$. На нашемъ чертежѣ эта кривая три раза пересѣкаетъ прямую $y=x$, т. е. переходитъ два раза изъ угла MOY, въ которомъ $x<y$, въ уголъ MOX, въ которомъ $x>y$, и одинъ разъ изъ угла MOX въ уголъ MOY. Очевидно, что если до перваго перехода $a<\varphi(a)$, то послѣ третьяго $b>\varphi(b)$ и наоборотъ.

Если одновременно $a>\varphi(a)$ и $b>\varphi(b)$, или $a<\varphi(a)$ и $b<\varphi(b)$, то мы не можемъ сказать, заключается между a и b два корня (или вообще четное число ихъ) или ни одного.

Въ этомъ случаѣ можно примѣнять слѣдующій способъ. Пусть $a<\varphi(a)$, $b<\varphi(b)$, $a<b$ (черт. 26). Если уравненіе $x=\varphi(x)$ имѣетъ между a и b два дѣйствительныхъ корня, т. е. если прямая $x=y$ пересѣкаетъ кривую $y=\varphi(x)$ въ двухъ

Digitized by Google

точкахъ R_1 и R_2, то всегда прямая $y=b$ будетъ пересѣкать кривую AB, а прямая $y=a$ можетъ и не пересѣкать эту кривую. Если же (черт. 27) уравненіе $x=\varphi(x)$ не имѣетъ дѣйствительныхъ корней между a и b, т. е. кривая AB не пересѣкаетъ прямую OM, то, при достаточно близкихъ a и b, ни прямая $y=b$, ни прямая $y=a$ не встрѣтятъ между a и b кривой AB.

Тоже самое будетъ имѣть мѣсто и при $a>\varphi(a)$, $b>\varphi(b)$.

Слѣдовательно если имѣемъ уравненіе $x=\varphi(x)$ и если желаемъ узнать, имѣетъ ли оно корни между a и b, причемъ $a\gtrless\varphi(a)$, $b\gtrless\varphi(b)$, то дѣлаемъ $\varphi(x_1)=a$. ∴ $x_1=\varphi_{-1}(a)$, $\varphi(x_2)=b$, ∴ $x_2=\varphi_{-1}(b)$; если x_1 или x_2 имѣютъ дѣйствительныя значенія, то уравненіе $x=\varphi(x)$ *можетъ* имѣть два корня между a и b; если же какъ x_1, такъ и x_2 не имѣютъ дѣйствительнаго значенія, то корней между a и b нѣтъ.

Если между a и b четное число корней, то мы сближаемъ a и b до тѣхъ поръ, пока не будетъ

$$a>\varphi(a),\ b<\varphi(b)$$

или

$$a<\varphi(a),\ b>\varphi(b),$$

слѣдовательно пока не будетъ между a и b нечетнаго числа корней. Тогда, если $\varphi'(x)$ не мѣняетъ знака между a и b, то, какъ извѣстно (Теорема Ролля) между этими предѣлами лежитъ одинъ дѣйствительный корень. Если же $\varphi'(x)$ мѣняетъ знакъ, то сближаемъ a и b до тѣхъ поръ, пока знакъ $\varphi'(x)$ между ними мѣняться не будетъ. Тогда имѣемъ право утверждать, что одинъ корень уравненія $x=\varphi(x)$ отдѣленъ и находится между a и b, такъ что можно приступить къ вычисленію этого корня.

§ 4. На основаніи вышеизложеннаго разсмотримъ слѣдующіе случаи

1) $0<\varphi'(a)<1;\ 0<\varphi'(b)<1;\ a<b.$

Digitized by Google

Итерація будетъ сходящеюся какъ для начальнаго значенія a, такъ и для начальнаго значенія b. Символическое выраженіе для корня α будетъ

$$\alpha = \lim_{p=\infty} \varphi_p(a) = \lim_{p=\infty} \varphi_p(b)$$

2) $\quad 0 > \varphi'(a) > -1;\ 0 > \varphi'(b) > 1;\ a < b$

и въ этомъ случаѣ

$$\alpha = \lim_{p=\infty} \varphi_p(a) = \lim_{p=\infty} \varphi_p(b)$$

3) $\quad \varphi'(\alpha) > 1,\ 0 < \varphi'(b) < 1;\ a < b$

Итерація будетъ сходящеюся только для начальнаго значенія b, слѣдовательно

$$\alpha = \lim_{p=\infty} \varphi_p(b)$$

4) $\quad 0 < \varphi'(a) < 1,\ \varphi'(b) > 1;\ a < b$

Въ этомъ случаѣ

$$\alpha = \lim_{p=\infty} \varphi_p(a).$$

5) $0 > \varphi'(a) > -1,\ \varphi'(b) < -1,\ 3[\varphi''(a)]^2 + 2\varphi'''(a) > 0$

$$\alpha = \lim_{p=\infty} \varphi_p(a) = \lim_{p=\infty} \varphi_p(b)$$

6) $\varphi'(a) < 1,\ 0 > \varphi'(b) > 1,\ 3[\varphi''(b)]^2 + 2\varphi'''(b) > 0.$

Тоже, что и въ (5).

Если $|\varphi'(a)| > 1$ и $|\varphi'(b)| > 1$, то мы должны производить итерацію функціи $\varphi_{-1}(x)$, чтобы вычислить корень α, заключенный между a и b.

Примѣры.

1. Пусть требуется найти корни уравненія

$$x = \cos x;$$

Digitized by Google

здѣсь

$$\varphi(x)=\cos x,\quad \varphi'(x)=-\sin x$$

Пусть, согласно, предыдущимъ обозначеніямъ

$$a=\frac{\pi}{6},\quad b=\frac{\pi}{4};$$

тогда

$$\varphi(a)=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \varphi(b)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Въ этомъ случаѣ

$$a<\varphi(a),\quad b>\varphi(b)$$

и такъ какъ $\varphi'(x)=-\sin x$ не мѣняетъ знака между $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{4}$, то между этими границами заключается одинъ дѣйствительный корень. Такъ какъ $\varphi'(x)$ отрицательна, то приближаться къ нему будемъ съ обѣихъ сторонъ; слѣдовательно искомый корень

$$\alpha=\lim_{p=\infty}\cos_p\left(\frac{\pi}{6}\right)=\lim_{p=\infty}\cos_p\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Положимъ

$$x_1=\frac{\pi}{4};\ \text{тогда}\ \cos x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}=0{,}70711;$$

далѣе находимъ

$$x_2=0{,}70711\ \therefore\ \cos x_2=\cos 40^\circ 30'50''=0{,}76025$$
$$x_3=0{,}76025\ \therefore\ \cos x_3=\cos 43^\circ 33'32''=0{,}72465$$
$$x_4=0{,}72465\ \therefore\ \cos x_4=\cos 41^\circ 31'10''=0{,}74873$$
$$x_5=0{,}74873\ \therefore\ \cos x_5=\cos 42^\circ 53'56''=0{,}73257$$
$$x_6=0{,}73257\ \therefore\ \cos x_6=\cos 41^\circ 58'23''=0{,}74344$$
$$x_7=0{,}74344\ \therefore\ \cos x_7=\cos 42^\circ 35'45''=0{,}73614$$
$$x_8=0{,}73614\ \therefore\ \cos x_8=\cos 42^\circ 10'41''=0{,}74106$$
$$x_9=0{,}74106\ \therefore\ \cos x_9=\cos 42^\circ 27'32''=0{,}73777$$
$$x_{10}=0{,}73777\ \therefore\ \cos x_{10}=\cos 42^\circ 16'16''=0{,}73996$$

Digitized by Google

$x_{11}=0{,}73996 \therefore cosx_{11}=cos42^{\circ}23'45''=0{,}73850$
$x_{12}=0{,}73850 \therefore cosx_{12}=cos42^{\circ}18'47''=0{,}73947$
$x_{13}=0{,}73947 \therefore cosx_{13}=cos42^{\circ}22'5'' =0{,}73884$
$x_{14}=0{,}73884 \therefore cosx_{14}=cos42^{\circ}19'59''=0{,}73923$
$x_{15}=0{,}73923 \therefore cosx_{15}=cos42^{\circ}21'14''=0{,}73901$
$x_{16}=0{,}73901 \therefore cosx_{16}=cos42^{\circ}20'31''=0{,}73911$
$x_{17}=0{,}73911 \therefore cosx_{17}=cos42^{\circ}20'52''=0{,}73907$
$x_{18}=0{,}73907 \therefore cosx_{18}=cos42^{\circ}20'46''=0{,}73909$
$x_{19}=0{,}73909 \therefore cosx_{19}=cos42^{\circ}20'48''=0{,}73908.$

Итакъ, можно принять

$$0{,}73909>a>0{,}73908.$$

2. Уравненіе

$$x=a^x$$

было разсмотрѣно Эйлеромъ [1] и Lémeray [2].

Кривая

$$y=a^x$$

имѣетъ видъ, изображенный на чертежѣ 28. При нѣкоторыхъ значеніяхъ a она можетъ пересѣкать прямую $y=x$, при другихъ нѣтъ, т. е. при нѣкоторыхъ значеніяхъ a уравненіе $x=a^x$ имѣетъ дѣйствительные корни, при нѣкоторыхъ не имѣетъ.

Найдемъ наибольшее значеніе, которое можетъ имѣть a при дѣйствительныхъ корняхъ уравненія $x=a^x$. Для этого будемъ искать maximum функціи

$$y=x^{\frac{1}{x}}.$$

Взявъ производную, получимъ

$$y'=\frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2}(1-lgx);$$

[1] *Euler.* De formulis exponentialibus. Acta Ac. Pet. 1777. 1, p. 39.
[2] Nouv. Ann. 1896 et 1897.

Digitized by Google

Эта функція обращается въ нуль для

$$x=0,\ x=e,\ x=\infty$$

Слѣдовательно наибольшее значенін a будетъ

$$a=e^{\frac{1}{e}}$$

Для $a=0$ получаемъ $y=0=x$—самыя оси координатъ; при $a\neq 0$ уравненію $y=a^x$ удовлетворяютъ для всѣхъ значеній a координаты точки (0, 1); слѣдовательно всѣ кривыя проходятъ чрезъ эту точку. При $a=\varepsilon$—весьма малой величинѣ—кривая идетъ весьма близко къ оси x въ углѣ XOY, поднимается въ томъ же углѣ по оси y до точки (0, 1), пересѣкаетъ въ этой точкѣ ось y и уходитъ въ безконечность въ углѣ отрицательныхъ x-овъ.

При $a=1-\varepsilon$ кривая весьма близка прямой $y=1$, переходя въ точкѣ (0, 1) съ нижней стороны этой прямой на верхнюю.

При $a=1$ кривая обращается въ прямую $y=1$. При $a=1+\varepsilon$ имѣемъ кривую, симметричную кривой $y=(1-\varepsilon)^x$ относительно прямой $y=1$ какъ оси. При $a>1$ кривая все болѣе и болѣе удаляется отъ прямой $y=1$ по мѣрѣ возрастанія a и приближается къ осямъ координатъ, проходя все время черезъ точку (0, 1).

Прямая $x=1$ пересѣкаетъ всѣ эти кривыя въ точкахъ, ординаты которыхъ $y=a$.

Для отрицательныхъ a функція a^x перестаетъ быть непрерывной и мы не разсматриваемъ этотъ случай.

Кривая

$$y=a^x$$

при

$$0<a\leq 1$$

пересѣкаетъ прямую $y=x$ въ одной точкѣ.

Digitized by Google

Въ этомъ случаѣ

$$y'=a^x lga$$

имѣетъ отрицательную величину и не мѣняетъ знака отъ $x=0$ до $x=1$. При a близкомъ къ единицѣ $|y'|<1$, при a близкомъ къ нулю $|y'|>1$. Сомнительный случай сходимости итераціи будемъ имѣть при

$$a=\frac{1}{e^e};$$

въ этомъ случаѣ

$$x=\frac{1}{e}$$

и

$$y'=\varphi'(\alpha)=-1.$$

Слѣдовательно мы должны составить

$$3y''^2+2y''';$$

находимъ

$$3y''^2+2y'''=e^2>0,$$

слѣдовательно если бы мы производили итерацію, она была бы сходящеюся.

При

$$a<\frac{1}{e^e}$$

итерація функціи a^x будетъ расходящеюся и мы должны для вычисленія корня уравненія $x=a^x$ производить итерацію функціи $Log_a(x)$.

Въ случаѣ

$$1<a<e^{\frac{1}{e}}$$

производная

$$y'=a^x lga$$

положительна; для значеній x меньшихъ e всегда $y'<1$. Въ тоже время

$$1<a^1 \text{ и } e>a^e$$

Digitized by Google

слѣдовательно между 1 и e заключается одинъ корень, къ которому можно приблизиться итераціей функціи a^x. Приближеніе будетъ съ одной стороны.

Не трудно видѣть, что всегда можно найти такое число k, что будетъ

$$k<a^k,$$

а такъ какъ $e>a^e$, то ясно, что между e и k заключается другой корень уравненія $x=a^x$. Для этого корня $y'>1$, а потому его можно вычислить итераціей функціи $Log_a x$.

3. Уравненіе

$$x=a+b\sin x,$$

гдѣ $b<1$, извѣстно подъ названіемъ уравненія Кеплера.

Здѣсь

$$\varphi'(x)=b\cos x$$

всегда меньше единицы, слѣдовательно итерація функціи

$$\varphi(x)=a+b\sin x$$

будетъ сходящеюся вся всякомъ начальномъ значеніи x и сколь угодно большомъ a.

$\varphi'(x)$ положительна, если $0<x<\frac{\pi}{2}$ и отрицательна, если $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$, и т. д. Слѣдовательно итерація можетъ быть сходящеюся и съ одной и съ двухъ сторонъ.

Построимъ кривую

$$y=a+b\sin x$$

предполагая, что $a>0$ (черт. 29)

Если $a<\pi$, то прямая $x=y$ пересѣчетъ кривую выше прямой $y=a$. Корень находится между 0 и π. Если $a=\pi$, то корень $=a=\pi$.

Если $\frac{\pi}{2}<a<\pi$, то $\varphi'(x)$ отрицательна и мы будемъ приближаться къ корню съ двухъ сторонъ. Корень въ этомъ

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

случаѣ лежитъ между $\frac{\pi}{2}$ и π. Если $a=\frac{\pi}{2}$, то корень заключенъ между $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}+b$. Если $\frac{\pi}{2}-b<a<\frac{\pi}{2}$, то корень лежитъ между $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}+b$. Если $a=\frac{\pi}{2}-b$, то корень$=\frac{\pi}{2}$.

Если $a<\frac{\pi}{2}-b$, то $\varphi'(x)$ для значеніи x близъ корня положительна и корень заключенъ между 0 и $\frac{\pi}{2}$.

Въ заключеніе сдѣлаемъ замѣчаніе чисто практическаго свойства. Иногда итерація сходится чрезвычайно медленно, что затруднительно для вычисленія. Въ одномъ случаѣ можно ускорить вычисленіе, а именно когда $\varphi'(\alpha)$, гдѣ α корень, отрицательна.

Пусть мы дали x въ функціи $\varphi(x)$ начальное значеніе x_1, такъ что $\varphi(x_1)=x_2$. если мы подставимъ далѣе въ функцію $\varphi(\alpha)$ не x_2, а $\frac{x_2+x_3}{2}$, и будемъ поступать также и далѣе, то итерація значительно ускорится.

Цѣлесообразность такого пріема очевидна геометрически (Черт. 30)

Въ примѣрѣ 1. намъ пришлось совершить 18 подстановокъ, чтобы до 1″ приблизиться къ корню уравненія $x=\cos x$. Применяя же это упрощеніе, мы получимъ

$$\xi_1=\frac{x_2+x_3}{2}=42^\circ 2'11''$$

$$\xi_2= \quad 42^\circ 17'45''$$

$$\xi_3= \quad 42^\circ 20'16''$$

$$\xi_4= \quad 42^\circ 20'42''$$

$$\xi_5= \quad 42^\circ 20'47''$$

—тотъ же результатъ при четырехъ подстановкахъ.

И. Аристовъ.

Digitized by Google

Quelques lois ultérieures de la théorie des égalités logiques.

(Supplément au traité «Sept lois fondamentales de la théorie des égalités logiques»).

Chapitre XLIV.

La sixième méthode pour recevoir toutes les causes principales de l'égalité—les combinations alternatives de ses éléments de volume. Les causes des prémisses du syllogisme Barbara.

Ce qui est exposé dans le chapitre précédent nous permet de proposer la méthode suivante pour construire, en forme de déterminations de la classe arbitraire U, toutes les causes principales de chaque problème donnée $1=M$: décomposer l'égalité $1=M$ dans ses éléments de volume, convertir touces éléments en forme de déterminations de U, composer les combinaisons alternatives tout—possibles de ces éléments et transformer chacune de ces alternatives dans une seule égalité.

Exemple. Trouver, en forme de déterminations de a toutes les causes principales des prémisses du syllogisme Barbara, c'est à dire du système:

$$a=ab,\ b=bc.$$

Digitized by Google

L' égalité séparée équivalente á ce probléme (1) est:

$$0 = ab_0 + bc_0 = (b+a)(e_0 + c_0) =$$
$$= (a+b+c)(a+b+c_0)(a+b_0+c_0)(a_0+b_0+c_0).$$

Donc les quatre éléments d'extension de ce probléme sont:

$$0 = a+b+c,\ 0 = a+b+c_0,\ 0 = a+b_0+c_0,\ 0 = a_0+b_0+c_0,$$

ou sous forme des déterminations de a:

$$a = a_0(b+c),\ a = a_0(b+c_0),\ a = a_0(b_0+c_0),\ a = a_0+bc \quad (2)$$

Le nombre total de causes principales doit s'égaler en ce cas au nombre $2^4 = 16$. Nous devons trouver toutes les 16 déterminations excessives de a á l'aide de combinaisons alternatives des éléments (2).

La détermination sans éléments d'extension est évidemment $a = a_0$.

Les quatre déterminations avee un seul élément d' extension la chacune sont les éléments mêmes (2).

Les six déterminations aves deux éléments la chacune sont:

$$[a = a_0(b+c);\ a = a_0(b+c_0)] = [a = a_0(b+c)(b+c_0)] = (a = a_0 b),$$
$$[a = a_0(b+c);\ a = a_0(b_0+c_0)] = [a = a_0(bc_0 + b_0 c)],$$
$$[a = a_0(b+c);\ a = a_0+abc] = [a = abc + a_0(b+c)] =$$
$$= [a = bc + a_0(bc_0 + b_0 c)],$$
$$[a = a_0(b+c_0);\ a = a_0(b_0+c_0)] = (a = a_0 c_0),$$
$$[a = a_0(b+c_0);\ a = a_0+bc] = [a = abc + a_0(b+c_0)] = (a = bc + a_0 c_0),$$
$$[a = a_0(b_0+c_0);\ a = a_0+bc] = [a = abc + a_0(b_0+c_0)] = (b_0 + c_0 = 0).$$

Ici les formules 1°, 2° et 4° sont les déterminations de supériorité excessive de a. Les formules 3° et 5° sont les déterminations coéquivalentes de a. La détermination 1° est le résultat d'élimination de c; la détermination 4° est le résultat

Digitized by Google

de l'élimination de b; la détermination 6° est la détermination fictive de a, ou le résultat masqué d'élimination de a.

Les quatre déterminations de a avec trois éléments la chacune, les déterminations qui présentent les causes le plus compliquées du problème, sont:

$$[a=a_0(b+c);\ a=a_0(b+c_0);\ a=a_0(b_0+c_0)]=(a=a_0bc_0),$$
$$[a=a_0(b+c);\ a=a_0(b+c_0);\ a=a_0+bc]=(a=abc+a_0\bar{b})=$$
$$=(a=bc+a_0bc_0),$$
$$[a=a_0(b+c_0);a=a_0(b_0+c_0);\ a=a_0+bc]=[a=abc+a_0(bc_0+b_0c)],$$
$$[a=a_0(b+c_0);\ a=a_0(b_0+c_0);\ a=a_0+bc]=(a=abc+a_0c_0).$$

Ici les formules 3° et 4° sont les déterminations bipartibles, la formule 2° est la détermination coéquivalente, la formule 1° est la détermination excessive détaillée. Quant à la détermination excessive compacte de a, elle coïncide dans ce cas avec l'élément seul $a=a_0+bc$.

Enfin la combinaison alternative de tous les quatre éléments (4) est la détermination complète de a, nommément:

$$[a=a_0(b+c);\ a=a_0(b+c_0);\ a=a_0(b_0+c_0);\ a=a_0+bc]=$$
$$=[a=abc+a_0(b+c)(b+c_0)(b_0+c_0)]=(a=abc+a_0bc_0).$$

Les 16 déterminations précédentes de a nous donnent autant des classes qui sont logiquement égales á a_0 grâce à l'égalité $1=ab_0+bc_0$ opposée au problème donnée (1).

Dans le chapitre XVII nous avons construit les 16 déterminations principales de a qui se déduisent de prémisses du syllogisme Barbara en qualité de leurs ses conséquences. Ici nous avons encore 16 déterminations principales de a qui se déduisent de mêmes prémisses en qualité de leurs causes.

Digitized by Google

Chapitre XLV.

La septième méthode pour recevoir toutes les causes principales de l'égalité donnée—lés éliminations des éléments d' extension. Les causes du problème de Venn.

Nous savons que parmi toutes les 2^{2^n-m} causes principales de chaque égalité donnée $1=M$ nous n'avons qu'une seule cause qui embrasse tous les 2^n-m éléments d' extension de cette égalité; c'est la cause $U=UM+U_0M_0$ qui est équivalente à cette égalité et présente l'une de ses formes. Toutes les restantes causes principales de la même égalité donnée $1=M$ sont les égalités ayant le nombre des éléments d' extension qui est plus petit que 2^n-m. S'il en est ainsi, toutes les causes principales de l'égalité $1=M$ peuvent être déduites de cette égalité à l'aide des éliminations consécutives de l'un, de deux, de trois etc. éléments d' extension. Cela nous donne encore uen méthode pour obtenir toutes les causes principales de chaque égalité donnée $1=M$. L'idée de cette méthode étant évidente il ne nous reste qu'à la revêtir dans la forme praticable.

Supposons que tous les 2^n-m éléments de volume de l'égalité donnée $1=M$ présentés sous forme de déterminations, de la classe U prise arbitrairement sont:

$$\left.\begin{array}{l} U=U_0+p^{(1)},\ U=U_0+p^{(2)},\ \ldots\ldots,\ U=U_0+p^{(i+s-m)} \\ U=U_0q^{(1)}\ ,\ U=U_0q^{(2)}\ ,\ \ldots\ldots,\ U=U_0q^{(2^{n-i-s})} \end{array}\right\} \quad (1)$$

La décomposition complète de l'égalité donnée $1=M$ sera en ce cas:

$$U=U(p^{(1)}+p^{(2)}+\ldots+p^{(i+s-m)})+U_0q^{(1)}q^{(2)}.\ldots.q^{(2^{n-i-s})}. \quad (2)$$

Il est clair que: 1^0, pour éliminer dans le problème donné l'élément de la sorte $U=U_0+p^{(k)}$, il suffit de changer dans le schème (2) la classe $p^{(k)}$ en 0 et 2^0, pour y éliminer

Digitized by Google

l'élément du type $U=U_0q^{(\iota)}$ il suffit de remplacer dans la formule (2) la classe $q^{(\iota)}$ par l'unité.

Exemple. Trouver, sous forme de déterminations de a, toutes les causes principales du problème de Venn, c'est à dire du système:

$$a=a(bc_0+b_0c),\ b=ab.$$

L'égalité seule équivalente à ce système est:

$$1=(a_0+bc_0+b_0c)(a+b_0)=a(bc_0+b_0c)+a_0b_0=$$
$$=abc_0+ab_0c+a_0b_0c+a_0b_0c_0.$$

Les quatre éléments d' extension de cette égalité évidemment sont:

$$1=abc_0,\ 1=ab_0c,\ 1=a_0b_0c,\ 1=a_0b_0c_0,$$

ou sous forme de déterminations de a:

$$a=a_0+bc_0,\ a=a_0+b_0c,\ a=a_0(b+c_0),\ a=a_0(b+c). \qquad (3)$$

La détermination complète de a est en ce cas:

$$a=a(bc_0+b_0c)+a_0(b+c)(b+c_0). \qquad (4)$$

Nous devons recevoir toutes les 16 déterminations principales excessives de a à l'aide des éliminations des éléments (3) dans la décomposition complète de a (4).

Le résultat de non-élimination des éléments est l'égalité même (4) qui est équivalente au problème donné et présente l'une de ses causes extrêmes ou formelles.

En éliminant dans la formule (4) consécutivement chacun des quatre éléments (3), nous recevrons les quatre déterminations de a:

$$a=ab_0c+a_0b,$$
$$a=abc_0+a_0b=bc_0+a_0bc,$$
$$a=a(bc_0+b_0c)+a_0(b+c)=bc_0+b_0c+a_0bc,$$
$$a=a(bc_0+b_0c)+a_0(b+c_0)=bc_0+ab_0c+a_0(bc+b_0c_0).$$

Digitized by Google

Ici la première et la quatrième formules sont les déterminations bipartibles, la seconde et la troisième formules sont les déterminations coéquivalentes.

En éliminant dans la formule (4) consécutivement les deux éléments (3) à la fois, nous aurons les six déterminations de a:

$$a=a(0+0)+a_0(b+c)(b+c_0)=a_0b,$$
$$[a=a(0+b_0c)+a_0.1(b+c_0)=ab_0c+a_0(b+c_0)]=(b+c_0=0),$$
$$a=a(0+b_0c)+a_0(b+c).1=ab_0c+a_0(b+c)=b_0c+a_0b,$$
$$a=a(bc_0+0)+a_0.1(b+c_0)=abc_0+a_0(b+c_0)=$$
$$=bc_0+a_0(bc+b_0c_0),$$
$$a=a(bc_0+0)+a_0(b+c).1=abc_0+a_0(b+c)=bc_0+a_0c,$$
$$a=a(bc_0+b_0c)+a_0.1.1=a_0+bc_0+b_0c.$$

Ici la première formule est la détermination détailleé excessive de a et le résultat d'élimination de c. La seconde formule est la détermination fictive de a ou le résultat masqué d'élimination de a. La sixième formule est le détermination compacte excessive de a. Les trois formules restantes sont les déterminations coéquivalentes.

Les éliminations dans la formule (4) de trois éléments (3) à la fois nous donneront les quatre déterminations de a:

$$a=a(0+0)+a_0.1.(b+c_0)=a_0(b+c_0),$$
$$a=a(0+0)+a_0(b+c).1=a_0(b+c),$$
$$a=a(0+b_0c)+a_0.1.1=a_0+b_0c,$$
$$a=a(bc_0+0)+a_0.1.1=a_0+bc_0,$$

qui sont les déterminations élémentaires excessives.

Enfin, en éliminant dans le schème (4) tous les quatre éléments (3), nous recevrons encore une déterminations de a:

$$a=a(0+0)+a_0.1.1=a_0$$

qui est la détermination absurde de a:

Digitized by Google

Rien ne nous empêche de convertir toutes ces 16 déterminations de a en forme de déterminations de la classe bc par exemple. Alors, outre les 16 déterminations principales de bc qui sont données dans le chapitre XIX et qui sont les conséquences principales du problème de Venn, nous aurons encore 16 déterminations principales de bc qui présentent les causes du même problème. Voila combien de déterminations de bc nous pouvons tirer du problème de Venn au lieu d'une seule détermination $bc=0$ que savait d'y tirer l'auteur même de ce problème.

Il est encore à observer que quoique, en proposant ce problème, Venn attendait de ses disciples la réponse $bc=0$, mais il a suivi l'exposition de ses prémisses par la question indéterminée: qu'est ce que nous concluons d'ici? Dans le chapitre XIX j'ai indiqué, grâce à cette indéterminité de la question, le nombre 4096 des réponses qui expriment toutes les conséquences principales du problème dans toutes leurs formes principales. A présent je puis y ajouter encore une fois le nombre 4096 des réponses qui expriment toutes les causes principales du problème en toutes leurs formes principales. Et cependant ce ne seront que les réponses composées avec de trois lettres a, b, c du problème, sans l'aide de lettres étrangères au discours.

Il ne sera pas superflu de dire à propos ce qui suit. En formulant son problème, Venn a employé le terme „conclusion" en qualité, comme cela se fait ordinairement, de synonyme du terme „conséquence". Pour nous, cela s'entend, la conséquence n'est que l'une de sortes de conclusion, car nous savons déja tirer de chaque égalité, en qualité des conclusions, toutes ses conséquences, toutes ses causes, toutes ses formes et toutes les racines de ses simples classes.

Digitized by Google

Chapitre XLVI.

La sixième méthode pour recevoir toutes les conséquences principales de l'égalité donnée—les combinaisons aves les causes manquantes. Les conséquences des prémisses du syllogisme Cesare.

Nous savons que si l'égalité donnée $1=M$ a le nombre 2^n-m des éléments d' extension, alors l'égalité opposée $0=M$ doit avoir le nombre m des éléments de la même sorte. Evidemment tous les éléments de l'une de ces deux égalités sont différents des éléments de l'autre.

Nous savons aussi que pour déduire de l'égalité donnée $1=M$ ses conséquences il faut diminuer sa compréhension ou, ce qui est la même chose, augmenter son extension. S'il en se ainsi, les combinaisons consécutives deux l'égalité donnée avec tous les 2^m combinaisons de m éléments d' extension de l'égalité oppossée $0=M$ doivent fournir à nous toutes les 2^m conséquences principales de l'égalité donnée $1=M$. Sans doute, toutes ces combinaisons doivent consister dans la formation des alternatives, mais non pas des systèmes, car nous savons que le système $(A=0, B=0)$ est l'une de causes de chacune des égalités $A=0$, $B=0$, tandis que l'alternative $(A=0; B=0)$ est l'une des conséquences de la chacune de mêmes égalités $A=0$, $B=0$.

Voilà nous avons reçu la méthode suivante pour trouver toutes les conséquences principales de chaque égalité donnée $1=M$: construire toutes les alternatives composées de l'égalité donnée et de toutes les combinaisons alternatives des éléments d' extension de l'égalité opposée $0=M$ et convertir toutes ces alternatives dans les égalités isolées. Ainsi, si nous supposons que tous les m éléments d' extension de l'égalité opposée $0=M$ sont:

Digitized by Google

$$U=U_0+p^{(1)},\ U=U_0+p^{(2)},\ \ldots\ U=U_0+p^{(m-s)},$$
$$U=U_0q^{(1)},\quad U=U_0q^{(2)},\ \ldots\ U=U_0q^{(s)},$$

alors la combinaison alternative de l'égalité donnée $1=M$ présentée sous forme $U=UM+U_0M_0$ avec l'élément de la soret $U=U_0+p^{(i)}$ sera:

$$U=U(M+p^{(i)})+U_0M_0$$

et la combinaison alternative de la même égalité donnée avec l'élément du type $U=U_0q^{(k)}$ nous donnera sa consequence:

$$U=UM+U_0M_0q^{(k)}.$$

Exemple. Trouver sous forme de déterminations de a tontes les conséquences principales des prémisses du syllogisme Cesare dont le schème est:

$$(ca=ab,\ c=cb_0)\ \therefore\ (a=ac_0).$$

L'égalité unique équivalente au système de deux prémisses données est $0=ab_0+bc$ ou sous forme de détermination de a:

$$a=aM+a_0M_0=a(a_0b_0+bc_0)+a_0(ab_0+bc)=abc_0+a_0bc. \quad (1)$$

Nous devons combiner alternativement cette égalité (1) avec toutes les combinaisons alternatives des éléments d' extension de l'égalité opposée qui est en ce cas:

$$a=a(b_0+c)+a_0(b_0+c_0)$$

ou encore:

$$a=a(bc+b_0c+b_0c_0)+a_0(a+b_0+c_0).$$

Evidemment, tous les quatre éléments d' extension de cette égalité opposée sont:

$$a=a_0+bc,\ a=a_0+b_0c,\ a=a_0+b_0c_0,\ a=a_0(b_0+c_0) \quad (2)$$

Digitized by Google

Le résultat de non-combinaison de l'égalité donnée (1) avec les éléments (2) est la même égalité (1) qui est l'une des formes du problème donné ou encore la détermination complète de a.

En combinant alternativement la même égalité (1) avec chacune des éléments (2) d'aprés les règles données plus haut, nous recevrons les quatre conséquences suivantes:

$$a=a(bc_0+bc)+a_0bc=bc+abc_0,$$
$$[a=a(bc_0+b_0c)+a_0bc]=[a=a(bc_0+b_0c),\ bc=0],$$
$$[a=a(bc_0+b_0c_0)+a_0bc]=(a=ac_0,\ bc)=0),$$
$$a=abc_0+a_0bc(b_0+c_0)=abc_0.$$

Ici les déterminations de a sont: la première—intermédiaire, la quatrième—compacte (partielle), la seconde et la troisième—bipartibles.

Les combinaisons de l'égalité (1) avec deux éléments (2) à la fois nous donneront les six conséquences du problème, nommément:

$$a=a(bc_0+bc+b_0c)+a_0bc=bc+a(bc_0+b_0c),$$
$$a=a(bc_0+bc+b_0c_0)+a_0bc=bc+ac_0,$$
$$a=a(bc_0+bc)+a_0bc(b_0+c_0)=ab,$$
$$[a=a(bc_0+b_0c+b_0c_0)+a_0bc=a(b_0+c_0)+a_0bc]=(bc=0),$$
$$a=a(bc_0+b_0c)+a_0bc(b_0+c_0)=a(bc_0+b_0c),$$
$$a=a(bc_0+b_0c_0)+a_0bc(b_0+c_0)=ac_0.$$

Ici les déterminations 1° et 2° sont les intermédiaires. La troisième formule est la première prémisse du syllogisme et le résultat d'élimination dans le problème de la lettre c. La quatrième formule est la seconde prémisse du syllogisme et la détermination fictive de a, c'est à dire le résultat masqué d'élimination dans le problème de a. La cinquième formule est la détermination de subordination (partielle) de a.

Digitized by Google

Enfin, la sixième formule est la conclusion du syllogisme et le résultat d'élimination de b.

Les combinaisons de l'égalité (1) avec les trois éléments (2) à la fois nous donneront les quatre déterminations suivantes:

$$a=a(bc_0+bc+b_0c+b_0c_0)+a_0bc=a+bc,$$
$$a=a(bc_0+bc+b_0c)+a_0bc(b_0+c_0)=a(b+c),$$
$$a=a(bc_0+bc+b_0c_0)+a_0bc(b_0+c_0)=a(b+c_0),$$
$$a=a(bc_0+b_0c+b_0c_0)+a_0bc(b_0+c_0)=a(b_0+c_0),$$

qui sont les conséquences élémentaires du problème ou encore ses éléments de compréhension.

Enfin, la combinaison alternative de l'égalité donnée (1) avec tous les quatre éléments (2) à la fois nous donnera une conséquence

$$a=a(bc_0+bc+b_0c+b_0c_0)+a_0bc(b_0+c_0)=a$$

qui est la détermination identique de a.

Chapitre XLVII.

La septième méthode pour recevoir toutes les conséquences de l'égalité donnée — utilisation des causes de l'égalité opposée. Les conséquences des prémisses du syllogisme Camestres.

Nous savons que: 1°, toutes les conséquences de chaque égalité donnée $1=M$ présentées sous forme de déterminations de la classe prise arbitrairement U sont renfermées dans le schème:

$$U=U(M+\xi)+U_0M_0\eta$$

et, 2°, toutes les causes de l'égalité opposée $0=M$ présentées sous forme de déterminations de la négation de U sont renfermées dans le schème:

Digitized by Google

$$U_0 = U_0 M_0 \xi + U(M + \eta).$$

Mais les membres droits de ces deux schèmes sont les mêmes, car, les classes ξ et η étant tout à fait arbitraires, nous pouvons les placer l'une au lieu de l'autre.

Cela nous donne la méthode suivante pour trouver toutes les conséquences principales de l'égalité donnée $1 = M$: construire sous forme de déterminations de U_0 toutes les causes principales de l'égalité opposée $0 = M$ et changer U_0 en U dans les membres gauches de toutes les égalités qui présentent ces causes.

Exemple. Trouver sous forme de déterminations de a toutes les conséquences principales des prémisses du syllogisme Camestres dont le schème est:

$$(a = ab_0,\ c = bc) \therefore (a = ac_0).$$

L'égalité unique équivalente au système des prémisses données est $0 = ab + b_0 c$. Donc le problème opposé au problème donné doit s'exprimer par l'égalité:

$$0 = a_0 b + b_0 c_0 = (b + c_0)(b_0 + a_0) =$$
$$= (a + b + c_0)(a_0 + b + c_0)(a_0 + b_0 + c)(a_0 + b_0 + c_0).$$

Par conséquent les quatre éléments d'extension de ce problème opposé seront.

$$0 = a + b + c_0,\ 0 = a_0 + b + c_0,\ 0 = a_0 + b_0 + c,\ 0 = a_0 + b_0 + c_0,$$

ou sous forme de déterminations de a_0:

$$a_0 = a + b_0 c,\ a_0 = a(b + c_0),\ a_0 = a(b_0 + c),\ a_0 = a(b_0 + c_0). \quad (1)$$

La détermination complète de a_0 tirée du même problème opposé évidemment est:

$$a_0 = a_0 b_0 c + a(b + c_0)(b_0 + c)(b_0 + c_0). \quad (2)$$

Digitized by Google

En remplaçant dans le membre gauche de cette égalité (2) le symbole a_0 par le symbole a nous recevrons l'égalité:

$$a=a(b+c_0)(b_0+c)(b_0+c_0)+a_0b_0c \qquad (3)$$

qui présente évidemment la détermination complète de a tirée de prémisses données.

Il est clair à présent que nous recevrons toutes les conséquences principales du problème donné à l'aide d'éliminations des éléments (1) dans le membre droit de l'égalité (3) suivant les règles données dans le chapitre XLV.

Le résultat de non-élimination des éléments (1) nous donne la conséquence:

$$a=ab_0c_0+a_0b_0c$$

qui est la détermination complète de a.

En éliminant dans l'égalité (3) chacun des éléments (1) nous recevrons les quatre conséquences suivantes:

$$a=a(b+c_0)(b_0+c)(b_0+c_0)+a_0.0=ab_0c_0,$$
$$a=a.1.(b_0+c)(b_0+c_0)+a_0b_0c=ab_0+a_0b_0c=b_0c+ab_0c_0,$$
$$[a=a(b+c_0).1.(b_0+c_0)+a_0b_0c=ac_0+a_0b_0c]=$$
$$=(a=ac_0,\ b_0c=0),$$
$$[a=a(b+c_0)(b_0+c).1+a_0b_0c=a(bc+b_0c_0)+a_0b_0c]=$$
$$=[a=a(bc+b_0c_0),\ b_0c=0].$$

Ici la première détermination est compacte (partielle), la seconde—intermédiaire, les restantes sont bipartibles.

Les éliminations dans l'égalité (3) de deux éléments (1) à la fois nous donneront les six conséquences qui sont:

$$a=a.1.(b_0+c)(b_0+c_0)+a_0.0=ab_0,$$
$$a=a(b+c_0).1.(b_0+c_0)+a_0.0=ac_0,$$
$$a=a(b+c_0)(b_0+c).1+a_0.0=a(bc+b_0c_0),$$

Digitized by Google

$$a=a.1.1.(b_0+c_0)+a_0b_0c=b_0c+ac_0,$$
$$a=a.1.(b_0+c).1+a_0b_0c=b_0c+a(bc+b_0c_0),$$
$$[a=a(b+c_0).1.1+a_0b_0c]=(b_0c=0).$$

Ici les trois premières déterminations de a sont les déterminations de subordination (partielle), les deux suivantes sont intermédiaires. La première formule est la première prémisse du syllogisme et le résultat d'élimination de c. La seconde formule est la conclusion du syllogisme et le résultat d'élimination de b. La sixième formule est la seconde prémisse du syllogisme, la déterminstion fictive de a et le résultat masqué d'élimination de a.

Les éliminations dans l'égalité (3) de trois éléments (1) à la fois nous donneront les quatre conséquences élémentaires du problème:

$$a=a(b_0+c_0),\ a=a(b_0+c),\ a=a(b+c_0),\ a=a+b_0c.$$

Enfin, l'élimination dans l'égalité (3) de tous les quatre éléments (1) nous conduit à l'identité $a=a$.

Chapitre XLVIII.

Démontrer que chaque égalité logique est équivalente au système de toutes ses conséquences principales et à l'alternative de toutes ses causes principales.

Nous savons que chaque égalité logique composée de n lettres et ayant m éléments de compréhension est équivalente 1°, au système de toutes ses m conséquences élémentaires et 2°: à l'alternative de toutes ses 2^n-m causes élémentaires. En généralisant ces deux vérites, nous démontrerons ici que chaque égalité est équaivalente aussi: 1°, au système de toutes ses 2^m conséquences principales et 2°, à l'alternative de toutes ses $2^{2^n}-m$ causes principales.

Digitized by Google

Mais préalablement il faut démontrer les deux théorèmes suivants:

Théorème 1: le système composé d'une cause et d'une de ses conséquences est équivalent à la cause.

Prenons les trois schèmes connus:

$$U=U_1(M+\xi)+U_0M_0\tau, \tag{1}$$
$$U=UM+U_0M_0, \tag{2}$$
$$U=UM\xi'+U_0(M_0+\tau'), \tag{3}$$

où évidemment l'égalité (1) est la conséquence de l'égalité (2), l'égalité (2) est la conséquence de l'égalité (3) et l'égalité (1) est la conséquence de l'égalité (3). Nous devons démontrer que: 1°, le système des égalités (1) et (2) est équivalent à l'égalité (2); 2°, le système (2) et (3) est équivalent à (3) et 3°, le système (1) et (3) est équivalent à (3). Mais cela est ainsi, comme nous le montrent les calculs:

$$[U=U(M+\xi)+U_0M_0\tau,\ U=UM+U_0M_0]=$$
$$=[U=UM(M+\xi)+U_0(M_0+M_0\tau)]=(U=UM+U_0M_0),$$
$$[U=UM+U_0M_0,\ U=UM\xi'+U_0(M_0+\tau')]=$$
$$=[U=UM.M\xi'+U_0(M_0+M_0+\tau')]=[U=UM\xi'+U_0(M_0+\tau')],$$
$$[U=U(M+\xi)+U_0M_0\tau,\ U=UM\xi'+U_0(M_0+\tau')]=$$
$$=[U=U(M+\xi)M\xi'+U_0(M_0\tau+M_0+\tau')]=$$
$$=[U=UM\xi'+U_0(M_0+\tau')].$$

Le théorème est démontré. En particulier ce théorème nous donne:

$$(A=B,\ A=B)=(A=B),$$
$$(A=B,\ 0=0)=(A=B).$$

Il est clair à présent que le système composé de toutes les 2^m conséquences principales de chaque égalité $1=M$ doit être équivalent à cette égalité, car cette égalité se trouve

Digitized by Google

elle-même parmi ses 2^m conséquences et doit les engloutir toutes en vertu du théorème démontré.

Théorème 2: l'alternative composée d'une cause et d'une de ses conséquences est équivalente à la conséquence.

Evidemment nous devons démontrer que: 1°, l'alternative composée des égalités (1) et (2) est équivalente à l'égalité (1); 2°, l'alternative de (2) et de (3) est équivalente à (2) et 3°, l'alternative de (1) et de (3) est équivalente à (1). Mais cela est ainsi, car nous avons:

$$[U=U(M+\xi)+U_0M_0\gamma;\ U=UM+U_0M_0]=$$
$$=[U=U(M+\xi+M)+U_0M_0\gamma M_0]=[U=U(M+\xi)+U_0M_0\gamma],$$
$$[U=UM+U_0M_0;\ U=UM\xi'+U_0(M_0+\gamma')]=$$
$$=[U=U(M+M\xi')+U_0M_0(M_0+\gamma')]=(U=UM+U_0M_0),$$
$$[U=U(M+\xi)+U_0M_0\gamma;\ U=UM\xi'+U_0(M_0+\gamma')]=$$
$$=[U=U(M+\xi+M\xi')+U_0M_0\gamma(M_0+\gamma')]=$$
$$=[U=U(M+\xi)+U_0M_0\gamma].$$

Le théorème est démontré. En particulier ce théorème nous donne:

$$(A=B;\ A=B)=(A=B),$$
$$(A=B;\ 1=0)=(A=B).$$

Il n'y a pas de doute à présent que l'alternative composée de toutes les 2^{2^n-m} causes principales de chaque égalité donnée $1=M$ doit être équivalente à cette égalité, car cette égalité se trouvant elle—même parmi ses 2^{2^n-m} causes doit les engloutir toutes en vertu du théorème démontré tout récemment.

Digitized by Google

Il n'est pas superflu de dire encore ce qui suit. Quoique le second de deux théorèmes précédents est démontré totalement, il peut sembler néanmoins un peu paradoxal. En effet, n'est—il pas étrange que l'alternative „ou la cause ou sa conséquence" n'exprime rien de plus que „sa conséquence"? Pour dissiper à cet égard toutes les doutes, il ne faut pas oublier que l'alternative de deux égalités quelconques $A=B$ et $C=D$ n'exprime rien de plus que l'existence de la troisième égalité, nommément:

$$U=U(AB+A_0B_0+CD+C_0D_0)+ \\ +U_0(AB_0+A_0B)(CD_0+C_0D) \qquad (4)$$

qui est équivalente à cette alternative et qui est juste ou quand $A=B$ ou quand $C=D$. Donc, si l'une de ces égalités, par exemple $A=B$, est l'une de causes de l'autre, c'est à dire de l'égalité $C=D$, alors pour la justesse de l'égalité (4) il suffit de vérifier la condition $C=D$, car si l'égalité $C=D$ est l'une de causes ou de conditions de quelque égalité, alors l'égalité $A=B$ doit être d'autant plus l'une de causes de la même égalité. Par conséquent, si l'égalité $A=B$ est l'une de causes de l'égalité $C=D$, alors l'alternative de deux conditions $A=B$ et $C=D$ doit être équivalente à la condition seule $C=D$.

Chapitre XLIX.

La loi de remplacement des systèmes des égalités par les alternatives. Exemple: problème de Venn.

Soit donné, pour être remplacé par les alternatives tout-possibles, le système exprimé à l'aide de n lettres et composé du nombre m des éléments de compréhension qui sont:

$$e^{(1)}=0,\ e^{(2)}=0,\ e^{(3)}=0,\ \ldots,\ e^{(m)}=0,\ \ldots. \qquad (1)$$

Digitized by Google

où $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, ..., $e^{(m)}$ sont les minimals du discours de ces n lettres. Le nombre des égalités qui composent ce système est sans importance.

Il est clair que le système donné est équivalent à l'égalité seule:

$$e^{(1)} + e^{(2)} + e^{(3)} + \ldots + e^{(m)} = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

Supposons que les minimals restants du discours, en nombre $2^n - m$, sont: $e^{(m+1)}$, $e^{(m+2)}$, ..., $e^{(2^n)}$. Leurs négations qui sont: $e_0^{(m+1)}$, $e_0^{(m+2)}$, ..., $e_0^{(2^n)}$ appartiennent évidemment au nombre des maximals du discours. Or nous savons que la somme de m minimals du discours est égale au produit du nombre $2^n - m$ de ses maximals qui sont les négations de tous les $2^n - m$ minimals restants du discours. S'il en est ainsi, l'égalité (2) doit se transformer identiquement dans l'égalité:

$$e_0^{(m+1)} e_0^{(m+2)} \ldots e_0^{(2^n)} = 0, \quad \ldots \quad (3$$

qui est, comme nous le savons, équivalente à l'alternative composée des éléments d'extension suivants:

$$e_0^{(m+1)} = 0, \; e_0^{(m+2)} = 0, \ldots, \; e_0^{(2^n)} = 0 \quad \ldots \quad (4)$$

Tout cela nous montre que le système des éléments (1) est toujours équivalent à l'alternative des éléments (4) et nous recevons la formule:

$$(e^{(1)} = 0, \; e^{(2)} = 0, \ldots, \; e^{(m)} = 0) = (e_0^{(m+1)} = 0; \; e_0^{(m+2)} = 0; \ldots; \; e_0^{(2^n)} = 0), \quad \ldots \quad (5)$$

qui exprime la loi de remplacement d'un système composé du nombre m des élément de compréhension par les alternatives tout—

Digitized by Google

possibles composées du nombre $2^n - m$ des éléments d'extension respectifs.

Evidemment la plus générale forme de la loi mentionnée (5) est:

$$(U=Ue_0^{(1)}+U_0e^{(1)},\ U=Ue_0^{(2)}+U_0e^{(2)},\ \ldots$$
$$\ldots,\ U=Ue_0^{(m)}+U_0e^{(m)})=(V=Ve^{(m+1)}+V_0e_0^{(m+1)};$$
$$V=Ve^{(m+2)}+V_0e_0^{(m+2)};\ \ldots;\ V=Ve^{(2^n)}+V_0e_0^{(2^n)});\ \ldots \quad (6)$$

où U et V sont les fonctions arbitraires.

Exemple. Remplacer le système

$$a=a(bc_0+b_0c),\ b=ab$$

qui exprime le problème de Venn par une alternative quelconque composée des égalités ayant la forme de déterminations de b.

Le système donné est equivalent au système des éléments de compréhension:

$$0=abc,\ 0=ab_0c_0,\ 0=a_0bc,\ 0=a_0bc_0.$$

Les minimals manquants sont: abc_0, ab_0c, a_0b_0c, $a_0b_0c_0$.

En posant $V=b$, la formule (6) nous donnera:

$$[a=a(bc_0+b_0c),\ b=ab]=[b=b_0+ac_0;\ b=b_0(a_0+c_0);$$
$$b=b_0(a+c_0);\ b=b_0(a+c)].$$

Vu que

$$[b=b_0+ac_0;\ b=b_0(a_0+c_0)]=[b=bac_0+b_0(a_0+c_0)],$$
$$[b=b_0(a+c_0);\ b=b_0(a+c)]=(b=b_0a),$$

nous pouvons dire que l'une des alternatives qui expriment tout le contenu logique du problème de Venn est par exemple:

$$[b=bac_0+b_0(a_0+c_0);\ b=b_0a].$$

Digitized by Google

Chapitre L.

La loi de remplacement des alternatives des égalités logiques par les systèmes. Exemple: problème de Venn.

Soit donnée, pour être remplacée par les systèmes tout—possibles, une alternative exprimée à l'aide de n lettrés et composée du nombre k des éléments d'extension du discours qui sont:

$$0=E^{(1)},\ 0=E^{(2)},\ 0=E^{(3)},\ \ldots,\ 0=E^{(k)},$$

où $E^{(1)}$, $E^{(2)}$, $\ldots$, $E^{(k)}$ appartiennent au nombre des maximals du discours.

Les jugements analogues à ceux du chapitre précédent nous donneront la formule:

$$(E^{(1)}=0;\ E^{(2)}=0;\ \ldots;\ E^{(k)}=0) = (E_0^{(k+1)}=0,\ E_0^{(k+2)}=0,\ \ldots,\ E_0^{(2^n)}=0),$$

qui exprime la loi de remplacement de chacune des alternatives ayant les k éléments donnés d'extension par chacun des systèmes composés du nombre 2^n-k des éléments de compréhension correspondants.

La forme la plus générale de cette loi évidemment sera:

$$[U=UE_0^{(1)}+U_0E^{(1)};\ U=UE_0^{(2)}+U_0E^{(2)};\ \ldots;\ U=UE_0^{(k)}+U_0E^{(k)}] = [V=VE^{(k+1)}+V_0E_0^{(k+1)},\ V=VE^{(k+2)}+V_0E_0^{(k+2)},\ \ldots,\ V=VE^{(2^n)}+V_0E_0^{(2^n)}],$$

où U et V sont les fonctions arbitraires.

Exemple. Remplacer par un quelconque système l'alternative:

$$(a=a_0+bc_0+b_0c;\ b=b_0a).$$

Digitized by Google

En ce cas nous avons:

$$(a=a_0+bc_0+b_0c)=(0=a_0+bc+b_0c_0)=[0=a_0+(b+c_0)(b_0+c)]=$$
$$=[0=(a_0+b+c_0)(a_0+b_0+c)]=(0=a_0+b+c_0;\ 0=a_0+b_0+c),$$
$$(b=b_0a)=(0=b_0a+b)=(0=a+b)=(0=a+b+c;\ 0=a+b+c_0).$$

Les maximals qui manquent à l'alternative donnée étant:

$$a+b_0+c,\ a+b_0+c_0,\ a_0+b+c,\ a_0+b_0+c_0,$$

leurs négations sont: abc, ab_0c_0, a_0bc, a_0bc_0. Donc, d'après la loi formulée dans ce chapitre, nous aurons:

$$(a=a_0+bc_0+b_0c;\ b=b_0a)=(abc=0,\ ab_0c_0=0,\ a_0bc=0,$$
$$a_0bc_0=0).$$

Par conséquent l'un des systèmes équivalents à l'alternative donnée sera:

$$[a=a(bc_0+b_0c),\ b=ab],$$

c'est à dire coïncide avec le problème de Venn.

Chapitre LI.

Les cas le plus simples des alternatives logiques.

Les jugements spéculatifs sur les alternatives sont assez difficiles et peuvent facilement nous conduire aux conclusions erronées. Voilà pourquoi il faut toujours dans les cas des alternatives, en se méfiant de la force de l'ésprit non—armé, joindre les égalités de chaque alternative dans une seule égalité d'après les règles données plus haut.

Nous considérerons ici les cas le plus simples des alternatives.

Digitized by Google

1°, L'alternative ($A=0$; $A=1$) ou, ce qui est la même chose, ($A=0$; $A_0=0$), étant équivalente à l'identité $AA_0=0$, est un schème qui n'a point de contenu logique.

2°, L'alternative ($A=B$; $A=B_0$) est aussi équivalente à l'identité: $0=(AB_0+A_0B)(AB+A_0B_0)=0$. Donc, la proposition „A est équivalente ou à B ou à B_0" n'exprime aucunes connaissances logiques.

3°, L'alternative ($A=AB$; $A=AB_0$) est aussi un schème sans valeur logique, car elle est équivalente à l'identité $0=AB_0$. $AB=0$. Par conséquent la condition „sera—t—elle la classe A contenue dans B ou dans B_0" est équivalente à l'absence de condition quelconque.

4°, La proposition „A est égale ou à B ou à C" s'exprime par l'alternative ($A=B$; $A=C$) qui est équivalente à l'égalité

$$0=(AB_0+A_0B)(AC_0+A_0C)=AB_0C_0+A_0BC.$$

5°, La prémisse „A est contenue dans B ou dans C" qui s'exprime par l'alternative ($A=AB$; $A=AC$) est équivalente à l'égalité $0=AB_0$. $AC_0=AB_0C_0$ ou encore à l'égalité $A=A(B+C)$. Jci il n'est par superflu de dire que le jugement „A est contenue dans B et dans C" s'exprime par l'égalité $A=ABC$.

6°, Le jugement „A ou B est contenue dans C" qui correspond à l'alternative ($A=AC$; $B=BC$) est équivalent à l'égalité $0=AC_0$. $BC_0=ABC_0$ ou encore à l'égalité $C=C+AB$. Mais le jugement „A et B sont contenues dans C" s'exprime par l'égalité $C=C+A+B$.

7°, La prémisse „ou A est contenue dans B, ou C est contenue dans B_0" n'exprime rien, car l'alternative ($A=AB$; $C=CB_0$) est équivalente à l'identité $0=AB_0$. $CB=0$.

Digitized by Google

8°, Mais la proposition „ou A est équivalente à B, ou C est équivalente à B_0“ n'est pas un schème privé de valeur logique, car cette proposition correspond à l'alternative ($A=B$; $C=B_0$) qui est équivalente à l'égalité:

$$0=(AB_0+A_0B)(BC+B_0C_0)=AB_0C_0+A_0BC.$$

9°, La proposition „ou B est contenue dans C, ou B contient A“ n'exprime rien, car l'alternative ($B=BC$; $B=B+A$) est équivalente à l'identité $0=BC_0.\ AB_0=0$.

10°, Le jugement „A contient B ou C“ qui correspond à l'alternative ($A=A+B$; $A=A+C$) est équivalent à l'égalité $0=A_0B.\ A_0C=A_0BC$ ou encore $A=A+BC$.

11°. Les quatre alternatives:

$$(A=0;\ B=0),\ (A=0;\ A=B_0),\ (B=0;\ A=B_0),$$
$$(A=0;\ B=0;\ A=B_0)$$

sont équivalentes, car nous avons:

$$(A=0;\ B=0) = (0=AB),$$
$$(A=0;\ A=B_0)=(0=A;\ 0=AB+A_0B_0)=(0=AB),$$
$$(B=0;\ A=B_0) = (0=B;\ 0=AB+A_0B_0)=(0=AB),$$
$$(A=0;\ B=0;\ A=B_0)=(0=AB;\ 0=AB+A_0B_0)=$$
$$=(0=AB).$$

Cela nous montre immédiatement que la vérité évidente:

$$(AB=0)\ .\cdot.\ (A=0;\ B=0;\ A=B_0)$$

coïncide totalement avec la formule:

$$(AB=0)\ .\cdot.\ (A=0;\ B=0),$$

c'est à dire avec le théorème (8) du chapitre XXXVII.

Digitized by Google

Chapitre LII.

Encore une fois sur le nombre des problèmes exprimées à l'aide des égalités et sur toutes les seize problèmes de deux lettres.

J'ai montré dans le chapitre *V* que le nombre total des problèmes différents que l'on peut construire avec n lettres à l'aide du signe $=$ est 2^{2^n}. Cette conclusion a été faite en supposition que le signe $=$ ne peut nous fournir que les égalités solées et les systèmes des égalités. Jci je veux montrer que l'emploi des alternatives des égalités ne peut changer aucunement la conclusion mentionnée. En effet, chaque problème, sera—t—il exprimé par un système des égalités, ou par une alternative des égalités, ou par un système des alternatives des égalités, ou enfin par une alternative des systèmes des égalités, peut être toujours présenté par une seule égalité qui à son tour peut être convertie dans la forme de détermination de chaque classe du discours A prise arbitrairement. S'il en est ainsi, tous les problèmes de n lettres seront épuisés quand nous égalerons consécutivement la classe A à toutes les 2^{2^n} classes du discours. Donc le nombre total des problèmes de n lettres exprimés à l'aide du signe $=$ est 2^{2^n}, y comptant aussi les deux problèmes extrêmes qui sont: l'identité $A=A$ et l'absurdité $A=A_0$.

Dans le même chapitre *V* sont donnés tous les seize problèmes de deux lettres a et b avec l'indication de leur décomposition dans les éléments de compréhension. Ici nous les reproduisons encore une fois avec l'indication de leur décomposition dans les éléments de toutes les deux sortes.

Ces seize problèmes présentés sous forme de déterminations de a se divisent dans les cinq groupes, nommément:

Digitized by Google

1°, un problème identique qui n'a point des éléments de compréhension, mais posséde les quatre éléments d'extension, et qui est:

$$(a=a)=(a=a_0b;\ a=a_0b_0;\ a=a_0+b;\ a=a_0+b_0)=(a=b;\ a=b_0);$$

2°, les quatre problèmes avec un élément de compréhension et les trois éléments d'extension:

$$(a=ab)=(a=a_0b;\ a=a_0b_0;\ a=a_0+b)=(a=0;\ b=1),$$
$$(a=ab_0)=(a=a_0b;\ a=a_0b_0;\ a=a_0+b_0)=(a=0;\ b=0),$$
$$(a=a+b)=(a=a_0b;\ a=a_0+b;\ a=a_0+b_0)=(a=1;\ b=0),$$
$$(a=a+b_0)=(a=a_0b_0;\ a=a_0+b;\ a=a_0+b_0)=(a=1;\ b=1);$$

3°, les six problèmes avec deux éléments de toutes les deux sortes:

$$(a=1)=(a=a+b,\ a=a+b_0)=(a=a_0+b;\ a=a_0+b_0),$$
$$(a=0)=(a=ab,\ a=ab_0)=(a=a_0b;\ a=a_0b_0),$$
$$(a=b)=(a=ab,\ a=a+b)=(a=a_0b;\ a=a_0+b),$$
$$(a=b_0)=(a=ab_0,\ a=a+b_0)=(a=a_0b_0;\ a=a_0+b_0),$$
$$(a=ab+a_0b_0)=(a=ab,\ a=a+b_0)=(a=a_0b_0;\ a=a_0+b)=$$
$$=(b=1),$$
$$(a=ab_0+a_0b)=(a=ab_0,\ a=a+b)=(a=a_0b;\ a=a_0+b_0)=$$
$$=(b=0);$$

4°, les quatre problèmes avec trois éléments de compréhension et l'un élément d'extension:

$$(a=a_0b)=(a=ab,\ a=ab_0,\ a=a+b)=(a=0,\ b=0),$$
$$(a=a_0b_0)=(a=ab,\ a=ab_0,\ a=a+b_0)=(a=0,\ b=1),$$
$$(a=a_0+b)=(a=ab,\ a=a+b,\ a=a+b_0)=(a=1,\ b=1),$$
$$(a=a_0+b_0)=(a=ab_0,\ a=a+b,\ a=a+b_0)=(a=1,\ b=0);$$

et enfin 5°, un problème absurde qui a quatre éléments de compréhension et n'a point des éléments d'extension et qui est:

$$(a=a_0)=(a=ab,\ a=ab_0,\ a=a+b,\ a=a+b_0)=(a=b,\ a=b_0).$$

Digitized by Google

Il est intéressant d'observer que chacun de six problèmes du troisième groupe peut être présenté dans la forme d'un système des alternatives et dans la forme d'une alternative des systèmes de la manière suivante:

$$(a=1)=[(a=1;\ b=0),\ (a=1;\ b=1)] = [(a=1,\ b=1);\ (a=1,\ b=0)],$$

$$(a=0)=[(a=0;\ b=1),\ (a=0;\ b=0)] = [(a=0,\ b=0);\ (a=0,\ b=1)],$$

$$(a=b)=[(a=0;\ b=1),\ (a=1;\ b=0)] = [(a=0,\ b=0);\ (a=1,\ b=1)],$$

$$(a=b_0)=[(a=0;\ b=0),\ (a=1;\ b=1)] = [(a=0,\ b=1);\ (a=1,\ b=0)],$$

$$(a=ab+a_0b_0) = [(a=0;\ b=1),\ (a=1;\ b=1)] = [(a=0,\ b=1);\ (a=1,\ b=1)],$$

$$(a=ab_0+a_0b) = [(a=0;\ b=0),\ (a=1;\ b=0)] = [(a=0,\ b=0);\ (a=1,\ b=0)].$$

Ainsi par exemple nous pouvons traiter la prémisse „*a* est équivalente à *b*“: 1°, comme le système de deux alternatives qui sont: „ou *a* est égale au zéro, ou *b* est égale à l'unité“ et „ou *a* est égale à l'unité, au *b* est égale au zero“ et 2°, comme l'alternative de deux systèmes, nommément: „*a* et *b* sont égales simultanément ou au zéro ou à l'unité.“

Chapitre LIII.

Encore une fois sur la méthode de construire les problèmes logiques à l'aide d'égalités.

Dans le chapitre VI est exposé dans ce but la méthode basée sur l'emploi des systèmes des égalités. A présent, quand nous avons appris d'employer les alternatives, il n'est pas difficile de modifier la méthode mentionnée tellement que les problèmes construits soient composés non seulement de systèmes, mais aussi d'alternatives. Ainsi, si nous avons à construire un problème ayant *n* lettres, *i* prémisses et *m* éléments

Digitized by Google

de compréhension, alors nous devons: égaler à zéro m quelconques minimals du discours, diviser les égalités élémentaires ainsi reçues dans i groupes, joindre toutes les égalités du chaque groupe dans une seule égalité, laisser quelques de ces égalités invariables, convertir les autres dans les formes nouvelles et transformer toutes les restantes dans les alternatives.

Exemple. Construire à l'aide de quatre éléments de compréhension et de trois lettres a, b, c un de problèmes contenants deux prémisses l'une desquelles est une égalité et l'autre— une alternative.

Prenons par exemple les quatre éléments de compréhension du problème de Venn qui sont:

$$0=abc,\ 0=ab_0c_0,\ 0=a_0bc,\ 0=a_0bc_0.$$

Divisons les dans les deux groupes suivants:

$$(0=abc,\ 0=a_0bc),\ (0=ab_0c_0,\ 0=a_0bc_0),$$

ce qui nous donnera consécutivement:

$$0=bc,\ 0=ab_0c_0+a_0bc_0=(a+bc_0)(a_0+b_0c_0),$$
$$0=bc,\ [0=a+bc_0;\ 0=a_0+b_0c_0],$$
$$0=bc,\ [a=a_0bc_0;\ a=a_0+b+c].$$

Voilà la forme confuse dans laquelle peut être transformé le problème équivalent à un simple égalité $b=ac_0$.

Chapitre LIV.

La seconde loi d'élimination de lettres dans les égalités logiques.

Dans le chapitre XI j'ai exposé en détail les règles pour déduire de chaque égalité donnée tous les résultats d'élimination (de lettres) qui appartiennent au nombre de consé-

Digitized by Google

quences de cette égalité. Ici je parlerai de résultats d'élimination qui présentent les causes de la même égalité donnée.

Soit donnée une égalité logique $N=0$ contenante n lettres $a, b, c, d,...$ Il faut y éliminer la lettre a tellement que le résultat de cette opération soit l'une de causes de cette égalité.

L'égalité donnée peut être présentée dans la forme:

$$0=N(a, b, c, d,...)=aN(1, b, c, d,...)+a_0N(0, b, c, d,...),$$

ou, ce qui est la même chose, dans la forme:

$$0=Ga+Ha_0, \ldots. \qquad (1)$$

où G et H ne dépendent point de la lettre à éliminer a. Nous pouvons réduire le membre droit de cette égalité (1) aux deux formes suivantes:

$$Ga+Ha_0=(Ga+Ha_0)+GH,$$
$$Ga+Ha_0=(Ga+Ha_0)(G+H),$$

qui nous montrent que la fonction $Ga+Ha_0$ possède la subclasse latente GH indépendante de la lettre a et la superclasse latente $G+H$ qui est aussi indépendante de la même lettre a.

Afin de tirer dehors cette subclasse et cette superclasse, il suffit de donner à la fonction $Ga+Ha_0$ les deux formes suivantes:

$$Ga+Ha_0=GH+aGH_0+a_0G_0H,$$
$$Ga+Ha_0=(G+H)[a(G+H_0)+a_0(G_0+H)],$$

où les membres droits sont la somme disjonctive et le produit disjonctif respectivement. Grâce à cela, l'égalité donnée (1) se transforme: 1°, dans le systeme:

$$(0=GH,\ 0=aGH_0+a_0G_0H) \ldots. \qquad (2)$$

et 2°, dans l'alternative:

$$[0=G+H;\ 0=a(G+H_0)+a_0(G_0+H)] \ldots. \qquad (3)$$

Digitized by Google

D'où nous concluons que: 1°, parmi les conséquences de l'égalité donnée (1) doit se trouver l'égalité $GH=0$ indépendante de la lettre a et 2°, parmi les causes de la même égalité (1) doit se trouver l'égalité $0=G+H$ indépendante aussi de la lettre a.

Voilà nous avons reçu pour chaque égalité donnée (1) les deux résultats opposés d'élimination de la lettre a, savoir: $GH=0$ et $G+H=0$. Montrons à présent que ces deux résultats sont *complets*. Pour cela il suffit de dévoiler que la lettre a ne peut plus être éliminée ni dans la seconde de deux égalités (2), ni dans la seconde de deux égalités (3). Mais cela est ainsi, car les transformations de la première de ceux deux égalités dans un système et de la seconde dans une alternative, les transformations faites parfaitement ainsi comme nous avons transformée plus haut l'égalité donnée (1), nous donneront: 1°, le système

$$(0=GH_0.G_0H=0,\ 0=aGH_0+a_0G_0H)$$

qui ne différt en rien de la seconde de deux égalités (2) et 2°, l'alternative

$$[0=(G+H_0)+(G_0+H)=1;\ 0=a(G+H_0)+a_0(G_0+H)]$$

qui ne différt en rien de la seconde de deux égalités (3). Evidemment, cela signifie que les deux égalités $GH=0$ et $G+H=0$ sont les résultats *complets* d'élimination de a dans l'égalité donnée (1). Quant aux résultats *incomplets*, nous pouvons les épuiser en égalant au zéro chaque subclasse de la fonction GH et chaque superclasse de la fonction $G+H$.

Revenons aux résultats complets qui sont $GH=0$ et $G+H=0$. Le premier d'eux est discité par moi en détail dans le chapitre XI Mais le second, c'est à dire l'égalité $G+H=0$, est un fait nouvel à l'exploration duquel est consacré le chapitre présent.

Digitized by Google

De ce qui précéde nous voyons que pour éliminer dans une égalité de la forme $N=0$ l'une de ses lettres a afin de recevoir l'une de causes de cette égalité il faut: réduire l'égalité donnée à la forme $Ga+Ha_0=0$, où G et H ne dépendent point de a, et changer les symboles a et a_0 en 1. Donc, pour l'égalité générale

$$N(a,\ b,\ c,\ d,\ldots.)=0,\ldots. \qquad (4)$$

que nous pouvons réduire à l'aide de développements à la forme

$$aN(1,\ b,\ c,\ d,\ldots)+a_0N(0,\ b,\ c,\ d,\ldots)=0.\ldots. \qquad (5)$$

et aussi à la forme

$$[a+N(0,\ b,\ c,\ d,\ldots)][a_0+N(1,\ b,\ c,\ d,\ldots)]=0,\ldots \qquad (6)$$

le résultat complet d'élimination *) de a est évidemment:

$$N(1,\ b,\ c,\ d,\ldots)+N(0,\ b,\ c,\ d,\ldots)=0.\ldots. \qquad (7)$$

D'où cette règle générale: pour éliminer complètement la lettre quelconque a dans l'égalité de la forme (4), il faut: 1°, développer la fonction N relativement à a ou dans les minimals de cette lettre ou dans ses maximals, après quoi l'égalité donnée prend ou la forme (5) ou la forme (6), et 2°, ou substituer l'unité au lieu de symboles a et a_0 dans la forme (5) ou égaler au zéro la somme des coopérants des maximals de la forme (6).

Supposons à présent que l'égalité donnée est de la forme:

$$M(a,\ b,\ c,\ d,\ldots)=1.\ldots. \qquad (4^*)$$

Les deux développements de la fonction M relativement à la lettre a donnent à cette égalité la forme

$$aM(1,\ b,\ c,\ d,\ldots)+a_0M(0,\ b,\ c,\ d,\ldots)=1.\ldots. \qquad (5^*)$$

*) Ici, comme partout plus loin dans ce chapitre, nous devons sousentendre que le mot «élimination» désigne l'élimination qui nous conduit à l'une de causes de l'égalité donnée.

Digitized by Google

et la forme

$$[a+M(0, b, c, d, \ldots)][a_0+M(1, b, c, d, \ldots)]=1\ldots. \quad (6^*)$$

De l'autre côté, l'égalité (4*) est équivalente à l'égalité:

$$M_0(a, b, c, d, \ldots)=0.$$

Donc le résultat complet d'élimination de a dans l'égalité (4*) est:

$$M_0(1, b, c, d, \ldots)+M_0(0, b, c, d, \ldots)=0,$$

ou, ce qui est la même chose:

$$M(1, b, c, d, \ldots)M(0, b, c, d, \ldots)=1\ldots. \quad (7^*)$$

De là cette seconde règle générale: pour éliminer complètement la lettre quelconque a dans l'égalité de la forme (4*), il faut: 1°, développer la fonction M relativement à a ou dans les minimals de cette lettre ou dans ses maximals, après quoi l'égalité (4*) prend ou la forme (5*) ou la forme (6*) et puis, 2°, ou égaler à l'unité le produit des coefficients des minimals de la forme (5*) ou substituer le zéro au lieu de a et de a_0 dans la forme (6*).

Ces deux règles admettent la généralisation. En effet: 1°, l'élimination de b dans l'égalité (7) nous donne d'après l'une de ces règles:

$$N(1, 1, c, d, \ldots)+N(1, 0, c, d, \ldots)+N(0, 1, c, d, \ldots)+ \\ +N(0, 0, c, d, \ldots)=0, \ldots. \quad (8)$$

et 2°, l'élimination de b dans l'égalité (7*) nous donne d'après l'autre de mêmes règles:

$$M(1, 1, c, d, \ldots)M(1, 0, c, d, \ldots)M(0, 1, c, d, \ldots). \\ . M(0, 0, c, d, \ldots)=1\ldots. \quad (8^*)$$

Les deux règles exprimées par les formules (8) et (8*) sont:

Digitized by Google

1°, Pour éliminer dans l'égalité de la forme (4) les deux lettres a et b à la fois, il faut d'abord développer la fonction N relativement à a et à b ou dans les minimals de ces deux lettres ou dans leurs maximals, ce qui nous donne ou l'égalité de la forme:

$$abN(1, 1, c, d, \ldots) + ab_0N(1, 0, c, d, \ldots) + a_0bN(0, 1, c, d, \ldots) + \\ + a_0b_0N(0, 0, c, d, \ldots) = 0, \ldots \quad (9)$$

ou l'égalité de la forme:

$$[a+b+N(0, 0, c, \ldots)][a+b_0+N(0, 1, c, \ldots)][a_0+b+ \\ +N(1, 0, c, \ldots)][a_0+b_0+N(1, 1, c, \ldots)] = 0, \ldots \quad (10)$$

et puis ou changer en 1 dans la formule (9) tous les quatre symboles a, a_0, b, b_0, ou égaler au zéro la somme des coopérants des maximals de la formule (10).

2°, Pour éliminer complètement dans l'égalité de la forme (4*) les deux lettres quelconques a et b à la fois, il faut d'abord développer la fonction M relativement à a et à b ou dans les minimals de ces deux lettres ou dans leurs maximals, ce qui nous donne ou l'égalité de la forme

$$ab\boldsymbol{M}(1, 1, c, ..) + ab_0\boldsymbol{M}(1, 0, c, ..) + a_0b\boldsymbol{M}(0, 1, c, ..) + \\ + a_0b_0\boldsymbol{M}(0, 0, c, ..) = 1, \ldots . \quad (9^*)$$

ou l'égalité de la forme:

$$[a+b+\boldsymbol{M}(0, 0, c, ..)][a+b_0+\boldsymbol{M}(0, 1, c, ..)][a_0+b+ \\ +\boldsymbol{M}(1, 0, c, ..)][a_0+b_0+\boldsymbol{M}(1, 1, c, ..)] = 1, \ldots . \quad (10^*)$$

et puis ou égaler à l'unité le produit des coefficients des minimals de la formule (9*) ou substituer le zéro au lieu de chacun des quatre symboles a, a_0, b et b_0 dans la formule (10*).

Digitized by Google

Il n'y a pas des doute que ces deux règles présentent le premier degré de généralisation des règles d'élimination d'une seule lettre et qu'elles peuvent être étendues plus loin aux cas d'élimination de trois lettres, de quatre lettres et ainsi de suite.

Dans la pratique les classes N et M sont presque toujours les polynômes (et non pas les polyfacteurs) et leurs développements se font dans les minimals (et non pas dans les maximals). A ces causes pour la pratique nous n'avons que ces deux règles:

1°, Pour éliminer complètement dans l'égalité de la forme $N=0$ quelques de ses lettres $p, q, r, \ldots$, il faut développer la fonction N dans les minimals de ces lettres et changer en 1 tous les symboles simples $p, p_0, q, q_0, \ldots$

2°, Pour éliminer complètement dans l'égalité de la forme $M=1$ quelques de ses lettres, il faut développer la fonction M dans les minimals de ces lettres et égaler à l'unité le produit de tous les coefficients de ce développement.

Regardons à présent: est—il nécessaire de développer préalablement les fonctions N et M dans les minimals?

Prenons d'abord l'égalité du type $M=1$ et supposons que la fonction M n'est pas développée dans les minimals de la lettre à éliminer a. En ce cas l'égalité $M=1$ doit être de la forme:

$$1=Pa+Qa_0+R,$$

où P, Q, R sont les fonctions qui ne dépendent point de la lettre a. En y éliminant d'après la règle générale la lettre a, pour le résultat complet d'élimination nous aurons finalement:

$$1=(P+R)(Q+R)=R+PQ.$$

Digitized by Google

D'où cette règle spéciale pour le cas considéré: égaler à l'unité la somme composée: 1^0, du terme indépendant de symboles a et a_0 et 2^0, du produit des coefficents de a et de a_0. En particulier, pour l'égalité de la forme $1=Pa+R$ ou de la forme $1=Qa_0+R$ le résultat complet d'élimination de a est $R=1$; pour l'égalité de la forme $1=Pa$ ou de la forme $1=Qa_0$ le résultat complet d'élimination de a est l'absurdité $1=0$. Dans ces deux derniers cas l'égalité donnée n'a point de cause indépendante de a, outre la cause extrême $1=0$.

Ce qui précéde nous moutre que pour l'égalité du type $M=1$ la règle générale donnée plus haut exige nécessairement que la fonction M soit préalablement développée en les minimals, car si cette condition est violée, la règle générale doit être remplacée par les règles spéciales.

Une autre chose se présente pour l'autre règle générale construite pour l'égalité du type $0=N$. Nous pouvons montrer qu'en ce cas le développement préalable de N dans les minimals n'est point nécessaire. En effet, pour l'égalité

$$0=Aa+Ba_0+C, \ldots . \qquad (11)$$

où la fonction N n'est pas développée relativement à a, la règle générale nous donnera d'abord

$$0=a(A+C)+a_0(B+C)$$

et puis finalement

$$0=(A+C)+(B+C)=A+B+C. \ldots . \qquad (12)$$

Ce résultat complet d'élimination (12) se déduit de l'égalité donnée (11) à l'aide du simple changement de a et de a_0 en 1, c'est à dire conformément à la règle générale, mais sans le développement préalable de la fonction N.

Digitized by Google

Il n'y a pas de doute que l'élimination d'une autre lettre b dans l'égalité (12) s'effectuera à l'aide de simple changement de b et de b_0 en 1 et que nous pouvons déduire ce résultat de l'égalité (11) par le changement de quatres symboles a, a_0, b, b_0 en 1. Et ainsi de suite. Donc, finalement la règle d'élimination des lettres pour l'égalité du type $N=0$ prendra cette forme simple: pour éliminer dans l'égalité $N=0$ quelques i lettres p, q, r, . . . , il suffit de changer en 1 tous les $2i$ symboles p, p_0, q, q_0,....

Il est facile à voir que les règles d'élimination ci—données pour recevoir quelques causes des égalités sont totalement inverses aux régles d'élimination construites dans le chapitre XI afin de recevoir quelques conséquences des égalités.

Exemples:

1°, Pour l'égalité $0=ac+bc_0$ les résultats d'élimination qui servent de causes de cette égalité sont:

$$0=c+b,\ 0=c_0+a,\ 0=a+b,$$

tandis que les résultats qui servent de ses conséquences sont:

$$0=bc_0,\ 0=ac,\ 0=ab.$$

2°, Au contraire, pour l'égalité opposée à la précédente, c'est à dire pour l'égalité $1=ac+bc_0$ nous avons:

les résultats qui servent de ses causes:

$$1=bc_0,\ 1=ac,\ 1=ab,$$

et les résultats qui servent de ses conséquenses:

$$1=c+b,\ 1=c_0+a,\ 1=a+b.$$

Digitized by Google

3°, Pour l'égalité $0=bd+c_0d_0+ab_0cd$ tous les deux résultats complets d'élimination de lettres a et b à la fois sont:

le résultat qui est la cause: $0=d+c_0d_0+cd=c_0+d$,

le résultat qui est la conséquence: $0=c_0d_0$.

4°, Enfin, pour l'égalité $1=bd+c_0d_0+ab_0cd$ opposée à la précédente les deux résultats correspondants sont: $1=c_0d_0$ et $1=c_0+d$.

Revenons de nouveau spécialement aux résultats complets d'élimination qui servent de causes. Pour atteindre notre but qui est la construction de la loi générale correspondante, il ne nous reste qu'à trouver les règles d'élimination des lettres pour l'égalité du type le plus général qui est $U=UA+U_0B$.

Il est à observer qu'ici, semblablement à ce que nous avons eu dans le chapitre XI, le seul cas praticable est le cas où nous ne devons éliminer dans cette égalité générale $U=UA+U_0B$ que les lettres qui entrent en A et en B et n'entrent point en U, c'est à dire les lettres l'élimination desquelles ne peut pas violer la structure de la fonction donnée U.

Vu que l'égalité $U=UA+U_0B$ est équivalente au système $U=UA$, $U=U+B$ et aussi au système $1=U_0+A$, $0=U_0B$, supposons que les deux résultats d'élimination de quelques des lettres qui entrent en A et en B et n'entrent point en U respectivement sont (d'après les deux règles données plus haut):

$$1=A' \text{ pour l'égalité } 1=A$$
$$\text{et } 0=B' \text{ pour l'égalité } 0=B.$$

Mais, par condition, les lettres à éliminer n'entrent point ni en U, ni en U_0. Donc les résultats des éliminations de ces lettres seront:

$$1=A'+U_0 \text{ pour l'égalité } 1=A+U_0$$
$$\text{et } 0=B'U_0 \text{ pour l'égalité } 0=BU_0.$$

Digitized by Google

Par conséquent pour le système $U=UA$, $U=U+B$ le complet résultat d'élimination considérée s'exprimera par le système $U=UA'$, $U=U+B'$, ce qui signifie que pour l'égalité du type général $U=UA+U_0B$ le complet résultat d'élimination mentionnée sera présenté par l'égalité $U=UA'+U_0B'$, où A' et B' se déduisent de A et de B conformément à ce qui est dit plus haut.

Finalement nous pouvons formuler ainsi *la seconde loi d'élimination des lettres dans les égalités logiques:* pour éliminer dans l'égalité générale $U=UA+U_0B$, afin de recevoir l'une de ses causes, quelques lettres p, q, r, ... qui n'entrent point en U, il faut: 1°, remplacer la fonction A par le produit de tous les coefficents du développement de A dans les minimals de toutes les lettres à éliminer p, q, r, ... et 2°, remplacer en B par l'unité chacun des symboles simples p, p_0, q, q_0, ...

Cette loi est totalement inverse à *la première loi d'élimination* exposée dans le chapitre XI.

Exemple 1. Eliminer complètement b dans l'égalité

$$a=ab_0c+a_0(b+d).$$

Le résultat qui est la cause de cette égalité évidemment est:

$$a=a.0+a_0(1+d)=a_0,$$

tandis que le résultat qui est la conséquence de la même égalité sera:

$$a=a.1.c+a_0d=ac+a_0d.$$

Exemple 2. En éliminant a dans l'égalité $bc=a+b$ ou, ce qui est la même chose, dans l'égalité

$$bc=bc(a+b)+(b_0+c_0)(a+b),$$

Digitized by Google

nous aurons pour le résultat qui est sa cause:

$$bc=bc.b+(b_0+c_0).1=1$$

et pour le résultat qui est sa conséquence:

$$bc=bc(1+b)+(b_0+c_0)b=bc+bc_0=b.$$

Exemple 3. En éliminant c dans la même égalité que nous pouvons présenter ainsi:

$$a+b=(a+b)bc+a_0b_0.bc,$$

nous aurons pour le résultat qui est sa cause:

$$a+b=(a+b).0+a_0b_0.b=0$$

et pour le résultat qui est sa conséquence:

$$a+b=(a+b)b+a_0b_0.0=b.$$

Semblablement à ce que nous avons vu dans le chapitre XI, le *nombre total* des complets résultats d'élimination de la sorte ici considérée dans une égalité ayant n lettres doit s'égaler à 2^n. A ce nombre nous insérons aussi: 1°, le résultat de non-élimination qui n'est autre chose que l'égalité donnée et 2°, le résultat d'élimination de toutes ses n lettres qui est toujours une absurdité $1=0$. Quelques de ces 2^n résultats coïncident les uns avec les autres; beaucoup d'eux sont les absurdités.

Exemple. Trouver tous les seize complets résultats d'élimination de la seconde sorte pour l'égalité

$$0=bd+c_0d_0+ab_0cd$$

dont tous les seize complets résultats d'élimination de la première sorte sont donnés dans le chapitre XI.

Digitized by Google

Les dix résultats des éliminations sont en ce cas les absurdités $0=1$. Les six résultats restants évidemment sont: 1°, le résultat de non-élimination—l'égalité donnée; 2°, le résultat d'élimination de a: $0=bd+c_0d_0+b_0cd$; 3°, de b: $0=c_0+d$; 4°, de c: $0=a+b+d_0$; 5°, de d: $0=a+b+c_0$; enfin, 6°, de a et de b: $0=c_0+d$. Ici le résultat 3° coïncide avec le résultat 8°.

Sur la fin de ce chapitre il est à observer que, semblablement aux résultats masqués d'elimination de la première sorte, ils doivent aussi exister *les résultats masqués* d'élimination de la seconde sorte ici considérée. Nous rencontrons souvent cette sorte des résultats d'élimination en construisant toutes les causes des égalités données. Si toutes les causes d'une égalité contenante n lettres doivent avoir la forme des détermination d'une fonction de quelques $n-i$ de ces lettres, alors chaque résultat d'élimination de la seconde sorte dans l'égalité donnée de quelques de ces $n-i$ lettres, étant aussi l'une de ses causes, doit être nécessairement masqué. Chaque résultat masqué doit avoir la forme de la détermination fictive $P=PQ+P_0Q_0$ dont la vraie valeur est $Q_0=0$. Par exemple, pour l'égalité $0=ax+bx_0$ l'une de ses causes principales est l'égalité $x=xa_0b_0+x_0(a+b)$ qui présente la détermination fictive de x et le résultat masqué d'élimination de x dans l'égalité donnée, car la vraie valeur de cette cause est évidemment $0=a+b$. Un autre exemple: pour les prémisses du syllogisme Barbara, c'est à dire pour le système $a=ab$, $b=bc$, nous avons trouvée dans le chapitre XLIV la cause $a=abc+$ $+a_0(b_0+c_0)$ qui présente le résultat masqué d'élimination de a dans les prémisses données, car la vraie valeur de cette cause est $0=b_0+c_0$.

Digitized by Google

Chapitre LV.

La loi des causes principales. Seconde forme de la loi des conséquences principales. Exemple.

Dans le chapitre XX j'ai proposée la formule simple:

$$U = U\xi + U_0\eta \ldots\ldots \quad (1)$$

qui exprime la loi des conséquences principales pour chaque problème $1 = M$ et qui est soumise à la condition que les valeurs des classes arbitraires ξ et η soient renfermées dans les deux séries suivantes:

$$1; p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots, p^{(m-s)}; p^{(1)}p^{(2)}, p^{(1)}p^{(3)}, \ldots, p^{(1)}p^{(2)}\ldots p^{(m-s)}\ldots \quad (2)$$

$$0; k^{(1)}, k^{(2)}, \ldots, k^{(s)}; k^{(1)}+k^{(2)}, k^{(1)}+k^{(3)}, \ldots, k^{(1)}+k^{(2)}+\ldots+k^{(s)}\ldots (3)$$

en supposition que les m éléments de compréhension du problème donné $1 = M$, divisés dans les deux groupes différents, sont:

$$U = Up^{(1)},\ U = Up^{(2)}, \ldots,\ U = Up^{(m-s)}, \ldots. \quad (4)$$

$$U = U + k^{(1)},\ U = U + k^{(2)}, \ldots,\ U = U + k^{(s)}\ldots\ldots \quad (5)$$

Ici je veux construire une autre formule, analogue à la formule (1) et exprimant toutes les causes principales de la même égalité générale $1 = M$.

Dans le chapitre XXIX j'ai montré que toutes les causes principales de l'égalité $1 = M$ se déduisent de l'égalité:

$$U = UM\xi + U_0(M_0 + \eta), \ldots. \quad (6)$$

ou, ce qui est la même chose, du système:

$$U = UM\xi,\ U = U + M_0 + \eta\ldots\ldots \quad (7)$$

Digitized by Google

pour les valeurs de ξ et de η données par les séries:

$$1;\ K_0^{(1)},\ K_0^{(2)},\ \ldots,\ K_0^{(i-m+s)};\ K_0^{(1)}K_0^{(2)},\ K_0^{(1)}K_0^{(3)},\ \ldots,$$
$$K_0^{(1)}K_0^{(2)}\ldots\ K_0^{(i-m+s)}\ldots\ . \qquad (8)$$

$$0;\ P_0^{(1)},\ P_0^{(2)},\ \ldots,\ P_0^{(\overset{n}{2}-i-s)};\ P_0^{(1)}+P_0^{(2)},\ P_0^{(1)}+P_0^{(3)},\ \ldots,$$
$$P_0^{(1)}+P_0^{(2)}+\ldots+P_0^{(\overset{n}{2}-i-s)},\ \ldots\ . \qquad (9)$$

construites en supposition que les 2^n-m éléments de compréhension de l'égalité $0=M$ opposée à l'égalité donnée $1=M$ sont:

$$U=UK_0^{(1)},\ U=UK_0^{(2)},\ \ldots,\ U=UK_0^{(i-m+s)},\ \ldots\ . \qquad (10)$$

$$U=U+P_0^{(1)},\ U=U+P_0^{(2)},\ \ldots,\ U=U+P_0^{(\overset{n}{2}-i-s)},\ \ldots \qquad (11)$$

où nous supposons que n est le nombre des lettres de l'égalité donné, i est le nombre des minimals de la fonction U.

La formule (6) ne peut pas nous satisfaire en ce moment, parce qu'elle exprime non seulement toutes les causes principales de l'égalité $1=M$, mais aussi toutes ses causes généralement. Voilà pourquoi nous devons chercher une autre formule n'exprimant que les causes principales spécialement.

Il est clair que si les 2^n-m éléments de compréhension de l'égalité opposée $0=M$ sont (10) et (11), alors les 2^n-m éléments d'extension de l'égalité donnée $1=M$ doivent être:

$$U=U_0+K^{(1)},\ U=U_0+K^{(2)},\ \ldots,\ U=U_0+K^{(i-m+s)},\ \ldots \qquad (12)$$

$$U=U_0P^{(1)},\ U=U_0P^{(2)},\ \ldots,\ U=U_0P^{(\overset{n}{2}-i-s)}\ \ldots\ . \qquad (13)$$

S'il en est ainsi, il n'est pas difficile de se convaincre que, pour tirer de la même formule (6) ou du système (7) toutes les $2^{\overset{n}{2}-m}$ causes principales de l'égalité donnée $1=M$,

Digitized by Google

nous pouvons aussi prendre pour ξ et pour η, au lieu des valeurs données par les séries (8) et (9), les valeurs renfermées dans les séries suivantes:

$$0;\ K^{(1)},\ K^{(2)},\ \ldots,\ K^{(i-m+s)};\ K^{(1)}+K^{(2)},\ K^{(1)}+K^{(3)},\ \ldots,$$
$$K^{(1)}+K^{(2)}+\ldots+K^{(i-m+s)},\ \ldots. \qquad (14)$$

$$1;\ P^{(1)},\ P^{(2)},\ \ldots,\ P^{(2^n-i-s)};\ P^{(1)}P^{(2)},\ P^{(1)}P^{(3)},\ \ldots,$$
$$P^{(1)}P^{(2)}\ldots.\ P^{(2^n-i-s)}\ldots. \qquad (15)$$

Pour cela il suffit de montrer que les 2^{i-m+s} classes (14), étant prises consécutivement pour ξ, nous donnent les valeurs différentes de la fonction $UM\xi$ et que les 2^{2^n-i-s} classes (15), étant prises consécutivement pour η, nous donnent les valeurs différentes de la fonction $U+M_0+\eta$.

Dans ce but nous démontrerons que si les valeurs de ξ sont renfermées dans la série (14) et les valeurs de η dans la série (15), alors le produit $UM\xi$ est égal à ξ et la somme $U+M_0+\eta$ est égale à η. Mais cela est ainsi, car tous les $i-m+s$ minimals précédents $K^{(1)}, K^{(2)}, \ldots, K^{(i-m+s)}$ sont les minimals de la fonction UM et tous les 2^n-i-s maximals précédents $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots, P^{(2^n-i-s)}$ sont les maximals de la somme $U+M_0$. S'il en est ainsi, la loi générale des causes (6) doit se transformer dans la formule simple:

$$U=\xi+U_0\eta, \ldots. \qquad (16)$$

qui doit fournir pour les valeurs (14) et (15) de ξ et de η le nombre $2^{2^n-i-s}.\ 2^{i+s-m}=2^{2^n-m}$ des valeurs différentes de U, c'est à dire toutes les causes principales de l'égalité donnée $1=M$.

Digitized by Google

Nous recevrons la même formule (16) par une autre voie, de la manière suivante. Les conditions $UM\xi=\xi$ et $U+M_{,}+$ $+\eta=\eta$ transforment le système (7) dans le système: $U=\xi$, $U=\eta$ ou, ce qui est la même chose, dans l'égalité seule $U=U\xi\eta+U_0(\xi+\eta)$ qui coïncide avec la formule (16), car en ce cas $\xi\eta=\xi$, $U\xi=\xi$, $\xi+\eta=\eta$.

La formule (16) exprime évidemment *la loi des causes principales* avec la condition que ξ et η aient les valeurs (14) et (15).

Vu qu'en ce cas $U\xi=\xi$, la formule (16) peut aussi être présentée tellement:

$$U=U\xi+U_0\eta,$$

après quoi elle prend la même forme que la loi des conséquences principales (1).

D'où nous concluons que: 1°, la même formule (1) exprime les deux lois considérées, c'est à dire la loi des causes principales et la loi des conséquences principales, et 2°, la première de ces deux lois s'exprime aussi par la formule spéciale (16).

Afin de trouver la formule spéciale exprimant la seconde de deux lois mentionnées, il suffit d'observer que pour les valeurs de η données par la série (3) nous avons toujours identiquement $U_0\eta=\eta$, après quoi la formule générale (1) se transforme dans la formule spéciale:

$$U=\eta+U\xi. \ldots . \qquad (17)$$

Finalement nous pouvons dire que: 1°, la loi des causes principales s'exprime par chacune des formules (1) et (16) en supposition que les valeurs de ξ et de η sont renfermées dans les séries (14) et (15) et 2°, la loi des conséquences

Digitized by Google

prineipales s'exprime par chacune des formules (1) et (17) en supposition que les valeurs de ξ et de η sont renfermées dans les séries (2) et (3).

Exemple. Trouver par la méthode de ce chapitre sous forme de déterminations de b toutes les causes principales et toutes les conséquences principales pour l'égalité $a=bc$.

Cette égalité a les éléments:

1°, de compréhension: $0=ab_0c$, $0=abc_0$, $0=ab_0c_0$, $0=a_0bc$,

et 2°, d'extension: $0=a+b+c$, $0=a+b+c_0$, $0=a+b_0+c$,

$$0=a_0+b_0+c_0,$$

ou sous forme de déterminations de b:

$$1°,\ b=b+ab_0c,\ b=b(a_0+b_0+c),\ b=b+ab_0c_0,$$
$$b=b(a+b_0+c_0),$$
$$2°,\ b=b_0(a+b+c),\ b=b_0(a+b+c_0),\ b=b_0+a_0bc_0,$$
$$b=b_0+abc.$$

Les séries (2), (3), (14) et (15) seront en ce cas:

$1;\ a_0+b_0+c,\ a+b_0+c_0;\ b_0+ac+a_0c_0, \ldots .$ (2*)

$0;\ ab_0c,\ ab_0c_0;\ ab_0, \ldots .$ (3*)

$0;\ a_0bc_0,\ abc;\ b(a_0c_0+ac) \ldots .$ (14*)

$1;\ a+b+c,\ a+b+c_0;\ a+b \ldots .$ (15*)

En multipliant toutes les classes de la première de ces quatre séries par b et toutes les classes de la quatrième par b_0 nous aurons:

$b,\ b(a_0+c),\ b(a+c_0),\ b(ac+a_0c_0), \ldots .$ (2**)

$0,\ ab_0c,\ ab_0c_0,\ ab_0, \ldots .$ (3**)

$0,\ a_0bc_0,\ abc,\ b(a_0c_0+ac), \ldots .$ (14**)

$b_0,\ b_0(a+c),\ b_0(a+c_0),\ b_0a \ldots .$ (15**)

En ajoutant consécutivement toutes les classes de la série (2**) aux toutes les classes de la série (3**) et en égalant

Digitized by Google

chaeune de ces sommes à b, nous recevrons toutes les seize conséquences principales de l'égalité donnée $a=bc$. De même, en ajoutant consécutivement toutes les classes de la série (14**) aux toutes les classes de la série (15**) et en égalant chacune de ces sommes à b, nous recevrons toutes les seize causes principales de la même égalité donnée. Nous aurons:

I, les conséquences principales:

1^0, $b=b+0=b$,
2^0, $b=b+ab_0c=b+ac$,
3^0, $b=b+ab_0c_0=b+ac_0$,
4^0, $b=b+ab_0=b+a$,
5^0, $b=b(a_0+c)+0=b(a_0+c)$,
6^0, $b=b(a_0+c)+ab_0c=ac+ba_0$,
7^0, $[b=b(a_0+c)+ab_0c_0]=(ac_0=0)$,
8^0, $b=b(a_0+c)+ab_0=ac+ba_0+b_0ac_0$,
9^0, $b=b(a+c_0)+0=b(a+c_0)$,
10^0, $b=b(a+c_0)+ab_0c=ac+bc_0$,
11^0, $b=b(a+c_0)+ab_0c_0=ac_0+b(ac+a_0c_0)$,
12^0, $b=b(a+c_0)+ab_0=a+ba_0c_0$,
13^0, $b=b(ac+a_0c_0)+0=b(ac+a_0c_0)$,
14^0, $b=b(ac+a_0c_0)+ab_0c=ac+ba_0c_0$,
15^0, $b=b(ac+a_0c_0)+ab_0c_0$,
16^0, $b=b(ac+a_0c_0)+ab_0=ac+ba_0c_0+b_0ac_0$;

II, les causes principales:

1^0, $b=0+b_0=b_0$,
2^0, $b=0+b_0(a+c)=b_0(a+c)$,
3^0, $b=0+b_0(a+c_0)=b_0(a+c_0)$,
4^0, $b=0+b_0a=b_0a$,
5^0, $b=ba_0c_0+b_0=b_0+a_0c_0$,

Digitized by Google

6^0, $[b=ba_0c_0+b_0(a+c)]=(a+c=0)$,
7^0, $b=ba_0c_0+b_0(a+c_0)=a_0c_0+b_0a$,
8^0, $b=ba_0c_0+b_0a$,
9^0, $b=bac+b_0=b_0+ac$,
10^0, $b=bac+b_0(a+c)=ac+b_0(ac_0+a_0c)$,
11^0, $b=bac+b_0(a+c_0)=ac+b_0c_0$,
12^0, $b=bac+b_0a=ac+b_0ac_0$,
13^0, $b=b(a_0c_0+ac)+b_0=b_0+ac+a_0c_0$,
14^0, $b=b(a_0c_0+ac)+b_0(a+c)=ac+ba_0c_0+b_0(ac_0+a_0c)$,
15^0, $b=b(a_0c_0+ac)+b_0(a+c_0)=ac+a_0c_0+b_0ac_0$,
16^0, $b=b(a_0c_0+ac)+b_0a=ac+ba_0c_0+b_0ac_0$.

Chapitre LVI.

Les résultats d'élimination de la seconde sorte traités comme les causes principales.

Dans le chapitre XXI j'ai exposé l'une de méthodes possibles pour recevoir tous les complets résultats d'élimination de la première sorte d'après la loi des conséquences principales. Ici je veux indiquer l'une de méthodes possibles pour recevoir tous les complets résultats d'élimination de la seconde sorte d'après la loi des causes prìncipales.

Prenons la formule spéciale des causes principales:

$$U=\xi+U_0\eta,\ldots. \qquad (1)$$

où ξ et η ont les valeurs renfermées dans les séries (14) et (15) du chapitre précédent.

En laissant la série (14) invariable et en multipliant toutes les classes de la série (15) par U_0, nous aurons les deux séries:

$$0;\ K^{(1)},\ K^{(2)},\ldots,\ K^{(i-m+s)};\ K^{(1)}+K^{(2)},\ K^{(1)}+K^{(3)},\ldots,$$
$$K^{(1)}+K^{(2)}+\ldots+K^{(i-m+s)}.\ldots. \qquad (2)$$

Digitized by Google

$$U_0;\ U_0P^{(1)},\ U_0P^{(2)},\ \ldots,\ U_0P^{(\overset{n}{2}-i-s)};\ U_0P^{(1)}P^{(2)},\ U_0P^{(1)}P^{(3)},\ \ldots,$$
$$U_0P^{(1)}P^{(2)}\ldots\ P^{(\overset{n}{2}-i-s)}\ldots\ldots \qquad (3)$$

Donc la formule des causes principales (1) peut être remplacée par la formule:

$$U=V+W,\ldots. \qquad (4)$$

où V est l'une de classes de la série (2), W est l'une des classes de la série (3).

Nous appliquerons la formule (4) à la recherche relativement à l'égalité $1=M$, en forme de déterminations de U, de tous les résultats complets d'élimination (de la seconde sorte) des lettres qui n'entrent point dans l'expression de U.

En constatant, à l'aide des jugements analogues aux ceux du chapitre XXI, le fait de l'existence possible pour chaque problème des quelques résultats d'elimination de chaque lettre, nous ne considérerons ici que les résultats complets.

Supposons que les séries (2) et (3) sont composées regulièrement et successivement, c'est à dire: les combinaisons binaires sont données là plut tôt que les combinaisons triples, ces dernières plus tôt que les combinaisons quadruples et ainsi de suite. Supposons encore que les dernières classes indépendantes des lettres à éliminer qui n'entrent point dans l'expression de U sont: dans la série (2) la classe G et dans la série (3) la classe U_0H. Alors le résultat complet d'élimination demandée sera évidemment $U=G+U_0H$. En particulier, si la fonction U est l'une de classes simples, par exemple a, alors pour construire le résultat masqué d'élimination de a il suffit de prendre dans les séries (2) et (3) pour V et W les classes où les coéfficients de a et de a_0 sont les négations mutuelles.

Digitized by Google

Exemple. Trouver en forme de déterminations de b tous les résultats complets d'élimination de la seconde sorte pour l'égalité $a=bc$, pour laquelle tous les résultats complets d'élimination de la première sorte sont trouvés dans le chapitre XXI.

De ce qui est donné dans le chapitre précédent (LV) nous voyons qu'en ce cas les séries (2) et (3) sont respectivement:

$$0,\ abc,\ a_0bc_0,\ b(ac+a_0c_0),\ \ldots\ldots \qquad (2^*)$$

$$b_0,\ b_0(a+c),\ b_0(a+c_0),\ b_0a\ldots\ldots \qquad (3^*)$$

Toutes les causes principales de l'égalité donnée $a=bc$ seront épuisées en égalant b à la somme de chacune des classes de la série (2*) avec chacune des classes de la série (3*). Mais ici nous ne devons construire que celles des causes qui sont les résultats complets d'élimination de la seconde sorte dans l'égalité donnée. Vu que cette égalité n'a que trois lettres, on doit avoir les 2^3 résultats complets d'élimination des lettres de la seconde sorte (aussi bien que de la première sorte). Nous les trouverons tous, en forme demandée des déterminations de b, consécutivement. Quelques de ces résultats doivent coïncider les uns avec les autres.

1°. Le résultat de non—élimination des lettres doit, comme toujours, coïncider avec la détermination complète de la fonction prise pour U. Dans notre cas ce résultat est évidemment:

$$b=b(ac+a_0c_0)+b_0a.$$

2°. Pour éliminer complètement la lettre a, il faut prendre dans les séries (2*) et (3*) les dernières des classes indépendantes de a. Telles classes sont 0 et b_0 respectivement. Par conséquent le résultat complet d'élimination de a dans le

Digitized by Google

problème donné est l'absurdité $b=0+b_0=b_0$. Cela désigne que la lettre a ne pout point être éliminée du problème.

3°, 4° et 5°. S'il en est ainsi, les trois résultats des éliminations: de a et de b, de a et de c, et de a, de b et de c doivent aussi coïncider avec l'absurdité $b=b_0$.

6°. Pour éliminer complètement la lettre c, il faut prendre dans les séries (2*) et (3*) les dernières des classes indépendantes de c. Donc, il faut poser: $V=0$, $W=b_0a$, et nous aurons: $b=b_0a$.

7°. Pour éliminer complétement la lettre b, il faut construire la détermination fictive de b. Dans ce but il faut prendre dans les séries (2*) et (3*) pour V et W les classes, où les coefficients de b et de b_0 sont les négations mutuelles. Telles classes évidemment sont: a_0bc_0 et $b_0(a+c)$. Donc le résultat masqué d'élimination de b sera: $b=ba_0c_0+b_0(a+c)$. La vraie valeur de cette égalité est: $a+c=0$.

Enfin, 8°, le résultat d'élimination de b et de c à la fois s'obtient en prenant $V=0$, $W=b_0$ et nous aurons de nouveau l'absurdité $b=b_0$.

(A. suivre).

P. Poretsky.

Digitized by Google

Второй дифференціальный параметръ квадратичной въ дифференціалахъ формы n независимыхъ перемѣнныхъ.

Въ послѣдующемъ предлагается достаточно простой выводъ второго дифференціальнаго параметра квадратичной въ дифференціалахъ формы n независимыхъ перемѣнныхъ [1].

Пусть имѣется квадратичная въ дифференціалахъ форма n перемѣнныхъ x_i $(i=1,2,3 \ldots n)$:

$$f=\sum_{r,s} a_{rs}dx_r dx_s \qquad (a_{rs}=a_{sr}),$$

которая формулами преобразованія:

$$x_i=x_i\ (x_1',x_2',x_3',\ldots x_n') \qquad (i=1,2,3 \ldots n)$$

переводится въ

$$f'=\sum_{r,s} a'_{rs}dx'_r dx'_s.$$

---

[1] Насколько я могу судить изъ письма ко мнѣ профессора Luigi Bianchi, которому я сообщалъ свой выводъ, онъ имѣетъ общее съ соотвѣтствующимъ пріемомъ Beltrami; но въ чемъ сходство и разница обоихъ пріемовъ —мнѣ неизвѣстно, потому-что достать «Atti dell'Accademia di Bologna, 1869», гдѣ помѣщенъ мемуаръ Beltrami, я не имѣлъ возможности.

Digitized by Google

Если обозначимъ:

$$H^2 = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$H'^2 = \begin{vmatrix} a_{11}'a_{12}'\ldots a_{1n}' \\ a_{21}'a_{22}'\ldots a_{2n}' \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}'a_{n2}'\ldots a_{nn}' \end{vmatrix},$$

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} & \frac{\partial x_1}{\partial x'_2} \ldots \frac{\partial x_1}{\partial x'_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x'_1} & \frac{\partial x_2}{\partial x'_2} \ldots \frac{\partial x_2}{\partial x'_n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial x_n}{\partial x'_1} & \frac{\partial x_n}{\partial x'_2} \ldots \frac{\partial x_n}{\partial x'_n} \end{vmatrix},$$

то какъ извѣстно:

$$\frac{1}{H} = \pm \frac{D}{H'} \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Изъ теоріи опредѣлителей извѣстно также, что обозначая миноръ элемента

$$\frac{\partial x_s}{\partial x'_r}$$

въ опредѣлителѣ D черезъ

$$\alpha_{sr},$$

будемъ имѣть:

$$\sum_r \frac{\partial \alpha_{sr}}{\partial x'_r} = 0$$

Digitized by Google

Если M_s ($s=1,2,3\ldots n$) и U суть функціи отъ x_i ($i=1,2,\ldots n$), то разсмотримъ сумму:

$$\frac{1}{H}\sum_s M_s \frac{\partial U}{\partial x_s},$$

которая въ перемѣнныхъ x'_i можетъ быть очевидно представлена въ слѣдующей формѣ:

$$\frac{1}{H'}\sum_p M'_p \frac{\partial U}{\partial x'_p},$$

такъ-что

$$\frac{1}{H}\sum_s M_s \frac{\partial U}{\partial x_s}=\frac{1}{H'}\sum_p M_p' \frac{\partial U}{\partial x_p'}, \quad \ldots \quad (2)$$

при чемъ:

$$\frac{M_s}{H}=\frac{1}{H'}\sum_p M'_p \frac{\partial x_s}{\partial x'_p}.$$

Составивъ теперь сумму:

$$\frac{1}{H}\sum_s M_s \alpha_{sr}$$

и вспомнивъ разложеніе опредѣлителя (D) по элементамъ будемъ имѣть:

$$\frac{1}{H}\sum_s M_s\alpha_{sr}=\frac{1}{H'}\sum_{s,p} M_p'\alpha_{sr}\frac{\partial x_s}{\partial x_p'}=$$
$$=\frac{1}{H'}\sum_p\left[M_p'\sum_s \alpha_{sr}\frac{\partial x_s}{\partial x_p'}\right]=\frac{M'_r D}{H'}.$$

Значитъ, на основаніи (1):

$$M'_r=\sum_s \alpha_{sr}M_s.$$

Digitized by Google

Дифференцируемъ это равенство по x'_r и беремъ сумму по r:

$$\sum_r \frac{\partial M'_r}{\partial x'_r} = \sum_{r,s} \alpha_{sr} \frac{\partial M_s}{\partial x'_r} + \sum_{r,s} M_s \frac{\partial \alpha_{sr}}{\partial x'_r}.$$

Замѣчая, что

$$\frac{\partial M_s}{\partial x'_r} = \sum_i \frac{\partial M_s}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x'_r} = \sum_i{}' \frac{\partial M_s}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x'_r} + \frac{\partial M_s}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial x'_r},$$

$$\sum_{r,s} \alpha_{sr} \frac{\partial M_s}{\partial x'_r} = \sum_{r,s} \left[\alpha_{sr} \sum_i{}' \frac{\partial M_s}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x'_r} \right] + \sum_{r,s} \alpha_{sr} \frac{\partial M_i}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial x'_r},$$

и что далѣе:

$$\sum_{r,s} \alpha_{sr} \frac{\partial M_s}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial x'_r} = \sum_s \frac{\partial M_s}{\partial x_s} \left[\sum_r \alpha_{sr} \frac{\partial x_s}{\partial x'_r} \right] = D. \sum_s \frac{\partial M_s}{\partial x_s},$$

$$\sum_{r,s} \left[\alpha_{sr} \sum_i{}' \frac{\partial M_s}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x'_r} \right] = 0; \quad \sum_{r,s} M_s \frac{\partial \alpha_{sr}}{\partial x'_r} =$$

$$= \sum_s M_s \cdot \sum_r \frac{\partial \alpha_{sr}}{\partial x'_r} = 0$$

будемъ имѣть:

$$\sum_r \frac{\partial M'_r}{\partial x'_r} = D. \sum_s \frac{\partial M_s}{\partial x_s}.$$

На основаніи (1) приходимъ къ равенству:

$$\frac{1}{H} \sum_s \frac{\partial M_s}{\partial x_s} = \frac{1}{H} \sum_r \frac{\partial M'_r}{\partial x'_r}. \qquad (3)$$

Такъ какъ функція

$$\Delta_1 U = \sum_{r,s} A_{rs} \frac{\partial U}{\partial x_r} \frac{\partial U}{\partial x_s},$$

Digitized by Google

гдѣ A_{rs} есть миноръ члена a_{rs} опредѣлителя H^2, дѣленный на H^2, есть первый дифференціальный параметръ, т. е. формулами преобразованія

$$x_i = x_i\ (x_1', x_2', \ldots x_n') \qquad i = 1,2,3 \ldots n$$

переводится въ

$$\sum_{p,q} A'_{pq} \frac{\partial U}{\partial x_p'} \frac{\partial U}{\partial x_q'},$$

гдѣ A'_{rs} миноръ члена a'_{rs} опредѣлителя H'^2, дѣленный на H'^2, то написавъ:

$$\sum_s \frac{\partial U}{\partial x_s}\left[\sum_r A_{rs} \frac{\partial U}{\partial x_r}\right] = \sum_p \frac{\partial U}{\partial x'_p}\left[\sum_q A'_{pq} \frac{\partial U}{\partial x'_q}\right],$$

замѣчаемъ, что въ формулѣ (2) можно теперь положить:

$$M_s = H \sum_r A_{rs} \frac{\partial U}{\partial x_r}, \quad M_p = H' \sum_q A'_{pq} \frac{\partial U}{\partial x'_q},$$

а значитъ формула (3) дастъ:

$$\frac{1}{H} \sum_s \frac{\partial}{\partial x_s}\left[H \sum_r A_{rs} \frac{\partial U}{\partial x_r}\right] = \frac{1}{H'} \sum_p \frac{\partial}{\partial x'_p}\left[H' \sum_q A'_{pq} \frac{\partial U}{\partial x'_q}\right].$$

Полученное равенство и показываетъ, что *выраженіе*:

$$\frac{1}{H} \sum_s \frac{\partial}{\partial x_s}\left[H \sum_r A_{rs} \frac{\partial U}{\partial x_r}\right]$$

есть дифференціальный параметръ, который принято называть „вторымъ“ и обозначать черезъ $\Delta_2 U$ [1].

Въ частности, для формы двухъ перемѣнныхъ u и v:

$$Edu^2 + 2\ Fdudv + Gdv^2$$

---

[1]) Bianchi Lezioni di Geometria Differenziale. Pisa. 1894. p. 45.

Digitized by Google

будетъ

$$a_{11}=E,\ a_{12}=a_{21}=F,\ a_{22}=G,\ H^2=EG-F^2,\ A_{11}=$$
$$=\frac{G}{H^2},\ A_{12}=A_{21}=\frac{-F}{H^2},\quad A_{22}=\frac{E}{H}$$

и поэтому:

$$\Delta_2 U=\frac{1}{H}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\ \frac{G\frac{\partial U}{\partial u}-F\frac{\partial U}{\partial v}}{H}+\frac{\partial}{\partial v}\ \frac{E\frac{\partial U}{\partial v}-F\frac{\partial U}{\partial u}}{H}\right\}.$$

Иванъ Бѣлянкинъ.

Кіевъ. 18 мая 1900.

Digitized by Google

Объ уравненіи

A) $\varphi^2(y) - \theta(y-x)\varphi^2(x) = \varphi(y+x)\varphi(y-x).$

Требуется найти функціи φ и θ, тожественно удовлетворяющія уравненію A) [1].

Полагая

$$y = x,$$

получимъ въ силу A):

$$1)\quad \varphi^2(x)[1-\theta(o)] = \varphi(2x)\varphi(o).$$

Подстановка

$$x = o$$

въ это уравненіе даетъ:

$$\varphi^2(o)\theta(o) = o.$$

Слѣдовательно, одно изъ чиселъ $\varphi(o)$ или $\theta(o)$ равно нулю.

I *Случай*:

$$B)\quad \theta(o) = o.$$

Уравненіе 1) будетъ:

$$2)\quad \varphi^2(x) = \varphi(2x)\varphi(o).$$

---

[1]) *Примѣчаніе.* Задача эта по просьбѣ г. Семиколѣнова, была предложена проф. А Васильевымъ 11 марта текущаго года въ засѣданіи мѣстнаго Физ. Мат. Обществ. Тогда же мною было указано значеніе D^1) функціи θ.

Digitized by Google

Отсюда слѣдуетъ, что вообще $\varphi(o)$ не равно нулю. Полученному уравненію удовлетворяетъ, какъ извѣстно, лишь одна функція

$$C)\quad \varphi(x) = Ae^{ax},$$

гдѣ A и a—произвольныя постоянныя. Внеся это значеніе въ A), найдемъ:

$$D)\quad \theta(y-x)=o$$

тожественно. Поэтому уравненіе A) должно быть вида:

$$A')\quad \varphi^2(y)=\varphi(y+x)\varphi(y-x)$$

II *Случай*:

$$B')\quad \varphi(o)=o.$$

Въ этомъ случаѣ изъ 1) выведемъ:

$$C')\quad \theta(o)=1.$$

Полагая въ A сначала $y=-x$, а затѣмъ $y=o$, получимъ въ силу B') и C')

$$\frac{\varphi^2(-x)}{\varphi^2(x)} = \theta(-2x);\ \frac{\varphi(-x)}{\varphi(x)} = -\theta(-x).$$

Отсюда

$$\theta(-2x)=\theta^2(-x)$$

или, замѣняя x чрезъ $(-x)$,

$$\theta(2x)=\theta^2(x).$$

Полученное соотношеніе въ силу C') тожественно со 2). Слѣдовательно,

$$D')\quad \theta(x)=e^{2bx},$$

гдѣ b—произвольное постоянное.

Поэтому уравненіе A) должно имѣть видъ:

$$A'')\quad \varphi^2(y)-e^{2b(y-x)}\varphi^2(x)=\varphi(y+x)\varphi(y-x).$$

Digitized by Google

Подставляя сюда

$$E)\quad \varphi(x)=e^{bx}\eta(x),$$

получимъ уравненіе

$$F)\quad \eta^2(y)-\eta^2(x)=\eta(y+x)\eta(y-x),$$

откуда легко опредѣлить η.

Полагая въ немъ:

$$x=0,$$

найдемъ:

$$\eta(0)=0.$$

Полагая затѣмъ:

$$y=0$$

и пользуясь полученымъ результатомъ, придемъ къ равенству:

$$\eta(x)=-\eta(-x)$$

т. е., η—*нечетная* функція. Дифференцированіе по y уравненія F) дастъ:

$$2\eta(y)\eta'(y)=\eta'(y+x)\eta(y-x)+\eta(y+x)\eta'(y-x).$$

Дифференцируя полученное уравненіе по x, получимъ:

$$0=\eta''(y+x)\eta(y-x)-\eta(y+x)\eta''(y-x),$$

откуда

$$\frac{\eta''(y+x)}{\eta(y+x)}=\frac{\eta''(y-x)}{\eta(y-x)}.$$

Слѣдовательно, отношеніе $\frac{\eta''}{\eta}$ постоянное число a. Итакъ

$$\frac{d^2\eta}{dx^2}=a\eta.$$

Отсюда

$$\eta(x)=Be^{x\sqrt{a}}+Ce^{-x\sqrt{a}},$$

Digitized by Google

гдѣ B и C—произвольныя постоянныя. Но, какъ мы видѣли,

$$\eta(o)=o.$$

Поэтому $B+C=o$; слѣдовательно,

$$\eta(x)=B\left(e^{x\sqrt{a}}-e^{-x\sqrt{a}}\right).$$

Отсюда въ силу E)

$$\varphi(x)=Be^{bx}\left(e^{x\sqrt{a}}-e^{-x\sqrt{a}}\right)$$

Мы пришли такимъ образомъ къ слѣдующему выводу.

Уравненіе A) можетъ имѣть лишь два вида:

I) $\varphi^2(y)=\varphi(y+x)\varphi(y-x)$ и II) $\varphi^2(y)-e^{2b(y-x)}\varphi^2(x)=$
$=\varphi(y+x)\varphi(y-x)$,

гдѣ b — какое угодно постоянное число. Рѣшеніями этихъ уравненій будутъ соотвѣтственно

I) $\varphi(x)=Ae^{cx}$; II) $\varphi(x)=Be^{bx}\left(e^{x\sqrt{a}}-e^{-x\sqrt{a}}\right)$.

Д. Н. Зейлигеръ.

12 марта 1900 г.

Digitized by Google