Д. ПОЙА

КАК РЕШАТЬ ЗАДАЧУ

Перевод с английского

Под редакцией *Ю. М. ГАЙДУКА*

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
МОСКВА 1959

ОТ РЕДАКТОРА РУССКОГО ПЕРЕВОДА

Воспитание творческой активности учащихся в процессе изучения ими математики является одной из актуальных целей нашего школьного преподавания. Правильно поставленное упражнение учащихся в решении задач — основное средство для достижения указанной цели. Вполне оправдано поэтому то повышенное внимание, которое уделяют этому аспекту преподавания математики передовые учителя нашей школы.

Если обратиться, однако, к учебно-методической литературе по математике, будь то отечественной или иностранной, то приходится констатировать, что при наличии большого количества в своем роде весьма ценных работ, посвященных методам решения отдельных типов математических задач (арифметических, конструктивно-геометрических и т. д.), до сего времени фактически отсутствовали труды, в которых серьезно разрабатывалась бы общая методика решения математических задач. Между тем ознакомление лишь со специальными способами решения отдельных типов задач создает реальную опасность того, что учащиеся ограничатся усвоением одних шаблонных приемов и не приобретут умения самостоятельно справляться с «незнакомыми» задачами [1].

Издаваемая нами в русском переводе книга «Как решать задачу» («How to Solve It») известного американского математика Д. Пойа [2] имеет в виду заполнить указанный пробел в методической литературе. В этой книге дается психологическо-педагогический анализ проблемы решения математической задачи и предлагается определенная общая методика обучения решению задач.

Лейтмотивом методики Пойа служит мысль о необходимости привития учащимся наряду с навыками логического рассуждения также прочных навыков эвристического мышления. Свою конкретизацию эта установка получает в тщательно продуманной системе («таблице») стереотипных указаний (выраженных либо в форме советов-рекомендаций, либо в форме наводящих вопросов), посредством ко-

---

[1] «Мы в школе таких задач не решали» — подобное «веское» возражение можно часто услышать на приемных испытаниях в вузах от поступающих, не одолевших предложенных им задач.

[2] Широкому математическому читателю Д. Пойа (или Г. Полиа, по прежней транскрипции его фамилии в нашей литературе) известен прежде всего как автор книг «Задачи и теоремы из анализа» и «Математика и правдоподобные рассуждения», вышедших также в русском переводе.

торых учитель может привести в действие и эффективным образом направить усилия ученика, затрудняющегося самостоятельно начать или продолжать решение задачи. Систематическое применение учителем данного метода должно способствовать усвоению последнего самим учащимся, т. е. развитию математической самостоятельности учащегося.

Естественный и вполне общий характер составных элементов таблицы Пойа, ее прозрачная структура и содержательная полнота (при сравнительной компактности) — все эти моменты делают названную таблицу эффективным методическим орудием в руках умело пользующегося ею преподавателя.

Все содержание книги представляет собой по существу развернутый комментарий к таблице. Примеры, на которых автор иллюстрирует свой метод, почерпнуты главным образом из области элементарной математики (лишь немногие из них относятся к начальным элементам аналитической геометрии или дифференциального исчисления). Подчеркивая элементарный характер книги, автор сознательно не затрагивает в ней «более тонких или полемических» вопросов методологического порядка[1].

Книга «Как решать задачу» — отрадное и яркое явление в современной зарубежной методико-математической литературе. Справедливо выдвигая на передний план роль математической задачи в школьном преподавании и предлагая заслуживающую серьезного внимания и опытной проверки методику обучения решению задач (над которой ее автор основательно поработал в течение более двух десятилетий), книга эта ценна и тем, что в ней попутно защищается и ряд других здоровых, но нередко (особенно в практике американской средней школы) игнорируемых принципов педагогики математики. (Отметим в этой связи, в частности, убедительную защиту дедуктивного элемента в основном курсе геометрии в средней школе.) [2].

В США и в Западной Европе книга Пойа выдержала уже целый ряд изданий — на языке оригинала и в переводе на другие языки — и приобрела себе многочисленных друзей. Один из них, видный современный алгебраист Б. Л. Ван-дер-Варден в своей вступительной лекции в Цюрихском университете (2 февраля 1952 г.) сказал, что «эту увлекательную книгу должен прочитать каждый студент, каждый ученый, а особенно каждый учитель». Присоединяясь к этой оценке, добавим все же, что подлинную пользу извлечет из книги тот читатель, который сумеет проштудировать ее а к т и в н о, фактически поупражнявшись в применении метода Пойа на подходящем материале. Такое активное общение с данной книгой позволит, кстати, ее читателю увидеть, насколько неправ был Даламбер — большой ученый, но плохой педагог! — полагавший, что книги, трактующие об искусстве рассуждать, «полезны только для тех, кто может без них обойтись».

Ю. М. Гайдук

---

[1] По этого рода вопросам см. книгу Д. П о й а, Математика и правдоподобные рассуждения (перевод И. А. Вайнштейна, под редакцией С. А. Яновской), ИИЛ, М., 1957.

[2] Менее благоприятно будет расценено советским читателем то место в книге (стр. 185 настоящего издания), где ее автор «раскланивается» перед некоторыми модными на Западе представителями реакционной философии и психологии. Впрочем, этот реверанс носит у Пойа скорее платонический характер и в сущности плохо согласуется с его прогрессивными в своей основе педагогическими взглядами.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Крупное научное открытие дает решение крупной проблемы, но и в решении любой задачи присутствует крупица открытия. Задача, которую вы решаете, может быть скромной, но если она бросает вызов вашей любознательности и заставляет вас быть изобретательным и если вы решаете ее собственными силами, то вы сможете испытать ведущее к открытию напряжение ума и насладиться радостью победы.

Такие эмоции, пережитые в восприимчивом возрасте, могут пробудить вкус к умственной работе и на всю жизнь оставить свой отпечаток на уме и характере.

Таким образом, преподавателю математики предоставляются великолепные возможности. Если он заполнит отведенное ему учебное время натаскиванием учащихся в шаблонных упражнениях, он убьет их интерес, затормозит их умственное развитие и упустит свои возможности. Но если он будет пробуждать любознательность учащихся, предлагая им задачи, соразмерные с их знаниями, и своими наводящими вопросами будет помогать им решать эти задачи, то он сможет привить им вкус к самостоятельному мышлению и развить необходимые для этого способности.

Прекрасные возможности предоставлены также и студенту любого колледжа, где учебные программы включают кое-что из математики. Эти возможности, конечно, будут потеряны, если он смотрит на математику как на предмет, по которому он должен получить столько-то зачетов и который он постарается забыть как можно быстрее после последнего экзамена. Эти возможности могут быть потеряны, даже если учащийся обладает известными природными способностями к математике, так как он, как и всякий другой, должен выявить свои таланты и вкусы; так, он не может знать, что любит пирог с малиной, если он никогда не пробовал пирога с малиной. Он может, однако, обнаружить, что математическая задача иногда столь же увлекательна, как кроссворд, и что напряженная умственная работа может быть столь же желанным упражнением, как стремительный теннис. Изведав удовольствие от занятий математикой, он его забудет нескоро, и вот тогда, очень вероятно, математика займет определенное место в его жизни: как предмет любительского увлечения или как инструмент в его профессиональной работе, как профессия или как путь к личной славе.

Автор вспоминает время, когда он сам был студентом, довольно честолюбивым студентом, жаждавшим разобраться немного в математике и физике. Он слушал лекции, читал книги, пытался понять сущность излагавшихся решений и фактов, но один вопрос мучил его вновь и вновь: «Да, это решение, по-видимому, достигает цели и кажется верным, но как можно придумать такое решение? Да, этот эксперимент достигает цели, наблюдаемое явление представляется фактом; но как открывают такие факты? Каким образом я сам мог бы придумать или открыть подобные вещи?» Ныне автор преподает математику в университете; он полагает или надеется, что его наиболее пытливые студенты задают себе подобные вопросы, и он пытается удовлетворить их любопытство. Пытаясь не только понять решение той или иной задачи, но и осознать, как, какими средствами было найдено это решение, делая попытки объяснить другим, в чем заключается сам процесс поисков решения, автор пришел в конце концов к мысли написать настоящую книгу. Он надеется, что она окажется полезной как для преподавателей, стремящихся развить способности своих учащихся к решению задач, так и для учеников, желающих развить свои собственные способности.

Хотя эта книга имеет в виду главным образом потребности преподающих и изучающих математику, она представит интерес для любого лица, желающего понять пути и средства, приводящие к новым идеям и новым открытиям. Интерес к этим вещам, весьма вероятно, распространен шире, чем можно было бы предположить с первого взгляда. Место, которое занимают кроссворды и другие головоломки в популярных газетах и журналах, свидетельствует о том, что люди тратят известное время на решение задач, не имеющих практического интереса. За желанием решить ту или иную задачу, бесполезную в смысле материального выигрыша, может быть скрыто более глубокое любопытство, желание осознать пути и средства, приводящие к решению.

Предлагаемые вниманию читателя страницы написаны несколько сжато, однако автор стремился к наибольшей простоте изложения. Содержание этих страниц основано на длительном и серьезном изучении методов решения задач. Изучение этих методов является предметом так называемой *эвристики*, которая не в моде в наше время, но имеет большое прошлое и, возможно, некоторое будущее.

При изучении методов решения задач перед нами вырисовывается второе лицо математики. Да, у математики два лица: это и строгая наука Евклида и одновременно нечто другое.

Математика, излагаемая в стиле Евклида, представляется нам систематической, дедуктивной наукой. Но математика в процессе создания является экспериментальной, индуктивной наукой. Оба аспекта математики столь же стары, как сама математическая наука. Однако второй аспект в одном отношении является новым: математику «in statu nascendi»,— в процессе рождения,— никогда с этой стороны не показывали ни ученику, ни самому учителю, ни широкой публике.

Предмет эвристики тесно переплетается с другими науками; ее отдельные части можно считать принадлежащими не только математике, но и логике, педагогике и даже философии. Автор, отдавая себе полный отчет в возможности критики со стороны представителей этих четырех наук и сознавая ограниченные рамки своей компетентности, все же может претендовать на одно: он обладает некоторым опытом в решении задач и в преподавании математики на самых различных уровнях.

Предмет настоящей книги будет рассмотрен более обстоятельно в новой книге автора, в настоящее время готовящейся к печати [1].

Автор благодарит своих многочисленных друзей и коллег за их всевозможные предложения и помощь, которую

[1] Речь идет о книге «Математика и правдоподобные рассуждения», в настоящее время вышедшей уже и в русском переводе (И. А. Вайнштейна, под редакцией С. А. Яновской, ИИЛ, М., 1957). (Примечание к русскому переводу.)

они ему оказывали в течение долгих лет его работы над этой несколько необычной книгой. Не имея возможности назвать здесь всех тех, кто оказывал ему помощь, автор не решается привести неполный список этих лиц. Тем не менее автор не может не выразить благодарности директору Издательства Принстонского университета г-ну Дэйтус К. Смиту младшему и помощнику редактора мисс Глэдис Форнэлл за их действенную и квалифицированную помощь.

Д. Пойа.

Стэнфордский университет
1 августа 1944.

ВВЕДЕНИЕ

Все содержание книги группируется вокруг таблицы вопросов и советов. Эта таблица напечатана в конце книги.

Все вопросы или советы, извлеченные из этой таблицы, будут печататься *курсивом*; таблицу эту мы будем называть просто «таблица» или «наша таблица».

Мы подробно рассмотрим назначение таблицы, покажем на примерах, как извлечь из нее практическую пользу, разъясним понятия и мыслительные процессы, на основе которых она построена. В качестве предварительного объяснения можно коротко сказать: если вы обращаетесь к самому себе с этими вопросами и советами, правильно пользуясь ими,— они могут помочь вам решить вашу задачу. Если вы обращаетесь с теми же вопросами и советами к одному из ваших учеников,— вы можете помочь ему решить эту задачу.

Книга разделена на три части.

Первая часть озаглавлена «В классе». Она содержит двадцать пунктов. Ссылки на каждый из этих пунктов даются цифрами, напечатанными жирным шрифтом, например «пункт **7**».

В пунктах **1—5** рассматривается в самых общих чертах назначение нашей таблицы. Пункты **6—17** разъясняют, что такое «главные части» и «главные вопросы» таблицы; в этих пунктах рассмотрен первый практический пример, пункты **18—20** содержат дальнейшие примеры.

Вторая, очень короткая часть озаглавлена «Как решать задачу». Она написана в форме диалога: немного идеализированный учитель отвечает на короткие вопросы немного идеализированного ученика.

Третья, самая объемистая часть озаглавлена «Краткий эвристический словарь»; мы будем в дальнейшем называть его просто «Словарь». Он состоит из шестидесяти четырех статей, расположенных в алфавитном порядке. Например, значение термина эвристика разъясняется в соответствующей статье «Словаря» на странице 200. Ссылки на статьи «Словаря» печатаются в тексте разрядкой. Некоторые места в отдельных статьях носят более специальный характер; такие места заключены в квадратные скобки. Некоторые статьи «Словаря» весьма тесно связаны с первой частью, которую они дополняют дальнейшими иллюстрациями и более специальными комментариями. Остальные статьи несколько выходят за рамки первой части, разъясняя основные принципы, лежащие в ее основе. Роль ключа играет статья «Современная эвристика». Она раскрывает связь главных статей «Словаря» и его общий план; она содержит также указания, как навести справку о том или ином пункте таблицы. Поскольку темы статей «Словаря» отличаются большим разнообразием, следует особо подчеркнуть, что они объединены общим планом. Несколько более длинных статей посвящены систематическому, хотя и сжатому, рассмотрению определенной общей темы; другие статьи содержат более частные замечания, третьи — ссылки, исторические сведения, цитаты, афоризмы или даже шутки.

Не следует читать «Словарь» слишком быстро; его текст часто весьма сжат; по временам речь идет о довольно тонких вещах. Читатель может обращаться к «Словарю» за справками, касающимися вопросов, вызвавших его интерес. Если эти вопросы возникали в процессе решения задач им самим или его учениками, вероятность, что он извлечет из «Словаря» пользу, будет гораздо больше.

Мы много раз говорили об «учителе» и «ученике»; мы будем обращаться к ним вновь и вновь. Следует заметить, что под «учеником» мы подразумеваем либо учащегося средней школы [1], либо студента колледжа, либо любое другое лицо, обучающееся математике.

---

[1] Так называемая «high school» — средняя школа в США. Она подразделяется на младшую и старшую ступени для учащихся в возрасте 13—15, соответственно, 16—18 лет. (Полный курс начального и среднего образования составляет в США 12—13 лет.) (Примечание к русскому переводу.— *Ред.*)

Так же точно «учитель» может означать либо учителя средней школы, либо преподавателя высшей, либо любое другое лицо, занимающееся методикой преподавания математики. Автор ставит себя иногда в положение ученика, иногда — в положение учителя (этот последний случай чаще встречается в первой части). Однако чаще всего, особенно в третьей части, автор рассуждает с точки зрения лица, не являющегося ни учителем, ни учеником, а просто заинтересованного в решении стоящей перед ним задачи.

ЧАСТЬ I

В КЛАССЕ

НАЗНАЧЕНИЕ ТАБЛИЦЫ

1. Помощь ученику. Помогать ученику — одна из наиболее важных обязанностей учителя. Эту обязанность нельзя назвать легкой: она требует времени, опыта, преданности делу и разумных принципов.

Ученик должен приобрести как можно больше опыта самостоятельной работы. Но если он оставлен наедине с задачей без всякой помощи или если эта помощь недостаточна,— это может не принести ему никакой пользы. Если помощь учителя чрезмерна, ничего не остается на долю ученика. Учитель должен помогать, но не слишком много и не слишком мало, так, чтобы ученику оставалась *разумная доля работы.*

Если ученику и не по силам сделать много, учителю следует по крайней мере создать некоторую иллюзию самостоятельной работы. Поэтому помощь учителя должна быть осторожной и *неназойливой.*

Лучше всего, однако, помогать ученику естественно. Учитель должен поставить себя на место ученика; он должен увидеть источник затруднений, постараться понять, что происходит в голове ученика, и задать вопрос или указать шаг, до которого *учащийся мог бы додуматься самостоятельно.*

2. **Вопросы, советы, мыслительные процессы.** Стараясь оказать ученику действенную, естественную, но не назойливую помощь, учитель поставлен перед необходимостью вновь и вновь задавать одни и те же вопросы и указывать одни и те же шаги. Так, при решении бесчисленного множества задач нам приходится задавать вопрос: *что неизвестно?*

Тот же вопрос можно задать, меняя его форму многими способами: что требуется? Что вы хотите найти? Что вы должны искать? Цель этих вопросов — сосредоточить внимание ученика на неизвестном. Иногда мы получаем тот же эффект более естественным путем при помощи совета: *рассмотрите неизвестное!*

Вопрос и совет имеют целью одно и то же; они вызывают один и тот же мыслительный процесс.

Автор пришел к мысли, что стоит собрать и сгруппировать типичные вопросы и советы, полезные при разборе задач с учащимися. Таблица, которую мы изучаем, состоит из таких вопросов и советов, тщательно отобранных и размещенных; они в равной мере полезны всякому, кто решает задачи самостоятельно. Если читатель в достаточной степени знаком с таблицей и может различить за внешней формой совета действие, подсказываемое этим советом, то он поймет, что в таблице неявным образом перечисляются *типичные мыслительные процессы, приносящие пользу при решении задач.* Эти процессы перечислены в том порядке, в каком они чаще всего встречаются.

3. **Общность** — важная, характерная черта вопросов и советов, содержащихся в нашей таблице. Возьмите вопросы: *Что неизвестно? Что дано? В чем состоит условие?* Общность этих вопросов такова, что мы можем задавать их с пользой для дела, решая всевозможные задачи. Их применение не ограничивается никаким конкретным содержанием задачи. Она может быть алгебраической или геометрической, математической или нематематической, теоретической или практической, серьезной задачей или просто головоломкой; это все безразлично; вопросы сохраняют смысл и могут помочь нам решить ее.

Фактически одно **ограничение** есть, но оно не связано с конкретной сферой понятий, с которыми мы сталкиваемся в данной задаче. Некоторые вопросы и советы таблицы могут быть применены только к «задачам на нахождение», но не к «задачам на доказательство». Имея дело с задачей этого последнего вида, мы должны применять другие вопросы (см. З а д а ч и н а н а х о ж д е н и е, з а д а ч и н а д о к а з а т е л ь с т в о).

4. **Здравый смысл.** Вопросы и советы нашей таблицы обладают общностью; тем не менее они естественны, просты, очевидны и имеют своим источником простой здравый смысл. Возьмите совет: *Рассмотрите неизвестное! И постарайтесь*

вспомнить знакомую задачу с тем же или подобным неизвестным. Этот совет приводит вас к тому, к чему вы пришли бы так или иначе, без всякого совета, если вы действительно серьезно увлечены вашей задачей. Вы голодны? Вы хотите достать пищу и вспоминаете известные вам пути получения пищи. У вас геометрическая задача на построение? Вы хотите построить треугольник и вспоминаете известные вам способы построения треугольников. У вас задача любого другого характера? Вы хотите разыскать определенное неизвестное, и вы вспоминаете знакомые вам способы найти такое или подобное неизвестное. Если вы поступаете таким образом, вы точно следуете совету, взятому из нашей таблицы. И вы на верном пути; совет хорош; вам рекомендуются действия, часто приводящие к успеху.

Все вопросы и советы нашей таблицы естественны, просты, очевидны; в них воплощен обычный здравый смысл, но воплощение это носит общий характер.

Вопросы и советы таблицы рекомендуют определенный образ действий, совершенно естественно приходящий в голову каждому, кто серьезно занимается своей задачей и обладает крупицей здравого смысла. Но тот, кто поступает правильно, обычно не заботится о точном описании своих поступков, а возможно, и не смог бы этого сделать; сделать это попытается наша таблица.

5. **Учитель и ученик. Подражание и опыт.** Есть две цели, которые учитель может иметь в виду, обращаясь к ученикам с вопросом или советом, взятым из таблицы: первая — помочь ученику решить именно данную задачу; вторая — так развить способности ученика, чтобы в будущем он смог решать задачи самостоятельно.

Опыт показывает, что вопросы и советы таблицы, если их применять должным образом, очень часто помогают ученикам. Характерные черты, общие для всех вопросов и советов, таковы: здравый смысл и общность. Будучи выведенными из простого здравого смысла, они часто возникают естественным образом; они могут сами собой прийти в голову ученику. Будучи общими, они оказывают ненавязчивую помощь; они просто дают общее направление, оставляя учащемуся обширное поле деятельности.

Однако упомянутые выше две цели тесно связаны между собой; справившись с заданной задачей, ученик несколько развивает свои способности вообще к решению задач. При этом мы не должны забывать, что наши вопросы, обладая общностью, могут применяться в разнообразных ситуациях. Если один и тот же вопрос многократно приносит пользу, ученик едва ли не заметит этого; таким образом, он будет наведен на мысль задавать этот вопрос самостоятельно при аналогичной ситуации. Задавая этот вопрос вновь и вновь, он сможет извлечь заключающуюся в нем верную идею. Этот успех приводит его к правильному применению нашего вопроса, вот теперь этот вопрос действительно им усвоен.

Ученик может так хорошо усвоить некоторые вопросы нашей таблицы, что он в конце концов окажется в состоянии задавать себе нужный вопрос в нужный момент, причем соответствующий мыслительный процесс будет происходить в его сознании естественным и эффективным образом. Несомненно, такой ученик извлек все, что можно из нашей таблицы. Что должен делать учитель, чтобы получить этот наилучший возможный результат?

Умение решать задачи есть искусство, приобретающееся практикой, подобно, скажем, плаванию. Мы овладеваем любым мастерством при помощи подражания и опыта. Учась плавать, вы подражаете другим в том, что они делают руками и ногами, чтобы держать голову над водой, и, наконец, вы овладеваете этим искусством при помощи упражнения. Учась решать задачи, вы должны наблюдать и подражать другим в том, как они это делают, и, наконец, вы овладеваете этим искусством при помощи упражнения.

Учитель, стремящийся развить способности учеников к решению задач, должен пробудить в них известный интерес к этим задачам и обеспечить им широкие возможности для подражания и приобретения опыта. Если учитель хочет, чтобы мыслительные процессы, соответствующие вопросам и советам нашей таблицы, стали для учеников чем-то привычным, он должен обращаться к ним с этими вопросами и советами как можно чаще, не теряя, однако, естественности.

Более того, решая задачу перед классом, он должен излагать свои мысли немного театрально, ставя себе те же вопросы, которые он предлагает ученикам. Руководимый указанным образом, ученик овладеет в конце концов правильным употреблением этих вопросов и советов и тем самым приобретет нечто более ценное, чем знание какого-либо частного математического предложения.

6. Четыре ступени. Пытаясь найти решение, мы можем многократно менять свою точку зрения, свой взгляд на задачу. Мы принуждены менять свою позицию вновь и вновь. Весьма вероятно, что наше представление о задаче в значительной степени неполно, когда мы начинаем работу; наша точка зрения становится иной, когда сделаны некоторые успехи; она вновь меняется к тому моменту, когда решение почти в наших руках.

Чтобы удобно сгруппировать вопросы и советы нашей таблицы, мы будем различать четыре ступени в процессе решения. Во-первых, мы должны *понять* задачу; мы должны ясно видеть, что в ней является искомым. Во-вторых, мы должны усмотреть, как связаны друг с другом различные элементы задачи, как неизвестное связано с данными. Это необходимо, чтобы получить представление о решении, чтобы составить *план*. В-третьих, мы *осуществляем* наш план. В-четвертых, *оглядываясь назад* на полученное решение, мы вновь изучаем и анализируем его.

Каждая из этих ступеней важна сама по себе. Может случиться, однако, что учащийся, осененный блестящей идеей, перепрыгивает через все приготовления и сразу находит решение. Подобные счастливые мысли, конечно, нужно приветствовать, однако произойдет нечто весьма нежелательное, если ученик пропустит одну из четырех ступеней, не имея в голове никакой хорошей идеи. Самое же плохое случится, если учащийся примется за вычисления и построения, не *поняв* задачи. Вообще, совершенно бесполезно браться за какие-либо частные рассмотрения, не выяснив главных связей, не составив себе некоторого *плана*.

Многих ошибок можно избежать, если, выполняя свой план, ученик *проверяет каждый шаг*. Большая часть пользы от задачи может быть потеряна, если ученику не удается, рассматривая уже полученное решение, должным образом *изучить*, проанализировать его.

7. Понимание постановки задачи. Глупо отвечать на вопрос, который вы не поняли. Невесело работать для цели, к которой вы не стремитесь. Такие глупые и невеселые вещи часто случаются как в школе, так и вне ее, однако учителю следует стараться предотвращать их в своем классе. Ученик должен понять задачу. Но не только понять; он должен хотеть решить ее. Если ученику не хватает понимания задачи или интереса к ней, это не всегда его вина. Задача должна быть умело выбрана, она должна быть не слишком трудной и не слишком легкой, быть естественной и интересной, причем некоторое время нужно уделять для ее естественной и интересной интерпретации.

Прежде всего, должна быть понята словесная формулировка задачи. Проверить это учитель до некоторой степени может; он просит ученика повторить формулировку задачи, и ученик должен оказаться в состоянии легко это сделать. Ученик также должен быть в состоянии указать главные элементы задачи — неизвестное, данное, условие. Таким образом, учитель редко может позволить себе обойтись без вопросов: *что неизвестно? Что дано? В чем состоит условие?*

Ученик должен внимательно, многократно и с разных сторон рассмотреть главные элементы задачи.

Если с задачей связана какая-либо геометрическая фигура, он должен *сделать чертеж* и указать на нем неизвестное и данные. Если необходимо как-нибудь назвать эти объекты, он должен *ввести подходящие обозначения*; уделяя определенное внимание подходящему выбору символов, он принужден сосредоточивать свои мысли на объектах, для которых нужно подыскать символы.

Имеется еще один вопрос, который может оказаться полезным на этой предварительной стадии при условии, что мы не будем ждать окончательного ответа на него, а будем рассчитывать лишь на временный ответ, догадку: *Возможно ли удовлетворить условию?*

(Развивая сказанное в части II, стр. 40, мы будем «Понимание постановки задачи», подразделять на две стадии: «Мы знакомимся с задачей» и «Мы вникаем в задачу».)

8. **Пример.** Проиллюстрируем некоторые положения, разобранные в предыдущем пункте. Возьмем простую задачу: *Найти диагональ прямоугольного параллелепипеда, длина, ширина и высота которого известны.*

Чтобы извлечь пользу из этой задачи, ученики должны быть знакомы с теоремой Пифагора и с некоторыми ее планиметрическими приложениями, но предварительные систематические познания в стереометрии не необходимы. Здесь учитель может положиться на знакомство учеников с пространственными отношениями, вытекающее из их повседневной практики.

Учитель может сделать задачу интересной, конкретизируя ее. Классная комната представляет собой прямоугольный параллелепипед, длина, ширина и высота которого могли бы быть измерены и оценены приближенно; ученики должны найти, «измерить косвенно», диагональ классной комнаты. Учитель показывает длину, ширину и высоту класса, жестом проводит воображаемую диагональ и оживляет далее свой чертеж, сделанный на доске, многократно возвращаясь к рассмотрению классной комнаты.

Диалог между учителем и учащимися может начаться, например, так:

«*Что неизвестно?*»

«Длина диагонали параллелепипеда».

«*Что дано?*»

«Длина, ширина и высота параллелепипеда».

«*Введите подходящие обозначения.* Какой буквой обозначим неизвестное?»

«x».

«Какие буквы вы бы выбрали для длины, ширины и высоты?»

«a, b, c».

«*В чем состоит условие*, связывающее a, b, c и x?»

«x есть диагональ параллелепипеда, длина, ширина и высота которого равны a, b и c».

«Имеет ли задача смысл? То есть, *достаточно ли условие для определения неизвестного?*»

«Да, достаточно. Если известны a, b и c, то известен и параллелепипед. Если параллелепипед определен, то и его диагональ определена».

9. Составление плана. У нас есть план, если нам известно, хотя бы в общих чертах, какие вычисления или построения нам придется проделать, чтобы получить неизвестное. Путь от понимания постановки задачи до представления себе плана решения может быть долгим и извилистым. И действительно, главный шаг на пути к решению задачи состоит в том, чтобы выработать идею плана. Эта идея может появляться постепенно. Или она может возникнуть вдруг, в один миг, после, казалось бы, безуспешных попыток и продолжительных сомнений. Тогда мы назовем ее «блестящей идеей».

Лучшее, что может сделать учитель для учащегося, состоит в том, чтобы путем неназойливой помощи подсказать ему блестящую идею. Вопросы и советы, которые мы собираемся анализировать, и предназначены для того, чтобы подсказывать такую идею.

Чтобы быть в состоянии понять положение дел учащегося, решающего задачу, учитель должен вспомнить свой собственный опыт, свои трудности и успехи в решении задач.

Мы знаем, конечно, что трудно рассчитывать на удачную идею, имея слабые познания в предмете, и невозможно найти такую идею, не имея никаких познаний. Хорошие идеи имеют своим источником прошлый опыт и ранее приобретенные знания. Одних воспоминаний мало, чтобы найти хорошую идею, но у нас не может быть никаких хороших идей, если в нашей памяти не хранится достаточно необходимых фактов; одних строительных материалов мало, чтобы воздвигнуть здание, но мы не можем воздвигнуть здания без нужных строительных материалов. Эти материалы, необходимые для решения математической задачи, представляют собой определенные, имеющие отношение к задаче, крупицы прежде приобретенных математических знаний, такие, как решенные ранее задачи или доказанные ранее теоремы. Таким образом, часто оказывается уместным начать работу с вопроса: *известна ли вам какая-нибудь родственная задача?*

Трудность здесь в том, что обычно оказывается слишком много задач, связанных в той или иной степени с нашей задачей, т. е. имеющих с ней какие-либо общие черты.

Как выбрать задачу или несколько задач, которые действительно будут полезны? Вот совет, указывающий нам ту общую черту, которая является существенной: *Рассмотрите неизвестное! И постарайтесь вспомнить знакомую задачу с тем же или подобным неизвестным.*

Нам повезло, если нам удалось вспомнить уже решенную задачу, тесно связанную с нашей нынешней задачей.

Теперь постараемся использовать случай и извлечь все, что можно, из нашей удачи. *Вот задача, сходная с нашей и уже решенная. Нельзя ли воспользоваться ею?*

Эти вопросы, если их хорошо уяснить и глубоко продумать, часто помогают правильно направить ход мыслей с самого начала; но они не в состоянии помочь всегда, они не обладают магической силой. Если они не помогают, мы должны начать поиски новых подходящих точек соприкосновения, исследовать всевозможные аспекты нашей задачи; мы должны видоизменить, преобразовать, модифицировать задачу. *Нельзя ли сформулировать задачу иначе?*

В нашей таблице имеются вопросы, подсказывающие нам такие специфические средства видоизменить задачу, как обобщение, специализация, использование аналогии, отбрасывание части условий и т. д.; все это очень важно, но мы не можем сейчас вдаваться в детали. Видоизменение задачи может привести к некоторой подходящей вспомогательной задаче: *если не удается решить данную задачу, попытайтесь предварительно решить сходную.*

Пытаясь использовать различные известные задачи и теоремы, рассматривая всевозможные видоизменения задачи, экспериментируя с разными вспомогательными задачами, мы можем оставить нашу первоначальную задачу так далеко в стороне, что возникнет опасность совсем распроститься с ней. Но следующий превосходный вопрос вернет нас снова к ней: *Все ли данные вы использовали? Все ли условие?*

10. Пример. Мы возвращаемся к примеру, рассматривавшемуся в пункте 8. К моменту, когда мы оставили его, учащимся только что удалось понять задачу, и они начали проявлять к ней кое-какой интерес. Вероятно, теперь у них имеются собственные идеи и пробудилась некоторая инициатива.

Если учитель при самом внимательном наблюдении не может обнаружить никаких следов такой инициативы, он должен возобновить свой диалог с учащимися, тщательно взвешивая каждое свое слово. Он должен быть готовым предлагать повторно в несколько измененном виде вопросы, на которые учащиеся не могут дать ответа. Он должен быть готовым часто встречаться с обескураживающим молчанием учащихся (которое далее будет обозначаться точками...).

«*Известна ли вам какая-нибудь родственная задача?*»

. . . . . .

«*Рассмотрите неизвестное! Встречалась ли вам задача с тем же неизвестным?*»

. . . . . .

«*Что неизвестно* в этой задаче?»

«Диагональ параллелепипеда».

«Встречалась ли вам какая-нибудь *задача с тем же неизвестным?*»

«Нет. Мы никогда не решали задач, в которых у нас была бы диагональ параллелепипеда».

«Встречалась ли вам какая-нибудь *задача с подобным неизвестным?*»

. . . . . .

«Не правда ли, диагональ есть отрезок, отрезок прямой. Приходилось ли вам решать задачу, в которой неизвестным являлась длина отрезка?»

«Конечно, мы решали такие задачи. Например, найти сторону прямоугольного треугольника».

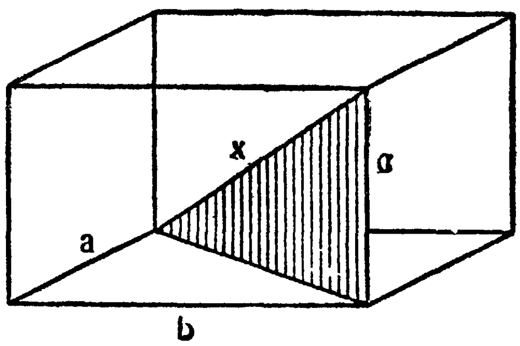
«Очень хорошо! *Вот задача, сходная с вашей и уже решенная.— Нельзя ли воспользоваться ею?*»

. . . . . .

«Вам удалось вспомнить задачу, которую вы решили прежде и которая сходна с вашей теперешней задачей. Попробуйте извлечь из нее пользу! *Нельзя ли ввести какой-нибудь вспомогательный элемент, чтобы стало возможно воспользоваться прежней задачей?*»

. . . .

«Вы вспомнили задачу о треугольнике. Посмотрите на чертеж; есть у вас на чертеже какой-нибудь треугольник?»



Фиг. 1.

Будем надеяться, что последний намек оказался достаточно ясным, чтобы натолкнуть на идею решения, заключающуюся в том, чтобы ввести прямоугольный треугольник (заштрихованный на фиг. 1), для которого искомая диагональ служит гипотенузой.

Однако учитель должен быть готовым к тому, что даже этот совершенно ясный намек окажется не в состоянии сдвинуть учащихся с мертвой точки; у него должна быть наготове целая гамма все более и более ясных намеков.

«Было бы хорошо, если бы у нас на чертеже был треугольник?»

«Какой треугольник был бы лучше всего?»

«Вы пока не можете найти диагональ; но вы сказали, что смогли бы найти сторону треугольника. Что же вам нужно сделать?»

«Можно было бы найти диагональ, если бы она была стороной треугольника?»

Когда в конце концов учащимся удается с большей или меньшей помощью ввести решающий вспомогательный элемент (прямоугольный треугольник, заштрихованный на фиг. 1), учителю следует удостовериться в том, что учащиеся теперь достаточно ясно представляют себе, как действовать дальше.

Только после этого можно переходить к действительным вычислениям.

«Мне кажется, неплохо, что мы начертили этот треугольник. Теперь у вас есть треугольник, но что вы скажете о вашем неизвестном?»

«Неизвестное есть гипотенуза этого треугольника; мы можем ее вычислить при помощи теоремы Пифагора».

«Действительно, вы можете ее вычислить, если известны оба катета, но известны ли они?»

«Один катет дан, это c. А другой, мне кажется, нетрудно найти. Да, ведь другой катет есть гипотенуза другого прямоугольного треугольника».

«Очень хорошо! Теперь я вижу, что у вас есть план».

11. Осуществление плана. Нелегко придумать план, найти идею решения. Очень многое требуется для этого: ранее приобретенные знания, мозг, приученный к логическому мышлению, полная сосредоточенность и еще одно: удача.

Осуществить же план решения гораздо легче; здесь нам потребуется главным образом терпение.

План указывает лишь общие контуры решения; теперь нам нужно убедиться, что все детали вписываются в эти общие контуры. Поэтому нужно терпеливо рассмотреть эти детали, одну за другой, пока все не станет совершенно ясным и не останется ни одного темного угла, в котором может скрываться ошибка.

Если учащийся выработал план решения, для учителя наступает сравнительно спокойное время. Главная опасность теперь в том, что учащийся может забыть свой план. Это легко может случиться, если учащийся получил план извне и, принимая его, положился на авторитет учителя. Но если учащийся сам потрудился над составлением плана, хотя бы даже с некоторой помощью, и если он с удовлетворением воспринял окончательную идею, она не сможет от него легко ускользнуть. Учитель должен все же настаивать, чтобы учащийся *проверял каждый свой шаг.*

Убедиться в правильности некоторого шага в наших рассуждениях мы можем либо «интуитивно», либо «логически».

Мы можем сосредоточивать наше внимание на рассматриваемом утверждении до тех пор, пока оно не станет для нас столь ясным и отчетливым, что не останется никакого места для сомнений в правильности нашего шага. Но мы можем поступить иначе, выведя наше утверждение по логическим правилам. (Разница между «интуитивным представлением» и «логическим доказательством» достаточно ясна во многих важных случаях; дальнейшее рассмотрение этого вопроса мы предоставим философам.)

Самое важное состоит в том, чтобы учащийся был по-настоящему убежден в правильности каждого шага. В некоторых случаях учитель может указать на разницу между «увидеть» и «доказать»: *ясно ли вам, что предпринятый шаг правилен?* А в состоянии ли вы *доказать, что он правилен?*

12. Пример. Возобновим нашу работу с того места, на котором мы ее оставили в конце пункта **10**. Учащийся, наконец, нашел идею решения. Он видит прямоугольный треугольник, в котором неизвестное x является гипотенузой, а данная высота c — одним из катетов; другой катет представляет собой диагональ основания параллелепипеда.

Следует обратить внимание на то, чтобы учащийся ввел подходящее обозначение. Другой катет, т. е. диагональ основания со сторонами a и b, он должен обозначить буквой y. Наконец, рассматривая один за другим оба треугольника, он сможет написать (см. фиг. 1):

$$x^2 = y^2 + c^2,$$
$$y^2 = a^2 + b^2.$$

Отсюда, исключая вспомогательное неизвестное y, он получает:

$$x^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$
$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Учителю не стоит прерывать учащегося, если тот правильно выполняет эти действия, но, возможно, нужно заранее потребовать от него *проверки каждого шага.* Так, учитель может спросить:

«Вполне ли вам ясно, что треугольник со сторонами x, y, c — прямоугольный?»

На этот вопрос учащийся может честно ответить «да» и тем не менее, пожалуй, прийти в замешательство, если учитель, не удовлетворенный его интуитивным убеждением, поставит следующий вопрос:

«Но можете ли вы *доказать*, что этот треугольник — прямоугольный?»

Таким образом, учителю лучше не ставить такой вопрос, если класс еще не приобрел основательных навыков в стереометрии. Даже в этом последнем случае есть известная опасность, что ответ на побочный вопрос окажется главной трудностью для большинства учащихся.

13. Анализ решения. Даже очень хорошие учащиеся, получив ответ и тщательно изложив ход решения, закрывают тетрадь и переходят к другим делам.

Поступая так, они лишают себя того важного и поучительного, что может дать последний фазис работы. Оглядываясь назад на полученное решение, вновь рассматривая и анализируя результат и путь, которым они к нему пришли, они могут сделать свои знания более глубокими и прочными и закрепить навыки, необходимые для решения задач. Хороший учитель обязан понимать, что никакую задачу нельзя исчерпать до конца. Этот взгляд он должен прививать и своим ученикам. Всегда остается что-нибудь, над чем можно размышлять; обладая достаточным упорством и проницательностью, мы можем усовершенствовать любое решение или, во всяком случае, мы всегда можем глубже осмыслить решение.

Учащийся осуществил свой план. Он записал решение, проверяя каждый шаг. Таким образом, он имеет неплохие основания считать свое решение правильным.

Тем не менее ошибки всегда возможны, в особенности, если решение длинное и запутанное. Поэтому проверка его всегда желательна. Особенно важно не проглядеть (если он имеется) какой-либо быстрый интуитивный способ проверки результата или хода решения. *Нельзя ли проверить результат? Нельзя ли проверить ход решения?*

Чтобы удостовериться в присутствии какого-либо предмета или в том, что он обладает определенными качествами, мы имеем обыкновение осмотреть и ощупать его. Мы предпочитаем восприятие при помощи двух различных чувств; так же точно мы предпочитаем убеждение, основанное на двух различных доказательствах: *нельзя ли получить тот же результат иначе?* Нас, конечно, в большей мере устроит короткое интуитивное рассуждение, чем длинное и тяжеловесное: *нельзя ли усмотреть его с первого взгляда?*

Одна из первых и главных обязанностей учителя состоит в том, чтобы не создать у учащихся впечатления, что математические задачи мало связаны одна с другой и не связаны вообще больше ни с чем. Нам представляется естественная возможность исследовать, как связана наша задача с другими, когда мы оглядываемся назад на ее решение. Учащиеся найдут, что, действительно, очень интересно снова окинуть взглядом решение, если они честно затратили усилия, чтобы его получить, и сознают, что плодотворно поработали.

Тогда им захочется узнать, что они еще могут получить при помощи уже затраченных усилий и как сделать, чтобы работа всегда была столь же плодотворной. Учитель должен поощрить учащихся придумать случаи, к которым они снова могли бы приложить использованный метод или применить полученный результат. *Нельзя ли использовать полученный результат или метод решения в какой-нибудь другой задаче?*

14. Пример. В пункте 12 учащиеся, наконец, получили решение: если три ребра прямоугольного параллелепипеда, имеющие общую вершину, суть a, b, c, то диагональ есть

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Нельзя ли проверить результат? Учитель не может ждать удовлетворительного ответа на этот вопрос от неопытных еще учащихся. Однако учащиеся должны очень рано убедиться на опыте, что задачи «в буквах» обладают большим преимуществом перед задачами с числовыми данными: если задача решается «в буквах», то ее результат может быть подвергнут ряду испытаний, которым не поддается результат задачи «в числах».

Несмотря на всю свою простоту, наш пример может иллюстрировать сказанное. Учитель может задать несколько вопросов, касающихся полученного результата, на которые учащиеся легко ответят «да», в то время как хотя бы один ответ «нет» вскрыл бы серьезный дефект нашего результата.

«*Все ли данные вы использовали?* Входят ли все данные a, b, c в нашу формулу для диагонали?»

«Длина, ширина, высота играют одинаковую роль в нашей задаче; наша задача симметрична по отношению к a, b, c. Симметрично ли относительно a, b, c выражение, полученное вами для диагонали? Останется ли оно тем же самым, если поменять местами a, b, c?»

«Наша задача — стереометрическая: найти диагональ прямоугольного параллелепипеда, если даны его три измерения a, b, c. Эта задача аналогична планиметрической задаче: найти диагональ прямоугольника, если даны его два измерения: a, b.

Аналогичен ли результат «пространственной» задачи результату «плоской» задачи?»

«Если высота c начнет уменьшаться и, наконец, исчезнет, наш параллелепипед превратится в прямоугольник. Если вы положите $c=0$ в вашей формуле, получится ли правильная формула для диагонали прямоугольника?»

«Если высота c начнет увеличиваться, то и диагональ будет увеличиваться. Следует ли это из нашей формулы?»

«Если все три измерения a, b, c параллелепипеда возрастут в одно и то же число раз, то и диагональ возрастет в то же число раз. Если подставить в нашу формулу вместо a, b, c, соответственно, $100a$, $100b$, $100c$, то в результате этой подстановки длина диагонали должна будет умножиться на 100. Так ли это на самом деле?»

«Если a, b, c, измерены в метрах, наша формула дает длину диагонали тоже в метрах. Если все данные размеры перевести в сантиметры, формула должна будет остаться правильной. Так ли это на самом деле?»

(Два последних вопроса по существу равносильны, см. Проверка по размерности.)

Эти вопросы полезны с различных точек зрения. Во-первых, на сообразительного учащегося производит впечатление тот факт, что наша формула выдержала столь многочисленные испытания. Он был и ранее убежден, что формула верна, так как он тщательно проделал ее вывод. Но теперь он убежден в этом в значительно большей степени, причем его убеждение имеет совершенно иной источник, а именно: нечто вроде «экспериментальной очевидности». Затем благодаря вышеприведенным вопросам детали формулы приобретают новый смысл и сопоставляются с новыми разнообразными фактами. Поэтому возрастает вероятность того, что формула не будет забыта. Наконец, эти вопросы легко могут быть перефразированы применительно к аналогичным задачам.

Приобретя некоторый опыт в решении подобных задач, сообразительный учащийся воспримет лежащие в основе этих вопросов общие идеи, т. е. использование всех существенных данных, изменение данных, симметрию, аналогию. Если он приобретет привычку проводить всякий раз исследование в этих направлениях, то это будет означать существенный шаг вперед в овладении искусством решения задач.

Нельзя ли проверить ход решения? В трудных и важных случаях может оказаться необходимым снова, шаг за шагом, проверить весь ход решения. Однако обычно достаточно выбрать для проверки несколько «узловых» пунктов. В нашем случае можно рекомендовать рассмотреть дополнительно вопрос, за который не стоило браться, пока решение задачи еще не было получено: Можете ли вы *доказать*, что треугольник со сторонами x, y, c — прямоугольный? (См. конец п. 12.)

Нельзя ли использовать полученный результат или метод решения в какой-нибудь другой задаче? После одного-двух примеров учащиеся, уверовавшие в свои силы, легко найдут приложения, существо которых будет состоять в *конкретной интерпретации* задачи, поставленной в абстрактной математической форме.

Сам учитель пользовался такой конкретной интерпретацией, когда он рассматривал классную комнату в качестве параллелепипеда, о котором шла речь в задаче. Слаборазвитый учащийся может предложить «новое» приложение использованного метода, а именно: вычислить диагональ не классной комнаты, а соседней кафетерии. Если учащиеся не смогут самостоятельно придумать ничего действительно нового, учителю придется самому предложить задачу, слегка отличающуюся от прежней, например: «Даны длина, ширина и высота прямоугольного параллелепипеда; найти расстояние от его центра до одной из вершин».

Учащиеся могут использовать *результат* только что решенной задачи, усмотрев, что искомое расстояние есть половина ранее вычисленной диагонали. Или они могут использовать *метод*, введя подходящие прямоугольные треугольники (последняя возможность менее очевидна и приводит к несколько менее изящному решению).

Разобрав это приложение предыдущей задачи, учитель может рассмотреть четыре диагонали параллелепипеда и шесть пирамид, для которых шесть его граней являются основаниями, центр — общей вершиной, а полудиагонали — боковыми ребрами.

Когда геометрическое воображение учащихся в достаточной мере пробудилось, учителю следует вернуться к вопросу: *нельзя ли использовать полученный результат или метод в какой-нибудь другой задаче?* Теперь, конечно, больше шансов, что учащиеся придут к какой-нибудь более интересной конкретной интерпретации задачи, например к следующей:

В центре плоской прямоугольной крыши длиной 21 *м* и шириной 16 *м* нужно установить мачту высотой 8 *м*. Мачта должна быть укреплена четырьмя оттяжками. Оттяжки выходят из одной и той же точки мачты, лежащей на 2 *м* ниже ее вершины, и идут к четырем углам крыши. Какова длина каждой оттяжки?

Учащиеся могут использовать *метод* прежней детально рассмотренной задачи, введя один прямоугольный треугольник в вертикальной плоскости и другой — в горизонтальной. Или они могут использовать *результат*, вообразив прямоугольный параллелепипед, диагональю которого служит одна из оттяжек, а ребра которого следующие:

$$a = 10{,}5 \qquad b = 8 \qquad c = 6.$$

Непосредственное применение формулы дает: $x = 14{,}5$.

Дальнейшие примеры приведены в статье «Словаря»: Нельзя ли использовать результат?

15. Различные способы. Мы продолжим рассмотрение задачи, которой мы занимались в пп. **8, 10, 12, 14.** Заметим, что учитель мог бы действовать по-другому. Отправляясь от того же исходного пункта, как и в пункте **10,** он мог бы пойти несколько иным путем, задавая следующие вопросы:

«*Известна ли вам какая-нибудь родственная задача?*» «Известна ли вам какая-нибудь *аналогичная* задача?»

«Обратите внимание на то, что предложенная вам задача относится к геометрии в пространстве. Можете ли вы придумать более простую аналогичную задачу, которая относилась бы к геометрии на плоскости?»

«Посмотрите, в предложенной задаче мы имеем дело с пространственной фигурой, речь идет о диагонали прямоугольного параллелепипеда. В какой аналогичной задаче мы имели бы дело с плоской фигурой? При этом речь должна была бы идти о диагонали... чего?»

«Прямоугольника».

Учащиеся, даже если они очень несообразительны и безразличны и до сих пор были не в состоянии ничего придумать, вынуждены теперь волей-неволей принимать участие, хотя бы и скромное, в поисках идеи решения. Кроме того, если учащиеся столь несообразительны, учителю не следует приступать к задаче о параллелепипеде, предварительно не подготовив к ней учащихся при помощи задачи о прямоугольнике.

Теперь учитель может продолжить диалог следующим образом: «*Вот задача, родственная с вашей и уже решенная. Нельзя ли воспользоваться ею?*

Нельзя ли ввести какой-нибудь вспомогательный элемент, чтобы стало возможно воспользоваться прежней задачей?»

В конце концов, учителю может удастся натолкнуть учащихся на нужную мысль. Она состоит в том, чтобы диагональ данного параллелепипеда рассматривать как диагональ некоторого прямоугольника, который должен быть указан на чертеже (пересечение параллелепипеда с плоскостью, проходящей через два противоположных ребра). Существо идеи такое же, как выше, в пункте **10**, но подход к ней здесь иной. В пункте **10** контакт с теми знаниями, которыми располагают учащиеся, был осуществлен через неизвестное; ранее решенная задача привлекла тогда наше внимание, потому что в ней было то же самое неизвестное. В настоящем же пункте идея решения была найдена при помощи аналогии.

16. Методика задавания вопросов, показанная в действии в пунктах **8**, **10**, **12**, **14**, **15**, в своем существе заключается в следующем: начинайте с общего вопроса или совета из нашей таблицы; затем, если необходимо, спускайтесь постепенно к более частным и конкретным вопросам и советам, пока вы не дойдете до вопроса, соответствующего уровню развития учащихся. Если вы хотите помочь учащемуся реализовать свою идею, начните снова с общего вопроса или совета, содержащегося в таблице, затем, если нужно, спускайтесь к более частному и т. д.

В своем настоящем виде наша таблица может быть применена, вероятно, в большинстве простых случаев. Однако, будучи первой таблицей в этом роде, она без сомнения, может быть усовершенствована. Тем не менее, важно, чтобы исходные советы были простыми, естественными и общими, а таблица — достаточно короткой [1].

---

[1] В свете сказанного читателю будет полезно ознакомиться с кратким вариантом таблицы Пойа, который можно с успехом использовать в виде классного учебного плаката (см. Приложение). Мы заимствуем эту форму таблицы из журнала L'Enseignement mathematique, т. XXX, № 4—5—6. (Примечание к русскому переводу.—*Ред.*)

Советы должны быть простыми и естественными, иначе они не будут *ненавязчивыми*.

Советы должны быть общими, применимыми не только к данной задаче, но ко всевозможным задачам, если они имеют целью развить *способности* учащегося, а не просто какой-нибудь частный технический навык.

Таблица должна быть короткой, чтобы вопросы из нее повторялись достаточно часто; применяться они должны естественно и в разнообразных ситуациях. Тогда, вероятно, они будут в конце концов усвоены учащимся и обратятся в *привычную функцию его ума*.

Необходимо спускаться к более частным советам постепенно, чтобы учащемуся доставалась наибольшая возможная *доля работы*.

Описанный метод задавания вопросов не есть нечто незыблемое, и это хорошая черта его, так как любой твердо установленный, педантичный, механический образ действий оказался бы здесь по необходимости плохим. Наш метод допускает известную гибкость, известные видоизменения; он допускает различные подходы к задаче (п. 15); он может и должен применяться так, чтобы вопросы учителя *могли бы прийти в голову и самим учащимся*.

Если учитель пожелает испытать предложенный здесь метод в своем классе, он должен будет, конечно, действовать осторожно. Ему следует внимательно изучить пример, рассмотренный в п. 8, и дальнейшие примеры в пунктах 18, 19, 20. Он должен тщательно подготовить примеры, которые он намерен рассмотреть, предусмотрев обязательно различные подходы к ним.

Начать следует с нескольких проб, чтобы выяснить, как он сам владеет методом, как учащиеся воспринимают этот метод и как много времени приходится при этом расходовать.

17. Хорошие вопросы и плохие вопросы. Метод задавания вопросов, изложенный в предыдущем пункте, если он хорошо понят, оказывает помощь при сравнительной оценке рекомендаций, которые могут быть даны учащимся в процессе решения задачи.

Вернемся к ситуации, возникшей в начале пункта 10, когда был задан вопрос: *известна ли вам какая-нибудь родственная задача?* Вместо этого, имея самые благие намерения, учитель мог бы спросить: *нельзя ли здесь применить теорему Пифагора?*

Намерения могли быть похвальными, но вопрос оказался бы никуда не годным. Мы должны вспомнить, при каких обстоятельствах он был задан; тогда нам станет ясно, что против «помощи» подобного сорта можно выдвинуть целую вереницу возражений.

1) Если учащийся достаточно приблизился к решению задачи, то он поймет рекомендацию, заключающуюся в последнем вопросе; в противном случае, очень вероятно, что он не сможет сообразить, куда клонит учитель, задавая этот вопрос.

Таким образом, вопрос окажется не в состоянии помочь тогда, когда помощь нужна более всего.

2) Если совет понят, он сразу выдает весь секрет. На долю учащегося остается слишком мало.

3) Наш совет носит слишком частный характер. Даже если учащийся извлек из него пользу, решая данную задачу, он не научился ничему, что пригодилось бы при решении будущих задач. Вопрос не поучителен.

4) Даже поняв совет, содержащийся в последнем вопросе, учащийся вряд ли поймет, как учитель пришел к мысли задать такой вопрос. Каким образом он, учащийся, сам мог бы додуматься до него? Вопрос появился как кролик, вынутый из шляпы, произведя впечатление непостижимого фокуса. Вопрос, действительно, не поучителен.

Ни одно из этих возражений не может быть выдвинуто против методики, описанной в пункте **10** или в пункте **15**.

ДАЛЬНЕЙШИЕ ПРИМЕРЫ

18. Задача на построение. *Вписать квадрат в данный треугольник так, чтобы две вершины квадрата принадлежали основанию, а каждая из двух остальных — боковой стороне треугольника.*

«*Что неизвестно?*»

«Квадрат».

«*Что дано?*»

«Только треугольник, больше ничего».

«*В чем состоит условие?*»

«Четыре вершины квадрата должны лежать на периметре треугольника, две вершины — на основании, и по одной на каждой из боковых сторон».

«*Возможно ли удовлетворить условию?*»

«Наверное, да. Но точно я не знаю».

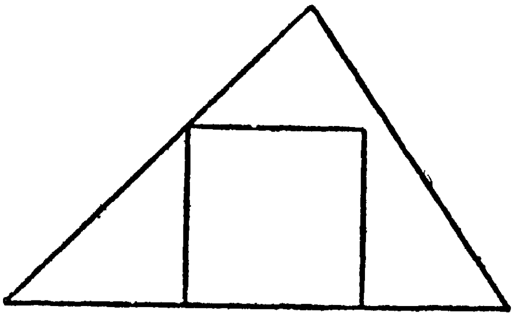
«Вероятно, задача не кажется вам чересчур легкой. *Если не удается решить данную задачу, попытайтесь сначала решить сходную.* Можно ли удовлетворить *части условий?*»

«А что значит „часть условий"?»

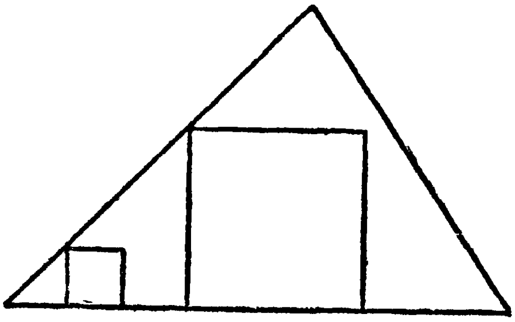
«Посмотрите-ка, условие касается всех вершин квадрата. Сколько всего вершин у квадрата»?

«Четыре».

«Часть условий должна касаться не всех четырех вершин, а меньшего числа вершин. *Сохраните только часть условий, отбросив остальные.* Какой части условий легко удовлетворить?»



Фиг. 2.



Фиг. 3.

«Легко начертить квадрат с двумя вершинами на периметре треугольника или даже с тремя вершинами на периметре!»

«*Сделайте чертеж*!»

Учащийся чертит фигуру 2.

«Вы *сохранили только часть условий и отбросили остальные. Насколько определенным осталось теперь неизвестное?*

«Квадрат не определен, если только три его вершины лежат на периметре треугольника».

«Очень хорошо! *Сделайте чертеж*».

Учащийся чертит фигуру 3.

«Квадрат, как вы сказали, не определен *той частью условий, которую вы сохранили. Как он может меняться?*»

. . . .

«Три вершины вашего квадрата лежат на периметре треугольника, но четвертая вершина пока не там, где она должна быть. Квадрат, как вы сказали, не определен, он может меняться; поэтому его четвертая вершина может перемещаться. *Как она может перемещаться?*»

. . . .

«Поэкспериментируйте, если угодно. Постройте еще несколько квадратов с тремя вершинами на периметре, как у тех двух, которые уже начерчены. Начертите маленькие и большие квадраты. Каково геометрическое место четвертых вершин квадратов? *Как перемещается четвертая вершина, когда меняется квадрат?*»

Учитель подвел учащегося вплотную к идее решения. Если учащийся в состоянии догадаться, что геометрическое место четвертых вершин есть прямая, решение у него в руках.

19. Задача на доказательство. *Два угла лежат в различных плоскостях, причем каждая сторона одного параллельна соответствующей стороне другого и одинаково с ней направлена. Доказать, что эти углы равны.*

Нам предстоит доказать одну из основных теорем стереометрии. Задачу можно предложить учащимся, основательно изучившим планиметрию и знакомым с теми немногими фактами стереометрии, которые подготовляют эту теорему в «Началах» Евклида. (Сформулированная выше теорема, которую мы сейчас докажем, есть 10-е предложение из XI-й книги Евклида.)

Ниже будут набраны курсивом не только вопросы и советы, взятые из нашей таблицы, но и другие, относящиеся к ним так, как «задачи на доказательство» относятся к «задачам на нахождение». (Взаимное отношение этих задач рассматривается в статье «Словаря» Задачи на нахождение, задачи на доказательство, пп. 5, 6.)

«*Какова предпосылка*[1] *теоремы?*»

«Два угла лежат в разных плоскостях. Каждая сторона одного параллельна соответствующей стороне другого и одинаково с ней направлена».

«*Каково заключение*[1] *теоремы?*»

«Эти углы равны».

«*Сделайте чертеж. Введите подходящие обозначения*».

Учащийся делает чертеж, подобный фигуре 4, и выбирает при большей или меньшей помощи учителя аналогичные обозначения.

[1] Вместо терминов «предпосылка теоремы» и «заключение теоремы» в русской литературе часто употребляются названия «условие теоремы» и «утверждение теоремы». В нашем переводе мы следуем терминологии, принятой в книге С. А. Богомолова, Геометрия (систематический курс), Учпедгиз, 1949; эта терминология ближе к применяемой Пойа. (Примечание к русскому переводу.— *Ред.*)

«В чем состоит предпосылка теоремы?—Сформулируйте ее, используя введенные обозначения».

«$\angle BAC$ и $\angle B'A'C'$ лежат в различных плоскостях. При этом $AB \parallel A'B'$ и $AC \parallel A'C'$. Кроме того, AB направлена так же, как $A'B'$, а AC так же, как $A'C'$».

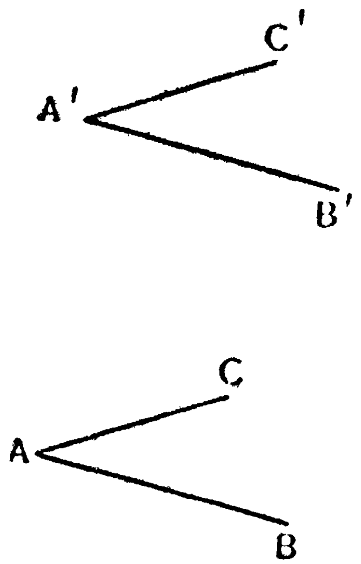
«В чем состоит заключение теоремы?»

$$«\angle BAC = \angle B'A'C'».$$

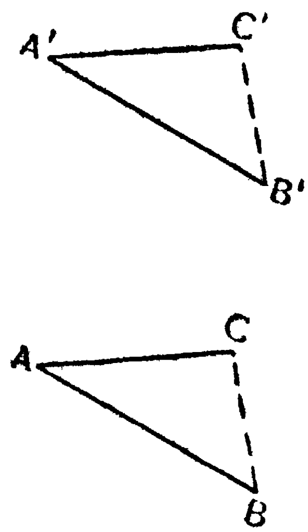
«Рассмотрите заключение. И постарайтесь вспомнить знакомую теорему с таким же или подобным заключением».

«Если два треугольника равны, то их соответственные углы равны».

«Прекрасно! *Вот теорема, сходная с вашей и уже доказанная. Нельзя ли воспользоваться ею?»*



Фиг. 4.



Фиг. 5.

«Наверное, можно, но мне еще не ясно, как».

«Не требуется ли ввести какой-нибудь вспомогательный элемент, чтобы стало возможно воспользоваться прежней теоремой?»

. . . .

«В теореме, которую вы так удачно вспомнили, речь идет о треугольниках, именно о двух равных треугольниках. Есть ли у вас на чертеже какие-нибудь треугольники?

«Нет. Но я мог бы их построить. Например, я соединю B и C, B' и C'. Тогда получатся два треугольника, $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$». (Фиг. 5.)

«Неплохо. Но для чего нужны эти треугольники?»

«Чтобы доказать утверждение, что $\angle BAC = \angle B'A'C'$».

«Хорошо! Если вы это хотите доказать, какие вам тогда нужны треугольники?»

«Мне нужны равные треугольники. Да, ведь, конечно, я могу выбрать B, C и B', C' так, чтобы

$$AB = A'B', \qquad AC = A'C'».$$

«Превосходно! Так что же вы будете теперь доказывать?»

«Я хочу доказать, что треугольники равны:

$$\triangle ABC = \triangle A'B'C'.$$

Если бы я мог это доказать, отсюда немедленно следовало бы, что $\angle BAC = \angle B'A'C'$».

«Великолепно! У вас теперь новая цель — доказать новое заключение. *Рассмотрите заключение! И постарайтесь вспомнить знакомую теорему с таким же или подобным заключением*».

«Два треугольника равны, если три стороны одного соответственно равны трем сторонам другого».

«Неплохо. Любая другая теорема оказалась бы здесь хуже. Теперь вы *располагаете теоремой, сходной с вашей и уже доказанной. Нельзя ли воспользоваться ею?*»

«Я бы смог воспользоваться ею, если бы я знал, что $BC = B'C'$».

«Верно! Так какова же теперь ваша цель?»

«Доказать, что $BC = B'C'$».

«*Постарайтесь вспомнить знакомую теорему с таким же или подобным заключением*».

«Да, я знаю теорему, которая заканчивается так: «...тогда два отрезка равны». Но она сюда не подходит».

«*Не требуется ли ввести какой-нибудь вспомогательный элемент, чтобы стало возможно воспользоваться прежней теоремой?*»

. . . . . .

«Скажите, каким образом можно доказать, что $BC = B'C'$, если на чертеже BC и $B'C'$ никак не связаны?»

. . . . . .

«*Использовали ли вы предпосылку? В чем она состоит?*»

«Мы предположили, что $AB \| A'B'$ и $AC \| A'C'$. Да, конечно, это нужно использовать».

«*Всю ли предпосылку вы уже использовали?* Вы говорите, что $AB \| A'B'$. Известно ли вам еще что-нибудь об этих отрезках?»

«Да. $AB = A'B'$ по построению. Эти отрезки параллельны и равны друг другу. И отрезки AC и $A'C'$ тоже».

«Два параллельных отрезка равной длины — любопытная конфигурация! *Не встречалась ли она вам прежде?*»

«Конечно! В параллелограмме! Нужно только соединить A и A', B и B', C и C'».

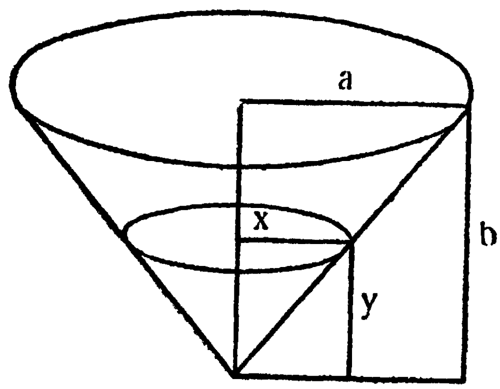
«Мысль недурна. Сколько теперь у вас на чертеже параллелограммов?»

«Два. Нет, три. Нет, два. Т. е. относительно двух можно сразу доказать, что они — параллелограммы. Имеется и третий, который как будто тоже параллелограмм. Думаю, что мне удастся доказать, что он на самом деле параллелограмм. А тогда все доказательство будет закончено!»

И прежние ответы учащегося свидетельствовали о том, что он сообразителен. Но последнее его замечание не оставляет в этом никакого сомнения.

Этот учащийся оказался в состоянии догадаться об определенном математическом факте и четко различать между догадкой и доказательством. Ему также известно, что догадки могут быть более или менее правдоподобными. Он безусловно вынес пользу из своих занятий математикой; он приобрел опыт в решении задач, он в состоянии найти удачную идею и использовать ее.

20. Задача на определение скорости процесса. *Вода поступает в конический сосуд со скоростью r (объем воды, поступающей в единицу времени). Сосуд имеет форму прямого кругового конуса с вертикальной осью, обращенного вершиной вниз; радиус основания равен a; высота конуса равна b.*



Фиг. 6.

Найти скорость подъема уровня воды в момент, когда высота воды равна y. Найти числовое значение неизвестного, если $a = 4$ м, $b = 3$ м, $r = 2\ \frac{м^3}{мин}$, $y = 1$ м.

Преполагается, что учащимся известны простейшие правила дифференцирования и понятие «скорости изменения» переменной величины.

«Что дано?»

«Радиус основания конуса $a = 4$ м; высота конуса $b = 3$ м, скорость, с которой вода наливается в сосуд, $r = 2\frac{м^3}{мин}$ и высота воды в определенный момент $y = 1$ *м*».

«Правильно. Задача поставлена, видимо, так, чтобы натолкнуть вас на мысль, не обращая пока внимания на числовые значения данных величин, выразить неизвестное через a, b, r, y и лишь потом подставить данные числовые значения в полученное выражение. Я бы так и сделал. Итак, *что же неизвестно?*»

«Скорость, с которой уровень поднимается, когда высота воды равна y».

«Как это понять? Нельзя ли это выразить другими словами?»

«Скорость, с которой возрастает высота воды».

«А как это понять? *Нельзя ли выразить это еще по-другому?*»

«Скорость изменения высоты воды».

«Это верно, скорость изменения y. Но что значит «скорость изменения»? *Вернитесь снова к определению*».

«Скорость изменения функции есть производная».

«Верно. Но есть ли y функция? Как уже сказали, мы не обращаем внимания на числовые значения y. Можем ли мы представить, что y изменяется?»

«Конечно. Высота воды y увеличивается с течением времени».

«Таким образом, функцией чего является y?»

«Времени t».

«Хорошо. *Введите подходящие обозначения.* Как записать при помощи математических символов „скорость изменения y“?»

$$«\frac{dy}{dt}»$$

«Хорошо. Итак, это и есть ваше неизвестное. Его нужно выразить через a, b, r, y. Кстати, одно из этих данных есть «скорость». Какое именно?»

«r есть скорость, с которой в сосуд наливается вода».

«Как это понять? *Нельзя ли это выразить другими словами?*»

«r есть скорость изменения объема воды в сосуде».

«А как это понять? *Нельзя ли это выразить еще иначе?* Как это можно было бы записать *в подходящих обозначениях?*»

$$«r=\frac{dV}{dt}».$$

«Что такое V?»

«Объем воды в сосуде в момент времени t».

«Прекрасно. Итак, вам нужно выразить $\frac{dy}{dt}$ через a, b, $\frac{dV}{dt}$ и y. Как вы это сделаете?»

. . . . . .

«*Если не удается решить данную задачу, попытайтесь сначала решить сходную*. Если вы еще не усматриваете связи между $\frac{dy}{dt}$ и данными, постарайтесь обнаружить какое-нибудь более простое соотношение, которое, возможно, подведет вас к решению».

. . . . . .

«Видно ли вам, что имеются другие соотношения между рассматриваемыми величинами? Например, разве y и V не зависят друг от друга?»

«Зависят. Когда возрастает y, V также должно возрастать».

«Это и значит, что имеется некоторое соотношение, связывающее y и V. Каково это соотношение?»

«V есть объем конуса с высотой y. Но мне пока неизвестен радиус его основания».

«Но тем не менее его можно рассматривать. Назовите его как-нибудь, например x».

$$«V=\frac{\pi x^2 y}{3}».$$

«Правильно. Что теперь делать с x? Зависит ли x от y?»

«Да. Когда возрастает высота воды y, то растет и радиус свободной поверхности воды x».

«Итак, имеется связь между x и y. Что это за связь?»

«Это ясно. Из подобия треугольников получаем:

$$x:y=a:b».$$

«Видите, мы нашли еще одно соотношение. Я не стал бы им пренебрегать. Не забывайте, что вам нужно найти соотношение, связывающее x и y».

«Понятно. Я могу написать:

$$x=\frac{ay}{b},$$

$$V=\frac{\pi a^2 y^3}{3b^2}».$$

«Отлично. Кажется, это последнее соотношение нам пригодится, не так ли? Но мы не должны забывать нашу цель. *Что неизвестно?*»

«Неизвестно $\frac{dy}{dt}$».

«Вам нужно найти связь между $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dV}{dt}$ и остальными величинами.

А у вас есть связь между y, V и остальными величинами. Что нужно сделать?»

«Продифференцировать! Конечно!

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\pi a^2 y^2}{b^2}\frac{dy}{dt}.$$

Вот и все».

«Великолепно! А как насчет числовых значений?»

«Если $a=4$, $b=3$, $\frac{dV}{dt}=r=2$, $y=1$, то

$$2=\frac{\pi\cdot 16\cdot 1}{9}\cdot\frac{dy}{dt}».$$

ЧАСТЬ II
КАК РЕШАТЬ ЗАДАЧУ

ДИАЛОГ

Мы знакомимся с задачей

С чего мне начать? Начните с формулировки задачи.

Что я могу сделать? Представьте себе задачу как целое, как можно яснее и нагляднее. Пока не вдавайтесь в детали.

Чего я смогу этим добиться? Вам нужно понять задачу, освоиться с ней, запечатлеть ее в своем сознании. Сосредоточивая на задаче свое внимание, вы подготовляете свою память к тому, чтобы извлечь из нее все, что может принести вам пользу.

Мы вникаем в задачу

С чего мне начать? Начните опять с формулировки задачи. Начните тогда, когда задача стала столь ясной и столь прочно запечатлелась в вашем сознании, что вы в состоянии на время расстаться с ней без риска забыть ее.

Что я могу сделать? Разделите задачу на главные элементы. Предпосылка и заключение представляют собой главные элементы «задачи на доказательство»; неизвестное, данные и условие — главные элементы «задачи на нахождение». Изучите главные элементы вашей задачи, рассматривая их поодиночке, затем последовательно одну за другой, затем в разнообразных сочетаниях, сопоставляя каждую деталь с другими деталями и со всей задачей в целом.

Чего я смогу этим добиться? Вы сможете разобраться в деталях задачи, которые впоследствии, вероятно, будут играть определенную роль.

Мы ищем плодотворную идею

С чего мне начать? Начинайте с рассмотрения главных элементов задачи. Начинайте тогда, когда в результате предшествующей работы вы их хорошо уяснили себе и привели в определенную систему, и тогда, когда ваша память наиболее ясна и послушна вам.

Что я могу сделать? Рассмотрите задачу с различных сторон и найдите ее точки соприкосновения с вашими, ранее приобретенными знаниями.

Рассмотрите задачу с различных сторон. Делайте упор на различные элементы, исследуйте различные детали, исследуйте одни и те же детали по нескольку раз, но с различных точек зрения, по-разному сопоставляйте детали, подходите к ним с различных сторон. Пытайтесь усмотреть новое в каждой детали, некоторую новую интерпретацию задачи в целом.

Ищите точки соприкосновения с вашими ранее приобретенными знаниями. Старайтесь вспомнить, что вам помогало прежде в подобных случаях. Пытайтесь увидеть нечто знакомое в том, что вы исследуете, и нечто полезное в том, что оказалось знакомым.

На что я мог бы натолкнуться? На плодотворную идею, может быть, на решающую идею, которая мгновенно указала бы путь к цели.

В чем может состоять плодотворность идеи? Такая идея указывает вам весь путь или его часть; она более или менее ясно подсказывает вам, как нужно действовать. Идеи бывают более или менее полные. Вам повезло, если у вас есть хоть какая-нибудь идея.

Что мне делать с неполной идеей? Надо ее рассмотреть. Если она оставляет впечатление полезной в той или иной мере, вам следует рассмотреть ее подробнее. Если кажется, что на нее можно опереться, нужно проверить, как далеко вы можете продвинуться при ее помощи, и вновь рассмотреть создавшееся положение. Ситуация изменилась благодаря тому, что теперь у вас имеется полезная идея. Рассмотрите создавшееся положение с различных сторон и ищите точки соприкосновения с вашими ранее приобретенными знаниями.

Чего я смогу этим добиться? Вам может повезти, вы можете натолкнуться на новую идею. Возможно, следующая идея приведет вас прямо к решению. Возможно, вам потребуется еще несколько удачных идей и после следующей. Тем не менее вам следует быть благодарным за все новые идеи, в том числе и за скромные, и за расплывчатые, и за вспомогательные, уточняющие расплывчатые или улучшающие другие, не очень удачные. Даже если пока вам не удается натолкнуться на какую-нибудь ценную новую идею, вы должны быть довольны уже тем, что приходите к более полному, более связному, более однородному восприятию задачи.

Мы осуществляем план

С чего мне начать? Начинайте со счастливой идеи, приведшей вас к решению. Начинайте, когда вы уверены в том, что крепко ухватили главную мысль, и чувствуете себя в состоянии проанализировать детали, которые могут понадобиться.

Что я могу сделать? Закрепите свой успех. Выполните во всех деталях те алгебраические или геометрические действия, которые вы предварительно сочли выполнимыми. Убедитесь в правильности каждого шага либо при помощи логических рассуждений, либо при помощи интуитивных рассмотрений, либо, если возможно, обоими способами. Если задача очень сложна, вы можете различать «большие» шаги и «малые» шаги, разделяя каждый большой шаг на несколько малых. Проверяйте вначале большие шаги, а затем переходите к малым.

Чего я смогу этим добиться? Того, что в ваших руках окажется решение, каждый шаг которого будет, без сомнения, правилен.

Мы оглядываемся назад

С чего мне начать? С решения, полного и правильного в каждой своей детали.

Что я могу сделать? Рассмотрите решение с различных сторон и найдите точки соприкосновения с вашими ранее приобретенными знаниями.

Рассмотрите детали решения, стараясь максимально упростить их; обратите внимание на громоздкие части решения и попытайтесь сделать их короче; постарайтесь охватить все решение одним взглядом.

Постарайтесь улучшить малые или большие части решения и усовершенствовать все решение в целом, сделать его интуитивно ясным. Найти для него естественное место в системе ваших ранее приобретенных знаний.

Вглядитесь в метод, приведший вас к решению; постарайтесь выяснить, что в нем является главным, и применить его к другим задачам.

Всмотритесь в результат и попытайтесь использовать его, чтобы решить другие задачи.

Чего я смогу этим добиться? Вы можете найти новое, лучшее решение, можете обнаружить новые интересные факты. Во всяком случае, если вы приобретете привычку рассматривать и оценивать полученные решения указанным образом, вы сможете пополнить свои знания новыми, приведенными в стройную систему и готовыми к применению, и развить свои способности к решению задач.

ЧАСТЬ III

КРАТКИЙ ЭВРИСТИЧЕСКИЙ СЛОВАРЬ

Аналогия есть род сходства. Сходные предметы согласуются друг с другом в некотором отношении, аналогичные предметы согласуются в *определенных отношениях* между их соответствующими частями.

1. Прямоугольник аналогичен прямоугольному параллелепипеду. В самом деле, отношения между сторонами прямоугольника сходны с отношениями между гранями параллелепипеда:

Каждая сторона прямоугольника параллельна и равна одной другой стороне и перпендикулярна остальным.

Каждая грань прямоугольного параллелепипеда параллельна и равна одной другой грани и перпендикулярна остальным.

Условимся называть сторону «граничным элементом» прямоугольника и грань — «граничным элементом» параллелепипеда. Тогда оба предыдущих утверждения мы сможем объединить в одном, в равной степени применимом к обеим фигурам:

Каждый граничный элемент параллелен и равен одному другому граничному элементу и перпендикулярен остальным граничным элементам.

Таким образом, мы выразили определенные отношения, которые оказались общими для двух сравниваемых систем объектов — сторон прямоугольника и граней прямоугольного параллелепипеда. Аналогия между этими системами заключается в общности отношений.

2. Аналогией проникнуто все наше мышление; наша повседневная речь и тривиальные умозаключения, язык художественных произведений и высшие научные достиже-

ния. Степень аналогии может быть различной. Люди часто применяют туманные, двусмысленные, неполные или не вполне выясненные аналогии, но аналогия может достигнуть уровня математической точности. Нам не следует пренебрегать никаким видом аналогии, каждый из них может сыграть определенную роль в поисках решения.

3. Мы можем считать, что нам повезло, если, пытаясь решить данную задачу, мы находим *более простую аналогичную задачу.*

В пункте 15 в первоначальной задаче речь шла о диагонали прямоугольного параллелепипеда; мы пришли к решению, рассматривая более простую аналогичную задачу, в которой речь шла уже о диагонали прямоугольника. Мы сейчас рассмотрим еще один пример того же рода. Пусть нам нужно решить следующую задачу: *Найти центр тяжести однородного тетраэдра.*

Эта задача не из легких, если за нее взяться, не зная интегрального исчисления и слабо зная механику; она представляла собой серьезную научную проблему во времена Архимеда или Галилея.

Таким образом, если мы беремся за ее решение, обладая минимальными предварительными познаниями, мы должны оглянуться в поисках более простой аналогичной задачи.

Соответствующая задача на плоскости приходит в голову совершенно естественно:

Найти центр тяжести однородного треугольника.

Теперь у нас два вопроса вместо одного. Но ответить на два вопроса может оказаться проще, чем на один, при условии, что эти два вопроса связаны разумным образом.

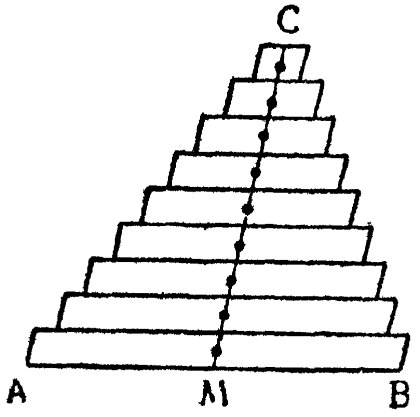
4. Отложив временно в сторону первоначальную задачу о тетраэдре, мы сосредоточиваем наше внимание на более простой аналогичной задаче о треугольнике. Чтобы решить эту задачу, мы должны знать кое-что о центрах тяжести. Следующий принцип кажется правдоподобным и естественно приходит в голову.

Если система масс S состоит из частей, центры тяжести которых лежат в одной и той же плоскости, то в той же самой плоскости лежит также центр тяжести всей системы S.

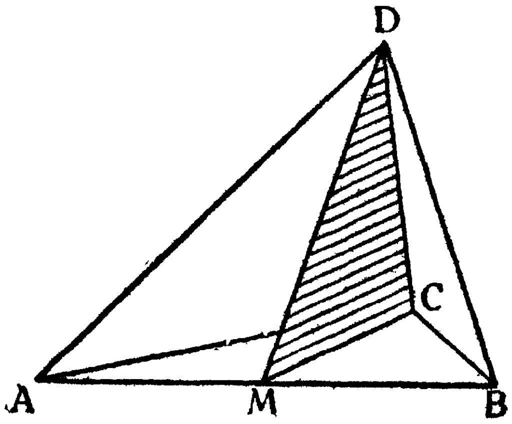
Этот принцип дает все, что нам нужно для исследования случая треугольника. Во-первых, из него следует, что центр тяжести треугольника лежит в плоскости треугольника. Во-вторых, мы можем считать, что треугольник состоит из прямолинейных волокон — «бесконечно узких» параллелограммов, параллельных своими основаниями одной из сторон треугольника (стороне AB на фиг. 7). Центр тяжести каждой полоски (как и любого параллелограмма) совпадает, очевидно, с ее центром. Середины полосок лежат на отрезке, соединяющем вершину C, противоположную стороне AB, с серединой M стороны AB (см. фиг. 7).

Любая плоскость, проходящая через медиану CM нашего треугольника, содержит центры тяжести всех параллельных полосок, составляющих треугольник.

Таким образом, мы приходим к заключению, что центр тяжести всего треугольника лежит на упомянутой медиане.



Фиг. 7.



Фиг. 8.

Но таким же точно образом он обязан лежать на двух других медианах, т. е. он должен совпадать с *точкой пересечения всех трех медиан*.

Теперь желательно убедиться чисто геометрическим путем, независимым от всяких механических предположений, что все три медианы пересекаются в одной точке.

5. После того как случай треугольника исследован, случай тетраэдра не представит особенных трудностей. Мы решили выше задачу, аналогичную предложенной; решив ее, мы получили в руки *образец, которому мы должны следовать*.

Решая аналогичную задачу, которую мы теперь используем в качестве образца, мы считали, что треугольник ABC состоит из волокон, параллельных одной из сторон, например AB. Теперь мы считаем, что тетраэдр $ABCD$ состоит из волокон, параллельных одному из ребер, например AB.

Середины полосок, составляющих треугольник, лежат на одной прямой, на медиане, соединяющей середину M стороны AB с противоположной вершиной C. Середины волокон, составляющих тетраэдр, лежат в одной плоскости, проходящей через середину M ребра AB и противоположное ребро CD (фиг. 8). Эту плоскость MCD мы можем назвать *медианной плоскостью* тетраэдра.

В случае треугольника мы имели три медианы, каждая из которых содержала центр тяжести треугольника. Поэтому три медианы обязаны были пересечься в одной точке — центре тяжести треугольника.

В случае тетраэдра мы имеем шесть медианных плоскостей, проходящих через середины ребер и противоположные ребра; каждая из них содержит центр тяжести тетраэдра. Поэтому шесть этих медианных плоскостей обязаны пересекаться в одной точке — центре тяжести тетраэдра.

6. Таким образом, задача о центре тяжести однородного тетраэдра решена. В заключение решения желательно чисто геометрическим путем, без всяких механических соображений, доказать, что шесть медианных плоскостей тетраэдра проходят через одну и ту же точку.

Решив задачу о центре тяжести однородного треугольника, мы сочли желательным удостовериться, что три медианы треугольника проходят через одну и ту же точку. Эта задача аналогична предыдущей, но явно проще.

Мы снова можем использовать для задачи о тетраэдре более простую аналогичную задачу о треугольнике (которая ниже будет предполагаться уже решенной). В самом деле, рассмотрим три медианные плоскости, проходящие через три ребра — DA, DB, DC с общей вершиной D. Каждая из них проходит через середину противоположного ребра (так, медианная плоскость, проходящая через DC, проходит через M, см. фиг. 8). Итак, эти три медианные плоскости пересекаются с плоскостью $\triangle ABC$ по его трем медианам. Но эти три медианы пересекаются в одной точке (это результат более простой аналогичной задачи). Эта точка точно так же, как и точка D, принадлежит одновременно трем медианным плоскостям. Прямая, проходящая через две точки, каждая из которых принадлежит трем медианным плоскостям, сама принадлежит всем трем медианным плоскостям.

Мы доказали, что те три медианные плоскости, которые проходят через вершину D, проходят через одну и ту же прямую. То же самое, конечно, верно относительно тех трех медианных плоскостей, которые проходят через A, а также через B и через C.

Сопоставляя должным образом эти факты, нетрудно показать, что шесть медианных плоскостей проходят через одну и ту же точку. (Три медианные плоскости, проходящие через стороны $\triangle ABC$, пересекаются в одной точке; через эту точку проходят также три прямые, по которым попарно пересекаются эти плоскости. Но, как мы уже доказали, через каждую линию пересечения должна проходить еще одна медианная плоскость.)

7. В пунктах 5 и 6 мы использовали более простую аналогичную задачу, в которой речь шла о треугольнике, для решения задачи, связанной с тетраэдром. Однако эти два примера отличаются друг от друга в очень важном отношении. В пункте 5 мы использовали *метод* более простой аналогичной задачи, решению которой мы подражали пункт за пунктом. В пункте 6 мы использовали *результат* более простой аналогичной задачи, не интересуясь тем, как этот результат был получен. Иногда мы можем оказаться в состоянии использовать *и метод и результат* более простой аналогичной задачи. Даже предшествующий пример показывает это, если рассматривать рассуждения пп. 5 и 6 как различные этапы решения одной и той же задачи.

Наш пример типичен. Решая данную задачу, мы часто можем использовать решение более простой аналогичной задачи; нам может удастся использовать или ее метод, или ее результат, или то и другое. Конечно, в более трудных случаях могут возникнуть осложнения, не имевшие места в нашем примере. В частности, может случиться, что решение аналогичной задачи не может быть применено непосредственно к решению данной задачи. Тогда может оказаться полезным пересмотреть решение, видоизменяя его до тех пор, пока не удастся представить решение в форме, применимой к исходной задаче.

8. Всегда желательно предугадать результат или, по крайней мере, некоторые его черты с той или иной степенью правдоподобия. Такие правдоподобные догадки часто основываются на аналогии.

Так, пусть нам известно, что центр тяжести однородного треугольника совпадает с центром тяжести трех его вершин (т. е. трех материальных точек одинаковой массы, помещенных в трех вершинах треугольника). Зная это, мы можем предположить, что центр тяжести однородного тетраэдра совпадает с центром тяжести его четырех вершин.

Такая догадка есть «заключение по аналогии». Зная, что треугольник и тетраэдр похожи друг на друга во многих отношениях, мы высказываем догадку, что они похожи друг на друга еще в одном отношении. Было бы нелепо из правдоподобия таких догадок выводить их истинность, но было бы так же (и даже еще более) нелепо пренебрегать этими правдоподобными предположениями.

Заключение по аналогии есть самый обычный вид рассуждения, возможно и самый важный. Оно приводит нас к более или менее правдоподобным предположениям, которые могут подтвердиться или не подтвердиться опытом или более строгими рассуждениями. Химик, экспериментирующий на животных, чтобы предсказать действие своих препаратов на человека, делает выводы по аналогии. Так же поступил и один мальчуган, которого я знал. Его любимую собаку собирались вести к ветеринару, и он спросил:

«А кто такой ветеринар?»

«Тот, кто лечит животных».

«А какое животное лечит животных?»

9. Заключение на основании аналогии, связывающей много параллельных фактов, обладает большей убедительностью, чем сделанное на основании меньшего числа фактов. Однако их качество важнее их количества. Выясненная аналогия обладает большей ценностью, чем отдаленное сходство; факты, приведенные в систему, в состоянии натолкнуть нас на более глубокие идеи, чем факты, собранные случайным образом.

Выше (в п. 8) мы высказали предположение о центре тяжести тетраэдра. Это предположение основывалось на аналогии; случай тетраэдра аналогичен случаю треугольника. Мы можем сделать наше предположение более правдоподобным, рассматривая еще один аналогичный случай — случай однородного прямолинейного отрезка.

Аналогию между отрезком, треугольником и тетраэдром мы обнаруживаем, сравнивая эти фигуры с различных точек зрения. Отрезок принадлежит некоторой прямой, треугольник — плоскости, тетраэдр — пространству. Прямолинейный отрезок есть простейшая одномерная ограниченная фигура; треугольник есть простейший многоугольник; тетраэдр — простейший многогранник.

Отрезок имеет два граничных элемента нулевого измерения (две граничные точки); внутренние точки отрезка образуют одномерное множество.

Треугольник имеет три нульмерных и три одномерных граничных элемента (три вершины, три стороны); внутренние точки образуют двумерное множество.

Тетраэдр имеет четыре нульмерных, шесть одномерных и четыре двумерных граничных элемента (четыре вершины, шесть ребер, четыре грани); внутренние точки образуют трехмерное множество.

Составим таблицу из этих чисел. Последовательные столбцы содержат число нуль-, одно-, дву- и трехмерных элементов; последовательные строчки относятся к отрезку, треугольнику, тетраэдру:

2	1		
3	3	1	
4	6	4	1

Очень небольшого знакомства с биномиальными коэффициентами достаточно, чтобы усмотреть в этой таблице часть треугольника Паскаля. Мы обнаруживаем замечательную закономерность, связывающую случаи отрезка, треугольника, тетраэдра.

10. Если мы убедились в том, что имеется тесная связь между сравниваемыми объектами, «заключение по аналогии», подобное тому, которое мы сейчас выскажем, приобретает в наших глазах больший вес.

Центр тяжести однородного отрезка совпадает с центром тяжести его двух граничных точек. Центр тяжести однородного треугольника совпадает с центром тяжести его трех вершин. Не можем ли мы подозревать, что центр тяжести однородного тетраэдра совпадает с центром тяжести его четырех вершин?

И далее: центр тяжести однородного отрезка делит расстояние между его граничными точками в отношении 1:1. Центр тяжести треугольника делит расстояние между любой вершиной и серединой противоположной стороны в отношении 2:1. Не можем ли мы подозревать, что центр тяжести однородного тетраэдра делит расстояние между любой вершиной и центром тяжести противоположной грани в отношении 3:1?

Кажется крайне невероятным, чтобы догадки, подсказанные этими вопросами, оказались неверными; чтобы такая изящная закономерность рухнула. Чувство того, что гармоничное и простое не может оказаться обманчивым, владеет исследователем и в математических и в других науках и прекрасно выражается латинской поговоркой: simplex sigillum veri, т. е. простота — печать истины.

Все предшествующее наводит на мысль, что рассмотренные факты допускают распространение на n-мерный случай. Кажется невероятным, что то, что оказалось верным для трех первых чисел измерений ($n=1,2,3$), окажется неверным для бóльших значений n. Это предположение есть «заключение по индукции»; оно иллюстрирует то, что индукция естественным образом основывается на аналогии. См. Индукция и математическая индукция.

11. Мы закончим эту статью кратким рассмотрением важнейших случаев, в которых аналогия достигает точности математического понятия.

(I) Две системы математических объектов, скажем S и S', таковы, что определенные отношения между объектами из S подчиняются тем же законам, что и отношения между объектами из S'.

Этот вид аналогии между S и S' может быть проиллюстрирован на примере, разобранном в пункте 1; достаточно принять за S стороны прямоугольника, а за S' — грани прямоугольного параллелепипеда.

(II) Между объектами двух систем, S и S', существует одно однозначное соответствие, сохраняющее некоторые отношения. Это означает, что если такое отношение имеет место между объектами одной системы, то же отношение имеет место между соответствующими объектами другой системы. Такая связь между двумя системами объектов есть очень точный вид аналогии, она называется изоморфизмом (или голоэдральным изоморфизмом).

(III) Пусть имеется одномногозначное соответствие между двумя системами S и S', сохраняющее некоторые отношения. Такое соответствие называется мероэдральным изоморфизмом (или гомоморфизмом). Он играет большую роль во многих высших областях математики, особенно в теории групп; здесь мы его не будем рассматривать подробно. Мероэдральный изоморфизм можно считать другим весьма точным видом аналогии.

Блестящая идея или «удачная мысль», или «прозрение» — обычные выражения, обозначающие внезапное продвижение вперед в решении задачи (см. Продвижение и достижение, п. 6). Зарождение блестящей идеи с трудом поддается описанию, хотя и знакомо каждому; не лишено интереса отметить, что весьма выразительное описание ее мы встречаем у такого древнего авторитета, как Аристотель.

Большинство согласится с тем, что возникновение блестящей идеи зависит от нашей «проницательности». Аристотель определяет «проницательность» следующим образом:

«Проницательность есть способность путем догадки уловить существенные связи вещей в течение неощутимо малого времени. Так, например, если вы видите, что некто определенным образом разговаривает с богатым человеком, вы можете мгновенно догадаться, что это лицо пытается занять денег в долг. Или, наблюдая, что луна всегда повернута освещенной стороной к солнцу, вы вдруг осознаете причину этого, догадываясь, что луна светит отраженным солнечным светом»[1].

Первый пример неплох, но довольно тривиален: чтобы догадаться о чем-нибудь в этом роде, что касается богатых людей и денег, не требуется большой проницательности; пришедшую в голову мысль нельзя в этом случае назвать очень блестящей. Однако второй пример производит, действительно, глубокое впечатление на каждого, кто даст себе труд мысленно перенестись в эпоху, когда писались приведенные выше строки.

Мы должны помнить, что современнику Аристотеля приходилось наблюдать за солнцем и звездами, если он хотел знать время суток, ибо в его распоряжении не было наручных часов. Ему приходилось учитывать фазы луны, если он хотел ночью отправиться в дорогу; тогда ведь не было уличных фонарей.

Он был знаком со звездным небом гораздо лучше современного городского жителя, и его природный ум не был сбит с толку непереваренными обрывками астрономических теорий в интерпретации бойких газетчиков. Он видел луну в виде плоского диска, похожего на диск солнца, но гораздо менее яркого. Он, вероятно, поражался, наблюдая беспрерывные изменения формы и положения луны. Ему случалось наблюдать луну также и днем, во время восхода или захода солнца; при этом он заметил, что «светлая часть луны всегда смотрит на солнце»; это было уже значительным

---

[1] Текст слегка изменен. Более точный перевод см. в кн. William Whewell, The Philosophy of the Inductive Sciences (1847), Vol. II, p. 131. (Примечание автора.)

успехом само по себе. И вот, наконец, он обнаруживает, что фазы луны очень напоминают картину, представляющуюся нашему взору, когда мы с разных сторон смотрим на шар, освещенный наполовину боковым источником света. Он начинает представлять себе солнце и луну не в виде плоских дисков, а в виде круглых тел, одно из которых светит собственным, а другое — отраженным светом.

Он постиг существенную связь явлений, приведя свои прежние представления в новую систему мгновенно, «в течение неощутимо малого времени».

Произошел внезапный скачок в его представлениях; ему в голову пришла блестящая мысль, которую не назовешь тривиальной.

Больцано Бернард (1781—1848), логик и математик[1], посвятил значительную часть своего исчерпывающего изложения логики — Wissenschaftslehre — предмету эвристики (т. III, стр. 293—575). Он пишет об этой части своего сочинения:

«Я далек от мысли, что я в состоянии описать здесь какой-либо процесс исследования, который не был бы уже давно известен всем талантливым людям; я не даю никаких обещаний, что вы сможете здесь найти что-либо совершенно новое в этом роде. Но я приложу усилия к тому, чтобы ясно изложить правила и способы исследования, которыми руководствуются все способные люди, не отдавая себе в этом в большинстве случаев никакого отчета. Хотя я далек от иллюзии, что мне удастся даже это, я тем не менее допускаю, что то немногое, что здесь изложено, сможет понравиться иным и получить впоследствии некоторые приложения».

Будущий математик должен быть сообразительным при решении задач, но этого мало. Придет время и ему придется решать серьезные математические проблемы. Поэтому прежде всего ему следует определить, каким именно задачам больше всего соответствуют его природные дарования.

Для него важнейшей частью работы является рассмотрение полученного решения. Анализируя ход своей работы и решение в окончательном виде, он может найти много интересного для изучения. Возможно, он призадумается над

---

[1] О его жизни и деятельности см. книгу: Э. Кольман, Бернард Больцано, изд. АН СССР, М., 1955. (Примечание к русскому переводу.— *Ред.*)

трудностью задачи и над ее главной идеей. Возможно, он попытается выяснить, что мешало ему и что в конце концов помогло ему. Возможно, он обратит внимание на простые интуитивные идеи: *нельзя ли усмотреть его* (результат) *с одного взгляда*? Он может применить различные методы: *нельзя ли получить тот же результат иначе*? Возможно, он попытается глубже понять данную задачу, сравнивая ее с ранее решенными задачами. Он может попытаться придумать новые задачи, которые сможет решить на основании только что завершенной работы: *нельзя ли в какой-нибудь другой задаче использовать полученный результат или метод решения*? Как можно основательнее разобравшись во всех решенных им задачах, он сумеет приобрести упорядоченные, готовые к действию знания.

Будущий математик, как и всякий человек, учится при помощи практики и подражания. Ему следует искать подходящий пример для подражания. Он должен следить за работой хорошего учителя, соревноваться со способными друзьями. К тому же, что, пожалуй, важнее всего, ему не следует ограничивать себя лишь стабильными учебниками; он должен интересоваться книгами хороших авторов и найти себе такого, которому сможет в соответствии со своими природными наклонностями подражать. Его должно радовать все, что кажется ему просто, или поучительно, или красиво. Все это он должен искать. Ему следует решать задачи, выбирая те, которые соответствуют его интересам, размышлять над их решением и изобретать новые задачи. Таким путем и всеми другими путями он должен стараться сделать свое первое важное открытие — ему следует узнать для себя, что ему нравится и что не нравится, раскрыть свои вкусы, свои личные интересы.

Видоизменение задачи. Насекомое старается вылететь через оконное стекло и повторяет эту безнадежную затею снова и снова. Оно не пытается вылететь в рядом расположенное открытое окно, через которое оно попало в комнату. Мышь действует более разумно: попав в клетку, она пытается протиснуться между одними прутьями решетки, затем между другими и т. д. Она варьирует свои попытки, исследует различные варианты. Человек умеет, во всяком случае должен уметь, менять свой подход при решении задач еще более разумно, умеет исследовать различные возможности с бо́льшим пониманием. Человек должен уметь учиться на своих ошибках и недостатках. «Пытайся, пытайся снова» — в этой поговорке заключен совет народной мудрости. Насекомое, мышь и человек следуют этому совету, но если у одного получается более успешно, чем у других, то это происходит потому, что он *видоизменяет свою задачу* более разумно.

1. В конце работы, когда решение задачи нами найдено, мы понимаем ее более точно и ясно, чем это было вначале. Желая перейти от нашего первоначального представления о задаче к более точному, более полному представлению, мы изучаем ее с разных точек зрения, рассматриваем задачу с разных сторон.

Успех в решении задачи зависит от выбора правильного пути подхода, от того, атакуем ли мы крепость с доступной стороны. Чтобы выяснить, какой путь подхода более правильный, какая сторона более доступна, мы рассматриваем задачу с разных точек зрения, подходим с разных сторон, мы *видоизменяем задачу*.

2. Видоизменение задачи существенно. Этот факт имеет различные объяснения. С одной стороны, например, продвижение в решении задачи проявляется в мобилизации и организации ранее усвоенных знаний. Мы вынуждены припомнить ряд необходимых для решения задачи элементов и ввести их в решение задачи. А варьирование задачи помогает нам припомнить такие элементы. Каким образом?

Мы припоминаем при помощи своего рода «действия по связям», называемого «ассоциацией мысли». То, что занимает наши мысли в данный момент, имеет тенденцию вызвать в нашей памяти все, что было связано с ним раньше. (Нет места, да и нет необходимости, более подробно излагать теорию ассоциаций или рассматривать ее ограничения.) *Видоизменяя задачу*, мы вносим новые моменты и, таким образом, создаем новые связи, новые возможности воскресить в нашей памяти все, что имеет отношение к нашей задаче.

3. Без большого напряжения нельзя надеяться решить серьезную задачу. Но от напряженного сосредоточения внимания на одном предмете у нас быстро наступает усталость. Чтобы удержать внимание, предмет, на который оно направлено, должен постоянно меняться.

Если наша работа продвигается успешно, то у нас есть чем заниматься, приходится рассматривать новые моменты, наше внимание занято и наш интерес к работе поддерживается. Но если не удается достичь успеха, то наше внимание колеблется, интерес падает, мы устаем от задачи, наши мысли начинают отвлекаться, и есть опасность, что мы совсем упустим задачу. Чтобы избежать этого, мы должны *поставить себе новый вопрос*, связанный с задачей.

Этот новый вопрос раскрывает перед нами неиспробованные возможности создания связей с ранее приобретенными знаниями, он вселяет надежду на установление новых полезных связей. Новый вопрос *вновь овладевает нашим интересом потому, что видоизменяет задачу*, выявляя новые ее стороны.

4. *Пример.* Найти объем усеченной пирамиды с основаниями, имеющими форму квадрата, если даны: сторона нижнего основания a, сторона верхнего основания b и высота h.

Эта задача может быть предложена классу, который знаком с формулами объема призмы и пирамиды. Если учащиеся не предложат какие-нибудь свои соображения по решению задачи, то учитель может начать решение с *варьирования данных* задачи. Начнем с рассмотрения усеченной пирамиды, у которой $a>b$. Что произойдет, если увеличивать сторону b до тех пор, пока она не станет равной a? Усеченная пирамида превратится в призму, и интересующий нас объем будет равен a^2h. Что произойдет, если уменьшить сторону b до 0? Усеченная пирамида превратится в пирамиду, и искомый объем будет равен $\frac{a^2h}{3}$.

Такое варьирование данных усиливает прежде всего интерес к задаче. Кроме того, оно может натолкнуть нас на мысль о том, что можно как-нибудь использовать результаты приведенных случаев с призмой и пирамидой. Во всяком случае мы нашли определенные свойства окончательного результата, а именно: окончательная формула должна быть такова, что приводится к виду a^2h при $b=a$ и $\frac{a^2h}{3}$ при $b=0$.

Выгодно знать заранее свойства результата, который мы ищем. Эти свойства могут натолкнуть на ценные указания. Во всяком случае, когда мы найдем окончательную формулу, мы сможем проверить ее. Таким образом, у нас есть ответ на вопрос: *сумеете ли вы проверить результат?* (см. эту статью, п. 2.)

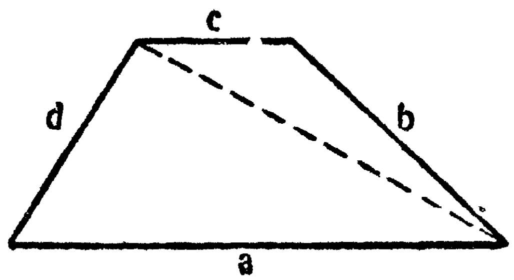
5. *Пример.* Построить трапецию, если даны ее стороны a, b, c и d.

Пусть a будет нижнее основание, c — верхнее основание; a и c — параллельны, но не равны, b и d — не параллельны.

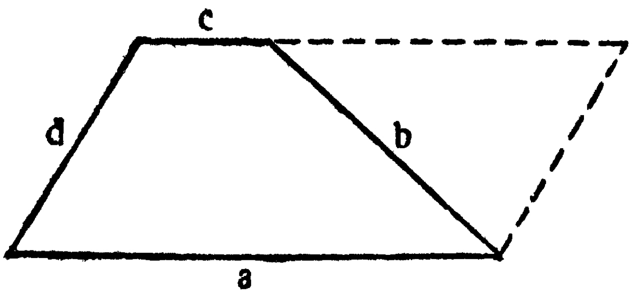
Мы можем начать с варьирования данных задачи, если не можем придумать ничего другого.

Начнем с трапеции, у которой $a>c$. Что произойдет с ней, если уменьшить сторону c до 0? Трапеция превратится в треугольник. А треугольник — знакомая и элементарная фигура, которую мы умеем строить по разным данным. Возможно, нам этот треугольник поможет в построении трапеции. Попытаемся сделать это при помощи одной лишь вспомогательной линии — диагонали трапеции (фиг. 9). Рассматривая этот треугольник, мы видим, что едва ли он нам сможет чем-нибудь помочь. Нам известны две стороны a и d, а мы должны иметь три данных.

Давайте попробуем какой-либо другой способ. Что происходит с трапецией, когда сторона c, увеличиваясь, ста-



Фиг. 9.



Фиг. 10.

новится равной a? Трапеция превращается в параллелограмм. Может быть, использовать его? Изучая чертеж (см. фиг. 10), обращаем внимание на треугольник, который мы прибавили к первоначальной трапеции при построении параллелограмма. Этот треугольник легко построить по трем известным сторонам b, d и $a—c$.

Варьируя первоначальную задачу (построение трапеции), мы пришли к более доступной вспомогательной задаче (построение треугольника). Используя результаты вспомогательной задачи, нам легко решить нашу первоначальную задачу (нужно достроить параллелограмм).

Наш пример типичен. Типично также и то, что наша первая попытка потерпела неудачу.

Возвращаясь к решению, мы можем, однако, заметить, что первый вариант был не так уж бесполезен. Он имел свой смысл, а именно: он навел нас на мысль об использовании треугольника в качестве приема решения задачи. В самом деле, мы пришли ко второму удачному варианту, видоизменяя первый. Мы варьировали сторону c, сначала уменьшая ее, затем увеличивая.

6. Как и в вышеприведенном примере, нам часто приходится рассматривать различные видоизмененные варианты задачи. Мы должны варьировать задачу, находить различные формулировки ее, изменять ее до тех пор, пока, наконец, не удастся найти что-нибудь полезное. Неудача может нас кое-чему научить, в неудачном варианте может быть скрыта хорошая идея, и мы можем прийти к более удачному варианту, *видоизменяя* неудачный. После ряда попыток мы очень часто, как в вышеприведенном примере, приходим к доступной вспомогательной задаче.

7. Имеется ряд определенных способов варьирования задачи, которые часто полезны. К ним принадлежат, например, такие, как возвращение к определениям, разложение и составление новых комбинаций, введение вспомогательных элементов, обобщение, специализация и использование аналогии.

8. Большое значение для правильного пользования нашей таблицей имеет то, что говорилось выше (п. 3) о новых вопросах, которые могут оживить наш интерес к поискам решения задачи.

Чтобы помочь своим ученикам, преподаватель может воспользоваться нашей таблицей. Если ученик успешно справляется с задачей, то он не нуждается в помощи, и учителю следует вместо того, чтобы ставить перед ним какие-либо вопросы, дать ему возможность работать самому. Совершенно очевидно, что для развития у него самостоятельности это полезнее. Но, разумеется, если ученик затрудняется в решении, учителю следует постараться найти соответствующий вопрос или совет, чтобы помочь ему. Иначе есть опасность, что задача надоест ученику и он бросит ее или, потеряв интерес к ней, сделает какую-нибудь грубую ошибку.

Мы можем пользоваться таблицей и для решения своих собственных задач. Пользоваться ею нужно так, как было указано выше. Когда работа успешно продвигается вперед, когда непосредственно в процессе решения возникают новые наблюдения, было бы просто неблагоразумно препятствовать излишними вопросами нашей непринужденной работе. Но когда продвижение приостанавливается, когда нам в голову ничего нового не приходит, есть опасность, что нам задача может надоесть. В этом случае пора подумать о какой-нибудь общей идее, которая могла бы оказаться полезной, о каком-нибудь соответствующем данному случаю вопросе или совете таблицы. И любой вопрос, который может помочь найти новый путь к решению задачи, должен быть желанным. Он может вновь оживить наш интерес к задаче и заставить нас продолжать работу и опять думать над ней.

Вдумчивый решающий задачу человек часто ставит себе такие же вопросы, какие имеются в нашей таблице. Возможно, он сам пришел к вопросам этого рода, возможно, услышав такой вопрос от кого-нибудь, он самостоятельно обнаружит, как пользоваться им при решении задач. Может быть, он и сам не сознает, что все вновь и вновь повторяет тот же шаблонный вопрос. А может быть к данному вопросу у него особая привязанность; он знает, что этот вопрос является частицей его правильных рассуждений на определенном этапе работы и что у него появляется правильный подход именно потому, что он ставит себе правильный вопрос.

Вопросы и советы нашей таблицы могут оказаться полезными для вдумчивого человека при решении задачи. Он может хорошо понимать объяснения и примеры, иллюстрирующие какой-нибудь вопрос, может догадаться, как правильно пользоваться этим вопросом, но настоящего понимания он добьется лишь тогда, когда в своей работе столкнется с тем ходом решения, на который этот вопрос пытается натолкнуть его, а испытав на своем опыте пользу от постановки вопроса, он научится правильному применению этого вопроса.

При разумном подходе к задаче решающий должен всегда быть готов поставить себе все вопросы нашей таблицы, но ни один вопрос не следует ставить, если его не подсказывают результаты тщательного изучения задачи и собственное непредвзятое мнение. В самом деле, решающий задачу сам должен сообразить, в достаточной ли мере данный случай соответствует какому-нибудь другому случаю, в котором он убедился, что вопрос ставился успешно.

Разумно решая задачу, человек прежде всего старается возможно полнее и яснее уяснить себе ее. Однако одного лишь понимания задачи недостаточно; он должен сосредоточить все свое внимание на ней, искренне желать решить ее. Если же у него настоящего желания решить задачу нет, то лучше было бы ему и не браться за нее. Настоящий секрет подлинного успеха заключается в том, чтобы вложить всю душу в решение поставленной задачи.

Вдумчивый читатель книги по математике имеет два желания:

Первое — убедиться в том, что данный шаг в доказательстве правилен.

Второе — уяснить себе цель этого шага.

Вдумчивый слушатель на лекции по математике имеет те же желания. Если он не убежден, что предпринимаемый шаг в доказательстве правильный, и даже сомневается в его правильности, то он может возражать, задавать вопросы. Если же слушателю непонятна цель данного этапа и если он не имеет представления, чем этот шаг вызван, то он обычно не в состоянии даже сформулировать четкое возражение; в этом случае он не возражает, а лишь недоумевает, скучает и теряет нить доказательства.

Вдумчивый педагог и вдумчивый автор учебников должны иметь оба эти соображения в виду. Конечно, необходимо писать и говорить правильно, но этого недостаточно. Вывод, правильно изложенный в книге или на доске, может быть недоступным и ничему не научит, если непонятна цель каждого последовательного этапа, если читатель или слушатель не может понять, как автор додумался до такого доказательства, если изложение не подсказывает ему, как можно самому найти такое доказательство.

Вопросы и советы нашей таблицы могут быть полезны автору и педагогу тем, что подчеркивают цель и мотивы их доводов. В этом отношении особенно полезен вопрос: в с е л и д а н н ы е в ы и с п о л ь з о в а л и? Этим вопросом автор или учитель может обосновать повод для рассмотрения пока еще неиспользованного данного. Читатель или слушатель может воспользоваться тем же вопросом, чтобы понять, почему автор или преподаватель рассматривает такой-то элемент, и он может почувствовать, что если бы он задал себе этот же вопрос, он сам бы смог найти этот шаг в доказательстве.

Возможно ли удовлетворить условию? *Достаточно ли условие для определения неизвестного? Или недостаточно? Или чрезмерно? Или противоречиво?*

Эти вопросы часто полезны на ранней стадии, когда нужен не окончательный ответ, а лишь предварительный ответ, догадка. Примеры вы найдете в пунктах 8, 18.

Полезно предвидеть какую-нибудь характерную особенность результата, которого мы добиваемся. Когда у нас есть некоторое представление об окончательном результате, мы лучше знаем, в каком направлении следует работать. Важной характеристикой задачи является количество ее возможных решений. Из всех задач наиболее интересны те, которые допускают лишь одно единственное решение; мы склонны считать задачи с одним решением единственно «разумными» задачами. Наша задача в этом смысле «разумна»? Если нам удастся ответить на этот вопрос хотя бы правдоподобной догадкой, наш интерес к задаче возрастет и мы сможем лучше работать.

«Разумна» ли наша задача? Этот вопрос полезен на ранней стадии работы в том случае, если мы сможем легко ответить на него. Если же трудно добиться ответа, то усилия, затраченные на то, чтобы получить его, не будут оправданы, ибо они превысят выигрыш в интересе. То же самое относится к вопросу: «*Возможно ли удовлетворить условию?*» — и другим вопросам того же абзаца таблицы. Следует ставить эти вопросы, так как не исключено, что ответить на них будет легко и ответ покажется правдоподобным, но не следует настаивать на них, если трудно получить ответ или он недостаточно ясен.

Соответствующие вопросы для «задач на доказательство» таковы: *Вероятно ли, что теорема верна? Или вероятнее, что она неверна?* Сама постановка вопроса ясно указывает на то, что мы ожидаем лишь догадку, правдоподобный предварительный ответ.

Вот задача, родственная с данной и уже решенная. Это хорошая новость; мы, безусловно, должны быть довольны, вспомнив решенную прежде задачу, связанную с нашей теперешней задачей. Еще более приятно, если связь эта оказывается тесной, а решение простым. В этом случае весьма вероятно, что прежде решенная задача существенно облегчит решение нашей нынешней задачи.

Рассматриваемая ситуация типична и очень важна. Чтобы ясно представить ее себе, сравним ее с ситуацией, возникающей тогда, когда мы занимаемся какой-либо вспомогательной задачей. В обоих случаях наша цель заключалась в том, чтобы найти решение некоторой задачи A, и мы вводим и рассматриваем другую задачу B, надеясь извлечь из нее определенную пользу.

Разница состоит в нашем отношении к задаче B. В рассматриваемой ситуации нам удалось вспомнить прежнюю задачу B; мы знаем ее решение, но не знаем пока, как его использовать. В другом случае нам удалось придумать новую задачу B; мы знаем (или по крайней мере предполагаем с большой вероятностью), как использовать задачу B, но пока не знаем ее решения.

Характер наших затруднений в отношении задачи B и составляет всю разницу между обоими ситуациями. Преодолев эти затруднения, мы оказываемся в состоянии использовать B в обоих случаях; мы можем использовать результат B или метод решения (см. Вспомогательная задача, п. 3), или, если нам особенно повезло, и то и другое.

В рассматриваемой здесь ситуации мы прекрасно знаем, как решается задача B, но мы не знаем, как из этого извлечь пользу. Поэтому мы спрашиваем себя: *Нельзя ли воспользоваться ею? Нельзя ли применить ее результат? Нельзя ли использовать метод ее решения?*

Наше намерение использовать ранее решенную задачу оказывает определенное влияние на то, как мы воспринимаем и осмысливаем данную задачу. Сопоставляя старую и новую задачи, мы вводим в новую некоторые элементы, игравшие важную роль в старой задаче. Например, пусть задача состоит в том, чтобы найти сферу, описанную около данного тетраэдра. Это задача, относящаяся к геометрии в пространстве. Мы можем вспомнить решенную ранее аналогичную «плоскую» задачу о построении окружности, описанной около данного треугольника. Далее, мы вспоминаем, что в старой «плоской» задаче важную роль играли перпендикуляры к серединам сторон треугольника. Разумно попытаться ввести что-либо аналогичное в рассматриваемую задачу. Таким образом, мы можем прийти к мысли ввести в нашу новую задачу соответствующие вспомогательные элементы — плоскости, перпендикулярные ребрам тетраэдра и проходящие через их середины. Вооруженные этой идеей, мы легко найдем решение данной пространственной задачи, следуя основным этапам решения аналогичной планиметрической задачи.

Приведенный пример типичен. Рассмотрение решенной ранее родственной задачи побуждает нас ввести некоторые вспомогательные элементы; введение этих вспомогательных элементов позволяет нам извлечь все, что можно из прежней задачи. Именно это мы имеем в виду, когда, размышляя о том, как воспользоваться прежней задачей, мы задаем себе вопрос: *не следует ли ввести какой-нибудь вспомогательный элемент, чтобы стало возможно воспользоваться прежней задачей?*

Вот теорема, связанная с вашей и уже доказанная. Это видоизменение рассматриваемого вопроса иллюстрируется примером, рассмотренным в пункте **19**.

Все ли данные вами использованы? Благодаря тому, что в процессе решения задачи наши знания непрерывно активизируются, мы понимаем задачу в конце этого процесса глубже и полнее, чем в начале (см. Продвижение и достижение, п. 1). Но как обстоят дела в этом отношении в данный момент? Достигли ли мы уже того, что нам нужно? Полностью ли мы поняли задачу? *Все ли данные вами использованы? Все ли условие?* Соответствующий вопрос, относящийся к «задачам на доказательство», можно сформулировать так: «*Всю ли предпосылку теоремы вы использовали?*»

1. Чтобы проиллюстрировать сказанное, вернемся к «задаче о параллелепипеде», сформулированной в пункте 8 (и рассматривавшейся в пп. **10, 12, 14, 15**). Может случиться, что ученику придет в голову мысль вычислить диагональ грани, $\sqrt{a^2+b^2}$, но затем он прочно застрянет на этом месте. Учитель может ему тогда помочь, задав вопрос: *все ли данные вы использовали?* Едва ли ученик не заметит, что выражение $\sqrt{a^2+b^2}$ не содержит третьего данного числа c. Поэтому он будет вынужден найти применение этому числу. Таким образом, окажется весьма вероятным, что он подметит прямоугольный треугольник с катетами, равными $\sqrt{a^2+b^2}$ и c, гипотенуза которого есть искомая диагональ параллелепипеда (другая иллюстрация дана в статье «Вспомогательные элементы», п. 3).

Вопросы нашей таблицы, рассматриваемые здесь, очень важны. Приведенный пример ясно показывает, как их применять при построении решения. Они могут помочь нам обнаружить слабое звено в том представлении о задаче, которое мы себе составили. Они могут указать нам отсутствующий элемент. Установив, что мы не использовали в наших рассуждениях определенный элемент, мы стараемся ввести его в рассмотрение.

Таким образом, в наших руках оказывается ключ, определенное направление исследования, которое может привести нас к идее решения.

2. Рассматриваемые вопросы оказываются полезными не только при построении решения, но и при проверке его. Чтобы говорить более конкретным образом, предположим, что нам предстоит проверить доказательство теоремы, предпосылка [1] которой состоит из трех частей, причем каждая из них существенно важна для того, чтобы теорема была справедливой.

Это значит, что если отбросить любую часть предпосылки, теорема перестает быть верной. Поэтому доказательство, в котором не использованы все три части условия, будет порочным. Используется ли в доказательстве *предпосылка* полностью? Используется ли первая часть предпосылки? Где именно? Где используется вторая часть? А третья часть? Отвечая на эти вопросы, мы проверяем доказательство.

Такой способ проверки весьма действенен, поучителен и почти необходим для по-настоящему глубокого понимания теоремы, в особенности, если доказательство ее длинно и громоздко, что прекрасно известно вдумчивому читателю.

3. Вопросы, рассматриваемые здесь, имеют целью выяснить, насколько полно мы вникли в решаемую задачу. Мы, безусловно, неполностью разобрались в задаче, если не приняли в соображение все существенные данные и условия. Понимание задачи не может быть полным и в случае, если мы не знаем смысла какого-либо термина, относящегося к некоторому важному понятию. Поэтому, выясняя, насколько полно мы поняли задачу, нам следует задать себе вопрос: *приняты ли нами во внимание все существенные понятия, содержащиеся в задаче*? (См. Определение, п. 7.)

4. Сделанные замечания, однако, нуждаются в некоторых оговорках и ограничениях. Они могут применяться непосредственно в том виде, в каком они изложены выше, лишь к задачам, которые «правильно поставлены» и «имеют смысл».

Правильно поставленная и имеющая смысл «задача на нахождение» должна содержать все необходимые данные,

---

[1] См. подстрочное примечание на странице 33. (*Ред.*)

ни одно из которых не должно быть лишним; ее условие должно быть в точности достаточным, не будучи ни противоречивым, ни чрезмерным. Решая такую задачу, нам, конечно, предстоит использовать все данные и все условие.

Объектом «задачи на доказательство» является некоторая математическая теорема. Если задача правильно поставлена и имеет смысл, каждая часть ее предпосылки должна быть существенно необходимой для справедливости заключения. Доказывая такую теорему, мы, конечно, обязаны использовать все части ее предпосылки.

Математические задачи, предлагаемые в традиционных школьных задачниках, как правило, бывают правильно поставленными и имеют смысл. Однако на это нельзя очень полагаться; при малейших сомнениях на этот счет мы должны спросить себя: возможно ли удовлетворить условию? Пытаясь дать ответ на этот вопрос или другой, подобный ему, мы можем прийти к уверенности, по крайней мере до некоторой степени, что наша задача поставлена должным образом.

Вопрос, стоящий в заголовке настоящей статьи, и другие, связанные с ним, могут применяться в их рассмотренных выше формах лишь в случае, когда мы знаем, что данная задача имеет смысл и правильно поставлена, или по крайней мере если мы не имеем оснований подозревать противное.

5. Существуют нематематические задачи, которые в определенном смысле «правильно поставлены». Например, хорошие шахматные задачи обязаны иметь лишь одно решение, на доске не должно быть лишних фигур и т. д.

Практические задачи, однако, как правило, далеки от того, чтобы быть правильно поставленными. Применять в этом случае вопросы, рассмотренные в данной статье, можно лишь пересмотрев их самым тщательным образом.

Вспомогательная задача — это задача, которую мы рассматриваем не ради нее самой, а лишь потому, что надеемся, рассматривая ее, приблизиться к решению другой, исходной задачи. Решение исходной задачи представляет собой цель, которой мы желаем достигнуть; решение вспомогательной задачи есть лишь средство, при помощи которого мы пытаемся достигнуть нашей цели.

Насекомое пытается вылететь наружу через оконное стекло, пытается вновь и вновь, не делая ни одной попытки вылететь в соседнее открытое окно, через которое оно проникло в комнату. Человек способен — или по крайней мере ему следует быть способным — действовать более разумным образом. Превосходство человека состоит в том, что он способен обойти препятствие, которое не удается преодолеть «в лоб», что он способен придумать подходящую вспомогательную задачу, если исходная кажется неразрешимой. Поиски вспомогательной задачи представляют собой важный мыслительный процесс. Способность ясно поставить новую вспомогательную задачу, воспринять как новую цель то, что является лишь средством для достижения основной цели,—это тонкое достижение нашего разума. Поэтому очень важно научиться (или научить) разумно оперировать со вспомогательными задачами.

1. *Пример.* Найти x, удовлетворяющий уравнению:

$$x^4-13x^2+36=0.$$

Заметив, что $x^4=(x^2)^2$, мы увидим, что полезно обозначить

$$y=x^2.$$

Мы приходим к новой задаче: найти y, удовлетворяющий уравнению

$$y^2-13y+36=0.$$

Новая задача является вспомогательной; мы намерены использовать ее как средство решения исходной задачи. Неизвестное вспомогательной задачи, y, соответственно называют *вспомогательным неизвестным.*

2. *Пример.* Найти диагональ прямоугольного параллелепипеда, если даны длины трех его ребер, имеющих общую вершину.

Пытаясь решить эту задачу (п. 8), мы можем прийти при помощи аналогии (п. 15) к другой задаче: найти диагональ прямоугольника, если даны длины его двух сторон, имеющих общую вершину.

Новая задача является вспомогательной; мы рассматриваем ее в надежде извлечь из нее некоторую пользу для решения исходной задачи.

3. *Польза.* Польза, которую мы извлекаем, рассматривая вспомогательную задачу, может носить различный характер. Мы можем использовать *результат* вспомогательной задачи.

Так, в примере 1, решив квадратное уравнение для y, мы находим, что y может быть равен 4 и 9, и делаем заключение, что либо $x^2=4$, либо $x^2=9$. Отсюда мы находим все корни исходного уравнения.

В других случаях нам удается использовать *метод* решения вспомогательной задачи. Так, в примере 2 вспомогательная задача относится к геометрии на плоскости; она аналогична исходной задаче, относящейся к геометрии в пространстве, но проще последней. Разумно рассмотреть вспомогательную задачу подобного рода в надежде, что она окажется поучительной, что она даст нам возможность освоиться с определенными методами, действиями, с тем аппаратом, который мы затем сможем использовать, решая исходную задачу. В примере 2 выбор вспомогательной задачи оказался очень удачным; тщательно анализируя ее, мы обнаруживаем, что в состоянии использовать и ее метод и ее результат. (См. п. 15 и «Все ли данные вы использовали?»)

4. *Риск.* Время и усилия, которые мы тратим, решая вспомогательную задачу, расходуются не по прямому назначению. Если исследование вспомогательной задачи оказывается неудачным, время и усилия могут оказаться затраченными впустую. Поэтому мы должны обладать опытом разумного выбора вспомогательных задач, руководствуясь при этом различными соображениями. Так, вспомогательная задача может казаться доступнее исходной, она может казаться поучительной или эстетически привлекательной.

Иной раз единственное преимущество вспомогательной задачи состоит в том, что она нова и таит неизведанные возможности; мы выбираем ее, потому что доведены до усталости безуспешными попытками найти подход к исходной задаче.

5. *Как ее придумать.* Решение исходной задачи часто зависит от того, удалось ли найти подходящую вспомогательную задачу.

К несчастью, не существует безотказного метода, позволяющего находить вспомогательные задачи, так же как не существует безотказного метода, всегда приводящего к решению. Однако существуют вопросы и советы, часто приносящие пользу, такие, как рассмотрите неизвестное. Мы часто приходим к полезным вспомогательным задачам при помощи видоизменения задачи.

6. *Эквивалентные задачи.* Две задачи *эквивалентны*, если решение одной из них приводит к решению другой.

Так, в примере 1, исходная и вспомогательная задачи эквивалентны. Рассмотрим следующие теоремы:

А. Каждый из углов равностороннего треугольника равен 60°.

В. Если в треугольнике все три угла равны друг другу, то каждый из них равен 60°.

Это две различные теоремы. Их предпосылки содержат различные понятия; в одной из них речь идет о равенстве сторон, в другой — о равенстве углов. Но каждая из этих теорем есть следствие другой. Поэтому задача, состоящая в доказательстве А, эквивалентна задаче, состоящей в доказательстве В.

Если требуется доказать А, можно облегчить эту задачу, введя вспомогательную задачу, состоящую в доказательстве В. Доказать теорему В несколько легче, чем теорему А, и, что еще важнее, мы в состоянии *предвидеть*, что теорема В проще; нам это кажется вероятным с самого начала. И в самом деле, теорема В, в которой речь идет только об углах, оказывается более «однородной», чем теорема А, в которой речь идет и об углах и о сторонах.

Переход от исходной задачи к вспомогательной задаче называется *обратимой*, или *двухсторонней*, или *эквивалентной* редукцией, если эти две задачи — исходная и вспомогательная — эквивалентны. Так, редукция от А к В (см. выше) обратима, так же как редукция в примере 1. Обратимая редукция представляет собой в известном отношении наиболее важный и желательный способ введения вспомогательной задачи. Однако вспомогательная задача, не эквивалентная исходной, может оказаться также очень полезной (см. пример 2).

7. *Цепочки эквивалентных вспомогательных задач* часто встречаются в математических рассуждениях. Нам нужно решить задачу А; нам не удается ее решить, но удается обнаружить, что А эквивалентна другой задаче В. Рассматривая В, мы можем прийти к третьей задаче С, эквивалентной В. Продолжая таким же образом, мы сводим С к D и так далее, пока, наконец, не приходим к последней задаче L, решение которой известно или просто. Так как каждая задача эквивалентна предыдущей, то и последняя задача L оказывается эквивалентной исходной задаче А. Таким образом, мы оказались в состоянии вывести решение исходной задачи А из решения задачи L, которая являлась последним звеном в цепочке вспомогательных задач.

Подобные цепочки задач обратили на себя внимание еще греческих математиков, как об этом свидетельствует одно место у Паппа. В качестве иллюстрации мы снова рассмотрим пример 1. Назовем (A) условие, наложенное на неизвестное x:

$$\text{(A)} \qquad x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$$

Один из путей решения состоит в том, что мы преобразуем это условие в некоторое другое, которое назовем (B):

$$\text{(B)} \qquad (2x^2)^2 - 2(2x^2) \cdot 13 + 144 = 0.$$

Заметим, что условия (A) и (B) различны. Они, если так можно сказать, лишь слегка различны; они, конечно, эквивалентны, как легко убедиться, но они безусловно не идентичны.

Переход от (A) к (B) не только законен, но имеет ясную цель, очевидную для всякого, кто знаком с решением квадратных уравнений. Действуя в том же направлении дальше, мы снова преобразуем условие (B) в некоторое другое условие (C):

$$\text{(C)} \qquad (2x^2)^2 - 2(2x^2) \cdot 13 + 169 = 25.$$

Продолжая действовать подобным образом, мы последовательно получаем:

$$\text{(D)} \qquad (2x^2 - 13)^2 = 25;$$

$$\text{(E)} \qquad 2x^2 - 13 = \pm 5;$$

$$\text{(F)} \qquad x^2 = \frac{13 \pm 5}{2};$$

$$\text{(G)} \qquad x = \pm \sqrt{\frac{13 \pm 5}{2}};$$

$$\text{(H)} \qquad x = 3, \text{ или } -3, \text{ или } 2, \text{ или } -2.$$

Каждая из редукций, осуществленных нами, была обратимой. Поэтому последнее условие (H) эквивалентно первому условию (A), так что числа 3, —3, 2, —2 представляют собой все корни исходного уравнения.

Итак, выше мы получили из исходного условия (A) последовательность условий (B), (C), (D), ..., каждое из которых было эквивалентно предыдущему. Этот пункт заслуживает самого пристального внимания. Дело в том, что эквивалентные условия удовлетворяются одними и теми же объектами. Поэтому, найдя все решения, удовлетворяющие новому, эквивалентному условию, мы получаем все решения, удовлетворяющие исходному условию. Но при переходе от первоначального условия к более узкому условию мы теряем решения, а при переходе к более широкому условию мы получаем лишние, побочные решения, не имеющие ничего общего с исходной задачей.

Если, осуществляя последовательные редукции, мы переходим сначала к более узкому, а затем к более широкому условию, мы можем совсем потерять следы исходной задачи. Чтобы избежать этой опасности, мы обязаны тщательно проверять каждое вновь вводимое условие, выясняя, эквивалентно ли оно первоначальному условию. Этот вопрос приобретает еще бóльшую важность, если мы имеем дело не с одним уравнением, а с системой уравнений, или если условие не выражено уравнениями, как, например, в геометрических задачах на построение.

(Сравните Папп, особенно пп. 2, 3, 4, 8. На странице 134 описана цепочка «задач на нахождение», в каждой из которых имеется свое новое неизвестное. Такая именно структура цепочки не является необходимой. Пример, рассмотренный только что, отличается противоположной особенностью: все задачи цепочки имеют одно и то же неизвестное и отличаются лишь формой условия. Конечно, ни одно из этих ограничений не является необходимым.)

8. *Односторонняя редукция.* Пусть у нас есть две задачи, А и В, ни одна из которых не решена. Если бы мы смогли решить А, то мы оказались бы в состоянии получить полное решение В. Но не наоборот: если бы мы смогли решить В, мы бы, возможно, получили некоторые сведения относительно А, но не были бы в состоянии, зная решение В, получить полное решение А. В этом случае решение А дает больше, чем решение В. Будем называть А *более результативной*[1], а В *менее результативной* задачей.

Если от исходной задачи мы переходим к более результативной или менее результативной задаче, такой шаг мы называем *односторонней редукцией*. Оба вида односторонней редукции являются в некотором смысле более рискованными, чем двусторонняя (обратимая) редукция.

Наш пример 2 иллюстрирует одностороннюю редукцию к менее результативной задаче. В самом деле, если бы мы

---

[1] Примечание переводчика. В подлиннике: m o r e a m b i t i o u s (дословно «с большими претензиями»).

могли решить исходную задачу о диагонали параллелепипеда с ребрами a, b, c, мы бы без труда перешли к вспомогательной задаче, положив $c=0$ и получив прямоугольник со сторонами a и b. Другой пример односторонней редукции к менее результативной задаче дан в статье «Специализация», пункты 3, 4, 5. Эти примеры показывают, что нам может посчастливиться извлечь пользу из менее результативной вспомогательной задачи, вводя некоторое дополнительное рассмотрение, которое приводит нас к решению исходной задачи.

Односторонняя редукция к более результативной задаче также может принести пользу. (См. «Обобщение», п. 2, а также редукцию от первой ко второй задаче в статье «Индукция и математическая индукция», пп. 1, 2.) Оказывается, более результативная задача может быть более легкой — в этом состоит Парадокс изобретателя.

Вспомогательные элементы. В конце работы над задачей наше представление о задаче в целом значительно полнее, чем в начале (см. «Продвижение и достижение», п. 1). По мере продвижения вперед мы добавляем новые элементы к первоначально рассматривавшимся элементам. Элемент, который мы вводим в надежде, что он поможет продвинуть вперед решение задачи, называется *вспомогательным*.

1. Существуют различные виды вспомогательных элементов. Решая геометрическую задачу, мы можем дополнить чертеж новыми линиями — *вспомогательными линиями* (отрезками). Решая алгебраическую задачу, мы можем ввести *вспомогательное неизвестное* (см. «Вспомогательные задачи», п. 1). *Вспомогательной теоремой* называется теорема, доказательство которой мы проводим в надежде при ее помощи приблизиться к решению исходной задачи.

2. Соображения, которыми мы руководствуемся, вводя вспомогательные элементы, могут быть самыми разнообразными. Нас радует, если нам удается вспомнить задачу, *сходную с нашей и уже решенную*. Вполне вероятно, что эту задачу можно использовать, но мы еще не знаем, как это сделать. Например, мы пытаемся решить геометрическую задачу. Пусть в некоторой сходной задаче, которую мы решили прежде и теперь вспомнили, речь идет о каких-

то треугольниках. Однако на нашем чертеже нет ни одного треугольника. Чтобы можно было извлечь пользу из найденной нами вспомогательной задачи, чертеж наш должен содержать некоторый треугольник.

Итак, мы должны ввести такой треугольник, дополнив чертеж подходящими вспомогательными отрезками. Вообще, если мы вспомнили ранее решенную сходную задачу и хотим извлечь из нее пользу при решении данной задачи, нам приходится задавать вопрос: *нельзя ли ввести какой-нибудь вспомогательный элемент, чтобы стало возможно воспользоваться прежней задачей?* (Пример из п. 10 является типичным.)

Возвращаясь к определениям, мы снова сталкиваемся с необходимостью вводить вспомогательные элементы. Например, давая определение окружности, мы должны не просто упомянуть о ее центре и радиусе, а указать их на рассматриваемой фигуре. В противном случае мы не сможем извлечь никакой конкретной пользы из этого определения; формулировать определение и при этом ничего не чертить означает заниматься пустыми разговорами.

Попытки использовать известные результаты и возвращение к определениям — наиболее обычные мотивы, заставляющие вводить вспомогательные элементы; но они не единственны. Наша точка зрения на задачу может изменяться, дополняясь новыми элементами, делающими ее более полной, теснее связанной с ранее приобретенными знаниями и в большей степени способной подсказать пути к решению. Однако, добавляя новые элементы, мы зачастую сразу не в состоянии отдать себе отчет в том, как мы сможем их использовать.

Мы можем просто чувствовать, что напали на «блестящую идею», состоящую в том, чтобы по-новому взглянуть на задачу, дополнив ее определенными вспомогательными элементами.

Повод, заставляющий вводить некоторый вспомогательный элемент, может быть тем или иным, но такой повод должен иметься. Не следует вводить вспомогательные элементы, не имея к тому никакого повода.

3. *Пример*. Построить треугольник, если задан угол при одной из его вершин, высота, проведенная из этой же вершины, и периметр.

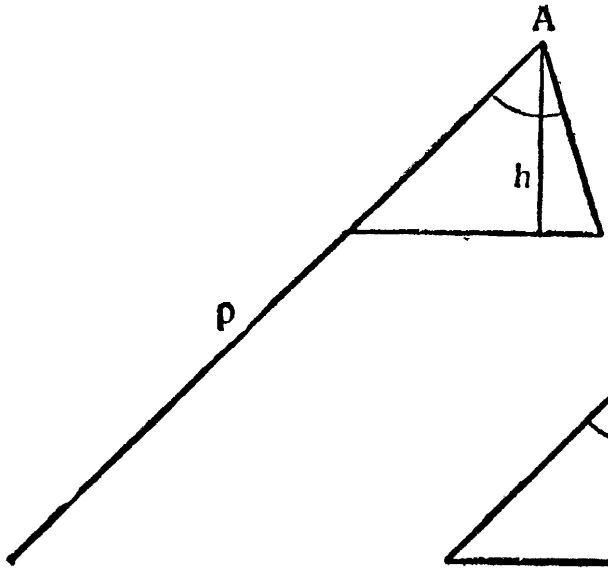
Мы *вводим подходящие обозначения*. Обозначим через α данный угол, через h—данную высоту, проведенную из вершины

A, угол при которой равен α, и через p—данный периметр.

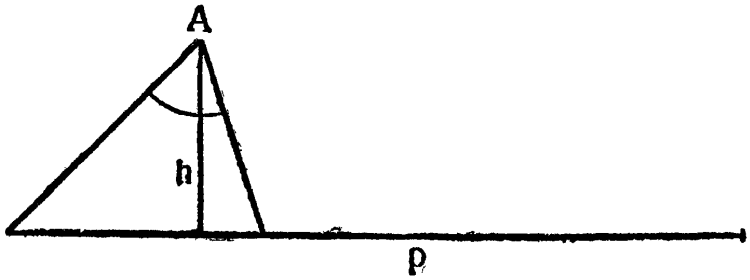
Мы делаем чертеж, на котором отмечаем α и h. *Все ли данные мы использовали?* Нет, на чертеже нет никакого отрезка длины p, равной периметру треугольника. Поэтому мы должны ввести p. Но как?

Мы можем попытаться ввести p различными способами. Попытки, изображенные на фигурах 11, 12, производят впечатление неуклюжих. Пытаясь уяснить причину этого, мы приходим к заключению, что причина — в отсутствии симметрии.

В самом деле, в треугольнике неизвестны три стороны a, b, c (мы, как обычно, через a обозначаем сторону, противолежащую углу A). Нам известно, что



Фиг. 11.



Фиг. 12.

$$a+b+c=p.$$

Итак, стороны b и c играют одну и ту же роль; их можно поменять ролями; наша задача симметрична по отношению к сторонам b и c. Однако b и c не играют одинаковой роли на фигурах 11 и 12. Вводя длину p, мы неодинаковым образом поступили по отношению к b и c. Фигуры 11 и 12 разрушают естественную симметрию задачи по отношению к b и c. Мы должны ввести p симметричным образом по отношению к b и c.

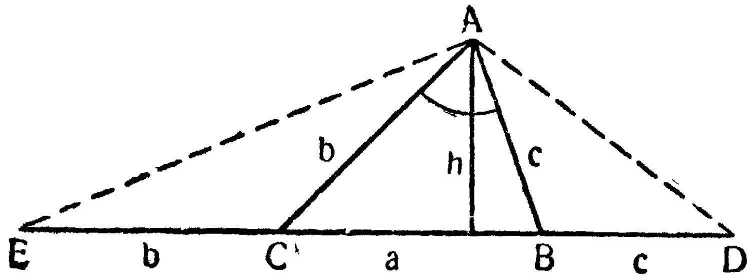
Приведенное соображение может натолкнуть нас на мысль ввести отрезок длины p так, как показано на фигуре 13. На продолжении стороны a мы откладываем отрезок CE длиной b в одну сторону и отрезок BD длиной c— в другую сторону. Таким образом, на чертеже (фиг. 13) оказывается построенным отрезок ED длиной

$$b+a+c=p.$$

Обладая хотя бы самым небольшим опытом решения задач на построение, мы не преминем ввести наряду с ED вспомогательные отрезки AD и AE, каждый из которых является основанием равнобедренного треугольника.

Действительно, в задачу всегда имеет смысл ввести особенно простые и знакомые элементы; такими элементами и являются равнобедренные треугольники в рассматриваемом случае.

Мы очень удачно ввели вспомогательные отрезки. Исследуя полученную фигуру, мы обнаруживаем простое соотношение, связывающее $\angle EAD$ и данный $\angle\alpha$. Действительно, используя равнобедренные треугольники ABD и ACE, мы находим, что $\angle DAE=\frac{\alpha}{2}+90°$. После этого замечания оказывается естественным попытаться построить $\triangle DAE$. Таким образом, решение исходной задачи сведено к решению некоторой — значительно более легкой — вспомогательной задачи.



Фиг. 13.

4. Учителям и авторам учебников не следует забывать, что вдумчивый учащийся и **вдумчивый читатель** остаются неудовлетворенными, если им предлагается готовое рассуждение, в котором проверен каждый шаг,—они хотят знать основания и цель каждого предпринимаемого шага. Введение вспомогательного элемента есть шаг, сразу бросающийся в глаза. Если хитроумная вспомогательная линия появляется на чертеже внезапно, без всякой мотивировки, и задача неожиданно оказывается решенной, вдумчивый учащийся или читатель испытывают разочарование и чувствуют себя обманутыми. Математика интересна тогда, когда дает пищу нашей изобретательности и способности к рассуждениям.

Однако ни изобретательность, ни способность к рассуждениям не получают пищи, если мотивировка и цель наиболее бросающегося в глаза шага остаются неразъясненными. Большого труда и времени требует разъяснение каждого шага при помощи надлежащих замечаний (как в п. 3) или тщательно выбранных вопросов и советов (как в пп. **10**, **18**, **19**, **20**). Но такие разъяснения могут стоить затраченного труда.

Геометрические фигуры. Геометрические фигуры являются предметом исследования в геометрических задачах; однако они оказывают существенную помощь и при решении самых разнообразных задач, в которых вначале нет ничего геометрического. Таким образом, существуют два важных основания, побуждающих нас рассмотреть роль геометрических фигур при решении задач.

1. Если мы имеем дело с геометрической задачей, мы должны рассмотреть некоторую геометрическую фигуру. Эту фигуру мы можем либо представить в нашем воображении, либо изобразить на бумаге в виде чертежа. В некоторых случаях может оказаться желательным вообразить фигуру, но не чертить ее. Однако, если нам предстоит рассматривать одну за другой различные детали, полезно *сделать чертеж.* Если деталей много, мы не в состоянии вообразить их все одновременно, тогда как на бумаге все они будут собраны воедино. Деталь, которую мы воспроизвели мысленно, можно забыть; та же деталь, изображенная на бумаге, сохраняется, так что мы в любой момент можем к ней вернуться вновь. Возвращаясь к ней, мы восстанавливаем в памяти ранее проведенные рассуждения, зрительное восприятие этой детали в значительной степени облегчает работу.

2. Рассмотрим теперь подробнее роль, которую играет чертеж при решении геометрических задач на построение.

Мы начинаем подробно рассматривать подобную задачу, сделав предварительно чертеж, содержащий неизвестное и данные, связанные между собой так, как это предписано условием задачи. Чтобы отчетливо представить себе задачу, мы должны рассмотреть каждое данное и каждую часть условия в отдельности; затем мы объединяем все части, рассматривая условие как единое целое. При этом мы пытаемся одновременно охватить взглядом все многообразные связи, предписанные условием задачи. Едва ли оказалось бы возможным оперировать этими многочисленными деталями, разделять и вновь объединять их, если бы у нас перед глазами не было сделанного на бумаге чертежа.

С другой стороны, пока задача окончательно не решена, нас не покидает сомнение в том, можно ли вообще построить искомую фигуру. Можно ли полностью удовлетворить условию задачи? Мы не имеем права сказать «да», не получив окончательного решения. Тем не менее мы допускаем, что это возможно, и делаем чертеж, на котором данные и неизвестные связаны так, как это предписано условием. Может показаться, что, делая такой чертеж, мы принимаем ничем не оправданное допущение.

Но нет, это не так. Вернее, не всегда так. Мы поступаем правильно, если при рассмотрении задачи допускаем *возможность* существования объекта, удовлетворяющего условию, наложенному на неизвестное, и находящегося в требуемых отношениях к данным. При этом мы не должны лишь смешивать возможность существования такого объекта с уверенностью в его существовании.

Нельзя назвать неправильными действия судьи, который при допросе обвиняемого допускает, что обвиняемый мог совершить данное преступление, если только судья не оказывается в плену своего же собственного предположения. И математик и судья могут рассматривать возможность, не имея никакого предвзятого мнения и откладывая свое окончательное суждение до момента, когда исследование приведет к некоторому определенному результату.

Метод подхода к решению задач на построение, заключающийся в набрасывании чертежа, на котором условие предполагается выполненным, восходит еще к греческим геометрам. Идею этого метода мы можем усмотреть в коротком, несколько загадочном высказывании Паппа: *считай сделанным то, что нужно сделать*. Следующий совет не столь лаконичен, но зато более ясен: *начерти предположительную фигуру, допустив, что условие задачи полностью выполнено.*

Эта рекомендация касается геометрических задач на построение, но в действительности нет нужды в подобном ограничении. Мы можем распространить эту рекомендацию на случай любой «задачи на нахождение», сформулировав ее в следующей общей форме: *рассмотрите предположительную ситуацию, допустив, что при этом условие задачи полностью выполнено.*

Сравните П а п п, п. 6.

3. Сделаем несколько замечаний относительно фактического выполнения чертежей.

(I) Как следует выполнять чертеж — точно или приблизительно, при помощи чертежных инструментов или от руки?

Оба вида чертежей имеют свои преимущества. В принципе точные чертежи играют в геометрии такую же роль, как точные измерения в физике. Практически, однако, точные чертежи менее важны, чем точные измерения, ибо существуют более широкие возможности проверки геометрических теорем по сравнению с возможностями проверки физических законов. Начинающему, однако, рекомендуется выполнить большое число чертежей с максимальной точностью, чтобы приобрести для своих знаний хорошую экспериментальную основу; точный чертеж может натолкнуть на открытие геометрической теоремы, даже весьма тонкой. Тем не менее для проведения рассуждений обычно оказывается достаточно чертежа, тщательно выполненного от руки; к тому же и выполнение его занимает куда меньше времени. Конечно, чертеж не должен выглядеть абсурдно; прямые линии не должны быть волнистыми, а окружности не должны напоминать картофелины.

Неточный чертеж может иногда привести нас к ложному заключению; однако опасность этого невелика, да к тому же есть различные средства избежать ее, в частности видоизменение чертежа. Указанная опасность не возникает, если мы сосредоточиваемся на логических связях, отдавая себе отчет в том, что чертеж помогает нам делать заключения, но никоим образом не является их основой; основой наших заключений являются логические связи. [Все сказанное поучительным образом иллюстрируется хорошо известными парадоксами, основанными на намеренной неточности чертежа.]

(II) Важно, чтобы на чертеже все элементы находились между собой в предписанных отношениях, совершенно неважно, в каком порядке они были построены. Поэтому следует выбрать наиболее удобный порядок. Например, иллюстрируя идею трисекции угла, вы хотите построить два угла, α и β, так, чтобы $\alpha=3\beta$. Отправляясь от заданного угла α, вы не можете построить β при помощи линейки и циркуля. Поэтому вы выбираете достаточно малый, а в остальном совершенно произвольный угол β и, отправляясь от него, без труда строите α.

(III) Ваш чертеж должен обладать общностью; отдельные части фигуры не должны быть расположены каким-либо специальным образом. Эти части не должны находиться между собой в кажущихся отношениях, не требуемых условием задачи. Отрезки не должны, например, казаться равными или перпендикулярными, если это не требуется условием задачи. Треугольники не должны казаться равнобедренными или прямоугольными, если они не обязаны быть таковыми. Треугольник с углами, равными 45, 60 и 75°, является в определенном смысле слова наиболее «отдаленным» и от равнобедренного и от прямоугольного[1]. Если вы хотите рассматривать треугольник «общего вида», уместно брать именно указанный треугольник, или не очень от него отличающийся.

(IV) Чтобы подчеркнуть различную роль различных линий чертежа, можно применять жирные и тонкие линии, сплошные и пунктирные линии или линии различного цвета. Линию следует лишь слегка намечать, пока вы не убедились в том, что она понадобится вам в качестве вспомогательной. Данные элементы можно чертить красным карандашом, другие важные части выделять другим цветом; так, например, одинаковым цветом можно изображать пары подобных треугольников и т. д.

(V) Следует ли для иллюстрации пространственной задачи пользоваться трехмерными моделями или же плоскими чертежами на бумаге или доске?

Трехмерные модели очень желательны, однако требуют больших хлопот для своего изготовления или средств для приобретения. Таким образом, нам приходится довольствоваться плоскими чертежами, хотя их нелегко сделать выразительными. Экспериментирование с картонными моделями очень полезно для начинающих. Неплохо иллюстрировать геометрические понятия на предметах повседневного обихода. Так, коробка, кирпич или классная комната дают прекрасное представление о прямоугольном параллелепипеде; карандаш — о круговом цилиндре, абажур — об усеченном круговом конусе и т. д.

4. Чертежи на бумаге легко чертятся и легко запоминаются. Плоские фигуры особенно хорошо нам знакомы, задачи, связанные с плоскими фигурами, особенно доступны. Из этого обстоятельства мы можем извлечь существенную пользу, если нам удалось придумать подходящее гео-

[1] Пусть углы треугольника равны α, β, γ, причем $90° > \alpha > \beta > \gamma$. Тогда по крайней мере одна из разностей $90° - \alpha$, $\alpha - \beta$, $\beta - \gamma$ меньше 15° за исключением случая, когда $\alpha = 75°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 45°$. Действительно,

$$\frac{3(90° - \alpha) + 2(\alpha - \beta) + (\beta - \gamma)}{6} = 15°$$

(Примечание автора.—*Ред.*)

метрическое представление некоторых негеометрических объектов. В этом случае мы оказываемся в состоянии применить к негеометрической задаче наши способности к решению геометрических задач.

Действительно, геометрические представления негеометрических объектов в виде всевозможных графиков и диаграмм применяются во всех науках; не только в физике, химии и других естественных науках, но также в экономике и даже в психологии.

Применяя подходящую геометрическую интерпретацию, мы пытаемся выразить все на языке геометрических фигур, свести любую задачу к задаче геометрической.

Таким образом, если даже мы имеем дело не с геометрической задачей, мы можем попытаться *сделать чертеж*. Прозрачная геометрическая интерпретация исходной негеометрической задачи может оказаться важным шагом на пути к ее решению.

Головоломки. В пункте 3 мы указывали, что вопросы и советы нашей таблицы полезны при решении всякого рода проблем, независимо от характера их содержания. Любопытно проверить, насколько они пригодны при решении головоломок.

Рассмотрим следующую головоломку. Возьмем, например, слова

А у! О д и н т е т е р е в л и р е!

Задача заключается в том, чтобы найти «анаграмму», т. е. надо так переставить буквы, содержащиеся в данных словах, чтобы получилось одно существительное (в именительном падеже, единственного числа). Интересно отметить, что при решении этой головоломки некоторые вопросы нашего списка вполне уместны и даже стимулируют наши мысли.

Что неизвестно? Слово.

Что дано? Четыре слова: А у о д и н т е т е р е в л и р е.

В чем состоит условие? Искомое слово состоит из семнадцати букв, входящих в эти четыре слова. Вероятно, это слово не такое уж необычное.

Сделайте чертеж. Полезно для каждой буквы наметить тире. Их будет семнадцать.

— — — — — — — — — — — — — — — — —

Сможете ли вы изложить задачу иначе? Мы должны найти одно слово (именительного падежа, единственного числа), состоящее из букв

АЕЕЕЕИИОУ ВДЛНРРТТ.

Это, несомненно, эквивалентная формулировка предложенной задачи (см. «Вспомогательные задачи», п. 6.). Такая переформулировка может быть выгодной. Отделяя гласные от согласных (важно это, а не алфавитный порядок их расположения), мы находим новый аспект задачи, а именно: теперь мы видим, что искомое слово состоит из девяти слогов.

Если данную задачу решить не удается, попытайтесь предварительно решить похожую задачу. Похожей задачей будет составление слов, состоящих из некоторых данных букв. Безусловно, мы можем составить короткие слова такого рода. Затем мы стараемся найти слова из все возрастающего числа букв. Чем больше букв мы используем, тем ближе мы можем подойти к искомому слову.

Нельзя ли решить часть данной задачи? Искомое слово такое длинное, что оно, наверное, состоит из отдельных значимых частей. Возможно, это составное слово или же производное, образованное от другого слова при помощи обычного суффикса.

Какие же обычные суффиксы с окончанием именительного падежа, единственного числа можно подобрать из данных букв?

— — — — — — — — —АНИЕ
— — — — — — — — —ЕНИЕ

Сохраните только часть условий, отбросив остальные. Можно попытаться придумать длинное слово, может быть, даже с девятью слогами с относительно малым количеством согласных и содержащее, скажем, У и Л.

Вопросы и советы нашей таблицы не могут творить чудеса. Они не могут дать для всевозможных головоломок решения, не требующего никаких усилий с нашей стороны. Если читатель хочет найти слово, то он должен продолжать свои поиски и думать о решении. Когда мы склонны бросить задачу, обескураженные отсутствием успеха, вопросы и советы могут подсказать нам новый прием, указать на новый аспект, натолкнуть на новый вариант задачи, оживить наше желание решить задачу. Одним словом, они могут заставить нас продолжать думать над задачей.

В статье «Разложение и составление новых комбинаций», п. 8, вы найдете еще один пример.

Декарт Ренэ (1596—1650), великий математик и философ, имел намерение разработать универсальный метод решения задач. Однако его *«Правила для направления ума»* остались неоконченными. Отрывки из этого трактата, найденные в его бумагах и опубликованные посмертно, содержат больше — и более интересных — материалов относительно решения задач, чем его известное произведение «Discours de la Méthode»[1], хотя очень вероятно, что «Discours» написаны позже «Правил». Следующие строки, принадлежащие Декарту, возможно, объясняют происхождение его «Правил»: «Когда мне приходилось, будучи молодым человеком, слышать о каких-либо искусных умозаключениях изобретательного автора, я пытался воспроизвести их самостоятельно, не читая этого автора. Постепенно я стал замечать, что пользуюсь при этом определенными правилами».

Диагноз — это слово будет применяться нами в качестве специального термина[2], удобного в вопросах образования, означающего «подробная характеристика работы ученика». Школьная отметка лишь грубо оценивает работу ученика. Учитель, стремясь улучшить работу ученика, нуждается в более детальной характеристике его плохих и хороших качеств, подобно тому, как врач, желая улучшить здоровье пациента, нуждается в диагнозе.

В частности, нас интересует, насколько успешно справляется ученик с решением задач. Как можно характеризовать эту сторону его работы? Мы можем извлечь некоторую пользу из того факта, что процесс решения мы разделили на четыре ступени. И в самом деле, поведение учащегося на каждой из этих ступеней достаточно полно характеризует его в рассматриваемом отношении.

Возможно, наиболее широко распространенным при решении задач недостатком является *неполное понимание задачи*,

---

[1] «Рассуждение о методе». (Примечание переводчика.)

[2] Принятого в американской методической литературе. (Примечание к русскому переводу.— *Ред.*)

происходящее от неумения сосредоточить на ней свое внимание. В отношении *составления плана* и поисков общей идеи решения часто наблюдаются две противоположные ошибки.

Некоторые ученики бросаются делать какие-то вычисления и построения, не имея никакого плана или общей идеи; другие беспомощно ожидают появления какой-либо идеи, не делая ничего, что могло бы ускорить ее приход.

При *осуществлении плана* наиболее частые ошибки состоят в невнимательности, отсутствии терпения и проверки каждого шага. Очень часто учащийся вообще ничего не предпринимает для *проверки результата*: он рад, что получил в конце концов какой-то ответ, бросает карандаш и почивает на лаврах, не испытывая ни малейшего недоумения, хотя ответ оказывается в высшей степени невероятным.

Учитель, составив тщательный диагноз ошибок ученика, может надеяться исправить их, настоятельно ставя перед учеником соответствующие вопросы из нашей таблицы.

Если данную задачу решить не удается, пусть это не слишком огорчает вас, попытайтесь сначала решить какую-нибудь *сходную задачу*, с которой вы легче справитесь. Этот успех несколько ободрит вас. После этого вы наверное смелее возьметесь за решение первоначальной задачи. Не забывайте, что превосходство человеческого мышления заключается в том, чтобы обойти препятствие, которое нельзя преодолеть непосредственно, и изобрести какую-нибудь подходящую вспомогательную задачу в том случае, если первоначальная кажется неодолимой.

Нельзя ли придумать более доступную сходную задачу? Теперь вам нужно *придумать* такую задачу, а не просто *вспомнить* одну из тех, которые вы уже рассматривали, когда задавали себе вопрос: *не знаете ли вы какой-нибудь сходной задачи?*

В том абзаце нашей таблицы, который начинается с заголовка данной статьи, остаются вопросы, преследующие общую цель — видоизменение задачи.

Для достижения этой цели имеются такие различные средства, как обобщение, специализация, аналогия и другие, представляющие собой различные способы разложения и составления новых комбинаций.

Задачи на нахождение, задачи на доказательство. Мы проведем параллель между этими двумя типами задач.

1. Цель «задачи на нахождение» — определить какой-нибудь элемент, неизвестное задачи.

Неизвестное также называется «quaesitum» или «искомое», или «то, что требуется найти». «Задачи на нахождение» могут быть теоретическими или практическими, отвлеченными или конкретными, серьезными или всего лишь развлекательными головоломками. Искомыми могут быть всевозможные неизвестные. От нас может потребоваться найти, получить, приобрести, произвести или построить всякого рода объекты. В деле об убийстве неизвестное — убийца. В шахматной задаче неизвестное — ход шахматной фигуры. В некоторых загадках неизвестное — слово. В ряде элементарных алгебраических задач неизвестное — число. В задаче на геометрическое построение неизвестное — фигура.

2. «Задачи на доказательство» имеют своей целью доказать, что определенное четко сформулированное утверждение верно или же неверно. От нас требуется ответить на вопрос: данное утверждение верно или неверно? В заключение своего решения мы должны получить окончательный ответ, доказав справедливость утверждения или его ошибочность.

Свидетель утверждает, что подсудимый был дома в вечер убийства. Судья должен выяснить, соответствует ли это утверждение действительности или нет, и, более того, должен по мере возможности убедительно обосновать свой вывод. Таким образом судье приходится иметь дело с «задачей на доказательство». Примером другой «задачи на доказательство» может служить «доказать теорему Пифагора». Мы не говорим «доказать или опровергнуть теорему Пифагора». Хотя в некотором отношении было бы желательно включить в формулировку задачи и возможность опровергнуть ее, в данном случае можно пренебречь этим желанием, поскольку мы знаем, что вероятность опровергнуть теорему Пифагора довольно незначительна.

3. Главными элементами «задачи на нахождение» являются *неизвестное*, *данные* и *условия*.

Если от нас требуется построить треугольник со сторонами a, b и c, то неизвестное — треугольник, данными же являются три отрезка a, b и c. Треугольник должен удовлетворять условию, что его стороны равны a, b и c. Если же мы должны построить треугольник с высотами a, b и c, то неизвестное и данные будут предметами той же категории, что и в предыдущей задаче, но условие, связывающее неизвестное с данными, другое.

4. Если «задача на доказательство» является математической задачей обычного типа, то ее главными частями являются предпосылка (hypothesis) и заключение (conclusion) теоремы, которую мы должны доказать или опровергнуть.

«Если в четырехугольнике все стороны равны, то диагонали его взаимно перпендикулярны». Вторая часть, которая начинается со слова «то», является заключением; первая часть, начинающаяся со слова «если»,— предпосылка.

[Не все математические теоремы могут быть естественным образом разбиты на предпосылку и заключение. Так, например, вряд ли возможно таким образом разделить следующую теорему: «Количество простых чисел бесконечно».]

5. Если вы хотите решить «задачу на нахождение», вы должны знать, и при том совершенно точно, ее главные элементы — неизвестное, данные и условия. В нашей таблице представлено много вопросов и советов, связанных с этими элементами.

Что неизвестно? В чем состоит условие? Что дано? Разделите условие на части.

Найдите связь между данными и неизвестными.

Рассмотрите неизвестное! И постарайтесь припомнить знакомую задачу с тем же или подобным неизвестным. Сохраните только часть условий, отбросив остальные; в какой мере теперь определяется неизвестное? Как можно его варьировать? Сумеете ли вы вывести что-нибудь полезное из данных? Сможете ли вы придумать другие данные, из которых можно было бы определить неизвестное? Сможете ли изменить неизвестное или данные, а если необходимо — и то и другое, чтобы новое неизвестное и новые данные стали ближе друг к другу?

Все ли данные вы использовали?

Все ли условие вы использовали?

6. Если вы хотите решить «задачу на доказательство», то должны знать, и при том совершенно точно, ее главные элементы — предпосылку и заключение. В нашей таблице имеются полезные вопросы и советы относительно этих элементов задачи, но у нас они приспособлены к «за-

дачам на нахождение». Соответствующие вопросы и советы к «задачам на доказательство» будут:

В чем состоит предпосылка? Каково заключение?

Расчлените предпосылку на части.

Найдите связь между предпосылкой и заключением.

Рассмотрите заключение. Постарайтесь припомнить знакомую задачу с тем же или подобным заключением.

Сохраните только часть предпосылки, отбросив остальные.

Заключение по-прежнему обоснованно?

Сможете ли вы вывести что-нибудь полезное из предпосылки? Сможете ли вы придумать другую предпосылку, из которой смогли бы легко вывести такое заключение?

Сможете ли вы изменить предпосылку или заключение, а если необходимо и то и другое вместе, чтобы новая предпосылка и новое заключение стали ближе друг к другу?

Использовали ли вы всю предпосылку?

7. «Задачи на нахождение» занимают много места в элементарной математике, «задачи на доказательство» — в высшей. В данной книге «задачам на нахождение» уделяется больше внимания, чем другому типу задач. Однако автор надеется восстановить равновесие при более полном рассмотрении разбираемого здесь вопроса.

Зачем нужны доказательства? О Ньютоне есть такое предание: будучи молодым студентом, он начал изучение геометрии, как в то время было принято, с чтения Евклида. Прочитывая формулировки теорем, он видел, что последние справедливы, и не изучал доказательств. Его удивляло, что люди прилагают столько усилий, чтобы доказать совершенно очевидное. Однако много лет спустя он изменил свое мнение и очень хвалил Евклида.

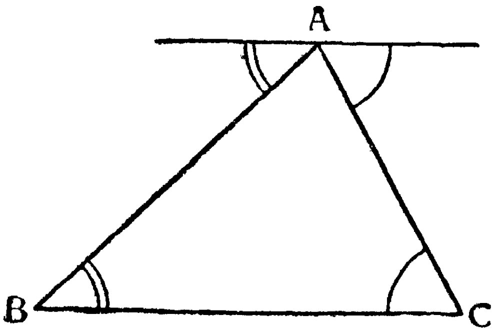
Эта история может быть достоверной или нет, однако, вопрос остается: зачем нам следует изучать или излагать доказательства? Что предпочтительней: никаких доказательств вообще или доказывать все, или ограничиваться некоторыми доказательствами? А если ограничиваться некоторыми доказательствами, то какими именно?

1. *Полные доказательства.* Для некоторых логиков существуют лишь полные доказательства. То, что предназначается быть доказательством, не может иметь никаких пробелов, никаких лазеек, никаких сомнений, иначе это

не доказательство. Возможно ли в повседневной жизни или в юриспруденции, или в физических науках привести примеры полных доказательств, соответствующих таким высоким требованиям? Едва ли. Таким образом, трудно понять, как нам могла прийти в голову мысль о существовании совершенно полных доказательств.

Мы можем сказать не без некоторого преувеличения, что эту мысль принес человечеству один человек, одна книга, Евклид и его «Начала». Во всяком случае, изучение основ планиметрии и поныне дает нам лучшую возможность осознать идею строгого доказательства.

Возьмем в качестве примера доказательство теоремы: *Сумма углов треугольника равна двум прямым.* Фигура 14 хорошо знакома большинству из нас и особых пояснений не требует. Через вершину A проходит прямая, параллельная стороне BC. Углы треугольника B и C равны соответствующим углам при точке A как накрест лежащие углы при параллельных прямых. Три угла треугольника равны трем углам с общей вершиной A, образующим угол в 180° или два прямых угла. Таким образом, теорема доказана.



Фиг. 14.

Если ученик прошел школьный курс математики, не постигнув по-настоящему несколько подобных доказательств, он вправе выразить самое крайнее недовольство по адресу своей школы и учителей. В самом деле, необходимо делать различие между более важным и менее важным. Если учащемуся не пришлось ознакомиться с тем или иным частным понятием геометрии, он не так уж много потерял. В дальнейшей жизни эти знания могут не пригодиться. Но если ему не удалось ознакомиться с геометрическими доказательствами, то он упустил лучшие и простейшие примеры точного доказательства, он упустил лучшую возможность ознакомиться вообще с понятием «строгое рассуждение». Без этого понятия у него не будет настоящей мерки, при помощи которой он сможет оценивать претендующие на истинность доказательства, преподносимые ему современной жизнью.

Словом, если школа намерена дать учащемуся понятие об интуитивной аргументации и логическом рассуждении, то она должна предоставить место геометрическим доказательствам[1].

2. *Логическая система.* Геометрия, как она представлена в «Началах» Евклида, не есть лишь собрание фактов, а представляет собой логическую систему. Аксиомы, определения и теоремы представлены там не в произвольном порядке, а расположены в безукоризненной последовательности. Каждая теорема расположена так, что для ее доказательства могут быть использованы предшествующие аксиомы, определения и теоремы. Мы можем сказать, что главное достижение Евклида заключается в умелом расположении теорем, а их логическая система — главное достоинство «Начал».

Евклидова геометрия — не просто одна из логических систем. Она является первым и величайшим примером такой системы, которой другие науки пытались и все еще пытаются подражать. Следует ли другим наукам, в особенности таким далеким от геометрии, как психология и юриспруденция, подражать строгой логике Евклида? Вопрос этот спорный, но обсуждать этот вопрос со знанием дела может лишь тот, кто знаком с системой Евклида.

Геометрическая система цементирована доказательствами. Каждая теорема связана с предшествующими аксиомами, определениями и теоремами каким-нибудь доказательством. Без понимания таких доказательств нельзя понять самую сущность системы.

Словом, если школа хочет дать учащемуся понятие о логической системе, она должна предоставить место геометрическим доказательствам.

3. *Мнемотехническая система.* Автор не считает, что идеи интуитивной аргументации, строгого рассуждения и логической системы излишни для кого бы то ни было. Однако бывают случаи, когда изучение этих идей не считается совершенно необходимым ввиду недостатка времени или по каким-либо другим причинам, но даже и в этих случаях желательно изучать доказательства.

---

[1] Это замечание Д. Пойа весьма характерно для постановки преподавания геометрии в американской средней школе с господствующим в ней сильным ущемлением дедуктивного аспекта этой дисциплины. Последние годы, правда, американские математики (и среди них автор настоящей книги) возбуждают вопрос о пересмотре указанной установки, видя в ней одну из главных причин низкого математического уровня основной массы выпускников американской средней школы. (Примечание к русскому переводу. —*Ред.*)

Доказательства обеспечивают бесспорность сведений, и тем самым укрепляя логическую систему, они помогают нам закрепить в своей памяти разнообразные элементы связной системы. Возьмите случай, разобранный выше (фиг. 14). Из чертежа ясно, что сумма углов треугольника равна 180°, чертеж связывает этот факт с другим фактом, что накрест лежащие углы при параллельных прямых равны. А связанные факты интереснее и лучше запоминаются, чем изолированные. Таким образом, чертеж фиксирует эти две связанные геометрические теоремы в нашей памяти и в конце концов чертеж и теорема становятся неотъемлемой собственностью нашего сознания.

Теперь рассмотрим случай, когда приобретение общих понятий не считается необходимым, а желательно лишь накопление определенных сведений. Даже в этом случае сведения должны преподноситься в какой-то связи или системе, поскольку изолированно они усваиваются с трудом и легко забываются. В этом случае желательна любая связь, которая просто, естественно и прочно объединяет все сведения. Такая система не обязательно должна быть основана на логике; она должна лишь эффективно помогать памяти. Она должна представлять собой то, что называется *мнемотехнической* системой. Но даже с точки зрения мнемотехнической системы доказательства, в особенности простые, могут быть полезны. Например, учащийся должен заучить сведения о сумме углов треугольника и о свойстве накрест лежащих углов при параллельных прямых. Может ли быть другой прием проще, естественнее или эффективнее, чем чертеж 14?

Словом, даже когда общим логическим понятиям не придают особого значения, доказательства могут быть полезны как мнемотехнический прием.

4. *Система поваренной книги.* Мы рассмотрели преимущества доказательств, но мы, конечно, не ратовали за то, чтобы все доказательства были даны «in extenso»[1]. Наоборот, есть такие случаи, когда это вряд ли возможно. Таким важным случаем является преподавание дифференциального и интегрального исчисления студентам инженерных факультетов.

Чтобы преподнести это исчисление в соответствии с современным уровнем математической строгости, необходимо

---

[1] in extenso (лат.) — полностью. (Примечание переводчика.—*Ред.*)

изложить довольно сложные доказательства, не лишенные известных тонкостей. Но инженерам исчисление нужно для его практического применения. У них нет ни времени, ни подготовки, ни интереса к тому, чтобы преодолеть длинные доказательства и оценить по достоинству все тонкости. В результате этого появляется сильное искушение опускать вообще все доказательства. Однако, поступая таким образом, мы сводим исчисление до уровня поваренной книги.

Поваренная книга подробно описывает составные части блюда и как его стряпать, но не обосновывает свои предписания и не приводит доводов в пользу своих рецептов. Чтобы узнать, каков пуддинг, надо его отведать. Поваренная книга отлично служит своим целям. И действительно, ей не нужно никаких логических или мнемотехнических систем, поскольку рецепты записаны или напечатаны, а не держатся в памяти.

Едва ли автор учебника дифференциального и интегрального исчисления или преподаватель колледжа смогут оправдать свое назначение, если они будут близко следовать системе поваренной книги. Если обучать приемам работы без доказательств, то такие немотивированные приемы поняты не будут. Правила без их обоснований лишаются взаимной связи и быстро забываются. Математику нельзя «попробовать» в том смысле, в каком пробуют пуддинг. Если всякие рассуждения исключить, курс исчисления может легко превратиться в бессвязную опись неудобоваримых справок.

5. *Неполные доказательства.* Лучший способ разрешения дилеммы между слишком тяжеловесными полными доказательствами и уровнем поваренной книги заключается, вероятно, в том, чтобы разумно пользоваться неполными доказательствами.

Для строгого логика неполное доказательство вообще не доказательство. И конечно, следует делать четкое разграничение между неполными и полными доказательствами. Путать одно с другим плохо, а выдавать одно за другое еще хуже. Неприятно, когда автор учебника нечетко преподносит неполное доказательство, с явными колебаниями между стыдом и претензиями на полноту доказательства. Но неполные доказательства могут быть полезны, когда они к месту и когда ими пользуются с чувством меры. Их цель не заменять полные доказательства, чего они никогда не смогут сделать, а придать изложению интерес и связать отдельные части всего рассуждения в единое целое.

Пример 1. *Алгебраическое уравнение n-й степени имеет ровно n корней*. Эту теорему, называемую основной теоремой алгебры (Гаусса), часто приходится давать учащимся, которые совершенно не подготовлены к восприятию ее доказательства. Однако им известно, что *уравнение первой степени имеет один корень*, а *уравнение второй степени — два корня*. Кроме того, у этой трудной теоремы есть часть, которую легко доказать; *никакое уравнение n-й степени не имеет больше n различных корней*. Составляют ли приведенные факты полное доказательство основной теоремы алгебры? Никоим образом. Этих фактов, однако, достаточно, чтобы придать теореме некоторый интерес и правдоподобие и закрепить ее в памяти учащихся, а это самое главное.

Пример 2. *Сумма двух плоских углов трехгранного угла больше третьего*. Теорема сводится, очевидно, к утверждению, что в *сферическом треугольнике сумма любых двух сторон больше третьей*.

Заметив это, мы естественно вспоминаем об аналогии сферического треугольника с прямолинейным треугольником. Составляют ли эти замечания доказательство? Никоим образом. Но они помогают нам лучше понять и запомнить предложенную теорему.

Наш первый пример представляет исторический интерес. Примерно в течение 250 лет математики принимали основную теорему на веру, без полного доказательства. Доводов у них было по существу не больше, чем те, которые мы привели выше. Наш второй пример указывает на аналогию как на важный источник догадок. В математике, как и в естественных и физических науках, открытие часто берет свое начало в наблюдении, аналогии и индукции. Эти средства, использованные с должным чувством меры при построении правдоподобного эвристического доказательства, особенно привлекательны для физиков и инженеров (см. также «Индукцию и математическую индукцию», пп. 1, 2, 3).

Наше изучение процесса решения до известной степени объясняет роль неполных доказательств и интерес к ним. Опыт в решении задач показывает, что первая идея какого-нибудь доказательства очень часто неполная. Основная мысль, главная связь, зерно доказательства возможно и заключены в этой первой идее, но детали должны быть даны впоследствии, и они часто доставляют нам много хлопот. Некоторые искусные авторы умеют преподнести лишь зерно доказательства, главную идею в ее наиболее простой форме и указать на характер недостающих деталей. Такое доказательство, пусть неполное, может быть намного поучительней, чем полное доказательство со всеми подробностями.

Одним словом, неполные доказательства могут быть использованы как мнемотехнический прием, но, конечно, не как заменители полных доказательств, когда наша цель — дать достаточно связное изложение и когда не требуется строгая логическая последовательность изложения.

Очень опасно отстаивать неполные доказательства. Несколькими правилами можно свести к минимуму возможные злоупотребления этими доказательствами. Первое правило: если доказательство неполное, то это надо каким-то образом отметить. Второе: автор или учитель имеет право давать неполное доказательство теоремы лишь в том случае, если сам хорошо знаком с полным доказательством.

И надо признать, что не так уж легко преподнести неполное доказательство с должным чувством меры.

Известна ли вам какая-нибудь родственная задача? Едва ли можно представить себе совершенно новую задачу, не похожую ни на одну из ранее решенных задач и не связанную ни с одной из них. Если бы такая задача существовала, она была бы неразрешимой. Действительно, решая любую задачу, мы всегда извлекаем пользу из ранее решенных задач, используя их результаты или методы, которыми они решались, или опыт, приобретенный нами при их решении. Конечно, задачи, которые мы используем, должны быть как-то связаны с данной задачей. Поэтому уместен вопрос: *известна ли вам какая-нибудь родственная задача?*

Обычно не представляет особого труда вспомнить несколько решенных ранее задач, более или менее связанных с данной. Напротив, таких задач может оказаться слишком много, так что возникнет другая трудность: как из них выбрать задачу, которая окажется действительно полезной?

Мы должны осмотреться вокруг в поисках задач, наиболее тесным образом связанных с данной задачей; при этом мы рассматриваем неизвестное или ищем ранее решенные задачи, которые получаются из данной путем обобщения, специализации или аналогии.

Вопрос, рассматриваемый в этой статье, имеет целью активизацию наших ранее приобретенных знаний (см. «Продвижение и достижение», п. 1).

Существенная часть наших математических познаний хранится в нашей памяти в форме доказанных в свое время теорем.

Поэтому оказывается уместным вопрос: *не знаете ли вы теоремы, которая могла бы оказаться полезной?* Особенно уместен этот вопрос, если мы имеем дело с «задачей на доказательство», т. е. если нам предстоит доказать или опровергнуть некоторую теорему.

Индукция и математическая индукция. Индукция есть процесс познания общих законов путем наблюдения и сопоставления частных случаев. Методом индукции пользуются все науки, в том числе и математика. Математической же индукцией пользуются только в математике для доказательства теорем определенного типа. Довольно неудачно, что их названия связаны, так как между этими двумя методами почти нет логической связи. Однако некоторая практическая связь все же есть, вследствие чего мы часто пользуемся обоими методами одновременно. Проиллюстрируем оба метода одним и тем же примером.

1. Заметив, что в левой части равенства:

$$1+8+27+64=100,$$

стоят кубы последовательных натуральных чисел, а в правой части квадрат, перепишем его и получим такое интересное равенство:

$$1^3+2^3+3^3+4^3=10^2.$$

Отчего это может быть? Часто ли случается, что сумма кубов последовательного ряда чисел есть квадрат какого-нибудь числа?

Формулируя вопрос таким образом, мы уподобляемся естествоиспытателю, который, находясь под впечатлением необыкновенного растения или необыкновенной геологической формации, ставит обобщающий вопрос. В нашем примере такой обобщающий вопрос связан с суммой кубов натурального ряда чисел

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3.$$

К этому общему вопросу нас привел «частный случай» $n=4$.

Что же мы можем предпринять для выяснения нашего вопроса? Мы поступим так, как поступил бы естествоиспытатель: исследуем другие частные случаи. Частные случаи, соответствующие $n=2$, 3, еще проще рассмотренного выше. Случай при $n=5$ следующий по порядку. Ради последовательности и полноты добавим еще и случай $n=1$. Аккуратно записывая все эти случаи, точно так же как геолог стал бы раскладывать свои образцы какой-нибудь руды, мы получаем следующую таблицу:

$$\begin{aligned}
&1 &&= 1 &&= 1^2\\
&1+8 &&= 9 &&= 3^2\\
&1+8+27 &&= 36 &&= 6^2\\
&1+8+27+64 &&= 100 &&= 10^2\\
&1+8+27+64+125 &&= 225 &&= 15^2.
\end{aligned}$$

Трудно поверить, что все эти суммы чисел последовательных кубов случайно представляют собой квадраты. В подобном случае естествоиспытатель не очень бы сомневался в том, что наблюдения подсказывают общую закономерность. Общая закономерность чуть ли не доказывается индукцией. Математик высказывается более сдержанно, хотя в глубине души, конечно, думает так же. Он скажет, что индукция настойчиво подсказывает следующую теорему:

Сумма первых n кубов есть квадрат.

2. Таким образом, мы приходим к предположению о существовании замечательной, несколько загадочной закономерности. Почему суммы чисел последовательных кубов должны быть квадратами? Но, как видно, они являются таковыми.

Как поступил бы естествоиспытатель в подобном случае? Он продолжал бы исследовать свое предположение. Поступая так, он может вести свое исследование в различных направлениях. Он мог бы прибегнуть к накоплению дополнительных опытных данных. Если бы мы стали на этот путь, нам нужно было бы проверить следующие по порядку случаи $n=6$, 7,... .

Естествоиспытатель мог бы также вновь исследовать те факты, наблюдение которых привело его к своему предположению. Он тщательно сравнивал бы их, пытался бы выявить какую-нибудь более глубокую закономерность, или какие-нибудь дополнительные аналогии. Поведем и мы свое исследование в этом направлении.

Для этого вернемся еще раз к нашей таблице и вновь рассмотрим случаи $n=1, 2, 3, 4, 5$. Почему все эти суммы кубов оказываются квадратами? Что можно сказать об этих квадратах? Основания этих квадратов равны 1, 3, 6, 10, 15. Что можно сказать о них? Есть ли какая-нибудь более глубокая закономерность, какие-нибудь дополнительные аналогии? Во всяком случае кажется, что их возрастание подчинено какой-то закономерности. Как же они возрастают? Оказывается, что и разность между двумя последовательными основаниями тоже возрастает. В самом деле,

$$3-1=2, \quad 6-3=3, \quad 10-6=4, \quad 15-10=5.$$

Закономерность возрастания этих разностей бросается в глаза, и мы подмечаем удивительную аналогию в основаниях этих квадратов. Мы находим замечательную закономерность ряда чисел 1, 3, 6, 10, 15:

$$\begin{aligned}
1&=1,\\
3&=1+2,\\
6&=1+2+3,\\
10&=1+2+3+4,\\
15&=1+2+3+4+5.
\end{aligned}$$

Если эта закономерность имеет общий характер (а трудно поверить, что это не так), то теорема, которую мы предположили справедливой, принимает более точную форму, а именно: для $n=1, 2, 3, \ldots$

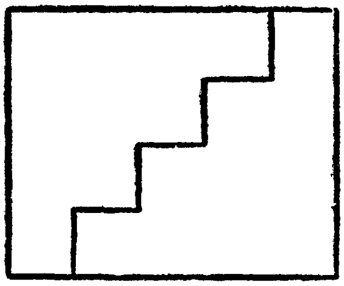
$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2.$$

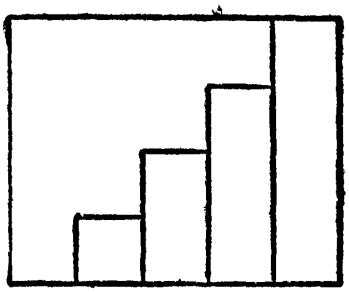
3. Изложенная закономерность была обнаружена при помощи метода индукции. Весь ход рассуждений, правда, несколько односторонний и несовершенный, но во всяком случае правдоподобный, дает нам представление об этом методе. Индукция пытается раскрыть закономерности и связи, скрытые за внешними явлениями наблюдаемого. Ее наиболее известные средства — обобщение, специализация и аналогия. Попытка обобщения возникает из усилия понять наблюдаемые факты. Основана она на аналогии, а проверяется дальнейшими частными случаями.

Мы воздерживаемся от дальнейших замечаний о методе индукции, относительно которого среди философов имеются большие расхождения во взглядах. Но следует добавить, что многие математические результаты были сначала получены методом индукции и лишь позднее доказаны. Математика, основанная на строгих доказательствах своих положений, есть наука дедуктивная и систематическая. Но в процессе становления математика складывалась как экспериментально-индуктивная наука.

4. В математике, как и в естественных науках, для открытия общих закономерностей мы можем пользоваться как непосредственными наблюдениями, так и методом индукции. Но между ними есть и разница. В естественных науках нет более высокого авторитета, чем результат наблюдений и метод индукции, а в математике такой авторитет есть. Это — строгое доказательство.

Проделав некоторую экспериментальную работу, полезно изменить свою точку зрения. Будем рассуждать стро-


a


b

Фиг. 15

го. Пусть мы открыли интересное явление. Но рассуждения наши были лишь правдоподобными, экспериментальными, предварительными, эвристическими. Постараемся установить закономерность этого явления путем строгого доказательства.

Таким образом, мы приходим к следующей «задаче на доказательство»: доказать или опровергнуть утверждение, сформулированное в пункте 2.

Предварительно несколько упростим его. Нам должно быть известно, что

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Во всяком случае это соотношение легко проверить. Возьмем для этого прямоугольник со сторонами n и $n+1$ и разделим его на две половины ломаной линией так, как показано на фигуре 15,a, на которой изображен случай $n=4$.

Каждая из половин имееет «лестницеобразную форму». Площадь ее выражается числом $1+2+\ldots+n$. При $n=4$ она равна $1+2+3+4$ (см. фиг. 15,b). Поскольку вся площадь прямоугольника равна $n(n+1)$, а площадь лестницеобразной фигуры равна половине площади прямоугольника, следовательно, вышеупомянутая формула справедлива.

Теперь результат, полученный нами методом индукции, можно представить в таком виде:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

5. Если мы не представляем себе, как доказать справедливость этого равенства, то мы по крайней мере можем проверить его. Для этого рассмотрим следующий случай, который не проверялся еще нами, случай, когда $n=6$. При этом значении n формула дает:

$$1+8+27+64+125+216=\left(\frac{6\times 7}{2}\right)^2.$$

Вычисление подтверждает правильность равенства, поскольку обе части равны 441.

Мы можем более эффективно проверить справедливость нашей формулы. Она, вероятнее всего, выражает общую закономерность, т. е. справедлива при всех значениях n. Будет ли она справедлива и тогда, когда мы переходим от значения n к следующему значению $n+1$? Наряду с формулой, приведенной выше, мы получим в таком случае и следующую:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3+(n+1)^3=\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2.$$

Теперь имеется очень простой способ проверки. Вычитая отсюда равенство, приведенное выше, мы получим:

$$(n+1)^3=\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2-\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Это равенство уже легко проверить. Правую часть можно записать в таком виде:

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2[(n+2)^2-n^2]=\left(\frac{n+1}{2}\right)^2[n^2+4n+4-n^2],$$

$$\frac{(n+1)^2}{4}(4n+4)=(n+1)^2(n+1)=(n+1)^3.$$

Наша формула, выведенная экспериментально, прошла решающую проверку.

Давайте уясним себе, какое значение имеет эта проверка. Вне всякого сомнения, мы удостоверились, что

$$(n+1)^3=\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2-\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Мы все же еще не знаем, справедливо ли равенство

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Но *если* бы мы знали, что оно действительно справедливо, мы могли бы вывести отсюда, путем сложения его с уже установленным равенством, что соотношение

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3+(n+1)^3=\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

также имеет место. Но ведь мы знаем, что наше предположение справедливо при $n=1$, 2, 3, 4, 5, 6. На основании только что сказанного, наше предположение, будучи справедливым при $n=6$, должно быть также справедливо при $n=7$. А поскольку оно справедливо при $n=7$, оно также справедливо при $n=8$, поскольку оно справедливо при $n=8$, оно справедливо при $n=9$ и т. д. Таким образом, теорема, сформулированная в пункте 2, справедлива при всех значениях n, и тем самым доказано, что она справедлива вообще.

6. Приведенное доказательство может служить образцом для многих подобных случаев. Каковы его существенные черты?

Утверждение, которое требуется доказать, должно быть предварительно и четко сформулировано.

Утверждение должно зависеть от целого положительного числа n.

Утверждение должно быть достаточно «определенным» для того, чтобы у нас была возможность проверить, остается ли оно верным при переходе от числа n к следующему целому числу $n+1$.

Если нам действительно удастся проверить это, то мы сможем, используя свой опыт, приобретенный в процессе проверки, прийти к заключению, что наше утверждение должно быть справедливо для $n+1$, если оно справедливо для n. Как только нам удастся это установить, нам уже достаточно знать, что утверждение верно для числа $n=1$; тогда оно верно и при $n=2$, $n=3$ и т. д. Переходя от любого целого числа к следующему, мы доказываем общность нашего утверждения.

Этот метод доказательства столь часто используется, что ему следует дать название. Мы могли бы его назвать «доказательством от n к $n+1$» или, еще проще, «переходом к следующему целому числу». К сожалению, однако, для этого метода принят неудачный термин «математическая индукция». Надо сказать, что это название является результатом случайного стечения обстоятельств. Точно сформулированное утверждение, подлежащее доказательству, может быть любого происхождения и с точки зрения логики его происхождение не играет роли. В случае, который мы подробно рассмотрели выше, утверждение возникло, как это часто бывает, на основе индукции. Мы пришли к нему эмпирическим путем. Таким образом, доказательство имеет видимость математического дополнения к индукции. Этим и объясняется название метода.

7. Есть еще один момент, довольно тонкий, но весьма существенный для всякого, желающего самостоятельно находить доказательства. Мы видели выше, что при помощи эксперимента и индукции были найдены два утверждения, одно за другим, из которых второе, рассмотренное в пункте 2, было более точным, чем первое, изложенное в пункте 1. Изучая второе утверждение, мы обнаружили способ проверки законности перехода от n к $n+1$ и, таким образом, смогли при помощи метода «математической индукции» найти доказательство теоремы. Если бы мы исследовали первое утверждение и пренебрегли бы тем уточнением, которое вносит второе утверждение, вряд ли мы смогли бы найти это доказательство. И действительно, первое утверждение менее точно, менее «определенно», менее «осязаемо», менее доступно исследованию и проверке, чем второе. Переход от первого утверждения ко второму, от менее точной формулировки к более точной был важным шагом, подготовившим окончательное доказательство.

В некотором отношении это парадоксально. Второе утверждение сильнее; оно непосредственно влечет за собой первое, в то время как из несколько «туманного» первого утверждения трудно извлечь кристаллически четкое второе. Таким образом, получается, что легче доказать более сильную теорему, чем более слабую. Это — парадокс изобретателя.

Лейбниц Готтфрид Вильгельм (1646—1716), великий математик и философ, намеревался написать «Искусство изобретения», но не осуществил своего намерения. Однако многочисленные отрывки, разбросанные в его трудах, показывают, что у него были интересные мысли по этому вопросу, и он неоднократно подчеркивал его значение. Так, он писал: «Нет ничего важнее, чем умение найти источник изобретения,— на мой взгляд, это еще интереснее, чем само изобретение».

Лемма означает «вспомогательная теорема». Слово это греческого происхождения, буквальный перевод: «то, что допускается».

Допустим, мы пытаемся доказать какую-нибудь теорему, например A. Мы приходим к мысли, что для доказательства можно использовать другую теорему, например B, и что если бы теорема B была справедлива, мы бы могли, пользуясь ею, доказать теорему A. Мы временно допускаем справедливость теоремы B, не доказывая ее, и продолжаем доказывать теорему A. Теорема B, таким образом, служит вспомогательной теоремой для доказательства заданной теоремы A. Наше простое объяснение довольно типично и раскрывает значение слова «лемма» в его современном понимании.

Лишние данные (см. Условие)[1].

Мудрость пословиц. Решение задач есть неотъемлемая часть человеческой деятельности. В самом деле, значительная доля нашей сознательной деятельности связана с решением каких-нибудь задач или проблем. Когда мы не предаемся мечтам или беспредметным размышлениям, наши мысли направлены к определенной цели, мы стараемся решить какую-нибудь задачу.

Некоторые достигают своей цели и решают стоящие перед ними задачи с бо́льшим успехом, некоторые — с меньшим. Эта разница в успехе подмечается, обсуждается, комментируется, и квинтэссенция таких замечаний как бы сохраняется в некоторых пословицах. Во всяком случае имеется множество поговорок, характеризующих с поразительной точностью типичные пути решения задач, остроумные, основанные на здравом смысле приемы, обычные уловки и обычные ошибки. В пословицах много проницательных и даже тонких высказываний, но, разумеется, они не составляют стройной и последовательной научной сис-

[1] Статья содержит исключительно ссылки на другие статьи «Словаря».

темы. Многие пословицы могут быть противопоставлены другим, дающим прямо противоположные советы, и вообще возможности толкования пословиц неограничены. Глупо было бы считать пословицы авторитетным источником мудрости, применимым ко всем случаям жизни, но, с другой стороны, жалко пренебрегать такой наглядной иллюстрацией эвристических приемов решения задач, какую нам дают пословицы.

Было бы интересно собрать пословицы, относящиеся к решению задач, и сгруппировать их по разделам: составление плана; изыскание средств; выбор из ряда возможных путей именно того, по которому следует вести решение. Здесь мы можем уделить лишь незначительное место пословицам. Самое большее, что мы можем сделать,—это привести пословицы, иллюстрирующие основные этапы решения задач, нашедшие свое отражение в пунктах 6—14 и других местах. Приведенные пословицы печатаются курсивом.

1. При решении задачи необходимо в первую очередь понять ее. *Кто плохо понимает, плохо отвечает*[1]. Мы должны уяснить цель, которую надо достичь.

Обдумай цель, раньше чем начать[2].

Это старый совет: по-латыни говорят: «respice finem». К сожалению, не все считаются с таким хорошим советом и люди часто начинают делать предположения, обсуждать и даже суетливо браться за дело, не поняв как следует, какой цели они должны добиться.

С началом считается глупец, о конце думает мудрец[3]. Если мы не уяснили себе конечной цели, не трудно при решении задачи сбиться с пути, а затем и вовсе забросить ее.

Мудрый начинает с конца, глупый кончает вначале[4].

Недостаточно лишь понять задачу, необходимо желание решить ее. Без сильного желания решить трудную задачу невозможно, но при наличии такового возможно. *Где есть желание, найдется путь*! [5].

---

[1] Who understands ill, answers ill.

[2] Think on the end before you begin.

[3] A fool looks to the beginning, a wise man regards the end.

[4] A wise man begins in the end, a fool ends in the beginning.

(Ср. с этим рядом английских пословиц русскую: «конец — делу венец».) (Примечание к русскому переводу.— *Ред.*)

[5] Where there is a will, there is a way. (Ср. русскую пословицу: «Не говори — не могу, говори — не хочу!» — *Ред.*)

2. Главное в решении задачи — составить план, наметить правильный ход решения. Хорошая идея — большое счастье, вдохновение, дар судьбы; хорошую идею надо заслужить.

Усердие — мать удачи[6]. *Настойчивость убивает дичь*[7]. *Дуб не валится от одного удара*[8]. *Если тебе не удается, старайся, старайся еще*[9]. Недостаточно, однако, многократно повторять попытки, следует испробовать различные средства, варьировать попытки. *Перепробуй все ключи в связке*[10]. *Стрелы изготовляются из разных сортов дерева*[11]. Надо приноровить свои попытки к обстоятельствам. *Устанавливай паруса по ветру*[12]. *Раскраивай пальто по сукну*[13]. *Делай, как можешь, если нельзя сделать, как хочешь*[14].

Если мы терпим неудачу, приходится пробовать другие средства. *Мудрый меняет свои решения, дурак никогда*[15]. С самого начала мы должны быть готовы к возможной неудаче нашего плана и иметь другой в резерве. *Всегда имей две струны для лука*[16]. Бывает иногда, что и переусердствуешь, переходя от одного плана к другому, и теряешь время. В таком случае можно услышать ироническое замечание: *Делай, да переделывай — день-то длинный!*[17] Если не терять из виду цели, будешь меньше блуждать в потемках. *Смысл рыбной ловли не в том, чтобы забрасывать удочку, а в том, чтобы поймать рыбу*[18].

Мы часто напряженно думаем, чтобы припомнить требуемое, однако, иногда, когда приходит в голову мысль, которая могла бы быть полезной, мы не всегда принимаем ее во внимание, ибо она кажется нам очень заурядной. У знатока, возможно, не больше мыслей, чем у неопытного человека, но он лучше взвешивает достоинства своих мыслей

---

[6] Diligence is the mother of good luck.

[7] Perseverance kills the game.

[8] An oak is not felled at one stroke.

[9] If at first you don't succeed, try try again.

[10] Try all the keys in the bunch.

[11] Arrows are made of all sorts of wood.

[12] As the wind blows you must set your sail.

[13] Cut your coat according to the cloth.

[14] We must do as we may if we can't do as we would. (Ср. русскую пословицу: «По одежке протягивай ножки».— *Ред.*)

[15] A wise man changes his mind, a fool never does.

[16] Have two strings to your bow. (Ср. русскую поговорку «Не мытьем, так катаньем».— *Ред.*)

[17] Do and undo, the day is long enough.

[18] The end of fishing is not angling but catching.

и умеет лучше использовать их. *Мудрый создает себе больше возможностей, чем ему представит случай*[19]*.Мудрый создает орудие из всего, что попадается ему под руку*[20]. *Мудрый превратит случай в удачу*[21].

Иными словами, преимущество знатока возможно в том, что он всегда начеку и лучше подмечает благоприятные возможности. *Подмечай главную возможность*[22].

3. Следует приступить к осуществлению своего плана своевременно; только тогда, когда он созреет, но не раньше. Не следует начинать решение задачи опрометчиво. *Проверь, прежде чем прыгать*[23]. *Испытай, потом доверяй*[24]. *Разумная задержка обезопасит путь*[25]. Но, с другой стороны, не следует слишком долго колебаться. *Хочешь плавать без опасностей, не отправляйся в море*[26]. *Поступай разумно и надейся на лучшее*[27]. *Используй средства, а бог благословит*[28]. Взвесив все, надо решить, в какой именно момент лучше всего приступить.

А вот своевременное предупреждение, указывающее на наиболее распространенную ошибку, на наиболее частую погрешность вашего суждения: *Желаемое мы охотно принимаем за действительное*[29]. Наш план обычно дает лишь общий контур решения. Надо убедиться, что детали соответствуют контуру; поэтому мы должны внимательно рассмотреть каждую деталь, одну за другой. *Ступень за ступенью лестница преодолевается*[30]. *Маленькие удары валят большие дубы*[31]. *Делай постепенно*[32]. Выполняя свой план, следует тщательно расположить этапы решения в правильной очередности, которая нередко обратна порядку состав-

---

[19] A wise man will make more opportunities than he finds.
[20] A wise man will make tools of what comes to hand.
[21] A wise man turns chance into good fortune.
[22] Have an eye to the main chance.
[23] Look before you leap.
[24] Try before you trust.
[25] A wise delay makes the road safe.
[26] If you will sail without danger you must never put to sea.(Ср. русскую пословицу «Волков бояться, в лес не ходить».— *Ред.*)
[27] Do the likeliest and hope the best.
[28] Use the means and God will give the blessings. (Ср. русскую пословицу: «На бога надейся, а сам не плошай».— *Ред.*)
[29] We soon believe what we desire.
[30] Step after step the ladder is ascended.
[31] Little by little as the cat the fickle.
[32] Do it by degrees.

ления плана. *То, что глупый делает в конце, мудрый делает сначала*[33].

4. Очень важным и поучительным этапом работы является возвращение к уже решенной задаче. *Тот, кто не думает снова, не может думать правильно*[34]. *Вторые мысли самые лучшие*[35]. При вторичном изучении решения можно найти дополнительные подтверждения правильности полученного результата. Надо указывать начинающему, что такое дополнительное подтверждение очень ценно, что два доказательства лучше одного. *С двумя якорями безопасно плыть*[36].

5. Мы никоим образом не истощили запас пословиц, связанных с решением задач. Однако если приводить дальнейшие пословицы, это едва ли внесет новые темы, а лишь разнообразит уже рассмотренные. Более систематические и тонкие аспекты решения задач вряд ли могут быть охвачены мудростью пословиц.

Излагая более систематически порядок решения, автор попытался подделаться под стиль пословиц, что совсем не легко. Ниже следует несколько «синтетических» пословиц, выделяющих более тонкие отношения. Цель подскажет путь.

Ваши лучшие пять друзей: Что, Почему, Где, Когда и Как. Если вам нужен совет, обратитесь к Что, обратитесь к Почему. Обратитесь к Где, Когда и Как — и больше ни к кому не обращайтесь.

Ничему не верьте, но сомневайтесь только в том, что вызывает сомнение.

Найдя первый гриб или сделав первое открытие, осмотритесь вокруг,— они родятся кучками.

Настойчивость, надежда, успех. Было бы ошибкой полагать, что решение задач относится лишь к сфере чистого интеллекта; напротив, важную роль играют также настойчивость в достижении цели и эмоции, связанные с нашими успехами и неудачами. Пассивного, безучастного согласия слегка подумать, не напрягаясь чрезмерно,— может быть и достаточно для решения в классе какой-нибудь шаблонной задачки.

---

[33] What a fool does at last, a wise man does at first.

[34] He thinks not well that thinks not again.

[35] Second thoughts are best. (Ср. русскую поговорку: «Утро вечера мудренее». — *Ред.*)

[36] It is safe riding at two anchors.

Но чтобы взяться за решение серьезной научной проблемы, необходима сила воли, которую не смогут сломить годы напряженного труда и горьких разочарований.

1. Наша настойчивость зависит от того, исполнены ли мы в данный момент надежды или безнадежности, удовлетворения или разочарования. Не нужно особой решимости, чтобы продолжать идти вперед, если мы убеждены, что решение вот-вот окажется в наших руках. Напротив, трудно заставить себя упорно продолжать поиски решения, когда мы не видим никаких путей, чтобы обойти встретившиеся трудности. Мы испытываем подъем духа, когда наше предсказание сбывается. Мы приходим в уныние, когда путь, которым мы шли с некоторой верой в будущий успех, заводит нас в тупик; наша настойчивость подвергается при этом серьезному испытанию.

«Il n'est point besoin espérer pour entreprendre ni réussir pour persévérer».

«Можно действовать, не имея надежд, и быть стойким, не добившись успеха». Эти слова могут быть девизом несгибаемой воли, чести и долга, девизом благородного человека, видящего перед собой благородную цель. Настойчивость подобного рода, однако, не годится для ученого, который не может обойтись без известной надежды на успех в начале исследования и без некоторых удач, чтобы его продолжать.

Занимаясь научной работой, необходимо разумно соразмерять нашу настойчивость с открывающейся перед нами перспективой. Вы не приступите к решению некоторой задачи, если она не представляет какого-либо интереса, вы серьезно принимаетесь за работу, если задача оказывается поучительной; вы мобилизуете все свои силы, направляя их на решение задачи, если последняя кажется вам многообещающей. Поставив перед собой определенную цель, вы упорно стремитесь к ней, не создавая, однако, для себя ненужных искусственных трудностей. Вы не пренебрегаете малыми успехами; напротив, вы стремитесь к ним. *Если не удается решить данную задачу, попытайтесь сначала решить сходную.*

2. Если ученик делает действительно глупые ошибки или до отчаяния медленно соображает, причина этого почти всегда одна: у него вообще нет никакого желания решать задачу, нет желания даже как следует понять задачу; потому он и не понял ее. Поэтому учитель, серьезно жела-

ющий помочь ученику, прежде всего должен возбудить его любопытство, пробудить в нем известное желание решить задачу. Некоторое время должно быть уделено «пусковому периоду», когда ученик настраивает себя, готовясь приступить к работе.

Обучение искусству решать задачи есть воспитание воли. Решая не слишком легкую для себя задачу, ученик учится быть настойчивым, когда нет успеха, учится ценить скромные достижения, терпеливо искать идею решения и сосредоточиваться на ней всем своим «я», когда эта идея возникает. Если учащемуся не представилось возможности еще на школьной скамье испытать перемежающиеся эмоции, возникающие в борьбе за решение, в его математическом образовании оказывается роковой пробел.

Не встречалась ли вам раньше эта задача? Возможно, мы уже решали прежде предложенную теперь задачу; или мы слышали о ней, или, быть может, мы занимались очень близкой задачей. Никогда не следует пренебрегать рассмотрением этих возможностей. Мы пытаемся вспомнить все то, что может иметь отношение к данной задаче. *Не встречалась ли вам раньше эта задача? Хотя бы в несколько другой форме?* Даже отрицательный ответ на эти вопросы может помочь нам активизировать наши знания, связанные с понятиями, содержащимися в задаче.

Вопрос, являющийся заглавием данной статьи, часто понимается в более общем смысле. Чтобы найти решение, мы должны извлечь из нашей памяти нужные сведения, мы должны активизировать ту часть наших знаний, пока пассивно хранящихся в памяти, которая имеет отношение к данной задаче. (См. «П р о д в и ж е н и е и д о с т и ж е н и е».) Конечно, мы не можем знать заранее, какая часть наших знаний окажется нужной нам; однако существуют некоторые определенные возможности, которые всегда должны быть рассмотрены. Так, может оказаться, что некоторая особенность данной задачи, оказавшаяся прежде существенной при решении другой задачи, снова окажется существенной. Поэтому, если какая-нибудь особенность данной задачи может играть, как нам представляется, важную роль, мы должны попытаться вспомнить, не встречали ли мы подобную особенность прежде, при решении других задач. Что это за особенность? Знакома ли она вам? *Не встречалась ли она вам прежде?*

Нельзя ли использовать полученный результат? Если вы собственными силами решили задачу,— вы сделали открытие. Если задача нетрудная, то ваше открытие не может претендовать на грандиозность; однако оно от этого не перестает быть открытием.

Сделав хотя какое-нибудь открытие, пусть самое скромное, мы не должны упускать случая задать себе вопрос: не скрывается ли за нашим открытием нечто большее? Из полученного результата следует выжать все, что он может дать; нужно также попытаться найти новое применение использованному методу решения. Постарайтесь развить ваш успех! *Нельзя ли использовать полученный результат или метод решения в какой-нибудь другой задаче?*

1. Имея в качестве отправного пункта решенную задачу, мы можем придумать новые без особого труда, если мы в некоторой степени знакомы с главнейшими средствами видоизменения задачи, такими, как обобщение, специализация, аналогия, разложение и составление новых комбинаций. Отправляясь от данной задачи, мы при помощи этих средств приходим к новым задачам, из этих новых мы в свою очередь получаем производные задачи и т. д. Теоретически этот процесс можно продолжать как угодно далеко, но на практике мы чаще всего принуждены прерывать его на самых первых стадиях. Дело в том, что задачи, к которым мы приходим таким образом, часто оказываются неприступными по своей трудности.

С другой стороны, мы можем придумать много задач, решение которых непосредственно получается из решения ранее решенной исходной задачи. Однако такие задачи чаще всего оказываются неинтересными.

Нелегко найти новую задачу, одновременно интересную и поддающуюся решению; для этого требуются опыт, вкус и удача. Тем не менее, решив какую-либо задачу, всегда следует предпринять поиски новых. Хорошие задачи похожи на некоторые грибы: они растут группами. Найдя один гриб (или задачу), оглянитесь вокруг: вполне вероятно, что вы найдете еще несколько поблизости.

2. Проиллюстрируем сказанное на примере, который мы рассматривали в пунктах **8, 10, 12, 14, 15.**

Итак, нашим отправным пунктом является следующая задача:

Найти диагональ прямоугольного параллелепипеда, если даны три его измерения (длина, ширина и высота).

Зная решение этой задачи, мы легко найдем решение любой из следующих (из которых первые две в несколько иной форме рассматривались в п. 14).

Найти радиус сферы, описанной вокруг прямоугольного параллелепипеда с данными длиной, шириной и высотой.

Основание пирамиды есть прямоугольник; проекция вершины пирамиды на ее основание совпадает с центром основания. Найти боковое ребро, если даны высота пирамиды и стороны основания.

Найти расстояние между двумя точками в пространстве, прямоугольные координаты которых (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2).

Эти задачи легко решить, так как по существу они не отличаются от исходной задачи, решение которой известно. Каждую из них мы получили, введя в исходную задачу некоторые новые понятия, такие, как описанная сфера, пирамиды, декартовы координаты. Эти новые понятия легко ввести и легко устранить; избавляясь от них, мы возвращаемся к исходной задаче.

Приведенные новые задачи представляют некоторый интерес, так как интересными являются новые понятия, введенные в исходную задачу. Более того, последняя задача о расстоянии между двумя точками, заданными своими координатами, оказывается весьма важной, так как понятие прямоугольных координат играет большую роль в математике.

3. Вот другая задача, которая может быть легко решена, если известно решение исходной задачи:

Даны длина, ширина и диагональ прямоугольного параллелепипеда; найти его высоту.

Действительно, существо решения исходной задачи состоит в установлении соотношения, связывающего четыре величины: три измерения прямоугольного параллелепипеда и его диагональ. Если три из этих четырех величин заданы, из найденного соотношения мы можем найти четвертую. Таким образом, мы можем решить новую задачу.

Здесь мы имеем образец, следуя которому из решенной исходной задачи легко получить новые, которые без труда могут быть решены. Для этого достаточно считать прежнее неизвестное данной величиной, а одно из данных считать теперь неизвестным.

Соотношение, связывающее неизвестное и данные, одно и то же в обеих задачах, старой и новой. Если оно найдено при решении одной задачи, оно может быть использовано для решения другой.

Этот прием получения новых задач путем перемены ролей рассматриваемых величин отличается по существу от приема, использованного в пункте 2.

4. Применим другие средства для разыскания новых задач.

Вот естественное *обобщение* нашей исходной задачи: найти диагональ параллелепипеда, если даны три его ребра, исходящие из конца диагонали и три угла между этими ребрами.

Путем *специализации* мы приходим к следующей задаче: Найти диагональ куба с данным ребром.

Путем *аналогии* мы можем получить неисчерпаемое разнообразие задач. Вот некоторые задачи, полученные путем аналогии из задач пункта 2:

Найти диагональ правильного октаэдра с данным ребром.

Найти радиус сферы, описанной вокруг правильного тетраэдра с данным ребром.

По данным географическим координатам — широте и долготе — двух точек на земной поверхности (которая здесь считается сферой) найти сферическое расстояние между ними.

Все эти задачи несомненно интересны, однако лишь одна из них, полученная путем специализации, может быть решена непосредственным применением решения исходной задачи.

5. Из данной задачи можно получить новые, если считать некоторые ее элементы переменными.

Частный случай задачи, рассмотренной в пункте 2, состоит в определении радиуса сферы, описанной вокруг куба с данным ребром. Зафиксируем куб и общий центр куба и сферы, но будем менять ее радиус. При малом радиусе сферы куб лежит целиком внутри сферы. С возрастанием радиуса сфера расширяется (как резиновый шар при надувании). В некоторый момент сфера касается граней куба, затем, позднее,— ее ребер, наконец, в известный момент сфера проходит через вершины куба. Какие значения принимает радиус в эти три критические момента?

6. Математический опыт учащегося нельзя считать полным, если он не имел случая решить задачу, *изобретенную им самим.*

Поэтому учителю следует показать, как из исходной решенной задачи получить новые, этим он возбудит любознательность учащихся. Учащиеся могут участвовать в изобретении новой задачи. Например, учитель может ввести расширяющуюся сферу, рассмотренную выше, в пункте 5, и поставить вопрос: «Что могли бы вы попытаться вычислить? Какое значение радиуса сферы представляет особенный интерес?»

Нельзя ли получить тот же результат иначе?

Если решение, которое мы в конце концов нашли, получилось длинным и громоздким, мы естественно, подозреваем, что существуют другие способы решения, приводящие к тому же результату более ясным и прямым путем.

Нельзя ли получить тот же результат иначе? Нельзя ли усмотреть его с одного взгляда? Но даже в случае, если мы удовлетворены найденным решением, получение другого решения все же может представлять для нас интерес. Для нас естественно желание убедиться в истинности некоторого теоретического результата, придя к нему двумя различными путями. Это желание аналогично нашему стремлению воспринять некоторый материальный предмет при помощи двух различных чувств.

Найдя решение, мы хотим найти другое так же, как, увидев предмет, мы испытываем желание дотронуться до него.

Два доказательства лучше, чем одно. Как говорит пословица «надежнее стоять на двух якорях».

1. *Пример.* Найти площадь S боковой поверхности усеченного прямого кругового конуса, если дан радиус нижнего основания R, радиус верхнего основания r и высота h.

Эта задача может быть решена различными способами. Например, нам может быть известна формула для площади боковой поверхности полного конуса. Так как усеченный конус получается отсеканием от конуса другого, меньшего, конуса, то площадь его боковой поверхности есть разность площадей боковых поверхностей двух полных конусов; остается последние выразить через R, r, h. Произведя соответствующие выкладки, мы получаем формулу:

$$S = \pi (R + r) \sqrt{(R - r)^2 + h^2}.$$

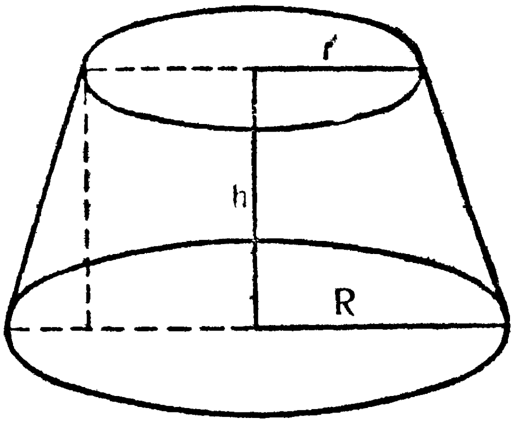
Получив после более или менее длинных вычислений приведенную выше формулу, мы испытываем желание найти другой, более прямой и ясный путь. *Можете ли вы получить тот же результат другим способом? Нельзя ли усмотреть его с одного взгляда?*

Желая получить этот результат более непосредственным путем, мы можем попытаться истолковать его геометрически. Так, мы можем подметить, что

$$\sqrt{(R-r)^2+h^2}$$

есть длина *образующей* усеченного конуса.

(Образующая есть одна из боковых сторон равнобедренной трапеции, являющейся пересечением усеченного конуса и плоскости, проходящей через его ось; см. фиг. 16.)



Фиг. 16.

Далее, мы можем увидеть, что

$$\pi(R+r)=\frac{2\pi R+2\pi r}{2}$$

есть среднее арифметическое периметров двух оснований усеченного конуса.

При взгляде на соответствующую часть нашей формулы нам может прийти в голову написать ее в виде

$$\pi(R+r)=2\pi\frac{R+r}{2}.$$

Это выражение представляет собой периметр среднего сечения усеченного конуса (*средним сечением* мы здесь называем пересечение усеченного конуса с плоскостью, параллельной его основаниям и равноудаленной от них).

Обнаружив возможность такого истолкования отдельных частей нашей формулы, мы начинаем в новом свете видеть всю формулу. Мы можем прочитать ее теперь таким образом:

Площадь = периметр среднего сечения × образующая.

Здесь естественно вспомнить правило вычисления площади трапеции:

Площадь = средняя линия × высота.

(Средняя линия трапеции параллельна ее основаниям и делит высоту пополам.)

Интуитивно чувствуя аналогию этих утверждений, относящихся, соответственно, к усеченному конусу и трапеции, мы теперь оказываемся в состоянии усмотреть результат, относящийся к усеченному конусу, «почти с одного взгляда». Это значит, что мы начинаем чувствовать уверенность в том, что нам удастся получить короткое и прямое доказательство результата, найденного прежде при помощи длинных выкладок.

2. Изложенный пример типичен. Не удовлетворившись вполне найденным решением, мы желаем улучшить, видоизменить его. Для этого мы анализируем решение, стараясь лучше понять его, увидеть его с новой стороны. Вначале нам может удастся дать новое истолкование хотя бы отдельным небольшим частям полученного результата.

Затем нам может посчастливиться взглянуть по-новому на некоторые другие части.

Рассматривая одну за другой различные части результата, смотря на них с различных точек зрения, мы можем, наконец, прийти к тому, что весь результат в целом предстанет перед нами в новом свете. Осмысленный же по-новому результат нередко подсказывает новое доказательство.

Нужно признать, что все это имеет бóльшую вероятность произойти с опытным математиком, решающим трудную и тонкую задачу, чем с начинающим, пытающимся одолеть элементарную задачу. Математик, обладающий обширными познаниями, подвержен большей опасности пустить в ход слишком сильные средства и усложнить доказательство ненужным образом. Однако опытный математик в виде компенсации имеет то преимущество, что ему легче, чем начинающему, дать правильную оценку новым истолкованиям отдельных частей результата, чтобы затем придать новую форму всему результату в целом.

Тем не менее может случиться, что учащиеся, даже в одном из младших классов, предложат излишне сложное решение. В этом случае учителю следует продемонстрировать им, по крайней мере один-два раза, не только более короткое решение, но и то, как из самого результата извлечь указания о возможности решить задачу короче.

(Смотри также Reductio ad absurdum и косвенное доказательство.)

Нельзя ли проверить результат? *Нельзя ли проверить ход решения?*

Осуществляя проверки, упоминаемые в этих вопросах, мы укрепляем свою уверенность в правильности полученного решения; наши знания становятся при этом прочнее и надежнее.

1. Правдоподобие числового результата математической задачи может быть оценено, если сравнить этот результат с числами, наблюдаемыми в действительности. Обычный здравый смысл может часто подсказать нам, правдоподобен ли результат. Задачи, возникающие из практических потребностей или естественного любопытства, почти всегда имеют дело с наблюдаемыми фактами. Поэтому можно было бы предполагать, что возможность подобного сравнения с наблюдаемыми фактами редко не будет использована.

Однако каждый учитель знает, на какие невероятные вещи в этом отношении способны учащиеся.

Иной учащийся не испытывает никакого недоумения, найдя, что длина судна равна 4919 *м* или что возраст капитана, о котором, кстати сказать, известно, что он является дедушкой, равен 8 годам и 2 месяцам. Подобное пренебрежение очевидностью не обязательно свидетельствует о тупости, но скорее о безразличии по отношению к искусственным задачам.

2. Задачи «в буквах» предоставляют возможность более разнообразных и более интересных проверок, чем задачи «в числах» (см. п. **14**). В качестве нового примера рассмотрим усеченную пирамиду с квадратным основанием. Если сторона нижнего основания равна a, сторона верхнего основания равна b и высота пирамиды равна h, мы находим, что объем этой пирамиды равен

$$\frac{a^2+ab+b^2}{3}h.$$

Этот результат мы можем проверить при помощи специализации. В самом деле, если $b=a$, усеченная пирамида становится призмой; при этом формула дает объем a^2h; если $b=0$, мы получаем пирамиду; формула снова дает правильное значение объема, равное $\frac{a^2h}{3}$.

Мы можем осуществить проверку по размерности. Мы обнаруживаем, что размерность нашего выражения есть куб длины. Далее, мы можем подвергнуть нашу формулу испытанию, *изменяя данные величины.* В самом деле, при возрастании любой из положительных величин a, b, h возрастает и их функция, выраженная нашей формулой.

Описанным здесь испытаниям можно подвергать не только окончательный результат, но и промежуточные результаты. Эти проверки настолько полезны, что всегда стоят затраченного на них труда (см. «Видоизменение задачи», п. 4). Чтобы получить возможность использовать эти проверки, может оказаться выгодным обобщить задачу «в числах», превратив ее в задачу «в буквах» (см. «Обобщение», п. 3).

3. *Нельзя ли проверить ход решения?* Проверяя шаг за шагом ход решения, нужно избегать простого повторения.

Во-первых, осуществляя простое повторение, мы насилуем свое внимание, ибо мы склонны считать это надоедливым и непоучительным занятием.

Во-вторых, очень вероятно, что там, где мы ошиблись в первый раз, мы при тех же обстоятельствах ошибемся вторично. Если оказывается необходимым снова проделать все сначала шаг за шагом, нам следует по крайней мере изменить последовательность шагов или их группировку, чтобы внести хоть некоторое изменение.

4. Можно сначала выбрать те части решения, которые внушают наибольшие сомнения, и проанализировать их в первую очередь. Выбирая те места решения, которые стоит подвергнуть проверке, полезно задавать себе вопрос: все ли данные мы использовали?

5. Ясно, что наши нематематические знания не могут полностью основываться на логических доказательствах. Наиболее прочная часть наших повседневных знаний постоянно проверяется и подкрепляется повседневным опытом. Проверки при помощи наблюдения производятся наиболее систематически в естественных науках. Эти проверки облекаются в форму тщательных экспериментов и измерений; в физических науках они комбинируются с математическими рассуждениями. Могут ли наши математические знания основываться исключительно на логических доказательствах?

Это философский вопрос, обсуждать который здесь мы не имеем никакой возможности. Однако нет никакого сомнения в том, что ваши знания, так же как мои знания или знания ваших учеников, не основываются лишь на логических доказательствах. Любые глубокие знания, если они есть, покоятся на обширном экспериментальном фундаменте, который расширяется всякий раз, когда результат решенной нами задачи успешно проходит все испытания.

Нельзя ли сформулировать задачу иначе?[1] *Еще иначе?* Эти вопросы имеют целью соответствующие видоизменения задачи.

Вернитесь к определениям.

(См. «Определение».)

Обобщение есть переход от рассмотрения единственного объекта к рассмотрению некоторого множества, содержащего этот объект в качестве своего элемента, или переход от менее емкого множества к более емкому, содержащему первоначальное.

1. Если случайно мы встречаем сумму

$$1+8+27+64=100,$$

мы можем подметить, что ее можно записать в любопытной форме:

$$1^3+2^3+3^3+4^3=10^2.$$

Естественно возникает вопрос: часто ли сумма кубов последовательных целых чисел, т. е.

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3,$$

оказывается полным квадратом? Задавая этот вопрос, мы обобщаем.

Наше обобщение очень удачно: оно приводит нас от одного наблюденного факта к замечательному общему закону. Многие результаты в математике, физике и других естественных науках были найдены в результате удачного обобщения. (См. «Индукция и математическая индукция».)

2. Обобщение часто может помочь решить задачу. Рассмотрим следующую стереометрическую задачу:

«Правильный октаэдр и прямая занимают в пространстве фиксированное положение. Найти плоскость, проходящую через данную прямую и делящую октаэдр на две равновеликие части». Задача эта может показаться сложной; однако достаточно очень небольшого знакомства с формой правильного октаэдра, чтобы прийти к следующему обобщению:

«Замкнутая поверхность, *обладающая центром симметрии*, и прямая занимают в пространстве фиксированное положение. Найти плоскость, проходящую через данную пря-

---

[1] Статья содержит исключительно ссылки на другие статьи «Словаря».

мую и делящую объем тела, ограниченного данной поверхностью, на две равновеликие части». Искомая плоскость, конечно, проходит через центр симметрии поверхности и определяется этой точкой и данной прямой. Так как октаэдр обладает центром симметрии, тем самым первоначальная задача оказывается решенной.

Читатель, конечно, не мог не заметить, что вторая задача была более общей, чем первая, и тем не менее она оказалась проще. Нашим главным достижением при решении первой задачи было то, что мы *придумали вторую задачу*. Придумав вторую задачу, мы выяснили роль центра симметрии; мы *выделили* то свойство октаэдра, которое является существенным в данной задаче, именно — наличие у него центра симметрии.

Более общая задача может оказаться проще. Это звучит парадоксально; однако рассмотренный пример убеждает нас в истинности этого утверждения. Главное достижение при решении частной задачи состояло в том, что мы придумали общую задачу. После этого нам осталось совсем немного работы, чтобы довести задачу до конца.

Итак, в рассматриваемом случае решение общей задачи явилось лишь частью решения частной задачи.

(Смотри «Парадокс исследователя».)

3. «Найти объем усеченной пирамиды с квадратным основанием, если сторона нижнего основания равна 10 *м*, сторона верхнего 5 *м* и высота пирамиды 6 *м*». Если числа 10, 5, 6 мы заменим буквами, например a, b, h, мы тем самым обобщим задачу. Мы получаем новую задачу, более общую по сравнению с первоначальной, именно:

«Найти объем усеченной пирамиды с квадратным основанием, если сторона нижнего основания равна a, сторона верхнего b и высота пирамиды h». Подобное обобщение может оказаться очень полезным. Перейдя от задачи «в числах» к задаче «в буквах», мы приобретаем новые возможности; так, например, мы оказываемся в состоянии смотреть на данные величины как на переменные, что дает нам разнообразные возможности проверки результата.

(См. «Нельзя ли проверить результат?», п. 2; «Видоизменение задачи», п. 4.)

Обозначения. Чтобы почувствовать преимущество удачно выбранного и хорошо знакомого обозначения, попытайтесь сложить несколько больших чисел при условии, что нельзя пользоваться привычными арабскими цифрами, а можно прибегать лишь к римским цифрам. Возьмите, например, числа MMMXC, MDXCVI, MDCXLVI, MDCCLXXXI, MDCCCLXXXVII.

Трудно переоценить значение математических обозначений. Современные вычислители, пользующиеся десятичным обозначением, имеют значительное преимущество над древними, у которых не было такого удобного способа записи чисел. Современный учащийся, знакомый с обычными обозначениями алгебры, аналитической геометрии, дифференциального и интегрального исчислений, имеет огромное преимущество перед греческим математиком в решении задач на площади и объемы, задач, на которых упражнялся гений Архимеда.

1. Речь и мышление тесно связаны. Употребление слов развивает мышление. Некоторые философы и филологи пошли несколько дальше, утверждая, что без слов нет мышления.

Однако это последнее утверждение кажется нам некоторым преувеличением. Если у вас есть некоторый опыт серьезной математической работы, вам известно, что можно проделать очень большую умственную работу, не прибегая к словам, а рассматривая лишь геометрические фигуры или пользуясь алгебраическими символами. Фигуры и символы тесно связаны с математическим мышлением; использование их развивает его. Можно было бы уточнить несколько ограниченное утверждение философов и филологов, включая в данное ими определение наряду со словами другие виды символов и формулируя его так: *без символов нет мышления.*

Во всяком случае, употребление математических символов подобно употреблению слов. Математические обозначения выступают как своего рода особый язык, *une langue bien faite*, язык, хорошо приспособленный к своему назначению, краткий и точный, с правилами, которые в отличие от правил обычной грамматики не терпят никаких исключений.

С этой точки зрения, составление уравнений имеет сходство с переводом, переводом с обычного языка на язык математических символов.

2. Такие математические символы, как $+$, $-$, $=$ и ряд других, имеют определенный общепринятый смысл. Другие же символы, как, например, маленькие и заглавные буквы греческого и римского алфавитов, могут иметь разный смысл

в различных задачах. Встречаясь с новой задачей, мы должны выбрать определенные символы, *ввести подходящие обозначения*.

Здесь имеется некоторая аналогия с употреблением обычного языка. Многие слова в различных контекстах имеют различный смысл; когда важна точность, мы должны тщательно выбирать слова.

Выбор обозначений является важным моментом в решении задачи. К нему следует отнестись очень внимательно. Потраченное на выбор обозначений время с лихвой компенсируется тем временем, которое мы сэкономим, избежав путаницы в работе. Более того, тщательно выбирая обозначения, мы будем хорошо разбираться в тех элементах задачи, которые подлежат обозначению. Таким образом, выбор подходящего обозначения может существенно помочь нам понять задачу.

3. Хорошая система обозначений должна удовлетворять следующим требованиям: она должна быть однозначной, содержательной, легко запоминающейся. Она должна исключать «вредные» дополнительные значения и с выгодой использовать «полезные» дополнительные значения. Порядок и связь между обозначениями должны определять порядок и связь между обозначаемыми объектами.

4. Знаки должны прежде всего иметь определенное *значение*. Недопустимо, чтобы один и тот же знак обозначал два различных объекта или понятия в одной и той же задаче[1]. Если, решая задачу, вы обозначили какую-нибудь величину буквой a, не следует в этой же задаче обозначать той же буквой другую величину. Разумеется, в другой задаче можно использовать букву a в другом значении.

Хотя и запрещается использовать один символ для обозначения разных объектов, но можно использовать различные символы для обозначения одного и того же объекта. Например, произведение a на b может быть записано как:

$$a \times b, \quad a \cdot b \quad \text{и} \quad ab.$$

[1] К сожалению, этот принцип не всегда еще соблюдается в существующих фактически системах обозначений. Так, в традиционной символике учения о функциональной зависимости знак $f(x)$, смотря по контексту, может обозначать как самое функцию (закон функционального соответствия), так и значение зависимой переменной, соответствующее значению x аргумента. Такая двусмысленность знака $f(x)$ нередко серьезно затрудняет учащихся, начинающих изучать основы математического анализа. (Примечание к русскому переводу.— *Ред.*)

В ряде случаев выгодно использовать два или более различных символа для обозначения одного и того же объекта, но в таких случаях требуется особая осторожность. Обычно лучше всего пользоваться лишь одним символом для обозначения одного объекта и без настоятельной необходимости не применять несколько обозначений.

5. Хорошее обозначение должно *легко запоминаться* и легко распознаваться. Обозначение должно немедленно вызвать у нас представление об обозначаемом, и наоборот.

Есть простой способ делать обозначения легко узнаваемыми — это применять начальные буквы в качестве символов. Например, в пункте 20 мы использовали r для обозначения скорости (англ. — rate), t — времени (англ. — time), V — объема (англ. — volume). Мы не можем, однако, пользоваться этими буквами во всех случаях. Так, в пункте 20 нам пришлось рассматривать радиус, но мы не могли обозначить его через r, так как этой буквой обозначалась скорость. Существуют и другие соображения, ограничивающие выбор символов, и есть способы сделать символы легко узнаваемыми. О них речь будет идти ниже.

6. Обозначения будут не только легко ассоциироваться с понятиями, но и окажутся особенно полезными для оформления наших представлений, когда порядок и связь между обозначениями подсказывают порядок и связь между самими объектами. Для того чтобы проиллюстрировать эту мысль, приведем несколько примеров.

(I) Для обозначения родственных объектов в рассматриваемой задаче мы пользуемся буквами, расположенными в алфавитном порядке.

Так, например, для обозначения известных или постоянных величин мы обычно пользуемся начальными буквами алфавита a, b, c, а для обозначения неизвестных или переменных величин последними буквами алфавита x, y, z.

В пункте 8 для обозначения известных — длины, ширины, высоты параллелепипеда — мы пользовались буквами a, b, c. В этом случае обозначения a, b, c имели преимущество перед символами l, w, h[1], так как эти три величины играли одинаковую роль в решении задачи, что и подчеркивается тем, что для их обозначения использованы буквы, расположенные в алфавитном порядке. Более того, посколь-

[1] l — первая буква английского слова length — длина, w — width — ширина, h — height — высота. (Примечание переводчика.)

ку a, b, c являются первыми буквами алфавита, они, как мы уже говорили, чаще всего используются для обозначения заданных величин. В каком-либо другом случае, когда эти три величины будут играть разную роль — и важно будет знать, которая из них относится к горизонтальному или вертикальному отрезку, можно предпочесть обозначения l, w, h.

(II) Для обозначения объектов одной категории мы обычно пользуемся буквами одного алфавита. Для обозначения объектов разных категорий пользуются буквами различных алфавитов. Так, в планиметрии мы часто употребляем:

заглавные латинские буквы A, B, C,... для обозначения точек,

малые латинские буквы a, b, c, для обозначения отрезков прямой,

малые греческие буквы α, β, γ,... для обозначения углов.

Для обозначения объектов разных категорий, имеющих какую-нибудь существенную связь между собой, важную для нашей задачи, мы можем пользоваться соответствующими заглавными и маленькими буквами одного алфавита, как, например, A и a, B и b и т. д. Для примера возьмем хорошо знакомые символы для обозначения элементов треугольника:

A, B, C, — его вершины,
a, b, c, — его стороны,
α, β, γ, — его углы.

Обозначая так, мы полагаем, что a — сторона, лежащая против вершины A, а α — угол при этой вершине.

(III) В пункте 20 выбор букв a, b и x, y особенно удачен в смысле определения характера обозначаемых элементов и выявления связи между ними. Буквы a и b подсказывают, что обозначенные ими величины постоянные, в то время как x и y указывают на переменный характер соответствующих величин: a так предшествует b, как x предшествует y, а это наводит на мысль, что a относится к b так, как x к y. И в самом деле, a и x горизонтальные отрезки, b и y — вертикальные и $a:b=x:y$.

7. Запись

$$\triangle ABC \backsim \triangle EFG$$

означает, что данные треугольники подобны. В современных книгах эта формула указывает на соответствие вершин в том порядке, в котором они записаны: A соответствует E, $B—F$ и $C—G$.

В старых книгах это условие о порядке соответствия вершин еще не было введено и читателю приходилось обращаться либо к чертежу, либо запоминать расположение соответствующих вершин.

Современные обозначения намного предпочтительнее старых. Пользуясь современными обозначениями, мы можем делать выводы из формул, *не обращаясь к чертежу*. Мы, например, можем утверждать, что

$$\angle A = \angle E,$$
$$AB:BC = EF:FG \text{ и т. д.}$$

Старые обозначения менее выразительны и не позволяют делать таких определенных заключений.

Обозначение, позволяющее по сравнению с другим сделать больше выводов, может быть названо более *содержательным*. Современное обозначение подобия треугольников по сравнению со старым содержательнее, оно более полно, нежели старое, отражает порядок и связь элементов и поэтому может служить основой для большего числа выводов.

8. Слова имеют *дополнительные значения*. Некоторые контексты, в которых какое-нибудь слово часто употребляется, влияют на него и добавляют к его главному значению какой-нибудь оттенок, дополнительный смысл или дополнительное значение. Если мы внимательно относимся к изложению своих мыслей, то мы стараемся выбрать из ряда близких по смыслу слов то дополнительное значение, которое нам больше всего подходит.

Нечто похожее есть и в математических обозначениях. Даже математические символы могут приобрести дополнительное значение из контекстов, в которых они часто встречаются. При внимательном выборе обозначений мы должны учесть это обстоятельство. Чтобы это было понятно, проиллюстрируем сказанное примерами.

Есть ряд букв, имеющих твердое, общепринятое значение. Так, e обычно обозначает основание натуральных логарифмов, i обозначает $\sqrt{-1}$, т. е. мнимую единицу, и π — отношение длины окружности к диаметру. Лучше всегда употреблять такие символы только в их традиционном значении. Если мы воспользуемся таким символом в каком-нибудь другом значении, его традиционное значение может иногда смутить нас и даже ввести в заблуждение. Правда, «вредные» дополнительные значения такого рода меньше беспокоют начинающего, который изучил сравнительно мало отделов, чем специалиста-математика, которому приходилось уже, вероятно, не раз иметь дело с такого рода неприятностями.

В то же время дополнительные значения символов могут быть полезными для нас, даже весьма полезными, если ими пользоваться с должным чувством меры. Обозначение, использованное ранее при решении, может помочь нам вспомнить какой-нибудь полезный прием. Разумеется, мы должны быть достаточно внимательны, чтобы четко отличать данное (основное) значение от его предыдущего (дополнительного) значения. *Утвердившееся обозначение* [например, традиционное обозначение элементов треугольника, упомянутое выше, п. 6 (II)] имеет бóльшие достоинства. Будучи использованным в ряде случаев при решении задач, оно может воскресить в нашей памяти приемы, которые применялись нами ранее. Ведь мы запоминаем формулы с утвердившимися обозначениями. Конечно, следует соблюдать бóльшую осторожность в тех случаях, когда в силу особых обстоятельств мы вынуждены прибегать к утвердившемуся обозначению, придавая ему смысл, несколько отличный от обычного.

9. Когда нам приходится остановить свой выбор на одном из двух обозначений, надо иметь в виду, что в пользу каждого из них есть свои соображения. Для выбора наиболее подходящего обозначения, так же как и в выборе наиболее подходящего слова, необходимы опыт и чувство меры. Для этого полезно знать различные преимущества и недостатки обозначений, о которых речь шла выше. Во всяком случае, нам следует внимательно относиться к выбору обозначения и *достаточно убедительно его мотивировать*.

10. Не только самые безнадежные ученики, но порой и довольно способные питают отвращение к алгебре. В обозначениях всегда есть что-то произвольное и искусственное. Заучить новое обозначение — это бремя для памяти и поэтому даже способный ученик отказывается принять на себя такое бремя, если он не видит в этом никакой пользы. Отвращение серьезного учащегося к алгебре оправдано, если собственный опыт не убеждает его в том, что язык математических символов помогает ему в решении задач. Помочь ученику приобрести такой опыт является важной задачей учителя, одной из его наиболее важных задач.

Мы подчеркиваем важность этой задачи, но не утверждаем, что ее легко разрешить. Вышеизложенные замечания могут быть полезными. Смотрите также составление уравнений. Проверка формулы путем всестороннего рассмотрения ее свойств может быть рекомендована в качестве особо поучительного упражнения.

(См. п. 14 и «Нельзя ли проверить результат?», п. 2.)

Определение термина, обозначающего новое понятие, есть установление его смысла при помощи других терминов, которые предполагаются известными.

1. *Специальные термины* в математике бывают двух видов. Некоторые из них считаются первоначальными и не подлежащими определению. Другие считаются производными и должным образом определяются, т. е. смысл их устанавливается при помощи первоначальных и ранее определенных понятий. Так, например, мы не даем логических определений таким первоначальным понятиям, как точка, прямая и плоскость [1]. Напротив, такие понятия, как «биссектриса угла», «окружность», «парабола», вводятся при помощи логических определений.

Определение последнего из приведенных понятий может быть сформулировано следующим образом.

Параболой называется геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки и данной прямой. Эта точка называется *фокусом* параболы, а прямая — *директрисой* параболы. Здесь подразумевается, что все эти элементы принадлежат одной и той же плоскости, причем данная точка (фокус) не лежит на данной прямой (директрисе).

Предполагается, что читателю не известен смысл определяемых терминов (парабола, ее фокус, ее директриса). Однако предполагается, что ему известен смысл всех других терминов (точка, прямая, плоскость, расстояние между двумя точками, геометрическое место и т. д.).

---

[1] Взгляд на эти понятия претерпел со времен Евклида существенные изменения. Евклид и его последователи в античной Греции определяли точку, прямую и плоскость. Однако их «определения» едва ли являются логическими определениями; это, скорее, лишь известного рода интуитивные иллюстрации рассматриваемых понятий. В преподавании такие иллюстрации, конечно, допустимы и даже желательны. (Примечание автора.— *Ред.*)

2. *Определения, приводимые в толковых словарях*, внешне мало отличаются от математических определений, но принцип их составления совершенно иной.

Составителя словаря интересует прежде всего общепринятый смысл слов. Этот общепринятый смысл *принимается* им как нечто известное и облекается им в форму определения.

Математика не интересует общепринятый смысл некоторого специального термина (во всяком случае, не это интересует его в первую очередь).

Для него довольно безразлично, что могут в обычной речи означать «окружность», «парабола» или любой другой специальный термин подобного рода. Математическое определение *создает* смысл математического термина.

3. *Пример*. Построить точку пересечения данной прямой и параболы, заданной своим фокусом и директрисой.

Наш подход к любой задаче должен зависеть от состояния наших знаний. Подход к только что сформулированной задаче зависит главным образом от того, насколько мы знакомы со свойствами параболы.

Если нам известно много фактов относительно свойств параболы, мы пытаемся извлечь пользу из наших сведений: *Не знаете ли вы теоремы, которая могла бы оказаться полезной?*

Известна ли вам какая-нибудь родственная задача? Если наши сведения о параболе, фокусе, директрисе довольно скудны, то эти термины скорее сбивают нас с толку. Мы, естественно, хотим освободиться от них. Но как можно от них избавиться? Прислушаемся к диалогу, происходящему между учителем и учащимся, которые заняты поисками решения задачи о пересечении прямой и параболы.

Они уже выбрали *подходящие обозначения*: P — какая-нибудь из искомых точек пересечения; F — фокус; d — директриса, c — прямая, пересекающая параболу.

«*Что неизвестно?*»

«Точка P».

«*Что дано?*»

«Прямые c, d и точка F».

«*В чем состоит условие?*»

«P есть точка пересечения прямой c и параболы с фокусом F и директрисой d».

«Правильно. Вам не приходилось, как мне известно, много заниматься изучением свойств параболы, но, вероятно, вы сможете объяснить, что же такое „парабола“?»

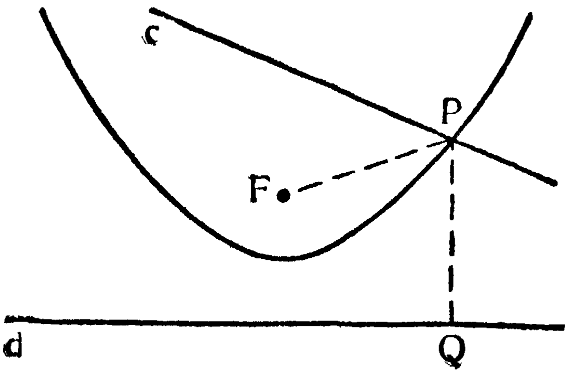
«Парабола есть геометрическое место точек, равноудаленных от фокуса и директрисы».

«Верно. Вы правильно сформулировали определение. Но этого мало; нужно его использовать. *Вернитесь к определениям.* Что вы можете сказать об искомой точке P, опираясь на определение параболы?»

«P лежит на параболе. Поэтому P равноудалена от d и от F».

«Прекрасно. *Сделайте чертеж!*»

Ученик проводит на чертеже (фиг. 17) отрезки PF и PQ, причем PQ есть перпендикуляр, опущенный из P на d.



Фиг. 17.

«Нельзя ли теперь *иначе сформулировать задачу*?»...

«Не могли бы вы сформулировать задачу по-иному, используя отрезки, которые только что построены?»

«P есть такая точка прямой c, что $PF = PQ$».

«Хорошо. Но объясните словами: что такое PQ?»

«Расстояние точки P от прямой d».

«Верно. Теперь-то вы, очевидно, сможете сформулировать задачу по-новому. Но, пожалуйста, тщательно, при помощи законченного предложения».

«Найти точку P, лежащую на данной прямой c, равноудаленную от данной точки F и данной прямой d».

«Сравните первоначальную формулировку задачи и новую формулировку. Первоначальная формулировка была полна незнакомых специальных терминов, таких, как «парабола», «фокус», «директриса»; она звучала немного напыщенно и высокопарно. Теперь не осталось и следа от этих незнакомых специальных терминов; вы устранили их из формулировки задачи. Прекрасно!»

4. *Исключение специальных терминов* явилось результатом работы, описанной в предыдущем примере. Отправившись от формулировки задачи, содержавшей некоторые специальные термины (парабола, фокус, директриса), мы в конце концов пришли к новой формулировке, свободной от таких терминов.

Чтобы устранить из формулировки задачи некоторый специальный термин, мы должны знать его определение.

Однако одного этого знания мало; определение нужно использовать.

Так, в предыдущем примере недостаточно было вспомнить определение параболы. Решающий шаг состоял во введении отрезков PF и PQ, равенство которых следовало из определения параболы. Это типичный прием. Мы присоединяем к уже имеющимся объектам некоторые новые, выбранные подходящим образом. Пользуясь определением, мы устанавливаем соотношения, связывающие вновь введенные элементы. Если эти соотношения полностью определяют смысл рассматриваемого понятия, это означает, что определение нами использовано. Этим самым мы устранили специальный термин.

Описанный прием может быть назван *возвращением к определениям.*

Возвращаясь к определению некоторого специального термина, мы освобождаемся от этого термина, вводя вместо него некоторые новые элементы, связанные определенными соотношениями.

Происходящее при этом изменение в нашем восприятии задачи может оказаться существенным. Во всяком случае, важно помнить, что любая новая формулировка, как вообще любое видоизменение задачи, может приблизить нас к ее решению.

5. *Определения и известные теоремы.* Если мы слыхали термин «парабола», имеем некоторое приблизительное понятие о форме этой кривой, но этим и ограничиваются наши познания, то они, конечно, недостаточны, чтобы при их помощи решить рассмотренную выше в виде примера задачу, так же как и любую другую серьезную геометрическую задачу, связанную с параболой. Какой же уровень знаний необходим для этой цели?

Геометрия как наука строится из аксиом, определений и теорем.

Понятие «парабола» не упоминается в аксиомах геометрии, в которых идет речь лишь о таких первоначальных понятиях, как «точка», «прямая» и т. д. Любое геометрическое рассмотрение, связанное с параболой, решение любой задачи, в которой идет речь о параболе, предполагают использование либо определения параболы, либо некоторых теорем об этой кривой. Решая подобную задачу, мы должны знать по крайней мере определение, хотя лучше иметь в своем распоряжении и несколько теорем.

То, что мы сказали в отношении параболы, верно, конечно, в отношении любого другого производного понятия. Приступая к решению задачи, связанной с подобным понятием, мы еще не можем сказать, что окажется удобнее в процессе решения: определение понятия или некоторая теорема, связанная с ним; однако ясно, что нам предстоит использовать либо одно, либо другое.

В некоторых случаях, конечно, мы не имеем выбора. Если нам известно лишь определение понятия и ничего более, мы вынуждены использовать это определение. Если наши познания ограничиваются определением понятия, то лучшее, что мы можем сделать,— это вернуться к определению. Однако если мы знаем много теорем, связанных с данным понятием, и обладаем достаточным опытом в оперировании им, то имеется вероятность, что мы найдем теорему, выясняющую интересующие нас свойства рассматриваемого понятия.

6. *Различные определения.* Сфера обычно определяется как геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки (в этом определении имеются в виду точки пространства, а не точки плоскости, как это было в предыдущем примере). Однако сферу можно определить и по-другому, например как поверхность, описываемую окружностью, вращающейся относительно своего диаметра. Известны и другие определения сферы.

Решая задачу, связанную с некоторым производным понятием, таким, как «сфера» или «парабола», и желая вернуться к его определению, мы должны остановиться на каком-либо одном определении из нескольких возможных. В подобном случае выбор подходящего определения может иметь большое значение.

Найдя площадь поверхности сферы, Архимед решил весьма важную и по тем временам чрезвычайно трудную задачу; Архимед должен был сделать выбор между различными определениями сферы, перечисленными выше. Он нашел удобным понимать под сферой поверхность, образованную вращением окружности относительно своего диаметра. При этом, он вписал в эту окружность правильный многоугольник с четным числом сторон, две противоположные вершины которого совпали с концами упомянутого диаметра. Этот правильный многоугольник аппроксимирует исходную окружность; вращаясь вместе с ней, он порождает выпуклую поверхность, состоящую из двух конусов, вершины которых совпадают с концами рассматриваемого диаметра окружности, и ряда усеченных конусов. Эта поверхность, составленная из кусков конических поверхностей, аппроксимирует сферу. Архимед, рассматривая эту поверхность, получает возможность вычислить площадь поверхности сферы. Если бы мы под сферой понимали геометрическое место точек, равноудаленных от центра, это определение не могло бы столь естественно навести нас на мысль о возможности описанной простой аппроксимации.

7. Возвращение к определениям, играя важную роль в процессе решения задачи, не менее важно и при проверке решения.

Пусть некто объявляет о найденном им новом решении задачи Архимеда о вычислении площади поверхности сферы. Если он имеет лишь смутное представление о том, что такое сфера, в его решении мы напрасно будем искать какой-либо толк.

Пусть он даже имеет ясное представление о том, что такое сфера, но если при решении задачи он не использовал известных ему свойств сферы, мы не можем сказать, знает ли он вообще хоть что-нибудь о сфере. Такое решение никуда не годится.

Поэтому, знакомясь с ходом решения, мы ждем момента, когда о сфере будет сказано что-либо по существу, т. е. будет использовано либо определение сферы, либо какая-нибудь теорема о сфере. Если такой момент не наступает, решение никуда не годится.

Таким же самым образом следует проверять не только чужие, но, конечно, и свои собственные решения.

Приняты ли вами во внимание все существенные понятия, содержащиеся в задаче? Как вы использовали эти понятия? Воспользовались ли вы содержанием этих понятий, следующим из их определений? Применили ли вы какие-либо существенные факты, известные теоремы, связанные с этими понятиями?

Важность возвращения к определениям при проверке законности некоторого рассуждения подчеркивалась еще Паскалем, установившим правило «Substituer mentalement les définitions á la place des définis», что означает «подставить мысленно определения вместо определяемых терминов». Важность возвращения к определениям при построении некоторого рассуждения подчеркивалась и Адамаром.

8. Возвращение к определениям есть важный мыслительный процесс. Если мы хотим понять, почему столь важны определения слов, надо сначала осознать, как важны сами слова. Мы едва ли смогли бы мыслить, не прибегая к помощи слов, или знаков, или тех или иных символов.

Поэтому слова и знаки обладают известной силой. Первобытные народы приписывают им магическую силу. Мы можем понять подобные верования, но мы, конечно, далеки от того, чтобы разделять их. Нам следует знать, что сила слов заключается не в их звуках, не в «vocis flatus», т. е. не в дуновении воздуха, производимом говорящим, а в понятиях, о которых слово напоминает, и, в конечном счете, в фактах, на которых зиждутся эти понятия.

Поэтому разумным является стремление искать смысл и факты, заключенные в словах. Возвращаясь к определениям, математик стремится познать действительные отношения между математическими объектами, скрытые за специальными терминами, так же точно, как физик стремится за специальными терминами увидеть определенные эксперименты или как обыкновенный человек, обладающий некоторой долей здравого смысла, склонен принимать в расчет лишь факты и не дать одурачить себя просто словами.

Осуществление плана. Выработать план и осуществить его — это две разные вещи. В известном смысле это верно и в применении к математическим задачам; между осуществлением плана решения и составлением его имеется определенная разница в характере работы.

1. В процессе поисков окончательной и строгой цепи умозаключений мы можем использовать временные и лишь правдоподобные рассуждения так же, как мы пользуемся строительными лесами, чтобы поддерживать мост в процессе его постройки. Однако когда строительство в достаточной степени продвинулось вперед, леса убираются, а мост остается стоять сам по себе. Так же точно, когда достаточно продвинуто вперед решение задачи, временные и лишь правдоподобные рассуждения устраняются, и результат находит опору лишь в безупречных по своей строгости умозаключениях.

В поисках плана решения мы не должны очень бояться и пусть лишь правдоподобных, эвристических рассуждений. Хорошо все то, что приводит нас к верной идее. Но эту точку зрения мы обязаны изменить, переходя к осуществлению плана; теперь мы должны применять лишь убедительные строгие доводы. *Осуществляя план решения, контролируйте каждый свой шаг. Ясно ли вам, что предпринятый шаг правилен?*

Чем тщательнее проверяем мы наши шаги, осуществляя план, тем свободнее мы можем применять эвристические рассуждения, создавая план.

2. Необходимо принимать в соображение порядок, в котором мы осуществляем отдельные детали нашего плана, в особенности, если задача сложна. Ни одна деталь не должна быть опущена; мы должны ясно представлять себе отношение, в котором данная деталь стоит ко всей задаче, и не терять из виду взаимоотношения главных частей решения. А это значит, что мы должны действовать в определенном порядке.

В частности, нерационально проверять второстепенные детали, прежде чем мы не приобретем уверенности в правильности главных пунктов наших рассуждений. В случае, если в основной линии наших рассуждений имеется скрытый дефект, проверка второстепенных деталей оказалась бы ненужной тратой времени.

Мы можем осуществлять отдельные детали нашего плана совсем не в том порядке, в каком они были придуманы; при окончательном изложении на бумаге этот порядок снова может быть изменен. В «Началах» Евклида детали рассуждений расположены в строгом систематическом порядке, который часто являлся предметом подражания и критики.

3. Евклид излагает все рассуждения, строго придерживаясь общего направления — от данных к неизвестному в «задачах на нахождение» и от предпосылки к заключению в «задачах на доказательство». Каждый новый элемент, такой, как точка, линия и т. д., появляется как естественное следствие данных или элементов, введенных ранее. Каждое новое утверждение строго доказывается, причем при доказательстве используются лишь предпосылка или ранее доказанные утверждения. Каждый новый элемент и каждое новое утверждение изучаются при их первом появлении; таким образом, они изучаются лишь однажды. В результате мы сосредоточиваем все наше внимание на данном шаге, не возвращаясь назад и не заглядывая вперед. Самым последним вновь вводимым элементом, о правильности найденных связей которого с данными мы должны заботиться, является неизвестное.

Самым последним утверждением, об истинности которого мы должны заботиться, является заключение теоремы. Если правилен каждый шаг, в том числе и последний, то все рассуждение истинно.

Манера изложения, которую мы встречаем у Евклида, может быть безоговорочно рекомендована, если нужно детально исследовать ход рассуждений. В частности, если это ваше собственное рассуждение, если оно длинное и сложное, причем вы вступили в ту стадию, когда необходимо провести рассуждение во всех деталях, то вы поступите самым лучшим образом, изложив все рассуждение в евклидовой манере.

Однако евклидова манера изложения не может быть без оговорок рекомендована, если нужно довести до сознания читателей или слушателей некоторое рассуждение, им прежде неизвестное.

Изложение в стиле Евклида может прекрасно выявлять каждую частную деталь, но оно не вполне подходит, если нужно оттенить главную нить рассуждения. Вдумчивый читатель без труда убедится в правильности каждого шага, но ему будет весьма трудно уяснить себе источник, цель и внутренние связи всего рассуждения в целом. Причиной этих затруднений является тот факт, что изложение в стиле Евклида часто ведется в порядке, прямо противоположном тому, в котором рассуждение было первоначально придумано. (Изложение в стиле Евклида строго следует «синтетическому» порядку; см. Папп, особенно пункты 3, 4, 5.)

4. Подведем итоги. Изложение в стиле Евклида, неумолимо ведущее нас от данных к неизвестному и от предпосылки к заключению, превосходно подходит для детальной проверки рассуждений, но оно является далеко не лучшим, если нужно выпукло и доступно разъяснить главную нить рассуждений.

Очень желательно, чтобы учащиеся проверяли свои рассуждения по способу Евклида, следуя от данных к неизвестному и испытывая каждый шаг, но не следует педантично навязывать этот стиль. Не очень хорошо, если учитель многие доказательства излагает в чисто евклидовой манере, хотя изложение в стиле Евклида может оказаться очень полезным впоследствии, после того, как учащиеся под руководством учителя с возможно большей самостоятельностью проследили главную линию доказательства. Нужно признать удачным стиль некоторых учебников, в которых предварительно очерчивается главная идея, причем большая роль отводится интуиции, и лишь затем в стиле Евклида излагаются детали.

5. Желая убедиться в истинности своего утверждения, добросовестный математик пытается усмотреть его интуитивно, а затем дать формальное доказательство. *Ясно ли вам, что оно правильно? Сумеете ли вы доказать, что оно правильно?* Добросовестный математик действует здесь подобно опытной покупательнице, пришедшей в магазин. Желая убедиться в качестве ткани, она сначала разглядывает ее, а затем пробует на ощупь. Интуитивное чувство и логическое доказательство — это два различных способа познания истины, которые можно сравнить с двумя способами восприятия материального предмета — зрением и осязанием.

Интуиция может значительно опередить формально-логическое доказательство.

Любой вдумчивый учащийся, не обладающий никакими систематическими познаниями в стереометрии, усвоив соответствующую терминологию, без труда увидит, что две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой (прямые могут и не лежать в одной плоскости). Однако доказательство этого утверждения, изложенное в девятом предложении книги II «Начал» Евклида, требует долгих, тщательных и искусных приготовлений.

Но другой раз формальное оперирование правилами логики и алгебраическими формулами может значительно опередить интуицию.

Почти каждый сразу увидит, что три случайным образом расположенные прямые делят плоскость на семь частей (рассмотрите конечный треугольник, образованный этими прямыми). Едва ли кто-нибудь способен усмотреть, даже напрягая свое внимание до предела, что пять случайным образом расположенных плоскостей делят пространство на двадцать шесть частей. Однако может быть строго доказано, что этих частей будет именно двадцать шесть, причем доказательство не оказывается даже трудным или длинным.

Осуществляя наш план, мы проверяем каждый шаг. Для проверки мы либо пытаемся увидеть правильность этого шага непосредственно, интуитивно, либо пользуемся некоторыми формально-логическими правилами. Иногда впереди оказывается интуиция, иногда — формальные рассуждения.

Интересное и полезное упражнение состоит в том, чтобы воспользоваться обоими способами. *Ясно ли вам, что предпринятый шаг правилен?* Да, я вижу это ясно и отчетливо. Интуиция оказалась впереди; сможет ли формальное рассуждение догнать ее? *Сумеете ли вы доказать, что он правилен?*

Попытка формально доказать то, что усмотрено интуитивно, и увидеть интуитивно то, что доказано формально,— это прекрасное упражнение для развития интеллекта. К сожалению, при классных занятиях для него не всегда остается достаточно времени. Сказанное можно иллюстрировать примером, рассмотренным в пунктах 12 и 14.

Папп, знаменитый греческий математик, живший предположительно около 300 г. нашей эры, в седьмом томе своего «Математического сборника» говорит об отрасли науки, названной им ἀναλυόμενος. В переводе мы можем передать это название или как «Сокровищница анализа», или как «Искусство решать задачи», или даже как «Эвристика». Последнее название кажется нам наиболее подходящим. Хороший перевод отчета Паппа имеется на английском языке [1]. Ниже дается свободное изложение текста оригинала:

«То что называют эвристикой, можно кратко определить как особое собрание принципов, предназначенное для тех, кто после изучения обычных «Начал» имеет желание научиться решать математические задачи; изучение эвристики полезно лишь для достижения этой цели. Эвристика создана трудами трех людей: Евклида, автора «Начал», Аполлония из Перги и Аристея старшего. Она обучает приемам анализа и синтеза».

«Исходным пунктом анализа является то, что требуется доказать, ибо допускается, что задача уже решена. Из этой задачи мы делаем выводы, а из этих выводов делаем другие выводы и т. д. до тех пор, пока не придем к такому выводу, который можно использовать как начало синтеза, ибо при анализе мы считаем уже выполненным то, что по условиям задачи требуется сделать (искомое уже найденным; то, что требуется доказать,— доказанным). Мы определяем, из какого предшествующего вывода можно получить интере-

---

[1] См. T. L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Cambridge, 1908, vol. I, p. 138. (Примечание автора.)

сующий нас вывод, затем вновь определяем, из какого вывода можно получить этот предшествующий, и т. д., переходя от одного вывода к предшествующему, вызвавшему его, пока не придем к такому выводу, который был получен раньше или принимается за истину. Этот прием мы называем анализом или решением задач от конца, или регрессивным рассуждением».

«А при синтезе, меняя порядок этого процесса, мы начинаем с последнего вывода анализа, с того, что уже известно или принимается за истину. Беря известное за исходный пункт, мы делаем тот вывод, который предшествовал при анализе, и продолжаем, таким образом, делать выводы, пока, идя обратно по пройденному при анализе пути, мы, наконец, не приходим к тому, что требуется доказать. Этот прием мы называем синтезом или конструктивным решением, или прогрессивным рассуждением».

«Различаются два вида анализа. Один тип анализа — решение «задач на доказательство». Он ставит себе цель установление истинных теорем. Другой тип анализа — анализ решения «задач на нахождение». Этот вид анализа имеет своей целью найти неизвестное».

«Если перед нами «задача на доказательство», то мы должны доказать или опровергнуть четко сформулированную теорему A. Нам еще неизвестно, справедлива ли теорема A или нет. Но из теоремы A мы выводим теорему B, из B выводим другую теорему C и т. д. до тех пор, пока, наконец, не придем к конечной теореме L, о которой у нас имеются точные сведения. Если теорема L верна, будет верна и теорема A при том условии, что все наши выводы обратимы. На основании теоремы L мы доказываем теорему K, которая предшествовала при анализе теореме L. Продолжая таким образом, мы возвращаемся по пройденному при анализе пути; на основе теоремы C мы доказываем теорему B; опираясь на теорему B, доказываем теорему A и, таким образом, достигаем цели. Если, однако, теорема L несправедлива, то нами доказана тем самым несправедливость и теоремы A».

«Если перед нами «задача на нахождение», то мы должны определить какое-то неизвестное x, которое удовлетворяет четко сформулированному условию. Нам еще неизвестно, имеется ли такое значение x или нет, но полагая, что такое значение есть, мы выводим из него другое неизвестное y, которое должно удовлетворять соответствующему условию. Затем мы устанавливаем связь между y и еще другим неизвестным и так поступаем до тех пор, пока, наконец, мы не приходим к неизвестному z, значение которого мы можем определить каким-нибудь знакомым методом. Если в самом деле есть такое значение z, которое удовлетворяет требуемому условию, то при условии обратимости всех наших выводов будет существовать и такое значение x, которое удовлетворяет исходному условию. При этом поступаем следующим образом:

Сначала мы определяем значение z, затем, зная z, мы находим то неизвестное, которое в нашем анализе предшествует z. Таким способом, продолжая решение, мы возвращаемся по пройденному пути, и, наконец, зная y, мы находим искомое x. Цель, таким образом, достигнута. Если, однако, такого значения z, удовлетворяющего требуемым условиям, не существует, то задача, связанная с нахождением неизвестного x, не имеет решения».

Не следует забывать, что все вышеизложенное не точный перевод, а свободный пересказ, *перефраза*. Поскольку текст Паппа во многих отношениях очень важен, следует прокомментировать некоторые расхождения между оригиналом и нашей перефразой.

1. В нашей перефразе терминология более четкая, чем в оригинале, и вводятся символы A, B, L, x, y, ..., z, которых нет у Паппа.

2. В перефразе говорится «математические задачи», в то время как в оригинале имеются в виду «геометрические задачи». Этим мы подчеркиваем, что приемы, описанные Паппом, ни в коем случае не ограничиваются геометрическими задачами, а по существу они даже не ограничиваются и математическими задачами. Это последнее утверждение необходимо пояснить примерами, поскольку важно подчеркнуть, что описанные приемы имеют всеобщий характер и не зависят от содержания предмета.

3. *Алгебраический пример.* Найдите неизвестное x, удовлетворяющее следующему уравнению:

$$8\cdot(4^x+4^{-x})-54(2^x+2^{-x})+101=0.$$

Это «задача на нахождение» и не такая уж легкая для начинающего математика. Он должен иметь представление об анализе, разумеется, не о слове «анализ», а представление о том, что можно прийти к цели посредством повторной редукции. Кроме того, он должен быть знаком с уравнениями простейших видов. Даже при наличии известных знаний нужна хорошая идея, немного везения и немного изобретательности, чтобы заметить, что поскольку $4^x=(2^x)^2$ и $4^{-x}=(2^x)^{-2}$, то, возможно, выгодно будет ввести неизвестное

$$y=2^x.$$

Что эта замена в самом деле выгодна, говорит уравнение, полученное при подстановке y

$$8\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)-54\left(y+\frac{1}{y}\right)+101=0,$$

которое проще, чем первоначальное. Но это еще не все. Нужна еще некоторая изобретательность, еще одна замена. При подстановке

$$z=y+\frac{1}{y}$$

первоначальное уравнение примет вид:

$$8z^2-54z+85=0.$$

Если решающий эту задачу знаком с решением квадратных уравнений, то на этом анализ завершается. Что такое синтез? Выполнение шаг за шагом вычислений, возможность которых предполагалась в ходе анализа. Лицо, решающее задачу, не нуждается в какой-либо новой идее, чтобы закончить свою работу; ему нужны только терпение и внимание в вычислении различных неизвестных.

Не нужно никаких новых идей, а нужно лишь терпеливо и внимательно вычислять различные неизвестные. Порядок вычислений обратен порядку изобретения решения, т. е. сначала определяется z ($z={}^5/_2, {}^{17}/_4$), затем y ($y=2$, $½$, 4, ${}^1/_4$) и, наконец, то, что первоначально требовалось найти x ($x=1$, -1, 2, -2). Следовательно, синтез имеет направление, обратное направлению анализа, и в данном случае нетрудно понять почему.

4. *Нематематический пример.* Первобытный человек хочет перейти ручей, но он не может пересечь его обычным путем, ибо уровень воды поднялся за ночь. Таким образом, переход становится проблемой, где «переход ручья», становится неизвестным x этой примитивной проблемы. Этот человек, возможно, вспомнит, что когда-то он переходил другой ручей по повалившемуся дереву. Он начнет осматриваться, чтобы найти такое повалившееся дерево.

Это дерево становится его новым неизвестным, его y. Предположим, что ему не удалось обнаружить такого повалившегося дерева. Но вдоль ручья стоит множество деревьев. Ему захочется, чтобы одно из них упало. Сможет ли он заставить дерево упасть поперек ручья? Ведь это замечательная идея! Но возникает новое неизвестное: каким образом повалить дерево поперек ручья?

Если принять терминологию Паппа, то такой ход мыслей следует назвать анализом. И, действительно, этот первобытный человек может стать изобретателем моста и топора, если ему удастся завершить свой анализ. Что же будет в этом случае синтезом? Претворение этих идей в действия. Завершающим шагом синтеза будет переход по дереву через ручей.

Одни и те же элементы составляют анализ и синтез. Они упражняют ум человека при анализе и его мускулы при синтезе. Анализ заключается в мыслях, синтез — в действиях. Есть еще одна разница — противоположность порядка. Переход через ручей есть первое желание, от которого берет свое начало анализ, он же является заключительным действием синтеза.

5. Наша перефраза несколько более четко, чем оригинал, указывает на естественную связь, существующую между анализом и синтезом. После вышеприведенных примеров эта связь очевидна. Естественно, сначала идет анализ, затем синтез. Анализ есть изобретение, синтез — исполнение, *анализ — есть составление плана, а синтез — его осуществление*.

6. Наша перефраза сохраняет и даже подчеркивает отдельные любопытные фразы оригинала: «считаем уже выполненным то, что по условиям задачи требуется сделать, искомое — уже найденным, то, что требуется доказать,— доказанным». Это звучит парадоксально. Разве не самообман считать, что проблема, ожидающая своего разрешения, уже решена? Это не совсем ясно. Как это понять? Однако, если мы внимательно подумаем над смыслом контекста и без предубеждения постараемся разобраться в своем личном опыте решения задач, то вряд ли смысл будет неясным.

Действительно, рассмотрим сначала «задачу на нахождение». Неизвестное обозначим через x, а данные — через a, b, c. «Считать, что задача уже решена», значит предположить; что существует такой x, который удовлетворяет условию, т. е. находится в такой зависимости от a, b и c, какая предусмотрена условием задачи. Это предварительное предположение делается лишь для того, чтобы можно было приступить к анализу. Оно временно и безвредно. Ибо, если такой величины не существует, то анализ ни к чему не приводит нас, он неизбежно приводит нас, в конце концов, к такой задаче, которая не имеет решения; отсюда становится очевидным, что наша задача не имеет решения. Тогда наше допущение оказывается полезным. Таким образом, чтобы анализировать условие, мы должны представить себе или мысленно вообразить те геометрические отношения, которые существуют между x и a, b, c по условию задачи. Каким же образом можно сделать это иначе, как не представить себе, не вообразить, как не видеть мысленно, что x существует? И, наконец, такое допущение вполне естественно. Тот первобытный человек, мысли и поступки которого мы рассматривали в пункте 4, воображает, что переходит ручей по повалившемуся дереву, еще задолго до того, как ему на самом деле удается это сделать. Он видит свою проблему «решенной». Цель «задачи на доказательство» — доказать некую теорему A. Совет «допустить, что теорема A доказана», лишь дает нам повод делать выводы из теоремы A, хотя мы ее еще не доказали. Возможно, что люди определенного умственного склада или определенного философского мировоззрения не пожелают делать выводы из недоказанной теоремы. Но таким людям не дано заниматься анализом.

Сравните «Геометрические фигуры», пункт 2.

7. В перефразе дважды встречается важное замечание «при том условии, что все наши выводы обратимы». Это интерполяция. В оригинале нет ничего подобного, и отсутствие этого условия было замечено и подверглось критике в наше время. (См. «Вспомогательная задача», пункт 6, где излагается понятие «обратимой редукции».)

8. В перефразе в совершенно иных выражениях, чем в оригинале, объясняется анализ «задач на доказательство». Но в самом смысле этого объяснения изменений нет. Во всяком случае, мы не намеревались изменять смысл. В перефразе анализ «задач на нахождение» объясняется более конкретно, чем в оригинале. Оригинал, по-видимому, стремясь описать процесс несколько более общего характера, строит систему *эквивалентных вспомогательных задач*. У нас они описываются в статье «Вспомогательные задачи», пункт 7.

9. Во многих элементарных учебниках геометрии имеются кое-какие замечания относительно метода анализа и синтеза и кое-что о «допущении задачи решенной». Эта прочно укоренившаяся традиция восходит, несомненно, к Паппу, хотя вряд ли есть такой современный учебник, автор которого был бы в какой-то мере знаком с трудами самого Паппа. Метод этот столь важен, что о нем следует упоминать в элементарных учебниках. Но этот метод часто неправильно понимается. Уже одно то обстоятельство, что он находит свое отражение лишь в учебниках геометрии, показывает, что в настоящее время наблюдается недопонимание значения этого метода. Если вышеизложенные комментарии содействуют лучшему его пониманию, то с лихвой оправдывается то значительное место, которое мы уделили ему.

В статье «Работать от конца к началу» читатель найдет еще один пример, другую точку зрения и дальнейшие замечания по этому вопросу.

Сравните также Reductio ad absurdum и «Косвенное доказательство», пункт 2.

Парадокс изобретателя. Более сложные планы могут иметь больше шансов на успех.

Это звучит парадоксально! Однако, переходя от одной задачи к другой, мы часто видим, что с новой, более результативной задачей бывает легче справиться, чем с первоначальной. Иногда легче ответить на большее число вопросов, чем на один единственный вопрос, легче доказать более общую теорему и решить более общую задачу.

Парадоксальность исчезает, если мы ближе ознакомимся с некоторыми примерами («Обобщение», п. 2; «Индукция и математическая индукция», п. 7). Более результативные планы могут иметь больше шансов на успех в том случае, если они базируются не на каких-то необоснованных притязаниях и поверхностных наблюдениях, а на глубоком понимании существа вопроса.

Педантизм и мастерство — два диаметрально противоположных подхода к правилам.

1. Применять правило, следуя его букве, строго, слепо, подходит ли оно или не подходит,— это педантизм. Среди педантов есть несчастные глупцы, никогда не понимавшие того правила, которое они так добросовестно и без разбора применяют. Другие педанты более удачливы: они понимают применяемые ими правила, во всяком случае понимали их

раньше, до того, как стали педантами; они подобрали себе хорошее правило, которое подходит ко многим случаям и лишь изредка себя не оправдывает.

Применять правило естественно, непринужденно, рассудительно, подмечая те случаи, к которым оно подходит, никогда не давая букве правила заслонять собой цель предпринимаемого шага или скрыть возможности, которые предоставляет обстановка,— это мастерство.

2. Вопросы и советы нашей таблицы могут быть полезны как учащемуся, самостоятельно решающему задачи, так и преподавателю. Но, во-первых, их надо понять, научиться правильно пользоваться ими, изучить их, овладеть ими, пройдя через удачи и неудачи, необходимо приобрести опыт работы с ними. Во-вторых, не нужно применять их педантично. Нельзя задавать вопросы или давать советы, следуя твердо установившейся привычке. Надо быть готовым к различным вопросам и советам и прислушиваться к голосу здравого смысла. Вы решаете трудную и захватывающую задачу; следующий ваш шаг должен быть подсказан внимательным и непредубежденным рассмотрением задачи; вы хотите помочь учащемуся; ваши слова должны быть основаны на дружеском понимании его затруднений.

Если же вы склонны быть педантом и должны непременно опираться на какое-нибудь правило, то выучите следующее: прежде всего всегда пользуйся собственными мозгами.

Подсознательная работа. Как-то вечером, обсуждая со своим знакомым одного писателя, я не смог вспомнить его фамилии. Мне было досадно, ибо я довольно хорошо помнил один из его рассказов. Помнил я и какую-то историю, которую мне хотелось рассказать о самом писателе; словом, я все помнил, кроме фамилии писателя. Я снова и снова силился припомнить его фамилию, но тщетно. На следующее утро, как только мои мысли вернулись к досадному случаю, происшедшему накануне, имя писателя как-то само всплыло в моей памяти.

По-видимому, каждый читатель сможет припомнить подобный случай, произошедший с ним самим. А если он большой любитель решать задачи, то у него, вероятно, были подобные случаи и с задачами. Часто бывает, что у вас ничего не выходит с решением задачи, вы очень настойчиво работаете, но безрезультатно. Однако, когда вы возвращаетесь к задаче после ночного отдыха или через несколько дней, у вас появляется счастливая мысль, и эту задачу вы легко решаете. Характер задачи не играет роли; подобным образом можно вспомнить забытое слово, трудное слово в кроссворде, начало неприятного письма или решение математической задачи.

Существует мнение, что такие случаи происходят благодаря подсознательной деятельности. Ведь факт, что задача после продолжительного перерыва может вернуться в поле нашей сознательной деятельности более понятной и близкой к своему разрешению, чем она была в тот момент, когда мы прекратили сознательно работать над ней. Кто сделал ее более понятной, кто приблизил ее решение? По-видимому, мы сами, работая над ней *подсознательно*. Трудно найти другое объяснение; правда, психологи развивают новые теории, которые, возможно, со временем дадут более удовлетворительный ответ.

Каковы бы ни были достоинства или недостатки теории подсознательной деятельности, определенно существует предел нашим сознательным размышлениям, который не следует насильственно переступать. Бывают такие моменты, когда лучше всего на некоторое время оставить задачу в покое. «Утро вечера мудренее», гласит старая поговорка. Если дать себе и задаче некоторый отдых, возможно, завтра мы добьемся большего результата ценой меньших усилий. «Если не сегодня, быть может, завтра», гласит другая поговорка. Однако лучше не откладывать в сторону нерешенную задачу без чувства хотя бы небольшого успеха; хоть какая-нибудь маленькая деталь должна быть улажена; нужно уяснить себе какую-нибудь сторону вопроса к моменту, когда мы прекращаем работать над решением.

После перерыва проясняются лишь те задачи, решения которых мы желаем всей душой или над решением которых мы напряженно работали. По-видимому, чтобы вызвать подсознательную деятельность, совершенно необходимо сознательное усилие и напряжение. В противном случае все было бы чересчур просто, при решении трудных задач можно было бы лечь спать и спокойно ждать появления счастливой мысли.

В старину внезапную удачную мысль считали вдохновением, даром богов. Этот дар, однако, надо заслужить своим трудом или по крайней мере страстным желанием[1].

[1] Более подробное рассмотрение «подсознательного мышления» читатель найдет в книге «The Psychology of Invention in the Mathematical Field» Жака Адамара. (Примечание автора.— *Ред.*)

Правила, как делать открытия. Первое правило — надо иметь способности, а наряду с ними и удачу. Второе правило — стойко держаться и не отступать, пока не появится счастливая идея.

Небесполезно хотя, возможно, и несколько невежливо, напомнить читателю о том, что некоторые стремления все же безнадежны. Установить безотказно действующие условия или правила эвристики, которые позволили бы решать все математические задачи, было бы куда более желательно, чем найти философский камень, которого тщетно искали алхимики. Такие правила творили бы чудеса, а чудес не бывает. Найти безотказно действующие правила, применимые ко всем возможным проблемам,— это старая мечта, но мечта, которая навсегда останется только мечтой.

Установление безотказно действующих правил не может быть целью разумной эвристики; но эвристика может стремиться изучить типичные приемы и процессы (умственные операции, ходы, шаги), полезные при решении задач. Такие приемы используются каждым здравомыслящим человеком, в достаточной мере интересующимся своей задачей. Они подсказываются определенными стереотипными советами и вопросами, которые вдумчивые люди сами ставят себе, а хорошие преподаватели — своим учащимся. Собрание таких вопросов и советов, сформулированных в достаточно общем виде и расположенных в четкой последовательности, возможно, менее ценно, чем философский камень, но зато такой список — вещь реальная и может быть составлен. Изучаемая таблица представляет собой именно такое собрание вопросов и советов.

Правила преподавания. Первое правило — нужно владеть материалом программы. Второе — нужно знать несколько больше, чем объем программы.

Автор данной книги не считает, что все правила преподавания совершенно бесполезны для учителей, иначе он не отважился бы написать целую книгу о поведении преподавателя и учащихся. Однако не следует забывать, что преподаватель математики должен разбираться в математике и что учитель, если он хочет научить своих учащихся правильно подходить к задачам, должен сам владеть этим правильным подходом.

Правила стиля. Первое правило стиля — знайте то, что вы хотите сказать. Второе правило — контролируйте себя, когда вам надо высказать две мысли. Выскажите сначала одну, затем другую, не говорите обе одновременно.

Практические задачи во многих отношениях отличаются от чисто математических задач, однако основные мотивы и ход их решения по существу одни и те же. Прикладные инженерные проблемы обычно включают в себя математические задачи. Остановимся вкратце на различиях, общих чертах и связях, существующих между этими типами задач.

1. Внушительную прикладную задачу представляет собой строительство плотины на реке. Не надо иметь никаких специальных знаний, чтобы понять эту проблему. Чуть ли не в доисторические времена, задолго до нашего современного века научных теорий, люди строили различные плотины в долине Нила и в других частях света, где урожай зависел от орошения.

Представим себе мысленно круг вопросов, связанных со строительством крупной современной плотины.

Что неизвестно? В проблеме такого рода неизвестных много: точное расположение плотины, ее геометрическая конфигурация и размеры, строительные материалы, которые будут использованы на сооружение плотины, и т. д.

В чем состоит условие? Одним кратким предложением невозможно ответить на этот вопрос, ибо условий много. В такого рода проекте необходимо удовлетворить многим важным экономическим требованиям и по мере возможностей минимально пренебрегать другими. Плотина должна обеспечить электроэнергией, давать воду для орошения и коммунальных нужд, а также контролировать уровень воды при паводке. С другой стороны, она должна возможно меньше нарушать навигацию и условия жизни ценной рыбы, а также красоту природы и т. д. И, разумеется, она должна быть построена с минимальной стоимостью и в максимально сжатые сроки.

Что дано? Количество данных, которые желательно было бы иметь, огромно. Нам нужны топографические данные о районе реки и ее притоков; необходимы геологические сведения, что важно для создания устойчивых фундаментов и для выяснения возможностей утечки воды и выявления наличия строительных материалов; метеорологические данные о количестве ежегодных осадков и уровне паводков; экономические данные о стоимости земельных участков, подлежащих затоплению, данные о стоимости строительных материалов, рабочей силы и т. д.

Из нашего примера видно, что по сравнению с математической задачей в прикладной задаче неизвестные данные и условия составляют более сложный комплекс и менее четко очерчены.

2. Для того чтобы решить какую-нибудь задачу, мы должны иметь определенный запас ранее накопленных знаний. В распоряжении современного инженера имеются современная техника, к его услугам — научная теория сопротивления материалов, собственный опыт и специальная техническая литература, в которой накоплен огромный инженерный опыт. Мы не можем здесь вникать в сущность этих специализированных сведений, но мы можем попытаться представить себе мысли древнеегипетского строителя плотины.

Ему, конечно, приходилось видеть различные другие, возможно, меньшие плотины: земляные или каменные насыпи, сдерживающие воду. Он наблюдал, как паводок с наносными породами обрушивался на плотину. Возможно, ему приходилось принимать участие в починке трещин и ликвидировать последствия от размыва насыпи паводком. Может быть, ему приходилось видеть, как под напором потока воды разрушается плотина. Он, несомненно, слышал рассказы о плотинах, выдержавших испытания веков или принесших бедствия из-за неожиданно образовавшихся брешей. Быть может, он мысленно рисовал себе картину давления воды реки на поверхность плотины и ее внутреннее напряжение и сжатие.

У строителя египтянина, однако, не было точных, количественных, научных представлений о давлении жидкости или о деформациях и напряжениях внутри твердого тела. Такие представления занимают существенное место в научной подготовке современного инженера. Инженер, однако, тоже пользуется обширными сведениями, не получившими еще совсем точного и научного освещения, его сведения о разрушительной силе течения воды, о переносе ила и об упругости и других менее четко очерченных свойствах твердых тел представляют собой знания скорее эмпирического характера.

Из нашего примера видно, что по сравнению с математической задачей в прикладной задаче понятия и те знания, которые необходимы для ее разрешения, имеют более сложный характер и менее четко определены.

3. В прикладных задачах неизвестные, данные, условие, понятия, необходимые предварительные знания — все сложнее и менее определенно, чем в чисто математических задачах. Это очень существенное различие, пожалуй, даже главное различие, и оно, несомненно, влечет за собой и другие различия. Однако основные мотивы и приемы решения оказываются одинаковыми для задач обоих типов.

Существует распространенное мнение, что прикладные проблемы требуют большего опыта, чем математические задачи. Возможно, это и так. Однако очень вероятно, что различие заключается в природе требуемых знаний, а не в нашем отношении к задаче. Решая задачу того или иного типа, мы должны опереться на свой опыт решения подобных задач и часто задавать такие вопросы: *не встречалась ли вам раньше эта задача? Хотя бы в несколько другой форме? Известна ли вам какая-нибудь родственная задача?*

При решении математической задачи мы исходим из очень четких понятий, систематизированных в нашем уме. При решении же прикладной проблемы нам часто приходится исходить из довольно туманных представлений. Позже уточнение этих представлений может стать существенной частью задачи. Так, например, сегодня медицина в состоянии сдержать распространение инфекционных заболеваний более эффективно, чем во времена до Пастера, когда представление об инфекционных болезнях было довольно туманным. *Приняли ли вы во внимание все существенные понятия, содержащиеся в задаче?* Это очень хороший вопрос для задач всех типов, но использование его зависит в значительной мере от характера понятий, входящих в задачу.

В точно сформулированной математической задаче все данные и все пункты условия существенны и должны быть учтены. В прикладных проблемах имеется обилие данных и условий. Мы учитываем столько их, сколько возможно, но некоторыми мы вынуждены пренебрегать. Возьмите случай со строителем большой плотины. Он принимает во внимание общественные интересы и учитывает важные экономические соображения, но он вынужден пренебрегать мелкими претензиями и обидами. Количество данных в его проблеме, строго говоря, неисчерпаемо. Ему, например, желательно было бы иметь кое-какие дополнительные сведения о геологической природе грунта, на котором должен быть уложен фундамент, но в конце концов он вынужден прекратить сбор геологических данных, хотя в этом вопросе неизбежно останется ряд неясностей.

Все ли данные вы использовали? Все ли условия использовали? При решении чисто математических задач нельзя обойтись без этих вопросов. Однако при решении прикладных проблем эти вопросы следует ставить в несколько видоизмененной форме: все ли данные вами использованы, которые *могли бы заметно содействовать решению?* Использовали ли вы все условия, которые могут *заметно повлиять на решение?* Мы собираем все доступные данные, имеющие отношение к нашей проблеме. Если необходимо, собираем дополнительные сведения, но в конце концов приходится прекращать сбор сведений. На каком-то этапе мы должны подвести черту. Невозможно не пренебречь кое-чем. «Волков бояться — в лес не ходить». Довольно часто накапливаются излишние данные, которые не имеют заметного влияния на окончательный вид решения.

4. Конструкторы древнеегипетских плотин при толковании своего опыта должны были положиться на собственный здравый смысл, больше им не на что было полагаться. Современный инженер не может положиться лишь на здравый смысл, в особенности, если его проект отличается смелым новаторством. Он обязан рассчитать сопротивление проектируемой плотины, точно предусмотреть внутреннее напряжение и сжатие плотины. Для этого ему приходится обращаться к теории деформации (которая довольно точна для цементных конструкций). Чтобы использовать эту теорию на практике, ему потребуется произвести множество математических расчетов — прикладная инженерная задача приводит к математической задаче.

Такая математическая задача не может быть рассмотрена здесь, ибо она слишком узкотехнического характера; ограничимся лишь общими замечаниями. При составлении и решении математических задач, полученных в ходе решения прикладной задачи, мы обычно довольствуемся приближенным решением. В прикладной проблеме мы вынуждены пренебрегать некоторыми второстепенными данными и условиями. Поэтому разумно допустить некоторые незначительные погрешности в расчетах, особенно если в упрощении выгадываем то, что проигрываем в точности.

5. О приближенных решениях можно было бы рассказать много интересного, заслуживающего внимания широкого круга читателей. Однако мы не можем предполагать у

читателя какой-либо специальной математической подготовки и поэтому ограничимся лишь одним понятным, доступным и поучительным примером.

Большое практическое значение имеет изготовление географических карт. При создании карт мы часто считаем, что земля шар. Между тем ведь это приближенное допущение, а не точная истина. Поверхность земли не представляет собой математически заданной поверхности. Если мы примем, что земля представляет собой шар, нам будет значительно легче сделать географическую карту. От упрощения мы очень много выигрываем, а в точности не очень теряем. В самом деле, представим себе большой глобус, у которого форма точно такая же, как у земли. Диаметр этого шара в экваторе 7,5 *м*. Расстояние между полюсами такого глобуса меньше 7,5 *м*, ибо земля сплюснута у полюсов, но разница составляет всего лишь около 2,5 *см*. Таким образом, шар представляет собой хорошее практическое приближение.

Проверка по размерностям — известный способ быстро и эффективно проверять геометрические и физические формулы.

1. Чтобы вспомнить, как проводится такая проверка, рассмотрим пример с прямым круговым усеченным конусом. Пусть имеем прямой круговой усеченный конус, причем

R — радиус нижнего основания,
r — радиус верхнего основания,
h — высота усеченного конуса,
S — площадь боковой поверхности усеченного конуса.

Если R, r и h даны, то S можно легко выразить через R, r и h. Так мы находим выражение

$$S=\pi(R+r)\sqrt{(R-r)^2+h^2},$$

к которому применим метод проверки по размерностям.

Легко определить размерность геометрической величины. Так как R, r и h выражают длину, то они измеряются в единицах длины. Если пользоваться научной системой мер, то их размерность *см*. Площадь S измеряется квадратными единицами и ее размерность $см^2$. А $\pi=3,1415...$ — просто число. Если мы хотим приписать числу размерность, то она должна быть $см^0=1$.

Каждый член суммы должен иметь одну и ту же размерность, которая является также и размерностью этой суммы. Так, R, r и $R+r$ имеют одну размерность, а именно *см*. Два члена $(R-r)^2$ и h^2 также имеют одинаковую размерность, как и должно быть, а именно *см*^{2}.

Размерность произведения равна произведению размерностей сомножителей. Имеется также подобное правило относительно степеней. Подставляя размерности вместо величин в обе части уравнения, которое мы проверяем, получаем

$$см^2 = 1 \cdot см \sqrt{см^2}.$$

Ясно, что это верно, и, таким образом, проверка не могла обнаружить какую-либо ошибку в формуле. Формула выдержала проверку.

Другие примеры приводятся в пункте 14 и «Нельзя ли проверить результат?», пункт 2.

2. Мы можем использовать метод проверки по размерностям в отношении окончательных результатов задачи или промежуточных результатов, к своей работе или к работе других (очень подходящий прием для выявления ошибок в контрольных работах), а также для проверки формул, которые мы вспомнили, или же для проверки предполагаемых формул, о существовании которых мы лишь догадываемся.

Если вы вспомнили формулы $4\pi r^2$ и $\frac{4}{3}\pi r^3$ для поверхности и объема шара, но не совсем уверены, какая куда относится, проверка по размерностям быстро устраняет сомнение.

3. В физике проверка по размерностям играет даже более важную роль, чем в геометрии.

Рассмотрим математический маятник, т. е. небольшое тяжелое тело, подвешенное на проволоке, длину которой можно считать постоянной и весом которой можно пренебречь. Пусть l — длина проволоки, g — ускорение силы тяжести, а T — период колебания маятника.

По соображениям механики, мы приходим к выводу, что T зависит лишь от l и g. Но как выражается эта зависимость? Возможно, мы вспомним или сообразим, что

$$T = cl^m g^n,$$

где c, m и n — определенные числовые постоянные, т. е. мы полагаем, что T пропорционально величинам l и g, возведенным соответственно в степени m и n.

Рассматриваем размерности. Поскольку T есть время, а оно измеряется секундами, его размерность — секунды. Размерность длины l — *см*, размерность ускорения g — *см. сек*$^{-2}$, а размерность числового постоянного c есть 1. Проверка по размерностям дает уравнение

$$\text{сек.} = 1\,(\textit{см})^m\,(\textit{см}\cdot\textit{сек.}^{-2})^n$$

или

$$\text{сек.} = (\textit{см})^{m+n}\cdot\text{сек.}^{-2n}.$$

Но степени основных единиц *см* и сек. в обеих частях должны быть одинаковы и, таким образом, получаем:

$$0 = m + n \text{ и } 1 = -2n,$$

откуда

$$n = -\frac{1}{2}, \text{ а } m = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, формула для периода T должна иметь вид:

$$T = c l^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}} = c\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

В этом случае проверка по размерностям дает немало, но не может дать всего. Во-первых, она не дает никаких сведений о численном значении постоянной величины c (которое равняется 2π). Во-вторых, она ничего не говорит о пределах, в которых формула применима. Эта формула справедлива при небольших отклонениях маятника и то лишь приближенно (она точна при «бесконечно малых» отклонениях). Несмотря на эти ограничения, нет сомнения, что рассмотрение размерностей позволило нам средствами элементарнейших приемов быстро предвидеть очень существенную часть решения, исчерпывающее изучение которого требует более серьезных приемов. И это справедливо в отношении многих подобных случаев.

Продвижение и достижение. Вы продвинулись в решении задачи? В чем суть вашего достижения? Вопросы такого рода мы можем задавать как себе, когда мы сами решаем задачу, так и учащемуся, решающему ее под нашим руководством. Мы привыкли более или менее уверенно судить о продвижении и о достижениях в конкретных случаях. Но перейти от таких конкретных случаев к обобщенному изложению вопроса очень нелегко. Однако, если мы желаем изложить учение об эвристике более или менее полно, мы должны попытаться уяснить себе, из чего состоит в общих чертах продвижение и достижение при решении задач.

1. Чтобы решить какую-нибудь задачу, мы должны иметь определенный запас знаний в той области, к которой наша задача относится, и нам приходится собирать и отбирать все имеющиеся у нас сведения, связанные с нашей задачей. Эти сведения до начала решения были лишь потенциальными. Наше понимание задачи значительно полнее в конце, чем оно было, когда мы только приступали к ней; что добавилось? То, что нам удалось вспомнить. Для того чтобы решить задачу, нам приходится припоминать различные существенные факты. Если наша задача математическая, приходится вспомнить ранее решенные задачи, знакомые теоремы, определения. Восстановление в памяти сведений, относящихся к задаче, можно назвать *мобилизацией*.

2. Однако, чтобы решить какую-нибудь задачу, недостаточно вспомнить изолированные сведения, мы должны комбинировать эти факты, и их комбинация должна быть хорошо приспособлена к решению имеющейся у нас задачи. Таким образом, при решении математической задачи мы должны объединить все, что мы вспомнили, и на этом основании выдвинуть такой отдельный довод доказательства, который был бы хорошо приспособлен к целому. Эту работу по приспособлению и комбинированию фактов можно назвать *организацией*.

3. По существу, отделить мобилизацию от организации невозможно. Сосредоточивая все свое внимание на задаче, мы припоминаем лишь те факты, которые более или менее связаны с нашей задачей, и соединяем и организуем лишь то, что вспомнили и мобилизовали.

Мобилизация и организация лишь два *аспекта* одного и того же сложного процесса, имеющего еще много других аспектов.

4. Другой аспект продвижения в работе заключается в том, что *характер нашего понимания задачи меняется*. Понимание задачи у нас значительно полнее в конце, чем оно было вначале, когда мы только приступали к решению, ибо добавилось все, что мы вспомнили, обработали и приспособили к решению. Желая перейти от первоначального понимания данной задачи к более точному, более полному ее пониманию, мы подходим к ней с разных точек зрения, рассматриваем ее с разных сторон. Едва ли мы могли бы продвинуться в решении без такого **видоизменения задачи**.

5. Цель вырисовывается все более и более отчетливо по мере приближения к ней. А когда мы видим цель яснее, мы считаем, что мы к ней ближе. По мере того как изучение задачи продвигается, мы все яснее и яснее можем предвидеть, что следует предпринять для решения задачи и каким образом надо действовать. Если удача нам сопутствует, то при решении математической задачи мы сможем предусмотреть возможность использования известной нам теоремы, полезность рассмотрения ранее решенной задачи, необходимость дополнительного уточнения значения того или иного математического термина. Такие предвидения не являются безошибочными, они лишь до известной степени правдоподобны. Полное подтверждение правильности своего предвидения мы получаем с окончательным решением, а до этого мы часто вынуждены довольствоваться более или менее правдоподобной догадкой. Нам никогда не удалось бы прийти к точному и окончательному решению, не прибегнув к соображениям лишь правдоподобного и предварительного характера. Нам необходимо э в р и с т и ч е с к о е р а с с у ж д е н и е.

6. В чем заключается продвижение к решению? В мобилизации и организации знаний, ведущих нас к решению, в эволюции нашего понимания задачи, во все возрастающем предвидении тех шагов, которые приведут к окончательному обоснованию решения. Мы можем продвигаться вперед постоянно, но незаметно, потом вдруг продвинуться резко семимильными шагами. Стремительное продвижение в решении называется с ч а с т л и в о й и д е е й (b r i g h t i d e a), хорошей, удачной, внезапно осенившей вас мыслью (в немецком языке есть более специальный термин *Einfall*). Что такое счастливая идея? Резкое и очень существенное изменение в нашей точке зрения на задачу, стремительная перестройка характера нашего понимания задачи, только что возникшее уверенное предвидение шагов, необходимых для решения задачи.

7. Вышеизложенные соображения служат хорошим фоном для вопросов и советов нашей таблицы.

Многие из этих вопросов и советов направлены непосредственно на *мобилизацию* наших, ранее приобретенных знаний: *Не встречалась ли вам эта задача ранее? Или подобная задача, но в несколько другой форме? Не знаете ли вы какой-нибудь похожей задачи? Не знаете ли вы теоремы, которая могла бы оказаться полезной? Рассмотрите неизвестное!*

И постарайтесь припомнить знакомую задачу с тем же или сходным неизвестным.

Бывает такое характерное состояние, при котором нам кажется, что нами собраны нужные сведения и что наши усилия направлены на лучшую *организацию* того, что мы мобилизовали: *вот задача, которая похожа на вашу и уже решена. Сумеете ли вы воспользоваться ею? Сумеете ли вы применить ее результат? Сумеете ли использовать ее метод? Сумеете ли ввести какой-нибудь вспомогательный элемент, чтобы можно было воспользоваться этой задачей?*

Есть другие типические ситуации, при которых мы думаем, что собранные нами сведения недостаточны. Мы задумываемся — чего же нехватает? *Все ли данные мы использовали? Все ли условие? Приняли ли мы во внимание все существенные понятия, содержащиеся в задаче?*

Некоторые вопросы непосредственно направлены на *видоизменение* задачи: *сможете ли вы изложить задачу иначе? А еще иначе?* Многие вопросы имеют своей целью варьировать задачу специальными приемами, например возвращением к о п р е д е л е н и я м или пользуясь а н а л о г и е й, о б о б щ е н и е м, с п е ц и а л и з а ц и е й, р а з л о ж е н и е м и о б о б щ е н и е м.

Иные же вопросы предлагают проверку, чтобы *предвидеть* характер решения, которое мы хотим получить: *возможно ли удовлетворить условию? Достаточно ли условие для определения неизвестного? Или недостаточно? Или чрезмерно? Или противоречиво?*

В вопросах и советах нашей таблицы нет непосредственных упоминаний о *счастливой идее*, но по существу они все связаны с ней.

Вникая в суть задачи, мы создаем благоприятные условия для возникновения счастливой идеи, составляя план, мы стараемся вызвать ее. Вызвав счастливую идею, осуществляем ее в решении, а потом при изучении хода и результата решения мы стараемся максимально использовать ее[1].

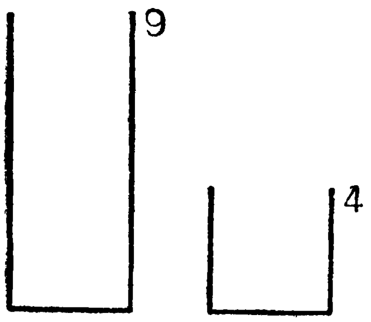
Противоречивость (см. «У с л о в и е»)[2].

---

[1] Некоторые вопросы, затронутые в этой статье, более подробно рассмотрены в статье автора в Acta Psychologica, vol. 4, 1938, pp. 113—170. (Примечание автора.— *Ред.*)

[2] Статья содержит исключительно ссылки на другие статьи «Словаря».

Работать от конца к началу. Если мы хотим понять поведение человека, нужно сравнить его с поведением животного. Животные тоже «имеют проблемы» и «решают задачи». За последние десятилетия экспериментальная психология существенно продвинулась в области исследования деятельности различных животных при «решении задач». У нас нет возможности рассматривать эти исследования, но мы опишем один простой и поучительный опыт, и наше описание послужит своего рода пояснением к методу анализа или, как мы его называем, методу «работать от конца к началу». Этот метод, кстати сказать, рассматривается в другом месте данной книги в статье, посвященной Паппу — человеку, которому мы обязаны описанием этого метода.



Фиг. 18.

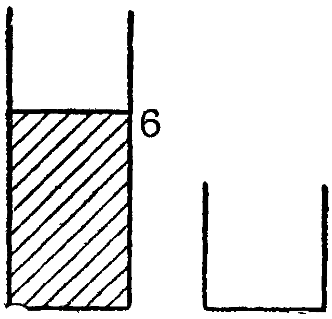
1. Попытаемся найти ответ на следующий замысловатый вопрос: *каким образом можно принести из реки ровно шесть литров воды, если для измерения ее имеется только два ведра — одно емкостью в 4 л, другое в 9 л?* Представим себе те орудия, с которыми нам придется работать: два ведра. (*Что дано?*) В воображении мы представляем себе два цилиндрических сосуда с равными основаниями, высоты которых относятся как 9 : 4 (см. фиг. 18).

Если бы на боковых поверхностях сосудов были равномерные шкалы из горизонтально нанесенных линий, по которым мы могли бы определить высоту уровня воды, то наша задача оказалась бы легкой. Однако такой шкалы нет, и поэтому мы еще очень далеки от решения.

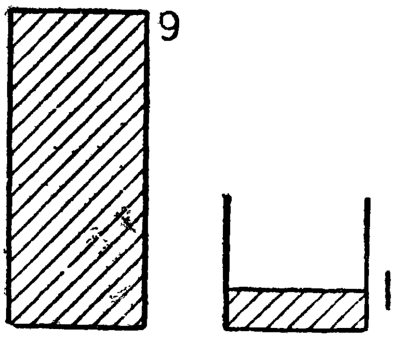
Нам еще неизвестно, как точно отмерить 6 *л*. А могли бы мы получить какой-нибудь другой объем? (*Если не удается решить данную задачу, попытайтесь сначала решить сходную. Сможете ли вы вывести, что-нибудь полезное из имеющихся данных?*) Давайте же повозимся немного и все-таки предпримем что-нибудь. Мы могли бы наполнить большой сосуд, а затем из него налить меньший сосуд. Так мы сумеем получить 5 *л*. Сможем ли мы получить 6 *л*? Начнем сначала. У нас два сосуда, мы можем...

Теперь мы действуем так, как обычно делают большинство людей, которые пытаются решить эту головоломку. Мы начинаем с двух пустых сосудов, пробуем так и этак, опорожняем и наполняем, а потерпев неудачу, начинаем снова, пробуя другой вариант. Мы *работаем от начала к концу*, от данного исходного положения к желанной конечной цели, от данных к неизвестному. После многократных попыток мы можем случайно найти решение.

2. Но очень способные люди или те, которые имели возможность на уроках математики изучить нечто большее, чем лишь избитые математические приемы, не станут тратить слишком много времени на такие попытки, а «переворачивают задачу» и начинают работать от конца к началу.



Фиг. 19.



Фиг. 20.

Что от нас требуется? (*Что неизвестно?*) Представим себе возможно яснее окончательное положение, к которому мы стремимся.

Представим себе, что перед нами большой сосуд с шестью литрами воды, а меньший сосуд пустой, как это изображено на фигуре 19. (Будем *исходить из того, что требуется сделать*, и *считать, что искомое уже найдено*, говорит П а п п.)

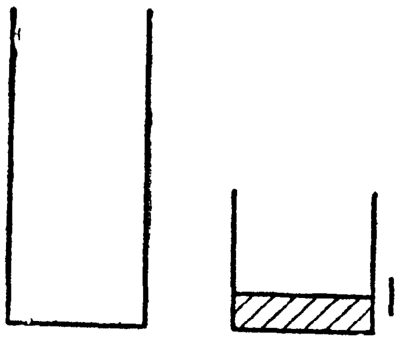
Из какого предшествующего результата могли бы мы получить желаемый окончательный результат, показанный на фигуре 19? (Выясним, из *какого предшествующего вывода мог бы быть получен желаемый вывод*, говорит П а п п.)

Мы могли бы, конечно, полностью наполнить большой сосуд, т. е. налить в него 9 *л*. Но в этом случае надо суметь отлить точно 3 *л*. Чтобы сделать это, в меньшем сосуде у нас должен быть только 1 *л*! В этом вся идея (см. фиг. 20). (Этот шаг вовсе не простой и лишь немногие смогут сделать его сразу. В самом деле, правильно оценив значение этого шага, мы по сути дела в общих чертах уже имеем решение, описываемое ниже.)

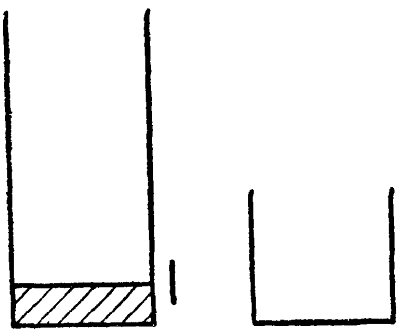
Но каким образом можно прийти к положению, указанному на фигуре 20? (Выясним еще раз, *как из данного поло-*

жения получить положение, которое предшествовало ему.) Поскольку количество воды в реке для нас практически неограниченно, то положение на фигуре 20 по существу может быть сведено к тому, которое изображено на фигуре 21 или на фигуре 22.

Легко заметить, что если получить какое-либо одно из положений, изображенных на фигурах 20, 21, 22, то и любое

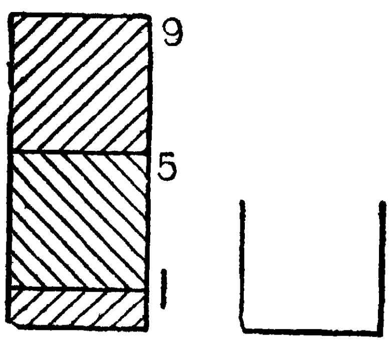


Фиг. 21.



Фиг. 22.

другое из них тоже можно получить. Но не так уж легко получить такое положение, как на фигуре 22, если *оно не встречалось нам раньше*, если мы не сталкивались с ним случайно в наших предварительных попытках. Когда мы возились с этими двумя сосудами, у нас, возможно, получалось нечто похожее, и теперь кстати будет вспомнить, что положение на фигуре 22 может возникнуть, например, так, как подсказывает фигура 23.



Фиг. 23.

Мы полностью наполняем большой сосуд и отливаем 4 *л* в меньший сосуд, а из него выливаем воду в реку. Это мы проделываем дважды. Таким образом, мы *в конце концов получили нечто известное* (по словам Паппа), и, следуя путем анализа, *работая от конца к началу*, мы нашли правильную последовательность действий.

Правда, мы открыли правильную последовательность в обратном порядке, но остается лишь *обратить порядок этого процесса и начинать с того пункта, к которому мы пришли в конце анализа* (как говорит Папп). Сначала мы выполняем те действия, которые подсказываются фигурой 23, и приходим к фигуре 22, затем мы переходим к фигуре 21, затем к 20 и, наконец, к фигуре 19. *Возвращаясь по пройденному пути, мы в конце концов добиваемся того, что от нас требовалось.*

3. Открытие метода анализа греки приписывают Платону. Возможно, это и не совсем достоверно, но во всяком случае, если этот метод не был изобретен Платоном, то какой-то греческий ученый счел нужным приписать это изобретение гению философа.

В этом методе есть нечто незаурядное, есть и известная психологическая трудность: приходится стать спиной к цели, уходить от желаемого, а не идти к нему прямой дорогой, приходится работать от конца к началу. После того как мы раскрыли правильную последовательность действий, наши мысли должны следовать в порядке, противоположном действительному решению.

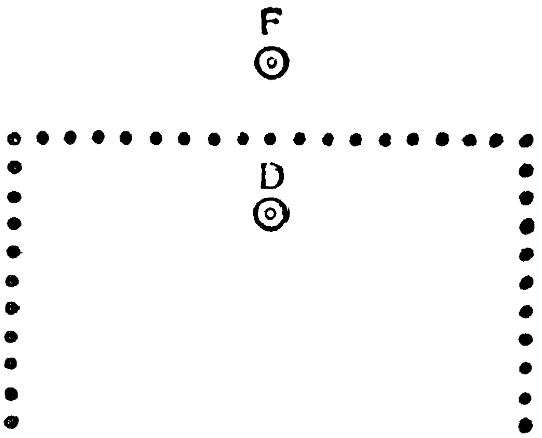
К такому обратному порядку появляется отрицательная психологическая реакция, которая может помешать даже способному учащемуся понять этот метод, если он неумело преподносится.

Однако, чтобы решить конкретную задачу, работая от конца к началу, не требуется быть гением; всякий, обладающий здравым смыслом человек может сделать это. Мы сосредоточиваем все свое внимание на желаемом результате, мы умозрительно представляем себе то положение, к которому мы хотели бы прийти. Из какого предшествующего положения можно прийти к желаемому положению? Постановка такого вопроса вполне естественна, а поставить его и значит работать от конца к началу. Решение совсем легких задач, естественно, может привести к тому, что мы будем решать от конца к началу (см. Папп, 4).

Работа от конца к началу есть процесс, подсказанный здравым смыслом и доступный каждому. Вряд ли можно сомневаться в том, что им пользовались и математики и нематематики до Платона. Формулировка этого процесса в обобщенной форме и характеристика его как процесса, полезного для решения математических и нематематических проблем, возможно, были достойны именно гения Платона.

4. А теперь обратимся к психологическому эксперименту, если только переход от Платона к собакам, курам и шимпанзе не покажется читателям слишком резким.

Как показано на фигуре 24, забор образует три стороны прямоугольника, четвертая сторона остается открытой. С одной стороны забора, в точке D, мы пускаем собаку. По другую сторону, в точке F, кладем пищу. Добраться до пищи для собаки довольно легкая задача. Она сначала присядет, как будто хочет прыгнуть непосредственно к ней, но затем быстро поворачивается, бежит, огибает забор и бросается прямо к пищи. Однако иногда решение не так просто дается, в особенности, если точки F и D близки друг к другу. Собака может потерять некоторое время, будет лаять, царапаться или безуспешно прыгать на забор раньше, чем ее осенит «счастливая идея» (как мы бы сказали), и она побежит вокруг забора.



Фиг. 24.

Интересно сравнить поведение различных животных, поставленных на место собаки. Задача очень проста для шимпанзе или четырехлетнего ребенка (для которого игрушка может быть даже лучшей приманкой, чем пища). Задача, однако, оказывается удивительно трудной для курицы, которая будет суетливо бегать взад и вперед на своей стороне забора и может потерять много времени прежде, чем доберется до корма, если она вообще доберется до него. Впрочем после долгой беготни ей это может удаться случайно.

5. На основании лишь одного простого эксперимента, который мы весьма схематично изложили, не следует создавать никаких серьезных теорий. Будет, однако, полезно подметить очевидные аналогии, если мы готовы проверить их вторично и еще раз обдумать сделанные выводы.

При решении проблемы любого рода мы стараемся обойти препятствия. Наш эксперимент имеет как бы символическое значение. Курица в своих действиях похожа на тех людей, которые предпринимают многократные попытки, ошибаются и путаются и в конце концов по счастливой случайности успешно доводят решение до конца. Они сами не могут как следует объяснить причины своего успеха. Собака, которая царапалась, лаяла и прыгала, перед тем как обежать забор, решила свою задачу примерно с таким же успехом, с каким мы решили свою задачу с двумя сосудами. То, что мы вообразили шкалу, показывающую уровень в сосудах, похоже на почти бесполезное царапанье. Полезным, пожалуй, было только то, что мы поняли, что вовсе не так легко найти искомое, что оно скрыто гораздо глубже. Мы тоже пытались решить задачу непосредственно, решать от начала к концу и лишь позже пришли к необходимости изменить направление. Только после этого мы стали решать задачу от конца к началу. Хотя на самом деле это может быть вовсе и не так, но создается впечатление, что собака, которая после краткого «рассмотрения обстановки» обежала забор и помчалась к пище, обладает большей проницательностью, чем мы.

Нет, даже курицу не следует винить за несообразительность. Ведь определенно трудно бывает, когда надо отвернуться от цели, уходить от нее, продолжать действовать, не видя постоянно цели впереди, сворачивать с прямого пути. Между затруднениями курицы и нашими имеется явная аналогия.

Разделите условие на части. Наша первая обязанность— понять стоящую перед нами задачу. Поняв задачу в целом, мы вникаем затем в детали. Мы изучаем главные части задачи — неизвестное, данные, условие, каждую часть в отдельности. Когда эти части хорошо запечатлелись у нас в памяти, но в голову еще не пришла полезная идея, мы начинаем вникать в дальнейшие подробности, рассматриваем различные данные, причем мы рассматриваем каждое данное в отдельности. Поняв условие в целом, *разделяем условие на части* и рассматриваем каждую в отдельности.

Теперь нам ясно значение предложенного совета. Он должен толкнуть нас на шаг, который следует предпринять, чтобы четко уяснить себе задачу и, если необходимо, вникнуть во все более и более тонкие детали ее. Этот шаг ведет к разложению и составлению новых комбинаций.

Разделите условие на части. Постарайтесь записать их. Этот совет нам часто представляется возможным предложить при составлении уравнений.

Разложение и составление новых комбинаций представляют собой важные мыслительные процессы.

Вы рассматриваете некоторый объект, интересующий вас или возбуждающий ваше любопытство: дом, который вы намерены взять внаем, важную, но загадочную телеграмму, любой предмет, назначение и происхождение которого вы не можете объяснить, любую задачу, которую вы хотите решить. Вы имеете некоторое представление об этом объекте как о целом, но, возможно, ваше представление лишено ясности и определенности. Вас поражает какая-либо частная деталь, вы сосредоточиваете на ней свое внимание. Затем вы переносите свое внимание на другую деталь, затем на третью и т. д.

Вам в голову может прийти сопоставить несколько деталей, рассматривая их в различных комбинациях; через некоторое время вы снова возвращаетесь ко всему объекту как к целому, но воспринимаете его уже по-иному. Вы разлагаете целое на части, а затем снова объединяете части в целое, которое вам теперь представляется уже в ином свете.

1. Начав вдаваться в детали, вы можете в них запутаться. Обилие частностей или чрезмерная детальность их рассмотрения отягощают мышление. Они могут помешать вам обратить достаточное внимание на главное или вообще увидеть это главное. Подумайте о человеке, который из-за деревьев не увидел леса.

Конечно, нам не хочется тратить время на ненужные детали; мы должны направить наши усилия на выяснение существа дела. Трудность здесь в том, что мы не знаем заранее, какие именно детали в конце концов окажутся необходимыми.

Поэтому прежде всего попытаемся воспринять задачу в целом. Поняв постановку задачи, мы в большей степени сможем судить о том, какие частности окажутся наиболее существенными.

Исследовав их, мы в состоянии судить и о том, какие дальнейшие детали заслуживают подробного рассмотрения.

Мы должны входить в детали и разлагать задачу постепенно, но лишь до такой степени, какая действительно необходима.

Конечно, учитель не может ожидать, что с этой точки зрения все учащиеся будут действовать разумно. Напротив, некоторые из них имеют глупое и вредное обыкновение начинать заниматься деталями, не поняв всю задачу в целом.

2. Мы рассмотрим сейчас математические задачи «на нахождение».

Уяснив себе задачу в целом, то главное, что в ней содержится, и цель, которую она ставит перед нами, мы намерены перейти к деталям. С чего нам начать?

Почти во всех случаях разумно начинать с рассмотрения главных элементов задачи, т. е. неизвестного, данных и условия. Почти всегда рекомендуется начинать детальное рассмотрение задачи с вопросов: *Что неизвестно? Что дано? В чем состоит условие?*

Как мы должны поступить, желая исследовать дальнейшие детали? Очень часто оказывается полезным исследовать каждую в отдельности, *разделить условие на части* и рассмотреть отдельно каждую часть.

Может оказаться необходимым, особенно, если задача трудна, осуществить ее дальнейшее разложение и рассмотреть возникающие при этом новые детали. Но иногда приходится *возвращаться к определению* некоторого понятия, вводить новые элементы, фигурирующие в этом определении, и заниматься исследованием этих вновь введенных элементов.

3. Разложив задачу, мы стараемся вновь объединить ее элементы, но уже каким-то новым образом. В частности, можно попытаться составить из элементов задачи новую, более легкую задачу, которую, возможно, нам удастся использовать в качестве вспомогательной.

Конечно, объединить вновь части, на которые разложена задача, можно, составляя из них самые различные комбинации.

Трудная задача требует исключительных, оригинальных комбинаций, найти которые нелегко. В оригинальности комбинации проявляется изобретательность решающего задачу. Однако существуют некоторые обычные и сравнительно простые виды комбинаций, которые оказываются достаточными в случае более или менее простых задач и которые должны быть нам знакомы. К ним-то и нужно прибегнуть прежде всего, даже если в конце концов придется применить и не столь очевидные средства.

Ниже приводится формальная классификация, охватывающая наиболее обычные и часто применяемые комбинации. Чтобы преобразовать данную задачу в некоторую новую, можно:

1) сохранить неизвестное, изменив остальное (данные и условие);

2) сохранить данные, изменив остальное (неизвестное и условие), или, наконец,

3) изменить и неизвестное и данные.

Ниже мы рассмотрим эти случаи.

[Случаи 1) и 2) частично совпадают. Действительно, можно оставить прежними и неизвестное и данные и преобразовать задачу, изменив лишь условие. Например, следующие две задачи, хотя и явно эквивалентны, но не тождественны:

Построить равносторонний треугольник по данной его стороне.

Построить равноугольный треугольник по данной его стороне.

Разница в формулировках двух задач, незначительная в этом примере, может оказаться существенной в других случаях. Рассмотреть случаи подобного рода, несмотря на их важность, здесь мы не имеем возможности. (Ср. «Вспомогательная задача», п. 7, последнее замечание.)]

4. *Сохранение неизвестного* при изменении данных и условия часто дает полезное преобразование исходной задачи. Совет «рассмотрите неизвестное» рекомендует сопоставить задачи с одним и тем же неизвестным. Мы можем попытаться воскресить в памяти задачу подобного рода, решенную прежде.

Постарайтесь вспомнить знакомую задачу с тем же или подобным неизвестным. Если нам не удалось вспомнить такую задачу, мы можем попытаться ее придумать: *нельзя ли придумать другие данные, из которых можно было бы определить неизвестное?*

Чем теснее связана новая родственная задача с исходной, тем вероятнее, что она окажется полезной. Поэтому, сохраняя неизвестное, мы пытаемся сохранить также некоторые данные и некоторую часть условия, изменяя как можно меньше лишь одно или два данных и небольшую часть условия. Лучший метод состоит в том, что мы что-то опускаем, ничего не прибавляя. Мы сохраняем неизвестное, *оставляем лишь часть условия, отбрасывая оставшуюся часть*, не вводя в условие ничего нового и не добавляя данных. Примеры и замечания к этому случаю даны ниже, в пунктах 7, 8.

5. *Сохранив данные*, мы можем попытаться ввести новое неизвестное, найти которое оказалось бы легче, чем разыскать первоначальное неизвестное. Это неизвестное должно определяться первоначальными данными; именно такое новое неизвестное мы и имеем в виду, задавая вопрос: *нельзя ли извлечь что-либо полезное из данных?*

Заметим, что здесь желательны две вещи. Во-первых, новое неизвестное должно быть *доступнее*, т. е. найти его из данных должно быть легче, чем первоначальное неизвестное. Во-вторых, новое неизвестное должно оказаться *полезным*, т. е., будучи найдено, оно должно принести определенную пользу для разыскания первоначального неизвестного. Короче говоря, новое неизвестное должно быть подобно камню, лежащему посредине ручья. Этот камень ближе ко мне, чем другой берег, на который я хочу перебраться. Поэтому, ступив сначала на камень, я оказываюсь ближе к своей окончательной цели.

Новое неизвестное должно оказаться и доступным и полезным; однако на практике нам часто приходится довольствоваться меньшим. Если нет ничего лучшего, из данных стоит извлечь хоть что-нибудь, что имеет шансы оказаться полезным.

Разумно также попытаться извлечь пользу из введения нового неизвестного, тесно связанного с первоначальным, хотя бы, на первый взгляд, и не кажущегося доступнее.

Так, например, решая задачу о диагонали прямоугольного параллелепипеда (п. 8), мы можем в качестве нового неизвестного ввести диагональ грани. Мы поступаем так, либо *зная*, что с помощью диагонали грани мы можем найти диагональ параллелепипеда (как в п. 10), либо видя, что диагональ грани найти легко, и *подозревая*, что она окажется полезной при решении исходной задачи. (Ср. «Все ли данные вами использованы?», п. 1.)

Если задача состоит в построении окружности, нам нужно найти две вещи — ее центр и ее радиус; можно сказать, что задача состоит из двух частей. В некоторых случаях одна часть оказывается доступнее другой; поэтому, во всяком случае, эту возможность целесообразно рассмотреть: *нельзя ли решить часть задачи?*

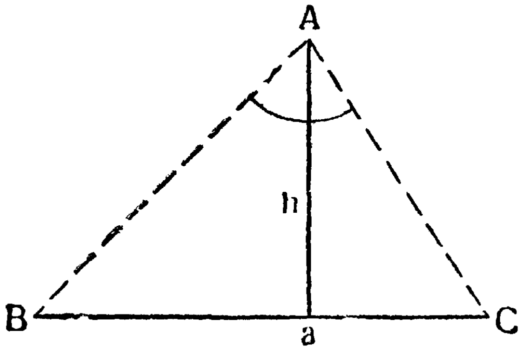
Задавая себе этот вопрос, мы взвешиваем шансы: стоит ли сосредоточить все внимание именно на центре окружности или именно на радиусе, выбрав либо первое, либо второе в качестве нового неизвестного? Вопросы подобного рода часто приносят пользу. В сложных или трудных задачах идея, приводящая к решению, часто состоит в выделении из задачи более доступной, но существенной части.

6. *Изменяя и неизвестное и данные*, мы в большей степени отходим в сторону от первоначальных намерений, чем в предыдущих случаях. Естественно, это не очень-то нам нравится; мы ощущаем опасность совсем потерять из виду первоначальную задачу. Однако мы вынуждены идти на столь

значительные изменения, если менее радикальные не дали ничего доступного и полезного. Иногда новая задача, стоящая довольно далеко от исходной, привлекает нас своей доступностью.

Нельзя ли изменить неизвестное, или данные, или, если необходимо, и то и другое, так, чтобы новое неизвестное и новые данные оказались ближе друг к другу?

Интересный способ изменения и неизвестного и данных состоит в перемене ролей неизвестного и одного из данных. (см. «Нельзя ли использовать полученный результат?», п. 3.)



Фиг. 25.

7. *Пример.* Пострсить треугольник по данной стороне a, высоте h, опущенной на эту сторону, и углу α, противолежащему этой стороне.

Что неизвестно? Треугольник.

Что дано? Отрезки a и h и угол α.

Если мы в какой-то степени знакомы с геометрическими задачами на построение, мы, конечно, попытаемся свести задачу к построению некоторой точки. Строим отрезок BC заданной длины a; теперь нам остается лишь найти вершину A искомого треугольника, противолежащую стороне BC (фиг. 25).

Итак, мы пришли к такой новой задаче:

Что неизвестно? Точка A.

Что дано? Отрезок h, угол α и две фиксированные на плоскости точки B и C.

В чем состоит условие? Расстояние точки A от прямой BC должно быть равным h, а угол BAC должен быть равным α. Таким образом, мы преобразовали исходную задачу, изменив как неизвестное, так и данные. В самом деле, новое неизвестное — точка, тогда как старым неизвестным являлся треугольник. Некоторые данные одни и те же в обеих задачах — отрезок h и угол α, однако теперь мы имеем дело с данными точками B и C, тогда как в исходной задаче была задана длина a.

Новая задача достаточно проста. Подвести нас к идее ее решения может следующее рассуждение.

Разделите условие на части. Условие состоит из двух частей, в одной из которых существенную роль играет данное h, а в другой — α. Требуется, чтобы искомая точка:

(I) находилась на расстоянии h от прямой BC;

(II) являлась вершиной угла, равного α, стороны которого проходили бы через данные точки B и C.

Если мы *сохраним только часть условия, отбросив остальную часть*, положение искомой точки не будет полностью определено. Существует бесконечно много точек, удовлетворяющих части (I) условия, а именно: все точки прямой, параллельной BC, расстояние которой до BC равно h[1]. Эта прямая есть геометрическое место точек, удовлетворяющих части (I) условия.

Геометрическое место точек, удовлетворяющих части (II), есть дуга некоторой окружности; концами этой дуги являются точки B и C. Мы в состоянии построить оба геометрических места; их пересечение даст нам искомую точку.

Примененный здесь метод представляет известный интерес. Решая геометрические задачи на построение, мы часто с успехом можем следовать этому образцу, т. е. сводить данную задачу к задаче на построение некоторой точки, а затем находить искомую точку как пересечение двух геометрических мест.

Более того, один из важных этапов приведенного выше рассуждения — *сохранение части условия и отбрасывание остальной части* — представляет интерес и с более общей точки зрения. Мы можем следовать этому образцу, решая всевозможные «задачи на нахождение». При этом мы ослабляем условие задачи, снимая часть ограничений, наложенных на неизвестное.

Насколько определенным останется тогда неизвестное; как сможет оно меняться? Задавая этот вопрос, мы фактически ставим новую задачу.

Если неизвестным служит точка на плоскости (как в рассмотренном нами примере), решение этой новой задачи состоит в определении геометрического места возможных положений этой точки. Если неизвестным служит математический объект какой-либо иной природы (например, квадрат в п. 18), нам приходится должным образом вводить понятие множества объектов и точно определять то множество объектов, которое является искомым. Даже в случае,

---

[1] Плоскость разбивается прямой BC на две полуплоскости. Мы выбираем одну из них и предполагаем, что именно в ней лежит искомая точка A. Поэтому мы ограничиваемся рассмотрением одной прямой, параллельной BC. В противном случае, нам пришлось бы рассматривать две прямые, параллельные BC. (Примечание автора.)

когда неизвестное не есть математический объект (как в следующем примере, п. 8), может оказаться полезным рассмотреть, описать или перечислить объекты, удовлетворяющие некоторой части условия, наложенного на неизвестное в первоначальной задаче.

8. *Пример*. Решая кроссворд, в котором допускаются игра слов и анаграммы, мы встречаем следующий ключ:

«В обоих направлениях вращающаяся деталь машины (5 букв)».

Что неизвестно? Слово.

В чем состоит условие? Слово должно состоять из 5 букв. Оно должно обозначать какую-то вращающуюся деталь какой-то машины. Оно должно быть русским словом, причем будем надеяться, не чересчур редким.

Достаточно ли условие для определения неизвестного? Нет.

Слишком много слов удовлетворяют условию, таких, как «рычаг», «ролик», «гайка» и т. д. Условие выражено двусмысленно; это, конечно, сделано намеренно. После ряда безуспешных попыток найти слово, обозначающее деталь машины, для которой характерным признаком было бы вращение в обоих направлениях, мы начинаем подозревать, что имеется в виду *чтение* в обоих направлениях. Такое толкование ключа может оказаться прекрасной догадкой.

Разделите условие на части. Условие задачи состоит из двух частей, в одной из которой существенную роль играет значение слова, а в другой — комбинация букв, составляющих это слово.

Требуется, чтобы искомое слово:

(I) обозначало вращающуюся деталь некоторой машины,

(II) состояло из 5 букв, причем при чтении в обратном направлении эти буквы должны давать снова слово, обозначающее вращающуюся деталь машины.

Если *оставить часть условия, отбросив остальную часть*, неизвестное окажется не вполне определенным. Существует много слов, удовлетворяющих части (I) условия; они образуют нечто вроде «геометрического места». Мы можем «построить» «геометрическое место» (I) и затем, «следуя» вдоль него, дойти до пересечения с «геометрическим местом» (II). Естественно сосредоточить свое внимание на части (I) условия, найти несколько слов с данным значением, а затем исследовать каждое из них в отношении количества букв и возможности читать его в обоих направлениях.

Возможно, нам придется вспомнить несколько слов, прежде чем мы наткнемся на искомое: рычаг, муфта, гайка, ролик, ротор, ... Ну, конечно, «ротор»!

9. В пункте 3 мы дали классификацию тех возможностей, которые возникают при объединении вновь элементов, на которые была разложена исходная задача «на нахождение». Если мы намерены составить из этих элементов не одну новую задачу, а две или более, перед нами открываются большие возможности, о которых мы, однако, лишь упоминаем, оставляя в стороне их классификацию.

Мы можем встретиться и с возможностями другого рода. В частности, может оказаться, что решение некоторой «задачи на нахождение» связано с решением некоторой «задачи на доказательство». Мы лишь упоминаем о возможности такого важного случая, воздерживаясь за недостатком места от подробного его изучения.

10. Лишь несколько коротких замечаний можно сделать относительно «задач на доказательство»; при этом будет очевидна полная аналогия тому, о чем мы подробно говорили, рассматривая «задачи на нахождение» (п. 2—9).

Уяснив себе как целое некоторую «задачу на доказательство», нам, вообще говоря, следует рассмотреть ее главные элементы. Главными элементами теоремы, которую нам предстоит доказать или опровергнуть, являются ее предпосылка[1] и заключение. Мы должны как следует понять эти элементы.

Какова предпосылка теоремы? В чем состоит ее заключение? Если возникает необходимость рассмотреть какие-либо частные детали, можно *разделить предпосылку теоремы на ее части* и рассмотреть каждую часть в отдельности. Затем можно перейти к другим деталям, осуществляя все большее разложение задачи.

Разложив задачу, мы можем попытаться вновь объединить составляющие ее элементы некоторым новым образом.

---

[1] Здесь мы пользуемся термином, принятым С. А. Богомоловым в его книге «Геометрия» (систематический курс), Учпедгиз, 1949. Вместо термина «предпосылка» в нашей литературе, впрочем, чаще применяется термин «условие». Последний в нашем контексте оказывается неудобным, так как это слово постоянно используется в настоящей книге для обозначения отношений, связывающих между собой данные и искомые элементы в «задачах на нахождение». В оригинале в этих двух случаях применяются, соответственно, термины hypothesis и condition. (Примечание к русскому переводу.— *Ред.*)

В частности, можно попытаться составить из них новую теорему. Здесь существуют три возможности.

1) Мы *сохраняем заключение теоремы*, изменяя ее предпосылку. Прежде всего мы попытаемся припомнить такого рода теорему:

Рассмотрите заключение! И попытайтесь вспомнить знакомую теорему с тем же или подобным заключением. Если нам не удается вспомнить такую теорему, мы пытаемся ее придумать: *нельзя ли придумать другую предпосылку, из которой можно было бы легко вывести заключение?* Можно изменить предпосылку, что-либо в ней опуская, но ничего не прибавляя. *Сохраните лишь часть предпосылки, отбросив остальную часть; останется ли при этом заключение справедливым?*

2) Мы *сохраняем предпосылку*, меняя заключение. *Нельзя ли извлечь что-либо полезное из предпосылки?*

3) Мы *изменяем и предпосылку и заключение теоремы*. Возможно, что мы пришли к необходимости изменить то и другое вследствие безуспешных попыток изменить что-либо одно. *Нельзя ли изменить предпосылку теоремы или ее заключение, или, если необходимо, то и другое, так, чтобы новая предпосылка и новое заключение оказались ближе друг к другу?*

Мы не делаем здесь попыток классифицировать различные возможности, возникающие в случае, когда мы, пытаясь решить исходную «задачу на доказательство», вводим две (или более) новые задачи этого рода или когда мы связываем рассматриваемую «задачу на доказательство» с некоторой «задачей на нахождение».

Рассмотрите неизвестное. Это старый совет; подобное латинское выражение гласит: «respice finem», т. е. «смотри на конец». Помните о своей цели. Не забывайте о ней. Думайте о том, чего вы добиваетесь, не выпускайте из поля зрения то, что требуется от вас в задаче. Всегда имейте в виду цель, к которой вы стремитесь. *Рассмотрите неизвестное. Рассмотрите заключение.* Эти последние два варианта латинского «respice finem» сформулированы применительно именно к математическим задачам, соответственно к «задачам на нахождение» и к «задачам на доказательство».

Сосредоточивая все свое внимание на цели и напрягая свою волю для достижения успеха, мы обдумываем пути и средства, при помощи которых мы можем добиться его. Какими средствами мы можем прийти к успешному концу? Как можно добиться поставленной цели? Каким образом можно получить такой результат? Какие причины могут привести к такому результату? Где вам встречался подобный результат? Что обычно предпринимается для получения такого результата? *И постарайтесь припомнить знакомую задачу с тем же или подобным неизвестным. И постарайтесь припомнить знакомую теорему с такими же или подобными заключениями.* Опять-таки эти последние два совета соответственно относятся именно к «задачам на нахождение» и к «задачам на доказательство».

1. Мы будем рассматривать математические задачи, «задачи на нахождение», и совет: *постарайтесь припомнить знакомую задачу с таким же неизвестным.* Сравним этот совет с аналогичным советом, содержащимся в вопросе: *не знаете ли вы какой-нибудь сходной задачи?*

Последний совет носит более общий характер, чем первый. Если две задачи родственные, то они имеют что-то общее; они могут содержать ряд общих элементов или понятий или иметь общими какие-нибудь данные или часть условия и т. д. Наш первый совет исходит из того, что у обеих задач именно неизвестное является общим, т. е. неизвестное в обоих случаях должно быть объектом одной категории, например длиной отрезка прямой линии.

По сравнению с советом общего характера, более конкретный совет отличается большей определенностью, он рациональнее.

Во-первых, мы можем экономить наши усилия в изложении задачи; не приходится рассматривать всю задачу сразу, а лишь неизвестное. Задача схематически предстанет перед нами в виде:

«Дано... найти длину отрезка».

Во-вторых, имеется известная экономия в выборе. Многие-многие задачи могут быть приведены в связь с данной задачей, имея какие-нибудь точки соприкосновения с ней. Но рассматривая неизвестное, мы ограничиваем свой выбор, мы рассматриваем только те задачи, которые имеют то же неизвестное. И, конечно, из всех задач с тем же неизвестным мы рассматриваем прежде всего наиболее элементарные и наиболее знакомые нам.

2. Задача, стоящая перед нами, записана в виде:

«Дано ... найти длину отрезка».

Наиболее простые и наиболее знакомые задачи подобного рода связаны с треугольниками. Даны три элемента треугольника, найти длину одной из сторон. Вспомнив это, мы нашли задачу, которая может помочь нам: *вот задача, родственная с данной и уже решенная. Нельзя ли воспользоваться ею? Нельзя ли применить ее результат?* Для того чтобы мы могли воспользоваться известными теоремами о треугольниках, в нашей фигуре должен быть треугольник. Имеется у нас треугольник? Или нам следует ввести треугольник, чтобы воспользоваться этими теоремами? *Не следует ли ввести какой-то вспомогательный элемент, чтобы стало возможно воспользоваться этой задачей?*

Имеется несколько простых задач, в которых неизвестна сторона треугольника. (Эти задачи различаются своими данными — могут быть даны два угла и одна сторона или две стороны и один угол, причем положение угла относительно данных сторон может быть различно. Следует отметить, что все эти задачи особенно просты для прямоугольных треугольников.) Рассматривая стоящую перед нами задачу, мы стараемся выяснить, какой треугольник нам следует ввести в нее, какую ранее решенную задачу (с тем же неизвестным, что в нашей задаче) нам выгоднее всего применить в данном случае.

После того как мы ввели подходящий вспомогательный треугольник, может оказаться, что нам еще неизвестны три его элемента. Это не существенно, если мы предвидим, что неизвестные элементы можно будет каким-нибудь образом определить. Тем самым мы значительно продвинулись в решении задачи, у нас есть план решения.

3. Суть подхода, схематично изложенного выше (в пп. 1 и 2), иллюстрируется в основном в пункте **10** (иллюстрация несколько нечеткая из-за медлительности учащихся). Совсем нетрудно увеличить число подобных примеров. В самом деле, к решению почти всех «задач на нахождение», обычно предлагаемых на ранней стадии обучения, можно приступить, если правильно следовать совету: *и постарайтесь припомнить, знакомую задачу с тем же или подобным неизвестным.*

К таким задачам нужно подходить по определенной схеме и прежде всего рассмотреть неизвестное:

1) дано... найти длину отрезка;
2) дано... найти угол;
3) дано... найти объем тетраэдра;
4) дано... построить точку.

При наличии некоторого опыта в решении элементарных математических задач мы легко вспомним одну или несколько простых и знакомых задач с тем же неизвестным. Если данная задача сама не принадлежит к числу простых и знакомых задач, мы, естественно, стараемся воспользоваться известными нам решениями таких задач. Мы пытаемся ввести какой-нибудь полезный, хорошо знакомый нам элемент в задачу, и, поступая так, мы приобретаем хороший отправной пункт для дальнейшего исследования задачи.

В каждом из этих четырех вышеупомянутых случаев план решения очевиден, ибо имеется обоснованная догадка о том, каким путем вести решение.

(1) Неизвестное следует определить как сторону некоторого треугольника. Остается ввести подходящий треугольник с тремя известными или легко определяемыми элементами.

(2) Неизвестное следует определить как угол некоторого треугольника. Остается ввести подходящий треугольник.

(3) Неизвестное может быть определено, если площадь основания и высота известны. Остается определить площадь какой-нибудь грани и соответствующую этой грани высоту.

(4) Неизвестное может быть определено пересечением двух геометрических мест, каждое из которых может быть окружностью или прямой. Остается определить, как можно из условия задачи «выудить» такие геометрические места.

Во всех этих случаях план подсказывается простой задачей с тем же неизвестным и желанием использовать метод ее решения или его результат. Следуя этому плану, мы можем, конечно, столкнуться с трудностями, но все же у нас есть отправная идея, а это уже большой шаг вперед.

4. Но у нас не будет такого преимущества, если у нас нет ранее решенной задачи с тем же неизвестным. В этом случае значительно труднее взяться за решение задачи.

«Определить площадь поверхности шара данного радиуса». Эта задача была решена Архимедом. Едва ли есть более простая задача с тем же неизвестным и, конечно, не было более простой задачи, которой Архимед мог бы воспользоваться. И в самом деле, решение Архимеда можно считать одним из самых выдающихся достижений математики.

«Определить площадь поверхности шара, вписанного в тетраэдр, все ребра которого даны». Зная ответ указанной выше задачи Архимеда, можно решить эту новую задачу, не обладая его гением, остается лишь выразить радиус вписанного шара через ребра тетраэдра. Это не так уж легко, но возникающие трудности не могут сравниться с теми, с которыми столкнулся Архимед.

Единственное отличие легкой задачи от трудной заключается в том, известно ли нам решение какой-нибудь задачи с тем же неизвестным или нет.

5. Когда Архимед приступал к определению площади поверхности шара, он не знал, как мы говорили выше, никакой задачи с тем же неизвестным и решенной ранее. Но ему были известны различные задачи, решенные ранее с подобными неизвестными. Площади некоторых кривых поверхностей определяются легче, чем площадь поверхности шара, и способы их вычисления были известны во времена Архимеда. Такими поверхностями являются, например, боковые поверхности прямых круговых цилиндров, прямых круговых конусов и усеченных конусов. Можно не сомневаться, что Архимед тщательно рассматривал эти более простые случаи. В самом деле, в своем решении он пользуется в качестве приближения к шару составным телом из двух конусов и нескольких усеченных конусов (см. «Определение», п. 6).

Если мы не можем найти ранее решенной задачи с тем же неизвестным, что и в нашей задаче, мы стараемся найти задачу с подобным неизвестным. Последние менее похожи на нашу задачу, чем вышеописанные, и поэтому их труднее использовать в наших целях, но тем не менее в них можно почерпнуть ценные указания.

6. Добавим несколько замечаний о «задачах на доказательство», аналогичные более подробным комментариям к «задачам на нахождение», приведенным выше.

Нам нужно доказать (или опровергнуть) какую-нибудь четко сформулированную теорему. Любая ранее доказанная теорема, чем-нибудь похожая на нашу, может помочь нам. Однако можно ожидать, что более действенную помощь окажут те теоремы, которые содержат такое же заключение, как наше. Учитывая это, мы рассматриваем заключение, т. е. уделяем заключению своей теоремы главное внимание. Наш метод рассмотрения теоремы может быть схематически записан так:

«Если... то углы равны».

Мы сосредоточиваем свое внимание на заключении нашей теоремы и *стараемся припомнить знакомую теорему с тем же или подобным заключением*. Мы особенно стараемся вспомнить какую-нибудь особенно простую, знакомую теорему этого типа.

В рассматриваемом случае имеется несколько различных теорем этого рода, и, возможно, мы вспомним следующую: «Если два треугольника подобны, то их соответственные углы равны». *Вот теорема, похожая на вашу и доказанная ранее. Сумеете ли вы воспользоваться ею? Следует ли ввести какой-нибудь вспомогательный элемент, чтобы получить возможность воспользоваться этой теоремой?*

Следуя этим советам и стараясь определить, какую помощь нам может оказать теорема, которую мы вспомнили, мы можем составить такой план: попытаемся доказать равенство интересующих нас углов на основании подобия треугольников. Мы видим, что необходимо ввести два треугольника с этими углами и доказать, что они подобны. Такой план является хорошим началом в работе и, возможно, в конце концов приведет нас к желанной цели, как это показано в пункте **19**.

7. Подведем итог. Вполне вероятно, что, вспомнив ранее решенные задачи с тем же или подобным неизвестным (ранее доказанные теоремы с теми же или подобными заключениями), мы начнем решать задачу в нужном направлении и, возможно, у нас возникнет правильный план решения. В простых случаях, которые встречаются чаще всего на ранней стадии обучения, имеется обычно достаточное число элементарнейших задач с тем же неизвестным (теорем с тем же заключением). Этот прием — попытка припомнить задачи с тем же неизвестным — сам собой напрашивается и основан на здравом смысле (сравните с тем, что было сказано на этот счет в п. 4). Удивительно, что такой простой и полезный прием недостаточно широко известен. Автор склонен думать, что никогда ранее этот прием не излагался во всей его общности. Во всяком случае и учащийся и преподаватель математики не должны пренебрегать советом: *Рассмотрите неизвестное. И постарайтесь вспомнить знакомую задачу с тем же или подобным неизвестным.*

Reductio ad absurdum и косвенное доказательство представляют собой различные, но родственные приемы.

Reductio ad absurdum вскрывает ошибочность какого-нибудь предположения тем, что выводит из него явный абсурд. «Приведение к нелепости» является математическим приемом, но имеет некоторое сходство с иронией, любимым приемом сатирика. Ирония принимает, по-видимому, определенную точку зрения, подчеркивает ее и затем настолько ее утрирует, что в конце концов приводит к явному абсурду.

Косвенное доказательство устанавливает справедливость утверждения тем, что вскрывает ошибочность противоположного ему допущения. Таким образом, косвенное доказательство имеет некоторое сходство с надувательским приемом политикана, поддерживающего своего кандидата тем, что опорочивает репутацию кандидата другой партии.

Как «reductio ad absurdum», так и косвенное доказательство являются эффективными средствами для открытия нового и в пытливом уме возникают как нечто совершенно естественное. Тем не менее они не по вкусу некоторым философам и многим новичкам, что нетрудно понять. Ведь не всем по душе сатирики и политиканы. Сначала мы примерами проиллюстрируем эффективность обоих приемов, а затем рассмотрим возражения против их применения.

1. *Reductio ad absurdum.* Напишите сумму чисел, равную 100, используя для этого десять цифр, причем каждую цифру можно брать только один раз.

Мы можем кое-чему научиться, пытаясь решить эту головоломку, формулировка которой требует некоторого уточнения.

Что неизвестно? Ряд чисел. Под числами мы здесь подразумеваем, конечно, целые положительные числа.

Что дано? Число 100.

В чем состоит условие? Условие состоит из двух частей. Первая часть: составляя ряд искомых чисел, мы должны лишь один раз использовать десять цифр: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. Вторая часть: сумма всех чисел должна быть 100.

Сохраните только часть условий, отбросив остальные. Первую часть условия отдельно легко удовлетворить. Возьмите ряд: 19, 28; 37; 46; 50; каждая цифра появляется только один раз. Однако вторая часть условия не удовлетворяется, ибо сумма этих чисел равняется 180, а не 100. Возможно, мы можем удачнее подобрать цифры. «Попытка не пытка» — говорит пословица, и действительно,

$$19+28+30+7+6+5+4=99.$$

Здесь первая часть условия удовлетворяется, а вторая почти удовлетворяется: у нас 99 вместо 100. Конечно, если отбросить первую часть условия, мы легко можем удовлетворить второй:

$$19+28+31+7+6+5+4=100.$$

Теперь первая часть условия не удовлетворяется: цифра 1 встречается дважды, а нуль ни разу; с остальными цифрами все в порядке. «Пытайся, пытайся снова».

После ряда неудачных попыток, мы начнем подозревать, что при требуемых условиях получить 100 невозможно. В конце концов возникает такая задача: *доказать, что невозможно удовлетворить обоим частям предложенного условия одновременно.*

Эта задача непосильна даже для довольно хороших учащихся. Однако при правильном подходе решение довольно простое. Для этого *необходимо рассмотреть тот предположительный случай, при котором обе части условия удовлетворяются.*

Итак, у нас возникло подозрение, что этот случай невозможен и наше сомнение, основанное на опыте наших неудачных попыток, не лишено оснований. Тем не менее, подойдем к делу без предубеждения и рассмотрим случай, при котором гипотетически, предположительно, якобы, обе части условия удовлетворяются. Таким образом, представим себе ряд чисел, сумма которых равна 100. Числа эти должны быть однозначными или двузначными. Всего десять цифр, и все они должны отличаться друг от друга, поскольку каждая цифра: 0; 1; 2; 3; ...; 9, может появляться лишь один раз. Таким образом, сумма всех цифр должна быть :

$$0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$$

Некоторые из этих цифр обозначают единицы, а другие десятки. Не нужно быть особо проницательным, чтобы сообразить, что *сумма цифр, обозначающих десятки,* может играть известную роль. Пусть эта сумма будет t. Тогда сумма оставшихся цифр, обозначающих единицы, будет $45-t$. Следовательно, сумма всех чисел ряда должна быть:

$$10t+(45-t)=100.$$

Мы получили уравнение, из которого можно определить t. Это уравнение первой степени. Решив его, мы получим:

$$t=\frac{55}{9}.$$

Здесь что-то не так. Значение найденного t представляет собой дробное число, в то время как t должно быть, конечно, целым числом. Исходя из предположения, что обе части предложенного условия могут быть одновременно удовлетворены, мы пришли к явному абсурду. Чем это можно объяснить? Очевидно, наше первоначальное предположение ошибочно. Обе части условия *не могут* быть удовлетворены одновременно. Итак, мы достигли цели. Нам удалось доказать, что обе части поставленного условия не совместимы.

Наши рассуждения представляют собой типичный пример «reductio ad absurdum».

2. *Замечания.* Вернемся к рассуждениям, изложенным выше, и осмыслим их основное направление.

Мы хотим доказать, что невозможно решить задачу, удовлетворяющую заданному условию, т. е. что невозможен тот случай, при котором все части условия могут быть удовлетворены одновременно. Однако, хотя мы еще ничего не доказали, но мы обязаны считаться с возможностью такого случая. Лишь рассмотрев этот предположительный случай и тщательно изучив его, можно надеяться обнаружить в нем какую-нибудь явную ошибку. И если мы хотим окончательно подтвердить невозможность нашего предположения, мы должны найти такую явную ошибку. Следовательно, нам ясно,что прием, который оказался удачным для решения нашего примера, разумен вообще, и мы обязаны рассмотреть тот предположительный случай, при котором все части условия удовлетворяются *несмотря на то, что он кажется очень мало вероятным.*

Более опытный читатель может обнаружить здесь еще одно обстоятельство. Ведь главным моментом в наших рассуждениях было составление уравнения с целью определить величину t. Но к этому же уравнению можно было бы прийти и не подвергая сомнению справедливость условия. Чтобы составить уравнение, мы должны выразить языком математики предположение, что все части условия задачи удовлетворяются, *несмотря на то, что мы еще не знаем, возможно ли в самом деле одновременно удовлетворить всем этим частям условия или нет.*

Наш прием «без предубеждений». Мы надеемся либо найти неизвестное, удовлетворяющее условию, либо надеемся доказать, что решить задачу невозможно. Исследование, если оно умело проводится, начинается в обоих случаях с одного и того же — с рассмотрения того предположительного случая, при котором условие удовлетворяется и лишь в ходе решения выясняется, которая из надежд оправдывается.

В подтверждение вышесказанного сравните «Геометрические фигуры», пункт 2. Сравните также Папп; анализ, результат которого опровергает предложенную теорему или приводит к выводу, что «задача на нахождение» не имеет решения, по существу является «reductio ad absurdum».

3. *Косвенное доказательство.* Простыми числами являются числа: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; ..., ..., т. е. те натуральные числа, которые не могут быть разложены на меньшие множители и которые больше 1. (Последняя фраза не относится к единице, которая, совершенно ясно, не может быть разложена на меньшие множители. У единицы другие свойства и ее не следует считать простым числом.) Простые числа являются «первичными элементами», на которые все целые числа (больше 1) могут быть разложены. Например:

$$630 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

разлагается на произведение пяти простых чисел.

Ряд простых чисел конечен или бесконечен? Естественно предположить, что ряд простых чисел бесконечен. Если бы он кончался, все целые числа могли быть разложены на конечное число простых чисел, и мир оказался бы, так сказать, «слишком бедным». Таким образом, возникает задача доказать, что ряд простых чисел бесконечен.

Эта задача сильно отличается от элементарных математических задач обычного типа, и на первый взгляд кажется, что к ней невозможно подступиться. Однако очень мало вероятно, как мы говорили, что такое последнее простое число, скажем P, должно существовать. Почему это так мало вероятно?

Непосредственно рассмотрим тот мало вероятный случай, при котором гипотетически, предположительно, якобы, существует некое последнее простое число ряда P. Тогда конечный ряд простых чисел имел бы такой вид: 2; 3; 5; 7; 11; ...; P. Почему этот случай так мало вероятен? Где ошибка? Сможем ли мы найти явную ошибку в наших рассуждениях? Безусловно, сможем. Для этого мы образуем такое число:

$$Q = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \ldots P) + 1.$$

Раз число Q больше P, то поэтому Q, очевидно, не может быть простым числом. Следовательно, Q должно делиться на простое число. По нашему предположению, все простые числа ограничиваются рядом: 2; 3; 5; 7; ...; P. Но если число Q разделить на любое из этих чисел, то получим в остатке 1. Следовательно, Q не делится ни на одно из вышеприведенных простых чисел, которые согласно нашему предположению представляют собой все имеющиеся простые числа. Значит, в наших рассуждениях где-то есть ошибка. Или Q должно быть простым числом, или же оно должно делиться на какое-нибудь простое число. Исходя из предположения, что существует последнее простое число P, мы пришли к явной нелепости. Чем это объясняется? Тем, что наше первоначальное предположение ошибочно. Такого последнего простого числа P быть не может. Таким образом, нам удалось доказать, что ряд простых чисел бесконечен.

Это был типичный пример косвенного доказательства. (К тому же благодаря Евклиду он является широко известным, см. предложение 20 книги IX «Начал».)

Мы доказали исходную теорему (что ряд простых чисел бесконечен) тем, что опровергли не совместимую с ней противоположную теорему (что ряд простых чисел конечен), ибо последняя привела нас к явному абсурду.

Таким образом, в своем доказательстве мы соединили косвенное доказательство с «reductio ad absurdum». В таком сочетании доказательство применяется довольно часто.

4. *Возражения.* Метод решения задач, который мы изучаем, встречает немало возражений. Многие возражения являются, по-видимому, лишь разновидностями одного и того же основного возражения. Здесь мы рассмотрим доступную нашему пониманию «практическую» сторону основного возражения.

Найти доказательство, которое является плодом большого умственного усилия, несомненно, большое достижение нашей мысли. Но даже чтобы заучить такое доказательство или понять его до конца, требуется определенное умственное усилие. Вполне естественно, что нам хочется, чтобы этот труд не был затрачен даром, т. е. то, что мы сохраним в памяти, было верно и точно, а не ошибочно или абсурдно.

Но сохранить истину, выведенную из доказательства методом «reductio ad absurdum», довольно трудно. Исходным моментом всех рассуждений является ошибочное предположение, выводы из которого в равной мере ошибочны, но их ошибочность уже несколько более очевидна. Таким образом, мы продолжаем делать выводы из предшествующих до тех пор пока, наконец, не приходим к выводу, ошибочность которого очевидна. Чтобы не загромождать свою память ложными фактами, следует забыть доказательство возможно быстрее. Но, однако, это невозможно, ибо во время работы над доказательством необходимо четко и точно запоминать каждый шаг.

Таким образом, мы получаем следующую сжатую формулировку возражения против метода косвенного доказательства: имея дело с таким доказательством, мы вынуждены все время сосредоточивать свое внимание не на верной теореме, которую следует запомнить, а на ложном допущении, которое следует забыть.

Если мы желаем правильно судить о справедливости этих возражений, нам следует различать два случая использования «reductio ad absurdum»: первый — как орудие исследования, второй — как прием изложения материала. Точно такие же различия следует делать и относительно косвенного доказательства.

Нужно признать, что «reductio ad absurdum» как метод изложения материала наряду со своими достоинствами имеет и недостатки. Такое «reductio», в особенности, если оно растянуто, может оказаться невыносимым для читателя или слушателя. Все вытекающие из него выводы, которые мы последовательно рассматриваем, справедливы, но все положения, с которыми нам приходится считаться в процессе доказательства, ошибочны. Даже словесная форма изложения может стать утомительной, если она подчеркивает, а она должна подчеркивать, что все основано на исходном предположении. Слова «гипотетически», «предположительно», «якобы» должны неоднократно повторяться или же какой-нибудь другой прием должен быть найден, который тоже будет многократно повторяться. Нам хочется отвергнуть и забыть положение как невозможное, но приходится сохранять и рассматривать его как основание для последующего шага, и этот внутренний разлад может в конце концов стать невыносимым.

Однако было бы неблагоразумно отказаться совсем от «reductio ad absurdum» как от средства исследования. Оно может прийти нам в голову как вполне естественный прием и привести к решению, когда все другие средства оказываются бессильными. В этом мы могли убедиться на вышеприведенных примерах.

Надо иметь некоторый опыт, чтобы заметить, что между двумя точками зрения нет существенных расхождений. Практика показывает, что часто нетрудно бывает либо превратить косвенное доказательство в прямое, либо перестроить доказательство, связанное с длительными рассуждениями, методом «reductio ad absurdum», в более приятную форму, из которого «reductio ad absurdum» может даже полностью исчезнуть (или после должной подготовки оно может быть сведено к нескольким ярким выразительным предложениям).

Одним словом, если мы хотим полностью использовать все имеющиеся в нашем распоряжении методы доказательства той или иной истины, мы должны хорошо знать как метод «reductio ad absurdum», так и метод косвенного доказательства. Однако в том случае, когда можно успешно решить задачу одним из этих способов, следует обязательно вернуться к решению и поставить себе вопрос: *нельзя ли получить тот же результат иначе?*

Проиллюстрируем сказанное примерами.

5. *Перестройка* «reductio ad absurdum». Вернемся к рассуждениям, изложенным в пункте 1. Решая задачу методом «reductio ad absurdum», мы исходили из допущения, которое в конце концов оказалось невозможным. Однако возьмем ту часть доказательства, которая независима от первоначального ошибочного предположения и содержит правильные предпосылки. Возвращаясь к полученному решению задачи, мы сможем заметить несомненную справедливость следующего положения: если ряд чисел, однозначных или двузначных, написан так, что каждая из десяти цифр встречается только раз, то сумма этого ряда имеет вид:

$$10t+(45-t)=9(t+5),$$

т. е. эта сумма делится на 9. Но по условиям предложенной головоломки сумма должна быть равна 100. Возможно ли это? Нет, поскольку 100 не делится на 9.

Таким образом, метод «reductio ad absurdum», который привел к открытию этой аргументации, исчез из нашего нового изложения доказательства.

Между прочим, читатель, знакомый с приемом исключения девяток, теперь может оценить всю аргументацию с одного взгляда.

6. *Преобразование косвенного доказательства.* Обратимся к рассуждениям, изложенным в пункте 3. Возвращаясь к завершенному решению и тщательно обдумав весь ход его, мы можем найти ряд аргументов, которые независимы от какого бы то ни было ошибочного допущения. Однако лучший ключ к разгадке решения мы найдем при вторичном рассмотрении смысла именно предложенной задачи.

Как следует понимать утверждение, что ряд простых чисел бесконечен? Очевидно, имеется в виду следующее: когда мы получили какое-нибудь конечное множество простых чисел: 2; 3; 5; 7; 11; ... P, где P последнее из этих найденных простых чисел, то всегда найдется еще одно простое число. Итак, что нужно предпринять, чтобы доказать существование бесконечного ряда простых чисел? Мы должны указать, каким образом можно найти простое число, отличное от всех известных. Таким образом, наша «задача на доказательство» по существу сведена к следующей «задаче на нахождение»: *Даны простые числа: 2; 3; 5; 7; ... P. Требуется найти новое простое число, отличное от всех данных простых чисел.*

Придав нашей первоначальной задаче такую формулировку, мы сделали главный шаг. Теперь сравнительно легко увидеть, как использовать наиболее существенные части предыдущей аргументации для нашей новой цели. В самом деле число

$$Q=(2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\ldots P)+1$$

несомненно делится на какое-то простое число. Возьмем — в этом суть идеи — любой простой делитель числа Q (например, наименьший) и обозначим его N. (Конечно, если Q простое число, то $N=Q$.) Если величину Q разделить на любое из простых чисел: 2; 3; 5; 7; ... P, то получим в остатке 1. Таким образом, ни одно из этих чисел не может равняться N, так как N является делителем Q. Это как раз то, что нам нужно: N есть простое число, и оно отлично от всех ранее известных нам простых чисел: 2; 3; 5; 7; 11; ... P.

Это доказательство представляет собой определенный прием, при помощи которого можно вновь и вновь продлить ряд простых чисел до бесконечности. В нем нет ничего окольного, нет необходимости рассматривать невозможные положения. Однако по существу это доказательство такое же, как и приведенное нами косвенное доказательство, которому нам удалось только придать другой вид.

Сделайте чертеж[1]. Смотрите «Геометрические фигуры». *Введите подходящие обозначения;* смотрите «Обозначения».

Симметрия имеет два значения — более обычное, частное, геометрическое значение и менее обычное, общее, логическое значение.

В элементарной геометрии в пространстве рассматриваются два типа симметрии: симметрия относительно плоскости (плоскостная симметрия) и симметрия относительно точки (центральная симметрия). Тело человека кажется довольно симметричным, но на самом деле это не так. Многие внутренние органы расположены совсем не симметрично. Статуя может быть совершенно симметрична, относительно некоторой вертикальной плоскости, и в этом случае обе ее половины кажутся полностью «взаимозаменяемыми».

В более общем понимании целое считается симметричным, если у него имеются взаимозаменяемые части. Существует много видов симметрии. Они отличаются друг от друга числом взаимозаменяемых частей и теми действиями, при помощи которых эти части взаимозаменяются. Так, например, куб имеет высокую степень симметрии; его шесть граней взаимозаменяемы, как и его восемь вершин и двенадцать ребер. Выражение

$$yz + zx + xy$$

симметрично, ибо любые две из трех букв x, y, z могут друг друга заменять, не изменяя при этом выражения.

Симметрия в более общем понимании важна и для изучаемого нами предмета. Если в задаче имеются симметричные элементы, то, учитывая это, порой бывает выгодно обратить внимание на эти взаимозаменяемые части и часто имеет смысл применять одинаковые подходы к тем элементам, которые выполняют одни и те же функции (см. «Вспомогательные элементы», п. 3).

С симметричными элементами старайтесь обращаться симметрично и никогда не разрушайте беспричинно любую естественную симметрию. Иногда, однако, мы вынуждены обращаться неодинаково с симметричными предметами. Так, например, пара перчаток, безусловно, симметрична. Тем

[1] Статья содержит исключительно ссылки на другие статьи «Словаря».

не менее никто не обращается с такой парой совсем одинаково, никто не надевает обе перчатки одновременно, а одну за другой.

Симметрия может также быть полезной при проверке результатов решений (см. п. 14).

Следствие (королларий) есть теорема, которую мы легко получаем, рассматривая другую, уже доказанную теорему. Английский термин «corollary» происходит от латинского слова; более или менее буквальный перевод означает «чаевые»[1].

Современная эвристика стремится постичь процесс решения проблем, особенно тех *мыслительных операций, которые чаще всего оказываются полезными* в этом процессе. Свои данные она заимствует из различных источников, ни одним из которых не следует пренебрегать. При серьезном изучении эвристики следует учесть как логический, так и психологический ее фон, используя высказывания таких старых авторов, как Папп, Декарт, Лейбниц и Больцано, по данному вопросу, и менее всего следует при этом пренебрегать свободным от предубеждений опытом. Эвристика должна строиться как на основе нашего личного опыта в решении задач, так и из наблюдений за тем, как решают задачи другие. Изучая эвристику, не следует пренебрегать ни одним типом задач (проблем); следует обнаруживать то общее, что имеется в подходе к самым различным проблемам, следует стремиться вскрыть то общее, что есть в решении любой проблемы, независимо от их содержания. Изучение эвристики имеет «практические» цели. Лучшее понимание природы мыслительных операций, оказывающихся чаще всего полезными при решении задач, может оказать положительное влияние на преподавание, особенно на преподавание математики.

Данная книга представляет собой первую попытку реализации этой программы. Укажем, что дают в этом отношении различные статьи нашего словаря.

1. По существу наша таблица содержит перечень мыслительных операций, которые, как правило, полезны при решении всевозможных проблем; вопросы и советы нашей

[1] Собственно, corollarium — небольшой венок из цветов, которым римляне награждали отличившихся артистов. (Примечание к русскому переводу. — *Ред.*)

таблицы подсказывают такие операции. Некоторые из этих операций снова описываются во второй главе, а некоторые более подробно разбираются и иллюстрируются в первой главе.

Чтобы получить дополнительные разъяснения по отдельным вопросам и советам таблицы, читателю следует обратиться к тем пятнадцати статьям «Словаря», заголовками которых служат первые предложения пятнадцати абзацев таблицы: «Что неизвестно? Возможно ли удовлетворить условию? Сделай чертеж... Нельзя ли использовать полученный результат?» Читатель, желая получить разъяснение по какому-нибудь пункту таблицы, должен обратиться к первым словам абзаца, в котором находится этот пункт, и затем найти в словаре статью, заглавием для которой служат эти слова. Например, совет «*Вернитесь к определениям*» находится в абзаце таблицы, первое предложение которого: «Нельзя ли иначе сформулировать задачу?» В статье под этим названием читатель находит ссылку на другую статью: «Определения», в которой совет, интересующий читателя, объясняется и иллюстрируется примером.

2. Процесс решения задач — процесс сложный и имеет несколько различных аспектов. Двенадцать главных статей данного «Словаря» рассматривают некоторые аспекты более подробно; ниже мы укажем их заглавия.

Когда мы работаем интенсивно, мы чутко реагируем на свои успехи; мы воодушевляемся, когда продвижение идет быстро и успешно; мы угнетены, когда продвигаемся вперед медленно. Что существенно для продвижения и достижения при решении задач? Статья, рассматривающая этот вопрос, часто цитируется в других частях «Словаря» и ее следует прочитать одной из первых.

Стараясь решить задачу, мы поочередно рассматриваем различные ее аспекты, так как в нашей работе очень существенно видоизменение задачи. Мы можем видоизменять задачу разложением и составлением новых комбинаций ее элементов — или возвращением к определениям некоторых содержащихся в ней понятий, или же мы можем использовать большие возможности, представляемые нам обобщением, специализацией и аналогией. Видоизменение задачи может привести нас к вспомогательным элементам или к обнаружению более доступной вспомогательной задачи.

Следует четко различать два типа задач — задача на нахождение и задача на доказательство. Наша таблица специально приспособлена к «задачам на нахождение». Для того чтобы приспособить таблицу к «задачам на доказательство», нам придется пересмотреть ее и видоизменить некоторые вопросы и советы.

Во всяких проблемах, но в особенности в не очень простых математических задачах, подходящие обозначения и геометрические фигуры оказывают большую, а подчас и незаменимую помощь.

3. Процесс решения задач имеет много аспектов, но некоторые не рассматриваются в этой книге вовсе, а другие рассматриваются лишь очень кратко. Оправдано, на наш взгляд, исключение из первой небольшой книги об эвристике тех вопросов, которые могут показаться слишком тонкими, или слишком специальными, или чересчур спорными.

Часто важно угадать результат или воспользоваться предварительными, лишь правдоподобными рассуждениями, не смешивая их с окончательными и точными. Этот вопрос затрагивается в разных местах книги, но об эвристическом рассуждении мы смогли включить в данную книгу лишь короткую статью.

Для изучения эвристики большое значение имеет рассмотрение определенных логических схем, но нам показалось благоразумным не вводить никакой узкоспециальной статьи по этому вопросу[1]. Психологическим аспектам посвящены главным образом лишь две статьи: «Настойчивость, надежда, успех» и «Подсознательная работа». Побочно затронута психология животных; смотрите: «Работать от конца к началу».

Мы подчеркиваем, что эвристика охватывает всевозможные задачи, в частности прикладные задачи и даже головоломки. Мы подчеркиваем также, что серьезное исследование не может ставить своей задачей указать непогрешимые правила, как делать открытия. Эвристика рассматривает поведение человека при решении проблем. Очевидно, этот вопрос занимал

[1] Вопросы «логики эвристики» специально изучены в уже упомянутой книге Д. Пойа «Математика и правдоподобные рассуждения» (см. особенно т. II — «Схемы правдоподобных умозаключений»). (Примечание к русскому переводу. — *Ред.*)

людей уже на ранней стадии развития человеческого общества и то, как его понимали в древности, отражено в «М у д р о с т и п о с л о в и ц».

4. Ряд статей по более общим вопросам изложен более подробно, поскольку эти статьи или некоторые их части могут представлять особый интерес для учителя или учащихся; по тем же соображениям включено также несколько статей по специальным вопросам.

Ряд статей рассматривает методические вопросы, часто имеющие важное значение в элементарной математике; к ним относятся: «П а п п, Р а б о т а т ь о т к о н ц а к н а ч а л у (уже упоминалось в п. 3), R e d u c t i o a d a b s u r d u m и косвенное доказательство, И н д у к ц и я и м а т е м а т и ч е с к а я и н д у к ц и я, С о с т а в л е н и е у р а в н е н и й, П р о в е р к а по р а з м е р н о с т и и З а ч е м н у ж н ы д о к а з а т е л ь с т в а?»

Некоторые статьи, как, например, «Т и п о в а я з а д а ч а» и «Д и а г н о з», обращены главным образом к преподавателю, а иные к любознательным учащимся: «В д у м ч и в ы й р е ш а ю щ и й з а д а ч у ч е л о в е к», «В д у м ч и в ы й ч и т а т е л ь» и «Б у д у щ и й м а т е м а т и к».

Следует здесь отметить, что диалоги между учителем и его учащимися, приведенные в пунктах **8**, **10**, **18**, **19**, **20** и в различных статьях «Словаря», могут служить образцом не только учителю, который стремится вести за собой класс, но также и работающему самостоятельно. Справедливо рассматривают мышление как «разговор в уме», своего рода беседу думающего с самим собой. Упомянутые диалоги помогают учащимся увидеть свой успех, достигнутый в ходе решения; самостоятельно решающий задачу, рассуждая сам с собой, может добиться успеха тем же путем.

5. Мы не будем указывать названий всех остальных статей, упомянем лишь отдельные группы их.

Некоторые статьи содержат замечания по истории эвристики, как-то: Д е к а р т, Л е й б н и ц; Б о л ь ц а н о; Э в р и с т и к а; Т е р м и н ы с т а р ы е и н о в ы е; П а п п (последняя статья упоминалась уже в п. 4).

Некоторые статьи объясняют специальные термины: У с л о в и е, С л е д с т в и е, Л е м м а.

В нескольких статьях содержатся лишь ссылки на другие статьи (в содержании они отмечены особо).

6. Эвристика ставит себе целью установить общие закономерности тех процессов, которые имеют место при решении всякого рода проблем, независимо от их содержания. В этой книге, однако, мы рассматриваем примеры почти исключительно из элементарной математики. Следует признать, что это суживает рамки наших рассмотрений, но мы полагаем, что такое ограничение не явится серьезной помехой в исследовании основных идей эвристики. В самом деле, элементарные математические задачи обеспечивают желаемое разнообразие, а изучение процесса их решения доступно каждому и интересно. К тому же мы не забываем о нематематических проблемах, хотя они рассматриваются и реже.

Более серьезные математические задачи в данной книге нигде не приводятся, но по существу именно они составляют подлинный фон изложения. Знаток математики, интересующийся эвристическим исследованием, может без труда добавить примеры из собственного опыта, чтобы уяснить себе вопросы, иллюстрируемые нами лишь на элементарных примерах.

7. Автор желает выразить свою благодарность и чувство признательности некоторым современным авторам, не упомянутым в статье об эвристике — физику и философу Эрнсту Маху, математику Жаку Адамару[1], психологам Вильяму Джеймсу и Вольфгангу Кёлеру. Автор также желает упомянуть психолога К. Денкера и математика Ф. Красса, чей труд содержит некоторые общие с данной книгой положения (их книга была опубликована, когда данное исследование было в форме завершения и частично опубликовано).

Составление уравнений можно сравнить с переводом с одного языка на другой («Обозначения», п. 1). Это сравнение, использованное Ньютоном в его *Arithmetica Universalis*, может помочь нам внести ясность в природу некоторых затруднений, с которыми часто встречаются и учащиеся, и преподаватели.

1. Составить уравнение — значит выразить математическими символами условие, сформулированное словами.

---

[1] Автор, очевидно, имеет в виду книгу Адамара, посвященную психологическому аспекту математического творчества («Psychology of Invention in the Mathematical Field» by Jacques Hadamard, Princeton University Press, 1945). (Примечание к русскому переводу. — *Ред.*)

Это перевод с обычного языка на язык математических формул. Трудности, которые могут встретиться при составлении уравнений, являются трудностями перевода.

Чтобы перевести предложение с английского языка на французский, нужно удовлетворить двум условиям: во-первых, мы должны точно понять английское предложение; во-вторых, мы должны быть знакомы со средствами выражения, свойственными французскому языку. Аналогичное положение создается, когда мы пытаемся выразить математическими символами условие, сформулированное словами: во-первых, мы должны понять условие; во-вторых, мы должны быть знакомы со средствами математического языка.

Сравнительно легко перевести английское предложение на французский язык, если его можно перевести дословно. Но в английском языке есть идиоматические выражения, которые не могут быть переведены на французский язык дословно. Если в нашем предложении встречаются такие идиоматические выражения, затрудняющие перевод, то приходится обращать меньше внимания на значение отдельных слов и больше внимания на смысл выражения в целом. До перевода предложение, возможно, придется перестроить.

Составление уравнений имеет много общего с таким переводом. В легких случаях словесная формулировка почти механически распадается на ряд последовательных частей, каждую из которых можно непосредственно выразить математическими символами. В более трудных случаях условие состоит из частей, которые не могут быть непосредственно переведены на язык математических символов. В этом случае мы должны меньше обращать внимания на словесную формулировку и сосредоточить свое внимание на смысле этой формулировки. Перед тем, как приступить к математической записи, возможно нам придется по-иному сформулировать условия, все время имея в виду математические средства для записи этой новой формулировки.

Во всех случаях, легких или трудных, мы должны понять условие, *разделить условие на части* и поставить вопрос: *можете ли вы записать их?* Если задача легкая, нам удается, не задумываясь, разбить условие на части, которые могут быть записаны математическими символами. В трудной же задаче надлежащее разделение условий не так легко наметить.

После изучения приведенных ниже примеров следует вернуться к вышеизложенному объяснению и еще раз прочитать его.

2. *Найти каждое из двух чисел, сумма которых равна* 78, *а произведение* 1296.

Вертикальной линией разделим лист на две части. На одной стороне запишем словесную формулировку, разбитую на надлежащие части. На другой стороне, против соответствующей словесной формулировки, запишем алгебраические обозначения. Оригинал находится слева, перевод на символы — справа.

Формулировка задачи.

на русском языке	*на языке алгебры*
Найти каждое из двух чисел,	x, y
сумма которых равна 78, а	$x+y=78$
произведение 1296.	$xy=1296$.

В этом случае словесная формулировка почти механически распадается на ряд последовательных частей, каждую из которых можно непосредственно записать математическими символами.

3. *Найти сторону основания и высоту прямой призмы, в основании которой лежит квадрат, если ее объем 63 см^3, а площадь поверхности 102 см^2.*

Что неизвестно? Сторона основания. Обозначим ее через x, а высоту призмы через y.

Что дано? Объем 63 *см*^{3} и площадь 102 *см*^{2}.

В чем состоит условие? Призма, в основании которой квадрат со стороной x и высотой y, должна иметь объем 63 *см*^{3} и площадь 102 *см*^{2}.

Разделите условие на части. Имеются две части — одна связанная с объемом, другая — с площадью.

Мы легко разделим все условие на эти две части. Но их нельзя записать «непосредственно». Мы должны уметь вычислять объем и различные части площади. Если это нам из курса геометрии известно, то нетрудно будет изменить словесную формулировку обеих частей условия так, что их возможно будет перевести на язык уравнений. На левой стороне листа мы записываем словесную формулировку задачи, существенно переработанную, расширенную и готовую для перевода на язык алгебры.

Найти сторону основания и	x
высоту прямой призмы,	y
в основании которой квадрат.	
Первое. Объем призмы дан.	63 $см^3$
Площадь основания, которая представляет собой квадрат со стороной x,	x^2
и высота	y
определяют объем, который есть их произведение.	$x^2y=63$
Второе. Площадь поверхности дана.	102 $см^2$
Поверхность состоит из двух квадратов со стороной x и	$2x^2$
четырех прямоугольников, каждый с основанием x и высотой y;	$4xy$
сумма их площадей есть известная площадь поверхности.	$2x^2+4xy=102.$

4. *Найти точку, симметричную данной точке относительно заданной прямой, если даны уравнение прямой и координаты данной точки.*

Эта задача из аналитической геометрии на плоскости.

Что неизвестно? Точка с ее координатами, обозначим их p и q.

Что дано? Уравнение прямой $y=mx+n$ и точка с координатами a, b.

В чем состоит условие? Точки (a, b) и (p, q) симметрично расположены относительно прямой $y=mx+n$.

Теперь мы подошли к самой главной трудности, состоящей в том, что необходимо разбить условие на части, каждая из которых может быть выражена языком аналитической геометрии. Нужно хорошо понять характер этой трудности. Можно разбить условие на такие части, которые не встретят возражений с точки зрения их логичности. Но тем не менее такое разделение условия бесполезно, ибо в данном случае требуется расчленение условия на такие части, которые могли бы быть выражены аналитически. Чтобы найти правильное решение, приходится *возвращаться к определению* симметрии, но при этом не забывать о средствах выражения аналитической геометрии. Что значит симметрично относительно прямой? Какие геометрические отношения могут быть легко выражены в аналитической геометрии? Мы сосредоточиваем свое внимание на первом вопросе, но не следует забывать о втором. В конце концов мы можем найти расчленение, которое приводится ниже.

Данная точка	(a, b)
и точка, которую нам надо найти,	(p, q)
так связаны между собой, что	
1) прямая, соединяющая их, перпендикулярна данной прямой; и	$\frac{q-b}{p-a} = -\frac{1}{m}$
2) они лежат по разные стороны от заданной прямой на равном расстоянии от нее[1].	$\frac{b-ma-n}{\sqrt{1+m^2}} = -\frac{q-mp-n}{\sqrt{1+m^2}}$.

Специализация заключается в том, что от изучения данного ряда элементов мы переходим к изучению меньшего ряда или же к изучению отдельного элемента данного ряда. При решении задач специализация часто полезна. В подтверждение этого ниже приводится следующий пример.

1. *Пример.* Пусть в треугольнике r — радиус вписанной окружности, R — радиус описанной окружности, а H — наибольшая высота. Тогда

$$r+R \leqslant H.$$

Эту теорему мы должны доказать (или опровергнуть). Таким образом, перед нами стоит «задача на доказательство».

Предлагаемая теорема необычного типа. Нам не удастся припомнить теорему о треугольниках с подобным заключением. Если мы не можем придумать какой-либо способ доказательства всей теоремы, то мы можем исследовать какой-нибудь частный случай этого недоказанного утверждения. Таким наиболее простым частным случаем будет применение теоремы к равностороннему треугольнику. Для этого случая

$$r=\frac{H}{3} \text{ и } R=\frac{2}{3}H.$$

Таким образом, в этом случае утверждение верно. Не придумав ничего другого, мы начинаем исследовать более общий, чем *рассмотренный сейчас частный случай*, а именно: случай равнобедренного треугольника. Как известно, форма равнобедренного треугольника является функцией вели-

[1] Это второе условие можно было бы, очевидно, заменить требованием, чтобы середина отрезка, соединяющего точки (a, b) и (p, q), т. е. точка $\left(\frac{a+p}{2}, \frac{b+q}{2}\right)$ — лежала на заданной прямой. Указанное требование записалось бы уравнением $\frac{b+q}{2}=m\,\frac{a+p}{2}+n$, равносильным, конечно, приведенному в тексте. (Примечание к русскому переводу. — *Ред.*)

чины его угла при вершине. Величина угла равнобедренного треугольника при вершине меняется в пределах от 0 до 180°. В первом предельном случае (угол при вершине равен 0°) основание равнобедренного треугольника исчезает и поэтому

$$r=0 \text{ и } R=\frac{1}{2}H.$$

Таким образом, и этот пример подтверждает правильность утверждения. Однако во втором предельном случае (угол при вершине равен 180°) все три высоты исчезают [1] и

$$r=0,\ R=\infty \text{ и } H=0.$$

Правильность нашего утверждения не подтверждается, и это доказывает, что предложенная теорема не верна. Тем самым мы решили поставленную задачу.

Можно видеть, что утверждение также ошибочно и для очень «пологих» равнобедренных треугольников, у которых угол при вершине приближается к величине 180°, так что в своем доказательстве мы могли бы даже «официально» пренебречь рассмотрением крайнего случая, который производит впечатление не совсем «правомерного».

2. «L'exception confirme la règle». «Исключение подтверждает правило». Эту известную поговорку следует рассматривать как шутку, посмеиваясь над отсутствием логики у ее автора. При серьезном подходе достаточно, конечно, одного исключения, чтобы окончательно опровергнуть любое «мнимое правило» или общее утверждение. Самый простой и в некотором отношении даже самый лучший способ опровержения таких мнимых общих утверждений и правил заключается как раз в том, чтобы выявить такой частный случай, который противоречил бы этим утверждениям или правилам. У некоторых авторов такой частный случай называется *«контрпримером»*.

Вот правило, претендующее на общность и связанное с рядом элементов. Чтобы опровергнуть его, мы *специализируем*, т. е. выбираем из данного ряда такой элемент, который не соответствует этому общему правилу; как это делается, иллюстрирует пример, приведенный выше (п. 1). Сначала мы рассматриваем простой частный случай, берем наудачу

[1] Здесь подразумевается, что этот предельный случай рассматривается при деформации равнобедренного треугольника с постоянным основанием. (Примечание к русскому переводу. — *Ред.*)

любой случай, который легко поддается проверке. Если проверка выявит, что взятый случай не соответствует общему правилу, то последнее опровергается и решение завершено. Если, однако, рассмотренный случай подтверждает предполагаемое правило, то, возможно, его исследование нам кое-что подскажет. У нас создается впечатление, что, возможно, предполагаемое правило все же соответствует действительности. Рассмотренный случай может подсказать, в каком направлении следует искать доказательство. Или же, как в нашем примере в пункте 1, исследование частного случая подскажет, в каком направлении следует искать контрпример, т. е. какие другие частные случаи необходимо исследовать. Можно видоизменять исследуемый случай, варьировать его, исследовать какой-нибудь более общий частный случай, находить предельные случаи, как это нами было сделано в примере в пункте 1.

Предельные случаи особенно поучительны. Если выведен закон, относящийся ко всем млекопитающим, то он должен быть верен и по отношению даже к такому млекопитающему, как кит. Не будем забывать этот предельный случай с китом. Рассматривая его, нам даже возможно удастся опровергнуть обобщающий характер этого закона. Это очень вероятно, поскольку авторы обобщений обычно склонны упускать из виду такие предельные случаи. Если мы, однако, обнаружим, что обобщающее правило подтверждается даже и этими крайними случаями, индуктивное доказательство, полученное из этого подтверждения, будет очень убедительным, поскольку надежды на опровержение как раз возлагались на предельные случаи. Таким образом, появляется желание переделать поговорку, с которой мы начали наши рассуждения, так: «Ожидаемые исключения проверяют правило».

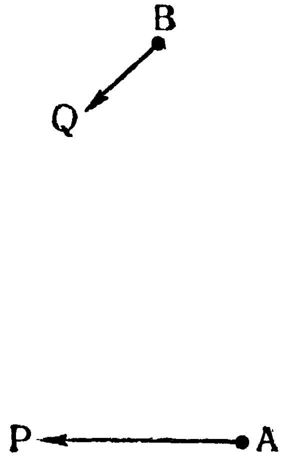
3. *Пример.* Даны скорости двух кораблей и их местонахождение в определенный момент, причем каждый корабль движется по прямолинейному курсу с постоянной скоростью. Найти расстояние между ними в момент, когда оно будет наименьшим.

Что неизвестно? Кратчайшее расстояние между двумя движущимися телами. Тела должны рассматриваться как материальные точки.

Что дано? Исходное положение этих двух материальных точек и скорость каждой. Направление и величина каждой скорости постоянны.

В чем состоит условие? Надо определить расстояние, когда оно будет наименьшим, т. е. в тот момент, когда эти две движущиеся точки (корабли) ближе всего друг к другу.

Сделайте чертеж. Введите подходящее обозначение. На фигуре 26 точки A и B обозначают исходное местонахождение двух кораблей. Оно нам известно. Направленные отрезки (векторы) AP и BQ выражают данные скорости. Таким образом, первый корабль движется по прямой через точки A и P и проходит расстояние AP в единицу времени. Аналогично этому второй корабль движется по прямой BQ.



Фиг. 26.

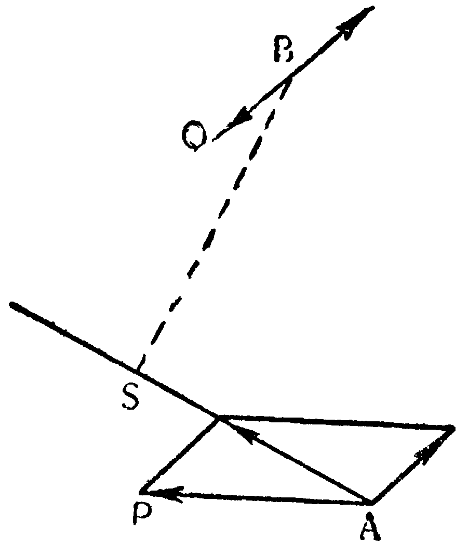
Что неизвестно? Неизвестно кратчайшее расстояние между двумя кораблями, движущимися один по прямой AP и другой — по прямой BQ.

Теперь ясно, что требуется определить. Однако, если мы захотим ограничиться лишь элементарными средствами, нам все же будет не ясно, как определить это расстояние. Задача не из легких, и ее трудность заключается в своеобразном нюансе, который мы попытаемся выразить так: «имеется слишком большое разнообразие элементов». Исходные положения точек A и B и векторы скоростей AP и BQ могут быть даны по-разному. В самом деле, эти четыре точки A, B, P, Q могут быть выбраны произвольно. Но независимо от данных может быть только одно общее решение, а нам пока не ясно, как одно и то же решение может удовлетворить всем этим возможным случаям. Из этого ощущения «слишком большого разнообразия» в конце концов может возникнуть вопрос и последовать на него ответ: *нельзя ли придумать более доступную сходную задачу? Более частную?* Конечно, есть такой предельный частный случай, при котором одна скорость имеет значение, равное 0. Ведь корабль в точке B может быть на якоре, и тогда точка Q совпадет с точкой B. Кратчайшее расстояние от корабля, находящегося в покое, до движущегося корабля будет перпендикуляром к прямой линии, по которой этот корабль движется.

4. Этот предельный случай может показаться слишком упрощенным и потому якобы не имеющим отношения к нашей задаче. Но если эта идея возникает одновременно

с предчувствием, что за ней скрываются еще другие возможности, и чутье подсказывает, что рассматриваемый предельный частный случай может все-таки сыграть известную роль в решении задачи, то в самом деле можно сказать, что наша идея счастливая.

Вот задача, родственная данной: это частная задача, только что решенная вами. *Нельзя ли воспользоваться ею? Нельзя ли применить ее результат? Нельзя ли ввести какой-нибудь вспомогательный элемент, чтобы можно было воспользоваться этой задачей?* Следует ею воспользоваться, но каким образом? Как можно использовать полученное решение, при котором точка B находится в состоянии покоя, для случая, при котором точка B движется? Покой есть *частный случай* движения. Но ведь движение относительно и поэтому, независимо от величины скорости точки B, которая дана, можно считать, что точка B находится в состоянии покоя. Эту идею можно выразить более ясно: если сообщить системе, состоящей из двух кораблей, одинаковое равномерное движение, при котором положение кораблей относительно друг друга останется без изменения, то и относительные расстояния остаются без изменения, так же как и кратчайшее относительное расстояние между двумя кораблями изменяться не будет, т. е. не изменится то расстояние, которое требуется найти согласно условию задачи. Итак, можно сообщить такое движение, которое сведет скорость одного из кораблей к нулю, и, таким образом, общий случай решения задачи сводится к только что рассмотренному частному случаю. Допустим тогда, что мы сообщили скорость, противоположную BQ по направлению, но равную ей по величине. Это будет тот вспомогательный элемент, который даст возможность воспользоваться частным решением частного случая.



Фиг. 27.

На фигуре 27 показано, как построить кратчайшее расстояние между кораблями.

5. Схема логических рассуждений приведенного выше решения (пп. 3, 4) такова, что стоит ее проанализировать и запомнить.

Чтобы решить исходную задачу (п. 3, первые строки), мы сначала решили другую задачу, которую можно с полным основанием назвать вспомогательной задачей (п. 3, последние строки). Эта вспомогательная задача является частным случаем первоначальной задачи (предельный частный случай, при котором один из двух кораблей находится в состоянии покоя). Первоначальная задача была предложена, вспомогательная задача придумана в ходе решения. Первоначальная задача казалась трудной, вспомогательная задача решалась легко. Вспомогательная задача, как частный случай, была по существу намного *скромнее* первоначальной задачи.

Если так, то каким образом на основании этой вспомогательной задачи нам удалось решить первоначальную задачу? Дело в том, что при сведении исходной задачи к вспомогательной мы сделали существенное дополнительное замечание (об относительности движения).

Таким образом, нам удалось решить исходную задачу благодаря следующим двум обстоятельствам: во-первых, мы нашли полезную вспомогательную задачу; во-вторых, мы сделали удачное дополнительное замечание, которое позволило нам перейти от вспомогательной задачи к основной. Мы решили предложенную задачу в два приема, подобно тому как можно перейти ручей двумя шагами при условии, что посредине этого ручья лежит камень, служащий временной опорой.

Суммируя вышеизложенное, можно сказать, что мы использовали менее трудную и более простую, частную вспомогательную задачу в качестве *опорного камня* для решения более трудной, сложной, общей, основной задачи.

6. Специализация находит себе много других применений, которые не могут быть рассмотрены здесь. Отметим лишь, что она может быть полезной при проверке решения («Нельзя ли проверить результат?», п. 2).

Специализация несколько примитивного вида нередко оказывает учителю хорошую услугу. Заключается она в том, чтобы придать абстрактным математическим элементам задачи более *конкретную форму*. Так, например, если в задаче говорится о прямоугольном параллелепипеде, учитель может привести в пример классную комнату, в которой проводится занятие (п. 8). При изучении аналитической геометрии в пространстве угол классной комнаты может служить началом координат, пол и две стены — координатными плоскостями, линии пересечения этих плоскостей будут тремя осями координат. Объясняя понятие о поверхности вращения, учитель мелом проводит кривую на двери и медленно открывает ее. Все эти приемы, конечно, очень просты, но не следует упускать ни одной возможности сделать математические понятия более близкими учащимся. Математика, будучи очень абстрактной наукой, должна преподноситься очень конкретно.

Термины, старые и новые, характеризующие деятельность человека при решении задач, часто лишены определенности. Сама эта деятельность знакома всем и часто обсуждается. Но ее, как и всякий другой умственный процесс, трудно описать. Ввиду отсутствия систематического исследования этой деятельности нет и специальной терминологии для ее описания, а те обычные полуспециальные термины, которые используются, часто лишь увеличивают путаницу, так как они разными авторами употребляются в различных значениях.

Небольшой список, приведенный ниже, включает в себя несколько новых терминов, использованных нами, и ряд старых, которых мы избегаем в данной работе. Также перечислены кое-какие старые термины, которые нами сохранены, несмотря на отсутствие четкости в них.

Обсуждение терминологии, приведенное ниже, может сбить читателя с толку, если его представления не будут закреплены примерами. Этой ошибки мы постараемся избежать.

1. *Анализ* — полезный термин, который точно определен Паппом. Он имеет в виду типичный прием составления плана решения задачи, заключающийся в том, что решение начинается с предположения, что неизвестное найдено (или заключение установлено), и идет в обратном порядке к данным задачи (или предпосылке). К сожалению, это слово приобрело совершенно различные значения (как, например, математический, химический, логический анализы) и поэтому в данном исследовании приходится избегать его.

2. *Условие* связывает неизвестное «задачи на нахождение» с данными (см. «Задачи на нахождение, задачи на доказательство», п. 3). В этом значении это четкий, полезный термин, без которого нельзя обойтись. Часто бывает необходимо расчленить условие

на несколько составных частей (на части (I) и (II) в примерах «Разложение и составление новых комбинаций», пп. 7, 8). А ведь каждую часть *всего условия* обычно также называют *условием*. Можно легко преодолеть эту нечеткость, которая часто затрудняет нашу работу, если ввести какой-нибудь технический термин для обозначения части всего условия. Такую часть можно было бы назвать, например, «пунктом» (clause).

3. *Предпосылка* (hypothesis) — так называется существенная часть математической теоремы обычного типа (см. «Задачи на нахождение, задачи на доказательство», п. 4). В таком значении этот термин совершенно ясен и удовлетворителен. Затруднение заключается в том, что каждая часть *всей предпосылки* тоже называется *предпосылкой*. Таким образом, одна предпосылка может состоять из ряда предпосылок. Чтобы избежать этой путаницы, можно было бы назвать каждую часть всей предпосылки «пунктом» (clause) или как-нибудь в этом роде. (Сравните с тем, что сказано выше относительно «условия».)

4. *Главные элементы* задачи определены в статье «Словаря» «Задачи на нахождение, задачи на доказательство» пп. 3, 4.

5. *Задачи на нахождение, задачи на доказательство* — два новых термина, которые пришлось ввести, чтобы заменить исторически сложившиеся термины, значения которых вследствие своего широкого распространения, к сожалению, в настоящее время настолько запутаны, что вернуться к старым значениям этих терминов невозможно. В переводах на латинский язык математических работ греков имеется общее название для обоих типов задач «propositio». «Задача на нахождение» называется «problema» (проблема), а «задача на доказательство» — «theorema» (теорема). На устарелом математическом языке слова proposition, problem и theorem еще сохраняют это «евклидово» значение. Но в современном математическом языке эти понятия имеют совсем другое значение, что и оправдывает введение новых терминов.

6. *Прогрессивное рассуждение* — термин, который употреблялся разными авторами в различных значениях. Некоторые из них употребляли это слово в его первоначальном значении «синтез» (см. п. 9). Использование этого термина в последнем значении оправдано, но в данной работе мы избегаем его.

7. *Регрессивное рассуждение* — термин, который употреблялся некоторыми авторами в старом значении «анализ» (ср. пп. 1, 6). Употребление термина в таком смысле можно оправдать, но нами он избегается.

8. *Решение* — совершенно ясный термин, если брать его в чисто математическом смысле. Оно обозначает любой объект, удовлетворяющий условию «задачи на нахождение». Так, решением уравнения $x^2-3x+2=0$ являются его корни, числа 1 и 2. К сожалению, это слово имеет другие значения, не чисто математические и они употребляются математиками наряду с его математическим значением. Решение может также иметь значение «процесс решения задачи» или «работа, проведенная при решении задачи». Мы пользуемся этим словом в таком значении, когда говорим о «трудном решении». Решение может также иметь в виду результат работы, проделанной при решении задачи. Говоря о «прекрасном решении», мы употребляем слово решение именно в этом смысле. Может так случиться, что в одном предложении приходится говорить о значении, удовлетворяющем условию задачи, о работе, проделанной при получении его, и о результате этой работы. Если поддаться соблазну и назвать все три понятия «решением», то вряд ли предложение будет понятным.

9. *Синтез* употреблялся Паппом в совершенно определенном значении, которое следовало бы сохранить. Однако, к сожалению, нам приходится избегать этого термина в нашей книге по тем же соображениям, по каким мы избегаем термина «анализ» (см. п. 1).

Типовой задачей можно назвать задачу на решение квадратного уравнения $x^2-3x+2=0$, если учащемуся было ранее объяснено и показано решение квадратного уравнения в общем виде. Вся работа учащегося сводится к тому, чтобы подставить числа —3 и 2 вместо соответствующих букв в общую формулу корней квадратного уравнения. Такую задачу следует назвать типовой, даже если ранее решение квадратного уравнения не было дано в общем виде (с буквенными коэффициентами), но до этого был решен десяток подобных квадратных уравнений с числовыми коэффициентами. Вообще задача будет «типовой», если ее можно решить или путем подстановки частных данных в ранее решенную задачу общего вида, или по образцу часто встречающегося примера, повторяя шаг за шагом решение, лишенное всякой оригинальности. Предлагая ученику типовую задачу, учитель дает непосредственный и убедительный ответ на вопрос: *известна ли вам какая-нибудь родственная задача?* От учащегося, таким образом, требуется лишь некоторое внимание и терпение для выполнения готового решения. В этом случае он лишен возможности решать задачу по своему усмотрению и проявить какую-либо свою инициативу.

В процессе обучения математике решение типовых задач, даже в большом количестве возможно и нужно, но ограничить опыт учащихся решением только таких задач непростительно. Если обучать лишь механическому выполнению шаблонных математических операций, то это значит опуститься ниже уровня поваренной книги, ибо кулинарные рецепты все же оставляют повару возможность проявить свой вкус и воображение, чего не допускают математические рецепты.

Традиционный тип профессора математики из популярных анекдотов — всегда рассеян. Он считает, что потерял зонтик, а у него по зонтику в каждой руке. Он предпочитает стоять лицом к доске, а спиной к классу. Он пишет a, говорит b, имеет в виду c, а должно быть d. Некоторые его изречения передаются из поколения в поколение:

«Чтобы решить это дифференциальное уравнение, смотри на него, пока решение не придет в голову».

«Этот принцип настолько всеобъемлющ, что никакое частное его применение невозможно».

«Геометрия есть искусство правильно рассуждать на неправильных чертежах».

«Мой метод преодоления трудности состоит в том, чтобы обойти ее».

«В чем разница между методом и искусственным приемом? Метод есть искусственный прием, которым вы пользуетесь дважды».

У этого традиционного профессора математики в конце концов можно кое-чему поучиться. Будем надеяться, что тот учитель, у которого ничему не научишься, не станет традиционным.

Условие — один из главных элементов «задачи на нахождение». Смотрите «З а д а ч и н а н а х о ж д е н и е, з а д а ч и н а д о к а з а т е л ь с т в о», пункт 3. Смотрите также «Термины, старые и новые», пункт 2.

Условие называется *чрезмерным*, если оно содержит лишние части, которые являются следствием остальных. Условие называется *противоречивым*, если его части несовместны, так что не существует никакого объекта, удовлетворяющего этим взаимно исключающим друг друга частям условия.

Так, например, если условие выражается линейными уравнениями, число которых превосходит число неизвестных, то оно либо чрезмерно, либо противоречиво. Если число уравнений меньше числа неизвестных, то условие недостаточно для определения неизвестных. Если число уравнений равно числу неизвестных, то условие обычно оказывается достаточным для определения неизвестных; однако в исключительных случаях оно может оказаться противоречивым или недостаточным.

Что неизвестно? Что требуется? Что вы хотите найти? Что вы должны искать?

Что дано? Что известно?

В чем состоит условие? Какое условие связывает неизвестное с данными?

Эти вопросы могут быть поставлены учителем, чтобы проверить понимание задачи: учащийся должен уметь четко ответить на них. Более того, они привлекают внимание учащегося к главным элементам «задачи на нахождение» — к неизвестному, данным, условию. Поскольку может возникнуть необходимость вновь и вновь возвращаться к рассмотрению этих элементов, эти вопросы могут не раз повторяться на более поздних этапах решения (примеры в пп. 8, 10, 18, 20; «Составление уравнений», пп. 3, 4; «Практические задачи», п. 1; «Головоломки» и в других местах).

Эти вопросы имеют огромное значение для того, кто решает задачу. Они проверяют понимание задачи учащимися, сосредоточивают их внимание на той или другой главной части задачи. Решение существеннейшим образом зависит от установления связи между неизвестным и данными. Поэтому ученик, решающий задачу, должен вновь и вновь обращать внимание на эти элементы, спрашивая себя: *Что неизвестно? Что дано?*

Каждое неизвестное задачи или различные части условия должны быть рассмотрены каждое в отдельности. Поэтому мы пользуемся такими видоизмененными вариантами наших вопросов, как: Какие есть в задаче неизвестные? Что является первым известным в задаче? Что является вторым известным? Из каких различных частей состоит условие? Что является первым пунктом (clause) условия?

Предпосылка и заключение являются главными элементами «задачи на доказательство». Отсюда вытекают соответствующие вопросы: *В чем состоит предпосылка? Каково заключение?*

Весьма возможно, что порой нам придется несколько изменить формулировку или несколько видоизменить эти часто полезные вопросы и поставить их следующим образом: что допускается? Из каких разных частей состоит допущение? (пример в п. **19.**)

Эвристика или «ars inveniendi»—так называлась не совсем четко очерченная область исследования, относимая то к логике, то к философии, то к психологии. Она часто охарактеризовывалась в общих чертах, редко излагалась детально и по существу предана забвению в настоящее время. Цель эвристики — исследовать методы и правила, как делать открытия и изобретения. Отдельные высказывания о таком исследовании можно обнаружить у комментаторов Евклида; в этом отношении особенно интересно одно место у Паппа. Наиболее известные попытки создать стройную систему эвристики принадлежат Декарту и Лейбницу, двум великим математикам и философам. Бернард Больцано оставил интересное и подробное изложение эвристики. Данная книга представляет собой попытку воскресить эвристику в современной и скромной форме. (См. «Современная эвристика».) Прилагательное эвристический, значит «служащий для открытия».

Эвристическое рассуждение не рассматривается как окончательное и строгое, но лишь как предварительное и правдоподобное рассуждение, цель которого найти решение для данной проблемы. Нам часто приходится прибегать к эвристическим рассуждениям. Мы достигнем полной уверенности в правильности своего решения, когда получим окончательное решение, но до этого мы часто должны довольствоваться более или менее правдоподобной догадкой. Возможно, нам пригодится предварительное рассуждение, прежде чем мы получим окончательное. При построении строгого доказательства нам необходимы эвристические рассуждения, так же как нужны леса при возведении здания.

Эвристическое рассуждение часто основывается на индукции или на аналогии (см. «Индукция и математическая индукция» и «Аналогия», пп. 8, 9, 10 [1]).

Эвристические рассуждения сами по себе ценны. Вредно смешивать эвристическое рассуждение со строгим доказательством. И еще вреднее выдавать эвристическое рассуждение за строгое доказательство.

Обучение некоторым предметам, в особенности обучение инженеров и физиков дифференциальному и интегральному исчислению, можно было бы значительно улучшить, если бы природа эвристических рассуждений была лучше понята, их преимущества и ограничения открыто признаны и учебники открыто излагали бы эвристические доводы. Эвристический довод, сформулированный умело и прямо, может быть полезен, он может подготовить точное доказательство, отдельные элементы которого он содержит в себе. Но эвристический довод, вероятно, принесет вред, если он преподносится нечетко, с явными колебаниями между некоторой робостью и излишней самоуверенностью. (См. «Зачем нужны доказательства?»)

---

[1] Смотрите также статью автора в журнале «American Mathematical Monthly», т. 48, стр. 450—465. (Примечание автора.)

Как решать задачу

ПОНИМАНИЕ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ

I
Нужно ясно понять задачу.

Что неизвестно? Что дано? В чем состоит условие?

Возможно ли удовлетворить условию? Достаточно ли условие для определения неизвестного? Или недостаточно? Или чрезмерно? Или противоречиво?

Сделайте чертеж. Введите подходящие обозначения.

Разделите условие на части. Постарайтесь записать их.

СОСТАВЛЕНИЕ ПЛАНА РЕШЕНИЯ

II
Нужно найти связь между данными и неизвестным. Если не удается сразу обнаружить эту связь, возможно, полезно будет рассмотреть вспомогательные задачи. В конечном счете необходимо прийти к плану решения.

Не встречалась ли вам раньше эта задача? Хотя бы в несколько другой форме?

Известна ли вам какая-нибудь родственная задача? Не знаете ли теоремы, которая могла бы оказаться полезной?

Рассмотрите неизвестное! И постарайтесь вспомнить знакомую задачу с тем же или подобным неизвестным.

Вот задача, родственная с данной и уже решенная. Нельзя ли воспользоваться ею? Нельзя ли применить ее результат? Нельзя ли использовать метод ее решения? Не следует ли ввести какой-нибудь вспомогательный элемент, чтобы стало возможно воспользоваться прежней задачей?

Нельзя ли иначе сформулировать задачу? Еще иначе? Вернитесь к определениям.

Если не удается решить данную задачу, попытайтесь сначала решить сходную. Нельзя ли придумать более доступную сходную задачу? Более общую? Более частную? Аналогичную задачу? Нельзя ли решить часть задачи? Сохраните только часть условия, отбросив остальную часть: насколько определенным окажется тогда неизвестное; как оно сможет меняться? Нельзя ли извлечь что-либо полезное из данных? Нельзя ли придумать другие данные, из которых можно было бы определить неизвестное? Нельзя ли изменить неизвестное, или данные, или, если необходимо, и то и другое так, чтобы новое неизвестное и новые данные оказались ближе друг к другу?

Все ли данные вами использованы? Все ли условие? Приняты ли вами во внимание все существенные понятия, содержащиеся в задаче?

ОСУЩЕСТВЛЕНИЕ ПЛАНА

III
Нужно осуществить план решения.

Осуществляя план решения, *контролируйте каждый свой шаг*. Ясно ли вам, что предпринятый вами шаг правилен? Сумеете ли доказать, что он правилен?

ВЗГЛЯД НАЗАД
(изучение полученного решения)

IV
Нужно изучить найденное решение.

Нельзя ли *проверить результат?* Нельзя ли проверить ход решения?

Нельзя ли получить тот же результат иначе? Нельзя ли усмотреть его с одного взгляда?

Нельзя ли в какой-нибудь другой задаче использовать полученный результат или метод решения?

КАК ИСКАТЬ РЕШЕНИЕ?[1]

(Сокращенный вариант таблицы)

1. *Понять предложенную задачу.*
2. *Найти путь от неизвестного к данным, если нужно, рассмотрев промежуточные задачи („анализ“).*
3. *Реализовать найденную идею решения („синтез“).*
4. *Решение проверить и оценить критически.*

2.

Сформулировать отношение (или отношения) между неизвестным и данными.

Преобразовать неизвестные элементы. Попытаться ввести новые неизвестные, более близкие к данным задачи.

Преобразовать данные элементы. Попытаться получить, таким образом, новые элементы, более близкие к искомым неизвестным.

Решить только часть задачи.

Удовлетворить только части условий: насколько неопределенным окажется тогда неизвестное? (Геометрические места!)

Обобщить. Рассмотреть частные случаи. Применить аналогию.

1.

Что гласит задача? Что дано? Что нужно найти?

Определено ли неизвестное данными задачи? Или они недостаточны, или же чрезмерны?

Нельзя ли сформулировать задачу иначе?

Нельзя ли найти связь между данной задачей и какой-нибудь задачей с известным решением? Или с задачей, решающейся проще? Решающейся сразу?

Эти вопросы нужно повторять каждый раз, когда в ходе решения наступает заминка, при решении каждой промежуточной задачи. Кроме того: Все ли данные задачи были уже использованы?

„Заменить термины их определениями“ (Паскаль).

3.

Испытывать правильность каждого шага, принимая лишь то, „что усматривается с полной ясностью или выводится с полной достоверностью“ (Декарт)

4.

Правдоподобен ли результат? Почему?

Нельзя ли сделать проверку?

Нет ли другого пути, ведущего к полученному результату? Более прямого пути? Какие результаты еще можно получить на том же пути?

---

[1] См. примечание на стр. 29.

СОДЕРЖАНИЕ

[1] Статья содержит исключительно ссылки на другие статьи «Словаря».

Д. Пойа

КАК РЕШАТЬ ЗАДАЧУ

Редактор *Л. А. Сидорова*
Обложка художника *В. К. Иванова*
Художественный редактор *Б. М. Кисин*
Технический редактор *Н. В. Горбунова*
Корректор *Т. И. Крысанова*

Сдано в набор 7/I 1959 г. Подписано к печати 9/IV 1959 г. $84 \times 108^1/_{32}$. Печ. л. 13 (10,66) Уч.-изд. л. 10,69 Тираж 45000 экз. А01549
Заказ № 2650.
Цена без переплёта 2 р. 90 к. переплёт 80 к.

Учпедгиз. Москва, 3-проезд Марьиной рощи, 41.

Первая Образцовая типография
имени А. А. Жданова Московского
городского Совнархоза
Москва, Ж-54, Валовая, 28.