ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИКИ

Н. БУРБАКИ

# ОЧЕРКИ ПО ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

ПЕРЕВОД С ФРАНЦУЗСКОГО
И. Г. БАШМАКОВОЙ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
К. А. РЫБНИКОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1963

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИКИ

Н. БУРБАКИ

# ОЧЕРКИ ПО ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

ПЕРЕВОД С ФРАНЦУЗСКОГО
И. Г. БАШМАКОВОЙ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
К. А. РЫБНИКОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1963

## АННОТАЦИЯ

Предлагаемая читателям книга является частью многотомного сочинения «Элементы математики», выпускаемого группой крупных французских математиков, объединившихся под общим псевдонимом Николà Бурбаки. В нем излагаются историко-математические сведения, необходимые, по мнению авторов, для понимания развития и содержания ряда основных идей и понятий современной математики. Трактовка предмета весьма своеобразна — в книге очень мало ссылок на классиков и почти не называются авторы наиболее значительных современных достижений. Тем не менее очерки весьма богаты конкретным материалом, позволяющим судить о развитии математических идей в XIX и XX вв.

Книга интересна всем математикам и ученым других специальностей, желающим ознакомиться с [illegible] написанными круп[illegible] иста[illegible] ами.

ическим наукам

# ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Автором этой книги является группа математиков, в большинстве французских, выступающая под общим псевдонимом Н. Бурбаки. Эта группа сложилась в середине тридцатых годов, и вскоре определилась общая цель ее участников: создать такой трактат, который явился бы обзором всей математики, построенным на современном уровне научной строгости и опирающимся на возможно более общие принципы. Первая книга этого грандиозного сочинения, получившего название «Элементы математики», появилась в 1939 г.

К настоящему времени «Элементы математики» насчитывают уже 26 томов. Все они посвящены одной проблеме — изложению фундаментальных структур анализа [о понятии структуры см. статью Н. Бурбаки «Архитектура математики», помещенную в конце данной книги (стр. 245)]. Сгруппированы они в шесть книг: 1. Теория множеств, 2. Алгебра, 3. Общая топология, 4. Функции действительного переменного, 5. Топологические векторные пространства, 6. Интегрирование. Выходят они по мере написания, вне логической последовательности. О структуре всего трактата Н. Бурбаки еще ничего определенного не опубликовали. «Элементы математики» постепенно переводятся на русский язык (уже изданы: Книга 3. Общая топология. Основные структуры, Физматгиз, 1958. Книга 3. Общая топология. Числа и связанные с ними группы и пространства, Физматгиз, 1959. Книга 5. Топологические векторные пространства, ИЛ, 1959. Книга 6. Алгебра, Физматгиз, 1962. Книга 7. Теория множеств, готовится к печати в Издательстве иностранной литературы).

Всякая попытка анализа логической структуры современной математики невозможна без изучения ее исторического развития. Такова одна из общих закономерностей математики, как и всякой другой науки. Осознание указанной взаимосвязи в «Элементах математики» проявилось в большом числе исторических очерков, разбросанных по разным томам. Настоящая книга возникла как собрание этих очерков, несколько переработанных, чтобы обеспечить их взаимную связь. При этом «Очерки по истории математики» приобрели некоторую цельность и как бы новое качество, сделавшись ценным сочинением по истории математики.

Следовало бы сразу отметить, что «Очерки по истории математики» не являются ни полным, ни систематическим трактатом. Но об этом, равно как и о своих целях, говорит Н. Бурбаки в предисловии. Поэтому мы не будем останавливаться на подобных вопросах. Сделаем лишь некоторые замечания об особенностях этой книги.

«Очерки» — плод коллективного труда. Развитие всех частей математики к настоящему времени привело нашу науку к такому положению, что серьезное продвижение как в практической, так и в теоретической области требует усилий коллектива. Такое же положение сложилось и в истории математики. В особенности настоятельно необходим коллективизм в исследовании трудных проблем истории математики в XIX и в XX вв. — проблем, являющихся и самыми актуальными. «Очерки», несмотря на ряд недостатков, представляют весьма поучительный пример сотрудничества ученых-математиков, совместно исследующих историю своей науки. Можно надеяться, что этот пример не останется в дальнейшем без подражания.

Усилия Н. Бурбаки в создании единой системы, в которой все или почти все области математики рассматривались бы с единых общих позиций, не являются новыми в истории науки. Подобные устремления и соответствующие результаты возникают всякий раз, когда под влиянием практических запросов и успехов математика переживает период бурных изменений, качественно ее преобразующих. История науки хранит много подобных примеров; достаточно указать на «Начала» Евклида, систему Л. Эйлера, изложенную в серии его замечательных монографий, систему анализа О. Коши и т. д. Теперь к ним добавляются «Элементы математики» Н. Бурбаки как еще один пример, демонстрирующий эту закономерность развития математики.

Автор не углубляется в вопросы философского характера, хотя и не пытается полностью их избежать; более того, он понимает, что здесь «основная проблема состоит во взаимоотношении мира экспериментального и мира математического» (стр. 258). В то же время критически воспринимающий отдельные выводы автора читатель легко обнаружит, что там, где Н. Бурбаки касается этих вопросов, его рассуждения становятся недостаточно четкими, в известной мере случайными и не всегда отражают объективные закономерности развития математической науки.

Своеобразный язык сочинения Н. Бурбаки изобилует новыми терминами. И. Г. Башмакова, переводившая эту книгу, и автор этих строк приложили немалые усилия, чтобы сохранить это своеобразие и в то же время избежать перегрузки текста неразъясненными иностранными терминами, переписанными русскими буквами. Неполнота очерков вынуждала вводить примечания в тех случаях, когда эта неполнота и односторонность грозили навязать читателю искаженные представления о развитии математики. Список литературы в конце книги несколько пополнен; основную работу здесь выполнила Л. А. Сорокина.

В заключение необходимо указать, что эта книга — не для легкого чтения. Чтобы хорошо усвоить ее содержание, надо обладать некоторой математической культурой и знать основные факты истории математики. Но чтение «Очерков» поможет советским математикам (а математика в наши дни — массовая профессия) и математически образованной интеллигенции существенно расширить свой научный кругозор и избежать столь опасной для ученых односторонности и ремесленного подхода к науке.

*К. А. Рыбников*

# ПРЕДИСЛОВИЕ

В эту работу включена, без каких-либо существенных изменений, большая часть исторических заметок, опубликованных в моих «Элементах математики». «Заметки» переделаны так, что их можно читать независимо от «Элементов», поэтому в принципе они доступны каждому, хорошо знакомому с основами классической математики.

Само собой разумеется, что отдельные статьи, составляющие этот сборник, никак не могут претендовать на то, чтобы обрисовать, хотя бы в самых общих чертах, последовательное и полное развитие математики вплоть до наших дней. Такие разделы классической математики, как дифференциальная геометрия, алгебраическая геометрия, вариационное исчисление, едва затрагиваются; другие разделы, например теория чисел, теория аналитических функций, теория дифференциальных уравнений, обыкновенных и с частными производными, почти не упоминаются. Разумеется, пробелы становятся более значительными и их количество увеличивается, когда мы подходим к нашей эпохе. Эти разделы не были умышленно опущены автором. Причина кроется в том, что соответствующие главы «Элементов» еще не были опубликованы.

Наконец, читатель не найдет здесь никаких сведений биографического или анекдотического характера о математиках, теории которых здесь излагаются; при изложении каждой теории автор старался прежде всего возможно точнее выявить ее направляющие идеи и то, как эти идеи развивались и влияли друг на друга.

Цифры, заключенные в квадратные скобки, отсылают читателя к литературе в конце книги.

# ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ. ЛОГИКА. ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

Изучение того, что обычно именуется «основаниями математики», интенсивно проводимое с начала XIX в., не могло бы успешно развиваться без одновременных параллельных усилий, направленных на систематизацию логики или, во всяком случае, тех ее частей, которые касаются сцепления математических предложений. Нельзя также отделить историю теории множеств и формализации математики от истории «математической логики». Однако традиционная логика, как и логика современных философов, имеет в принципе гораздо более широкое поле применения, чем математика. В связи с этим читатель будет напрасно искать в этой книге изложения истории логики, хотя бы и в самых общих чертах. Мы ограничиваемся, насколько это возможно, рассмотрением истории логики лишь постольку, поскольку она влияла на эволюцию математики. По этой же причине здесь ничего не будет сказано о неклассических (многозначных и модальных) логиках. С еще большим основанием мы обходим молчанием историю спора, разделявшего философов и софистов до венской школы на два лагеря в зависимости от их взглядов на возможность и способы применения логики к объектам чувственного мира и к понятиям человеческого разума.

Теперь уже нельзя сомневаться в существовании сильно развитой доэллинской математики. Не только понятия целого числа и меры величин (сами по себе уже очень абстрактные) употребляются в самых древних из дошедших до нас текстов Египта и Халдеи, но и вся вавилонская алгебра с ее изящными и уверенными приемами не может рассматриваться в виде простой совокупности задач, решенных эмпирически, на ощупь. И если в текстах мы еще не находим ничего похожего на «доказательство» в формальном смысле слова, все же имеются все основания полагать, что открытие таких приемов решения, общность которых видна из частных применений к числовым примерам, не могло иметь места без хотя бы минимального количества логических рассуждений [возможно, еще не вполне осознанных, но схожих с теми, на которые опирается современный алгебраист, когда предпринимает вычисление до «окончательного оформления» всех деталей ([166], стр. 203 и след.)].

Оригинальность греков заключается именно в их сознательных попытках расположить цепь математических доказательств в такую последовательность, чтобы переход от одного звена к следующему не оставлял бы места сомнению и завоевал всеобщее признание. То, что греческие математики пользовались в своих исследованиях скорее «эвристическими», нежели доказательными рассуждениями, как это делают и современные математики, может быть подтверждено (в случае необходимости) «Трактатом о методе» Архимеда [114c]; заметим, что у Архимеда можно найти упоминания о результатах «найденных, но не доказанных» предшествующими математиками [1]).

Однако в самых ранних из дошедших до нас и подробно изученных текстов (они относятся к середине V в.) идеальный «канон» математического стиля изложения уже прочно установлен. Впоследствии он получает окончательное завершение у великих классиков: Евклида, Архимеда, Апполония. Понятие доказательства у этих авторов уже ничем не отличается от нашего.

Мы не располагаем ни одним текстом, дающим возможность проследить за первыми шагами этого «дедуктивного метода»; когда его существование было впервые обнаружено, он уже предстал пред нами близким к совершенству. Можно лишь предполагать, что он естественным образом присутствовал в настойчивых попытках «объяснить» мир, которые характеризуют греческую мысль и которые уже видны у философов-ионийцев VII в. Традиция к тому же единодушно приписывает развитие и выявление сути этого метода пифагорейской школе в период времени приблизительно с конца VI в. и до середины V в.

Именно эта «дедуктивная» математика, ясно осознающая свои цели и методы, легла в основу развития философской и математической мысли последующих столетий. Мы увидим, как, с одной стороны, по образцу математики будет постепенно развиваться «формальная» логика, которая приведет к созданию формализованных языков, а, с другой стороны, главным образом с начала XIX в., будет все более и более усиливаться интерес к основным понятиям математики и стремление уяснить их природу, особенно после появления теории множеств.

---

[1]) Именно Демокритом, которому Архимед приписывает открытие формулы объема пирамиды ([114 c], стр. 13). Сравните эти упоминания с известным фрагментом, приписываемым Демокриту (но сомнительной подлинности), где он заявляет: «Никто никогда не превзошел меня в построении фигур посредством доказательств, даже так называемые египетские гарпедонапты ([168], т. I, стр. 439, и т. II, 1, стр. 727—728). Замечание Архимеда и тот факт, что в дошедших до нас египетских текстах никогда не было найдено доказательств (в классическом смысле слова), наводит на мысль, что «доказательства», на которые намекает Демокрит, уже не считались таковыми в классическую эпоху и не были бы ими и в наше время.

## Формализация логики

Общее впечатление от греческой философии V в., основанное на дошедших до нас текстах (зачастую отрывочных), состоит в том, что в ней господствовало и развивалось все более и более осознанное стремление распространить приемы сочленения рассуждений, успешно применяемые риториками и математиками того времени, на все области человеческой мысли — другими словами, чтобы создать логику в самом общем смысле слова. Тон философских сочинений этой эпохи резко меняется. В VII и VI вв. философы ещё только утверждают или прорицают (и лишь в некоторых случаях приводят туманные доводы, основанные на не менее туманных аналогиях). Начиная с Парменида и особенно Зенона, они уже аргументируют, пытаясь выделить общие положения, чтобы положить их в основу своей диалектики; именно у Парменида мы впервые находим формулировку принципа исключенного третьего, а доказательства Зенона Элейского путем приведения к абсурду знамениты и сейчас. Но Зенон писал в середине V в.; и как бы ни была несовершенна наша документация[1]), мы с полным основанием можем предполагать, что в это время математики в своих работах свободно пользовались этими принципами.

Как уже было сказано выше, в наше намерение не входит описывать те бесконечные трудности, которые на каждом шагу обнаруживаются в период формирования логики, а также возникающие по этому поводу споры — от Элеатов и до Платона и Аристотеля, включая и софистов; отметим лишь ту роль, которую сыграла в этом развитии высокая культура ораторского искусства с его прямым следствием — анализом языка, который единодушно принято приписывать главным образом софистам V в. С другой стороны, если влияние математики и не всегда выступает явно, оно тем не менее сказывается, и в частности в сочинениях Платона и Аристотеля. Можно сказать, что Платон был просто одержим математикой; не внося ничего нового в эту область, он с определенного периода своей жизни начинает изучать современных ему математиков (из которых многие были его друзьями или учениками) и уже не перестает непосредственно интересоваться математикой вплоть до того, что предлагает новые направления исследований; в его трудах математика также постоянно используется в качестве иллюстрации или модели

---

[1]) Лучшим классическим примером рассуждения приведением к абсурду в математике является доказательство иррациональности $\sqrt{2}$, на которое несколько раз в косвенной форме ссылается Аристотель; однако современным ученым не удалось точно установить даты этого открытия, одни относят его к началу V в., а другие — к самому концу (см. стр. 147 и ссылки, приведенные там по этому поводу).

(и даже иногда дает пищу его склонности, как и склонности пифагорейцев, к мистицизму). Что касается его ученика Аристотеля, он не мог не усвоить того минимума математических знаний, который требовался от учеников Академии. Впоследствии из его сочинений были извлечены выдержки, составившие целую книгу, где или непосредственно говорится о математике, или имеются упоминания о ней [114 d]. Но он, по-видимому, не слишком обременял себя изучением математических достижений своего времени, так как цитирует только те положения математики, которые уже давно стали общеизвестными. Подобное отставание характерно и для большинства последующих философов, многие из которых за неимением специальной подготовки были искренне убеждены, что говорят о математике со знанием дела, тогда как в действительности ссылались на данные, давно устаревшие.

Этот период в отношении логики заканчивается монументальным трудом Аристотеля [4], великая заслуга которого состоит в том, что ему впервые удалось систематизировать и кодифицировать приемы рассуждения, которые у его предшественников [1]) оставались неясными и несформулированными. Нам здесь следует особенно выделить главный тезис этого труда, а именно, что каждое корректное рассуждение можно свести к систематическому применению небольшого числа неизменных правил, независимых от частной природы объектов, о которых идет речь (независимость ясно обнаруживается обозначением понятий или высказываний с помощью букв, что, возможно, было заимствовано Аристотелем у математиков). Но Аристотель сосредоточивает свое внимание почти исключительно на особом виде отношений и логических рассуждений, составляющих то, что он называет силлогизмом: по сути это отношения, выражаемые в наше время на языке теории множеств [2]) в виде $A \subset B$ или $A \cap B \neq \varnothing$ и

---

[1]) Правила, сформулированные Аристотелем, кажутся нам простыми и «очевидными»; для того чтобы понять те трудности, которые возникали в связи с точным пониманием этих правил, и те усилия, которые должен был проявить Аристотель, чтобы их изложить, необходимо рассматривать их в соответствующих исторических рамках. Платон в своих диалогах, в которых он обращается к просвещенным слушателям, выводит действующих лиц, которые путаются в таких элементарных вопросах, как соотношение между отрицанием $A \subset B$ и отношением $A \cap B = \varnothing$ (в современной терминологии), выясняя в дальнейшем правильный ответ [192].

[2]) Соответствующие формулы Аристотеля «Всякое $A$ есть $B$» и «Некоторое $A$ есть $B$»; в этих обозначениях $A$ («субъект») и $B$ («предикат») заменяют понятия, и высказывание «Всякое $A$ есть $B$» означает, что можно приписать понятие $B$ каждому существу, которому можно приписать понятие $A$ ($A$ — понятие «человек», а $B$ — понятие «смертный» в классическом примере). Интерпретация, которую мы даем, состоит в том, чтобы рассматривать множества существ, к которым применимы соответственно понятия $A$ и $B$; эта точка зрения, называемая «объемной», уже известна Аристотелю. Но он рассматривает особенно отношение «Всякое $A$ есть $B$» прежде всего с другой точки зрения, названной «содержательной», где $B$ рассматривается как одно

способ сцепления этих отношений или их отрицаний по схеме

$$(A \subset B \text{ и } B \subset C) \Rightarrow (A \subset C).$$

Аристотель все же был достаточно знаком с математикой своей эпохи и не мог не заметить, что подобные схемы были недостаточными для описания всех логических операций математиков, ни тем более для других применений логики ([4] An. Pr. I, 35; [114d], стр. 25—26) [1]). Во всяком случае, углубленное изучение различных форм «силлогизма», которым он занялся (и которое почти целиком посвящено разъяснению трудностей, постоянно возникающих вследствие двусмысленности или неясности терминов, которые входят в рассуждение), дает ему также возможность сформулировать правила образования отрицания предложения ([4] An. Pr. I, 46). Аристотелю также принадлежит заслуга четкого разграничения роли «общих» высказываний от роли «частных», этого первого чернового наброска кванторов [2]). Но нам слишком хорошо известно, как влияние его сочинений (которые часто интерпретировались узко и невразумительно), весьма ощутимое еще и в XIX в., должно было поощрять философов к пренебрежительному отношению к математике и препятствовать развитию формальной логики [3]).

Тем не менее она продолжает развиваться в античном мире в мегарской и стоической школах, соперничавших с перипатетиками. К сожалению, мы располагаем сведениями о их доктринах из вторых рук, часто в изложении их противников или посредственных комментаторов. Главным достижением этих логиков было, по-видимому, основание „исчисления высказываний" в его современном значении: вместо того чтобы ограничиваться, подобно Аристотелю, высказываниями частного вида $A \subset B$, они формулировали правила, относящиеся к полностью *неопределенным* высказываниям, и помимо этого, так глубоко проанализировали логические отношения между этими правилами, что могли с помощью приемов, сильно напоминающих современные методы [19], выводить все эти правила из пяти из них, которые

---

из понятий, которые как-то составляют более сложное понятие $A$, или, как говорит Аристотель, «ему принадлежат». С первого взгляда обе точки зрения кажутся равно естественными, но точка зрения, называемая «содержательной», была постоянным источником осложнений в развитии логики; она, кажется, более далека от интуиции, нежели первая, и довольно легко приводит к ошибкам, а именно в схемах с отрицаниями (ср. [52a], стр. 21—32).

[1]) О критическом обсуждении силлогизма и его недостаточности см., например, ([52a], стр. 432—441) или ([123], стр. 44—50).

[2]) Отсутствие настоящих кванторов (в современном смысле слова) до конца XIX в. было одной из причин застоя формальной логики.

[3]) Рассказывают случай с известным ученым, который на недавней конференции в Принстоне сказал в присутствии Гёделя, что в логике не было сделано ничего нового со времен Аристотеля!

принимались в качестве «недоказуемых». К сожалению, влияние их было весьма эфемерным и результаты их трудов были преданы забвению вплоть до того времени, когда они были вновь найдены логиками XIX в. До XVII в. непревзойденным авторитетом в логике остается Аристотель; в частности, известно, что философы-схоласты находились всецело под его влиянием. Хотя и нельзя пренебрегать их вкладом в формальную логику [20 bis], все же надо констатировать, что он не привел к сколько-нибудь заметному прогрессу в логике по сравнению с античностью.

Труды Аристотеля и его преемников, по-видимому, не оказали заметного влияния на математику. Греческие математики в своих исследованиях шли по пути, проложенному пифагорейцами и их последователями в IV в. (Теодором, Теэтетом, Евдоксом), и мало интересовались формальной логикой при изложении своих результатов. Это не должно вызывать удивления; достаточно сравнить гибкость и точность изложения математических рассуждений, которое имело место начиная с этого периода, с весьма рудиментарным состоянием аристотелевой логики. А когда логика перешагнет через эту стадию, то ее поведут вперед по пути прогресса опять-таки новые достижения математики.

Действительно, с развитием алгебры нельзя было не заметить аналогии, существующей между правилами формальной логики и правилами алгебры: и те и другие обладают тем общим свойством, что они применимы к неопределенным объектам (высказываниям или числам). И когда в XVII в. алгебраические обозначения приняли свою окончательную форму в трудах Виета и Декарта, почти сейчас же начинают возникать различные попытки символических записей для выражения логических операций, как, например, записи Эригона (1644 г.) доказательств элементарной геометрии или Пелля (1659 г.) арифметических доказательств; до Лейбница все эти попытки, оставались весьма поверхностными и не вели к прогрессу анализа математических рассуждений.

Лейбниц, который был не только философом, но и величайшим математиком, умел извлекать из своего математического опыта ростки тех идей, которым суждено было вывести формальную логику из схоластического тупика [1]. Человек всеобъемлющего ума, если это вообще возможно, неиссякаемый источник

---

[1]) Хотя Декарт и (в меньшей степени) Паскаль посвятили часть своих философских трудов основаниям математики, их вклад в развитие формальной логики весьма незначителен. Причина этого, без сомнения, кроется в их основной тенденции, направленной на то, чтобы освободить философскую мысль от опеки схоластики. Они отбрасывали все то, что могло быть связано с ней, и в первую очередь формальную логику. В своих «Размышлениях о духе геометрии» Паскаль, как он сам признает, ограничивается тем, что выражает в хорошо отточенных формулах известные принципы доказательств

самобытных и плодотворных идей, Лейбниц особое внимание уделяет логике, так как она находилась в центре его больших проектов формализации языка и мышления, над которыми он не прекращал работать всю жизнь. Хорошо знакомый с самого детства со схоластической логикой, он был увлечен идеей (восходящей к Раймону Люллю) создания метода, который бы сводил все существующие понятия к примитивным понятиям, составляющим «азбуку человеческой мысли», и при помощи квазимеханических комбинаций давал бы все истинные высказывания ([144b], т. VII, стр. 185; ср. [52a], гл. II). Уже в ранней молодости у него зародилась и другая, более оригинальная идея о пользе символических обозначений, которые служили бы мышлению [1]) «нитью Ариадны». *«Истинный метод,* — говорит он, — *должен дать нам filum Ariadnes, т. е. некоторое осязаемое и грубое средство, которое направило бы разум, подобно начертанным линиям в геометрии и формам операций, предписываемым обучающимся арифметике. Без этого наш разум не смог бы проделать длинный путь, не сбившись с дороги»* ([144b], т. VII, стр. 22; ср. [52a], стр. 90). До 25-летнего возраста Лейбниц был недостаточно знаком с математикой своего времени и свои первые труды посвятил «универсальному языку» ([52a], гл. III); но как только он познакомился с алгеброй, он использовал ее в качестве модели для своей «Универсальной характеристики», под которой подразумевал некий символический язык, способный без двусмысленностей выражать все человеческие мысли, усилить нашу возможность дедукции, избегать ошибок благодаря чисто механическим усилиям внимания и, наконец, построенный так, что *«химеры, которые не понимает даже тот, кто их создает, не смогут быть записаны его знаками»* ([144a], т. I, стр. 187). Многочисленные места из сочинений Лейбница, в которых он упоминает об этом грандиозном проекте и о прогрессе, последующем за его реализацией (ср. [52a], гл. IV и VI), показывают, с какой ясностью он понимает формализованный язык как чистую комбинацию знаков, в которых имеет значение лишь их

---

Евклида [например, знаменитое правило: «Мысленно всегда подставлять определения на место определяемых» ([175], т. IX, стр. 280), было по существу известно еще Аристотелю ([4], 9, ор. VI. 4; [114d], стр. 87)]. Что касается Декарта, то его правила о рассуждении являются прежде всего психологическими наставлениями (и притом довольно неясными), а не логическими критериями; Лейбниц упрекает его в том ([52a], стр. 94 и 202—203), что они имеют субъективную значимость.

[1]) Предшественники Лейбница, конечно, также проявляли интерес к символике в математике, и Декарт, например, рекомендует заменять целые фигуры «очень короткими знаками» (XVI правило для руководства ума; [64a], т. X, стр. 45). Но до Лейбница никто с такой силой не настаивал на универсальном значении этого принципа.

сцепление [1]), так что машина сможет получать все теоремы [2]) и все недоразумения смогут быть разрешены простым вычислением ([144b], т. VII, стр. 198—203). Хотя подобные чаяния и могут показаться чрезмерными, все же надо признать, что, находясь именно под их постоянным воздействием, Лейбниц создал значительную часть своих математических трудов, и прежде всего свои работы по символике исчисления бесконечно малых (см. стр. 199—201). Он сам это прекрасно сознавал и явно связывал свои идеи о введении индексов и детерминантов ([144a], т. II, стр. 204, ср. [52a], стр. 481—487) и свой набросок «Геометрическое исчисление» (см. стр. 72 и 84—86; ср. [52a], гл. IX) со своей «характеристикой». Но он считал, что его наиболее значительным трудом будет символическая логика, или, как он говорил, «Calculus ratiocinator», и, если ему не удалось создать подобного исчисления, он по крайней мере трижды приступал к реализации своего намерения. В своей первой попытке он стремится сопоставить каждому «примитивному» термину простое число, а каждому термину, составленному из нескольких примитивных терминов, — произведение соответствующих простых чисел [3]); он старается перевести в эту систему обычные правила силлогизма, но сталкивается со значительными трудностями, связанными с отрицанием (которое он, что вполне естественно, пытается выразить изменением знака), и быстро от этого отказывается ([144c], стр. 42—96, ср. [52a], стр. 326—344). В своих дальнейших попытках Лейбниц стремится придать аристотелевой логике более алгебраическую форму; он то сохраняет обозначение $AB$ для конъюнкции двух понятий, то употребляет обозначение $A+B$ [4]); он замечает в мультипликативной записи закон идемпотентности $AA=A$, замечает, что можно заменить высказывание «всякое $A$ есть $B$» равенством $A=AB$ и что, исходя из этого, можно при помощи чисто алгебраического исчисления вновь найти большинство правил Аристотеля ([144c], стр. 229—237 и 356—399; ср. [52a], стр. 345—364); он также говорит о пустом понятии (non Ens) и, например, знает об эквивалентности высказываний «всякое $A$ есть $B$» и «$A$ (не $B$) не существует» (см. цитированную работу). Он, кроме того, замечает,

---

[1]) Поразительно, что в качестве примера рассуждения «по форме» он приводит «счет получателя» или даже юридический текст ([144], т. IV, стр. 295).

[2]) Известно, что такое понятие «логической машины» используется в наши дни в метаматематике, где оно весьма полезно ([131], гл. XIII).

[3]) Эту идею с успехом применил в своих работах по метаматематике Гёдель, но в слегка измененном виде (ср. [100a] и [131], стр. 254).

[4]) Лейбниц вводит в свое исчисление дизъюнкцию лишь в некоторых фрагментах (где он ее обозначает $A+B$), и ему, по-видимому, не удалось одновременно удовлетворительным образом употреблять эту операцию и операцию конъюнкции ([52a], стр. 363).

что его логическое исчисление применимо не только к логике понятий, но также и к логике высказываний ([144c], стр. 377). Здесь, по-видимому, он близко подходит к «булеву исчислению». К сожалению, ему, по-видимому, не удалось полностью освободиться от влияния схоластики; он не только ставит почти единственной конечной целью своего исчисления транскрипцию в своих обозначениях правил силлогизма[1]), но идет даже на то, чтобы пожертвовать своими наиболее удачными идеями ради желания вывести все правила Аристотеля, даже те, которые были несовместимы с понятием пустого множества[2]).

Большая часть работ Лейбница оставалась неопубликованной до начала XX в., и непосредственное влияние их было незначительным. В течение всего XVIII и начала XIX вв. различные авторы (де-Сегнер, Ж. Ламберт, Плуке, Голланд, де Кастильон, Жергон) выступали с попытками, аналогичными попытке Лейбница, однако не пошли дальше того, на чем остановился Лейбниц; работы их имели чрезвычайно слабый резонанс, так что большинство из них даже не знало о трудах своих предшественников[3]). В этих условиях начинает писать Дж. Буль, которого следует считать несомненным создателем современной символической логики [24]. Его основная идея заключается в том, что надо постоянно следовать «объемной» точке зрения и, значит, непосредственно оперировать с множествами. Он обозначает пересечение двух множеств через $xy$ и их объединение — через $x + y$, когда у $x$ и $y$ нет общих элементов. Помимо этого, он вводит «универсальное множество», обозначенное 1 (множество всех объектов), пустое множество, обозначенное 0, и дополнение $x$, обозначенное $1 - x$. Так же как это делал Лейбниц, он интерпретирует отношение включения равенством $xy = x$ (откуда без труда выводит подтверждение правил классического силлогизма); его обозначения для объединения и дополнения придают всей системе гибкость, которой не хватало системам его предшественников[4]). Кроме того, сопоставляя каждому

[1]) Лейбниц хорошо знал, что аристотелева логика была недостаточной для формального перевода математических текстов, но, за исключением некоторых попыток, ему не удалось улучшить ее в этом отношении ([52a], стр. 435 и 560).

[2]) Речь идет о правилах, известных как «конверсия», основанных на постулате, что высказывание «Всякое $A$ есть $B$» влечет за собой «Некоторые $A$ есть $B$», а это, естественно, предполагает, что $A$ не является пустым.

[3]) Незначительный интерес к формальной логике в эту эпоху отчасти объясняется влиянием Канта с середины XVIII в. Он считал, что «нам не нужны никакие новые изобретения в логике», так как форма, в которую ее облек Аристотель, достаточна для всех случаев ее возможного применения ([129 bis], т. VIII, стр. 340). О догматических концепциях Канта в отношении математики см. [52b].

[4]) Особо отметим, что Буль пользуется дистрибутивностью пересечения в отношении к объединению, что впервые было замечено Ж. Ламбертом.

высказыванию множество «случаев», когда оно верно, он интерпретирует отношение импликации как включение, и, таким образом, его исчисление множеств дает ему правила «исчисления высказываний».

Во второй половине XIX в. система Буля была основой для работ активной школы логиков, которые ее усовершенствовали и дополняли. Так, Джевонс (1864 г.) расширил смысл операции объединения $x + y$, распространив ее на случай, когда $x$ и $y$ — любые. А де Морган в 1858 г. и К. С. Пирс в 1867 г. доказали отношения двойственности

$$(\complement A) \cap (\complement B) = \complement (A \cup B), \quad (\complement A) \cup (\complement B) = \complement (A \cap B)$$ [1].

Де Морган в 1860 г. также занимался отношениями, определяющими инверсию и композицию бинарных отношений (т. е. операциями, которые соответствуют операциям $\overset{-1}{G}$ и $G_1 \circ G_2$ над графиками) [2]. Все эти работы систематически изложены и развиты в обширном и многословном труде Шрёдера [203]. Однако любопытно то, что логиков, о которых мы только что говорили, мало интересовала возможность применения полученных результатов к математике, а Буль и Шрёдер даже считали, по-видимому, своей основной целью развитие алгебры Буля, копируя ее методы и проблемы с классической алгебры (часто довольно искусственным образом). Причины этого, безусловно, следует искать в том, что булево исчисление еще не было достаточно удобным для записей большинства математических рассуждений [3] и, таким образом, лишь частично отвечало великой мечте Лейбница.

Построение более приспособленных к математике формализмов, характеризующихся в основном употреблением переменных величин и кванторов, введенных независимо Фреге [89a, b, c] и К. С. Пирсом [179b], было делом и логиков и математиков, которые в отличие от своих предшественников имели в виду прежде всего приложение их к основаниям математики.

---

[1] Следует отметить, что формулировки, эквивалентные этим правилам, мы уже находим у некоторых философов-схоластов ([20 bis], стр. 67 и сл.).

[2] Однако понятие «декартова» произведения двух произвольных множеств, по-видимому, явно сформулировано только Г. Кантором ([35], стр. 286); Кантор также первый определяет степень $A^B$ (цит. раб., стр. 287); А. Н. Уайтхед вводит понятие бесконечного произведения ([246], стр. 369). Употребление графиков отношений введено недавно; если, конечно, исключить классический случай числовых функций действительных переменных, оно, по-видимому, впервые появляется у итальянских геометров, а именно у К. Сегре при изучении алгебраических соответствий.

[3] Для *каждого* отношения, полученного из одного или нескольких данных отношений применением наших кванторов, надо было бы в этом исчислении вводить обозначения ad hoc по типу обозначений $\overset{-1}{G}$ и $G_1 \circ G_2$ (ср., например, [179b]).

Фреге [89b и c] стремился обосновать арифметику с помощью логики, формализованной в виде «записи понятий» (Begriffsschrift), и ниже (стр. 42) мы рассмотрим его способ определения натуральных чисел.

Его работы отличаются чрезвычайной точностью и подробностью анализа понятий. Следуя этой тенденции, он вводит множество различений, которые оказались столь важными в современной логике. Так, например, именно он впервые указывает на различие между формулировкой высказывания и утверждением, что это высказывание истинно, между отношением принадлежности и отношением включения, между объектом $x$ и множеством $\{x\}$, сводящимся к этому одному объекту, и т. д. Его формализованная логика, которая допускает не только «переменные» в значении, употребляемом в математике, но также и «пропозициональные переменные», представляющие неопределенные отношения, допускающие введение кванторов, сделалась впоследствии (в работах Рассела и Уайтхеда) основным орудием математики. К сожалению, принятые им символы маловыразительны, страшно сложны для типографского набора и слишком далеки от применяемых в математической практике; в результате все это оттолкнуло математиков и значительно снизило влияние Фреге на его современников.

Пеано ставил перед собой цель одновременно и более обширную, и более практичную; дело касалось издания «Формуляра математики», целиком написанного формализованным языком и содержащего, помимо математической логики, также и все результаты наиболее значительных разделов математики. Быстрота, с которой ему удалось осуществить свои честолюбивые проекты при помощи целой плеяды сотрудников-энтузиастов (Вайлати, Пиери, Падоа, Вакка, Виванти, Фано, Бурали-Форти), свидетельствует о превосходном качестве введенной им символики; она близко примыкает к применяемой в математической практике и вводит многочисленные и хорошо подобранные символы-сокращения, к тому же его язык довольно понятен именно благодаря оригинальной системе, в которой скобки заменены разделительными точками [177 f]. Большое количество знаков, введенных Пеано, теперь усвоено многими математиками: укажем на $\in$, $\supset$ (но в противоположность современному употреблению в значении «содержится в», или «влечет за собой»)[1]), $\cup$, $\cap$, $A-B$ (множество разностей $a-b$, где $a\in A$ и $b\in B$). С другой стороны, именно в «Формуляре» впервые дан

---

[1]) Это ясно указывает, как глубоко, даже у него, укоренилась старая привычка мыслить скорее «содержательно», а не «объемно».

развернутый анализ общего понятия функции, понятий образа [1]) и прообраза и сделано замечание о том, что последовательность является функцией, определенной в **N**. Но употребление кванторов у Пеано подчинено стеснительным ограничениям (принципиально в его системе возможно употреблять кванторы лишь для отношений вида $A \Longrightarrow B$, $A \Longleftrightarrow B$ или $A = B$). К тому же почти фанатическое усердие некоторых его учеников иногда давало повод к насмешкам. Критика зачастую несправедлива; в частности, со стороны А. Пуанкаре школе Пеано был нанесен чувствительный удар, что послужило препятствием для дальнейшего распространения учения Пеано среди математиков.

Благодаря Фреге и Пеано были выработаны основные элементы формализованных языков, которыми пользуются в настоящее время. Наиболее распространен, конечно, язык, данный Расселом и Уайтхедом в их капитальном труде «Principia Mathematica», в котором точность Фреге удачно сочетается с удобством системы Пеано [194]. В настоящее время большинство формализованных языков отличается от него только модификациями второстепенного значения, направленными на то, чтобы упростить его употребление. Среди наиболее оригинальных из них назовем «функциональную» запись отношений (например, $\in xy$ вместо $x \in y$), придуманную Лукасевичем, при которой можно полностью упразднить скобки; но, безусловно, самым интересным является введенный Гильбертом символ $\tau$, который дает возможность рассматривать кванторы $\exists$ и $\forall$ как символы сокращения, избегать введения функционального символа «всеобщности» $\iota$ Пеано и Рассела (который применим лишь к функциональным отношениям) и, наконец, избавляет от необходимости формулировать аксиому выбора в теории множеств ([122a], т. III, стр. 183).

## Понятие истины в математике

Математики всегда были уверены, что они доказывают «истины» или «истинные высказывания»; убеждение это, очевидно, не может не носить субъективного или метафизического характера, и с позиций математики его нельзя ни оправдать, ни даже придать ему смысл, не превращающий его в тавтологию. Поэтому история понятия истины в математике относится к истории философии, а не математики; но эволюция этого понятия имела бесспорное влияние на эволюцию математики и по этой причине мы не можем обойти ее молчанием.

---

[1]) Обязанное своим введением, по-видимому, Дедекинду в его работе «Was sind und was sollen die Zahlen», о которой будет сказано дальше ([60], т. III, стр. 348).

Прежде всего заметим, что математики, обладающие основательной философской культурой, встречаются так же редко, как и философы, имеющие обширные познания в математике. Точка зрения математиков на вопросы философского порядка, даже если эти вопросы имеют существенное значение для их науки, в большинстве случаев основана на мнениях, полученных из вторых и третьих рук и из источников сомнительной ценности. Именно поэтому историков математики интересуют эти «средние» мнения, во всяком случае наравне с оригинальными высказываниями таких мыслителей, как Декарт и Лейбниц (оба — прекрасные математики), Платон (который был по крайней мере в курсе математики своей эпохи), Аристотель или Кант (о которых этого не скажешь).

Традиционное понятие математической истины восходит к эпохе Возрождения. При этой концепции не было большого различия между объектами, с которыми имеет дело математик, и объектами, изучаемыми естественными науками; и те и другие считались познаваемыми, человек овладевает ими посредством интуиции и рассуждения; не приходится сомневаться ни в интуиции, ни в рассуждении, которые только тогда могут привести к ошибке, когда применяются неправильно. «*Надо*, — говорит Паскаль, — *обладать совершенно ложным разумом, чтобы неправильно рассуждать о принципах, столь значительных, что почти невозможно, чтобы они ускользали*» ([175], т. XII, стр. 9). Декарт у своей печки [1]) приходит к убеждению, что «*только математикам удалось найти некоторые доказательства, т. е. некоторые точные и очевидные соображения*» ([64a], т. VI, стр. 19; русский перевод, стр. 23), — и это (если придерживаться его собственного рассказа) задолго до того, как он построил свою метафизику, в которой говорит:

«*То, что я с недавних пор принял за правило, а именно что вещи, которые мы постигаем очень ясно и очень отчетливо, суть истинные, гарантировано лишь тем, что Бог есть, или существует, и что он является совершенным существом*» ([64a], т. VI, стр. 38; русский перевод, стр. 37). Хотя Лейбниц и возражает Декарту, что он не видит, по каким признакам считать идею «ясной и отчетливой» [2]), он также считает аксиомы очевидными и

---

[1]) Намек на распространенное предание о том, что Декарт любил работать у жарко натопленной печки. — *Прим. перев.*

[2]) «*Те, которые дали нам методы*, — говорит он по этому поводу, — *дали, безусловно, прекрасные предписания, но не средства для их обнаружения*» ([144b], т. VII, стр. 21). И в другом месте, иронизируя над правилами картезианцев, он сравнивает их с рецептами алхимиков: «*Возьми то, что требуется, действуй, как надо, и ты получишь то, что желаешь!*» ([144b], т. IV, стр. 329).

неизбежными следствиями определений (дефиниций), как только будет понята их терминология [1]).

Не следует также забывать, что на языке той эпохи к математике относили различные науки, которые в настоящее время к ней уже не причисляются, иногда даже инженерное искусство; доверие, которое вызывала математика, в значительной мере объяснялось поразительными успехами ее применения в «натуральной философии», в «механическом искусстве» и в навигации.

При таком взгляде на математику аксиомы не подвергались сомнению и не обсуждались, так же как и правила вывода; единственное, что предоставляется каждому исследователю в зависимости от его склонности, это право либо рассуждать «по образцу древних», либо дать свободу своей интуиции. Выбор точки отправления также зависел от индивидуального вкуса, в результате чего появляются многочисленные «издания» Евклида, в которых самым странным образом искажена прочно сработанная логика «Начал»; исчислению бесконечно малых и теоретической механике дают мнимо дедуктивные изложения, построенные на поразительно необоснованном фундаменте; и, возможно, Спиноза искренне верил, что написал свою Этику, чтобы доказать по образцу геометров «more geometrics demonstrata». Хотя в XVII в. можно с трудом найти двух математиков, которые сошлись бы во мнениях по какому-нибудь вопросу, хотя в те дни на каждом шагу возникали бесконечные и язвительные споры, тем не менее понятие истины остается вне обсуждения. *«Существует лишь одна истина касательно каждой вещи*, — говорит Декарт, — *и кто нашел ее, знает о ней все, что можно знать»* ([64a], т. VI, стр. 21; русский перевод, стр. 24).

Несмотря на то что до нас не дошел ни один математический текст Греции великого периода по этим вопросам, весьма вероятно, что точка зрения греческих математиков по этому вопросу допускала гораздо больше нюансов. Только на опыте можно было так разработать правила рассуждения, что они начали

---

[1]) В этом пункте Лейбниц еще находится под влиянием схоластов; он считает, что высказывания устанавливают отношение «субъекта» к «предикату» между понятиями. Как только понятия разложены на «примитивные» (что является, как мы уже видели, одной из его фундаментальных идей), все, по Лейбницу, сводится к тому, чтобы проверить отношения «включения» посредством того, что он называет «аксиомами тождества» (главным образом высказывание $A = A$ и $A \subset A$) и принципом «подстановки эквивалентных» (если $A = B$, можно всюду подставить $B$ вместо $A$ [52a], стр. 184—206). По этому поводу интересно отметить, что в соответствии с его желанием все свести к логике и «доказать все, что доказуемо», Лейбниц доказывает симметричность и транзитивность отношений равенства, исходя из аксиомы $A = A$ и принципа подстановки эквивалентных ([144a], т. VII, стр. 77—78).

внушать к себе полное доверие; надо было предварительно проделать долгий путь поисков на ощупь и паралогизмов, чтобы дать правила, которые уже считались неоспоримыми. Но думать, что «аксиомы», даже те, которые Паскаль причислял к наиболее очевидным (и которые, если верить легенде, распространяемой его сестрой, он якобы открыл еще в детстве благодаря своему безошибочному инстинкту), не были предметом долгих обсуждений, значило бы недооценивать критического духа греков и их вкуса к дискуссиям и к софистике. В области, которая не является геометрией в узком значении слова, парадоксы Элеатов сохранили для нас некоторые следы подобной полемики; а Архимед, упомянув о том, что его предшественники ([3b], т. II, стр. 265) пользовались в некоторых случаях аксиомой, которую мы обычно называем его именем, добавляет, что то, что было доказано с помощью этой аксиомы, *«было признано не в меньшей степени, чем то, что было доказано без нее»,* и что ему достаточно того, чтобы результаты его работ были признаны в том же смысле. Платон в соответствии со своими метафизическими воззрениями рассматривает математику как средство познания «истины в себе», а объекты, которыми она занимается, как имеющие собственное бытие в мире идей; он точно определяет метод математики в известном отрывке из «Государства»: *«Те, кто занимается геометрией и арифметикой... предполагают чет и нечет, три вида углов; они рассматривают их как известные вещи: как только это предположено, они считают, что не должны отдавать в них больше отчета ни себе, ни другим* [считая их] *ясными для всех; исходя из этого, они действуют по порядку для того, чтобы с общего согласия прийти к тому, что имели в виду рассмотреть»* ([180], книга VI, 510 c — e). Итак, то, из чего слагается доказательство, это прежде всего точка отправления, выбранная с некоторым произволом (хотя и «ясная каждому»), за пределы которой, как говорит он немного ниже, и не пытаются выходить; затем исследование, состоящее из ряда промежуточных этапов, проходимых по порядку; и, наконец, согласие собеседника, гарантирующее на каждом этапе правильность рассуждения. К этому надо добавить, что, как только аксиомы сформулированы, никакие новые попытки прибегнуть к интуиции уже в принципе недопустимы; Прокл, цитируя Гемина, напоминает: *«Мы научились от самих пионеров этой науки совсем не принимать в расчет правдоподобные заключения, когда дело касается рассуждений, которые должны войти в науку геометрии»* ([114e], т. I, стр. 203).

Таким образом, правила математического рассуждения были отшлифованы экспериментально и под огнем критики; и если, как это довольно правдоподобно утверждают [231c], книга VIII Евклида сохранила для нас часть арифметики Архита, то не удивительно, что в ней можно найти несколько педантичную жесткость доказательств, обычную для каждой математической школы, в которой открывают или думают, что открывают, «строгость». Как только эти правила рассуждения внедрились в практику, уже, по-видимому, никогда никто не подвергал их сомнению вплоть до самого последнего времени; и если у Аристотеля и у стоиков некоторые из этих правил выведены из других согласно схемам рассуждений, то первоначальные правила всегда принимались на веру. Дойдя таким образом до «гипотез», «аксиом», «постулатов», которые, как им казалось, представляли солидный фундамент для науки того времени (как, например, те, которые должны были встречаться в первых «Началах», приписываемых традицией Гиппократу из Хиоса, около 450 г. до н. э.), греческие математики классического периода посвящали свои труды скорее открытию новых результатов, чем критике основ, которая к тому же в то время не преминула бы остаться бесплодной; и если оставить в стороне все предубеждения метафизического характера, то цитированный выше текст Платона свидетельствует именно об общем согласии математиков относительно основ их науки.

С другой стороны, греческие математики, кажется, не верили в возможность объяснения «первоначальных понятий», которые служили им отправными точками, как-то: прямой линии, поверхности, отношения величин; если они и дают им «определения», это, очевидно, делается для очистки совести и без особых иллюзий об их значимости. Но зато греческие математики и философы имели совершенно ясное представление об определениях других понятий, не причисляемых к «первоначальным» (которые часто называются «номинальными»). В связи с этим впервые был явно поставлен вопрос о «существовании» в математике. Аристотель заметил, что определение еще не влечет за собой существование определяемой вещи и что для этого требуется еще либо постулат, либо доказательство. Его замечание, несомненно, было выведено из математической практики; во всяком случае, Евклид заботился о том, чтобы постулировать существование круга и доказать существование равнобедренного треугольника, параллельных линий, квадрата и т. д. по мере того, как он вводил их в свои рассуждения ([114e], книга 1). Эти доказательства являются «конструкциями»: иными словами, опираясь на аксиомы, он вводил математические объекты и доказывал, что они удовлетворяют тем определениям, которые надо оправдать.

Итак, мы видим, что греческая математика классического периода пришла к некой эмпирической уверенности (каковы бы ни были ее метафизические основания у отдельных философов); поскольку еще не было осознано, что можно ставить под вопрос правила рассуждения, успех греческой науки и убеждение в несвоевременности критической ревизии в значительной степени способствовали доверию, которое внушают аксиомы в собственном смысле слова, — доверию, подобному тому (почти безграничному), которым пользовались в прошлом веке принципы теоретической физики. Это получило выражение в изречении «nihil est in intellectu quod non prius fuerit in sensu», против которого как раз и возражал Декарт. Он считал, что оно не дает достаточно прочного основания для того, что он желал извлечь из применения разума.

Надо дойти до истоков XIX в., чтобы увидеть математиков, отошедших от высокомерия такого ученого, как Декарт (не говоря уже о высокомерии таких, как Кант или Гегель, причем последний несколько отставал, как и полагается, от науки своего времени[1])). К этому времени они усвоили новые взгляды, столь же богатые оттенками, как и у древних греков. Первый удар по классическим концепциям был нанесен в начале века Гауссом, Лобачевским и Бойаи построением неевклидовой гиперболической геометрии. Мы не собираемся здесь детально излагать генезис этого открытия, положившего конец многочисленным бесплодным попыткам доказать постулат о параллельных (см. [78a и b]). В настоящее время оно, быть может, уже не имеет того глубокого влияния на принципы математики, какое ему иногда приписывают. Оно просто заставляет расстаться с притязаниями прошлого века на «абсолютную истину» евклидовой геометрии и тем более с точкой зрения Лейбница, согласно которой определения влекут за собой аксиомы; эти последние уже отнюдь не являются очевидными, а скорее «гипотезами», относительно которых надо выяснить, насколько они приспособлены для математического представления чувственного мира[2]). Гаусс и Лобачевский полагают, что спор между различными возможными геометриями может быть разрешен опытным путем ([149], стр. 76). На этой же точке зрения стоит и Риман, знаменитая вступительная лекция которого *«О гипотезах, лежащих в основании геометрии»* имеет целью дать общую математическую схему различным естественным явлениям: *«Остается решить вопрос,*— говорит он, — *в какой мере и до какой степени эти гипотезы*

---

[1]) В своей диссертационной речи он «доказывает», что может существовать только семь планет, и это именно в том году, когда была открыта восьмая.

[2]) На самом деле уже греки не рассматривали аксиомы как «очевидные». Аристотель писал, что некоторые предложения следует принимать без доказательства: *«На самом деле, для всего без исключения доказательства существовать не может (ведь ряд уходил бы в бесконечность, так что и в этом случае доказательства бы не было)»* (Метафизика, 1005 13—1006 12). Этот же взгляд на аксиомы Аристотель обсуждает во «Второй аналитике», гл. 3. — *Прим. перев.*

*подтверждаются опытом* ([187a], стр. 284). Но эта проблема уже явно не относится к математике; и, кажется, никто из предшествующих авторов не подвергает сомнению то, что, даже если какая-нибудь «геометрия» и не соответствует экспериментальным данным, ее теоремы тем не менее остаются «математическими истинами» [1]).

Однако, если это и так, подобное убеждение не следует приписывать какой-то безграничной вере в классическую «геометрическую интуицию»; описание, которое Риман пытается дать $n$-кратно протяженному многообразию, являющемуся темой его работы, опирается на «интуитивные» [2]) соображения только для того, чтобы оправдать введение «локальных координат»; после этого он уже чувствует себя на твердой почве, т. е. на почве анализа. Но анализ в конечном счете основан на понятии действительного числа, которое до этих пор было крайне интуитивным; в этом отношении развитие теории функций приводило к довольно неожиданным результатам: исследования самого Римана по интегрированию, а также примеры кривых, не имеющих касательных, построенные Больцано и Вейерштрассом, положили начало патологическим явлениям в математике. В течение целого века мы видели столько чудовищ такого рода, что почувствовали некоторое пресыщение, и чтобы нас действительно удивить, надо было бы показать нам нагромождение самых нелепых уродств. У большинства математиков XIX в. чувство отвращения сменилось состоянием растерянности. *«Как интуиция может обмануть нас до такой степени?»* — спрашивает себя А. Пуанкаре ([181d], стр. 19); а Эрмит в знаменитом изречении (не без некоторого юмора, который, по-видимому, дошел не до всех комментаторов) говорит, что он *«с ужасом отворачивается от внушающей сожаление язвы непрерывных функций, не имеющих ни в одной точке производной»* ([120], т. II, стр. 318). Самым серьезным было то, что эти явления, так противоречащие здравому смыслу, не могли быть отнесены за счет мало выясненных понятий, как это было во времена «неделимых» (см. стр. 177), так как они всплыли после реформы Больцано, Абеля и Коши, позволяющей обосновать понятие предела с такой же точностью, как и теорию отношений (см. стр. 154). Поэтому надо было винить грубый и несовершенный характер нашей геометрической интуиции, и вполне понятно, что после этого она с полным основанием была дискредитирована как средство доказательства.

---

[1]) Ср. аргументы Пуанкаре в защиту «простоты» и «удобства» евклидовой геометрии ([181c], стр. 67) и анализ, на основании которого немного далее он приходит к заключению, что опыт не дает абсолютного критерия при выборе той или иной геометрии в качестве схемы для явлений природы.

[2]) К тому же этот термин оправдан лишь для $n \leqslant 3$; для бо́льших значений $n$ в действительности требуется рассуждение по аналогии.

Этот вывод неизбежно должен был повлиять на классическую математику, и прежде всего на геометрию. Несмотря на то уважение, которое внушало аксиоматическое построение Евклида, даже уже в античную эпоху нельзя было не заметить в нем многих недочетов. Больше всего попыток доказательств и критических замечаний выпало на долю постулата о параллельных; но продолжатели и комментаторы Евклида пытались доказать и другие постулаты (и именно постулат о равенстве прямых углов) и обнаруживали недостаточность некоторых определений, как, например, прямой или плоскости. В XVI в. Клавий, издатель «Начал», отмечает отсутствие постулата, гарантирующего существование четвертой пропорциональной; Лейбниц со своей стороны замечает, что Евклид пользуется геометрической интуицией, явно этого не оговаривая, например, когда допускает («Начала», книга I, предл. 1), что два круга, каждый из которых проходит через центр другого, имеют общую точку ([144b], т. VII, стр. 166). Гаусс (который сам иногда пользовался такими топологическими соображениями) обращает внимание на ту роль, которую играет в евклидовых построениях понятие точки (или прямой), помещенной «между» двумя другими, — понятие, которое само еще не было определено ([95a], т. VIII, стр. 222). Наконец, употребление перемещения — а именно в «случае равенства треугольников», — давно уже признанное как само собой разумеющееся [1]), должно было рассматриваться критиками XIX в. как основанное на несформулированных аксиомах. Все это выразилось в различных частичных пересмотрах начал геометрии, особенно за период с 1860 по 1885 гг. (Гельмгольц, Мерэй, Гуэль), имеющих целью заполнить некоторые из этих пробелов. Но только М. Паш [176] в своей программе четко сформулировал отказ от всякой интуиции и строго этого придерживался. Успех его начинания породил многочисленных соперников, которые главным образом между 1890 и 1910 гг. дали довольно разнообразные представления аксиом евклидовой геометрии. Наиболее известными из них были работы Пеано, написанные символическим языком [177d], и особенно книга Гильберта «Grundlagen der Geometrie» [122c], вышедшая в 1899 г., которая благодаря ясности и глубине изложения вскоре с полным основанием стала своего рода хартией современной аксиоматики вплоть до того, что привела к забвению своих предшественников. И действительно, не довольствуясь тем, чтобы дать полную систему аксиом евклидовой геометрии, Гильберт классифицирует их по группам с различными признаками и старается определить

---

[1]) Следует, однако, отметить, что уже в XVI в. Ж. Пелетье, один из комментаторов Евклида, возражает против этого способа доказательства в терминах, сходных с терминами современных критиков ([114e], т. I, стр. 249).

точные пределы каждой из этих групп аксиом, не только изучая следствия каждой из них изолированно, но также обсуждая различные «геометрии», полученные при изъятии или изменении некоторых из этих аксиом (среди них «геометрии» Лобачевского и Римана являются лишь частными случаями) [1]; он убедительно доказывает, что в той области науки, которая до сих пор считалась наиболее близкой к явлениям чувственного мира, математики пользуются свободой при выборе постулатов. Несмотря на замешательство среди некоторых философов, возникшее от этих «метагеометрий» со странными свойствами, основная концепция «Grundlagen» получила у математиков быстрое и почти единодушное признание; А. Пуанкаре, которого вряд ли можно заподозрить в пристрастии к формализму, пришел в 1902 г. к выводу, что геометрические аксиомы являются соглашениями и понятие «истины» в обычном значении слова в отношении их уже не имеет смысла ([181c], стр. 66—67). Таким образом, «математическая истина» пребывает исключительно в логической дедукции из посылок, произвольно установленных аксиомами. Как мы увидим дальше (стр. 49—53), законность правил рассуждения, согласно которым проводится дедукция, вскоре сама стала подвергаться сомнению, что привело к коренному пересмотру концепций основ математики.

## Объекты, модели, структуры

А) *Математические объекты и структуры.* Со времен античности и до XIX в. существовало полное единодушие относительно тех объектов, которые являются основными для математиков; именно о них говорит Платон в цитированном выше отрывке (см. стр. 23); это суть числа, величины и фигуры. Если вначале к ним причислялись также объекты и явления, которыми занимались механика, астрономия, оптика и музыка, то уже у греков эти «математические» дисциплины всегда были четко отделены от арифметики и геометрии, а начиная с эпохи Возрождения они быстро возводятся в ранг самостоятельных наук.

Как бы ни отличались по своим оттенкам различные философские концепции математических объектов у различных математиков и философов, в одном пункте по крайней мере они сходятся, а именно что эти объекты нам *даны* и что не в нашей власти придать им произвольные свойства, как не властен физик изменить какой-нибудь закон природы. В сущности говоря, эти взгляды частично сложились под влиянием психологических фак-

[1]) То, что, по-видимому, наиболее поразило современников, была «неархимедова» геометрия, т. е. геометрия, в которой основное тело является неархимедовски упорядоченным (коммутативным или некоммутативным); в коммутативном случае оно было введено за несколько лет до этого Веронезе [232].

торов, которые мы не будем глубоко изучать, но которые хорошо известны каждому математику, когда он изнемогает от тщетных усилий схватить доказательство, без конца от него ускользающее. Отсюда всего один шаг к тому, чтобы уподобить это сопротивление препятствиям, которые чинит нам чувственный мир; и даже в наше время найдется не один математик из тех, кто проповедует непримиримый формализм, который в глубине своего Я охотно бы подписался под признанием Эрмита: *«Я верю, что числа и функции анализа не являются произвольным созданием нашего разума; я думаю, что они существуют вне нас в силу той же необходимости, как и объекты реального мира, и мы их встречаем или их открываем и изучаем точно так, как это делают физики, химики или зоологи»* ([120], т. II, стр. 398).

В классической концепции математики вопрос не стоит о том, чтобы отойти от изучения чисел и фигур; однако эта официальная точка зрения, которую на словах поддерживают все математики, мало-помалу, по мере накопления новых идей, начинает порождать невыносимые стеснения. Затруднения алгебраистов с отрицательными числами прекращаются только после того, как аналитическая геометрия дает им удобную «интерпретацию»; но еще в середине XVIII в. Даламбер, обсуждая этот вопрос в «Энциклопедии» ([56а], статья «Отрицательное»), после целого столбца довольно путаных объяснений падает духом и ограничивается выводом, что *«правила алгебраических действий с отрицательными количествами в общем приняты всеми и считаются точными независимо от того, что подразумевается под этими количествами»*. С мнимыми числами произошел еще больший скандал; так, если допустить, что это «невозможные» корни, и если (вплоть до 1800 г.) не было никаких способов их «интерпретировать», как же можно, не впадая в противоречие, говорить об этих неопределимых сущностях и, кроме того, зачем их вводить? Даламбер даже не ставит этих вопросов, стараясь обойти их благоразумным молчанием, так как, очевидно, сознает, что не смог бы на них ответить иначе, чем это сделал за сто лет до него А. Жирар, наивно объясняя, что *«можно было бы спросить: кому нужны решения, которые невозможны? Я отвечаю: они нужны для трех вещей — для справедливости общего правила, и чтобы убедиться, что нет других решений, и ради своей полезности»* ([99], стр. 22).

Не лучше было в XVII в. и положение с анализом. Счастливым обстоятельством было появление, как бы по заказу, аналитической геометрии, чтобы дать великому творению XVII в. — понятию функции — «представление» с помощью геометрических фигур и этим сильно способствовать (в работах Ферма, Паскаля или Барроу) появлению исчисления бесконечно малых (ср. стр. 202). Но, с другой стороны, известно, какие противоречия философско-математического характера должны были породить понятия бесконечно малой и неделимых. И если Даламберу здесь больше повезло и он признает, что «метафизика» исчисления бесконечно малых не содержит ничего другого, кроме понятия предела ([56a], статьи «Дифференциал» и «Предел» [56b]), он не может, как и его современники, понять подлинного смысла разложения в расходящиеся ряды и объяснить парадокс получения точных результатов путем вычислений с выражениями, лишенными всякой интерпретации на числах. Наконец, даже там, где царит «геометрическая уверенность», евклидовы рамки взрываются: когда в 1717 г. Стирлинг, не колеблясь, утверждает, что некая кривая имеет «мнимую двойную точку в бесконечности» ([217], стр. 93 нов. изд.), ему, конечно, трудно связать такой «объект» с общепринятыми понятиями; а в начале XIX в. Понселе, который в своей проективной геометрии (см. стр. 128) значительно развил эти идеи, удовлетворяется тем, что прибегает для оправдания их к весьма метафизическому «принципу непрерывности».

Ясно, что в этих условиях (и как раз в то время, когда парадоксальным образом с особенной силой провозглашается «абсолютная истинность» математики) понятие доказательства в течение XVIII в. становится все более и более расплывчатым, так как математики не в состоянии сформулировать, как это делали греки, ни понятий, с помощью которых рассуждают, ни их основных свойств. Возврат к строгости, который наблюдается в начале XIX в., несколько улучшает положение, но не сдерживает потока новых понятий: так, в алгебре появляются мнимости Галуа ([94], стр. 15—23, русский перевод, стр. 35—47), идеальные числа Куммера [138], за которыми следуют векторы и кватернионы, $n$-мерные пространства, поливекторы и тензоры (см. стр. 78—83), не говоря уже о булевой алгебре. Одним из больших достижений (позволившим возвратиться к строгости, не теряя ничего из завоеваний предшествующих столетий), бесспорно, является возможность строить «модели» этих новых понятий в более классических терминах: идеальные числа и мнимости Галуа интерпретируются с помощью теории сравнений (см. стр. 101—102), $n$-мерная геометрия может быть представлена (если нужно) как язык для выражения результатов алгебры «с $n$ переменными», а для классических мнимых чисел — геометрическая интерпретация которых точками плоскости знаменовала начало расцвета алгебры (см. стр. 161—164) — возможен выбор между этими геометрическими «моделями» и интерпретацией в терминах сравнений (ср. стр. 101).

Но математики начинают наконец отчетливо сознавать, что это противодействует естественному направлению их работ и что в математике вполне законно рассуждать об объектах, не имеющих никакой чувственной «интерпретации». Буль в 1854 г. писал: *«В природе математики не заложена необходимость заниматься идеями числа и величины»* ([24], т. II, стр. 13) [1]). Те же соображения руководят Грассманом, когда он дает в «Ausdehnungslehre», изданном в 1844 г., свое исчисление в форме, из которой с самого начала исключены понятия числа или геометрического «объекта» [2]). А немного позднее Риман в своей вступительной лекции с самого начала при описании «$n$-кратно протяженного многообразия» заботится о том, чтобы говорить не о «точках», но лишь о «способах задания» (Bestimmungsweise), и подчеркивает, что в таком многообразии *«метрические отношения (Massverhaltnisse) могут быть исследуемы только посредством отвлеченных величин и представлены с помощью формул; однако при некоторых предположениях их можно свести к таким отношениям, которые, будучи рассматриваемы каждое в отдельности, допускают определенные геометрические представления, и, следовательно, становится возможным результаты вычислений выражать в геометрической форме»* ([187a], стр. 276; русский перевод стр. 283).

---

1) В этом отношении Лейбниц снова является предтечей: *«Универсальная математика,* — говорит он, — *является, так сказать, логикой воображения»* и должна заниматься *«всем, что в области воображения поддается точным определениям»* ([144c], стр. 348; ср. [52], стр. 290—291); он считает главным разделом математики тот, который назван им «Комбинаторика», или «искусство формул», и под которым он понимает по существу науку об абстрактных отношениях между математическими объектами. Но так как до сих пор отношения, рассматриваемые в математике, сводились почти исключительно к отношениям величин (равенство, неравенство, пропорциональность), Лейбниц находит иные типы отношений, которые, по его мнению, должны были бы систематически изучаться математиками, как, например, отношение включения или то, что он называет отношением «определения» однозначного и многозначного (т. е. понятий отображения и соответствия) ([52a], стр. 307—310). По этому поводу он высказывает в своих сочинениях много других современных идей: он замечает, что различные отношения эквивалентности в классической геометрии имеют общие свойства симметричности и транзитивности; он также отличает понятие отношения, совместимого с отношением эквивалентности, и особо отмечает, что произвольное отношение не обязательно имеет это свойство ([52a], стр. 313—315). В этих высказываниях, так же как и везде, он защищает употребление формализованного языка и даже вводит знак для выражения неопределенного отношения ([52a], стр. 301).

2) Следует признать, что его язык, насыщенный философской терминологией, не способствовал тому, чтобы прельстить математиков, которые чувствовали себя не в своей тарелке перед формулировками вроде следующей: *«Чистая математика — наука особой сущности, поскольку она рождена мыслью»* («Die Wissenschaft des besonderen Seins als eines durch das Denken gewordenen»). Но из контекста явствует, что Грассман довольно отчетливо понимал под этим аксиоматическую математику в современном значении слова (за исключением того, что он довольно курьезно следует за Лейбницем, считая, что основы этой, как он говорит, «формальной науки» суть определения, а не аксиомы); во всяком случае, он настаивает, подобно Булю, на том, что *«название науки о величинах не подходит для математики в целом»* ([102], т. I, стр. 22—23).

С этого момента более широкое применение аксиоматического метода становится общепризнанным фактом. Если еще в течение некоторого времени считается полезным проверять, где это возможно, «абстрактные» результаты геометрической интуицией, то по крайней мере допускается уже, что «классические» объекты не являются единственными законными объектами математического исследования. И это потому, что именно вследствие множественности «интерпретаций» или возможных «моделей» было признано, что «природа» математических объектов по существу вторична и что, например, не имеет большого значения, будет ли некий результат выражен в форме теоремы «чистой» геометрии или в форме теоремы алгебры с помощью аналитической геометрии. Другими словами, сущность математики — этого неуловимого понятия, которое до сих пор выражалось столь расплывчатыми терминами, как «общее правило» или «метафизика», — представляется теперь как учение об отношениях между объектами, о которых ничего не известно, кроме описывающих их некоторых свойств, именно тех, которые в качестве аксиом положены в основание теории. Это уже ясно видел Буль в 1847 г., когда он писал, что математика трактует *«об операциях, рассматриваемых сами по себе, независимо от различных предметов, к которым они могут применяться»* ([24], т. I, стр. 3). В 1867 г. Ганкель, посвящая свой труд аксиоматизации алгебры, защищает математику, *«чисто интеллектуальную, чистую теорию форм, объектом которой служат не комбинации величин или их изображений, чисел, но предметы мысли* («Gedankendinge»), *которым могут соответствовать действительные предметы или отношения, хотя такое соответствие не необходимо»* ([109], стр. 10). В 1883 г. Кантор поддерживает требование «свободной математики» и объявляет, что *«математика совершенно независима в своем развитии и ее понятия связаны только требованиями быть непротиворечивыми и соответствовать понятиям, введенным ранее посредством точных определений»* ([35], стр. 182). Наконец, ревизия евклидовой геометрии довершает распространение и популяризацию этих идей. Сам Паш, придерживающийся мнения о некой «реальности» геометрических объектов, признает, однако, что геометрия фактически независима от их значения и занимается только изучением их отношений ([176], стр. 90); Гильберт доводит эту концепцию до ее логического завершения, подчеркивая, что даже названия основных понятий математической теории могут быть выбраны произвольно [1]), а Пуанкаре выражает ее, говоря, что аксиомы — это «замаскиро-

---

[1]) Согласно известному анекдоту, Гильберт охотно пояснял эту мысль, говоря, что, если заменить слова «точка», «прямая» и «плоскость» словами «стол», «стул» и «пивная кружка», в геометрии ничего не изменится. Инте-

ванные определения», полностью опровергая этим утверждением схоластическую точку зрения.

Возникает искушение признать, что современное понятие «структуры» в основном сформировалось около 1900 г.; в действительности понадобится еще тридцать лет изучения, чтобы оно выявилось с полной ясностью. Конечно, распознать структуры того же рода, если они достаточно просты по своей природе, не представляет никакой трудности; так, например, групповые структуры освоены уже с середины XIX в. Но в это же время мы видим усилия Ганкеля (впрочем, не вполне успешные), направленные на то, чтобы выделить общие понятия поля и расширения, которые ему удается выразить в виде наполовину метафизического «принципа перманентности» [109] и которые через 40 лет будут точно сформулированы Штейницем [213]. Труднее всего при этом было освободиться от впечатления, что математические объекты нам «даны» *вместе с их структурой*; только достаточно долгая практика функционального анализа дала возможность современным математикам привыкнуть к мысли, что, например, есть несколько различных «естественных» топологий для рациональных чисел и несколько мер на числовой прямой. Благодаря этому разделению окончательно осуществился переход к общему понятию структуры.

В) *Модели и изоморфизмы.* Можно было бы заметить, что неоднократно уже вводились понятия «модели» и «интерпретации» одной математической теории с помощью другой. Это не новая идея, она, безусловно, является отражением глубокого ощущения единства различных «математических дисциплин» и без конца возрождается на почве этого ощущения. Если считать подлинным традиционное изречение ранних пифагорейцев «*Все есть число*», то его можно рассматривать как след первой попытки свести геометрию и алгебру той эпохи к арифметике. Хотя казалось, что открытие иррациональности навсегда отрезало этот путь, реакция, которую оно вызвало в греческой математике, явилась второй попыткой к синтезу с использованием геометрии в качестве основы и включением в нее, в частности, методов решения алгебраических уравнений, унаследованных от вавилонян [1]). Известно, что эта концепция просуществовала

---

ресно, что уже у Даламбера можно встретить нечто подобное этому остроумному выпаду: «*Можно давать словам те значения, которые желательны*», — пишет он в «Энциклопедии» ([56а], статья «Определение»), — *в сущности можно было бы создать точные (но смешные) элементы геометрии, назвав треугольником то, что обычно называют кругом*».

[1]) Тем не менее арифметика остается вне этого синтеза; известно, что Евклид, после того как он развил общую теорию отношений для произвольных величин, независимо от нее развивает теорию рациональных чисел вместо того, чтобы рассматривать их как частный случай отношения величин (см. стр. 146—150).

вплоть до фундаментальной реформы Р. Бомбелли и Декарта, сводящей все меры величин к мере длины (иначе говоря, к действительному числу; ср. стр. 160). Но после создания Декартом и Ферма аналитической геометрии снова проявляется первая тенденция, способствуя более тесному слиянию геометрии с алгеброй, но на этот раз с перевесом алгебры. Однако Декарт идет еще дальше в понимании того, что *«все те отдельные науки, которые составляют то, что называют математикой»*, по существу едины. *«Хотя их предметы различны*, — говорит он, — *тем не менее все они согласуются между собой в том, что исследуют только различные, встречающиеся в них отношения или пропорции»* ([64], т. VI, стр. 19—20; русский перевод стр. 23) [1]). Во всяком случае, эта точка зрения стремилась сделать алгебру основной математической наукой; против подобного вывода энергично протестует Лейбниц, который, как мы видели, сам создает «Универсальную математику», но на более широкой основе, уже очень близкой к современным воззрениям. Уточняя «согласованность», о которой говорил Декарт, он первый усмотрел общее понятие изоморфизма (которое он называет *«подобием»*) и предвидел возможность «отождествлять» изоморфные отношения или операции; в качестве примера он дает сложение и умножение ([52a], стр. 301—303). Но эти смелые взгляды не получили отклика у его современников, надо было ждать расширения алгебры, которое имело место в середине XIX в. (см. стр. 68—70), чтобы увидеть начало реализации того, о чем мечтал Лейбниц. Мы уже отмечали, что именно к этому времени начинают умножаться «модели» и что ученые привыкают переходить от одной теории к другой посредством простого изменения терминологии. Наиболее поразительным примером является двойственность в проективной геометрии (см. стр. 130), где обычная для того времени практика печатания бок о бок, в двух лежащих рядом столбцах, «двойственных» теорем бесспорно сыграла большую роль в осознании понятия изоморфизма. Понятие изоморфных групп, если его рассматривать с более технической точки зрения, было известно Гауссу для абелевых групп, а Галуа — для групп перестановок (ср. стр. 68—70). К середине XIX в. это понятие [2])

---

[1]) В этом отношении представляет интерес то, что Декарт сближает с арифметикой и с «комбинациями чисел» *«искусства... где больше всего царит порядок, такие, как искусства ремесленников, делающих полотна или ковры, или искусства женщин, которые плетут кружева или вышивают»* ([64a], т. X, стр. 403), этот подход как бы предвосхищает современное учение о симметрии и его соотношения с понятием группы (ср. [245]).

[2]) Само слово «изоморфизм» было введено в теорию групп в это же время; но вначале оно служило также для обозначения сюръективных гомоморфизмов, квалифицируемых как мериэдрические изоморфизмы, в то время как собственно изоморфизмы назывались «голоэдрическими изоморфизмами»; эта терминология продержалась до работ Э. Нётер.

в общем виде применяется уже для любых групп. В дальнейшем каждая новая аксиоматическая теория, естественно, влекла за собой определение понятия изоморфизма; но только современное понятие структуры приводит, наконец, к осознанию того, что всякая структура несет в себе понятие изоморфизма и что нет нужды давать ему особое определение для каждого рода структуры.

С) *Арифметизация классической математики.* Все большее и большее использование понятия «модели» дало возможность осуществить в XIX в. унификацию математики, о которой мечтали пифагорейцы. В начале века целое число и непрерывная величина казались понятиями столь же несовместимыми, как и в античную эпоху; действительные числа были связаны с понятием геометрической величины (во всяком случае, с длиной) и именно к ней и обращались для «моделей» отрицательных и мнимых чисел. Даже рациональное число было по традиции связано с представлением о «делении» величины на равные части; только целые числа оставались в стороне как *«исключительные творения нашего разума»*, как сказал Гаусс в 1832 г., противопоставляя их понятию пространства ([95a], т. VIII, стр. 201). Первые усилия приблизить арифметику к анализу начались с рациональных чисел (положительных и отрицательных) и были предприняты Мартином Омом (1822 г.); приблизительно в 1860 г. его идея была подхвачена Грассманом, Ганкелем и Вейерштрассом (в его неопубликованных лекциях); последнему принадлежит идея получить «модель» рациональных положительных чисел и целых отрицательных чисел с помощью классов пар натуральных чисел. Но надо было еще добиться самого важного, а именно найти «модель» иррациональных чисел в теории рациональных чисел; к 1870 г. эта проблема уже не терпела никакого отлагательства, так как после открытия «патологических» фактов в анализе возникла необходимость при определении действительных чисел избавиться от всех следов геометрической интуиции и от смутного понятия «величина». Известно, что эта проблема была разрешена к этому времени приблизительно одновременно Кантором, Дедекиндом, Мэреем и Вейерштрассом, причем довольно различными методами (см. стр. 155—156).

Начиная с этого времени целые числа стали основой всей классической математики. Кроме того, «модели», опирающиеся на арифметику, приобретают еще большее значение вследствие расширения аксиоматического метода и установившегося взгляда на объекты математики как на свободные порождения разума. В действительности эта свобода, провозглашенная Кантором, была ограничена проблемой «существования», которая тревожила еще греков и разрешение которой сейчас было особенно необходимо, так как теперь всякая апелляция к интуитивному представлению уже не признавалась. Дальше мы увидим (стр. 50—51), что в первые годы XX в. понятию «существования» суждено было сыграть центральную роль в различных философско-математических перипетиях. Но в XIX в. до этого еще не дошли и считали, что доказательство существования математического объекта с заданными свойствами состояло, как и у Евклида, просто в том, чтобы «сконструировать» объект, имеющий указанные свойства. Для этих целей и служили арифметические модели; как только действительные числа были «интерпретированы» в терминах целых чисел, тем самым были интерпретированы благодаря аналитической геометрии также и комплексные числа и геометрия Евклида; то же самое произошло и со всеми новыми алгебраическими объектами, появившимися в XX в.; наконец, Бельтрами и Клейну удалось получить — и это открытие имело широкий резонанс — евклидовы «модели» неевклидовых геометрий Лобачевского и Римана (см. стр. 131—132) и, следовательно, арифметизировать (и тем самым полностью узаконить) теории, к которым первоначально относились с большим недоверием.

D) *Аксиоматизация арифметики.* Указанное развитие направляло внимание ученых на изучение оснований самой арифметики, которое и началось в действительности около 1880 г. До XIX в. ученые, по-видимому, не пытались определить сложение и умножение натуральных чисел иначе, чем путем прямого обращения к интуиции; только Лейбниц, верный своим принципам, настойчиво утверждает, что столь «очевидные истины», как $2+2=4$, не менее нуждаются в доказательствах, если поразмыслить об определениях чисел, которые туда входят ([144b], т. IV, стр. 403; ср. [52a], стр. 203); он не считал, что коммутативность сложения и умножения является само собой разумеющимся свойством [1]). Однако он не идет дальше в своих рассуждениях по этому вопросу, который до самой середины XIX в. не получил никакого развития. Даже Вейерштрасс, лекции которого значительно способствовали распространению идей «арифметизации», по-видимому, не почувствовал необходимости логического уяснения теории целых чисел. Первые шаги в этом направлении, как кажется, были сделаны Грассманом, который в 1861 г. ([102], т. $II_2$, стр. 295) дал определение сложению и умножению целых чисел и доказывал их основные свойства (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность) посредством только одной операции $x \to x+1$ и принципа полной математи-

[1]) В качестве примера некоммутативных действий он указывает на вычитание, деление и возведение в степень ([144b], т. VII, стр. 31); одно время он даже пробовал ввести подобные операции в свои логические исчисления ([52a], стр. 353).

ческой индукции. Этот принцип был ясно понят и впервые применен в XVI в. итальянцем Ф. Мавролико [157] [1]), если не считать более или менее сознательные применения его в античности, и широко использовался математиками начиная с первой половины XVII в. Но лишь в 1888 г. Дедекинд ([60], т. III, стр. 359—361) формулирует полную систему аксиом арифметики (систему, которую тремя годами позднее воспроизвел Пеано и которую обычно называют его именем [177c]), содержащую, в частности, точную формулировку принципа полной математической индукции (употребляемого и Грассманом, хотя он еще не дает ему ясных определений).

Казалось, что эта аксиоматизация дала возможность достигнуть окончательного обоснования математики. В действительности именно в то время, когда были ясно сформулированы аксиомы арифметики, она уже, по мнению многих математиков (и в первую очередь самого Дедекинда, а также Пеано), перестала быть первичной наукой и уступила свою роль теории множеств — самой новой из всех теорий математики; поэтому полемику, которая разразилась вокруг понятия целого числа, нельзя рассматривать изолированно от великого «кризиса оснований» 1900—1930 гг.

## Теория множеств

Можно утверждать, что математики и философы всех времен более или менее сознательно пользовались теоретико-множественными рассуждениями. Однако в истории развития их взглядов по этому предмету необходимо четко отделить все вопросы, связанные с понятием кардинального числа (и, в частности, с понятием бесконечности), от вопросов, связанных только с понятиями принадлежности и включения. Эти последние более интуитивны и, по-видимому, никогда не возбуждали полемики; на них легче всего было основать теорию силлогизмов (как это сделали Лейбниц и Эйлер) или ввести аксиомы вроде «целое больше части», не говоря уже о тех аксиомах геометрии, которые относятся к пересечениям кривых и поверхностей. До конца XIX в. никто не углублялся в определение множества (или, по терминологии некоторых авторов, «класса») объектов, обладающих теми или иными данными свойствами [2]). Знаменитое «определение» Кантора: *«Под множеством понимают объединение в одно*

---

[1]) См. также [34].

[2]) Мы уже видели, что Буль не колеблется даже вводить в свое исчисление «универсальное» множество 1 всех объектов; эта концепция, по-видимому, не подвергалась критике в то время, несмотря на то что была отвергнута Аристотелем, который дает довольно туманное доказательство с целью показать ее абсурдность ([4], Мет. В, 3, 998b).

*общее объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью»* ([35], стр. 282) после его опубликования не вызвало почти никаких возражений[1]. Но как только к понятию множества присоединяются понятия числа и величины, положение в корне меняется. Вопрос о бесконечной делимости пространства (бесспорно, поставленный еще ранними пифагорейцами) привел, как известно, к значительным затруднениям в философии: от Элеатов до Больцано и Кантора математики и философы не в силах были разрешить парадокса о конечной величине, состоящей из бесконечного числа точек, не имеющих величины. Было бы неинтересно излагать, хотя бы и в самом сжатом виде, ту нескончаемую и страстную полемику, поднявшуюся вокруг этого вопроса, создавшего особенно благоприятные условия для метафизических и теологических разглагольствований. Остановимся лишь на точке зрения, разделяемой, начиная с античности, большинством математиков, которая в основном сводится к тому, чтобы вообще отказаться от споров ввиду невозможности разрешить их неопровержимым способом — на этой позиции стоят и современные формалисты. Подобно тому как эти последние стараются исключить всякое вмешательство «парадоксальных» множеств (см. ниже, стр. 44—49), классические математики тщательно избегают вводить в свои рассуждения «актуальную бесконечность» (т. е. множества, содержащие бесконечное число объектов, которые предполагаются одновременно существующими, по крайней мере в мысли) и довольствуются «потенциальной бесконечностью», т. е. возможностью увеличивать каждую данную величину (или уменьшать ее, если речь идет о «непрерывной» величине)[2]. Если такая точка зрения и включала некоторую долю лицемерия[3], она во всяком случае способствовала развитию большей части разделов классической мате-

---

[1] Фреге, по-видимому, принадлежал к числу немногих из его современников, которые не без основания подняли свои голоса против расплывчатости подобных «определений» ([89c], т. I, стр. 2).

[2] Типичным примером указанной концепции является формулировка Евклида: «Первых чисел существует больше всякого предложенного количества первых чисел». Теперь мы выражаем это, говоря, что множество простых чисел бесконечно.

[3] В рамках классической математики, очевидно, правомочно говорить, что точка принадлежит прямой линии, но делать отсюда вывод о том, что прямая «составлена из точек», нельзя без нарушения табу на актуальную бесконечность, и Аристотель пускается в длинные рассуждения, чтобы оправдать этот запрет. В XIX в., очевидно, для того чтобы пресечь все возражения этого рода, многие математики избегают говорить о множестве и систематично рассуждают «по содержанию». Так, например, Галуа говорит не о числовых полях, но только о свойствах, общих всем элементам этого поля. Даже Паш и Гильберт в своих аксиоматических изложениях евклидовой геометрии воздерживаются от утверждения, что прямые линии и плоскости суть множества точек. Пеано — единственный математик, который свободно употребляет язык теории множеств в элементарной геометрии.

матики (включая теорию отношений, а позднее исчисление бесконечно малых) [1]). Она казалась превосходной оградой, особенно после споров, порожденных теорией бесконечно малых, и, наконец, в течение XIX в. превратилась в некую почти универсально принимаемую догму.

Общее понятие равномощности в зародышевой форме появляется впервые в одном замечании Галилея ([93b], т. VIII, стр. 78—80). Он находит, что отображение $n \rightarrow n^2$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между натуральными числами и их квадратами, откуда следует, что аксиома «целое больше части» не может быть применена к бесконечным множествам. Но вместо того, чтобы дать толчок к рациональному изучению бесконечных множеств, это замечание, по-видимому, только усиливает недоверие к актуальной бесконечности. К этому заключению и приходит сам Галилей, а Коши в 1833 г. цитирует его только для подтверждения этой же точки зрения.

Потребности анализа, и в частности углубленное изучение функций действительной переменной, которое проводится в течение всего XIX в., положили начало тому, чтó впоследствии сформировалось в современную теорию множеств. Когда в 1817 г. Больцано доказывает существование нижней грани множества, ограниченного снизу в $\mathbf{R}$ [22c], он еще рассуждает «по содержанию», как и большинство его современников, говоря не о произвольном множестве действительных чисел, но о произвольном свойстве этих последних. Но когда через тридцать лет он пишет свои «Paradoxien des Unendlichen» [22b] (вышедшие в 1851 г., через три года после его смерти), он, не колеблясь, отстаивает право на существование «актуальной бесконечности» и право говорить о произвольных множествах. В этой работе он определяет общее понятие равномощности двух множеств и доказывает, что два любых компактных интервала в $\mathbf{R}$ равномощны;

[1]) Причина этого, безусловно, заключается в том, что множества, рассматриваемые в классической математике, принадлежат к небольшому числу простых типов и обычно могут быть полностью описаны конечным числом числовых «параметров», так что рассмотрение их сводится к рассмотрению конечного множества чисел (так обстоит дело, например, с алгебраическими кривыми и поверхностями, которые долгое время были почти единственным строительным материалом «фигур» классической геометрии). Вплоть до XIX в., пока развитие анализа не привело к рассмотрению произвольных частей прямой линии или $\mathbf{R}^n$, множества, которые отличались бы от предшествующих типов, встречались очень редко. Так, например, Лейбниц с присущей ему оригинальностью мысли рассматривает замкнутый диск без центра как «геометрическое место» или (странным образом предвосхищая теорию идеалов) считает, что в арифметике «целое» есть «род» множества своих кратных, и замечает, что множество кратных 6 есть пересечение множества кратных 2 и множества кратных 3 ([144b], т. VII, стр. 292). С начала XIX в. множества этого последнего типа становятся обычными в алгебре и в теории чисел как, например, классы квадратичных форм, введенных Гауссом, или как поля и идеалы, определенные Дедекиндом до канторовой революции.

он также замечает, что характерное различие между конечным и бесконечным множествами состоит в том, что бесконечное множество $E$ равномощно подмножеству, отличному от $E$, но не дает никакого убедительного доказательства своему утверждению. К тому же общий тон этой работы скорее философский, чем математический, и при отсутствии достаточно четкого различия между понятием мощности множества и понятием величины или порядка бесконечности попытки Больцано образовать бесконечные множества все более и более высоких мощностей терпят поражение, и он прибегает к тому, что вводит в свои рассуждения соображения о расходящихся рядах, которые абсолютно лишены какого-либо смысла.

Теория множеств, как ее понимают в наши дни, создана гением Г. Кантора. Кантор также отправляется от анализа, и его работы о тригонометрических рядах, написанные под влиянием аналогичных работ Римана, естественным образом приводят его в 1872 г. к первой попытке классифицировать возникающие в этой теории «исключительные» множества [1]) посредством понятия последовательных «производных множеств», которые он вводит по этому поводу. Эти исследования Кантора и его способ определения действительных чисел, несомненно, привели к тому, что он заинтересовался вопросами равномощности, так как в 1873 г. он замечает, что множество рациональных чисел (или множество алгебраических чисел) является счетным; а в своей переписке с Дедекиндом, впервые выступившим в это же время [36], он ставит вопрос о равномощности множеств целых и действительных чисел и несколькими неделями позднее сам разрешает его отрицательно. Начиная с 1874 г. он сосредоточивает свое внимание на проблеме размерности и в течение трех лет тщетно старается показать невозможность взаимно однозначного соответствия между $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}^n$ $(n > 1)$, пока, к своему изумлению [2]), ему не удается определить это соответствие. Получив результаты, столь же новые, как и поразительные, он всецело посвящает себя теории множеств. В шести научных мемуарах, опубликованных между 1878 и 1884 гг. в *Mathematische Annalen*, он одновременно затрагивает проблемы равномощности, теорию совершенно упорядоченных множеств, топологические свойства $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}^n$ и проблему меры; просто поразительно, какую четкость постепенно приобретают у него понятия, которые, казалось, были

---

[1]) Речь идет о множествах $E \subset R$, таких, что если тригонометрический ряд $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{nix}$ сходится к 0, за исключением точек $E$, то необходимо получаем $c_n = 0$ для всякого $n$ ([35], стр. 99).

[2]) *«Я это вижу, но не верю в это»*, — пишет он Дедекинду ([36], стр. 34; эту фразу он пишет по-французски).

безнадежно запутаны в классической концепции «континуума». В 1880 г. у него возникает мысль итерировать «трансфинитно» образование «производных множеств». Но эта идея была реализована лишь через два года, с введением вполне упорядоченных множеств. Последнее было одним из наиболее оригинальных открытий Кантора, благодаря которому он мог начать тщательное исследование кардинальных чисел и сформулировать «проблему континуума» [35].

Столь смелые воззрения, опрокидывающие традиции двух тысячелетий и приводящие к неожиданным и парадоксальным результатам, не могли не столкнуться с сильнейшей оппозицией. И действительно, среди влиятельных немецких математиков того времени только один Вейерштрасс относился к работам Кантора (своего бывшего ученика) более или менее благосклонно; другие ученые не разделяли этого отношения, и Кантор натолкнулся на непримиримую оппозицию Шварца и особенно Кронекера[1]). Постоянное душевное напряжение в связи с непризнанием его идей, с одной стороны, и бесплодные попытки доказать гипотезу континуума — с другой, привели к тому, что у Кантора появились первые симптомы нервного расстройства, снизившего его работоспособность[2]). Только к 1887 г. у него возрождается интерес к теории множеств. В своих последних работах, опубликованных в 1895—1897 гг., он главным образом развивает теорию совершенно упорядоченных множеств и исчисление порядковых чисел. В 1890 г. он доказал также неравенство $\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}}$, однако не только проблема континуума оставалась (и остается до сегодняшнего дня) неразрешенной, но и в самой теории кардинальных чисел имелся серьезный пробел, так как Кантору не удалось установить существование отношения полной упорядоченности между любыми кардинальными числами. Этот пробел был заполнен частично теоремой Ф. Бернштейна (1897 г.), показывающей, что отношения $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{b}$ и $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{a}$ влекут за собой $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$[3]), и особенно теоремой Цермело [251a], в которой доказывалась возможность вполне упорядочить любое множество — теорема, которую уже с 1883 г. предугадывал Кантор ([35], стр. 169).

Дедекинд с неустанным вниманием следил за работами Кантора с самого их появления: но тогда как Кантор сосре-

[1]) Современники Кронекера часто делали намеки на его доктринерскую позицию в вопросе об основаниях математики; можно предположить, что при личных встречах он выражался более ясно, чем в своих статьях (в которых, касаясь вопроса о роли натуральных чисел, он ограничивался тем, что повторял свои замечания об «арифметизации», ставшие уже банальными к 1880 г.) (ср. [241b], особенно стр. 14—15).

[2]) Об этом периоде жизни Кантора см. [202b].

[3]) Эта теорема уже была получена Дедекиндом в 1887 г., но доказательство ее не было опубликовано ([60], т. III, стр. 447).

доточил все свое внимание на бесконечных множествах и их классификации, Дедекинд продолжал свои размышления о понятии числа (которые уже привели его к определению иррациональных чисел посредством «сечений»). В небольшой работе «Was sind und was sollen die Zahlen», опубликованной в 1888 г., но основные результаты которой относятся к 1872—1878 гг. ([60], т. III, стр. 335), он показывает, каким образом понятие натурального числа (на котором, как мы видели, в конечном счете основана вся классическая математика), могло само быть производным от основных понятий теории множеств. Изучая (и, по-видимому, впервые выражая ясным языком) элементарные свойства произвольных отображений одного множества в другое (не принимаемые во внимание Кантором, который интересовался лишь взаимно однозначными соответствиями), он вводит для каждого отображения $f$ множества $E$ в себя понятие «цепи» элемента $a \in E$ относительно $f$, а именно пересечение множеств $K \subset E$, таких, что $a \in K$ и $f(K) \subset K$ [1]. Затем он принимает в качестве *определения* бесконечного множества $E$ факт, что существует $\varphi$—взаимно однозначное отображение $E$ в $E$, такое, что $\varphi(E) \neq E$ [2]. Если, кроме того, существует такое отображение $\varphi$ и такой элемент $a \notin \varphi(E)$ для которого $E$ будет цепью $a$, Дедекинд говорит, что $E$ «просто бесконечно», замечает, что «аксиомы Пеано» в этом случае выполняются, и показывает (до Пеано), как отсюда получаются все элементарные теоремы арифметики. Его изложению не хватает только аксиомы бесконечности, которую Дедекинд (вслед за Больцано) пытается доказать путем рассмотрения «мира мыслей» («Gedankenwelt») как единого множества [3].

---

[1] Второе доказательство, которое дал Цермело своей теореме, основано на почти аналогичном понятии.

[2] Мы видели, что Больцано уже отметил эту особенность бесконечных множеств, но его труд (мало распространенный, как кажется, среди математиков) был неизвестен Дедекинду, когда он писал «Was sind und was sollen die Zahlen».

[3] Другой метод определения понятия натурального числа и установления его основных свойств был предложен в 1884 г. Фреге [89b]. Прежде всего он старается более точно определить понятие кардинального числа какого-нибудь множества, чем это делал Кантор. Последний к данному времени определил лишь понятия равномощных множеств и множества, имеющего мощность, не большую мощности другого множества. Что касается данного им немного позднее определения «кардинального числа» ([35], стр. 282), оно так же неясно и бесполезно, как и определение прямой линии у Евклида. Фреге, всегда стремящийся к точности, предложил определить кардинальное число множества $A$ как множество всех множеств равномощных $A$ ([89b], § 68); затем, определив $\varphi(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a} + 1$ для любого кардинального числа (§ 76), он определяет во множестве $C$ всех кардинальных чисел отношение «$\mathfrak{b}$ есть $\varphi$-следующее за $\mathfrak{a}$», означающее, что $\mathfrak{b}$ принадлежит к пересечению всех мно-

С другой стороны, Дедекинд в ходе своих работ по арифметике (и именно по теории идеалов) пришел к рассмотрению понятия упорядоченного множества в более общей форме, чем у Кантора. Тогда как последний ограничивается исследованием совершенно упорядоченных множеств [1]), Дедекинд рассматривает общий случай и углубляется в изучение решеток ([60], т. II, стр. 236—271). Его работы в то время не были замечены. Хотя результаты этих работ, найденные вновь различными авторами, стали появляться начиная с 1935 г. в многочисленных публикациях, их историческое значение заключается не столько в возможности применения, к тому же весьма ограниченного, этой теории, как в том, что они являются одним из первых примеров тщательного аксиоматического построения. В противоположность этому первые результаты Кантора о счетных множествах, или множествах, имеющих мощность континуума, быстро нашли многочисленные и важные применения, даже в наиболее классических проблемах анализа [2]) (не говоря уже о тех разделах канторовских работ, которые положили начало общей топологии и теории меры (см. ниже, стр. 141 и 234—235). Кроме того, начиная с последних лет XIX в. появляются первые применения принципа трансфинитной индукции, который становится, особенно после доказательства теоремы Цермело, необходимым орудием во всех разделах современной математики. В 1922 г. Куратовский излагает свою версию этого принципа, более удобную для работы, избегая употребления вполне упорядоченных множеств ([139a], стр. 89); в настоящее время принцип главным образом употребляется именно в этой форме, которую впоследствии вновь нашел Цорн [252] [3]).

---

жеств $X \subset C$, таких, что $\varphi(a) \in X$ и $\varphi(X) \subset X$ (§ 79). Наконец, он определяет натуральное число как $\varphi$-следующее за 0 (§ 83); само собой разумеется, что для всех определений Фреге пользуется языком своей «логики понятий». К сожалению, эта конструкция оказалась порочной, так как множество $C$ или множество множеств, равномощных множеству $A$, оказалось «парадоксальным» (см. ниже).

[1]) Любопытно отметить, что Кантор никогда не хотел допустить существования среди этих последних неархимедовски упорядоченных групп, так как они содержали понятие «актуально бесконечно малой» ([35], стр. 156 и 172). Подобные отношения порядка были естественным образом обнаружены в исследованиях Дюбуа-Реймона о порядках бесконечного (ср. стр. 225) и систематически изучались Веронезе [232].

[2]) В 1874 г. Вейерштрасс в письме к Дюбуа-Реймону указывает на применение к функциям действительной переменной теоремы Кантора о возможности расположить рациональные числа в последовательность ([243b], стр. 206).

[3]) Вследствие этого значительно уменьшился интерес к канторовским порядковым числам; вообще говоря, многие из результатов, полученных Кантором и его последователями в арифметике порядковых и несчетных кардинальных чисел, до сих пор остаются изолированными.

К концу XIX в. основные понятия канторовой теории получают признание [1]). Мы видели, что к этому времени закончился процесс формализации математики и почти повсеместно был принят аксиоматический метод. Но в это же время разразился исключительный по своей силе «кризис оснований», который более тридцати лет потрясал мир математики и временами грозил опорочить не только все ее недавние завоевания, но также и наиболее классические ее области.

## Парадоксы теории множеств и кризис оснований

Первые «парадоксальные» множества появились в теории кардинальных и порядковых чисел. В 1897 г. Бурали-Форти пришел к выводу, что нельзя утверждать существование множества, образованного из *всех порядковых чисел*, так как это множество было бы вполне упорядоченным и, следовательно, изоморфным одному из своих отрезков, отличных от него самого, что является абсурдом [31] [2]). В 1899 г. Кантор в письме к Дедекинду отметил, что, не впадая в противоречие, нельзя сказать, что кардинальные числа образуют множество, или говорить о «множестве всех множеств» (множество подмножеств этого последнего «множества» $\Omega$ было бы равномощным подмножеству множества $\Omega$, что противоречит неравенству $\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}}$) ([35], стр. 444—448). Наконец, в 1905 г. Рассел, анализируя доказательство этого неравенства, показал, что из устанавливающего его рассуждения следует (без обращения к теории кардинальных чисел) противоречивость понятия «множества всех множеств, которые не содержат себя в качестве элемента» [194] [3]).

Можно было бы предположить, что подобные «антиномии» могут возникать только на периферии математической мысли, порождаемые рассмотрением множеств, имеющих «величину», недоступную для интуиции. Однако вскоре возникли другие «парадоксы», угрожающие наиболее классическим положениям

---

[1]) Официальное признание теории множеств произошло уже на Первом международном конгрессе математиков (Цюрих, 1897), на котором Адамар [106] и Гурвиц привели многочисленные случаи применения ее в анализе. Возрастающее влияние Гильберта в эту эпоху значительно способствовало распространению идей Кантора, особенно в Германии.

[2]) Это замечание было уже сделано Кантором в 1896 г. (в неопубликованном письме к Гильберту).

[3]) Рассуждение Рассела близко к античным парадоксам, наиболее известным из которых является парадокс типа «лжеца», повлекший за собой бесчисленные комментарии в формальной классической логике; суть его заключается в том, чтобы определить, говорит ли человек правду или нет, когда он произносит слово «я лгу» (ср. [195]).

математики. Действительно, Берри и Рассел ([194], т. I, стр. 63—64), упрощая рассуждение Ж. Ришара [186], замечают, что множество целых чисел, определение которых содержит не более тринадцати русских слов [1]), является конечным, но тем не менее определение целого числа как «наименьшего целого, которое не может быть определено менее чем тринадцатью русскими словами», противоречиво, так как это определение само содержит только двенадцать русских слов.

Хотя подобные рассуждения, слишком необычные в повседневной практике математиков, могли показаться многим из них своего рода каламбурами, тем не менее они явно указывали на необходимость пересмотра основ математики, имеющего целью уничтожить «парадоксы» такого рода. Но если математики единодушно признавали необходимость пересмотра, мнения их радикально расходились по вопросу о способе его осуществления. Одна группа математиков, назовем их «идеалистами» или «формалистами» [2]), считала, что положение, созданное «парадоксами» теории множеств, весьма аналогично тому, которое возникло в геометрии после открытия неевклидовых геометрий или «патологических» кривых (как, например, кривых без касательной); оно должно привести примерно к аналогичному выводу, но только более общему, а именно что напрасно пытаться создавать какую-нибудь математическую теорию при помощи обращения (явного или нет) к «интуиции». Один из главных противников формалистической школы дал следующую характеристику ее позиции: *«Формалист*, — говорит Брауэр ([30 а], стр. 83), — *считает, что разум человека не обладает точным отображением прямых линий или, например, чисел выше десяти... Действительно из некоторых отношений между математическими сущностями, которые мы принимаем за аксиомы, мы выводим другие отношения по установленным правилам, с полной уверенностью, что таким образом получаем истины из других истин с помощью логического рассуждения...* (Но) *для формалиста математическая точность заключается только в развертывании последовательности отношений и не зависит от значений, которые хотят придать тем отношениям или сущностям, которые они связывают»*.

Таким образом, формалист стремится подвести под теорию множеств аксиоматическую основу, аналогичную основе

---

[1]) В подлиннике речь идет о 16 французских словах. — *Прим. перев.*

[2]) Различия между этими двумя школами главным образом философского порядка, и здесь мы не можем входить в дальнейшие подробности по этому вопросу; существенное у них то, что они объединяются на почве чисто математических вопросов. Так, например, Адамар, типичный представитель «идеалистов», становится на точку зрения, очень близкую к формалистической, когда говорит о законности рассуждений теории множеств, хотя не выражает свою точку зрения в аксиоматической форме ([10], стр. 271).

элементарной геометрии, где не пытаются познать, ни что такое «вещи», которые называются «множествами», ни что означает отношение $x \in y$, но где перечисляются условия, наложенные на это последнее отношение. Само собой разумеется, что это должно быть сделано так, чтобы в аксиоматизированную теорию были включены по мере возможности все результаты теории Кантора и чтобы в ней не существовали «парадоксальные» множества. Первый пример подобной аксиоматизации был дан в 1908 г. Цермело [251c]; он избегает «слишком больших» множеств путем введения «аксиомы селекции» (Aussonderung), по которой свойство $P(x)$ лишь тогда определяет множество, образованное из обладающих этим свойством элементов, если $P(x)$ влечет за собой отношение вида $x \in A$ [1]). Но исключение парадоксов, аналогичных «парадоксу Ришара», могло осуществиться только при ограничении смысла, приписываемого понятию «свойство». Поэтому Цермело ограничивается описанием, к тому же весьма расплывчатым, типа свойств, которые он называет *«определенными»*, и указывает, что надо ограничиваться этими последними при применении аксиомы селекции. Этот пункт был уточнен Сколемом [209a] и Френкелем [85a], которые показали, что для его понимания требуется исходить из полностью формализованной системы, в которой понятия «свойство» и «отношение» потеряли всякое «значение» и стали простыми обозначениями для различных сочетаний знаков, образованных по явно сформулированным правилам. При этом, разумеется, необходимо было ввести в систему используемые там правила логики, чего еще не требовалось в системе Цермело — Френкеля.

Впоследствии были предложены некоторые другие варианты аксиоматизации теории множеств. Среди них отметим систему фон Неймана [238 a и b], которая ближе подходит к наивной концепции Кантора, чем система Цермело — Френкеля. Кантор во избежание парадоксальных множеств предложил ([35], стр. 445—448) в переписке с Дедекиндом различать два вида множеств, а именно «многообразия» («Vielheiten») и собственно «множества» («Mengen»). Последние отличаются тем, что их можно мыслить в виде одного объекта. Фон Нейман пользуется этой идеей, чтобы различить два типа объектов: «множества» и «классы». В его системе (почти полностью формализованной) классы отличаются от множеств тем, что не могут быть помещены слева от знака $\in$. Одно из преимуществ подобной системы

---

[1]) Например, парадокс Рассела имел бы место в системе Цермело, только если бы в ней было доказано отношение $(\exists z)(x \notin x) \Longrightarrow (x \in z)$; само собой разумеется, что подобное доказательство, если бы оно было получено, немедленно повлекло бы за собой необходимость существенного изменения данной системы.

заключается в том, что она реабилитирует понятие «универсального класса», которым пользовались логики XIX в. (он, естественно, не является множеством); отметим также, что фон Нейман в своей системе избегает (для теории множеств) вводить схему аксиом, заменяя ее подходящими аксиомами (что облегчает логическое исследование). Варианты системы фон Неймана были даны Бернайсом и Гёделем [100 b].

Несмотря на то что из приведенных выше систем парадоксы были, по-видимому, исключены, это удалось сделать за счет ограничений, которые не могут не казаться крайне произвольными. В оправдание системы Цермело—Френкеля можно сказать, что в ней формулируются только те запреты, которые не препятствуют обычной практике применения понятия множества в различных математических теориях. Системы фон Неймана и Гёделя более далеки от обычных концепций; в противовес этому не исключено, что они дают бо́льшую возможность включать некоторые вновь возникающие математические теории в свои рамки, чем более узкая система Цермело—Френкеля.

Конечно, нельзя утверждать, что хотя бы одно из этих решений производит впечатление окончательного. Если они удовлетворяют формалистов, это происходит потому, что последние не хотят принимать в соображение индивидуальную психологическую реакцию каждого математика; они считают, что формализованный язык достигает своей цели, если с его помощью можно записать математические рассуждения в форме, лишенной всякой двусмысленности, и тем самым он может служить средством выражения математической мысли; каждый волен, говорят они, думать, что ему угодно, о «природе» математических сущностей, или об «истинности» теорем, которыми он пользуется, лишь бы его рассуждения могли быть записаны общепринятым языком [1]).

Другими словами, с философской точки зрения позиция формалистов выражается в том, что они не интересуются проблемами, поставленными «парадоксами», и порывают с воззрениями Платона, который стремится придать математическим понятиям интеллектуальное «содержание», общее для всех математиков. Многие математики отступают от подобного разрыва с традицией. Рассел, например, пытается избежать парадоксов путем более углубленного анализа их структуры. Подхватив идею Ж. Ришара (изложенную в статье [186], где он сформулировал свой «парадокс») и впоследствии развитую А. Пуанкаре [181e], Рассел и

---

[1]) Гильберт, во всяком случае, кажется, всегда верил в объективную математическую «истину» ([122], стр. 315 и 323). Даже формалисты, которые, как А. Карри, придерживаются позиции, весьма схожей с изложенной нами здесь, с негодованием отвергают мысль о том, что математику можно рассматривать как простую игру, и настаивают на признании ее «объективной наукой» ([54], стр. 57).

Уайтхед замечают, что все определения парадоксальных множеств нарушают следующий принцип, называемый «принципом порочного круга»: «Элемент, который определяется через совокупность всех элементов какого-нибудь множества, не может принадлежать этому множеству» ([194], т. I, стр. 40). Это же предложение положено в основу книги «Principia» и для обеспечения его была создана «теория типов». Подобно работе Фреге (вдохновившей авторов), логика Рассела и Уайтхеда включает «пропозициональные переменные»; теория типов приводит к классификации различных переменных, основные черты которой заключаются в следующем. Отправным пунктом является «область индивидов», которые не уточняются и могут быть названы «объектами порядка 0»; отношения, у которых переменные (свободные, либо связанные) суть индивиды, названы «объектами первого порядка»; вообще говоря, отношения, у которых переменные суть объекты порядка $\leqslant n$ (и по крайней мере одна из них порядка $n$), названы «объектами порядка $n+1$» [1]).

Множество объектов порядка $n$ в этом случае может быть определено только отношением порядка $n+1$, и это условие дает возможность без труда исключить парадоксальные множества [2]). Но принцип «иерархии типов» настолько ограничителен, что, если строго его придерживаться, может привести к безнадежно сложной математике [3]). Чтобы избежать этих последствий, Рассел и Уайтхед вынуждены были ввести «аксиому сводимости», утверждающую существование для каждого отношения между «индивидами» отношения *первого порядка*, которое ему эквивалентно; условие это, будучи столь же произвольным, как и аксиомы формалистов, значительно снизило интерес к построениям «Principia». Поэтому система Рассела и Уайтхеда имела больший успех у логиков, чем у математиков; к тому же она

---

[1]) По существу, это только начало классификации «типов», о которых невозможно дать точного представления, не входя в очень длинные пояснения; читатель, интересующийся более подробными объяснениями, найдет их в предисловии ко второму тому «Principia Mathematica» [194].

[2]) В системе Рассела и Уайтхеда запись отношения $x \in x$ не является законной в противоположность, например, системе Цермело — Френкеля.

[3]) Например, в системе «Principia» равенство не есть первичное понятие: два объекта $a$, $b$ равны, если для всякого свойства $P(x)$, $P(a)$ и $P(b)$ являются эквивалентными высказываниями. Но это определение не имеет смысла для теории типов: для того, чтобы придать ему смысл, надо было бы по крайней мере уточнить «порядок» $P$, но это бы привело к необходимости различать бесконечность отношений равенства! Кроме того, Цермело уже в 1908 г. [251b] заметил, что в многочисленных определениях классической математики (как, например, в определении нижней грани множества из $\mathbf{R}$) не принимается во внимание «принцип порочного круга» и что принятие этого принципа грозило бы наложить запрет на важные разделы наиболее традиционных математических теорий.

не полностью формализована[1]), в результате чего многие мелкие ее детали остаются неясными. Делались различные попытки упрощения и уяснения этой системы (Рамсей, Хвистек, Куайн, Россер); стремясь использовать все более и более формализованные языки, эти авторы заменяют правила «Principia» (которые были еще в какой-то мере основаны на интуиции) ограничениями, относящимися только к записи рассматриваемых сочетаний знаков. Эти правила не только оказались такими же немотивированными, как и запреты, изложенные в системах Цермело — Френкеля или фон Неймана, но и, помимо этого, будучи более далекими от математической практики, привели в некоторых случаях к неприемлемым следствиям, которых не предвидели их авторы (как, например, парадокс Бурали-Форти или отрицание аксиомы выбора).

Математики выше рассмотренных школ не хотели отказываться от какой бы то ни было части из наследства прошлого: *«Никто не сможет изгнать нас из рая, созданного для нас Кантором»,* — говорит Гильберт ([122c], стр. 274). Для этого они склонны примириться с ограничениями, малосущественными для математических рассуждений, потому что они соответствуют практике, но, по-видимому, не продиктованы нашими умственными привычками и интуитивным понятием множества. Они предпочитают все что угодно, но только не вторжение психологии как критерия для оценки законности математики. Чтобы только не *«принимать во внимание свойств нашего мозга»*, как говорит Адамар ([10], стр. 270), они безропотно покоряются необходимости ограничить область математики по большей части произвольно с условием, что в эту область будет включена классическая математика и не будут созданы препятствия для дальнейшего развития.

Совершенно иначе ведут себя математики, стоящие на позициях, которые нам осталось рассмотреть. Если формалисты готовы отказаться от контроля «умственного взора» над тем, что относится к математическому рассуждению, то математики, которых окрестили «эмпиристами», «реалистами» или «интуиционистами», не признают подобного отречения. Им необходима некая внутренняя уверенность, гарантирующая «существование» математических объектов, которыми они занимаются. Когда речь шла только о том, чтобы отказаться от пространственной интуиции, серьезных возражений не было, ибо арифметические «модели» давали возможность укрыться за интуитивным понятием целого числа. Но когда встал вопрос о том, чтобы понятие целого

[1]) Рассел и Уайтхед (как и Фреге) придерживаются классической позиции в отношении математических формул, которые для них всегда должны иметь «смысл», относящийся к подсознательной деятельности мышления.

числа свести к понятию множества (значительно менее интуитивно точному), а затем без интуитивного основания поставить барьеры применению множеств, появилась непримиримая оппозиция. Первым из оппозиционеров (который в силу авторитета своего гения должен был оказать наибольшее влияние) был Пуанкаре; приняв аксиоматическую точку зрения в отношении геометрии и арифметизации анализа, а также добрую часть теории Кантора (которую он одним из первых плодотворно применял в своих работах), он, однако, отказывается признать, что и арифметика также может быть подвергнута аксиоматической трактовке. В частности, он считает, что принцип полной индукции является основной интуицией нашего разума и что в нем нельзя усмотреть чистое соглашение [181e] [1]). Враждебно настроенный в принципе к формализованным языкам, полезность которых он оспаривает, Пуанкаре постоянно путает понятие целого числа в формализованной математике и применение целых чисел в теории доказательства, которая тогда еще только намечалась и о которой мы скажем позднее. Конечно, в то время было трудно провести это различие так четко, как в наши дни — после 50 лет изучений и обсуждений, — но его уже, однако, хорошо чувствовали такие ученые, как Гильберт и Рассел.

Критика такого рода значительно усилилась после введения Цермело в 1904 г. [251a] аксиомы выбора. Применение этой последней в многочисленных доказательствах анализа и теории множеств оставалось до тех пор почти незамеченным [2]). Развивая идею Эрхарда Шмидта, Цермело явно сформулировал эту аксиому и остроумно вывел из нее доказательство возможности вполне упорядочить любое множество. Появившись одновременно с «парадоксами», новый вид рассуждений своей необычностью, по-видимому, внес смятение в среду математиков. Стоит только раскрыть следующий том Mathematische Annalen, чтобы убедиться в том, какие странные недоразумения возникали по этому поводу у математиков, которые, так же как, например, Шенфлис

---

[1]) Пуанкаре доходит до того, что говорит в сущности о невозможности определить структуру, в которой выполнялись бы все аксиомы Пеано, за исключением принципа полной индукции ([181c], стр. 65); пример (данный Падоа) целых чисел с отображением $x \to x + 2$, заменяющим $x \to x + 1$, показывает, что это утверждение неточно. Любопытно, что мы находим его уже у Фреге, где оно изложено почти в тех же терминах ([89b], стр. 21, e).

[2]) В 1890 г. Пеано, доказывая свою теорему существования интегралов дифференциальных уравнений, заметил, что он естественным образом пришел к *«применению бесконечно много раз произвольного закона, который каждому классу ставит в соответствие индивид этого класса»*; но он сразу же добавил, что подобное доказательство для него является неприемлемым ([177e], стр. 210). В 1902 г. Б. Леви заметил, что такое же рассуждение было в скрытой форме использовано Ф. Бернштейном для одного доказательства из теории кардинальных чисел [145].

и Бернштейн, были хорошо знакомы с методами Кантора. Критика Э. Бореля, опубликованная в том же томе, более обстоятельна и решительно примыкает к точке зрения А. Пуанкаре о целых числах. Эти взгляды получили дальнейшее развитие и широко обсуждались в переписке Э. Бореля, Бэра, Адамара и Лебега, письма которых до сих пор считаются классическим образцом французской математической традиции [10]. Борель начинает с отрицания аксиомы выбора, так как она предполагает в общем несчетную бесконечность выборов, что непостижимо для интуиции. Но Адамар и Лебег замечают, что и счетная бесконечность произвольных последующих выборов не более постижима для интуиции, так как предполагает бесконечность операций, которые невозможно осознать как совершающиеся в действительности. Для Лебега, который расширяет границы полемики, все сводится к тому, чтобы установить, что имеют в виду, когда говорят, что математический объект «существует»; он требует явного «названия» свойства, которое однозначно определяло бы объект (мы бы сказали «функционального» свойства). Для функции, подобной той, которой пользуется Цермело в своем рассуждении, это — то, что Лебег называет «законом» выбора. Если, продолжает он, это требование не удовлетворяется и ученые ограничиваются тем, что «думают» об этой функции вместо того, чтобы «назвать» ее, можно ли быть уверенным, что в течение рассуждения они всегда думают о том же самом ([10], стр. 267)? В связи с этим у Лебега возникают новые сомнения; ему кажется, что сам вопрос выбора одного элемента из множества порождает затруднения. Надо быть уверенным, что такой элемент «существует», т. е. что можно «назвать» хотя бы один из элементов множества [1]). Можно ли говорить о «существовании» множества, в котором мы не можем «назвать» каждый элемент? Уже Бэр без колебания отрицает «существование» множества подмножеств данного бесконечного множества (см. цитированный отрывок, стр. 263—264). Напрасно Адамар замечает, что подобные требования ведут к тому, что вообще придется отказаться от рассмотрения множества действительных чисел; к этому

---

[1]) Так называемый «выбор» элемента во множестве в действительности не имеет ничего общего с аксиомой выбора. Это просто манера выражаться, и там, где он употребляется, под ним имеют в виду применение самых элементарных логических правил (в которые не входит знак $\tau$). Понятно, что применение этих правил к множеству $A$ требует, чтобы было доказано, что $A \neq \varnothing$. Аргументация Лебега касается именно этого пункта, так как для него подобное доказательство только тогда применимо, если будет точно назван один элемент из $A$. Так, например, Лебег не признает рассуждений Кантора ([35], стр. 115—118) в доказательстве существования трансцендентных чисел. Это существование для него доказано только потому, что возможно «назвать» трансцендентные числа, такие, как числа Лиувилля или числа $\pi$ или $e$.

же заключению приходит в конечном итоге и Э. Борель. Но если отвлечься от того факта, что счетные множества, по-видимому, получили право гражданства, математика почти возвратилась к классической позиции противников «актуальной бесконечности».

Все эти возражения были не слишком систематичны. На долю Брауэра и его школы выпала роль коренным образом пересмотреть математику в свете подобных, но еще более радикальных принципов. Мы не будем здесь пытаться излагать сложную доктрину интуиционизма, которая имеет такое же отношение к психологии, как и к математике, и ограничимся описанием ее наиболее поразительных черт, отсылая интересующихся более подробным изложением к работам Брауэра [30a и b] и Гейтинга [121]. Для Брауэра математика тождественна «точной» части наших мыслей, которая основана на первичной интуиции последовательности натуральных чисел и которую невозможно без искажения перевести в формальную систему. К тому же она «точна» только в уме математиков, и было бы утопией надеяться изобрести такое средство коммуникации, которое было бы лишено всех несовершенств и двусмысленностей языка. Самое большее, на что можно надеяться, — это вызвать у собеседника благоприятное состояние ума с помощью более или менее туманных описаний ([121], стр. 11—13). Логика, по мнению математиков-интуиционистов, имеет не большее значение, чем язык, — доказательство убедительно не в силу логических правил, установленных раз и навсегда, но в силу «непосредственной очевидности» каждого своего звена. Эту «очевидность» надо к тому же понимать в более узком смысле, чем у Э. Бореля и его приверженцев. Поэтому в интуиционистской математике нельзя говорить о том, что отношение вида «$R$ или (не $R$)» истинно (принцип исключенного третьего), если только для любой системы значений переменных, имеющихся в $R$, нельзя доказать, что одно из двух предложений $R$, (не $R$) есть истинное. Например, из уравнения $ab = 0$ между двумя действительными числами нельзя заключить «$a = 0$» или «$b = 0$», так как легко образовать явные примеры действительных чисел $a$, $b$, для которых имеем $ab = 0$, хотя в данное время не умеем доказать ни одно из двух предложений $a = 0$, $b = 0$ ([121], стр. 21).

Нет ничего удивительного в том, что, исходя из этих принципов, математики-интуиционисты приходят к результатам, сильно отличающимся от классических теорем. Многие из этих последних исчезают, например большинство «экзистенциальных» теорем анализа (как, например, теоремы Больцано и Вейерштрасса для числовых функций). Если функция действительной переменной «существует» в интуиционистском смысле, она ipso facto непрерывна; ограниченная монотонная последовательность действительных чисел не обязательно имеет предел. С другой стороны, многие классические понятия подразделяются, по мнению интуиционистов, на несколько существенно различных понятий. Так, имеются два понятия сходимости (для последовательности действительных чисел) и восемь понятий счетности. Само собой разумеется, что трансфинитной индукции и ее применению в современном анализе (так же как и большей части теории Кантора) выносится приговор без права обжалования.

Только таким образом, согласно Брауэру, математические предложения могут наполниться «содержанием». Рассуждения формалистов, выходящие за пределы того, что допускает интуиционизм, отвергаются, так как им нельзя придать «смысл», к которому можно было бы применить интуитивное понятие «истины». Ясно, что подобные оценки могут опираться лишь на понятие психологического или метафизического порядка, предшествующее «истине». Если это так, то они не подлежат какому-либо обсуждению.

Сильные атаки лагеря интуиционистов, несомненно, заставили математиков — не только передовых школ, но и приверженцев традиционной математики — организовать на какое-то время оборонительные действия. Один известный математик признал, что эти атаки произвели на него такое впечатление, что он добровольно ограничил свои исследования областями математики, которые считались «надежными». Но такие случаи были редкими. Интуиционистская школа, о которой в математике вспоминают как о своего рода историческом курьезе, во всяком случае, оказала услугу математике тем, что заставила своих противников, т. е. подавляющее большинство математиков, уточнить свои позиции и яснее осознать причины (одни логического порядка, другие — психологического) их веры в математику.

## Метаматематика

Условием sine qua non всей математики в любую эпоху считалось отсутствие противоречий. Начиная с Аристотеля, логика была уже настолько развита, что ученые прекрасно понимали, что из противоречивой теории можно вывести все что угодно. Доказательства «существования», которые со времен античности считались необходимыми, служили, очевидно, гарантией того, что введение нового понятия не приведет к противоречию, особенно если это понятие было слишком сложным, чтобы быть непосредственно воспринятым с помощью интуиции. Мы видели, что с появлением в XIX в. аксиоматической точки зрения это требование становится все более настоятельным и что ответом на него явилось построение арифметических «моделей». Но не могла ли быть противоречивой сама арифметика? Такой вопрос, конечно, не мог быть поставлен до конца XIX в. — до такой степени целые числа, казалось, принадлежали к тому, что являлось наиболее надежным в интуиции. Но после появления «парадоксов» все, казалось, было поставлено под вопрос, и вполне понятно, что вызванное этими парадоксами чувство неуверенности заставило математиков конца прошлого века относиться с большим вниманием к проблеме непротиворечивости арифметики, чтобы спасти от крушения хотя бы классическую математику. Поэтому Гильберт, перечисляя в своем известном выступлении на международном конгрессе 1900 г. насущные задачи математики, поставил данную проблему на второе место ([122a], т. III, стр. 229—331). Он выставил новый принцип, вызвавший многочисленные отклики: в то время как в традиционной логике непротиворечивость некоторого понятия делала его лишь возможным, для Гильберта непротиворечивость некоторого понятия (по крайней мере для математических понятий, определенных аксиоматически) эквивалентна его существованию. В связи с этим возникала необходимость доказывать a priori непротиворечивость некоторой математической теории еще до начала ее систематического развития. Именно на этой точке зрения стоит А. Пуанкаре, который, чтобы пробить брешь в формализме, подхватывает идею Гильберта и насмешливо подчеркивает, как далеки формалисты его времени от возможности осуществить ее ([181e], стр. 163). Дальше мы увидим, как Гильберт принял этот вызов; пока отметим, что благодаря его авторитету, а также авторитету Пуанкаре требования, выставленные последним, долгое время принимались без оговорок как формалистами, так и их противниками. В результате многие формалисты верили в то, что теория доказательства Гильберта была составной частью математики и необходимым введением в нее. Эта догма не представляется нам обоснованной [1]), и мы считаем, что вторжение метаматематики в изложение логики и математики может и должно быть сведено к самой элементарной части, которая трактует об употреблении сокращающих символов и дедуктивных критериев. Таким образом, дело идет не о том, «чтобы отстаивать свободу противоречия», как это утверждает Пуанкаре, но скорее о том, чтобы считать вместе с Адамаром, что отсутствие противоречия можно констатировать даже тогда, когда его не удается доказать ([10], стр. 270).

Нам остается лишь дать краткий исторический очерк исследований Гильберта и его школы и в общих чертах описать не только эволюцию, которая в конце концов привела к отрица-

---

[1]) Согласно чистой доктрине формалистов, слово «существует» в формализованном тексте имеет не больше «значения», чем другие слова, а другие типы «существования» в формализованных доказательствах не рассматриваются.

тельному результату Гёделя, и оправдать a posteriori скептицизм Адамара, но также и вызванный всем этим прогресс, относящийся к познанию механизма математического рассуждения, благодаря которому современная метаматематика стала автономной наукой несомненного интереса.

В 1904 г. в своем докладе на международном конгрессе ([122 c], стр. 247—261) Гильберт принимается за проблему непротиворечивости арифметики. Он констатирует, что не может быть и речи о том, чтобы доказать ее посредством модели [1]), и в общих чертах излагает другой метод. Он предлагает рассматривать истинные предложения формализованной арифметики как сочетания знаков, состоящие из символов, не имеющих значения, и доказать, что, пользуясь правилами образования и соединения этих сочетаний знаков, никогда нельзя получить такое сочетание знаков, которое будет истинным высказыванием и отрицание которого также будет истинным. Он даже набрасывает такого рода доказательство для формализма менее обширного, чем арифметика. Но, как замечает немного позднее А. Пуанкаре ([181 e], стр. 185), это доказательство существенно использует принцип индукции и, по-видимому, опирается на порочный круг. Гильберт не сразу ответил на эти критические замечания, и в последующие 15 лет математики не предпринимали каких-либо попыток дальнейшего развития этих идей; только в 1917 г. Гильберт (вынужденный ответить на нападки интуиционистов) возвращается к проблеме об основаниях математики, которой он не переставал заниматься уже до конца своей научной деятельности.

В своих работах по этой тематике, проводимых приблизительно с 1920 по 1930 г., в которых активно участвует целая школа молодых математиков (Аккерман, Бернайс, Эрбран, фон Нейман), Гильберт постепенно приходит к более точному определению принципов своей «теории доказательства». Неявно признавая обоснованность критики Пуанкаре, он допускает, что используемые в метаматематике арифметические рассуждения могут быть основаны только на нашей интуиции целых чисел (а не на формализованной арифметике). Для этого казалось существенным ограничить рассуждения финитными процессами («finite Prozesse») по типу, допускаемому интуиционистами. Так, например, методом от противного нельзя доказать в метаматематике существование сочетания знаков или последовательности

---

[1]) «Модели», данные определениями Дедекинда и Фреге, переводят вопрос в другую плоскость, а именно приводят к вопросу о непротиворечивости теории множеств. Эта проблема, несомненно, более трудная, чем проблема непротиворечивости арифметики, а в эпоху, когда еще не было сделано ни одной серьезной попытки, чтобы избежать «парадоксов», она должна была казаться еще труднее.

сочетаний знаков, нужно дать явный закон их построения [1]). С другой стороны, Гильберт расширяет свою первоначальную программу в двух направлениях. Он не только подходит вплотную к вопросу непротиворечивости арифметики, но и пытается также доказать непротиворечивость действительных чисел и даже непротиворечивость теории множеств [2]). Кроме того, к проблемам непротиворечивости присоединяются проблемы независимости аксиом, полноты [3]) и разрешимости. Ниже даем краткий обзор этих различных вопросов и основных исследований, им посвященных.

Доказательство *независимости* системы высказываний $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ состоит в том, чтобы показать, что для каждого индекса $i$ $A_i$ не является теоремой в теории $\mathcal{T}_i$, полученной, если взять за аксиомы $A_j$ с индексами $j \neq i$. Этот пункт будет установлен, если известна непротиворечивая теория $\mathcal{T}'_i$, в которой $A_j$ $(j \neq i)$ являются теоремами, так же как «не $A_i$». Эту проблему можно тоже рассматривать с двух точек зрения в зависимости от того, предполагается или нет непротиворечивость некоторых других теорий (например, арифметики или теории множеств). Во втором случае мы имеем дело с проблемой «абсолютной» непротиворечивости. И наоборот, проблемы первого типа решаются как проблемы «относительной» непротиворечивости с помощью построения соответствующих «моделей». Многочисленные доказательства этого рода были придуманы задолго до полной формализации математики: достаточно вспомнить модели неевклидовой геометрии (см. стр. 132), вопросы независимости аксиом элементарной геометрии, рассмотренные Гильбертом в «Grundlagen der Geometrie» [122 c], так же как и работы Штейница по аксиоматике алгебры и Хаусдорфа и его последователей по аксиоматике топологии [4]).

---

1) Более подробное и точное описание финитных процессов, принятых в метаматематике, можно найти, например, в диссертации Ж. Эрбрана [118].

2) Когда говорят о непротиворечивости теории действительных чисел, предполагают, что она определена аксиоматически, без применения теории множеств (или по крайней мере без применения некоторых аксиом этой последней, как, например, аксиомы выбора или аксиомы о множестве подмножеств).

3) Мы употребляем более принятый у нас термин «полнота», хотя сам Н. Бурбаки пишет «категоричность» (catégoricité). В нашей литературе категоричность обычно понимается в смысле изоморфизма всех интерпретаций системы. — *Прим. перев.*

4) Вопрос, который часто обсуждался, касается независимости аксиомы выбора и гипотезы континуума (по отношению к другим аксиомам теории множеств, например, в системе Цермело — Френкеля или в системе фон Неймана — Бернайса — Гёделя); находить теоремы, эквивалентные той или другой, было одной из излюбленных тем для обсуждения польской школы (ср. [208a и b], где имеется обширная библиография). Френкель [85b] построил модель теории множеств, где аксиома выбора не верна, но аксиомы этой

Теория $\mathcal{T}$ называется *полной*, если для каждого высказывания $A$ из $\mathcal{T}$ (не содержащего никакой другой буквы, кроме константы из $\mathcal{T}$) одно из двух высказываний $A$, (не $A$) является теоремой в $\mathcal{T}$[1]). Если оставить в стороне некоторые очень элементарные формализмы, полнота которых легко доказуема ([123], стр. 35), то полученные в этом направлении результаты будут главным образом отрицательными; наиболее значительный из них дан К. Гёделем [100 а], который показал, что если теория $\mathcal{T}$ непротиворечива и если аксиомы формализованной арифметики являются теоремами $\mathcal{T}$, тогда $\mathcal{T}$ не полна. Основная идея его оригинального метода состоит в том, чтобы установить взаимно однозначное соответствие (разумеется, посредством «финитных процессов») между метаматематическими утверждениями и некоторыми высказываниями формализованной арифметики; мы ограничимся тем, что опишем ее в общих чертах[2]). Начинают с того, что каждому сочетанию знаков $A$, которое является термом или отношением из $\mathcal{T}$, взаимно однозначным образом относят целое число $g(A)$ (с помощью явной конструкции, выполняемой квазимеханически). Аналогично каждому доказательству $D$ из $\mathcal{T}$ (рассматриваемому как последовательность сочетаний знаков) можно взаимно однозначно сопоставить целое число $h(D)$.

Наконец, можно дать процесс явного построения отношения $P(x, y, z)$ из $\mathcal{T}$[3]), так что в $\mathcal{T}$ $P(x, y, z)$ влечет за собой, что $x, y, z$ — целые числа и выполняются два следующих условия.

1. Если $D$ есть доказательство $A(\lambda)$, где $A(x)$ есть отношение из $\mathcal{T}$, а $\lambda$ есть выявленное целое число (т. е. терм из $\mathcal{T}$, который является целым числом), тогда $P(\lambda, g(A(x)), h(D))$ есть теорема из $\mathcal{T}$.

2. Если выявленное целое число $\mu$ не имеет вида $h(D)$, или если $\mu = h(D)$, и $D$ не есть доказательство $A(\lambda)$, тогда (не $P(\lambda, g(A(x)), \mu)$) есть теорема из $\mathcal{T}$.

Пусть $S(x)$ будет отношением (не$(\exists z)P(x, x, z)$) и пусть $\gamma = g(S(x))$ является термом из $\mathcal{T}$. Если теория $\mathcal{T}$ непротиворечива, то в $\mathcal{T}$ нет *никакого доказательства* предложения $S(\gamma)$. Действительно, если бы $D$ было таким доказательством, то $P(\gamma, g(S(x)), h(D))$ было бы теоремой из $\mathcal{T}$; но это отно-

---

теории не являются точно такими, как в предшествующих системах; эти работы были продолжены Чёрчем [50] и Линденбаумом и Мостовским [146]. Проблема независимости гипотезы континуума, по-видимому, до сих пор не рассматривалась (ср. [100c]).

[1]) Это часто выражают, говоря, что если $A$ не есть теорема из $\mathcal{T}$, то теория $\mathcal{T}'$, полученная при добавлении $A$ к аксиомам $\mathcal{T}$, противоречива.

[2]) Более подробно см. [100a] или ([131], стр. 181—258).

[3]) Подробное описание $g(A)$, $h(D)$ и $P(x, y, z)$ является слишком длинным и кропотливым, а запись $P(x, y, z)$ потребовала бы такого количества знаков, что она практически невозможна, однако ни один математик не считает, что это в какой-либо степени снижает ценность его построений.

шение не что иное, как $P(\gamma, \gamma, h(D))$, и, следовательно, $(\exists z)P(\gamma, \gamma, z)$ было бы также теоремой из $\mathcal{T}$; так как это последнее отношение эквивалентно (не $S(\gamma)$), то теория $\mathcal{T}$ была бы противоречивой. С другой стороны, из сказанного выше следует, что для всякого выявленного целого $\mu$ (не $P$ $(\gamma, \gamma, \mu)$) есть теорема из $\mathcal{T}$. Отсюда следует, что нет *никакого доказательства* в $\mathcal{T}$ для (не $S(\gamma)$), так как это последнее отношение эквивалентно $(\exists z)\mathrm{P}(\gamma, \gamma, z)$ и существование целого числа $\mu$, такого, что $P(\gamma, \gamma, \mu)$, означало бы, что теория $\mathcal{T}$ противоречива в силу предшествующего [1]. Эта метаматематическая теорема Гёделя впоследствии была обобщена в различных направлениях ([131], гл. XI) [2].

Проблема *разрешимости* («Entscheidungsproblem»), несомненно, является наиболее претенциозной из всех, поставленных в метаматематике: она заключается в том, чтобы определить, возможно ли для данного формализованного языка вообразить не-

---

[1]) На самом деле, эта последняя часть рассуждения предполагает нечто большее, чем непротиворечивость $\mathcal{T}$, именно то, что называется «$\omega$-непротиворечивостью» $\mathcal{T}$; это означает, что в $\mathcal{T}$ не существует отношения $R(x)$, такого, что из $R(x)$ следовало бы $x \in \mathbf{N}$ и чтобы для каждого выявленного целого $\mu$ $R(\mu)$ было бы теоремой из $\mathcal{T}$, хотя $\exists x\,(x \in \mathbf{N})$ и (не $R(x)$) тоже является теоремой в $\mathcal{T}$. К тому же Россер показал, что можно изменить доказательство Гёделя так, что нужно предполагать только непротиворечивость $\mathcal{T}$ ([131], стр. 208).

[2]) Нетрудно заметить аналогию между рассуждениями Гёделя и софизмом лжеца: предложение $S(\gamma)$ утверждает свою собственную ложность, если его интерпретировать в терминах метаматематики! Следует также отметить, что предложение

$$(\forall z)((z \in \mathbf{N}) \Rightarrow (\text{не } P(\gamma, \gamma, z)))$$

интуитивно истинное, так как мы имеем доказательство в $\mathcal{T}$ (не $P(\gamma, \gamma, \mu)$) для всякого *выявленного* целого $\mu$; и, однако, это предложение недоказуемо в $\mathcal{T}$. Это положение можно сблизить с результатом, ранее полученным Лёвенгеймом и Сколемом (см. [209a]), последний математически определяет отношение между двумя *натуральными* числами $x$, $y$, которое записано как $x \in y$ и удовлетворяет аксиомам фон Неймана для теории множеств. Отсюда на первый взгляд следует новый «парадокс», так как в этой «модели» все бесконечные множества были бы счетными вопреки неравенству Кантора $\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}}$. Но в действительности «отношение», определенное Сколемом, не может быть записано в формализованной теории множеств, так же как и «теорема», утверждающая, что множество подмножеств бесконечного множества имеет лишь счетное количество «элементов»; по существу этот «парадокс» является более хитроумной формой банального утверждения о том, что можно записать не более конечного числа сочетаний знаков некоторой формализованной теории и что поэтому абсурдно представлять несчетное множество термов теории; это замечание близко к тому, которое уже привело к «парадоксу Ришара». Подобные рассуждения доказывают, что формализация теории множеств необходима, если желательно сохранить сущность построения Кантора. Математики, по-видимому, согласны с заключением, что между нашими «интуитивными» концепциями понятия множества или целого числа и формализмами, которые, как полагают, их выражают, существует лишь поверхностная согласованность; разногласия у них возникают только тогда, когда встает вопрос о выборе между теми или другими.

кий квазимеханический «универсальный процесс», который позволял бы для любого отношения из рассматриваемого формализма конечным числом операций определить, истинно ли это отношение или нет. Уже среди обширных проектов Лейбница вопрос о решении этой проблемы занимал почетное место, и одно время школа Гильберта, по-видимому, считала, что подошла совсем близко к его разрешению. Действительно, для формализмов, содержащих мало первоначальных знаков и аксиом ([131], стр. 136—141), можно описать эти процессы. Но усилия, направленные на уточнение проблемы разрешимости посредством четкого определения того, что следует понимать под «универсальным процессом», до сих пор приводили только к отрицательным результатам ([131], стр. 432—439). К тому же решение проблемы разрешимости для теории $\mathcal{T}$ дает возможность тотчас же узнать, является ли $\mathcal{T}$ противоречивой или нет, так как для этого достаточно применить «универсальный процесс» к некоторому отношению из $\mathcal{T}$ и к его отрицанию; и мы увидим, что решить вопрос этим способом для обычных математических теорий невозможно[1]).

И действительно, именно в вопросе о непротиворечивости математических теорий, который является началом и сущностью метаматематики, результаты оказались наиболее обманчивыми. В течение 1920—1930 гг. Гильберт и его школа развили новые методы, чтобы приступить к этой проблеме; доказав непротиворечивость частных формализмов, охватывающих часть арифметики (ср. [118], [238c]), они полагали, что уже достигли цели и доказали не только непротиворечивость арифметики, но также и непротиворечивость теории множеств, когда Гёдель опираясь на неполноту арифметики, вывел из нее невозможность доказать посредством «финитных процессов» Гильберта непротиворечивость любой теории $\mathcal{T}$, содержащей эту последнюю[2]).

---

[1]) Следует четко отличать проблему разрешимости от веры, разделяемой многими математиками и, в частности, с большой силой выраженной Гильбертом, в то, что рано или поздно мы узнаем о каждом математическом предложении, является ли оно истинным, ложным или неразрешимым. Здесь речь идет о чистом проявлении веры, критика которой лежит за пределами нашего обсуждения.

[2]) С употреблением указанных выше обозначений точный результат Гёделя состоит в следующем. Говорить, что теория $\mathcal{T}$ непротиворечива, значит утверждать, что в $\mathcal{T}$ нет доказательства для отношения $0 \neq 0$; из этого следует для всякого выявленного целого $\mu$, что (не $P(0, g(x \neq x), \mu)$ ) есть теорема из $\mathcal{T}$. Рассмотрим высказывание $(\forall z)((z \in \mathbf{N}) \Longrightarrow$ не $P(0, g(x \neq x), z))$, которое обозначим через $C$; «переводя» в формализованную арифметику рассуждение (данное выше), с помощью которого метаматематически показывается, что «если $\mathcal{T}$ непротиворечива, то в $\mathcal{T}$ не существует доказательства $S(\gamma)$», можно установить, что $C \Longrightarrow$ (не$\exists z$)($P(\gamma, \gamma, z)$) есть теорема из $\mathcal{T}$, иначе говоря, что $C \Longrightarrow S(\gamma)$ есть теорема из $\mathcal{T}$. Отсюда следует, что, если $\mathcal{T}$ непротиворечива, $C$ *не есть теорема из* $\mathcal{T}$, так как в этих условиях $S(\gamma)$ не есть теорема из $\mathcal{T}$. В этом состоит точная формулировка теоремы Гёделя.

Теорема Гёделя, однако, не полностью закрывает двери дальнейшим попыткам доказательств непротиворечивости при условии отказа (хотя бы частичного) от ограничений Гильберта, касающихся «финитных процессов». Так, в 1936 г. Гентцену [97] удалось доказать непротиворечивость формализованной арифметики «интуитивным» применением трансфинитной индукции вплоть до счетного порядкового числа $\varepsilon_0$ [1]). «Уверенность», которую может дать подобное рассуждение, разумеется, менее обоснована, чем при доказательствах, удовлетворяющих первоначальным требованиям Гильберта, и по существу является делом психологии каждого математика; однако следует признать, что подобные «доказательства», употребляющие интуитивную трансфинитную индукцию до данного порядкового числа, можно было бы считать важным шагом вперед, если бы они были проведены, например, для теории действительных чисел или для существенной части теории множеств.

С другой стороны, внутри самой теории множеств возникает большое количество проблем «относительной» непротиворечивости в связи с многочисленными имеющимися в ней «гипотезами». Наиболее замечательный результат в этой области удалось получить Гёделю; в 1940 г. он доказал, что если теория, которая содержит аксиомы системы фон Неймана — Бернайса, за исключением аксиомы выбора, является непротиворечивой, тогда теория, в которой к этим аксиомам присоединяются очень сильная форма аксиомы выбора (например, вроде той, которую дает нам употребление символа $\tau$) и обобщенная гипотеза «континуума», тоже является непротиворечивой [100 b]. Позднее И. Новак-Гал показал, что непротиворечивость системы Цермело — Френкеля влечет за собой непротиворечивость системы фон Неймана — Бернайса — Гёделя [172] [2]).

---

[1]) Гентцен соотносит каждому доказательству $D$ формализованной арифметики порядковое число $\alpha(D)<\varepsilon_0$; с другой стороны, он описывает процесс, который, отправляясь от всякого доказательства $D$, приводящего к противоречию, дает доказательство $D'$, также приводящее к противоречию, и такое, что $\alpha(D')<\alpha(D)$; теория вполне упорядоченных множеств дает возможность прийти к заключению о несуществовании такого доказательства $D$ (это тип рассуждения, который развивает классический «бесконечный спуск» теории чисел).

[2]) Работы советских математиков (П. С. Новикова, А. А. Маркова и др.) внесли весьма большой вклад в логические основания математики и связанные с ними области. То, что эти работы не нашли отражения в настоящей главе, снижает значение высказанных в ней общих характеристик. О сущности упомянутых работ см. сб. Математика в СССР за 30 лет, ГТТИ, 1948, а также сб. Математика в СССР за 40 лет, Физматгиз, 1959. — *Прим. ред.*

# СЧИСЛЕНИЕ. КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ

Благодаря истории и археологии мы имеем возможность ознакомиться с многочисленными «системами счисления», первоначальное назначение которых состояло в том, чтобы дать каждому отдельному целому числу (до некоторого предела, который устанавливался практическими потребностями) наименование и письменное выражение, составленное на основе более или менее регулярных законов из ограниченного количества знаков. Наиболее употребительный прием состоял в разложении целых чисел в суммы «последовательных единиц» $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, каждая из которых является целым кратным предшествующей; и если, как правило, отношения $b_n/b_{n-1}$ равны одному и тому же числу $b$ («основание» системы, чаще всего 10), то это правило имеет многочисленные исключения. Например, у вавилонян $b_n/b_{n-1}$ иногда равно 10, иногда 6 [166], а в хронологической системе майя $b_n/b_{n-1}$ равно 20, за исключением $n = 2$, а $b_2/b_1 = 18$ [164]. Что касается соответствующего письменного изображения, оно должно показывать число «единиц» $b_i$ каждого порядка $i$. Во многих системах (например, у египтян, греков и римлян) последовательные множители $kb_i$ (где $k$ изменяется от 1 до $b_{i+1}/b_i - 1$) обозначены символами, одновременно зависящими от $k$ и от $i$. Первый и важный шаг вперед состоял в том, чтобы обозначать все числа (для одной и той же величины $k$) одним знаком; это принцип «позиционности», при котором индекс $i$ выступает неявно: символ, представляющий $kb_i$, стоит на $i$-м месте в последовательности «отрезков», представляющих изображаемое число. Первая система этого рода встречается у вавилонян, которые, несомненно, уже в 2000 г. до н. э. обозначали одним и тем же знаком все кратные $k60^{\pm i}$, соответствующие любым значениям показателя степени $i$ ([166], стр. 93—109). Неудобства подобной системы кроются, очевидно, в двусмысленности употребляемых символов, так как ничто не указывает на то, что единицы некоторого порядка могут отсутствовать, или, другими словами, система не пополнена введением знака «нуль». Однако мы видим, что вавилоняне обходились без этого знака в течение большей части своей истории; фактически они начали употреблять нуль только последние два столетия до н. э. и то только внутри какого-нибудь числа; до этого лишь контекст уточнял значение данного числа. Систематически нуль употреблялся только в двух системах счисления: в системе майя (по-видимому, вошедшей в употребление с самого начала христианской эры [164]) и в нашей современной десятичной системе, заимствованной (через арабов) из индийской математики, в которой употребление нуля зарегистрировано с первых веков нашей эры. Следует, кроме того, отметить, что понятие нуля как числа (а не как простого знака разделения) и его введение в системы счисления также является оригинальным вкладом индийцев ([59], т. I). Само собой разумеется, что, как только был открыт принцип позиционности, его уже без труда можно было распространить на системы с любым основанием. Обсуждение достоинств различных систем, предлагаемых начиная с XVII в., выходит за пределы данной главы, так как относится к вычислительной технике. Ограничимся замечанием, что операция, которая служит основой этих систем, а именно деление, называемое «евклидовым», не употреблялась до греков и, очевидно, восходит к первым пифагорейцам, которые ввели ее в качестве существенного орудия своей теоретической арифметики (см. стр. 103).

Общие проблемы перечисления, объединенные в раздел, называемый комбинаторным анализом, по-видимому, не изучались до последних веков классической древности; до нас дошла только одна формула $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$, отнесенная к III в. нашей эры. Индийскому математику Бхаскара (XII в.) была известна общая формула для $\binom{n}{p}$. Более систематические исследования содержатся в рукописи Леви бен Герсона (начало XIII в.): он получил рекуррентную формулу для вычисления числа $V_n^p$ размещений из $n$ объектов по $p$, и в частности числа перестановок $n$ объектов; он также сформулировал правила, эквивалентные соотношениям

$$\binom{n}{p}=\frac{V_n^p}{p!} \text{ и } \binom{n}{n-p}=\binom{n}{p} \quad \text{([226], т.VI, стр. 64—65).}$$

Но, по-видимому, эта рукопись была неизвестна его современникам, и математики последующих столетий лишь постепенно вновь находили эти результаты. Среди них следует отметить Кардана, доказавшего, что число непустых подмножеств множества из $n$ элементов есть $2^n-1$. Паскаль и Ферма, основав исчисление вероятностей, вновь нашли выражение для $\binom{n}{p}$, и Паскаль первый заметил связь между этими числами и формулой бинома. Последняя, по-видимому, была знакома арабам уже с XIII в. и китайцам в XIV в.; затем эта формула была вновь найдена на Западе в начале XVI в., так же как и метод вычисления по рекуррентности, названный «арифметическим треугольником», который обычно приписывают Паскалю ([226], т. VI, стр. 35—38). Наконец, Лейбниц около 1676 г. получил (не опубликовав) общую формулу «полиномиальных коэффициентов», которую 20 лет спустя независимо от него нашел и опубликовал Муавр [1]).

---

[1]) Истории комбинаторного анализа в этой главе (как, впрочем, и вообще) нет. О предмете этой важной в настоящее время области математики см., например, Риордан Дж., Введение в комбинаторный анализ, ИЛ, Москва, 1963; Холл М., Комбинаторный анализ, ИЛ, Москва, 1963. — *Прим. ред.*

# ЭВОЛЮЦИЯ АЛГЕБРЫ

В математике существует немного понятий, которые были бы первичнее понятия закон композиции: оно кажется неотделимым от элементарных вычислений с натуральными числами и измеримыми величинами. Самые древние памятники, дошедшие до нас от математики египтян и вавилонян, показывают, что тогда уже была известна полная система правил вычисления с натуральными числами, рациональными числами большими нуля, длинами и площадями. Хотя вавилонские тексты, которые до нас дошли, содержат только задачи с конкретными числовыми данными [1]), они не оставляют никакого сомнения в общности применяемых правил и показывают совершенно замечательную технику оперирования с уравнениями первой и второй степени ([166], стр. 179 и сл.). Мы не находим там, однако, никакого стремления оправдать применяемые правила или дать точные определения встречающимся операциям: и то и другое остается еще в области эмпирики.

Наоборот, такое стремление появляется чрезвычайно четко уже у греков классической эпохи; правда, мы еще не встречаем там аксиоматической трактовки теории натуральных чисел (такая аксиоматизация появилась только в конце XIX в.; см. стр. 36), но в «Началах» Евклида во многих случаях дается формальное доказательство правил исчисления, столь же «очевидных», как и правила исчисления с целыми числами (например, коммутативность произведения двух рациональных чисел) [2]).

Наиболее замечательные доказательства такого рода относятся к *теории величин* — самому оригинальному творению гре-

---

[1]) Не надо забывать, что только начиная с Виета [233] вошли в употребление буквенные обозначения всех элементов (данных и неизвестных), встречающихся в задачах алгебры. До этого все уравнения, решаемые в алгебраических трактатах, имели числовые коэффициенты; если автор формулировал общее правило для трактовки аналогичных уравнений, он делал это (насколько это было в его силах) обычным языком. Если специальная формулировка такого рода отсутствует, то проведение вычислений в рассматриваемых конкретных случаях делает более или менее правдоподобным предположение о том, что автор знал это правило.

[2]) В «Началах» имеется и доказательство коммутативности умножения целых чисел (см. Книгу VII, предл. 5). — *Прим. перев.*

ческой математики (эквивалентному, как известно, теории положительных вещественных чисел (см. стр. 148—149)). Евклид рассматривает, например, произведение двух отношений величин, показывает, что оно не зависит от специального вида, в котором заданы отношения (первый пример «факторизации» закона композиции по отношению эквивалентности), и что оно коммутативно ([80], Книга V, предл. 22—23) [1]).

Следует, однако, признать, что наряду с прогрессом строгости у Евклида наблюдается некоторый застой, а иногда даже движение назад в отношении техники алгебраических вычислений. Подавляющее преобладание геометрии (для которой, очевидно, и была задумана теория величин) парализовало всякое автономное развитие алгебраических обозначений: элементы, входящие в исчисление, должны быть все время «представимыми» геометрически. Кроме того, два закона композиции, встречающиеся у древних, были определены не на одном и том же множестве (сложение отношений не было определено в общем виде, а произведение двух длин являлось не длиной, а площадью). В результате недостаточной гибкости оперирование с отношениями выше второй степени было практически почти невыполнимо.

Только на закате классической греческой математики Диофант возвращается к традиции «логистов» или профессиональных вычислителей, которые продолжали применять правила, унаследованные от египтян и вавилонян. Не заботясь больше о геометрическом представлении рассматриваемых «чисел», Диофант, естественно, пришел к необходимости развить правила абстрактных алгебраических действий. Например, он дает правила, которые (на современном языке) эквивалентны формуле $x^{n+m} = x^m x^n$ для небольших значений (положительных или отрицательных) $m$ и $n$ ([70], т. I, стр. 8—13). Несколько дальше (стр. 12—13) формулируется «правило знаков» — первый зародыш исчисления с отрицательными числами [2]). Наконец, Диофант впервые употребляет буквенный символ для обозначения неизвестного в уравнении. Однако он, по-видимому, не заботится о том, чтобы связать методы, применяемые им для решения, с общими понятиями. Что касается аксиоматической концепции законов композиции в таком виде, в каком она начала

---

[1]) Евклид, правда, не дает тут формального определения произведения двух отношений, а то определение, которое имеется несколько дальше в «Началах» (Книга VI, опр. 5), считается позднейшим добавлением; тем не менее он имеет совершенно ясное представление об этой операции и об ее свойствах.

[2]) Диофант не знал отрицательных чисел; это правило может быть поэтому интерпретировано только как относящееся к исчислению многочленов и позволяющее «развернуть» произведение вида $(a-b)(c-d)$.

появляться у Евклида, то она, по-видимому, чужда Диофанту, так же как и его непосредственным последователям. Мы ее встретим вновь в алгебре только в начале XIX в.

Для этого было необходимо, чтобы в течение промежуточных веков, с одной стороны, развилась система алгебраических обозначений, достаточная для выражения абстрактных законов, и, с другой стороны, чтобы понятие «числа» получило такое расширение, которое сделало бы возможным переход от рассмотрения разнообразных частных случаев к общим концепциям. С этой точки зрения аксиоматическая теория отношений, созданная греками, была недостаточна, так как она только уточняла интуитивное понятие положительного действительного числа и операции над этими числами, в более смутном виде известные уже вавилонянам. Теперь речь будет идти о «числах», о которых греки не составили еще понятия и для которых первоначально не было никакого реального «представления»: с одной стороны, о нуле и отрицательных числах, которые появились с начала средних веков в индийской математике[1]), с другой — о мнимых числах, созданных итальянскими алгебраистами XVI в.

Если оставить в стороне нуль, который был введен как символ в системе счисления прежде, чем стал рассматриваться как число (см. стр. 62), общий характер этих расширений (по крайней мере вначале) был чисто «формальным». Это означает, что новые «числа» появляются вначале как результаты операций, применяемых в условиях, в которых, если придерживаться строгого определения, эти операции не имеют никакого смысла (например, разность $a-b$ двух натуральных чисел, если $a<b$). Отсюда и названия, даваемые этим числам: «ложные», «фиктивные», «абсурдные», «невозможные», «мнимые» и т. д. Для греков классической эпохи, поборников ясности мысли, подобные расширения были немыслимы, они могли появиться только у вычислителя, более расположенного, чем греки, оказывать несколько мистическое доверие силе своего метода («общность анализа», как будут говорить в XVIII в.) и способного увлечься механизмом вычислений, не проверяя, обоснован ли каждый шаг. Это доверие большей частью оказывалось оправданным a posteriori точными результатами, к которым приводило распространение на новые математические объекты тех правил исчисления, которые были установлены со всей строгостью только для ранее известных чисел. Этим объясняется то, что ученые постепенно осмелились рассматривать сами по себе (независимо от приложений к конкретным вычислениям) эти обобщения понятия числа, которые вначале появлялись лишь как промежуточные

[1]) Оперирование с отрицательными числами содержится еще в задачах «Математики в девяти книгах» (китайский трактат II в. до н. э.). — *Прим. перев.*

звенья в последовательности операций, исходный и конечный пункт которых составляли настоящие «числа». Но как только этот шаг был сделан, начинаются поиски более или менее осязаемых интерпретаций для новых сущностей, которые получают таким образом право гражданства в математике [1]).

Уже индийцы в некоторых случаях знали интерпретацию отрицательных чисел (как, например, долг в коммерческих задачах). В последующие века, по мере того как на Запад проникали (через посредничество арабов) методы и результаты математики греков и индийцев, оперирование с такими числами становится все более обычным и им даются другие «представления» — геометрические или кинематические. В этом, а также и в улучшении алгебраической символики состоял единственный ощутимый прогресс алгебры в конце средних веков.

В начале XVI в. алгебра переживает новый подъем благодаря открытию математиками итальянской школы решения «в радикалах» уравнений 3-й, а затем и 4-й степени (см. стр. 90—91). Именно поэтому, несмотря на все отвращение математиков, они были, так сказать, вынуждены ввести в свое исчисление мнимые числа; мало-помалу, однако, рождается доверие к исчислению с этими «невозможными» числами, так же как и с отрицательными, и это несмотря на то, что в течение более двухсот лет не было придумано для них никакого «представления».

С другой стороны, алгебраические обозначения получают решающее усовершенствование у Виета и Декарта; начиная с Декарта, алгебраическая запись мало чем отличается от современной.

С середины XVII в. и до конца XVIII в. обширные горизонты, открытые созданием исчисления бесконечно малых, способствуют, по-видимому, некоторой потере интереса к алгебре вообще и, особенно, к математическим исследованиям законов композиции или природы действительных или комплексных чисел [2]). Так, законы сложения сил и скоростей, хорошо известные в механике с конца XVII в., не нашли никакого отзвука в алгебре, хотя в них и были заложены зачатки векторного исчисления. Понадобилось движение идей, которое привело около 1800 г. к интерпретации

---

[1]) Эти поиски составили лишь преходящую стадию в развитии понятий, о которых идет речь. С середины XIX в. произошло возвращение, на этот раз совершенно сознательное, к формальной концепции различных расширений понятия числа. Эта концепция была обобщена в точку зрения «формализма» и аксиоматики, которые доминируют в современной математике.

[2]) Следует исключить из общего правила попытки Лейбница, с одной стороны, алгебраизировать рассуждения формальной логики (см. стр. 16), с другой стороны, создать «геометрическое исчисление» путем оперирования с геометрическими величинами без обращения к координатам ([144a], т. V, стр. 141). Но эти попытки остались в стадии набросков и не нашли отклика у его современников. Они были возобновлены только в XIX в. (см. дальше).

комплексных чисел (см. стр. 161), чтобы в чистой математике было введено сложение векторов [1]).

Именно в эту эпоху понятие закона композиции впервые распространяется в алгебре в двух различных направлениях на элементы, имеющие с «числами» (в самом широком смысле, который придавали этому слову) лишь очень отдаленные аналогии. Первым из этих расширений мы обязаны К. Ф. Гауссу благодаря его арифметическим исследованиям квадратичных форм $ax^2 + bxy + cy^2$ с целыми коэффициентами. Лагранж определил отношение эквивалентности во множестве форм с одинаковым дискриминантом [2]) и, кроме того, доказал тождество, с помощью которого в этом множестве вводится коммутативный закон композиции (правда, не всюду определенный). Исходя из этих результатов, Гаусс показал, что таким образом определенный закон композиции совместим с введенным отношением эквивалентности ([95a], т. I, стр. 272; русский перевод стр. 333): «*...делается непосредственно ясным*, — говорит он, — *понятие класса, составленного из двух или нескольких заданных классов*». Он приступает затем к изучению «фактор-закона», который он определяет этим способом, и по существу устанавливает, что (выражаясь современным языком) это закон композиции абелевой группы. Гаусс проводит исследование чаще всего с помощью рассуждений, намного более общих, чем этого требует рассматриваемый им специальный случай [например, рассуждение, с помощью которого он доказывает единственность элемента, симметрического данному, применимо для любого закона композиции (там же, стр. 273; русский перевод, стр. 334)]. Но он на этом не останавливается: возвращаясь несколько далее к тому же вопросу, Гаусс отмечает аналогию между композицией классов форм и умножением целых чисел по простому модулю [3])

---

[1]) Эта операция была введена к тому же без всякой ссылки на механику; связь между обеими теориями была явно признана только основателями векторного исчисления во второй трети XIX в. (см. стр. 78).

[2]) Две формы эквивалентны, если одна из них получается из другой путем «замены переменных» $x' = \alpha x + \beta y$, $y' = \gamma x + \delta y$, где $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ — такие целые, что $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

[3]) Замечательно, что Гаусс пользуется *аддитивной* записью для обозначения композиции классов квадратичных форм и делает это, несмотря на ту аналогию с умножением, которую он сам подчеркивает, и несмотря на тождество Лагранжа, которое, определяя форму, составленную из двух данных, наводит более естественным образом на мультипликативную запись (к которой и вернулись все последователи Гаусса). Это безразличие к форме обозначения следует рассматривать как еще одно свидетельство того, к какой общности пришел Гаусс в своих взглядах на законы композиции. Он не ограничивался к тому же рассмотрением коммутативных законов, как это можно видеть из одного отрывка, не опубликованного при его жизни, но относящегося к 1819—1820 гг., где он дает более чем за 20 лет до Гамильтона формулы для умножения кватернионов ([95a], т. VIII, стр. 357).

(там же, стр.371; русский перевод стр. 457); он замечает также, что группа классов квадратичных форм данного дискриминанта не всегда является циклической. Указания, которые Гаусс дает по этому поводу, позволяют думать, что он открыл, по крайней мере для этого частного случая, общую структуру конечных абелевых групп ([95а], т. I, стр. 374; русский перевод, стр. 460—461, и т. II, стр. 266).

Другая серия исследований, о которых мы хотели сказать, также приводит к понятию группы, которое и было этим способом окончательно введено в математику: это «теория подстановок», развитие идей Лагранжа, Вандермонда и Гаусса о решении алгебраических уравнений. Мы не будем останавливаться здесь на подробной истории этого вопроса (см. стр. 93—97). Определение «произведения» двух перестановок конечного множества элементов, а также введение первых понятий, относящихся к конечным группам[1]) перестановок: транзитивности, примитивности, нейтрального элемента, перестановочного элемента и т. д. следует отнести к Руффини [193] и Коши ([42а], [2], т. I, стр. 64).

Но эти первые исследования оставались в общем достаточно поверхностными, и только Эварист Галуа должен считаться настоящим основоположником теории. В своих знаменитых мемуарах [94] он свел изучение алгебраических уравнений к рассмотрению групп перестановок, которые он им сопоставил, и при этом значительно углубил изучение последних как в том, что касается общих свойств групп (именно Галуа первый определил понятие нормального делителя и понял его важность), так и в том, что относится к определению групп, обладающих специальными свойствами (результаты, достигнутые им здесь, до сих пор относятся к наиболее тонким предложениям теории). К Галуа восходит и первая идея «линейного представления группы»[2]), а этот факт ясно показывает, что он владел понятием *изоморфизма* двух групповых структур независимо от их «реализации».

Хотя несомненно, что гениальные методы Гаусса и Галуа привели их к очень широкому взгляду на понятие закона композиции, ни тот ни другой не имели случая специально развить свои идеи по этому поводу, и их работы не оказали непосредственного

---

[1]) Понятие сложной функции было, разумеется, известно гораздо раньше, по крайней мере для функций действительных и комплексных переменных; но алгебраический аспект этого закона композиции и связь с произведением двух перестановок были выявлены только работами Абеля ([1], т. I, стр. 478) и Галуа.

[2]) Как раз в связи с этим Галуа с помощью смелого расширения «формализма», который привел к комплексным числам, рассматривает «мнимые корни» сравнения по простому модулю и открывает таким образом *конечные поля* (см. стр. 101).

влияния на эволюцию абстрактной алгебры [1]). Наиболее ощутимый прогресс на пути к абстракции происходит в третьем направлении, а именно вследствие размышлений о природе мнимых чисел (геометрическая интерпретация которых послужила в начале XIX в. поводом для многочисленных исследований) алгебраисты английской школы первые в 1830—1850 гг. выделили абстрактное понятие закона композиции и тотчас же расширили область алгебры, применив это понятие к множеству новых математических объектов. Буль построил алгебру логики (см. стр. 17), Гамильтон — алгебру векторов, кватернионов и общих гиперкомплексных систем [108], Кэли — алгебру матриц и алгебру с неассоциативным законом композиции ([44], т. I, стр. 127 и 301, и т. II, стр. 185 и 475). На континенте независимо от этого шло развитие в параллельном направлении, именно в области векторного исчисления (Мёбиус, Беллавитис), линейной алгебры и гиперкомплексных систем (Грассман) (см. стр. 79—81) [2]).

Весь этот вихрь оригинальных и плодотворных идей оживил алгебру первой половины XIX в., и она вышла из него обновленной вплоть до своих основных тенденций. До этого методы и результаты ее концентрировались вокруг центральной проблемы решения алгебраических уравнений (или диофантовых уравнений в теории чисел): «*Алгебра*, — говорит Серре во введении к своему курсу высшей алгебры,— *есть, собственно говоря, анализ уравнений*». После 1850 г., хотя трактаты по алгебре еще долгое время уделяют преимущественное внимание теории уравнений, новые изыскания уже не стеснены заботой о немедленном приложении к решению численных уравнений. Они все более и более группируются вокруг проблемы, которую мы сейчас считаем основной в алгебре, — а именно проблемы изучения алгебраических структур.

Эти работы довольно отчетливо распределяются по трем направлениям, которые продолжают соответственно три течения идей, проанализированных нами выше; они развиваются параллельно, но не оказывают до последних лет XIX в. ощутимого взаимного влияния [3]).

Это прежде всего построение в немецкой школе XIX в. (Дирихле, Куммер, Кронекер, Дедекинд, Гильберт) теории алгебра-

---

[1]) Работы Галуа оставались к тому же неизвестными вплоть до 1846 г., а исследования Гаусса оказали непосредственное влияние только на теорию чисел.

[2]) Замечательное изложение основных теорий рассматриваемого периода содержится в трудах Ганкеля [109], относящихся к тому же времени. Там совершенно ясно понято и представлено абстрактное понятие закона композиции.

[3]) Мы сознательно опускаем здесь все то, что относилось в этот период к эволюции алгебраической геометрии и теории инвариантов, которая с ней

ических чисел, ведущей свое начало от работ Гаусса, которому принадлежат первые исследования такого рода, а именно чисел $a+bi$ ($a$ и $b$ — рациональные). Мы не будем здесь заниматься эволюцией этой теории; для нашей цели нам необходимо только выяснить, какие абстрактные алгебраические понятия здесь появились. Начиная с первых же последователей Гаусса, понятие *поля* (алгебраических чисел) лежит в основе всех работ по этому вопросу (также, впрочем, как и в основе изысканий Абеля и Галуа по алгебраическим уравнениям). Область применения этого понятия увеличивается, когда Дедекинд и Вебер [61] строят теорию алгебраических функций одной переменной, копируя ее с теории алгебраических чисел. Дедекинду также мы обязаны введением понятия *идеала* ([60], т. III, стр. 251), который дает новый пример закона композиции между *множествами* элементов. Начиная с работ Дедекинда и Кронекера, все большую и большую роль в теории алгебраических полей играют абелевы группы и модули; мы вернемся к ним позднее (см. стр. 81—82).

Мы отложим пока также и историю развития линейной алгебры (см. стр. 73) и гиперкомплексных систем (см. стр. 113), которая развертывается в конце XIX и начале XX вв. без введения новых алгебраических понятий в Англии (Сильвестр, В. Клиффорд) и Америке (Б. Пирс, К. С. Пирс, Диксон, Ведерборн) по пути, намеченному Гамильтоном и Кэли, а также в Германии (Вейерштрасс, Дедекинд, Фробениус, Молин) [1]) и Франции (Лагерр, Э. Картан) независимо от англосаксов и отличными от них методами.

Что касается теории групп, то она первоначально развивается как теория конечных групп перестановок. Это произошло вследствие публикации работ Галуа и их распространения благодаря работам Серре [206] и особенно большому «Трактату о подстановках» К. Жордана [129a]. Жордан подвел итог предшествующим исследованиям специальных свойств групп перестановок (транзитивности, примитивности и т. д.), значительно усовершенствовал эти исследования и получил результаты, многие из которых не были с тех пор улучшены. Он подверг также глубокому изучению очень важные специальные группы: линейные группы и их подгруппы (см. стр. 136). Кроме того, он ввел фундаментальное понятие представления одной группы другой, так же как (несколько позднее) понятие факторгруппы, и доказал часть теоремы, известной под названием «теоремы Жордана —

---

тесно связана; эти две теории развивались. следуя присущим им методам, ориентируясь на анализ столько же, сколько и на алгебру; только недавно они нашли свое место в обширном здании современной алгебры.

[1]) Молин жил и работал в России, поэтому неправомерно относить его к математикам Германии. — *Прим. перев.*

Гёльдера»[1]. Наконец, к Жордану восходит и первое исследование *бесконечных* групп [129b], которое несколько лет спустя было значительно расширено в двух различных направлениях С. Ли, с одной стороны, и Ф. Клейном и А. Пуанкаре — с другой.

Между тем определение «абстрактной» группы было дано Кэли в 1854 г. ([44], т. II, стр. 123 и 131) одновременно с определением однородного пространства и в такой форме, которая является корректной только для конечных групп. Однако даже исследования абстрактных конечных групп еще долгое время рассматривались как изучение групп подстановок и только к 1880 г. начинается сознательное развитие автономной теории конечных групп. Мы не будем здесь следить дальше за историей этой теории.

Здесь не место также для разговора о необычайном успехе, который выпал с конца XIX в. на долю идеи группы (и понятия *инварианта,* тесно с ним связанного) в анализе, геометрии, механике и теоретической физике. Последний период развития алгебры, о котором мы здесь говорим, как раз и характеризуется аналогичным вторжением понятия группы и родственных с ней алгебраических понятий (группа с операторами, кольцо, идеал, модуль) в те разделы алгебры, которые казались до этого очень удаленными от сферы господства этих понятий, что и приводит к синтезу тех трех направлений, которые мы рассматривали выше. Это объединение является в основном делом современной немецкой школы. Работа по аксиоматизации алгебры, начатая в последние годы XIX в. Дедекиндом и Гильбертом, была с большим успехом продолжена Э. Штейницем, затем, начиная с 1920 г., под влиянием Э. Артина, Э. Нётер и алгебраистами их школы (Хассе, Крулем, О. Шрейером, Ван-дер-Варденом). Трактат Ван-дер-Вардена [231a], опубликованный в 1930 г., впервые собрал эти работы в единое целое, открыв пути и служа проводником для многочисленных исследований последних лет по абстрактной алгебре.

---

[1]) Жордан установил только инвариантность (с точностью до порядка) *порядков* факторгрупп в «ряде Жордана — Гёльдера» для конечной группы; О. Гёльдер доказал, что сами факторгруппы (с точностью до порядка) не зависят от рассматриваемого ряда [124].

# ЛИНЕЙНАЯ И ПОЛИЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Линейная алгебра является одновременно одной из древнейших и одной из самых новых ветвей математики. С одной стороны, с момента возникновения математики встречаются задачи, которые решаются одним умножением или делением, т. е. вычислением одного значения функции $f(x) = ax$ или решением уравнения $ax = b$; это и есть типичные проблемы линейной алгебры, и для их трактовки и корректной постановки нужно «мыслить линейно».

С другой стороны, не только эти вопросы, но и почти все, что касается уравнений первой степени, уже очень давно было отнесено к области элементарного обучения, когда новое развитие понятий тела, кольца, векторного топологического пространства и т. д. помогло выявить и оценить основные понятия линейной алгебры (например, понятие двойственности). Тогда заметили, что почти вся современная алгебра имеет существенно линейный характер, и «линеаризация» является одной из ее отличительных черт. Это помогло линейной алгебре занять подобающее ей место. Проследить историю линейной алгебры с той точки зрения, на которой мы стоим теперь, было бы столь же важной, сколь и трудной задачей; и мы вынуждены будем ограничиться здесь обычными замечаниями.

Из сказанного видно, что линейная алгебра, без сомнения, появилась на свет, чтобы удовлетворить нужды вычислителя-практика. Так, например, тройное правило ([226], т. I, стр. 150—155) и правило ложного положения, более или менее ясно сформулированные, играли важную роль во всех руководствах по практической арифметике от египетского папируса Райнда до руководств, принятых в наших начальных школах, через Ариабхатту, арабов, Леонардо Пизанского и бесчисленные «вычислительные книги» средних веков и эпохи Возрождения. Однако, быть может, они всегда представляли только выдержки для практического использования из гораздо более передовой научной теории.

Что касается математиков в собственном смысле этого слова, то характер их изысканий по линейной алгебре является функцией общей структуры их науки.

В древней греческой математике, судя по изложению в «Началах» Евклида, были развиты две абстрактные теории линейного характера: с одной стороны, теория величины ([80], Книга V;

ср. стр. 148), с другой — целых чисел ([80], Книга VII). У вавилонян мы находим методы, гораздо более близкие к нашей элементарной алгебре; они умели очень изящным способом решать системы линейных уравнений ([166], стр. 181—183). В продолжение долгого времени, однако, прогресс линейной алгебры зависел больше всего от общих успехов алгебраического исчисления; под этим аспектом, чуждым теме этой главы, его и следует рассматривать. Действительно, чтобы привести линейную систему к уравнению вида $ax = b$, достаточно, если речь идет об одном неизвестном, знать правила (известные уже Диофанту) переноса членов из одной стороны уравнения в другую и приведения подобных членов. Если же речь идет о нескольких неизвестных, то достаточно уметь еще последовательно их исключать до тех пор, пока не останется только одно. В трактатах по алгебре до XVIII в. господствовало убеждение, что по отношению к уравнениям первой степени все уже сделано, если изложены эти правила; что же касается систем уравнений, у которых число неизвестных равно числу уравнений (других не рассматривали), а левые части не являются линейно независимыми, то неизменно довольствовались замечанием, что это указывает на плохо поставленную задачу. В трактатах XIX в., и даже более поздних, прогресс наблюдается только в обозначениях, которые позволяют записать систему $n$ уравнений с $n$ неизвестными, а также в том, что вводятся определители, которые дают явные формулы для решений «в общем случае». Этими успехами мы обязаны главным образом математикам XVIII и начала XIX вв. Заслуга принадлежала бы Лейбницу ([144a], т. I, стр. 239), если бы он развил и опубликовал свои идеи, касающиеся этого предмета.

Нам нужно будет сначала изучить различные направления идей, которые в значительно большей степени, чем исследования систем линейных уравнений, способствовали развитию линейной алгебры в том смысле, в каком мы ее теперь понимаем. Ферма, вдохновленный изучением Аполлония ([82], т. I, стр. 91—110; франц. перев., т. III, стр. 85—101), понял даже раньше Декарта ([64a], т. VI) принцип аналитической геометрии и пришел к мысли о классификации плоских кривых по их порядку (эта идея, ставшая постепенно привычной всем математикам, была окончательно понята в конце XVII в.). Он установил основной принцип. по которому уравнение первого порядка на плоскости представляет прямую, а уравнение второго порядка — коническое сечение, — принцип, из которого он сейчас же выводит «очень красивые» следствия о геометрических местах. В то же время он провел классификацию задач ([82], т. I, стр. 184—188, франц. перев., т. III, стр. 159—163), разделив их на определенные задачи: задачи, которые сводятся к одному уравнению с двумя неизвестными, к одному уравнению с тремя неизвестными и т. д. Он заметил при этом, что первые заключаются в определении точки, вторые — линии или геометрического места на плоскости, следующие — поверхности и т. д. («...*в такой задаче разыскивается не только точка и не только линия, но целая поверхность, решающая задачу; отсюда рождаются пространственные геометрические места и также следующие за ними*», цитированная работа, стр. 186, здесь уже имеются зародыши $n$-мерной геометрии). Это высказывание выдвигает принцип размерности в алгебре и в алгебраической геометрии и намечает объединение алгебры и геометрии в полном соответствии с идеями современности. Однако, как мы видели, понадобилось более двух веков, чтобы эти идеи проникли в умы людей.

По крайней мере эти идеи вскоре привели к расцвету аналитической геометрии, который достигает всей своей полноты в XVIII в. в работах Клеро, Эйлера, Крамера, Лагранжа и многих других. Линейный характер формул преобразования координат на плоскости и в пространстве, которого не мог не заметить уже Ферма, был отчетливо установлен, например, Эйлером ([81a] (1), т. IX. гл. II—III, приложение гл. IV), основавшим на нем классификацию плоских кривых и поверхностей по их порядкам (инвариантным как раз в силу линейности этих формул). Эйлер ввел также ([81a] (1), т. IX, гл. XVIII) слово «аффинность» для обозначения соотношений между кривыми, которые могут быть получены друг из друга преобразованиями $x' = ax$, $y' = by$ (впрочем, он не выявил геометрической инвариантности этого определения, которое, таким образом, оставалось связанным со специальным выбором осей координат). Несколько позднее Лагранж посвятил целый мемуар ([140], т. III, стр. 661—692), который долгое время пользовался заслуженной известностью, типично линейным и полилинейным проблемам аналитической геометрии трех измерений. Примерно в эту же эпоху в связи с линейной проблемой отыскания плоской кривой, проходящей через заданные точки, у Крамера [53] и Безу [18] оформляется сначала несколько эмпирическим образом понятие определителя. Развитое затем многими авторами, это понятие и его основные свойства приобретают окончательный вид у Коши ([42a], [2], т. I, стр. 91—169) и Якоби ([127], т. III, стр. 355—392).

С другой стороны, в то время как у математиков существовала тенденция относиться с пренебрежением к уравнениям первой степени, решение дифференциальных уравнений составляло, наоборот, капитальную проблему. Естественно, что среди этих уравнений очень рано начали выделять линейные с постоянными или переменными коэффициентами, и их изучение способствовало тому, что было оценено само понятие линейности и все с ним связанное. Это заметно уже у Даламбера [56c], Лагранжа

([140], т. I, стр. 471—668) и Эйлера ([81 а] (I), т. XII), но только первый из них счел необходимым сказать, что общее решение неоднородного уравнения является суммой его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения. Кроме того, когда эти авторы утверждают, что общее решение линейного однородного уравнения $n$-го порядка является линейной комбинацией $n$ частных решений, они не отмечают, что эти решения должны быть линейно независимы, и не делают никаких усилий, чтобы выявить это понятие. По-видимому, только лекции Коши в Политехнической школе пролили свет на этот пункт, как и на многие другие ([42b], стр. 573—574). Лагранж [140] ввел (правда, чисто вычислительно и без специального наименования) уравнение $L^*(y) = 0$, сопряженное линейному дифференциальному уравнению $L(y) = 0$, что в силу соотношения

$$\int zL(y)\,dx = \int L^*(z)\,y\,dx,$$

имеющего место для всех $y$ и $z$, обращающихся в нуль на концах промежутка интегрирования, является типичным примером двойственности. Точнее говоря, мы видим здесь, за 30 лет до того, как Гаусс явно определил подстановку, сопряженную линейной подстановке трех переменных, первый бесспорный пример «функционального оператора» $L^*$, «транспонированного» или «сопряженного» оператору $L$, заданному с помощью билинейной функции (здесь интеграл $\int yz\,dx$).

Одновременно, и опять-таки благодаря Лагранжу ([140], т. III, стр. 695—795), линейные подстановки сперва только от 2-х и 3-х переменных завоевывают арифметику. Ясно, что множество значений функции $F(x, y)$, когда $x$ и $y$ принимают все целые значения, не меняется, если над $x$, $y$ совершается произвольная линейная подстановка с целыми коэффициентами и определителем 1. На этом фундаментальном наблюдении Лагранж основал теорию представления чисел формами, а также теорию приведения форм. Гаусс делает шаг, всю смелость которого нам сейчас трудно оценить: а именно, вводит понятие эквивалентности и класса форм (ср. стр. 68). В связи с этим он понял необходимость установления некоторых элементарных принципов, относящихся к линейным подстановкам, и ввел, в частности, понятие транспонированной или сопряженной подстановки ([95 а], т. I, стр. 304). Начиная с этого момента, арифметическое и алгебраическое исследование квадратичных форм от двух, трех, а позднее от $n$ переменных, билинейных форм, которые с ними тесно связаны, а также недавнее обобщение этих понятий на случай бесконечного числа переменных составили вплоть до наших дней наиболее плодотворный источник прогресса линейной алгебры (ср. стр. 134—137).

Быть может, еще более решительным прогрессом является то, что Гаусс в тех же Disquisitiones создал теорию конечных абелевых групп (ср. стр. 68), которые встречаются там в четырех различных видах: в виде аддитивной группы целых чисел по модулю $m$ ($m$ — целое число), в виде мультипликативной группы чисел, взаимно простых с $m$ по модулю $m$, в виде группы классов бинарных квадратичных форм, наконец, в виде мультипликативной группы корней $m$-й степени из единицы. Как мы уже говорили, Гаусс все эти группы трактует как абелевы группы или, точнее говоря, как модули над $\mathbf{Z}$[1]). Он изучает их структуру, отношения изоморфизма и т. д. Позднее он исследует модуль «целых комплексных чисел» $a + bi$ как бесконечный модуль над $\mathbf{Z}$, изоморфизм которого с модулем периодов эллиптических функций (который им же был открыт в комплексной области) он не мог не заметить. Эта идея явно появилась уже, во всяком случае, у Якоби, например в его знаменитом доказательстве невозможности существования функции с тремя периодами, а также в его взглядах на проблему обращения абелевых интегралов ([127], т. II, стр. 25—50). Вскоре она привела к теоремам Кронекера ([136 а], т. III, стр. 49—109).

Здесь тот поток, за направлением и изгибами которого мы следили, смешивается с другим, остававшимся долгое время подземным. Как будет детально изложено в другом месте (см. стр. 128), «чистая» геометрия в том смысле, в каком ее понимали в прошлом веке, т. е. по существу проективная геометрия плоскости и пространства без применения координатного метода, была создана в XVII в. Дезаргом [63]. Его идеи, значение которых правильно оценил такой ученый, как Ферма, и начал осуществлять такой, как Паскаль, были все-таки затем забыты, потому что их затмил блестящий успех аналитической геометрии. Проективной геометрией снова стали пользоваться только к концу XVIII в. благодаря Монжу, затем Понселе и его соперникам, Брианшону и Шалю. Она то полностью и сознательно отделялась от аналитических методов, то оказывалась с ними внутренне связанной (в Германии). Но проективные преобразования, с какой бы точки зрения их ни рассматривать (синтетической или аналитической), являются не чем иным, как линейными подстановками проективных, или «барицентрических», координат. Конические сечения (в XVII в.), а позднее квадрики, проективное исследование которых долгое время составляло основной предмет изучения этой школы, являются не чем иным, как квадратичными формами, тесную связь кото-

[1]) $\mathbf{Z}$ — кольцо целых рациональных чисел. — *Прим. перев.*

рых с линейной алгеброй мы отмечали выше. Ко всем этим понятиям присоединяется еще понятие полярности, также введенное Дезаргом. Теория полюсов и поляр становится в руках Монжа и его последователей мощным инструментом для преобразования теорем геометрии. Вскоре она получает название принципа двойственности. Правда, нельзя утверждать, что была замечена связь принципа двойственности с сопряженными дифференциальными уравнениями, если только не иметь в виду гораздо более позднее время (эта связь была указана Пинкерле в конце века). Однако было замечено, свидетельством чему является работа Шаля [46b], родство этого принципа с понятием полярного сферического треугольника, введенного в сферическую геометрию Виетом ([233], стр. 418) и Снеллиусом в XVI в. [1]) Но двойственность в проективных пространствах является только одним из аспектов двойственности в векторных пространствах с точностью до тех видоизменений, которые определяются переходом от аффинного пространства к проективному (которое является его фактор-пространством, если в качестве отношения эквивалентности принять «умножение на скаляр»).

XIX век, более чем любой другой век в нашей истории, был богат первоклассными математиками. На нескольких страницах очень трудно описать, даже если ограничиваться наиболее характерными чертами, все то, что произвел весь этот поток идей, пройдя через их руки. Вскоре начинает ощущаться необходимость некоего геометрического исчисления, которое находилось бы где-то посредине между чисто синтетическими методами, которые можно сравнить с прокрустовым ложем, на котором добровольно принимали муки их верные последователи, с одной стороны, и аналитическими методами, соединенными с произвольно навязанной пространству системой координат, — с другой. О таком исчислении мечтал (но не создал его) Лейбниц, оно было в весьма несовершенном виде набросано у Карно [39]. Сначала появляется сложение векторов, неявно содержащееся у Гаусса в его геометрической интерпретации мнимых чисел и приложении их к элементарной геометрии (ср. стр. 162). Затем Беллавитис развивает метод «эквиполентности», и наконец исчисление приобретает окончательную форму у Грассмана, Мёбиуса и Гамильтона. Одновременно с этим Мёбиус создает под названием «барицентрического исчисления» вариант, приспособленный для нужд проективной геометрии ([160], т. I).

В ту же эпоху и те же математики совершают переход от плоскости и «обычного» пространства к пространству $n$ измере-

---

[1]) Полярный треугольник был, по-видимому, впервые употреблен Насирэддином-Туси (XIII в.) в его «Трактате о полном четырехстороннике» (см. перевод на русский язык Б. А. Розенфельда). — *Прим. перев.*

ний — переход, столь естественный (стоит только избрать этот путь), что мы видели его уже у Ферма. Этот переход является неизбежным, так как алгебраические соотношения, которые для двух и трех переменных сами собой интерпретируются геометрически, имеют место и для произвольного числа переменных. Поэтому ограничивать себя геометрическим языком, соответствующим пространству только трех измерений, было бы для современного математика столь же неудобным ярмом, как то, которое мешало грекам распространить понятие числа на отношения несоизмеримых величин. Поэтому терминология и идеи, относящиеся к пространству $n$ измерений, появляются почти одновременно с различных сторон: в неясной форме у Гаусса и совершенно ясно у математиков следующего поколения. Их бо́льшая или меньшая смелость в пользовании $n$-мерными пространствами, быть может, не столько зависела от их математических склонностей, сколько от их философских или даже чисто практических воззрений. Во всяком случае, около 1846 г. и Кэли и Грассман уже пользуются этими концепциями самым непринужденным образом. И это, как говорит Кэли в отличие от Грассмана ([44], т. I, стр. 321), *«не прибегая ни к какому метафизическому понятию»*. Кэли остается все время близок к аналитической интерпретации и методу координат, тогда как у Грассмана с самого начала уже при определении сложения векторов в $n$-мерном пространстве берет верх геометрический аспект, приводящий его к рассуждениям, о которых мы вскоре будем говорить.

Между тем идеи Гаусса побуждали математиков к изучению алгебр или гиперкомплексных систем двумя различными способами. С одной стороны, пытались расширить область действительных чисел иным способом, чем путем введения «мнимой единицы» $i = \sqrt{-1}$, и, таким образом, открыть себе, быть может, более обширные и столь же плодотворные области, как область комплексных чисел. Сам Гаусс ([95 а], т. II, стр. 178) был убежден в невозможности такого расширения, по крайней мере если пытаться сохранить основные свойства комплексных чисел, т. е., говоря современным языком, те, которые делают их коммутативным телом. И то ли под его влиянием, то ли независимо от него современники Гаусса, кажется, разделяли его убеждение, которое гораздо позднее было точно обосновано Вейерштрассом ([243 а], т. II, стр. 311—332) в его теореме. Но как только умножение комплексных чисел было интерпретировано при помощи поворота в плоскости, оказалось, что для расширения этого понятия на пространство необходимо рассматривать некоммутативное умножение (так как повороты в пространстве образуют неабелеву группу). Это одна из идей, которые руководили Гамильтоном [1]) при открытии кватернионов [108], явившихся первым примером некоммутативного тела. Особенность этого примера (единственного, как это позднее доказал Фробениус, который может быть построен над полем действительных чисел) несколько ограничивала сферу его действия вопреки, а быть может, и вследствие образования фанатической школы «кватернионистов». Это странное явление еще раз повторилось с сочинением Грассмана. Затем популяризаторы извлекли из работ Гамильтона и Грассмана «векторное исчисление». Отказ от ассоциативности, происшедший несколько позже у Грейвса и Кэли, которые построили «числа Кэли», не открыл интересных путей. Но после того как Сильвестр ввел матрицы и ясно определил понятие ранга (не дав ему названия) ([221], т. I, стр. 145—151), Кэли создал матричное исчисление ([44], т. II, стр. 475—496), заметив, что матрица является лишь более кратким обозначением некоторой линейной подстановки (важный факт, впоследствии часто упускаемый из виду), так же как и обозначение Гаусса $(a, b, c)$ для формы $aX^2 + 2bXY + cY^2$.

Изложенное является лишь одним из наиболее интересных для нас аспектов многочисленных исследований Сильвестра и Кэли об определителях и обо всем, что с ними связано, — исследований, изобилующих замысловатыми тождествами и впечатляющими вычислениями.

Грассман ввел (наряду с многими другими понятиями) также алгебру над полем действительных чисел, а именно внешнюю алгебру ([102], т. I), которая носит его имя. Его сочинение, предшествовавшее по времени книге Гамильтона и созданное почти в полной духовной изоляции, долгое время оставалось малоизвестным вследствие своей оригинальности, а также вследствие философских неясностей, которыми оно изобиловало, чем сначала и оттолкнуло, в частности, Мёбиуса. Движимый теми же целями, что и Гамильтон, но трактуя их с более широкой точки зрения (которая, как он скоро убедился, совпадала с воззрениями Лейбница), Грассман построил обширное алгебраически-геометрическое здание, в основе которого лежала геометрическая или «внутренняя» концепция (уже почти аксиоматизированная) векторного пространства $n$ измерений. Из числа наиболее элементарных результатов, к которым он пришел, приведем, например, определение линейной независимости векторов, определение размерности, а также основное соотношение

$$\dim V + \dim W = \dim (V + W) + \dim (V \cap W)$$

([102], стр. 209; ср. [102], т. I, стр. 21). Но главным орудием для исследований проблем собственно линейной алгебры, а за-

[1]) См. интересное предисловие к его «Lectures on quaternions» (Лекции о кватернионах) [108], где он описывает всю историю своего открытия.

тем проблем структуры евклидова пространства, т. е. ортогональности векторов (в которой он находит эквивалент недостававшей ему двойственности), было внешнее и внутреннее умножение поливекторов.

Другой путь изучения гиперкомплексных систем, открытый Гауссом, имеет исходным пунктом целые комплексные числа $a + bi$. От них естественно перейти к алгебрам или более общим гиперкомплексным системам над кольцом **Z** целых чисел и полем **Q** рациональных чисел. Прежде всего был совершен переход к системам, рассмотренным еще Гауссом, которые порождены корнями из единицы, затем к полям алгебраических чисел и к модулям целых алгебраических чисел. Первые составили основной предмет исследований Куммера, изучение последних было предпринято Дирихле, Эрмитом, Кронекером и Дедекиндом. Здесь, в противоположность тому, что происходит в алгебрах над полем действительных чисел, нет необходимости отказываться ни от одного из характеристических свойств коммутативных тел, изучением которых ограничивались в XIX в. Линейные свойства и, например, поиски базиса для целых чисел поля (необходимого для общего определения дискриминанта) играют для многих вопросов существенную роль. У Дедекинда, во всяком случае, методы становятся типично «гиперкомплексными». Сам Дедекинд к тому же, хотя и не ставил перед собой общую проблему алгебр, хорошо сознавал этот «гиперкомплексный» характер своих работ и то, что роднит их с результатами Вейерштрасса, относящимися к гиперкомплексным системам над полем действительных чисел ([60], особенно т. II, стр. 1—19). В то же время определение структуры мультипликативной группы единиц в поле алгебраических чисел, данное Дирихле в его знаменитых мемуарах ([71], т. I, стр. 619—644) и почти одновременно Эрмитом ([119], т. I, стр. 159—160), в высшей степени способствовало выяснению представления о модулях над **Z**, их системах образующих и об их базисах, если они существуют. Затем понятие идеала, которое Дедекинд определил для полей алгебраических чисел (как модуля над кольцом целых чисел поля) ([60], т. III, стр. 251), тогда как Кронекер ввел эквивалентное понятие для колец полиномов (под названием «системы модулей») ([136 a], т. II, стр. 334—342), дает первый пример модуля, определенного над кольцом, более общим, чем **Z**. У тех же авторов, а затем у Гильберта постепенно появляется в частных случаях понятие группы с операторами, а также выясняется, что, исходя из такой группы, всегда возможно построить модуль над подходящим образом определенным кольцом.

В то же время арифметико-алгебраическое изучение квадратичных и билинейных форм и их «приведения» (или, что то же, матриц и их «инвариантов») приводит к открытию общих принципов решения систем линейных уравнений — принципов, которые из-за отсутствия понятия ранга ускользнули от Якоби [1]). Проблема решения системы линейных уравнений с целыми коэффициентами в целых числах была поставлена и решена для частного случая Эрмитом, а затем в общем случае — Смитом ([210], т. I, стр. 367—409); результаты последнего были вновь найдены только в 1878 г. Фробениусом. На этот раз они явились частью той обширной программы исследований, которая была намечена Кронекером и в которой участвовал Вейерштрасс. Попутно Кронекер в ходе своих работ придал окончательный вид теоремам о системах линейных уравнений с действительными (или комплексными) коэффициентами. Они были также с присущей ему тщательностью изложены знаменитым автором «Алисы в стране чудес» [2]) в малоизвестном теперь руководстве. Что же касается самого Кронекера, то он не заботился об опубликовании своих результатов, оставляя это своим коллегам и ученикам; даже слово «ранг» было введено только Фробениусом. Также в своих лекциях в Берлинском университете Кронекер [136 b] и Вейерштрасс ввели «аксиоматическое» понятие определителя (как полилинейной знакопеременной функции $n$ векторов в пространстве $n$ измерений, нормированной так, что она принимает значения I для единичной матрицы), эквивалентное тому, которое вытекает из исчисления Грассмана. В своих лекциях Кронекер, не чувствуя необходимости в особом наименовании и еще не внутренним образом, также ввел тензорное произведение пространств и «кронекеровское» умножение матриц (линейная подстановка, индуцированная в тензорном произведении данными линейными подстановками, примененными к его сомножителям).

Эти изыскания нельзя также отделить от теории инвариантов, созданной Кэли, Эрмитом и Сильвестром («инвариантная троица» [3]), как позднее называл этих ученых Эрмит в своих письмах). Эта теория с современной точки зрения является прежде всего теорией представлений линейных групп. Там выявляется, что алгебраическим эквивалентом понятия двойственности в проективной геометрии является различение между последовательностями когредиентных и контрагредиентных переменных, т. е. векторами в некотором пространстве и ему сопряженном. И тогда как раньше внимание уделялось формам низших

---

[1]) О классификации систем $n$ уравнений с $n$ неизвестными, когда определитель равен нулю, он говорит: «paullo prolixum videtur negotium» (она не может быть кратко истолкована) ([127], т. III, стр. 370).

[2]) Кэррол Льюис (литературный псевдоним; настоящее имя Чарльз Доджсон), 1832—1898. Профессор математики Оксфордского университета.— *Прим. ред.*

[3]) В оригинале «la trinité invariantive». — *Прим. перев.*

порядков, а затем формам произвольного порядка от 2 и 3 переменных, теперь был совершен переход к исследованию билинейных, а затем полилинейных форм с несколькими последовательностями «когредиентных» или «контрагредиентных» переменных, что эквивалентно введению тензоров. Последние начинают рассматриваться сознательно и приобретают популярность после того, как под влиянием теории инвариантов Риччи и Леви-Чивита в 1900 г. вводят в дифференциальную геометрию «тензорное исчисление» [185], которое затем вошло в моду вследствие его применения «релятивистскими» физиками. Прогрессивное взаимное проникновение теории инвариантов, дифференциальной геометрии, теории дифференциальных уравнений с частными производными (особенно так называемая проблема Пфаффа и ее обобщение) приводят к тому, что геометры начинают мало-помалу рассматривать сначала знакопеременные билинейные дифференциальные формы, в частности «билинейный ковариант» формы 1-го порядка (введенный в 1870 г. Липшицем и изученный Фробениусом), что впоследствии приводит Э. Картана ([40a], т. II, стр. 303—396) и Пуанкаре ([181b], т. III, гл. XXII) к созданию исчисления внешних дифференциальных форм. Для образования интегральных инвариантов Пуанкаре вводит их как выражения, стоящие под знаком кратных интегралов, тогда как Картан, побуждаемый своими изысканиями в области теории алгебр, дает им более формальное определение, замечая при этом, что алгебраические правила исчисления для них эквивалентны внешнему умножению Грассмана (откуда и произошло их название). Этим было окончательно установлено место в математике трудов Грассмана.

Перевод исчисления внешних дифференциальных форм на язык тензорного исчисления непосредственно показывает связь нового исчисления с антисимметрическими тензорами. Если встать на чисто алгебраическую точку зрения, то можно сказать, что кососимметрические тензоры так относятся к знакопеременным полилинейным формам, как ковариантные тензоры — к любым полилинейным формам. Современная теория представлений линейной группы еще более помогает уяснить эту точку зрения. Так, например, с ее помощью можно установить, что определение детерминанта, данное Вейерштрассом и Кронекером, и определение, вытекающее из исчисления Грассмана, по существу тождественны.

Мы подошли, таким образом, к современной эпохе, когда аксиоматический метод и понятие структуры (сначала интуитивное и только совсем недавно точно определенное) позволили отделить понятия, которые были прежде безнадежно запутаны, сформулировать то, что было неясно или ускользало от сознания, доказать в общем виде теоремы, которые были известны лишь для частных случаев. Пеано, один из создателей аксиоматического метода, а также один из первых математиков, по достоинству оценивших произведение Грассмана, дал в 1888 г. ([177b], гл. IX) аксиоматическое определение векторных пространств (конечного или бесконечного числа измерений) над полем действительных чисел и, применив вполне современные обозначения, определил линейные отображения одного пространства в другое. Несколько позже Пинкерле ищет пути для расширения приложения так понимаемой линейной алгебры к теории функций в направлении, которое, правда, оказалось мало плодотворным. Его точка зрения позволила ему по крайней мере увидеть в «сопряженном уравнении Лагранжа» частный случай сопряженного линейного отображения. Вскоре (в замечательных работах Гильберта и его школы, посвященных гильбертовым пространствам и их приложению к анализу) эта связь выступила еще яснее как для обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для уравнений с частными производными. По поводу этих последних изысканий Тёплиц [224 a], также вводя самое общее векторное пространство (но только с помощью координат) над полем действительных чисел, обнаружил, что теория определителей не нужна для доказательства основных теорем линейной алгебры, а это позволяет без труда распространить их на пространства бесконечного числа измерений. Замеченный Тёплицем фундаментальный факт означает также, что в таком аспекте линейная алгебра, очевидно, применима при любом основном поле.

С другой стороны, после введения Банахом в 1922 г. пространств, носящих его имя [1]), в одной проблеме, которая, правда, является настолько же топологической, насколько и алгебраической, встретились пространства, не изоморфные своему сопряженному (см. стр. 226—229). Уже между конечномерным векторным пространством и ему сопряженным не существует «канонического» изоморфизма, т. е. определяемого структурой, что давно получило свое отражение в различении понятия когредиентности и контрагредиентности. Тем не менее различие между пространством и ему сопряженным было установлено лишь после работ Банаха и его школы. Эти работы выявили также интерес понятия коразмерности. Что касается двойственности или «ортогональности» векторных подпространств некоторого пространства и ему сопряженного, то способ, которым она теперь формулируется, представляет не только чисто внешнее сходство с современной формулировкой основной теоремы теории Галуа, а также принципом двойственности Понтрягина для

---

[1]) Это полные нормированные векторные пространства над полем действительных или комплексных чисел.

локально компактных абелевых групп. Этот принцип восходит к Веберу, который в 1886 г. в ходе своих арифметических исследований заложил его основы для конечных групп [241d]. В теории Галуа идея «двойственности» между подгруппами и подполями оформляется у Дедекинда и Гильберта. А идея ортогональности между векторными подпространствами с очевидностью вытекает сначала из двойственности линейных многообразий в проективной геометрии, а также из понятия и свойств ортогональных дополнений в евклидовом и гильбертовом пространствах (откуда и проистекает его название). В наше время все эти нити собираются воедино в руках алгебраистов Э. Нётер, Артина и Хассе и топологов, таких, как Понтрягин и Уитни, не без взаимных влияний, оказываемых ими друг на друга.

Одновременно производится критическое исследование с целью исключить в каждом пункте гипотезы, не являющиеся совершенно необходимыми, и особенно те, которые закрывают двери известным приложениям. Так, было замечено, что в понятии векторного пространства можно заменить поля кольцами и, создавая общее понятие модуля, трактовать единообразно эти пространства, абелевы группы, специальные модули, уже изученные Кронекером, Вейерштрассом, Дедекиндом, Штейницем, и даже группы с операторами и, например, приложить к ним теорему Жордана — Гёльдера. Одновременно путем различения правых и левых модулей совершается переход к некоммутативному случаю, к чему приводило современное развитие теории алгебр американской (Ведерборн, Диксон) и особенно немецкой (Э. Нётер, Артин) школами.

Наконец, совсем недавно появилась последняя тенденция, которую здесь следует отметить; линеаризация теории Галуа, содержащаяся в зародыше в теореме Дедекинда ([60], т. III, стр. 29) о линейной независимости любых автоморфизмов поля, была завершена Артином [5a], затем была обобщена на произвольные расширения коммутативных и даже некоммутативных тел ([128], гл. VII).

# МНОГОЧЛЕНЫ И ПОЛЯ

Теория полей и тесно с ней связанная теория многочленов берут свое начало от той части классической алгебры, которая была в центре внимания вплоть до середины XIX в. Мы имеем в виду решение алгебраических уравнений и эквивалентных им проблем геометрических построений.

Попытка решить алгебраическое уравнение степени $> 1$ сразу же наталкивается на совершенно новые трудности, так как неизвестные уже не могут быть определены с помощью рациональных операций над данными величинами. Эту трудность должны были заметить уже очень давно, и одним из наиболее важных вкладов вавилонян следует считать то, что они сумели свести решение квадратных и биквадратных уравнений к одной новой алгебраической операции — извлечению квадратного корня, что доказывается наличием в дошедших до нас текстах большого количества числовых уравнений, решенных именно этим способом ([166], стр. 183—193). Античность не продвинула дальше формального исчисления, относящегося к проблеме решения алгебраических уравнений. Действительно, греки классической эпохи ограничились тем, что вновь нашли вавилонские формулы в геометрическом виде, а употребление их в алгебраической форме не засвидетельствовано раньше Герона (100 г. н. э.) и Диофанта.

Однако в другом направлении греки сделали решительный шаг вперед. Мы мало осведомлены о том, как вавилоняне трактовали квадратные корни из неполных квадратов [1]) и как они их понимали: в том небольшом числе текстов, которые до нас дошли, они, кажется, довольствуются достаточно грубыми приближениями ([166], стр. 33—38). В пифагорейской школе, где было строго установлено понятие соизмеримых величин, с которыми связывались чуть ли не религиозные представления, такая точка зрения оказалась неприемлемой. Возможно, что неудачи

---

1) Во всех примерах квадратных и биквадратных уравнений, встречающихся в вавилонских текстах, данные подобраны так, чтобы под корнем стоял полный квадрат.

многочисленных попыток выразить рационально $\sqrt{2}$ и привели их в конце концов к доказательству его иррациональности [1]).

Мы будем говорить в другом месте (ср. стр. 150) о том, какое глубокое влияние оказало это открытие, явившееся важным поворотным пунктом в истории математики, на понятие «числа» у греков и как оно привело их к созданию алгебры, носящей исключительно геометрический характер. В этой алгебре греки нашли способ представления (или, быть может, доказательство «существования») несоизмеримых отношений, которые они отказывались считать числами. Чаще всего они сводили алгебраическую проблему к нахождению точки пересечения двух вспомогательных кривых, выбранных должным образом, или к нескольким последовательным определениям таких точек. Поздние традиции, не заслуживающие большого доверия, возводят к Платону введение первой классификации таких построений, которым была предназначена долгая и блестящая карьера: по-видимому, по соображениям более философского, чем математического, характера он выделил построения с помощью «циркуля и линейки», т. е. такие, в которых в качестве вспомогательных кривых берутся только прямые и окружности [2]). Во всяком случае, Евклид в «Началах» [80] ограничивается рассмотрением только таких проблем, которые разрешимы этим способом (не давая им, однако, особого названия). Это обстоятельство, без сомнения, немало способствовало привлечению внимания математиков последующих веков к таким проблемам. Но мы теперь знаем [3]),

---

[1]) Один из современных авторов остроумно заметил, что конструкция правильного звездчатого пятиугольника, известного пифагорейцам (он являлся у них одним из мистических символов), немедленно приводит к доказательству иррациональности $\sqrt{5}$. Он предложил гипотезу (которая, к сожалению, не подтверждается никаким текстом), что именно этим способом пифагорейцы открыли иррациональные числа [237].

[2]) В связи с этим принципом Платону приписывают также классификацию плоских кривых на «плоские геометрические места» (прямая и круг), «пространственные геометрические места» (конические сечения получаемые как плоские сечения пространственного тела, конуса); все остальные кривые назывались «τόποι γραμμικοί». Любопытно, что влияние этой классификации сказалось еще на Декарте, который в своей «Геометрии» относит к одному и тому же «роду» уравнения степени $2n-1$ и $2n$ именно потому, что уравнения степени 1 и 2 решаются с помощью пересечения «плоских геометрических мест», а степени 3 и 4 — «пространственных геометрических мест» ([64a], г. VI, стр. 392—393, русский перевод стр. 320—327).

[3]) Определение точек пересечения прямой и окружности (или двух окружностей) эквивалентно решению одного квадратного уравнения, коэффициенты которого являются рациональными функциями коэффициентов рассматриваемых уравнений прямой и окружности (или двух окружностей). Из этого легко заключить, что точка, построенная «циркулем и линейкой», исходя из заданных точек, принадлежит расширению $L$ поля $\mathbf{Q}$ рациональных чисел, которое получается следующим образом: если $K$ — поле, полученное путем присоединения к $\mathbf{Q}$ координат заданных точек, то существует возрастающая последовательность полей $(L_i)$, $0 \leqslant i \leqslant n$, промежуточных между $K$ и $L$ и удо-

что алгебраические уравнения, которые можно решить «циркулем и линейкой», являются уравнениями очень специального вида; в частности, неприводимое (над полем рациональных чисел) уравнение 3-й степени не может быть решено таким способом, и греки уже очень рано встретились со знаменитыми задачами такого рода: удвоением куба (т. е. решением уравнения $x^3 = 2$) и трисекцией угла. Квадратура круга поставила их, с другой стороны, перед проблемой трансцендентности. Для того чтобы решить эти проблемы, греки вводили многочисленные алгебраические (конические сечения, циссоида Диоклеса, конхоида Никомеда) и трансцендентные кривые (квадратриса Динострата, спираль Архимеда), что побудило их начать исследование этих кривых. Этим была подготовлена почва для будущего развития аналитической геометрии, алгебраической геометрии и исчисления бесконечно малых. Но эти методы не способствовали успехам в решении алгебраических уравнений [1], и единственной античной работой, внесшей значительный вклад в этот вопрос и оказавшей длительное влияние на алгебраистов средних веков и эпохи Возрождения, была X Книга «Начал» Евклида [80]. В этой книге (основные принципы которой некоторые историки науки пытаются возвести к Теэтету) Евклид рассматривает выражения, получаемые путем сочетания нескольких радикалов, как, например, $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ (где $a$ и $b$ — рациональные), приводит условия, при которых эти выражения являются иррациональными, разбивает их на многочисленные категории (доказывая, что они отличны друг от друга) и изучает алгебраические соотношения между этими различными иррациональностями, например такое, которое мы бы теперь записали следующим образом:

$$\sqrt{\sqrt{p}+\sqrt{q}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{p}+\sqrt{p-q}\right)} + \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{p}-\sqrt{p-q}\right)}.$$

Все это было выражено на обычном для «Начал» языке геометрии, что делало изложение особенно неудобным и запутанным.

После упадка классической греческой математики изменились взгляды и на алгебраические уравнения. Несомненно, что в те-

---

влетворяющих условиям $K = L_0, L = L_n, [L_i : L_{i-1}] = 2$ для $1 \leqslant i \leqslant n$. Отсюда путем повторения рассуждения можно вывести, что степень поля Галуа $N$, порожденного расширением $L$ над $K$, есть степень двойки. Обратно, можно доказать, что если это условие выполнено, то существует последовательность полей $(L_i)$, промежуточных между $K$ и $L_2$, которая обладает указанным выше свойством, и, следовательно, проблема разрешима «циркулем и линейкой» (ср. [227], стр. 351—366).

[1]) Из-за отсутствия гибкого алгебраического исчисления греки не делали попыток классифицировать проблемы, которые они не умели решать циркулем и линейкой; арабы первые свели многочисленные проблемы такого рода (например, построение правильных $n$-угольников при $n = 7$ и 9) к уравнениям 3-й степени.

чение всего классического периода греки владели методами получения сколь угодно точных приближений квадратных корней, о которых, к сожалению, мы плохо осведомлены [1]). У индийцев, а затем у арабов и их западных соперников в средние века извлечение корней всех степеней становится операцией, которую начинают считать такой же основной в алгебре, как и рациональные операции, и обозначать, как и эти последние, все более и более удобными для исчисления символами [2]). В теории квадратных уравнений, которая совершенствовалась в течение всего средневековья (число корней, отрицательные корни, невозможный случай, кратный корень), а также в теории биквадратных уравнений были получены примеры формул решения уравнений «в радикалах», по аналогии с которыми алгебраисты в течение многих веков пытались найти формулы для решения уравнений высших степеней, и в первую очередь для уравнений 3-й степени. Леонардо Пизанский, основной проводник арабской науки на Запад в XIII в., уже знал, во всяком случае, что иррациональности, которые были классифицированы Евклидом в X Книге, не могут служить для этой цели (новое доказательство невозможности в теории, которая насчитывает их так много). Мы видим, что он пытался провести аналогичные вычисления с кубическими корнями. Так, им были получены различные соотношения, как, например,

$$\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{250},$$

---

[1]) Например, метод Архимеда для вычисления приближений числа $\pi$ требует знания нескольких квадратных корней с довольно большой степенью точности, но мы не знаем способа, которым Архимед получал их значения. Метод нахождения последовательных приближений $\sqrt{2}$, которые получаются путем разложения этого числа в «непрерывную дробь», известен (в геометрической своей форме) из одного текста Теона Смирнского (II в. н. э.), но он восходит, быть может, к первым пифагорейцам. Что касается того метода получения неограниченных приближений квадратных корней, который употребляется и сейчас в элементарной математике, то он засвидетельствован только у Теона Александрийского (IVв. н. э.), хотя был, несомненно, известен уже Птолемею. Заметим, наконец, что у Герона (около 100 г. н. э.) встречается уже приближенное вычисление кубического корня. [Метод нахождения последовательных приближений $\sqrt{2}$ был обоснован еще Евклидом в 9—10-м предложениях Книги II «Начал». — *Прим. перев.*]

[2]) До Штифеля (XVI в.) никто не отмечал и не доказывал, что $\sqrt[n]{a}$, если $a$ есть целое, не являющееся точной $n$-й степенью, есть иррациональное число. [Это утверждение не совсем верно. Согласно Платону, Теэтет доказал, что $\sqrt[3]{a}$ иррационален, если $a$ не является точным кубом. Евклид в «Началах» исследовал иррациональности вида $\sqrt[k]{a}$, если $k=2^n$. — *Прим. перев*.] Доказательство, данное Штифелем ([216], стр. 103), было скопировано с доказательства Евклида для случая $n=2$, и мало вероятно, что это нетрудное обобщение не было до него никем замечено.

аналогичные формулам Евклида для квадратных радикалов (примеры такого рода встречаются еще раньше у арабов). Но прошло еще три столетия бесплодных усилий, пока Сципион дель Ферро в самом начале XVI в. не нашел формулу

$$x=\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}} \qquad (1)$$

для решения уравнений $x^3+ax=b$.

Мы не можем здесь описывать живописную историю этого сенсационного открытия — ссоры, которую оно вызвало между Тартальей, с одной стороны, и Кардано и его школой — с другой, а также останавливаться на весьма примечательных портретах ученых, игравших при этом главную роль. Но мы должны отметить, что следствием этого открытия явился решительный прогресс теории уравнений, особенно в работах Кардано и его школы. Так, Кардано, у которого отвращение к применению отрицательных чисел было меньше, чем у его современников, обнаружил, что кубические уравнения могут иметь три корня, а биквадратные уравнения — четыре ([38], т. IV, стр. 259). Он заметил также, что сумма трех корней уравнения $x^3+bx=ax^2+c$ (в котором он умел уничтожать член с $x^2$) всегда равна $a$ (там же). Несомненно, руководствуясь этим соотношением, общность которого он интуитивно чувствовал, Кардано пришел впервые к идее о кратности корня. Он осмелился даже (не без ораторских предосторожностей) формально оперировать с выражениями, содержащими квадратные корни из отрицательных чисел. Очень правдоподобно, что он пришел к этому, потому что такие выражения получаются естественным образом при употреблении формулы (1), если $\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3<0$ (так называемый «неприводимый» случай, для которого Кардано обнаружил существование трех действительных корней). Во всяком случае, это обстоятельство выступает с полной ясностью у его последователя Р. Бомбелли, который в своей «Алгебре» ([23 а], стр. 293) доказал соотношение

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=2+\sqrt{-1}$$

и явно изложил правила исчисления с комплексными числами в форме, уже очень близкой к современной [1]). Наконец, в 1545 г.

---

[1]) Бомбелли ([23a], стр. 169 и 190) рассматривает комплексные числа как «линейные комбинации» четырех базисных элементов «piu» (+ 1), «meno» (—1), «piu de meno» ($+i$) и «meno de meno» ($-i$) с положительными коэффициентами. Он считает аксиомой, что «piu» и «piu de meno» не могут быть сложены (в смысле приведения подобных членов. — *Перев.*), а это есть первое появление понятия линейной независимости.

другому ученику Кардано, Л. Феррари, удалось найти решение общего уравнения 4-й степени при помощи уравнения 3-й степени [1]).

После столь стремительного продвижения вперед в следующем периоде, продолжавшемся до середины XVIII в., происходит только развитие тех новых идей, которые были введены итальянской школой. Виета благодаря существенному прогрессу, который он внес в алгебраические обозначения, смог выразить в общем виде соотношения между коэффициентами и корнями алгебраического уравнения, по крайней мере для случая, когда все корни положительны [2]) ([233], стр. 158). Более смелый А. Жирар [99], не колеблясь, утверждает (конечно, без доказательства), что уравнение степени $n$ имеет ровно $n$ корней с учетом и «невозможных корней», каждого с его степенью кратности, и что эти корни удовлетворяют соотношениям Виета. Он также впервые находит выражение сумм одинаковых степеней корней до степени 4.

Но в XVII в. мысль ученых обратилась к другим направлениям исследований, и алгебра лишь благодаря отраженной волне смогла в некоторой степени воспользоваться открытиями, сделанными в аналитической геометрии и исчислении бесконечно малых. Так, с методом Декарта нахождения касательных к алгебраическим кривым (ср. стр. 182) связан критерий существования кратного корня алгебраического уравнения, который был сформулирован последователем Декарта Гудде ([64b], т. I, стр. 433 и 507—509). Различение алгебраических и трансцендентных функций произошло, без сомнения, под влиянием Декарта аналогично тому, как он различает в своей «Геометрии» «геометрические» и «механические» кривые (ср. стр. 181 и 202). Во всяком случае, такое различение уже вполне четко выступает у Дж. Грегори, который в 1667 г. пытался даже доказать, что площадь кругового сектора не может быть алгебраической функцией хорды и радиуса [104a] (ср. [115 bis]). Выражение «трансцендентный» идет от Лейбница, которого в течение всей

---

[1]) Если уравнение приведено к виду $x^4 = ax^2 + bx + c$, то определяют число $z$ так, чтобы правая часть уравнения

$$(x^2 + z)^2 = (a + 2z)\,x^2 + bx + (c + z^2)$$

была полным квадратом, что приводит к уравнению 3-й степени над $z$.

[2]) Виета, страстный почитатель древних, систематически воздерживался в своих рассуждениях от введения отрицательных чисел. Тем не менее он умел, когда это было нужно, выражать на своем языке соотношения между коэффициентами и корнями, если некоторые из них были отрицательны; например, если уравнение $x^3 + b = ax$ имеет два положительных корня $x_1$, $x_2$ $(a > 0,\ b > 0)$, то Виета показывает, что $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 = a$ и $x_1x_2(x_1 + x_2) = b$ ([233], стр. 106).

его деятельности не перестают интересовать вопросы классификации. В 1682 г. Лейбниц нашел простое доказательство результата Дж. Грегори, показав, что $\sin x$ не является алгебраической функцией $x$ ([144 a], т. V, стр. 97—98) [1]. Вместе со своим другом Чирнгаузом он был одним из немногих математиков своего времени, который еще интересовался проблемой решения «в радикалах» алгебраических уравнений. Вначале Лейбниц исследовал «неприводимый случай» кубического уравнения и убедился (без достаточных доказательств), что в этом случае в формулах решения невозможно избавиться от мнимых величин ([144d], стр. 547—564). Примерно в то же время он пытается, также безуспешно, решить в радикалах уравнение 5-й степени. Когда позднее Чирнгауз утверждал, что решил проблему, уничтожив в уравнении все члены, кроме двух крайних, путем подстановки вида $y = P(x)$, где $P(x)$ — подходящим образом выбранный многочлен 4-й степени, Лейбниц сейчас же заметил, что уравнения, с помощью которых определяются коэффициенты многочлена $P(x)$, имеют степень $> 5$. Он считал поэтому, что такой метод обречен на неудачу ([144d], стр. 401—403).

По-видимому, благодаря потребностям нового анализа мало-помалу возродился интерес к алгебре. Метод интегрирования рациональных дробей, разработанный Лейбницем и Иоганном Бернулли, и тесно с ним связанный вопрос о логарифмах мнимых чисел привели к углублению исчисления с мнимыми числами и к новой постановке вопроса о разложении полинома на линейные множители («основная теорема алгебры») [2]. С самого начала XVIII в. решение двучленного уравнения $x^n - 1 = 0$ было сведено Котесом и Муавром к проблеме деления круга на $n$ равных частей. Для выражения его корней «в радикалах» достаточно поэтому сделать это для простого нечетного $n$, и Муавр замечает, что подстановка $y = x + 1/x$ сводит тогда про-

---

[1]) Определение, которое дает Лейбниц «трансцендентным количествам» ([144a], т. V, стр. 228, см. там же, стр. 120), кажется скорее приложимым к функциям, чем к числам (на современном языке то, что он делает, сводится к определению трансцендентных элементов над полем, полученным путем присоединения к полю рациональных чисел данных задачи). Тем не менее весьма правдоподобно, что он имел достаточно ясное представление о трансцендентных числах (несмотря на то, что эти последние были точно определены только в конце XVIII в.); во всяком случае, он подчеркивает, что трансцендентная функция может принимать рациональные значения для рациональных значений аргумента и что, следовательно, его доказательство трансцендентности $\sin x$ недостаточно, чтобы установить иррациональность числа $\pi$ ([144a], т. V, стр. 97 и 124—126).

[2]) Можно представить себе, в каком зародышевом состоянии находилось тогда еще исчисление с комплексными числами, если учесть, что Лейбниц (один из наиболее опытных среди математиков своего времени в этой технике) писал так, как будто считал, что $x^4 + 1$ нельзя разложить на два множителя второй степени ([144a], т. V, стр. 359—360).

блему к решению уравнения степени $(n-1)/2$. Что касается «основной теоремы», то после провала ряда попыток найти общее решение «в радикалах» [включая несколько попыток Эйлера ([81 a] (I), т. VI, стр. 1—19 и 170—196)] начинают искать ее доказательство a priori, не используя явных формул решения. Не входя в детали предлагаемых методов (которые привели в конце концов к доказательствам Лагранжа и Гаусса, ср. стр. 110—111 и 161), следует привести здесь точку зрения, с которой эта проблема рассматривалась в середине XVIII в. Предполагалось (без какого-либо иного оправдания, кроме смутного чувства общности утверждения, проистекавшего, по-видимому, как у Жирара, из соотношений между коэффициентами и корнями уравнения), что уравнение степени $n$ всегда имеет $n$ «идеальных» корней, с которыми можно оперировать, как с числами, *не зная, являются ли они числами* (действительными или комплексными); требовалось доказать, что по крайней мере один из этих корней является обычным комплексным числом [1]) (при этом разрешалось пользоваться, если это было нужно, исчислением идеальных корней). В этой несовершенной форме можно усмотреть первые ростки общей идеи «формального присоединения», которой, несмотря на возражение Гаусса ([95 a], т. III, стр. 1), суждено было стать основой современной теории коммутативных полей.

В 1770 г. основополагающими мемуарами Лагранжа ([140], т. III, стр. 205—421) и Вандермонда [230] открывается новый решающий период в истории теории алгебраических уравнений. Более или менее удачные эмпирические попытки найти формулы решения, которые безраздельно господствовали до этого времени, сменились систематическим анализом поставленных проблем и методов их решения, анализом, который через шестьдесят лет привел к окончательным результатам Галуа. И Лагранж и Вандермонд исходили из неопределенности формул решения уравнения степени $\leqslant 4$, причиной которой являлась многозначность входящих в них радикалов. Этот факт привлек внимание Эйлера ([81 a] (I), т. VI, стр. 1—19), который показал между прочим, как в формуле дель Ферро надо сочетать значения входящих в нее радикалов для того, чтобы получить три корня, а не девять. Лагранж заметил, что каждый из кубических радикалов в формуле дель Ферро можно написать в виде $\frac{1}{3}(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)$, где $\omega$ является кубическим корнем из единицы, а $x_1$, $x_2$, $x_3$ — три корня данного уравнения, взятые в определенном порядке, и обнаружил следующий фундаментальный факт:

[1]) Заметим, что математики XVIII в. часто называли «мнимыми корнями» «идеальные» корни, о которых мы говорили, и пытались доказать, что эти корни имеют вид $a+b\sqrt{-1}$ (см., например, [140], т. III, стр. 479).

функция $(x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3)^3$ от трех корней может принять только *два* различных значения при всевозможных *перестановках* корней, что объясняет a priori успех метода решения этого уравнения. Сделав аналогичный анализ методов решения уравнения 4-й степени, Лагранж пришел к функции $x_1x_2+x_3x_4$ четырех корней, которая принимает только *три* различных значения при всех перестановках корней, вследствие чего она является корнем уравнения третьей степени, коэффициенты которого рационально выражаются через коэффициенты исходного уравнения [1]). Эти факты, по мнению Лагранжа, являются *«истинным принципом и, так сказать, метафизикой* [2]) *решения уравнений 3-й и 4-й степени»* ([140], т. III, стр. 357). Опираясь на эти примеры, Лагранж ставит перед собой проблему общего изучения того, сколько значений [3]) $\nu$ может принять рациональная функция $V$ от $n$ корней при всевозможных перестановках этих корней.

Таким образом, он в действительности положил начало (в терминологии, еще тесно связанной с теорией уравнений) теории групп и полей, многие фундаментальные результаты которых он сам получил, и притом с помощью тех же принципов, которые употребляются и теперь. Например, он доказал, что число $\nu$ является делителем $n!$, путем тех же рассуждений, которыми теперь доказывают, что порядок подгруппы конечной группы является делителем порядка группы [4]). Еще более замечательна теорема, в которой он доказывает, что если $V_1$ и $V_2$ являются двумя рациональными функциями корней, остающимися неизменными при одних и тех же перестановках, то каждая из них является рациональной функцией другой и коэффициентов уравнения (частный случай теоремы Галуа, характеризующей подполе нормального расширения как поле инвариантов его группы Галуа). *«Эта проблема,* — говорит Лагранж, — *представляется мне одной из важнейших в теории уравнений, и общее решение, которое мы ей дадим, поможет пролить новый свет на эту часть алгебры»* ([140], т. III, стр. 374).

---

[1]) Варинг также сделал это замечание в своих «Meditationes algebraicae», опубликованных в том же 1770 г., но он был далек от получения из него тех следствий, которые приводит Лагранж.

[2]) В этом понятии, которое так часто употреблялось авторами XVIII в., можно усмотреть первое интуитивное представление (еще очень смутное) о современном понятии *структуры*.

[3]) Лагранж уже отличает различные *рациональные выражения*, которые получаются из $V$ путем перестановок переменных $x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, и различные *значения*, которые принимают эти выражения, когда $x_i$ являются корнями алгебраического уравнения с заданными числовыми коэффициентами; но в его изложении имеются еще некоторые колебания в этом вопросе, только у Галуа это различение стало более отчетливым.

[4]) Аналогичные рассуждения встречаются у Эйлера при доказательстве малой теоремы Ферма и ее обобщений (см. [81a] (I), т II, стр. 328—337). — *Прим. перев.*

По мысли Лагранжа, все эти изыскания являются естественным введением в анализ всех возможных методов решения алгебраических уравнений путем их последовательного сведения к уравнениям низших степеней. Такой метод, как он показал, тесным образом связан с образованием рациональной функции от корней, которая принимает при всевозможных перестановках корней меньше $n$ значений. Руководствуясь своими результатами для уравнения 3-й степени, Лагранж вводит и в общем случае «резольвенты Лагранжа» $y_k = \sum_{h=1}^{n} \omega_k^h x_h$, где $\omega_k$ — корень $n$-й степени из единицы ($1 \leqslant k \leqslant n$), явно показывает, как, зная эти $n$ чисел, определить корни $x_k$, и ищет в общем случае порядок уравнения, которому удовлетворяют $y_k$. Так, например, он показывает, что если $n$ — простое, то $y_k$ являются корнями уравнения степени $n-1$, коэффициенты которого рационально зависят от корня уравнения степени $(n-2)!$ с коэффициентами, рационально выражающимися через коэффициенты данного уравнения. *«Вот, если я не ошибаюсь,* — заключает Лагранж, — *истинные принципы решения уравнений и анализ, наиболее пригодный, чтобы привести к решению; как мы видели, все сводится к некоторому исчислению комбинаций, с помощью которого получают a priori результаты, которых следует ожидать»* ([140], т. III, стр. 403).

Что касается мемуара Вандермонда, который был написан совершенно независимо, то он совпадает во многих пунктах с мемуаром Лагранжа; а именно это относится к идее нахождения рациональной функции корней, которая принимает при перестановках корней возможно меньшее число различных значений [1]). Вандермонд вводит также для этого «резольвенту Лагранжа». Его работа далеко не имеет той ясности и общности, как исследование Лагранжа, однако в одном пункте он идет дальше, применяя те же идеи к уравнению деления круга $x^n - 1 = 0$, где $n$ — нечетное простое число. Лагранж довольствуется напоминанием, что это уравнение сводится к уравнению степени $m = (n-1)/2$ с рациональными коэффициентами, не пытаясь решить его при $n \geqslant 11$. Вандермонд же утверждает, что $m$-е степени резольвент Лагранжа этого уравнения рациональны вследствие соотношений между различными корнями уравнений $x^n - 1 = 0$. Однако он довольствуется проверкой правильности

---

[1]) В этих исследованиях, которые он в действительности проводит только для уравнения 5-й степени, в первый раз появляется понятие *импримитивности* ([230], стр. 390—391). Возникает естественное желание сблизить методы Лагранжа и Вандермонда с их работами того же времени об определителях, благодаря которым идея перестановки и все, что с ней связано, должно было стать для них привычным.

этого утверждения только для $n = 11$, не обосновывая его в общем случае.

Только через 30 лет результаты, сформулированные Вандермондом, были полностью доказаны Гауссом [1]). Эти окончательные результаты относительно уравнения $x^n - 1 = 0$ ($n$ — нечетное простое) входят в общую программу его достопамятных арифметических исследований ([95а], т. 1, стр. 413 и след.) и показывают, в частности, как Гаусс мастерски владел тем, что мы теперь называем теорией циклических групп. После доказательства неприводимости полинома $\Phi_n(x) = x^n - 1/x - 1$ для нечетного простого $n$ [2]) у Гаусса возникает идея записать $n - 1$ корней этого полинома в виде $\zeta^{g^k} = \zeta_k$ $(0 \leqslant k \leqslant n-2)$, где $g$ — первообразный корень сравнения $z^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ (что, выражаясь современным языком, эквивалентно установлению того, что группа $\Gamma$ уравнения $\Phi_n(x) = 0$ циклична). Каждому делителю $e$ числа $n - 1$ он ставит в соответствие $f = (n-1)/e$ «периодов» $\eta_\nu = \zeta_\nu + \zeta_{\nu+e} + \zeta_{\nu+2e} + \ldots + \zeta_{\nu+(f-1)e}$ $(1 \leqslant \nu \leqslant f)$ и показывает по существу, что линейные комбинации периодов $\eta_\nu$ с рациональными коэффициентами образуют поле, порожденное каким-либо из $f$ периодов $\eta_\nu$ и имеющее степень $f$ над полем рациональных чисел (это поле, естественно, соответствует подгруппе $\Gamma$ порядка $e$). Мы не можем здесь входить в детали его анализа и тех важных арифметических следствий, которые из него вытекают. Отметим только, что Гаусс получает, в частности, знаменитую теорему о возможности построения «циркулем и линейкой» многоугольников, число сторон которых есть простое число вида $2^{2^k} + 1$ [3]). Что касается разрешимости в радикалах уравнения $\Phi_n(x) = 0$, она легко вытекает из теории периодов, примененной к $f$-м степеням резольвенты Лагранжа $\sum_{\nu=0}^{f-1} \omega^\nu \eta_\nu$ (где $\omega^f = 1$) [4]).

[1]) Гаусс не ссылается на Вандермонда в своих «Disquisitiones», но весьма правдоподобно, что он читал его мемуар (ср. [195а], t. $X_2$ Abh, 4, стр. 58).

[2]) Понятие неприводимого многочлена (с рациональными коэффициентами) восходит к XVII в., и Ньютон и Лейбниц уже предложили способы, которые позволяют (по крайней мере в принципе) найти неприводимые множители многочлена с рациональными коэффициентами ([144а], т. IV, стр. 329 и 355). Но доказательство Гаусса явилось первым применимым к *множеству* многочленов как угодно большой степени.

[3]) Гаусс определенно утверждает, что владеет доказательством того, что этот случай единственный, при котором многоугольник, имеющий простое число сторон, можно построить циркулем и линейкой. Однако это доказательство никогда не было им опубликовано и не было найдено в его бумагах.

[4]) На самом деле, если нужно доказать только то, что уравнение разрешимо в радикалах, то можно ограничиться случаем $e = 1$ и проводить рассуждение индукцией по $n$.

Непосредственно к трудам Лагранжа примыкают исследования его соотечественника Руффини [193], которые совпадали по времени с созданием «Disquisitiones». Продолжая исследование вопроса с того места, на котором остановился Лагранж, Руффини ставит своей целью доказать невозможность решить «в радикалах» «общее» [1]) уравнение 5-й степени. Растянутое и неясное доказательство Руффини осталось неполным, несмотря на то что он его несколько раз переделывал. Но оно было уже очень близко к (корректному по своему принципу) доказательству, которое позже получил Абель [2]). Основной интерес его состоит главным образом во введении исчисления подстановок и первых понятий теории групп, которые Руффини развил для того, чтобы доказать, что не существует функции пяти корней уравнения, которая при произвольных перестановках корней принимала бы больше двух и меньше пяти значений.

Мы уже говорили (см. стр. 63), как эти первые наброски теории групп перестановок были через несколько лет развиты и систематизированы Коши. Но если постепенно становились все более и более ясными понятия, необходимые для развития идей Лагранжа, которые были связаны с подстановками, то основные принципы теории полей еще не были выявлены так же отчетливо. Как раз этого-то и не хватало Руффини. Это было сделано Абелем и Галуа на последнем этапе исследования проблемы решения алгебраических уравнений.

В течение всей своей короткой жизни Абель не переставал интересоваться этой проблемой. Будучи почти еще ребенком, он думал, что нашел формулу решения в радикалах общего уравнения 5-й степени. Убедившись позднее в своей ошибке, он не переставал заниматься этой проблемой, пока не доказал, что такой формулы не существует ([1], т. I, стр. 66). Но он на этом не остановился. Тогда как его соперник Якоби развивал теорию эллиптических функций аналитическими методами, в работах Абеля доминировала алгебраическая точка зрения на этот вопрос, центральное место в которой занимала теория уравнений деления эллиптических функций ([1], т. I, стр. 265, 377 и далее).

---

[1]) Математики XIX в. понимают под этим в сущности уравнение с неопределенными коэффициентами над полем рациональных чисел. Но современное понятие неопределенных величин сформировалось лишь в последние годы XIX в. До этого под «многочленом» или «рациональным выражением» всегда понимали функцию комплексного переменного. Под «общей» алгебраической функцией понимали уравнение, коэффициенты которого являются независимыми комплексными переменными, а корни являются «алгебраическими функциями» от этих переменных. Такое понимание, по правде говоря, было совершенно лишено точного смысла, если придать слову «функция» его действительное значение. Разумеется, рассуждения с этими «алгебраическими функциями», вообще говоря, были внутренне корректны, как в этом можно убедиться, переводя их на язык современной алгебры.

[2]) Мемуары Руффини тщательно проанализированы в [32].

Абель получал таким образом новые типы уравнений, разрешимых в радикалах, методом, скопированным с метода Гаусса для уравнений деления круга ([1], т. I, стр. 310 и 358) [1]). От этих результатов он переходит к общей концепции «абелевых уравнений», разрешимость которых в радикалах он доказал в своем знаменитом мемуаре ([1], т. I, стр. 478). В связи с этим он дал точное определение понятия многочлена, неприводимого над заданным полем (полем, порожденным коэффициентами изучаемого уравнения) [2]). Смерть сразила его в 1829 г., когда он интенсивно занимался общей проблемой характеристики всех уравнений, разрешимых в радикалах, и сообщил Крелле и Лежандру результаты, уже очень близкие к результатам Галуа ([1], т. I, стр. 219—243, 269—270 и 279).

Э. Галуа и суждено было тремя годами позже увенчать это грандиозное дело [94]. Он начал с того, что дал, как и Абель, но еще более четко определение (с точностью до терминологии) принадлежности некоторой величины к полю, порожденному данными величинами, а также определения присоединения и неприводимого над данным полем многочлена. Пусть дано уравнение $F(x) = 0$, без кратных корней, с коэффициентами из заданного поля $K$. Галуа последовательно доказывает, что *«всегда можно образовать такую функцию $V$ от корней, что ни одно из значений этой функции, которые получаются, если переставлять всеми возможными способами ее корни, не будет равно другому»*, что эта функция *«будет обладать тем свойством, что все корни рассматриваемого уравнения рационально выражаются как функции от $V$»* и что, если $V$, $V'$, $V''$, ... — корни неприводимого уравнения, которому удовлетворяют $V$, и *«если $a = f(V)$ является одним из корней заданного уравнения, то $f(V')$ тоже будет корнем этого уравнения»* ([94], стр. 36—37; русский перевод стр. 65—67). Говоря современным языком, Галуа доказывает, что $V$, так же как и любой ему сопряженный над $K$ элемент, порождает поле $N$ корней $F$. После этого он определяет группу $\Gamma$ уравнения $F = 0$ как множество перестановок корней $x_i$, которые можно получить, если в рациональных выражениях $x_i$ через

---

[1]) Гаусс уже в «Disquisitiones» указывал на возможность обобщить свои методы и применить их к уравнению деления лемнискаты ([95a], т. I, стр. 413). Он рассмотрел в своих заметках, которые были опубликованы только в наши дни, лишь случай деления на 5 ([95a], т. X, стр. 161—162 и 517). Как многие другие его краткие и загадочные указания, которые Гаусс любил разбрасывать в своих произведениях, фраза из «Disquisitiones» поразила умы его современников. Мы знаем, что она немало способствовала возбуждению интереса у Абеля и Якоби к исследованию вопроса.

[2]) Понятие поля (как и более общее понятие множества) было более или менее чуждо математической мысли до Кантора и Дедекинда. Абель и Галуа определяли *элементы* «основного поля» как такие, которые могут быть выражены как рациональные функции данных величин, но они не пришли к мысли явно рассмотреть множество, которое они образуют.

$V$ заменить $V$ одним из сопряженных ему элементов. Отсюда он сейчас же получает основную характеристику элементов из $K$ как таких, которые остаются инвариантными при всех перестановках из $\Gamma$ ([94], стр. 38—39). Затем Галуа доказывает, что если $N$ содержит поле корней $L$ другого многочлена, то группа $N$ над $L$ является нормальным делителем группы $\Gamma$ (понятие, которое он по этому случаю и вводит) ([94], стр. 25—26 и 41). Отсюда он получает, наконец, критерий разрешимости уравнения в радикалах при помощи рассуждения, которое в существенных чертах сводится к следующему: если предположить, что основное поле $K$ содержит все корни из единицы, то по предположению должна существовать возрастающая последовательность промежуточных между $K$ и $N$ полей $(K_i)_{0 \leqslant i \leqslant m}$, $K_0 = K$, $K_m = N$, а поле $K_{i+1}$ получается присоединением к $K_i$ всех корней двучленного уравнения $x^{n_i} - a_i = 0$ (где $a_i \in K_i$). Тогда в $\Gamma$ существует убывающая последовательность подгрупп $(\Gamma_i)$, таких, что $\Gamma_0 = \Gamma$, $\Gamma_m = \{\varepsilon\}$ (нейтральный элемент), при этом $\Gamma_{i+1}$ есть нормальный делитель в $\Gamma_i$ и факторгруппы $\Gamma_i/\Gamma_{i+1}$ цикличны (в этом случае говорят, что группа $\Gamma$ *разрешима*). Наоборот, если это так, то применение резольвенты Лагранжа показывает, что $K_{i+1}$ получается из $K_i$ путем присоединения к нему всех корней двучленного уравнения, и поэтому уравнение $F(x) = 0$ разрешимо в радикалах [1]). Невозможность решения в радикалах «общего» уравнения степени $>4$ является тогда следствием того, что группа $\Gamma$ этого уравнения, изоморфная симметрической группе $\mathfrak{S}_n$, неразрешима.

Начиная с середины XIX в. алгебраисты, как мы это уже отмечали (ср. стр. 70), значительно расширяют поле своих исследований, до этого почти полностью ограниченное изучением уравнений. В свете открытий Галуа было замечено, что проблема решения «в радикалах» есть только частный и довольно искусственный случай общей проблемы классификации иррациональностей. Как раз эта последняя проблема и подвергалась атакам с различных сторон в течение всего конца XIX в. и многочисленные разрозненные результаты, накапливаясь мало-помалу, подготовили почву для синтеза Штейница.

---

[1]) Если $K$ не содержит всех корней из единицы и если $E$ — поле, полученное из $K$ присоединением всех этих корней, то $E \cap N$ является абелевым расширением $K$, откуда легко получить (применяя структуру конечных абелевых групп), что для того, чтобы группа $N$ над $K$ была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы была разрешима группа $E(N)$ над $E$. Если учесть, что корни из единицы выразимы «в радикалах», то видно, что критерий Галуа не зависит от предположений относительно числового поля $K$ (и имеет силу в более общем случае для любого поля характеристики 0). На самом деле Галуа не делает никакого упрощающего предположения относительно $K$ и проводит рекуррентное рассуждение относительно порядка радикалов, последовательно присоединяемых к $K$ ([94], стр. 43).

Основной принцип классификации алгебраических иррациональностей был получен благодаря теории Галуа, которая сводила изучение алгебраического уравнения к изучению его группы: В действительности основным предметом изучения в чистой алгебре рассматриваемого периода и явилась теория групп перестановок, о которой здесь не приходится говорить (ср. стр. 71). Другие успехи теории алгебраических полей были следствием развития в ту же эпоху теории чисел и алгебраической геометрии. Этот прогресс заключался главным образом в способе изложения теории, и им в большей части мы обязаны Дедекинду [60], который ввел понятия тела и кольца [1]) и систематически развил (в тесной связи со своими изысканиями по гиперкомплексным системам) линейный аспект теории расширений ([60], т. III, стр. 33 и след.). Он также впервые рассматривал группу Галуа как группу автоморфизмов исследуемого расширения, а не только как группу перестановок корней уравнения. Дедекинд доказал (для числовых полей) фундаментальную теорему о линейной независимости автоморфизмов ([60], т. III, стр. 29), а также существование у поля Галуа нормального базиса ([60], т. II, стр. 433). Наконец, он приступает к проблеме алгебраических расширений бесконечного порядка и устанавливает, что теория Галуа не может быть к ним непосредственно применена (так как не любая подгруппа группы Галуа тождественна с группой поля по отношению к подполю). Руководимый смелой интуицией, он уже пробует рассматривать группу Галуа как топологическую группу [2]) — эта идея полностью созрела только, когда Крулль [137 d] в 1928 г. развил теорию расширений Галуа бесконечного порядка.

Параллельно этой эволюции уточняется понятие трансцендентного элемента над полем. Существование трансцендентных чисел было впервые доказано Лиувиллем в 1844 г. путем явной конструкции, основанной на теории диофантовых приближений [147 c]. В 1874 г. Кантор дал другое «неконструктивное» доказательство, используя простые соображения о мощности множеств [35]. Наконец, Эрмит доказал в 1873 г. трансцендентность $e$, а Линдеман в 1882 г. — трансцендентность $\pi$ методом, аналогичным методу Эрмита, завершив, таким образом, античную проблему квадратуры круга [3]).

---

[1]) Термин «тело» (corps) принадлежит самому Дедекинду, а термин «кольцо» был введен Гильбертом (Дедекинд называл кольца «порядками»).

[2]) *«...Множество этих перестановок образует в некотором смысле непрерывное многообразие, этот вопрос мы не будем здесь углублять»* ([60], т. II, стр. 288).

[3]) Простые доказательства этих теорем можно найти, например, в ([122], т. I, стр. 1).

Что касается значения трансцендентных чисел в алгебраических исчислениях, то Кронекер в 1882 г. заметил, что если $x$ является трансцендентным элементом над полем $K$, то поле $K(x)$ изоморфно полю рациональных функций $K(X)$ ([136a], т. II, стр. 253). Он сделал к тому же присоединение неопределенных элементов к полю краеугольным камнем своего изложения теории алгебраических чисел ([136a], т. II, стр. 245—387). С другой стороны, Дедекинд и Вебер показали в том же году [61], как арифметические методы могут служить основой теории алгебраических кривых. Таким образом, во многих направлениях проявляются аналогии между арифметикой и алгебраической геометрией, которые оказались чрезвычайно плодотворными и для той, и для другой.

Встречающиеся во всех этих изысканиях поля образованы из «конкретных» элементов в смысле классической математики — комплексных чисел или функций комплексного переменного [1]). Но уже Кронекер в 1882 г. отдает себе отчет, что «неопределенные элементы» играют в его теории роль элементов базиса некоторой алгебры (факт, который смутно предчувствовали Гаусс и Галуа), а не роль переменных в смысле, который им придают в анализе (136a], т. II, стр. 339—340). Он развивает эту идею в 1887 г. в связи с обширной программой, которая претендует по меньшей мере на перестройку всей математики, из которой должно быть выброшено все то, что не может быть получено путем алгебраических операций над целыми числами. Как раз по этому поводу Кронекер воскрешает идею Коши ([42a] (I), т. X, стр. 312 и 351), который определил поле $\mathbf{C}$ комплексных чисел как поле вычетов $\mathbf{R}[X]/(X^2+1)$. Кронекер показал, что теория алгебраических чисел совершенно не зависит от «фундаментальной теоремы алгебры» и даже теории вещественных чисел, так как каждое поле алгебраических чисел (конечной степени) изоморфно некоторому полю вычетов $\mathbf{Q}[X]/(f)$ (где $f$ — неприводимый над $\mathbf{Q}$ многочлен ([136a], т. $\mathrm{III}_1$, стр. 211—240). Как заметил несколько лет спустя Вебер [241a], делая первые наброски аксиоматической теории полей, этот метод Кронекера применим в действительности к любому расширению основного поля $K$.

---

[1]) Как и их предшественники, Кронекер, Дедекинд и Вебер не определяли в действительности понятия «алгебраической функции» одного или многих комплексных переменных. Действительно, нельзя корректно определить «алгебраическую функцию» комплексного переменного (в аналитическом смысле) без определения соответствующей римановой поверхности. Но как раз построение римановой поверхности (чисто алгебраическими средствами) является конечной целью Дедекинда и Вебера. Этот кажущийся порочный круг исчезает, конечно, если определить поле алгебраических функций как абстрактное алгебраическое расширение поля рациональных функций. В действительности только этим определением и пользуются Дедекинд и Вебер, что полностью оправдывает их результаты.

Вебер указывает, в частности, что в качестве $K$ можно взять поле $\mathbf{Z}/(p)$ ($p$ — простое число), включив тем самым в теорию полей исчисление сравнений «по модулю $p$». Это последнее появилось на свет во второй половине XVIII в. у Эйлера, Лагранжа, Лежандра и Гаусса. При этом была замечена аналогия его с теорией алгебраических уравнений. Развивая эту аналогию, Галуа (в связи с исследованиями по теории групп) без колебаний ввел «идеальные корни» сравнения, неприводимого по модулю $p$ [1]), и указал их основные свойства ([94], стр. 15—23) [2]). Если применить метод Кронекера к $\mathbf{Z}/(p)$, то можно вновь получить (с точностью до терминологии) представление, которое дали уже Серре и Дедекинд ([60], т. I, стр. 40), теории «мнимых Галуа».

Ко всем этим примерам «абстрактных полей» присоединились еще на исходе века поля совершенно нового типа, а именно поля формальных рядов, введенные Веронезе [232], и особенно $p$-адические поля Гензеля [117]. Открытие их привело Штейница (как он сам об этом ясно говорит) к выделению абстрактных понятий, общих для всех этих теорий, в фундаментальном труде [213], который может считаться началом современной концепции алгебры. Систематически развивая следствия из аксиом полей, он ввел таким образом понятия простого поля, сепарабельного (алгебраического) элемента, определил степень трансцендентности расширения и доказал, наконец, существование алгебраически замкнутого расширения произвольного поля.

Совсем недавно теория Штейница была дополнена в некоторых важных пунктах. С одной стороны, работы Артина сделали очевидным линейный характер теории Галуа [5a]. С другой стороны, общее понятие производной (скопированное с формальных свойств классического дифференциального исчисления), которое предчувствовал Дедекинд ([60], т. II, стр. 412), а Штейниц ввел для частного случая поля рациональных функций ([213], стр. 209—212), было с успехом применено для изучения трансцендентных расширений (существенных для современной алгебраической геометрии), и именно для обобщения на эти последние понятия сепарабельности [244 b].

---

[1]) В рукописи, относящейся по всей вероятности к 1799 г., но опубликованной только после его смерти, Гаусс изложил идею введения таких «мнимых» и получил значительную часть результатов Галуа ([95a], т. II, стр. 212—240, в особенности стр. 217).

[2]) Галуа полностью сознавал формальный характер алгебраического исчисления и не останавливался перед тем, чтобы взять, например, производную от левой части сравнения, чтобы показать, что это последнее не имеет кратных «мнимых» корней ([94], стр. 18). Он подчеркивает, в частности, что теорема о примитивном элементе имеет место для конечного поля так же, как и для поля чисел ([94], стр. 17, примеч. 2), но не доказывает этого.

## ДЕЛИМОСТЬ. УПОРЯДОЧЕННЫЕ ПОЛЯ

Элементарные арифметические операции, и особенно вычисления с дробями, не могут не привести к многочисленным эмпирическим наблюдениям, относящимся к делимости целых чисел. Однако ни вавилоняне (которые были так сведущи в алгебре), ни египтяне (несмотря на их акробатические вычисления с дробями), по-видимому, не знали общих законов делимости, и только греки явились здесь инициаторами. Созданная ими теоретическая арифметика, основное изложение которой содержится в VII и IX Книгах Евклида [80], ни в чем не уступает прекрасным открытиям греков в других областях математики. Существование общего наибольшего делителя двух целых чисел доказывается в самом начале VII Книги с помощью процесса, известного под названием «алгоритма Евклида» [1]. Этот алгоритм является основой всех последующих рассмотрений (свойства простых чисел, существование и нахождение общего наименьшего кратного и т. д.). Венцом всего здания являются две замечательные теоремы, в одной из которых доказывается бесконечность числа простых чисел (предложение 20 Книги IX), а в другой дается способ построения четных совершенных чисел, исходя из некоторых простых чисел (этот способ, как показал Эйлер, дает в действительности все четные совершенные числа). Однако существование и единственность разложения числа на простые множители не были доказаны в общем виде. Но, во всяком случае, Евклид явно доказывает, что каждое целое делится на простое число (предложение 31 Книги VII), а также два следующих предложения (предложение 13 и 14 Книги IX): *«Если будет от единицы сколько угодно последовательно пропорциональных чисел, то же число, что за единицей, будет первое, то наибольшее число не будет измеряться никаким другим, кроме находящихся*

---

[1]) Если $a_1$ и $a_2$ — целые числа, такие, что $a_1 \geqslant a_2$, то $a_n$ определяется рекуррентно (для $n \geqslant 3$) как остаток от евклидова деления $a_{n-2}$ на $a_{n-1}$; если $m$ — наименьший индекс, для которого $a_m = 0$, то $a_{m-1}$ является о. н. д. $a_1$ и $a_2$. Этот процесс является распространением на область целых чисел метода попеременного вычитания (называемого иногда ἀνθυφαίρεσις) для отыскания общей меры двух величин. Последний метод, без сомнения, восходит к пифагорейцам. Он является, по-видимому, основой доевдоксовой теории иррациональных чисел.

*среди пропорциональных чисел* [1])» (иначе говоря, степень простого числа $p^n$ может делиться только на степени $p$ с показателем $\leqslant n$).

*«Если число будет наименьшим измеряемым* [данными] *первыми числами, то оно не измерится никаким иным первым числом, кроме первоначально измерявших его»* [1]) (иначе говоря, произведение различных простых чисел $p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$ не имеет других делителей, кроме $p_1, p_2, \ldots, p_n$).

По-видимому, Евклид потому не формулирует общую теорему, что у него не хватает адекватной терминологии и символики для произвольных степеней целого числа [2]).

Хотя внимательное исследование приводит к весьма вероятному заключению о существовании в тексте Евклида нескольких последовательных слоев, каждый из которых соответствует определенному этапу в развитии арифметики [3]), вся эта эволюция, по-видимому, протекала с начала V до середины IV вв. до н. э., и можно только восхищаться тонкостью и логической надежностью всех ее построений; нужно было ждать два тысячелетия, чтобы присутствовать при подобных же успехах арифметики.

Источником последующего развития теории чисел послужили проблемы, называемые «неопределенными» или «диофантовыми». Термин «диофантовы уравнения» в таком виде, как он теперь употребляется, не совсем оправдан исторически. Под этим обычно понимают алгебраические уравнения (или системы таких уравнений) с целыми коэффициентами, у которых отыскивают только целочисленные решения; решение обычно невозможно, если уравнение «определенное», т. е. имеет только конечное число решений (действительных или комплексных); напротив, проблема часто допускает решения, если число неизвестных больше числа уравнений. Если Диофант и был, по-видимому, первым,

---

1) Цитируем по переводу «Начал» Д. Д. Мордухая-Болтовского. — *Прим. перев.*

2) Для подтверждения этой гипотезы можно еще заметить, что доказательство теоремы о совершенных числах является, по сути дела, только частным случаем теоремы об однозначности разложения на простые множители. К тому же все свидетельства согласуются в том, что, начиная с этой эпохи, разложение заданного числа на простые множители было хорошо известно и им свободно пользовались. Но полное доказательство теоремы о разложении встречается только у Гаусса в начале «Disquisitiones» ([95a], т. I, стр. 15).

3) Ср. [231c]. Примером остатка более старой теории могут служить предложения 21—34 Книги IX, трактующие о наиболее простых свойствах делимости на 2. Они восходят, по-видимому, к тому времени, когда еще не была развита общая теория простых чисел. К тому же известно, что категории четного и нечетного играли большую роль в философско-мистических теориях первых пифагорейцев. Все это, естественно, приводит к предположению, что фрагмент восходит именно к ним (ср. [146]).

кто рассматривал «неопределенные» проблемы [1]), то он лишь в виде исключения находил их целочисленные решения, а чаще всего довольствовался нахождением *одного рационального* решения [70a] [2]). Проблемы этого типа он чаще всего мог решить чисто алгебраически, не опираясь на арифметическую природу неизвестных [3]). Поэтому теория делимости играет у Диофанта лишь очень незначительную роль (слова «простое число» встречаются только один раз ([70a], Книга V, задача 9, т. I, стр. 334—335), а понятие взаимно простых чисел появляется только для доказательства теоремы, утверждающей, что частное взаимно простых чисел может быть квадратом только в том случае, если каждое из этих чисел есть квадрат [4]).

Изучение целочисленных решений неопределенных уравнений началось по-настоящему в период раннего средневековья у математиков Китая и Индии. Первые, вероятно, пришли к исследованиям этого рода, исходя из практических проблем создания календаря (где определение общих периодов нескольких циклов астрономических явлений составляет как раз «диофантову» проблему первой степени). Мы обязаны им, во всяком случае, правилом решения совместных линейных сравнений (вероятно, между IV и VII вв. н. э.). Что касается индийцев, расцвет математики которых относится к V—XIII вв., то они не только дали систематическую трактовку (путем применения алгоритма Евклида) системы диофантовых линейных уравнений с любым числом

---

[1]) Такие проблемы встречаются в «Началах» Евклида (предложение 10, Книга II) и у Архимеда (задача о быках). Первая проблема такого рода была решена еще пифагорейцами, а именно нахождение целочисленных решений уравнения $x^2 + y^2 = z^2$. — *Прим. перев.*

[2]) Чаще всего метод Диофанта таков, что дает возможность найти *все* решения неопределенного уравнения или бесконечное число их. См. следующую сноску Н. Бурбаки. — *Прим. перев.*

[3]) Диофант сводит неопределенные проблемы к задачам от одной неизвестной, выбирая вместо остальных неизвестных такие числа, которые делают возможным решение результирующего уравнения. Возникновение такого метода, как кажется, было связано главным образом с символикой Диофанта, которая не позволяла оперировать одновременно с несколькими неизвестными. Однако во время вычислений Диофант не выпускает из виду те числовые подстановки, которые он сделал, и изменяет их в случае неудачи, если эти числовые значения не подходят; при этом он пишет условие совместности для подставленных неизвестных и решает эту задачу, вспомогательную по отношению к первоначальной. Другими словами, Диофант изменяет подставленные числовые значения так же, как мы бы это сделали с параметрами, так что его конечный результат сводится к нахождению рационального параметрического представления заданного алгебраического многообразия (ср. [114f]).

[4]) Многие данные указывают на более обширные арифметические познания Диофанта: он знал, например, что уравнение $x^2 + y^2 = n$ не имеет рациональных решений, если $n$ — целое вида $4k + 3$ [Книга V, задача 9; Книга VI, задача 14 [70a], т. I, стр. 332—335 и стр. 425; ср. также ([114f], стр. 105—110)].

неизвестных[1], но и были первыми, рассмотревшими и решившими проблемы второй степени, среди них частные случаи «уравнения Ферма» $Nx^2 + 1 = y^2$ ([59], т. II, стр. 87—307).

Мы не можем здесь подробно проследить историю теории диофантовых уравнений выше первой степени, которая благодаря работам Ферма, Эйлера, Лагранжа и Гаусса привела в XIX в. к теории целых алгебраических чисел. Как мы уже отмечали (ср. стр. 74), изучение линейных систем, которое, как казалось, уже не содержит интересных проблем, было в этот период в некотором пренебрежении; в частности, не делалось усилий, чтобы сформулировать общие условия совместности системы уравнений или описать множество решений. Однако в середине XIX в. Эрмит, занимаясь теорией чисел, пришел к необходимости применить различные леммы о линейных диофантовых уравнениях, в частности «приведенную форму» линейной подстановки с целыми коэффициентами ([119], т. I, стр. 164 и 265). Наконец, после того как Хегер нашел в 1858 г. условие совместности системы, ранг которой равен числу уравнений, Г. Дж. Смит в 1861 г. определил инвариантные делители целочисленной матрицы и получил общую теорему о приведении такой матрицы к «каноническому виду» ([210], т. I, стр. 367—409).

Между тем постепенно все более и более уточнялось понятие абелевой группы вследствие его применения Гауссом (ср. стр. 177) и значения, которое приобрело это понятие в последующем развитии теории чисел. Глубокое исследование конечной абелевой группы классов квадратичных форм с заданным дискриминантом, изложенное в «Disquisitiones», привело Гаусса к заключению, что некоторые из этих групп не являются циклическими: *«Так как одного основания,—* говорит он,— *в этом случае недостаточно, то необходимо брать два или даже большее число классов, при умножении и композиции*[2]) *которых получаются уже все остальные»* ([95a], т. I, стр. 374—375; русский перевод стр. 462). Нельзя быть уверенным в том, что Гаусс хотел этими словами описать разложение группы в прямое произведение циклических групп. Но, во всяком случае, в том же разделе «Disquisitiones» он доказывает, что существует элемент группы, порядок которого равен наименьшему общему кратному порядков всех элементов — другими словами, он получает доказательство существования наибольшего инвариантного множителя группы ([95a], т. I, стр. 373; русский перевод стр. 460). С другой стороны, ему было известно понятие прямого произведения, так как в

---

[1]) Астрономические задачи также приводили индийцев к исследованию такого рода уравнений (ср. [59], т. II, стр. 100, 117 и 135).

[2]) Гаусс вводит аддитивное обозначение для композиции классов. Под «умножением» он понимает, следовательно, умножение класса на целое число.

одной рукописи, датированной 1801 г., но не опубликованной при его жизни, он набросал общее доказательство разложимости конечной абелевой группы в прямое произведение $p$-групп [1]) ([95a], т. II, стр. 266). Во всяком случае, в 1868 г. издатель произведений Гаусса Шеринг, вдохновленный этими результатами (а именно рукописью, которую он обнаружил), доказал (также для группы классов квадратичных форм) общую теорему о разложении ([199], т. I, стр. 135—148) методом, который через два года был развит Кронекером ([136a], т. I, стр. 273—282) более абстрактным образом и который в существенных чертах совпадает с методом, употребляемым в наше время. Что касается абелевых групп без кручения, то мы уже говорили (ср. стр. 77), как теория эллиптических функций и абелевых интегралов, развитая Гауссом, Абелем и Якоби, приводила мало-помалу к уяснению их структуры. Первый и наиболее знаменитый пример разложения бесконечной группы в прямую сумму бесконечных циклических групп был дан в 1846 г. Дирихле в его мемуаре о единицах поля алгебраических чисел ([91], т. I, стр. 619—644). Но только в 1879 г. Фробениус и Штикельбергер ([91], § 10) обнаружили и использовали связь между теорией абелевых групп с конечным числом образующих и теоремой Смита.

К этому времени относится также завершение теории подобия матриц (с действительными или комплексными коэффициентами). Понятие собственных значений линейной подстановки явно появляется в теории систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, которую Лагранж применял к теории малых колебаний ([140], т. I, стр. 520) и он же ([140], т. VI, стр. 655—666) и Лаплас ([142], т. VIII, стр. 325—366) — к «вековым» неравенствам планет. Это понятие содержалось неявно во многих других проблемах, изучавшихся в середине XVIII в., как нахождение осей конического сечения или квадрик (осуществленное впервые Эйлером) ([81a] (1), т. IX, стр. 384), или изучение главных осей инерции твердого тела (также развитое Эйлером ([81a]) (2), т. III, стр. 200—201). Существование главных осей инерции было открыто де Сегнером в 1755 г. Мы знаем теперь, что рассматриваемое понятие (в гораздо более скрытом виде) присутствовало с самого начала в теории уравнений с частными производными, в частности в теории уравнения колебания струны. Но (не говоря об этом последнем случае) родство между этими различными проблемами было обнаружено только Коши ([42a] (2), т. V, стр. 248, и т. IX, стр. 174). К тому же так как большая часть этих проблем приводит к симметрическим матрицам, то вначале больше всего

---

[1]) Абель также по ходу дела доказывает это свойство в своем мемуаре об абелевых уравнениях ([1], т. I, стр. 494—497).

изучаются собственные значения этих последних. Отметим здесь же, что в 1826 г. Коши доказывает инвариантность собственных значений этих матриц относительно преобразования подобия и показывает, что для симметрических матриц 3-го порядка эти значения действительны ([42a] (2), т. V, стр. 248). Этот результат он три года спустя обобщил на любые симметрические действительные матрицы ([42a] (2), т. IX, стр. 174) [1]). Общее понятие «проективного преобразования», введенное Мёбиусом в 1827 г. ([160], т. I, стр. 217), вскоре приводит к проблеме классификации этих преобразований (сначала для 2-х и 3-х измерений), что является не чем иным, как проблемой подобия соответствующих матриц. Но долгое время этот вопрос трактовался только «синтетическими» средствами, которые вновь были распространены в середине XIX в.; прогресс в этом направлении (впрочем довольно медленный), по-видимому, не оказал влияния на теорию собственных значений. Иначе обстояло дело с другим геометрическим вопросом — классификацией пучка конических сечений или квадрик, который с современной точки зрения сводится к изучению элементарных делителей матрицы $U+\lambda V$, где $U$ и $V$ являются симметрическими матрицами. Именно в этом духе подошел к этой проблеме в 1851 г. Сильвестр, который тщательно исследовал (в целях найти «канонические формы» рассматриваемого пучка), что происходит с минорами матрицы $U+$ $+\lambda V$, когда вместо $\lambda$ подставляют значение, обращающее детерминант матрицы в нуль ([221], т. I, стр. 219—240). Одновременно происходит прогресс чисто алгебраического аспекта теории собственных значений; так, несколько авторов (в том числе и сам Сильвестр) доказывают около 1850 г., что собственные значения $U^n$ являются $n$-ми степенями собственных значений $U$, тогда как Кэли в 1858 г. в мемуаре, в котором он закладывает основу исчисления матриц ([44], т. II, стр. 475—496), формулирует «теорему Гамильтона — Кэли» для квадратной матрицы произвольного порядка [2]), довольствуясь ее доказательством путем прямого вычисления для матриц порядка 2 и 3. Наконец, в 1868 г. Вейерштрасс методами Сильвестра находит «канонические формы» «пучка» $U+\lambda V$, где на этот раз $U$ и $V$ являются квадратными матрицами, не обязательно симметрическими, подчиненными единственному условию, что $\det(U+\lambda V)$ не равен тождественно

[1]) Уже Лаплас в 1784 г. ([142], т. XI, стр. 49—92) сделал попытку доказать этот результат для частного случая «вековых уравнений» планет. Эйлер без доказательства принимал, что уравнение 3-го порядка, дающее оси действительной квадрики, имеет действительные корни. Попытка доказать это, сделанная в 1773 г. Лагранжем ([140], т. III, стр. 579—616), оказалась недостаточной. Впервые строгое доказательство этого факта было дано Ашеттом и Пуассоном в 1801 г. [105].

[2]) Гамильтон попутно доказал эту теорему для матриц порядка 2 и 3 несколькими годами раньше ([108], стр. 566—567).

нулю. Отсюда он выводит определение элементарных делителей произвольной квадратной матрицы (с комплексными членами) и доказывает, что они характеризуют ее с точностью до подобия ([243a], т. II, стр. 19—44). Эти результаты были частично вновь найдены (по-видимому, независимым образом) двумя годами позже Жорданом[1]) ([129a], стр. 114—125). И здесь также Фробениус в 1879 г. показал, что теорему Вейерштрасса можно легко вывести из теории Смита, распространенной на многочлены ([90b], § 13).

Мы только что коснулись теории делимости многочленов от одной переменной. Вопрос о делении многочленов как об операции, обратной умножению (эта последняя была известна уже Диофанту, по крайней мере для многочленов небольших степеней), должен был быть естественным образом поставлен с самого возникновения алгебры. Однако ясно, что эту проблему нельзя было рассматривать в общем виде до тех пор, пока не была выработана связная система обозначений для различных степеней неизвестной. И действительно, до середины XVI в.[2]) мы не встречаем примеров применения к многочленам «евклидова» процесса в таком виде, как мы его теперь знаем. Стевин (применявший по существу обозначение степеней) был, вероятно, первым, кто пришел к идее распространять «алгоритм Евклида» для отыскания наибольшего общего делителя двух многочленов ([214], т. I, стр. 54—56). В остальном понятие делимости до середины XVIII в. считалось присущим только целым числам. В 1770 г. Эйлер открыл новую главу арифметики, смело распространив понятие делимости на целые числа квадратичного расширения: желая определить делители числа вида $x^2+cy^2$ (где $x$, $y$, $c$ — целые рациональные), он полагает $x+y\sqrt{-c}=(p+q\sqrt{-c})\times(r+s\sqrt{-c})$ (где $p$, $q$, $r$, $s$ — целые рациональные), и, взяв затем нормы от обеих частей, без колебаний утверждает, что таким образом получаются все делители $x^2+cy^2$ вида $p^2+cq^2$ ([81a] (I), т. I, стр. 422). Другими словами, Эйлер рассуждает так, как если бы кольцо $\mathbf{Z}[\sqrt{-c}]$ было кольцом главных идеалов. Несколько дальше он проводит аналогичное рассуждение для применения метода «бесконечного спуска» к уравнению $x^3+y^3=z^3$ (дело сводится к записи того, что $p^2+3q^2$

---

[1]) Жордан не упоминает об инвариантности полученной им канонической формы. Интересно заметить, сверх того, что он трактует вопрос не для матриц с комплексными членами, но для матриц над конечным полем. Подчеркнем, что, с другой стороны, Грассман начиная с 1862 г. дал метод приведения матрицы (с комплексными членами) к треугольному виду и упомянул явно о связи между этим приведением и классификацией проективных преобразований ([102], т. $I_2$, стр. 249—254).

[2]) Ср., например, [26].

является кубом, что Эйлер и делает, полагая $p+q\sqrt{-3}=(r+s\sqrt{-3})^3$). Но начиная с 1773 г. Лагранж показывает, что делители чисел вида $x^2+cy^2$ не всегда имеют тот же вид. Это было первым примером тех фундаментальных трудностей, которые выявились гораздо более четко в исследованиях Гаусса и его последователей о делимости в полях корней из единицы [1]). На эти поля, вообще говоря, невозможно распространить основные свойства делимости целых рациональных чисел, существование наибольшего общего делителя и единственность разложения на простые множители. Здесь не место для того, чтобы описывать, как Куммер для полей корней из единицы [138] [2]), а затем Дедекинд и Кронекер [3]) для произвольных полей алгебраических чисел сумели преодолеть это грозное препятствие путем создания теории идеалов, что явилось одним из наиболее решающих достижений современной алгебры. Но Дедекинд, всегда относившийся с большим интересом к обоснованию различных математических теорий, не остановился на этом успехе. Анализируя механизм отношений делимости, он заложил основы современной теории решетчатых групп в мемуаре (который не получил отклика у его современников и в продолжение 30 лет оставался забытым), являющемся, без сомнения, одной из первых работ по аксиоматической алгебре ([60], т. II, стр. 103—147).

С середины XVII в. поиски доказательства «основной теоремы алгебры» были одной из первоочередных задач (ср. стр. 93). Мы не будем здесь напоминать о попытке Даламбера, которая положила начало целой серии доказательств, опирающихся на исчисление бесконечно малых (ср. стр. 161). Но в 1749 г. Эйлер приступил к решению этой проблемы совершенно иным образом

---

[1]) Кажется, что был такой момент, когда Гаусс надеялся, что кольцо целых чисел поля корней $n$-й степени из единицы является кольцом главных идеалов. В одной рукописи, не опубликованной при его жизни ([95a], т. II, стр. 387—397), Гаусс доказывает существование процесса евклидова деления в поле корней кубических из единицы и дает некоторые указания об аналогичном процессе в поле корней 5-й степени. Он применяет эти результаты, например, для доказательства методом «бесконечного спуска», проведенного более корректно, чем у Эйлера, неразрешимости уравнения $x^3+y^3=t^3$ в поле кубических корней из единицы и подчеркивает, что этот метод можно распространить на уравнение $x^5+y^5=t^5$, но останавливается перед уравнением $x^7+y^7=t^7$, замечая, что здесь уже нельзя отбросить a priori случай, когда $x$, $y$, $t$ не делятся на 7.

[2]) Начиная со своей первой работы об «идеальных числах», Куммер явно подчеркивает, что его метод может быть применен не только к полям деления круга, но и к квадратичным полям, и таким способом могут быть вновь получены результаты Гаусса о бинарных квадратичных формах ([138], стр. 324—325).

[3]) Одновременно с Дедекиндом обоснование теории делимости в произвольных полях алгебраических чисел было дано Е. И. Золотаревым [3]. Его метод идеальных множителей был ближе к идеям Куммера, чем методы Дедекинда и Кронекера. — *Прим. перев.*

([81a], (1), т. VI, стр. 78—147). Он старался доказать, что каждый многочлен $f$ с действительными коэффициентами можно разложить в произведение двух многочленов $f = f_1 f_2$ (отличных от констант) с *действительными* коэффициентами. Это дало бы ему доказательство «основной теоремы» рекуррентно по степени $f$. Как он замечает, достаточно остановиться на первом множителе нечетной степени, и, следовательно, вся трудность сводится к рассмотрению случая, когда многочлен $f$ имеет четную степень $n$. Эйлер ограничивается тогда исследованием случая, когда оба искомых множителя имеют степень $n/2$. Он указывает, что путем исключения, проведенного соответствующим образом, можно выразить неизвестные коэффициенты $f_1$ и $f_2$ в виде рациональных функций от корня уравнения с действительными коэффициентами, у которого первый и последний члены имеют *противоположные знаки*, вследствие чего это уравнение имеет по крайней мере один действительный корень. Но доказательство Эйлера является лишь наброском, в котором многие существенные пункты обойдены молчанием. Только в 1772 г. Лагранжу удалось преодолеть трудности, возникшие в связи с этим доказательством ([140], т. III, стр. 479—516). Он это сделал с помощью весьма длинного и кропотливого анализа, который доказывает его замечательную виртуозность в применении методов «теории Галуа», которые он создал (ср. стр. 94—95).

Все же Лагранж, как Эйлер и все их современники, без всяких сомнений формально оперирует с «полем корней» многочлена (или, говоря его языком, рассматривает «воображаемые корни» этого многочлена), хотя математика его времени не содержала ничего, что могло бы оправдать такой способ рассуждений. Поэтому Гаусс, который с самого начала был решительным противником безудержного формализма XVIII в., со всей силой обрушился в своей диссертации на это злоупотребление ([95a], т. III, стр. 3). Но Гаусс не был бы самим собой, если бы он не почувствовал, что дело заключалось во внешне порочном изложении по существу корректных рассуждений. И вот несколько лет спустя ([95a], т. III, стр. 33, ср. также [95b]) Гаусс провел более простой вариант рассуждений Эйлера, намеченный еше в 1759 г. Фонсене (который, однако, не сумел хорошо провести его), и вывел таким способом еще одно доказательство «основной теоремы», в котором он тщательно избегает оперировать с «воображаемыми» корнями. Он заменяет их умелым присоединением и специализацией неопределенных величин [1]).

[1]) В указанной работе Гаусса, как нетрудно видеть, содержится, по существу, построение поля разложения многочлена. Эта конструкция была впоследствии в общем виде проведена Кронекером (см. [3b]). — *Прим. перев.*

Роль топологии в «фундаментальной теореме» была сведена к единственному предложению, согласно которому, если многочлен с действительными коэффициентами меняет знак в некотором интервале, то он обращается в некоторой точке в нуль (теорема Больцано для многочленов). Эта теорема лежит также в основе всех критериев для отделения действительных корней многочленов (с действительными коэффициентами), которые являлись излюбленным предметом алгебры XIX в.[1]). В ходе этих исследований не могли не заметить, что существенную роль при этом играет не столько топология, сколько структура упорядоченности $\mathbf{R}$ [2]). Так, например, теорема Больцано для многочленов верна и для поля всех действительных алгебраических чисел. Этот ход мыслей нашел свое завершение в абстрактной теории упорядоченных полей, созданной Артином и Шрейером ([5b] и [6a и b]). Одним из ее наиболее замечательных результатов является, конечно, открытие, что существование отношения порядка в поле связано с его чисто алгебраическими свойствами.

---

[1]) По этому вопросу читатель может, например, посмотреть [206] или [231], стр. 223—235.

[2]) Тенденция приписывать преобладающее значение структуре упорядоченности действительных чисел сказывается также в определении действительных чисел методом «сечений» Дедекинда, хотя этот метод в сущности приложим ко всякому упорядоченному множеству.

# НЕКОММУТАТИВНАЯ АЛГЕБРА

Мы видели (стр. 79—80), что первые некоммутативные алгебры появились в 1843—1844 гг. в работах Гамильтона [108] и Грассмана ([102], т. $I_2$). При введении кватернионов Гамильтон имел уже ясное представление о произвольных алгебрах конечного ранга над полем действительных чисел ([108], предисловие, стр. 26—31) [1]). Немного позднее, развивая свою теорию, он пришел к идее рассмотрения «бикватернионов», т. е. алгебры над полем комплексных чисел, имеющей ту же таблицу умножения, что и тело кватернионов. По этому поводу Гамильтон заметил, что при таком расширении появляются делители нуля ([108], стр. 650). Точка зрения Грассмана была несколько отличной, и долгое время его «внешняя алгебра» оставалась в стороне от теории алгебр [2]), но несмотря на его язык, которому недостает точности, можно усмотреть у Грассмана первую идею алгебры (конечного или бесконечного ранга над полем действительных чисел), порожденной системой образующих и соотношений между ними ([102], т. $II_2$, стр. 199—217).

В 1850—1860 гг. вводятся более или менее явным образом новые примеры алгебр. Если Кэли, развивая теорию матриц ([44], т. II, стр. 475—496), еще не рассматривает квадратные матрицы как образующие алгебру (эта точка зрения была ясно выражена обоими Пирсами в 1870 г. [179 c]), то он по крайней мере замечает по этому поводу, что существует система матриц второго порядка, для которых справедлива таблица умно-

[1]) Гамильтон не упоминает о понятии изоморфизма двух алгебр; но начиная с этого времени математики английской школы, а именно де-Морган и Кэли, уже хорошо знают, что изменение базиса не меняет существенным образом изучаемую алгебру (см., например, в работе Кэли об алгебрах ранга 2 ([44], т. I, стр. 128—130)).

[2]) Может быть, причина этого заключается в том обстоятельстве, что, помимо «внешнего умножения», Грассман ввел еще для поливекторов и умножение, названное им «регрессивным», или «внутренним» (которое ему заменяло все то, что относилось к двойственности). Во всяком случае, весьма примечательно, что около 1900 г. в статье Студи — Картана в «Энциклопедии» ([40a], т. $II_1$, стр. 107—246) внешняя алгебра не рассматривается как одна из ассоциативных алгебр, а трактуется отдельно В статье не подчеркивается также, что один из типов алгебры ранга 4 (тип VIII на стр. 180) является внешней алгеброй на пространстве двух измерений,

жения кватернионов; это замечание можно рассматривать как первый пример линейного представления алгебры[1]). С другой стороны, в мемуаре, в котором Кэли определяет абстрактное понятие конечной группы, он дает по ходу дела определение групповой алгебры, не извлекая, однако, из этого определения никаких следствий ([44], т. II, стр. 129).

Мы не можем отметить никаких заметных успехов вплоть до 1870 г. Но с этого момента начинаются исследования общей структуры алгебр конечной размерности (над полем действительных или комплексных чисел). Первые шаги в этом направлении были сделаны Б. Пирсом, который ввел понятия нильпотентного элемента, идемпотентного элемента, доказал, что всякая алгебра (содержащая или не содержащая единичный элемент), у которой по крайней мере один элемент не является нильпотентным, содержит идемпотентный элемент $\neq 0$, и написал знаменитое разложение

$$x = exe + (xe - exe) + (ex - exe) + (x - xe - ex + exe)$$

(где $e$ — идемпотентный, а $x$ — произвольный элемент). Б. Пирс пришел также к идее (еще несколько неясной) разложения идемпотентного элемента в сумму «примитивных» идемпотентных элементов, которые попарно ортогональны [178]. Кроме того, согласно Клиффорду ([51], стр. 274[2])), Б. Пирсу следует приписать введение понятия тензорного произведения двух алгебр, которое сам Клиффорд неявно применил к обобщению «бикватернионов» Гамильтона ([51], стр. 181—200) и несколькими годами позже явным образом к изучению алгебр, которые носят его имя ([51], стр. 266—276 и 397—401). Б. Пирс применил эти новые понятия для классификации алгебр небольших размерностей (над полем комплексных чисел). Этой проблемой занимались также около 1880 г. и другие математики англо-американской школы во главе с Кэли и Сильвестром. Таким образом, быстро замечают суще-

---

[1]) По правде говоря, Кэли не доказывает существования представления и не выписывает явно матриц, о которых идет речь, и, по-видимому, не замечает, что некоторые из них необходимо являются мнимыми (во всем этом мемуаре ни разу не уточняется, являются ли «количества», входящие в матрицы, действительными или комплексными; но на стр. 494 все-таки появляется случайно комплексное число). Можно было бы подумать, что остается сделать только один шаг, чтобы отождествить «бикватернионы» Гамильтона с комплексными матрицами 2-го порядка. На самом деле этот результат был явно сформулирован Пирсами только в 1870 г. ([178], стр. 132). Общая идея регулярного представления алгебры была введена К. С. Пирсом [179c] около 1879 г.; эту идею уже в 1876 году предчувствовал Лагерр ([141], т. I, стр. 235).

[2]) Б. Пирс встретил Клиффорда в Лондоне в 1871 г.; и тот и другой неоднократно ссылаются на свои беседы, одна из которых, вероятно, состоялась на заседании Лондонского математического общества, на котором Пирс представил свои результаты.

ствование большого разнообразия возможных структур, и благодаря этому факту исследования последующего периода были направлены на получение классов алгебр, обладающих более специальными свойствами.

На континенте, где эволюция идей шла несколько иным путем, аналогичные исследования появляются немного ранее 1880 г. В 1878 г. Фробениус доказал, что кватернионы составляют единственный пример тела (конечной размерности) над полем действительных чисел ([90a], стр. 51—63). Этот результат был независимо найден и опубликован двумя годами позже К. С. Пирсом [179a]. Начиная с 1861 г. Вейерштрасс, уточняя одно замечание Гаусса, в своих лекциях характеризовал коммутативные алгебры без нильпотентных элементов [1]) над **R** или **C** как прямой композит полей (изоморфных **R** или **C**). Дедекинд со своей стороны пришел к аналогичным выводам к 1870 г. в связи со своей «гиперкомплексной» трактовкой коммутативных тел. Соответствующие доказательства были опубликованы в 1884—1885 гг. ([243a], т. II, стр. 311—322, и [60], т. II, стр. 1—19). В том же 1884 г. А. Пуанкаре в короткой и весьма неполной заметке ([181a], т. V, стр. 77—79) привлек внимание к возможности рассматривать уравнения $z_i=\varphi_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$, которые выражают закон умножения $\left(\sum_i x_i e_i\right)\left(\sum_i y_i e_i\right)=\sum_i z_i e_i$ в некоторой алгебре, как определяющие (разумеется, локально) группу Ли. Это замечание, по-видимому, произвело сильное впечатление на Ли и его последователей (Студи, Шеферс, Ф. Шур, немного позднее Молин и Э. Картан), которые в это время занимались развитием теории «непрерывных» групп, а именно проблемой их классификации (см., в частности, [198], стр. 387). В течение 1885—1905 гг. рассматриваемая проблема привела математиков этой школы к применению для изучения структуры алгебр тех же методов, которые они уже употребляли при изучении групп и алгебр Ли. Эти методы основываются прежде всего на рассмотрении характеристического многочлена элемента алгебры по отношению к его регулярному представлению (этот многочлен уже встречается в указанных выше работах Вейерштрасса и Дедекинда) и на разложении этого многочлена на неприводимые множители. Как обнаружил немного позже Фробениус, это разложение отражает разложение регулярного представления на неприводимые составляющие.

---

[1]) В действительности Вейерштрасс налагает на свои алгебры более жесткое требование, а именно чтобы уравнение

$$a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n=0$$

(где $a_i$ и неизвестное $x$ принадлежат алгебре) имело бесконечно много корней только в том случае, если $a_i$ являются кратными одного и того же делителя нуля.

В ходе исследований алгебр школой Ли постепенно выявляются «внутренние» понятия теории. Понятие радикала появляется в специальном случае (в котором факторалгебра по радикалу является прямым композитом тел) у Г. Шефферса в 1891 г. [198] и более ясно у Молина [161a] и Картана ([40a], т. $II_1$, стр. 7—105), которые исследовали общий случай (сам термин «радикал» был введен Фробениусом [90f]). Студи и Шefферс [198] ясно очертили понятие алгебры, являющейся прямым композитом нескольких других (понятие это предвидел Б. Пирс ([178], стр. 221)). Наконец, Молин [161a] ввел факторалгебру некоторой алгебры — понятие по существу эквивалентное понятию двустороннего идеала (определенного впервые Картаном ([40a], т. II, стр. 7—105)) или гомоморфизма (термин, которым мы также обязаны Фробениусу). Здесь очень ясна аналогия с группами, а несколько позднее, в 1904 г., Эпштейн и Ведерборн рассмотрели композиционный ряд двусторонних идеалов и распространили на него теорему Жордана — Гёльдера. Наиболее важные результаты этого периода принадлежат Ф. Молину [161a]: руководствуясь понятием простой группы, он определил простые алгебры (над **C**) и показал, что они являются алгебрами матриц; далее, он показал, что структура произвольной алгебры конечного ранга над **C** сводится по существу к случаю (уже изученному Шефферсом), когда факторалгебра по радикалу является прямой суммой тел. Эти результаты через некоторое время были вновь найдены и установлены более ясным и более строгим образом Э. Картаном ([40a], т. II, стр. 7—105), который по этому поводу ввел понятие полупростой алгебры и выявил числовые инварианты («целые Картана»), связанные с произвольной алгеброй над полем **C**. Таким образом, он довел теорию этих алгебр до такого уровня, который до сих пор еще не превзойден [1]). Наконец, он распространил результаты Молина и свои собственные на алгебры над **R**.

Около 1900 г. начинается развитие идей, ведущее к отбрасыванию всяких ограничений относительно основного поля во всем, что касается линейной алгебры; в частности, следует отметить, что могучее воздействие на изучение конечных тел оказала американская школа, группировавшаяся вокруг Э. Г. Мура и Л. Э. Диксона. Наиболее замечательным из результатов этой школы является теорема Ведерборна [242a], в которой показывается, что всякое конечное тело является коммутативным. В 1907 г. Ведерборн распространил результаты Картана на случай произвольного основного поля [242b]. Делая это, он полностью отказывается от методов своих предшественников (эти

[1]) Существенные трудности возникают при изучении радикала, для структуры которого до сих пор не нашли никакого удовлетворительного принципа классификации.

методы становятся неприменимыми, как только основное поле перестает быть алгебраически замкнутым или вещественно замкнутым) и возвращается, совершенствуя его, к методу идемпотентов Б. Пирса, что позволяет ему завершить теорему о структурах полупростых алгебр, изучение которых сводится к изучению некоммутативных тел. К тому же теория расширения основного поля находит свое естественное место, и, наконец, оказывается, что каждая полупростая алгебра остается полупростой при сепарабельном расширении основного поля [1]) и становится прямым композитом центральных алгебр матриц, если это расширение взято достаточно большим ([242b], стр. 102) [2]). Несколько позднее Диксон для $n = 3$ [67] и сам Ведерборн для произвольного $n$ [242c] построили первые примеры некоммутативных тел ранга $n^2$ над их центром [3]), открыв таким образом в частном случае теорию «скрещенных произведений» и «систем факторов», которая была позднее развита Р. Брауэром [27] и Э. Нётер [169 c]. Наконец, в 1921 г. Ведерборн доказал частный случай теоремы о коммутировании.

Между тем в 1896—1910 гг. Фробениус, Бернсайд и И. Шур развили близкую к теории алгебр теорию линейного представления групп (которая ограничивалась вначале представлением конечных групп). Эта теория берет начало от одного замечания Дедекинда, который (даже до публикации своей работы об алгебрах) в 1880 г. встретился при своих исследованиях нормальных базисов расширений Галуа с «групповым детерминантом» $\det(x_{st^{-1}})$, где $(x_s)_{s\in G}$ является последовательностью переменных, множество индексов которых образуют конечную группу $G$. Другими словами, это есть норма общего элемента груп-

---

[1]) В то время, когда писал Ведерборн, понятие сепарабельного расширения еще не было определено, но он неявно пользуется предложением о том, что если неприводимый над основным полем многочлен $f$ имеет корень $x$ в некотором расширении, то необходимо $f'(x) \neq 0$ ([242b], стр. 109). Только в 1929 г. Э. Нётер выделила обстоятельства, связанные с несепарабельностью расширения основного поля [169b].

Отметим здесь другой результат, связанный с вопросами сепарабельности (и теперь относимый к гомологической алгебре), а именно разложимость алгебры в прямую сумму (но не в прямое произведение!) ее радикала и полупростой подалгебры. Этот результат (который был доказан Молином для случая, когда основным полем является **C**, и Картаном для алгебр над **R**) был сформулирован в общем виде Ведерборном, который в действительности доказал его только для случая, когда факторалгебра по ее радикалу является простой ([242b], стр. 105—109), применяя к тому же относительно неприводимых полиномов ту же гипотезу, что и выше.

[2]) Арифметические исследования линейных представлений групп, которые начались в ту же эпоху, привели также к рассмотрению понятия, эквивалентного полю разложения некоторого представления [204d].

[3]) Заметим, что в «Основаниях геометрии» Гильберт дал пример тела, имеющего бесконечный ранг над своим центром ([122c], стр. 107—109).

повой алгебры $G$ относительно регулярного представления. Дедекинд заметил, что если $G$ — абелева, то этот многочлен разлагается на линейные множители (это обобщало давно доказанное тождество о «циркулянтах», которые соответствуют циклическим группам $G$). В очень интересной переписке с Фробениусом ([60], т. II, стр. 414—442) Дедекинд в 1896 г. обратил внимание на это свойство, на его связь с теорией характеров абелевых групп [241c] и на аналогичные результаты относительно специального случая некоммутативных групп, которые он получил в 1886 г.

Несколько месяцев спустя Фробениус полностью решил проблему разложения «группового детерминанта» на неприводимые множители [90d] благодаря своему блестящему обобщению понятия характера [90c], о котором мы не можем здесь говорить. Но следует отметить, что в последующем развитии этой теории [1]) Фробениус все время прекрасно сознает ее родство с теорией алгебр (о которой Дедекинд продолжал настоятельно говорить в своих письмах). После того как Фробениус ввел для групп понятия неприводимого представления и вполне приводимого представления [90c], а также показал, что регулярное представление содержит все неприводимые представления, он предложил применить аналогичные методы к теории Молина — Картана [90f]. У Бернсайда [33] и И. Шура [204c] «гиперкомплексный» аспект теории не выступает явно, но именно у них появляются на свет основные свойства неприводимых представлений, лемма Шура и теорема Бернсайда. Наконец, надо заметить, что именно в этой теории возникли впервые два частных случая теоремы о коммутировании: в диссертации И. Шура [204a], в которой связываются (при помощи коммутирования в кольце эндоморфизмов тензорного пространства) представления линейной группы с представлениями симметрической группы, а также в его работе 1905 г. [204c], где он показывает, что матрицы, перестановочные со всеми матрицами неприводимого над полем $\mathbf{C}$ представления, отличаются от $I$ только скалярным множителем (этот результат также вытекает из теоремы Бернсайда).

Оставалось только отчетливо выявить общий субстрат этих теорий; это было делом немецкой школы во главе с Э. Нётер и Э. Артином в период 1921—1933 гг., который и явился временем создания новой алгебры. Уже в 1903 г. в мемуаре об алгебраическом интегрировании линейных дифференциальных уравнений ([181a], т. III, стр. 140—149) А. Пуанкаре определил в алгебре понятия левых и правых идеалов, а также минимального идеала. Он заметил, что в полупростой алгебре всякий левый идеал яв-

---

[1]) Часть результатов Фробениуса была получена независимо Ф. Молином в 1897 г. [161b].

ляется прямой суммой своих пересечений с простыми составляющими и что в алгебре матриц порядка $n$ минимальные идеалы имеют размерность $n$. Однако его работа осталась незамеченной алгебраистами [1]). В 1907 г. Ведерборн вновь определил левые и правые идеалы алгебры и доказал некоторые их свойства (а именно что радикал является наибольшим левым нильпотентным идеалом ([242b], стр. 113—114)). Но нужно было ждать до 1927 г., чтобы эти понятия получили существенное применение в теории алгебр [2]). Обобщая способы предшествующих доказательств, появившихся в различных местах [3]), В. Крулль в 1925 г. [137a] и Э. Нётер в 1926 г. [169a] ввели и систематически использовали условия максимальности и минимальности. Первый использовал их, чтобы теорему Ремака о разложении конечной группы в прямое произведение неразложимых групп распространить на абелевы группы с операторами (которые он и определяет для этого случая), тогда как вторая использует эти условия для характеристики колец Дедекинда. В 1927 г. Э. Артин [5c], применяя ту же идею к некоммутативным кольцам, показал, как с помощью систематического изучения минимальных идеалов можно распространить теорему Ведерборна на все кольца, у которых левые идеалы удовлетворяют одновременно условиям максимальности и минимальности [4]).

С другой стороны, Крулль в 1926 г. [137b] установил связь между понятием абелевой группы с операторами и понятием линейного представления групп; эта точка зрения была обобщена на алгебры и детально развита Э. Нётер в основополагающей работе в 1929 г. [169b], которая по важности введенных идей и ясности изложения наряду с мемуаром Штейница о коммута-

---

[1]) Заметим также, что в этом мемуаре Пуанкаре отмечает, что множество операторов групповой алгебры, которые переводят некоторый вектор пространства линейных представлений группы в нуль, является левым идеалом; он подчеркивает, что это замечание может быть применено к теории линейных представлений ([181a], т. III, стр. 149), однако он сам не развил эту идею.

[2]) Интересно отметить, что в промежутке понятия левого и правого идеала появляются не в исследованиях алгебр, но в одной работе Э. Нётер и В. Шмейдлера [171], посвященной кольцам дифференциальных операторов.

[3]) Условие максимальности (в виде «условий возрастающей цепочки») восходит к Дедекинду, который явно вводит ([60], т. III, стр. 90) его при изучении идеалов в полях алгебраических чисел; одним из первых примеров применения рассуждения с помощью «убывающей цепочки» является, конечно, тот, который имеется в мемуаре Ведерборна 1907 г. о двусторонних идеалах ([242b], стр. 90).

[4]) В 1929 г. Э. Нётер показала, что к кольцам без радикалов эти теоремы приложимы, если выполняются только условия минимальности ([169b], стр. 663); К. Гопкинс показал в 1939 г., что одного этого условия достаточно для того, чтобы радикал был нильпотентным.

тивных телах является одним из краеугольных камней современной линейной алгебры [1]).

Наконец, в серии работ, начатой в 1927 г. ([170], [27], [169c]), Э. Нётер и Р. Брауэр (к которым начиная с 1929—1931 гг. присоединяются А. Альберт и Х. Хассе) вновь принимаются за изучение некоммутативных тел с того места, на котором остановились Ведерборн и Диксон. Если наиболее важная часть их результатов, состоящая в глубоком изучении брауэровской группы (в частности, над полями алгебраических чисел), и выходит за рамки этой главы, подчеркнем, во всяком случае, что в ходе этих работ уточняются теоремы о коммутировании, а также понятие поля разложения простой алгебры и выясняется его связь с максимальными коммутативными подполями. Наконец, в 1927 г. Сколем характеризует автоморфизмы простых колец [209b]; его теорема несколько лет спустя была вновь найдена Э. Нётер [169b] и Р. Брауэром [27].

Итак, к 1934 г. элементарная теория простых и полупростых колец уже почти приняла свой окончательный вид (о состоянии теории в это время см. [66]). С этого времени она развивалась в двух различных направлениях, о которых мы коротко упомянем. С одной стороны, теория «систем факторов» Р. Брауэра и Э. Нётер недавно получила новые импульсы благодаря ее включению в современную гомологическую алгебру [2]). С другой стороны, было сделано много попыток, увенчавшихся большим или меньшим успехом, распространить хотя бы частично результаты классической теории на кольца, в которых не выполняются условия минимальности [3]), или на кольца без единичного элемента. Но до сих пор эти распространения результатов не нашли откликов в других частях математики. Желающих более детально познакомиться с этими работами мы отсылаем к недавно написанному очерку Н. Джекобсона [128].

---

[1]) Именно там содержится впервые в общем виде понятие гомоморфизма для групп с операторами, инверсных колец, двусторонних модулей, так же как и знаменитые «теоремы об изоморфизмах» (которые для коммутативных групп содержатся уже в [169a]). Частные случаи или следствия этих теорем, конечно, были уже известны задолго до того, например (в отношении второй теоремы об изоморфизмах), у Гёльдера в связи с изучением конечных групп [124], у Дедекинда — абелевых групп ([60], т. III, стр. 76—77), у Ведерборна — двусторонних идеалов ([242b], стр. 82—83); что касается первой теоремы об изоморфизмах, то она была явно сформулирована, например, Сегье в 1904 г. ([65], стр. 65).

[2]) Мы не можем здесь излагать историю этой теории и ее взаимосвязей с понятием расширения одной группы посредством другой; но нужно упомянуть, что первые «системы факторов» как раз и появились впервые в связи с проблемой расширения группы в мемуаре 1904 г., в котором И. Шур заложил основы теории проективных представлений групп [204b].

[3]) Начиная с 1928 г. Крулль распространил на произвольные полупростые модули общие теоремы о полупростых модулях конечной длины ([137c], стр. 63—66).

# КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Теория квадратичных форм в ее современном виде восходит лишь ко второй половине XVIII в., и, как мы увидим дальше, ее развитие было обусловлено в основном потребностями арифметики, анализа и механики. Однако фундаментальные понятия этой теории фактически появились уже вместе с евклидовой геометрией, образуя ее остов. Поэтому нельзя проследить историю ее развития, не упомянув, хотя бы вкратце, о развитии элементарной геометрии со времен античности. Разумеется, мы ограничимся здесь рассмотрением эволюции лишь некоторых идей общего порядка, отсылая читателя, который интересуется подробным изложением истории той или иной отдельной теоремы, к специальным работам исторического и дидактического характера [1]). Также необходимо подчеркнуть, что, излагая ниже различные интерпретации какой-нибудь теоремы на разных алгебраических и геометрических языках, мы отнюдь не собираемся утверждать, что подобные «переводы» всегда были в такой же степени хорошо известны, как в настоящее время. Как раз наоборот, главная цель этой главы состоит именно в том, чтобы показать, как математики постепенно, шаг за шагом, осознавали родственные связи между проблемами, внешнее выражение которых так сильно отличалось друг от друга. Мы хотим также показать, как в ходе этого процесса им удалось привести в относительный порядок тот ворох геометрических теорем, который был унаследован от древних. Наконец, мы попытаемся точно определить границы того, что надо понимать под «геометрией».

Если оставить в стороне формулы решения уравнений второй степени, открытые вавилонянами ([166], стр. 183—189), то рождение основных понятий теории квадратичных форм нужно искать в геометрии. Вначале они появляются как квадраты расстояний (на плоскости или в пространстве трех измерений), а понятие соответствующей «ортогональности» вводится посредством прямого угла, определенного Евклидом, как половина развернутого угла («Начала», Книга I, определение 10). При этом понятия расстояния и прямого угла связываются теоремой

---

[1]) См. ([226], тт. с IV по VI, также [135] и [79], т. III).

Пифагора, являющейся ключом ко всему евклидову зданию [1]. Понятие угла, очевидно, было уже с давних времен введено в греческую математику (это понятие, несомненно, было получено от вавилонян, искушенных в употреблении углов благодаря своему большому астрономическому опыту). Известно, что в классическую эпоху были определены только углы, меньшие 2 прямых (к тому же «определение» Евклида так же туманно и практически неприменимо, как и то, которое он дает для прямой линии или плоскости). Понятие ориентации не выделяется, несмотря на то что Евклид пользуется (без аксиомы и определения) тем фактом, что прямая линия делит плоскость на две области, которые он тщательно различает, когда это бывает необходимо [2]. На этой стадии идея группы вращения плоскости еще крайне несовершенна и реализуется посредством сложения (введенного Евклидом также без объяснений) неориентированных углов полупрямых линий, которое только тогда в принципе определено, когда сумма их не больше двух прямых [3]. Что касается тригонометрии, она не удостаивается внимания геометров и отдана в распоряжение землемеров и астро-

---

[1]) В большинстве древних цивилизаций (Египет, Вавилония, Индия, Китай) ученые, по-видимому, независимо друг от друга нашли формулировки, касающиеся по меньшей мере некоторых частных случаев «теоремы Пифагора», а индийцы даже имели представление о принципах доказательства этой теоремы, совершенно отличных от встречающихся у Евклида (который дает два доказательства: одно с помощью построения вспомогательных фигур, другое — с употреблением теории пропорции) (ср. [226], т. IV, стр. 135—144).

[2]) Понятие ориентированного угла с его различными вариантами (угол между прямыми линиями, угол между полупрямыми) появилось значительно позднее. В аналитической геометрии Эйлер ([81a] (1), т. IX, стр. 217—239 и 305—307) ввел полярные координаты и современное понятие угла (измеренного в радианах), принимающего произвольные значения (положительные или отрицательные). Л. Карно [39] положил начало тенденции, которая в течение XIX в. будет противопоставлять «синтетическую» геометрию геометрии аналитической. Стараясь разработать первую насколько возможно самостоятельно, он вынужден, чтобы не рассматривать различных случаев с фигурами, как это делали античные геометры, систематически вводить ориентированные величины, длины и углы. К несчастью, его работа значительно усложнена стремлением не вводить отрицательных чисел (которые он считал противоречивыми!) и заменять их малоудобной системой «соответствий знаков» между отдельными фигурами. Только Мёбиус ([160], т. II, стр. 1—54) вводит в рассуждения синтетической геометрии понятие ориентированного угла. Однако, так же как и его последователи вплоть до совсем недавнего времени, он вводит ориентацию путем непосредственного обращения к пространственной интуиции (правило, названное «человечком Ампера»). Только с развитием $n$-мерной геометрии и алгебраической топологии удалось найти точное определение «ориентированного пространства».

[3]) Однако мы находим у Евклида по меньшей мере два отрывка, в которых он говорит об углах, «сумма» которых может превысить $2d$, а именно при рассмотрении неравенств, которым должны удовлетворять телесный угол и плоские углы трехгранника («Начала», Книга XI, предл. 20 и 21), не говоря уже о «рассуждениях» относительно «меры» углов, которая, безусловно,

номов. Именно эти последние (Аристарх, Гиппарх и особенно Птолемей [183]) устанавливают основные соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника (плоского или сферического) и составляют первые таблицы. Имеются в виду таблицы, дающие хорды дуг, вырезаемых углами $\theta < \pi$ на окружности радиуса $r$, иначе говоря, числа $2r \sin \frac{\theta}{2}$; введение синуса, более удобного для оперирования, появилось у индийских математиков средних веков. При вычислении этих таблиц формула сложения дуг, в то время еще неизвестная, заменялась эквивалентным применением теоремы Птолемея (возможно, восходящей к Гиппарху) о четырехсторонниках, вписанных в круг. Евклид и Герон дают предложения, эквивалентные формуле

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

связывающей стороны и углы любого плоского треугольника. Однако в этих предложениях еще никак нельзя усмотреть первого появления понятия билинейной формы, ассоциированной с метрической формой, из-за отсутствия векторного исчисления, которое возникло только в XIX в.

Перемещения (или движения[1]), ибо различие между этими двумя понятиями не осознавалось ясно не только в античную эпоху, но и значительно позднее) были известны Евклиду. Но по неизвестным нам причинам он, по-видимому, испытывал явное отвращение перед их применением (например, в случае «равенства треугольников» создается впечатление, что он применяет понятие перемещения лишь потому, что не может сформулировать подходящую аксиому ([114 e], т. I, стр. 225—227 и 249)) Как бы то ни было, он прибегает к понятию перемещения (вращения вокруг оси) для определения конусов вращения и сфер («Начала», Книга XI, опред. 14 и 18), так же как и Архимед для определения поверхностей вращения второго порядка. Но общая идея преобразования, применяемого ко всякому пространству, почти чужда математической мысли вплоть до конца XVIII в.[2]).

---

является интерполяцией (ср. стр. 165). В этих двух отрывках Евклид, по-видимому, следует интуиции, выходя за пределы того, что допускают его собственные определения. Его последователи еще менее щепетильны, и, например, Прокл (V в. до н. э.), не колеблясь, формулирует общую «теорему», дающую сумму углов выпуклого многоугольника ([144e], т. I, стр. 322).

[1]) Определение терминов «перемещение» (déplacement) и «движение» (mouvement) см. в книге «Elements de Mathematique», I, Les structures fondamentales d'analyse, Livre II, Algébre, chap. 9, § 6, n. 6, p. 101, Paris, 1959— *Прим. перев.*

[2]) В качестве примеров этого понятия можно привести «проекции» картографов и чертежников. Птолемею была известна стереографическая проекция (в XVI в. знали уже, что она сохраняет углы), а центральная проекция играет первостепенную роль в работе Дезарга [63]: но здесь речь идет о соответствии между всем пространством (или поверхностью) и плоскостью.

До XVII в. мы не находим никаких следов понятия композиции движений и еще с меньшим основанием понятия композиции перемещений. Разумеется, из этого не следует, что древние греки недостаточно глубоко воспринимали понятия «правильности» и «симметрии» геометрических фигур, которые мы в настоящее время связываем с понятием группы перемещений. Их теория правильных многоугольников и в большей степени теория правильных многогранников—одна из наиболее замечательных глав всей античной математики — доказывают как раз обратное [1]).

Наконец, последним из существенных вкладов в математику со стороны греков в области, которую мы здесь рассматриваем, является теория конических сечений (что касается квадрик, грекам были известны только некоторые квадрики вращения, и, за исключением сферы, они были не очень глубоко изучены). Интересно здесь отметить, что, хотя у греков никогда не был сформулирован основной принцип аналитической геометрии (главным образом из-за отсутствия алгебры, удобной для работы), они в своих исследованиях отдельных «фигур» широко пользуются «координатами» по отношению к двум (и даже большему числу) осям на плоскости. Эти оси были тесно связаны с фигурой, что является одним из основных положений, отличающих их метод от метода Ферма или Декарта, у которых оси установлены независимо от рассматриваемой фигуры. В частности, первыми коническими сечениями (помимо круга), которые вводятся в связи с проблемой удвоения куба, являются кривые, данные уравнениями $y^2 = ax$, $y = bx^2$, $xy = c$ (Менехм, ученик Евдокса, живший в середине IV в. [2]) ). Эти уравнения конических сечений (обычно отнесенные к двум наклонным осям, образованным диаметром и касательной в одной из его точек пересечения с кривой) чаще всего употребляются при исследовании проблем, связанных с самими этими кривыми (тогда как «фокальные» свойства играют незначительную роль вопреки тому, что можно было бы предполагать на основании школьной традиции, восходящей всего лишь к XIX в.). Из всей обширной теории мы остановимся здесь на понятии сопряженных диамет-

---

Одно из свойств инверсии, состоящее в том, что преобразование круга есть круг или прямая линия, было в основном знакомо Виету и применялось им в проблемах построения кругов. Но ни он, ни Ферма, который расширяет эти построения, применяя их к сферам, не доходят до того, чтобы ввести инверсию как преобразование плоскости или пространства.

[1]) См. по этому поводу [212], где имеются также интересные замечания о соотношениях между теориями групп перемещений и различными типами орнаментов, созданных античной и средневековой цивилизациями.

[2]) По-видимому, идея рассматривать эти кривые как плоские сечения конусов с круговым основанием (также высказанная Менехмом) возникла уже *после* их определения посредством предшествующих уравнений (ср. [114b], стр. XVII—XXX).

ров (уже известных Архимеду) и на свойстве, которое в настоящее время служит определением поляры точки. Это свойство было дано Аполлонием [114b] для случая, когда точка находится вне конического сечения (полярой для нее будет прямая, соединяющая точки касания касательных, идущих из этой точки). С современной точки зрения это два примера «ортогональности» по отношению к квадратичной форме, отличной от метрической формы. Однако вполне очевидно, что связь этих понятий с классическим понятием перпендикуляров никак не могла быть осознана в ту эпоху.

До Декарта и Ферма нельзя указать на какие-либо другие достижения; но с самого момента появления аналитической геометрии алгебраическая теория квадратичных форм начинает освобождаться от своей геометрической оболочки. Ферма уже знает, что уравнение второй степени в плоскости представляет коническое сечение ([82], т. I, стр. 100—102; франц. перевод, т. III, стр. 84—101), и намечает аналогичные идеи для квадрик ([82], т. I, стр. 111—117; франц. перевод, т. III, стр. 102—108). В течение XVIII в. с развитием аналитической геометрии двух и трех измерений возникают (особенно в отношении конических сечений и квадрик) две проблемы, относящиеся к центральным проблемам теории: сведение квадратичной формы к сумме квадратов и нахождение ее «осей» по отношению к метрической форме.

Для конических сечений эти две проблемы слишком элементарны, чтобы дать толчок сколько-нибудь значительному развитию алгебры. Для случая произвольного числа переменных первая из названных проблем была решена в 1759 г. Лагранжем, который занялся ею при изучении экстремумов функций многих переменных ([140], т. I, стр. 3—20). Но эта проблема почти тотчас же была отодвинута на задний план вопросом о нахождении осей даже до того, как была сформулирована теорема об инвариантности ранга [1]). Что касается закона инерции, то он был открыт Якоби в 1850 г. ([127], т. III, стр. 593—598), который доказывал его тем же способом, какой используется и ныне, и Сильвестром ([221], т. I, стр. 378—381), ограничившимся его формулировкой как почти очевидного предложения [2]).

---

[1]) Занимаясь проблемой, независимой по своей природе от выбора осей координат, Лагранж не мог не заметить, что его метод содержал много произвола, но ему не хватало еще понятий для того, чтобы уточнить следующую мысль: *«Впрочем,* — говорит он, — *чтобы не ошибиться в этих изысканиях, надо заметить, что преобразованные* (к сумме квадратов) *формы могут быть отличными от тех, которые мы задали; но, исследуя это явление ближе, мы неизменно находим, что, каковы бы они ни были, они всегда могут быть к ним сведены или по крайней мере содержаться в них* [?]» ([140], т. I, стр. 8).

[2]) Гаусс также пришел к этому результату и, по свидетельству Римана, который посещал его лекции в 1846—1847 гг. ([187b], стр. 59), доказывал его в своих лекциях о методе наименьших квадратов.

Проблема приведения квадрики к ее осям представляет уже гораздо большие алгебраические трудности, чем аналогичная проблема для конических сечений. Эйлер, который впервые занялся ею, не был в состоянии доказать, что собственные значения будут действительными; он допустил это после попытки обоснования, не имеющей доказательной силы ([81a] (I), т. IX, стр. 379—392) [1]). Хотя эта проблема и была решена к 1800 г., но только Коши доказал соответствующую теорему для любого числа $n$ переменных ([42a] (2), т. IX, стр. 174—195). В это же время Коши доказывает, что характеристическое уравнение, дающее собственные значения, остается инвариантным при переходе к новым прямоугольным осям ([42a] (2), т. V, стр. 252) [2]). Для $n = 2$ или $n = 3$ эта инвариантность была интуитивно «очевидна» благодаря геометрической интерпретации собственных значений посредством осей конического сечения или соответствующей квадрики. К тому же в ходе исследований этого вопроса естественным образом появились элементарные симметрические функции от собственных значений (получившие различные геометрические интерпретации, особенно связанные с теоремами Аполлония о сопряженных диаметрах); в частности, у Эйлера впервые появляется дискриминант для $n = 3$ ([81a] (1), т. IX, стр. 382) (известный уже давно для $n = 2$ в связи с теорией квадратных уравнений). Эйлер находит его при классификации квадрик (выражая условие того, что некоторая квадрика не имеет бесконечно удаленной точки) и не упоминает об инвариантности при замене прямоугольных осей. Но немного позднее, с появлением арифметической теории квадратичных форм с целыми коэффициентами, Лагранж приводит особый случай (для $n = 2$) инвариантности дискриминанта при линейных, но не ортогональных преобразованиях переменных ([140], т. III, стр. 699), а Гаусс устанавливает для $n = 3$ «ковариантность» дискриминанта при любом линейном преобразовании ([95 a], т. I, стр. 301—302) [3]). Как только общая формула умножения опре-

[1]) Ему больше посчастливилось при определении главных осей инерции твердого тела. Сведя проблему к уравнению третьей степени, он замечает, что такое уравнение имеет по крайней мере один действительный корень, а значит, по крайней мере одну ось инерции. Взяв эту ось за одну из осей координат, он сводит проблему к плоской, которая уже решается легко ([81a] (2), т. III, стр. 200—202).

[2]) Следует отметить, что вплоть до 1930 г. под «квадратичной формой» понимали однородный многочлен второго порядка относительно координат, взятых по отношению к заданной системе осей. По-видимому, только теория гильбертовых пространств привела к «внутренней» концепции квадратичных форм даже для пространств конечного числа измерений.

[3] В связи с этими исследованиями Гаусс определяет обратную (инверсную) квадратичную форму ([95a], т. I, стр. 301) и получает условие положительной определенности такой формы, рассматривая последовательность главных миноров дискриминанта (там же, стр. 305—307).

делителей была доказана Коши и Бине, формула Гаусса немедленно распространялась на случай любого числа переменных. В 1845 г. именно эта формула послужила первым импульсом для общей теории инвариантов.

К двум понятиям, которые у древних греков заменяли теорию перемещений, — к понятию движения и понятию «симметрии» фигуры — в XVII—XVIII вв. прибавляется третье вместе с проблемой изменения прямоугольных осей, которая по существу эквивалентна этой теории. Эйлер посвящает этому вопросу несколько работ, пытаясь в первую очередь получить удобные для оперирования параметрические выражения для формул изменения осей. Известно, какое применение нашли в механике три угла, введенные им для $n=3$ ([81a] (1), т. IX, стр. 371—378). Не ограничиваясь этим, Эйлер в 1770 г. ставит перед собой общую проблему ортогональных преобразований для любого $n$ и замечает, что она может быть разрешена введением в качестве параметров $\frac{n(n-1)}{2}$ углов, и, наконец, для $n=3$ и $n=4$ он дает для формул вращения *рациональные* выражения (в функциях соответственно от 4 или 8 однородных параметров, связанных одним соотношением); эти формулы совпадают с теми, которые были получены позднее с помощью теории кватернионов, но сам Эйлер ничего не говорит об их происхождении ([81a] (1), т. VI, стр. 287—315) [1]).

С другой стороны, Эйлер указывает, как можно аналитически разыскивать «симметрии» плоских фигур. Эти исследования приводят его в сущности к доказательству того, что перемещение на плоскости является либо вращением, либо переносом, либо переносом с последующим симметрическим отображением ([81a] (1), т. IX, стр. 197—199). Быстрое развитие механики, которое происходит в эту эпоху, делает необходимым общее изучение перемещений; но вначале вопрос ставится лишь о «бесконечно малых» перемещениях, направленных по касательной к траектории непрерывного движения.

Только такие перемещения и встречаются у Торичелли, Роберваля и Декарта при исследованиях относительно композиции движений и мгновенного центра вращения плоского движения (ср. стр. 180—181). Мгновенный центр был определен в общем виде Иоганном Бернулли; Даламбер в 1749 г. и Эйлер в следующем году расширяют это понятие, доказав существование мгновенной оси вращения для движений с неподвижной точкой.

---

[1]) Эйлер не дает к тому же формулу композиции вращений, выраженную через параметры; для $n=3$ она впервые дана в заметке Гаусса (не опубликованной при его жизни ([95a] т. VIII, стр. 357—362)) и в одной работе Олинда Родригеса (1840 г.), который вновь находит параметрическое представление Эйлера, к этому времени почти забытое.

Аналогичная теорема для конечных перемещений была сформулирована Эйлером только в 1775 г. [81b] в мемуаре, где он одновременно открывает, что определитель преобразования поворота равен единице; в следующем году он доказывает существование неподвижной точки для плоских преобразований подобия ([81a] (1), т. XXVI, стр. 276—285). Но лишь Шалю удалось в своих работах, которые он начинает публиковать с 1830 г. [46a], создать стройную теорию конечных и бесконечно малых перемещений.

Итак, мы подходим к периоду, который можно назвать золотым веком геометрии и который укладывается grosso modo между датами опубликования «Описательной геометрии» Монжа (1795 г.) [162] и «Эрлангенской программы» Ф. Клейна (1832 г.) ([132], т. I, стр. 460—497). Основные достижения, которым мы обязаны этому внезапному возрождению геометрии, сводятся к следующим.

A) Понятие бесконечно удаленного элемента (точки, прямой или плоскости), введенное Дезаргом в XVII в. [63], но рассматриваемое в XVIII в. как простой оборот речи, реабилитируется и систематически употребляется Понселе [182], который, таким образом, превращает проективное пространство в общие рамки для всех геометрических явлений.

B) В то же самое время благодаря Монжу и Понселе осуществляется переход к *комплексной* проективной геометрии. Понятие мнимой точки, спорадически употребляемое в течение XVIII в., теперь (совместно с понятием бесконечно удаленной точки) применяется для формулировок, независимых от «случаев расположения фигур» аффинной действительной геометрии. Хотя в самом начале оправдания, выдвигаемые в защиту этих нововведений, еще встречают сильное сопротивление (особенно со стороны защитников школы «синтетической» геометрии, где употребление координат считалось позорным), то теперь нельзя не видеть, что «принцип случайных отношений» Монжа, или «принцип непрерывности» Понселе, является первым ростком идеи «специализации» современной алгебраической геометрии [1]).

Одним из первых результатов, вытекающих из этих концепций, является положение о том, что в комплексном проективном пространстве все невырожденные конические сечения (соответственно квадрики) имеют одинаковую природу. Это приводит Понселе к открытию «изотропных» элементов. *«Круги, помещен-*

[1]) Эти «принципы», конечно, оправдываются (как в свое время заметил Коши) применением принципа продолжения алгебраических тождеств на основании того факта, что «синтетические» геометры всегда рассматривают только те свойства, которые могут быть выражены аналитически в тождествах подобного рода.

*ные произвольно на плоскость*, — говорит он, — *не являются вполне независимыми в отношении друг к другу, как это можно было бы предполагать с первого взгляда; идеально они имеют две общие мнимые точки в бесконечности»* ([182], т. I, стр. 48). Далее он таким же образом вводит «омбилическую кривую», мнимое коническое сечение, имеющее в бесконечности общие точки со всеми сферами ([182], т. I, стр. 370). Хотя он особо не упоминает об изотропных образующих сферы, но по крайней мере явно подчеркивает существование у любой квадрики прямолинейных образующих, действительных или мнимых (там же, стр. 371) [1]).

Последователи Понселе (особенно Плюкер и Шаль) используют эти понятия в еще большей степени, чем он сам, особенно при изучении «фокальных» свойств конических сечений и квадрик.

C) Были сформулированы в общем виде понятия *точечного преобразования* и композиции таких преобразований, которые стали систематически вводиться как средство доказательства.

До этих пор, кроме смещений и проекций, математикам были известны лишь некоторые частные преобразования: некоторые проективные преобразования плоскостей типа $x' = \frac{a}{x}$, $y' = \frac{y}{x}$, употребляемые Ла-Гиром и Ньютоном; «аффинные» преобразования $x' = ax$, $y' = by$ Клеро и Эйлера ([81a] (1), т. IX, гл. XVIII) и, наконец, некоторые частные квадратичные преобразования, встречающиеся опять у Ньютона, Маклорена и Брекенриджа. Монж в своей «Описательной геометрии» показывает все, что можно извлечь из употребления плоских проекций в 3-мерной геометрии. У Понселе одним из излюбленных и систематически применяемых приемов доказательств является приведение посредством проекции свойств конических сечений к свойствам круга (метод, который уже употребляли при случае Дезарг и Паскаль). Для того чтобы иметь возможность таким же образом перейти от квадрик к сфере, Понселе изобретает первый пример проективного преобразования пространства, «гомологию» ([182], т. I, стр. 357). Наконец, он вводит также первые примеры бирациональных преобразований кривой в себя. В 1827 г. Мёбиус ([160], т. I, стр. 217) и в 1830 г. независимо от него Шаль ([46b], стр. 695) определяют наиболее общие линейные проективные преобразования; в это же время появляется инверсия и другие типы квадратичных преобразований, изучение которых

---

[1] Первым упоминанием о прямолинейных образующих квадрик мы обязаны, по-видимому, Рену (1669 г.), который заметил, что однополостный гиперболоид вращения может быть образован вращением прямой вокруг оси, не лежащей с ней в одной плоскости. Но изучение прямолинейных образующих было предпринято только Монжем и его школой.

приводит к зарождению теории бирациональных преобразований, успешно развивающейся во второй половине XIX в.

D) Понятие *двойственности* получает полное освещение и сознательно связывается с теорией билинейных форм. Теория полюсов и поляр конических сечений, которая со времен Аполлония была лишь отчасти развита в трудах Дезарга и Ла-Гира, применяется Монжем и к квадрикам. Монж, а также его ученики с помощью этого средства приобретают возможность преобразовывать известные теоремы в новые результаты [1]). Но честь создания общего метода из отдельных разрозненных результатов принадлежит Понселе, который обосновал его в своей теории преобразований «посредством взаимных поляр» и тем самым создал орудие чрезвычайной эффективности. Немного погодя, и именно у Жергона, Плюкера, Мёбиуса и Шаля, общее понятие двойственности освобождается от сковывающей его связи с квадратичными формами, еще очень прочной у Понселе. В частности, Мёбиус, исследуя различные возможности двойственности в 3-мерном пространстве (определенном билинейной формой), открывает в 1833 г. двойственность по отношению к знакопеременной билинейной форме ([160], т. I, стр. 489—515) [2]), которая интенсивно изучалась в XIX в. в виде теории «линейных комплексов» и развивалась в связи с «геометрией прямых линий» и «координатами Плюкера», введенными Кэли, Грассманом и Плюкером около 1860 г.

E) С появлением проективной геометрии интенсивное изучение свойств классической геометрии по отношению к проективным пространствам быстро привело к тому, что они были разделены на «проективные свойства» и «метрические свойства»; не впадая в преувеличение, можно утверждать, что это разделение было одним из наиболее отчетливых проявлений того, что впоследствии стало современным понятием структуры.

Но Понселе, который первым вводит это различие и эту терминологию, также замечает и то, что связывает эти два типа свойств. Излагая в своем «Трактате» проблемы углов, свойства которых *«по-видимому, не являются теми, которые мы назвали проективными... тем не менее они вытекают так просто*, — говорит он, — *из принципов, составляющих основу* [этого труда]... *что я не думаю, что какая-либо иная геометрическая теория могла бы привести к этому же способом одновременно более прямым и более простым. В этом нет ничего удивительного, если принять во внимание, что проективные свойства фигур необходимо яв-*

---

[1]) Наиболее известной является теорема Брианшона (1810 г.), преобразованная из теоремы Паскаля с помощью принципа двойственности.

[2]) Джорджини (Giorgini) в 1828 г. уже сталкивался с полярностью по отношению к знакопеременной форме в связи с проблемой статики [98].

*ляются самыми общими из тех, которые могут им принадлежать; так что они должны содержать в виде простых следствий все прочие свойства или особые отношения протяженности»* ([182], т. I, стр. 248). По правде говоря, после этого заявления немного странно видеть, что он исследует проблему углов весьма искусственным способом, связывая их с фокальными свойствами конических сечений, вместо того чтобы прямо ввести циклические точки; на самом деле, только через 30 лет Лагерр (будучи еще учеником Политехнической школы) дал выражение угла между прямыми линиями с помощью двойного отношения этих прямых и двух изотопных прямых, исходящих из той же вершины ([141], т. II, стр. 13). Наконец, Кэли ([44], т. II, стр. 561—592) ясно формулирует основную идею о том, что «метрические» свойства плоской фигуры являются не чем иным, как «проективными» свойствами фигуры, дополненной циклическими точками — знаменательная веха на пути к «Эрлангенской программе».

F) *Неевклидова гиперболическая геометрия,* возникшая около 1830 г., вначале остается несколько в стороне от движения, основные черты которого мы излагаем. Возникнув из соображений сугубо логического порядка, касающихся оснований классической геометрии, эта новая геометрия была изложена открывшими ее учеными [1]) в той же аксиоматической и «синтетической» форме, как и геометрия Евклида, без связи с проективной геометрией (введение которой с точки зрения классической модели казалось уже исключенным a priori, так как в этой геометрии отсутствовало понятие единственной параллельной). Этим, конечно, и объясняется то, что она долгое время не привлекала к себе внимания математиков французской, немецкой и английской школ проективной геометрии. Поэтому, когда Кэли в своем цитированном выше фундаментальном труде ([44], т. II, стр. 561—592) предлагает заменить циклические точки (рассматриваемые как конические сечения «тангенциально-вырожденные») некоторым коническим сечением (которое он называет «абсолютом»), он и не мыслит о том, чтобы связать эту идею с геометрией Лобачевского — Бойаи, хотя и указывает, каким образом она приводит к новым выражениям для «расстояния» между двумя точками, и упоминает о ее связи со сферической геометрией. Ситуация изменяется к 1870 г., когда неевклидовы геометрии в результате распространения трудов Лобачевского и опуб-

---

[1]) Известно, что Гаусс уже с 1800 г. пришел к убеждению о невозможности доказать постулат Евклида и о логической возможности развить геометрию, где бы этот постулат не был верен. Но он не опубликовал своих результатов по этому вопросу, и они были самостоятельно найдены в 1829 г Лобачевским и в 1832 г. Бойаи Более подробно об этом см. [78a и b]. (См. так же В. Ф Каган [4]*. — *Прим. перев.*)

ликования работ Гаусса и вступительной лекции Римана стали наиболее актуальными в математике своего времени. В 1868 г. Бельтрами, которому работа Кэли не была известна, следуя по пути, указанному Риманом, вновь находит выражения для расстояний, данные Кэли, но совсем по другому поводу, а именно рассматривая внутренность круга как изображение поверхности постоянной кривизны, в которой геодезические линии представлены прямыми линиями [15a]. Двумя годами позже Клейну удалось (независимо от Бельтрами) объединить эти две точки зрения, которые он дополнил открытием неевклидова эллиптического пространства ([132], т. I, стр. 254—305) [1]).

G) Вторая половина рассматриваемой нами эпохи характеризуется развитием критических размышлений, в ходе которых приверженцы «синтетической» геометрии, не довольствуясь тем, что изгнали из своих доказательств координаты, претендовали на возможность обойтись без действительных чисел даже в геометрических аксиомах. Главным представителем этой школы является фон Штаудт, которому в значительной степени удается осуществить эту трудную операцию [239]. Его работы вызывали всеобщее восхищение не только в свое время, но и в начале XX в., и если теперь идеям этого рода уже не придают того же значения, так как возможность их полезного применения оказалась довольно незначительной, все же следует признать, что усилия фон Штаудта и его учеников способствовали выяснению роли действительных или комплексных «скаляров» в классической геометрии, что привело к формированию современного понятия геометрий над произвольным основным полем.

К 1860 г. «синтетическая» геометрия достигла своего апогея, но конец ее владычеству приближался быстрыми шагами. Аналитическая геометрия, оставаясь в течение всего XVIII в. громоздкой и неизящной, наконец приобретает в руках Ламэ, Бобилье, Коши, Плюкера и Мёбиуса стройность и краткость, что дает ей возможность вступить в поединок с равными шансами на успех со своей соперницей. Начиная приблизительно с 1850 г. понятия группы и инварианта, наконец-то точно сформулированные, мало-помалу завоевывают поле битвы, и математики замечают, что теоремы классической геометрии являются не чем иным, как выражением тождественных отношений между инвариантами или ковариантами группы подобия [2]), точно так же как тео-

---

[1]) Пример сферической геометрии на некоторое время внушил веру в то, что в пространстве с постоянной положительной кривизной всегда существуют пары точек, через которые проходит больше чем одна геодезическая линия.

[2]) Например, левые части уравнений трех высот треугольника являются ковариантами трех вершин треугольника для группы подобия, а теорема о том, что эти три высоты имеют одну общую точку, эквивалентна утверждению, что три ковариaнта, о которых идет речь, линейно зависимы.

ремы проективной геометрии выражают тождества (или «сизигии») между ковариантами проективной группы. Это положение было мастерски изложено Ф. Клейном в знаменитой «Эрлангенской программе» ([132], т. I, стр. 460—497), где он рекомендует прекратить бесплодный спор между «синтетической» и «аналитической» тенденциями: если, говорит он, обвинение последней в том, что она ставит в привилегированное положение систему произвольных осей *«слишком часто было основательным при том несовершенном способе применения метода координат, который употреблялся раньше, то оно рушится, как только речь идет о рациональном применении этого метода... Область пространственной интуиции не должна быть закрытой для аналитического метода...»*; и он подчеркивает, что *«не следует недооценивать преимуществ, которые можно получить применением хорошо приспособленного для дальнейших исследований формализма, который, если можно так выразиться, опережает нашу мысль»* ([132], т. I, стр. 488—490).

Таким образом, математики приходят к рациональной и «структурной» классификации теорем «геометрии» в соответствии с группами, от которых они зависят: линейной группы для проективной геометрии, ортогональной группы для метрических проблем, симплектической группы для геометрии «линейного комплекса». Но при беспощадном свете классическая геометрия — за исключением алгебраической и дифференциальной геометрий [1]), которые уже обособились в автономные дисциплины, — быстро увядает и теряет весь свой былой блеск. Уже обобщение методов, основанных на употреблении преобразований, привело к тому, что образование новых теорем стало несколько механическим процессом. *«Теперь»*, — говорит Шаль в своем «Историческом очерке», опубликованном в 1837 г., — *«каждый в состоянии взять какую-нибудь известную истину и применить к ней различные общие принципы преобразований; так он получит другие истины, отличные от первоначальной либо более общие; к ним тоже смогут быть применены подобные же операции; таким образом, можно будет увеличивать, почти до бесконечности, число новых истин, выведенных из первой... и, значит, каждый, кто захочет, может при теперешнем состоянии*

---

[1]) Нет надобности излагать здесь историю этих двух дисциплин и детально рассматривать влияние «Эрлангенской программы» на их последующее развитие. Упомянем лишь, что алгебраическая геометрия после более чем векового исследования никогда не изучалась так интенсивно, как теперь. Что же касается дифференциальной геометрии, то после ее блестящего расцвета в трудах Ли, Дарбу и их учеников ей стала угрожать опасность впасть, подобно элементарной классической геометрии, в склеротическое состояние, пока современные исследования (берущие свое начало особенно от идей Э. Картана) расслоенных пространств и «глобальных» проблем не вернули ей ее жизнеспособность.

*науки обобщать и создавать новое в геометрии; гений больше не является необходимым для того, чтобы вносить свою лепту в построение величественного храма науки»* ([46], стр. 268—269). Однако с развитием теории инвариантов положение становится более определенным, так как она дает возможность (по крайней мере, для «классических» групп) сформулировать общие методы, позволяющие в принципе записывать чисто автоматическим способом *все* алгебраические коварианты и все их «сизигии». В то же время эта победа означала смерть как самой классической теории инвариантов, так и «элементарной» геометрии, которая стала служить простым словарем для теории инвариантов. Разумеется, мы не располагаем никакими данными, чтобы предугадать a priori, какие именно из бесконечного потока «теорем», которые можно создать этим способом и выразить на языке геометрии, по своей простоте и изяществу станут рядом с классическими результатами; здесь еще имеется некоторая ограниченная область, в которой с успехом упражняются многочисленные любители (геометрия треугольника, тетраэдра, алгебраические кривые, поверхности низших порядков и т. д.). Но для математика-профессионала эта жила уже истощена, так как в ней нет больше проблем структуры, способных дать импульс и другим разделам математики; и этот раздел теории групп и инвариантов можно рассматривать как бы законченным — до появления новых идей [1]).

Итак, после «Эрлангенской программы» евклидова и неевклидова геометрии с чисто алгебраической точки зрения превратились в более или менее удобный язык для выражения результатов теории билинейных форм, прогресс которой шел параллельно развитию теории инвариантов [2]). Все, что относится к понятию ранга билинейной формы и соотношений между этими формами и линейными преобразованиями, было окончательно выяснено в работах Фробениуса [90a]. Фробениусу мы обязаны также каноническим выражением знакопеременной формы над свободным $\mathbf{Z}$-модулем [90b]; однако кососимметрические определители встречаются уже в начале века у Пфаффа в связи с приведением дифференциальных форм к нормальной форме. Якоби, который в 1827 г. вновь рассматривает эту проблему ([127], т. IV, стр. 17—

---

[1]) Разумеется, подобное неизбежное падение геометрии (евклидовой или проективной), столь очевидное для нас, долгое время было не замечено современниками; до 1900 г. эта дисциплина продолжала оставаться важным разделом математики, что наглядно подтверждается тем, какое место она занимает в Enzyklopädie; до самых последних лет она занимала еще такое же место в университетском преподавании.

[2]) В частности, интерес, который проявляется к неевклидовой геометрии, вызван не этой банальной алгебраической точкой зрения, но ее связями с дифференциальной геометрией и с теорией функций комплексных переменных.

29), устанавливает, что кососимметрический определитель нечетного порядка равен нулю; он образует также выражение для пфаффиана и показывает, что он является делителем кососимметрического определителя четного порядка. Но Якоби не заметил, что этот последний есть квадрат пфаффиана, что было установлено Кэли только в 1849 г. ([144], т. I, стр. 410—413). Понятие билинейной симметрической формы, ассоциированной с квадратичной формой, представляет наиболее элементарный случай процесса «поляризации», являющегося одним из основных орудий теории инвариантов. Это понятие, названное «скалярным произведением», имело огромный успех, вначале только среди популяризаторов «векторного исчисления», а затем, с начала XX в., повсеместно благодаря неожиданно полученному обобщению в теории гильбертовых пространств (см. стр. 223). Эта теория внесла также ясность в понятие сопряженного оператора (которое раньше проявлялось только в теории линейных дифференциальных уравнений и в тензорном исчислении в вальсе ковариантных и контравариантных индексов, послушных дирижерской палочке метрического тензора). Эта же теория, наконец, придала рельефность понятию эрмитовой формы, которая была введена Эрмитом в связи с его арифметическими исследованиями ([119], т. I, стр. 237), но оставалась несколько в стороне от основных направлений развития математики вплоть до 1925 г., когда комплексные гильбертовы пространства были применены в квантовой теории.

Все большее и большее значение приобретает изучение ортогональной группы и группы подобия — явно выделенных и исследуемых с середины XIX в. и ставших центральной проблемой теории квадратичных форм, — а также других «классических» групп (линейной группы, симплектической и унитарной). Мы ограничимся лишь тем, что отметим ту существенную роль, которую сыграли эти группы в теории групп Ли и в дифференциальной геометрии, с одной стороны, и в арифметической теории квадратичных форм — с другой (см., например, [207] и [76])[1]. Это обстоятельство, а также расширенное применение понятия двойственности к самым различным проблемам привели к тому, что в современной математике нет ни одной теории, в которую так или иначе не входили бы билинейные формы. Во всяком случае, мы должны отметить, что именно изучение группы вращений (трехмерного пространства) привело Гамильтона к открытию кватернионов [108]. Открытие Гамильтона было обобщено

---

[1]) Не говоря уже о квантовых теориях, где линейные представления ортогональных групп получили большое распространение, и о теории относительности, которая привлекла внимание к «группе Лоренца» [являющейся ортогональной группой для формы с сигнатурой (3.1)].

В. Клиффордом, который в 1876 г. ввел алгебры, носящие его имя, и доказал, что они являются тензорными произведениями алгебр кватернионов, или алгебр кватернионов и некоторого квадратичного расширения ([51], стр. 266—276). Эти алгебры, вновь найденные Липшицем через четыре года [148b] и примененные им для параметрического представления ортогональных преобразований $n$ переменных (путем обобщения тех, которые Кэли получил для $n = 3$ ([44], т. I, стр. 123—126) и $n = 4$ (т. II, стр. 202—215) с помощью теории кватернионов), а также вытекающее из них понятие «спинора» ([40b] и [47]) также должны были войти в моду в наши дни благодаря использованию их в квантовых теориях.

Нам остается сказать несколько слов об эволюции идей, которые повлекли за собой почти полное снятие каких-либо ограничений в отношении кольца скаляров в теории полуторалинейных форм — тенденция, присущая всей современной алгебре, но которая, возможно, проявилась здесь раньше, чем в других ее частях. Мы уже отмечали плодотворность построения геометрии над полем комплексных чисел (которое к тому же в течение всего XIX в. приводило к постоянным коллизиям между этой геометрией и геометрией над полем действительных чисел). Ясность в эту область была внесена главным образом аксиоматическими исследованиями оснований геометрии [122c], проводимыми в конце XIX в.

В ходе этих исследований Гильберту и его соперникам при изучении отношений между различными аксиомами пришлось строить соответствующие противоречащие примеры, для которых основное тело (коммутативное или нет) обладает более или менее патологическими свойствами. Тем самым они приучили математиков к «геометриям» совершенно нового типа. Уже Галуа рассматривал с аналитической точки зрения линейные преобразования, коэффициенты и переменные которых принимают значения из некоторого простого конечного поля ([94], стр. 27). Развивая эти идеи, Жордан [129a] естественным образом пришел к рассмотрению классических групп над такими полями. Эти группы все более и более внедряются в различные области математики. Около 1900 г. Диксон распространил исследования Жордана на произвольные конечные поля. Впоследствии было замечено, что большая часть результатов Диксона — Жордана обобщается на случай совершенно произвольного «основного поля». Это обусловливается по существу общими свойствами изотропных векторов и теоремой Витта, которые в классических случаях были тривиальны, а для случая произвольного основного поля были установлены только в 1936 г. [248] [1]).

---

[1]) Более подробно по этому вопросу см. [69b].

Но при подобном, все более и более «абстрактном» направлении развития теории полуторалинейных форм было крайне желательно сохранить такую терминологию, которая для случая пространств 2 и 3 измерений заимствуется из классической геометрии, и распространить ее на случай $n$-мерных и даже бесконечномерных пространств. Таким образом, классическая геометрия переросла себя и из живой самостоятельной науки превратилась в универсальный язык всей современной математики, обладающий исключительной гибкостью и удобством.

# ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Понятия предела и непрерывности восходят к древности. История их развития не была бы полной без систематического изучения не только математиков, но также и философов Греции, особенно Аристотеля, и без изучения эволюции этих понятий в эпоху Возрождения и в период появления дифференциального и интегрального исчисления. Однако подобное изучение, несмотря на его очевидный интерес, значительно выходило бы за рамки настоящего очерка.

Создателем топологии, равно как и многих других ветвей современной математики, следует считать Римана. Действительно, он первый пытался выделить понятие топологического пространства, выдвинул идею самостоятельной теории этих пространств, определил инварианты («числа Бетти»), сыгравшие главную роль в последующем развитии топологии, и дал им первые применения в анализе (периоды абелевых интегралов). Но само направление математической мысли первой половины XIX в. в какой-то мере уже расчистило путь для творчества Римана. В самом деле, желание подвести под математику прочный фундамент, явившееся причиной столь важных исследований в течение всего XIX в. и не законченных еще и сейчас, привело к корректному определению понятия сходящегося ряда и числовой последовательности, стремящейся к пределу (Коши, Абель), а также понятия непрерывной функции (Больцано, Коши). С другой стороны, данное Арганом и Гауссом (см. стр. 161) геометрическое представление посредством точек плоскости комплексных чисел, или, как говорили раньше, «мнимых» чисел (называвшихся иногда в XVIII в. также «невозможными»), стало привычным для большинства математиков. Для того времени оно было столь же прогрессивным, как в наши дни использование геометрического языка для изучения гильбертова пространства, и содержало в зародыше возможность геометрического выражения для всех объектов, способных к непрерывному изменению. Гаусс, который в результате своих исследований по основаниям геометрий, неевклидовой геометрии, теории поверхностей, естественным образом пришел к этим концепциям, по-видимому, уже имел в виду подобную возможность, так как, определяя (независимо от

Аргана и французских математиков) геометрическое представление мнимых чисел, употреблял формулировку «двукратно протяженная величина» ([95a], т. II, стр. 101—103 и стр. 175—178).

Исследования алгебраических функций и их интегралов, с одной стороны, и собственные размышления (возникшие под влиянием работ Гаусса) об основаниях геометрии — с другой, побудили Римана составить программу исследований, которая и является программой современной топологии, и сделать первые шаги в ее реализации. Вот как он, например, говорит об этом в своей «Теории абелевых функций» ([187a], стр. 91; русский перевод стр. 90—91): *«При изучении функций, получаемых при интегрировании полных дифференциалов, почти невозможно обойтись без некоторых предложений, относящихся к analysis situs* [1]). *Под этим наименованием, которое употреблял уже Лейбниц, хотя, может быть, и в несколько ином смысле, следует понимать часть теории непрерывных величин, которая изучает эти величины не как существующие независимо от их положения и измеряемые с помощью друг друга, но совершенно отвлекаясь от измерения, изучая только соотношения взаимного расположения и включения. Я оставляю за собой право исследовать эти объекты позднее, способом, совершенно независящим от всякого измерения...»*

А в своей знаменитой вступительной лекции «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» ([187a], стр. 272; русский перевод стр. 279), он говорит: *«...общее понятие многократно протяженной величины* [2])*, которое включает понятие пространственной величины, осталось совершенно неразработанным».*

*«...Понятие величины можно образовать лишь в том случае, если ему предпослано общее понятие, которое допускает различные способы задания* [3])*. В зависимости от того, существует или нет непрерывный переход от одного способа задания к другому, эти способы задания образуют непрерывное или дискретное многообразие. Отдельные способы задания называются в первом случае точками, а во втором — элементами этого многообразия* (там же, стр. 273).

*«...Измерение состоит в наложении друг на друга сравниваемых величин; значит, для измерения необходимо иметь способ, чтобы переносить одну величину, принятую за единицу измерения, по другой. Если такого способа нет, то две величины можно сравнивать только тогда, когда одна из них составляет*

---

[1]) То есть к анализу положений (первоначальное название топологии). — *Прим. перев.*

[2]) Риман понимает под этим, как явствует из дальнейшего, часть топологического пространства произвольного числа измерений.

[3]) У Римана «Bestimmungsweise». В русском переводе под редакцией Гончарова этот термин переводится как «состояние» (стр. 250). — *Прим. перев.*

*часть другой... Исследования, которые можно тогда проводить, образуют независимую от мероопределения общую часть учения о величинах, где величины рассматриваются не как существующие независимо от своего положения и не как выраженные через единицу измерения, но как области многообразия. Такого рода исследования стали необходимыми во многих частях математики, особенно в теории многозначных аналитических функций»* (там же, стр. 274; русский перевод стр. 280—282).

*«...Определение положения в заданном многообразии, когда это возможно, сводится, таким образом, к определению конечного количества числовых значений. Впрочем, существуют многообразия, в которых для определения положения требуется не конечное число, а бесконечный ряд или непрерывное многообразие числовых значений. Такого рода многообразия образуют, например, возможные способы определения функции в заданной области, возможные положения пространственной фигуры»* (там же, стр. 276; русский перевод стр. 282).

В последнем предложении впервые выдвигается мысль об изучении функциональных пространств; эта идея выражена уже в диссертации Римана. *«Множество этих функций,* — говорит он по поводу проблемы минимума, известной под названием принципа Дирихле, — *образует связную замкнутую область»* ([187a], стр. 30), что представляет собой, хотя и в несовершенной форме, зародыш доказательства, данного впоследствии Гильбертом принципу Дирихле, и даже большинства применений функциональных пространств в вариационном исчислении.

Как мы уже говорили, Риман положил начало выполнению этой грандиозной программы тем, что определил «числа Бетти», сперва для поверхности ([187a], стр. 92—93), затем (там же, стр. 479—482; ср. также [187c]) для многообразия любого числа измерений и применил это определение к теории интегралов. Результатом было появление алгебраической топологии — ветви математики, развитие которой с самого начала XX в. шло все более быстрыми темпами; но мы не можем здесь проследить историю этого развития.

Что касается общей теории топологических пространств, как ее представлял себе Риман, то для ее успешного развития было необходимо более систематично, чем это делалось во времена Римана, изучить теорию действительных чисел, числовых множеств и точечных множеств на прямой линии, на плоскости и в пространстве. Изучение это, с другой стороны, было связано с исследованиями (наполовину философскими у Больцано, сугубо математическими у Дедекинда) природы иррационального числа, а также с развитием теории функций действительной переменной (в которую сам Риман внес существенный вклад своим определением интеграла и своей теорией тригонометрических рядов и которая была положена в основу работ Дюбуа-Реймона, Дини, Вейерштрасса и других математиков). Этой теме посвящались работы второй половины XIX в., и особенно труды Кантора, который первым определил (вначале на прямой линии, затем в евклидовом $n$-мерном пространстве) понятия точки сгущения, замкнутого, открытого и совершенного множества и получил существенные результаты о структуре этих множеств на прямой (ср. стр. 155—156). По этому вопросу можно обращаться не только к сочинениям Кантора [35], но также и к очень интересной переписке его с Дедекиндом [36], где ясно выражена идея числа измерений, рассматриваемого как топологический инвариант.

Дальнейшее развитие теории изложено, например, в полуисторической, полусистематической форме в книге Шёнфлиса [202а]. Среди многих теорем самой значительной была теорема Бореля — Лебега (доказанная вначале Борелем для замкнутого отрезка прямой и покрывающего его счетного семейства открытых интервалов).

Сначала идеи Кантора встретили довольно сильное сопротивление [1]). Однако его теория точечных множеств на прямой и на плоскости получила быстрое и широкое применение во французских и немецких школах теории функций (Жордан, Пуанкаре, Клейн, Миттаг-Лефлер, затем Адамар, Борель, Бэр, Лебег и др.), в частности, в каждом из первых томов Борелевской коллекции содержится элементарное изложение этой теории (см., например, [25]). По мере распространения этих идей появляются различные попытки использовать возможность их применения к множествам но уже не точек, а кривых или функций. Об этом, например, свидетельствует название мемуара Асколи [8] «О предельных кривых многообразия кривых» (1884 г.). Эта же мысль была выражена в сообщении Адамара на математическом конгрессе в 1896 г. в Цюрихе [106]; она также тесно связана с «функциями линии», введенными Вольтерра в 1887 г., и с созданием «функционального исчисления», т. е. теории функций, аргументом которых являются функции (за справками отсылаем к работе Вольтерра о функциональном анализе [236]). С другой стороны, в знаменитом мемуаре Гильберта ([122а], т. III, стр. 10—37), где он, следуя идеям Римана, доказал существование минимума в принципе Дирихле и открыл «прямые методы» вариационного исчисления, уже ясно проявляется его живой интерес к множествам функций, для которых справедлив принцип Больцано — Вейерштрасса, а именно что всякая последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность. Подобные множества вскоре начали играть важную роль не только в вариа-

[1]) Ср. стр. 41.

ционном исчислении, но и в теории функций действительной переменной (Асколи, Арцела) и в теории функций комплексной переменной (Витали, Каратеодори, Монтель). Наконец, изучение функциональных уравнений и особенно данное Фредгольмом решение класса уравнений, носящего его имя [88], привело к тому, что функция стала рассматриваться как аргумент, а множество функций как аналог множества точек, в отношении которых было так же естественно употреблять язык геометрии, как и в отношении точек евклидова $n$-мерного пространства (пространства, которое также не поддается «интуиции», благодаря чему многие математики долгое время относились к нему с недоверием). В частности, известные труды Гильберта об интегральных уравнениях [122b] дали возможность Эрхарду Шмидту [201b] определить и изучить геометрически гильбертово пространство, в полной аналогии с геометрией Евклида (см. стр. 224).

Тем временем понятие аксиоматической теории приобретало все возрастающее значение, главным образом благодаря многочисленным работам об основаниях геометрии, среди которых наибольшим и решающим влиянием пользовались работы Гильберта [122c]. В ходе этих работ Гильберт в 1902 г. [122c] дал первое аксиоматическое определение «двукратно протяженного многообразия» в смысле Римана, — определение, которое, как он говорил, давало «основу для строго аксиоматического изложения analysis situs». При этом он пользовался уже понятием окрестности (в несколько ограниченном смысле в связи с требованиями проблемы, рассмотрением которой в то время ограничивался Гильберт).

Первые усилия, направленные на выделение того, что является общим в свойствах множеств точек и функций, были сделаны Фреше [87a] и Ф. Риссом [188b]. Но первый из них, отправляясь от понятия предела последовательности, не смог построить удобную и плодотворную систему аксиом; во всяком случае, он выявил родственную связь между принципом Больцано — Вейерштрасса и теоремой Бореля — Лебега. Именно по этому случаю он вводит термин «компактный», хотя придает ему несколько иное значение, чем то, которое он имеет в наши дни. Что касается Ф. Рисса, который отталкивается от понятия точки накопления (или, скорее, что в сущности одно и то же, от «производного» множества), то его теория осталась незаконченной и дана им лишь в виде предварительных наметок. Начало общей топологии, как мы ее понимаем сегодня, положил Хаусдорф ([113a], гл. 7—9). Вернувшись к понятию окрестности, он отобрал среди аксиом Гильберта об окрестностях на плоскости те, которые могли дать его теории желаемую точность и общность. Глава, в которой он развивает их следствия, остается образцом аксиоматической теории, абстрактной, но уже заранее приспособленной к приложениям. Вполне естественно, что она послужила отправной точкой для последующих исследований по общей топологии, и особенно для работ московской школы, группировавшихся большей частью вокруг проблемы метризации (ср. стр. 166) [1]).

Мы должны здесь особо отметить данные Александровым и Урысоном определения компактных пространств (названных ими бикомпактными пространствами), затем доказательство Тихонова [228] компактности произведения компактных пространств. Наконец, введение А. Картаном [41] фильтров, ставших драгоценным орудием для всякого рода приложений (где они с успехом заменяют понятие «сходимости по Муру — Смиту» [163]), завершило благодаря теореме об ультрафильтрах усовершенствование и упрощение теории.

---

[1]) Освещение основных идей и этапов развития топологии, а также указания на важнейшую литературу см. в статье П. С. Александрова [1] *. — *Прим. ред.*

## РАВНОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Основные понятия и предложения, относящиеся к равномерным пространствам, постепенно выделялись из теории функций действительных переменных и только с недавних пор стали предметом систематического изучения. В своем стремлении точно обосновать теорию рядов (ср. стр. 154) Коши в качестве отправного пункта исходил из принципа, который он, по-видимому, считал очевидным и согласно которому для сходимости последовательности $(a_n)$ необходимо и достаточно, чтобы $|a_{n+p} - a_n|$ было сколь угодно мало для достаточно больших $n$ (см., например, [42a] (2), т. VII, стр. 267). Вместе с Больцано [22c] он был одним из первых, кто явно сформулировал этот принцип и понял его значение. Отсюда и название «последовательность Коши», данное последовательностям действительных чисел, удовлетворяющих условию, о котором шла речь, а также в широком смысле последовательностям $(x_n)$ точек метрического пространства, таких, что расстояние от $x_{n+p}$ до $x_n$ сколь угодно мало для достаточно больших $n$. Отсюда, наконец, название «фильтр Коши», данное обобщению последовательностей Коши в равномерных пространствах.

Когда впоследствии интуитивное понятие действительного числа уже не удовлетворяло математиков и они, чтобы подвести под анализ прочную основу, старались определить действительные числа, исходя из рациональных чисел, то именно принцип Коши дал им самое плодотворное из всех предложенных во второй половине XIX в. определений. Мы имеем в виду определение Кантора ([35], стр. 93—96) (развитое наряду с другими также Гейне [115] на основе идей Кантора и, несомненно, самостоятельно Мерэ), согласно которому каждой последовательности Коши рациональных чисел («фундаментальной последовательности» по терминологии Кантора) ставится в соответствие действительное число. При этом двум последовательностям Коши рациональных чисел $(a_n)$ и $(b_n)$ отвечает одно и то же действительное число тогда и только тогда, когда $|a_n - b_n|$ стремится к нулю. Основная идея здесь та, что с определенной точки зрения множество $\mathbf{Q}$ рациональных чисел «неполно», а множество действительных чисел «полно», причем оно получается из $\mathbf{Q}$ посредством его «пополнения».

С другой стороны, Гейне, вдохновленный идеями Вейерштрасса и Кантора, первый определил в своих трудах равномерную непрерывность для числовых функций одной или нескольких действительных переменных [115a] и доказал, что всякая числовая функция, непрерывная на ограниченном замкнутом интервале из **R**, будет на нем равномерно непрерывна [115b]; это и есть «теорема Гейне». Этот результат связан с компактностью замкнутого ограниченного интервала в **R** («теорема Бореля — Лебега», ср. стр. 141). Данное Гейне доказательство его теоремы может также служить с некоторыми изменениями доказательством теоремы Бореля — Лебега (что показалось некоторым авторам вполне достаточным, чтобы назвать ее «теоремой Гейне — Бореля»).

Распространение этих идей на более общие пространства началось после того, как стали изучать вначале на частных случаях, а затем в общем виде метрические пространства, в которых задано расстояние (числовая функция пар точек, удовлетворяющих некоторым аксиомам) и определены одновременно топология и равномерная структура. Фреше, который первым дал общее определение этих пространств, понял всю важность значения принципа Коши [87a] и ввел для метрических пространств понятие предкомпактного, или «вполне ограниченного», пространства [87a и b]. Хаусдорф, развивая в «Mengenlehre» [113a и b] теорию метрических пространств, выяснил, в частности, что к ним применимо построение Кантора, о котором было сказано выше, и тем самым получил из всякого метрического «неполного» пространства (иными словами, пространства, в котором не выполняется принцип Коши) «полное» метрическое пространство.

Метрические пространства суть «равномерные пространства» особой природы; равномерные пространства в общем виде были лишь недавно определены А. Вейлем [244a]. До него умели применять понятия и результаты, относящиеся к «равномерной структуре», только к случаю метрических пространств. Этим объясняется та важная роль, которую играют во многих современных трудах по топологии метрические или метризуемые пространства (и, в частности, компактные метризуемые пространства) в проблемах, где расстояние в действительности бесполезно. Как только было получено определение равномерных пространств, уже не представляло никаких затруднений (особенно при наличии понятия фильтра) распространить на эти пространства почти всю теорию метрических пространств в том виде, как она изложена, например, Хаусдорфом (а также распространить на все компактные пространства результаты, изложенные для метрических компактных пространств в топологии Александрова — Хопфа [2]). В частности, теорема о пополнении равномерных пространств есть не что иное, как перенесение без каких-либо существенных изменений канторова построения действительных чисел.

## ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Всякое измерение величин предполагает хотя бы смутное понятие действительного числа. С математической точки зрения зарождение теории действительных чисел следует отнести ко времени образования прогрессивной системы нумерации вавилонян, дающей в принципе возможность обозначать любые приближенные значения каждого действительного числа [166]. Обладание подобной системой и вытекающая отсюда уверенность в числовых расчетах неизбежно приводили к «наивному» понятию действительного числа, почти совпадающему с тем, которое в наши дни можно встретить в элементарных учебниках математики (связанное с десятичной системой счисления) или у физиков и инженеров. Это понятие не поддается точному определению, но его можно выразить, сказав, что число рассматривается как определенное благодаря возможности получать его приближенные значения и вводить их в вычисления. Все это к тому же сопряжено с некоторым неизбежным смешением мер величин, данных опытом, которые, естественно, не допускают неограниченного приближения, и такими «числами», как $\sqrt{2}$ (предполагая, что имеется алгоритм для их неограниченного приближения).

Подобная «прагматическая» точка зрения появляется во всех математических школах, где вычислительное искусство берет верх над заботами о строгости и теоретическими соображениями. В греческой математике, наоборот, господствуют именно эти последние. Ей мы обязаны созданием первой строгой и систематической теории отношений величин, т. е. по существу действительных чисел. Эта теория была создана в результате ряда открытий, относящихся к пропорциям, и в частности к несоизмеримым отношениям, значение которых в истории развития греческой мысли трудно переоценить, хотя за отсутствием точных текстов мы можем обрисовать их только в самых общих чертах. Греческая математика с самого возникновения была неразрывно связана частично с научными, частично с философскими и мистическими теориями о пропорциях, подобиях и отношениях и, в частности, о «простых отношениях» (выражаемых дробями с малыми числителями и знаменателями). Одна из характерных тенденций пифагорейской школы заключалась в том, что она стремилась объяснить все с помощью целых чисел и их отношений. Но как раз именно в пифагорейской школе была открыта несоизмеримость стороны квадрата с его диагональю (иррациональность $\sqrt{2}$); это, несомненно, первый пример доказательства невозможности в математике. Уже тот факт, что подобная проблема была поставлена, свидетельствует о четком понимании различия между отношением и его приближенными значениями и достаточно убедительно говорит о том, какая пропасть отделяет греческих математиков от их предшественников[1].

Мы плохо осведомлены о развитии идей, которые сопутствовали этому важному открытию и следовали за ним[2]. Ограничимся кратким перечнем тех из них, которые легли в основу теории отношений величин — теории, построенной великим математиком Евдоксом (современником и другом Платона) и прочно усвоенной классической греческой математикой. Она известна нам в мастерском изложении Евклида, данном в V Книге его «Начал» [80].

1) Слово *число* и понятие числа относятся только к натуральным числам $> 1$ (в сущности 1 является монадой, а не числом). Они не относятся не только к иррациональным числам, но даже к тому, что мы называем рациональными числами, так как последние были для греческих математиков классической эпохи отношениями чисел. Здесь дело не только в терминологии, так как слово «число» у древних греков (и у современных математиков до недавнего времени) было связано с идеей *системы с двойным законом композиции* (сложение и умножение). Отношения целых чисел в классической греческой математике рассматривались как операторы, определенные на множестве целых чисел или его подмножестве (отношение $p$ к $q$ является оператором, который каждому числу $N$, *кратному* $q$, относит целое число $p(N/q)$) и образующие группу по умножению, а не систему с двойным законом композиции. В этом отношении греческие математики сознательно отмежевывались от «логистов» или

---

[1]) Открытие иррациональности $\sqrt{2}$ одни приписывают самому Пифагору, по-видимому, без достаточных оснований, другие — некоторым пифагорейцам V в. Никто не оспаривает свидетельство Платона, который в своем «Теэтете» приписывает доказательство иррациональности $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ *«и так далее, до* $\sqrt{17}$» Теодору Киренскому, после чего Теэтет либо получил общее доказательство для $\sqrt{N}$ ($N$ — целое, неполный квадрат), либо, во всяком случае (если, что возможно, доказательство Теодора было общим по своему принципу), дал метод классификации некоторых типов иррациональностей. Нам неизвестно, были ли эти первые доказательства иррациональности выполнены в рамках арифметики или геометрии; см. об этом [111], гл. IV, ср. также [114a], [235] и [112].

[2]) За справками отсылаем к [14a] [224b и c] и, кроме того, к работам, перечисленным в предыдущем примечании, а также к [231b].

профессиональных вычислителей, которые, так же как и их египетские и вавилонские предшественники, не задумываясь, рассматривали дроби или суммы целого числа и дроби как числа. Весьма возможно, что такое ограниченное понятие числа было вызвано соображениями скорее философского, чем математического характера. В результате размышлений первых греческих философов о едином и множественном сложилось убеждение, что единица (в этой системе идей) не может быть разделена, не теряя своего свойства быть единой [1]).

2) Теория величин строится аксиоматически, сразу для всех видов величин (имеются, однако, намеки на предшествующие теории, в которых, по-видимому, рассматривались отдельно длины, площади, объемы, время и т. д.). Величины одного и того же вида характеризуются тем, что они поддаются сравнению (т. е. предполагается, что для них определено отношение равенства, которое по существу является эквивалентностью, и отношение $>$ и $<$), что их можно складывать и вычитать (определено $A+B$ и $A-B$, если $A>B$) и что они удовлетворяют аксиоме, получившей название «аксиомы Архимеда». Последняя с самого начала воспринималась как ключ ко всему зданию (она и в самом деле необходима при любой аксиоматической характеристике действительных чисел). Она названа «архимедовой» совершенно случайно. Сам Архимед во введении к своей «Квадратуре параболы» ([36], т. II, стр. 265) подчеркивает, что эта аксиома употреблялась его предшественниками, что она играет существенную роль в работах Евдокса и что ее следствия не менее достоверны, чем определения площадей и объемов, сделанные без ее помощи [2]).

Нетрудно заметить, что теорию действительных чисел можно непосредственно развивать на этой аксиоматической основе. Заметим, что для Евдокса величины одного вида образуют систему с *одним* внутренним законом композиции (сложением), но что эта система обладает *внешним* законом композиции, имеющим в качестве операторов *отношения величин*, которые воспринимались как образующие абелеву группу *по умножению*. Пусть $A$ и $A'$ являются величинами одного и того же вида, так же как $B$ и $B'$. *Отношения* $A$ и $A'$ и $B$ и $B'$ *по определению* равны, если,

[1]) Платон ([180], Книга VII, 525e) высмеивает вычислителей, *«которые разменивают единицу на мелкую монету»* и говорит, что там, где они делят, ученые умножают: это означает, что, например, для математиков, равенство двух отношений $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ устанавливается не путем деления $a$ на $b$ и $c$ на $a$, что ведет, вообще говоря, к исчислению дробей (таким способом действовали бы египтяне и вавилоняне), но путем проверки, что $a \cdot d = b \cdot c$; и также в других подобных случаях.

[2]) Явный намек на полемику, которая до нас не дошла; можно подумать, что это наш современник говорит об аксиоме Цермело.

каковы бы ни были целые числа $m$ и $m'$, неравенство $mA < m'A'$ влечет за собой неравенство $mB < m'B'$ и неравенство $mA > m'A'$ влечет за собой неравенство $mB > m'B'$. Аналогичным образом определяются и неравенства между отношениями. То, что эти отношения образуют *область операторов* для величин любого рода, эквивалентно аксиоме (не сформулированной явно, но многократно употребляемой в изложении Евклида) существования четвертой пропорциональной: если задано отношение $A/A'$ и величина $B'$, то существует величина $B$ того же вида, что и $B'$, такая, что $\frac{B}{B'} = \frac{A}{A'}$. Таким образом, гениальная идея Евдокса давала возможность отождествить области операторов, определенных для любого вида величин[1]). Аналогичным способом можно отождествить множество отношений целых чисел (см. выше) *с подмножеством* множества отношений величин, а именно с множеством рациональных отношений (отношений соизмеримых величин). Однако исходя из того, что эти отношения как операторы на целых числах определены (вообще говоря) только на части множества целых чисел, было необходимо развить особую теорию (Книга VII Евклида).

Итак, универсальная область операторов, построенных этим способом, была для греческих математиков тем же, чем для нас является множество действительных чисел. Ясно к тому же, что, имея *сложение* величин и *умножение* отношений величин, они обладали эквивалентом того, чем для нас является *поле* действительных чисел, но в значительно менее удобной для обращения форме[2]). С другой стороны, возникает вопрос, осознавали ли они эти множества (множество величин заданного вида, или множество отношений величин) как *полные* в нашем смысле слова. В противном случае не совсем ясно, почему они допускали (даже не испытывая необходимости сделать из этого аксиому) существование четвертой пропорциональной. Более

---

[1]) Она также позволяет совершенно строго выполнять то, чем широко пользовались первые греческие математики, когда считали доказанной теорему о пропорциях, как только она была доказана для любого рационального отношения. По-видимому, до Евдокса делались попытки построить теорию, которая бы достигала той же цели, определяя отношения двух величин тем, что мы называем на современном языке членами непрерывной дроби, выражающей это отношение. К этим попыткам естественно приводил так называемый «алгоритм Евклида» для нахождения общей меры $A$ и $A'$, если она существует (или для определения о. н. д.), ср. [14a].

[2]) Форма была столь мало удобной, что греческим математикам приходилось, чтобы перевести на свой язык алгебраическую науку вавилонян, систематически прибегать к помощи других средств, а именно к соответствию между двумя *длинами* и *площадью* прямоугольника, построенного на этих двух длинах в качестве сторон. Строго говоря, это не есть закон композиции и он не дает возможности удобно записать алгебраические отношения выше второй степени.

того, некоторые тексты как будто ссылаются на идеи такого рода. Наконец, древние принимали за очевидное, что кривая, которую можно описать непрерывным движением, не может перейти с одной стороны прямой линии на другую, не пересекая ее. Этот принцип, использованный ими в своих исследованиях об удвоении куба (построение $\sqrt[3]{2}$ с помощью пересечений кривых), по существу эквивалентен свойству, о котором идет речь. Однако тексты, которыми мы располагаем, не дают возможности точно установить, что думали древние по этому поводу.

В таком состоянии находилась теория действительных чисел в классическую эпоху греческой математики. При всем восхищении, которое вызывает построение Евдокса, не оставляющее желать ничего лучшего с точки зрения строгости и стройности, все же следует признать, что ему не хватало гибкости и что оно не способствовало развитию вычислительной техники, и особенно алгебраического исчисления. Более того, его логическую необходимость мог оценить только ум, влюбленный в строгость и искушенный в абстракциях. Поэтому вполне естественно, что на закате греческой математики мало-помалу возрождается «наивная» точка зрения, сохранившаяся в традиции логистов. Так, например, она доминирует у Диофанта [70], бывшего скорее верным последователем этой традиции, чем приверженцем официальной греческой науки. Формально воспроизводя евклидово определение числа, Диофант фактически понимает под словом «число» неизвестное в алгебраических задачах, решение которых может быть целым числом, или дробью, или даже иррациональным числом [1]). Хотя подобная перемена во взглядах в вопросе о числе связана с одним из самых значительных достижений в истории математики, и именно с развитием алгебры (см. стр. 65), сама по себе она, конечно, не только не является прогрессивной, но скорее шагом назад.

Здесь мы не имеем возможности проследить за тем, как менялось понятие числа в индийской, арабской и западной математике вплоть до конца средних веков. Преобладающим было «наивное» понятие числа, и, хотя в течение всего этого периода в основу математического обучения были положены «Начала» Евклида, вполне возможно, что учение Евдокса оставалось в основном непонятным, так как в нем уже больше не видели необходимости. «Отношения» Евклида чаще всего назывались «числами»; к ним применяли правила исчисления целых чисел и, таким образом, получали точные результаты, не стараясь доискиваться причин успеха этих приемов.

---

[1]) «Число» оказывается нерациональным», Диофант, Книга IV, проблема IX. Об этом повороте к наивному понятию числа см. также у Евтокия в его «Комментариях к Архимеду» ([36], т. III, стр. 120—126).

Однако, уже в середине XVI в. Р. Бомбелли изложил в «Алгебре» [1]) свою точку зрения, которая (если предположить, что результаты Книги V Евклида хорошо известны) была по существу корректной. Приняв, что при установленной единице длины имеется взаимно однозначное соответствие между длинами и отношениями величин, он определил различные алгебраические операции над длинами (разумеется, предположив единицу фиксированной). Выразив числа посредством длин, он получил геометрическое определение поля действительных чисел (эта точка зрения обычно приписывается Декарту) и тем самым дал своей «Алгебре» прочную геометрическую основу [2]).

Но «Алгебра» Бомбелли, хотя и поразительно опередившая свою эпоху, не шла далее извлечения корней и решения в радикалах уравнений 2-, 3- и 4-й степеней, причем, разумеется, возможность извлечения корней принималась им без какого-либо обсуждения. Симон Стевин [214] также стоит на аналогичной точке зрения в вопросе о числе, которое он считает выражением для меры величин и принимает существенно «непрерывным» (но не уточняет значения, которое он дает этому слову). Если он отличает «геометрические числа» от «арифметических чисел», то только в связи со способом их определения, не обращая внимания на различие их природы. Вот что он говорит по этому поводу: *«Мы приходим к выводу, что не существует никаких абсурдных, иррациональных, неправильных, необъяснимых или глухих чисел, но что среди чисел существует такое совершенство и согласие, что нам надо размышлять дни и ночи над их удивительной законченностью»* ([214], стр. 10). С другой стороны, преобразовав впервые [3]) инструмент десятичных дробей в метод исчисления и предложив для них запись, уже близкую к современной, он ясно сознавал, что эти дроби дают алгоритм неограниченного приближения всякого действительного числа, как это явствует из его «Приложения к алгебре, содержащего общее правило для любого уравнения» (1594 г.) (брошюра, единственный известный нам экземпляр которой сгорел в Лувене в 1914 г.; см., однако, [214], стр. 88). Записав такое уравнение в виде $P(x)=Q(x)$ (где $P$ есть многочлен, степень которого выше степени многочлена $Q$, а $P(0) < Q(0)$), он заменяет

---

[1]) Здесь идет речь о книге IV «Алгебры», которая оставалась неизданной вплоть до наших дней. Для нашего изложения не имеет особого значения, были ли идеи Бомбелли известны его современникам или нет.

[2]) Мы не касаемся здесь истории употребления отрицательных чисел, что относится к алгебре. Отметим лишь, что Бомбелли в той же работе дает в высшей степени ясное и чисто формальное определение (подобное тому, которое можно было бы найти и в современной алгебре) не только отрицательным количествам, но также и комплексным числам.

[3]) Десятичные дроби систематически употреблялись уже самаркандским математиком Джемшидом ал-Каши в XV в. (см. [2]). — *Прим. перев.*

$x$ числами 10, 100, 1000... до тех пор, пока $P(x) > Q(x)$, что, говорит он, определяет число цифр корня [1]). Затем (если, например, корень имеет две цифры) подставляют 10, 20, ..., что и определяет число десятков; также поступают и для следующей цифры, затем для последовательных десятичных знаков. *«Продолжая так до бесконечности*, — говорит он, — *можно приблизиться бесконечно близко к искомому»* ([214], стр. 88). Как видно, Стевин (несомненно, первый) имел ясное представление о теореме Больцано и считал ее основным орудием для систематического решения числовых уравнений. Мы усматриваем в этом ясно выраженную интуитивную концепцию числового континуума, так что оставалось сделать немногое для ее окончательного уточнения.

Однако окончательное внедрение корректных методов в последующих двух столетиях было дважды задержано развитием двух теорий, историю развития которых мы здесь не излагаем,— исчисления бесконечно малых и теории рядов. В поднятой в связи с ними дискуссии можно усмотреть, как и во всех эпохах истории развития математики, попеременное преобладание то сторонников движения вперед, даже сопряженного с некоторой неуверенностью, в убеждении, что впоследствии всегда найдется время для освоения завоеванных территорий, то критически настроенных умов (не обязательно уступающих первым в отношении интуитивных способностей и изобретательности), которые считают, что стоит потратить силы, чтобы найти точное выражение и безусловное оправдание своим воззрениям. В XVII в. главным объектом спора было понятие бесконечно малой, которое, будучи оправданным a posteriori полученными с его помощью результатами, казалось, вступало в открытое противоборство с аксиомой Архимеда. Мы видим, как самые просвещенные умы того времени в конце концов усваивают точку зрения, мало чем отличающуюся от точки зрения Бомбелли, причем главное отличие состояло в большем внимании с их стороны к строгим методам античных математиков. Исаак Барроу (учитель Ньютона, который и сам принимал большое участие в создании исчисления бесконечно малых) дает блестящее изложение этих методов в своих «Лекциях по математике», прочитанных в Кембридже в 1664—1666 гг. [13a и b]. Признавая необходимость вернуться к теории Евдокса для того, чтобы вновь обрести в вопросе о числе вошедшую в поговорку «геометрическую точность», он выдвигает в ее защиту хорошо обоснованные аргументы (так как она, по его свидетельству, казалась непонятной многим из его современников) против тех, которые оценивали ее как неясную и даже абсурдную. С другой стороны, определяя числа как символы, обозначающие отношения величин и всту-

[1]) Здесь имеется в виду число цифр в целой части корня. — *Прим. перев.*

пающие между собой в комбинации по правилам арифметических операций, он получил поле действительных чисел, выраженных в терминах, которые употреблялись впоследствии Ньютоном в его «Арифметике» и в которых его последователи до Дедекинда и Кантора ничего не изменили.

Но как раз к этому времени вводится метод разложения в ряды, который вскоре в работах «закоренелых» алгебраистов принимает исключительно формальный характер и отвлекает внимание математиков от вопросов сходимости, которые возникают при разумном применении рядов в области действительных чисел. Ньютон, главный создатель этого метода, сознавал всю необходимость рассмотрения этих вопросов; и если он их недостаточно осветил, то он по крайней мере знал, что вводимые им степенные ряды сходятся для малых значений переменной «чаще всего» так же хорошо, как геометрическая прогрессия (сходимость которой была уже хорошо известна древним математикам) ([167 а], т. I, стр. 3—26). К этому же времени Лейбниц заметил, что знакочередующийся ряд, члены которого убывают по абсолютной величине и стремятся к 0, является сходящимся. В следующем столетии (в 1768 г.) Даламбер высказывает сомнение в отношении употребления расходящихся рядов. Но благодаря авторитету Бернулли и особенно Эйлера подобные сомнения в то время были исключительным явлением.

Ясно, что математики, имеющие обыкновение пользоваться рядами для числовых расчетов, не стали бы так пренебрегать понятием сходимости. Не случайно первым в этой области (как и во многих других), кто вернулся к корректным методам, оказался математик, который уже в ранней молодости любил числовые расчеты. Это был К. Ф. Гаусс, который почти ребенком пользовался формулами арифметико-геометрического среднего [1]) и естественно пришел к созданию ясного понятия предела. В одной его рукописи, относящейся к 1800 г. (но опубликованной только в наше время) ([95а], т. X, стр. 390), можно найти точное определение верхней и нижней грани, с одной стороны, и верхнего и нижнего предела последовательности действительных чисел — с другой. Существование первых (для ограниченной последовательности), по-видимому, было принято как очевидное, а последние были корректно определены как пределы $\sup\limits_{p \geqslant 0} u_{n+p}$ и $\inf\limits_{p \geqslant 0} u_{n+p}$ при $n$, стремящемся к $+\infty$. Гаусс, с другой стороны, дает также в своем мемуаре 1812 г. о гипергеометрическом ряде ([95а], т. III, стр. 139) первый образец

[1]) При заданных $x_0$, $y_0 > 0$ пусть $x_{n+1} = (x_n + y_n)/2$, $y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$; для $n$, стремящегося к $+\infty$, $x_n$ и $y_n$ стремятся (очень быстро) к общему пределу, называемому арифметико-геометрическим средним чисел $x_0$ и $y_0$. Эта функция тесно связана с эллиптическими функциями и является отправной точкой для важных работ Гаусса в данной области.

исследования сходимости, проведенного, как он говорит, *«по всей строгости, чтобы удовлетворить тех, кто предпочитает строгие методы древних геометров»*. Правда, это исследование стояло в мемуаре на втором плане и не касалось основных принципов теории рядов. Они были впервые установлены Коши в «Курсе анализа» издания 1821 г. ([42а] (2), т. III) способом, корректным во всех отношениях, начиная с критерия Коши, ясно сформулированного и принятого в качестве очевидного. Так как при определении чисел он придерживается точки зрения Барроу и Ньютона, то можно утверждать, что для него действительные числа определены аксиомами величин и критерием Коши. Этого и на самом деле достаточно для их определения.

В это же время окончательно уясняется другой важный аспект теории действительных чисел. Как мы уже говорили, всегда считалось геометрически очевидным, что две непрерывные кривые не могут переходить одна через другую, не пересекая друг друга. Принцип этот (должным образом уточненный) был бы эквивалентен свойству прямой быть полным пространством. Этот принцип положен в основу «строгого» доказательства, данного Гауссом в 1799 г. теореме Даламбера, согласно которой всякий многочлен с действительными коэффициентами имеет действительный или комплексный корень ([95а], т. III, стр. 1). Доказательство той же теоремы, данное Гауссом в 1815 г. ([95а], т. III, стр. 31), опирается так же, как и предшествующая ему попытка Лагранжа, на аналогичный, но более простой принцип, согласно которому многочлен не может изменить знака, не обращаясь в нуль (принцип, который, как мы видели, уже был использован Стевином). В 1817 г. Больцано, отправляясь от критерия Коши, дает полное доказательство этого последнего принципа, которое он получает как частный случай аналогичной теоремы для непрерывных числовых функций числовой переменной [22с]. Ясно сформулировав (до Коши) «критерий Коши», он старается его обосновать рассуждением, которое, за отсутствием какого бы то ни было арифметического определения действительных чисел, не было и не могло быть ничем иным, кроме порочного круга. Но если принять этот пункт, вся его работа совершенно корректна и замечательна тем, что содержит не только современное определение непрерывной функции (данное здесь впервые) вместе с доказательством непрерывности многочлена, но и доказательство существования нижней грани *произвольного* ограниченного множества действительных чисел (он говорит не о множествах, но, что то же самое, о свойствах действительных чисел). С другой стороны, Коши, определяя в своем «Курсе анализа» ([42а] (2), т. III) непрерывные функции одной или нескольких числовых переменных, также доказывает, что непрерывная функция одной переменной не может изменить знака, не обратившись в нуль. Он использовал рассуждения Симона Стевина, которые естественным образом становятся корректными после того, как была определена непрерывность и введен критерий Коши (или, как только допускается, как это сделал Коши, эквивалентный принцип «вложенных интервалов», частным случаем которого, очевидно, является сходимость бесконечных десятичных дробей).

На этом уровне достижений математикам оставалось лишь уточнить и разработать полученные результаты, исправив некоторые неточности и заполнив некоторые пробелы. Коши, например, одно время полагал, что сходящийся ряд, членами которого являются непрерывные функции одной переменной, имеет в качестве суммы непрерывную функцию. Исправления, внесенные в этот пункт Абелем в его важных работах о рядах ([1]. т. I, стр. 219; ср. также т. II, стр. 257 и далее), дали возможность Вейерштрассу внести окончательную ясность в понятие равномерной сходимости (см. стр. 214), что изложено в его лекциях (не изданных, но имевших значительное влияние на математиков). С другой стороны, Коши допустил, без достаточных оснований, существование минимума непрерывной функции в одном из своих доказательств существования корней многочлена. Вейерштрасс внес ясность в вопросы такого рода, доказав в своих лекциях существование минимума для функций числовых переменных, определенных в замкнутых ограниченных интервалах. Именно его критика неоправданного применения этой теоремы к множествам функций (наиболее известным примером такого применения является «принцип Дирихле») положила начало развитию идей (см. стр. 141—142), приведших к общему определению компактных пространств и давших современную формулировку теоремы.

В это же время Вейерштрасс в своих лекциях признает логический интерес полного отделения понятия действительного числа от теории величин. В самом деле, употребление последней означает возврат к аксиоматическому определению множества точек прямой линии (или в конечном итоге множества действительных чисел) и к предположению существования такого множества. Хотя этот способ является по существу корректным, все же предпочтительно исходить только из рациональных чисел и выводить из них действительные числа посредством пополнения[1]). Это выполнили различными способами и независимо

---

[1]) В самом деле, таким образом вопрос о существовании, т. е., говоря современным языком, вопрос о непротиворечивости теории действительных чисел, сводят к аналогичному вопросу для рациональных чисел *при условии, однако, что теория абстрактных множеств предполагается известной* (так как пополнение предполагает понятие общего подмножества бесконечного множества). Иначе говоря, все сводится к этой последней теории, поскольку

друг от друга Вейерштрасс, Дедекинд, Мерэ и Кантор. В то время как предложенная Дедекиндом процедура, названная «сечениями» ([60], т. II, стр. 315—334), напоминает определение Евдокса, другие предложенные методы близки к методам, применяемым впоследствии Хаусдорфом для пополнения метрического пространства. В это же время Кантор начинает развивать теорию множеств действительных чисел, идея рассмотрения которых принадлежит Дедекинду [36], и получает основные элементарные результаты о топологии прямой линии, структуре открытых множеств, замкнутых множеств, понятий производного множества, совершенного вполне несвязного множества и т. д.

Кантор придал теории действительных чисел за незначительными исключениями ее окончательную форму. Отметим вкратце, в каком направлении эта теория была продолжена. Кроме работ по общей топологии (см. стр. 142) и приложений к теории интегрирования (см. стр. 235), нужно прежде всего отметить исследования структуры и классификацию множеств точек на прямой, а также числовых функций действительных переменных. Впервые эти проблемы возникают в работах Бореля [25], который в основном интересуется теорией меры, но среди прочих определений получает также и определение «борелевских множеств». Эти множества принадлежат к минимальному семейству множеств из **R**, содержащих интервалы и замкнутых по отношению к счетному числу операций объединения и пересечения и операции **C**. С этими множествами тесно связаны так называемые «функции Бэра», т. е. те функции, которые могут быть получены, исходя из непрерывных функций, «трансфинитным» повторением операции предельного перехода, примененного к последовательностям. Эти функции были определены Бэром в ходе очень важных работ, в которых он полностью отказывается от точки зрения меры, чтобы систематически исследовать качественный и «топологический» аспекты этих вопросов [9a]. В связи с этим он первый ввел и начал изучать полунепрерывные функции, а для характеристики функций, являющихся пределами непрерывных, ввел важное понятие тощих множеств (множеств «первой категории» по терминологии Бэра) (см. стр. 167). Что касается многочисленных работ, которые последовали за изысканиями Бэра и которым мы обязаны главным образом русской и особенно польской школам, то мы можем здесь только отметить их существование (см. стр. 167).

---

из нее можно вывести теорию рациональных чисел. Наоборот, если не предполагать возможность использования теории множеств, то непротиворечивость теории действительных чисел не сводится к непротиворечивости арифметики, и для этой теории снова оказывается необходимым дать независимую аксиоматическую характеристику.

## ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ И ЛОГАРИФМЫ

История теории мультипликативной группы $\mathbf{R}_+^*$ действительных положительных чисел тесно связана с развитием понятия *степеней* положительного числа и употребляемыми для них обозначениями. Концепция «геометрической прогрессии», образуемой последовательными степенями одного и того же числа, восходит к египтянам и вавилонянам. Она была знакома греческим математикам, и уже у Евклида («Начала», Книга IX, предложение 11) дана общая формулировка, эквивалентная правилу $a^m a^n = a^{m+n}$ для целых положительных показателей. В средние века французский математик Н. Орем (XIV в.) вновь находит это правило. У него, также впервые, появляется понятие дробного положительного показателя с обозначениями, уже близкими к нашим, и правила их исчисления (сформулированные в общем виде). Например, он ввел два правила, которые мы теперь выражаем так: $(ab)^{1/n} = a^{1/n} b^{1/n}$, $(a^m)^{p/q} = (a^{mp})^{1/q}$ [55].

Но идеи Орема слишком опередили математику его времени, чтобы иметь влияние на современников, и его трактат был быстро забыт. В следующем веке Н. Шюке вновь сформулировал правило Евклида и, кроме того, ввел экспоненциальные обозначения для степеней неизвестных в своих уравнениях и, не колеблясь, употреблял показатель 0 и целые показатели, меньшие нуля [1]). На этот раз (хотя работа Шюке оставалась в рукописи и, по-видимому, была не очень распространена) идея изоморфизма между «арифметической прогрессией» показателей и «геометрической прогрессией» степеней уже не теряется из виду. Штифель ([216], т. 35 и стр. 249—250) распространяет ее на отрицательные и на дробные показатели степеней. Наконец, эта же идея приводит к определению логарифмов и к построению первых таблиц, составленных независимо друг от друга шотландцем Дж. Непером в 1614—1617 гг. и швейцарцем Ж. Бюрги (работа которого появилась лишь в 1620 г., хотя его концепция

---

[1]) Шюке, например, писал $12^1$, $12^2$, $12^3$ и т. д вместо $12x$, $12x^2$, $12x^3$ и т. д.; $12^0$ вместо числа 12 и $12^{2\tilde{m}}$ вместо $12x^{-2}$ ([49], стр. 737—738).

восходит к первым годам XVII в.). Непрерывность изоморфизма, установленного между $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}^*_+$, у Бюрги неявно предполагается, так как он применяет интерполяцию при обращении с таблицами. Она, наоборот, явно сформулирована в определении Непера (во всяком случае, настолько явно, насколько это было возможно в то время с его смутным представлением о непрерывности) [1].

Излишне объяснять, какую услугу оказали логарифмы в числовых расчетах. С теоретической точки зрения значение их особенно возрастает с введением исчисления бесконечно малых, с открытием разложения в ряды $\log(1+x)$ и $e^x$ и дифференциальных свойств этих функций (см. стр. 175—176). Что касается определения показательных функций и логарифмов, то до середины XIX в. математики довольствовались тем, что интуитивно допускали возможность продолжить по непрерывности на множество действительных чисел функцию $a^x$, определенную для всех рациональных $x$; и только после того, как понятие действительного числа было окончательно уточнено и выведено из понятия рационального числа, была осознана необходимость дать точное обоснование подобному продолжению.

---

[1]) Непер рассматривает две точки $M$, $N$, движущиеся одновременно по двум прямым, причем движение $M$ равномерно, а движение $N$ таково, что скорость $N$ пропорциональна ее абсциссе; абсцисса $M$ тогда по определению является логарифмом абсциссы $N$ ([165a], стр. 3).

# $n$-МЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Мы уже говорили [1]) о том, как развитие аналитической геометрии на плоскости и в пространстве привело математиков к введению понятия $n$-мерного пространства. Оно давало возможность пользоваться чрезвычайно удобным геометрическим языком, позволяющим кратко и точно выражать алгебраические теоремы об уравнениях с любым числом неизвестных и особенно все общие результаты линейной алгебры. Но хотя к середине XIX в. этим языком уже широко пользовались многие геометры, он все еще оставался чисто условным, а отсутствие «интуитивного» представления пространств с более чем тремя измерениями, казалось, не разрешало рассуждать в отношении их «по непрерывности», опираясь исключительно на «интуицию», как это разрешалось в отношении плоскости или пространства. Первым, кто осмелился рассуждать подобным образом, по аналогии с пространством трех измерений (см. стр. 139), был Риман, пользовавшийся им в своих исследованиях по analysis situs и по основаниям геометрии [2]). Впоследствии рассуждения такого рода были с большим успехом использованы многочисленными математиками, особенно для теории алгебраических функций нескольких комплексных переменных. Но так как возможность проверки пространственной интуиции была в то время весьма ограниченной, можно было с полным основанием относиться скептически к доказательной силе подобных рассуждений, допуская их как чисто эвристические, поскольку они делали очень правдоподобной справедливость некоторых теорем. Поэтому А. Пуанкаре в своем мемуаре 1887 г. о вычетах двойных интегралов функций двух комплексных переменных тщательно избегает апеллировать к интуиции в отношении четырехмерного пространства: *«Так как этот гипергеометрический язык еще отталкивает от себя многие серьезные умы*, — говорит он, — *я буду употреблять его редко»*. Применяемые им с этой целью «уловки» позволяют ему свести дело к топологическим рассуждениям в 3-мерном пространстве, где он уже, не колеблясь, прибегает к интуиции ([181a], т. III, стр. 443 и след.).

---

[1]) См. стр. 78—79.

[2]) См. также работы Л. Шлефли ([200], т. I, стр. 169—387), написанные в это же время, но опубликованные только в XX в.

Помимо этого, открытия Кантора, и особенно его знаменитая теорема, устанавливающая, что $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}^n$ равномощны (что, казалось, ставило под вопрос даже понятие размерности) [1]), показывали, что для прочной основы геометрических и топологических рассуждений необходимо было полностью освободить их от всякого обращения к интуиции. Мы уже говорили (см. стр. 138), что эта потребность положила начало современному пониманию общей топологии. Но еще до создания последней математики начали самым тщательным образом изучать топологию числовых пространств и их непосредственных обобщений («$n$-мерные многообразия») методами, относящимися главным образом к той ветви топологии, которую называют «комбинаторной топологией», или, лучше, «алгебраической топологией». Мы не можем ее здесь рассматривать.

---

[1]) Интересно отметить, что, как только Дедекинд ознакомился с этим результатом, он понял причину его видимой парадоксальности и заметил Кантору, что, вероятно, можно было бы доказать невозможность *взаимно однозначного и взаимно непрерывного* соответствий между $\mathbf{R}^m$ и $\mathbf{R}^n$ для $m \neq n$ ([36], стр. 37—38).

# КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВ

Мы не будем здесь вновь подробно излагать историю развития теории комплексных чисел и теории кватернионов, так как они в основном относятся к алгебре (см. стр. 79 и 90), но скажем несколько слов о геометрическом представлении мнимых чисел, которое во многих отношениях знаменовало решительный прогресс в развитии математики.

Первое четкое понимание взаимно однозначного соответствия между комплексными числами и точками плоскости бесспорно принадлежит К. Ф. Гауссу [1]), особой заслугой которого является первое применение этой идеи к теории комплексных чисел и ясное предвидение всего того, что смогли извлечь из нее аналисты XIX в. В течение XVII и XVIII вв. математики постепенно приходят к убеждению, что мнимые числа, дающие возможность решать уравнения второй степени, позволяют также решать алгебраические уравнения любой степени. В XVIII в. были опубликованы многочисленные попытки доказательства этой теоремы; но, не говоря уже о тех, которые содержали порочный круг, среди них не было ни одной, которая бы не вызывала серьезных возражений. В результате внимательного изучения всех попыток доказательств и детальной критики их пробелов Гаусс поставил целью своей диссертации (написанной в 1797 г., изданной в 1799 г.) дать, наконец, строгое доказательство. Взяв за основу идею, высказанную мимоходом Даламбером (в доказательстве, опубликованном Даламбером в 1746 г.) [2]), он заме-

---

[1]) Идея подобного соответствия, несомненно, впервые возникла у Валлиса, изложившего ее в 1685 г. в своем «Трактате по алгебре»; но его соображения по этому поводу остались неясными и не оказали влияния на его современников.

[2]) Это доказательство (в котором Даламбер к тому же не использует замечания, послужившего отправным пунктом для Гаусса) является первым по времени, не содержащим логических ошибок. Гаусс, критикуя слабые пункты этого доказательства, признает, однако, ценность основной идеи Даламбера: *«Истинный стержень доказательства,* — говорит он, — *как мне кажется, не затрагивается всеми этими возражениями»* ([95а], т. III, стр. 11). Несколько дальше он намечает метод, с помощью которого можно строго провести рассуждения Даламбера. В таком виде эти рассуждения, с точностью до второстепенных деталей, совпадают с рассуждениями Коши в одном из его доказательств этой же теоремы.

чает, что точки $(a, b)$ плоскости, для которых $a+bi$ являются корнями многочлена $P(x+yi)=X(x, y)+iY(x, y)$, представляют собой точки пересечения кривых $X=0$ и $Y=0$. Путем качественного изучения этих кривых он показывает, что некоторая непрерывная дуга одной из них соединяет точки двух различных областей, разграниченных другой, и заключает отсюда, что кривые пересекаются ([95a], т. III, стр. 3, см. также [95b]). Это доказательство по своей ясности и оригинальности представляет замечательный прогресс по сравнению со всеми предшествующими и является, без сомнения, примером чисто топологического рассуждения, примененного к алгебраической проблеме [1]).

В своей диссертации Гаусс не определил явно соответствия между точками плоскости и мнимыми числами. По отношению к этим последним и вопросам их «существования», которые поднимались в течение двух столетий, он занимает сдержанную позицию, намеренно приводя все свои рассуждения к такому виду, чтобы в них участвовали только действительные числа. Но ход идей его доказательства был бы абсолютно непонятен, если бы оно не предполагало совершенно сознательное отождествление точек плоскости и комплексных чисел. Эта гипотеза подкрепляется тем обстоятельством, что Гаусс одновременно проводил исследования по теории чисел и теории эллиптических функций, в которых участвуют комплексные числа. До какой степени геометрическая концепция мнимых стала для него привычной и к каким результатам она могла привести в его руках, ясно показывают заметки Гаусса (опубликованные только в наши дни), в которых он применяет комплексные числа к проблемам элементарной геометрии ([95a], т. IV, стр. 396, и т. VIII, стр. 307). Еще более определенный характер носит письмо к Бесселю, датированное 1811 г. ([95a], т. VIII, стр. 90—91), где он намечает основы теории интегрирования функции комплексной переменной: «*Подобно тому*, — говорит он, — *как всю область действительных величин можно представить с помощью бесконечной прямой, можно себе представить* («sinnlich machen») *область всех величин, действительных и мнимых, с помощью бесконечной плоскости, где каждая точка, определенная своей абсциссой $a$ и своей ординатой $b$, представляет в то же время величину $a+ib$. Непрерывный переход от одного значения $x$ к другому происходит, следовательно, по непрерывной линии и, значит, может осуществляться бесконечным числом способов...*»

---

[1]) Гаусс опубликовал четыре доказательства «Теоремы Даламбера — Гаусса»; последнее из них является вариантом первого и, как и первое, опирается на интуитивно очевидное топологическое свойство плоскости; но второе и третье доказательства основаны на совершенно иных принципах (см. стр. 110—111).

Но только в 1831 г. (при введении «чисел Гаусса» $a+ib$, где $a$ и $b$ — целые) Гаусс опубликовал отчетливое изложение своих мыслей по этому вопросу ([95a], т. II, Theoria Residuorum Biquadraticorum, Commentatio secunda, art. 38, стр. 109 и Anzeige, стр. 174 и следующая). Тем временем идея геометрического представления мнимых чисел была вновь найдена независимо двумя скромными исследователями, математиками-любителями, более или менее самоучками, для которых эта идея явилась единственным их вкладом в науку, причем оба не имели никаких контактов с научными кругами своего времени. Поэтому их работам угрожала опасность остаться совершенно незамеченными. Это и произошло с первым из них, датчанином К. Весселем, очень ясно задуманное и изложенное сочинение которого появилось в 1798 г., но было извлечено из забвения лишь веком позже. Такое же злоключение чуть не произошло и со вторым — швейцарцем Ж. Арганом, работа которого лишь благодаря случаю была обнаружена в 1813 г. через 7 лет после ее опубликования [1]). Эта работа вызвала оживленную дискуссию в Annales de Gergonne, и тема ее стала предметом нескольких публикаций (малоизвестных авторов) во Франции и Англии между 1820 и 1830 гг. Однако для того чтобы положить конец всем этим спорам и склонить математиков к новой точке зрения, недоставало авторитета большого имени. Только к середине века геометрическое представление мнимых величин стало, наконец, общепринятым вследствие публикаций Гаусса (о которых говорилось выше) в Германии, работ Гамильтона и Кэли по гиперкомплексным системам в Англии и, наконец, признания его со стороны Коши [2]) во Франции, всего за несколько лет до того, как Риман путем гениального обобщения значительно расширил роль геометрии в теории аналитических функций и тем самым создал топологию.

Измерение углов с помощью дуг, которые они вырезают на окружности, является таким же древним, как и само понятие угла. Такой способ измерения был уже известен вавилонянам, от которых к нам перешла единица измерения углов — градус. Впрочем, для них вопрос стоял только об измерении углов,

---

[1]) В противоположность Гауссу Вессель и Арган обращают больше внимания на *оправдание* вычислений с комплексными числами, чем на применение предложенного ими геометрического представления к новым исследованиям. Вессель не указывает никаких приложений этого представления. Единственное приложение, указанное Арганом, состоит в доказательстве теоремы Даламбера — Гаусса, которое представляет лишь вариант доказательства самого Даламбера и вызывает те же возражения.

[2]) В своих первых работах (с 1814 по 1826 г.) об интегралах от функций комплексной переменной Коши рассматривает комплексные числа как «символические» выражения и не отождествляет их с точками плоскости, что не мешает ему постоянно ассоциировать точку $(x, y)$ с числом $x+iy$ и в связи с этим свободно пользоваться языком геометрии.

заключенных между 0 и 360°, что было для них достаточным, так как углы служили у них в первую очередь для определения положения небесных тел в тех или иных точках их видимых траекторий и для составления таблиц для научных и астрологических целей.

У греческих геометров классической эпохи определение угла (Евклид, «Начала», определения 8 и 9) было еще более узким, так как оно относилось лишь к углам, меньшим двух прямых. Так как, с другой стороны, их теория отношений и меры основывалась на сравнении произвольно больших кратных измеряемых величин, то углы не могли быть для них измеримыми величинами, хотя у них встречается понятие равных углов, углов больших или меньших один другого, а также суммы двух углов, если только последняя не превосходит двух прямых. Так же как сложение дробей, измерение углов должно было быть в их глазах эмпирической процедурой, не имеющей научного значения. Эта точка зрения хорошо иллюстрируется вызывающим глубокое восхищение мемуаром Архимеда «О спиралях» ([3b], т. II, стр. 1—121), в котором он дает кинематическое определение спирали, так как не может говорить о пропорциональности радиусов-векторов и углов (определение 1, стр. 44, ср. формулировку предложения 12 на стр. 46). Из этого определения он получает, как это видно из продолжения его работы все то, что он мог бы получить с помощью общего понятия меры угла, если бы оно у него было. Что касается греческих астрономов, то они, по-видимому, довольствовались в этом вопросе, как и во многих других, тем, что следовали за своими вавилонскими предшественниками.

И здесь, как и в развитии понятия действительного числа, (ср. стр. 150), ослабление духа строгости в период упадка греческой математики приводит к возврату к «наивной» точке зрения, которая в некотором отношении ближе к нашей, чем строгая концепция Евклида. Так, один из малоосведомленных людей, занимавшихся дополнениями «Начал», вставил в текст Евклида знаменитое предложение (Евклид, «Начала», Книга VI, 33): «Углы пропорциональны дугам, которые они вырезают на окружности» [1]), а анонимный комментатор, разбирая «доказательство» этого предложения, не колеблясь, вводит, конечно, без какого

---

[1]) То, что это действительно вставка, не подлежит никакому сомнению ввиду абсурдности доказательства, неумело скопированного с классических образцов метода Евдокса; очевидно также, что этот результат совсем неуместен в конце Книги VI Весьма пикантным является то обстоятельство, что Теон в IV в. н. э. ставит себе в заслугу сделанное им добавление к этой вставке, в котором, как он полагает, доказывается, что *«площади секторов круга пропорциональны их центральным углам»* ([80], т. V, стр. 24), и это спустя шесть веков после того, как Архимед нашел площади секторов спиралей!

бы то ни было обоснования дуги, равные произвольно большим кратным длины окружности, и углы, равные этим дугам ([80], т. V, стр. 357). Но даже Виет в XVI в., который как будто был очень близок к современной концепции угла, когда обнаружил, что уравнение $\sin nx = \sin \alpha$ имеет много корней, находит только такие корни, которые соответствуют углам, меньшим двух прямых ([233], стр. 305—313). Окончательно эту точку зрения оставили только в XVII в. После того как открытие Ньютоном разложения в ряды $\sin x$ и $\cos x$ дало выражения для этих функций, годные для всех значений аргумента, мы находим, наконец, у Эйлера в связи с рассмотрением логарифмов «мнимых» чисел четкую концепцию понятия меры произвольного угла ([81a] (1), т. XVII, стр. 220).

Классическое определение меры угла через длину дуги круга является, конечно, не только интуитивным, но и по существу корректным. Однако, для того чтобы сделать его строгим, необходимо иметь понятие длины кривой, т. е. интегральное исчисление. С точки зрения структур, которые при этом участвуют, такой метод определения является очень обходным, тогда как возможно дать определение, не пользуясь никакими другими средствами, кроме теории топологических групп. Действительная и комплексная показательные функции получаются, таким образом, из одного и того же источника — теоремы, характеризующей «однопараметрические группы».

## МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Как мы уже говорили (см. стр. 146), понятие метрического пространства было введено в 1906 г. М. Фреше и несколькими годами позднее получило дальнейшее развитие в работе Хаусдорфа «Mengenlehre». После 1920 г. оно приобретает большое значение благодаря фундаментальным трудам С. Банаха и его школы в области нормированных пространств и их применения к функциональному анализу (см. стр. 227 и 231) — с одной стороны, и в силу того интереса, который представляет понятие абсолютной величины в арифметике и в алгебраической геометрии — с другой (где пополнение по абсолютной величине оказалось весьма плодотворным).

За период времени с 1920 по 1930 г. московская школа провела целую серию исследований топологических свойств метрических пространств. В частности, эти работы были направлены на получение необходимых и достаточных условий для того, чтобы данное топологическое пространство было метризуемым. В связи с этим направлением исследований большой интерес вызвало появление понятия нормального пространства, определенного в 1923 г. Тицем, значение которого было, однако, признано только после появления работ Урысона [229] [1]) о продолжении непрерывных числовых функций. За вычетом тривиального случая функции одной действительной переменной проблема расширения на все пространство числовой непрерывной функции, определенной на замкнутом множестве, впервые была исследована (для случая плоскости) А. Лебегом [143d]. Еще до получения Урысоном окончательного результата она была разрешена Г. Тицем для метрических пространств. Распространение этой проблемы на функции со значениями из любого топологического пространства получило за последние годы большое значение в алгебраической топологии. Кроме того, недавние работы

[1]) П. С. Урысон (1898—1924) создал в 1921 г. теорию размерности, что явилось фактически новым этапом развития всей теоретико-множественной топологии. Наиболее значительные результаты в этой области в 20-х гг. и в последующем принадлежит П. С. Александрову. Ученик последнего Ю. М. Смирнов в 1951 г. нашел необходимое и достаточное условие гомеоморфности топологического пространства метрическому. — *Прим. ред.*

ясно показали, что в этой области понятие нормального пространства мало пригодно для употребления, потому что оно еще допускает очень много «патологий». Чаще всего его приходится заменять более узким понятием паракомпактного пространства, введенным в 1944 г. Ж. Дьёдонне [69a]. Наиболее значительным результатом этой теории является теорема А. Г. Стоуна [218], согласно которой всякое метризуемое пространство паракомпактно [1]).

Мы уже отметили (см. стр. 156) наиболее значительные работы конца XIX и начала XX вв. (Борель, Бэр, Лебег, Осгуд, Юнг) по классификации множеств точек в пространствах $\mathbf{R}^n$ и по классификации и характеристике числовых функций, полученных итерацией процессов предельного перехода (для последовательностей функций), начиная с непрерывных функций. Как было быстро замечено, метрические пространства являются естественной областью для исследований подобного рода, развиваемых начиная с 1910 г. главным образом русской и польской школами. Именно этим школам удалось вскрыть ту основную роль, которую в современном анализе играет понятие тощего множества и теорема о пересечении счетного числа открытых и всюду плотных множеств в полном метрическом пространстве, доказанная сперва (независимо) Осгудом [173] для числовой прямой и Бэром [9b] для пространств $\mathbf{R}^n$.

С другой стороны, Суслин, исправляя в 1917 г. ошибку Лебега, показал, что непрерывный образ борелевского множества не обязательно будет борелевским множеством, и это привело его к определению и к изучению более обширной категории множеств, названных «аналитическими», или «суслинскими». После безвременной смерти Суслина изучение этого вопроса было продолжено Лузиным (идеи которого в свое время вдохновили Суслина) и польскими математиками (см. [152] и [139b]). Значение этих множеств в настоящее время заключается главным образом в их применении к теории интегрирования (где благодаря их специальным свойствам они допускают построения, которые были бы невозможны на произвольных измеримых множествах), а также к современной теории потенциала, где основная теорема о емкости суслинских множеств, доказанная совсем недавно Г. Шоке [48], предоставила богатые возможности для различных применений.

---

[1]) Эта теорема дала возможность решить проблему метризации более удовлетворительным образом, чем это делалось с помощью критериев, полученных около 1930 г. русско-польской школой («критерий Нагата—Смирнова»). Следует, однако, отметить, что до сих пор эти критерии еще не получили применения; как это часто случалось в истории математики, само решение проблемы метризации, по-видимому, имело меньше значения, чем те новые понятия, которые развились на ее основе.

## ИСЧИСЛЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ

В 1604 г. Галилей, который находился тогда в апогее своей научной деятельности, считал доказанным, что закон движения по прямой линии со скоростью, увеличивающейся пропорционально пройденному пути, будет именно таким ($x = ct^2$), который он открыл при изучении свободного падения тел (93b, т. X, стр. 115—116). За период времени с 1695 по 1700 г. не было ни одного тома Acta Eruditorum, ежемесячно выходящих в Лейпциге, где бы не появились мемуары Лейбница, братьев Бернулли, маркиза де Лопиталя с исследованиями самых разнообразных проблем дифференциального исчисления, интегрального исчисления, вариационного исчисления, и где бы не употреблялись обозначения, за малыми исключениями схожие с теми, которыми мы еще пользуемся до сих пор. Таким образом, исчисление (par excellence «calculus») сложилось почти в точности в течение одного столетия; и почти три столетия постоянного его употребления еще не совсем притупили это ни с чем не сравнимое орудие.

Греки не имели и не представляли себе ничего подобного. Им было известно только алгебраическое исчисление вавилонян, и то они отказались от его употребления, переведя его частично на язык геометрии. Как раз в рамках геометрии и было сделано их наиболее гениальное математическое открытие, а именно их метод трактовки проблем, которые мы теперь относим к интегральному исчислению. Евдокс дал первые примеры этого метода, занимаясь вопросом определения объема конуса и пирамиды, которые дошли до нас в более или менее точной передаче Евклида ([80], Книга XII, предл. 7 и 10). Но особенно важно, что этим проблемам посвящены почти все работы Архимеда ([3b] и [3c]); благодаря исключительной удаче мы и теперь еще можем читать большинство творений Архимеда в подлинниках, на звучном дорическом наречии, на котором он их так тщательно составил, вплоть до того, которое было найдено совсем недавно и где излагается «эвристический» метод, приведший Архимеда к некоторым из его наиболее прекрасных результатов ([3b], т. II, стр. 425—507). Так как одна из слабых сторон метода исчерпывания Евдокса состояла в том, что, будучи безукоризненным методом доказательства (если приняты некоторые постулаты), он не являлся методом открытия, его применение с необходимостью опирается на предварительное знание результата, который надо доказать [1]). Архимед по этому поводу пишет: *«Когда речь идет о теоремах, строгое доказательство которых впервые нашел Евдокс, по поводу конуса и пирамиды... немалую роль надо отвести и Демокриту, который первый сформулировал эти предложения без строгого доказательства»* ([3b], т. II, стр. 430) [2]).

Это обстоятельство чрезвычайно затрудняет детальный анализ работ Архимеда, — анализ, который, по правде говоря, еще, кажется, не был сделан ни одним современным историком. Поэтому мы все еще не знаем, до какой степени Архимед осознавал те родственные связи, которые объединяют различные исследуемые им проблемы (связи, которые мы бы выразили, говоря, что один и тот же интеграл появляется во многих случаях в различных геометрических аспектах) и какое значение он им придавал. В качестве примера рассмотрим следующие задачи, из которых первая была решена Евдоксом, остальные — Архимедом: объем пирамиды, площадь сегмента параболы, центр тяжести треугольника и площадь спирали, названной архимедовой (ее уравнение в полярных координатах $\rho = c\omega$). Они все зависят от интеграла $\int x^2\,dx$, и, ни в чем не отклоняясь от сути метода исчерпывания, их все можно привести к вычислению «сумм Римана» вида $\sum an^2$. В самом деле, Архимед исследует спираль ([3b], т. II, стр. 1—121) с помощью леммы, которую можно записать так:

$$N^3 < 3\sum_{n=1}^{N} n^2 = N^3 + N^2 + \sum_{n=1}^{N} n < (N+1)^3.$$

Архимед доказывает (методом исчерпывания, при помощи разбиения треугольника на параллельные слои), что центр тяжести треугольника находится на каждой из медиан, следовательно, в точке их пересечения ([3b], т. II, стр. 262—315). Для параболы он предлагает три способа. Один из них, «эвристический», предназначенный только для того, чтобы *«придать некоторое правдоподобие результату»*, состоит в сведении проблемы к задаче об отыскании центра тяжести треугольника пу-

---

[1]) Это утверждение Н. Бурбаки весьма спорно. Метод «исчерпывания» Евдокса содержал элементы теории пределов и был не менее эффективен, чем теория пределов. Греческие математики могли с его помощью не только доказывать, но и находить новые результаты, что они с успехом и делали, как об этом свидетельствует хотя бы сочинение Архимеда «О спиралях (см. [10a]* и [3a]* и [3b]*), о котором Н. Бурбаки говорит ниже. — *Прим. перев.*

[2]) Текст Архимеда мы приводим по переводу С. Л. Лурье «Архимед», стр. 138. — *Прим. перев.*

тем рассуждения, заимствованного из статики. В ходе этого доказательства Архимед без колебаний рассматривает сегмент параболы как сумму бесконечного числа отрезков прямых, параллельных оси ([3b], т. II, стр. 435—439). Второй метод основан на аналогичном принципе, но проведен со всею строгостью по способу «исчерпывания» ([3b], т. II, стр. 261—315). В последнем доказательстве, необыкновенно остроумном, но наименее пригодном для обобщения, искомая площадь представлена как сумма геометрической прогрессии, составленной с помощью специальных свойств параболы. Ничто не указывает на связь между этими проблемами и задачей определения объема пирамиды. Более того, даже подчеркивается ([3b], т. II, стр. 8), что проблемы, относящиеся к спирали, не имеют «ничего общего» с некоторыми другими, относящимися к сфере и к параболоиду вращения, о которых говорит Архимед в том же предисловии и среди которых находится одна (а именно объем параболоида), которая сводится к интегралу $\int x\,dx$ [1]).

Как видно из этих примеров, принцип исчерпывания, за исключением особых случаев его искусственного применения, состоит в следующем: с помощью «сумм Римана» получают верхние и нижние грани для исследуемой величины, которые непосредственно сравнивают с заранее объявленным выражением для этой величины или с соответствующими гранями для уже решенной аналогичной проблемы. Сравнение (которое из-за невозможности употреблять отрицательные числа состоит из двух частей) начинается сакраментальными словами: «В противном случае она (т. е. искомая величина. — *Прим. перев.*) была бы либо больше, либо меньше; предположим, если это возможно, что она больше и т. д.; предположим, если это возможно, что она меньше и т. д.», откуда и сам метод получил у ученых XVII в. название «апагогического», или «метода приведения к абсурду» («ἀπαγωγὴ εἰς ἀδύνατον»).

Аналогичным образом Архимед излагает определение касательной к спирали ([3b], т. II, стр. 62—76), — изолированный результат, притом единственный, который мы можем указать как античный источник «дифференциального исчисления», если не считать сравнительно легкого определения касательных к коническим сечениям и некоторых задач на нахождение максимумов

[1]) Н. Бурбаки не упоминает, что Архимед свел по крайней мере три различные задачи к вычислению одной и той же «суммы Римана», а именно: определение площади витка спирали, эллипсоида вращения и сегмента гиперболоида вращения. То есть Архимед сумел здесь увидеть те «родственные связи», о которых говорится выше. То обстоятельство, что Архимед решал задачи и другими методами (причем, по-видимому, квадратура параболы является одной из наиболее ранних работ), не может поэтому служить доказательством утверждения автора. — *Прим. перев.*

и минимумов[1]). И действительно, если в области «интегрирования» греческим математикам было предоставлено огромное поле для исследований не только в связи с проблемами площадей и объемов, но и статикой и гидростатикой, то они были лишены какой-либо возможности, за исключением кинематики, серьезно заняться изучением дифференцирования. Правда, Архимед дает кинематическое определение своей спирали; и так как мы не знаем, как он пришел к своему определению касательной[2]), мы имеем право задать себе вопрос, не было ли ему известно что-либо о сложении движений. Но в таком случае разве не применил бы он столь могучий метод к другим проблемам этого же рода? Более вероятно предположить, что он вынужден был пользоваться какими-нибудь «эвристическими» приемами для перехода к пределу, которые могли быть подсказаны известными ему результатами с коническими сечениями. Понятно, что последние по своей природе значительно проще, так как можно построить точки пересечения прямой и конического сечения и соответственно определить условие совпадения этих точек. Что касается самого определения касательной, то последняя понимается как прямая, относительно которой вблизи точки касания вся кривая располагается по одну сторону. Ее существование предполагалось; предполагалось также, что всякая кривая состоит из выпуклых дуг. В этих условиях для доказательства того, что некоторая прямая является касательной к кривой, нужно доказать некоторые неравенства, что и делалось, разумеется, с самой безукоризненной строгостью.

С точки зрения строгости методы Архимеда не оставляют желать ничего лучшего. Еще в XVII в. наиболее скрупулезные математики прибегали к «апагогическому» доказательству, чтобы сделать несомненным какой-нибудь кажущийся особенно тонким

---

[1]) В действительности для определения касательных и экстремумов Архимед применял единые методы, которые могут быть названы дифференциальными, причем нахождение экстремумов он сводил к определению касательных. Так, Архимед показывает в сочинении «О шаре и цилиндре» (с точностью до обозначений), что выражение $y = x^2(a - x)$ может иметь максимум $M$ при $x = x_0$ лишь в том случае, если кривые $y_1 = x^2$ и $y_2 = \dfrac{M}{a - x}$ имеют в точке $(x_0, M)$ общую касательную. Нетрудно видеть, что аналитически это условие эквивалентно следующему необходимому условию для существования экстремума произведения $y = f(x)\, g(x) : (fg)' = f'g + fg' = 0$. Этот метод был хорошо известен ученым XVI—XVII вв. (Риччи, Торичелли и др.), которые им широко пользовались. Более подробно см. об этом в [3a]* и [3b]*. — *Прим. перев.*

[2]) Метод определения касательной, которым пользовался Архимед, может быть восстановлен на основании анализа доказательства самого Архимеда, которое полностью дошло до нас. См. об этом в цитированной выше работе и в [3a]* и [3b]*. — *Прим. перев.*

результат ([82], т. I, стр. 211—254, французский перевод т. III. стр. 181—215, и [175], т. VIII, стр. 249—282). Что касается их плодотворности, то она в достаточной мере засвидетельствована работами Архимеда. Но для того, чтобы иметь право видеть в них «интегральное исчисление», надо было бы показать, что существовал какой-нибудь набросок классификации разнообразных геометрических проблем в соответствии с видом интеграла, лежащего в их основе. Как мы увидим дальше, в XVII в. необходимость дать такую классификацию постепенно становится одной из основных забот геометров. Если у Архимеда нельзя найти даже ее следов, не является ли это признаком того, что подобные теории казались ему в высшей степени «абстрактными» и что он, наоборот, при всякой возможности максимально использовал специфические свойства изучаемых фигур? И не должны ли мы прийти к заключению, что это удивительное создание Архимеда (на котором по признанию творцов интегрального исчисления это исчисление целиком основано) в какой-то мере противоположно интегральному исчислению? [1])

В математике к тому же нельзя безнаказанно допускать образования пропасти между открытием и доказательством. В благоприятные для развития математики эпохи ученому остается только, не согрешив против строгости, записывать возникшие у него идеи так, как он их понимает. Иногда даже он может питать надежду, что ценой удачных изменений в математическом языке и в установленных обозначениях он выразит то, что есть в действительности. Но часто также ему приходится делать выбор между методами некорректными, но, быть может, плодотворными, и корректными методами, которые однако не дают ему возможности выразить свою мысль, не искажая ее и не прибегая к утомительным усилиям. И тот и другой путь не свободны от опасностей. Греки шли по второму пути, и, может быть, в этом в большей степени, чем в стерилизующем влиянии римского завоевания, следует искать причину поразительного застоя их математики, наступившего почти тотчас же после блестящего расцвета. Были сделаны не лишенные правдоподобия попытки объяснить это тем, что в устном преподавании у последователей Архимеда и Аполлония могли содержаться многие новые результаты, однако они не были обнародованы из-за нежелания ученых

---

[1]) Мы думаем, что при ответе на этот вопрос нельзя пренебрегать мнением творцов интегрального исчисления. Но и сам Н. Бурбаки уже дает на него отрицательный ответ, когда указывает на наличие у Архимеда «сумм Римана». При характеристике античной математики правильнее было бы говорить не об интегральном или дифференциальном исчислении, что предполагает развитую систему правил и обозначений, но лишь об интегральных и дифференциальных методах, которые бесспорно были у Архимеда. (См., например, [10]*). — *Прим. перев.*

предпринимать чрезвычайные усилия для приведения этих открытий к тем канонам, которые считались необходимыми для публикации. Во всяком случае, эти соображения не останавливали математиков XVII в., когда они, столкнувшись с целым сонмом новых проблем, старались справиться с ними путем тщательного изучения трудов Архимеда.

В то время как великие классики греческой литературы и философии были изданы в Италии уже до 1520 г., в изданиях Алде Мануса и некоторых других, первое печатное издание Архимеда на греческом и латинском языках [3a] было выпущено Гервагиусом из Базеля только в 1544 г., причем до этого времени вообще не было изданий работ Архимеда на латинском языке. На математиков той эпохи (поглощенных алгебраическими исследованиями) они не оказали заметного влияния, и только в эпоху Галилея и Кеплера, которые оба были скорее астрономами и физиками, нежели математиками, это влияние стало ощутимым. С этого времени и до 1670 г. не было ни одного имени, которое бы столь же часто упоминалось в работах творцов исчисления бесконечно малых, как имя Архимеда. Появилось много переводов и комментариев его работ. Все, начиная от Ферма и кончая Барроу, без конца его цитируют; все утверждают, что творения Архимеда являются для них образцом и источником вдохновения.

Правда, как мы увидим дальше, подобные утверждения не следует понимать буквально; в этом-то и кроется одна из трудностей, возникающих при попытке правильной оценки этих произведений. Историк должен учитывать также организацию науки того времени; очень еще несовершенная в начале века, к концу его благодаря созданию научных обществ и выпуску научной периодики, укреплению и развитию университетов организация научной жизни стала уже очень походить на современную.

До 1665 г. математики из-за полного отсутствия периодики должны были для распространения своих работ прибегать либо к эпистолярной форме, либо к изданию книги, чаще всего за свой счет или, если им это удавалось, за счет какого-нибудь мецената. Издатели и печатники, способные на такого рода работу, были редки и к тому же малонадежны. После бесчисленных проволочек и осложнений, связанных с печатанием подобных книг, автор обычно сталкивался с бесконечными враждебными выпадами своих противников, не всегда добросовестными и зачастую написанными с удивительной язвительностью. В самом деле, при общей неуверенности даже в отношении самих принципов исчисления бесконечно малых каждому не представляло труда отыскать в рассуждениях своих противников места слабые или, во всяком случае, туманные и спорные. Понятно, что в этих условиях многие ученые предпочитали спокойно оставаться в стороне и сообщать свои методы и результаты только избранным друзьям. Некоторые из них, и особенно некоторые любители науки, как, например, Мерсенн в Париже и позднее Коллинз в Лондоне, поддерживали обширную переписку с учеными разных стран, посылая им выдержки из различных работ и иногда даже приплетая к ним глупости собственного производства. Математики, обладая «методами», которые за неимением общих понятий и определений они не в состоянии были ни облечь в теоремы, ни даже более или менее точно сформулировать, были вынуждены довольствоваться их проверкой на большом числе примеров. Чтобы выявить мощь своих методов, они посылали вызовы своим собратьям, иногда сопровождая их зашифрованным изложением своих собственных результатов. Молодые студенты путешествовали, пожалуй, больше, чем теперь; идеи их учителей зачастую лучше распространялись с помощью этих путешествий, чем посредством их опубликования, хотя это и было лишней причиной для недоразумений. Наконец, многие математики, среди которых было немало талантливых, работали над одними и теми же естественно возникавшими проблемами, не имея взаимного контакта и почти не зная результатов друг друга, вследствие чего без конца возникали споры о приоритете, а случаи обвинения друг друга в плагиате были отнюдь не редки.

Следовательно, историк должен обращаться к частным письмам и бумагам ученых того времени не в меньшей мере, чем к их публикациям. Но в то время как бумаги Гюйгенса были сохранены в целости и прекрасно изданы [126b], научное наследство Лейбница, например, было опубликовано только частично и крайне неудовлетворительно, произведения Ньютона вообще не увидели света, а труды многих иных математиков безвозвратно утеряны. Во всяком случае, в результате недавнего изучения рукописей стало вполне очевидным, что, несмотря на споры и разногласия, царившие среди ученых, великие математики того времени, писавшие о своих собственных работах, об эволюции своих идей, о тех влияниях, которые они испытывали, и о тех, которые они не испытывали, делали это честно, искренне и вполне добросовестно [1]). Таким образом, этими драгоценными свидетельствами, которыми мы располагаем в довольно большом количестве, можно пользоваться с полным доверием, и историку не надо уподобляться в отношении их судебному следователю.

---

[1]) Это, например, относится к Торичелли (см. [175], т. VIII, стр. 181—194) и к Лейбницу [155]. Разумеется, мы не хотим сказать, что какой-нибудь математик не может питать иллюзий относительно самобытности своих идей: но так ошибаться в отношении себя склонны не самые крупные из них.

К тому же большинство споров о приоритете совершенно лишено смысла. Правда, когда Лейбниц принял обозначение $dx$ для «дифференциала», он не знал, что Ньютон уже десять лет назад пользовался знаком $\dot{x}$ для «флюксии»; но что бы изменилось, если бы он знал об этом? В качестве поучительного примера вспомним, кто был автором теоремы $\log x = \int \frac{dx}{x}$ и когда она появилась? Формула в том виде, как она дана выше, принадлежит Лейбницу, так как обе ее части написаны в его обозначениях. Сам Лейбниц и Валлис приписывают ее Григорию де Сент-Винценту. Последний в своем «Opus Geometricum» [103] (появившемся в 1647 г., но, по его словам, законченном значительно раньше) доказывает только следующий эквивалент: если $f(a, b)$ обозначает площадь гиперболического сегмента $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{A}{x}$, то отношение $b'/a' = (b/a)^n$ влечет за собой $f(a', b') = nf(a, b)$. К этому его ученик и комментатор Сараса почти немедленно [197] добавляет, что площади $f(a, b)$ могут «служить вместо логарифмов». Не потому ли он больше ничего не говорит и сам Григорий ничего не добавил, что для большинства математиков его времени логарифмы были «средством вычисления» без права на их упоминание в математике? Правда, Торичелли в письме 1644 г. [151] говорит о своих исследованиях кривой, которую мы бы обозначили $y = ae^{-cx}$, $x \geqslant 0$, прибавив, что там, где Непер (которого он к тому же осыпает похвалами) «следовал только арифметической практике», он сам «извлекал геометрическое рассуждение». Торичелли оставил об этой кривой рукопись, явно приготовленную к изданию, но оставшуюся неопубликованной до 1900 г. ([225], т. I, стр. 335—347). Декарт в 1639 г. сталкивается с той же кривой в связи с «проблемой Дебона» и описывает ее, не упоминая о логарифмах ([64a], т. II, стр. 514—517). Как бы то ни было, в 1667 г. Дж. Грегори ([104a], воспроизведено в [126 a], стр. 407—462) дает, ни на кого не ссылаясь, правило для вычисления площади гиперболических сегментов посредством логарифмов (десятичных). Это требует теоретических знаний о связи между квадратурой гиперболы и логарифмами и одновременно знания связи между «натуральными» и «десятичными» логарифмами. Не относятся ли обвинения Гюйгенса, оспаривающего приоритет результатов Грегори ([126b], т. VI, стр. 228—230), только к этому последнему пункту? Это так же не ясно для нас, как и для его современников. Последние, во всяком случае, имели уже ясное представление о том, что существование связи между логарифмами и квадратурой гиперболы было уже давно известно, хотя они могли сослаться лишь на намеки, содержащиеся в письмах, или книгу Григория де Сент-Винцента.

В 1668 г., когда Броункер дал (с тщательным доказательством сходимости, проведенным путем сравнения с геометрической прогрессией) ряды для $\log 2$ и $\log \frac{5}{4}$ ([29], воспроизведено в [156], т. I, стр. 213—218), он представил их как выражения сегментов соответствующих гипербол и добавил, что полученные им числовые значения находятся «в том же отношении, что и логарифмы» 2 и $^5/_4$. Однако в том же году в работе Меркатора ([158], воспроизведено в [156], т. I, стр. 167—196), или более точно в изложении работы Меркатора, сделанном Валлисом ([240 b], воспроизведено в [156], т. I, стр. 219—226), язык меняется. Так как сегменты гиперболы пропорциональны логарифмам, а, как хорошо известно, логарифмы определены в силу их характерных свойств с точностью до постоянного множителя, ничто не мешает рассматривать сегменты гиперболы как логарифмы, называемые «натуральными», или гиперболическими (в противоположность «искусственным», или «десятичным», логарифмам). Как только был сделан этот последний шаг (чему способствовал ряд для $\log(1+x)$, данный Меркатором), была получена теорема $\log x = \int \frac{dx}{x}$ с точностью до обозначений, или, скорее, она превратилась в определение. Какое можно вывести иное заключение, кроме того, что открытие произошло в результате почти неуловимых переходов и что спор по этому поводу о приоритете был бы равносилен спору между скрипкой и тромбоном относительно точного момента появления определенной мелодии в симфонии? По правде говоря, в то время когда другие открытия в математике, как, например, теория чисел Ферма и динамика Ньютона, носят печать индивидуальности, развитие исчисления бесконечно малых в XVII в. напоминает постепенное и неизбежное развертывание симфонии, в которой «Zeitgeist», являясь одновременно композитором и дирижером, отбивает музыкальный ритм. Каждый выполняет отдельную роль в своем музыкальном тембре, но никто не является создателем той темы, которая почти безнадежно запутана введением сложного контрапункта.

Поэтому история исчисления бесконечно малых должна быть написана в форме тематического анализа. Мы ограничимся здесь суммарным изложением, которое ни в какой степени не претендует на безупречную точность [1]). Вот, во всяком случае,

---

[1]) В дальнейшем изложении, если мы будем приписывать результат определенному автору и определенной дате, это будет означать только то, что этот результат был ему известен именно в данное время (что, чаще всего, возможно проверить по подлинникам). Однако мы не можем быть абсолютно уверены в том, что он не знал его раньше и что он не получил его от других. Мы также не хотим утверждать, что этот же результат не был независимо получен другими, возможно, раньше или позднее данного результата.

основные темы, которые выступают даже при поверхностном исследовании.

А) Тема *математической строгости,* составляющая контраст с темой о *бесконечно малых, неделимых* и *дифференциалах.* Мы видели, что обе темы занимают видное место у Архимеда; первая — во всех его трудах, вторая — в одном только трактате «О методе», который не был известен в XVII в. Так что если вторая тема была заимствована, а не вновь открыта, то передача могла произойти только благодаря философским традициям. Принцип бесконечно малых появляется к тому же в двух различных формах в зависимости от того, имеется ли в виду «дифференцирование» или «интегрирование». Что касается последнего, то пусть требуется вычислить площадь плоской фигуры; ее делят на бесконечное число бесконечно малых параллельных полосок с помощью бесконечного числа равноотстоящих параллельных прямых. Каждая из этих полосок является прямоугольником (хотя ни одна из конечных полосок, полученных с помощью двух параллельных, находящихся на конечном расстоянии, не является прямоугольником). Таким же образом твердое тело вращения будет разложено плоскостями, перпендикулярными к оси, на бесконечное число цилиндров с одинаковой бесконечно малой высотой [1]). Аналогичный способ выражения можно употребить, когда речь идет о разложении площади на треугольники посредством пересекающихся прямых, или рассуждая о длине дуги кривой как о многоугольнике с бесконечным числом сторон и т. д. Несомненно, что те немногие математики, которые полностью усвоили методы Архимеда, как-то Ферма, Паскаль, Гюйгенс, Барроу, не испытывали никаких затруднений, когда надо было заменять в каждом отдельном случае употребление этого языка точными доказательствами; они поэтому часто отмечают, что этот язык служит только для сокращений. *«Было бы легко,* — говорит Ферма, — *дать доказательство в духе Архимеда... достаточно предупредить об этом раз и навсегда, чтобы избежать постоянных повторений...»* ([82], т. I, стр. 257); то же говорит и Паскаль: *«Итак, один из этих методов отличается от другого только способом выражения»* ([175], т. VIII, стр. 352) [2]); и Барроу со свойственными ему лукавством и лаконичностью: *«Longior discursus apagogicus adhiberi possit, sed quorsum?»*

---

[1]) См., например, изложение Паскаля в письме к Каркави ([175], т. VIII, стр. 334—384). Отметим, что благодаря обаянию его замечательного языка Паскалю до такой степени удается создать иллюзию совершенной ясности, что один из современных издателей приходит в экстаз от «тщательности, ясности и точности доказательства»!

[2]) Но в письме Паскаля к господину A. D. D. S. указывается: *«...не останавливаясь ни на методе движений, ни на методе неделимых, но следуя методам древних, для того чтобы все было бы прочным и бесспорным»* ([175], т. VIII, стр. 256).

(можно было бы удлинить апагогическим рассуждением, но для чего?) ([136], стр. 251). По-видимому, Ферма остерегается выдвигать какое бы то ни было утверждение, которого он не мог бы обосновать таким образом, и тем самым обрекает себя на отказ от формулировки общих результатов иначе как посредством намеков или под видом «метода». Барроу, хотя и очень осторожный, был, однако, менее щепетильным. Что касается большинства их современников, самое меньшее, что можно о них сказать, это то, что строгость не является их основной заботой и что для них имя Архимеда часто не более чем вывеска, рекламирующая, бесспорно, дорогой товар, ответственность за который, однако, Архимед, конечно, не взял бы на себя. С еще большим основанием это относится к дифференцированию. Если кривая, когда речь идет о ее спрямлении, уподобляется многоугольнику с бесконечным числом сторон, то здесь «бесконечно малая» дуга кривой уподобляется «бесконечно малому» отрезку прямой, либо хорде, либо отрезку касательной, существование которой допускается. Наконец, может рассматриваться «бесконечно малый» интервал времени, в течение которого (когда принимается во внимание лишь скорость) движение «является» равномерным. Декарт, желая определить касательную к циклоиде, к которой нельзя применить его общее правило, с еще большей смелостью уподобляет кривые, катящиеся одна по другой, многоугольникам, для того чтобы вывести, что «в бесконечно малом» движение можно уподобить вращению вокруг точки касания ([64a], т. II, стр. 307—338). И здесь также такой математик, как Ферма, строит на подобных соображениях свои правила для определения касательных, а также максимумов и минимумов и оказывается в состоянии обосновать их в каждом отдельном случае [1]) ([82], т. I, стр. 133—179; французский перевод, т. III, стр. 121—156; ср. также [82], т. II и далее, особенно стр. 154—162 и supplément aux Oeuvris, стр. 72—86). Барроу дает для большей части своих теорем точные доказательства по способу древних, исходя из простых предположений о монотонности и выпуклости. Но теперь уже не годилось вливать молодое вино в старые меха. Как мы теперь знаем, все это вело к созданию понятия предела; но если можно найти у Паскаля, Ньютона и др. формулировки, которые очень напоминают наши современные определения, то стоит только рассмотреть их в контекстах, чтобы стали заметны

---

[1]) Ферма мог строго обосновать свое правило для нахождения касательных и экстремумов в том случае, когда кривая задана уравнением $y = P_n(x)$, где $P_n(x)$ — многочлен. В письме к Мерсенну в 1643 г. ([82], supplément aux tt. I—IV par M. C. de Waard, Paris, 1922, стр. 123—125) он изложил такое обоснование. См. [9]*, [11]*. — *Прим. перев.*

непреодолимые препятствия, которые мешали строгому изложению. Когда начиная с XVIII в. математики, заботясь о ясности, хотели навести некоторый порядок в хаотическом нагромождении своих богатств, подобные указания, встречающиеся в трудах их предшественников, были для них в высшей степени ценными. Даламбер, например, объясняет, что в дифференцировании нет ничего, кроме понятия предела, которое он точно определяет [56 b]. Можно думать, что им руководили соображения Ньютона о «первых и последних отношениях исчезающих величин» [167 b]. Но поскольку мы говорим о XVII в., необходимо признать, что путь к современному анализу был открыт только тогда, когда Ньютон и Лейбниц, повернувшись спиной к прошлому, решили временно искать оправдание новым методам не в строгих доказательствах, а в обилии результатов и их взаимной согласованности.

В) *Кинематика.* Уже Архимед дал кинематическое определение своей спирали. В средние века развивается (но, за неимением у нас доказательств противного, без инфинитезимальных рассмотрений) в весьма зачаточной форме теория изменения величин как функций времени и их графическое представление, истоки которого, возможно, надо искать в вавилонской астрономии. Но для математики XVII в. является чрезвычайно важным тот факт, что с самого своего возникновения проблемы дифференцирования были связаны не только с касательными, но и со скоростями. Галилей [93a и b], изучая закон изменения скорости при свободном падении тела (после получения им закона изменения пути $x=at^2$ в опытах с наклонной плоскостью), не применяет, однако, дифференцирования. Сначала он выдвигает разные гипотезы о скорости $v=\frac{dx}{dt}=cx$ ([93b], т. VIII, стр. 203), затем $v=ct$ (там же, стр. 208) и старается найти закон пути рассуждениями, довольно туманными, о графике скорости как функции времени. Так же рассуждает и Декарт (в 1618 г.) о законе $v=ct$, но, однако, как истый математик и с ясностью, допускаемой языком неделимых[1]) ([64a], т. X, стр. 75—78). У обоих график скорости (в частности, прямая линия) играет главную роль, и невольно задаешь себе вопрос, до какой степени им обоим была ясна пропорциональность между пройденным путем и площадями, заключенными между осью времени и

[1]) Декарт даже добавляет любопытное геометрическое рассуждение, с помощью которого он выводит закон $x=at^3$ из гипотезы $\frac{dv}{dt}=ct$. Зато интересно наблюдать, как десять лет спустя он сам запутывается в своих записках и переписывает употребляемое Мерсенном неточное рассуждение по этому же вопросу, где график скорости как функции времени смешивается с её графиком как функции от пройденного пути ([64a], т. I, стр. 71).

кривой скоростей. Здесь трудно что-либо утверждать, хотя язык Декарта как будто предполагает знакомство с этим фактом (который некоторые историки считают известным уже в средние века [247]), а у Галилея мы не находим о нем ясных упоминаний. В 1670 г. ([13b], стр. 171) Барроу дает этому факту точную формулировку. Возможно, в то время она ни для кого не представляла ничего нового, и сам Барроу не выдает ее за новое открытие; но и для этого результата, как и для любого другого, не следует стараться определить точную дату. Что касается гипотезы $v = cx$, также рассмотренной Галилеем, то он ограничивается (цитированная работа) доказательством ее невозможности (или, выражаясь современным языком, доказательством того, что уравнение $\frac{dx}{dt} = cx$ не имеет ненулевого решения, которое обращается в нуль при $t = 0$) при помощи туманного рассуждения, развить которое впоследствии взял на себя труд Ферма ([82], т. II, стр. 267—276) и которое сводится примерно к тому, что $2x$ является решением одновременно с $x$, $x \neq 0$, что противоречит физически очевидной единственности решения.

Но именно этот закон $\frac{dx}{dt} = cx$ привел Непера к введению его логарифмов, которым он дает кинематическое определение [165]. В наших обозначениях оно записывается следующим образом: если по двум прямым перемещаются две точки по закону $\frac{dx}{dt} = a$, $x_0 = 0$, $\frac{dy}{dt} = -\frac{ay}{r}$, $y_0 = r$, то мы говорим, что $x$ есть «логарифм» $y$ (в современных обозначениях: $x = r\log\left(\frac{r}{y}\right)$). Мы видели, что кривая решения $\frac{dy}{dx} = \frac{c}{x}$ появляется в 1639 г. у Декарта, который описывает ее кинематически ([64a], т. II, стр. 514—517); правда, он довольно презрительно относится ко всем неалгебраическим кривым, называя их «механическими» и ратуя за их исключение из геометрии. К счастью, однако, это табу, против которого значительно позднее считал необходимым сильно возражать Лейбниц, не соблюдалось ни современниками Декарта, ни им самим.

Циклоида и логарифмическая спираль привлекают к себе внимание математиков, и их ревностное изучение оказывает могучее содействие взаимному проникновению геометрических и кинематических методов. Принцип сложения движений, точнее сложения скоростей, был положен в основу теории движения снарядов, изложенной Галилеем в 1638 г. в «Discorsi», шедевре, созданном им на склоне лет ([93b], т. VIII, стр. 268—313; рус. перев. стр. 418—486). В этой теории неявно содержалось новое определение касательной к параболе. Галилей ясно этого не выражает; в противоположность ему Торичелли настаивает на этом пункте ([225], т. III, стр. 103—159) и основывает на том же принципе общий метод определения касательных к кривым, поддающимся кинематическому определению. Правда, в этом отношении его на несколько лет опередил Роберваль ([191], стр. 3—67), который по его словам, пришел к этому же при изучении циклоиды. Та же задача о построении касательной к циклоиде предоставила Ферма случай доказать мощь своего метода дифференцирования ([82], т. I, стр. 162—165), в то время как Декарт, будучи не в состоянии применить к ней свой алгебраический метод, изобрел по этому случаю мгновенный центр вращения ([64a], т. II, стр. 307—338).

По мере развития исчисления бесконечно малых кинематика перестает быть обособленной наукой. Становится все более очевидным, что вопреки Декарту алгебраические кривые и алгебраические функции, если рассматривать их с «локальной» точки зрения, т. е. с позиций исчисления бесконечно малых, ничем не отличаются от других, гораздо более общих. Функции и кривые, определенные кинематически, являются такими же функциями и кривыми, как и другие, и поддаются исследованию теми же методами; переменное «время» является параметром, временной аспект которого — только чистый оборот речи. Так, у Гюйгенса, даже когда речь идет о механике, преобладает геометрия ([126b], т. XVIII), а Лейбниц в своем исчислении не отводит времени какой-либо привилегированной роли. Наоборот, Барроу думал сделать из одновременных изменений различных величин как функций универсальной независимой переменной, принятой за «время», основу исчисления бесконечно малых, изложенного геометрически. Эта идея, появившаяся у него во время поисков метода сложения движений, существование которого ему было известно лишь понаслышке, подробно изложена с помощью очень ясной и обобщенной терминологии в первых трех томах его «Lectiones Geometrical» [13b]. Он, например, тщательно доказывает, что если подвижная точка имеет в качестве проекций на две взаимно перпендикулярные оси $AY$, $AZ$ две подвижные точки, из которых одна движется с постоянной скоростью $a$, а другая — со скоростью $v$, возрастающей во времени, то траектория будет иметь касательную с наклоном, равным $\frac{v}{a}$, и будет вогнута в направлении возрастания $Z$. В своих «Lectiones» он развивает эти идеи довольно глубоко и, не без некоторого кокетства, придает всему изложению, от начала до конца, геометрическую форму, настолько избегая алгебры, насколько это было возможно. Все же возможно ([16a], т. I, стр. 431—453) увидеть у Барроу и у Якова Бернулли эквивалент значительной части исчисления бесконечно малых Ньютона и Лейбница. Такие же идеи служат отправной точкой и Ньютону ([167a], т. I, стр. 201—244, и [167b]); его «флюенты» являются различными величинами, функциями «времени», которое есть не что иное, как универсальный параметр, а «флюксии» — производные по «времени». Возможность при надобности изменить параметр, которую признает Ньютон, также имеется и в методе Барроу, хотя последний пользуется ею с меньшей гибкостью [1]). Принятый Ньютоном язык флюксий, усвоенный также английскими математиками следующего века в силу авторитета его создателя, представляет, таким образом, последнее достижение кинематических методов рассматриваемого нами периода, роль которых в действительности была уже закончена.

C) *Алгебраическая геометрия.* Этот вопрос чужд нашей теме и вводится лишь в связи с тем, что Декарт, в духе своей системы, пытался сделать алгебраические кривые исключительным объектом геометрии ([64a], т. VI, стр. 390); поэтому для определения касательных он дает алгебраико-геометрический метод, а не дифференциальный, как это делает Ферма. Результаты, оставленные нам в наследство древними, относящиеся к пересечению прямой линии и конических сечений, рассуждения самого Декарта о пересечении двух конических сечений и связанные с этим проблемы естественно должны были навести его на мысль о том, чтобы принять в качестве критерия касания совпадение двух точек пересечения. Сейчас нам известно, что для алгебраической геометрии это вполне корректный критерий, который обладает такой степенью общности, что не зависит от понятия предела и от природы «основного поля». Вначале Декарт применяет его мало удобным способом; он ищет условия совпадения двух точек пересечений изучаемой кривой и окружности с центром на $Ox$ ([64a], т. VI, стр. 413—424). Его ученики, Ван-Скоутен и Гудде, заменяют окружность прямой линией и получают в форме $-\frac{F'_x}{F'_y}$ наклон касательной к кривой $F(x, y)=0$, причем «производ-

---

[1]) Об отношениях Барроу и Ньютона см. [174]. В письме, написанном в 1663 г. (ср. [190], т. II, стр. 32—33), Барроу говорит о своих уже давних рассуждениях о сложении движений, которые привели его к открытию весьма общей теоремы о касательных. Если это та теорема, которая помещена в его «Lectiones Geometrical», лекция X ([13b], стр. 247), то она действительно настолько обобщена, что содержит в виде частного случая все, что было до сих пор сделано в этой области. С другой стороны, Ньютон был учеником Барроу в 1664 и 1665 гг., однако он говорит, что самостоятельно получил свое правило, позволяющее вывести из соотношения между «флюентами» соотношение между их «флюксиями». Вполне возможно, что Ньютон, обучаясь у Барроу, усвоил основную идею о величинах, изменяющихся как функции времени, и скоростях их изменения; его размышления о динамике (к которым Барроу не имел никакого отношения) вскоре помогли уточнить эти понятия.

ные многочлены» $F'_x$ и $F'_y$ определены на основании формального правила их образования ([144d], т. I, стр. 147—344, и [64b], стр. 234—237); к этому же времени и де-Слюз получает этот результат ([144d], стр. 232—234). Само собой разумеется, что отмеченные здесь различия, которыми только и можно придать смысл спору между Декартом и Ферма, не могли быть замечены математиками XVII в. Мы упомянули о них, чтобы пролить свет на один из наиболее любопытных эпизодов изучаемой нами истории и чтобы констатировать немедленно последовавшее за ним полное исчезновение алгебраических методов, временно поглощенных дифференциальными методами.

D) *Классификация задач.* Эта тема, как мы уже говорили, по-видимому, отсутствует в работах Архимеда, которому было довольно безразлично, как решать задачу — непосредственно или приведением ее к уже рассмотренной задаче. В XVII в. задачи дифференцирования появляются сначала в трех различных аспектах: определение скоростей, касательных, максимумов и минимумов. В отношении последних Кеплер [130a и b] замечает, что изменение функции происходит особенно медленно вблизи максимума (замечание, которое мы находим уже у Орема [247], стр. 141, и даже у вавилонских астрономов). В связи с этими задачами Ферма около 1630 г. ([82], т. II, стр. 71 и 113—179) излагает свой метод бесконечно малых, что на современном языке в общем сводится к способу нахождения двух первых членов (постоянный член и член первого порядка) ряда Тейлора и записи того, что в случае экстремума второй член равен нулю. Исходя из этого, Ферма применяет этот метод и для определения касательных и даже для нахождения точек перегиба. Если принять во внимание то, что говорилось выше о кинематике, будет ясно, что унификация трех типов задач, относящихся к первой производной, была осуществлена уже очень рано. Что касается задач, относящихся ко второй производной, они возникают гораздо позднее, главным образом в работах Гюйгенса об эволюте кривой (опубликованной в 1673 г. в его «Horologium Oscillatorium» [126b], т. XVIII). К этому времени Ньютон со своими флюксиями уже располагал всеми необходимыми аналитическими средствами для разрешения подобных задач. Несмотря на весь талант геометра, вложенный в них Гюйгенсом (его исследованиями впоследствии воспользовалась дифференциальная геометрия в период своего возникновения), эти задачи в рассматриваемый период пригодились только на то, чтобы показать силу методов нового анализа.

Что касается интегрирования, то оно появилось у греков как средство вычисления площадей, объемов, моментов, длины окружности и площадей поверхности сферических сегментов. XVII в. добавил к этому спрямление кривых, вычисление площади поверхностей вращения и (в работах Гюйгенса о физическом маятнике [126b], т. XVIII) вычисление моментов инерции. Вначале важно было установить связь между всеми этими задачами. Первый громадный шаг вперед в отношении определения площадей и объемов был сделан Кавальери в его «Геометрии неделимых» [43a]. В ней он сформулировал и полагал, что доказал следующий принцип: если две плоские фигуры таковы, что всякая прямая, параллельная заданному направлению, рассекает их по отрезкам, длины которых находятся в постоянном отношении, тогда и площади этих фигур будут находиться в том же отношении. Аналогичный принцип действует для объемов тел, рассеченных плоскостями, параллельными неподвижной плоскости, и соответственно плоских сечений, у которых площади будут иметь постоянное отношение. Не исключена возможность, что эти принципы были подсказаны Кавальери теоремами Евклида (или скорее Евдокса) об отношении объемов пирамид одной высоты и что, прежде чем их обобщить, он проверил их справедливость на большом числе примеров, взятых у Архимеда. Он «оправдывает» их, употребляя язык, о законности которого спрашивает Галилея в письме 1621 г., тогда как в 1622 г. он применяет этот язык без всяких колебаний ([93b], т. XIII, стр. 81—86). Вот сущность его метода: пусть даны две площади — одна $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$, другая $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant g(x)$. Суммы ординат $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{ka}{n}\right)$, $\sum\limits_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{ka}{n}\right)$ одна к другой находятся в отношении, которое для достаточно большого $n$ может быть сделано как угодно близким к отношению двух площадей, что нетрудно было бы показать для монотонных $f$ и $g$ с помощью метода исчерпывания. Кавальери переходит к пределу, полагая $n = \infty$, и говорит о «сумме всех ординат» первой кривой, которая к аналогичной сумме для второй кривой находится в отношении, в точности равном отношению площадей; то же имеет место и для объемов. Этот язык затем получает повсеместное признание даже со стороны таких авторов, как Ферма [1]), который ясно видит скрытые за ним точные факты. Правда, впоследствии

[1]) Ферма не пользовался языком неделимых. Он первый после Архимеда рассматривал настоящие интегральные суммы и сделал большой шаг вперед по сравнению со всеми своими предшественниками, введя разбиение промежутка интегрирования на неравные части. С помощью этого метода и двойного предельного перехода он вычислил неограниченные площади, которые на современном языке можно записать так:

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha},$$

$\alpha > 1$, рациональное. — *Прим. перев.*

многие математики, как, например, Роберваль ([191], стр. 3—67) и Паскаль ([175], т. VIII, стр. 334—384), предпочитают смотреть на ординаты кривой, из которых складывается «сумма», не как на отрезки прямых, как у Кавальери, но как на прямоугольники одной и той же бесконечно малой высоты, что не является большим прогрессом с точки зрения строгости (что бы ни говорил об этом Роберваль), но, может быть, сдерживает воображение, не давая ему слишком легко сойти с правильного пути. Во всяком случае, если речь идет только об отношениях, то выражение «сумма всех ординат» кривой $y = f(x)$, или, сокращенно, «все ординаты» кривой, в конечном итоге, как это ясно выступает в работах Паскаля, является точным эквивалентом $\int y\,dx$ Лейбница. Принятая Кавальери терминология неизбежно влечет за собой сформулированные выше принципы, а из них вытекают следствия, которые мы выразим в современных обозначениях, условившись, что $\int f\,dx$ будет обозначать только площадь, заключенную между $Ox$ и кривой $y = f(x)$. Прежде всего площадь всякой плоской фигуры, высекающей на каждой прямой $x = \text{const}$ отрезки, сумма длин которых равна $f(x)$, равна $\int f\,dx$. Это же имеет место для объема тела, высекающего на каждой плоскости $x = \text{const}$ фигуру с площадью, равной $f(x)$. Более того, $\int f\,dx$ «линейно зависит» от $f$, т. е.

$$\int (f+g)\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx, \quad \int cf\,dx = c\int f\,dx.$$

В частности, все задачи о вычислении площадей и объемов приведены к квадратурам, т. е. к вычислениям площадей вида $\int f\,dx$, и что может быть более ново и более важно, рассматриваются как эквивалентные две задачи, зависящие от одной и той же квадратуры, причем в каждом отдельном случае имеется возможность решить, так ли это. Греческие математики никогда не достигали (или, может быть, никогда не разрешали себе достигать) такой степени «абстракции». Так, Кавальери ([43a], стр. 133) без всякого труда «доказывает», что два подобных объема находятся между собой в отношении, равном кубу отношения подобных сторон, тогда как Архимед формулирует этот вывод для квадрик вращения и их сегментов только в терминах теории рассматриваемых им тел ([3b], т. I, стр. 258). Но чтобы прийти к этому, необходимо было выбросить строгость Архимеда за борт.

Итак, математики получили по крайней мере временно средство классификации проблем в зависимости от действительных или кажущихся трудностей, представляемых квадратурами, к которым они сводились. В качестве модели служила алгебра того времени, поскольку в алгебре, так же как и в алгебраических проблемах, возникавших в геометрии, алгебраисты XVI и XVII вв. в противоположность древним грекам, которые интересовались только решениями задач, начали обращать внимание главным образом на их классификацию в зависимости от характера средств, которые могли служить для их решения, и тем самым явились предвестниками современной теории алгебраического расширения. Они не только приступили к первой классификации проблем в зависимости от степени уравнения, к которому они сводятся, но и поставили перед собой трудный вопрос о возможности разрешить всякое уравнение посредством радикалов (в которую некоторые уже не верили) и т. д. Они также ставили перед собой задачу привести к геометрической типичной форме все проблемы заданной степени. В интегральном исчислении принципы Кавальери также показывают, что многие задачи, решенные Архимедом, приводят к квадратурам $\int x^n\,dx$ для $n = 1, 2, 3$. Кавальери придумал оригинальный метод, чтобы осуществить эту квадратуру для сколь угодно больших значений $n$ (метод сводится к замечанию, что $\int\limits_0^{2a} x^n\,dx = c_n a^{n+1}$ в силу принципа однородности, и к соотношению

$$\int\limits_0^{2a} x^n\,dx = \int\limits_{-a}^{a} (a+x)^n\,dx = \int\limits_0^{a} [(a+x)^n + (a-x)^n]\,dx,$$

откуда путем простых преобразований получается рекуррентное соотношение для $c_n$ ([43a], стр. 159, и [43b], стр. 269—273)). Но уже Ферма достиг гораздо большего, доказав сначала (до 1636 г.), что $\int\limits_0^{a} x^n\,dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$ для целого положительного $n$ ([82], т. II, стр. 83), посредством формулы для сумм степеней первых $N$ целых чисел (метод, заимствованный из квадратуры спирали Архимеда) и распространив эту формулу на случай произвольного рационального $n \neq -1$ ([82], т. I, стр. 195—198). Он изложил доказательство этого результата (сообщенного Кавальери в 1644 г.) лишь значительно позже, уже после чтения трудов Паскаля по интегрированию[1]) ([82], т. I, стр. 255—288; французский перевод, т. III, стр. 216—240).

---

[1]) Замечательно, что Ферма, обычно такой щепетильный в приложениях своих общих результатов, пользуется свойством аддитивности интеграла, ни словом его не оправдывая. Основывался ли он на неявно допускаемой

Эти результаты вместе с соображениями геометрического порядка, употребляемыми вместо замены переменных и интегрирования по частям, позволяли уже решать большое количество задач, сводящихся к элементарным квадратурам. Вне этого прежде всего мы сталкиваемся с задачами квадратуры круга и квадратуры гиперболы. Так как в рассматриваемую эпоху обычно речь шла о «неопределенных интегралах», решение этих проблем в современной терминологии дается соответственно обратными круговыми функциями и логарифмом. Первые были выражены геометрически, и мы видим, как логарифмы постепенно проникали в анализ. Эти квадратуры явились предметом многочисленных работ Григория де Сент-Винцента [103], Гюйгенса ([126b], т. XI, стр. 271—337, и т. XII, стр. 91—180), Валлиса ([240a], т. I, стр. 355—478), Грегори [104a]. Первый из них полагал, что он разрешил квадратуру круга, последний — что доказал трансцендентность $\pi$; все они работали над развитием методов бесконечного приближения круговых функций и логарифмов, одни — с теоретическим уклоном, другие — с вычислительным. Все эти изыскания вскоре привели в работах Ньютона ([167a], т. I, стр. 3—26 и 29—199), Меркатора ([158], воспроизводится в [156], т. I, стр. 167—196), Грегори [104d], затем Лейбница [144d] к общим методам разложения в ряды. Во всяком случае, у математиков постепенно возникает убеждение в «невозможности» таких квадратур, т. е. в неалгебраическом характере определяемых ими функций; и в то же время они усваивают привычку считать проблему решенной, насколько она допускает это по своей природе, если она сведена к одной из «невозможных» квадратур. Так обстоит дело, например, с задачами, относящимися к циклоиде, которые решались посредством круговых функций, и к спрямлению параболы, сводящейся к квадратуре гиперболы.

Задачи спрямления, из которых мы только что упомянули две наиболее известные, имели особое значение, так как они служили естественным геометрическим переходом между дифференцированием, которое они предполагают, и интегрированием, к которому они приводят; к ним можно присоединить задачи определения площадей поверхностей вращения. Античные математики рассмотрели только случаи окружности и сферы. В XVII в. эти вопросы возникают довольно поздно; по-видимому, непреодолимая для данной эпохи трудность задачи спрямления эллипса (рассматриваемого как наиболее простая кривая после окружности) обескуражила математиков. Некоторый доступ к этим проблемам дают кинематические методы, что позволило

---

кусочной монотонности изучаемых им функций, для которых аддитивность, действительно, нетрудно доказать посредством метода исчерпывания, или он уже, наперекор самому себе, был увлечен языком, которым пользовался?

Робервалю ([191], стр. 363—399) и Торичелли ([225], т. III, стр. 103—159) получить между 1640—1645 гг. результаты относительно дуг спиралей; но только к 1660 г. эти проблемы оказались в центре внимания. В 1658 г. спрямление циклоиды было получено Реном ([240], т. I, стр. 533—541); немного позднее кривая $y^3 = ax^2$ была спрямлена различными учеными ([240a], т. I, стр. 551—553; [64b], т. I, стр. 517—520; [82], т. I, стр. 211—255; французский перевод, т. III, стр. 181—215). Некоторые авторы также ([82], т. I, стр. 199; [126b], т. II, стр. 334) сводили спрямление параболы к квадратуре гиперболы (т. е. к алгебраико-логарифмической функции). Последний пример особенно важен, так как является частным случаем общего принципа, по которому спрямление кривой $y = f(x)$ есть не что иное, как квадратура $y = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$; Эйра выводит ее, следуя именно этому принципу. Очень интересно также проследить за теми попытками, которые имеются у стареющего Ферма в работе о кривой $y^3 = ax^2$ ([82], т. I, стр. 211—255; французский перевод, т. III, стр. 181—215); с кривой $y = f(x)$, имеющей дугу $s = g(x)$, он ассоциирует кривую $y = g(x)$ и определяет касательную к последней, исходя из касательной к первой (говоря современным языком, он доказывает, что их наклоны $f'(x)$ и $g'(x)$ связаны соотношением $(g'(x))^2 = 1 + (f'(x))^2$). Этот результат очень близок к открытию Барроу, и стоит только скомбинировать его с результатом Эйра, что приблизительно и делает Грегори в 1668 г. ([104d], стр. 488—491), чтобы получить соотношение между касательными и квадратурами. Но Ферма утверждает только, что если для двух кривых, из которых каждая отнесена к прямоугольной системе осей, касательные в точках с одними и теми же абсциссами имеют всегда один и тот же наклон, то кривые равны, или, иначе говоря, если известна $f'(x)$, то определяется и $f(x)$ (с точностью до постоянной). Он обосновывает это утверждение туманным рассуждением, не имеющим никакой доказательной ценности. Почти через десять лет появились «Lectiones Geometrical» Барроу [13b]. С самого начала (лекция I) он выдвигает принцип, согласно которому при прямолинейном движении пути пропорциональны площадям $\int_0^t v\,dt$, заключенным между осью времени и кривой скоростей. Можно было подумать, что отсюда и из своего кинематического метода определения касательных, о котором уже упоминалось, он выведет связь между производной, понимаемой как наклон касательной, и интегралом, понимаемым как площадь. Однако он этого не делает и доказывает несколько дальше чисто геометрическим способом ([13b], лекция X, § 11, стр. 243), что если две кривые $y = f(x)$, $Y = F(x)$ такие, что ординаты $Y$ пропорциональны площадям $\int\limits_a^x y\,dx$, т. е. если $cF(x)=\int\limits_a^x f(x)\,dx$, тогда касательная к $Y=F(x)$ пересекает ось $Ox$ в точке с абсциссой $x=T$, определяемой посредством пропорции $\frac{y}{Y}=\frac{c}{T}$. Это доказательство к тому же совершенно точное, начиная с явного предположения монотонности $f(x)$; указывается также, что направление изменения $f(x)$ определяет направление вогнутости $Y=F(x)$. Заметим, что эта теорема теряется среди множества других, часто очень интересных. У непредубежденного читателя возникает искушение видеть в ней лишь средство решать при помощи квадратуры проблему $\frac{Y}{T}=\frac{f(x)}{c}$, т. е. некую проблему определения кривой, исходя из данных о касательной (или, как бы мы сказали, дифференциальное уравнение специального вида). И это тем более, что применения, которые ей дает Барроу, относятся прежде всего к задачам такого же рода (т. е. к дифференциальным уравнениям «с разделяющимися переменными»). В данном случае употребляемый Барроу геометрический язык является причиной того, что связь между дифференцированием и интегрированием, столь ясная, когда дело идет о кинематике, здесь несколько затемнена.

С другой стороны, были сформулированы различные методы для приведения одних проблем интегрирования к другим и для их «решения» или приведения их к «невозможным» задачам, которые были уже классифицированы. В своей наиболее простой геометрической форме интегрирование по частям состоит в записи площади, заключенной между $Ox$, $Oy$ и дугой монотонной кривой $y=f(x)$, соединяющей точку $(a, 0)$ оси $Ox$ с точкой $(0, b)$ оси $Oy$, как $\int\limits_0^a y\,dx=\int\limits_0 x\,dy$; и она часто употребляется неявным образом. У Паскаля ([175], т. IX, стр. 17—18) имеется следующее обобщение, еще более завуалированное: пусть $f(x)$ определена, как и выше, и пусть $g(x)$ есть функция $\geqslant 0$, а $G(x)=\int\limits_0^x g(x)\,dx$, тогда имеем $\int\limits_0^a yg(x)\,dx=\int\limits_0^b G(x)\,dy$, что он искусно доказывает, определяя двумя способами объем тела $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant f(x)$, $0\leqslant z\leqslant g(x)$. Частный случай $(x)=x^n$, $G(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}$ играет важную роль как у Паскаля ([175], т. IX, стр. 19—21), так и у Ферма ([82], т. I, стр. 271). Последний (работа которого носит знаменательное название «Трансмутация и исправление уравнений кривых и их различные применения для сравнения криволинейных площадей между собой и с прямолинейными площадями...») его не доказывает, так как, вероятно, считает бесполезным повторять то, что уже было опубликовано Паскалем. Эти теоремы о «трансмутациях», в которых мы бы усмотрели комбинацию интегрирования по частям и замены переменных, в какой-то степени заменяют эту последнюю, которая появилась значительно позднее. Действительно, введение замены переменных противоречило бы характеру мышления того времени, еще слишком геометрического и в очень малой степени аналитического, чтобы разрешить себе пользоваться переменными, кроме тех, которые обусловливаются фигурой, т. е. одной или другой координатой (или иногда полярными координатами), а затем дугой кривой. Так, мы находим у Паскаля ([175], т. IX, стр. 60—76) результаты, которые, в современных обозначениях, если положить $x = \cos t$, $y = \sin t$, для отдельных функций $f(x)$ имеют вид

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(x)y\,dt,$$

а у Грегори ([104d], стр. 489) для кривой $y = f(x)$ и ее дуги $s$ $\int y\,ds = \int z\,dx$ при $z = y\sqrt{1+y'^2}$. Только в 1669 г. Барроу удается получить общую теорему замены переменных ([13b], стр. 298—299). Его формулировка, как всегда геометрическая, сводится к следующему: пусть $x$ и $y$ связаны однородным соотношением и пусть $p$ есть наклон графика этого соотношения в точке $(x, y)$; тогда, если функции $f(x)$, $g(y)$ таковы, что $f(x)/g(y) = p$ для всяких пар соответствующих величин $(x, y)$, то площади $\int f(x)\,dx$, $\int g(y)\,dy$, заключенные между соответствующими пределами, будут равны. Обратно, если эти площади всегда равны (неявно подразумевается, что $f$ и $g$ имеют постоянные знаки), то $p = f(x)/g(y)$. Обратное предложение, естественно, дает возможность применить теорему для решения дифференциальных уравнений («с разделяющимися переменными»). Но Барроу помещает эту теорему только в приложении (лекция XII, приложение III, теорема IV), где, отмечая, что многие из его предшествующих результатов являются лишь частными случаями, он выражает сожаление, что открыл ее слишком поздно для того, чтобы дать ей большее применение.

Итак, к 1670 г. мы имеем следующую картину. Математики научились трактовать единообразными способами проблемы, связанные с первой производной, а Гюйгенс изучает геометрическим путем вопросы, связанные со второй производной. Все проблемы интегрирования они умеют уже сводить к квадратурам; они владеют разнообразной техникой, имеющей геометрический аспект, для приведения одних квадратур к другим в случае их недостаточной классификации, и с этих позиций они привыкают обращаться с круговыми и логарифмической функциями. Они подошли к пониманию связи между дифференцированием и интегрированием и начали изучать «обратные задачи на касательные», как называли в то время задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям первого порядка. Сенсационное открытие Меркатором ряда $\log(1+x) = -\sum_{1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n}$ породило новые возможности применения рядов, и главным образом степенных рядов, к так называемым «невозможным» проблемам. Но число математиков в это время странным образом убывает. Барроу оставляет кафедру профессора, чтобы стать проповедником. Если не считать Гюйгенса (который уже издал почти все свои труды по математике и получил все основные результаты, изложенные в книге «Horologium Oscillatorium» ([126b], т. XVIII), которую он окончательно редактирует), то активными остаются только Ньютон в Кембридже и Дж. Грегори, уединившийся в Абердине, к которым в скором времени со всем пылом неофита присоединяется и Лейбниц. Все трое: Ньютон уже с 1665 г., Дж. Грегори со времени опубликования открытия Меркатора в 1668 г., Лейбниц приблизительно с 1673 г. — посвящают себя главным образом наиболее актуальной теме эпохи — изучению степенных рядов. Но с точки зрения классификации задач основной результат новых методов, по-видимому, состоит в сглаживании всяких различий между ними. Действительно, Ньютон, в большей степени аналитик, чем алгебраист, не колеблясь, сообщает Лейбницу в 1676 г. ([144d], стр. 224), что он может решать все дифференциальные уравнения [1]). На это Лейбниц отвечает ([144 d], стр. 248—249), что, наоборот, речь идет о том, чтобы получить решение в конечном виде каждый раз, когда это возможно, «предполагая квадратуры», а также о том, чтобы узнать, может ли всякая квадратура быть сведена к квадратурам круга и гиперболы, как это было констатировано в большинстве уже рассмотренных случаев. По этому поводу он напоминает, что Грегори полагал (как мы теперь знаем, он имел на это основания), что спрямление эллипса и гиперболы не сводится к квадратурам круга и гиперболы. Лейбниц спрашивает, в какой

---

[1]) Во время этого обмена письмами, которые не непосредственно адресуются друг другу, но официально, через секретаря Королевского общества, Ньютон излагает свой метод следующим образом: 5 *accdae* 10 *effh* 12 *i* ... ... *rrrssssssttuu* — анаграмма, в которой заключен метод решения посредством степенных рядов с неопределенными коэффициентами ([144d] стр. 224).

степени метод рядов в том виде, как его употребляет Ньютон, может разрешить этот вопрос. Ньютон со своей стороны ([144 d], стр. 209—211) сообщает, что он обладает критериями, которые он не указывает, чтобы решить, по-видимому посредством изучения рядов, вопрос о «возможности» некоторых квадратур (в конечном виде), и в качестве примера дает очень интересный ряд для интеграла $\int x^{\alpha}(1+x)^{\beta}\,dx$.

Мы видим, какой огромный шаг вперед был сделан менее чем за десять лет. Вопросы классификации уже ставятся в этих письмах в современных терминах. Один из них, поставленный Лейбницем, был разрешен в XIX в. посредством теории абелевых интегралов, другой — о возможности приведения заданного дифференциального уравнения к квадратурам — еще остается открытым, несмотря на ряд важных работ последнего времени. Такой быстрый прогресс объясняется тем, что Ньютон и Лейбниц, каждый независимо друг от друга, свели основные операции исчисления бесконечно малых к алгоритму. Достаточно записать в символике, которой пользовались один или другой, задачу квадратуры или решения дифференциального уравнения, чтобы убедиться в ее алгебраической структуре, освобожденной от геометрической оболочки. Методы «трансмутации» также записываются простыми алгебраическими терминами; проблемы классификации ставятся очень точно. В отношении математики XVII век уже был завершен.

E) *Интерполяция и исчисление разностей.* Эта тема (от которой мы не отделяем изучения биномиальных коэффициентов) возникает очень рано и продолжает привлекать внимание в течение всего века по причинам как теоретического, так и практического характера. Одной из основных задач эпохи было исчисление тригонометрических, логарифмических, навигационных таблиц, ставших необходимыми благодаря быстрому развитию географии, мореходства, теоретической и практической астрономии, физики, небесной механики. Многие из наиболее известных математиков, от Кеплера до Гюйгенса и Ньютона, вкладывают в эти науки свою долю труда или непосредственно, или путем теоретических исследований наиболее эффективных процессов приближения.

Одной из первых проблем при пользовании таблицами и даже при их составлении является проблема интерполяции. По мере возрастания точности вычислений ученые XVII в. начинают замечать, что древний способ линейной интерполяции становится несостоятельным, как только первые разности (разности между последовательными величинами таблицы) заметно отклоняются от постоянной. Мы видим, например, что Бригг ([28], гл. 13) пользуется при вычислении логарифмов разностями высшего, и даже довольно большого, порядка. Позднее мы видим, как Ньютон ([167a], т. I, стр. 271—282, и [167b], книга III, лемма 5; см. также [86]) и Дж. Грегори ([104d], стр. 119—120), действуя независимо, проводят параллельные исследования интерполяции и степенных рядов. Оба они приходят к одному и тому же с помощью различных методов: с одной стороны, к формуле интерполяции посредством многочленов, известных под именем «ньютоновых»; и с другой — к биномиальному ряду ([104d], стр. 131; [144d], стр. 180) и к основным в классическом анализе разложениям в степенные ряды ([104d]; [167a], т. I, стр. 3—26 и 271—282; [144d], стр. 179—192 и 203—225). Не приходится сомневаться в том, что эти два направления исследований влияли друг на друга и были также тесно связаны у Ньютона с открытием принципов исчисления бесконечно малых. Грегори, как и Ньютон, уделяет большое внимание вычислительной практике, составлению и употреблению таблиц, вычислению сумм числовых рядов и интегралов. В частности, хотя у них нельзя найти ни одного тщательно разработанного доказательства сходимости в духе цитированного выше доказательства лорда Броункера, оба ученых постоянно упоминают о сходимости рассматриваемых ими рядов с точки зрения их практического применения к вычислениям. Так, мы видим, как Ньютон в ответ на вопрос, поставленный Коллинзом с практической целью ([190], т. II, стр. 309—310), применяет к приближенному вычислению $\sum\limits_{p=1}^{N} \frac{1}{n+p}$ для больших значений $N$ частный случай метода суммирования, известного под именем метода Эйлера — Маклорена. Мы встречаемся очень рано также с вычислением значений функции по их разностям, употребляемым как метод практического интегрирования и даже, можно сказать, при интегрировании дифференциального уравнения. Так, в 1599 г. Райт, который должен был разрешить на основе навигационных таблиц задачу, которую мы бы записали в виде $\frac{dx}{dt} = \sec t = \frac{1}{\cos t}$, складывает значения $\sec t$ для значений дуг, взятых с интервалом в одну секунду ([249]; ср. [165b], стр. 97), естественно получая, за малыми исключениями, таблицу величин $\log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right)$. Это совпадение, замеченное уже при вычислении первых таблиц $\log \operatorname{tg} t$, осталось необъясненным вплоть до интегрирования $\sec t$, выполненного Грегори в 1668 г. ([104c] и [104d], стр. 7 и 467).

Но эти вопросы имеют также и чисто теоретический и даже арифметический аспект. Обозначим посредством $\Delta^r x_n$ последовательные разности одной и той же последовательности $(x_n)_{n \in N}$, определенные рекуррентным способом посредством соотношений

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n, \quad \Delta^r x_n = \Delta(\Delta^{r-1} x_n),$$

и обозначим через $S^r$ операцию, обратную $\Delta$ и ее итерациям, полагая $y_n = Sx_n$, если $y_0 = 0$, $\Delta y_n = x_n$ и $S^r x^n = S(S^{r-1} x_n)$; получаем

$$S^r x_n = \sum_{p=0}^{n-r} \binom{n-p-1}{r-1} x_p.$$

В частности, если $x_n = 1$ для любого $n$, то $Sx_n = n$, а последовательности $S^2 x_n$ и $S^3 x_n$ являются последовательностями «треугольных» и «пирамидальных» чисел, уже изученных греческими математиками; в общем случае

$$S^r x_n = \binom{n}{r} \quad \text{для} \quad n \geqslant r \quad (\text{и } S^r x_n = 0 \quad \text{для} \quad n < r).$$

С этой точки зрения такие последовательности начали рассматривать не позднее XVII в.; они появляются также в комбинаторных задачах, которые либо сами по себе, либо в связи с вероятностными задачами играли довольно большую роль у математиков XVI в., например у Ферма и Паскаля, а затем и у Лейбница. Эти же последовательности появляются в выражениях суммы $m$-х степеней первых $N$ чисел натурального ряда, вычисление которых, как мы уже видели, лежит в основе интегрирования $\int x^m\,dx$ для целого числа $m$ посредством первого метода Ферма ([82], т. II, стр. 83). Такую же процедуру применяет и Валлис в 1655 г. в своей «Arithmetica Infinitorum» ([240a], т. I, стр. 355—478), не будучи знакомым с работами (неопубликованными) Ферма и, более того, зная, по его словам, о методе неделимых только по лекциям Торичелли. Правда, Валлис, торопясь к своей цели, не задерживается на тщательных исследованиях. Как только он получает результат для нескольких последовательных чисел натурального ряда, он считает его « по индукции» верным для всякого целого $m$; корректно переходит отсюда к $m = 1/n$ для $n$ целого, затем, опять с помощью «индукции», еще более суммарной, чем первая, ко всякому рациональному $m$. Но интерес и оригинальность его работы заключаются в том, что он, отправляясь от нее, постепенно доходит до изучения «эйлерова интеграла $I(m, n) = \int_0^1 (1 - x^{1/m})^n\,dx$ (величина которого для $m$ и $n > 0$ равна $\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)/\Gamma(m+n+1)$) и других ему подобных, составляет для целых чисел $m$ и $n$ таблицу значений $1/I(m, n)$ являющейся не чем иным, как таблицей целых чисел $\binom{m+n}{n}$, и приемами, почти тождественными тем, которые употребляются сейчас для изложения теории Г-функций, приходит к бесконечному произведению для $I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4} = \left(\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right)^2$. Нетрудно к тому же сделать его метод корректным путем интегрирования по частям и очень простой замены переменных, а также путем рассмотрения $I(m, n)$ для любых действительных $m$ и $n$, о чем Валлис не мог и мечтать, но что сделалось возможным благодаря ньютонову анализу. Но, во всяком случае, проделанная Валлисом «интерполяция» от целых $\binom{m+n}{n}$ к нецелым значениям $m$ (точнее, к значениям вида $n = p/2$, где $p$ — целое нечетное) послужила точкой отправления для начинающего Ньютона ([144d], стр. 204—206). Последний вначале, исследуя частный случай $(1 - x^2)^{p/2}$, пришел к биномиальному ряду, затем к введению $x^a$ (в таком же обозначении) для действительных $a$ и нахождению производной от $x^a$ посредством биномиального ряда; при этом не делается больших усилий для получения доказательств и даже строгих определений. Кроме того, замечательным новшеством является то, что Ньютон выводит $\int x^a\,dx$ для $a \neq -1$ из выражения для производной $x^a$ ([167a], т. I, стр. 3—26, и [144d], стр. 225). И хотя Ньютон вскоре после этого овладел гораздо более общими методами разложения в степенные ряды, такими, как метод, называемый многоугольником Ньютона (для алгебраических функций) ([144d], стр. 221), и метод неопределенных коэффициентов, он неоднократно возвращается впоследствии к биномиальному ряду и его обобщениям, оказывая ему определенное предпочтение. Именно из этого ряда, по-видимому, он получил разложение $\int x^\alpha (1+x)^\beta\,dx$, о котором речь шла выше ([144d], стр. 209).

На континенте между тем идеи развивались совершенно отличным образом, причем в гораздо более абстрактном направлении. Паскаль, как и Ферма, занимался исследованием биномиальных коэффициентов (из которых он образовывал свой «арифметический треугольник») и их применением к исчислению вероятностей и к исчислению конечных разностей. Когда он приступает к интегрированию, он и туда вводит те же идеи. Как и его предшественники, применяя язык неделимых, Паскаль понимает интеграл $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ как значение отношения «суммы всех ординат кривой»

$$S\left(f\left(\frac{n}{N}\right)\right) = \sum_{0 \leqslant p \leqslant Nx} f\left(\frac{p}{N}\right)$$

к «единице» $N = \sum_{0 \leqslant p < N} 1$ для $N = \infty$ ([175], т. VIII, стр. 352—355) (когда он оставляет этот язык, чтобы воспользоваться корректным языком метода исчерпывания, под этим интегралом он понимает предел этого отношения при неограниченно увеличивающемся $N$). Но, имея в виду проблему моментов, Паскаль замечает, что, когда речь идет о дискретных массах $y$ расположенных на равных расстояниях друг от друга, вычисление общей массы сводится к операции $Sy_n$, которая была определена выше, а вычисление момента — к операции $S^2 y_n$. Аналогично он повторяет операцию $\int$ для образования того, что он называет «треугольной суммой ординат», а значит, на нашем языке находит предел суммы $N^{-2} S^2 \left(f\left(\frac{n}{N}\right)\right)$, т. е. интеграл $F_2(x) = \int_0^x F(x)\,dx$ новая итерация дает ему «пирамидальные суммы» $F_3(x) = \int_0^x F_2(x)\,dx$, т. е. пределы выражений $N^{-3} S^3 \left(f\left(\frac{n}{N}\right)\right)$.

Из контекста видно, что Паскаль останавливается на этом месте не из-за недостатка общности мыслей или языка, но лишь потому, что он рассчитывает воспользоваться только этими определениями, систематическое употребление которых составляет основу большей части его результатов. Он доказывает свойства введенных им «сумм», которые мы бы записали так:

$$F_2(x) = \int_0^x (x-u) f(u)\,du, \quad F_3(x) = \frac{1}{2} \int_0^x (x-u)^2 f(u)\,du$$

([175], т. VIII, стр. 361—367). Все это он записывает без единой формулы, но пользуясь таким прозрачным и точным языком, что его можно немедленно перевести в формулы, как мы только что это сделали. У Паскаля, как и у его предшественников, только гораздо более четко и систематично, при выборе независимой переменной (которая всегда является одной из координат или дугой кривой) неявно предполагается, что интервал интеграции разделяется на части равностоящими точками (хотя и «бесконечно близкими»). Эти точки в зависимости от обстоятельств располагаются либо на оси $Ox$, либо на оси $Oy$, либо на дуге кривой, и Паскаль старается не допускать в этом отношении никакой двусмысленности ([175], т. VIII, стр. 368—369). Замену переменных он производит на основании принципа, который сводится к тому, что площадь $\int f(x)\,dx$ может быть записана как $S(f(x_i)\Delta x_i)$ для всякого подразделения интервала интеграции на «бесконечно малые» равные или неравные интервалы $\Delta x_i$ ([175], т. IX, стр. 61—68).

Мы видим, что это уже очень близко к Лейбницу. Благодаря счастливому случаю Лейбниц, когда он захотел приобщиться к современной ему математике, встретил Гюйгенса, который тотчас же дал ему сочинения Паскаля ([144d], стр. 407—408). Он был уже подготовлен к их восприятию своими размышлениями о комбинаторном анализе и, как мы знаем, тщательно их изучил, что и нашло отражение в его собственной работе. В 1675 г. он записал данную выше теорему Паскаля в форме omn $(x\omega) = x.\mathrm{omn}\,\omega - \mathrm{omn}\,(\mathrm{omn}\,\omega)$, где omn $\omega$ является сокращенным обозначением интеграла от $\omega$, взятого от 0 до $x$, которое Лейбниц несколько дней спустя заменяет $\int \omega$ (первая буква «summa omnium $\omega$»), вводя в то же время $d$ для бесконечно малой «разности», или, как он впоследствии говорил, дифференциала ([144d], стр. 147—167). Понимая эти «разности» как величины, которые можно сравнивать между собой, но не с конечными величинами, он чаще всего принимает явно или неявно, что дифференциал $dx$ независимой переменной $x$ равен единице, $dx = 1$ (что приводит к идентификации дифференциала $dy$ с производной $\frac{dy}{dx}$), и вначале исключает его из своего обозначения интеграла, который поэтому появляется как $\int y$, а не как $\int y\,dx$. Вскоре, однако, он вводит знак дифференциала под интеграл и систематически придерживается этой записи, затем замечает инвариантный характер этой записи в отношении выбора независимой переменной, что положило конец необходимости все время помнить о сделанном выборе [1]). Лейбниц выражает явное удовлетворение, когда, приступив к изучению работ Барроу, которым до сих пор не уделял почти никакого внимания, он обнаружил, что общая теорема о замене переменных, которой Барроу придавал такое большое значение, немедленно вытекает из его собственного способа обозначений ([144d], стр. 412). Во всем этом к тому же он очень близко подходит к исчислению конечных разностей, из которого выводится его дифференциальное исчисление посредством перехода к пределу, точно обосновать который ему, конечно, было бы довольно трудно. Вследствие этого он настаивает на том, что его принципы применяются безразлично и к тому и к другому исчислению. Он определенно

---

[1]) *«Предупреждаю, чтобы остерегались отбрасывать dx — ошибка, которую часто допускают и которая препятствует продвижению вперед, так как тем самым лишает неделимые, как здесь dx, их общности, ...из которой проистекают бесчисленные трансфигурации и эквиполентности фигур»* ([144 a], т. V, стр. 233).

цитирует Паскаля, когда, например, в переписке с Иоганом Бернулли ([144a], т. III, стр. 156), обращаясь к своим первоначальным исследованиям, дает формулу исчисления конечных разностей, которая является частным случаем формулы Ньютона, и выводит из нее «переходом к пределу» формулу $y = \sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{d^n y}{dx^n} \cdot \frac{x^n}{n!}$ (где $y$ является функцией, обращающейся в нуль при $x = 0$, а $\frac{d^n y}{dx^n}$ — ее производными в точке $x$), — формулу, эквивалентную той, которую ему сообщил Бернулли ([144a], т. III, стр. 150, и [17a], т. I, стр. 125—128) и которую последний доказал последовательным интегрированием по частям. Как мы видим, эта формула очень близка к ряду Тейлора; в 1715 г. Тейлор воспроизводит именно рассуждение Лейбница о переходе к пределу, исходя из исчисления конечных разностей, чтобы получить «свой» ряд [222] [1]), к тому же не слишком его используя.

F) В описанной выше эволюции математических идей можно было заметить присутствующую в ней и возрастающую *алгебраизацию* анализа бесконечно малых, т. е. сведение его к *операционному исчислению,* оснащенному системой единообразных обозначений алгебраического характера. Как неоднократно и совершенно отчетливо указывал Лейбниц ([144a], т. V, стр. 230—233), надо было сделать для нового анализа то, что Виет в свое время сделал для теории уравнений, а Декарт — для геометрии. Чтобы осознать насущную необходимость этого, достаточно прочитать несколько страниц из Барроу; ни на одну минуту здесь нельзя обойтись без того, чтобы не иметь перед глазами фигуры, подчас очень сложной, предварительно вычерченной с кропотливой тщательностью; на 100 страниц (лекции V—XII) потребовалось не менее 180 фигур, которые и составляют основное содержание работы.

Правда, вопрос об алгебраизации не мог быть даже поставлен, прежде чем среди множества геометрических представлений не появилось некоторого единообразия. Однако Григорий де Сент-Винцент [103] уже вводил (под названием «dictus plani in

---

[1]) Для исчисления конечных разностей Тейлор мог, естественно, опираться на результаты Ньютона, содержащиеся в знаменитой лемме его «Principia» ([167b], Книга III, лемма 5) и изданные в дополненном виде в 1711 г. ([167a], т. I, стр. 271—282). Что касается идеи перехода к пределу, она кажется типичной для Лейбница; было бы трудно поверить в оригинальность Тейлора в этом вопросе, если бы мы не знали многочисленных примеров всех времен, когда ученики не имеют понятия ни о чем, кроме сочинений своих учителей и покровителей. Тейлор не цитирует ни Лейбница, ни Бернулли; но когда бушевала полемика между Ньютоном и Лейбницем, Тейлор был секретарем Королевского общества, а сэр Исаак его всемогущим президентом,

planum») некий закон композиции, сводящийся к систематическому употреблению интегралов $\int_a^b f(x) g(x) dx$, рассматриваемых как объемы тела

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x), \quad 0 \leqslant z \leqslant g(x).$$

Однако он был далек от того, чтобы сделать отсюда выводы, которые впоследствии, как мы уже видели, были получены Паскалем на основе изучения тех же тел. Валлис в 1655 г. и Паскаль в 1658 г. составили, каждый для своего употребления, языки алгебраического характера, в которых, не записывая ни единой формулы, они дают формулировки, которые можно немедленно, как только будет понят их механизм, записать в формулах интегрального исчисления. Язык Паскаля особенно ясен и точен; и если не всегда понятно, почему он отказался от применения алгебраических обозначений не только Декарта, но и Виета, все же нельзя не восхищаться его мастерством, которое могло проявиться лишь на основе совершенного владения языком.

Однако через несколько лет все радикально меняется. Ньютон первый высказывает мысль о замене всех операций геометрического характера в современном ему анализе бесконечно малых единственной аналитической операцией — дифференцированием — и решением обратной задачи. Метод степенных рядов, разумеется, давал ему возможность производить эту операцию с чрезвычайной легкостью. Ньютон заимствует свой язык, как мы уже видели, исходя из той фикции, будто универсальным параметром является «время». Он называет «флюентами» переменные количества, являющиеся функциями этого параметра, а их производные «флюксиями». По-видимому, он не придавал особого значения обозначениям, и его приверженцы впоследствии даже похвалялись отсутствием систематического обозначения как неким преимуществом. Тем не менее у Ньютона с ранних пор вырабатывается привычка обозначать для своего личного пользования флюксию точкой, т. е. $\frac{dx}{dt}$ как $\dot{x}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ как $\ddot{x}$ и т. д. Что касается интегрирования, то, кажется, Ньютон, так же как и Барроу, всегда рассматривал его как задачу (найти флюенту, зная флюксию, т. е. решить $\dot{x} = f(t)$), а не как операцию. Поэтому у него нет ни названия для интеграла, ни постоянных обозначений для него (за исключением несколько раз встречающегося квадрата $\boxed{f(t)}$ или $\square f(t)$ вместо $\int f(t)\, dt$).

Не потому ли, что ему претило давать имя и знак сущности, которая не имеет единственного определения, но определена с точностью до аддитивной постоянной? За неимением подтверждающего текста этот вопрос остается открытым.

Насколько Ньютону была свойственна эмпиричность, конкретность, осмотрительность в своих самых смелых высказываниях, настолько для Лейбница характерна систематичность, склонность к обобщениям, к предприимчивому новаторству, а порой и к дерзости. С юности он лелеял идею создания «характеристики», или универсального символического языка, который должен был стать для совокупности человеческих мыслей тем же, чем являются алгебраические обозначения для алгебры. В этом языке всякое имя или знак должен быть ключом ко всем свойствам обозначаемой вещи и их можно было бы корректно употреблять даже без корректного рассуждения (см. стр. 15). Не трудно считать подобный проект химерическим; однако не случайно, что именно автор его скоро нашел и выделил основные концепции исчисления бесконечно малых и дал им обозначения почти в окончательном виде. Выше мы уже познакомились с их появлением на свет и отметили ту тщательность, с которой Лейбниц, отдающий себе, по-видимому, полный отчет в своей миссии, постепенно переделывает и изменяет их, пока наконец не добивается искомой простоты и особенно инвариантности ([144a], т. V, стр. 220—226 и 226—233). Что важно здесь отметить, это то, что уже с самого начала (не зная еще ничего об идеях Ньютона) он имел ясную концепцию $\int$ и $d$ — интеграла и дифференциала — как взаимно обратных операторов. Правда, действуя таким образом, он не мог избежать неоднозначности, присущей неопределенному интегралу, что и является уязвимым местом его системы, которое он ловко обходит, так же как и его последователи. Но что поражает уже при первом появлении новых символов, это то, что Лейбниц, сразу же занявшись формулировкой правил действий с ними, задумался над вопросом, верно ли, что $d(xy) = dx\ dy$ ([144d], стр. 165—166), и, ответив на него отрицательно, постепенно пришел к нахождению верного правила ([144a], т. V, стр. 220—226), которое впоследствии он обобщил в своей знаменитой формуле для $d^n(xy)$ ([144 a], т. III, стр. 175). Конечно, в то время когда Лейбниц шел еще ощупью, Ньютону уже за десять лет до этого было известно, что если $z = xy$, то $\dot{z} = \dot{x}y + x\dot{y}$, но он никогда не дает себе труда говорить об этом, видя здесь лишь недостойный быть особо отмеченным частный случай своего правила для дифференцирования соотношения $F(x, y, z) = 0$ между флюентами. Напротив, основной заботой Лейбница было отнюдь не использование его методов для решения каких-либо конкретных задач и тем более не для того, чтобы вывести их из строгих и неуязвимых принципов, но, прежде всего для построения алгоритма, который основывался бы на формальном применении некоторых простых правил. Именно с этой целью он совершенствует алгебраические обозначения введением скобок и постепенно принимает знак $\log x$ или $lx$ для логарифма [1]) и настаивает на «исчислении показательных функций», т. е. на систематическом рассмотрении показательных функций $a^x$, $x^x$, $x^y$, где показатель является переменной величиной. В то время как Ньютон вводит флюксии высшего порядка только строго ограниченно и в той мере, в какой они необходимы в каждом конкретном случае, Лейбниц уже с самого начала ориентируется на создание «операционного исчисления» посредством итерирования $d$ и $\int$; все более и более убеждаясь в аналогии между умножением чисел и композицией операторов своего исчисления, он смело и очень удачно вводит для записи итерации $d$ обозначение посредством показателей степеней, т. е. пишет $d^n$ для $n$-й итерации ([144d], стр. 595 и 601 [2]), и [144a], т. V, стр. 221 и 378) и даже $d^{-1}$, $d^{-n}$ для $\int$ и его повторений ([144a], т. III, стр. 167), и он старается даже придать смысл $d^\alpha$ для всякого действительного $\alpha$ ([144a], т. II, стр. 301—302, и т. III, стр. 228).

Нельзя сказать, что Лейбниц не интересовался также применениями своего исчисления, хорошо зная (как это часто повторял ему Гюйгенс ([144d], стр. 599)), что они представляют собой пробный камень; но у него не хватало терпения, чтобы их углубить, и он главным образом и здесь ищет случая, чтобы сформулировать новые общие правила. Так, в 1686 г. он занимается ([144a], т. VII, стр. 326—329) определением кривизны кривых и соприкасающейся окружности и в 1692 г. приходит к общим принципам касания плоских кривых [3]) ([144a], т. VII, стр. 331—337). В 1692 г. ([144a], т. V, стр. 266—269) и в 1694 г. ([144a], т. V, стр. 301—306) он закладывает основы теории огибающих; в 1702 и 1703 гг., вместе с Иоганном Бернулли, он выполняет

---

[1]) Но у него нет знака для тригонометрических функций, а также и для «числа, логарифм которого есть $x$» (за неимением символа для $e$).

[2]) *«...это было бы приблизительно то же самое, как если бы вместо корней и степеней хотели бы всегда подставлять буквы и вместо xx или $x^3$ брать m или n после того, как объявлено, что они должны быть степенями величины x. Посудите, сударь, как бы это было обременительно. Так же обстоит дело с dx и ddx, и разности являются не в меньшей мере действиями* (affections) *над неопределенными по месту величинами, чем степени являются действиями над отдельно взятой величиной. Поэтому мне кажется, что более естественно обозначить их так, чтобы сразу же можно было узнавать величину, действиями над которой они являются».*

[3]) Вначале в связи с этим он допускает странную ошибку, полагая, что «целующая окружность» (соприкасающаяся окружность) имеет в точке соприкосновения четыре точки, общие с кривой; и он лишь с трудом соглашается с возражениями братьев Бернулли по этому поводу ([144a], т. III, стр. 187—188, 201—202 и 207).

интегрирование рациональных дробей посредством разложения на простейшие, но вначале формальным образом и не вникая в обстоятельства, сопровождающие наличие линейных комплексных множителей у знаменателя ([144a], т. V, стр. 350—366). Однажды, в августе 1697 г., размышляя в экипаже над вопросами вариационного исчисления, Лейбниц находит правило дифференцирования по параметру под знаком $\int$ и, полный энтузиазма, сейчас же сообщает об этом Бернулли ([144a], т. III, стр. 449—454)*. Но в это время основные принципы его исчисления уже давно были усвоены и их употребление начало распространяться; алгебраизация анализа бесконечно малых стала совершившимся фактом.

G) В течение XVII в. самыми разнообразными способами вводится и уточняется понятие функции. Вся кинематика опирается на интуитивную, а в некотором роде и экспериментальную концепцию изменяющихся во времени величин, т. е. функций времени. Мы уже видели, как это привело к появлению функции от параметра в таком виде, как мы находим ее у Барроу, а под именем флюенты — и у Ньютона. Понятие произвольной кривой встречается часто, но редко уточняется; возможно, что оно часто мыслится кинематически или, во всяком случае, экспериментально, и не считается необходимым дать кривой аналитическую или геометрическую характеристику для того, чтобы можно было о ней рассуждать. В частности, именно так обстояло дело (по причинам, которые мы теперь можем лучше понять) при интегрировании у Кавальери, Паскаля и Барроу. Последний, рассуждая о кривой, определенной уравнениями $x = ct$, $y = f(t)$ при предположении, что $\frac{dy}{dt}$ возрастает, определенно утверждает, что *«не имеет значения»*, будет ли $\frac{dy}{dt}$ возрастать *«регулярно по некоторому закону или же нерегулярно»* ([13b], стр. 191), т. е., как мы теперь сказали бы, допускает или нет аналитическое определение. К несчастью, эта ясная и плодотворная идея, которая вновь возникла в XIX в., уточненная надлежащим образом, не могла в то время выдержать натиска созданной Декартом путаницы, порожденной тем, что тот первым делом изгнал из «геометрии» все кривые, не поддающиеся точному аналитическому определению, а затем свел процессы формирования, допустимые при таком определении, только к алгебраическим операциям. Правда, в этом последнем пункте большинство его современников за ним не последовали. Постепенно, и часто неуловимым образом, различные трансцендентные операции, логарифм, показательная функция, тригонометрические функции, квадратуры, решения дифференциальных уравнений, переход к пределу, сложения рядов получают права гражданства, хотя в каждом отдельном случае и не легко указать, когда именно совершился первый шаг вперед. К тому же за первым шагом вперед часто следует шаг назад. Так, например, для логарифма важным этапом следует считать появление логарифмической кривой ($y = a^x$ или $y = \log x$ в зависимости от выбора осей), логарифмической спирали, квадратуры гиперболы, разложение в ряд $\log(1+x)$ и даже принятие символа $\log x$ или $lx$. В отношении тригонометрических функций, хотя они в некотором смысле и восходят к античности, интересно отметить, что первая синусоида появляется не как определенная уравнением $y = \sin x$, но как «спутник рулеты», например у Роберваля ([191], стр. 63—65). Имеется в виду кривая

$$y = R\left(1 - \cos\frac{x}{R}\right),$$

т. е. вспомогательная кривая, определение которой выведено из определения циклоиды.

Чтобы встретить общее понятие аналитического выражения, нужно обратиться к работе Дж. Грегори, определившего его в 1667 г. ([126a], стр. 413) как некую величину, получаемую из других величин последовательностью алгебраических операций *«или любыми другими операциями, которые можно вообразить»*. В своем предисловии ([126a], стр. 408—409) он старается уточнить это понятие, объясняя необходимость присовокупить к пяти операциям алгебры [1]) шестую операцию, которая в конечном счете есть не что иное, как переход к пределу. Но эти интересные мысли вскоре были забыты, захлестнутые потоком открытий, относящихся к разложениям в ряды, открытиям, сделанным самим Грегори, Ньютоном и другими. Необычайный успех этого последнего метода породил длительную путаницу между функциями, поддающимися аналитическому определению, и функциями, разложимыми в степенные ряды.

Что касается Лейбница, то он, кажется, придерживается картезианской точки зрения, расширенной явным применением квадратур и неявным применением других операций, хорошо известных в анализе того времени, как-то: сложение степенных рядов, решение дифференциальных уравнений. Иоганн Бернулли при рассмотрении произвольной функции от $x$ также вводит ее как *«количество, образованное каким-либо способом из $x$ и постоянных величин»* ([144a], т. III, стр. 150), уточняя иногда, что он имеет в виду количество, составленное *«алгебраическим или трансцендентным способом»* ([144a], т. III, стр. 324). В 1698 г.

---

[1]) Имеются в виду четыре рациональные операции и извлечение корней любой степени. Дж. Грегори всегда был убежден в возможности решать уравнения всех степеней посредством радикалов.

он приходит к согласию с Лейбницем о том, чтобы назвать такое количество «функцией от $x$» ([144a], т. III, стр. 507—510 и 525—526) [1]). Уже Лейбниц вводит слова «константа», «переменная», «параметр» и уточняет в связи с огибающими понятие семейства кривых, зависящих от одного или нескольких параметров ([144a], т. V, стр. 266—269). Вопросы обозначений также уточняются в переписке с Иоганном Бернулли, последний охотно пишет $X$ или $\xi$ для обозначения произвольной функции от $x$ ([144a], т. III, стр. 531); Лейбниц одобряет это, но предлагает также обозначения $x^1$, $x^2$ там, где бы мы написали $f_1(x)$, $f_2(x)$, и предлагает для производной $\frac{dz}{dx}$ функции $z$ от $x$ обозначение $\eth Z$ (в отличие от $dZ$, которое обозначает дифференциал), тогда как Бернулли пишет $\Delta Z$ ([144a], т. III, стр. 537 и 526).

Итак, героическая эпоха закончилась вместе с веком. Было создано новое исчисление со своими понятиями и обозначениями, в том виде, который дал ему Лейбниц. Первые его ученики, Яков и Иоганн Бернулли, соперничают с учителем в области открытий, исследуя те богатые области, путь к которым он им указал. Первый трактат дифференциального и интегрального исчисления был написан в 1691—1692 гг. Иоганном Бернулли [2]) в качестве пособия для одного маркиза, который показал себя хорошим учеником. То, что Ньютон, наконец, решился в 1693 г. опубликовать скупой и краткий обзор своего учения о флюксиях ([240a], т. II, стр. 391—396), не имело большого значения; если его «Principia» дали пищу размышлениям на целый век, то в области исчисления бесконечно малых он идет вровень с временем, а во многих пунктах математики даже его обгоняют.

К тому же недостатки новой системы очевидны, по крайней мере для нас. Разрушив одним ударом традицию двухтысячелетней давности, Ньютон и Лейбниц отводят основную роль дифференцированию и сводят интегрирование к обратной к нему операции. Понадобилось целое XIX столетие и часть XX, чтобы восстановить справедливое равновесие, сделав интегрирование

---

[1]) До этих пор и уже в рукописи 1673 г. Лейбниц употреблял это слово как сокращение для обозначения величины *«выполняющей ту или иную функцию»* относительно некоторой кривой, например длину касательной или нормали (ограниченных кривой и осью $Ox$), или поднормали, подкасательной и т. д... значит, в общем функцию переменной точки на кривой в дифференциально геометрическом определении. В той же рукописи 1673 г. кривая предполагается определенной соотношением между $x$ и $y$, «заданным уравнением» (т. е., на нашем языке, алгебраическим уравнением) (ср. [155]).

[2]) Часть трактата, относящаяся к интегральному исчислению, была издана только в 1742 г. ([17a], т. III, стр. 385—558, и [17b]); часть с дифференциальным исчислением была недавно найдена и издана [17c]; правда, маркиз де Лопиталь в слегка переделанном виде опубликовал ее на французском языке под своим именем, о чем Бернулли не без некоторой горечи упоминает в своих письмах к Лейбницу.

основой общей теории функций действительного переменного и их современных обобщений (см. стр. 238). На основе этой прямо противоположной точки зрения развивается чрезмерная и даже исключительная роль неопределенного интеграла за счет определенного интеграла, что мы видим уже в работах Барроу и особенно Ньютона и Лейбница. И здесь XIX веку пришлось исправлять положение. Наконец, установленная Лейбницем тенденция формального обращения с символами развивалась в течение всего XVIII в., выходя далеко за пределы того, что могло допустить состояние анализа того времени. В частности, надо признать, что понятие дифференциала, данное Лейбницем, по правде говоря, не имеет никакого смысла. В начале XIX в. оно не пользовалось доверием и только постепенно начало приобретать авторитет, и если употребление дифференциалов первого порядка в конце концов было полностью узаконено, дифференциалы высшего порядка, столь удобные для употребления, еще до сего дня не реабилитированы.

Как бы то ни было, с конца XVII в. история дифференциального исчисления развивается в двух направлениях. Одно из них связано с приложениями исчисления, все более обширными, многочисленными и разнообразными. К дифференциальной геометрии плоских кривых, дифференциальным уравнениям, степенным рядам, вариационному исчислению, о которых уже говорилось выше, присовокупляются дифференциальная геометрия пространственных кривых, затем поверхностей, теория кратных интегралов, уравнения с частными производными, тригонометрические ряды, изучение многочисленных специальных функций и много других проблем. Мы займемся здесь лишь рассмотрением работ, которые способствовали выявлению, углублению и укреплению самих принципов исчисления бесконечно малых, и именно того, что относится к функциям действительной переменной.

С этой точки зрения выдающиеся трактаты середины XVIII в. не внесли ничего существенно нового. Маклорен в Англии [154], Эйлер на континенте ([81a] (1), т. X—XIII) остаются верны унаследованной ими традиции. Правда, первый из них пытается немного разъяснять некоторые из концепций Ньютона [1]), в то время как второй, предельно развивая формализм Лейбница, удовлетворяется, подобно Лейбницу и Тейлору, тем, что основывает дифференциальное исчисление на довольно неясном переходе к пределу, отправляясь от исчисления конечных разнос-

[1]) И действительно, им крайне необходимо было найти защиту от философско-теологическо-юмористических атак знаменитого епископа Беркли. По мнению последнего, тому, кто уверовал во флюксии, не трудно было поверить и в таинства религии; этому аргументу ad hominem нельзя отказать ни в логике, ни в пикантности.

тей, которое он очень тщательно излагает. Кроме того, Эйлер завершает дело Лейбница, вводя обозначения, которые вошли в практику и применяются до сих пор для $e$, $i$ и тригонометрических функций, и более широко применяя $\pi$. С другой стороны, если он чаще всего и не делает различия между функциями и аналитическими выражениями, он настаивает в связи с тригонометрическими рядами и проблемой звучащей струны на необходимости не ограничиваться рассмотрением подобным образом определенных функций (которые он называет «непрерывными»), но также при случае исследовать произвольные или «разрывные» функции, которые на практике представляли заданными одной или несколькими дугами кривых ([81a] (1), т. XXIII, стр. 74—91). Наконец, хотя это и несколько выходит за пределы нашей темы, нельзя не упомянуть о распространении Эйлером показательной функции на комплексную область, что дало ему возможность вывести свои знаменитые формулы, связывающие показательную и тригонометрические функции, а также дать определение логарифмов комплексных чисел. Этим окончательно выясняется известная аналогия между логарифмом и обратными круговыми функциями, или, на языке XVII в., между квадратурами круга и гиперболы. Эта аналогия была замечена уже Григорием де Сент-Винцентом, затем уточнена Гюйгенсом и особенно Дж. Грегори, а у Лейбница и Бернулли она выступила при формальном интегрировании выражения

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{i}{2(x+i)}-\frac{i}{2(x-i)}.$$

Однако Даламбер, который питал враждебное чувство ко всякой мистике, в том числе и к математической, в своих замечательных статьях ([56a], статьи Дифференциал и Предел, а также [56b]) очень ясно определил понятия предела и производных и с большой силой отстаивал свое мнение, что в этом в сущности и заключается вся «метафизика» исчисления бесконечно малых. Но эта мудрая мысль не была подхвачена немедленно. Монументальная работа Лагранжа ([140], т. IX—X) представляет попытку основать анализ на одной из наиболее спорных концепций Ньютона, именно на той, в которой спутаны понятия произвольной функции и функции, разложимой в степенной ряд, и извлечь из него (рассматривая коэффициент члена первого порядка в ряде) понятие дифференцирования. Разумеется, такой математик, как Лагранж, не мог не получить при этом важных и полезных результатов, как, например (способом, не зависящим от его исходного предположения, о котором мы говорили), общее доказательство формулы Тейлора с остаточным членом в виде интеграла и его оценкой посредством теоремы о среднем. Работа Лагранжа явилась к тому же исходным пунктом метода Вейерштрасса в теории функций комплексного переменного, так же как и в современной алгебраической теории формальных степенных рядов. Но с точки зрения его непосредственной цели она скорее является шагом назад, чем продвижением вперед.

И, наоборот, в учебниках Коши мы наконец-то находимся на твердой почве ([42a] (2), т. IV). Он определяет функцию в основном так, как мы это делаем сегодня, хотя и употребляет несколько туманный язык. Точкой отправления служит установленное раз и навсегда понятие предела. Из него немедленно выводятся понятие непрерывной функции (в современном смысле слова) и производной, так же как и их основные элементарные свойства. Существование производной, в которое до тех пор можно было только верить, становится вопросом, изучаемым обычными средствами анализа. По правде говоря, Коши этим не интересуется. Но, с другой стороны, Больцано, придя самостоятельно к тем же принципам, строит пример непрерывной функции, не имеющей ни в одной точке конечной производной [22a]. Пример этот не был опубликован, а сам вопрос был подвергнут открытому обсуждению только Вейерштрассом в его работе 1872 г. (и в его курсе лекций в 1861 г.) ([243a], т. II, стр. 71—74).

В отношении интегрирования работы Коши представляют собой возврат к здоровым традициям античности и первой половины XVII в., но опираются на еще недостаточные технические средства. Определенный интеграл, который слишком долго оставался на втором плане, становится понятием первостепенного значения, для которого Коши окончательно устанавливает обозначение $\int_a^b f(x)\,dx$, предложенное Фурье (вместо неудобного $\int f(x)\,dx \begin{bmatrix} x=b \\ x=a \end{bmatrix}$, которым иногда пользовался Эйлер). Для его определения Коши возвращается к методу исчерпывания, или, как мы теперь говорим, к «суммам Римана» (хотя более точно было бы назвать их суммами Архимеда, или суммами Евдокса [1])). Правда, математики XVII в. не считали нужным подвергать критическому анализу понятие площади, которое им казалось настолько же ясным, как и понятие несоизмеримых действительных чисел. Но сходимость «сумм Римана» к площади под кривой, поскольку имеется в виду монотонная или кусочно-монотонная кривая, было понятием, хорошо усвоенным всеми авторами XVII в., заботившимися о точности, как, например, Ферма, Паскалем, Барроу. Дж. Грегори был особенно хорошо подготовлен

---

[1]) В работах Архимеда, действительно, встречаются впервые верхние и нижние интегральные суммы, однако мы не находим их у Евдокса, который определял площади и объемы только как пределы последовательностей. — *Прим. перев.*

своими рассуждениями о переходе к пределу и своим знакомством с достаточно абстрактной формой принципа «вложенных интервалов» и даже, по-видимому, составил тщательно отработанное доказательство сходимости, оставшееся неизданным ([104d], стр. 445—446), которым мог бы почти без изменений воспользоваться Коши, если бы он его знал [1]). К несчастью для себя, Коши претендовал на то, что доказал существование интеграла, т. е. сходимость «сумм Римана» для любой непрерывной функции. Его доказательство, которое было бы корректным, если бы опиралось на теорему о равномерной непрерывности непрерывных функций в замкнутом интервале, оказалось лишенным всякой доказательной силы из-за отсутствия этого понятия. По-видимому, Дирихле также не замечал этой трудности, когда составлял свои знаменитые мемуары о тригонометрических рядах, так как, цитируя данную теорему, он называл ее «легко доказуемой» ([71], т. I, стр. 136); правда, он применяет ее лишь к ограниченным кусочно-монотонным функциям. Риман, более осторожный, упоминает только о последних, когда речь идет об использовании его необходимого и достаточного условия для сходимости «сумм Римана» ([187a], стр. 227—271). Как только теорема о равномерной непрерывности была установлена Гейне (ср. стр. 145), проблема уже не представила никаких трудностей. В 1875 г. она была легко разрешена Дарбу в мемуаре об интегрировании разрывных функций [58] — мемуаре, в котором к тому же многие пункты совпадают с результатами исследований П. Дюбуа-Реймона, имеющими важное значение и изданными приблизительно в это же время. Тем самым была впервые, и на этот раз окончательно, доказана линейность интеграла от непрерывной функции. С другой стороны, понятие равномерной сходимости последовательности и ряда, введенное Зейделем в 1848 г. и приобретшее особое значение после работ Вейерштрасса (ср. стр. 215), позволило строго обосновать несколько ограничительные условия почленного интегрирования ряда и дифференцирования под знаком $\int$ в ожидании современных теорий, о которых мы здесь не будем говорить и которым было суждено осветить эти вопросы способом, окончательным на данное время.

Итак, мы дошли до завершающего этапа классического исчисления бесконечно малых, представленного в великих трактатах по анализу конца XIX в. С интересующей нас точки зрения наиболее выдающимся является трактат Жордана [129c] как в эстетическом отношении, так и потому, что он не только дает поистине замечательное изложение классического анализа, но и во многих пунктах предвосхищает современный анализ и открывает для него дорогу.

1) По крайней мере так утверждает Тёрнбул в своем резюме о рукописи.

# АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

Различие между «бесконечно малыми» (или «бесконечно большими») разных порядков в скрытой форме встречается уже в первых работах по дифференциальному исчислению, например в работах Ферма. У Ньютона и Лейбница оно уже рассматривается вполне сознательно вместе с теорией «разностей высшего порядка». Вскоре было замечено, что в наиболее простых случаях предел (или «истинное значение») выражения $f(x)/g(x)$ в точке, при приближении к которой $f$ и $g$ стремятся к нулю, может быть найден путем разложения этих функций в ряд Тейлора вблизи этой точки («правило Лопиталя», которым, по всей вероятности, мы обязаны Иоганну Бернулли).

За пределами этого элементарного случая основной проблемой «асимптотических оценок», вставшей перед математиками в конце XVII в., является точное или приближенное вычисление сумм вида $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$, когда $n$ очень велико. Подобное вычисление действительно необходимо как для интерполирования и числовой оценки суммы ряда, так и в исчислении вероятностей, где «функции больших чисел», такие, как $n!$ или $\binom{a}{n}$, играют решающую роль. Уже Ньютон для получения приближенных значений суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a+k}$, если $n$ является большим, указывает метод, который сводится (для этого частного случая) к вычислению первых членов формулы Эйлера — Маклорена ([190], т. II, стр. 309—310). К концу века Яков Бернулли в ходе исследований по теории вероятностей ставит задачу определения сумм $S_k(n) = \sum\limits_{p=1}^{n} p^k$, т. е. многочленов от $n$ [1]), общий закон образования которых он и открывает (не давая доказательства). При этом он впервые ввел в выражения для коэффициентов этих многочленов числа, носящие его имя, и нашел рекуррентное соотношение,

---

[1]) Это простейшие «многочлены Бернулли» $B_k(x)$.

позволяющее их вычислить ([16b], стр. 97). В 1730 г. Стирлинг получил асимптотическое разложение для $\sum\limits_{k=1}^{n}\log(x+ka)$ при $n$ неограниченно возрастающем, коэффициенты которого вычисляются рекуррентным образом.

В промежуток времени с 1730 по 1745 г. выходят решающие работы Эйлера, относящиеся к рядам и связанным с ними вопросам. Положив $S(n)=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)$, Эйлер применяет к функции $S(n)$ формулу Тейлора и получает

$$f(n)=S(n)-S(n-1)=\frac{dS}{dn}-\frac{1}{2!}\frac{d^2S}{dn^2}+\frac{1}{3!}\frac{d^3S}{dn^3}-\ldots.$$

Это уравнение он «обращает» с помощью метода неопределенных коэффициентов с целью найти решение вида

$$S(n)=\alpha\int f(n)\,dn+\beta f(n)+\gamma\frac{df}{dn}+\delta\frac{d^2f}{dn^2}+\ldots$$

и получает шаг за шагом

$$S(n)=\int f(n)\,dn+\frac{f(n)}{2}+\frac{1}{12}\frac{df}{dn}-\frac{1}{720}\frac{d^3f}{dn^3}+\frac{1}{30\,240}\frac{d^5f}{dn^5}-\ldots,$$

так как вначале он не смог определить закон образования коэффициентов ([81a] (1), т. XIV, стр. 42—72 и 108—123). Но около 1735 г. по аналогии с разложениями многочлена на множители первой степени он, не колеблясь, пишет формулу

$$1-\frac{\sin s}{\sin\alpha}=$$
$$=\left(1-\frac{s}{\alpha}\right)\left(1-\frac{s}{\pi-\alpha}\right)\left(1-\frac{s}{-\pi-\alpha}\right)\left(1-\frac{s}{2\pi+\alpha}\right)\left(1-\frac{s}{-2\pi+\alpha}\right)\ldots$$

и, приравнивая коэффициенты разложений в ряды по целым степеням обеих частей равенства, получает, в частности (для $\alpha=\pi/2$), известное выражение сумм рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}$ с помощью степеней $\pi$[1]) ([81a] (1), т. XIV, стр. 73—86). Через несколько лет, наконец, он замечает, что коэффициенты при этих степенях $\pi$ задаются теми же соотношениями, что и коэффициенты его фор-

[1]) В 1743 г. Эйлер в ответ на критические замечания своих современников дает немного более правдоподобный вывод «эйлеровых разложений» тригонометрических функций; например, разложение $\sin x$ в бесконечное произведение выведено из выражения $\sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$ и из того факта, что $e^{ix}$ есть предел многочлена $\left(1+\frac{ix}{n}\right)^n$ ([81a] (1), т. XIV, стр. 138—155).

мулы суммирования, и находит их связь с числами, введенными Бернулли, и с коэффициентами разложения в ряд выражения $z/(e^z-1)$ ([81a] (1), т. XIV, стр. 407—462).

В это же время и независимо от Эйлера Маклорен пришел к той же формуле суммирования, но менее рискованным путем, сходным с тем, по которому мы идем сегодня. Он итерирует «формулу Тейлора», выражающую $f(x)$ с помощью разностей $f^{(2k+1)}(x+1)-f^{(2k+1)}(x)$, — формулу, которую он получает, «обращая» тейлоровы разложения этих разностей методом неопределенных коэффициентов ([154], т. II, стр. 672—675). Однако он не замечает закона образования коэффициентов, открытого Эйлером.

Но Маклорен, подобно Эйлеру и всем математикам своего времени, представляет все свои формулы в виде рядов, сходимость которых даже не изучается. Это не означает, что в то время понятие сходящихся рядов совсем не принималось в расчет. Уже со времен Якова Бернулли было известно, что гармонический ряд расходится, а Эйлер сам уточнил этот результат, оценив с помощью своей формулы суммирования сумму $n$ первых членов этого ряда ([81a] (1), т. XIV, стр. 87—100 и 108—123). Эйлер заметил также, что отношение двух последовательных чисел Бернулли неограниченно возрастает, вследствие чего степенной ряд, имеющий эти числа в качестве коэффициентов, не может сходиться ([81 a] (1), т. XIV, стр. 357) [1]). Но тенденция к формальному исчислению оказывается очень сильной, и даже необычайная интуиция самого Эйлера не всегда спасает его от абсурдных утверждений, как, например, $0=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} x^n$ ([81a] (1), т. XIV, стр. 362) [2]).

Мы уже говорили о том (см. стр. 153), как математики начала XIX в., устав от необоснованного и необузданного формализма, вернули анализ на путь строгости. После того как понятие сходящегося ряда было уточнено, возникла необходимость в простых критериях, которые давали бы возможность доказать сходимость интегралов и рядов посредством сравнения с уже известными интегралами и рядами. Коши дает несколько таких критериев в «Алгебраическом анализе» ([42a] (2), т. III),

[1]) Так как ряд, который Эйлер исследует в этом место, введен им для числовых расчетов, то он берет только сумму тех его членов, которые идут в убывающем порядке, а начиная с того индекса, с которого члены возрастают, он заменяет их остатком, происхождение которого не указывает (общий вид остаточного члена формулы Эйлера — Маклорена появляется только у Коши).

[2]) Любопытно, что через страницу после этой формулы Эйлер предостерегает математиков от употребления расходящихся рядов без соответствующего их исследования!

а Абель в своем посмертно изданном мемуаре ([1], т. II, стр. 197—205) получает логарифмические критерии сходимости. С другой стороны, Коши ([42a] (1), т. VIII, стр. 18—25) объясняет парадокс таких рядов, как ряд Стирлинга, полученных от применения формулы Эйлера — Маклорена (часто называемых «полусходящимися рядами»). Он показывает, что если (в силу замечания Эйлера о числах Бернулли) общий член $u_k(n)$ такого ряда для *фиксированного* $n$ бесконечно возрастает вместе с $k$, то при *фиксированном* $k$ частная сумма $s_k(n) = \sum_{n=1}^{k} u_k(n)$ дает асимптотическое разложение (для $n$, стремящегося к $+\infty$) функции, «представленной» этим рядом, тем более точное, чем больше $k$.

В большинстве исчислений классического анализа возможно получить общий закон образования асимптотических разложений функции с *произвольно большим* числом членов. Этот факт привел к долго тянувшемуся смешению (по крайней мере в языке) между рядами и асимптотическими разложениями. Когда А. Пуанкаре в 1886 г. берет на себя труд ([181a], т. I, стр. 290—296) кодифицировать элементарные правила для асимптотических разложений (по целым степеням $1/x$ в окрестности $+\infty$), он все еще употребляет словарь теории рядов. И только с появлением асимптотических разложений, возникших из аналитической теории чисел, начинают четко отличать понятие асимптотического разложения от понятия ряда в силу того, что для большинства задач, с которыми имеет дело эта теория, удается явно получить только очень небольшое число членов (чаще всего — один член) искомого разложения.

Эти задачи также приучили математиков пользоваться шкалой сравнения, отличной от шкалы степеней переменной (действительной или целочисленной). Это расширение восходит главным образом к работам П. Дюбуа-Реймона [72a и b], который первый систематически исследовал проблемы сравнения функций в окрестности некоторой точки и в очень оригинальных работах установил «неархимедов» характер шкалы сравнения. В то же время он изучил общим образом интегрирование и дифференцирование отношений сравнения, получив множество интересных выводов [72b]. Однако его доказательствам не хватает ясности и строгости, и только Дж. Г. Харди [110] дал корректное изложение результатов Дюбуа-Реймона. Его основная заслуга состоит в том, что он обнаружил и доказал существование множества «элементарных функций», функций (H), для которых обычные операции анализа (именно дифференцирование) применимы к отношениям сравнения (des relations de comparaison).

## ГАММА-ФУНКЦИЯ

Идея «интерполяции» последовательности $(u_n)$ при помощи значений интеграла, зависящего от действительного параметра $\lambda$ и равного $u_n$ для $\lambda = n$, восходит к Валлису (ср. стр. 194—195). Именно эта идея в основном руководила Эйлером, когда он в 1730 г. ([81a] (1), т. XIV, стр. 1—24) предпринял интерполяцию последовательности факториалов. Он начал с замечания, что $n!$ равен бесконечному произведению $\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^n \frac{k}{k+n}$, что это произведение определено для любого значения $n$ (целого или нет) и что, в частности, для $n = 1/2$ оно принимает значение $1/2\sqrt{\pi}$ согласно формуле Валлиса. Аналогия этого результата с результатами Валлиса побуждает его вернуться к исследованию интеграла $\int\limits_0^1 x^e(1-x)^n\,dx$ ($n$ — целое, $e$ — любое), уже рассмотренного последним. Эйлер получает отсюда величину $\frac{n!}{(e+1)(e+2)\ldots(e+n)}$ посредством разложения бинома. Замена переменных показывает, что $n!$ является пределом интеграла $\int\limits_0^1\left(\frac{1-x^z}{z}\right)^n dx$ при $z$, стремящемся к нулю, откуда получается «второй интеграл Эйлера» $n! = \int\limits_0^1\left(\log\frac{1}{x}\right)^n dx$. Тем же методом и применением формулы Валлиса он получает формулу $\int\limits_0^1\sqrt{\log\frac{1}{x}}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

В последующих работах Эйлер часто возвращается к этим интегралам; он открывает также формулу дополнений ([81a] (1), т. XV, стр. 82, и т. XVII, стр. 342), формулу $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ ([81a] (1), т. XVII, стр. 355) и частный случай формулы Лежандра—Гаусса, соответствующий $x = 1$ ([81a] (1), т. XIX, стр. 483). Разумеется, все это проделывается без заботы о вопросах сходимости.

Гаусс продолжает изучение функции Г в связи со своими исследованиями гипергеометрической функции, для которой функция Г является предельным случаем ([95a], т. III, стр. 125—162). Во время этих исследований он получает общую формулу умножения (уже несколько ранее замеченную Лежандром для $p=2$). Последующие исследования функции Г главным образом имели в виду продолжение этой функции на область комплексных чисел. Лишь недавно было обнаружено, что свойство логарифмической выпуклости характеризует $\Gamma(x)$ (в действительной области) с точностью до множителя среди всех решений функционального уравнения $f(x+1)=xf(x)$ ([21], стр. 149—164), а Артин показал [5d], как можно просто увязать все классические результаты о функции $\Gamma(x)$ с этим свойством.

## ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Понятие произвольной функции, как известно, формируется только к началу XIX в. Тем более идея общего изучения множеств функций и наделения их топологической структурой не появляется до работ Римана (см. стр. 140) и начинает разрабатываться в конце XIX в.

Однако понятие сходимости последовательности числовых функций более или менее сознательно применялось с самого начала появления исчисления бесконечно малых. Но при этом дело касалось только простой сходимости, да иначе и не могло быть вплоть до тех пор, пока понятия сходящегося ряда и непрерывной функции не были точно определены Больцано и Коши. Последний вначале не замечал различия между простой и равномерной сходимостью и считал, что может доказать, что любой сходящийся ряд непрерывных функций имеет в качестве суммы непрерывную функцию ([42a] (2), т. III, стр. 120). Ошибка эта была почти немедленно замечена Абелем, который одновременно доказал с помощью рассуждения, ставшего классическим и использующего для данного частного случая идею равномерной сходимости, что сумма степенного ряда является непрерывной функцией внутри его интервала сходимости ([1], т. I, стр. 223—224). Оставалось только выделить и обобщить понятие равномерной сходимости, что и было сделано независимо друг от друга Стоксом и Зейделем в 1847—1848 гг. и самим Коши в 1853 г. ([42a] (1), т. XII, стр. 30) [1]).

В последней трети XIX в. немецкая школа под влиянием Вейерштрасса и Римана (Ганкель, Дюбуа-Реймон) и особенно итальянская систематически изучают понятия равномерной сходимости и связанные с ним вопросы. Итальянцы Дини и Арцела уточняют условия, необходимые для того, чтобы предел последовательности непрерывных функций был непрерывной функцией. Асколи вводит основное понятие равностепенной непрерывности и доказывает теорему, характеризующую компактные множества

---

1) В работе, помеченной 1841 г., но изданной только в 1894 г. ([243a], т. I, стр. 67—74), Вейерштрасс с предельной четкостью использует понятие равномерной сходимости (которую он впервые так называет) для степенных рядов одной или нескольких комплексных переменных.

непрерывных функций [8] (теорема, которая была впоследствии популяризирована Монтелем в его теории «нормальных семейств», являющихся не чем иным, как относительно компактными множествами аналитических функций).

С другой стороны, сам Вейерштрасс открыл ([243a], т. III, стр. 1—37), что посредством многочленов возможно равномерно приблизить числовую непрерывную функцию от одной или нескольких действительных переменных на ограниченном множестве. Этот результат привлек к себе живое внимание и породил многочисленные «количественные» исследования, которые выходят за пределы рассматриваемой здесь точки зрения.

Современный вклад в эти проблемы преимущественно выражается в том, чтобы распространить их область действия, насколько это представляется возможным, рассматривая их для функций, область определения и множество значений которых уже не ограничены **R** или пространствами конечного числа измерений, и тем самым с помощью общих топологических положений помещая их в их естественные рамки. В частности, теорема Вейерштрасса, которая уже стала незаменимым орудием классического анализа, за последние годы получила распространение на более общие случаи в работах М. Г. Стоуна. Развивая идею, введенную А. Лебегом (при доказательстве теоремы Вейерштрасса), он выявил важную роль, которую при аппроксимации непрерывных числовых функций играют решетки (аппроксимации с помощью «решетчатых (latticiel) многочленов»), и показал, с другой стороны, как обобщение теоремы Вейерштрасса влечет за собой целый ряд аналогичных аппроксимационных предложений, которые, таким образом, оказываются гораздо теснее связанными между собой [219].

# ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Общая теория топологических векторных пространств возникла в период приблизительно между 1920 и 1930 гг. Появление ее было исподволь подготовлено изучением многочисленных проблем функционального анализа. Поэтому нельзя проследить ее историю, не упомянув, хотя бы в общих чертах, о том, как изучение этих проблем мало-помалу привело математиков (особенно с начала XX в.) к осознанию связей между изучаемыми проблемами и к возможности формулировать их значительно более общим образом и применять к ним единообразные способы решений.

Можно сказать, что аналогии между алгеброй и анализом и стремление рассматривать функциональные уравнения (т. е. такие, в которых неизвестной является функция) как «предельные случаи» алгебраических уравнений возникают вместе с появлением исчисления бесконечно малых, которое в определенном смысле отвечало потребности обобщения «от конечного к бесконечному». Однако прямым алгебраическим предком исчисления бесконечно малых является исчисление конечных разностей (ср. стр. 192—194), а не решение общих линейных систем; первые аналогии между этими системами и задачами дифференциального исчисления появляются не раньше середины XVIII в. в связи с уравнением колеблющейся струны. Здесь мы не будем входить в рассмотрение подробной истории этой проблемы; нам необходимо, однако, проследить появление двух фундаментальных идей, которые постоянно будут встречаться впоследствии и которые, по-видимому, обязаны своим появлением Д. Бернулли. Первая из них состоит в том, чтобы рассматривать колебания струны как «предельный случай» колебания системы $n$ точечных масс при бесконечно возрастающем $n$. Известно, что для конечного $n$ эта задача в дальнейшем доставила первый пример исследования собственных значений линейного преобразования (ср. стр. 107). Этим числам соответствуют в рассматриваемом «переходе к пределу» частоты «собственных колебаний» струны, уже давно полученные экспериментальным путем, но существование которых теоретически было установлено (и именно Тейлором) в начале XVIII в. Эту формальную аналогию, хотя и упоминаемую впоследствии довольно редко ([220b], стр. 390), никогда не теряли из виду математики XIX в.; но, как мы увидим позднее, все ее значение выявилось лишь к 1890—1900 гг.

Другой идеей Д. Бернулли (возможно, навеянной экспериментальными фактами) был «принцип суперпозиции», согласно которому наиболее общее колебание струны должно «разлагаться» в суперпозицию «собственных колебаний», что означает на языке математики, что общее решение уравнения колеблющейся струны должно разлагаться в ряд $\sum\limits_n c_n\varphi_n(x, t)$, где $\varphi_n(x, t)$ представляют собственные колебания. Известно, что этот принцип послужил началом длительного спора о возможности разложения в тригонометрический ряд «произвольной функции», — спора, который был разрешен только в первой трети XIX в. после выхода в свет работ Фурье и Дирихле. Но еще до этого были найдены другие примеры разложений в ряды по «ортогональным»[1]) функциям: сферическим функциям и полиномам Лежандра, а также различным системам вида $(e^{i\lambda_n x})$, где $\lambda_n$ уже не являются кратными одного и того же числа, которые были введены в начале XVIII в. в задачах о колебаниях, а также Фурье и Пуассоном в ходе их исследований по теории теплоты. К 1830 г. все явления, замеченные в этих различных частных случаях, были систематизированы Штурмом [220a и b] и Лиувиллем [147a и b] и объединены в общую теорию колебаний для функций одной переменной. Они рассматривают дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+\lambda\rho(x)y=0 \quad (p(x)>0,\ \rho(x)>0) \tag{1}$$

с граничными условиями

$$\begin{matrix} y'(a)-h_1y(a)=0 \\ y'(b)+h_2y(b)=0 \end{matrix} \qquad (h_1\geqslant 0,\ h_2\geqslant 0,\ a<b) \tag{2}$$

и получают следующие фундаментальные результаты:

1) задача имеет ненулевое решение только тогда, когда $\lambda$ принимает одно из значений последовательности $(\lambda_n)$ чисел $>0$, стремящихся к $+\infty$;

2) для всякого $\lambda_n$ решения являются кратными одной и той же функции $v_n$, которую можно предположить «нормированной», наложив условие $\int\limits_a^b \rho v_n^2\,dx=1$, причем $\int\limits_a^b \rho v_m v_n\,dx=0$ для $m\neq n$;

[1]) Этот термин, однако, не появляется до работ Гильберта.

3) всякая функция $f$, дважды дифференцируемая в $[a, b]$, удовлетворяющая граничным условиям (2), может быть разложена в равномерно сходящийся ряд $f(x) = \sum_n c_n v_n(x)$, где

$$c_n = \int_a^b \rho f v_n \, dx;$$

4) имеет место равенство $\int_a^b \rho f^2 \, dx = \sum_n c_n^2$ (уже доказанное Парсевалем в 1799 г. — впрочем, чисто формальным способом для системы тригонометрических функций, откуда непосредственно выводится «неравенство Бесселя», сформулированное последним также для тригонометрических рядов в 1828 г.).

Через полвека эти свойства были дополнены в работах Грама [101], который, продолжая исследования Чебышева, выявил связь между разложениями в ряды ортогональных функций и проблемой «наилучшего квадратичного приближения» (непосредственно вышедшей из «метода наименьших квадратов» Гаусса в его теории ошибок). Задача состоит в том, чтобы для заданной конечной последовательности функций $(\psi_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ найти для функции $f$ линейную комбинацию $\sum a_i \psi_i$, для которой интеграл $\int_a^b \rho \left(f - \sum_i a_i \psi_i\right)^2 dx$ достигает своего минимума. В принципе здесь имеется в виду обыкновенная задача линейной алгебры, но Грам дал ей оригинальное решение, применив к $\psi_i$ процесс «ортонормализации», обычно называемый именем Эрхарда Шмидта. Переходя затем к случаю бесконечной ортонормальной системы $(\varphi_n)$, Грам стремился узнать, когда «наилучшее квадратическое приближение $\mu_n$ функции $f$ линейными комбинациями $n$ первых функций последовательности стремится к 0 при бесконечно [1]) возрастающем $n$. Таким образом, он приходит к определению полной ортонормальной системы и к утверждению, что это свойство эквивалентно тому, что не существует функции, отличной от 0 и ортогональной всем $\varphi_n$. Он даже пытается исследовать понятие «сходимости в среднем квадратическом», но до введения фундаментальных понятий теории меры ему удается получить в этой области лишь весьма частные результаты. Во

[1]) Следует заметить, что во всем этом доказательстве Грам не ограничивается рассмотрением непрерывных функций, но настаивает на необходимости условия $\int_a^b \rho f^2 \, dx < +\infty$.

второй половине XIX в. основные усилия математиков-аналитиков были направлены на распространение теории Штурма—Лиувилля на функции нескольких переменных, к чему приводило изучение уравнений с частными производными эллиптического типа математической физики и естественно связанных с ними краевых задач. Внимание в основном концентрируется на уравнении «колеблющейся мембраны»

$$L_\lambda(u) \equiv \Delta u + \lambda u = 0, \tag{3}$$

для которого в достаточно правильной области $G$ разыскивается решение, обращающееся в нуль на контуре. Значительные трудности аналитического порядка, порожденные этой задачей, были преодолены лишь постепенно, исподволь, так как тогда нечего было и думать о применении к ней методов, оказавшихся успешными для функций одной переменной. Напомним основные этапы пути, ведущего к решению: введение «функции Грина» области $G$, существование которой доказано Шварцем; доказательство существования наименьшего собственного значения, также данное Шварцем. Наконец, в 1894 г. в своем знаменитом мемуаре ([181a], т. IX, стр. 123—196) А. Пуанкаре удалось доказать существование и основные свойства всех собственных значений, рассматривая при заданной «правой части» $f$ решение $u_\lambda$ уравнения $L_\lambda(u) = f$, которое обращается в нуль на контуре области, и показывая с помощью искусного обобщения метода Шварца, что $u_\lambda$ есть мероморфная функция комплексной переменной $\lambda$, имеющая только простые действительные полюса $\lambda_n$, которые и являются искомыми собственными значениями.

Эти исследования тесно сязаны с первыми шагами теории линейных интегральных уравнений, которые, несомненно, в наибольшей степени способствовали появлению современных идей. Ограничимся здесь некоторыми краткими указаниями о развитии этой теории. Этот тип функциональных уравнений, спорадически появлявшийся в первой половине XIX в. (Абель, Лиувилль), начинает приобретать важное значение после того, как Бэр и К. Нейман свели решение «задачи Дирихле» для достаточно правильной области $G$ к решению «интегрального уравнения второго рода»

$$u(x) + \int_a^b K(x, y)\, u(y)\, dy = f(x) \tag{4}$$

относительно неизвестной функции $u$. В 1877 г. К. Нейману удалось решить это уравнение методом «последовательных приближений». Находясь, несомненно, под впечатлением уже упомянутых выше алгебраических аналогий, а также результатов, полученных им для уравнения колеблющейся мембраны, Пуанкаре в 1896 г. ([181a], т. IX, стр. 202—272) приходит к идее введения переменного параметра $\lambda$ перед интегралом в предшествующем уравнении. Он утверждает, что, так же как и для уравнения колеблющейся мембраны, решением является мероморфная функция от $\lambda$. Ему не удалось доказать этот результат, который был установлен (для непрерывного «ядра» $K$ и конечного интервала $[a, b]$) четыре года спустя И. Фредгольмом [88]. Последний, может быть, более сознательно, чем его предшественники, всецело руководствуется аналогией уравнения (4) с линейной системой

$$\sum_{q=1}^{n}\left(\delta_{pq}+\frac{1}{n}a_{pq}\right)x_q=b_p, \quad (1\leqslant p\leqslant n), \tag{5}$$

чтобы найти решение (4) как частное двух выражений, образованных по образцу определителей, входящих в формулы Крамера. К тому же сама мысль была не нова: с самого начала XIX в. метод «неопределенных коэффициентов» (сводящийся к тому, чтобы определить неизвестную функцию, предполагаемую разложимой в ряд $\sum_n c_n\varphi_n$, где $\varphi_n$ — известные функции, путем вычисления коэффициентов $c_n$) привел к «линейным системам с бесконечным числом неизвестных»

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j=b_i \quad (i=1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Фурье, встретив такую систему, «решает» ее еще в духе математики XVIII в.: он отбрасывает все члены, имеющие индексы $i$ или $j$ больше $n$, находит явные решения полученной конечной системы по формулам Крамера, а затем «переходит к пределу», устремляя в решении $n$ к $\infty$! Когда впоследствии подобные трюки перестали удовлетворять математиков, решение все-таки стали искать с помощью определителей. С 1886 г. (после работ Хилла) А. Пуанкаре, а затем и фон Кох построили теорию «определителей бесконечного порядка», позволяющую решать некоторые типы систем (6) в соответствии с классическими образцами. И если эти результаты не могли быть непосредственно применены к задаче, поставленной Фредгольмом, то, во всяком случае, теория фон Коха послужила ему образцом для составления своих «определителей».

Как раз в это время на сцене появляется Гильберт и дает новый толчок развитию всей теории [122b]. Он начал с того, что дополнил работы Фредгольма эффективным осуществлением предельного перехода, который сводит решение системы (5) к решению уравнения (4); Гильберт сейчас же добавил к этому соответствующий предельный переход для теории действительных квадратичных форм, к которому, естественно, приводят типы интегральных уравнений с симметрическим ядром (т. е. таким, что $K(y, x) = K(x, y)$), наиболее часто встречающиеся в математической физике. Таким образом, он пришел к фундаментальной формуле, непосредственно обобщающей приведение квадратичной формы к ее осям:

$$\int_a^b \int_a^b K(s, t)\, x(s)\, x(t)\, ds\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left( \int_a^b \varphi_n(s)\, x(s)\, ds \right)^2, \qquad (7)$$

где $\lambda_n$ — собственные значения (необходимо действительные) ядра $K$; $\varphi_n$ образуют ортонормальную систему соответствующих собственных функций, правая часть формулы (7) является сходящимся рядом при $\int_a^b x^2(s)\, ds \leqslant 1$. Гильберт также показал, что каждая функция, «представимая» в виде $f(x) = \int_a^b K(x, y)\, g(y)\, dy$, допускает «разложение» $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \int_a^b \varphi_n(y) f(y) dy$, и, руководствуясь дальнейшей аналогией с классической теорией квадратичных форм, указал вариационный метод определения $\lambda_n$, который является не чем иным, как распространением хорошо известных экстремальных свойств осей квадрик ([122b], стр. 1—38).

Эти первые результаты Гильберта были тотчас же подхвачены Э. Шмидтом, который придал им более простую и общую форму без применения «определителей Фредгольма» и перехода от конечного к бесконечному и уже очень близко подошел к абстрактному изложению, так как в его доказательствах очевидным образом использовались только основные свойства линейности и положительности интеграла [201a]. Но тем временем у Гильберта появляются еще более общие концепции. Все предшествующие работы выявили важное значение функций с интегрируемым квадратом, а формула Парсеваля устанавливала тесную связь между этими функциями и последовательностями $(c_n)$, такими, что $\sum_n c_n^2 < +\infty$. Эта идея, несомненно, руководила Гильбертом в его мемуарах 1906 г. ([122b], гл. XI—XIII), в которых, возвращаясь к старому методу «неопределенных коэффициентов», он показывает, что решение интегрального уравнения (4) эквивалентно бесконечной системе линейных уравнений

$$x_p + \sum_{q=1}^{\infty} k_{pq} x_q = b_p \quad (p = 1, 2, \ldots) \qquad (8)$$

для «коэффициентов Фурье» $x_p = \int_a^b u(t)\,\omega_p(t)\,dt$ неизвестной функции $u$ по отношению к данной полной ортонормальной системе $(\omega_n)$ (при $b_p = \int_a^b f(t)\,\omega_p(t)\,dt$ и $k_{pq} = \int_a^b \int_a^b K(s, t)\,\omega_p(s)\,\omega_q(t)\,ds\,dt$). Кроме того, единственными решениями [8], которые надо принимать во внимание с этой точки зрения, являются те, для которых $\sum_n x_n^2 < +\infty$, поэтому Гильберт постоянно ограничивается этим типом решений. Но в противоположность этому он расширяет условия, накладываемые на «бесконечную матрицу» $(k_{pq})$ (которая в (8) такова, что $\sum_{p,q} k_{pq}^2 < +\infty$). После этого становится ясным, что в основе всей теории лежит, хотя и не введенное явно, «пространство Гильберта» последовательностей $(x_n)$ действительных чисел, таких, что $\sum_n x_n^2 < +\infty$, возникающее в результате «предельного перехода» от евклидова пространства конечной размерности. Но особенно важным для последующего развития является то, что Гильберт ввел в это пространство не одно, а два различных понятия сходимости (соответствующих тому, что впоследствии стали называть слабой и сильной топологией) [1]), а также «принцип выбора», который есть не что иное, как свойство слабой компактности единичного шара. Новая линейная алгебра, которую он развивает в связи с решением систем (8), целиком опирается на эти топологические понятия: линейные отображения, линейные формы и билинейные формы (ассоциированные с линейными отображениями) классифицируются и изучаются с точки зрения их свойств «непрерывности» [2]). В частности, Гильберт открывает, что метод Фредгольма обязан своим успехом понятию «вполне непрерывности», которое он сформулировал для билинейных форм [3]) и подверг глубокому изучению. Мы не можем здесь более подробно говорить ни об этом важном понятии, ни о прекрасных и содержательных работах, в которых

---

[1]) Вариационное исчисление естественным образом привело к рассмотрению различных понятий сходимости в одном и том же множестве функций (в зависимости от того, требовалась ли только равномерная сходимость функций или равномерная сходимость функций вместе с некоторым числом их производных); но типы сходимости, предложенные Гильбертом, были совершенно новыми для того времени.

[2]) Следует отметить, что под «непрерывной» функцией до 1935 г. практически всегда понимали отображение, преобразующее любую сходящуюся последовательность в сходящуюся последовательность.

[3]) Для Гильберта билинейная форма $B(x, y)$ вполне непрерывна, если $B(x_n, y_n)$ стремится к $B(x, y)$, когда $(x_n)$ и $(y_n)$ *слабо* сходятся соответственно к $x$ и $y$.

Гильберт излагает спектральную теорию симметричных билинейных форм (ограниченных или нет).

Язык Гильберта остается еще классическим языком, и на всем протяжении своих «Grundzüge» он не упускает из виду применений теории, иллюстрируя ее многочисленными примерами (они занимают почти половину книги). Следующее поколение стоит уже на гораздо более абстрактной точке зрения. Под влиянием взглядов Фреше и Ф. Рисса на общую топологию (см. стр. 142) Э. Шмидт [201b] и сам Фреше в 1907—1908 гг. смело вводят в (действительное или комплексное) «пространство Гильберта» язык евклидовой геометрии. Именно в этих работах впервые встречается упоминание о норме (с современным обозначением $\|x\|$), неравенство треугольника, которому она удовлетворяет, а также тот факт, что пространство Гильберта «сепарабельно» и полно. Кроме того, Шмидт доказывает существование ортогональной проекции на замкнутые линейные многообразия, что дает возможность придать теории линейных систем Гильберта более простую и общую форму. В том же 1907 г. Фреше и Ф. Рисс заметили, что пространство функций с интегрируемым квадратом обладает совершенно аналогичной «геометрией»; эта аналогия была полностью выяснена, когда немного позже Ф. Рисс и Э. Фишер доказали, что это пространство полно и изоморфно «пространству Гильберта», и одновременно блестящим образом выявили значение нового орудия, созданного Лебегом. С этого времени можно считать, что основные положения теории гильбертовых пространств прочно утвердились в математике. Среди достижений более позднего времени необходимо упомянуть об аксиоматическом представлении теории, данном приблизительно в 1930 г. М. Г. Стоуном и Дж. фон Нейманом, а также о снятии ограничений «сепарабельности» в работах Реллиха, Лёвига и Ф. Рисса [188g], вышедших около 1934 г.

Однако в самом начале XX в. возникли другие направления, усилившие тенденцию, приведшую к теории нормированных пространств. Общая идея «функционала» (т. е. числовой функции, определенной на множестве, элементы которого сами являются числовыми функциями одной или нескольких действительных переменных) выделилась в последние десятилетия XIX в. в связи с вариационным исчислением, с одной стороны, и теорией интегральных уравнений — с другой. Но хотя это понятие и было разработано главным образом итальянской школой, Пинкерле и особенно Вольтерра, так же как и более общая идея «оператора», все же работы этой школы часто носили довольно формальный характер и относились к частным типам проблем, так как в них отсутствовал обоснованный анализ лежащих в их основе топологических положений. В 1903 г. Адамар положил начало современной теории «топологической» двойственности, исследуя наиболее общие непрерывные линейные «функционалы» на пространстве $\mathscr{C}(I)$ непрерывных числовых функций в компактном интервале $I$ (пространство, наделенное топологией равномерной сходимости) и характеризуя их как пределы последовательностей интегралов $x \to \int_I k_n(t)\,x(t)\,dt$.

В 1907 г. Фреше и Ф. Рисс также показывают, что непрерывные линейные формы на пространстве Гильберта являются «ограниченными» формами, введенными Гильбертом. Затем, в 1909 г. Ф. Рисс дает окончательную формулировку теореме Адамара, выразив каждый непрерывный линейный функционал на $\mathscr{C}(I)$ интегралом Стильтьеса. Эта теорема в дальнейшем послужила отправной точкой для современной теории интегрирования (см. стр. 241).

В следующем году тот же Ф. Рисс [188c] значительно развил теорию, введя и изучив (по образцу теории пространств Гильберта) пространства $L^p(I)$ функций с суммируемой $p$-й степенью в интервале $I$ (для показателя степени $p$, такого, что $1 < p < +\infty$), а через три года после этого он, продолжая предыдущие исследования [188e], публикует аналогичную работу о пространствах последовательностей $L^p(\mathbf{N})$. Как мы увидим дальше, эти исследования немало способствовали разъяснению вопроса о двойственности, так как в них впервые встречаются два двойственных пространства, между которыми не существует естественного изоморфизма [1]).

С этого времени Ф. Рисс начинает размышлять об аксиоматическом исследовании, охватывающем все полученные результаты ([188c], стр. 452); и, по-видимому, только щепетильность аналитика, не желающего слишком далеко отходить от классической математики, удержала его от того, чтобы в этом духе написать свой знаменитый мемуар 1918 г. о теории Фредгольма [188f]. В нем он рассматривает в принципе пространство $\mathscr{C}(I)$ непрерывных функций на компактном интервале. Но, определив норму в этом пространстве и заметив, что $\mathscr{C}(I)$ при этой норме является полным, он уже больше никогда не пользуется в своих рассуждениях ничем иным, кроме аксиом полных нормированных пространств [2]). Не входя здесь в подробное рассмотрение этой

[1]) Хотя двойственность между $L^1$ и $L^\infty$ и присутствует неявно в большинстве работ этого времени об интеграле Лебега, только в 1918 г. Г. Штейнгаус доказал, что любая непрерывная линейная форма на $L^1(I)$ (где $I$ — конечный интервал) имеет вид

$$x \to \int_I f(t)\,x(t)\,dt, \text{ где } f \in L^\infty(I).$$

[2]) Ф. Рисс явно говорит, что применение его теорем к непрерывным функциям есть своего рода «пробный камень» для гораздо более общих концепций ([188f], стр. 71).

работы, отметим, что в ней впервые встречается определенное общим образом понятие линейного вполне непрерывного отображения (как дающего преобразование окрестности в относительно компактное множество) [1]); мастерским аксиоматическим анализом вся теория Фредгольма (в ее качественном аспекте) сводится к одной фундаментальной теореме, а именно что любое локально компактное нормированное пространство является конечномерным.

Общее определение нормированных пространств было дано в 1920—1922 гг. С. Банахом, Г. Ханом и Э. Хелли (последний рассматривал лишь пространства последовательностей действительных или комплексных чисел). В последующие десять лет теория этих пространств развивается главным образом в связи с двумя вопросами, имеющими капитальное значение для приложений, — теорией двойственности и теоремами, связанными с понятием «категории» Бэра.

Мы видели, что идея двойственности (в топологическом смысле) восходит к началу XX в.: она неявно присутствует в теории Гильберта и занимает центральное место в работе Ф. Рисса. Последний, например, уже в 1911 г. замечает и показывает ([188d], стр. 41—42) с помощью рассуждения совершенно общего характера, что соотношение $|f(x)| \leqslant M\|x\|$ (взятое как определение «ограниченных» линейных функционалов в пространстве Гильберта) эквивалентно непрерывности $f$, если все рассмотрение происходит в пространстве $\mathscr{C}(I)$. В связи с характеристикой непрерывных линейных функционалов на $\mathscr{C}(I)$ он заметил также, что условие того, чтобы множество $A$ было плотным в $\mathscr{C}(I)$, состоит в том, что не существует никакой меры Стильтьеса $\mu \neq 0$ на $I$, которая была бы «ортогональна» ко всем функциям из $A$ (обобщая тем самым условия Грама для полных ортонормальных систем). Наконец, в той же работе он констатирует, что пространство, сопряженное с $L^\infty$, «больше», чем пространство мер Стильтьеса ([188d], стр. 62).

С другой стороны, Ф. Риссу в его работах о пространствах $L^p(I)$ и $L^p(\mathbf{N})$ удается изменить метод решения линейных систем в пространстве Гильберта, данный Э. Шмидтом [201b], так, чтобы его можно было применять к более общим случаям. Идея Шмидта состояла в том, чтобы найти «экстремальное» решение

[1]) В своих работах о пространствах $L^p$ Ф. Рисс определил вполне непрерывные отображения как такие, которые преобразуют каждую слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся последовательность, а это в данном случае (принимая во внимание слабую компактность единичного шара в постранстве $L^p$, где $1 < p < +\infty$) эквивалентно данному выше определению. Кроме того, Ф. Рисс указал, что для пространства $L^2$ его определение (переведенное с языка линейных отображений на язык билинейных форм) эквивалентно определению Гильберта ([188 c], стр. 487).

системы (6), определив ту точку замкнутого линейного многообразия, представляемого уравнениями (6), расстояние которой от начала будет минимальным.

Используя ту же идею, Ф. Рисс показывает, что необходимым и достаточным условием для существования функции $x \in L^p(a, b)$, удовлетворяющей уравнениям

$$\int_a^b \alpha_i(t)\, x(t)\, dt = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{9}$$

(в которых $\alpha_i$ принадлежит $L^q$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) и такой, что $\int_a^b |x(t)|^p\, dt \leqslant M^p$, является выполнение неравенства

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \right| \leqslant M. \left( \int_a^b \sum |\lambda_i \alpha_i(t)|^q\, dt \right)^{1/q} \tag{10}$$

для любой конечной последовательности действительных чисел $(\lambda_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

В 1911 г. [188 d] он подобным же образом подходит к «проблеме обобщенных моментов», состоящей в решении системы

$$\int_a^b \alpha_i(t)\, d\xi(t) = b_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots), \tag{11}$$

где $\alpha_i$ — непрерывны, а неизвестной является мера Стильтьеса $\xi$[1]). Здесь мы видим, что можно сформулировать эту проблему как проблему определения непрерывного линейного функционала на $\mathscr{C}(I)$ по его значениям на заданной последовательности точек этого пространства.

В такой же форме рассматривает эту проблему Хелли (в 1912 г.) и получает условия Ф. Рисса несколько иным методом, обладающим более широкой областью применения[2]); в 1921 г.

---

[1]) Классическая «проблема моментов» соответствует случаю, в котором интервал $]a, b[$ есть $]0, +\infty[$ или $]-\infty, +\infty[$ и $\alpha_i(t) = t^i$; кроме того, мера $\xi$ предполагается положительной (в своем мемуаре 1911 г. Ф. Рисс поясняет, как должны быть изменены его общие условия, когда ищут решения этого рода). Среди различных методов решения классической проблемы моментов следует особо отметить метод М. Рисса, в котором изящно объединены общие идеи функционального анализа и теории функций комплексной переменной для получения явных условий для $b_i$ [189].

[2]) Так же как и Ф. Рисс ([188 d], стр. 49—50), Хелли в своем доказательстве использует «принцип выбора», который, разумеется, есть не что иное, как слабая компактность единичного шара в пространстве мер Стильтьеса; Ф. Рисс также применил аналогичное свойство в $L^p$ $(1 < p < +\infty)$.

он возвращается к этой проблеме и рассматривает ее при более общих условиях. Вводя понятие нормы (на пространстве последовательностей), как мы это видели выше, он замечает, что оно обобщает понятие «калибровочной функции» выпуклого тела $n$-мерного пространства, применяемого Минковским в его знаменитых работах по «геометрии чисел» [159a и b]. В этих же работах Минковский определил (в $\mathbf{R}^n$) понятие опорной гиперплоскости и «опорной функции» [159b] и доказал существование опорной гиперплоскости в любой граничной точке выпуклого тела ([159a], стр. 33—35). Хелли распространил эти понятия на пространство последовательностей $E$, снабженное некоторой нормой; он установил двойственность между $E$ и пространством $E'$ последовательностей $u = (u_n)$, таких, для которых при всяком $x = (x_n) \in E$ ряд $(u_n, x_n)$ сходится; он определил в $E'$ норму формулой $\sup\limits_{x \neq 0} \frac{|\langle u, x \rangle|}{\|x\|}$, где $\langle u, x \rangle$ обозначает сумму ряда; эта формула дает в конечномерных пространствах опорную функцию[1]). Решение системы (6) в $E$, где каждая из последовательностей $u_i = (a_{ij})_{j \geqslant 1}$ предполагается принадлежащей $E'$, сводится, как это показывает Хелли, к последовательному решению двух задач: 1°. Найти непрерывную линейную форму $L$ на нормированном пространстве $E'$, такую, что $L(u_i) = b_i$ для любого индекса $i$, что ведет, как он это отмечает, к условиям типа (10); 2°. Установить, может ли такая линейная форма быть записана в виде $u \to \langle u, x \rangle$ для $x \in E$. Последняя задача, как замечает Хелли, не обязательно решается в положительном смысле, даже если $L$ существует, и он ограничивается тем, что дает некоторые достаточные условия, влекущие существование решения $x \in E$ в определенных частных случаях [116].

Эти идеи облекаются в окончательную форму в 1927 г. в фундаментальном мемуаре Г. Хана [107], результаты которого были через два года (независимо) найдены С. Банахом [11c]. Метод Минковского — Хелли применяется Ханом к любому нормированному пространству и дает в сопряженном пространстве структуру полного нормированного пространства. Это дает возможность Хану рассматривать последовательные сопряженные к нормированному пространству и поставить в общем виде проблему рефлексивных пространств, которую лишь смутно предвидел Хелли. Помимо этого, Хан разрешил определенным и наиболее общим образом с помощью трансфинитной индукции по числу измерений капитальную проблему продолжения непрерывного линейного функционала с сохранением его нормы и тем са-

---

[1]) Чтобы получить этим способом норму, надо предположить, что соотношение $\langle u, x \rangle = 0$ для всякого $x \in E$ влечет за собой $u = 0$, как на это, впрочем, явно указывает и Хелли.

мым дал первые примеры нетривиального применения аксиомы выбора в функциональном анализе [1]). К этим результатам Банах присоединил открывающее новые перспективы исследование связей между непрерывным линейным отображением и его сопряженным, распространяя с помощью весьма глубокой теоремы о слабо замкнутых множествах в сопряженных пространствах на общие нормированные пространства результаты, которые до этого времени были известны только для пространств $L^p$ [188c]. Эти результаты получили еще более яркое выражение при использовании понятия факторпространства нормированного пространства, введенного несколькими годами позднее Хаусдорфом и самим Банахом. Наконец, Банаху же принадлежит открытие связи между слабой компактностью единичного шара (замеченной в многочисленных частных случаях, как уже было отмечено выше) и рефлексивностью по крайней мере для пространств счетного типа ([11a], стр. 189). Можно считать, что с этого времени в основных чертах была создана теория двойственности нормированных пространств.

В это же время получили объяснения теоремы парадоксального характера, первые примеры которых восходят приблизительно к 1910 г. В этом году Хеллингер и Теплиц по существу доказали, что последовательность ограниченных билинейных форм $B_n(x, y)$ в пространстве Гильберта, значения которых $B_n(a, b)$ для любой заданной пары $(a, b)$ ограничены сверху (числом, а priori зависящим от $a$ и $b$), на самом деле *равномерно ограничена* на каждом шаре. Их доказательство проводится методом от противного и состоит в построении рекуррентным методом такой пары $(a, b)$, для которой нарушается предположение. Этот метод, известный с тех пор под именем «метода скользящего горба», оказался полезным в ряде аналогичных вопросов. Впрочем, Лебег применял с 1905 г. аналогичный прием для доказательства существования непрерывных функций, ряд Фурье которых в некоторых точках расходится. Одновременно с Хеллингером и Теплицем он применил этот же метод для доказательства того, что слабо сходящаяся последовательность в $L^1$ ограничена по норме [2]). В последующие годы эти примеры умножаются, но без введения существенно новых

---

[1]) В 1923 г. [11b] Банах уже провел аналогичное рассуждение для определения инвариантной меры на плоскости (определенной для *любых* ограниченных множеств).

[2]) Отметим также аналогичную (более простую) теорему, доказанную в 1907 г. Ландау и послужившую Ф. Риссу точкой отправления для его теории пространств $L^p$: если ряд с общим членом $u_n x_n$ сходится для любой последовательности $(x_n) \in L^q(\mathbf{N})$, то последовательность $(u_n)$ принадлежит $L^p(\mathbf{N})$ $\left(\text{где } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$.

идей вплоть до 1927 г., когда Банах и Штейнгауз (частично в сотрудничестве с С. Саксом), связав эти явления с понятием тощего множества и с теоремой Бэра для полных метрических пространств, дали общую формулировку, охватывающую все предшествующие частные случаи [12]. Изучение вопросов «категории» в полных нормированных пространствах приводит Банаха в это же время к многочисленным другим результатам относительно непрерывных линейных отображений. Наиболее замечательным и, безусловно, самым глубоким из них является теорема «о замкнутом графике», которая, как и теорема Банаха — Штейнгауза, оказалась первоклассным орудием современного функционального анализа [11c].

Издание трактата Банаха [1]) «Теория линейных операций» [11a] означало, если можно так сказать, наступление зрелости теории нормированных пространств. В этой книге изложены все результаты, о которых мы говорили, так же как и многие другие, правда, еще несколько беспорядочно, но зато с многочисленными поразительными примерами, взятыми из различных разделов анализа, которые, по-видимому, предвещали этой теории блестящую будущность. Действительно, работа имела большой успех; ее влияние выразилось, в частности, в том, что язык Банаха и его обозначения получили немедленное и чуть ли не повсеместное признание. Однако, несмотря на большое количество исследований по пространствам Банаха, которые велись в течение двадцати лет, проблемы, которые он оставил открытыми, не получили какого-либо ощутимого развития. С другой стороны, если исключить теорию банаховых алгебр и ее применения к гармоническому анализу, почти полное отсутствие новых применений теории к большим проблемам классического анализа несколько разочаровали тех, кто возлагал на нее большие надежды.

Наиболее плодотворным было, пожалуй, ее развитие в направлении расширения и усовершенствования аксиоматического анализа концепций, относящихся к нормированным пространствам. Хотя функциональные пространства, встречавшиеся с начала XX в., в большинстве случаев обладали «естественной» нормой, тем не менее уже были замечены некоторые исключения. Около 1910 г. Э. Мур предложил обобщить понятие равномерной сходимости, заменив его понятием «относительной равномерной сходимости», при котором окрестность нуля образуется функциями $f$, удовлетворяющими неравенству $|f(t)| \leqslant \varepsilon g(t)$, где $g$ есть функция, всюду большая нуля, которая может меняться вместе с окрестностью. С другой стороны, еще до 1930 г. было за-

---

[1]) Биографию С. Банаха (1892—1945) и список его работ см. *Успехи матем. наук,* 1946, I, вып. 3—4. — *Прим. ред.*

мечено, что такие понятия, как простая сходимость, сходимость по мере для измеримых функций или компактная сходимость для целых функций, не поддаются определению посредством нормы; в 1926 г. Фреше заметил, что такого рода векторные пространства могут быть метризуемыми и полными. Но более общая теория этих пространств могла плодотворно развиваться только в связи с понятием выпуклости. Последнее (которое, как мы видели, зародилось у Хелли) стало объектом изучения Банаха и его учеников, которые видели в нем возможность более геометрично истолковывать многочисленные предложения теории нормированных пространств, расчищая тем самым путь общему определению локально выпуклых пространств, которое было дано Дж. фон Нейманом в 1935 г.

Теория этих пространств, и именно вопросы, связанные с двойственностью, получили особое развитие за последние десять лет. В связи с этим надо отметить, во-первых, прогресс в простоте и общности, ставший возможным благодаря уточнению основных понятий общей топологии в течение 1930—1940 гг.; во-вторых, важность, которую приобрело понятие ограниченного множества, введенное Колмогоровым и Нейманом в 1935 г. Основополагающая роль этого понятия в теории двойственности была ясно показана в трудах Макки [153a и b]. Наконец, и это основное, главная побудительная причина исследований лежала в открывшихся новых возможностях применений к анализу там, где теория Банаха оказалась недейственной. В связи с этим надо упомянуть теорию пространств последовательностей Кёте, Теплица и их учеников, изложенную в серии мемуаров, выходящих с 1934 г. [134], недавнее появление теории «аналитических функционалов» Фантапье и особенно теорию распределений Л. Шварца [205], в которой современная теория локально выпуклых пространств нашла себе поле применения, несомненно, далеко еще не исчерпанное.

## ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Развитие современного понятия интеграла тесно связано с эволюцией понятия функции и с углубленным изучением числовых функций действительных переменных, которое ведется с начала XIX в. Известно, что уже Эйлер понимал функцию достаточно общим образом, так как считал, что заданная «произвольная» кривая, которая встречается со всякой прямой, параллельной оси $Oy$, только в одной точке, определяет функцию $y = f(x)$ (ср. стр. 206). Однако он так же, как и большинство его современников, отказывался допускать, что такие функции могут выражаться «аналитически». Эта точка зрения не изменялась вплоть до работ Фурье; открытие последним возможности представлять разрывные функции с помощью тригонометрических рядов [1]) имело решающее влияние на последующие поколения. По правде говоря, доказательствам Фурье явно не хватало точности, и область, в которой они имеют силу, была неясна. Однако интегральные формулы

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\sin nx\,dx \qquad (n \geqslant 1), \quad (1)$$

дающие коэффициенты разложения $\varphi$ в ряд Фурье, имели интуитивно очевидный смысл при предположении, что $\varphi$ непрерывна и кусочно монотонна [2]). Этими именно функциями и ограничивается Дирихле в своем знаменитом мемуаре ([71], т. I,

---

[1]) Слово «открытие» здесь имеет весьма относительный смысл. Эйлеру уже были известны разложения в тригонометрические ряды непериодических функций, таких, как $x$ или $x^2$, а формулы (1) встречаются в 1754 г. в одной работе Клеро и у Эйлера в мемуаре 1777 г. Но тогда как математики XVIII в. за неимением ясного представления о том, что означают разложения в ряды, пренебрегали этими результатами и непоколебимо верили в невозможность получения таких разложений для «разрывных» функций, Фурье, наоборот, утверждал, что эти разложения сходятся: *«какова бы ни была данная кривая, которая соответствует* $\varphi(x)$, *независимо от того, можно ли ее выразить аналитическим уравнением или она не зависит ни от какого регулярного закона»* ([84], т. I, стр. 210).

[2]) Фурье считает интеграл определенным с помощью понятия площади. Напомним, что аналитическое определение интеграла появляется только у Коши (ср. стр. 207).

стр. 117—132), где он устанавливает сходимость ряда Фурье; но уже в конце своей работы он стремится распространить полученные результаты на более обширные классы функций. Известно, что по этому случаю Дирихле, уточняя идеи Фурье, определяет общее понятие функции так, как мы его понимаем сейчас; естественно, надо было начать с выяснения того, в каких случаях было еще возможно приписать смысл формулам (1). *«Когда нарушений непрерывности* [для $\varphi$] *имеется бесконечное число...* говорит Дирихле (цитированная работа, стр. 131—132), — *тогда необходимо, чтобы функция $\varphi(x)$ была такой, что, если обозначить посредством $a$ и $b$ два каких-нибудь количества, заключенных между $-\pi$ и $+\pi$, можно было бы поместить между $a$ и $b$ другие количества $r$ и $s$, достаточно близкие друг к другу, так, чтобы функция оставалась непрерывной в интервале от $r$ до $s$. Легко убедиться в необходимости этого ограничения, принимая во внимание, что различные члены ряда Фурье суть определенные интегралы, и прибегая к основному понятию интеграла. Тогда становится ясно, что интеграл от функции имеет смысл только в том случае, когда функция удовлетворяет сформулированному выше условию».*

В переводе на современный язык, Дирихле, по-видимому, считал, что интегрируемость функции эквивалентна условию, что точки разрыва образуют нигде не плотное множество. К тому же несколькими строками ниже он дает свой знаменитый пример функции, равной $c$ для рациональных $x$ и иному числу $d$ для иррациональных $x$, и утверждает, что эта функция *«не могла бы быть поставлена»* под знак интеграла. Он обещал рассмотреть этот вопрос в своих последующих работах, но они так и не были изданы [1]), и в течение 25 лет никто, кажется, в этом направлении не продвинулся ни на шаг вперед, возможно, потому, что в то время изучение столь «патологических» функций ни у кого не вызывало интереса. Во всяком случае, когда Риман в 1854 г. ([187a], стр. 227—264, русский перевод, стр. 227—260) занялся этим вопросом (опять-таки в связи с тригонометрическими [2]) рядами), он счел необходимым дать оправдание своей работе: *«ибо при всем несовершенстве наших знаний о том, как силы и состояния материи изменяются в бесконечно малом в зависимости от места и времени, все же мы можем с уверенностью сказать, что те функции, на которые не распространяются*

[1]) Судя по некоторым (довольно туманным) указаниям Липшица [148a], Дирихле, может быть, верил, что если множество точек разрыва является нигде не плотным, то его «производное» будет конечным. Во всяком случае, он ограничивал свои исследования случаем, подпадающим под это условие.

[2]) От Дирихле и Римана до наших дней мы можем проследить тесную связь между теорией интегрирования и тем, что мы называем теперь «гармоническим анализом» и что является в некотором смысле пробным камнем для этой теории.

*условия Дирихле, в природе не встречаются. Тем не менее,*—продолжает он, — *нужно думать, что случаи, не рассмотренные Дирихле, заслуживают внимания по двум причинам. Во-первых, как указывает сам Дирихле в заключение своей работы, этот вопрос стоит в теснейшей связи с основными принципами исчисления бесконечно малых и может служить для того, чтобы придать этим принципам большую ясность и определенность. С этой точки зрения исследование упомянутых случаев представляет непосредственный интерес.*

*Во-вторых, область применения рядов Фурье не ограничивается одними лишь физическими задачами; эти ряды применяются теперь с успехом также в области чистой математики, а именно в теории чисел, и можно думать, что здесь как раз те функции, представимость которых с помощью тригонометрических рядов не была выяснена Дирихле, должны играть важную роль»* ([187a], стр. 237—238, русский перевод, стр. 234—235).

Идея Римана состояла в том, чтобы, отправляясь от процедуры приближения интеграла, реабилитированной Коши, определить, в каких случаях «суммы Римана» функции $f$ на ограниченном интервале $[a, b]$ стремятся к пределу (если максимальная длина интервалов разбиения стремится к 0). Он без труда получает решение этой проблемы в следующем виде: для всякого $\alpha > 0$ найдется такое разбиение интервала $[a, b]$ на части, максимальная длина которых достаточно мала, а сумма интервалов этого разбиения, в которых колебание $f > \alpha$, является произвольно малой. Кроме того, он показывает, что это условие выполняется не только для непрерывных и кусочно-монотонных функций, но также и для функций, которые могут иметь всюду плотное множество точек разрыва [1]).

Мемуар Римана был опубликован только в 1867 г., после его смерти. На этот раз время было более благоприятным для такого рода исследований и «интеграл Римана» занял подобающее ему место в углубленном изучении «непрерывности» и функций действительной переменной (Вейерштрасс, Дюбуа-Реймон, Ганкель, Дини), которое привело к появлению теории множеств в работах Кантора. Форма, данная Риманом условию интегрируемости, наталкивала на мысль о «мере» множества точек разрыва функции в некотором интервале. Прошло, однако, около 30 лет, прежде чем удалось найти плодотворное и удобное определение этого понятия.

Первые попытки в этом направлении были сделаны Штольцем, Гарнаком и Кантором (1884—1885). Первые двое, чтобы

---

[1]) В противоположность этому Г. Дж. Смит в 1875 г. построил первый пример функции, не интегрируемой в смысле Римана, множество точек разрыва которой является нигде не плотным ([210], т. II, стр. 86—100).

определить «меру» ограниченной части $E$ из $\mathbf{R}$, рассматривают множества $F\supset E$, которые являются *конечными* совокупностями интервалов, берут для каждого $F$ сумму длин соответствующих интервалов и называют «мерой» $E$ нижнюю грань этих чисел. Кантор сразу же рассматривает ограниченное множество $E$ в пространстве $\mathbf{R}^n$ и для каждого такого множества и числа $\rho > 0$ определяет окрестность $V(\rho)$ множества $E$, образованную точками, расстояние которых от $E$ не превышает $\rho$, а затем берет нижнюю грань «объемов» $V(\rho)$ [1]). По этому определению «мера» множества равняется мере его замыкания, откуда, в частности, следует, что «мера» объединения двух множеств, не имеющих общих точек, может быть точно меньше суммы «мер» этих двух множеств. Несомненно, для того чтобы сгладить это последнее затруднение, Пеано [177a] и Жордан ([129c], т. I, стр. 28—31) через несколько лет вводят наряду с «мерой» Кантора $\mu(A)$ множества $A$, заключенного в кирпиче $I$ [2]), «внутреннюю меру» $\mu(I) - \mu(I - A)$ и называют «измеримыми» множества $A$ (именуемые теперь «квадрируемыми»), для которых эти два числа совпадают. Объединение двух квадрируемых множеств $A$, $B$ без общих точек тогда тоже квадрируемо и имеет в качестве «меры» сумму «мер» $A$ и $B$; но открытое ограниченное множество не обязательно квадрируемо, так же как и множество рациональных чисел в ограниченном интервале; это значительно снижало интерес к понятию «меры» Пеано — Жордана.

Заслуга выявления недостатков предшествующих определений принадлежит Э. Борелю [25], который указал также и способы их исправления. Уже со времени Кантора было известно, что всякое открытое множество $U$ из $\mathbf{R}$ является объединением счетного семейства своих «компонент», открытых интервалов, попарно не имеющих общих точек. Вместо попыток приблизить $U$ «снаружи», замкнув его в конечный ряд интервалов, Борель, опираясь на предшествующие результаты, предлагает взять мерой для $U$ (когда $U$ ограничено) сумму длин его компонент. Затем он в весьма общих чертах [3]) описывает класс множеств (получивших впоследствии название «борелевских»), которые можно получить, отправляясь от открытых множеств

---

[1]) Кантор не дает точного определения этого «объема» и ограничивается замечанием, что его можно вычислить с помощью кратных интегралов ([35], стр. 229—236 и 257—258). Легко видеть, что его определение эквивалентно определению Штольца — Гарнака, если применить теорему Бореля — Лебега.

[2]) Под кирпичом понимается множество точек $\mathbf{R}^n$, определяемых неравенствами $a_i < x_i < b_i$; $i = 1, \ldots, n$. — *Прим. перев.*

[3]) В то время мера для Бореля была лишь техническим средством при изучении некоторых рядов рациональных функций, и он сам подчеркивает, что для поставленной им цели использование меры главным образом опирается на тот факт, что множество, мера которого отлична от нуля, не является счетным ([25], стр. 48).

бесконечным повторением операций счетного объединения и «вычитания» $A - B$, и указывает, что для этих множеств можно определить меру, обладающую основным свойством *полной аддитивности:* если последовательность $(A_n)$ образована из «борелевских» попарно непересекающихся множеств, то мера их объединения (предполагаемого ограниченным) равна сумме их мер.

Это определение открывало в анализе новую эру. С одной стороны, в соединении с современными ему работами Бэра оно являлось отправной точкой для целого ряда исследований топологического характера по классификации точечных множеств (см. стр. 167); но главным образом оно послужило базисом для расширения понятия интеграла, осуществленного Лебегом в самом начале XX в.

Лебег начинает свою диссертацию [143а] с того, что уточняет и развивает краткие указания Э. Бореля. Следуя методу Пеано — Жордана, он определяет «внешнюю меру» ограниченного множества $A \subset \mathbf{R}$ как нижнюю грань мер открытых множеств, содержащих $A$; затем, если $I$ есть интервал, содержащий $A$, то «внутренняя мера» $A$ есть разность внешних мер $I$ и $I - A$. Таким образом получается понятие «измеримого множества», которое отличается от первоначального «конструктивного» определения Бореля только присоединением части множества меры нуль в смысле Бореля. Это определение непосредственно распространяется на пространства $\mathbf{R}^n$; старая концепция определенного интеграла $\int_a^b f(t)\,dt$ от ограниченной неотрицательной функции как «площади», ограниченной кривой $y = f(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$ и $y = 0$, давала таким образом немедленное распространение интеграла Римана на любые функции $f$, для которых мера предшествующего множества была определена. Но оригинальность Лебега проявляется не столько в идее подобного расширения [1]), сколько в открытии основной теоремы о переходе к пределу под знаком таким образом определенного интеграла — теоремы, которая является у него следствием полной аддитивности меры [2]). Он сейчас же увидел важное значение этой теоремы и сделал ее краеугольным камнем дидактического изложения своей теории, которое он дал в 1904 г. в своей

---

[1]) Независимо от Лебега эту же мысль высказал У. Г. Юнг для полунепрерывных функций [250а].

[2]) Арцела [7а] доказал частный случай этой теоремы, в котором речь идет о последовательности интегрируемых в смысле Римана в компактном интервале и равномерно ограниченных функций, предел которых также интегрируем в смысле Римана

знаменитой книге: «Интегрирование и отыскание примитивных функций» [143c] [1]).

Мы не можем здесь подробно перечислять бесчисленные достижения в области классических проблем исчисления бесконечно малых, которые были получены в результате открытия Лебега. Он сам применил уже эту теорию в своей диссертации для распространения классических понятий длины и площади на более общие множества, чем кривые линии и обычные поверхности. По вопросу об интенсивном развитии этой теории в последующие полвека отсылаем читателя к недавно вышедшему труду Л. Чезари [45]. Упомянем также о применениях к тригонометрическим рядам, развитых Лебегом почти сразу же после его диссертации [143b], которые открывали новые перспективы для этой теории, разработка которой в наше время еще далеко не закончена (см. [253]). Наконец определение пространств $L^p$ и теорема Фишера—Рисса ([83], [188a и c]; ср. стр. 224) особенно способствовали выявлению той роли, которую могло сыграть в функциональном анализе новое понятие интеграла; его значение только возрастало вместе с последующим обобщением этого понятия, о котором мы вскоре будем говорить.

Прежде всего остановимся немного дольше на одной из проблем, которой Лебег уделил наибольшее внимание, на связи между понятиями интеграла и примитивной. После того как Риман дал обобщение интеграла, естественно было поставить вопрос, справедливо ли для этих более общих случаев классическое соответствие между интегралом и примитивной, имеющее место для непрерывных функций. Ибо легко дать примеры функций $f$, интегрируемых в смысле Римана, и таких, что $\int_a^x f(t)\,dt$ не имеет в некоторых точках производной (даже производной справа или слева); и наоборот, в 1881 г. Вольтерра показал, что функция $F(x)$ может иметь производную, ограниченную в интервале $I$, но не интегрируемую (в смысле Римана) в $I$. С помощью очень тонкого анализа (при котором переход к пределу под знаком интеграла далеко не является достаточным) Лебегу удается

[1]) Среди наиболее значительных следствий этой теоремы в общей теории интегрирования надо особенно отметить теорему Егорова о сходимости последовательности измеримых функций [75], уточняющую предшествующие высказывания Бореля и Лебега. С другой стороны, измеримые (числовые) функции сперва были определены Лебегом при помощи того свойства, что для такой функции $f$ образ каждого интервала из $\mathbf{R}$, даваемый функцией, обратной к $f$, есть измеримое множество. Но начиная с 1903 г. Борель и Лебег обратили свое внимание на топологические свойства этих функций; они приняли окончательную форму у Витали, который в 1905 г. [234a] первый сформулировал свойство измеримых функций, обычно известное как «теорема Лузина» (который вновь нашел его в 1912 г.).

показать, что если $f$ интегрируема (в его смысле) в $[a, b]$, то $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$ имеет почти всюду производную, равную $f(x)$ [143c]. Наоборот, если функция $g$ дифференцируема в интервале $[a, b]$ и если ее производная $g'=f$ *ограничена*, то $f$ интегрируема и мы имеем формулу $g(x)-g(a)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$. Но Лебег констатирует, что проблема сильно усложняется, когда $g'$ неограничена. В этом случае $g'$ не обязательно должна быть интегрируема, и поэтому одна из первых задач состояла в том, чтобы охарактеризовать непрерывные функции $g$, для которых $g'$ существует почти всюду и является интегрируемой. Ограничиваясь случаем, где одно из производных[1]) чисел функции $g$ всюду *конечно*, Лебег показал, что $g$ необходимо есть функция с *ограниченной* вариацией[2]).

Наконец, он устанавливает предложение, обратное последнему результату: функция с ограниченной вариацией $g$ допускает производную почти всюду, и $g'$ интегрируема; но равенство

$$g(x)-g(a)=\int\limits_a^x g'(t)\,dt \tag{2}$$

выполняется не обязательно; разность между обеими частями этого равенства есть функция с ограниченной вариацией, не равная постоянной и имеющая производную, почти всюду равную нулю («сингулярная» функция). Оставалось охарактеризовать функции с ограниченной вариацией $g$, такие, для которых имеет место равенство (2). Лебег устанавливает, что эти функции (названные Витали, который тщательно их исследовал, «абсолютно непрерывными») имеют следующее свойство: полная вариация $g$ в открытом множестве $U$ (сумма полных вариа-

---

[1]) Производными числами справа функции $g$ в точке $x$ являются пределы $\lim\limits_{h\to 0}\ \sup\limits_{h>0} \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$, $\lim\limits_{h\to 0}\ \inf\limits_{h>0} \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$. Аналогично определяются производные числа слева.

[2]) Эти функции были введены Жорданом в связи со спрямлением кривых [129c]; он показал, что им можно дать два следующих эквивалентных определения: а) $f$ есть разность двух возрастающих функций; б) для всякого разбиения интервала $[a, b]$ посредством возрастающей конечной последовательности точек $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$, при $a=x_0$, $b=x_n$, сумма $\sum\limits_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$ ограничена числом, не зависящим от рассматриваемого разбиения. Верхняя грань этих сумм есть *полная вариация* $f$ в $[a, b]$.

ций $g$ в каждой из связных компонент $U$) стремится к 0 вместе с мерой $U$.

Ниже мы увидим, каким образом, в несколько ослабленной форме, эти результаты приобрели впоследствии гораздо более общее значение. В своей первоначальной форме они находили себе довольно ограниченное поле применения, не выходя за рамки «тонкой» теории функций действительных переменных, последующее развитие которой мы здесь не рассматриваем. Ограничимся упоминанием о глубоких исследованиях Данжуа и его соперников и последователей (Перрон, де ля Валле-Пуссен, Хинчин, Лузин, Банах и т. д.); читатель найдет подробное изложение этих работ в книге С. Сакса [196].

Одним из наиболее значительных следствий теории Лебега было развитие теории кратных интегралов. Само это понятие было введено в середине XVIII в., вначале в форме «неопределенного интеграла» (по аналогии с теорией интеграла от функции одной переменной $\int\int f(x, y)\,dx\,dy$ обозначает решение уравнения $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=f(x, y)$). Но уже в 1770 г. у Эйлера сложилась ясная концепция двойного интеграла, распространенного на ограниченную область (границами которой являются дуги аналитических кривых), и он правильно записывает формулу для вычисления такого интеграла посредством двух последовательных простых интегралов ([81a] (1), т. XVII, стр. 289—315). Нетрудно было обосновать эту формулу, отправляясь от «сумм Римана», если интегрируемая функция была непрерывна, а область интегрирования не слишком сложна; но как только начали рассматривать более общие случаи, метод Римана встретил серьезные затруднения ($f(x, y)$ могла быть интегрируемой в смысле Римана, а $\int dx \int f(x, y)\,dy$ мог не иметь смысла, когда простые интегралы взяты в смысле Римана). Однако эти трудности исчезают, если принять определение Лебега; последний в своей диссертации уже показал, что если $f(x, y)$ является ограниченной «функцией Бэра», то такими же будут и функции $y \to f(x, y)$ (для любого $x$) и $x \to \int f(x, y)\,dy$ и имеет место формула

$$\int\int f(x, y)\,dx\,dy = \int dx \int f(x, y)\,dy \tag{3}$$

(интеграл взят по прямоугольнику). Несколько позднее Фубини [92] существенно дополнил этот результат, доказав, что если предположить только интегрируемость функции $f$, то множество точек $x$, таких, что $y \to f(x, y)$ не будет интегрируемой, имеет меру нуль, что позволяло распространить формулу (3) на этот случай.

Наконец, в 1910 г. [143e] Лебег занялся распространением на кратные интегралы своих результатов относительно производных простых интегралов. Он присоединяет к функции $f$, интегрируемой на любом компактном множестве из $\mathbf{R}^n$, *функцию множества* $F(E)=\int\limits_E f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$, определенную для любого интегрируемого множества $E$ из $\mathbf{R}^n$; в этом понятии обобщено понятие «неопределенного интеграла». В связи с этим он замечает, что такая функция обладает следующими двумя свойствами: 1) она вполне аддитивна и 2) «абсолютно непрерывна» в том смысле, что $F(E)$ стремится к 0 вместе с мерой $E$. Основная часть мемуара Лебега состоит в доказательстве обратного предложения [1]). Но он на этом не останавливается и, продолжая исследования в том же направлении, подчеркивает возможность обобщения понятия функции с ограниченной вариацией, рассматривая функции измеримого множества $F(E)$ полностью аддитивные и такие, что $\sum\limits_n |F(E_n)|$ остается ограниченной для любого счетного разбиения $E$ на измеримые подмножества $E_n$. И если он ограничивается тем, что рассматривает такие функции только на множестве «кирпичей» из $\mathbf{R}^n$, для нас ясно, что оставалось сделать всего лишь шаг, чтобы прийти к общему понятию меры, которое и было определено в 1913 г. Дж. Радоном и объединило как понятие интеграла Лебега, так и понятие интеграла Стильтьеса, к рассмотрению которого мы теперь и перейдем.

В 1894 г. Т. Стильтьес опубликовал весьма оригинальный мемуар «Исследование непрерывных дробей» [215], в котором в связи с вопросом довольно частного характера он ставит и с редким изяществом решает совершенно новые проблемы теории аналитических функций и теории функций действительной переменной [2]). Чтобы выразить предел некоторой последовательности аналитических функций, Стильтьес, между прочим, пришел к введению понятия положительного «распределения масс» на прямой, понятия, которое уже давно было известно в физике, но которое в математике до сих пор рассматривалось только при некоторых ограничительных предположениях (обычно предполагалось, что в каждой точке существует «плотность», изменяющаяся непрерывным образом). Стильтьес заметил, что зада-

[1]) Главным орудием этого доказательства служит теорема о покрытии, доказанная несколько ранее Витали [243b] и до сих пор являющаяся основной в вопросах этого рода.

[2]) Здесь же была сформулирована и решена наравне с другими знаменитая «проблема моментов» (ср. стр. 241).

ние такого распределения эквивалентно заданию возрастающей функции $\varphi(x)$, которая выражает всю массу, заключенную в интервале с концами 0 и $x$ для $x>0$, причем масса меняет знак для $x<0$ и точки разрыва $\varphi$ соответствуют массам, «сконцентрированным в одной точке» [1]). Затем Стильтьес образует для такого распределения массы в интервале $[a, b]$ «суммы Римана» $\sum_i f(\xi_i)(\varphi(x_{i+1})-\varphi(x_i))$ и показывает, что когда $f$ непрерывна в $[a, b]$, эти суммы стремятся к пределу, который он обозначает $\int_a^b f(x)\,d\varphi(x)$. Так как Стильтьесу надо было интегрировать только непрерывные функции (и даже функции дифференцируемые), он не стал дальше изучать этот интеграл [2]); в последующее десятилетие это понятие, по-видимому, не привлекало к себе внимания [3]). Но в 1909 г. Ф. Рисс [188 d] при решении проблемы, поставленной Адамаром несколькими годами раньше (ср. стр. 224), доказал, что интегралы Стильтьеса $f \to \int_a^b f\,d\varphi$ являются наиболее общими непрерывными линейными функционалами на пространстве $\mathscr{C}(I)$ числовых функций, непрерывных в интервале $I=[a, b]$ (причем $\mathscr{C}(I)$ снабжено топологией равномерной сходимости) [4]). Изящество и простота этого результата почти немедленно вызвали различные обобщения. Наиболее удачное из них было предложено Дж. Радоном в 1913 г. [184]; комбинируя идеи Ф. Рисса и Лебега, Дж. Радон показал, как можно определить интеграл с помощью приемов Лебега, отправляясь от произвольной «вполне аддитивной функции множества» (определенной на множествах, измеримых по Лебегу), вместо того чтобы исходить из меры Лебега. Понятие определенной

---

[1]) Стильтьес не делает различия между разного рода интервалами, имеющими одни и те же концы $a$, $b$, и это приводит его к мысли, что у точек разрыва функции $\varphi$ часть массы, сконцентрированной в $c$, принадлежит интервалу с началом в точке $c$, а другая часть — интервалу с концом в $c$ соответственно значению $\varphi(c)$.

[2]) Надо, однако, отметить первое появление идеи «сходимости» последовательности мер у Стильтьеса ([215], стр. 95; фактически речь идет о *сильном* пределе).

[3]) Однако оно приобретает важное значение, когда в 1906 г. Гильберт и его школа начинают развивать спектральную теорию операторов. В связи с этим Хеллингер в 1907 г. определяет интегралы, подобные тому, который он обозначил $\int \frac{(dg)^2}{df}$ и которые вначале казались более общими, чем интеграл Стильтьеса. Однако в 1912 г. Хан показал, что они сводятся к этому последнему.

[4]) В этой работе также появляется понятие сходимости в основном (limite vague) последовательности мер ([188 d], стр. 49).

этим способом «меры Радона» на $\mathbf{R}^n$ поглощает понятие функции «с ограниченной вариацией». Представление подобной функции в виде разности двух возрастающих функций является частным случаем представления меры в виде разности двух положительных мер. Таким же образом «мера с базой $\mu$» соответствует понятию «абсолютно непрерывной» функции, а разложение какой-нибудь меры на меру с базой $\mu$ и меру, сингулярную относительно $\mu$, соответствует разложению, полученному Лебегом, функции с ограниченной вариацией на сумму абсолютно непрерывной функции и «сингулярной функции». Кроме того, Радон показал, что «плотность» по отношению к $\mu$ меры с базой $\mu$ еще существует, когда $\mu$ есть мера, имеющая в качестве базы меру Лебега. Он использовал мысль, высказанную Риссом (развитую и популяризированную впоследствии Дж. фон Нейманом и другими), о построении образа меры $\mu$ посредством отображения $\theta$ из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}$, выбранного так, что $\theta(\mu)$ будет мерой Лебега на $\mathbf{R}$.

Почти вслед за появлением мемуара Радона Фреше заметил, что почти все результаты этой работы могут быть распространены на случай, когда «вполне аддитивная функция множества» вместо того, чтобы быть определенной на измеримых подмножествах $\mathbf{R}^n$, определяется для некоторых подмножеств какого-нибудь множества $E$. (Эти подмножества таковы, что операции счетного объединения и «вычитания» дают такие множества, для которых функция определена.) Однако выражение меры с базой $\mu$ в виде $g\mu$ основывалось у Лебега и Радона на рассуждениях, в которые существенным образом входила топология $\mathbf{R}^n$. Мы видели, что доказательство Радона применимо лишь, если $\mu$ есть мера, имеющая в качестве базы меру Лебега. Только в 1930 г. О. Никодим [168] получил эту теорему в ее общей форме посредством прямого рассуждения, значительно упрощенного через несколько лет фон Нейманом благодаря использованию свойств пространств $L^2$ ([238d], стр. 127—130).

После мемуара Радона можно считать общую теорию интегрирования в основном законченной; среди последующих достижений в этой области следует отметить лишь определение бесконечного произведения мер, введенное Даниелем [57b], и определение интеграла функции со значениями в пространстве Банаха, данное Бохнером в 1933 г. [20] и предшествующее более общему изучению «слабого интеграла», развитого спустя несколько лет Гельфандом [96], Данфордом и Петти ([73] и [74]). Но оставалось еще популяризировать новую теорию и сделать из нее математическое орудие широкого употребления, так как большинство математиков к 1910 г. все еще видели в «интеграле Лебега» инструмент высокой точности, требующий деликатности в обращении и предназначенный только для изысканий в высшей степени тонких и в высшей степени абстрактных. Это было выполнено в книге Каратеодори, которая долгое время оставалась классической [37] и которая, кроме того, обогатила теорию Радона многочисленными оригинальными замечаниями.

Но в этой же книге понятие интеграла, которое превыше всего занимало Лебега (как это достаточно ясно выражено заглавиями его диссертации [143a] и его основной работы по этим вопросам [143c]), впервые уступает место понятию меры, которое у Лебега (как до него у Жордана) было вспомогательным техническим средством. Это изменение точки зрения у Каратеодори, безусловно, обязано тому чрезмерному значению, которое он придавал «$p$-мерным мерам» [1]). С этих пор авторы работ по интегрированию разбились на два лагеря, в зависимости от двух различных точек зрения, и дело не обошлось без дебатов, во время которых, если и не было пролито много крови, то было пролито много чернил. Одна часть математиков следовала за Каратеодори; в их изложении, все более и более абстрактном и аксиоматизированном, мера со всевозможными техническими изощрениями, которым она поддается, не только играет доминирующую роль, но и имеет тенденцию к потере связи с топологическими структурами, с которыми она фактически связана в большинстве проблем, где она встречается. Другая часть в своих изложениях более или менее близко примыкала к методу, предложенному Юнгом в 1911 г. в мемуаре, к сожалению, почти незамеченном [250b], и затем развитому Даниелем. Изучая интеграл Лебега, Юнг отправлялся от «интеграла Коши» от непрерывных функций с компактным носителем, который предполагался известным, для того чтобы последовательно определить верхний интеграл от полунепрерывных снизу функций, а затем от произвольных числовых функций, откуда он пришел к определению интегрируемых функций, скопированному с определения Лебега для множеств — все это чисто «функциональными» способами. В 1918 г. Даниель ([57a]; ср. [150]) распространил эту теорию с некоторыми изменениями на функции, определенные на произвольном множестве. На этой же точке зрения (и в тесной связи с методами, применяемыми в спектральной теории до Гельфанда) стоит Ф. Рисс в своем мемуаре [188h], в котором облекает в краткую и изящную форму

1) Здесь имеется в виду обобщение понятия «длина плоской кривой» на случай произвольных значений $n$ и $p$ измерений объемлющего и изучаемого пространства; при этом, само собой разумеется, полагают, что $0 \leqslant p \leqslant n$, но не всегда, что $p$ есть целое число. Этот вопрос рассматривался в трудах многих математиков, начиная от Минковского, Каратеодори и Хаусдорфа; сам Лебег, который в своей диссертации занимался лишь частными случаями, кажется, видел в нем только средство, которое дает возможность испытать силу выкованных им орудий.

некоторые результаты по теории упорядоченных пространств, играющих известную роль в теории интегрирования.

Развитие теории интегрирования с 1920 г. следует искать не столько в работах, читать которые более или менее приятно, но содержание которых не могло уже существенно отличаться друг от друга, но главным образом в области ее применений: в теории вероятностей (некогда служившей предлогом для различных загадок и парадоксов и ставшей ветвью теории интегрирования только после ее аксиоматизации Колмогоровым [133], но ветвью автономной, со своими методами и собственными проблемами), в эргодической теории, в спектральной теории и в гармоническом анализе, после того как открытие Хааром меры, которая носит его имя, и развитие идей, стимулированное этим открытием, сделали интеграл одним из наиболее важных орудий в теории групп.

ПРИЛОЖЕНИЕ[1])

# АРХИТЕКТУРА МАТЕМАТИКИ

## Математика или математики? [2])

Дать в настоящее время общее представление о математической науке — значит заняться таким делом, которое, как кажется, с самого начала наталкивается на почти непреодолимые трудности благодаря обширности и разнообразию рассматриваемого материала. В соответствии с общей тенденцией в науке с конца XIX в. число математиков и число работ, посвященных математике, значительно возросло. Статьи по чистой математике, публикуемые во всем мире в среднем в течение одного года, охватывают многие тысячи страниц. Не все они имеют, конечно, одинаковую ценность; тем не менее после очистки от неизбежных отбросов оказывается, что каждый год математическая наука обогащается массой новых результатов, приобретает все более разнообразное содержание и постоянно дает ответвления в виде теорий, которые беспрестанно видоизменяются, перестраиваются, сопоставляются и комбинируются друг с другом. Ни один математик не в состоянии проследить это развитие во всех подробностях, даже если он посвятит этому всю свою деятельность. Многие из математиков устраиваются в каком-либо закоулке математической науки, откуда они и не стремятся выйти, и не только почти полностью игнорируют все то, что не касается предмета их исследований, но не в силах даже понять язык и терминологию своих собратьев, специальность которых далека от них. Нет такого математика, даже среди обладающих самой обширной эрудицией, который бы не чувствовал себя чужеземцем в некоторых областях огромного математического мира; что же касается тех, кто подобно Пуанкаре или Гильберту оставляет печать своего гения почти во всех его областях, то они составляют даже среди наиболее великих редчайшее исключение.

Поэтому даже не возникает мысли дать неспециалисту точное представление о том, что даже сами математики не могут

---

[1]) N. Bourbaki, L'Architecture des mathématiques, Les grands courants de la pensée mathématiques (Cahiers du Sud), 1948, p. 35—47. Русский перевод был напечатан в сборнике «Математическое просвещение», вып. 5, 1960, стр. 99—112, перевод с французского Д. Н. Ленского. — *Прим. ред.*

[2]) La Mathématique ou les Mathématiques? (т. е. одна математика или несколько математик?). — *Прим. перев.*

постичь во всей полноте. Но можно спросить себя, является ли это обширное разрастание развитием крепко сложенного организма, который с каждым днем приобретает все больше и больше согласованности и единства между своими вновь возникающими частями, или, напротив, оно является только внешним признаком тенденции к идущему все дальше и дальше распаду, обусловленному самой природой математики; не находится ли эта последняя на пути превращения в Вавилонскую башню, в скопление автономных дисциплин, изолированных друг от друга как по своим методам, так и по своим целям и даже по языку? Одним словом, существуют в настоящее время одна математика или несколько математик?

Хотя в данный момент этот вопрос особенно актуален, ни в коем случае не надо думать, что он нов; его ставили с первых же шагов математической науки. Ведь действительно, если даже не принимать в расчет прикладной математики, между геометрией и арифметикой (по крайней мере, в их элементарных разделах) существует очевидная разница в происхождении, поскольку последняя вначале была наукой о дискретном, а первая — наукой о непрерывной протяженности (два аспекта, которые были коренным образом противопоставлены друг другу после открытия иррациональностей). Именно это открытие оказалось роковым для первой попытки унификации нашей науки — арифметизации пифагорейцев («все вещи суть числа»).

Мы бы зашли слишком далеко, если бы от нас потребовали проследить те превратности судьбы, которым подвергалась унитарная концепция математики от пифагорейцев до наших дней. Кроме того, это — работа, к которой более подготовлен философ, чем математик, так как общей чертой всех попыток объединить в единое целое математические дисциплины — все равно, идет ли речь о Платоне, о Декарте или Лейбнице, об арифметизации или логистике XIX в., — является то, что они делались в связи с какой-либо более или менее претенциозной философской системой, причем исходным пунктом для них всегда служили априорные воззрения на отношения между математикой и двойной действительностью внешнего мира и мира мысли. Самое лучшее, что мы сумеем сделать, — это отослать читателя по этому вопросу к историческому и критическому исследованию Л. Брунсвига «Этапы математической философии [1]). Наша задача более скромна и более точно очерчена; мы намереваемся остаться внутри математики и искать ответ на поставленный вопрос, анализируя ее собственное развитие.

---

[1]) Brunschvig L., Les étapes de la philosophie mathématique, Paris, Alcana, 1912.

## Логический формализм и аксиоматический метод

После более или менее очевидного банкротства различных систем, на которые мы указывали выше, в начале этого века, казалось, почти полностью отказались от взгляда на математику как на науку, характеризуемую единым предметом и единым методом; скорее наблюдалась тенденция рассматривать ее как «ряд дисциплин, основывающихся на частных, точно определенных понятиях, связанных тысячью нитей» [1]), которые позволяют методам, присущим одной из дисциплин, оплодотворять одну или несколько других. В настоящее время, напротив, мы думаем, что внутренняя эволюция математической науки вопреки видимости более чем когда-либо упрочила единство ее различных частей и создала своего рода центральное ядро, которое является гораздо более связным целым, чем когда бы то ни было. Существенное в этой эволюции заключается в систематизации отношений, существующих между различными математическими теориями; ее итогом явилось направление, которое обычно называют «аксиоматическим методом».

Иногда говорят также «формализм» или «формалистический метод»; но необходимо с самого начала остерегаться путаницы, которую вызывают эти недостаточно четко определенные слова и которая и без того часто используется противниками аксиоматического метода. Каждому известно, что внешней отличительной чертой математики является то, что она представляется нам той «длинной цепью рассуждений», о которой говорил Декарт. Каждая математическая теория является цепочкой высказываний, которые выводятся друг из друга согласно правилам логики, во всем существенном совпадающей с логикой, известной со времен Аристотеля под названием «формальной логики», соответствующим образом приспособленной к специфическим потребностям математики. Таким образом, утверждение, что «дедуктивное рассуждение» является для математики объединяющим началом, — тривиальная истина. Но столь поверхностное замечание не может, конечно, служить объяснением единства различных математических теорий, точно так же, как нельзя, например, объединить в единой науке физику и биологию под предлогом, что и та, и другая используют экспериментальный метод. Способ рассуждения, заключающийся в построении цепочки силлогизмов, является только трансформирующим механизмом, который можно применять независимо от того, каковы посылки, к которым он применяется, и который, следовательно, не может характеризовать природу этих последних. Другими словами, это лишь внешняя

1) Л. Брунсвиг, цит. соч., стр. 447.

форма, которую математик придает своей мысли, орудие, делающее ее способной объединяться с другими мыслями[1]), и, так сказать, язык, присущий математике, но не более того. Упорядочить словарь этого языка и уточнить его синтаксис — это значит сделать очень полезное дело, эта работа и составляет действительно одну из сторон аксиоматического метода, а именно ту, которую следует назвать логическим формализмом (или, как еще говорят, «логистикой»). Но — и мы настаиваем на этом — *это только одна сторона* и при том наименее интересная.

То, что аксиоматика ставит перед собой в качестве основной цели — уразумение существа математики, именно этого не может дать логический формализм, взятый сам по себе. Точно так же, как экспериментальный метод исходит из априорной уверенности в постоянстве законов природы, аксиоматический метод берет за точку опоры убеждение в том, что если математика не является нанизыванием силлогизмов в направлении, избранном наугад, то она тем более не является более или менее хитрым искусством, состоящим из произвольных сближений, в котором господствует одна техническая ловкость. Там, где поверхностный наблюдатель видит лишь две или несколько теорий, совершенно отличных друг от друга по своему внешнему виду, и где вмешательство гениального математика приводит к обнаружению совершенно «неожиданной помощи»[2]), которую одна из них может оказать другой, там аксиоматический метод учит нас искать глубокие причины этого открытия, находить общие идеи, скрывающиеся за деталями, присущими каждой из рассматриваемых теорий, извлекать эти идеи и подвергать их исследованию.

## Понятие «структуры»

Какую форму приобретает этот метод? Именно здесь аксиоматика больше всего сближается с экспериментальным методом. Черпая из картезианского источника, она «разделяет трудности, чтобы лучше их разрешить». В доказательствах какой-либо теории она стремится разъединить главные пружины фигурирующих там рассуждений; затем, беря каждое из соответствующих положений *изолированно* и возводя его в общий принцип, она выводит из них следствия; наконец, возращаясь к изученной теории, она снова *комбинирует* предварительно выделен-

[1]) Каждый математик, впрочем, знает, что доказательство не является «понятным» в подлинном смысле этого слова, если ограничиться лишь проверкой правильности выводов, которые его составляют, и не пытаться понять отчетливо идеи, которые привели к созданию этой цепочки выводов предпочтительно перед всякой другой.

[2]) Л. Брунсвиг, цит. соч., стр. 446.

ные составные элементы и изучает, как они взаимодействуют между собой. Конечно, нет ничего нового в этом классическом сочетании анализа и синтеза; вся оригинальность этого метода заключается в том, как его применяют.

Чтобы проиллюстрировать примером только что описанный метод, мы рассмотрим наиболее старую (и наиболее простую) аксиоматическую теорию — теорию абстрактных групп. Рассмотрим следующие три операции: 1° *сложение действительных чисел,* при котором сумма двух действительных чисел (положительных, отрицательных и нуля) определена обычным образом; 2° *умножение целых чисел по простому модулю* $p$, причем элементами, которые мы рассматриваем, являются числа 1, 2, 3, ..., $p-1$, а произведением двух таких чисел является, по определению, остаток от деления на $p$ их произведения в обычном смысле; 3° *«композицию» перемещений* в евклидовом трехмерном пространстве, причем результатом этой композиции (или произведением) двух перемещений $T$ и $S$ (взятых в данном порядке) мы будем считать, по определению, перемещение, полученное в результате выполнения сначала перемещения $T$, а затем $S$. В каждой из этих трех теорий двум элементам $x$ и $y$, взятым в данном порядке, рассматриваемого множества (в первом случае множества всех действительных чисел, во втором — множества чисел 1, 2, 3, ..., $p-1$, в третьем — множества всех перемещений) ставится в соответствие (с помощью особой для каждого множества процедуры) третий однозначно определенный элемент того же множества, который мы условимся во всех трех случаях символически обозначать $x\tau y$ (это будет сумма, если $x$ и $y$ — действительные числа; их произведение по модулю $p$, если они — натуральные числа $\leqslant p-1$; результат их композиции, если они являются перемещениями). Если теперь рассмотреть свойства этой «операции» в каждой из трех теорий, то обнаружится замечательный параллелизм; внутри же каждой из этих теорий эти свойства зависят друг от друга, и анализ логических связей между ними приводит к выделению небольшого числа тех свойств, которые являются независимыми (т. е. таких, что ни одно из них не является логическим следствием остальных). Можно, например [1]), взять три следующих свойства, которые мы выразим с помощью наших символических обозначений, но которые, конечно, легко перевести на язык каждой из этих теорий:

а) каковы бы ни были элементы $x$, $y$, $z$, имеем $(x\tau y)\tau z = x\tau(y\tau z)$ (ассоциативность операции $x\tau y$);

---

[1]) Этот выбор не является единственно возможным, и известны различные системы аксиом, «эквивалентных» рассматриваемой, причем аксиомы каждой системы являются логическими следствиями аксиом любой другой системы.

b) существует элемент $e$ такой, что для всякого элемента $x$ $e\tau x = x\tau e = x$ (для сложения действительных чисел — число 0, для умножения по модулю $p$ — число 1, для композиции перемещений — «тождественное перемещение», которое оставляет на своем месте каждую точку пространства);

c) для каждого элемента $x$ существует элемент $x'$, такой, что $x\tau x' = x'\tau x = e$ (для сложения действительных чисел — противоположное число $-x$, для композиции перемещений — обратное перемещение, т. е. такое, которое каждую точку, перемещенную смещением $x$, возвращает в исходное положение; для умножения по модулю $p$ существование $x'$ следует из очень простого арифметического рассуждения [1]).

Тогда мы устанавливаем, что те свойства, которые при помощи общих обозначений возможно выразить одним и тем же образом в каждой из этих трех теорий, являются следствием трех предыдущих. Например, поставим перед собой цель доказать, что из $x\tau y = x\tau z$ следует $y = z$. Можно было бы это сделать в каждой из этих теорий, используя рассуждения, специфические для данной теории. Но можно избрать следующий образ действий, который применим ко всем трем случаям. Из соотношения $x\tau y = x\tau z$ мы выводим равенство $x'\tau(x\tau y) = x'\tau(x\tau z)$ ($x'$ имеет смысл, определенный выше). Далее, применяя a, получим $(x'\tau x)\tau y = (x'\tau x)\tau z$. Используя c, запишем это соотношение в виде $e\tau y = e\tau z$, и, наконец, применяя b, получаем $y = z$, что и требовалось доказать. В этом рассуждении мы полностью абстрагировались от природы элементов $x$, $y$, $z$, т. е. нам незачем было знать, являются ли они действительными числами, натуральными числами $\leqslant p-1$ или перемещениями. Единственная посылка, которой мы пользовались, заключалась в том, что операция $x\tau y$ над элементами $x$, $y$ удовлетворяет свойствам a, b, c. Для того чтобы избежать скучных повторений, приходят, таким образом, к мысли, что удобно раз и навсегда вывести логические следствия из этих трех единственных свойств. Необходимо, конечно, для удобства речи принять общую терминологию. Говорят, что множество, на котором определена операция $x\tau y$, характеризуемая тремя свойствами a, b и c, снабжено *структурой группы* (или, более коротко, является *группой*). Условия a, b, c называются аксиомами группы [2]), и вывести из них их следствия — значит построить аксиоматическую теорию групп.

---

[1]) Заметим, что остатки от деления на $p$ чисел $1, x, x^2, \ldots x^n, \ldots$ не могут быть все различными. Приравняв два из них друг другу, легко показать, что степень $x^{k-l}$ $(k > l)$ от $x$ имеет остаток, равный 1. Если $x'$ является остатком от деления $x^{k-l-1}$ на $p$, то произведение $xx'$ по модулю $p$ равно 1.

[2]) Разумеется, этот смысл слова «аксиома» не имеет ничего общего с общепринятым смыслом выражения «очевидная истина».

Теперь можно объяснить, что́ надо понимать в общем случае под *математической структурой*. Общей чертой различных понятий, объединенных этим родовым названием, является то, что они применимы к множеству элементов, природа которых[1]) не определена. Чтобы определить структуру, задают одно или несколько отношений, в которых находятся его элементы[2]) (в случае групп — это отношение $x\tau y = z$ между тремя произвольными элементами); затем постулируют, что данное отношение или данные отношения удовлетворяют некоторым условиям (которые перечисляют и которые являются *аксиомами* рассматриваемой структуры)[3]). Построить аксиоматическую теорию данной структуры — это значит вывести логические следствия из аксиом структуры, *отказавшись от каких-либо других предположений* относительно рассматриваемых элементов (в частности от всяких гипотез относительно их «природы»).

---

[1]) Мы становимся здесь на «наивную» точку зрения и не касаемся щекотливых вопросов, полуфилософских, полуматематических, возникших в связи с проблемой «природы» математических «объектов». Ограничимся замечанием, что первоначальный плюрализм в наших представлениях этих «объектов», мыслимых сначала как идеализированные «абстракции» чувственного опыта и сохраняющих всю разнородность этих последних, в результате аксиоматических исследований XIX—XX вв. был заменен единой концепцией, посредством последовательного сведения всех математических понятий сначала к понятию целого числа, затем на втором этапе к понятию *множества*. Последнее, рассматриваемое долгое время как «первоначальное» и «неопределимое», было объектом многочисленных споров, вызванных характером его исключительной общности и весьма туманной природой представлений, которые оно у нас вызывает. Трудности исчезли только тогда, когда исчезло само понятие множества (и с ним все метафизические псевдопроблемы относительно математических «объектов») в результате недавних исследований о логическом формализме. С точки зрения этой концепции единственными математическими объектами становятся, собственно говоря, математические структуры. Читатель найдет более подробное развитие этой точки зрения в следующих двух статьях: Dieudonné J., Les méthodes axiomatiques modernes et les fondements des mathématiques, *Revue Scientifique*, **78** (1939), 224—232; Cartan H., Sur le fondement logique des mathématiques, *Revue Scientifique*, **81** (1943), 3—11.

[2]) В действительности это определение структуры не является настолько общим, насколько этого требуют нужды математики. Нужно также охватить и тот случай, когда отношения, определяющие структуру, имеют место не между элементами рассматриваемого множества, а между *подмножествами* этого множества, и даже, в более общем случае, между элементами множеств еще более высокой «степени» — в так называемой «лестнице типов». Дальнейшие детали читатель найдет в наших Eléments de Mathématique, книга I (сводка результатов), Actual. Scient. et Industr., № 846.

[3]) В случае групп надо было бы, если соблюдать полную строгость, считать аксиомой, кроме a, b, c, и утверждение о том, что соотношение $z = x\tau y$ определяет одно и только одно $z$, когда даны $x$, $y$. Обычно считают, что это свойство молчаливо подразумевается самой записью этого отношения.

## Основные типы структур

Отношения, являющиеся исходной точкой в определении структуры, могут быть по своей природе весьма разнообразными. То отношение, которое фигурирует в групповых структурах, называют «законом композиции»; это такое отношение между тремя элементами, которое определяет однозначно третий элемент как функцию двух первых. Когда отношения в определении структуры являются «законами композиции», соответствующая структура называется алгебраической структурой (например, структура поля определяется двумя законами композиции с надлежащим образом выбранными аксиомами: сложение и умножение действительных чисел определяют структуру поля на множестве этих чисел).

Другой важный тип представляют собой структуры, определенные отношением порядка; на этот раз это — отношение между двумя элементами $x$, $y$, которое чаще всего мы выражаем словами «$x$ меньше или равно $y$» и которое мы будем обозначать в общем случае $xRy$. Здесь больше не предполагается, что это отношение однозначно определяет один из элементов $x$, $y$ как функцию другого. Аксиомы, которым оно подчиняется, таковы: a) для всех $x$ $xRx$; b) из соотношений $xRy$, $yRx$ следует $x = y$; c) из соотношений $xRy$, $yRz$ следует $xRz$. Очевидным примером множества, снабженного такой структурой, является множество целых чисел (или множество действительных чисел), причем здесь знак $R$ заменяется на $\leqslant$. Но надо заметить, что мы не включили в число аксиом аксиому, отражающую следующее свойство, которое кажется неотделимым от того понятия порядка, каким мы пользуемся в обыденной жизни: «каковы бы ни были $x$, $y$, имеет место или $xRy$ или $yRx$». Другими словами, не исключается случай, когда два элемента могут оказаться *несравнимыми*. На первый взгляд это может показаться странным, но легко привести очень важные примеры структур порядка для которых имеет место именно это обстоятельство. Именно с таким положением вещей мы сталкиваемся, когда $X$, $Y$ означают подмножества некоторого множества, а $XRY$ означает «$X$ содержится в $Y$», или когда $x$, $y$ являются натуральными числами, а $xRy$ означает «$x$ делит $y$», или, наконец, когда $f(x)$ и $g(x)$ являются действительными функциями, определенными на интервале $a \leqslant x \leqslant b$, a $f(x)Rg(x)$ означает: «каково бы ни было $x$, $f(x) \leqslant g(x)$». Эти примеры в то же время показывают, сколь велико разнообразие областей, где появляются структуры порядка, и заранее дают представление о том, насколько интересно их изучение.

Мы скажем еще несколько слов о третьем важном типе структур — *топологических структурах* (или *топологиях*); в них находят абстрактную математическую формулировку интуитивные понятия *окрестности, предела* и *непрерывности,* к которым нас приводит наше представление о пространстве.

Для перехода к абстракции, находящей свое выражение в аксиомах такой структуры, требуются усилия, значительно бо́льшие тех, которые имели место в предыдущих примерах, и размеры настоящей статьи вынуждают нас отослать читателей, желающих получить более подробные сведения по этому вопросу, к специальной литературе [1]).

## Стандартизация математических орудий

Мы думаем, что нами сказано достаточно для того, чтобы читатель мог создать себе достаточно ясное представление об аксиоматическом методе. Наиболее бросающейся в глаза его чертой, как это видно из изложенного выше, является реализация значительной *экономии мысли.* «Структуры» являются *орудиями* математика; каждый раз, когда он замечает, что между изучаемыми им элементами имеют место отношения, удовлетворяющие аксиомам структуры определенного типа, он сразу может воспользоваться всем арсеналом общих теорем, относящихся к структурам этого типа, тогда как раньше он должен был бы мучительно трудиться, выковывая сам средства, необходимые для того, чтобы штурмовать рассматриваемую проблему, причем их мощность зависела бы от его личного таланта и они были бы отягчены часто излишне стеснительными предположениями, обусловленными особенностями изучаемой проблемы. Таким образом, можно было бы сказать, что аксиоматический метод является не чем иным, как «системой Тейлора» в математике [2]).

Но это сравнение — недостаточное. Математик не работает подобно машине; мы должны особенно подчеркнуть, что в рассуждениях математика основную роль играет особая *интуиция* [3]), отличная от обыденной чувственной интуиции и заключающаяся скорее в непосредственном угадывании (предшествующем всякому рассуждению) нормального положения вещей, которое, как кажется, он вправе ожидать от математических объектов, ставших в результате его частого оперирования с ними столь же для

---

[1]) См., например, наши Eléments книга III, введение к главе 1, Actual. Scient. et Industr., № 858. (Русский перевод: Бурбаки Н., Топологические структуры, М., 1959.)

[2]) Система Тейлора — капиталистическая система организации труда, предложенная американским инженером Ф. У. Тейлором для получения максимальной прибыли. Одним из элементов этой системы является изучение трудовых процессов путем их разложения на составные элементы. — *Прим. ред.*

[3]) Интуиция, которая, впрочем, часто ошибается (как и всякая интуиция).

него привычными, как и объекты реального мира. Но ведь каждая структура сохраняет в своем языке интуитивные отзвуки той специфической теории, откуда ее извлек аксиоматический анализ, описанный нами выше. И когда исследователь неожиданно открывает эту структуру в изученных им явлениях, это для него является как бы толчком, который сразу направляет интуитивный поток его мыслей в неожиданном направлении, и в результате этого математический ландшафт, по которому он движется, получает новое освещение. Чтобы ограничиться старым примером, вспомним прогресс, осуществленный в начале XIX в. благодаря геометрической интерпретации мнимых величин; с нашей точки зрения, это было обнаружение в множестве комплексных чисел хорошо известной топологической структуры — структуры евклидовой плоскости — со всеми следующими отсюда возможностями приложений, — открытие, которое в руках Гаусса, Абеля, Коши и Римана менее чем за одно столетие обновило весь анализ.

Такие примеры умножились за последние 50 лет: пространство Гильберта и более общие функциональные пространства, вводящие топологические структуры в множества, элементами которых являются уже не точки, а функции; $p$-адические числа Гензеля, посредством которых — еще более удивительное обстоятельство! — топология воцарилась в той области, которая до этих пор считалась царством дискретного, разрывного по преимуществу — в множестве целых чисел; мера Хаара, безгранично расширившая область применения понятия интеграла и способствовавшая весьма глубокому анализу свойств непрерывных групп, — таковы решающие моменты в прогрессе математики, т. е. повороты, когда свет гения определял новое направление теории, обнаруживая в ней структуру, которая, как казалось a priori, не играла там никакой роли.

Это говорит о том, что в настоящее время математика менее чем когда-либо сводится к чисто механической игре с изолированными формулами, более чем когда-либо интуиция безраздельно господствует в генезисе открытий; но теперь и в дальнейшем в ее распоряжении находятся могущественные рычаги, предоставленные ей теорией наиболее важных структур, и она окидывает единым взглядом унифицированные аксиоматикой огромные области, в которых некогда, как казалось, царил самый бесформенный хаос.

## Обзор в целом

Руководствуясь концепцией аксиоматики, попытаемся представить теперь математический мир в целом. Конечно, мы более не распознаем здесь традиционный порядок, который, подобно первым классификациям видов животных, ограничивался тем, что расставлял рядом друг с другом теории, представляющие наибольшее внешнее сходство. Вместо точно разграниченных разделов алгебры, анализа, теории чисел и геометрии мы увидим, например, теорию простых чисел по соседству с теорией алгебраических кривых или евклидову геометрию рядом с интегральными уравнениями, и упорядочивающим принципом будет концепция *иерархии структур,* идущей от простого к сложному, от общего к частному.

В центре находятся основные типы структур, из которых мы только что перечислили главнейшие, так сказать, *порождающие структуры* (les structures-mères). В каждом из этих типов господствует уже достаточное разнообразие, так как там надо различать наиболее общую структуру рассматриваемого типа с наименьшим числом аксиом и структуры, которые получаются из нее в результате ее обогащения дополнительными аксиомами, каждая из которых влечет за собой и новые следствия. Именно таким образом теория групп, помимо тех общих положений, которые справедливы для всех групп и зависят только от аксиом, перечисленных выше, содержит, в частности, теорию конечных групп (в которой добавляют аксимому, гласящую, что число элементов группы конечно), теорию абелевых групп (в которых имеем $x\tau y = y\tau x$, каковы бы ни были $x, y$), а также теорию *конечных абелевых групп* (в которой предполагаются выполненными обе вышеуказанные аксиомы). Точно так же среди *упорядоченных* множеств различают те, в которых (как при упорядоченности в множестве целых или в множестве действительных чисел) любые два элемента сравнимы и которые называются *линейно упорядоченными* (totalement ordonnée); среди этих последних особо изучают множества, называемые *вполне упорядоченными* (в которых, так же как в множестве натуральных чисел, каждое подмножество имеет «наименьший элемент»). Подобная же градация существует и для топологических структур.

За пределами этого первоначального ядра появляются структуры, которые можно было бы назвать *сложными* (multiples) и в которые входят одновременно одна или несколько порождающих структур, но не просто совмещенные друг с другом (что не дало бы ничего нового), а органически *скомбинированные* при помощи одной или нескольких связывающих их аксиом. Именно такой характер носит *топологическая алгебра,* изучающая структуры, определяемые одним или несколькими законами композиций и одной топологией, которые связаны тем условием, что алгебраические операции являются непрерывными функциями (для рассматриваемой топологии) элементов, над которыми они производятся. Не менее важной является *алгебраическая топология*, которая рассматривает некоторые множества точек пространства, определенные топологическими свойствами (симплексы, циклы и т. д.), как элементы, над которыми производятся алгебраические операции. Соединение структуры порядка и алгебраической структуры точно так же изобилует результатами, приводя, с одной стороны, к теории делимости идеалов, а с другой стороны — к теории интегрирования и к «спектральной теории» операторов, где точно так же топология играет свою роль.

Наконец, далее начинаются собственно частные теории, в которых элементы рассматриваемых множеств, которые до сего момента в общих структурах были совершенно неопределенными, получают более определенную индивидуальность. Именно таким образом получают теории классической математики. анализ функций действительной и комплексной переменной, дифференциальную геометрию, алгебраическую геометрию, теорию чисел. Но они теряют свою былую автономность и являются теперь перекрестками, на которых сталкиваются и взаимодействуют многочисленные математические структуры, имеющие более общий характер.

Чтобы сохранить правильную перспективу, необходимо после этого беглого обзора сейчас же добавить, что он должен рассматриваться как весьма грубое приближение к истинному положению дел в математике. Он является одновременно *схематическим, идеализированным* и *застывшим*.

Схематическим — так как в деталях не все идет так гладко и планомерно, как это может представиться после того, что мы рассказали. Между прочим, имеются неожиданные возвращения назад, когда теория, носящая ярко выраженный частный характер, как, например, теория действительных чисел, оказывает помощь, без которой нельзя обойтись при построении какой-либо общей теории, как, например, топологии или теории интегрирования.

Идеализированным — потому что далеко не во всех разделах математики некоторая определенная часть каждой из основных структур распознана и вмещена в четко очерченные границы. В некоторых теориях (например, в теории чисел) существуют многочисленные изолированные результаты, которые до сего времени не умеют ни классифицировать, ни связать удовлетворительным образом с известными структурами

Наконец — застывшим, так как нет ничего более чуждого аксиоматическому методу, чем статическая концепция науки и мы не хотели оставить у читателя впечатление, будто бы мы претендовали дать очерк ее окончательного состояния. Структуры не остаются неизменными ни по их числу, ни по их сущности; вполне возможно, что дальнейшее развитие математики приведет к увеличению числа фундаментальных структур; открыв плодотворность введения новых аксиом или новых сочетаний аксиом, можно заранее оценить значение этих открытий, если судить о них по тем, которые дали уже известные структуры. С другой стороны, последние ни в коем случае не являются чем-то законченным, и было бы весьма удивительно, если бы их жизненная сила была уже исчерпана.

Введя эти неизбежные поправки, можно лучше понять внутреннюю жизнь математики, понять то, что создает ее единство и вносит в нее разнообразие, понять этот большой город, чьи предместья не перестают разрастаться несколько хаотическим образом на окружающем его пространстве, в то время как центр периодически перестраивается, следуя каждый раз все более и более ясному плану и стремясь к все более и более величественному расположению, в то время как старые кварталы с их лабиринтом переулков сносятся для того, чтобы проложить к окраине улицы все более прямые, все более широкие, все более удобные.

## Возвращение к прошлому и заключение

Концепция, которую мы только что пытались изложить, возникла не сразу, а лишь в результате более чем полувековой эволюции и была встречена не без сопротивления как со стороны философов, так и со стороны математиков. Многие из этих последних долго не могли согласиться рассматривать аксиоматику как что-либо большее, чем ненужные тонкости логиков, неспособные оплодотворить какую-либо теорию. Эта критика объясняется, без сомнения, исторической случайностью: аксиоматизации, которые появились первыми и которые имели наибольший отклик (аксиоматизации арифметики Дедекинда и Пеано, евклидовой геометрии Гильберта), касались унивалентных теорий, т. е. таких, которые полностью определялись совокупностью своих аксиом, причем система этих аксиом не могла быть применена к какой-либо другой теории, кроме той, из которой она была извлечена (в противоположность тому, что мы видели, например, в теории групп). Если бы это имело место для всех структур, то упрек в бесплодности, выдвинутый по адресу аксиоматического метода, был бы полностью оправдан [1]). Но этот метод доказал свою мощь своим развитием, и отвращение к нему, которое

[1]) Мы были свидетелями также, особенно в то время, когда аксиоматический метод только что начал развиваться, расцвета уродливых структур, полностью лишенных приложений, единственное достоинство которых заключалось в том, что, изучая их, можно было дать точную оценку значимости каждой аксиомы, выясняя, что происходит, когда эту аксиому удаляют или видоизменяют. Очевидно, в тот период можно было поддаться искушению и сделать вывод, что это — единственные результаты, которые следует ожидать от этого метода.

еще встречается там и сям, можно объяснить лишь тем, что разум по естественной причине затрудняется допустить мысль, что в конкретной задаче может оказаться плодотворной форма интуиции, отличная от той, которая непосредственно подсказывается данными (и которая возникает в связи с абстракцией более высокого порядка и более трудной).

Что касается возражений со стороны философов, то они относятся к области, где мы не решаемся всерьез выступать из-за отсутствия компетентности; основная проблема состоит во взаимоотношении мира экспериментального и мира математического [1]). То, что между экспериментальными явлениями и математическими структурами существует тесная связь, — это, как кажется, было совершенно неожиданным образом подтверждено недавними открытиями современной физики, но нам совершенно неизвестны глубокие причины этого (если только этим словам можно приписать какой-либо смысл) и, быть может, мы их никогда и не узнаем. Во всяком случае сделанное замечание могло бы побудить философов в будущем быть более благоразумными при решении этого вопроса. Перед тем как началось революционное развитие современной физики, было потрачено немало труда из-за желания во что бы то ни стало заставить математику рождаться из экспериментальных истин; но, с одной стороны, квантовая физика показала, что эта «макроскопическая» интуиция действительности скрывает «микроскопические» явления совсем другой природы, причем для их изучения требуются такие разделы математики, которые, наверное, не были изобретены с целью приложений к экспериментальным наукам, а с другой стороны, аксиоматический метод показал, что «истины», из которых хотели сделать средоточие математики, являются лишь весьма частным аспектом общих концепций, которые отнюдь не ограничивают свое применение этим частным случаем. В конце концов, это интимное взаимопроникновение, гармонической необходимостью которого мы только что восхищались, представляется не более чем случайным контактом наук, связи между которыми являются гораздо более скрытыми, чем это казалось a priori.

В своей аксиоматической форме математика представляется скоплением абстрактных форм — математических структур, и оказывается (хотя по существу и неизвестно, почему), что неко-

---

[1]) Мы не касаемся здесь возражений, вызванных применением правил формальной логики к рассуждениям в аксиоматических теориях; они связаны с логическими трудностями, на которые наталкивается теория множеств. Заметим только, что эти трудности могут быть преодолены таким образом, что не останется никакой неуверенности или сомнения относительно правильности рассуждений. По поводу этого можно обратиться к статьям Картана и Дьёдонне, которые были цитированы выше.

торые аспекты экспериментальной действительности как будто в результате предопределения укладываются в некоторые из этих форм. Конечно, нельзя отрицать, что большинство этих форм имело при своем возникновении вполне определенное интуитивное содержание; но как раз сознательно лишая их этого содержания, им сумели придать всю их действенность, которая и составляет их силу, и сделали для них возможным приобрести новые интерпретации и полностью выполнить свою роль в обработке данных.

Только имея в виду этот смысл слова «форма», можно говорить о том, что аксиоматический метод является «формализмом». Единство, которое он доставляет математике, это — не каркас формальной логики, не единство, которое дает скелет, лишенный жизни. Это — питательный сок организма в полном развитии, податливый и плодотворный инструмент исследования, который сознательно используют в своей работе, начиная с Гаусса, все великие мыслители-математики, все те, кто, следуя формуле Лежена-Дирихле, всегда стремились *«идеи* заменить *вычислениями»*.

# ОБЪЯСНЕНИЕ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел
$\mathbf{Q}$ — поле рациональных чисел
$\mathbf{R}$ — поле действительных чисел, совпадающее с числовой прямой
$\mathbf{R}^n$ — $n$-мерное числовое пространство, являющееся топологическим произведением $n$ пространств, каждое из которых есть числовая прямая.
$R^*$ — мультипликативная группа ненулевых элементов из $\mathbf{R}$
$K$ — тело
$K^*$ — мультипликативная группа ненулевых элементов из $K$
$\mathbf{Z}$ — кольцо целых чисел
$\varnothing$ — пустое множество
$R^*_+$ — мультипликативная группа положительных действительных чисел

## ПЕРЕВОД НЕКОТОРЫХ ТЕРМИНОВ, УПОТРЕБЛЯЕМЫХ Н. БУРБАКИ[1])

Биективное отображение — application bijective
Инъективное отображение — application injective
Мера с базой $\mu$ — mesure de base $\mu$
Меры взаимно сингулярные — mesures étrangères
Множество вполне упорядоченное — ensemble bien ordonné
Множество совершенно упорядоченное — ensemble totalement ordonné
Множество тощее — ensemble maigre
Полуторалинейная форма — forme sesquilinéaire
Решетка — ensemble réticulé
Решетчатая группа — groupe réticulé
Слабая топология — topologie faible
Сочетание знаков — assemblage
Сходимость в основном — limite vague
Сюръективное отображение — application surjective

---

[1]) Объяснение приведенных терминов см. в соответствующих книгах Н. Бурбаки. — *Прим. перев.*

# ЛИТЕРАТУРА


[ 1 ] Abel N. H. (Абель Н. Г.), Œuvres, 2 vol., éd. Sylow et Lie, Christiana, 1881.

[ 2 ] Alexandroff P. — Hopf H. (Александров П. С. — Хопф Г.), Topologie I, Berlin (Springer), 1935.

[ 3a] Archimedes (Архимед), Archimedis Opera quae quidem exstant omnia, nunc primus et gr. et lat. edita..., Basilae, Jo. Hervagius, 1 vol. in-fol., 1544.

[ 3b] Archimedes (Архимед), Archimedis Opera Omnia, 3 vol., éd. J. L. Heiberg, 2e éd., Leipzig (Teubner), 1913—1915.

[ 3c] Archimedes (Архимед), Les Œuvres complétes d'Archimède, trad. P. Ver Eecke, Paris — Bruxelles (Desclée — de Brouwer), 1921.

На русском языке имеются:
а) Исчисление песчинок (псаммит), М.—Л., ГТТИ, 1932.
б) Измерение круга (в книге: О квадратуре круга, М.—Л., 1934).
в) О плавающих телах (в книге: Стевин, Архимед, Галилей, Паскаль, Начала гидростатики, М.—Л., 1932, стр. 57—74).
г) Послание Архимеда к Эратосфену о некоторых теоремах механики (в книге: И. Гейберг, Новое сочинение Архимеда, Одесса, 1909).
д) Две книги о шаре и цилиндре, измерение круга и леммы. Перевод с греческого. СПб. 1823.

[ 4 ] Aristoteles (Аристотель), The works of Aristotle, translated under the editorship of W. D. Ross, Oxford, 1928 sqq.

На русском языке имеются:
а) Физика, М., Соцэкгиз, 1957.
б) Аналитики, кн. 1—2.
в) Метафизика, М.—Л., Соцэкгиз, 1934.

[ 5a] Artin E. (Артин Э.), Galois theory..., Notre-Dame, 1946.

[ 5b] Artin E. (Артин Э.), Ueber die Zerlegung definiter Funktionen in Quadraten, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg,* **V** (1927), p. 100—115.

[ 5c] Artin E. (Артин Э.), Zur Theorie der hypercomplexen Zahlen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg,* **V** (1927), 251—260.

[ 5d] Artin E. (Артин Э.), Einführung in die Theorie der Gammafunktion, Leipzig (Teubner), 1931. Русский перевод: Артин Э., Введение в теорию гамма-функции, перевод с немецкого, М.—Л., ГТТИ, 1934.

[ 6a] Artin E. und Schreier O. (Артин Э. и Шрейер О.), Algebraische Konstruktion reeller Körper, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg,* **V** (1927), 85—99.

[ 6b] Artin E. und Schreier O. (Артин Э. и Шрейер О.), Eine Kennzeichnung der reell abgeschlossenen Körper, *Abh. math. sem. univ. Hamburg,* V (1927), 225—231.

[ 7a] Arzelà C. (Арцела), Sulla integrabilità di una serie di funzioni, *Rend. Acc. dei Lincei* (4), **I** (1885), 321—326.

[ 7b] Arzelà C. (Арцела), Sulla integrazione per serie, *Rend. Acc. dei Lincei* (4), **I** (1885), 532—537 et 566—569.

[8] Ascoli G. (Асколи Дж.), Le curve limiti di una varietà data di curve, *Mem. Acc. dei Lincei* (3), **XVIII** (1883), 521—586.

[9a] Baire R. (Бэр Р.), Leçons sur les fonctions discontinues, Paris (Gauthier—Villars), 1905. Русский перевод: Бэр Р., Теория разрывных функций, М.—Л., ГТТИ, 1932.

[9b] Baire R. (Бэр Р.), Sur les fonctions de variables réelles, *Ann. Mat.* (3), **III** (1899), 1—123.

[10] Baire R., Borel E., Hadamard J., Lebesgue H. (Бэр Р., Борель Э., Адамар Ж., Лебег А.), Cinq lettres sur la théorie des ensembles, *Bull. soc. math. France,* **XXXIII** (1905), 261—273.

[11a] Banach S. (Банах С.), Théorie des opérations linéaires, Warszawa, 1932. Украинский перевод: Банах С., Курс функціонального аналізу, Київ, 1948.

[11b] Banach S. (Банах С.), Sur le problème de la mesure, *Fundam. math.,* **IV** (1923), p. 7—33.

[11c] Banach S. (Банах С.), Sur les fonctionnelles linéaires, *Studia math.,* **I** (1929), 211—216 et 223—239.

[12] Banach S. et Steinhaus H. (Банах С. и Штейнгауз Г.), Sur le principe de condensation des singularités, *Fundam. Math.,* **IX** (1927), 50—61.

[13a] Barrow I. (Барроу И.), Lectiones Geometricae.., Londini, 1670.

[13b] Barrow I. (Барроу И.), Mathematical works, ed. Whevell, Cambridge, 1860.

[14a] Becker O. (Беккер О.), Eudoxos-Studien, *Quellen und Studien zur Geschichte der Math.,* Abt. B: Studien, **II** (1933), 311—333, 369—387, **III** (1936), 236—244, 370—388.

[14b] Becker O. (Беккер О.), Die Lehre vom Geraden und Ungeraden im Neunten Buch der Euklidischen Elementen, *Quellen und Studien zur Geschichte der Math.,* Abt. B: Studien, **III** (1936), 533—553.

[15b] Beltrami E. (Бельтрами Э.), Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea, *Giorn. math.,* **VI** (1868), 284—312. Русский перевод: Бельтрами Э., Опыт интерпретации неевклидовой геометрии. В сборнике: Об основаниях геометрии, М., ГТТИ, 1956, стр. 180—212.

[15b] Beltrami E. (Бельтрами Э.), Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante, *Ann. mat.* (2), **II** (1868—1869), 232—255. Русский перевод: Бельтрами Э., Основы теории пространств постоянной кривизны. В сборнике: Об основаниях геометрии, М., ГТТИ, 1956, стр. 342—365.

[16a] Bernoulli Jacod (Бернулли Я.), Opera, 2 vol., Genève (Cramer — Philibert), 1744.

[16b] Bernoulli Jacob (Бернулли Я.), Ars Conjectandi, Bâle, 1713 (trad. S. Vastel, Paris, 1801). В русском переводе имеется 4-я часть сочинения Бернулли Я. «Ars Conjectandi», перевод с латинского, СПб., 1913.

[17a] Bernoulli Johann (Бернулли И.), Opera Omnia, 4 vol., Lausanne — Genève (M. M. Bousquet), 1742.

На русском языке имеются:

а) Бернулли И., Избранные сочинения по механике, М.—Л., ГТТИ, 1937.

б) Бернулли И., Новая задача, к разрешению которой приглашаются математики; в сборнике: Вариационные принципы механики, М., Физматгиз, 1959, стр. 11.

в) Бернулли И., Кривизна луча в неоднородных прозрачных телах.., в сборнике: Вариационные принципы механики, М., Физматгиз, 1959, 12—17.

[17b] Bernoulli Johann (Бернулли И.), Die erste Integralrechnung (Ostwald's Klassiker, № 194), Leipzig—Berlin (Engelmann), 1914.

[17c] Bernoulli Johann (Бернулли И.), Die Differentialrechnung (Ostwald's Klassiker, № 211), Leipzig (Akad. Verlag), 1924.

[18 ] Bezout E. (Безу Э.), Théorie générale des équations algébriques, Paris, 1779.

[19 ] Bochenski J. M. (Бохенский М.), Ancient formal logic, Studies in Logic, Amsterdam (North Holland Publ. Co.), 1951.

[20 ] Bochner S. (Бохнер С.), Integration von Funktionen deren Werte die Elemente eines Vektorraumes sind, *Fundam. Math.,* **XX** (1933), 262—276.

[20 bis] Böhner P. (Бёнер П.), Medieval logic, an outline of its development from 1250 to ca. 1400, Chicago, 1952.

[21 ] Bohr H. und Mollerup J. (Бор Г., Моллеруп Дж.), Laerebog i matematisk Analyse, t. III, Kopenhagen, 1922.

[22a] Bolzano B. (Больцано Б.), Œuvres, 5 vol., Prague, 1930—1948.

[22b] Bolzano B. (Больцано Б.), Paradoxien des Unendlichen, Leipzig, 1851 [trad. anglaise, New Haven (Yale Univ. Press), 1950]. Русский перевод: Больцано Б., Парадоксы бесконечного, перевод с немецкого, Одесса, Mathesis, 1911.

[22c] Bolzano B. (Больцано Б.), Rein Analytischer Beweis der Lehrsatzes, dass zwischen zwei Werten, die ein entgegengesetzes Resultat gewahren, wenigstens eine reelle Wurzel liegt (Ostwald's Klassiker, № 153), Leipzig, 1905. Русский перевод: Больцано Б., Чисто аналитическое доказательство теоремы, что между любыми двумя значениями, дающими результаты противоположного знака, лежит по меньшей мере один действительный корень уравнения; приложение № 1 к книге Э. Кольмана, Бернард Больцано, М., Изд. АН СССР, 1955.

[23a] Bombelli R. (Бомбелли Р.), L'Algebra, Bologna (G. Rossi), 1579.

[23b] Bombelli R. (Бомбелли Р.), L'Algebra, libri IV e V, éd. E. Bortolotti, Bologna (Zanichelli), 1929.

[24 ] Boole G. (Буль Дж.), Collected logical works, 2 vol., éd. P. Jourdain, Chicago — London, 1916.

[25 ] Borel E. (Борель Э.), Leçons sur la théorie des fonctions, Paris (Gauthier-Villars), 1898.

[26 ] Bosmans H. (Босман Г.), Sur le «Libro del Algebra» de Pedro Nuñez, *Bibl. Math.,* (3), **VIII** (1907—1908), 154—169.

[27 ] Brauer R (Брауэр Р.), Über Systeme hypercomplexer Zahlen, *Math. Z.,* **XXX** (1929), 79—107.

[28 ] Briggs H. (Бригг), Arithmetica logarithmica, London, 1624.

[29 ] Brouncker (Броункер У.), The Squaring of the Hyperbola by an infinite series of Rational Numbers.., *Philos. Trans.,* **III** (1668), p. 645—649.

[30a] Brouwer L. E. J. (Брауэр), Intuitionism and formalism, *Bull. amer. math. soc.,* **XX** (1913), 81—96.

[30b] Brouwer L. E. J. (Брауэр), Zur Begründung des intuitionistischen Mathematik. *Math. Ann.,* **XCIII** (1925), 244—257; **XCV** (1926), 453—473; **XCVI** (1926), 451—458.

[31 ] Burali-Forti C. (Бурали-Форти К.), Sopra un teorema del Sig. G. Cantor, *Atti Accad. Torino*, **XXXII** (1896—1897), 229—237.

[32 ] Burkhardt H. (Буркхард Г.), Die Anfänge der Gruppentheorie und Paolo Ruffini, *Zeitschr. für Math. und Phys.*, **XXXVII** (1892), Suppl., 121—159.

[33 ] Burnside W. (Бернсайд У.), On the condition of reducibility for any group of linear substitutions, *Proc. London Math. Soc.*, **III** (1905), 430—434.

[34 ] Bussey W. H. (Буссей), The origin of mathematical induction, *Amer. Math. Monthly*, **XXIV** (1917), 199—207.

[35 ] Cantor G. (Кантор Г.), Gesammelte Abhandlungen, Berlin (Springer), 1932.

На русском языке имеется:

а) Кантор Г., Ученье о множествах Георга Кантора, перевод с немецкого, СПб., 1914.

[36 ] Cantor G., Dedekind R. (Кантор Г., Дедекинд Р.), Briefwechsel, éd. J. Cavaillès-E. Noether, Actual Scient. Ind., № 518, Paris (Hermann), 1937.

[37 ] Caratheodory C. (Каратеодори К.), Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig—Berlin (Teubner), 1918.

[38 ] Cardano H. (Кардано Дж.), Opera, 10 vol., Lyon, 1663.

[39 ] Carnot L. (Карно Л.), Géométrie de Position, Paris, 1803.

[40a] Cartan E. (Картан Э.), Œuvres complètes, 6 vol., (3 parties), Paris (Gauthier-Villars), 1953—1955.

На русском языке имеются:

а) Теория групп и геометрия, в сборнике: Об основаниях геометрии, М., ГТТИ, 1956, стр. 485—507.

б) Геометрия групп Ли и симметрические пространства (сборник статей), перевод с французского, М., ИЛ, 1949.

в) Геометрия римановых пространств, перевод с французского, М.—Л., ОНТИ, 1936.

г) Интегральные инварианты, перевод с французского, М.—Л., ГИТТЛ, 1940.

д) Риманова геометрия в ортогональном репере, лекции, читанные в Сорбонне в 1926—1927 гг., перевод с французского, изд. МГУ, 1961.

е) Теория спиноров, перевод с французского, М., ГИИЛ, 1947.

ж) Метод подвижного репера, теория непрерывных групп и обобщенные пространства, лекции, читанные в Сорбонне, перевод с французского, М.—Л., ГТТИ, 1933.

[40b] Cartan E. (Картан Э.), Leçons sur la théorie des spineurs (Actual. Scient. et Ind., № 643 et 701), Paris (Hermann), 1938. Русский перевод: Картан Э., Теория спиноров, перевод с французского, ГИИЛ, 1947.

[41 ] Cartan H. (Картан А.), Théorie des filtres, *C. R. Acad. Sci.*, **CCV** (1937), 595—598; Filtres et ultrafiltres, ibid., p. 777—779.

[42a] Cauchy A.-L. (Коши О. Л.). Œuvres complètes, 26 vol. (2 series), Paris (Gauthier-Villars), 1882—1958.

На русском языке имеются:

а) Алгебраический анализ, перевод с французского, Лейпциг, 1864.

б) Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении, СПб., 1831.

[42b] Cauchy A.-L. (Коши О. Л.), Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral, rédigées principalement d'après les méthodes de M. A.-L. Cauchy, par l'Abbé Moigno, t. II, Paris, 1844.

[43a] Cavalieri B. (Кавальери Б.), Geometria indivisibilibus continuorum quadam ratione promota, Bononiae, 1635 (2e éd., 1653). Русский перевод: Кавальери Б., Геометрия неделимых, М.—Л., ГТТИ, 1940.

[43b] Cavalieri B. (Кавальери Б.), Exercitationes geometricae sex, Bononiae, 1647. Русский перевод: Кавальери Б., Шесть геометрических опытов (опыт четвертый). В книге: Кавальери Б., Геометрия неделимых, М.—Л., ГТТИ, 1940.

[44 ] Cayley A. (Кэли А.), Collected Mathematical Papers, 13 vol, Cambridge (University Press), 1889—1898.

На русском языке имеется: Кэли А., Шестой мемуар о формах. В сборнике «Вариационные принципы механики», М., ГИТТЛ, 1956, стр. 222—252.

[45 ] Cesari L. (Чезари Л.), Surface area, Princeton, 1954.

[46a] Chasles M. (Шаль М.), Note sur les propriétés générales du système de deux corps, *Bull. de Férussac,* **XIV** (1830), p. 321—326.

[46b] Chasles M. (Шаль М.), Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, Bruxelles, 1837. Русский перевод: Шаль М., Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов, перевод с французского, т. 1—2, М., 1883.

[47 ] Chevalley C. (Шевалле К.), The algebraic theory of spinors, New York (Columbia University Press), 1954.

[48 ] Choquet G. (Шоке Г.). Theory of capacities, *Ann. Inst. Fourier,* **V** (1953—1954), 131—295.

[49 ] Chuquet N. (Шюке Н.), Le Triparty en la Science des Nombres, éd. A. Marre, *Bull. bibl. storia math.,* **XIII** (1880), p. 555—659 et 693—814.

[50 ] Church A. (Чёрч А.), Alternatives to Zermelo's assumption, *Trans. Amer. Math. Soc.,* **XXIX** (1927), 178—208.

[51 ] Clifford W. K. (Клиффорд У. К.), Mathematical Papers, London (Macmillan), 1882.

На русском языке имеется:

а) Здравый смысл точных наук. Начала учения о числе и пространстве. Перевод с 5-го английского издания, П-д, 1922.

[52a] Couturat L. (Кутюра Л.), La logique de Leibniz d'après des documents in edits Paris (Alcan), 1901.

[52b] Couturat L. (Кутюра Л.), La Philosophie des mathématiques de Kant, *Revue de Métaph. et de Morale,* **XII** (1904), 321—383.

[53 ] Cramer G. (Крамер Г.), Introduction à l'analyse des lignes courbes, Genève (Cramer et Philibert), 1750.

[54 ] Curry H. (Карри), Outlines of a formalist philosophy of mathematics, Amsterdam (North Holland Publ. Co.), 1951.

[55 ] Curtze M. (Куртце М.), Über die Handschrift «Algorismes proportionum magistri Nicolay Orem», *Zeitschr. für Math. und Phys.,* **XIII,** Supplem, (1868), 65—79, 101—104

[56a] d'Alembert J. (Даламбер Ж), Encyclopédie, Paris, 1751—1765;

[56b] d'Alembert J. (Даламбер Ж.), Sur les principes métaphysiques du Calcul infinitésimal, Mélanges de Litt., d'hist. et de philosophie, nouv. éd., t. V, Amsterdam (1768), p. 207—219.

[56c] d'Alembert J. (Даламбер Ж.), *Misc. Taur.,* **III** (1762—65), 381.

[57a] Daniell P. J. (Даниель), A general form of integral, *Ann. Math.* (2), **XIX** (1918), 279—294.

[57b] Daniell P. J. (Даниель), Integrals in an infinite number of dimensions, *Ann. Math.* (2), **XX** (1919), 281—288.

[58] Darboux G. (Дарбу Г.), Mémoire sur les fonctions discontinues, *Ann. Ec. Norm. Sup.* (2), **IV** (1875), 57—112.

[59] Datta B. and Singh A. N. (Датта Б. и Сингх А. Н.), History of Hindu Mathematics, 2 vol., Lahore (Motilal Banarsi Das), 1935—1938.

[60] Dedekind R. (Дедекинд Р.) Gesammelte mathematische Werke 3 vol., Braunschweig (Vieweg), 1932.

На русском языке имеются:

а) Непрерывность и иррациональные числа, перевод с немецкого, Одесса, Mathesis., 1923.

б) Что такое числа и для чего они служат? Перевод с немецкого, Казань, 1905.

[61] Dedekind R. und Weber H. (Дедекинд Р. и Вебер Г.), Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen, *J. de Crelle,* **XCII** (1882), 181—290.

[62a] De Morgan A. (де Морган А.), On the syllogism (III), *Trans. Camb. Phil. Soc.,* **X** (1858), 173—230.

[62b] De Morgan A. (де Морган А.), On the syllogism (IV) and on the logic of relations, *Trans. Camb. Phil. Soc.,* **X** (1860), 331—358.

[63] Desargues G. (Дезарг Г.), Œuvres, éd. Pourra, t. I. Paris (Leiber), 1864.

[64a] Descartes R. (Декарт Р.), Œuvres, ėd. Ch. Adam et P. Tannery, 13 vol., Paris (L. Cerf), 1897—1913.

На русском языке имеется ряд сочинений Декарта, в том числе «Рассуждение о методе» с приложением: Диоптрика, Метеоры, Геометрия, М., АН СССР, 1953.

[64b] Descartes R. (Декарт П.), Geometria, trad. latine de Fr. van Schooten, 2e éd., 2 vol., Amsterdam (Elzevir), 1659—1661. Русский перевод: Декарт Р., Геометрия, перевод с французского, ГТТИ, М.—Л., 1938.

[65] De Seguier J. A. (де Сегье Ж. А.), Théorie des groupes finis. Eléments de la théorie des groupes abstraits, Paris (Gauthier—Villars), 1904.

[66] Deuring M. (Дейринг М.), Algebren (Erg. der Math., Bd. 4), Berlin (Springer), 1937.

[67] Dickson L. E. (Диксон Л. Э.), Linear associative algebras and abelian equations, *Trans. Amer. Math. Soc.,* **XV** (1914), 31—46.

[68] Diels H. (Дильс Г.), Die Fragmente der Vorsokratiker, 2te Aufl., 2 vol., Berlin (Weidmann), 1906—1907.

[69a] Dieudonné J. (Дьёдонне Ж.), Une généralisation des espaces compacts, *J. Math.* (9), **XXIII** (1944), p. 65—76.

[69b] Dieudonné J. (Дьёдонне Ж.), La géométrie des groupes classiques (Erg. der Math., Neue Folge, Heft 5), Berlin — Göttingen — Heidelberg (Springer), 1955.

[70a] Diophant (Диофант), Diophanti Alexandrini Opera Omnia.., 2 vol., ėd. P. Tannery, Lipsiae (Teubner), 1893—1895.

[70b] Diophant (Диофант), Diophante d'Alexandrie, trad. P. Ver Eecke Bruges (Desclée—de Brouwer), 1926.

[71] Lejeune Dirichlet P. G., (Лежен Дирихле П. Г.), Werke, 2 vol., Berlin (Reimer), 1889—1897.

На русском языке имеются:
а) Лекции по теории чисел, перевод с немецкого, М.—Л., ОНТИ, 1936.
б) Теория чисел (со сборником упражнений и задач), перевод с немецкого, СПб., 1899, вып. 1.
в) Об устойчивости равновесия, перевод с немецкого. В книге: Лагранж Ж.-Л., Аналитическая механика, ГТТИ, 1950, 2-е изд.

[72a] du Bois-Reymond P. (Дюбуа-Реймон П.) Sur la grandeur relative des infinis des fonctions, *Ann. di Math.* (2) **IV** (1871), 338—353.

[72b] du Bois-Reymond P. (Дюбуа-Реймон П.), Ueber asymptotische Werthe, infinitäre Approximationen und infinitäre Auflösung von Gleichungen, *Math. Ann.*, **VIII** (1875), 362—414.

[73 ] Dunford N. (Данфорд Н.), Uniformity in linear spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **XLIV** (1938), 305—356.

[74 ] Dunford N. and Pettis B. (Данфорд Н. и Петти Б.), Linear Operations on summable functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **XLVII** (1940), 323—392.

[75 ] Egoroff D. (Егоров Д. Ф.), Sur les suites de fonctions mesurables, *C. R. Acad. Sci.*, **CLII** (1911), 244—246.

[76 ] Eichler M. (Эйхлер М.), Quadratische Formen und orthogonale Gruppen, Berlin—Göttingen—Heidelberg (Springer), 1952.

[77 ] Eneström G. (Энестрём Г.), Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage von Cantors Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik, *Bibl. Math.* (3), **VIII** (1907), 412—413.

[78a] Engel F. und Stäckel P. (Энгель Ф. и Штеккель П.), Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss, Leipzig (Teubner), 1895.

[78b] Engel F. und Stäckel P. (Энгель Ф. и Штеккель П.), Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrien, 2 vol., Leipzig (Teubner), 1898—1913.

[79 ] Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, 1$^{\text{te}}$ Aufl., 20 vol. Leipzig (Teubner), 1901—1935.

[80 ] Euklid (Евклид), Eucklidis Elementa, 5 vol., éd. J. L. Heiberg, Lipsae (Teubner), 1883—1888. Русский перевод: Евклид, Начала, перевод с греческого, М.—Л., ГИТТЛ, 1948—1950, 3 т. (т. I: книги I—VI; т. 2: книги VII—IX; т. 3: книги X—XII).

[81a] Euler L. (Эйлер Л.), Opera Omnia, 46 vol. parus (3 series) Leipzig—Berlin—Zürich (Teubner et O. Füssli), 1911—1957.

На русском языке имеются:
а) Избранные картографические статьи. Три статьи по математической картографии, перевод с немецкого, М., Геодезиздат, 1959.
б) Введение в анализ бесконечных, т. 1—2., М., Физматгиз, 1961.
в) Дифференциальное изчисление, перевод с латинского, М.—Л., Гостехиздат, 1949.
г) Интегральное исчисление, перевод с латинского, т. 1—3., М., Гостехиздат, 1956—1958.
д) Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума, либо минимума, перевод с латинского, М.—Л., ГТТИ, 1934.
е) Основы динамики точки. Первые главы из «Механики» и из «Теории движения твердых тел», М.—Л., ГИТТЛ, 1938.
ж) Новая теория движения луны (1-я часть книги 1-й и извлечения из частей 2-й и 3-й), Л., 1934.
з) Оснований алгебры Леонгарда Эйлера части первой первые три отделения, т. 1—2, СПб., Имп. Акад. наук, 1812.

и) Универсальная арифметика, т. 1—2, СПб. Акад Наук, 1787—1788
к) Полное умозрение строения и вождения кораблей.., СПб., 1778.
л) Об определении движения брошенных тел в несопротивляющейся среде методом максимумов и минимумов, в сборнике: Вариационные принципы механики, М., Физматгиз, 1959, стр. 31—40.
м) Соображения по поводу некоторых общих законов природы, которые наблюдаются в действии любых сил, в сборнике: Вариационные принципы механики, М., Физматгиз, 1959, стр. 56—77.
н) Соответствие между общими принципами покоя в движении, в сборнике: Вариационные принципы механики, М., Физматгиз, 1959, стр. 78—95.
о) Диссертация о принципе наименьшего действия.., в сборнике: Вариационные принципы механики, М., Физматгиз, 1959, стр. 96—108
п) Выдержки из писем к Мопертюи, в сборнике: Вариационные принципы механики, М., Физматгиз, 1959, стр. 746—758.

[81b] Euler L. (Эйлер Л.), Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum, *Novi Comm. Acad. Sci. imp. Petrop.,* **XX** (1776), 189—207.

[82 ] Fermat P. (Ферма П.), Œuvres, 5 vol., Paris (Gauthier-Villars) 1891—1922.

На русском языке имеются:
а) Письмо к де ла Шамбру, в сборнике: Вариационные принципы механики, М., Физматгиз, 1959, стр. 742—745.
б) Синтез для рефракции, в сборнике: Вариационные принципы механики, М., Физматгиз, 1959, стр. 6—10.
в) О максимуме и минимуме, в книге: Декарт Р., Геометрия, перевод с французского, М.—Л., ГТТИ, 1938, стр. 154—157.
г) Выдержки из переписки с Декартом, в книге: Декарт Р. Геометрия, М.—Л,. ГТТИ, 1938, стр. 157—196.

[83 ] Fischer E. (Фишер Э.), Sur la convergence en moyenne, *C. R. Acad. Sci.,* **CXLIV** (1907), 1022—1024.

[84 ] Fourier J. B. (Фурье Ж.—Б.), Œuvres, 2 vol., Paris (Gauthier-Villars), 1888—1890.

[85a] Fraenkel A. (Френкель А.), Zu den Grundlagen der Cantor — Zermeloschen Mengenlehre, *Math. Ann.,* **LXXXVI** (1922), 230—237.

[85b] Fraenkel A. (Френкель А.), Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre, Wiss. und Hypothese, vol. **31**, Leipzig — Berlin (Teubner), 1927.

[85c] Fraenkel A. (Френкель А.), Einleitung in die Mengenlehre, 3te Aufl., Berlin (Springer), 1928.

[86 ] Fraser D. C. (Фрезер Д.), Newton's Interpolation Formulas, *J. Inst. Actuaries,* **LI** (1918), 77—106, 211—232, **LVIII** (1927), 53—95 (articles réimprimés en plaquette, London, s. d.).

[87a] Fréchet M. (Фреше М.), Sur quelques points du calcul fonctionnel, *Rend. Palermo,* **XXII** (1906), 1—74.

[87b] Fréchet M. (Фреше М.), Les ensembles abstraits et le Calcul fonctionnel, *Rend. Palermo,* **XXX** (1910), 1—26.

[88 ] Fredholm I. (Фредгольм И.), Sur une classe d'équations fonctionnelles, Acta Mathematica, **XXVII** (1903), 365—390.

[89a] Frege G. (Фреге Г.), Begriffschrift eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens, Halle, 1879.

[89b] Frege G. (Фреге Г.), Die Grundlagen der Arithmetik, 2nd ed. with an English Translation by J. L. Austin, New York, 1950.

[89c] Frege G. (Фреге Г.), Grundgesetze der Arithmetik, begriffschriftlich abgeleitet, 2 vol., Iena, 1893—1903.

[90a] Frobenius G. (Фробениус Г.), Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen, *J. Crelle,* **LXXXIV** (1878), 1—63.

[90b] Frobenius G. (Фробениус Г.), Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten, *J. Crelle,* **LXXXVI** (1879), 146—208.

[90c] Frobenius G., (Фробениус Г), Über Gruppencharaktere, *Berliner Sitzungsber.*, 1896, 985—1021. Русский перевод: «О грунтовых характерах», в книге Г. Фробениус, Теория характеров, ОНТИ, 1937, стр. 21—63.

[90d] Frobenius G. (Фробениус Г.). Über Primfaktoren der Gruppendeterminante, *Berliner Sitzungsber.*, 1896, 1343—1382. Русский перевод: О простых множителях грунтового детерминанта, в той же книге, стр. 64—105.

[90e] Frobenius G. (Фробениус Г.), Darstellung der Gruppen durch lineare Substitutionen, *Berliner Sitzungsber.*, 1897, 994—1015. Русский перевод: О представлении конечных групп через линейные подстановки, в той же книге, стр. 64—105.

[90f] Frobenius G. (Фробениус Г.), Theorie der hypercomplexen Grössen, *Berliner Sitzungsber.*, 1903, 504—537, 634—645.

[91 ] Frobenius G. und Stickelberger L. (Фробениус Г. и Штиккельбергер И.), Ueber Gruppen von vertauschbaren Elementen, *J. Crelle,* **LXXXVI** (1879), 217—262.

[92 ] Fubini G. (Фубини Дж.), Sugli integrali multipli. *Rendic. Acc. dei Lincei* (5), **XVI** (1907), 608—614.

[93a] Galilei Galileo (Галилей Галилео), Discorsi e Dimostrazioni..., Leyden (Elzevir), 1638.

[93b] Galilei Galileo (Галилей Галилео), Opere, Ristampa della Ed. Nationale, 20 vol., Firenze (Barbera), 1929—1939.
На русском языке имеются:
а) Диалог о двух главнейших системах мира птоломеевой и коперниковой, перевод с латинского, М.—Л., Гостехиздат, 1948.
б) Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к местному движению, перевод с латинского. (Сочинения, том I, М.—Л., ГТТИ, 1934.)
в) Рассуждение о телах, пребывающих в воде, и о тех, которые в ней движутся, в книге: Архимед, Галилей, Паскаль, Стевин, Начала гидростатики, М.—Л., 1932, стр. 143—232.

[94 ] Galois E. (Галуа Э.), Œuvres mathématiques, Paris (Gauthier-Villars), 1897. Русский перевод: Галуа Э., Сочинения, перевод с французского, М.—Л., Главн. ред. общетехн. и техн.-теор. литературы, 1936.

[95a] Gauss C. F. (Гаусс К. Ф.), Werke, 12 Vol., Göttingen, 1870—1927.
На русском языке имеются:
а) Теория небесных тел, вращающихся вокруг Солнца по коническим сечениям, перевод с латинского, М., 1861.
б) Об основаниях геометрии, Казань, 1895.
в) Способ наименьших квадратов. Мемуары о соединении наблюдений, перевод с французского, М., 1859.
г) Избранные геодезические сочинения, т. 1—2, М., Геодеизиздат, 1957.
д) Избранные труды по земному магнетизму, М., Изд. АН СССР, 1952.
е) Труды по теории чисел, М., АН СССР, 1959.
ж) Общие исследования о кривых поверхностях, перевод с немецкого в сборнике: Об основаниях геометрии, М., ГТТИ, 1956, стр. 123—161.
з) Отрывки из писем и черновые наброски, относящиеся к неевклидовой геометрии, перевод с немецкого, в сборнике Об основаниях геометрии, М., ГТТИ, 1956, стр. 101—120.

и) Об одном новом общем принципе механики, в сборнике Вариационные принципы механики. М., Физматгиз, 1959, стр. 170—172.

к) Письма Лапласа, Гаусса, Бесселя и др. к академику Ф. И. Шуберту, в книге: Научное наследство, естествен.-научн. сер. I, М., 1945.

л) Теоретическая астрономия, Лекции, читанные в Гёттингене в 1820—1821 гг., Петроград, 1919.

[95b] Gauss C. F. (Гаусс К.—Ф.), Die vier Gauss'schen Beweis für die Zerlegung ganzer algebraischer Functionen in reelle Factoren ersten oder zweiten Grades (Ostwald's Klassiker, № 14), Leipzig (Teubner), 1904.

[96] Gelfand I. (Гельфанд И. М.), Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren, *Матем. сборник* (Н. С.), **IV** (1938), стр. 235—284.

[97] Gentzen G. (Гентцен Г.), Die gegenwartige Lage in der mathematischen Grundlagenforschung Neue Fassung des Widerspruchsfreichetsbeweises für die reine Zahfentheorie (Forschungen zur Logir.., Heft 4, Leipzig (Hirzel), 1938).

[98] Giorgini (Джорджини), Sopra alcune propietà de'piani de'momenti.., *Mem. Soc. Ital. Sc. res. Modena,* **XX** (1828), 243—254.

[99] Girard A. (Жирар А.), Invention nouvelle en Algèbre, Amsterdam, 1629 (réimp. ed. Bierens de Hann, Leyde, 1884).

[100a] Gödel K. (Гёдель К.), Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, *Monatsh. Math. Phys.,* **XXXVIII** (1931), 173—198.

[100b] Gödel K. (Гёдель) К.), The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis, *Ann. Math. Studies,* № 3, Princeton, 1940. Русский перевод: *Успехи матем. наук,* **6** (1961).

[100c] Gödel K. (Гёдель К.), What is Cantor's continuum hypothesis? *Amer. Math. Monthly,* **LIV** (1947), 515—525.

[101] Gram J. P (Грам П.), Ueber die Entwickelung reeller Funktionen in Reihen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate, *J. Crelle,* **XCIV** (1883), 41—73.

[102] Grassman H. (Грассман Г.), Gesammelte Werke, 3 vol., Leipzig, (Teubner), 1894—1911.

[103] Gregorii a Sancto Vicentio (Григорий Сент-Винцент), Opus Geometricum Quadraturae Circuli et Sectionum Coni.., 2 vol. Antverpiae, 1647.

[104a] Gregory J. (Грегори Дж.), Vera Circuli et Hiperbolae Quadraturae.., Pataviae, 1667.

[104b] Gregory (Грегори Дж.), Geometriae Pars Universalis, Pataviae, 1668.

[104c] Gregory J. (Грегори Дж.), Exercitationes Geometricae, London, 1668.

[104d] Gregory J. (Грегори Дж.), James Gregory Tercentenary Memorial Volume, containing his correspondance with John Collins and his hitherto unpublished mathematical manuscripts.., ed. H. W. Turnbull, London (Bell and Sons), 1939.

[105] Hachette J. et Poisson S. (Ашетт Ж. и Пуассон). Addition au mémoire précédent, *J. Ec. Polytechn,* cahier 11 (an X), p. 170—172.

[106] Hadamard J. (Адамар Ж.), Sur certaines applications possibles de la théorie des ensembles, *Verhandl. Intern. Math. Kongress,* Zürich, 1898, p. 201—202.

[107] Hahn H. (Хан Г.), Ueber Lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen, *J. Crelle,* **CLVII** (1927), 214—229.

[108] Hamilton W. R. (Гамильтон У. Р.), Lectures on quaternions, Dublin, 1853.

[109] Hankel H. (Ганкель Г.), Theory der complexen Zahlensysteme, Leipzig (Voss), 1867. Русский перевод: Ганкель Г., Теория комплексных числовых систем, преимущественно обыкновенных мнимых чисел и кватернионов Гамильтона вместе с их геометрическим толкованием Германа Ганкеля, перевод с немецкого, Казань, 1912.

[110] Hardy G. H. (Харди Г. Г.), Orders of infinity (Cambridge tracts, № 12), 2 ed., Cambridge University Press, 1924.

[111] Hardy G. H. and Wrigth E. M. (Харди Г. Г. и Райт), An introduction to the Theory of Numbers, Oxford, 1938.

[112] Hasse H. und Scholz H. (Хассе Г. и Шольц Г.) Die Grundlagenkrise der grieschischen Mathematik, Charlottenburg (Pan-Verlag), 1928 [Kant—Studien, t. **XXXIII** (1928), p. 4—72].

[113a] Hausdorff F. (Хаусдорф Ф.), Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig (Veit), 1914.

[113b] Hausdorff F. (Хаусдорф Ф.), Mengenlehre; Berlin (de Gruyter), 1927. Русский перевод: Хаусдорф Ф., Теория множеств. М.—Л., 1937.

[114a] Heath T. (Хис Т.), A History of Greek Mathematics; 2 vol., Oxford, 1921.

[114b] Heath T. (Хис Т.), Apollonius of Perga, Treatise on conic sections, Cambridge University Press, 1896.

[114c] Heath T. (Хис Т.), The method of Archimedes, Cambridge, 1912.

[114d] Heath T. (Хис Т.), Mathematict in Aristotle; Oxford (Clarendon Press), 1949.

[114e] Heath T. (Хис Т.), The thirteen books of Euclid's Elements..., 3 vol., Cambridge, 1908.

[114f] Heath T. (Хис Т.), Diophantus of Alexandria, 2ed., Cambridge, 1910.

[115a] Heine E. (Гейне Э.), Ueber trigonometrische Reihen, *J. Crelle*, **LXXI** (1870), 353—365.

[115b] Heine E. (Гейне Э.), Die Elemente der Functionenlehre, *J. Crelle*, **LXXIV** (1872), 172—188.

[115bis] Heinrich G. (Гейнрих Г.), James Gregory's «Vera circuli et hyperbolae quadraturae», *Bibl. Math.*, (3), **II** (1901), 77—85.

[116] Helly E. (Хелли Э.), Ueber Systeme linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, *Monatsh. für Math. und Phys*, **XXXI** (1921), 60—91.

[117] Hensel K. (Гензель К.), Theorie der algebraischen Zahlen, Leipzig — Berlin (Teubner), 1908.

[118] Herbrand J. (Эрбран Ж.), Recherches sur la théorie de la démonstration, *Trav. Soc. Sci. Lett. Varsovie*, cl. **II** (1930), 33—160.

[119] Hermite C. (Эрмит Ш.), Œuvres, 4 vol., Paris (Gautheir-Villars), 1905—1917.

На русском языке имеются:

а) Курс анализа, перевод с французского, М.—Л., Главн. ред. общетехнич. литерат., 1936.

б) Эрмит о Бриоски (речь, произнесенная Эрмитом...), перевод с французского, Казань, 1897.

в) Эрмит о Вейерштрассе (речь, произнесенная Эрмитом...), Казань, 1897.

[120 ] Hermite C., Stieltjes T. (Эрмит Ш., Стильтьес Т.), Correspondance, 2 vol., Paris (Gauthier-Villars), 1905.

[121 ] Heyting A. (Гейтинг А.), Mathematische Grundlagenforschung. Intuitionismus. Beweistheorie. (Erg. der Math., Bd. 3, Berlin, Springer, 1934). Готовится русский перевод, М., ИЛ.

[122a] Hilbert D. (Гильберт Д.), Gesammelte Abhandlungen, 3 vol., Berlin (Springer), 1932—1935.

На русском языке имеются:

а) О поверхностях постоянной гауссовой кривизны, в сборнике: Об основаниях геометрии, М., ГТТИ, 1956, стр. 214—221.

б) Основания физики (1-е сообщение), в сборнике: Вариационные принципы механики, М., Физматгиз, 1959, стр. 589—598.

в) Понятие о числе, перевод с немецкого, Казань, 1900.

г) Пространство и время (в соавторстве с Вейлем Г. и Минковским Г.), СПб., 1911.

[122b] Hilbert D. (Гильберт Д.), Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Integralgleichungen, 2e éd., Leipzig — Berlin (Teubner), 1924.

[122c] Hilbert D. (Гильберт Д.), Grundlagen der Geometrie, 7e éd., Leipzig — Berlin (Teubner), 1930. Русский перевод: Основания геометрии, М.—Л., 1948.

[123 ] Hilbert D. und Ackermann W. (Гильберт Д. и Аккерман В.), Grundzüge der theoretischen Logik, 3te Aufl., Berlin (Springer), 1949. Русский перевод: Гильберт Д. и Аккерман В, Основы теоретической логики, перевод с немецкого, М., ГИИЛ, 1947.

[124 ] Hölder O. (Гёльдер О.), Zurückführung einer beliebigen algebraischen Gleichung auf eine Kette von Gleichungen, *Math. Ann.*, **XXXIV** (1889), 25—56.

[125 ] Hopkins C. (Гопкинс К.), Rings with minimal conditions for left ideals, *Ann. Math.*, (2), **XL** (1939), 712—730.

[126a] Huygens C. (Гюйгенс Х.), Christiani Hugenii, Zulichemii Philosophi vere magni, Dum viveret Zelemii Toparchae, Opera, 4 tomes en 1 vol., Lugd. Batav., 1751.

[126b] Huygens C. (Гюйгенс Х.), Œuvres complètes, 22 vol., la Haye (M. Nijhoff), 1888—1950.

На русском языке имеются:

а) Три мемуара по механике, М., 1951 (содержание: Маятниковые часы; О движении тел под влиянием удара; О центробежной силе).

б) Трактат о свете, М.—Л., ОНТИ, 1935.

в) О найденной величине круга, в книге: О квадратуре круга, М.—Л., 1934, стр. 105—166.

[127 ] Jacobi C. G. (Якоби К.—Г.), Gesammelte Werke, 7 vol., Berlin (G. Reimer), 1881—1891.

На русском языке имеются:

а) Лекции по динамике, перевод с немецкого, М.—Л., Главн. ред. общетехн. литерат., 1936.

б) Заметка об интегрировании дифференциальных уравнений динамики, в сборнике: Вариационные принципы механики, М., Физматгиз, 1959, стр. 289—293.

в) О новом общем принципе аналитической механики, в сборнике: Вариационные принципы механики, М., Физматгиз, 1959, стр. 294—296.

[128 ] Jacobson N. (Джекобсон Н.), Structure of rings, Amer. Math. Soc. Coll. Public., **37**, Providence, 1956. Русский перевод: Джекобсон Н., Строение колец, перевод с английского, М., ИЛ, 1961.

[129a] Jordan C. (Жордан К.), Traité des substitutions et des équations algébriques, 2e éd., Paris (Gauthier-Villars) et A. Blanchard), 1957.

[129b] Jordan C. (Жордан К.), Mémoire sur les groupes de mouvements, *Ann. Mat.* (2), **II** (1868—1869), p. 167—215 et 322—345.

[129c] Jordan C. (Жордан К.), Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique, 3e éd., 3 vol., Paris (Gauthier-Villars), 1909—1915.

[129 bis] Kant I. (Кант И.), Werke, ed. E. Cassirer, 11 vol., Berlin (B. Cassirer), 1912—1921.

На русском языке изданы многие сочинения Канта, в том числе·
а) Сочинения 1747—1777 гг., 2 т. М., Гос. соц. экономиздат., 1940.
б) Классические космогонические гипотезы (с соавторами) М.—Пг., 1923.
в) Логика, Пг., 1915.
г) Пролегомены ко всякой будущей метафизике, могущей возникнуть в качестве науки, М., Соцэкгиз, 1937.

[130a] Kepler J. (Кеплер И.), Stereometria Doliorum, 1615.

[130b] Kepler J. (Кеплер И.), Neue Stereometrie der Fäser (Ostwald's Klassiker, № 165), Leipzig (Engelmann), 1908. Русский перевод: Кеплер И., Новая стереометрия винных бочек... М.—Л., 1934.

[131 ] Kleene S. (Клини С.), Introduction to metamathematics, New York, 1952. Русский перевод: Клини С., Введение в метаматематику, М., ИЛ, 1957.

[132 ] Klein F. (Клейн Ф.), Gesammelte mathematische Abhandlungen, 3 vol., Berlin (Springer), 1921—1923.

На русском языке имеются:
а) О так называемой неевклидовой геометрии, перевод с немецкого, в сборнике Об основаниях геометрии, М., ГИТТЛ, 1956, стр. 253—303.
б) Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований (Эрлангенская программа), в сборнике Об основаниях геометрии, М., ГТТИ, 1956, стр. 399—434.
в) Элементарная математика с точки зрения высшей, лекции, читанные в Гёттингенском университете, ч. I. М.—Л., ОНТИ, 1935.
г) Отзыв Ф. Клейна о сочинении С. Ли «Теория групп преобразований», т. III, в сборнике Об основаниях геометрии, М., ГТТИ, 1956, стр. 435—451.
д) Высшая геометрия, перевод с немецкого, М.—Л., ГОНТИ, 1939.
е) Лекции о развитии математики в XIX столетии, ч. I, М.—Л., ОНТИ, 1937
ж) О новых английских работах и о механике, в сборнике Вариационные принципы механики, М., Физматгиз, 1959, стр. 513—514.
з) Лекции по избранным вопросам элементарной геометрии, Казань, 1898.

[133 ] Kolmogoroff A. (Колмогоров А. Н.), Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Erg. der Math., Bd. 2), Berlin (Springer) 1933. Русское издание: Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, М.—Л., 1936.

[134 ] Köthe G. (Кёте Г.), Neubegründung der Theorie der vollkommenen Räume, *Math. Nachr.,* **IV** (1951), 70—80.

[135 ] Kötter E. (Кеттер Э.), Die Entwickelung der synthetischen Geometrie, Leipzig (Teubner), 1901 (Jahresbericht der D. M. V., t. V, 2tes Heft).

[136a] Kronecker L. (Кронекер Л.), Werke, 5 vol., Leipzig (Teubher), 1895—1930.

На русском языке имеется: Кронекер Л., Понятие о числе (в книге: Гельмгольц Г. фон), Казань, 1893, стр. 33—44.

[136b] Kronecker L. (Кронекер Л.), Vorlesungen über die Theorie der Determinanten... Leipzig (Teubher), 1903.

[137a] Krull W. (Круллъ В.), Über verallgemeinerte endliche Abelsche Gruppen, *Math. Z.*, **XXIII** (1925), 161—196.

[137b] Krull W. (Круллъ В.), Theorie und Anwendung der verallgemeinerten Abelschen Gruppen, Sitzungsber. Heidelberger Akad., 1926, № 1, 32pp.

[137c] Krull W. (Круллъ В.), Zur Theorie der allgemeinen Zahlringe, *Math. Ann.*, **XCIX** (1928), 51—70.

[137d] Krull W. (Круллъ В.), Galoische Theorie der unendlichen algebraischen Erweiterungen, *Math. Ann.*, **C** (1928), 687—698.

[138 ] Kummer E. (Куммер Е.), Zur Theorie der complexen Zahlen, *J. Crelle*, **XXXV** (1847), 319—326.

[139a] Kuratowski K. (Куратовский К.), Une méthode d'élimination des nombres transfinis des raisonnements mathématiques, *Fundam. Math.*, V (1922), 76—108.

[139b] Kuratowski K (Куратовский К.), Topologie 1, 2-e éd., Warszawa — Vroclaw, 1948; готовится к печати русский перевод 3 изд. (ИЛ).

[140 ] Lagrange J. L. (Лагранж Ж.-Л.), Œuvres, 14 vol., Paris (Gauthier-Villars), 1867—1892.

На русском языке имеются:

а) Аналитическая механика, перевод с французского, М.—Л., ГОНТИ, 1938, 2 т.

б) Применение метода, изложенного в предыдущем мемуаре, для решения различных задач динамики, перевод с французского, в сборнике Вариационные принципы механики, М., Физматгиз, 1959, стр. 117—158.

[141 ] Laguerre E. (Лагерр Э.), Œuvres, 2 vol., Paris (Gauthier-Villars), 1898—1905.

[142 ] Laplace P. S. (Лаплас П. С.), Œuvres, 14 vol., Paris (Gauthier-Villars), 1878—1912.

На русском языке имеются:

а) Опыт философии теории вероятностей, М., 1908.

б) Изложение системы мира, т. 1—2. СПб., 1861.

в) Письма Лапласа, Гаусса, Бесселя и др. к академику Ф. И. Шуберту, в книге: Научное наследство, естественно-научн. сер. 1, М., 1945.

[143a] Lebesgue H. (Лебег А.), Integral, longeur, aire, *Ann. Mat.* (3), **VII** (1902), 231—359.

[143b] Lebesgue H. (Лебег А.), Sur les séries trigonométriques, *Ann. Ec. Norn. Sup.*, (3), **XX** (1903), 453—485.

[143c] Lebesgue H. (Лебег А.), Lecons sur l'integration et recherche des fonctions primitives, Paris (Gauthier-Villars), 1904. Русский перевод: Лебег А., Интегрирование и отыскание примитивных функций, М., ГТТИ, 1934.

[143d] Lebesgue H. (Лебег А.), Sur le problème de Dirichlet, *Rend. Palermo*, **XXIV** (1907), 371—402.

[143e] Lebesgue H. (Лебег А.), Sur l'intégration des fonctions discontinues, *Ann. Ec. Norm. Sup.* (3), **XXVII**, (1910), 361—450.

[144a] Leibniz G. W. (Лейбниц Г. В.), Mathematische Schriften, 7 vol. éd. C. I. Gerhardt, Berlin—Halle (Ascher—Schmidt), 1849—1863. Русский перевод отрывков из математических сочинений Лейбница имеется в журнале *Успехи матем. наук*, т. III, 1 (23), 1948, стр. 165—205

[144b] Leibniz G. W. (Лейбниц Г. В.) Philosophische Schriften, 7 vol., éd. C. I. Gerhardt, Berlin, 1840—1890.

[144c] Leibhiz G. W. (Лейбниц Г. В.), Opuscules et fragments inédits, éd. L. Couturat, Paris (Alcan), 1903.

[144d] Leibniz G. W. (Лейбниц Г. В.), Der Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibniz mit Mathematikern, t. I, herausgegeben von C. I. Gerhardt, Berlin (Mayer und Müller), 1899.

На русском языке имеются:

а) Письмо Лейбница к Перье, перевод с латинского. В сборнике *Историко-матем. исслед.*, вып. XIV, 1961, стр. 607—610.

б) Отрывки из писем Лейбница опубликованы также в журнале *Успехи матем. наук*, см. [144a].

[145 ] Levi B. (Леви Б.), Intorno alla teoria degli aggregati *R. Ist. Lambardo Sci. Lett. Rendic.* (2), **XXXV** (1902), 863—868.

[146 ] Lindenbaum A. und Mostowski A. (Линденбаум А. и Мостовский А.) Über die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms und einiger seiner Felgerungen, *C. R. Soc. Sci. Lett. Varsovie,* cl. III, **XXXI** (1938), 27—32.

[147a] Liouville J. (Лиувилль Ж.), Sur le dêveloppement des fonctions ou de parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre contenant un paramètre variable, *J. Math.,* (1), **I** (1836), 253—265 et. **II** (1837), p. 16—35 et 418—436.

[147b] Lioville J. (Лиувилль Ж.), D'un théorème dû à M. Sturm et relatif à une classe de fonctions transcendantes, *J. Math.*, (I), **I** (1836), 269—277.

[147c] Liouville J. (Лиувилль Ж.), Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique ni même réductible à des irrationelles algébriques, *J. Math.*, (1), **XVI** (1951), p. 133—142.

[148a] Lipschitz R. (Липшиц Р.), De explicatione per serias trigonometricas instituenda functionum unius variabllis arbitrariarum, *J. Crelle,* **LXIII** (1864), 296—308 (trad. français par P. Montel, *Acta Math.,* **XXXVI** (1912), p. 261—295.

[148b] Lipschitz R. (Липшиц Р.), Untersuchungen ueber die Summen von Quadraten, Bonn. 1886 (Résumé en française dans *Bull. Sci. Math.,* **XXI** (1886), 163—183.

[149 ] Lobatschevsky N. (Лобачевский Н. И.), Pangeometrie (Oswald's Klassiker, n° 130), Leipzig (Engelmann), 1902. Русское издание: Лобачевский Н. И., Пангеометрия. Ученые записки Казанского Университета, 1855 г., перепечатано в Полн. собр. соч., т. III, стр. 435—524, М.—Л., ГТТИ, 1951.

[150 ] Loomis L. H., (Люмис Л.), An introduction to abstract harmonic analysis, London — New-York — Toronto (van Nostrand), 1953. Русский перевод: Люмис Л., Введение в абстрактный гармонический анализ, М., ИЛ, 1956.

[151 ] Loria G. (Лориа Дж.), Le ricerche inedite di Evangelista Torricelli sopra la curve logaritmica, *Bibl. Math.* (3), **I** (1900), 75—89.

[152 ] Lusin N. (Лузин Н. Н.), Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications, Paris (Gauthier-Villars), 1930. Русское издание: Лузин Н. Н., Лекции об аналитических множествах и их приложениях, Собрание сочинений, М., 1958, т. II, стр. 9—269.

[153a] Mackey G. W. (Макки Г. У.), On infinite-dimensional spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.,* **LVII** (1945), 155—207.

[153b] Mackey G. W. (Макки Г. У.), On convex topological spaces, *Trans Amer. Math. Soc.*, **LX** (1946), 519—537.

[154 ] Maclaurin C. (Маклорен К.), A treatise of fluxions, Edinburgh, 2 vol., 1742.

[155 ] Mahnke D. (Манке Д.), Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte der höheren Analysis, Abh. Preuss. Akad. der Wiss. Phys. Math. Klasse, 1925, n° 1, 64 pp., Berlin, 1926.

[156 ] Masères F. (Мазерес Ф.), Scriptores Logaritmici, 6 vol, London, 1791—1807.

[157 ] Maurolyci D. T. (Мавролико Д. Ф.), Abbatis Massanensis, Mathematici Celeberrimi Arithmeticorum Libri Duo, Venise, 1575.

[158 ] Mercator N. (Меркатор Н.), Logarithmotechnia... cui nunc accedit vera quadratura hyperbolae.., Londini, 1668.

[159a] Minkowski H. (Минковский Г.), Gesammelte Abhandlungen. 2 vol., Leipzig—Berlin (Teubher), 1911.

На русском языке имеется:

а) Пространство и время, В книге «Сборник работ классиков релятивизма», ОНТИ, Л., 1935.

[159b] Minkowski H. (Минковский Г.), Geometrie der Zahlen, Leipzig (Teubher), 1896.

[160 ] Möbius A. F. (Мёбиус А. Ф.), Gesammelte Werke, 4 vol., Leipzig (Hirzel), 1885—1887.

[161a] Molien T. (Молин Ф.), Ueber Systeme höherer complexer Zahlen, *Math. Ann.*, **XLI** (1893), 83—156.

[161b] Molien T. (Молин Ф.), Über die Invarianten der linearen Substitutionsgruppen, Berliner Sitzungsber., 1897, p. 1152—1156.

[162 ] Monge G. (Монж Г.), Géométrie descriptive, Paris, 1798 (nouvelle éd., Paris, Gauthier-Villars, 1922). Русский перевод: Монж Г., Начертательная геометрия. Перевод с немецкого, М., Изд. АН СССР, 1947.

[163 ] Moore E. H. and Smith H. L. (Мур Э. Г. и Смит Г. Л.), A general theory of limits, *Amer. J. Math.*, **XLIV** (1922), p. 102—121.

[164 ] Morley S. G. (Морлей С. Г.), The ancient Maya, Stanford University Press, 1946.

[165a] Neper J. (Непер Дж.), Mirifici logarithmorum canonis descriptio, Lyon, 1619 (Reproduit dans [156], t. VI, p. 457—623).

[165b] Neper J. (Непер Дж.), Napier Tercentenary Memorial Volume, London, 1915.

[166 ] Neugebauer O. (Нейгебауер О.), Vorlesungen über die Geschichte der antiken Mathematik, Bd. I: Vorgrieschische Mathematik, Berlin (Springen), 1934. Русский перевод: Нейгебауер О., Лекции по истории античных математических наук, т. I, Догреческая математика, перевод с немецкого, М.—Л., ОНТИ, 1937.

[167a] Newton I. (Ньютон И.), Opuscula, 3 vol., Lausanne—Genève (M. Bousquet), 1744.

На русском языке имеются:

а) Всеобщая арифметика, или книга об арифметических синтезе и анализе, перевод с латинского, М., Изд. АН СССР, 1948

б) Математические работы, перевод с латинского, М.—Л., ОНТИ, 1937.

в) Лекции по оптике, М., АН СССР, 1946.

г) Оптика или трактат об отражениях, преломлениях, изгибаниях и цветах света, М.—Л., Гостехиздат, 1954.

[167b] Newton I. (Ньютон И.), Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, London, 1687 (nouvelle éd., Glasgow, 1871). Русский перевод: Математические начала натуральной философии, 2е изд. М.—Л., 1936.

[167c] Newton I. (Ньютон И.), Mathematical principles of natural philosophy, transl. into English by A. Motte in 1729, Univ. of California, 1946.

[168 ] Nicodym O. (Никодим О.), Sur une génératisation des intégrales de M. J. Radon, *Fundam. Math.,* **XV** (1930), 131—179.

[169a] Noether E. (Нётер Э.), Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörper, *Math. Ann.,* **XCVI** (1926), 26—61.

[169b] Noether E. (Нётер Э.), Hypercomplexe Grössen und Darstellungstheorie, *Math. Z.,* **XXX** (1929), 641—692.

[169c] Noether E. (Нётер Э.), Nichtkommutative Algebra, *Math. Z.,* **XXXVII** (1933), 514—541.

[170 ] Noether E. und Brauer R. (Нётер Э. и Брауер Р.), Über minimale Zerfallungskörper irreduzibler Darstellungen, Berliner Sitzungsber., 1927, p. 221—228.

[171 ] Noether E und Schmeidler W. (Нётер Э. и Шмейдлер В.), Moduln in nichtkommutativen Bereichen, *Math. Z.,* **VIII** (1920), 1—35.

[172 ] Novak-Gal I. (Новак-Гол), A construction for models of consistent systems, *Fundam. Math.,* **XXXVII** (1950), 87—110.

[173] Osgood W. (Осгуд У.), Non uniform convergence and the integration of series term by term, *Amer. J. Math.,* **XIX** (1897), 155—190.

[174 ] Osmond P. (Осмонд П.), Isaac Barrow; His life and time, London, 1944.

[175 ] Pascal B. (Паскаль Б.), Œuvres, 14 vol., éd. Brunschwicg, Paris (Hachette), 1904—1914.

На русском языке издан ряд сочинений Паскаля, в том числе:

а) Опыт о конических сечениях, перевод с французского, в сборнике Историко-математические исследования, вып. XIV, М., 1961, стр. 603—607.

[176 ] Pasch M. und Dehn M. (Паш М. и Ден М.), Vorlesungen über neuere Geometrie, 2te Aufl., Berlin (Spinger), 1926.

[177a] Peano G. (Пеано Дж.), Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale, Torino, 1887.

[177b] Peano G. (Пеано Дж.), Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di Grassmann, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva, Torino, 1888.

[177c] Peano G. (Пеано Дж.), Arithmeticas principia, novo methodo exposita, Torino, 1889.

[177d] Peano G. (Пеано Дж.), I principii di Geometria, logicamente expositi, Torino, 1889.

[177e] Peano G. (Пеано Дж.), Démonstration de l'intégrabilité des équations differentielles ordinaires, *Math. Ann.,* **XXXVII** (1890), 182—228.

[177f] Peano G. (Пеано Дж.), Formulaire de Mathématiques, 5 vol. Torino, 1895—1905.

[178 ] Peirce B. (Пирс Б.), Linear associative algebra, *Amer. J. Math.,* **IV** (1881), 97—221.

[179a] Peirce C. S. (Пирс Ч.), Upon the logic of mathematics, *Proc. Amer. Acad. of Arts. and Sci.*, VII (1865—1868), 402—412.

[179b] Peirce C. S. (Пирс Ч.), On the algebra of logic, *Amer. J. Math.*, **III** (1880), 49—57.

[179c] Peirce C. S. (Пирс Ч.), On the relative forms of the algebras, *Amer. J. Math.*, **IV** (1881), 221—225.

[179d] Peirce C. S. (Пирс Ч.), On the algebras in which division is unambiguous, *Amer. J. Math.*, **IV** (1881), 225—229.

[179e] Peirce C. S. (Пирс Ч.), On the algebra of logic, *Amer. J. Math.*, **VII** (1884), 190—202.

[180 ] Platon (Платон), La République, trad. E. Chambry, 2 vol. Paris (Les Belles Lettres), 1932—1949. Русский перевод: Платон, О государстве.

[181a] Poincaré H. (Пуанкаре А.), Œuvres, II vol., Paris (Gauthier-Villars), 1916—1956.

В русском переводе имеются:

а) О природе математических доказательств, перевод с французского, Казань, 1898.
б) Ценность науки, перевод с французского, М., 1906.
в) Теория Максвелла и герцовские колебания, СПб., 1900.
г) Пространство и время с точки зрения физики (в соавторстве с Кон Э.), Одесса, 1912.
д) Принцип относительности, в книге: Сборник работ релятивизма, Л., 1935.
е) Отзыв о работах Д. Гильберта, представленных для соискания международной премии им. Н. И. Лобачевского, в сборнике: Об основаниях геометрии, М., ГТТИ, 1956, стр. 452—479.
ж) О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, перевод с французского, М.—Л., Гостехиздат, 1947.
з) Новейшие теории в термодинамике (теорема теплоты Нернста и гипотеза Кванта). Доклад, читанный 16/XII 1911 г. в Герм. химическ. обществе в Берлине, перевод с немецкого, Пг., 1920 (соавтор Планк М.).
и) Новая форма уравнений механики, в книге: Гурвиц А., Задача изопериметров, Казань, 1901, стр. 3—5.
к) Новая механика. Эволюция законов (две статьи), перевод с французского, М., 1913.
л) Об основных гипотезах геометрии, в сборнике: Об основаниях геометрии, М., ГТТИ, 1956, стр. 388—398.
м) Теория фуксовых групп, в сборнике: Об основаниях геометрии, М., ГТТИ, 1956, стр. 304—307.
н) Новые методы небесной механики (отрывок из 3-го тома), в сборнике: Вариационные принципы механики, М., Физматгиз, 1959, стр. 497—513.
о) Электричество и оптика (введение к книге), в сборнике: Вариационные принципы механики, М., Физматгиз, 1959, стр. 773—777.
п) Математическое творчество, психологический этюд, Юрьев, 1909.
р) Наука и метод, перевод с французского, Одесса, 1910.

[181b] Poincaré H. (Пуанкаре А.), Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, 3 vol., Paris (Gauthien-Villars), 1882—1889.

[181c] Poincaré H. (Пуанкаре А.), Science et hypothèse, Paris (Flammarion), 1902. Русский перевод: Пуанкаре А., Наука и гипотеза, Спб., 1906.

[181d] P o i n c a r é H. (П у а н к а р е А.), La valeur de la science, Paris (Flammarion), 1905.

[181e] P o i n c a r é H. (П у а н к а р е А.), Science et méthode, Paris (Flammarion), 1908.

[182 ] P o n c e l e t J. V. (П о н с е л е Ж. В.), Traité des propriétés projectives des figures, 2 vol., 2e éd., Paris (Gauthier-Villars), 1865.

[183 ] P t o l e m a e i Cl. (П т о л е м е й К.), Ptolemaei Cl. Opera, ed. J. L. Heiberg, 2 vol., Lipsiae (Teubner), 1898—1903 (trad. Halma, réimp., 2 vol., Paris (Hermann), 1927).

[184 ] R a d o n J. (Р а д о н), Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunctionen, Sitzungsber. der math. naturwiss. Klasse der Akad. der Wiss. (Wien), t. **CXXII**, Abt. II a (1913), p. 1295—1438.

[185 ] R i c c i G. et L e v i - C i v i t a T. (Р и ч ч и Г. и Л е в и - Ч и в и т а Т.), Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications, *Math. Ann.*, t. **LIV** (1901), p. 125—201.

[186 ] R i c h a r d J. (Р и ш а р д Ж.), Les principes des Mathématiques et le problème des ensembles, *Rev. Gen. Sci. pures appl.*, **XVI** (1905), 541—543.

[187a] R i e m a n n B. (Р и м а н Б.), Gesammelte mathematische Werke, 2e éd., Leipzig (Teubner), 1892. Русское издание: Р и м а н Б., Сочинения, перевод с немецкого, М.—Л., Гостехиздат, 1948.

[187b] R i e m a n n B. (Р и м а н Б.), Gesammelte Werke, Nachträge, Leipzig (Teubner), 1902.

[187c] R i e m a n n B. (Р и м а н Б.), In Lettere di B. Betti a P. Tardy *Rend. Accad. Lincei* (5), **XXIV** (1915), 517—519.

[188a] R i e s z F. (Р и с с Ф.), Sur les systèmes orthogonaux de fonctions. *C. R. Acad. Sci.*, **CXLIV** (1907), 615—619.

[188b] R i e s z F. (Р и с с Ф.), Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre, *Atti del* IV *Congresso Intern. dei Matem.*, Roma, 1908, t. II, p. 18—24.

[188c] R i e s z F. (Р и с с Ф.), Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, *Math. Ann.*, **LXIX** (1910), p. 449—497.

[188d] R i e s z F. (Р и с с Ф.), Sur certains systèmes singuliers d'equations intégrales, *Ann. Ec. Norm. Sup.*, (3), **XXVIII** (1911), 33—62.

[188e] R i e s z F. (Р и с с Ф.), Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, Paris (Gauthier-Villars), 1913.

[188f] R i e s z F. (Р и с с Ф.), Ueber lineare Funktionalgleichungen, *Acta Math.*, **XLI** (1918), 71—98. Русский перевод: Р и с с Ф., О линейных функциональных уравнениях, *Успехи матем. наук*, **I** (1936), 175—199.

[188g] R i e s z F. (Р и с с Ф.), Zur theorie des Hilbertschen Raumes, *Acta Litt. ac. scient. (Szeged)*, **VII** (1934—1935), 34—38.

[188h] R i e s z F. (Р и с с Ф.), Sur quelques notions fondamentales dans la théorie générale des opérations linéaires, *Ann. Math.* (2), **XLI** (1940), 174—206.

[189 ] R i e s z M. (Р и с с М.), Sur le problème des moments, 3, *Ark. Math.*, **XVII** (1922—1923), № 16, 52 pp.

[190 ] R i g a u d S. P. (Р и г о С. П.), Correspondence of scientific men..., 2 vol., Oxford, 1841—1842.

[191 ] R o b e r v a l G. de (Р о б е р в а л ь Г), Ouvrages de Mathématique (*Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*), **VI**, Paris (1730), 1—478.

[192 ] Robinson R. (Робинсон Р.), Plato's consciousness of fallacy, Mind, t. LI (1942), p. 97—114.

[193 ] Ruffini P. (Руффини П.), Opere matematiche, 3 vol., Ed. Cremonese (Roma), 1953—1954.

[194 ] Russel B. and Whitehead A. N. (Рассел Б. и Уайтхед А. Н.), Principia mathematica, 3 vol., Cambridge, 1910—1913.

[195 ] Rüstow A. (Рюстов А.), Der Lügner, Diss. Erlangen, 1910.

[196 ] Saks S. (Сакс С.,), Theory of the integral, 2e éd., New York, (Stechert), 1937. Русский перевод: Сакс С., Теория интеграла, перевод с английского, М., ИЛ, 1949.

[197 ] de Sarasa P. Alfonso Antonio (де Сараса П. А. А.), Solutio problematis.., Antverpiae, 1649.

[198 ] Scheffers G. (Шефферс Г.), Zurückführung complexer Zahlsysteme auf typische Formen, *Math. Ann.*, **XXXIX** (1891), 293—390.

[199 ] Schering E. (Шеринг Э.), Gesammelte mathematische Werke, 2 vol., Berlin (Mayer und Müller), 1902—1909.

[200] Schläfli L. (Шлефли Л.), Gesammelte mathematische Abhandlungen, 3 vol., Basel (Birkhäuser), 1950—1956.

[201a] Schmidt E. (Шмидт Э.), Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I. Teil: Entwickelung willkürlicher Funktionen nach Systeme vorgeschriebener, *Math. Ann.*, **LXIII** (1907), 433—476.

[201b] Schmidt E. (Шмидт Э.), Ueber die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, *Rend. Palermo,* **XXV** (1908), 53—77.

[202a] Schoenflies A. (Шёнфлис А.), Entwickelung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen, 2e éd., Leipzig — Berlin, (Teubner), 1913.

[202b] Schoenflies A. (Шёнфлис А.), Die Krisis in Cantor's mathematischen Schaffen, *Acta Math.,* **L** (1927), 1—23.

[203 ] Schröder E. (Шрйдер Э.), Vorlesungen über die Algebra der Logik, 3 vol., Leipzig (Teubner), 1890.

[204a] Schur I. (Шур И.), Über eine Klasse von Matrices, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen, Diss. Berlin, 1901.

[204b] Schur I. (Шур И.), Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, *J. Crelle,* **CXXVII** (1904), 20—50.

[204c] Schur I. (Шур И.), Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere, Berliner Sitzungsber., 1905, p. 406—432.

[204d] Schur I. (Шур И.), Arithmetische Untersuchungen über endliche Gruppen linearer Substitutionen, Berliner Sitzungsber., 1906, p. 164—184.

[205 ] Schwartz L. (Шварц Л.), Théorie des distributions (*Actual Scient. et Ind.,* № 1091 et 1122). Paris (Hermann), 1950—1951.

[206 ] Serret J. A. (Серре Ж.-А.), Cours d'Algèbre Supérieure, 3e éd., Paris (Gauthier-Villars), 1866. Русский перевод: Серре Ж.-А., Курс высшей алгебры, перевод с французского, СПб., 1910.

[207 ] Siegel C. L. (Зигель К. Л.), Symplectic Geometry, *Amer. J. Math.,* **LXV** (1943), 1—86.

[208a] Sierpinski W. (Серпинский В.), Leçons sur les nombres transfinis, Paris (Gauthier-Villars), 1929.

[208b] Sierpinski W. (Серпинский В.), L'hypothèse du continu, Warszawa, 1938.

[209a] Skolem T. (Сколем Т.), Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre, Wiss. Vorträge, 5 Kongress Skand. Math., Helsingfors, 1922, p. 217—232.

[209b] Skolem T. (Сколем Т.), Zur Theorie der associativen Zahlensysteme, *Skr. norske Vid. Akad.,* Oslo, 1927, № 12, 50 pp.

[210 ] Smith H. J. (Смит Г. Дж.), Collected Mathematical Papers, 2 vol., Oxford, 1894.

[211 ] Souslin M. (Суслин М. Я.), Sur une définition des ensembles mesurables *B* sans nombres transfinis, *C. R. Acad. Sci.,* **CLXIV** (1917), 88—91.

[212 ] Speiser A. (Шпейзер А.), Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 4e éd., Basel (Birkhäuser), 1956.

[213 ] Steinitz E. (Штейниц Э.), Algebraische Theorie der Körpen, *J. de Crelle,* **CXXXVII** (1910), 167—309 (nouv. èd. H. Hasse und R. Baer, Berlin — Leipzig (de Gruyter), 1930).

[214 ] Stevin S. (Стевин С.), Les Œuvres mathématiques.., éd. A. Girard, Leyde (Elzevir), 1634.

На русском языке имеется: в кн. Архимед, Галилей, Паскаль, Стевин, Начала гидростатики, М.—Л., 1932.

[215 ] Stieltjes T. (Стильтьес Т.), Recherches sur les fractions continues, *Ann. Fac. Sci. Toulouse,* **VIII** (1894), J. 1—J, 122.

[216 ] Stifel M. (Штифель М.), Arithmetica integra, Nüremberg, 1544.

[217 ] Stirling J. (Стирлинг Дж.), Lineae tertii ordinis Newtonianae.., Londini, 1717 (nouvelle éd., Paris (Duprat), 1797).

[218 ] Stone A. H. (Стоун А. Г.), Paracompactness and product spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.,* **LIV** (1948), 977—982. Русский перевод: Стоун А., Паракомпактность и произведение пространств, сб. *Математика,* 5 : 5 (1961), 3—11.

[219 ] Stone M. H. (Стоун М. Г.), The generalized Weierstrass approximation theorem. *Math. Magazine,* **XXI** (1948), 167—183, 237—254.

[220a] Sturm C. (Штурм Ш.), Sur les équations différentielles linéaires du second ordre, *J. Math.* (1), **I** (1836), 106—186.

[220b] Sturm C. (Штурм Ш.), Sur une classe d'équations à différences partielles, *J. Math.,* (1), **I** (1836), 373—444.

[221 ] Sylvester J. J. (Сильвестр Дж. Дж.), Collected Mathematical papers, 4 vol., Cambridge, 1904—1911.

[222 ] Taylor B. (Тейлор Б.), Methodus Incrementorum directa et inversa, Londini, 1715.

[223 ] Tietze H. (Титц Г.), Über Funktionen die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind, *J. de Crelle,* **CXLV** (1915), 9—14.

[224a] Toeplitz O. (Тёплиц О.), Über die Auflösung inendlichvieler linearer Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten, *Rend. Palermo,* **XXVIII** (1909), 88—96.

[224b] Toeplitz O. (Тёплиц О.), Das Verhältnis von Mathematik und Ideenlehre bei Plato, Quellen und Studien zur Geschichte der Math., Abt. B. Studien, t. I (1929), p. 3—33.

[224c] Toeplitz O. (Теплиц О.), Die mathematische Epinomisstelle, Quellen und Studien zur Geschichte der Math., Abt. B. Studien, t. II (1933), p. 334—346.

[225 ] Torricelli E. (Торричелли Э.), Opere. 4 vol; éd. G; Loria et G. Vassura, Faenza (Montanari), 1919.

[226 ] Tropfke J. (Тропфке И.), Geschichte der Elementar-Mathematik, 7 vol., 2e éd., Berlin — Leipzig (de Gruyter), 1921—24. Русский перевод: Тропфке И., История элементарной математики в систематическом

изложении, перевод с немецкого, М., 1914, т. I. Арифметика и алгебра, ч. I. Арифметика, 1914.

[227 ] Tschebotaröw N. (Чеботарев Н. Г.), Grundzüge der Galois-'schen Theorie (trad. Schwerdtfeger), Groningen (Noordhoff), 1950. Русское издание· Чеботарев Н. Г., Основы теории Галуа, ч. 1—2. ч. I, М.—Л., 1934, 211 стр. ч. II, М.—Л., 1937, 160 стр.

[228 ] Tychonoff A. (Тихонов А. Н.), Über die topologische Erweiterung von Räumen, *Math. Ann.*, **CII** (1930), 514—561.

[229 ] Urysohn P. (Урысон П. С.), Ueber die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen, *Math. Ann.*, **XCIV** (1925), 262—295. Русское издание: Урысон П. С., О мощности связных множеств. В книге Урысон П. С., Труды по топологии и другим областям математики, т. I, стр. 177—214, М., Гостехиздат, 1951.

[230 ] Vandermonde A. (Вандермонд А.), Mémoire sur la résolution des équations, Hist. de l'Acad. royale des sciences, année 1771, Paris (1774), p. 365—416.

[231a] van der Waerden B. L. (ван дер Варден Б. Л.), Moderne Algebra, 1re éd., 2 vol., Berlin (Springer), 1930—1931. Русский перевод: ван дер Варден Б. Л., Современная алгебра, 2 т., М.—Л., ГТТИ, 1947.

[231b] van der Waerden B. L., (ван дер Варден Б. Л.), Zenon und die Grundlagenkrise.., *Math. Ann.*, **CXVII** (1940), 141—161.

[231c] van der Waerden B. L. (ван дер Варден Б. Л.), Die Arithmetik der Pythagoreer, I, *Math. Ann.*, **CXX** (1947), 127—153.

[232 ] Veronese G. (Веронезе Г.), Fondamenti di Geometria, Padova, 1891.

[233 ] Vietae Fracisci (Виет Ф.), Opera mathematica.., Lugduni Batavorum (Elzevir), 1646.

[234a] Vitali G. (Витали Г.), Una proprieta delle funzioni misurabili, *R. Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend.*, (2), **XXXVIII** (1905), 599—603.

[234b] Vitali G. (Витали Г.), Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali, *Rend. Acc. Sci. di Torino,* **XLIII** (1908), 229—236.

[235 ] Vogt H. (Фогт Г.), Die Entdeckungsgeschichte des Irrationalen nach Plato und andere Quellen des 4. Jahrhunderts, *Bibl. Math.*, (3), **X** (1909), 97—155.

[236 ] Volterra V. (Вольтерра В.), Theory of functionals, London — Glasgow (Blackie and Sons), 1930.

[237 ] von Fritz K. (фон Фриц К.), The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontium, *Ann. Math.*, (2), **XLVI** (1945), 242—264.

[238a] von Neumann J. (фон Нейман Дж.), Eine Axiomatisierung der Mengenlehre, *J. Crelle,* **CLIV** (1925), p. 219—240.

[238b] von Neumann J. (фон Нейман Дж.), die Axiomatisierung der Mengenlehre, *Math. Z.*, **XXVII** (1928), 669—752.

[238c] von Neumann J. (фон Нейман Дж.), Zur Hillbertschen Beweistheorie, *Math. Z.*, **XXVI** (1927), 1—46.

[238d] von Neumann J. (фон Нейман Дж.), On rings of operators III, *Ann. of Math.*, (2) **XLI** (1940), 94—161.

[239 ] von Staudt K. G. V. (фон Штаудт К. Г. В.), Beiträge zur Geometrie der Lage, Nürnberg, 1856.

[240a] Wallis J. (Валлис Дж.), Opera Mathematica, 3 vol., Oxoniae, 1693—1695.

[240b] Wallis J. (Валлис Дж.), Logarithmotechnia Nicolai Mercatoris..., *Phil. Trans.*, **III** (1668), 753—759.

[241a] W e b e r H. (В е б е р Г.), Untersuchungen über die allgemeine Grundlagen der Galois'schen Gleichungstheorie, *Math. Ann.*, **XLIII** (1893), 521—544.

[241b] W e b e r H. (В е б е р Г.), Leopold Kronecker, *Math. Ann.*, **XLIII** (1893), 1—25.

[241c] W e b e r H. (В е б е р Г.), Beweis der Satzes, dass jede eigentlich primitive quadratische Form unendlich viele Primzahlen darzustellen fähig ist, *Math. Ann.*, **XX** (1882), 301—329.

[241d] W e b e r H. (В е б е р Г.), Theorie der Abel'schen Zahlkörper, IV, *Acta Math.*, **IX** (1886), 105—130.

[242a] W e d d e r b u r n J. M a c l a g a n (В е д д е р б о р н Дж. М.), A theorem on finite algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **VI** (1905), 349—352.

[242b] W e d d e r b u r n J. M a c l a g a n (В е д д е р б о р н Дж М.), On hypercomplex numbers, *Proc. London Math. Soc.* (2), VI (1908), 77—118.

[242c] W e d d e r b u r n J. M a c l a g a n (В е д д е р б о р н Дж. М.), A type of primitive algebra, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **XV** (1914), 162—166.

[242d)] W e d d e r b u r n J. M a c l a g a n (В е д д е р б о н Дж. М.), On division algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **XXII** (1921), p. 129—135.

[243a] W e i e r s t r a s s K. (В е й е р ш т р а с с К.), Mathematische Werke, 7 vol., Berlin (Mayer und Müller), 1894—1927. На русском языке имеется: В е й е р ш т р а с с К., О лудольфовом числе (доказательство невозможности квадратуры круга), Казань, 1894.

[243b] W e i e r s t r a s s K. (В е й е р ш т р а с с К.), Briefe an P. du Bois-Reymond, *Acta Math.*, **XXXIX** (1923), p. 199—225.

[244a] W e i l A. (В е й л ь А.), Sur les espaces uniformes et sur la topologie générale *(Actual. Scient. et Ind.*, n° 551), Paris (Hermann), 1937.

[244b] W e i l A. (В е й л ь А.), Foundations of algebraic geometry, *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.*, **29**, New. York, 1946.

[245 ] W e y l H. (В е й л ь Г.), Symmetry, Princeton (Univ. Press), 1952.

[246 ] W h i t e h e a d A. N. (У а й т х е д А. Н.), On cardinal numbers, *Amer. J. Math.*, **XXIV** (1902), 367—394.

[247 ] W i e l e i t n e r H. (В и л е й т н е р Г.), Der «Tractatus de latitudinibus formarum» des Oresme, *Bibl. Math.* (3), **XIII** (1912), 115—145.

[248] W i t t E. (В и т т), Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern, *J. Crelle*, **CLXXVI** (1937), p. 31—44.

[249 ] W r i g h t E. (Р а й т Е.), Table of Latitudes, 1599.

[250a] Y o u n g W. H. (Ю н г), On upper and Lower integration, *Proc. London Math. Soc.* (2), **II** (1905), p. 52—66.

[250b] Y o u n g W. H. (Ю н г), A new method in the theory of intgration, *Proc. London Math. Soc.* (2), **IX** (1911), 15—50.

[251a] Z e r m e l o E. (Ц е р м е л о Э.), Beweis dass jede Menge wohlgeordnet werden kann, *Math. Ann.*, **LIX** (1904), 514—516.

[251b] Z e r m e l o E. (Ц е р м е л о Э.), Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung, *Math. Ann.*, **LXV** (1908), 107—128.

[251c] Z e r m e l o E. (Ц е р м е л о Э.), Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, *Math. Ann.*, **LXV** (1908); 261—281.

[252 ] Z o r n M. (Ц о р н М.), A remark on method in transfinite algebra, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **XLI** (1935), 667—670.

[253 ] Z y g m u n d A. (З и г м у н д А.), Trigonometrical series, Warszawa, 1935. Русский перевод: З и г м у н д А., Тригонометрические ряды, ГТТИ, 1939; готовится к печати перевод 2-го изд. (ИЛ).

## Список дополнительной литературы

[1]* Александров А. Д., Геометрия, БСЭ, изд. 2, т. 10 (1952).

[2]* Александров П. С., Топология, БСЭ, изд. 2, т. 42 (1956).

[3]* Башмакова И. Г., а) Дифференциальные методы в работах Архимеда, *Истор.-матем. исследования*, вып. VI, М., 1956, стр. 605—658.
б) Лекции по истории математики в Древней Греции, *Истор.-матем. исследования*, вып. XI, М., 1957, стр. 224—438.
в) О доказательстве основной теоремы алгебры, *Истор.-матем. исследования*, вып. X, стр. 257—304. См. также Le théorème fondamental d'algèbre et la construction des corps algébriques, Archives internat. d'Histoire des Sciences, № 52—53, Paris, 1960.

[4]* Джемшид Гиясэддин ал-Каши, Ключ арифметики. Трактат об окружности, перев. Б. А. Розенфельда, коммент. А. П. Юшкевича и Б. А. Розенфельда, М., 1956.

[5]* Золотарев Е. И., Собрание сочинений, т. 1—2, Ленинград, 1932.

[6]* Каган В. Ф., а) Лобачевский, изд. 8, М.—Л., 1948.
б) Основания геометрии, М.—Л., 1949.

[7]* Колмогоров А. Н., Математика, БСЭ, изд. 2, т. 26.

[8]* Розенфельд Б. А., О математических работах Насирэддина Туси, *Историко-матем. исслед.*, вып. IV, М., 1951, стр. 489—512.

[9]* Рыбников К. А., а) Об алгебраических корнях дифференциального исчисления, *Историко-матем. исслед.*, вып. XI, М., 1958, стр. 583—592.
б) История математики, т. I, изд. МГУ, 1960.

[10]* Цейтен Г. Г., а) История математики в древности и в средние века, М.—Л., 1938.
б) История математики в XVI—XVII вв., М.—Л., 1933.

[11]* Юшкевич А. П., Декарт и математика, в книге Декарта «Геометрия», 1938, стр. 257—294. См. также примечания на стр. 199—253.

## ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

# ОГЛАВЛЕНИЕ



Н. Бурбаки
ОЧЕРКИ ПО ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

Редактор *А. А. БРЯНДИНСКАЯ* Технический редактор *Н. А. Иовлева*
Корректор *Т. А. Палладина*

Сдано в производство 24/IX-1962 г. Подписано к печати 11/III-1963 г. Бумага $60\times90^1/_{16}$ = = 9,1 бум. л. 18,3 печ. л. Уч.-изд. л. 19,5. Изд. № 1/0976. Цена 1 р. 57 к. Зак. 721.

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УЦБ и ПП Ленсовнархоза
Ленинград, Измайловский пр., 29