

МИФ-2, №1, 2003 год

Мендель Виктор Васильевич

ГРАФЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Дорогие ребята. В этом номере вы познакомитесь с важными и очень полезными объектами математики – графами. Для того чтобы вам было проще понять, что это такое, мы по ходу изложения материала будем уточнять это понятие.

Что такое граф?

Первое определение графа: *графом (будем обозначать его буквой G) называется рисунок, состоящий из нескольких точек (вершин графа) и ребер – отрезков или дуг, соединяющих некоторые вершины.*

На рисунке 1 показан пример графа.

Как вы видите, ребрами соединены не все вершины графа. Вершины, из которых не выходит ни одного ребра, называют изолированными. (На рисунке изолированная вершина это точка G).

Рисунок 1. *Граф с семью вершинами*

Рисунок 1. *Граф с семью вершинами*

С помощью графов удобно и наглядно изображается информация о разных объектах и отношениях между ними. Рассмотрим пример.

Пример 1. *В розыгрыше финальной части турнира участвуют семь команд: шесть команд, набравших наибольшее количество очков в предварительной части турнира и команда – победитель прошлого года. Сначала играют друг с другом первые шесть команд, затем три команды, одержавшие победы и команда, победитель прошлого года, играют друг с другом. Два победителя этого тура встречаются в финале.*

Рисунок 2. *Граф к примеру 1*

Рисунок 2. *Граф к примеру 1*

Понять о чем идет речь в этом тексте нелегко. Попробуем представить его в виде наглядной схемы (смотри рисунок 2) и порядок организации финальной части розыгрыша станет очевидным.

Обратимся теперь к истории появления графов. Впервые в рассмотрение их ввел великий математик **Леонард Эйлер**. В популярной

литературе часто упоминается его **задача о Кенигсбергских мостах**. Смысл задачи таков: в городе Кенигсберге (ныне это город Калининград) протекает река Прегель. Сам город расположен на берегах этой реки и ее островах. Естественно, что в городе построены мосты, связывающие все его районы (смотри рисунок 3). Во время прогулки по городу Эйлер захотел пройти по всем мостам, причем по каждому только один раз. Однако ему это не удалось. Вернувшись домой, ученый составил схему, изобразив участки суши точками, а мосты отрезками (рисунок 4). Это и был первый граф.

Мы ответим на вопрос, можно ли осуществить пешую прогулку по указанному правилу, в конце статьи, а сейчас рассмотрим некоторые важные свойства графов.

Рисунок 3. Схема мостов в Кенигсберге

Рисунок 3. Схема мостов в Кенигсберге

Определение 1. *Степенью вершины графа называется число выходящих из него ребер.*

Степени вершин А, В и D на рисунке 4 равны трем, а степень вершины С равна 5.

В графе на рисунке 1 степень вершины G равна нулю, так как из нее не выходит ни одно ребро.

Для степени вершины принято следующее обозначение: **$\deg(A)$** .

Рисунок 4. Граф к рисунку 3

Рисунок 4. Граф к рисунку 3

Рассмотрим некоторый граф . Обозначим количество его вершин буквой p , а количество ребер буквой q . Сформулируем в виде теорем простейшие свойства степени.

Теорема 1. *Сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному количеству его ребер ($2q$).*

Граф называют **простым**, если две вершины соединяет не более одного ребра, в противном случае, граф называют **мультиграфом**. На рисунке 1 изображен простой граф, а на рисунке 4 мультиграф.

Теорема 2. В простом графе найдется не менее двух вершин с одинаковыми степенями.

Теорема 3. В простом графе с p вершинами число ребер не больше :

.

Доказательство. Всего p вершин, каждая из них может быть соединена не более чем с $(p-1)$ остальными вершинами. Таким образом, получаем $(p-1)p$ ребер, но каждое из них посчитано ровно два раза, так как соединяет две вершины. Поэтому делим полученное выражение пополам.

Определение 2. Граф называется полным, если каждая его вершина соединена со всеми другими вершинами графа.

Примеры полных графов вы можете построить сами: нарисуйте выпуклый многоугольник и постройте все его диагонали. Из доказательства теоремы

2 вытекает, что в полном графе с p вершинами ребер.

Пути, циклы, связность

Еще одно важное понятие, относящееся к графам – **связность**. Для того чтобы ввести его, дадим несколько определений. Начнем с понятия **путь**.

Определение 3. Путем (из вершины A в вершину B) в графе называется последовательная цепочка смежных ребер, которая начинается в вершине A и заканчивается в вершине B . Путь может проходить через ребро только один раз.

(Запись пути в графе зависит от того, как определены его ребра. Если ребра определены с помощью вершин, то записывают последовательность тех вершин, через которые проходит путь. Если же ребра имеют собственные названия, то выписывается последовательность из этих названий.)

Рассмотрим примеры. На рисунке 5 жирными линиями показан путь из точки A в точку B , который мы можем записать так: $(AEDB)$. Другой путь из A в B показан пунктирными линиями, его можно записать как $(l_1l_2l_3)$.

Рисунок 5. Пути в графе

Рисунок 5. Пути в графе

Заметим, что может существовать несколько путей из одной точки в другую. В качестве устного упражнения сосчитайте, сколько всего путей можно указать из вершины A в вершину B .

Рассмотрим теперь специфический случай, когда начало и конец пути совпадают.

Определение 4. Циклом называется путь, у которого начало и конец совпадают.

На рисунке 5 циклами являются следующие пути: $(AEFDA)$, $(EFBCADE)$.

Упражнение. Попробуйте перечислить как можно больше циклов, содержащих точку A .

Пути и циклы будем называть простыми, если через каждую свою вершину они проходят только один раз. Все приведенные в примерах пути и циклы являются простыми.

Определение 5. Граф называется **связным**, если любые две его вершины можно соединить хотя бы одним путем. В противном случае граф называется **несвязным**.

Граф на рисунке 1 несвязен, так как нет ни одного пути, соединяющего точку G с остальными вершинами, графы на рисунках 2, 4, 5 - связные.

Вам уже, наверное, приходилось встречать задачи, в которых предлагается обвести ту или иную фигуру, не отрывая карандаш от бумаги. При этом запрещается проводить карандаш по одной линии несколько раз. Понятно, что аналогичное задание может быть дано и относительно некоторого графа. Далеко не все графы можно построить описанным выше способом. Те, для которых это требование выполняется, называются

уникурсальными или **эйлеровыми**. Эти графы непосредственно связаны с задачей о Кенигсбергских мостах и впервые описаны Леонардом Эйлером. Сам Эйлер доказал следующую теорему.

Теорема 4 (Эйлера). *Связный граф уникурсален тогда и только тогда, когда степени всех его вершин четны или у него ровно две вершины нечетной степени.*

Доказательство. Вначале заметим, что если все вершины графа имеют степень не меньше двух, то в нем существует хотя бы один цикл.

Рассмотрим случай, когда все вершины четны. Применим «метод стирания». Выберем некоторую точку и начнем строить путь. Так как степени всех вершин четны, то они не меньше двух. Поэтому, войдя по некоторому ребру в данную точку, мы всегда можем выйти из нее по второму ребру. Будем отмечать пройденные вершины. Так как число вершин конечно, то на каком то шаге мы перейдем в одну из уже отмеченных вершин и таким образом замкнем цикл. Теперь сотрем этот цикл (естественно, запомнив его где-то) и рассмотрим получившийся граф. Он может оказаться несвязным, но, тем не менее, все его вершины будут иметь четную степень. Применим к этому графу ту же процедуру, и будем это делать до тех пор, пока остается хотя бы один нетривиальный подграф. В результате мы получим несколько циклов, которые не имеют общих ребер, а все вместе образуют исходный граф. Нам остается только склеить эти циклы в один. Возьмем два цикла (...ВАС...) и (...НАМ...), имеющие общую вершину A , разрежем их в этой вершине и склеим по такому правилу: сначала выписываем вершины первого цикла, потом, дойдя до точки A , записываем все вершины второго цикла, а затем продолжаем выписывать оставшиеся вершины первого цикла. Очевидно, что в итоге у нас получится один цикл, который содержит все ребра исходного графа.

Предположим теперь, что в исходном графе ровно две нечетных вершины A и B . Соединим их дополнительным ребром AB , и получим граф, все вершины которого четны. Построим для него эйлеров цикл по указанному выше алгоритму. Перепишем его так, чтобы вершина A была начальной, а ребро AB – последним. Удалив из этого цикла ребро AB получим цикл, начинающийся в A и заканчивающийся в B . Этот путь проходит через все ребра исходного графа.

Предположим теперь, что граф уникурсален. Докажем, что в нем не более двух нечетных вершин. Очевидно, что рисовать такой граф нужно,

начиная с нечетной вершины. Причем завершить маршрут нужно в другой нечетной вершине. Если же имеется еще одна нечетная вершина, то она не может быть ни начальной, ни конечной. Поэтому, когда мы в нее заходим, то должны обязательно выйти. Каждый проход через вершину уменьшает число не пройденных ребер, связанных с этой вершиной, ровно на два. В итоге, на каком то шаге в нечетной вершине останется только одно не пройденное ребро, зайдя по которому в вершину мы уже не сможем из нее выйти. Теорема доказана полностью.

Используя доказанную теорему, убедитесь в том, что задача о Кенигсбергских мостах не имеет решения.

Существует еще одна очень интересная задача, связанная с графами. В ней требуется отыскать простой цикл, который проходит через все вершины данного связного графа. Эта задача является частным случаем «задачи коммивояжера»¹, суть которой в следующем. Коммивояжер (разъездной торговец) должен проехать по всем городам некоторого региона и вернуться в исходный пункт. При этом целесообразно так составить маршрут, чтобы в каждом городе побывать ровно один раз (иначе покупатели могут предъявить счет за некачественный товар). У коммерсанта естественно, имеется карта дорог региона.

Циклы, обладающие указанным выше свойством, называют **гамильтоновыми**, в честь изобретателя Гамильтона, придумавшего игру – головоломку, в которой требовалось отыскать такие пути.

В отличие от эйлеровых циклов, для гамильтоновых циклов нет исчерпывающего условия, подобного теореме 4. Имеется следующий достаточный признак.

Теорема 5. Пусть связный граф имеет не меньше четырех вершин ($p > 3$) и степень каждой вершины не меньше $p/2$, тогда в графе имеется гамильтонов цикл.

Рассмотрим граф на рисунке 5. У него 6 вершин, при этом пять вершин имеют степень три, и одна степень пять. Согласно теореме, в этом графе существует гамильтонов цикл. Нетрудно проверить, что таким циклом является цикл (AEFDBCA).

Рассмотрим теперь какой-нибудь выпуклый многоугольник. Его вершины будем считать вершинами, а стороны – ребрами, некоторого

графа. Степень каждой вершины такого графа равна двум, и для него, очевидно, не выполняются требования теоремы 5. Но, тем не менее, этот граф является гамильтоновым.

Деревья

Важным частным случаем графа является дерево. Это название связано с типичным видом некоторых представителей данного класса. Дадим определение.

Рисунок 6. *Дерево (похожее на куст)*

Рисунок 6. *Дерево (похожее на куст)*

Определение 6. *Деревом называется связный граф, не содержащий циклов. Несвязный граф, не имеющий циклов, называют лесом. (В лесу, как известно, не меньше двух деревьев.)*

На рисунках 6 и 7 приведены примеры деревьев. Как видит читатель, далеко не все они напоминают по форме дерево. Тем не менее, можно так деформировать граф на рисунке 7, что он станет полностью похож на граф с рисунка 6. Нас естественно будет интересовать вопрос о том, когда граф является деревом. Ответ на него сформулируем ниже, а сейчас укажем одно интересное свойство деревьев.

Теорема 6. *В любом дереве существует хотя бы одна вершина степени единица. (Такие вершины называют «висячими».)*

Рисунок 7. *Дерево (не похожее на дерево)*

Рисунок 7. *Дерево (не похожее на дерево)*

Доказательство. Используем метод «от противного». Предположим, что в графе нет вершин степени единица. Тогда все вершины имеют степень не меньше двух. Когда мы доказывали теорему 5, то показали, что в подобных графах обязательно существуют циклы. Это противоречит тому, что исходный граф – дерево.

Теперь сформулируем теорему, являющуюся признаком дерева.

Теорема 7. *Связный граф является деревом тогда и только тогда, когда количество его вершин на единицу превосходит количество ребер:*

$$\square.$$

Доказательство. Покажем вначале, что любое дерево обладает указанным свойством. Применим метод «стирания». Так как в дереве (смотри теорему 6) всегда имеются «висячие» вершины, мы сотрем одну такую вершину вместе с выходящим из нее ребром. В результате мы вновь получим дерево, у которого на одно ребро и на одну вершину меньше. Будем продолжать эту процедуру до тех пор, пока граф не превратится в одно единственное ребро, которым соединены две вершины. Для такого графа наша формула очевидна. Заметим также, что процедура стирания на каждом шаге не изменяла разность $\square$ (и p и q на каждом шаге уменьшались ровно на единицу), поэтому исходная разность также равнялась единице.

Теперь объясним идею доказательства того, что из свойства $\square$ следует, что граф является деревом. Используем метод «от противного». То есть, будем считать, что в графе имеются циклы. Рассмотрим один из них. Удалим любое ребро, принадлежащее данному циклу, при этом граф останется связным. Будем удалять ребра из графа до тех пор, пока в нем будет хотя бы один цикл. (Пусть таким образом мы удалили $\square$ ребер.) Когда в графе не останется ни одного цикла, он превратится в дерево, для которого выполняется формула $\square$, из которой следует, что $\square$. Таким образом, мы доказали, что для графов, имеющих циклы, указанная в условии теоремы формула не выполняется.

Одна из важных прикладных задач, относящихся к графам, это отыскание *минимального остова*² графа. Поясним, о чем идет речь. Пусть имеется связный граф $\square$, необходимо найти такой его подграф, который связан, содержит все вершины исходного графа, и при удалении любого ребра становится несвязным (в этом и заключено условие минимальности). Нетрудно догадаться, что такой минимальный остов является деревом.

Упражнение. Найдите три минимальных остова графа на рис.5.

Планарные графы. Раскраски

Исторически планарные графы связаны с одной знаменитой задачей. **Задача о домиках и колодцах.** В некоторой деревне есть три колодца. Трое жителей, живущие в трех стоящих рядом домиках перессорились, и решили так протоптать тропинки от своих домов к каждому из трех колодцев, чтобы они не пересекались. Удастся ли им выполнить свой план?

Рисунок 8. Домики и колодцы

Рисунок 8. Домики и колодцы

Попробуем решить эту задачу. Проведем тропинки так, как это показано на рисунке 8. Как видно, нам удалось провести только восемь тропинок, а девятая должна пересечься хотя бы с одной. Можно доказать (мы не будем приводить строгое доказательство), что эта задача не имеет решения. Дело в том, что по мере проведения тропинок из двух первых домиков, будет получаться некоторый замкнутый контур, внутри которого будет стоять один из колодцев, при этом третий домик будет находиться снаружи от этого контура. Для того чтобы соединить этот домик с колодцем, обязательно потребуется пересечь новой тропинкой одну из уже проложенных.

Рисунок 9. Графы к задачам о домиках и колодцах и о пяти хуторах

Рисунок 9. Графы к задачам о домиках и колодцах и о пяти хуторах

Можно предложить еще одну задачу.

Задача о пяти хуторах. Пять хуторов расположены в вершинах правильного пятиугольника. Нужно проложить дороги от каждого из них к остальным так, чтобы не было перекрестков.

Эта задача также не может быть решена.

На рисунке 9 построены графы  и , соответствующие задаче о домиках и колодцах и задаче о пяти хуторах. Оказывается, что проблема укладки графа на плоскости тесно связана с этими типами графов.

Перейдем теперь к более строгим формулировкам.

Определение 7. Граф называется *планарным*, если его можно изобразить на плоскости без самопересечений. Такое изображение называют **плоской укладкой** графа.

На рисунке 10 изображен полный граф  и его плоская укладка.

Рисунок 10. Граф и его плоская укладка

Рисунок 10. Граф и его плоская укладка

Далее нам понадобится понятие **гомеоморфизма**. Это очень сложное математическое понятие, но в отношении к графам оно формулируется

довольно просто. Мы не будем давать строго определения, а рассмотрим это свойство на примерах.

Будем говорить, что два графа **гомеоморфны**, если один из них получен из другого, путем добавления новых вершин на уже имеющиеся ребра.

Рисунок 11. Гомеоморфные графы

Рисунок 11. Гомеоморфные графы

На рисунке 11 показаны два гомеоморфных графа. Граф справа получен из первого графа добавлением четырех вершин. На практике бывает довольно трудно увидеть, что два графа гомеоморфны.

Теперь сформулируем условие планарности графов.

Теорема 8. *Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных  и .*

Эта общая теорема ставит окончательную точку в рассмотренных выше задачах о хуторах и о домиках и колодцах.

Замечание. Доказать что граф планарен и построить его плоскую укладку – это две независимых задачи. Заметим, что если граф не имеет пяти вершин, степень которых не меньше четырех, то он наверняка не имеет подграфа, гомеоморфного . Если в графе нет шести вершин, степень которых не меньше трех, то он гарантированно не имеет подграфа, гомеоморфного . Однако построить плоскую укладку графа с достаточно большим количеством вершин бывает непросто.

Рассмотрим теперь еще одну классическую задачу теории графов.

Задача о четырех красках. *На политической карте мира нарисовано несколько государств. Карту нужно раскрасить так, что бы две страны, имеющие общую границу, были покрашены в разные цвета.*

В классическом варианте предполагалось, что карту можно раскрасить четырьмя цветами. Покажем, как эта задача связана с графами. Обозначим каждую страну на карте точкой, вершины, отвечающие странам, имеющим общую границу, соединим ребрами. Теперь задачу о раскрашивании можно сформулировать так: раскрасить вершины планарного графа так, чтобы любые две смежные были покрашены в разные цвета. Эта задача может быть решена для графов с малым количеством вершин. Если же число вершин достаточно велико, то гипотеза четырех красок оказывается неверной. (Этот факт установлен с помощью мощных компьютеров.)

Вместе с тем, довольно простыми средствами была доказана теорема о пяти красках.

Теорема 9. *Планарный граф можно раскрасить пятью красками так, что любые смежные вершины будут окрашены в разные цвета.*

Еще одна интересная **проблема**: сколькими способами можно раскрасить граф³, если имеется n красок.

Оказывается, что число способов раскрашивания является многочленом от n , коэффициенты этого многочлена можно вычислить с помощью специального алгоритма.

Укажем еще одно обобщение задачи о раскрасках. Известно, что граф без самопересечений располагается на некоторой поверхности (на сфере, на торе, на бутылке Клейна и т.п.), какое минимальное количество красок нужно для его раскрашивания?

Ответ на этот вопрос был получен в разделе математики, называемом «топологией». Оказалось, что для всех замкнутых двумерных поверхностей (кроме сферы), данное число выражается через Эйлерову характеристику этой поверхности.

Двудольные графы

Еще один интересный класс графов образуют так называемые двудольные графы. Примером такого графа является граф . Его вершины можно разделить на два класса (доли). Вершины каждого класса («домики» и «колодцы») несмежны, а вершины разных классов могут быть соединены

ребром. Дадим более точное определение.

Определение 8. Граф называется **двудольным**, если его вершины можно разбить на два класса таким образом, что вершины каждого класса несмежны.

Если каждая вершина одной доли соединена ребром с каждой вершиной другой доли, то такой граф называют **полным двудольным графом** класса $\square$, где n и m – количество вершин в каждой доле.

Упражнение. Найдите количество ребер в графе $\square$.

Для произвольного графа естественно поставить вопрос: *является ли он двудольным?* Имеется точное условие, определяющее это свойство. Сформулируем это условие в виде теоремы.

Теорема 10. *Граф является двудольным тогда и только тогда, когда все простые циклы, содержащиеся в этом графе, имеют четную длину. (То есть, все простые циклы состоят из четного количества ребер).*

Напомним, что простой цикл проходит через каждую свою вершину ровно один раз.

Следует заметить, что, зная, что граф двудольный, весьма непросто разделить вершины этого графа по долям. Укажем один из методов, как это сделать (он, кстати, по сути, является доказательством теоремы).

Разобьем граф на простые циклы. Выберем один из циклов, и будем помечать его вершины через одну двумя разными цветами. Выберем теперь следующий цикл, если у него нет помеченных вершин, то раскрасим их так, как в первом случае, если есть помеченные вершины, то раскраску начнем со смежных им вершин, чередуя цвета так, чтобы соседние вершины были разного цвета. Будем продолжать этот процесс до тех пор, пока не будут покрашены все вершины. (**Замечание:** целесообразно выбирать новые циклы так, чтобы одна из их вершин уже была помечена.) Вершины одного цвета будут принадлежать одной доле графа, а вершины второго цвета – другой.

Примеры решения задач

Рассмотрим несколько примеров, при решении которых успешно применяются графы.

Задача 1. *Один из ребят сказал: «А у нас в классе 25 человек, и каждый дружит ровно с семью одноклассниками!»*

«Не может быть этого», - ответил приятелю Витя Иванов, победитель олимпиады. Почему он так ответил?

Решение. Представим всех ребят в классе в виде вершин графа. Получим 25 вершин. Соединим вершины, обозначающие друзей, ребрами. Тогда из каждой вершины будет выходить по семь ребер. Сумма степеней вершин графа будет равна $25 \times 7 = 175$. Это нечетное число. А нам известно, что сумма степеней вершин графа должна быть четна. Получили противоречие.

Задача 2. *В стране 15 городов, каждый соединен дорогами не менее чем с 7-ю другими. Докажите, что из любого города можно проехать в любой другой либо напрямую, либо через один промежуточный город.*

Решение. Рассмотрим город А. Он соединен дорогами с не менее чем семью городами $B_1, B_2, \dots, B_7, \dots$. Всего получилось не меньше 8 городов. Предположим, что есть город С, не связанный ни с А ни с $B_1, B_2, \dots, B_7, \dots$. Значит он связан только с теми городами, которые остались вне этого списка. Но таких городов меньше 7, что противоречит условию.

Задача 3. *В классе 28 человек. Каждая девочка дружит с 4 мальчиками, а каждый мальчик – с 3 девочками. Сколько в классе мальчиков и девочек?*

Решение. В графе, для этой задачи вершины, соответствующие мальчикам, выкрасим синим цветом, а вершины, соответствующие девочкам – красным. Каждое ребро графа соединяет ровно две вершины: одну синюю и одну красную. Пусть всего x красных и y синих вершин ($x+y=28$ – уравнение №1). Выразим количество ребер в графе. С одной стороны, оно равно $3x$, с другой – $4y$. Получим уравнение №2: $3x=4y$. Решая систему из двух уравнений, легко найти, что $x=16$ а $y=12$.

Задача 4. *Докажите, что среди учеников любого класса найдутся двое, имеющие одинаковое число знакомых в этом классе (если, конечно, в этом классе не менее двух учеников).*

Решение. Доказательство следует из теоремы 2, которая утверждает, что в любом графе существуют две вершины с одинаковой степенью. Изобразим класс в виде графа, вершины которого – ученики, а ребрами соединены только те вершины, которые обозначают знакомых. В этом графе есть две вершины с одинаковой степенью, следовательно, в классе есть двое ребят с одинаковым числом знакомых.

Рисунок 12. Плоская укладка графа с шестью вершинами.

Рисунок 12. Плоская укладка графа с шестью вершинами.

Задача 5. Расположите на плоскости 6 точек и соедините их непесекающимися линиями так, чтобы из каждой точки выходили четыре линии.

Решение. Смотри рисунок 12.

Задача 6. В марсианском метро 100 станций. От любой станции до любой другой можно проехать. Забастовочный комитет хочет закрыть проезд через одну из станций так, чтобы между всеми остальными станциями был возможен проезд. Докажите, что такая станция найдётся.

Решение. План марсианского метро является связным графом. Возможны два варианта:

1 случай. Граф является деревом. Тогда этот граф имеет «висячую» вершину. Ее и следует перекрыть.

2 случай. Граф имеет циклы. Тогда нужно перекрыть одну из станций, принадлежащих этому циклу.

Контрольное задание

Представленные ниже задачи являются контрольным заданием для учащихся 8-9 классов. Решения необходимо оформить в отдельной тетради и выслать по адресу: 68000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского 43, ХКЦТТ.

Для зачета нужно набрать не менее 20 баллов (количество баллов за каждую задачу указано в конце условия), но если вы решите задачи, оцененные ровно в 20 баллов, этого может оказаться недостаточно, так как за недочеты и ошибки баллы снимаются.

М8.3.1. В трёх вершинах правильного пятиугольника расположили по

фишке. Разрешается передвигать их по диагонали в любую свободную вершину. Можно ли таким образом добиться того, чтобы одна из фишек вернулась на свое место, а две другие поменялись местами? (5 баллов)

Указание: нетрудно заметить, что ребра такого графа образуют простой цикл, поэтому изменить порядок точек нельзя.

М8.3.2. На математической олимпиаде было предложено 20 задач. На закрытие пришло 20 школьников. Каждый из них решил по две задачи, причём выяснилось, что среди пришедших каждую задачу решило ровно два школьника. Докажите, что можно так организовать разбор задач, чтобы каждый школьник рассказал одну из решенных им задач, и все задачи были разобраны. (5 баллов)

Указание: постройте двудольный граф, одна доля которого – задачи, а другая – ученики. Каждая вершина этого графа будет иметь степень два. Поэтому данный граф может «развалиться» на несколько непересекающихся простых циклов. Распределите задачи между учениками внутри каждого цикла.

М8.3.3. В спортклубе тренируются 100 толстяков, веса которых равны 1 кг, 2 кг, ..., 100 кг. На какое наименьшее число команд их можно разделить, чтобы ни в какой команде не было двух толстяков, один из которых вдвое тяжелее другого? (10 баллов)

М8.3.4. В тридевятом царстве каждые два города соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что существует город, из которого можно проехать в любой другой не более чем по двум дорогам. (10 баллов)

М8.3.5. В городе на каждом перекрестке сходится чётное число улиц. Известно, что с любой улицы города можно проехать на любую другую. Докажите, что все улицы города можно объехать, побывав на каждой по одному разу. (5 баллов)

Указание: используйте признак Эйлера графа.

М8.3.6. Последовательность из 36 нулей и единиц начинается с пяти нулей. Среди пятёрок подряд стоящих цифр встречаются все 32 возможные комбинации. Найдите пять последних цифр последовательности. (10

баллов)

М8.3.7. Дан правильный 45-угольник. Можно ли так расставить в его вершинах цифры от 0 до 9 так, чтобы для любой пары различных цифр нашлась сторона, концы которой занумерованы этими цифрами. (10 баллов)

Указание: рассмотрите полный граф, вершины которого суть цифры от 0 до 9. Задача сводится к его обходу.

М8.3.8. Докажите, что можно расположить по кругу символы 0 и 1 так, чтобы любой возможный набор из n символов, идущих подряд, встретился. (10 баллов)

Указание: рассмотрите граф, вершины которого суть слова длины $n-1$. Две вершины u и v соединяются стрелкой, если существует слово длины n , у которого u является началом, а v - концом.

М8.3.9. Рёбра дерева окрашены в два цвета. Если в какую-то вершину приходят рёбра только одного цвета, то их все можно перекрасить в другой цвет. Можно ли все дерево сделать одноцветным? (10 баллов)

Указание: рассмотрите сначала «висячие» вершины, ребра, которые из них выходят можно перекрашивать по своему усмотрению.

Notes

[← 1]

В более сложной формулировке этой задачи требуется найти наиболее короткий маршрут

[← 2]

Существует другая трактовка минимальности, связанная с тем, что каждому ребру графа приписано некоторое положительное число. Такое число называют *весом* ребра.

[← 3]

Здесь граф необязательно должен быть планарен.