

УЧЕБНИК ДЛЯ ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ

С. Л. Атанасян,
В. Г. Покровский, А. В. Ушаков

ГЕОМЕТРИЯ

2

Учебное пособие
для вузов



ИЗДАТЕЛЬСТВО

БИНОМ

УЧЕБНИК ДЛЯ ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ

**С. Л. Атанасян,
В. Г. Покровский, А. В. Ушаков**

ГЕОМЕТРИЯ

2

**Учебное пособие
для вузов**

Допущено
Учебно-методическим объединением
по направлению «Педагогическое образование»
Министерства образования и науки РФ
в качестве учебного пособия для высших учебных заведений,
ведущих подготовку по направлению 050100
«Педагогическое образование»

ЭЛЕКТРОННОЕ ИЗДАНИЕ



Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2015

УДК 514
ББК 22.1
А92

Атанасян С. Л.

А92 Геометрия 2 [Электронный ресурс] : учебное пособие для вузов / С. Л. Атанасян, В. Г. Покровский, А. В. Ушаков ; под ред. С. Л. Атанасяна. — Эл. изд. — Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf : 547 с.). — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. — Систем. требования: Adobe Reader XI ; экран 10".

ISBN 978-5-9963-2876-5

В учебнике собран материал второй части единого курса геометрии, изучение которого необходимо будущему учителю математики для успешной работы со школьниками. Изложение теоретического материала проиллюстрировано типовыми примерами.

Для студентов, аспирантов и преподавателей математических факультетов вузов.

**УДК 514
ББК 22.1**

Деривативное электронное издание на основе печатного аналога: Геометрия 2 : учебное пособие для вузов / С. Л. Атанасян, В. Г. Покровский, А. В. Ушаков ; под ред. С. Л. Атанасяна. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. — 544 с. : ил. — ISBN 978-5-9963-0511-7.

В соответствии со ст. 1299 и 1301 ГК РФ при устранении ограничений, установленных техническими средствами защиты авторских прав, правообладатель вправе требовать от нарушителя возмещения убытков или выплаты компенсации

ISBN 978-5-9963-2876-5

© БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемое учебное пособие является продолжением пособия «Геометрия 1» авторов С. Л. Атанасяна и В. Г. Покровского. Оно соответствует программе, реализуемой кафедрой алгебры и геометрии и методики их преподавания Государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Московский городской педагогический университет» при обучении студентов по направлению «Педагогическое образование», профиль «Математика».

Пособие будет также полезно магистрантам, обучающимся по соответствующим программам магистратуры. В нем представлен материал заключительной части единого курса геометрии педагогического вуза. Оно крайне необходимо будущему учителю математики, так как помимо фундаментальных математических знаний и общематематической культуры, раскрывает перед студентами основы элементарной, школьной геометрии.

Пособие состоит из следующих частей: методы изображений, основания геометрии, проективная геометрия, элементы топологии и дифференциальной геометрии. Они достаточно независимы друг от друга и могут излагаться в любой последовательности. Однако авторы предлагают именно указанный порядок изучения, хотя он отличается от принятого в ставшем уже классическим пособии Л. С. Атанасяна и В. Т. Базылева [1]. Эта рекомендация основана на том соображении, что при четырехлетнем обучении бакалавров достаточно рано, уже на третьем году учебы, студенты выходят на педагогическую практику в школу. Поэтому в первую очередь им следует освоить те разделы, которые крайне необходимы учителю, а именно методы изображений и основания геометрии.

Части I–III подготовлены профессором С. Л. Атанасяном. В части второй «Основания геометрии» глава V «Теория измерений» написана доцентом В. Г. Покровским. Часть IV подготовлена доцентом А. В. Ушаковым. Общая редакция профессора С. Л. Атанасяна.

ЧАСТЬ I

МЕТОДЫ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Задача изображения пространственных тел на плоском чертеже рассматривалась различными математиками еще с античных времен. Решение этой задачи крайне необходимо архитекторам, художникам, инженерам. Учитель математики при преподавании стереометрии изображает пространственные тела на классной доске. Самый простой способ решения такой задачи связан с параллельным проектированием трехмерного евклидова пространства на плоскость. Метод изображения пространственных тел с помощью параллельного проектирования является простым, но не всегда удобным для всех классов задач. Например, в живописи с его помощью нельзя получить художественное изображение пространственных тел, художники применяют гораздо более сложные способы изображения, используя так называемое центральное проектирование. Но в техническом черчении и в школьном преподавании этот метод весьма удобен и практичен.

Метод изображения пространственных фигур на чертеже с помощью параллельного проектирования впервые был разработан знаменитым французским математиком Гаспаром Монжем в 1779 году. В это время он был преподавателем военно-инженерной школы в городе Мезьере. Метод был настолько удобен и прост по сравнению со старыми способами черчения, что руководство школы его засекретило. Метод Монжа впервые был опубликован в 1794 году.

В дальнейшем, не оговаривая особо, будем предполагать, что все точки, прямые, плоскости и другие геометрические тела заданы в некотором трехмерном евклидовом пространстве.

СВОЙСТВА ИЗОБРАЖЕНИЙ

§ 1. ИЗОБРАЖЕНИЕ ПЛОСКИХ ФИГУР ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ

Рассмотрим некоторую плоскость α и вектор \vec{a} , который ей не параллелен.

Определение 1. Под *параллельной проекцией* точки M на плоскость α в направлении вектора \vec{a} будем понимать точку M' пересечения этой плоскости с прямой, проходящей через M и параллельной вектору \vec{a} (рис. 1).

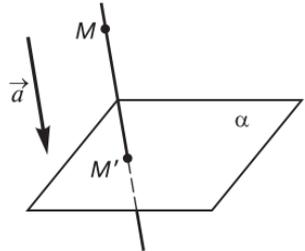


Рис. 1

Если в пространстве дано некоторое тело F , то множество параллельных проекций всех его точек на плоскость α в направлении вектора \vec{a} образуют *параллельную проекцию* F' тела F на эту плоскость. Плоскость α будем называть *плоскостью проекции*. Если вектор \vec{a} перпендикулярен плоскости проекции, то параллельное проектирование называется *ортогональным*. В техническом черчении в основном используется ортогональное проектирование. Вектор \vec{a} определяет направление параллельного проектирования. Ясно, что это направление может быть задано не только вектором, но и прямой, лучом или отрезком. Мы всегда будем считать, что направление проекции не параллельно плоскости α , а проектируемые прямые, лучи и отрезки не параллельны направлению проектирования. Так как в настоящей главе мы будем рассматривать только параллельную проекцию, то слово «параллельное», если это не вызывает путаницы, будем опускать и говорить проектирование, проекция и т. п. Сформулируем свойства параллельного проектирования.

1. Проекцией прямой служит прямая линия.
2. Параллельные прямые проектируются в параллельные или совпадающие прямые.
3. Отрезок AB проектируется в отрезок $A'B'$, где A' и B' — проекции его концов A и B .

4. Сохраняется простое отношение точек.
5. Отрезки, лежащие на параллельных прямых или на одной прямой (в дальнейшем параллельные отрезки), проектируются в параллельные отрезки.
6. Сохраняется отношение длин параллельных отрезков.
7. Сохраняется отношение сонаправленности или противоположной направленности направленных отрезков.

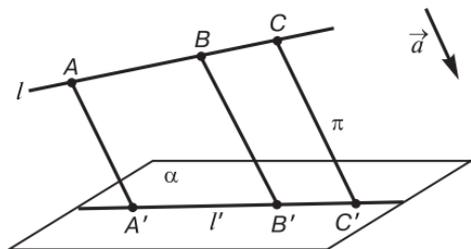


Рис. 2

Доказательства сформулированных свойств достаточно просты. Проверим свойство 4, остальные свойства докажете самостоятельно. Пусть A , B и C — точки, принадлежащие одной прямой l (рис. 2). Напомним, что под простым отношением $(AB, C) = \lambda$ понимается число, удовлетворяющее соотношению $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}$. Проведем через прямую l плоскость π , параллельную вектору \vec{a} , обозначим через l' прямую пересечения плоскостей α и π . Тогда проекции A' , B' и C' данных точек принадлежат прямой l' . Исходя из свойства отношения отрезков, отсекаемых от двух прямых l и l' плоскости π параллельными прямыми AA' , BB' и CC' , получим

$$\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{CB}|} = \frac{|\overrightarrow{A'C'}|}{|\overrightarrow{C'B'}|}. \text{ Поэтому } |(AB, C)| = |(A'B', C')|. \text{ Также ясно,}$$

что при параллельном проектировании сохраняется порядок точек на прямой. В данном случае точка B лежит между точками A и C , соответственно точка B' лежит между A' и C' (рис. 2). Отсюда получим $(AB, C) < 0$, $(A'B', C') < 0$. Таким образом, $(AB, C) = (A'B', C')$. Утверждение доказано.

Как правило, пользуясь параллельным проектированием, мы изображаем на чертеже не саму параллельную проекцию пространственного тела, а фигуру, ей подобную. Действительно, если, например, ученику требуется решить задачу, в которой рассматривается куб со стороной 1 метр, то он

в тетради делает изображение куба меньших размеров, но подобный параллельной проекции данного. Введем определение.

Определение 2. Под изображением фигуры F на плоскости α при параллельном проектировании будем понимать фигуру F_1 , подобную ее параллельной проекции F' .

Плоскость α будем называть плоскостью изображения. На рисунке 3 представлены плоскость изображения α , пространственная фигура F , ее параллельная проекция F' и изображение F_1 фигуры F .

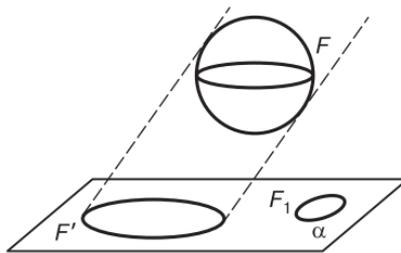


Рис. 3

Рассмотрим следующую задачу. Даны две плоскости α и β . В плоскости β расположена некоторая фигура F . Плоскость β параллельно проектируется на плоскость α . Требуется выяснить, какими свойствами будет обладать изображение F_1 фигуры F на плоскости изображения α . Для решения этой задачи нам потребуются определить так называемое аффинное отображение одной плоскости на другую.

Определение 3. Пусть даны две плоскости α и β . Аффинным отображением плоскости β на плоскость α называется взаимно однозначное отображение $f: \beta \rightarrow \alpha$ плоскости β на плоскость α , при котором коллинеарные точки переходят в коллинеарные и сохраняется простое отношение точек.

Как мы видим, если плоскости α и β совпадают друг с другом, то аффинное отображение β на α представляет собой аффинное преобразование плоскости. Свойства этого преобразования были рассмотрены нами в главе «Геометрические преобразования» [2]. Нетрудно показать, что

свойства аффинного отображения, по сути, совпадают со свойствами аффинного преобразования. Перечислим их.

1. Неколлинеарные точки плоскости отображаются на неколлинеарные, в частности, аффинный репер¹⁾ отображается на аффинный репер.
2. Прямая линия отображается в прямую, параллельные прямые в параллельные прямые.
3. Сохраняется отношение отрезков, лежащих на параллельных прямых или на одной прямой.
4. Если в плоскости β дан аффинный репер R , а в плоскости α аффинный репер R' , то существует единственное аффинное отображение $f: \beta \rightarrow \alpha$, при котором репер R отображается в R' . Если при этом точка M плоскости β имела в репере R координаты x и y , то ее образ $f(M)$ будет иметь в репере R' те же координаты x и y .

Проверьте эти утверждения самостоятельно по аналогии с доказательствами соответствующих свойств аффинных преобразований плоскости (см. [2, § 34]).

Пусть нам даны две плоскости α и β и фигуры F' и F на этих плоскостях. Фигуры назовем *аффинно эквивалентными*, если существует аффинное отображение плоскости β на плоскость α , при котором F отображается на F' . Пусть фигура F' служит изображением фигуры F на плоскости изображения α при некотором параллельном проектировании. Тогда, как следует из свойств подобия и параллельного проектирования, F' и F аффинно эквивалентны. Действительно, при подобии и параллельном проектировании сохраняются как коллинеарность точек, так и их простые отношения. Поэтому эти же свойства инвариантны и при произведении отображений. Таким образом, произведение параллельного проектирования и подобия представляет собой аффинное отображение плоскости β на α .

В случае пересекающихся плоскостей справедливо обратное утверждение. Рассмотрим некоторое аффинное отображение f плоскости β на плоскость α . Будем предполагать, что данные плоскости пересекаются по некоторой прямой l (рис. 4). В плоскости β выберем аффинный репер

¹⁾ Напомним, что под аффинным репером понимается упорядоченная тройка неколлинеарных точек плоскости.

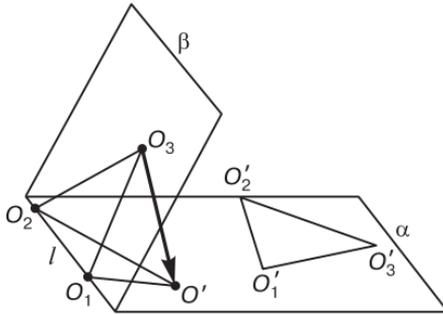


Рис. 4

$R = (O_1, O_2, O_3)$ таким образом, чтобы базисные точки O_1 и O_2 принадлежали прямой l . Пусть при аффинном отображении f репер R отобразится в репер $R' = (O'_1, O'_2, O'_3)$ плоскости α . Из свойств подобий, изложенных в первой части курса геометрии (см. [2, § 32]) следует, что в плоскости α существует такое преобразование подобия p , при котором треугольник $O'_1O'_2O'_3$ преобразуется в треугольник O_1O_2O' , первые две вершины которого совпадают с вершинами репера R плоскости β (см. рис. 4). Рассмотрим параллельное проектирование плоскости β на плоскость α в направлении вектора $\overrightarrow{O_3O'_3}$. При этом проектировании репер R отображается на репер $\tilde{R} = (O_1, O_2, O')$. При подобии p^{-1} , обратном к подобию p , репер \tilde{R} преобразуется в репер $R' = (O'_1, O'_2, O'_3)$. Так как произведение параллельного проектирования на подобие p^{-1} является аффинным отображением плоскостей β на α , при котором репер R отображается в репер R' , то из свойства 4 аффинных отображений следует, что оно совпадает с f . Итак, мы доказали теорему.

Теорема 1. *Отображение плоскости β на пересекающую ее плоскость α является аффинным в том и только в том случае, когда оно совпадает с произведением параллельного проектирования первой плоскости на вторую и подобия второй плоскости.*

Из доказанной теоремы вытекает важное следствие.

Следствие 1. *Если α и β — пересекающиеся плоскости, то фигура F' плоскости α служит изображением фигуры*

F плоскости β в том и только в том случае, когда *F* и *F'* аффинно эквивалентны.

Заметим, что теорема 1 не имеет места, если плоскости α и β параллельны. Проверьте это утверждение самостоятельно. В дальнейшем, не оговаривая особо, будем считать, что плоскость изображения не параллельна плоскости, на которой лежат проектируемые фигуры.

Доказанная теорема и следствие из нее позволит нам рассмотреть свойства изображений плоских фигур. Мы остановимся на изображениях многоугольников и круглых фигур, которые часто встречаются в практической работе учителя. Как и ранее, рассмотрим плоскость β и пересекающую ее плоскость изображения α . Все рассматриваемые фигуры принадлежат β , а их изображения лежат на плоскости α .

1. *Изображение треугольника.* Из свойства 4 аффинных отображений следует, что любые два треугольника аффинно эквивалентны. Поэтому треугольник всегда изображается треугольником.

2. *Изображение четырехугольника.* Ясно, что четырехугольник изображается аффинно эквивалентным ему четырехугольником. Но в отличие от треугольников не любые два четырехугольника аффинно эквивалентны. В пособии [2, § 35] было доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Даны два четырехугольника $ABCD$ и $A'B'C'D'$, O и O' — соответственно точки пересечения их диагоналей AC и BD , $A'C'$ и $B'D'$. Тогда эти четырехугольники аффинно эквивалентны в том и только в том случае, когда совпадают следующие простые отношения:*

$$(AC, O) = (A'C', O'), \quad (BD, O) = (B'D', O'). \quad (1)$$

Доказательство было проведено для случая аффинного преобразования плоскости. Его легко обобщить на случай аффинного отображения одной плоскости на другую (проведите эти рассуждения самостоятельно). Таким образом, два четырехугольника аффинно эквивалентны тогда и только тогда, когда точка пересечения их диагоналей делит эти диагонали в одном и том же отношении. На рисунке 5 изображены два аффинно эквивалентных четырехугольника $ABCD$ и $A'B'C'D'$, для которых выполнено условие (1).

Из теоремы 2 вытекает ряд существенных следствий. Как известно, четырехугольник в том и только в том случае

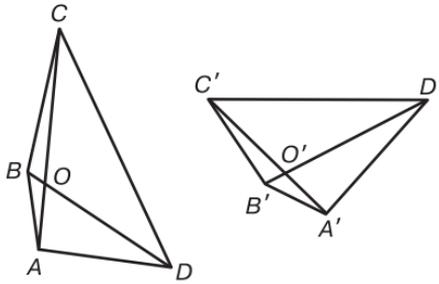


Рис. 5

является параллелограммом, когда его диагонали в точке пересечения делятся пополам. Поэтому параллелограмм изображается параллелограммом. Квадрат, прямоугольник и ромб аффинно эквивалентны параллелограмму, отсюда следует, что изображениями квадрата, ромба и прямоугольника также служит параллелограмм. Отмеченные следствия часто используются в практической работе учителя. Например, при изображении правильной четырехугольной пирамиды ее основание, которое является квадратом, на чертеже изображается параллелограммом, а центр основания, совпадающий с точкой пересечения высоты пирамиды и основания, — точкой пересечения диагоналей параллелограмма.

3. *Изображение трапеции.* Так как параллельные отрезки при аффинном отображении преобразуются в параллельные отрезки, отношение которых совпадает с отношением оригиналов, то трапеция изображается трапецией, отношение оснований которой такое же, как у исходной. В силу этого, заведомо выполнено условие (1), так как точка пересечения диагоналей трапеции делит эти диагонали на отрезки, пропорциональные ее основаниям.

4. *Изображение произвольного n -угольника ($n > 4$).* Ясно, что n -угольник изображается аффинно эквивалентным ему n -угольником. Выясним требования, которым подчиняется такого рода изображение, на примере пятиугольника. Пусть дан пятиугольник $ABCDE$ (рис. 6). Тогда вершины A , B и C , как было показано выше, изображаются вершинами произвольного треугольника A' , B' и C' . Из теоремы 2 следует, что точки M и M' пересечения диа-

гоналей четырехугольников $ABCE$ и $A'B'C'E'$ делят эти диагонали в одинаковых отношениях: $(AC, M) = (A'C', M')$ и $(BE, M) = (B'E', M')$. Поэтому для построения точки E' следует найти простые отношения (AC, M) и (BE, M) , затем построить точку M' так, чтобы выполнялось равенство $(AC, M) = (A'C', M')$. Построив точку M' , из соотношения $(BE, M) = (B'E', M')$ можно определить точку E' . Аналогично строится изображение D' вершины D .

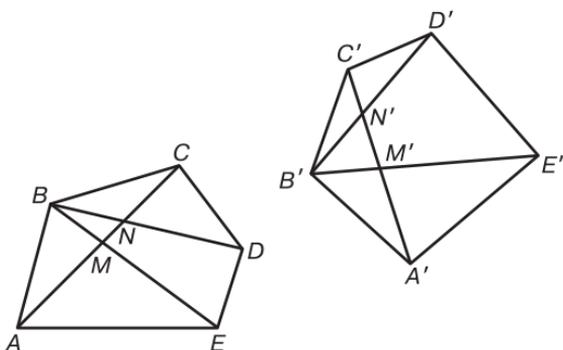


Рис. 6

5. *Изображение окружности.* В пособии [2, § 34] было установлено, что окружность аффинно эквивалентна эллипсу. Поэтому из следствия теоремы 1 вытекает, что изображением окружности служит эллипс. Так как при аффинном отображении сохраняется простое отношение точек, то центр окружности изображается центром симметрии эллипса.

Как известно, множество середин всех хорд окружности, параллельных между собой, образуют ее диаметр, перпендикулярный этим хордам. Кривые второго порядка обладают похожим свойством. В [2] было доказано, что множество середин всех хорд кривой второго порядка, параллельных между собой и имеющих неасимптотическое направление, образуют прямую линию. Эта прямая называется диаметром, сопряженным данному направлению. На рисунке 7 изображены параллельные хорды M_1M_2 и N_1N_2 и сопряженный с ними диаметр d_1 . Ясно, что диаметр окружности, перпендикулярный хорде, проходит через ее середину, поэтому он сопряжен направлению этой хорды.

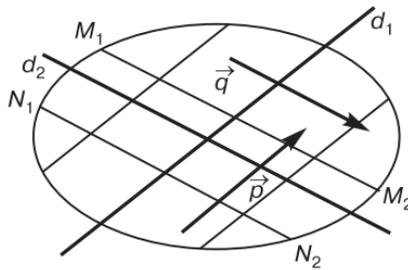


Рис. 7

В пособии [2] было также установлено свойство так называемых сопряженных диаметров кривых эллиптического и гиперболического типов. Если γ — кривая эллиптического или гиперболического типа, d_1 — ее диаметр, сопряженный неасимптотическому направлению вектора \vec{q} , \vec{p} — направляющий вектор диаметра d_1 , а d_2 — диаметр, сопряженный направлению вектора \vec{p} , то вектор \vec{q} параллелен d_2 . В случае окружности, как следует из ее свойств, сопряженные диаметры перпендикулярны между собой. Так как кривые эллиптического типа не имеют асимптотических направлений, то свойство сопряженных диаметров для эллипсов справедливо для любого диаметра d_1 . На рисунке 7 изображены сопряженные диаметры d_1 и d_2 эллипса.

При аффинных преобразованиях плоскости диаметры кривой второго порядка преобразуются в диаметры, а сопряженные диаметры — в сопряженные диаметры ее образа. Это утверждение, доказанное в [2], легко обобщается на случай аффинного отображения плоскостей. Поэтому справедливо следствие: взаимно перпендикулярные диаметры окружности изображаются сопряженными диаметрами эллипса, который служит ее изображением.

Рассмотренные свойства изображения окружности и ее диаметров часто используются в школьной практике при изображении пространственных круглых тел. Этим вопросам мы посвятим следующий параграф.

Пример 1. Дано изображение окружности и точки на ней. Требуется построить изображение квадрата, вписанного в окружность, одна из вершин которого совпадает с данной точкой.

Решение. Изображением данной окружности служит эллипс γ (рис. 8). Пусть O — изображение его центра, A — данная точка. Тогда изображение второй вершины C , противоположной A , совпадает с концом диаметра, проходящего через A . Две другие, смежные с A вершины на оригинале служат концами диаметра, перпендикулярного AC . Поэтому на изображении они определяют концы сопряженного с AC диаметра. Для его построения строим хорду M_1M_2 , параллельную AC , находим ее середину Q , и проводим диаметр BD , проходящий через точки O и Q . Параллелограмм $ABCD$ — искомый.

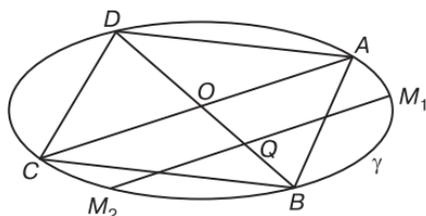


Рис. 8

§ 2. ИЗОБРАЖЕНИЕ МНОГОГРАННИКОВ ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ

Теория изображения многогранников базируется на так называемой теореме Польке–Шварца. Она впервые была сформулирована К. Польке в 1853 году в несколько ином виде, чем приводится ниже, и была обобщена Г. Шварцем в 1864 году. Ее доказательству мы предпослём две леммы. Напомним следующее определение.

Определение 1. *Аффинный репер $R = (O_1, O_2, O_3)$ называется декартовым, если выполнены условия:*
 $|\overrightarrow{O_1O_2}| = |\overrightarrow{O_1O_3}|$, $\angle \overrightarrow{O_1O_2} \overrightarrow{O_1O_3} = \frac{\pi}{2}$.

Аффинному реперу $R = (O_1, O_2, O_3)$ соответствует аффинная система координат $O_1, \vec{e}_1 = \overrightarrow{O_1O_2}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{O_1O_3}$. Таким образом, аффинный репер является декартовым в том и только в том случае, когда длины векторов \vec{e}_1 и \vec{e}_2 равны между собой, а их скалярное произведение равно нулю.

Лемма 1. Дано аффинное отображение $f: \alpha \rightarrow \beta$ плоскости α на плоскость β , при котором декартов репер $R = (O_1, O_2, O_3)$ преобразуется в декартов репер $R' = (O'_1, O'_2, O'_3)$. Тогда f — отображение подобия плоскости α на плоскость β .

Доказательство. Нам следует доказать, что при отображении f расстояние между любыми двумя точками изменяется в одно и то же число раз. Введем обозначения: $\vec{e}_1 = \overrightarrow{O_1O_2}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{O_1O_3}$, $\vec{e}'_1 = \overrightarrow{O'_1O'_2}$, $\vec{e}'_2 = \overrightarrow{O'_1O'_3}$. Так как реперы декартовы, то

$$|\vec{e}'_1| = |\vec{e}'_2| = k|\vec{e}_1| = k|\vec{e}_2|, \quad \vec{e}'_1\vec{e}'_2 = \vec{e}_1\vec{e}_2 = 0. \quad (1)$$

Пусть даны две точки A и B плоскости α , координаты которых в репере R равны $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$. Обозначим через A' и B' их образы на плоскости β . Так как $f(R) = R'$, то точки A' и B' в репере R' имеют те же координаты, что и их прообразы A и B репере R : $A'(a_1; a_2)$, $B'(b_1; b_2)$ (см. § 1). Так как $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1)\vec{e}_1 + (b_2 - a_2)\vec{e}_2$, $\overrightarrow{A'B'} = (b_1 - a_1)\vec{e}'_1 + (b_2 - a_2)\vec{e}'_2$, то из (1) получим:

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AB}} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2|\vec{e}_1|^2 + (b_2 - a_2)^2|\vec{e}_2|^2} = \\ &= \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}|\vec{e}_1|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{A'B'}| &= \sqrt{\overrightarrow{A'B'}\overrightarrow{A'B'}} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2|\vec{e}'_1|^2 + (b_2 - a_2)^2|\vec{e}'_2|^2} = \\ &= \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}|\vec{e}'_1|. \end{aligned}$$

Таким образом, $|\overrightarrow{A'B'}| = \frac{|\vec{e}'_1|}{|\vec{e}_1|} |\overrightarrow{AB}|$. Расстояние между любыми двумя точками увеличивается в одно и то же число раз, равное $k = \frac{|\vec{e}'_1|}{|\vec{e}_1|}$. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть задано аффинное отображение $f: \alpha \rightarrow \beta$ плоскости α на плоскость β . Тогда существует такая плоскость γ , что если π ортогональное проектирование плоскости γ на плоскость β , то произведение f и преобразования, обратного к π , $p = \pi^{-1} \circ f: \alpha \rightarrow \gamma$ является подобием.

Доказательство. Рассмотрим окружность ω плоскости α . Ее образом при отображении f служит эллипс ω' плоскости β (см. § 1). Пусть $A'B'$ и $C'D'$ — его главные диаметры,

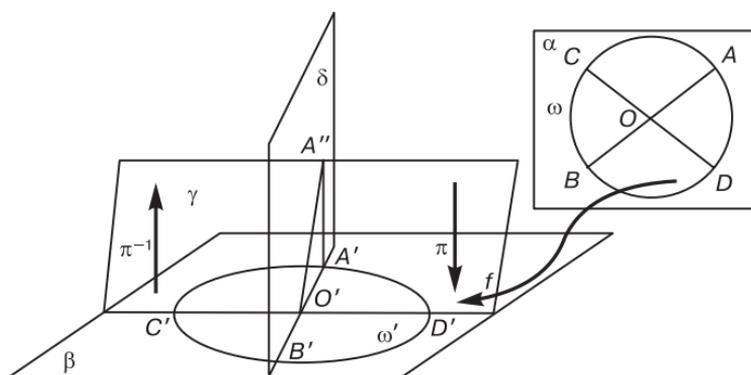


Рис. 9

удовлетворяющие условию $A'B' < C'D'$ (рис. 9). Как известно, главные диаметры эллипса сопряжены друг с другом и взаимно перпендикулярны, так как содержат его полуоси. Их прообразами служат сопряженные диаметры AB и CD окружности ω . Но любые два сопряженных диаметра окружности перпендикулярны между собой, поэтому $AB \perp CD$. Репер $R = (O, A, C)$, где O — центр окружности, является декартовым. Рассмотрим теперь плоскость δ , проходящую через главный диаметр $A'B'$ и перпендикулярную плоскости β . В этой плоскости построим прямоугольный треугольник $O'A'A''$ с прямым углом $A''A'O'$, гипотенузой $O'A''$, равной $O'C'$, и катетом $O'A'$. Так как плоскости β и δ взаимно перпендикулярны, а прямая $C'D'$ составляет прямой угол с прямой $A'B'$ пересечения β и δ , то $C'D'$ перпендикулярна плоскости δ . Отсюда следует, что угол $A''O'C'$ прямой, поэтому репер $R = (O', C', A'')$ — декартов. Проведем через точки $C'O'A''$ плоскость γ . Прямая $A'A''$ по построению перпендикулярна прямой $O'A'$. Так как прямая $C'O'$ перпендикулярна плоскости δ , то $C'O' \perp A'B'$. Таким образом, прямая $A'A''$ перпендикулярна плоскости β . Пусть π — ортогональное проектирование плоскости γ на плоскость β , определяемое вектором $\overrightarrow{A'A''}$. При этом проектировании репер $R = (O', C', A'')$ преобразуется в репер $R = (O', C', A')$. Рассмотрим проектирование π^{-1} , обратное к π . Тогда произведение $p = \pi^{-1} \circ f$ переводит декартов репер $R = (O, A, C)$ в декартов репер $R = (O', C', A'')$ и, согласно лемме 1, является подобием. Лемма доказана.

Теорема Польке–Шварца. Пусть даны тетраэдр $A'B'C'D'$ и четырехугольник $ABCD$, принадлежащий некоторой плоскости α . Тогда этот четырехугольник служит изображением некоторого тетраэдра, равного данному.

Доказательство. Обозначим через O точку пересечения диагоналей данного четырехугольника $ABCD$. Построим на сторонах $A'C'$ и $B'D'$ данного тетраэдра точки M и N так, чтобы они делили эти отрезки в тех же отношениях, в которых точка O делит отрезки AC и BD (рис. 10):

$$(A'C', M) = (AC, O), \quad (B'D', N) = (BD, O). \quad (2)$$

Так как ребра тетраэдра $A'C'$ и $B'D'$ скрещиваются, то точки M и N не совпадают. Выберем произвольную плоскость β , перпендикулярную вектору \overrightarrow{MN} , и ортогонально спроектируем вершины тетраэдра и точки M и N на

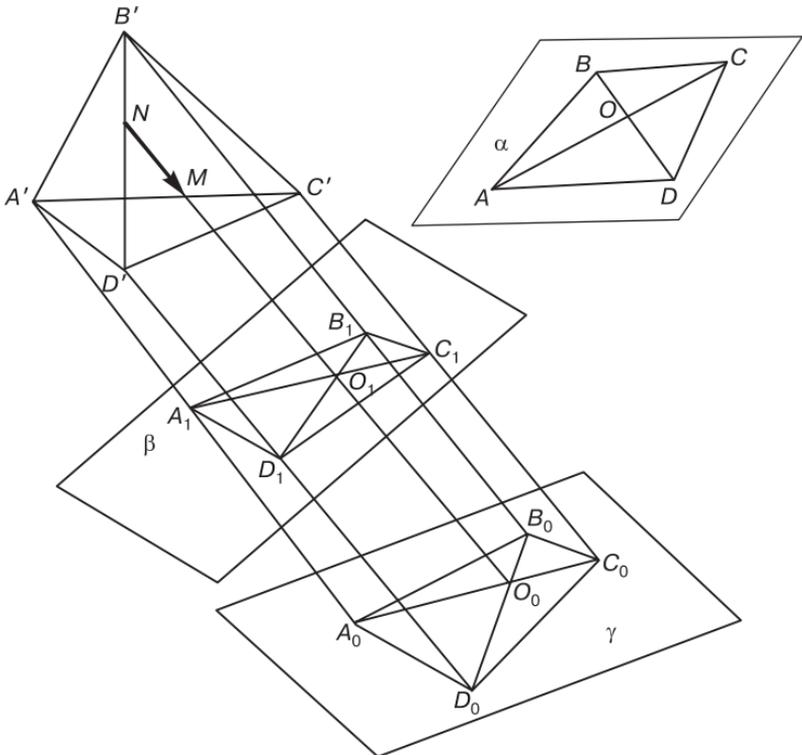


Рис. 10

эту плоскость параллельно вектору \overrightarrow{MN} . Получим четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$, при этом образами точек M и N будет служить точка O_1 пересечения его диагоналей. Из соотношений (2) следует, что точки пересечения диагоналей четырехугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ делят их в одном и том же отношении: $(A_1C_1, O_1) = (AC, O)$, $(B_1D_1, D_1) = (BD, O)$. Поэтому из теоремы 2 § 1 следует, что $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ аффинно эквивалентны. Таким образом, существует аффинное отображение f плоскости α на плоскость β , при котором четырехугольник $ABCD$ преобразуется в четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$. Из леммы 2 вытекает, что существует такая плоскость γ , что произведение $p = \pi^{-1} \circ f$, где π — ортогональное проектирование плоскости γ на плоскость β , параллельное вектору \overrightarrow{NM} , является подобным отображением α на γ . Обозначим через $A_0B_0C_0D_0$ образ четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ при отображении π^{-1} , т. е. при проектировании, параллельном вектору \overrightarrow{MN} (см. рис. 10). Таким образом, при подобии p четырехугольник $ABCD$ преобразуется в четырехугольник $A_0B_0C_0D_0$. Выберем произвольное движение d трехмерного пространства, переводящее плоскость γ на α . Тогда тетраэдр $ABCD$ преобразуется в равный ему тетраэдр $\overline{A\overline{B}\overline{C}\overline{D}}$. Его изображением служит образ четырехугольника $A_0B_0C_0D_0$ при движении d , а также подобный ему данный четырехугольник $ABCD$. Теорема доказана.

Изучим свойства изображений многогранников. Будем в основном рассматривать те многогранники, которые используются в школьном курсе геометрии.

Изображение тетраэдра

Из теоремы Польке—Шварца следует, что изображением тетраэдра, равного данному, служит произвольный четырехугольник, у которого изображены также его диагонали. Грани тетраэдра изображаются треугольниками. На рисунке 11 приведены изображения тетраэдра. Обратите внимание, что на рис. 11а тетраэдр изображен выпуклым четырехугольником $ADBC$, DC и AB — его диагонали. На рисунке 11б изображением тетраэдра служит невыпуклый четырехугольник $ADBC$, у которого DC и AB также являются диагоналями.

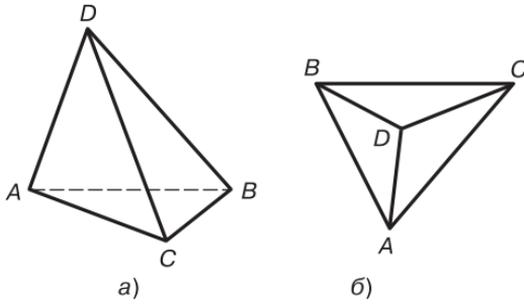


Рис. 11

Изображение параллелепипеда

Грани любого параллелепипеда представляют собой параллелограммы. Поэтому из свойств параллельного проектирования вытекает, что его грани изображаются параллелограммами. Этот вывод относится и к кубу и к прямоугольному параллелепипеду (рис. 12).

Для построения изображения параллелепипеда достаточно знать изображения четырех его вершин, не принадлежащих одной плоскости, например A, B, D и A_1 , которые, в соответствии с теоремой Польке–Шварца, совпадают с вершинами некоторого четырехугольника на плоскости изображения. Изображения остальных вершин определяются как вершины соответствующих параллелограммов.

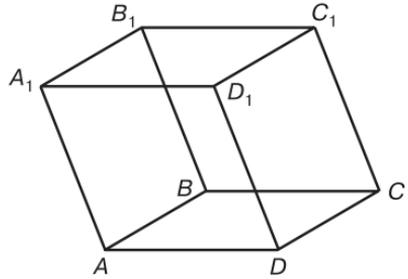


Рис. 12

Изображение n -угольной призмы

Основаниями n -угольной призмы служат два равных n -угольника, а боковыми гранями — параллелограммы. В качестве примера рассмотрим изображение пятиугольной призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ (рис. 13). Вершины A, B, E, A_1 , как следует из теоремы Польке–Шварца, совпадают с вершинами некоторого четырехугольника. Пятиугольник $ABCDE$, образующий основание призмы, изобража-

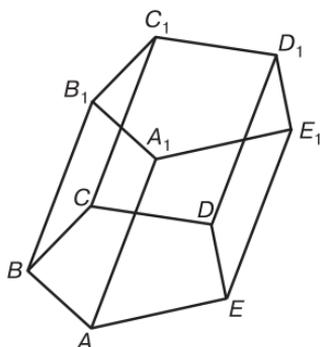


Рис. 13

ется пятиугольником, аффинно эквивалентным оригиналу, правило построения которого изложено в § 1. Боковые грани, представляющие собой параллелограммы, изображаются также параллелограммами. Отсюда следует способ построения изображений вершин верхнего основания. Ясно, что изображение верхнего основания $A_1B_1C_1D_1E_1$ получено из изображения нижнего $ABCDE$ параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{AA_1}$.

Изображение n -угольной пирамиды

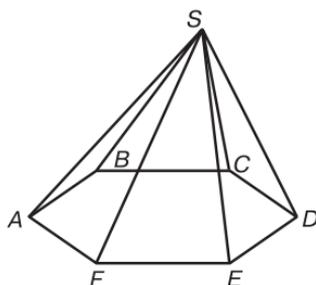


Рис. 14

Основанием n -угольной пирамиды служит n -угольник, а боковыми гранями — треугольники. Рассмотрим в качестве примера построение изображения шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ (рис. 14). Так же как и в предыдущих случаях, вершины S, A, B, F изображаются на плоскости изображения вершинами произвольного четырехугольника. Изображения остальных вершин шестиугольника основания строятся в соответствии с правилами изображения n -угольников, изложенных в § 1. Боковые грани пирамиды изображаются треугольниками.

соответствии с правилами изображения n -угольников, изложенных в § 1. Боковые грани пирамиды изображаются треугольниками.

§ 3. ИЗОБРАЖЕНИЕ ЦИЛИНДРА, КОНУСА И ШАРА

В настоящем параграфе мы рассмотрим способы изображения цилиндра, конуса и шара, т. е. тех круглых пространственных тел, которые изучаются в школьном курсе стереометрии.

Изображение цилиндра

Под цилиндром мы будем понимать, как и в школьном курсе геометрии, прямой круговой цилиндр, т. е. пространственное тело, полученное вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон. При определенном выборе плоскости изображения и направления проектирования цилиндр может изображаться либо эллипсом, либо параллелограммом. В первом случае направление проектирования параллельно образующей цилиндра, а во втором — плоскости его основания. В частности, изображением цилиндра может служить либо окружность, либо прямоугольник (рис. 15). Ясно, что такое изображение цилиндра не является наглядным, оно неудобно для использования. Поэтому из соображений наглядности будем предполагать, что плоскость изображения расположена в пространстве параллельно образующим цилиндра, а направление проектирования выбрано параллельно плоскости, проходящей через ось цилиндра и перпендикулярной плоскости изображения. При этом само направление проектирования не параллельно плоскости основания или образующей цилиндра.

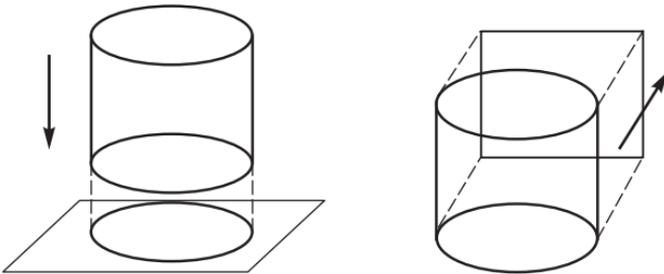


Рис. 15

Пусть в пространстве даны цилиндр и плоскость изображения α . Рассмотрим плоскости π_1 и π_2 , касательные

к боковой поверхности цилиндра и перпендикулярные плоскости изображения (рис. 16 а). В силу выбора направления проектирования, заданного вектором \vec{a} , эти плоскости ему параллельны. Обозначим через p_1 и q_1 образующие, по которым плоскости π_1 и π_2 касаются боковой поверхности цилиндра, через l_1 и m_1 — прямые пересечения этих плоскостей с нижним основанием цилиндра, а через A_1 и B_1 — точки касания прямых l_1 и m_1 с окружностью нижнего основания цилиндра. Образующие p_1 и q_1 носят название *контурных образующих*. Точки A_1 и B_1 служат концами диаметра окружности, а отрезок A_1B_1 параллелен плоскости изображения. Пусть C_1D_1 — диаметр окружности нижнего основания цилиндра, перпендикулярный к A_1B_1 . Так как основания цилиндра представляют собой окружности, то при параллельном проектировании они отображаются в эллипсы. Ясно, что диаметры окружности A_1B_1 и C_1D_1 изображаются главными диаметрами изображения нижнего основания. Плоскости π_1 и π_2 параллельны направлению проектирования, поэтому они изображаются прямыми линиями. Таким образом, прямая l_1 и прямая, содержащая контурную образующую p_1 , будут изображаться одной прямой, аналогично, образ контурной образующей q_1 совпадает с образом прямой m_1 . Обозначим через p

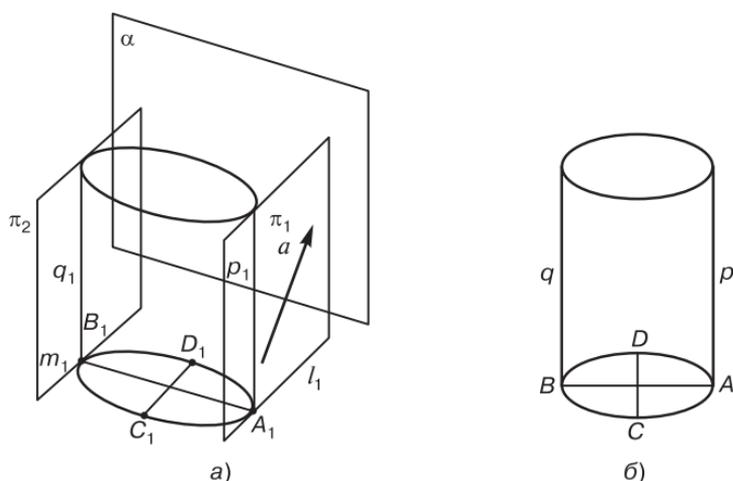


Рис. 16

и q изображения образующих p_1 и q_1 (рис. 16б). Так как l_1 и m_1 касаются окружности основания эллипса, то p и q служат касательными изображений нижнего основания. Аналогично объясняется, что эти отрезки касаются изображения верхнего основания цилиндра. Таким образом, *изображения контурных образующих касаются эллипсов, изображающих нижнее и верхнее основания цилиндра, причем в их вершинах.*

Из соображений наглядности направление вектора проектирования \vec{a} следует выбирать таким образом, чтобы диаметр AB был больше диаметра CD (рис. 16б). Выясним, какому требованию при этом удовлетворяет направление проектирования. Рассмотрим нижнее основание цилиндра, и параллельно перенесем плоскость проектирования так, чтобы она проходила через центр O окружности основания (рис. 17). Получим плоскость β . На этом рисунке так же, как и на рис. 16а, A_1B_1 и C_1D_1 — перпендикулярные диаметры окружности основания. Спроектируем точку C_1 на плоскость β , получим точку C' . Ясно, что при параллельном проектировании на плоскость α точки A_1 и C' совпадают с вершинами эллипса — образа окружности основания при этом проектировании. Так как при параллельном переносе все расстояния сохраняются, то отрезки OC' и OA_1 равны параллельным проекциям отрезков OC_1 и OA_1 на плоскость изображения. Нам требуется определить условие, при котором

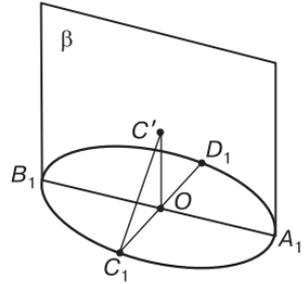


Рис. 17

$$OA_1 > OC'. \tag{1}$$

Отрезки OC_1 и OA_1 совпадают с радиусом окружности основания цилиндра, поэтому (1) равносильно неравенству $OC_1 > OC'$. Треугольник $OC'C_1$ — прямоугольный (проверьте самостоятельно), отсюда следует, что неравенство $OC_1 > OC'$ выполняется в том и только в том случае, когда *угол между направлением проектирования и плоскостью основания меньше 45° .*

Изображение конуса

В качестве конуса мы будем рассматривать, как принято в школьном курсе стереометрии, прямой круговой конус, т. е. пространственное тело, полученное вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов. Ясно, что изображение конуса зависит от направления проектирования и выбора плоскости изображения. Если направление проектирования параллельно плоскости основания конуса, то его изображением служит треугольник. Если же плоскость изображения параллельна плоскости основания конуса, то он может изображаться эллипсом или в случае ортогонального проектирования — окружностью (проверьте эти утверждения самостоятельно). Поэтому, как и в случае цилиндра, из соображений наглядности плоскость изображения расположена в пространстве параллельно оси конуса, а направление проектирования выбрано параллельно плоскости, проходящей через ось конуса и перпендикулярной плоскости изображения. При этом само направление проектирования не параллельно плоскости основания или образующей конуса.

Пусть в пространстве дан конус. Направление проектирования и плоскость проекции выберем так, как указано выше. Так как направление проектирования не параллельно плоскости основания, то проектирующая прямая, проходящая через вершину конуса, пересекает плоскость α его основания. Вначале осуществим проектирование конуса на плоскость основания, а затем полученную плоскую фигуру спроектируем на плоскость изображения. Ясно, что в результате мы получим проекцию данного конуса.

Пусть O_2 — проекция вершины конуса O_1 на плоскость α его основания. Проведем касательные O_2A_1 и O_2B_1 из точки O_2 к окружности основания конуса. Проекцией конуса на плоскость α служит фигура, ограниченная отрезками O_2A_1 и O_2B_1 и дугой A_1B_1 окружности основания (рис. 18 а). Образующие O_1A_1 и O_1B_1 называются *контурными образующими конуса*. При параллельном проектировании полученной на плоскости α фигуры на плоскость изображения окружность основания преобразуется в эллипс. Отрезки O_1A_1 и O_2A_1 лежат в плоскости, параллельной направлению проектирования, поэтому они изображаются одним

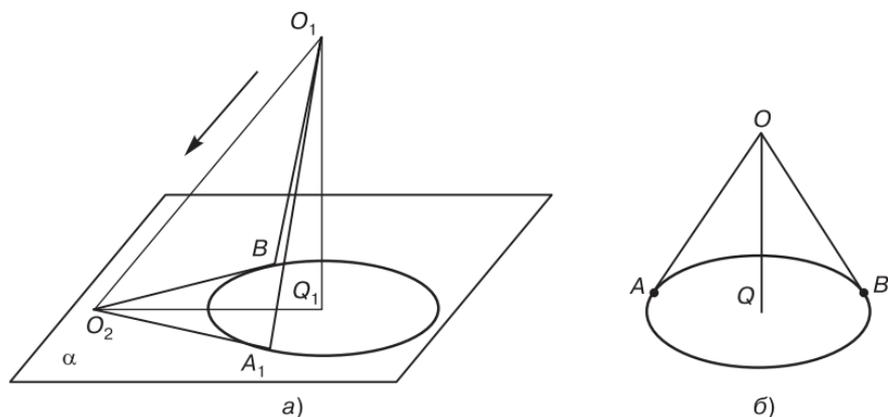


Рис. 18

отрезком OA . Аналогично, изображения отрезков O_1B_1 и O_2B_1 также совпадают. Их изображение обозначим через OB . Так как на плоскости α основания конуса отрезки O_2A_1 и O_2B_1 касаются окружности основания, то их изображения OA и OB , а следовательно, и изображения контурных образующих являются отрезками касательных, проведенных из точки O изображения вершины O_1 конуса, к эллипсу, изображающему окружность основания конуса (рис. 18 б). Таким образом, *изображения контурных образующих не содержат концы полуоси эллипса, изображающего основание конуса, а являются касательными к этому эллипсу.*

При выборе угла между направлением проектирования и плоскостью основания руководствуются теми же соображениями, что и при изображении цилиндра. Угол должен быть меньше 45° .

Изображение сферы

Пусть в пространстве дана некоторая сфера S . Рассмотрим ее параллельную проекцию на плоскость. Предположим, что направление проектирования не перпендикулярно плоскости проекции. Проведем через каждую точку сферы прямую, параллельную направлению проектирования, получим пространственное тело, ограниченное круговой цилиндрической поверхностью. Так как образующие этой поверхности не перпендикулярны плоскости изображения, то в их пересече-

нии мы получим эллипс (рис. 19). Поэтому в рассматриваемом случае сфера будет изображаться эллипсом. Ясно, что такое изображение не является наглядным. Если же направление проектирования перпендикулярно плоскости изображения, то сфера проектируется в окружность, поэтому изображается также окружностью. Требование наглядности будет удовлетворено. Таким образом, в дальнейшем будем предполагать, что *при изображении сферы используется только ортогональное проектирование.*

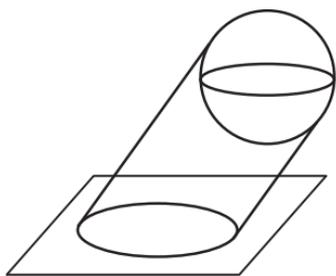


Рис. 19

Пусть в пространстве даны сфера и плоскость изображения. При ортогональном проектировании сфера изображается окружностью, которую мы будем называть *контурной*. Рассмотрим плоскость, проходящую через центр сферы, не параллельную ни направлению проектирования, ни плоскости изображения. Она пересекает сферу по некоторой окружности большого круга, эту окружность мы назовем *экватором*.

Для наглядности на изображении сферы обычно изображают экватор, причем помещают его таким образом, чтобы он имел горизонтальное расположение (рис. 20). Проведем через центр сферы прямую, перпендикулярную плоскости экватора. Она пересекает сферу в двух точках, которые называются его *полюсами*, соответственно северным и южным.

Пусть дано изображение сферы и ее некоторого экватора. Так как экватор изображается эллипсом, прямая, перпендикулярная экватору, содержит малую полуось CD этого эллипса (рис. 20). Поэтому изображения полюсов N и S принадлежат прямой CD . Ясно, что они не совпадают с точками пересечения A и B прямой CD с контурной окружностью. К сожалению, нередко случаи, когда на чертежах и даже в печатных изданиях авторы помещают их на контурную образующую. Оказывается, отрезки ON и OS , где O — изображение центра окружности, обладают интересным свойством, которое позволяет их построить. Без ограничения общности можно считать, что плоскость π изображения сферы проходит через ее центр O . Обозначим через α плоскость экватора. Плоскости π и α пересекаются

по прямой l , OC' — прямая плоскости α , перпендикулярная l и проходящая через центр сферы, точка C' — ее точка пересечения со сферой, AB — диаметр сферы, принадлежащий плоскости π и перпендикулярный l (рис. 21а, на этом рисунке сфера не изображена). Обозначим через n прямую, проходящую через центр O и перпендикулярную плоскости экватора α . Пусть N' — ее точка пересечения со сферой, таким образом, N' — полюс экватора. Легко видеть, прямые OC' , OA и ON'

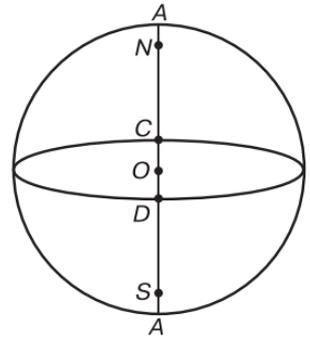


Рис. 20

принадлежат одной плоскости, перпендикулярной l . Спроектируем точки C' и N' на плоскость π , получим точки C и N , принадлежащие диаметру AB . Точка C служит вершиной малой полуоси эллипса, совпадающего с проекцией на плоскость изображения π диаметра экватора, содержащего точку C' . Обозначим угол между плоскостями α и π через φ . Как легко установить, $\varphi = \angle COC'$. Треугольник COC' прямоугольный, угол OCC' прямой. Если r — радиус сферы, то $OC' = r$ и $OC = r \cos \varphi$. Рассмотрим проекцию N полюса N' на плоскость π . Так как прямая ON перпендикулярна плоскости α , то $\angle NON' = \frac{\pi}{2} - \varphi$. Треугольник NON' прямоугольный, $\angle NN'O = \frac{\pi}{2}$, $ON' = r$,

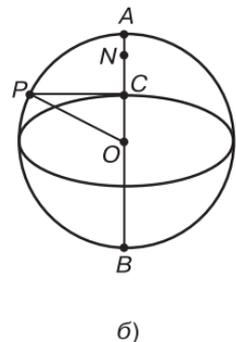
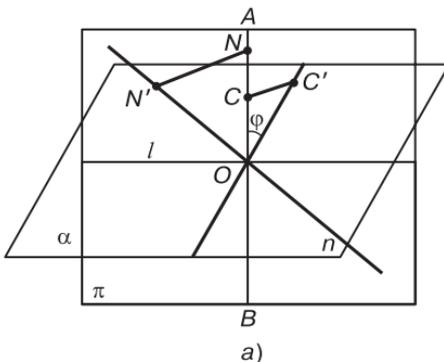


Рис. 21

поэтому $ON = ON' \cos \angle NON' = r \sin \varphi$. Рассмотрим теперь проекцию сферы на плоскость изображения (рис. 21 б). Проведем в точке C касательную к эллипсу, изображающему экватор сферы, точка P — точка пересечения этой касательной с контурной окружностью. Треугольник OSP — прямоугольный, его гипотенуза OP совпадает с радиусом r сферы. Как мы установили, катет OC равен $r \cos \varphi$. Отсюда следует, что $CN = r \sin \varphi$. Мы получили, что $ON = CP$. Таким образом, для построения полюса экватора достаточно на прямой AB от центра O отложить отрезок CP касательной к эллипсу изображения экватора. Аналогично строится изображение второго полюса.

ПОСТРОЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ

§ 4. АКСОНОМЕТРИЯ

В предыдущих параграфах мы рассмотрели свойства изображений плоских и пространственных фигур при параллельном проектировании. Нам необходимо изучить вопросы, связанные с самим процессом построения изображений фигур; выяснить, что должно быть задано для того, чтобы осуществить это построение, и каким образом его следует выполнить. В настоящем параграфе мы ответим на поставленные вопросы.

Прежде всего условимся о следующем. Точки в пространстве, как было принято ранее, будем обозначать большими латинскими буквами, но со значком « \sim » сверху: \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{C} . . . Их изображения будут обозначаться теми же буквами, только без этого значка: A , B , C Напомним, что под аффинным репером в пространстве понимается произвольная упорядоченная четверка некопланарных точек, сами точки называются его вершинами. Каждому реперу в пространстве $\tilde{R} = (\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3, \tilde{A}_4)$ соответствует аффинная система координат: \tilde{A}_1 , $\tilde{e}_1 = \overrightarrow{\tilde{A}_1\tilde{A}_2}$, $\tilde{e}_2 = \overrightarrow{\tilde{A}_1\tilde{A}_3}$, $\tilde{e}_3 = \overrightarrow{\tilde{A}_1\tilde{A}_4}$, и наоборот, аффинной системе координат однозначно соответствует репер. Под координатами точки относительно репера понимаются координаты этой точки относительно соответствующей этому реперу системы координат. При изображении репера на плоскости будем предполагать, что направление проектирования выбрано таким образом, что точки репера изображаются вершинами некоторого четырехугольника. Из теоремы Польке–Шварца следует, что изображением репера, равного данному, может служить произвольный четырехугольник.

Пусть в пространстве задан некоторый репер $\tilde{R} = (\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3, \tilde{A}_4)$. Рассмотрим точку \tilde{M} пространства, координаты которой относительно репера \tilde{R} равны $\tilde{M}(x; y; z)$. В силу определения координат точки в аффинной системе

координат выполнено равенство

$$\overrightarrow{\tilde{A}_1\tilde{M}} = x\tilde{e}_1 + y\tilde{e}_2 + z\tilde{e}_3. \tag{1}$$

Проведем через точку \tilde{M} прямую, параллельную вектору $\tilde{e}_3 = \overrightarrow{\tilde{A}_1\tilde{A}_4}$, и обозначим через \tilde{M}_3 ее точку пересечения с плоскостью $\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3$ (рис. 22). Затем через точку \tilde{M}_3 проведем прямую, параллельную вектору $\tilde{e}_2 = \overrightarrow{\tilde{A}_1\tilde{A}_3}$, пусть \tilde{M}_x — точка ее пересечения с координатной прямой $\tilde{A}_1\tilde{A}_2$. Линию, составленную из отрезков с вершинами в точках \tilde{M} , \tilde{M}_3 , \tilde{M}_x , назовем *координатной ломаной линией*. $\overrightarrow{\tilde{A}_1\tilde{M}} = \overrightarrow{\tilde{A}_1\tilde{M}_x} + \overrightarrow{\tilde{M}_x\tilde{M}_3} + \overrightarrow{\tilde{M}_3\tilde{M}}$, векторы $\overrightarrow{\tilde{A}_1\tilde{M}_x}$, $\overrightarrow{\tilde{M}_x\tilde{M}_3}$ и $\overrightarrow{\tilde{M}_3\tilde{M}}$ коллинеарны соответствующим координатным векторам, поэтому

$$\overrightarrow{\tilde{A}_1\tilde{M}_x} = x\tilde{e}_1, \quad \overrightarrow{\tilde{M}_x\tilde{A}_3} = y\tilde{e}_2, \quad \overrightarrow{\tilde{M}_3\tilde{M}} = z\tilde{e}_3. \tag{2}$$

Таким образом, если даны направленные отрезки координатной ломаной линии, то координаты точки определяются из соотношений (2), а положение точки в пространстве — из равенства (1).

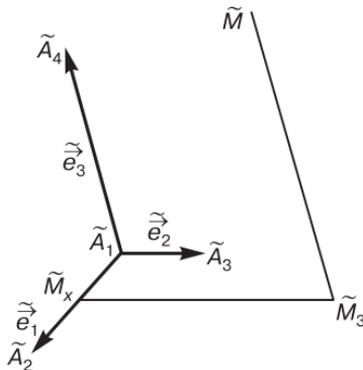


Рис. 22

Пусть $R = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ — изображение данного репера, а \tilde{M} , \tilde{M}_3 и \tilde{M}_x — соответственно изображения точек \tilde{M} , \tilde{M}_3 и \tilde{M}_x на плоскости изображения (рис. 23). Введем обозначения: $\tilde{e}_1 = \overrightarrow{\tilde{A}_1\tilde{A}_2}$, $\tilde{e}_2 = \overrightarrow{\tilde{A}_1\tilde{A}_3}$ и $\tilde{e}_3 = \overrightarrow{\tilde{A}_1\tilde{A}_4}$. Как было отмечено в § 1, при параллельном проектировании

сохраняется параллельность прямых. Поэтому координатная ломаная линия $\overline{MM_3M_x}$ преобразуется в ломаную линию $\overline{MM_3M_x}$ плоскости изображения, для которой векторы $\overline{A_1M_x}$, $\overline{M_xM_3}$, $\overline{M_3M}$ коллинеарны соответственно векторам \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3 (рис. 23). Кроме того, при параллельном проектировании сохраняется отношение отрезков, лежащих на параллельных прямых или на одной прямой, а также отношение сонаправленности или противоположной направленности направленных отрезков. Отсюда следует, что

$$\overline{A_1M_x} = x\vec{e}_1, \quad \overline{M_xM_3} = y\vec{e}_2, \quad \overline{M_3M} = z\vec{e}_3. \quad (3)$$

Вектор $\overline{A_1M}$, как следует из правила сложения векторов, подчиняется равенству $\overline{A_1M} = \overline{A_1M_x} + \overline{M_xM_3} + \overline{M_3M}$ или

$$\overline{A_1M} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3. \quad (4)$$

Таким образом, если нам известны координаты точки в пространстве относительно репера \tilde{R} и известно изображение его вершин на плоскости изображения, то по формулам (3) мы можем построить векторы $\overline{A_1M_x}$, $\overline{M_xM_3}$ и $\overline{M_3M}$, сложить их и определить положение точки M на плоскости изображения.

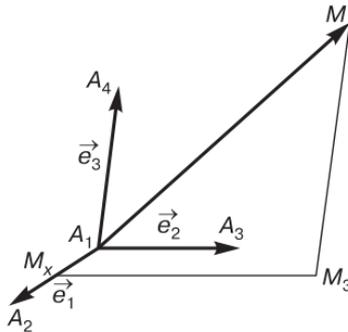


Рис. 23

Рассмотрим обратную задачу. Пусть в пространстве дан репер $\tilde{R} = (\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3, \tilde{A}_4)$, на плоскости изображения даны точки A_1, A_2, A_3 и A_4 — изображения вершин данного репера, и дано изображение M точки \tilde{M} . Требуется построить точку \tilde{M} . Задача построения точки \tilde{M} равносильна задаче определения ее координат относительно репера \tilde{R} .

Нетрудно понять, что данных условий недостаточно для их нахождения. Это вытекает хотя бы из того факта, что параллельное проектирование не является взаимно однозначным отображением пространства на плоскость. Точка M служит изображением бесконечного множества точек в пространстве. Кроме того, для определения координат точки \widetilde{M} мы вынуждены воспользоваться соотношением (4), т. е. разложить вектор $\overrightarrow{A_1\widetilde{M}}$ по векторам $\vec{e}_1 = \overrightarrow{A_1A_2}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{A_1A_3}$ и $\vec{e}_3 = \overrightarrow{A_1A_4}$. Но однозначно определить коэффициенты этого разложения невозможно, так как векторы \vec{e}_1 , \vec{e}_2 и \vec{e}_3 компланарные, т. е. линейно зависимые. Для решения задачи необходимы дополнительные данные.

Напомним, что точка пересечения прямой, параллельной координатной оси $\widetilde{A}_1\widetilde{e}_3$ и проходящей через точку \widetilde{M} , с координатной плоскостью $\widetilde{A}_1\widetilde{e}_1\widetilde{e}_2$ обозначалась нами через \widetilde{M}_3 , а ее образ на плоскости изображения — через M_3 . Точку M_3 будем называть *вторичной проекцией* точки \widetilde{M} . Так как точка \widetilde{M}_3 принадлежит прямой, проходящей через точку \widetilde{M} и параллельной координатной оси $\widetilde{A}_1\widetilde{e}_3$, вторичная проекция принадлежит прямой плоскости изображения, проходящей через точку M и параллельной прямой $A_1\vec{e}_3$. Других ограничений на положение точки M_3 нет. В частности, точка M_3 может совпадать с точкой M . В этом случае точка \widetilde{M} в пространстве лежит в координатной плоскости $\widetilde{A}_1\widetilde{e}_1\widetilde{e}_2$. Если задано изображение точки M и ее вторичная проекция M_3 , то задача определения координат исходной точки \widetilde{M} решается вполне однозначно. Действительно, $\overrightarrow{\widetilde{M}_3M} = z\vec{e}_3$, поэтому $\overrightarrow{M_3M} = z\vec{e}_3$, откуда и определяется третья координата z точки M . Проведем через точку M_3 прямую, параллельную прямой $A_1\vec{e}_2$, до пересечения с прямой $A_1\vec{e}_1$, получим точку M_x . Таким образом, мы построили изображение координатной ломаной $\widetilde{MM}_3\widetilde{M}_x$. Первые две координаты x и y точки \widetilde{M} определяются из равенств $\overrightarrow{A_1M_x} = x\vec{e}_1$, $\overrightarrow{M_xA_3} = y\vec{e}_2$.

Для решения поставленной задачи определения координат точки \widetilde{M} по ее изображению мы использовали проекцию этой точки \widetilde{M}_3 на координатную плоскость $\widetilde{A}_1\widetilde{e}_1\widetilde{e}_2$. Эту же задачу можно решить, рассматривая проекции \widetilde{M}_1

и \widetilde{M}_2 точки \widetilde{M} соответственно на координатные плоскости $\widetilde{A}_1\widetilde{e}_2\widetilde{e}_3$ и $\widetilde{A}_1\widetilde{e}_1\widetilde{e}_3$. На рисунке 24 изображены координатные ломаные MM_3M_x , MM_1M_y и MM_2M_z . Изображения M_1 и M_2 точек \widetilde{M}_1 и \widetilde{M}_2 также будем называть *вторичными проекциями* точки \widetilde{M} . Здесь индекс совпадает с номером координатной оси, которая параллельна прямой, содержащей эту вторичную проекцию.

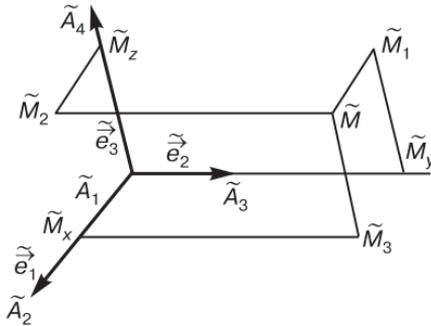


Рис. 24

Изложенный способ построения изображения носит название метода *аксонометрического проектирования* или *аксонометрии*. В дословном переводе с греческого языка слово «аксонометрия» означает измерение по осям. Метод аксонометрического проектирования широко применяется в чертежной практике. Обычно в качестве репера в пространстве выбирают ортонормированный репер, т. е. репер, длины базисных векторов которого равны единице, а углы между этими векторами — прямые. Как уже отмечалось выше, из теоремы Польке–Шварца следует, что произвольный четырехугольник на плоскости может служить изображением ортонормированного репера, равного данному. В черчении используют следующую терминологию. Пусть $\widetilde{R} = (\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, \widetilde{A}_3, \widetilde{A}_4)$ — данный ортонормированный репер, а $R = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ его изображение. Отрезки A_1A_2 , A_1A_3 и A_1A_4 называются *аксонометрическими единицами*, а их длины — *коэффициентами искажения*. Различают следующие виды аксонометрических проекций.

1. *Триметрическая проекция.* Все коэффициенты искажения различны: $A_1A_2 \neq A_1A_3$, $A_1A_2 \neq A_2A_3$ и $A_1A_3 \neq A_2A_3$.

2. *Диметрическая проекция.* Два коэффициента искажения равны между собой, а третий коэффициент с ними не совпадает. Если первый коэффициент искажения равен половине второго и третьего: $2|A_1A_2| = |A_1A_3| = |A_1A_4|$, а углы между изображениями координатных прямых имеют вид $\angle A_3A_1A_4 = 90^\circ$, $\angle A_2A_1A_3 = \angle A_2A_1A_4 = 135^\circ$, то проекция называется *кабинетной*. Эта проекция обычно используется на уроках математики при изображении пространственных тел на чертеже или классной доске.
3. *Изометрическая проекция.* Все коэффициенты искажения равны между собой: $|A_1A_2| = |A_1A_3| = |A_1A_4|$. Если при этом углы между координатными прямыми равны $\angle A_3A_1A_4 = 90^\circ$, $\angle A_2A_1A_3 = \angle A_2A_1A_4 = 135^\circ$, то проекция называется *кавалерной* или *военной*.

На рисунке 25 даны изображения куба, четырьмя вершинами которого служат точки репера $\tilde{R} = (\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3, \tilde{A}_4)$, соответственно в кабинетной и военной проекциях.

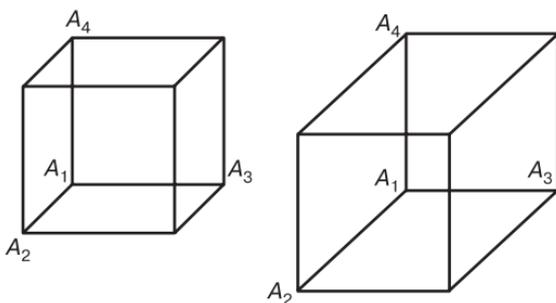


Рис. 25

Рассмотрим ряд стереометрических задач, решение которых будет осуществляться на плоскости изображения методом аксонометрической проекции. Будем считать, что на плоскости дано изображение некоторого репера. Так как изображение точки и ее вторичная проекция полностью определяют ее положение в пространстве, то условимся считать точку на плоскости изображения заданной, если дано ее изображение и одна из вторичных проекций. Обозначать заданные точки будем следующими образом: (A, A_3) или (M, M_1) и т. п. Будем считать, что прямая задана, если заданы две ее точки, плоскость же задана,

если заданы три ее точки, не принадлежащие одной прямой. Если не возникает недоразумений, условимся, как принято на практике, обозначать точки пространства и их изображения одними и теми же буквами.

Мы считаем точку заданной, если вместе с ее изображением дана какая-либо ее вторичная проекция. На самом деле не важно, о какой вторичной проекции идет речь, так как если точка (M, M_3) задана с помощью, например, вторичной проекции на координатную плоскость $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ (рис. 26), то легко строятся ее вторичные проекции на остальные координатные плоскости. Для этого достаточно определить, как было показано выше, вершины соответствующих координатных ломаных M_x и M_y . Вторичная проекция M_2 служит точкой пересечения прямых, одна из которых проходит через точку M параллельно вектору \vec{e}_2 , а другая через точку M_x , параллельно вектору \vec{e}_1 . Аналогично строится вторичная проекция M_1 .

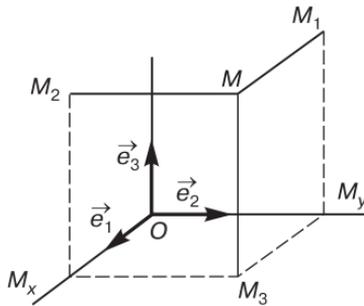


Рис. 26

Изображение точки пересечения прямой и координатной плоскости называется ее *следом* на этой плоскости.

Задача 1. Прямая задана своими двумя точками (M, M_3) и (N, N_3) . Требуется построить ее след на координатной плоскости $O\vec{e}_1\vec{e}_2$.

Решение. Рассмотрим прямую $l_3 = M_3N_3$ (рис. 27). Эта прямая принадлежит плоскости $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ и содержит все вторичные проекции точек прямой MN . Поэтому искомая точка S пересечения прямой MN с этой координатной плоскостью принадлежит прямой M_3N_3 , следовательно, совпадает с точкой пересечения MN и l_3 .

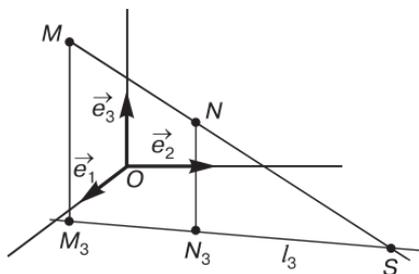


Рис. 27

Прямую $l_3 = M_3N_3$ назовем *вторичной проекцией прямой* на координатную плоскость $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Аналогично определяются вторичные проекции прямой на остальные координатные плоскости. Ясно, что прямая задана, если дано ее изображение и какая-либо вторичная проекция.

Рассмотрим аналогичную задачу для плоскости. Изображение прямой пересечения плоскости с координатной плоскостью назовем ее *следом*.

Задача 2. *Плоскость задана своими тремя точками (M, M_3) , (N, N_3) и (P, P_3) . Требуется найти ее след на координатной плоскости $O\vec{e}_1\vec{e}_2$.*

Решение. Воспользуемся предыдущей задачей, определим следы прямых (M, M_3) , (N, N_3) и (P, P_3) (рис. 28).

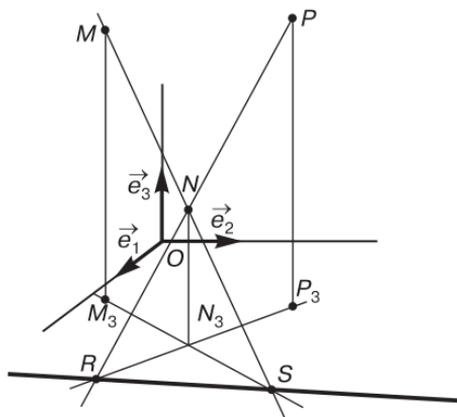


Рис. 28

След S прямой (M, M_3) , (N, N_3) совпадает с точкой пересечения прямых MN и M_3N_3 , а след R прямой (N, N_3) , (P, P_3) является точкой пересечения прямых PN и P_3N_3 . Прообразы точек S и R принадлежат как данной плоскости, так и координатной плоскости $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, поэтому прямая SR — искомая.

Ясно, что плоскость может быть задана своим следом на какой-либо координатной плоскости, например $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, и точкой, не принадлежащая этой координатной плоскости. Решение ряда задач существенно упрощается, если вначале определить следы рассматриваемых плоскостей.

Задача 3. *Плоскость π задана своими следами p_1 , p_2 и p_3 на координатных плоскостях, точка M принадлежит этой плоскости. Требуется построить ее вторичную проекцию M_3 .*

Решение. Рассмотрим точку P пересечения данной плоскости π с координатной осью $O\vec{e}_3$, она принадлежит этой оси и следам p_2 и p_3 (рис. 29). Прямая PM принадлежит плоскости π . Пусть N — точка пересечения этой прямой и следа p_3 . Так как начало координат, точка O , вторичная проекция точки P на координатную плоскость $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, а вторичная проекция точки N совпадает с ней самой, то прямая ON служит вторичной проекцией прямой PN на эту координатную плоскость. Для решения задачи нам

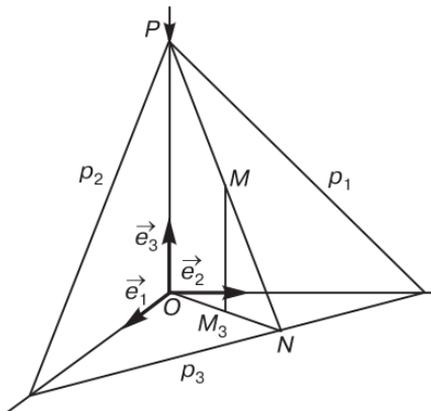


Рис. 29

достаточно провести через точку M прямую, параллельную координатной оси $O\vec{e}_3$, до пересечения с прямой ON . Получим искомую вторичную проекцию M_3 .

Задача 4. Дана точка (M, M_3) и плоскость, заданная своими следом p_3 на координатной плоскости $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ и точкой (P, P_3) . Требуется установить, принадлежит ли точка данной плоскости.

Решение. Точка принадлежит плоскости в том и только в том случае, когда прямая MP принадлежит этой плоскости, что равносильно условию: след прямой MP принадлежит следу p_3 данной плоскости. На рисунке 30 построен след S прямой MP . Он совпадает с пересечением прямых MP и M_3P_3 . В данном случае точка S не принадлежит прямой p_3 , поэтому точка (P, P_3) не принадлежит данной плоскости.

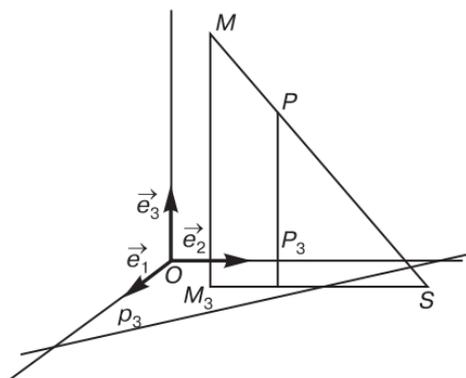


Рис. 30

Задача 5. На плоскости заданы прямые (l, l_3) и (m, m_3) . Требуется установить, являются ли они параллельными.

Решение. Параллельные прямые изображаются при параллельном проектировании параллельными или совпавшими прямыми (см. § 1). Если прямые параллельны, то на плоскости изображения прямые l и m также будут параллельны или будут совпадать. Если эти прямые пересекаются, то и в пространстве их прообразы не параллельны. Рассмотрим плоскости π_1 и π_2 , проходящие через прямые

l и m и параллельные координатной оси $O\vec{e}_3$. Если прямые l и m параллельны, то из признака параллельности плоскостей следует, что плоскости π_1 и π_2 параллельны. Поэтому они пересекают координатную плоскость $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ в пространстве по параллельным прямым. Эти прямые пересечения изображаются на плоскости вторичными проекциями l_3 и m_3 , которые на чертеже либо параллельны, либо совпадают. Условие одновременной параллельности (или совпадения) прямых l и m их вторичных проекций l_3 и m_3 является также достаточным условием для параллельности данных прямых в пространстве (рис. 31).

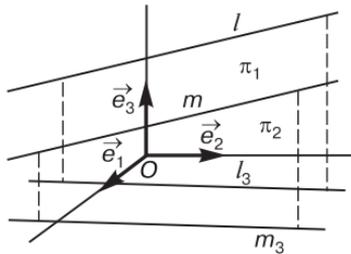


Рис. 31

Задача 6. Прямая l задана своей вторичной проекцией (l, l_3) , а плоскость π — следами r_1, r_2 и r_3 на координатных плоскостях. Построить точку пересечения прямой (l, l_3) с данной плоскостью.

Решение. Пусть α — плоскость, проходящая через прямые l и l_3 . Она параллельна координатной оси $O\vec{e}_3$. Обозначим через N точку пересечения прямых l_3 и r_3 , а через M_3 — точку пересечения l_3 с осью $O\vec{e}_1$ (рис. 32). Точки M_3 принадлежат α , поэтому прямая, через нее проходящая и параллельная оси $O\vec{e}_3$, также лежит в плоскости α . Так как эта прямая принадлежит координатной плоскости $O\vec{e}_1\vec{e}_3$, то она пересекает в некоторой точке M след r_2 плоскости π . Точки M и N принадлежат как плоскости α , так и плоскости π , поэтому MN служит прямой пересечения этих плоскостей. Искомая точка X совпадает с точкой пересечения прямых l и MN .

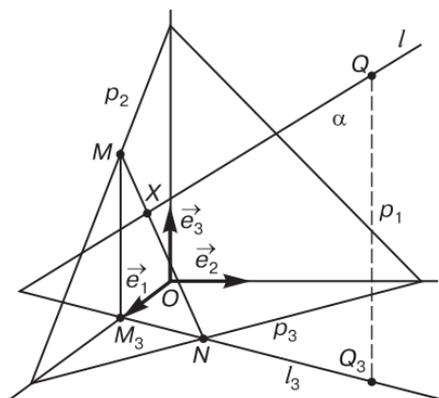


Рис. 32

§ 5. ПОЛНЫЕ И НЕПОЛНЫЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ. СЕЧЕНИЯ МНОГОГРАННИКОВ

В настоящем параграфе мы рассмотрим задачи на построение сечений многогранников на проекционном чертеже. Эти задачи часто используются в школьном курсе стереометрии при решении более сложных задач, связанных со свойствами этих сечений. Задачи на построение сечений относятся к так называемым *позиционным задачам*, т. е. задачам на взаимное расположение пространственных тел. Их удобно решать методом аксонометрической проекции.

В предыдущем параграфе мы рассматривали изображение репера на плоскости и условились считать точку заданной, если дано ее изображение вместе со своей вторичной проекцией. Прямая задана, если заданы две ее точки, или, что то же самое, задана прямая и ее вторичная проекция. Плоскость считается заданной, если заданы три ее точки, не принадлежащие одной прямой, что равносильно заданию ее следов, т. е. прямых пересечения с координатными плоскостями.

Пусть в пространстве дано некоторое тело. Репер, вершины которого принадлежат этому телу, называется *присоединенным*. Изображение σ некоторого пространственного тела $\tilde{\sigma}$ носит название *полного в присоединенном репере* \tilde{R} , если в изображении R этого репера все точки σ будут заданы. Докажем следующую теорему.

Теорема 1. Если изображение тела σ в некотором присоединенном репере \tilde{R} является полным, то в любом другом присоединенном репере оно также будет полным.

Доказательство. Рассмотрим какой-либо присоединенный репер $\tilde{R}' = (\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2, \tilde{Q}_3, \tilde{Q}_4)$, отличный от данного репера \tilde{R} . Так как изображение $\tilde{\sigma}$ в репере \tilde{R} является полным, а точки \tilde{Q}_i ($i = 1, \dots, 4$) принадлежат $\tilde{\sigma}$, изображения Q_i этих точек заданы в репере-изображении R репера \tilde{R} . Рассмотрим произвольную точку \tilde{M} , принадлежащую $\tilde{\sigma}$. Покажем, что можно определить ее вторичную проекцию в изображении R' репера \tilde{R}' . Действительно, для определения ее вторичной проекции следует найти изображение точки пересечения прямой, проходящей через M и параллельной Q_1Q_4 , с плоскостью $Q_1Q_2Q_3$. Но эта задача нами была уже решена в § 4 (см. задачу 6). Теорема доказана.

Таким образом, понятие полноты изображения не зависит от выбора присоединенного репера. Поэтому изображение будем называть *полным*, если оно является полным в каком-либо присоединенном репере. Если же в каком-либо присоединенном репере существует точка, вторичная проекция которой не определена, то изображение не является полным в любом другом присоединенном репере. В этом случае изображение называется *неполным*. Приведем примеры полных и неполных изображений. Если не возникает недоразумений, в дальнейшем, как это принято на практике, будем обозначать точки в пространстве и их изображения на плоскости одними и теми же буквами.

Изображения призм и пирамид, изучаемых в школьном курсе стереометрии, являются полными. На рисунке 33 приведено изображение пятиугольной призмы $ABCDEA'B'C'D'E'$. Присоединим к нему репер $R = (A, E, B, A')$. Тогда все вершины призмы заданы. Действительно, вторичные проекции вершин нижнего основания совпадают с ними самими. Вторичной проекцией вершины A' на координатной плоскости служит точка A , вершины B' — вершина B , C' — C , D' — D и E' — E . Отсюда следует, что все ребра и грани призмы также заданы. Рассмотрим для примера точку M , принадлежащую грани $CC'D'D$, и построим ее вторичную проекцию. Для этого проведем через точку M прямую, параллельную ребру AA' .

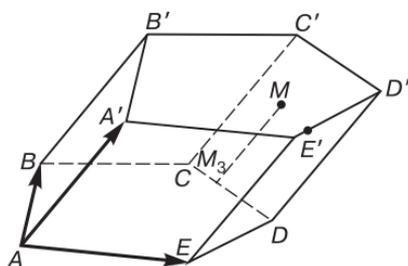


Рис. 33

Эта прямая принадлежит плоскости $CC'D'D$, поэтому ее точка пересечения M_3 с плоскостью основания лежит на ребре CD . Точка M_3 служит вторичной проекцией точки M в выбранном присоединенном репере.

Рассмотрим теперь изображение четырехугольной пирамиды $ABCD S$ (рис. 34). Присоединим к данной пирамиде репер $R = (A, D, B, S)$. Тогда все вершины пирамиды будут заданы. Вторичные проекции вершин основания совпадают с ними самими, а вторичной проекцией точки S служит точка A . Поэтому все ребра и грани пирамиды также заданы. Пусть M — точка, принадлежащая грани SCD . Построим ее вторичную проекцию. Для этого нам следует определить точку M' пересечения прямой, проходящей через M и параллельной координатной прямой AS , с координатной плоскостью ABD . Рассмотрим плоскость π , проходящую через точку M и прямую AS . Прямая пресечения плоскости π и грани SCD совпадает с прямой SM . Пусть N — точка пересечения ребра CD и прямой SM .

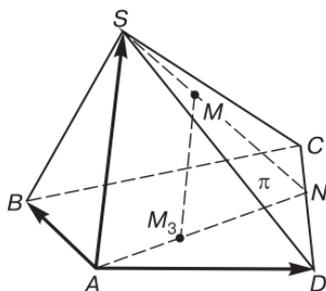


Рис. 34

Тогда AN — прямая пересечения π и плоскости основания пирамиды. Так как точки A , S и N принадлежат одной плоскости, то вторичная проекция M_3 лежит на прямой AN . Для решения задачи нам осталось провести через точку M прямую, параллельную AS , до пересечения с AN .

Рассмотрим теперь пример неполного изображения. На рисунке 35 изображен многогранник $ABCSR$, составленный из двух треугольных пирамид $ABCS$ и $ABCR$. Присоединим к нему репер $R = (A, C, B, S)$. Тогда в этом репере вторичная проекция вершины R не определена. Она может совпадать с любой точкой прямой l , проходящей через R и параллельной AS . Изображение не является полным. Если же мы зададим точку P пересечения прямой SR с плоскостью ABC , то вторичную проекцию R_3 точки R легко построить как точку пересечения прямых l и AP .

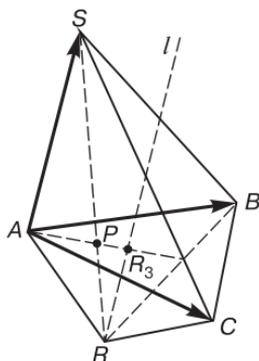


Рис. 35

Задачи на построение сечений многогранников занимают достаточно большое место в школьном курсе стереометрии. Познакомимся со способами построения таких сечений.

Пример 1. Дана треугольная призма $ABCA'B'C'$ и три точки L , M и N , принадлежащие соответственно боковым граням $AA'B'B$, $BB'C'C$ и $AA'C'C$. Построить сечение призмы плоскостью MNP .

Решение. Присоединим к данной призме репер $R = (A, B, C, A')$. Так как в этом репере все вершины имеют вторичные проекции, то изображение полное. Для решения

задачи определим след секущей плоскости на координатной плоскости ABC . Определим вторичные проекции данных точек. Точка L принадлежит грани $AA'B'B$, поэтому прямая l , проходящая через эту точку и параллельная координатной прямой AA' , принадлежит этой грани. Вторичная проекция L_3 совпадает пересечением прямой l и ребра AB . Аналогично определяются вторичные проекции M_3 и N_3 данных точек M и N (рис. 36). Построим след D прямой LN на плоскости основания как точку пересечения прямой LN и L_3N_3 . След E прямой LM служит точкой пересечения прямой LM и ее вторичной проекции L_3M_3 . Тогда прямая DE представляет собой искомую прямую пересечения основания призмы и секущей плоскости. Построим точки Q и P пересечения прямой DE с прямыми, содержащими ребра AC и BC призмы. Затем через точки Q и N проведем прямую до пересечения с ребром AA' , получим точку R , строим прямую RL и в пересечении с $A'B'$ будем иметь S . Аналогично строится точка T как пересечение прямой PM и ребра $C'B'$. Пятиугольник $PQRST$ представляет собой искомое сечение.

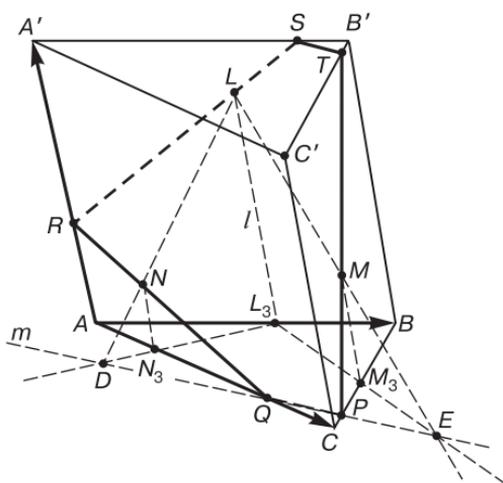


Рис. 36

Ключевой момент в разобранным построении состоял в определении следа секущей плоскости на основании призмы. Рассмотрим еще один пример на построение сечения,

но уже не призмы, а пирамиды, в котором решение также сводится к построению следа секущей плоскости на основании пирамиды.

Пример 2. Дана четырехугольная пирамида $ABCD$. Точки L , M и N принадлежат соответственно граням ABS , DCS и основанию $ABCD$. Построить сечение пирамиды плоскостью LMN .

Решение. Присоединим к данной пирамиде репер $R = (A, B, D, S)$. Тогда в этом репере все вершины имеют вторичные проекции, изображение пирамиды полное. Найдем вторичные проекции данных точек. Так как точка N принадлежит плоскости основания, т. е. координатной плоскости $ABCD$, то ее вторичная проекция N_3 совпадает с ней самой (рис. 37). Точка L принадлежит боковой грани ASB , поэтому прямая, через нее проходящая и параллельная AS , лежит в этой грани и пересекает ребро AB в точке L_3 , вторичной проекции точки L . Для построения вторичной проекции точки M следует воспользоваться приемом, описанным в задаче 3 предыдущего параграфа. Через точки A , S и M проводим плоскость, определяем точку E пересечения этой плоскости с ребром DC . Искомая вторичная проекция M_3 принадлежит пересечению прямой, проходящей через M и параллельной AS , с прямой AE .

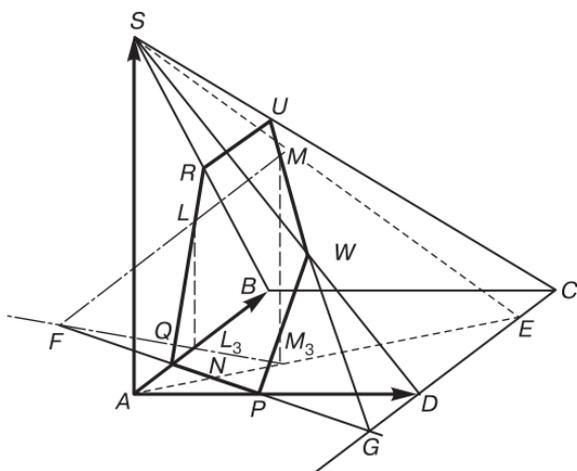


Рис. 37

Точка F пересечения прямой LM и ее вторичной проекции L_3M_3 принадлежит сечению, поэтому служит точкой следа данной плоскости на основании $ABCD$. Искомый след представляет собой прямую FN . Эта прямая пересекает ребра AB и AD соответственно в точках Q и P . Проведем прямую QL до пересечения с ребром SB , получим точку R пересечения плоскости сечения с этим ребром. Прямая FN , как видно на рис. 37, не пересекает ребро основания пирамиды CD , но пересекает прямую CD в точке G . Эта точка принадлежит плоскости сечения и боковой грани CDS . Поэтому прямая GM служит прямой пересечения этих плоскостей. Прямая GM пересекает боковое ребро SC пирамиды в точке U , а SD — в точке W . Таким образом, мы определили общие точки плоскости сечения со всеми ребрами пирамиды, с которыми она пересекается. Пятиугольник $PQRUW$ — искомый.

§ 6. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ АКСОНОМЕТРИИ

В предыдущем параграфе мы рассмотрели задачи на сечения многогранников. Для построения этих сечений достаточно было задать в аффинном репере как многогранник, так и секущую плоскость. Но в школьном курсе стереометрии достаточно большой объем занимают задачи на нахождение длин отрезков, углов между прямыми, прямой и плоскостью, между плоскостями. В аффинной системе координат такого рода задачи не имеют решения. На проекционных чертежах для построений, связанных с этими задачами, необходимо на репер наложить дополнительные условия.

Определение 1. *Аффинный репер называется декартовым, если для соответствующей ему аффинной системы координат известны длины ее базисных векторов и углы между ними.*

Примером репера такого рода может служить ортонормированный репер, длины векторов соответствующей ему системы координат равны единице, а все углы между ними прямые. В принципе не важно, из каких условий мы определим углы между векторами и их длины. Воспользуемся свойствами скалярного произведения век-

торов. Если \vec{e}_i ($i = 1, 2, 3$) — базисные векторы, $g_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}_j$ ($i, j = 1, 2, 3$) — попарные скалярные произведения между ними, то $|\vec{e}_i| = \sqrt{g_{ii}}$, $\cos(\angle \vec{e}_i \vec{e}_j) = \frac{g_{ij}}{\sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}}}$. Поэтому, если известны скалярные произведения g_{ij} , то репер является декартовым. Пусть в декартовом репере даны координаты трех точек $M(x_1; x_2; x_3)$, $N(y_1; y_2; y_3)$ и $P(z_1; z_2; z_3)$. Тогда расстояние между точками M и N вычисляется по формуле

$$|MN| = \sqrt{\overrightarrow{MN}^2} = \sqrt{\sum g_{ij}(y_i - x_i)(y_j - x_j)}, \quad (1)$$

а формула для вычисления косинуса угла NMP имеет вид

$$\begin{aligned} \cos(\angle NMP) &= \frac{\overrightarrow{MN} \overrightarrow{MP}}{|\overrightarrow{MN}| |\overrightarrow{MP}|} = \\ &= \frac{\sum g_{ij}(y_i - x_i)(z_j - x_j)}{\sqrt{\sum g_{ij}(y_i - x_i)(y_j - x_j)} \sqrt{\sum g_{ij}(z_i - x_i)(z_j - x_j)}}. \quad (2) \end{aligned}$$

Мы видим, что для решения задач на определение расстояний и величин углов достаточно задать шесть скалярных произведений $g_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}_j$ или любых других шесть параметров, с помощью которых можно вычислить эти скалярные произведения. Эти шесть параметров определяют декартов репер с точностью до движения пространства. Но в ряде задач не требуется использовать все шесть параметров. Например, в задаче на нахождение угла NMP (см. (2)), достаточно знать только отношения $\frac{g_{ij}}{g_{11}}$. Таких отношений всего пять, они определяют положение репера в пространстве с точностью до подобия. В этом случае репер называется *евклидовым*.

Определение 2. *Изображение пространственного тела называется метрически определенным, если к нему можно присоединить изображение декартова репера, в котором изображение будет полным. Если же присоединенный репер евклидов, то изображение называется евклидово определенным.*

Рассмотрим примеры решения метрических задач на декартово и евклидово определенных изображениях. Как и прежде, следуя школьной практике, не будем отличать точки, прямые и плоскости оригинала от их изображений. Они будут обозначаться нами одними и теми же буквами.

Пример 1. Дано изображение равнобедренного треугольника с углом 30° при вершине. Требуется построить изображение центра его описанной окружности.

Решение. Пусть ABC — изображение данного треугольника, BC — его основание. Как следует из результатов § 1, этот треугольник — произвольный, не обязательно равнобедренный (рис. 38). Присоединим ему в пространстве репер, первые три точки которого будут совпадать с A , B и C , а четвертая точка B_1 будет находиться в пространстве на прямой, проходящей через A и перпендикулярной плоскости треугольника ABC . При этом $|AB_1| = |AC|$. Ясно, что такой репер является евклидовым, а изображение — евклидово определенным. Очевидно, что результат решения задачи не изменится при любом преобразовании подобия пространства.

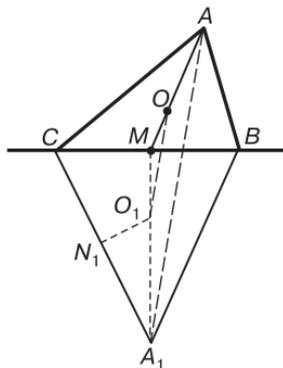


Рис. 38

Пусть M — середина основания BC , тогда отрезок AM — изображение высоты, опущенной из вершины на основание. Искомый центр O описанной окружности принадлежит AM . Для решения задачи достаточно построить на плоскости оригинал, т. е. равнобедренный треугольник с углом 30° при вершине, построить его центр описанной окружности, найти отношение, в котором этот центр делит высоту, опущенную на основание оригинала, а затем разделить отрезок AM изображения в этом же отношении. Осуществить такого рода построение удобнее всего следующим способом. Построим равнобедренный треугольник A_1BC с углом 30° при

вершине так, чтобы его основание совпадало с отрезком BC , а вершина A_1 лежала в плоскости треугольника ABC , но в другой полуплоскости относительно прямой BC , что вершина A . Определим точку O_1 как центр описанной вокруг треугольника A_1BC окружности. Соединим точки A и A_1 и проведем через O_1 прямую, параллельную AA_1 , до пересечения с AM . Легко видеть, что мы получили искомый центр O описанной вокруг треугольника ABC окружности.

Напомним ([2], § 34), что под перспективно-аффинным преобразованием или родством понимается отличное от тождественного аффинное преобразование плоскости, при котором существуют по крайней мере две неподвижные точки. Прямая, проходящая через эти точки, целиком состоит из неподвижных точек, она носит название оси родства. Соответствующие друг другу точки при родстве лежат на параллельных прямых. Если прямая пересекает ось родства в некоторой точке, то ее образ также проходит через эту точку, если же прямая параллельна оси, то и ее образ параллелен оси. В разобранный примере прямая BC и точки A и A_1 определяют на плоскости родство, осью которого служит прямая BC , A и A_1 — ее соответствующие точки. Такого рода интерпретация способа решения весьма удобна. Применим ее в следующем примере.

Пример 2. Дан параллелограмм $ABCD$, который служит изображением квадрата, дана прямая t и точка P . Требуется построить изображение перпендикуляра, опущенного из точки P на прямую t .

Решение. Если мы присоединим к изображению квадрата репер $R = (A, B, D, A_1)$, где точка A_1 удовлетворяет тем же условиям, что и точка B_1 при построении аналогичного репера в предыдущем примере, то репер R будет евклидовым. Таким образом, изображение данного квадрата евклидово определенное.

Проведем прямую AD и построим квадрат AB_1C_1D таким образом, чтобы вершины B_1 и C_1 находились в другой полуплоскости, определяемой прямой AD , относительно точек B и C (рис. 39). Рассмотрим родство с осью AD , при котором точка C преобразуется в точку C_1 . Так как при этом преобразовании изображение квадрата, параллелограмм $ABCD$, преобразуется в квадрат AB_1C_1D , то

изображение перпендикуляра, проведенного из точки P к прямой m , преобразуется в перпендикуляр, проведенный из точки P_1 , образа точки P , к прямой m_1 , образу прямой m . Приведенные соображения позволяют провести построение искомого перпендикуляра.

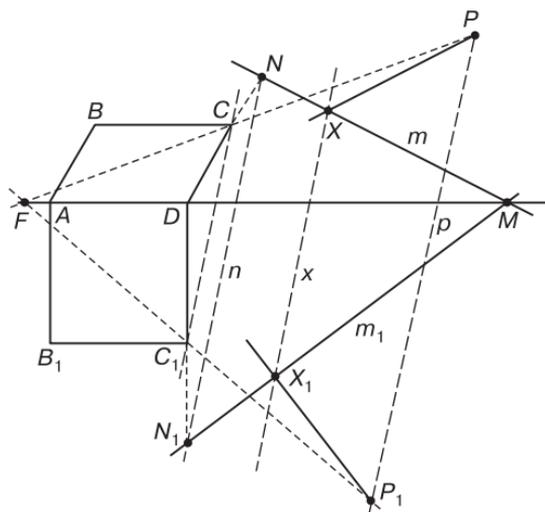


Рис. 39

1. Построим точку P_1 , образ точки P при родстве. Для этого проведем прямую через точки P и C до пересечения с осью AD . Получим точку F . Соединим точки F и C_1 , прямая FC_1 — образ прямой PC при рассматриваемом родстве. Искомая точка P_1 совпадает с пересечением прямой FC_1 и прямой p , проходящей через точку P и параллельной CC_1 .

2. Строим образ m_1 прямой m . Для этого находим точку M пересечения прямой m и оси родства. Точка M неподвижна при рассматриваемом перспективно-аффинном преобразовании. В качестве второй точки на прямой m удобно выбрать точку N пересечения прямых m и DC . Строим образ N_1 точки N при рассматриваемом родстве так, как это было выполнено в п. 1 построения. Прямая m_1 совпадает с прямой MN_1 .

3. Из точки P_1 опускаем перпендикуляр на прямую m_1 . Получим точку X_1 . Строим прообраз X точки X_1 , он совпа-

дает с изображением основания искомого перпендикуляра. Прямая PX искомая.

Пример 3. Дана правильная четырехугольная пирамида $ABCD S$, боковое ребро которой равно диагонали основания. Точка M — середина ребра AS , а точка N — середина ребра CS . Требуется построить перпендикуляр, опущенный из точки M на плоскость BDN .

Решение. Из теоремы Польке–Шварца следует, что в качестве точек, изображающих вершины A, B, D и S , можно принять на плоскости вершины любого четырехугольника, вершина же C достраивается как четвертая вершина параллелограмма $ABCD$. Пусть $ABCD S$ — данная пирамида, O — центр основания (рис. 40 а). Присоединим к пирамиде репер $R = (A, B, D, S)$. Легко видеть, что репер евклидов, поэтому изображение евклидово определено.

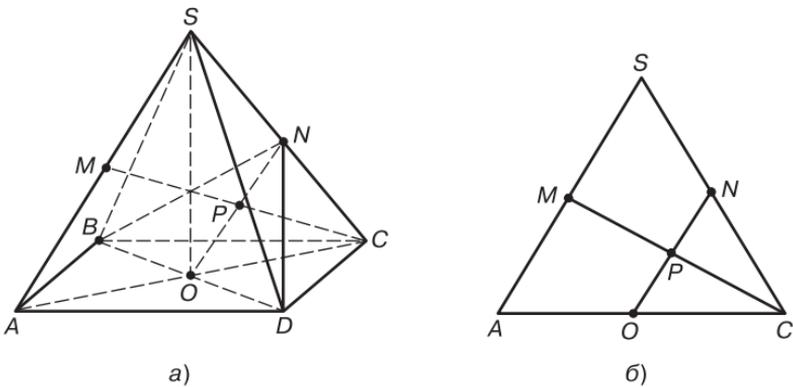


Рис. 40

Для того чтобы построить перпендикуляр, опущенный из точки на плоскость, удобнее всего найти плоскость, проходящую через эту точку и перпендикулярную данной плоскости. Тогда искомый перпендикуляр будет лежать в найденной плоскости, и задача сведется к построению в этой плоскости перпендикуляра, опущенного из точки на прямую. Рассмотрим плоскость ASC , она содержит высоту пирамиды OS и диагональ основания AC . Прямая BD , принадлежащая плоскости BDN , перпендикулярна AC как диагональ квадрата основания пирамиды; кроме того,

прямые BD и OS также перпендикулярны, так как высота OS перпендикулярна любой прямой, принадлежащей основанию пирамиды. Таким образом, прямая BD перпендикулярна двум пересекающимся прямым AC и OS плоскости ASC , поэтому она перпендикулярна этой плоскости. Плоскость BDN содержит перпендикуляр BD к плоскости ASC , поэтому эти плоскости перпендикулярны. Искомый перпендикуляр, опущенный из точки M на плоскость BDN , лежит в плоскости ASC .

Плоскость ASC пересекает данную пирамиду по треугольнику ASC . Из условия задачи следует, что этот треугольник равносторонний. При этом прямая пересечения плоскостей ASC и BDN служит средней линией ON треугольника ASC . Поэтому искомый перпендикуляр является высотой MC треугольника ASC (рис. 40 б).

Пример 4. Дана правильная треугольная призма $ABCA'B'C'$. Требуется построить общий перпендикуляр к боковому ребру AA' и диагонали $B'C$ боковой грани $BB'C'C$.

Решение. Нам дана правильная призма, поэтому ее основания представляют собой правильные треугольники, а боковые ребра перпендикулярны основаниям. Присоединим к изображению данной призмы репер $R = (A, B, C, A_1)$, где точка A_1 принадлежит боковому ребру AA' и отрезок AA_1 равен стороне основания призмы. Нам не дано отношение между боковым ребром и ребром основания, для решения задачи оно будет несущественным. Поэтому в качестве этого отношения примем произвольное число. Введенный репер является евклидовым, изображение евклидово определенное. Данные прямые AA' и $B'C$ скрещиваются (рис. 41 а), поэтому они обладают единственным общим перпендикуляром, т. е. прямой, которая их пересекает и одновременно им перпендикулярна.

Для построения общего перпендикуляра двух скрещивающихся прямых a и b в пространстве обычно через одну прямую, например a , проводят плоскость σ , параллельную b , затем из произвольной точки прямой b опускают перпендикуляр h на σ (рис. 41 б). Через точку N пересечения перпендикуляра h с плоскостью σ проводят прямую c , параллельную b . Точка X пересечения c и a

служит искомым основанием общего перпендикуляра на прямой a . Затем через точку X проводят прямую h_1 , параллельную h , до пересечения с прямой b . Точка Y пересечения h_1 и b представляет собой второе основание общего перпендикуляра прямых a и b . Легко видеть, что прямая $h_1 = XY$ перпендикулярна a и b (проверьте самостоятельно).

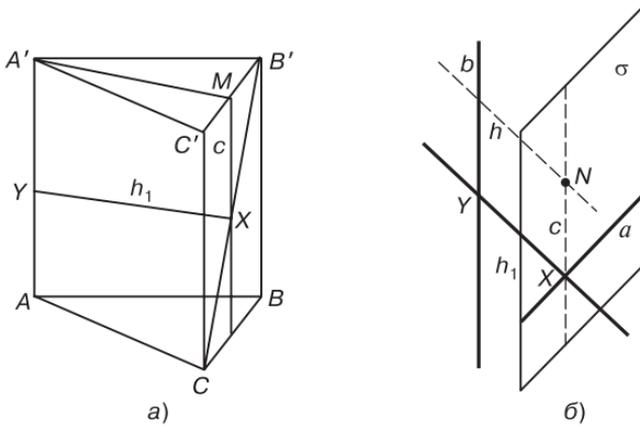


Рис. 41

В данной треугольной призме $ABCA'B'C'$ плоскость, проходящая через $B'C$ и параллельная ребру AA' , совпадает с боковой гранью $BB'C'S$. Опустим на эту грань перпендикуляр из вершины A' ребра AA' . Легко видеть, он совпадает с высотой $A'M$ треугольника $A'B'C'$ (см. рис. 41 а). Затем из точки M проведем прямую c , параллельную ребру AA' . Она пересечет диагональ $B'C$ в ее середине X . Искомый перпендикуляр h_1 проходит через точку X и параллелен $A'M$. Он пересечет ребро AA' в его середине Y .

§ 7. МЕТОД МОНЖА

Во введении мы упоминали о Гаспаре Монже и краткой истории открытия его метода изображения пространственных тел на чертеже с помощью параллельного проектирования. В настоящее время метод Монжа лежит в основе промышленного черчения. Мы познакомимся с этим

методом и рассмотрим примеры задач, решаемых с его помощью.

Пусть в пространстве даны две взаимно перпендикулярные плоскости α и β , которые пересекаются по прямой a . Эти плоскости называются *плоскостями проекции*, а прямая a — ее *осью*. Плоскость α носит название *горизонтальной плоскости*, а β — *вертикальной*. Возьмем в пространстве фигуру F и ортогонально спроектируем ее на горизонтальную и вертикальную плоскости. Получим фигуры F_1 и F_2 , *горизонтальную и вертикальную проекции* F (рис. 42 а). Повернем теперь горизонтальную плоскость α на 90° вокруг оси a до ее совмещения с плоскостью β . Получим чертеж, изображенный на рис. 42 б, его называют *эпюром*. На эпюре всегда изображается ось проекции. В курсе черчения рассматриваются способы построения горизонтальных и вертикальных проекций пространственных тел на эпюре, и наоборот, задачи восстановления пространственной фигуры по ее горизонтальной и вертикальной проекциям, заданным на эпюре. Метод Монжа позволяет определить форму и размеры пространственной фигуры с точностью до движения пространства по ее проекциям, изображенным на эпюре. Этот метод широко распространен в техническом черчении, в частности, он изучается на уроках черчения в школе. Его недостатком является отсутствие наглядности, в силу чего он неудобен для применения на уроках математики, хотя, с другой стороны, «чтение» чертежей,

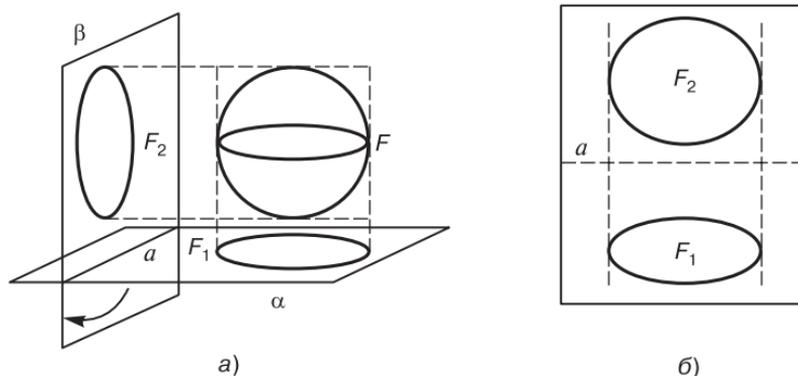


Рис. 42

выполненных по методу Монжа, хорошо развивает пространственное воображение.

Будем считать, что точка M задана (или определена) на эюре, если даны ее горизонтальная M_1 и вертикальная M_2 проекции $M(M_1, M_2)$. Пусть в пространстве дана некоторая точка M . Рассмотрим ее горизонтальную и вертикальную проекции M_1 и M_2 (рис. 43 а). Плоскость MM_1M_2 перпендикулярна оси проекции a , поэтому на эюре проекции M_1 и M_2 лежат на прямой, перпендикулярной оси проекции (рис. 43 б). Если точка N принадлежит вертикальной плоскости β , то ее вертикальная проекция N_2 совпадает с ней самой, а горизонтальная проекция N_1 лежит на оси a . Если же точка P принадлежит горизонтальной плоскости α , то ее горизонтальная проекция P_1 совпадает с ней самой, а вертикальная P_2 — принадлежит оси a . Ясно, что эти условия также являются и достаточными для условия принадлежности точек вертикальной и горизонтальной плоскостям.

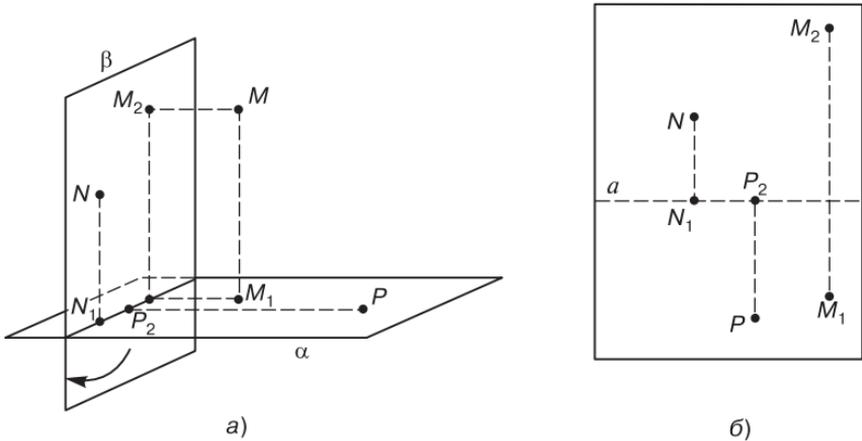


Рис. 43

Рассмотрим в пространстве некоторую прямую l . Спроектируем ее на горизонтальную и вертикальную плоскости, получим прямые l_1 и l_2 , которые носят название соответственно ее *горизонтальной* и *вертикальной* проекций. Будем считать, что *прямая l задана (или определена) на*

эпюре, если даны две ее точки. Нетрудно по проекциям этих точек определить ее горизонтальную и вертикальную проекции. Действительно, горизонтальная проекция l_1 проходит через проекции M_1 и N_1 , а вертикальная проекция l_2 содержит точки M_2 и N_2 (рис. 44). Таким образом, прямую можно задать ее двумя точками или проекциями $l(l_1, l_2)$. Рассмотрим задачу, связанную с определением горизонтальной и вертикальной проекций точек и прямых.

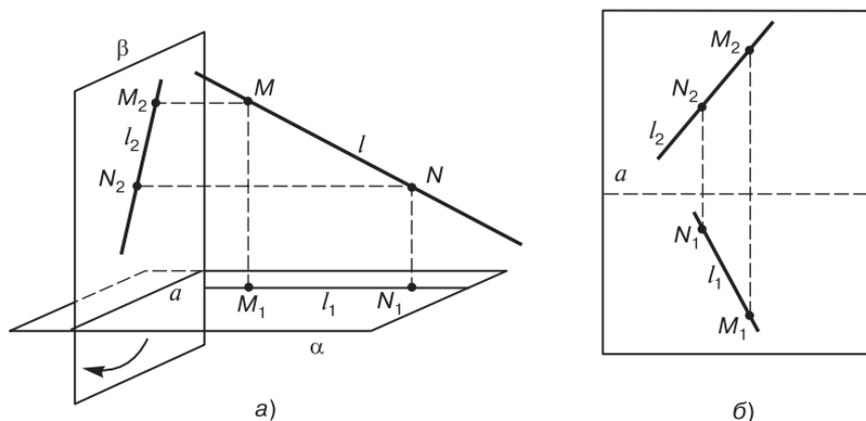


Рис. 44

Пример 1. Дана прямая $l(l_1, l_2)$, известна горизонтальная проекция M_1 точки M , принадлежащей данной прямой l . Найти ее вертикальную проекцию M_2 .

Решение. Так как данная точка M принадлежит прямой l , то на эпюре ее горизонтальная и вертикальная проекции принадлежат соответственно прямым l_1 и l_2 (рис. 45).

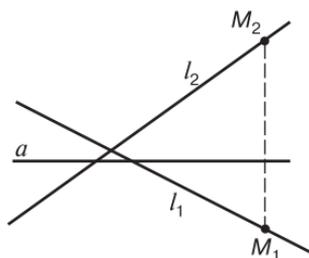


Рис. 45

Поэтому данная горизонтальная проекция M_1 точки M принадлежит прямой l_1 . Через точку M_1 следует провести прямую, перпендикулярную оси проекции a , и найти ее точку пересечения с вертикальной проекцией l_2 . Получим искомую вертикальную проекцию M_2 (рис. 45).

Пример 2. Даны две прямые $l(l_1, l_2)$ и $m(m_1, m_2)$. Требуется определить условия, при которых они пересекаются.

Решение. Прямые l и m пересекаются тогда и только тогда, когда существует точка, принадлежащая этим двум прямым. Поэтому условие пересечения прямых будет выполнено в том и только в том случае, когда существует точка $M(M_1, M_2)$, для которой горизонтальная проекция совпадает с точкой пересечения l_1 и m_1 , а вертикальная проекция — с пересечением прямых l_2 и m_2 : $M_1 = l_1 \cap m_1$, $M_2 = l_2 \cap m_2$. Воспользуемся предыдущим примером. Из него следует, что прямые пересекаются тогда и только тогда, когда точки пересечения прямых l_1, m_1 и l_2, m_2 принадлежат прямой, перпендикулярной оси a проекции (рис. 46 а). Заметим, что горизонтальные или вертикальные проекции l_1 и m_1 или l_2 и m_2 могут совпадать (если совпадают l_1 и m_1 , а также l_2 и m_2 , то прямые l и m лежат в одной плоскости, параллельной горизонтальной или вертикальной плоскости). В этом случае прямые заведомо пересекаются, так как если, например $l_1 = m_1$, то горизонтальная проекция M_1 точки, вертикальная проекция

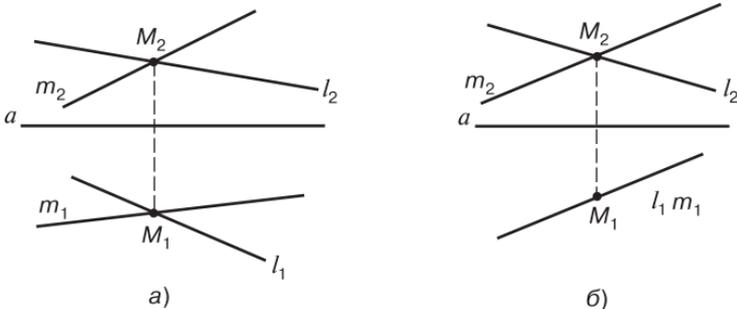


Рис. 46

M_2 которой совпадает с пересечением прямых l_2 и m_2 , заведомо принадлежит как проекции l_1 , так и проекции m_1 (рис. 46 б).

В качестве задачи для самостоятельного решения рассмотрите условия, при которых данные прямые $l(l_1, l_2)$ и $m(m_1, m_2)$ параллельны или скрещиваются. Точки пересечения прямой с горизонтальной и вертикальной плоскостями будем соответственно называть ее *горизонтальным* и *вертикальным следами*.

Пример 3. Дана прямая $l(l_1, l_2)$. Определить на эюре ее горизонтальный и вертикальный следы.

Решение. Точка $M(M_1, M_2)$ принадлежит прямой $l(l_1, l_2)$ в том и только в том случае, когда $M_1 \in l_1$, $M_2 \in l_2$. Она служит горизонтальным следом прямой $l(l_1, l_2)$ тогда и только тогда, когда принадлежит горизонтальной плоскости, т. е. когда ее вертикальная проекция M_2 лежит на оси проекции a (рис. 47). Отсюда следует, что для определения на эюре горизонтального следа прямой $l(l_1, l_2)$ требуется найти точку M_2 пересечения прямой l_2 с осью a проекции, а затем найти точку M_1 пересечения прямой l_1 с перпендикуляром к оси a , проходящем через M_2 . Точка $M(M_1, M_2)$ — искомый горизонтальный след. Аналогично находится точка $N(N_1, N_2)$ — вертикальный след прямой l .

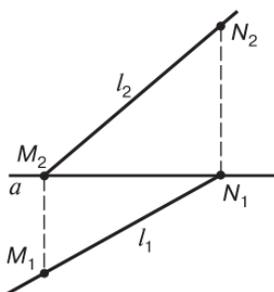


Рис. 47

Будем называть плоскость заданной (или определенной) на эюре, если заданы три ее точки, не принадлежащие одной прямой. Прямые пересечения плоскости с горизонтальной и вертикальной плоскостями назовем

горизонтальным и вертикальным следом этой плоскости. Ясно, что горизонтальный и вертикальный следы плоскости пересекаются на оси проекции. Если плоскость задана своими тремя точками $M(M_1, M_2)$, $N(N_1, N_2)$ и $P(P_1, P_2)$, то, используя пример 3, легко построить ее горизонтальный h и вертикальный v следы. Для этого следует определить горизонтальные следы A и B прямых MN и PN . Искомая прямая h совпадает с прямой AB . Аналогично, вертикальный след v плоскости MNP совпадает с прямой CD , где C и D — соответственно вертикальные следы прямых MN и PN . Таким образом, плоскость можно задать (определить) с помощью ее горизонтального и вертикального следов. В ряде задач такое задание плоскости весьма удобно.

Пример 4. Плоскость задана своими горизонтальным h и вертикальным v следами. Дана точка $M(M_1, M_2)$. Требуется определить, принадлежит ли точка плоскости.

Решение. Выберем на вертикальном следе v данной плоскости некоторую точку P . Тогда ее вертикальная проекция P_2 совпадает с точкой P , а горизонтальная принадлежит оси проекции a (рис. 48). Рассмотрим прямую PM . Ее горизонтальная проекция совпадает с P_1M_1 , а вертикальная — с P_2M_2 . Пусть Q_1 — точка пересечения прямых h и P_1M_1 , а R — оси a и прямой P_2M_2 . Точка M принадлежит плоскости тогда и только тогда, когда прямая PM лежит в этой плоскости. Это означает, что точка Q_1 принадлежит горизонтальной проекции h , т. е. лежит в горизонтальной

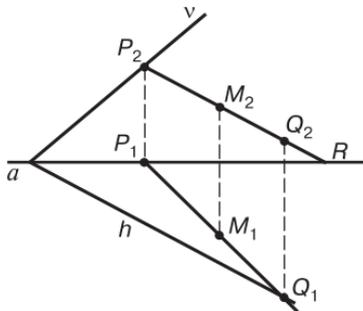


Рис. 48

плоскости, поэтому ее вертикальная проекция должна принадлежать оси проекции a . С другой стороны, точка Q_2 , вертикальная проекция точки Q , для которой горизонтальная проекция совпадает с Q_1 , принадлежит прямой P_2M_2 . Таким образом, точка M принадлежит плоскости тогда и только тогда, когда точки Q_2 и R совпадают. В данном случае они различны, поэтому точка M плоскости не принадлежит.

ЧАСТЬ II

ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ

В предлагаемой части курса геометрии рассматриваются вопросы аксиоматики трехмерного евклидова пространства, элементы геометрии Лобачевского и теория измерения длин отрезков, площадей многоугольников и объемов многогранников.

Изложение вопросов аксиоматики несколько отличается от традиционного, приведенного в пособии [1]. В гл. I рассматриваются аксиоматики Гильберта и Вейля трехмерного евклидова пространства, проводится их исследование. Затем на основе утверждений гл. I излагаются факты геометрии Лобачевского. При доказательстве непротиворечивости планиметрии Лобачевского используется модель Кэли–Клейна на евклидовой плоскости. Поэтому этот раздел по времени изучения может предшествовать курсу «Проективная геометрия». Построение теории измерений проводится в традиционной форме.

Указанная структура курса выбрана не случайно. Раздел «Основания геометрии» крайне важен для фундаментальной подготовки учителя математики. В нем изложены основы построения элементарной геометрии, на которых базируются современные школьные учебники. Исходя из опыта подготовки учителей математики в Московском городском педагогическом институте, сделан вывод о том, что раздел «Основания геометрии» не может быть заключительной частью единого курса геометрии. Он необходим студенту на достаточно раннем этапе обучения для полноценной подготовки к педагогической практике.

АКСИОМАТИКА ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

§ 8. ИСТОРИЯ ПОПЫТОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ПЯТОГО ПОСТУЛАТА ЕВКЛИДА

Первые геометрические представления зародились в глубокой древности и были вызваны чисто практическими потребностями. Само слово «геометрия» переводится с древнегреческого языка как «землемерие». Можно представить себе множество реальных, насущных задач, для решения которых необходимо использовать простейшие геометрические умения и навыки: провешивание прямой линии на местности, построение прямого угла, измерение площади земельного участка или объема сосуда и т. п. Развитию геометрических учений в древности посвящена обширная историческая литература. В нашу задачу не входит ее подробное описание. Остановимся только на краткой характеристике геометрических достижений древнегреческих математиков.

В истории развития цивилизации научные достижения древнегреческих ученых занимают особое место. Мыслители Древней Греции впервые стали заниматься научными исследованиями ради занятий наукой, отталкиваясь от их практической и утилитарной направленности. Они заложили и разработали методологические основы современной научной деятельности.

За сравнительно короткий период с VII по III век до н. э. древнегреческие ученые превратили разрозненные геометрические знания и представления в систематизированную научную теорию, характеризующуюся высокой степенью абстракции. Начало древнегреческой эпохи развития геометрии связывают с Фалесом из города Милета (635–548 гг. до н. э.). Он считается родоначальником греческой науки и философии. Ему приписывают, например, доказательства свойств вертикальных углов, углов при основании равнобедренного треугольника, свойств отрезков, отсекаемых параллельными прямыми от сторон угла, и ряд других. Однако только пифагорейцы, последователи древнегреческого ученого

Пифагора (570–471 гг. до н. э.), придали геометрии характер науки, рассматривая геометрические свойства фигур и пространственных тел с интеллектуальной и нематериальной точки зрения. В школе Пифагора, в частности, были доказаны свойства суммы углов треугольника, геометрический способ решения квадратных уравнений, знаменитая теорема Пифагора, существование несоизмеримых отрезков и пяти типов правильных многогранников, экстремальные свойства круга и шара.

Интересно отметить отношение к математике в школе Платона (429–348 гг. до н. э.). Хотя Платон не сделал математических открытий, но, как писал известный историк математики Гейберг, логическая выучка, заложенная им, в значительной мере содействовала систематическому построению элементарной математики. Он придал ей ту логическую точность и безупречность, которая стала впоследствии ее отличительной чертой. Известно предание, что над входом в организованную им Академию было написано: «Пусть сюда не входит никто, не знающий геометрии». Следует отметить, что такое отношение к математике было характерно для большинства научных школ в Древней Греции. Объем научных знаний в античные времена был достаточно невелик, и каждый античный ученый являлся специалистом, по сути, во всех их областях. Он учил своих учеников всему, что знал и умел. Вершиной всех наук считалась философия. Но для ее постижения необходимо было изучить геометрию, которая являла собой пример логически стройного и безупречного научного знания, закладывающего методологические основы изучения наиболее общих явлений окружающего мира.

К третьему веку до нашей эры, накопив обширный фактический материал, древнегреческие ученые были поставлены перед необходимостью его систематизации и приведения в стройную логическую систему. За решение этой задачи принимались различные ученые. Однако их произведения не дошли до наших дней и были забыты после появления на свет знаменитых «Начал» Евклида.

О жизни Евклида (около 330–275 гг. до н. э.) почти ничего не известно. С достоверностью можно только сказать, что он являлся учеником школы Платона и преподавал математику в Александрии во времена царя Птолемея I, одного

из сподвижников Александра Македонского. В философском смысле структура «Начал» следует четкой логической схеме построения научной теории, разработанной в школах Платона и Аристотеля. Из этой схемы вытекает, что научная теория состоит в исследовании причин, объясняющих связь явлений. Научные положения должны выводиться из первоначальных посылок с помощью умозаключений, построенных по законам формальной логики. Поэтому в основу «Начал» Евклид положил определения, сформулировал аксиомы и постулаты, а затем логически безупречно выводил из них остальные предложения, описывающие геометрические свойства плоских фигур и пространственных тел. Такая структура «Начал» определила их дальнейшую судьбу. Более двух тысячелетий они использовались при обучении школьников математике, выдержали с 1482 года более 500 изданий (больше издавалась только Библия), а в Англии до середины XIX века обучение в школах велось по «Началам» Евклида. Известно, что двенадцатилетний Эварист Галуа, знаменитый французский математик, заложивший основы современной алгебры, благодаря этой книге за одну ночь постиг всю красоту и прелесть занятий математикой, читая формулировки положений, доказывая их самостоятельно и размышляя, сверяясь с книгой, над дальнейшими путями развития теории.

«Начала» состоят из 14 книг. До нас дошло только 13, последняя 14-я книга, посвященная теории конических сечений, была утеряна, и нам о ней известно только благодаря комментариям последователей Евклида. Каждая книга начинается с определений, постулатов и аксиом. Первая из них содержит 35 определений, 5 постулатов и 5 аксиом. По меткому выражению Ламберта, Евклид поступал так, «как поступает, например, часовщик или другой ремесленник, начиная знакомить учеников с названиями орудий своего труда».

Рассмотрим некоторые из определений первой книги.

1. *Точка есть то, что не имеет частей.*
2. *Линия есть длина без ширины.*
3. *Концы линии суть точки.*
4. *Прямая линия есть та, которая одинаково лежит относительно всех своих точек.*

5. *Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину.*
6. *Концы же или края поверхности суть линии.*
7. *Плоская поверхность есть та, которая одинаково расположена относительно всех своих прямых.*

Предварительный анализ приведенных определений показывает, что они имеют чисто описательный характер. В качестве основных понятий принимаются элементы длины и ширины, с помощью которых определяются точки, прямые и плоскости. Такой подход легко объясним, если вспомнить, что эти основные понятия пришли в геометрию из практики. Измерение длины линии — основная операция в землемерии. Определения Евклида отражают естественный путь абстракций, но не имеют точного содержания, пригодного для логических построений, весьма туманны и не используются в дальнейших рассуждениях. Вспомним современные школьные учебники. Их авторы не дают определения точки, прямой и плоскости, а лишь описывают их, поясняют, что эти понятия не определяются, а концентрируют в себе некоторые свойства материальных объектов, называемые геометрическими: луча света (прямая), плоской поверхности стола (плоскость), точечного следа карандаша на бумаге (точка).

Приведем формулировки постулатов и аксиом первой книги «Начал».

Постулаты

1. *От каждой точки до другой можно провести прямую.*
2. *Ограниченную прямую можно продолжить неограниченно в любую сторону.*
3. *Из любого центра можно описать окружность любым радиусом.*
4. *Все прямые углы равны между собой.*
5. *Если две прямые при пересечении с третьей образуют с одной стороны внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, то эти прямые пересекаются при достаточном продолжении с этой стороны (рис. 49).*

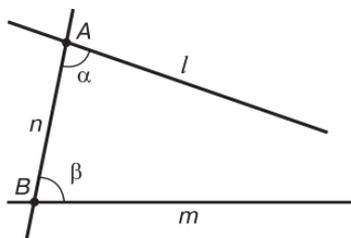


Рис. 49

Аксиомы

1. *Равные одному и тому же третьему также равны между собой.*
2. *Если к равным прибавить равные, то и целые будут равны.*
3. *Если от равных отнять равные, то полученные остатки будут равны.*
4. *Совмещающиеся друг с другом равны.*
5. *Целое больше своей части.*

Как мы видим, Евклид различает два вида допущений: постулаты и аксиомы. Существует много версий по поводу того, какие различия он вкладывает в эти понятия. Наиболее вероятная из них состоит в том, что аксиомы представляют собой допущения, относящиеся к величинам вообще, а постулаты описывают возможности геометрических построений.

С современной точки зрения легко критиковать систему аксиом и постулатов Евклида. Мы видим, что в ней используется идея движения, но это понятие не определяется аксиоматически. В дальнейших рассуждениях Евклид применяет идею непрерывности, например при построении точки пересечения двух окружностей. А почему, собственно говоря, окружности, расстояние между центрами которых меньше или равно сумме радиусов, имеют по крайней мере одну общую точку? Ответ нам понятен, окружности — непрерывные кривые, они не имеют разрывов. Но что это означает? Такого рода свойство должно описываться в аксиомах. Логические недостатки аксиоматики Евклида его комментаторы заметили очень давно. Их многочисленные усилия были направлены на устранение пробелов «Начал». В течение почти 2000 лет появлялись под различными

названиями работы, цель авторов которых состояла в «очищении Евклида от всяких пятен». Многие пробелы удалось устранить, но основное пятно, а именно проблема пятого постулата, не поддавалось очищению.

В чем же состояла проблема пятого постулата, почему она возникла и почему вызвала такой большой интерес у последователей Евклида? Можно указать две причины ее возникновения. Первая — сравнительно с остальными постулатами сложный характер его формулировки, похожей по своему смыслу на формулировку теоремы. Вторая — очень позднее его использование. Евклид доказывает 28 утверждений без помощи пятого постулата, и только в 29-м утверждении он впервые используется при доказательстве. Эти соображения ни в коей мере не подвергали сомнению справедливость самого постулата, но подвели к вопросу: *не является ли пятый постулат следствием предыдущих аксиом и предложений?*

В истории математики проблема пятого постулата Евклида сыграла исключительно большую роль. Попытки ее решения привели к созданию неевклидовой геометрии, в первую очередь геометрии Лобачевского, перевернувшей все представления как о реальном физическом пространстве, так и о роли абстрактных математических теорий в его изучении. На протяжении более чем двух тысяч лет после Евклида не было крупных математиков, которые не пытались бы решить эту проблему. Но в их рассуждениях обязательно находился изъян, не доказанное, но используемое утверждение, которое на проверку само оказывалось равносильным пятому постулату. Дадим обзор рассуждений некоторых ученых, пытавшихся решить проблему пятого постулата.

Доказательство Посидония

Уроженец Сирии, работавший в Риме, философ, астроном и математик Посидоний (около 135–50 гг. до н. э.) положил в основу своих рассуждений следующее определение параллельных линий: «Параллельными называются такие прямые, которые находятся в одной плоскости, не сближаются и не удаляются, так что все перпендикуляры, проведенные к одной из них из точек другой, равны

между собой». Это определение основывается на том, что множество точек плоскости, расположенных в одной полуплоскости от данной прямой и равноудаленных от нее, представляет собой прямую линию. Такое предположение, как будет доказано в дальнейшем, равносильно пятому постулату Евклида. Судя по всему, Посидоний основывался на идеях, изложенных в трактате Архимеда «О параллельных линиях». Сам этот трактат не дошел до нас, он известен из комментариев арабских математиков X–XI веков до н. э. Его принято считать первым сочинением, посвященным проблемам теории параллельных прямых, появившимся через несколько десятилетий после «Начал» Евклида.

Доказательство Прокла

Рассмотрим попытки доказательства указанного утверждения греческим математиком Проклом (410–475 гг. н. э.). Пусть даны две прямые l_1 и l_2 , пересеченные третьей l_3 , составляющей с данными углы α и β , сумма которых меньше двух прямых углов (рис. 50). Проведем через точку B прямую l , составляющую угол α с l_3 . Прямые l и l_1 не пересекаются.

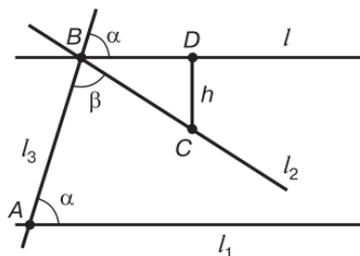


Рис. 50

Этот факт, как будет показано позже, доказывается без использования пятого постулата. Возьмем точку C на прямой l_2 , опустим из нее перпендикуляр CD на l и будем бесконечно удалять точку C по прямой l_2 от точки B . При этом расстояние $h = |CD|$ будет бесконечно возрастать и со временем станет больше расстояния между прямыми l и l_1 . Поэтому данные прямые пересекутся.

В этих рассуждениях содержится два неявных допущения: *расстояние от одной стороны острого угла до другой по мере удаления от вершины, неограниченно возрастает*; *расстояние между двумя непересекающимися прямыми на плоскости ограничено*. Первое допущение Прокл считал очевидным, но оно доказывается без использования пятого постулата, а второе утверждение эквивалентно этому постулату.

Теория параллельных линий Омара Хайяма

Математик, астроном и философ, известный нам как великолепный поэт, автор бессмертных «Рубай», Омар Хайям (1048–1131) посвятил теории параллельных линий первую книгу своих «Комментариев к трудностям во введениях книги Евклида». Основываясь на правилах формальной логики Аристотеля, он предпринял попытку существенно улучшить аксиоматику Евклида. Вместо 29-го предложения «Начал» (именно с него начинается изложение теории параллельных линий) Хайям строит четырехугольник $ABCD$, который имеет два прямых угла A и D , прилежающих к стороне AD , и равные боковые стороны AB и CD (рис. 51). Эта фигура сыграла важную роль в истории создания неевклидовой геометрии, ее обычно называют четырехугольником Саккери.

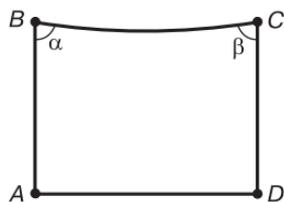


Рис. 51

Хайям доказывает, что углы α и β равны между собой, и подробно рассматривает так называемые гипотезы прямого, тупого и острого углов (α и β — прямые, тупые или острые углы). На рисунке 51 изображен случай гипотезы острого угла. Достаточно строго была опровергнута гипотеза тупого угла. Неявное предположение, равносильное рассуждениям Прокла, привело к опровержению гипотезы острого угла. Хайям доказал, что гипотеза прямого угла равносильна пятому постулату Евклида. Таким образом, неявное логическое допущение позволило Хайяму считать решенной проблему пятого постулата. Теория параллельных линий Хайяма была первой в истории, в которой пятый постулат доказывался не на «постулировании основания», а при использовании другого, более наглядного предположения.

Теория параллельных линий Валлиса

Крупнейший математик XVII века Джон Валлис (1616–1703) в своем трактате «О пятом постулате и пятом определении в книге Евклида, геометрическое рассуждение» приводит свое доказательство пятого постулата Евклида. При этом он вводит следующий постулат: «Для всякой

фигуры возможна подобная ей фигура произвольной величины». Валлис обосновывает естественность этого предположения ссылкой на третий постулат Евклида: «Из любого центра можно описать окружность любым радиусом». Рассуждения Валлиса проводились по следующей схеме. Пусть даны две прямые l и m , пересеченные третьей прямой n , так что сумма внутренних односторонних углов меньше двух прямых углов (рис. 52). Проведем через точку A' пересечения прямых l и m прямую l' , параллельную l , и сместим ее на достаточно малое расстояние по направлению к прямой l . Мы получим треугольник $A'A''B$. Так как существует треугольник, подобный построенному со стороной $A'C$, то прямая l пересекает прямую m . Ошибка в этих рассуждениях состоит в самом предположении о существовании треугольника, подобного данному. Оно равносильно пятому постулату Евклида.

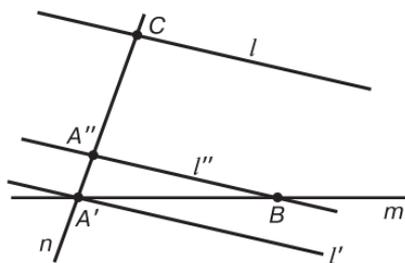


Рис. 52

Теория параллельных линий Саккери

В 1773 году в Милане была издана книга «Евклид, очищенный от всяких пятен, или Геометрическая попытка установить самые первые начала всей геометрии», ставшая важным шагом на пути открытия неевклидовой геометрии. Ее автором был Джироламо Саккери (1667–1773). В книге подвергнуто критике доказательство пятого постулата Евклида, проведенное Джоном Валлисом. Затем Саккери рассматривает тот же четырехугольник с равными боковыми сторонами и двумя прямыми углами при основании, что и Омар Хайям (см. рис. 51). Опровергнув гипотезу тупого угла и доказав, что гипотеза прямого угла равносильна пятому постулату Евклида, Саккери исследует гипотезу

острого угла и получает достаточно много утверждений, справедливых в геометрии Лобачевского. Исследуя взаимное расположение двух непересекающихся прямых, он доказывает, что либо две прямые имеют единственный общий перпендикуляр и бесконечно удаляются друг от друга по обе его стороны, либо бесконечно удаляются с одной стороны и асимптотически приближаются друг к другу с другой. В этом случае он считает, что прямые касаются друг друга в бесконечности, из чего и заключает, что «гипотеза острого угла совершенно ложна, так как противоречит природе прямых линий».

Чувствуя шаткость такого вывода, Саккери рассматривает множество точек, равноудаленных от прямой. Он доказывает, что при гипотезе острого угла оно представляет собой кривую линию. При вычислении длины дуги этой линии с помощью бесконечно малых им была допущена ошибка, из которой следует, что длина этой дуги равна расстоянию между основаниями перпендикуляров, опущенных из ее концов на прямую. Получив такое противоречие, Саккери вновь объявляет гипотезу острого угла опровергнутой. Свои рассуждения он заканчивает замечанием, показывающим его неудовлетворенность проделанными рассуждениями: «Не могу не указать здесь разницу между приведенными опровержениями обеих гипотез. При гипотезе тупого угла все ясно, как свет божий. Между тем опровергнуть гипотезу острого угла не удастся иначе, как доказав, что длина криволинейной дуги равна длине прямолинейного базиса».

Теория параллельных линий Ламберта

Иоганн Генрих Ламберт (1728–1777) — известный математик XVIII века, прославившийся доказательством иррациональности чисел π и e , в 1776 году опубликовал трактат «Теория параллельных линий», в котором он рассматривал трипрямоугольник, четырехугольник с тремя прямыми углами. Предполагая, что четвертый угол может быть прямым, тупым или острым, Ламберт так же, как Саккери, доказывает, что гипотеза прямого угла равносильна пятому постулату Евклида, гипотеза тупого угла противоречит евклидовой геометрии и отмечает, что она справедлива в сферической геометрии. Исследуя гипотезу острого угла,

он доказывает больше утверждений, справедливых в геометрии Лобачевского, чем те, которые были доказаны Саккери. Наиболее важными из них являются следующие: если имеет место гипотеза острого угла, то сумма углов треугольника меньше двух прямых углов, существует абсолютная мера измерения отрезков и площадей фигур, отсутствует подобие. Исследуя аналогии, которые возникают при доказательствах соответствующих утверждений при гипотезах тупого и острого углов, Ламберт делает поразительное заключение: «Я почти должен бы сделать вывод, что третья гипотеза (гипотеза острого угла) имеет место на некоторой мнимой сфере. По меньшей мере, должно же быть что-то, из-за чего она на плоскостях так долго не дает себя опровергнуть, как это имело место при второй гипотезе (гипотезе тупого угла)». С современной точки зрения, Ламберт в общем-то прав. Существует модель плоскости Лобачевского на сфере мнимого радиуса, но не в евклидовом, а так называемом трехмерном псевдоевклидовом пространстве. Оставаясь твердо уверенным в том, что геометрия Евклида является единственной непротиворечивой, Ламберт не смог найти противоречия в гипотезе острого угла и пришел к выводу, что все попытки доказательства пятого постулата не будут успешными.

Попытки Лежандра доказательства пятого постулата Евклида

Адриан Мари Лежандр — крупный французский математик конца XVIII и начала XIX веков (1753–1833), член Парижской академии наук, профессор Высшей политехнической школы, знаменитой высшей школы для подготовки инженеров. В 1774 году вышло первое издание его сочинения «Начала геометрии», которое, по мысли автора, представляло собой пособие по геометрии, которое должно было заменить «Начала» Евклида как учебник в школе. В конце XVIII и начале XIX веков вышло несколько изданий «Начал геометрии», последнее издание датируется 1823 годом. Практически в каждом издании учебника Лежандр предпринимал безуспешные попытки доказательства пятого постулата Евклида. При этом им были исследованы важнейшие свойства суммы углов треугольника и установлена зависимость между пятым постулатом Евклида

и утверждением, что эта сумма равна двум прямым углам. Без использования пятого постулата и следствий из него Лежандр доказал, что сумма углов треугольника не может превышать двух прямых углов, и, если сумма углов какого либо треугольника равна двум прямым, то на плоскости сумма углов любого другого треугольника также совпадает с двумя прямыми углами и, следовательно, выполняется условие пятого постулата Евклида. Большинство «доказательств» Лежандра пятого постулата Евклида были связаны с безуспешными построениями без использования теории параллельных линий примера треугольника, сумма углов которого равна двум прямым. Исследования Лежандра, несмотря на допущенные ошибки, благодаря широкому распространению его учебника, оказали существенное влияние на открытие неевклидовой геометрии.

Открытие неевклидовой геометрии

Многовековые попытки доказательства пятого постулата Евклида привели в начале XIX века к открытию новой геометрической теории. Почти одновременно идея о ее существовании была высказана тремя великими математиками того времени К. Ф. Гауссом, Я. Бойяи и Н. И. Лобачевским. Впервые об открытии новой геометрии заявил Николай Иванович Лобачевский (1793–1856). В 1826 году им было сделано сообщение на заседании отделения физико-математических наук Казанского университета под названием «Сжатое изложение начал геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных». В 1829 году он опубликовал свои результаты в работе «О началах геометрии». Заменив аксиому параллельности евклидовой геометрии на ее отрицание, Н. И. Лобачевский построил новую геометрическую теорию, названную им «Воображаемой геометрией», которая в настоящее время носит название «Геометрия Лобачевского». Затем на протяжении тридцати лет им было опубликовано несколько трудов, в которых развивались идеи, заложенные в первой работе, и искались приложения этой теории к другим областям математики. В первую очередь заслуга великого русского математика состоит в том, что он первый заявил о возможности существования геометрического пространства, отличного от евклидова. Следует отметить, что работы Лобачевского не

встретили понимания у математиков того времени. Известно крайне резкое отрицательное мнение об этом открытии академика М. И. Остроградского, который, по сути, инспирировал публикации в реакционных журналах, направленные и против самого Н. И. Лобачевского, и против его открытия. Своим авторитетом М. И. Остроградский существенно замедлил процесс признания великой математической теории.

Как уже отмечалось, практически одновременно к тем же идеям о существовании геометрического пространства, отличного от евклидова, пришел замечательный венгерский математик Янош Бойяи (1802–1860). Его отец, известный математик Фаркаш Бойяи, всю свою жизнь занимался проблемой пятого постулата. В дальнейшем мы исследуем одно из положений, с помощью которых он пытался доказать пятый постулат Евклида. Узнав о научных увлечениях своего сына, он писал ему: «Молю тебя, не делай попыток одолеть теорию параллельных линий. Я изучил все пути до конца и не встретил ни одной идеи, которая не была бы разработана мною. Я прошел весь беспросветный мрак этой ночи и всякий светоч, всякую радость жизни я в ней похоронил». Однако Янош, вопреки воле отца, продолжал работать над новыми геометрическими идеями. В 1823 году, будучи молодым, двадцатиоднолетним инженером венгерской армии, он писал отцу: «В настоящее время я еще не достиг цели, но получил такие замечательные результаты, что было бы чрезвычайно жаль, если бы они погибли. Когда Вы с ними познакомитесь, то сами признаете это. Пока скажу: я из ничего создал целый мир».

В 1832 году вышла в свет книга Фаркаша Бойяи, в которой в качестве приложения была напечатана работа его сына с изложением основ новой геометрической теории, открытых, судя по всему, в 1826 году. Книга была написана на латинском языке, приложение по латыни — *appendix*, поэтому труд Яноша Бойяи получил в литературе название «Аппендикс». Он был написан чрезвычайно кратко, с применением большого числа условных обозначений. Если сравнивать труды Н. И. Лобачевского и «Аппендикс» Я. Бойяи, то можно сказать, что Лобачевский продвинулся в изучении геометрических свойств нового пространства существенно дальше и первым опуб-

ликовал свои результаты. Поэтому приоритет Н. И. Лобачевского здесь бесспорен, хотя в «Аппендиксе» содержатся исследования по геометрическим свойствам треугольников и так называемым «пределным кривым», которые гораздо глубже соответствующих исследований, опубликованных Лобачевским.

Великий Карл Фридрих Гаусс (1777–1855), которого современники называли королем математики, начал интересоваться теорией параллельных линий в 1792 году. Известна его обширная переписка с друзьями, в которой он обсуждал проблемы пятого постулата. Познакомившись в 1832 году с «Аппендиксом» Я. Бойяи, он писал его отцу: «Хвалить ее (работу) значило бы хвалить самого себя: все содержание сочинения, весь путь, по которому твой сын пошел, и результаты, которые он получил, сплошь совпадают с моими собственными, имеющими частично давность в 30–35 лет. Я, действительно, этим в высшей степени поражен. Мои намерения были ничего при жизни не публиковать о моей собственной работе, которая, впрочем, до настоящего времени мало нанесена на бумагу». Гаусс был знаком с трудами Н. И. Лобачевского и очень высоко отзывался о них. Познакомившись с переводом одного из них, он принялся специально изучать русский язык, чтобы прочитать в подлиннике остальные работы. Таким образом, придя гораздо раньше Лобачевского и Бойяи к идеям новой геометрической теории, Гаусс не стал публиковать свои результаты, опасаясь быть непонятым.

В 1868 году итальянский математик Эуджинио Бельтрами (1835–1900) в работе «Об опыте интерпретации неевклидовой геометрии» доказал замечательный факт, что геометрия Лобачевского осуществляется на поверхностях постоянной отрицательной кривизны (псевдосферах). Бельтрами установил также, что точки псевдосферы можно взаимно однозначно отобразить на внутренние точки круга, при этом геодезическим линиям (т. е. прямым в интерпретации геометрии Лобачевского на псевдосфере) соответствуют хорды круга. Бельтрами не вывел формулы для вычисления расстояния между точками в этой модели и не исследовал, как интерпретируются движения. Однако эта модель позволила создать первое доказательство непротиворечивости планиметрии Лобачевского.

В 1872 году молодой немецкий математик Феликс Клейн, профессор Эрлангенского университета, в работе «О так называемой неевклидовой геометрии», опираясь на результаты английского математика Артура Кэли, построил интерпретацию геометрии Лобачевского на проективной плоскости. Им было дано полное геометрическое исследование свойств геометрии Лобачевского на этой модели и было установлено, что интерпретация Бельтрами в круге на евклидовой плоскости является ее частным случаем. Таким образом, вопрос о непротиворечивости геометрии Лобачевского был полностью закрыт.

Геометрия Лобачевского оказала огромное влияние на формирование современного взгляда на геометрию как абстрактную, аксиоматическую науку и одновременно как на геометрию реального физического пространства, описывающую объективные, природные закономерности. Анализ проблемы пятого постулата Евклида показывает, что ее основа заложена в процессе исследования системы аксиом евклидова пространства. В конце 60-х годов XIX века, когда идеи Лобачевского получили полное признание, задача построения логически безупречной основы евклидовой геометрии стала особенно актуальной. К концу XIX века было опубликовано много работ, посвященных этому вопросу, но наиболее полное и ясное решение проблемы обоснования евклидовой геометрии было изложено в знаменитой книге Давида Гильберта «Основания геометрии». Она была опубликована в 1899 году и в 1903 году была удостоена Международной премии имени Н. И. Лобачевского. В книге приведен полный, достаточно простой и ясный перечень аксиом трехмерного евклидова пространства, а также проведен их анализ, т. е. установлена их непротиворечивость, независимость основных аксиом и их полнота. Исследованию аксиоматик евклидовой геометрии будут посвящены разделы настоящей главы.

§ 9. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ АКСИОМАТИКИ. ТРЕБОВАНИЯ, ПРЕДЪЯВЛЯЕМЫЕ К СИСТЕМАМ АКСИОМ

Прежде чем перейти к изучению довольно громоздких и сложных систем аксиом евклидовой геометрии, необходимо обсудить общие понятия аксиоматической теории

и рассмотреть их основные свойства. При этом в качестве примеров мы будем использовать более простые и известные читателю аксиоматические системы. Мы не будем обращаться к громоздкому и сложному аппарату математической логики, поскольку такой метод исследования выходит за круг интересующих нас вопросов. Для доказательства теорем будет достаточно интуитивного представления о правилах логических выводов. Аксиоматики, для которых логические аксиомы и правила вывода явно не оговариваются, называют неформальными или содержательными. Таким образом, в настоящем разделе все рассуждения проводятся в рамках содержательных аксиоматических теорий с использованием языка теории множеств.

Предварительно напомним несколько необходимых нам теоретико-множественных понятий.

Определение 1. Пусть имеются произвольные множества: M_1, M_2, \dots, M_n , тогда их декартовым (или прямым) произведением $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ называют множество, состоящее из всех упорядоченных наборов элементов вида (x_1, x_2, \dots, x_n) , где $x_i \in M_i$ при $i = 1, 2, \dots, n$.

Иначе говоря, декартово произведение — это множество всех упорядоченных наборов из n элементов, взятых по одному из каждого множества M_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Напомним понятие n -местного или n -арного отношения. Формальному определению предположим краткую иллюстрацию этого понятия. Рассмотрим хорошо известное двуместное (или бинарное) отношение « \leq », взятое на множестве действительных чисел \mathbb{R} . Для того чтобы определить это отношение, можно задать его график, т. е. множество всех упорядоченных пар (x, y) действительных чисел, для которых справедливо неравенство $x \leq y$. Для обозначения того факта, что число x не превосходит числа y , наряду с привычной записью $x \leq y$, мы будем пользоваться также записью $(x, y) \in \leq$, отождествляя отношение с его графиком. Другими словами, график бинарного отношения « \leq » представляет собой подмножество в декартовом произведении $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Такой способ задания отношений и положен в основу следующего определения.

Определение 2. Пусть имеется несколько произвольных множеств M_1, M_2, \dots, M_n , тогда любое подмноже-

ство r декартова произведения $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ будем называть n -местным (n -арным) отношением, заданным на этих множествах.

Запись $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in r$ означает, что элементы (x_1, x_2, \dots, x_n) находятся в отношении r или, иначе, $r(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — истинно. Некоторые из множеств M_1, M_2, \dots, M_n могут совпадать. В частности, в случае совпадения всех данных множеств $M_1 = M_2 = \dots = M_n = M$ говорят, что задано n -местное отношение на множестве M . В частности отношение может быть одноместным, оно определяется подмножеством на множестве M .

Приведем пример одноместного отношения. Рассмотрим множество натуральных чисел \mathbb{N} . Обозначим через p подмножество множества \mathbb{N} , состоящее из всех простых чисел. Тогда p является одноместным отношением, заданным на множестве натуральных чисел. Одноместные отношения задают те или иные свойства элементов данного множества.

Рассмотрим операцию сложения, заданную на множестве действительных чисел \mathbb{R} . Эта операция является трехместным (тернарным) отношением на множестве действительных чисел \mathbb{R} , обозначаемая «+». Действительно, для произвольной упорядоченной тройки (x, y, z) действительных чисел положим $(x, y, z) \in +$ в том и только в том случае, если $x + y = z$.

Если среди множеств M_1, M_2, \dots, M_n по крайней мере одно является бесконечным, то бессмысленно изучать все n -арные отношения, заданные на этих множествах, их бесконечно много. Имеет смысл исследовать свойства n -местных отношений, заданных на определенных множествах, удовлетворяющие наперед заданным условиям. Развитие математики, как известно, определяется практическими потребностями. Поэтому математики определяют множества и отношения, удовлетворяющие определенным условиям, а затем изучают полученные структуры. Такой подход к исследованию свойств отношений приводит к определению аксиоматического метода.

Определение 3. Пусть даны n произвольных множеств M_1, M_2, \dots, M_n и k отношений $r_1^{m_1}, r_2^{m_2}, \dots, r_k^{m_k}$, для каждого из которых известно количество m_i ($i = 1, \dots, k$) переменных и упорядоченный набор $(j_1, j_2, \dots, j_{m_i})$ номеров

множеств $M_{j_1}, M_{j_2}, \dots, M_{j_{m_i}}$, на декартовом произведении которых задано отношение $r_i^{m_i}$. Пусть имеется также список утверждений α , в которых говорится только о свойствах множеств M_1, M_2, \dots, M_n и отношений $r_1^{m_1}, r_2^{m_2}, \dots, r_k^{m_k}$. Множества M_1, M_2, \dots, M_n называют основными объектами, отношения $r_1^{m_1}, r_2^{m_2}, \dots, r_k^{m_k}$ — основными отношениями, а список утверждений α — системой аксиом аксиоматической теории T .

Совокупность основных объектов и отношений часто называют основными понятиями аксиоматической теории. Понятия, сформулированные в терминах аксиоматической теории T , утверждения, описывающие свойства понятий и являющиеся теоремами аксиоматической теории, т. е. логическими следствиями аксиом, вместе составляют математическую структуру рода T .

Проиллюстрируем введенное понятие на хорошо известном примере определения группы.

Пример 1 (аксиоматика группы). Группой называется произвольное множество G , на котором задано трехместное отношение r^3 , удовлетворяющее следующим аксиомам.

1. Для любой пары элементов $x, y \in G$ существует единственный элемент $z \in G$, такой что $(x, y, z) \in r^3$.
2. (Ассоциативность умножения.) Если x, y и z — произвольные элементы из G , $(x, y, p) \in r^3$, $(y, z, q) \in r^3$, $(p, z, t) \in r^3$ и $(x, q, n) \in r^3$, то справедливо равенство $t = n$.
3. (Существование правой единицы.) Существует элемент $e \in G$ такой, что для любого $x \in G$ справедливо равенство $(x, e, x) \in r^3$.
4. (Существование правого обратного элемента.) Для любого элемента $x \in G$ существует элемент из множества G , обозначаемый через x^{-1} , для которого $(x, x^{-1}, e) \in r^3$.

Первая аксиома утверждает, что отношение r^3 задает бинарную операцию на множестве G , которая называется умножением. Единственный элемент z , отвечающий паре (x, y) , называется произведением элементов x и y и обозначается через xy . Условие $(x, y, z) \in r^3$ обычно записывается

в виде $z = xy$. Требования аксиом 2–4 можно записать в привычной для нас форме: ассоциативность умножения — $(xy)z = x(yz)$, существование правой единицы — $xe = x$, и существование правого обратного элемента — $xx^{-1} = e$.

В этом примере имеется единственное множество основных объектов G и единственное основное отношение r^3 , определяющее операцию умножения. Отметим, что в учебниках по теории групп при формулировке аксиом говорится прямо об алгебраической операции, которая подразумевает единственность результата произведения двух элементов. В этом случае приведенная выше аксиома 1 становится лишней. Теоремами рассматриваемой аксиоматической теории являются известные теоремы теории групп.

Из курсов алгебры, теории чисел и математического анализа хорошо известны примеры других аксиоматических теорий: кольца, поля, векторного пространства, натуральных и действительных чисел.

Возвращаясь к общему определению аксиоматики, обратим внимание на следующие два обстоятельства. Во-первых, множества основных объектов и основных отношений являются произвольными, и их природа не имеет значения для построения аксиоматики. Во-вторых, мы пользуемся интуитивным представлением о доказательстве, не формализуя используемые нами логические понятия. Оба отмеченных обстоятельства определяют наш подход к исследованию аксиоматик. Поскольку выбор основных множеств и отношений ничем, кроме аксиом, не ограничен, при исследовании аксиоматики естественно пользоваться конкретными множествами и отношениями, удовлетворяющими системам аксиом, — моделями аксиоматической теории. Так, выбирая в рассмотренном выше примере конкретное множество G и фиксируя на нем операцию умножения, удовлетворяющую системе аксиом 1–4, мы получаем модель этой аксиоматической теории или, попросту говоря, ту или иную группу. Сформулируем общее определение модели или интерпретации системы аксиом.

Определение 4. Пусть имеется аксиоматическая теория с основными множествами M_1, M_2, \dots, M_n , основными отношениями $r_1^{m_1}, r_2^{m_2}, \dots, r_k^{m_k}$ и системой

аксиом α . Будем говорить, что имеется модель (интерпретация) μ этой аксиоматической теории, если выбраны конкретные множества $M_1^0, M_2^0, \dots, M_n^0$, на которых заданы конкретные отношения, соответствующие отношениям $r_k^{m_i}$ и удовлетворяющие всем аксиомам системы α .

Пример 2 (модель аксиоматики группы). Возьмем в качестве множества G множество G_1 , состоящее из двух элементов $\{0, 1\}$. На этом множестве определим операцию умножения, положив произведение двух его произвольных элементов равным их сумме по модулю 2: $0 \cdot 0 = 1 \cdot 1 = 0$, $1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1$. Легко проверить выполнение требований аксиом группы для определенных таким способом множеств основных объектов и отношений. Следовательно, определенные основные объекты и отношения являются моделью системы аксиом группы. Легко построить другие примеры моделей аксиоматики группы. Например, выбирая в качестве G множество \mathbb{R} действительных чисел, а в качестве групповой операции — операцию сложения, получим еще одну модель системы аксиом теории групп — аддитивную группу действительных чисел.

Займемся теперь вопросом логического исследования аксиоматики с помощью ее моделей. Важнейшее требование, которому должна удовлетворять аксиоматика, — требование ее непротиворечивости. Условие непротиворечивости аксиоматики означает невозможность доказательства в рамках данной системы аксиом двух логически противоречащих друг другу утверждений, например некоторого утверждения A и его логического отрицания \bar{A} . Противоречивая аксиоматика бессодержательна, поскольку, как известно из курса математической логики, в ней можно доказать любое утверждение.

Аксиоматика, в которой нельзя доказать два логически противоречивых утверждения, называется *абсолютно непротиворечивой* или просто *непротиворечивой*. Для установления непротиворечивости аксиоматики можно воспользоваться ее моделями. Предположим, что имеется модель некоторой аксиоматической теории, построенная из объектов заведомо непротиворечивой теории. Тогда данная

аксиоматика непротиворечива, так как непротиворечива теория, в которой построена эта модель. В этом случае говорят об *относительной* или *содержательной непротиворечивости* аксиоматики, т. е. ее непротиворечивости при условии непротиворечивости средств, использованных при построении модели. Из курса математической логики известно, что любая непротиворечивая система аксиом имеет модель. Противоречивая аксиоматика, естественно, не может иметь моделей, построенных с использованием корректных средств.

Модели в примере 2 показывают относительную непротиворечивость аксиоматики теории групп. Обратим внимание на существенное различие между этими моделями. Средства, использованные нами при построении первой модели — двухэлементное множество и операция на нем, — столь просты, что данная модель гарантирует абсолютную непротиворечивость аксиоматики теории групп. Вторая же модель использует теорию множества действительных чисел, непротиворечивость которой нуждается в обосновании. Наличие этой модели гарантирует лишь непротиворечивость теории групп при условии непротиворечивости теории действительных чисел.

Рассмотрим следующее логическое свойство системы аксиом. Обратимся снова к двум моделям аксиоматики теории групп, приведенным в примере 2. Возьмем множество G_2 , состоящее из двух элементов $\{-1, 1\}$, определив на нем операцию умножения равенствами $(-1) \cdot 1 = 1 \cdot (-1) = (-1)$, $1 \cdot 1 = (-1) \cdot (-1) = 1$. Получим таким образом третью модель аксиоматики группы. Обратим внимание на схожесть первой и третьей из построенных моделей и их отличие от второй. Действительно, группы первой и третьей моделей изоморфны (проверьте самостоятельно) и, очевидно, не изоморфны группе второй модели. Таким образом, аксиоматика теории групп допускает наличие неизоморфных моделей. В противоположность аксиомам теории групп существуют аксиоматики, любые две модели которых изоморфны. Например, как известно из курса математического анализа, любые две модели аксиоматики действительных чисел изоморфны и в этом смысле можно говорить о единственности множества действительных чисел. Определим понятие изоморфности моделей аксиоматики.

Определение 5. Пусть M_1, M_2, \dots, M_n — основные множества, а r_1, r_2, \dots, r_k — основные отношения некоторой системы аксиом α . И пусть имеются две модели этой системы аксиом, включающие множества $M_1^1, M_2^1, \dots, M_n^1$, отношения $r_1^1, r_2^1, \dots, r_k^1$, и множества $M_1^2, M_2^2, \dots, M_n^2$ с заданными на них отношениями $r_1^2, r_2^2, \dots, r_k^2$ соответственно¹⁾. Будем говорить, что эти две модели изоморфны, если существуют взаимно однозначные отображения $f_1: M_1^1 \rightarrow M_1^2, f_2: M_2^1 \rightarrow M_2^2, \dots, f_n: M_n^1 \rightarrow M_n^2$ такие, что $(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{m_i}}) \in r_i^1$ тогда и только тогда, когда $(f_1(x_{j_1}), f_2(x_{j_2}), \dots, f_{m_i}(x_{j_{m_i}})) \in r_i^2$ при всех $i = 1, \dots, n$.

Определение 6. Непротиворечивая система аксиом называется категоричной, если две любые ее модели изоморфны, и некатегоричной в противном случае.

В математике изучаются как категоричные, так и некатегоричные аксиоматики. К последним относятся уже упоминавшиеся теории групп, колец, полей, различных геометрических и функциональных пространств и др. Для современной математики характерно изучение некатегоричных аксиоматик, предоставляющих широкую область их применения. Напротив, изучавшиеся аксиоматические теории натуральных, действительных, комплексных чисел, трехмерного евклидова пространства и ряд других категоричны, что обеспечивает уникальность этих числовых систем и геометрических пространств.

С понятием категоричности аксиоматики тесно связано другое ее логическое свойство, называемой полнотой (точнее, дедуктивной полнотой). Для иллюстрации этого понятия обратимся к следующему примеру.

Рассмотрим утверждение A : для любых элементов x и y группы справедливо равенство $xy = yx$. Это утверждение означает хорошо известное свойство коммутативности группы. Как мы сейчас покажем, утверждение A не является логическим следствием аксиоматики групп. Вместе с тем его отрицание также не является логическим следствием

¹⁾ Условимся для удобства записи в этом определении количество переменных каждого отношения опускать, а в качестве верхнего индекса для основных множеств и отношений указывать номер модели, в данном случае 1 или 2.

этой аксиоматики. Иначе говоря, утверждение A не является ни истинным, ни ложным в теории групп, и установить это несложно с помощью построения соответствующих моделей.

Действительно, во всех построенных выше моделях утверждение A имеет место, т. е. все рассмотренные группы абелевы (коммутативные). Это, очевидно, означает, что отрицание A не является логическим следствием из аксиом группы. С другой стороны, существуют неабелевы группы. Например, группа подстановок третьей степени или группа невырожденных квадратных матриц порядка выше первого относительно умножения. Таким образом, имеются модели аксиоматики группы, для которых утверждение A несправедливо или, что то же самое, имеет место отрицание A . Последнее, очевидно, означает, что утверждение A не является логическим следствием из аксиом группы. Сформулируем определение (дедуктивной) полноты.

Определение 7. *Непротиворечивая система аксиом называется (дедуктивно) полной, если для любого утверждения, выраженного с помощью ее основных понятий, либо это утверждение, либо его отрицание является логическим следствием (иначе говоря, выводится из) этой системы аксиом.*

Между полнотой и категоричностью системы аксиом имеется связь, а именно, категоричность аксиоматики влечет ее полноту. Действительно, рассуждая от противного, в силу определения 7 получим, что если категоричная система аксиом α не является полной, то найдется утверждение A , выраженное с помощью основных понятий аксиоматики, такое, что ни утверждение A , ни его отрицание \bar{A} не являются следствиями аксиом. Иначе говоря, каждая из систем аксиом $\alpha \cup \{A\}$, $\alpha \cup \{\bar{A}\}$, получающихся последовательным присоединением к исходной системе утверждений A и \bar{A} в качестве дополнительной аксиомы, является непротиворечивой. Следовательно, как было отмечено выше, обе системы аксиом имеют модели, которые являются также моделями системы аксиом α . Эти модели, очевидно, не могут быть изоморфными, поскольку в одной из них имеет место утверждение A , а в другой — \bar{A} . Получили противоречие. Следовательно, категоричная система аксиом

является полной. Обратное, вообще говоря, неверно. Не приводя примеров, отметим, что существуют дедуктивно полные системы аксиом, не являющиеся категоричными.

Определение 8. Пусть даны две аксиоматические теории T_1 и T_2 . Если в терминах аксиоматической теории T_1 можно построить модель теории T_2 и, наоборот, в терминах аксиоматической теории T_2 можно построить модель теории T_1 , то такие аксиоматические теории называются эквивалентными.

Эквивалентность аксиоматических теорий можно установить в том случае, если в терминах теории T_1 можно ввести основные понятия и отношения аксиоматической теории T_2 и доказать как теоремы все утверждения аксиом теории T_2 , и, наоборот, в терминах аксиоматической теории T_2 ввести основные понятия и отношения теории T_1 и доказать в качестве теорем утверждения ее аксиом. Тогда в любой интерпретации аксиоматической теории T_1 существуют основные объекты и основные отношения и выполняются аксиомы аксиоматики теории T_2 и, наоборот, такое же свойство справедливо и в аксиоматической теории T_2 . Очевидно, что эквивалентные аксиоматические теории обладают одними и теми же свойствами непротиворечивости и полноты. Они приводят к одной и той же математической структуре.

При построении аксиоматической теории желательно обойтись минимальным набором аксиом, не включающим утверждений, являющихся логическим следствием других аксиом. Это требование и приводит к понятию независимой системы аксиом.

Определение 9. Пусть имеется непротиворечивая система аксиом α и некоторая аксиома A этой системы. Аксиома A называется независимой, если она не является логическим следствием системы аксиом α' , полученной из системы α удалением из нее аксиомы A . Непротиворечивая система аксиом называется независимой, если каждая ее аксиома является независимой.

Легко показать, что независимость аксиомы A системы аксиом α эквивалентна непротиворечивости системы аксиом β , полученной из системы α заменой аксиомы A

ее отрицанием \bar{A} . Поэтому для доказательства независимости аксиомы A достаточно построить модель системы аксиом β .

Действительно, пусть дана непротиворечивая аксиоматика, систему аксиом которой составляют утверждения A, A_1, A_2, \dots, A_n . Предположим, что аксиома A является логическим следствием аксиом A_1, A_2, \dots, A_n . Так как исходная аксиоматика непротиворечива, то существует модель M_1 системы аксиом A, A_1, A_2, \dots, A_n . Эта же модель M_1 — интерпретация системы аксиом A_1, A_2, \dots, A_n , которая также непротиворечива. Утверждение аксиомы A является теоремой в аксиоматике A_1, A_2, \dots, A_n . Если предположить, что аксиоматика β , систему аксиом которой составляют утверждения \bar{A}, A_1, \dots, A_n , также непротиворечива, то существует ее модель M_2 , которая является моделью аксиом A_1, A_2, \dots, A_n . Но в модели M_2 может быть доказано утверждение A , которое логически противоположно утверждению \bar{A} . Поэтому система аксиом A_1, A_2, \dots, A_n является противоречивой, что не соответствует условию.

Докажем, к примеру, независимость 4-й аксиомы (существование обратного элемента) аксиоматики группы из примера 1. Для этого рассмотрим аксиоматику, систему аксиом которой составляют первые три аксиомы примера 1, а четвертая аксиома заменена ее логическим отрицанием: $\bar{4}$).

Существует, по крайней мере, один элемент $x \in G$, для которого во множестве G нельзя найти элемент y такой, что $xy = e$.

Рассмотрим множество натуральных чисел с операцией умножения. Это множество с введенной на нем обычной операцией умножения, как нетрудно видеть, является моделью аксиоматики группы. В этой модели выполняются все требования аксиом 1, 2 и 3, единицей является число 1, при этом не выполнена аксиома 4 для любого натурального числа за исключением 1.

Независимость аксиоматики является ее существенной логической характеристикой. Однако построить нужную модель, доказывающую независимость той или иной аксиомы, далеко не всегда так просто, как в рассмотренном нами примере. В некоторых случаях ее построе-

ние составляет математическое открытие, как это было с моделью, доказывающей независимость пятого постулата Евклида.

§ 10. СИСТЕМА АКСИОМ ГИЛЬБЕРТА ТРЕХМЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА. ОБЗОР СЛЕДСТВИЙ АКСИОМ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ И ПОРЯДКА

Мы приступаем к изучению аксиоматик, лежащих в основе элементарной геометрии. О классической аксиоматике трехмерного евклидова пространства, предложенной великим немецким математиком Давидом Гильбертом в 1899 году, уже упоминалось в § 8.

Основные объекты представляют собой элементы трех множеств: множества точек, множества прямых и множества плоскостей. Еще раз следует подчеркнуть, что при построении аксиоматической теории природа основных объектов не имеет никакого значения. Для построения геометрии евклидова пространства абсолютно не существенно, что мы будем понимать под точками, прямыми и плоскостями, необходимо, чтобы они вместе с основными отношениями удовлетворяли требованиям аксиом. Структура системы аксиом Гильберта довольно сложна, она традиционно подразделяется на пять групп:

- первая группа аксиом, аксиомы принадлежности, состоит из 8 аксиом;
- вторая группа аксиом, аксиомы порядка — 4 аксиомы;
- третья группа аксиом, аксиомы конгруэнтности — 5 аксиом;
- четвертая группа аксиом, аксиомы непрерывности — 2 аксиомы;
- пятая группа аксиом, аксиомы параллельности — 1 аксиома.

В настоящем параграфе будут сформулированы аксиомы первых двух групп и рассмотрены основные следствия из них. Первые три группы аксиом описывают свойства основных отношений аксиоматики: принадлежности, «лежать между» и конгруэнтности. Сами основные отношения будут определяться нами последовательно при изучении соответствующих групп аксиом.

Аксиомы принадлежности

Обозначим множество точек через M , множество прямых через L , а множество плоскостей через P . На декартовых произведениях $M \times L$, $M \times P$ и $L \times P$ введем бинарные отношения σ_1 и σ_2 , которые будем называть *отношениями принадлежности*. Если точка A и прямая l находятся в отношении σ_1 , т. е. пара $(A, l) \in \sigma_1$, будем говорить, что точка A принадлежит или лежит на прямой l , или, что то же самое, прямая l проходит через точку A или ее содержит. Аналогично, если A — точка, а π плоскость и $(A, \pi) \in \sigma_2$, то будем использовать следующую терминологию: точка принадлежит плоскости, точка лежит на плоскости, плоскость содержит точку или плоскость проходит через эту точку. Точки, прямые и плоскости должны удовлетворять следующим аксиомам.

- I₁. Каковы бы ни были две точки¹⁾ A и B , существует прямая a , проходящая через эти две точки.
- I₂. Каковы бы ни были две точки A и B , существует не более одной прямой a , проходящей через эти две точки.
- I₃. На каждой прямой лежат по крайней мере две точки. Существует, по крайней мере, три точки, не принадлежащие одной прямой.
- I₄. Каковы бы ни были три точки A, B и C , не лежащие на одной прямой, существует плоскость α , проходящая через эти три точки. На каждой плоскости лежит по крайней мере одна точка.
- I₅. Каковы бы ни были три точки, не лежащие на одной прямой, существует не более одной плоскости, содержащей эти точки.
- I₆. Если две точки A и B прямой a лежат в плоскости α , то любая точка, принадлежащая прямой a , принадлежит плоскости α .
- I₇. Если две плоскости α и β имеют общую точку A , то существует по крайней мере еще одна точка B , принадлежащая этим плоскостям.

¹⁾ Здесь и далее в случае, когда говорится о двух точках, двух прямых или двух плоскостях, то предполагается, что эти геометрические объекты различны.

I_8 . Существует, по крайней мере, четыре точки, не лежащие в одной плоскости.

Как следует из аксиомы I_6 , прямая принадлежит плоскости в том и только в том случае, когда по крайней мере две ее точки принадлежат плоскости.

Аксиомы принадлежности позволяют доказать весьма ограниченное число утверждений, раскрывающих свойства точек, прямых и плоскостей. Они достаточно хорошо известны из школьного курса геометрии, причем, в силу своей очевидности, большинство из них в школе не доказывается. Приведем также без доказательства некоторые из них.

- 1°. Две прямые имеют не более одной общей точки.
- 2°. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую.
- 3°. Через прямую и не лежащую на ней точку проходит одна и только одна плоскость.
- 4°. Через две пересекающиеся прямые проходит одна и только одна плоскость.
- 5°. На каждой плоскости существуют три точки, не лежащие на одной прямой.

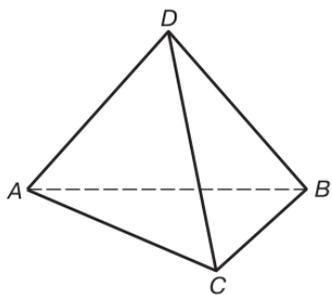


Рис. 53

Из аксиом первой группы не следует, что множество основных элементов — точек, прямых и плоскостей — бесконечно. Рассмотрим модель, доказывающую это утверждение. Пусть дано множество, состоящее из четырех элементов: A , B , C и D . Для наглядности расположим их в вершинах тетраэдра (рис. 53). Под точками будем понимать элементы A , B , C и D (вершины тетраэдра), под прямыми — неупорядоченные пары элементов AB , AC , AD ,

BC , BD и CD (ребра тетраэдра), а под плоскостями — неупорядоченные тройки этих элементов ABC , ABD , ACD и BCD (грани тетраэдра). Точка принадлежит прямой или плоскости, если она входит в соответствующую пару или тройку точек. Выполнение требований аксиом I_1 – I_8 проверяется достаточно просто. Например, рассмотрим требование аксиомы I_7 . Очевидно, оно выполняется, так как

в тетраэдре, если две грани имеют общую вершину, то они пересекаются по ребру, т. е. имеют еще одну общую вершину. Выполнение остальных аксиом проверьте самостоятельно.

Аксиомы порядка

На декартовом произведении $M \times M \times M$, где M — множество точек, введем трехместное отношение δ . Если упорядоченная тройка точек (A, B, C) принадлежит этому отношению, то будем говорить, что точка B лежит между точками A и C , и использовать при этом обозначение $A - B - C$. Введенное отношение должно удовлетворять следующим аксиомам.

- II₁. Если точка B лежит между точками A и C , то A, B, C — три различные точки одной прямой, и точка B лежит между точками C и A .
- II₂. Каковы бы ни были точки A и B , существует по крайней мере одна точка C такая, что B лежит между A и C .
- II₃. Среди любых трех точек прямой существует не более одной, лежащей между двумя другими.

Для формулировки последней, четвертой аксиомы второй группы удобно ввести следующие понятие.

Определение 1. *Отрезком (по Гильберту) называется пара точек AB .*

Точки A и B носят название *концов отрезка*, точки, лежащие между его концами, — *внутренних точек отрезка*, или *просто точек отрезка*, а точки прямой AB , не лежащие между концами A и B , — *внешних точек отрезка*.

Заметим, что из аксиом II₁–II₃ не следует, что отрезок имеет внутренние точки. Из аксиомы II₂ вытекает, что у любого отрезка есть внешние точки. Сформулируем последнюю, четвертую аксиому второй группы.

- II₄ (*аксиома Паша*¹⁾). Пусть A, B и C — три точки, не лежащие на одной прямой, а l — прямая плоскости

¹⁾ Мориц Паш (1884–1930) — немецкий математик, разрабатывавший логические основы евклидовой геометрии. В его книге «Лекции по новой геометрии», опубликованной в Лейпциге в 1882 году, были впервые сформулированы аксиомы порядка, в дальнейшем существенно переработанные и упрощенные Д. Гильбертом.

ABC , не проходящая через эти точки. Тогда, если прямая l проходит через точку отрезка AB , то она содержит либо точку отрезка AC , либо точку отрезка BC .

Другими словами, если прямая l , не проходящая через вершины треугольника, пересекла внутреннюю точку отрезка AB и «вошла» в треугольник ABC , то она должна из него «выйти» через внутреннюю точку либо отрезка AC , либо отрезка BC .

Из аксиом первой и второй групп вытекает достаточно много геометрических свойств точек, прямых и отрезков. Можно доказать, что любой отрезок имеет по крайней мере одну внутреннюю точку; среди трех точек прямой всегда существует одна и только одна точка, лежащая между двумя другими; между двумя точками прямой всегда существует бесконечно много точек, откуда следует, что прямая содержит бесконечно много точек. Можно также доказать, что утверждение аксиомы Паша справедливо и для точек, лежащих на одной прямой: если точки A , B и C принадлежат одной прямой, прямая l не проходит через эти точки и пересекает один из отрезков, например AB , во внутренней точке, то она пересекает во внутренней точке либо отрезок AC , либо отрезок BC . Заметим также, что из аксиом первой и второй групп не следует, что множество точек прямой несчетно. Мы не будем приводить доказательства этих утверждений, с ними можно познакомиться в пособиях [11]–[14]. Остановимся более подробно на основных геометрических понятиях, а именно луча, полуплоскости и полупространства, которые вводятся с помощью аксиом принадлежности и порядка.

Справедливо следующее утверждение: *точка O прямой l разбивает множество остальных точек этой прямой на два непустых подмножества так, что для любых двух точек A и B , принадлежащих одному подмножеству, точка O является внешней точкой отрезка AB , а для любых двух точек C и D , принадлежащих различным подмножествам, точка O — внутренняя точка отрезка CD .*

Каждое из этих подмножеств называется *лучом* прямой l с началом в точке O . Лучи будем обозначать через h , l ,

k, \dots или OA, OB, OC, \dots , где O — начало луча, а A, B и C — точки луча. Доказательство этого утверждения мы приведем позже, в § 14, используя при этом другую аксиоматику, эквивалентную рассматриваемой. Определим понятие угла.

Определение 2. Углом (по Гильберту) называется пара лучей h и k , имеющих общее начало O и не лежащих на одной прямой.

Точка O называется вершиной угла, а лучи h и k — его сторонами. Для углов будем использовать различные обозначения $\angle hk, \angle AOB, \angle O$, принятые в школьных учебниках. Рассмотрим важнейшее понятие элементарной геометрии — понятие полуплоскости.

Теорема 1. Прямая a , лежащая в плоскости, разделяет множество точек, не принадлежащих прямой, на два непустых подмножества, так, что если точки A и B принадлежат одному подмножеству, то отрезок AB не имеет общих точек с прямой l , а если точки A и B принадлежат различным подмножествам, то отрезок AB пересекает прямую l в своей внутренней точке.

Доказательство. Если на некотором множестве введено бинарное отношение, которое является отношением эквивалентности, т. е. удовлетворяет условиям рефлексивности, симметричности и транзитивности, то множество разбивается на непересекающиеся подмножества — классы эквивалентности, — при этом любые два элемента принадлежат одному классу в том и только в том случае, когда они эквивалентны. Рассмотрим множество точек плоскости, не принадлежащих прямой a . Будем считать, что две точки A и B находятся в бинарном отношении δ (записывают $A\delta B$) тогда и только тогда, когда на отрезке AB не существует внутренних точек, принадлежащих прямой a . Будем также считать, что любая точка находится в бинарном отношении δ сама с собой. Покажем, что для любой точки A , не принадлежащей прямой a , существуют точки, отличные от A , как находящиеся, так и не находящиеся с ней в бинарном отношении. Выберем произвольную точку P прямой a (рис. 54). Тогда в соответствии с аксиомой Π_2 существует такая точка B прямой AP , что $P - A - B$.

Прямая AB пересекает прямую a в точке P , которая не лежит между точками A и B , следовательно, точки A и B находятся в отношении δ . По той же аксиоме существует точка C , для которой выполнено $A - P - C$. Поэтому точка P лежит между точками A и C и они не находятся в отношении δ .

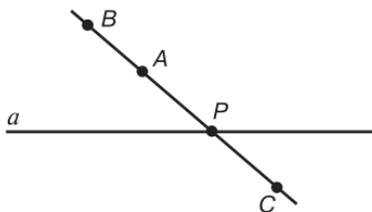


Рис. 54

Докажем, что отношение δ является отношением эквивалентности. Условие рефлексивности с очевидностью выполняется в силу определения бинарного отношения $\delta: A\delta A$. Пусть точки A и B находятся в отношении δ . Тогда на отрезке AB не существует точек прямой a . Отсюда следует, что точек прямой a нет и на отрезке BA , поэтому $B\delta A$, отношение симметричности выполнено. Пусть, наконец, даны три точки A, B и C такие, что $A\delta B$ и $B\delta C$. Покажем, что точки A и C находятся в бинарном отношении δ . Предположим противное, на отрезке AC существует точка P прямой a (рис. 55). Тогда в силу аксиомы Π_4 , аксиомы Паша, прямая a пересекает либо отрезок BC , либо отрезок AB (на рис. 55 прямая a пересекает отрезок BC). Мы пришли к противоречию, так как из условий $A\delta B$ и $B\delta C$ следует, что прямая a не пересекает эти отрезки. Поэтому отношение δ является отношением эквивалентности, оно разбивает множество точек плоскости, не принадлежащих прямой a , на классы эквивалентности.

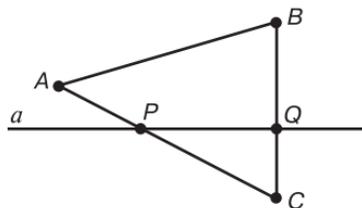


Рис. 55

Проверим, что таких классов эквивалентности ровно два. Для этого достаточно доказать, что если точки A и C , а также B и C не эквивалентны, то тогда точки A и B эквивалентны друг другу. Так как точки A и C , а также B и C не находятся в отношении эквивалентности δ , прямая a пересекает отрезки AC и BC точках P и Q (рис. 55). Но тогда, в силу аксиомы Паша, эта прямая не может пересекать отрезок AB . Поэтому точки A и B эквивалентны друг другу. Теорема доказана.

Каждый из классов эквивалентности, определенных в теореме 1, называется *полуплоскостью*, а прямая a — *ее границей*. Таким образом, любая прямая плоскости разбивает ее на две полуплоскости, для которых она служит их границей.

Аналогично понятию полуплоскости вводится понятие полупространства. Доказывается теорема, в которой утверждается, что любая плоскость α пространства разбивает точки пространства на два множества. Отрезок, концы которого составляют точки одного множества, не имеет с плоскостью α общих точек. Если же концы отрезка принадлежат различным множествам, то такой отрезок имеет в качестве внутренней точку плоскости α . Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 1, мы его приводить не будем.

Определим понятие внутренней точки угла. Пусть дан угол $\angle AOB$. Рассмотрим прямую OA , содержащую луч OA — сторону этого угла. Ясно, что точки луча OB принадлежат одной полуплоскости α относительно прямой OA . Аналогично, точки луча OA , стороны данного угла, принадлежат одной

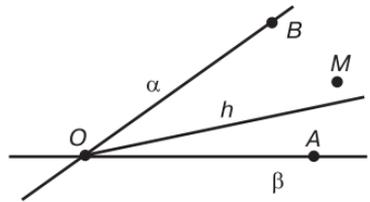


Рис. 56

полуплоскости β , границу которой составляет прямая OB (рис. 56). Точки, принадлежащие пересечению полуплоскостей α и β , называются *внутренними точками угла*. На рисунке 56 точка M — внутренняя точка $\angle AOB$. Множество всех внутренних точек угла называется его *внутренней областью*. Луч, вершина которого совпадает с вершиной угла, и все точки которого являются внутренними, называется *внутренним лучом* угла. На рисунке 56 изображен внутренний луч h угла AOB .

Справедливы следующие утверждения.

- 1°. Если луч с началом в вершине угла содержит хотя бы одну его внутреннюю точку, то он является внутренним лучом этого угла.
- 2°. Если концы отрезка расположены на двух различных сторонах угла, то любая внутренняя точка отрезка является внутренней точкой угла.

3°. *Любой внутренний луч угла пересекает отрезок, концы которого находятся на сторонах угла.*

Мы рассмотрим доказательства этих утверждений позже, в § 14. С помощью аксиом второй группы определяются понятия ломаной линии, треугольника, многоугольника, понятие внутренней области простого многоугольника и доказывается, что простой многоугольник разбивает плоскость на две области, внутреннюю и внешнюю по отношению к нему самому.

§ 11. ОБЗОР СЛЕДСТВИЙ АКСИОМ КОНГРУЭНТНОСТИ, НЕПРЕРЫВНОСТИ И ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ

Третью группу аксиом Гильберта трехмерного евклидова пространства составляют так называемые аксиомы конгруэнтности. Пусть S — множество отрезков, A — множество углов. На декартовых произведениях $S \times S$ и $A \times A$ введем бинарные отношения, которые будем называть отношением конгруэнтности. Для любых двух отрезков можно установить, находятся ли они в этом бинарном отношении или нет, т. е. конгруэнтны они или не конгруэнтны между собой. Аналогично, в таком же отношении могут находиться два угла — они либо конгруэнтны, либо нет. Аксиомы третьей группы описывают свойства отношения конгруэнтности. Заметим, что введенное таким образом отношение не является отношением основных объектов рассматриваемой аксиоматики, т. е. точек прямых и плоскостей. Ввести третью группу аксиом можно только тогда, когда определены понятия отрезка и угла, т. е. введены первая и вторая группы аксиом Гильберта. В этом смысле структура аксиоматики Гильберта сложнее, чем структуры аксиоматик, рассмотренных в § 9. Условимся также, если это не приводит к недоразумениям, называть конгруэнтные отрезки или углы также геометрически равными или просто равными, и обозначать равенство символом « $=$ ».

Аксиомы конгруэнтности

Отношение конгруэнтности должно удовлетворять следующим аксиомам.

III₁. Если дан отрезок AB и луч с началом в точке A' , то существует такая точка B' этого луча, что

$AB = A'B'$. Для любого отрезка AB требуется, чтобы $AB = BA$.

Смысл первой части этой аксиомы заключается в том, что от начала любого луча можно «отложить» отрезок, равный данному. Можно доказать, что при выполнении условий аксиомы III_1 точка B' единственная.

III_2 . Если отрезок AB конгруэнтен отрезкам $A'B'$ и $A''B''$, то отрезки $A'B'$ и $A''B''$ конгруэнтны между собой.

Другими словами, из равенств $AB = A'B'$ и $AB = A''B''$ следует равенство $A'B' = A''B''$. Отношение конгруэнтности отрезков обладает свойством транзитивности. Можно доказать, что отношение конгруэнтности отрезков является отношением эквивалентности.

III_3 . Если точка B лежит между точками A и C ($A - B - C$), а точка B' — между точками A' и C' (A', B', C') и $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, то $AC = A'C'$.

Иначе говоря, если отрезки AC и $A'C'$ разбиты точками B и B' на попарно равные части, то $AC = A'C'$.

Для формулировки следующей аксиомы введем понятие флага. Пусть даны точка O , луч h с началом в точке O , принадлежащий прямой \tilde{h} , и полуплоскость λ с границей \tilde{h} , тогда тройка O, h, λ называется *флагом* и обозначается (O, h, λ) .

III_4 . Пусть дан угол $\angle hk$ и дан флаг (O', h', λ') , тогда в полуплоскости λ' существует один и только один луч k' с началом в точке O' , такой, что $\angle hk = \angle h'k'$. Каждый угол конгруэнтен сам себе.

Смысл первой части аксиомы III_4 состоит в том, что в полуплоскости, определяемой флагом, от луча флага можно отложить угол, равный данному, и притом только один.

III_5 . Пусть A, B и C — три точки, не принадлежащие одной прямой, A', B' и C' — также три точки, не лежащие на одной прямой, пусть $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ и $\angle ABC = \angle A'B'C'$, тогда $\angle BAC = \angle B'A'C'$.

В соответствии с определением, введенным Гильбертом, треугольник ABC называется конгруэнтным (равным) треугольнику $A'B'C'$ в том случае, когда $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$. Условие аксиомы

Π_5 дословно совпадает с первым признаком равенства треугольников, но вывод из нее иной. Из нее не следует равенство треугольников ABC и $A'B'C'$, требуется только выполнение условия конгруэнтности углов, не заключенных между равными сторонами.

Укажем на основные следствия аксиом конгруэнтности.

- 1°. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны между собой.
- 2°. Первый, второй и третий признаки равенства треугольников.
- 3°. Отношение конгруэнтности является отношением эквивалентности на множестве углов.
- 4°. Вертикальные углы равны между собой.

Аксиомы конгруэнтности позволяют ввести понятия сравнения отрезков и углов.

Определение 1. Если даны отрезки AB и $A'B'$ и на отрезке AB существует такая внутренняя точка C , что отрезки AC и $A'B'$ равны друг другу, то отрезок AB больше отрезка $A'B'$, а отрезок $A'B'$ меньше отрезка AB .

При этом будем использовать обозначения $AB > A'B'$, $AB < A'B'$. Аналогично вводятся понятия «больше» и «меньше» для углов.

Определение 2. Если даны два угла $\angle hk$ и $\angle h'k'$ и существует такой внутренний луч l угла $\angle hk$, что $\angle hl = \angle h'k'$, то угол $\angle hk$ больше угла $\angle h'k'$, а угол $\angle h'k'$ меньше угла $\angle hk$.

Для введенного понятия будут использоваться стандартные обозначения: $\angle hk > \angle h'k'$, $\angle hk < \angle h'k'$.

Из аксиом первой, второй и третьей групп аксиоматики Гильберта вытекают известные теоремы о соотношениях между углами и сторонами в треугольнике: против большей стороны в треугольнике лежит больший угол и наоборот, против большего угла лежит большая сторона.

Внутренняя точка C отрезка AB называется его *серединой*, если $AC = CB$. Доказывается теорема о том, что любой отрезок имеет середину и притом только одну. Аналогично вводится понятие биссектрисы угла. Внутренний луч l угла $\angle hk$ называется его *биссектрисой*, если $\angle hl = \angle lk$. Дока-

зывается утверждение, что любой угол имеет биссектрису и притом только одну.

Аксиомы конгруэнтности позволяют ввести понятие суммы углов и отрезков. Отрезок $A'C'$ называется *суммой отрезков* AB и BC , если существует такая его внутренняя точка B' , что $AB = A'B'$, $BC = B'C'$. Аналогично, угол $\angle p'r'$ называется *суммой углов* $\angle pq$ и $\angle qr$, если существует такой его внутренний луч q' , что $\angle pq = \angle p'q'$ и $\angle qr = \angle q'r'$.

Вводится понятие прямого угла. Угол называется *прямым*, если он равен своему смежному углу. Доказываются теоремы:

Любые два прямых угла конгруэнтны между собой.

Через любую точку прямой можно провести перпендикулярную к ней прямую.

Доказательства приведенных утверждений мы опускаем. Читатель может познакомиться с ними в пособиях [12]–[14].

Угол, смежный с внутренним углом треугольника, называется его *внешним углом*. Перейдем к доказательству крайне важной для нас теоремы, которую будем называть *первой теоремой о внешнем угле треугольника*.

Теорема 1 (теорема о внешнем угле треугольника). *Внешний угол треугольника больше любого внутреннего, не смежного с ним.*

Доказательство. Пусть дан треугольник ABC , угол BCD является его внешним углом (рис. 57). Требуется доказать, что он больше угла ABC . Разделим отрезок CB пополам, точка M — середина отрезка BC . Точка M разбивает прямую AM на два луча. На луче, дополнительном к лучу MA , от точки M отложим отрезок MA' , равный отрезку AM

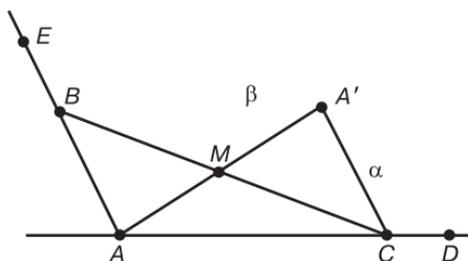


Рис. 57

(аксиома III_1). Докажем, что точка A' — внутренняя точка угла $\angle BCD$. Обозначим через α полуплоскость с границей AC , содержащую луч AE , а через β — полуплоскость с границей BC , не содержащую точку A . Проверим, что точка A' принадлежит пересечению полуплоскостей α и β . Точки B и C принадлежат лучам AE и AD , поэтому середина отрезка BC — внутренняя точка $\angle DAE$. Отсюда следует, что луч AM — внутренний луч угла $\angle DAE$. Любая его точка, в том числе и точка A' , — внутренняя точка этого угла. Так как внутренняя область $\angle DAE$ принадлежит полуплоскости α , то точка A' лежит в этой полуплоскости. Точки A и A' по построению лежат в разных полуплоскостях относительно прямой BC . Так как полуплоскость β не содержит точку A , то она содержит точку A' . Таким образом, точка A' — внутренняя точка $\angle BCD$.

Так как A' — внутренняя точка угла $\angle BCD$, то луч CA' — внутренний луч этого угла, и, в силу определения 2, $\angle BCD > \angle BCA'$. Кроме того, M — середина отрезка BC , поэтому отрезок BM равен отрезку MC , по построению $AM = MA'$, $\angle BMA = \angle CMA'$ как вертикальные, из первого признака равенства треугольников следует, что $\triangle ABM = \triangle A'MC$. Углы $\angle ABC$ и $\angle MCA'$ соответствуют друг другу в равных треугольниках, поэтому $\angle ABC = \angle MCA'$. Из неравенства $\angle BCD > \angle BCA'$ следует, что $\angle BCD > \angle ABC$. Теорема доказана.

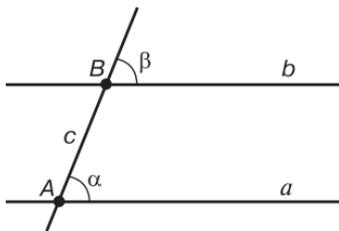


Рис. 58

Теорема о внешнем угле треугольника позволяет доказать, что на плоскости существуют непересекающиеся прямые. Рассмотрим на плоскости произвольную прямую c ; выберем на ней две точки A и B . Пользуясь аксиомой III_4 , построим две прямые a и b , пересекающие прямую c так, чтобы соответственные углы α и β были равны между собой (рис. 58). Легко доказать следующее утверждение.

Теорема 2. Если при пересечении двух прямых a и b третьей соответственные углы α и β равны между собой, то прямые a и b не пересекаются.

Доказательство. Предположим противное, пусть прямые a и b пересекаются в некоторой точке C (рис. 59). В треугольнике ABC угол ABC внутренний, угол $\angle DAC$ — внешний. По условию $\angle ABC = \angle DAC$, что противоречит теореме 1 о внешнем угле треугольника. Теорема доказана.

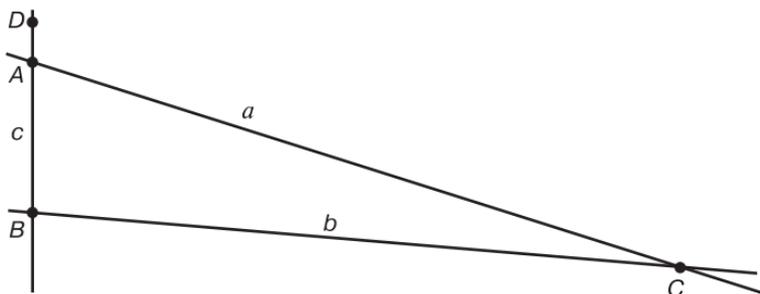


Рис. 59

Простым следствием теоремы 2 является утверждение:

Если при пересечении двух прямых a и b третьей прямой накрест лежащие углы равны между собой, или сумма внутренних односторонних углов равна развернутому, то прямые a и b не пересекаются.

Следует отметить, что из аксиом первых трех групп не следует утверждение, обратное теореме 2: *если даны две непересекающиеся прямые, пересеченные третьей, то отсюда не следует равенство односторонних углов.* Для доказательства этого утверждения необходима аксиома параллельности евклидовой геометрии.

Из аксиом первых трех групп также не следует, что на плоскости существует несчетное множество точек. Поэтому, например, нельзя доказать, что прямая и окружность пересекаются, если перпендикуляр, опущенный из центра окружности на прямую, меньше или равен радиусу окружности. Нельзя также доказать, что две окружности пересекаются, если отрезок, соединяющий их центры, не больше суммы радиусов окружностей. Устранить такого рода недостатки при построении элементарной геометрии позволяет четвертая группа, аксиомы непрерывности. Они и следствия из них будут изложены нами так, как это

принято в учебной литературе, при этом мы отклонимся от схемы Гильберта (см. [1]).

Аксиомы непрерывности

Четвертая группа состоит из двух аксиом.

IV_1 (*аксиома Архимеда*). Пусть даны два отрезка AB и CD . Тогда на прямой AB существует конечная система, состоящая из n точек A_1, A_2, \dots, A_n , расположенных так, что точка A_1 лежит между точками A и A_2 , точка A_2 — между точками A_1 и A_3 и так далее, точка A_k лежит между точками A_{k-1} и A_{k+1} , $1 < k < n - 1$. При этом отрезки $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ равны отрезку CD (рис. 60), а точка B лежит между A и A_n .



Рис. 60

IV_2 (*аксиома Кантора*). Пусть на произвольной прямой a дана бесконечная система отрезков $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n, \dots$, из которых каждый последующий лежит внутри предыдущего. Пусть далее для любого отрезка CD найдется такой номер n , что $A_nB_n < CD$. Тогда на прямой a существует такая точка X , которая лежит внутри отрезков $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n, \dots$ (рис. 61).



Рис. 61

Легко видеть, что аксиома IV_2 представляет собой не что иное, как принцип Кантора о стягивающихся отрезках, с которым мы знакомимся в курсе математического анализа. Нетрудно доказать, что точка X , существование которой постулируется в аксиоме Кантора, единственная.

Действительно, пусть существует еще одна точка X' , принадлежащая любому из отрезков системы $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n, \dots$. Тогда $A_nB_n > XX'$ для любого номера n , что противоречит аксиоме IV_2 .

Расширим определение отрезка по Гильберту, *назовем отрезком $[AB]$ множество, состоящее из точек A и B и всех точек, лежащих между концами A и B* . Можно доказать, что при выполнении аксиом первых трех групп аксиоматики Гильберта аксиомы IV_1 и IV_2 равносильны следующему утверждению Дедекинда.

Теорема 3 (утверждение Дедекинда). *Дано разбиение точек отрезка $[AB]$ на два класса (множества) K_1 и K_2 , удовлетворяющих условиям:*

- 1) $K_1 \cup K_2 = [AB]$, $K_1 \cap K_2 = \emptyset$;
- 2) $A \in K_1$, $B \in K_2$ и классы K_1 , и K_2 содержат точки, отличные от точек A и B ;
- 3) любая точка класса K_1 , отличная от A , лежит между точкой A и любой точкой класса K_2 .

Тогда существует такая точка M_0 отрезка $[AB]$, для которой любая точка, лежащая между точками A и M_0 , принадлежит классу K_1 , а любая точка, лежащая между точками M_0 и B , принадлежит классу K_2 .

Доказательство этой теоремы мы не приводим. Читатель может познакомиться с ним в пособии [12]. Разбиение отрезка на классы, удовлетворяющие условию теоремы 3, называют *дедекиндовым сечением*, при этом точка M_0 производит дедекиндово сечение. Доказывается, что такая точка единственная, при этом она принадлежит одному из этих классов.

Аксиомы первых четырех групп аксиоматики Гильберта позволяют доказать известные теоремы о пересечении прямых и окружностей. С помощью этих аксиом строится теория измерения отрезков и углов, с которой мы познакомимся в последующих параграфах. Теория измерения отрезков устанавливает биективное соответствие между множеством точек прямой и множеством действительных чисел, при котором сохраняется отношение порядка.

Геометрическую теорию, построенную на аксиомах принадлежности, порядка, конгруэнтности и непрерывности, называют *абсолютной геометрией*. Все утверждения, дока-

занные ранее в этом и предыдущем параграфах, являются утверждениями абсолютной геометрии.

Теорема 3 позволяет утверждать, что в абсолютной геометрии существуют непересекающиеся прямые. Для обоснования теории параллельных прямых евклидовой геометрии Д. Гильберт вводит еще одну группу аксиом.

Аксиома параллельности

V_1 (*аксиома параллельности евклидовой геометрии, аксиома Плейфера*). Пусть a — произвольная прямая, A — точка, не лежащая на этой прямой. Тогда в плоскости, определяемой точкой A и прямой a , существует не более одной прямой, проходящей через A и не пересекающей прямую a .

С помощью аксиомы параллельности евклидовой геометрии докажем утверждение, обратное теореме 2.

Если даны две непересекающиеся прямые a и b , которые пересечены третьей, то соответственные углы будут равны между собой.

Действительно, пусть прямые a и b пересечены прямой c . Предположим, что угол α между прямыми a и c не равен углу β между прямыми b и c (рис. 62). Проведем через точку B пересечения прямых b и c прямую b' так, чтобы она составляла с прямой c угол γ , равный углу α . Тогда, согласно теореме 2, прямые a и b' не пересекаются. Через точку B проходят две прямые, не пересекающие прямую a , что противоречит аксиоме V_1 .

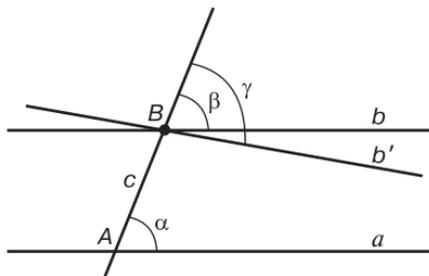


Рис. 62

Аксиомы пяти групп аксиоматики Гильберта позволяют доказать все утверждения, изложенные в школьных учеб-

никах. Они служат основой для построения теории параллельных линий евклидовой геометрии, позволяют доказать теоремы о сумме углов треугольника и многоугольника, построить теорию подобия в евклидовой геометрии. Аксиома V_1 необходима для доказательства теоремы Пифагора, с помощью которой строится обычная тригонометрия, изучаемая в школе, а также декартова аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве, позволяющая применить алгебраический аппарат к изучению геометрических свойств фигур на плоскости и тел в пространстве. Используя аксиомы пяти групп, вводятся понятия площади многоугольника на плоскости и объема многогранника в пространстве.

Исследование аксиоматики Гильберта мы проведем позже, в § 10, используя при этом аксиоматику Вейля трехмерного евклидова пространства, к изучению которой мы переходим.

§ 12. АКСИОМАТИКА ВЕЙЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Рассмотрим еще одну аксиоматику трехмерного евклидова пространства, так называемую аксиоматику Вейля, существенно отличающуюся от аксиоматики Гильберта, но, как будет показано далее, ей эквивалентную. Идея применения векторной алгебры к построению аксиоматики евклидова пространства принадлежит великому немецкому математику Герману Вейлю (1885–1955). Впервые эта аксиоматика была им приведена в книге «Пространство, время, материя», опубликованной в Берлине в 1918 году. Идея построения теории геометрических пространств на основе векторной алгебры была настолько плодотворной, что она во многом определила дальнейшее развитие геометрии.

Под основными объектами аксиоматики Вейля трехмерного евклидова пространства будем понимать элементы трех множеств: \mathbb{R} — *множество действительных чисел*, множество V_3 (его элементы будем называть *векторами*) и множество E_3 (его элементы в дальнейшем называются *точками*). Мы не будем приводить аксиомы множества действительных чисел. Теория действительных чисел строилась в курсах теории чисел, числовых систем и математического анализа.

На множествах векторов и точек вводятся следующие основные отношения: операции сложения векторов, умножения вектора на число, скалярного произведения пары векторов, а также операция σ , ставящая в соответствие упорядоченной паре точек X, Y из E_3 вектор $\sigma(X, Y)$ из V_3 . Легко видеть, введенные операции представляют собой тернарные отношения соответственно на декартовых произведениях $V_3 \times V_3 \times V_3$, $\mathbb{R} \times V_3 \times V_3$, $V_3 \times V_3 \times \mathbb{R}$ и $E_3 \times E_3 \times V_3$. Условимся в дальнейшем сумму векторов \vec{a} и \vec{b} обозначать через $\vec{a} + \vec{b}$, произведение числа α на вектор \vec{a} — через $\alpha\vec{a}$, скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} — через $\vec{a}\vec{b}$, а вектор $\sigma(XY)$ — через \overrightarrow{XY} .

Аксиомы Вейля трехмерного евклидова пространства

Первая группа аксиом — аксиомы линейного векторного пространства

- VI₁. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ для любых векторов $\vec{a}, \vec{b} \in V_3$.
 VI₂. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ для любых трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$.
 VI₃. Существует вектор $\vec{0} \in V_3$ такой, что $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ для любого вектора \vec{a} .
 VI₄. Для любого вектора $\vec{a} \in V_3$ найдется вектор $(-\vec{a}) \in V_3$ такой, что $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.
 VI₅. $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ для любых чисел $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и любого вектора $\vec{a} \in V_3$.
 VI₆. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ для любого числа $\lambda \in \mathbb{R}$ и любых векторов \vec{a} и \vec{b} из V_3 .
 VI₇. $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$ для любых чисел $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и любого вектора $\vec{a} \in V_3$.
 VI₈. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ для любого вектора $\vec{a} \in V_3$.

Вторая группа аксиом — аксиомы размерности трехмерного векторного пространства V_3

- VII₁. Существует линейно независимая тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$, т. е. такая тройка векторов, для которой из соотношения $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \eta\vec{c} = \vec{0}$ следует $\lambda = \mu = \eta = 0$.
 VII₂. Любые четыре вектора линейно зависимы, т. е. для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in V_3$ существуют числа

$\lambda, \mu, \eta, \nu \in \mathbb{R}$, не все равные нулю, для которых $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \eta\vec{c} + \nu\vec{d} = \vec{0}$.

Третья группа аксиом — аксиомы скалярного произведения

ВШ₁. $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$ для любых трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$.

ВШ₂. $(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a}\vec{b})$ для любого числа $\lambda \in \mathbb{R}$, и любых векторов $\vec{a}, \vec{b} \in V_3$.

ВШ₃. $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ для любых векторов $\vec{a}, \vec{b} \in V_3$.

ВШ₄. $\vec{a}\vec{a} > 0$ для любого ненулевого вектора $\vec{a} \in V_3$.

Из аксиом ВШ₁–ВШ₄ следует, что скалярное произведение представляет собой так называемую положительно определенную симметрическую билинейную форму на V_3 , т. е. функцию, которая каждой упорядоченной паре векторов ставит в соответствие число и удовлетворяет условию линейности по каждому аргументу (аксиомам ВШ₁–ВШ₄).

ВШ₅. На пространстве V_3 задано множество \tilde{g} положительно определенных симметрических билинейных форм, которое включает в себя скалярное произведение векторов такое, что если $g(\vec{a}\vec{b}) \in \tilde{g}$, то $g(\vec{a}\vec{b}) = \lambda\vec{a}\vec{b}$, где λ — положительное действительное число.

Другими словами, на V_3 задано множество \tilde{g} положительно определенных симметрических билинейных форм, пропорциональных скалярному произведению векторов с точностью до положительного числового сомножителя.

Четвертая группа аксиом — аксиомы Вейля трехмерного евклидова пространства

ВIV₁ (*аксиома откладывания вектора*). Для любой точки $A \in E_3$ и любого вектора $\vec{x} \in V_3$ существует единственная точка $B \in E_3$ такая, что $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$.

ВIV₂ (*аксиома треугольника*). Для любых трех точек $A, B, C \in E_3$ справедливо равенство $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Хотя приведенная аксиоматика по своей структуре проще аксиоматики Гильберта трехмерного евклидова пространства, построение начал элементарной геометрии на ее основе менее наглядно. Поэтому попытки использования

аксиоматики Вейля при построении школьного курса геометрии не получили широкого распространения. Проведем исследование аксиоматики Вейля, докажем ее непротиворечивость, независимость и полноту. В связи с этим сразу сделаем следующее замечание. Предположим, что мы приняли за основу построения курса геометрии аксиоматику Гильберта трехмерного евклидова пространства. Тогда можно ввести понятия вектора и операций над векторами так, как это было осуществлено в курсе аналитической геометрии, в котором были доказаны в качестве теорем все аксиомы VI_1 – IV_2 аксиоматики Вейля. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Если аксиоматика Гильберта трехмерного евклидова пространства непротиворечива, то справедливы утверждения аксиом VI_1 – IV_2 аксиоматики Вейля.*

Из этой теоремы следует, что любая модель аксиоматики Гильберта трехмерного евклидова пространства одновременно служит моделью аксиоматики VI_1 – IV_2 Вейля.

Докажем содержательную непротиворечивость приведенной системы аксиом Вейля. Для этого, как было указано в § 2, следует с помощью корректных средств построить модель этой системы аксиом. В качестве средств построения искомой модели мы будем использовать свойства действительных чисел.

Теорема 2. *Аксиоматика Вейля трехмерного евклидова пространства непротиворечива, если непротиворечива арифметика.*

Доказательство. Мы докажем содержательную непротиворечивость исследуемой аксиоматики, построив так называемую ее *арифметическую модель*. Как было показано в § 9, отсюда следует ее непротиворечивость при условии непротиворечивости арифметики.

Под вектором будем понимать строку из упорядоченной тройки чисел $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Таким образом, множество векторов V_3 представляет собой множество строк: $V_3 = \{(a_1, a_2, a_3)\}$, где $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$. Точкой также назовем строку из упорядоченной тройки чисел $A = (a_1, a_2, a_3)$, множество точек E_3 представляет собой множество строк: $E_3 = \{(a_1, a_2, a_3)\}$, где $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$. Операции сложения

и умножения вектора на число определим как операции над числовыми строками. Если $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, то $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$, $\lambda\vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$. Под скалярным произведением векторов $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ будем понимать число $\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. Если даны две точки $A = (a_1, a_2, a_3)$ и $B = (b_1, b_2, b_3)$, то поставим им в соответствие вектор $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$.

Нетрудно проверить, используя свойства действительных чисел, что определенные таким образом точки и векторы и операции сложения векторов, умножения вектора на число, скалярного умножения и сопоставления упорядоченной паре точек вектору, удовлетворяют условиям аксиом $\text{VI}_1 - \text{VI}_2$ аксиоматики Вейля. Проверим выполнение лишь некоторых аксиом, проверку остальных предоставляем читателю.

Аксиома VI_3 . В качестве нулевого вектора возьмем строку $\vec{0} = (0, 0, 0)$. Если $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ — произвольный вектор, то $\vec{a} + \vec{0} = (a_1 + 0, a_2 + 0, a_3 + 0) = (a_1, a_2, a_3) = \vec{a}$. Аксиома VI_3 выполняется.

Аксиома VII_2 . Пусть даны число λ и два вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Тогда $\lambda\vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$. Поэтому $(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda a_1 b_1 + \lambda a_2 b_2 + \lambda a_3 b_3 = \lambda(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) = \lambda(\vec{a}\vec{b})$. Аксиома VII_2 выполняется.

Аксиома VI_4 . Рассмотрим три точки: $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ и $C = (c_1, c_2, c_3)$. Тогда $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$, $\overrightarrow{BC} = (c_1 - b_1, c_2 - b_2, c_3 - b_3)$, $\overrightarrow{AC} = (c_1 - a_1, c_2 - a_2, c_3 - a_3)$. Так как $(b_i - a_i) + (c_i - b_i) = c_i - a_i$, $i = 1, 2, 3$, то $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Аксиома VI_4 выполняется. Теорема доказана.

Аксиоматика Вейля трехмерного евклидова пространства обладает свойством минимальности. Любая из аксиом $\text{VI}_1 - \text{VI}_2$ не зависит от остальных аксиом.

Теорема 3. *Аксиоматика Вейля трехмерного евклидова пространства является независимой.*

Доказательство. Мы проверим независимость аксиом VI_1 и VI_2 от остальных аксиом исследуемой аксиоматики. Как было указано в § 9, для этого следует доказать независимость каждой из этих аксиом от остальных, т. е. проверить непротиворечивость двух аксиоматик, состоящих

из всех аксиом Вейля, в которых аксиома BIV_1 или аксиома BIV_2 заменена ее логическим отрицанием. Так как при этом мы будем использовать аппарат арифметики действительных чисел, то наши рассуждения будут истинными при условии непротиворечивости аксиоматики арифметики действительных чисел. Прежде всего, рассмотрим аксиому BIV_1 и сформулируем ее логическое отрицание.

$\overline{\text{BIV}_1}$. Существуют такие точка $A \in E_3$ и вектор $\vec{x} \in V_3$, что для них можно найти по крайней мере две различные точки B_1 и B_2 , принадлежащие пространству E_3 , для которых $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB_2} = \vec{x}$.

Построим арифметическую модель системы аксиом VI_1 – VII_5 , $\overline{\text{BIV}_1}$, BIV_2 . Понятие вектора, операций сложения векторов, умножения вектора на число и скалярного произведения векторов введем так же, как и при доказательстве теоремы 2. Под точкой будем понимать строку из четырех чисел: $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$. Пусть даны две точки $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ и $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$. Поставим им в соответствие вектор $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$.

В построенной модели выполняются все аксиомы VI_1 – VII_5 и BIV_2 (проверьте их самостоятельно). Рассмотрим точку $A = (0, 0, 0, 0)$ и вектор $\vec{x} = (0, 0, 0)$. Тогда для двух различных точек $B_1 = (0, 0, 0, 1)$ и $B_2 = (0, 0, 0, 5)$, в соответствии с введенным правилом, $\overrightarrow{AB_1} = (0, 0, 0) = \vec{x}$, $\overrightarrow{AB_2} = (0, 0, 0) = \vec{x}$. Аксиома $\overline{\text{BIV}_1}$ для рассматриваемой модели выполнена, независимость аксиомы BIV_1 от остальных аксиом Вейля доказана.

Сформулируем логическое отрицание аксиомы BIV_2 .

$\overline{\text{BIV}_2}$. Существуют по крайней мере три точки $A, B, C \in E_3$, для которых $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \neq \overrightarrow{AC}$.

Для построения арифметической модели системы аксиом VI_1 – VII_5 , $\overline{\text{BIV}_1}$, $\overline{\text{BIV}_2}$ понятия вектора, точки, линейных операций над векторами и скалярного произведения введем так же, как и при доказательстве теоремы 2. Упорядоченной же паре точек поставим в соответствие вектор по следующему правилу. Пусть даны две точки $A = (a_1, a_2, a_3)$ и $B = (b_1, b_2, b_3)$, тогда $\overrightarrow{AB} = (b_1 + a_1, b_2 + a_2, b_3 + a_3)$. Рассмотрим три точки $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 2)$, $C(3, 3, 3)$. Векторы \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} и \overrightarrow{AC} по введенному правилу соответствия

равны: $\vec{AB} = (3, 3, 3)$, $\vec{BC} = (5, 5, 5)$, $\vec{AC} = (4, 4, 4)$. Поэтому $\vec{AB} + \vec{BC} \neq \vec{AC}$. Независимость аксиомы BIV_2 от остальных аксиом Вейля доказана.

Мы показали, что аксиоматика Вейля трехмерного евклидова пространства обладает свойствами непротиворечивости и независимости. Покажем, что она также обладает свойством категоричности. Действительно, если мы имеем какую-либо модель системы аксиом BI_1 – BIV_2 , то теми же методами, которые использовались в курсах алгебры и аналитической геометрии, можно построить ортонормированный базис пространства V_3 , состоящий из трех векторов, и поставить в соответствие каждому вектору строку из трех чисел, а также построить систему прямоугольных декартовых координат пространства E_3 , которая позволяет установить взаимно однозначное соответствие между точками и строками из трех чисел. При этом линейные операции над векторами, скалярное произведение векторов и соответствие упорядоченной пары точек и векторов в координатах имеют тот же вид, что и в построенной выше арифметической модели аксиоматики Вейля. Поэтому любая модель аксиоматики Вейля изоморфна ее арифметической модели. Отсюда следует, что *любые две модели аксиоматики Вейля трехмерного евклидова пространства изоморфны, а сама аксиоматика категорична*. Как отмечалось в § 9, из категоричности аксиоматики следует ее полнота. Таким образом, *система аксиом BI_1 – BIV_2 удовлетворяет условию полноты*.

§ 13. СВОЙСТВА ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В АКСИОМАТИКЕ ВЕЙЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Основанная на понятиях векторной алгебры аксиоматика Вейля трехмерного евклидова пространства не похожа ни на аксиоматику Гильберта, ни на принятые в школьных учебниках геометрии системы аксиом, в которых вообще ничего не говорится о векторах, а постулируются определенные свойства точек, прямых, плоскостей. Естественно, возникает вопрос: можно ли и, если можно, то как построить начала элементарной геометрии с помощью аксиоматики Вейля? В последующих параграфах мы дадим

положительное решение поставленного вопроса. Для этого нам будет необходимо, во-первых, определить, исходя из аксиоматики Вейля, основные понятия элементарной геометрии — точки, прямые и плоскости, и, во-вторых, установить, что введенные нами понятия удовлетворяют аксиомам Гильберта трехмерного евклидова пространства. Так как любая модель аксиоматики Гильберта в силу теоремы 1 § 12 служит моделью аксиоматики Вейля, то, доказав это утверждение, мы получим эквивалентность аксиоматических теорий, построенных на основе аксиоматик Гильберта и Вейля.

В соответствии со сказанным выше, начнем с того, что для трехмерного евклидова пространства E_3 , построенного на основе аксиоматики Вейля VI_1 – IV_2 , определим основные понятия аксиоматики Гильберта: точки, прямой и плоскости. Понятие точки основное понятие аксиоматики Вейля и не нуждается в каких-либо изменениях. Рассмотрим произвольное подпространство V_i размерности i ($i=1,2$) евклидова трехмерного векторного пространства V_3 . С помощью подпространства V_i определим на множестве точек E_3 следующее бинарное отношение: *две точки A и B находятся в отношении σ ($A\sigma B$) в том и только в том случае, когда $\overrightarrow{AB} \in V_i$.*

Нетрудно доказать, что бинарное отношение σ обладает свойствами рефлексивности, транзитивности и симметричности, т. е. представляет собой отношение эквивалентности.

Рефлексивность, $A\sigma A$. Действительно, $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$, а любое векторное подпространство содержит нулевой вектор. Таким образом, $A\sigma A$.

Симметричность, из $A\sigma B$ следует $B\sigma A$. Так как $A\sigma B$, то $\overrightarrow{AB} \in V_i$. Любое векторное подпространство вместе с любым своим вектором содержит ему противоположный. Поэтому — $\overrightarrow{AB} \in V_i$, но $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$, следовательно, $\overrightarrow{BA} \in V_i$. Симметричность доказана.

Транзитивность, из $A\sigma B$ и $B\sigma C$ следует $A\sigma C$. Так как $A\sigma B$ и $B\sigma C$, то $\overrightarrow{AB} \in V_i$, $\overrightarrow{BC} \in V_i$. Из аксиомы IV_2 следует $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Любое подпространство вместе с любыми своими векторами содержит и их сумму. Поэтому $\overrightarrow{AC} \in V_i$. Свойство транзитивности доказано.

Любое отношение эквивалентности разбивает множество на классы эквивалентностей. Введем следующее определение.

Определение 1. Пусть дано одномерное векторное подпространство V_1 евклидова трехмерного векторного пространства V_3 . Класс эквивалентности, определяемый отношением σ , соответствующим V_1 , называется прямой пространства E_3 . Если дано двумерное векторное подпространство V_2 пространства V_3 , то класс эквивалентности, определяемый отношением σ , соответствующим V_2 , называется плоскостью пространства E_3 .

Любое одномерное подпространство векторного пространства определяется любым своим ненулевым вектором, который составляет базис подпространства. Поэтому любую прямую, как следует из определения 1, можно задать ее произвольной точкой A и ненулевым вектором \vec{p} .

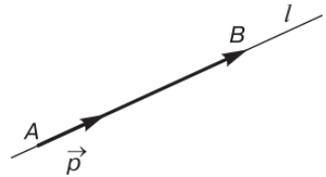


Рис. 63

Точка B тогда и только тогда принадлежит этой прямой, когда вектор \vec{AB} коллинеарен вектору \vec{p} (рис. 63). В этом случае прямую l будем обозначать (A, V_1) , или (A, \vec{p}) .

Аналогично, двумерное векторное подпространство V_2 пространства E_3 определяется любыми своими двумя неколлинеарными векторами, образующими базис этого подпространства. Отсюда следует, что любую плоскость пространства E_3 можно задать любой своей точкой A и двумя неколлинеарными векторами \vec{p} и \vec{q} (рис. 64). Точка B принадлежит этой плоскости в том и только в том случае, когда вектор \vec{AB} линейно выражается через векторы \vec{p} и \vec{q} . В этом случае плоскость будем обозначать через (A, V_2)

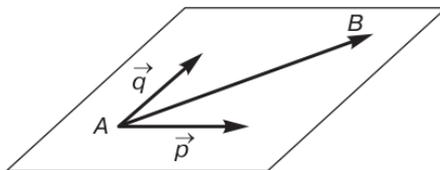


Рис. 64

или (A, \vec{p}, \vec{q}) . Будем считать, что понятие принадлежности точек прямых и плоскостей имеет обычный теоретико-множественный смысл. Точка принадлежит прямой (плоскости), если она является элементом подмножества точек пространства E_3 , образующих эту прямую (плоскость). Аналогично определяются понятие принадлежности прямой и плоскости.

Пользуясь принятым определением 1 и аксиомами Вейля, докажем, что введенные нами понятия точек, прямых и плоскостей удовлетворяют аксиомам принадлежности I_1 – I_8 аксиоматики Гильберта трехмерного евклидова пространства (см. § 10). При этом доказываемые утверждения мы будем обозначать так же, как и сами аксиомы в аксиоматике Гильберта.

Утверждение I_1 . *Каковы бы ни были две точки A и B , существует прямая a , проходящая через эти две точки.*

Доказательство. Пусть A и B — две данные точки. Рассмотрим вектор \overrightarrow{AB} . Так как точки различны, то вектор \overrightarrow{AB} отличен от нулевого. Обозначим через V_1 порожденное им одномерное векторное подпространство. Рассмотрим прямую $l = (A, V_1)$. Прямая l проходит через точку A , она также проходит через точку B , так как $\overrightarrow{AB} \in V_1$. Утверждение доказано.

Утверждение I_2 . *Каковы бы ни были две точки A и B , существует не более одной прямой a , проходящей через эти две точки.*

Доказательство проведите самостоятельно. Используйте следующее утверждение: если существуют две прямые $m = (A, V_1)$ и $n = (A, V'_1)$, проходящие через точки A и B , то вектор \overrightarrow{AB} принадлежит как подпространству V_1 , так и подпространству V'_1 . Отсюда следует, что эти подпространства совпадают.

Утверждение I_3 . *На каждой прямой лежат по крайней мере две точки. Существует по крайней мере три точки, не принадлежащие одной прямой.*

Доказательство. Пусть дана произвольная прямая l , определяемая точкой A и одномерным векторным подпространством V_1 . Пусть \vec{p} — ненулевой вектор, принадлежащий V_1 . В соответствии с аксиомой IV_1 , существует такая

точка B , для которой $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$. В силу определения 1 точка B принадлежит прямой l . Поэтому на каждой прямой лежат по крайней мере две точки.

Покажем существование трех точек, не принадлежащих одной прямой. Рассмотрим произвольную точку M и два линейно независимых вектора \vec{a} и \vec{b} . Из аксиомы BIV_1 следует существование таких точек A и B , для которых $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{MB} = \vec{b}$. Точки M , A и B не лежат на одной прямой, так как в противном случае из определения 1 следует, что векторы \overrightarrow{MA} и \overrightarrow{MB} коллинеарны, т. е. линейно зависимы. Утверждение доказано.

Утверждение I_4 . *Каковы бы ни были три точки A , B и C , не лежащие на одной прямой, существует плоскость α , проходящая через эти три точки. На каждой плоскости лежит по крайней мере одна точка.*

Доказательство этого утверждения аналогично приведенному выше доказательству утверждения I_1 . Очевидно, искомая плоскость определяется точкой A и двумерным векторным подпространством, натянутым на неколлинеарные векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} . Подробное доказательство проведите самостоятельно в качестве упражнения.

Утверждение I_5 . *Каковы бы ни были три точки, не лежащие на одной прямой, существует не более одной плоскости, содержащей эти точки.*

Доказательство этого утверждения также аналогично доказательству утверждения I_2 . Проведите его самостоятельно.

Утверждение I_6 . *Если две точки A и B прямой a лежат в плоскости α , то любая точка, принадлежащая прямой a , лежит в плоскости α .*

Доказательство. Обозначим векторное подпространство плоскости α через V_2 . Так как точки A и B принадлежат данной плоскости, то $\overrightarrow{AB} \in V_2$. Но вектор \overrightarrow{AB} является базисным вектором подпространства V_1 данной прямой a , поэтому $V_1 \subset V_2$. Выберем произвольную точку C прямой AB . Из определения 1 следует, что $\overrightarrow{AC} \in V_1$, отсюда $\overrightarrow{AC} \in V_2$. Воспользовавшись еще раз определением 1, получим $C \in \alpha$. Утверждение доказано.

Утверждение I₇. *Если две плоскости α и β имеют общую точку A , то существует по крайней мере еще одна точка B , принадлежащая этим плоскостям.*

Доказательство. Пусть α и β — данные плоскости. Так как плоскость определяется любой своей точкой и подпространством, то можно считать, что эти плоскости определяются своей общей точкой M и подпространствами V_2 и W_2 : $\alpha=(M, V_2)$, $\beta=(M, W_2)$. Подпространства V_2 и W_2 — различные двумерные подпространства, принадлежащие трехмерному векторному пространству. Поэтому, в силу теоремы о размерности суммы и пересечении двух подпространств, они имеют общее одномерное подпространство V_1 . Выберем произвольный ненулевой вектор \vec{n} подпространства V_1 . Он принадлежит подпространствам V_2 и W_2 . В силу аксиомы BIV₁ аксиоматики Вейля существует такая точка N , что $\overrightarrow{MN}=\vec{n}$. Так как $\vec{n}\neq\vec{0}$, то точки M и N различны. Из определения 1 следует, что $N\in\alpha\cap\beta$. Утверждение доказано.

Утверждение I₈. *Существует по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости.*

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству утверждения I₃ с той лишь разницей, что вместо двух следует выбрать три линейно независимых вектора.

Мы доказали, что определенные нами на основе аксиом Вейля понятия точки, прямой и плоскости, с введенным отношением принадлежности, удовлетворяют первой группе аксиом аксиоматики Гильберта. Проверим выполнение аксиомы параллельности V₁ — единственной аксиомы, входящей в пятую группу аксиом Гильберта.

Утверждение V₁. *Пусть a — произвольная прямая, A — точка, не лежащая на этой прямой. Тогда в плоскости, определяемой точкой A и прямой a , существует не более одной прямой, проходящей через A и не пересекающей прямую a .*

Доказательство. Пусть даны прямая $a=(M, V_1)$ и точка A , не принадлежащая a . Очевидно,

$$\overrightarrow{AM} \notin V_1. \quad (1)$$

Поэтому вектор \overrightarrow{AM} и подпространство V_1 порождают двумерное векторное подпространство V_2 . Ясно, что точка A

и прямая a принадлежат плоскости (A, V_2) . Рассмотрим прямую $b = (A, V_1)$, которая проходит через точку A с тем же направляющим подпространством V_1 , что и прямая a . Предположим, что прямые a и b пересекаются в точке X (рис. 65). Точки A и X принадлежат прямой b , поэтому $\overrightarrow{AX} \in V_1$. Аналогично, точки M и X принадлежат прямой a , поэтому $\overrightarrow{XM} \in V_1$. В силу аксиомы BIV_2 выполняется $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XM}$. Отсюда следует, что вектор \overrightarrow{AM} также принадлежит подпространству V_1 , что противоречит условию (1). Таким образом, прямые a и b не пересекаются.

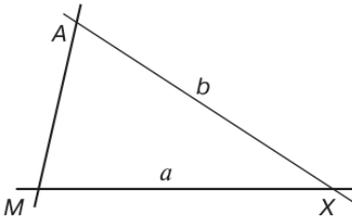


Рис. 65

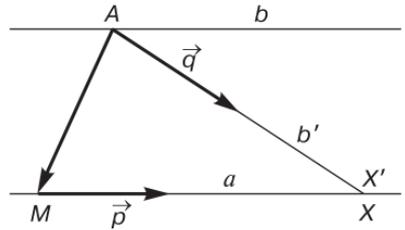


Рис. 66

Докажем, что любая прямая b' , проходящая через точку A и отличная от прямой b , пересекает прямую a . Рассмотрим произвольную прямую $b' = (A, W_1)$, содержащую точку A и не совпадающую с b (рис. 66). Тогда ее одномерное подпространство W_1 не совпадает с подпространством V_1 прямых a и b . Пусть \vec{p} и \vec{q} — соответственно ненулевые векторы подпространств V_1 и W_1 . Векторы \vec{p} и \vec{q} не коллинеарные, они образуют базис двумерного векторного подпространства V_2 пространства V_3 . Разложим вектор \overrightarrow{AM} по векторам \vec{p} и \vec{q} :

$$\overrightarrow{AM} = \alpha \vec{p} + \beta \vec{q}. \tag{2}$$

Пользуясь аксиомой BIV_1 аксиоматики Вейля, отложим векторы $\beta \vec{q}$ и $-\alpha \vec{p}$ соответственно от точек A и M . Получим точки X' и X соответственно прямых a и b' , удовлетворяющие условиям: $\overrightarrow{AX'} = \beta \vec{q}$, $\overrightarrow{MX} = -\alpha \vec{p}$. Воспользуемся аксиомой треугольника BIV_2 аксиоматики Вейля:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AX'} + \overrightarrow{X'X} + \overrightarrow{XM} = \overrightarrow{AX'} + \overrightarrow{X'X} - \overrightarrow{MX} = \beta \vec{q} + \overrightarrow{X'X} + \alpha \vec{p}.$$

Из полученного равенства и из соотношения (2) следует, что $\overrightarrow{X'X} = \vec{0}$. Точки X и X' совпадают, прямые a и b' пересекаются. Утверждение доказано.

Мы проверили, что введенные нами точки, прямые и плоскости, построенные в трехмерном евклидовом пространстве, определенном на основе аксиоматики Вейля, удовлетворяют первой и пятой группам аксиом аксиоматики Гильберта. Следующий параграф будет посвящен проверке второй группы аксиом Гильберта, аксиомам порядка.

§ 14. СВОЙСТВА ПОНЯТИЯ «ЛЕЖАТЬ МЕЖДУ» В АКСИОМАТИКЕ ВЕЙЛЯ. СВОЙСТВА ОТРЕЗКОВ, ЛУЧЕЙ ПОЛУПЛОСКОСТЕЙ И УГЛОВ

В курсе аналитической геометрии нами было введено понятие простого отношения точек. Напомним его.

Определение 1. Пусть даны три различные точки A , B и C , принадлежащие одной прямой. Тогда их простым отношением (AC, B) называется число λ , удовлетворяющее условию $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{BC}$.

Заметим, что понятие простого отношения введено для трех различных точек, принадлежащих одной прямой. Изучая свойства простого отношения точек в трехмерном евклидовом пространстве, определенного на основании фактов «школьной» геометрии, мы установили, что оно не может принимать значения 0 и -1 . Кроме того, точка B принадлежит отрезку AC в том и только в том случае, когда $(AC, B) > 0$ [2].

Определим в трехмерном евклидовом пространстве E_3 простое отношение точек в соответствии с определением 1. Введем следующее понятие.

Определение 2. Пусть даны три различные точки A , B и C , принадлежащие одной прямой. Тогда точка B лежит между точками A и C ($A - B - C$), если простое отношение (AC, B) положительно.

Имея достаточно четкие интуитивные представления о понятии «лежать между», мы прекрасно представляем себе свойства отношения порядка точек. Но интуитивные представления не могут служить основанием для даль-

нейших рассуждений. Докажем свойства этого понятия в пространстве E_3 , основываясь на определении 2.

Вначале проверим, что отношение «лежать между» удовлетворяет аксиомам порядка Π_1 – Π_4 аксиоматики Гильберта (см. § 10). Условимся обозначать доказываемые нами утверждения так же, как соответствующие аксиомы в аксиоматике Гильберта.

Утверждение Π_1 . *Если точка B лежит между точками A и C , то A, B, C — три различные точки одной прямой, и при этом B лежит между C и A .*

Доказательство. Пусть даны три точки A, B и C , такие, что $A - B - C$. Из определения 2 следует, что эти точки различные и принадлежат одной прямой. Так как точка B лежит между точками A и C , то $\lambda = (AC, B) > 0$. Проверим, что простое отношение (CA, B) также положительно, откуда будет следовать, что точка B также лежит между точками C и A . Так как $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{BC}$, то $-\overrightarrow{AB} = -\lambda \overrightarrow{BC}$, т. е. $\overrightarrow{BA} = \lambda \overrightarrow{CB}$, или $\overrightarrow{CB} = \frac{1}{\lambda} \overrightarrow{BA}$. Из определения 1 получим $(CA, B) = \frac{1}{\lambda}$.

Так как $\frac{1}{\lambda} > 0$, то точка B лежит между точками C и A . Утверждение доказано.

Утверждение Π_2 . *Каковы бы ни были точки A и B , существует по крайней мере одна точка C , такая, что B лежит между A и C .*

Доказательство. Пользуясь аксиомой VIV_1 аксиоматики Вейля, отложим от точки A вектор $2\overrightarrow{AB}$, получим точку C прямой AB , для которой $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$. Так как в силу аксиомы VIV_2 треугольника $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AB}$, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$. Из определения 1 получим $(AC, B) = 1$. Точка B лежит между точками A и C . Утверждение доказано.

Утверждение Π_3 . *Среди любых трех точек прямой существует не более одной, лежащей между двумя другими.*

Доказательство. Пусть даны три различные точки A, B и C , принадлежащие одной прямой. Так как векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{BC} принадлежат одному одномерному векторному подпространству, то $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{BC}$. Число λ отлично от нуля

и не равно -1 , поэтому оно удовлетворяет одному из следующих условий: 1) $\lambda > 0$; 2) $\lambda < -1$; 3) $-1 < \lambda < 0$.

В первом случае, как следует из определения 1, $(AC, B) > 0$, точка B лежит между точками A и C .

Во втором случае докажем, что точка C лежит между A и B . Так как векторы \overrightarrow{AC} и \overrightarrow{CB} коллинеарны, то $\overrightarrow{AC} = \mu \overrightarrow{CB}$. Нам достаточно показать, что μ — положительное число. Дано, что $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{BC}$, где $\lambda < -1$. Так как $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$, то $\lambda \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$. Отсюда следует, что $\overrightarrow{AC} = (-\lambda - 1) \overrightarrow{CB}$. Из условия $\lambda < -1$ следует, что $\mu = (-\lambda - 1) > 0$. Точка C лежит между A и B .

В третьем случае проверим, что точка A лежит между точками B и C . Докажем, что число δ , удовлетворяющее условию $\overrightarrow{BA} = \delta \overrightarrow{AC}$, положительное. Нам дано, что $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{BC}$, где $-1 < \lambda < 0$. Так как $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$, то $\frac{1}{\lambda} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$, или $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{BA} + \lambda \overrightarrow{AC}$. Отсюда следует, что $\overrightarrow{BA} = -\frac{\lambda}{1+\lambda} \overrightarrow{AC}$. Из условия $-1 < \lambda < 0$ получим $\delta = -\frac{\lambda}{1+\lambda} > 0$, точка A лежит между B и C .

Мы рассмотрели все неравенства, которым может удовлетворять число λ . В каждом случае одна из точек лежит между двумя другими. Нам осталось показать, что если какая-либо точка лежит между двумя другими, то тогда эта и только эта точка может лежать между ними.

Пусть точка B лежит между точками A и C . Покажем, что точка A не лежит между точками B и C , и точка C не лежит между A и B . Так как $A - B - C$, то $\lambda = (AC, B) > 0$. Точки A , B и C — коллинеарные, поэтому $\overrightarrow{BA} = \mu \overrightarrow{AC}$. Проверим, что $\mu < 0$. В силу определения 1, $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{BC}$. Из аксиомы треугольника VIV_2 аксиоматики Вейля следует $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Но $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{\lambda} \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{\lambda} \overrightarrow{BA}$. Поэтому $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BA} - \frac{1}{\lambda} \overrightarrow{BA} = -\left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right) \overrightarrow{BA}$, и $\overrightarrow{BA} = -\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right) \overrightarrow{AC}$. Таким образом, $\mu = -\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)$. В силу положительности числа λ коэффициент μ отрицателен. Точка A не лежит между точками B и C . Аналогично доказывается, что точка C

не лежит между точками A и B . Проверку предоставляем читателю. Утверждение Π_3 доказано.

Таким образом, введенное нами отношение «лежать между» удовлетворяет первым трем аксиомам второй группы аксиом аксиоматики Гильберта. Нам осталось проверить выполнение последней аксиомы из этой группы, аксиомы Паша. Предварительно рассмотрим свойства лучей и полуплоскостей в трехмерном евклидовом пространстве E_3 , определенном на основе аксиоматики Вейля.

В § 10 мы ввели понятие отрезка, луча и полуплоскости. Напомним, что под отрезком понимается пара точек A, B . Точки A и B называются его концами, а точки, лежащие между ними, — внутренними точками, или просто точками отрезка. Точки прямой AB , не лежащие между A и B , — внешними точками отрезка. Определению луча предшествовало утверждение, приведенное нами без доказательства, о том, что любая точка прямой разбивает множество ее точек на два подмножества. Сформулируем и докажем его.

Теорема 1. Пусть O — произвольная точка прямой l . Тогда она разбивает множество остальных точек прямой на два непустых подмножества так, что для любых двух точек A и B , принадлежащих одному подмножеству, точка O является внешней точкой отрезка AB , а для любых двух точек C и D , принадлежащих различным подмножествам, точка O — внутренняя точка отрезка CD .

Доказательство. Обозначим через V_1 одномерное векторное подпространство данной прямой l . Выберем произвольный ненулевой вектор \vec{e} подпространства V_1 . Будем считать, что точка A прямой l принадлежит множеству I , если $\overrightarrow{OA} = \alpha\vec{e}$, где α — положительное число, и точка A принадлежит множеству II , если α — число отрицательное. Очевидно, что любая точка прямой l , не совпадающая с точкой O , принадлежит либо одному, либо другому подмножеству. Докажем, что построенные множества удовлетворяют условиям теоремы.

Пусть точки A и B принадлежат одному из множеств I или II (рис. 67а). Тогда из соотношений

$$\overrightarrow{OA} = \alpha\vec{e}, \quad \overrightarrow{OB} = \beta\vec{e} \quad (1)$$

следует, что ненулевые числа α и β имеют одинаковый знак. Так как точки A , B и O принадлежат одной прямой, то $\overrightarrow{AO} = \lambda \overrightarrow{OB}$. Требуется доказать, что точка O не лежит между точками A и B , т. е. $\lambda < 0$. Используя (1), получим $-\alpha \vec{e} = \lambda \beta \vec{e}$, откуда следует, что

$$\lambda = -\frac{\beta}{\alpha}. \quad (2)$$

Числа α и β имеют одинаковый знак, поэтому $\lambda < 0$. В этом случае утверждение доказано.

Предположим, что точки A и B принадлежат различным множествам (рис. 67 б).

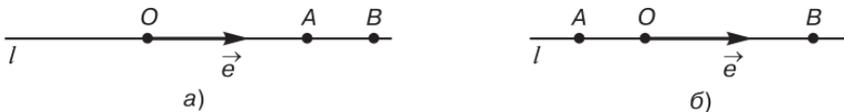


Рис. 67

Тогда из соотношений (1) вытекает, что ненулевые числа α и β имеют различные знаки. Повторяя те же рассуждения, что и в первом случае, мы получим, что простое отношение $(AB, O) = \lambda$ удовлетворяет равенству (2). Но в рассматриваемом случае α и β — числа различных знаков, из (2) следует, что $\lambda > 0$, точка O лежит между A и B . Теорема доказана.

Как было определено в § 10, множества I и II называются лучами, на которые точка O разбивает прямую. При доказательстве теоремы 1 нами использовался ненулевой вектор прямой, содержащей рассматриваемый луч. Ясно, что если дан произвольный луч OA , то всегда можно выбрать такой вектор \vec{e} , принадлежащий подпространству прямой OA , что для любой точки X луча OA выполнено условие $\overrightarrow{OX} = \lambda \vec{e}$, $\lambda > 0$. Такой вектор будем называть направляющим вектором луча. Легко видеть, что любой направляющий вектор луча OA будет сонаправлен с вектором \overrightarrow{OA} .

В § 10 была доказана теорема 1, на основе которой было введено понятие полуплоскости. Но при ее доказательстве была использована аксиома Паша Π_4 , которую мы еще не

проверили. Поэтому приведем доказательство этой теоремы средствами, вытекающими из рассмотренных аксиом Вейля.

Теорема 2. *Прямая a , лежащая в плоскости α , разделяет ее множество точек, не принадлежащих прямой, на два непустых подмножества так, что если точки A и B принадлежат одному подмножеству, то отрезок AB не имеет общих точек с прямой l , а если точки A и B принадлежат различным подмножествам, то отрезок AB пересекает прямую l в своей внутренней точке.*

Доказательство. Рассмотрим данную прямую l и введем аффинную систему координат O, \vec{e}_1, \vec{e}_2 так, чтобы ее начало, точка O , принадлежала прямой l , а вектор \vec{e}_1 принадлежал ее подпространству (рис. 68). Тогда любой точке плоскости X ставится в соответствие упорядоченная пара чисел (x, y) — ее координаты. При этом точка X тогда и только тогда не лежит на прямой l , когда ее вторая координата y отлична от нуля. Будем считать, что точка X принадлежит подмножеству I , если ее вторая координата положительна, и принадлежит подмножеству II , если она отрицательна.

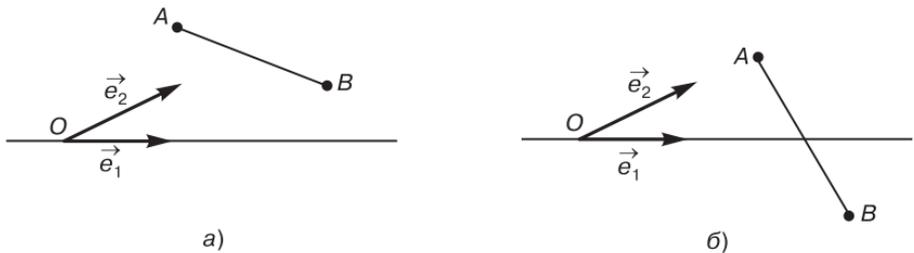


Рис. 68

Покажем, что подмножества I и II удовлетворяют условию доказываемого утверждения. Во-первых, очевидно, что все точки плоскости, не принадлежащие прямой l , находятся либо в одном, либо во втором подмножестве. Во-вторых, нам необходимо вспомнить формулу, полученную в пособии [2]. Если даны координаты двух точек $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ и дано простое отношение $(AB, C) = \lambda$ точек A, B и C , то координаты x и y точки C вычисляются по

формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \quad (3)$$

Пусть точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ принадлежат одному подмножеству (рис. 68а). Рассмотрим произвольную внутреннюю точку $C(x, y)$ отрезка AB . Тогда простое отношение $(AB, C) = \lambda$ положительно. Так как точки A и B принадлежат одному подмножеству, то их вторые координаты y_1 и y_2 либо одновременно положительны, либо одновременно отрицательны. Тогда из соотношений (3) следует, что вторая координата $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$ точки C

не равна нулю, т. е. точка C не принадлежит прямой l . В этом случае утверждение доказано. Предположим, что точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ принадлежат различным подмножествам (рис. 68б). Из равенства $\frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} = 0$ следует,

что $\lambda = -\frac{y_1}{y_2}$. Так как y_1 и y_2 имеют разные знаки, то $\lambda > 0$. Поэтому, если в соотношении (3) мы заменим λ на положительное число $-\frac{y_1}{y_2}$, то получим точку отрезка AB , у которой вторая координата равна нулю. Эта точка принадлежит прямой l . Утверждение доказано полностью.

Множества I и II представляют собой полуплоскости, на которые прямая l разбивает плоскость. Из доказательства теоремы 2 вытекает следствие.

Следствие 1. *Если дана прямая l и выбрана аффинная система координат O, \vec{e}_1, \vec{e}_2 так, чтобы ее начало, точка O , принадлежала прямой l , а вектор \vec{e}_1 был ей параллелен, то полуплоскость, в которой лежит конец вектора \vec{e}_2 , отложенный от начала O , характеризуется тем условием, что вторые координаты ее точек положительны. Вторые же координаты точек другой полуплоскости отрицательны.*

Выяснив, что представляет собой полуплоскость, мы можем проверить, что в этой аксиоматике выполнено условие аксиомы Паша.

Утверждение Π_4 (аксиома Паша). *Пусть A, B и C — три точки, не лежащие на одной прямой, а l — прямая*

плоскости ABC , не проходящая через эти точки. Тогда, если прямая l проходит через точку отрезка AB , то она содержит либо точку отрезка AC , либо точку отрезка BC .

Доказательство. Выберем систему координат O, \vec{e}_1, \vec{e}_2 так, чтобы точка O — ее начало — лежала на прямой l , а вектор \vec{e}_1 был ей параллелен (рис. 69). Рассмотрим координаты данных точек $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$. Так как по условию отрезок AB пересекает прямую l , то точки A и B лежат в различных полуплоскостях, на которые прямая l разбивает плоскость. Тогда из следствия 3 вытекает, что знаки чисел y_1 и y_2 различны. По условию точка C не принадлежит прямой l , поэтому ее вторая координата y_3 отлична от нуля. Следовательно, ее знак совпадает либо со знаком второй координаты точки A (этот случай изображен на рис. 69), либо со знаком второй координаты точки B . В первом случае точки B и C лежат в различных полуплоскостях и прямая l пересекает отрезок BC . Во втором случае точки A и C лежат в различных полуплоскостях, данная прямая пересекает отрезок AC . Утверждение доказано.

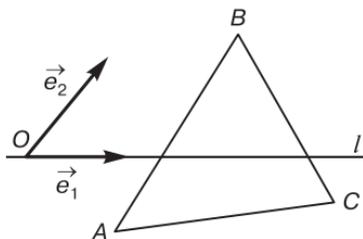


Рис. 69

Таким образом, мы доказали, что в терминах аксиоматики Вейля пространства E_3 можно ввести понятие «лежать между», которое, вместе с ранее введенным понятием прямой, удовлетворяет аксиомам порядка аксиоматики Гильберта трехмерного евклидова пространства.

В заключение рассмотрим свойства углов, сформулированных нами без доказательства в § 10. В том же параграфе было введено понятие угла: *углом мы назвали пару лучей h и k , имеющих общее начало O и не лежащих на одной прямой*. Мы рассматривали две полуплоскости, определяемые сторонами угла. Если дан угол $\angle AOB$, то

полуплоскость α имела в качестве границы прямую OA и содержала луч OB , а граница полуплоскости β совпадала с прямой OB и содержала луч OA . Точки, принадлежащие пересечению полуплоскостей α и β , назывались нами внутренними точками угла. Множество всех внутренних точек угла образовывало его внутреннюю область. Луч, вершина которого совпадает с вершиной угла, и все точки которого являются внутренними, мы назвали внутренним лучом угла.

Используя следствие 1, докажем следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть дан угол $\angle AOB$. Выберем аффинную систему координат O, \vec{e}_1, \vec{e}_2 плоскости так, чтобы ее начало совпадало с вершиной угла O , а векторы \vec{e}_1, \vec{e}_2 были соответственно направляющими векторами лучей OA и OB . Тогда точка M является внутренней точкой угла $\angle AOB$ в том и только в том случае, когда ее координаты относительно системы O, \vec{e}_1, \vec{e}_2 положительны.

Доказательство. Пусть $\angle AOB$ данный угол, а O, \vec{e}_1, \vec{e}_2 — введенная нами система координат (рис. 70). Рассмотрим произвольную точку M с координатами x и y , принадлежащую пересечению полуплоскостей α и β . Из следствия 1 вытекает, что вторая координата y точки M положительна. Проведя для точек полуплоскости β те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 2, получим, что первые координаты ее точек также положительны. Лемма доказана.

Условимся в дальнейшем угол AOB и аффинную систему координат, выбранную так, как указано в условии леммы 1, называть соответствующими друг другу.

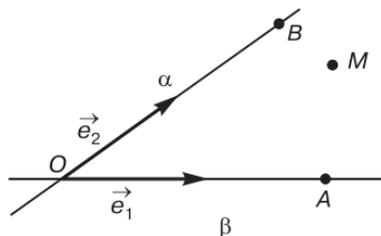


Рис. 70

Так как координаты точек равны коэффициентам разложения радиус-вектора точки по базисным векторам, то из леммы 1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. Пусть дан угол $\angle AOB$. Выберем соответствующую ему аффинную систему координат O, \vec{e}_1, \vec{e}_2 . Тогда точка M является внутренней точкой угла $\angle AOB$ в том и только в том случае, когда из равенства $\vec{OM} = \lambda \vec{e}_1 + \mu \vec{e}_2$ следует $\lambda > 0$ и $\mu > 0$.

Доказанные утверждения позволят нам проверить свойства внутренних точек и лучей угла, которые мы приняли без доказательства в § 3.

Теорема 3. Если луч с началом в вершине угла содержит хотя бы одну его внутреннюю точку, то он является внутренним лучом этого угла.

Доказательство. Рассмотрим произвольный угол AOB , его внутреннюю точку M и луч h с началом в вершине угла O , проходящий через M . Покажем, что любая точка X луча h является внутренней точкой данного угла. Выберем систему координат O, \vec{e}_1, \vec{e}_2 , соответствующую $\angle AOB$, и направляющий вектор \vec{e} луча h (рис. 71). В силу свойств направляющего вектора луча, $\vec{OM} = \mu \vec{e}$, где $\mu > 0$. Если X — произвольная точка луча h , то $\vec{OX} = \lambda \vec{e}$, $\lambda > 0$. Поэтому $\vec{OX} = \frac{\lambda}{\mu} \vec{OM}$. Кроме того, M — внутренняя точка $\angle AOB$ и, в силу следствия 5, $\vec{OM} = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2$, где α и β — положительные числа. Отсюда получим $\vec{OX} = \frac{\alpha\lambda}{\mu} \vec{e}_1 + \frac{\beta\lambda}{\mu} \vec{e}_2$. Так как $\frac{\alpha\lambda}{\mu} > 0$, $\frac{\beta\lambda}{\mu} > 0$, то из следствия 5 вытекает, что X — внутренняя точка угла AOB . Теорема доказана.

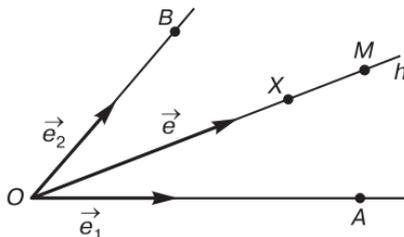


Рис. 71

Рассмотрим теперь свойство внутренних точек отрезка, концы которого лежат на сторонах угла.

Теорема 4. *Если концы отрезка расположены на двух различных сторонах угла, то любая внутренняя точка отрезка является внутренней точкой угла.*

Доказательство. Пусть дан угол AOB . Без ограничения общности можно считать, что концы данного отрезка совпадают с точками A и B . Рассмотрим систему координат O, \vec{e}_1, \vec{e}_2 , где $\vec{e}_1 = \vec{OA}$, $\vec{e}_2 = \vec{OB}$ (рис. 72). Очевидно, она соответствует данному углу, и $A(1;0)$, $B(0;1)$. Рассмотрим произвольную внутреннюю точку M отрезка AB . Пусть ее координаты в указанной системе равны x и y . Так как M — внутренняя точка отрезка AB , то $(AB, C) = \lambda > 0$. Из формул (3), связывающих координаты x и y точки M с простым отношением λ , получим $x = \frac{1}{1+\lambda} > 0$, $y = \frac{\lambda}{1+\lambda} > 0$. Поэтому из леммы 4 следует, что M — внутренняя точка угла. Теорема доказана.

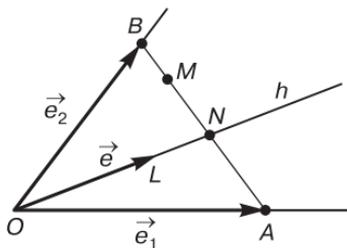


Рис. 72

Теорема 5. *Любой внутренний луч угла пересекает отрезок, концы которого находятся на сторонах угла.*

Доказательство. Дан угол с вершиной в точке O и отрезок AB , концы которого лежат на сторонах угла (рис. 72). Рассмотрим произвольный луч h этого угла, выберем на нем произвольную точку L . Выберем соответствующую этому углу аффинную систему координат O, \vec{e}_1, \vec{e}_2 , где $\vec{e}_1 = \vec{OA}$, $\vec{e}_2 = \vec{OB}$. Пусть координаты точки L в этой системе равны a и b . Тогда, как следует из леммы 4, $a > 0$, $b > 0$. Вектор $\vec{OL} = \vec{e}$ примем в качестве направляющего вектора луча h . Тогда для произвольной точки N луча h

выполнено условие $\overrightarrow{ON} = \mu \vec{e}$, где $\mu > 0$. Отсюда следует, что координаты x и y точки N равны $x = \mu a$, $y = \mu b$. Покажем, что всегда можно выбрать такое положительное число μ , для которого точка N принадлежит отрезку AB . При доказательстве теоремы 7 мы установили, что координаты x и y произвольной внутренней точки отрезка AB равны $x = \frac{1}{1+\lambda}$, $y = \frac{\lambda}{1+\lambda}$, где $\lambda = (AB, C) > 0$. Так как точка N должна одновременно принадлежать отрезку AB и лучу h , то ее координаты удовлетворяют равенствам $x = \frac{1}{1+\lambda} = \mu a$, $y = \frac{\lambda}{1+\lambda} = \mu b$. Отсюда следует, что $\lambda = \frac{b}{a}$, а $\mu = \frac{1}{a+b}$. Таким образом, точка $N\left(\frac{a}{a+b}, \frac{b}{a+b}\right)$ принадлежит одновременно лучу h и отрезку AB . Теорема доказана.

Мы доказали, что в аксиоматике Вейля можно ввести понятие «лежать между», которое удовлетворяет утверждениям, совпадающим с утверждениями аксиом из второй группы аксиоматики Гильберта. Нами также доказаны свойства внутренних точек и лучей угла. Поэтому доказанные утверждения справедливы в трехмерном евклидовом пространстве, построенном как на основе аксиоматики Гильберта, так и на основе аксиоматики Вейля. В следующем параграфе мы покажем, что в евклидовом пространстве, построенном на основе аксиом Вейля, выполняются также аксиомы третьей и четвертой групп аксиоматики Гильберта. Тем самым нами будет доказана эквивалентность этих аксиоматик.

§ 15. РАВЕНСТВО ОТРЕЗКОВ И УГЛОВ В АКСИОМАТИКЕ ВЕЙЛЯ. АКСИОМЫ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Прежде всего, опираясь на аксиоматику Вейля, определим понятие равенства отрезков и докажем, что оно удовлетворяет положениям аксиом Гильберта III₁–III₃ (см. § 11).

Определение 1. *Отрезки AB и CD называются конгруэнтными или равными, если $\overrightarrow{ABAB} = \overrightarrow{CDCD}$.*

Из этого определения следует, что отрезки равны в том и только в том случае, когда равны квадраты длин векторов, соответствующих парам точек, определяемых концами

отрезков. Так как длина вектора — положительное число, то равны и сами длины этих векторов. Проверим выполнение положений аксиом III₁–III₃.

Утверждение III₁. *Если дан отрезок AB и луч с началом в точке A' , то существует такая точка B' этого луча, что $AB = A'B'$. Для каждого отрезка AB требуется, чтобы $AB = BA$.*

Доказательство. Обозначим данный луч с началом в точке A' через h . Пусть \vec{e} — направляющий вектор этого луча (см. § 14). Тогда для любой точки M луча выполнено условие $\overrightarrow{A'M} = \lambda \vec{e}$, $\lambda > 0$. Покажем, что существует такое число β , для которого точка B' , определяемая равенством $\overrightarrow{A'B'} = \beta \vec{e}$, удовлетворяет условию $AB = A'B'$. Для этого рассмотрим равенство $\beta \vec{e} \beta \vec{e} = \overrightarrow{ABA'B'}$. В силу свойств скалярного произведения векторов получим $\beta^2(\vec{e}\vec{e}) = \overrightarrow{ABA'B'}$, отсюда $\beta = \sqrt{\frac{\overrightarrow{ABA'B'}}{\vec{e}\vec{e}}}$. Найденное число β положительно,

следовательно, точка B' , определенная равенством $\overrightarrow{A'B'} = \beta \vec{e}$, принадлежит лучу h и удовлетворяет условию $AB = A'B'$.

Вторая часть доказываемого утверждения непосредственно следует из равенства $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ и свойств скалярного умножения векторов.

Утверждение III₂. *Если отрезок AB конгруэнтен отрезкам $A'B'$ и $A''B''$, то отрезки $A'B'$ и $A''B''$ конгруэнтны между собой.*

Доказательство этого утверждения непосредственно следует из определения 1 и свойств равенства чисел. Докажите его самостоятельно.

Утверждение III₃. *Если точка B лежит между точками A и C ($A - B - C$), а точка B' — между точками A' и C' ($A' - B' - C'$), и $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, то $AC = A'C'$.*

Доказательство. Из определения понятия «лежать между» (см. определения 1 и 2 § 14) следует, что $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{A'B'} = \mu \overrightarrow{B'C'}$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$. Поэтому $\overrightarrow{ABA'B'} = \lambda^2 \overrightarrow{BCB'C'}$, $\overrightarrow{A'B'A'B'} = \mu^2 \overrightarrow{B'C'B'C'}$. В силу условий $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ из определения 1 равенства отрезков получим, что $\lambda = \mu$. Из аксиомы IV_2 (аксиомы треугольника) аксиоматики Вейля

следует, что $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{A'C'}$. Отсюда и из равенства $\lambda = \mu$ получим $\overrightarrow{AC} = (1 + \lambda)\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{A'C'} = (1 + \lambda)\overrightarrow{B'C'}$. Таким образом,

$$\overrightarrow{ACAC} = (1 + \lambda)^2 \overrightarrow{BCBC} = (1 + \lambda)^2 \overrightarrow{B'C'B'C'} = \overrightarrow{A'C'A'C'}.$$

Отрезки AC и $A'C'$ равны между собой. Утверждение доказано.

Для определения понятия равенства углов введем числовую характеристику угла. Углом $\angle hk$ мы называем два луча h и k , имеющих общее начало и не лежащих на одной прямой (см. определение 2 § 10). Пусть векторы \vec{p} и \vec{q} — направляющие векторы соответственно лучей h и k .

Определение 2. Индексом угла $\angle hk$ назовем число, равное $I(\angle hk) = \frac{\vec{p}\vec{q}}{\sqrt{\vec{p}\vec{p}}\sqrt{\vec{q}\vec{q}}}$.

Лемма 1. Индекс угла $\angle hk$ не зависит от выбора направляющих векторов лучей h и k .

Доказательство. Выберем произвольные векторы \vec{p}' и \vec{q}' , которые вместе с векторами \vec{p} и \vec{q} служат направляющими векторами лучей h и k . Тогда $\vec{p}' = \lambda\vec{p}$, $\vec{q}' = \mu\vec{q}$, где числа λ и μ положительны: $\lambda > 0$, $\mu > 0$. Тогда

$$\frac{\vec{p}'\vec{q}'}{\sqrt{\vec{p}'\vec{p}'}\sqrt{\vec{q}'\vec{q}'}} = \frac{\lambda\vec{p}\mu\vec{q}}{\sqrt{\lambda\vec{p}\lambda\vec{p}}\sqrt{\mu\vec{q}\mu\vec{q}}} = \frac{\lambda\mu\vec{p}\vec{q}}{\lambda\mu\sqrt{\vec{p}\vec{p}}\sqrt{\vec{q}\vec{q}}} = \frac{\vec{p}\vec{q}}{\sqrt{\vec{p}\vec{p}}\sqrt{\vec{q}\vec{q}}}.$$

Лемма доказана.

Введем следующее определение.

Определение 3. Два угла называются конгруэнтными или равными, если их индексы совпадают между собой.

Покажем, что введенное нами понятие равенства углов удовлетворяет требованию аксиомы III_4 аксиоматики Гильберта.

Утверждение III_4 . Пусть дан угол $\angle hk$ и дан флаг (O', h', l') . Тогда в полуплоскости l' существует один и только один луч k' с началом в точке O' , такой, что $\angle hk = \angle h'k'$. Каждый угол конгруэнтен сам себе.

Доказательство. Из определения 2 понятия равенства углов вытекает справедливость второй части требования доказываемого утверждения: угол конгруэнтен сам себе.

Рассмотрим данный угол $\angle hk$. Обозначим через O его вершину, а через λ — полуплоскость с границей, содер-

жащей луч h , которой принадлежит луч k . Введем прямоугольную декартову систему координат O, \vec{i}, \vec{j} так, чтобы ее начало совпадало с вершиной угла O , единичный базисный вектор \vec{i} служил направляющим вектором луча h , а конец единичного базисного вектора \vec{j} , отложенного от начала O , принадлежал полуплоскости λ . Рассмотрим также вторую прямоугольную декартову систему координат O', \vec{i}', \vec{j}' , начало которой совпадает с точкой O' данного флага, единичный базисный вектор \vec{i}' является направляющим вектором луча h' флага, а конец базисного вектора \vec{j}' , отложенного от начала O' , принадлежит полуплоскости λ' флага (рис. 73).

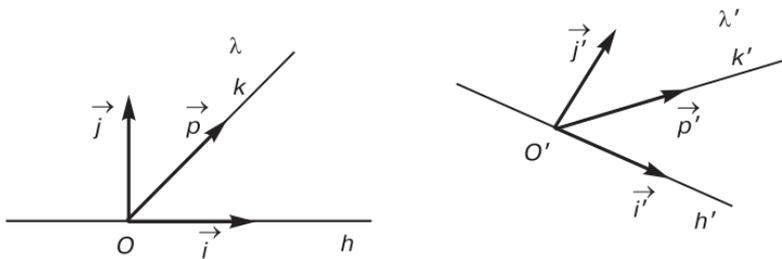


Рис. 73

Обозначим через \vec{p} единичный направляющий вектор луча k — стороны угла $\angle h k$. Пусть координаты вектора \vec{p} в системе координат O, \vec{i}, \vec{j} равны α и β , $\vec{p}\{\alpha, \beta\}$. В соответствии со следствием 3 § 14, вторая координата этого вектора удовлетворяет условию $\beta > 0$. Система координат O, \vec{i}, \vec{j} — прямоугольная декартова, а длина вектора \vec{p} равна 1, поэтому

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 1. \quad (1)$$

Используя соотношение (1), определим индекс угла $\angle h k$. Координаты вектора \vec{i} равны $\vec{i}\{1; 0\}$, базис \vec{i}, \vec{j} — ортонормированный, из формулы для вычисления скалярного произведения векторов в координатах получим

$$I(\angle h k) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \alpha. \quad (2)$$

Рассмотрим вектор \vec{p}' , координаты которого в системе координат O', \vec{i}', \vec{j}' также равны α и β : $\vec{p}'\{\alpha, \beta\}$. Так как $\beta > 0$, то

в силу того же следствия 3 § 14 конец этого вектора, отложенного от точки O' , принадлежит полуплоскости λ' . Пусть k' — луч с началом в точке O' , направляющим вектором которого является вектор \vec{p}' . Лучи h' и k' по построению имеют общее начало O' , они образуют угол $\angle h'k'$. Покажем, что он равен данному углу $\angle hk$. Для этого достаточно доказать, что индексы этих углов совпадают. Базис \vec{i}', \vec{j}' — ортонормированный, вектор $\vec{i}'\{1; 0\}$ по построению является направляющим для луча h' , координаты вектора \vec{p}' равны α и β . Поэтому $I(\angle h'k') = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$. В силу равенства (1)

$I(\angle h'k') = \alpha$. Индексы углов $\angle hk$ и $\angle h'k'$ совпадают, углы равны между собой.

Мы нашли в полуплоскости λ' луч k' с началом в точке O' , который вместе с лучом h' составляет угол, равный данному. Покажем, что такой луч единственный. Пусть существует еще один луч k'' , удовлетворяющий требуемому условию: его начало совпадает с точкой O' , он принадлежит полуплоскости λ' и $\angle hk = \angle h'k''$. Пусть \vec{p}'' — единичный направляющий вектор луча k'' . Обозначим его координаты в базисе \vec{i}', \vec{j}' через α'' и β'' : $\vec{p}''\{\alpha'', \beta''\}$. Так как луч k'' принадлежит полуплоскости λ' , то из того же следствия 3 § 14 вытекает, что $\beta'' > 0$. Проведя те же выкладки, что и в предыдущем случае, получим $I(\angle h'k'') = \frac{\alpha''}{\sqrt{\alpha''^2 + \beta''^2}} = \alpha''$.

Так как $\angle hk = \angle h'k''$, индексы этих углов равны между собой и из соотношения (2) следует, что $\alpha = \alpha''$. Координаты вектора \vec{p}'' имеют вид $\vec{p}''\{\alpha, \beta''\}$. Длина вектора \vec{p} равна 1, его вторая координата β в ортонормированном базисе \vec{i}, \vec{j} — положительное число. Из соотношения (1) следует, что $\beta = \sqrt{1 - \alpha^2}$. Аналогично, длина вектора \vec{p}'' также равна 1, его вторая координата β'' в ортонормированном базисе \vec{i}', \vec{j}' также является положительным числом. Поэтому из соотношения $\sqrt{\alpha^2 + \beta''^2} = 1$ получим $\beta'' = \sqrt{1 - \alpha^2}$. Вторые координаты векторов \vec{p}'' и \vec{p}' так же, как и их первые координаты, совпадают друг с другом, вектор \vec{p}'' равен вектору \vec{p}' , а следовательно, луч k' совпадает с лучом k'' . Утверждение доказано полностью.

Проверим выполнение последней аксиомы Гильберта из третьей группы аксиом.

Утверждение III₅. Пусть A, B и C — три точки, не принадлежащие одной прямой, A', B' и C' — также три точки, не лежащие на одной прямой, пусть $AB = A'B', BC = B'C'$ и $\angle ABC = \angle A'B'C'$, тогда $\angle BAC = \angle B'A'C'$.

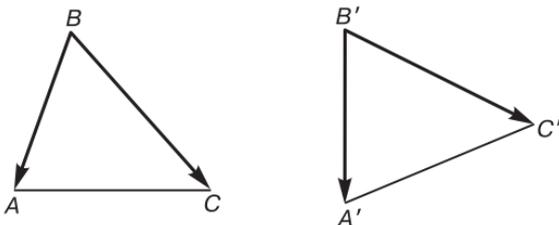


Рис. 74

Доказательство. Пусть A, B, C и A', B', C' — данные тройки точек (рис. 74). Из определений понятий равенств отрезков и углов и из данных в утверждении условий следует

$$\overrightarrow{BA}\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B'A'}\overrightarrow{B'A'}, \quad \overrightarrow{BC}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}\overrightarrow{B'C'}; \quad (3)$$

$$\frac{\overrightarrow{BA}\overrightarrow{BC}}{\sqrt{\overrightarrow{BA}\overrightarrow{BA}}\sqrt{\overrightarrow{BC}\overrightarrow{BC}}} = \frac{\overrightarrow{B'A'}\overrightarrow{B'C'}}{\sqrt{\overrightarrow{B'A'}\overrightarrow{B'A'}}\sqrt{\overrightarrow{B'C'}\overrightarrow{B'C'}}}. \quad (4)$$

Из равенств (3) и (4) получим:

$$\overrightarrow{BA}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'A'}\overrightarrow{B'C'}. \quad (5)$$

Требуется поверить, что индексы углов BAC и $B'A'C'$ равны между собой. Направляющими векторами лучей, образующих угол BAC , служат векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} , а для лучей угла $B'A'C'$ — соответственно векторы $\overrightarrow{A'B'}$ и $\overrightarrow{A'C'}$. Поэтому индексы рассматриваемых углов имеют вид

$$I(\angle BAC) = \frac{\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}}{\sqrt{\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AB}}\sqrt{\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AC}}}, \quad I(\angle B'A'C') = \frac{\overrightarrow{A'B'}\overrightarrow{A'C'}}{\sqrt{\overrightarrow{A'B'}\overrightarrow{A'B'}}\sqrt{\overrightarrow{A'C'}\overrightarrow{A'C'}}}. \quad (6)$$

Воспользуемся аксиомой треугольника (см. аксиому $ВIV_2$ аксиоматики Вейля, § 12). Из нее следует $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'}$. Отсюда получим

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}\overrightarrow{BC}, \\ \overrightarrow{A'B'}\overrightarrow{A'C'} &= \overrightarrow{A'B'}(\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'}) = \overrightarrow{A'B'}\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'B'}\overrightarrow{B'C'}. \end{aligned}$$

Из свойств скалярного произведения векторов и равенств (3)–(5) следует, что $\overrightarrow{ABAB} = \overrightarrow{A'B'A'B'}$, $\overrightarrow{ABAC} = \overrightarrow{A'B'A'C'}$. Аналогично,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ACAC} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{ABAB} + 2\overrightarrow{ABBC} + \overrightarrow{BCBC}, \\ \overrightarrow{A'C'A'C'} &= (\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'})(\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'}) = \\ &= \overrightarrow{A'B'A'B'} + 2\overrightarrow{A'B'B'C'} + \overrightarrow{B'C'B'C'}. \end{aligned}$$

Поэтому из тех же соотношений (3)–(5) вытекает, что $\overrightarrow{ACAC} = \overrightarrow{A'C'A'C'}$. Таким образом, правые части соотношений (6) совпадают друг с другом. Индексы углов $\angle BAC$ и $\angle B'A'C'$, а следовательно, и сами углы равны между собой. Утверждение доказано.

Мы показали, что в терминах аксиоматики Вейля выполняются утверждения первой, второй, третьей и пятой групп аксиом аксиоматики Гильберта. Проверим справедливость четвертой группы аксиом (аксиомы непрерывности), состоящей из аксиом Архимеда и Кантора (см. § 11).

Утверждение IV₁ (аксиома Архимеда). Пусть даны два отрезка AB и CD . Тогда на прямой AB существует конечная система, состоящая из n точек A_1, A_2, \dots, A_n , расположенных так, что точка A_1 лежит между точками A и A_2 , точка A_2 — между точками A_1 и A_3 и так далее. При этом отрезки $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ равны отрезку CD (рис. 75), а точка B лежит между A и A_n .



Рис. 75

Доказательство. В соответствии с утверждением III₁ отложим на луче AB от точки A отрезок $AA_1 = CD$. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AA_1}$ и \overrightarrow{AB} . Так как они сонаправлены, то $\overrightarrow{AB} = \mu\overrightarrow{AA_1}$, где $\mu > 0$. Выберем такое натуральное число n , которое удовлетворяет неравенству $n > \mu$. Отложим на луче AB от точки A_1 отрезок CD $n - 1$ раз, получим систему точек A_1, A_2, \dots, A_n . Очевидно, что точка A_1 лежит между

точками A и A_2 , точка A_2 — между точками A_1 и A_3 и так далее, точка A_{n-1} лежит между точками A_{n-2} и A_n . Ясно также, что $AA_1 = A_1A_2 = \dots = A_{n-1}A_n = CD$ и $\overrightarrow{AA_n} = n\overrightarrow{AA_1}$. Докажем, что точка B лежит между точками A и A_n . Действительно, векторы \overrightarrow{AB} и $\overrightarrow{BA_n}$ коллинеарны, поэтому $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{BA_n}$. В соответствии с определениями 1 и 2 § 14 нам достаточно показать, что $\lambda > 0$. Действительно, $\overrightarrow{AB} = \mu\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AA_n} = n\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BA_n} = \overrightarrow{AA_n} - \overrightarrow{AB}$, поэтому $\overrightarrow{BA_n} = (n - \mu)\overrightarrow{AA_1}$. Из равенства $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{BA_n}$ следует, что $\overrightarrow{AB} = \lambda(n - \mu)\overrightarrow{AA_1}$. Таким образом, $\mu\overrightarrow{AA_1} = \lambda(n - \mu)\overrightarrow{AA_1}$, $\lambda = \frac{\mu}{n - \mu}$. Так как $\mu > 0$, $n > \mu$, то $\lambda > 0$. Утверждение доказано.

Нам осталось показать, что в евклидовом пространстве, построенном на основе аксиоматики Вейля, выполняется аксиома Кантора.

Утверждение VI₂ (аксиома Кантора). Пусть на произвольной прямой a дана бесконечная система отрезков $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n, \dots$, из которых каждый последующий лежит внутри предыдущего. Пусть далее, для любого отрезка CD найдется такой номер n , что $A_nB_n < CD$. Тогда на прямой a существует точка X , принадлежащая отрезкам $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n, \dots$.

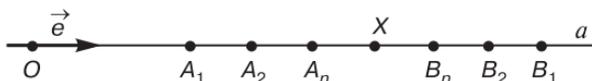


Рис. 76

Доказательство. Выберем на данной прямой a произвольную точку O и ненулевой вектор \vec{e} , параллельный прямой a (рис. 76). Точка O и вектор \vec{e} определяют аффинную систему координат на прямой a . Каждой точке M прямой взаимно однозначно ставится в соответствие ее координата x , удовлетворяющая условию $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}$. Обозначим координаты точек A_i через a_i , а координаты точек B_i через b_i . Так как каждый последующий отрезок лежит внутри предыдущего, то $a_i < a_j < b_j < b_i$ для любых натуральных чисел i и j , удовлетворяющих условию $i < j$ (проверьте это утверждение самостоятельно). Таким образом, на числовой прямой мы

имеем бесконечную систему вложенных друг в друга числовых отрезков, удовлетворяющих условию аксиомы Кантора. Так как эта аксиома выполняется на числовой прямой, то она же имеет место и на прямой a . Утверждение доказано.

Мы доказали, что в пространстве, построенном на основе аксиом Вейля трехмерного евклидова пространства, выполняются все утверждения аксиом Гильберта. В § 12 нами была доказана теорема 1, из которой следует, что если трехмерное евклидово пространство построено на основе аксиоматики Гильберта, то, определив понятие векторов и операций над ними так, как это было сделано в курсе аналитической геометрии (см. [2]), получим, что будут справедливы свойства операций сложения векторов, умножения вектора на число, скалярного произведения и откладывания вектора от точки, совпадающие с формулировками соответствующих аксиом Вейля. Поэтому имеет место следующая теорема.

Теорема. *Аксиоматики Гильберта и Вейля трехмерного евклидова пространства эквивалентны.*

Так как в § 12 нами была доказана непротиворечивость и полнота аксиоматики Вейля, из теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

Теорема. *Аксиоматика Гильберта трехмерного евклидова пространства непротиворечива, если непротиворечива арифметика. Она также обладает свойством полноты.*

Можно доказать, что аксиоматика Гильберта трехмерного евклидова пространства обладает свойством независимости (см. [11]–[12]).

АКСИОМА ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ И УТВЕРЖДЕНИЯ, ЕЙ ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ

§ 16. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПЯТОГО ПОСТУЛАТА ЕВКЛИДА И УТВЕРЖДЕНИЯ ФАРКАША БОЙЯИ АКСИОМЕ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

Открытию неевклидовой геометрии Лобачевского предшествовали исследования проблемы пятого постулата, роли и места аксиомы параллельности и утверждений, ей эквивалентных, в элементарной геометрии (см. § 8). На наш взгляд, они крайне важны для учителя математики, так как раскрывают роль и устанавливают значение аксиомы параллельности в утверждениях школьного курса геометрии. Напомним, что *два утверждения называются эквивалентными, если при условии, что первое из них истинно, из него вытекает второе, и, наоборот, из истинности второго следует справедливость первого*. Мы будем предполагать, что все наши исследования проводятся в трехмерном евклидовом пространстве, построенном на основании аксиоматики Гильберта. Напомним также, что утверждения, доказанные на основе первых четырех групп аксиом Гильберта, при доказательстве которых не используется аксиома параллельности, относятся к так называемой абсолютной геометрии. В § 11 мы сформулировали и доказали ряд утверждений абсолютной геометрии, которые нам понадобятся в дальнейшем. Приведем их формулировки.

В равнобедренном треугольнике углы при основании равны между собой.

Справедливы первый, второй и третий признаки равенства треугольников.

Вертикальные углы равны между собой.

Любые два прямых угла конгруэнтны между собой.

Через любую точку прямой можно провести перпендикулярную к ней прямую.

Теорема 1 (теорема о внешнем угле треугольника). *Внешний угол треугольника больше любого внутреннего, не смежного с ним.*

Теорема 2. *Если при пересечении двух прямых a и b третьей соответственные углы α и β равны между собой, то прямые a и b не пересекаются.*

Теорема 3. *Если при пересечении двух прямых a и b третьей прямой с накрест лежащие углы равны между собой, или сумма внутренних односторонних углов равна развернутому, то прямые a и b не пересекаются.*

В дальнейшем при ссылок на приведенные утверждения будем применять указанные выше обозначения (теоремы 1, 2 и 3). Наконец, напомним утверждение аксиомы параллельности евклидовой геометрии (аксиома V_1 аксиоматики Гильберта).

V_1 (аксиома параллельности евклидовой геометрии, аксиома Плейфера). Пусть a — произвольная прямая, A — точка, не лежащая на этой прямой. Тогда в плоскости, определяемой точкой A и прямой a , существует не более одной прямой, проходящей через точку A и не пересекающей прямую a .

В первом параграфе мы привели формулировку пятого постулата Евклида:

Если две прямые при пересечении с третьей образуют с одной стороны внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, то эти прямые пересекаются при достаточном продолжении с той стороны от секущей прямой, для которой эта сумма меньше двух прямых углов.

Установим эквивалентность пятого постулата Евклида и аксиомы параллельности евклидовой геометрии.

Теорема 4. *Пятый постулат Евклида эквивалентен аксиоме параллельности евклидовой геометрии.*

Доказательство. Докажем, что при условии выполнения аксиомы параллельности евклидовой геометрии справедлив пятый постулат Евклида. Предположим противное. Пусть даны две прямые a и b , которые не пересекаются и при пересечении с третьей прямой c образуют с ней внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых (рис. 77):

$$\angle BAP + \angle ABN < 2d. \quad (1)$$

Здесь и в дальнейшем прямой угол будем обозначать символом d . Проведем через точку B прямую b' так, чтобы

$$\angle BAP + \angle ABM = 2d. \quad (2)$$

Тогда в силу теоремы 2 прямые a и b' не пересекаются. Из соотношений (1) и (2) следует, что прямые b и b' различны. Мы пришли к противоречию с аксиомой Плейфера. Через точку B проходят две различные прямые b и b' , которые не пересекают прямую a .

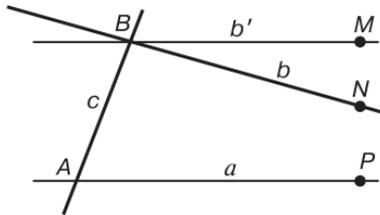


Рис. 77

Обратно, пусть выполнено требование пятого постулата Евклида. Рассмотрим произвольную точку B и прямую a , ее не содержащую (рис. 78). Опустим из точки B перпендикуляр c на прямую a и восставим в этой же точке перпендикуляр b' к прямой c . Из теоремы 2 следует, что прямые a и b' не пересекаются. Проведем через точку B произвольную прямую b , отличную от прямой b' . Так как прямые b и b' не совпадают, то один из углов, который прямая b образует с прямой c , отличен от прямого угла. На рисунке 78 таким углом является ABN . Таким образом, $\angle ABN + \angle BAP < 2d$. В силу условия пятого постулата Евклида, прямые a и b имеют общую точку. Любая прямая, проходящая через точку B и отличная от прямой b' , пересекает прямую a . Теорема доказана полностью.

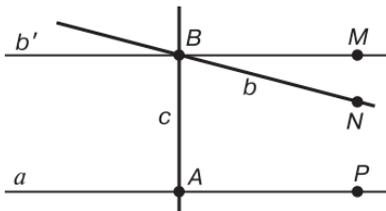


Рис. 78

В конце XVIII и начале XIX веков известный венгерский математик Фаркаш Бойяи, отец одного из первооткрывателей геометрии Лобачевского Яноша Бойяи (см. § 8), предпринимал безуспешные попытки доказательства пятого постулата Евклида. Он привел доказательство пятого постулата, но при следующем неявном допущении: вокруг любого треугольника на плоскости можно описать окружность. Покажем, что это утверждение равносильно аксиоме параллельности евклидовой геометрии.

Прежде всего, напомним известный факт из школьного курса геометрии: *если вокруг треугольника можно описать окружность, то ее центр лежит в точке пересечения серединных перпендикуляров*. И наоборот, *если два серединных перпендикуляра треугольника пересекаются, то их общая точка служит центром описанной окружности этого треугольника и через эту точку проходит серединный перпендикуляр к третьей стороне*.

Теорема 5. *Утверждение о том, что вокруг любого треугольника на плоскости можно описать окружность, равносильно аксиоме параллельности евклидовой геометрии.*

Доказательство. Предположим, что на плоскости выполнена аксиома Плейфера: через точку, не лежащую на данной прямой, проходит не более одной прямой, не пересекающей данную. Тогда, как отмечалось в § 11, если прямые не пересекаются, то при пересечении третьей прямой накрест лежащие углы равны между собой. Рассмотрим треугольник ABC . Пусть M и N — середины сторон AB и AC , а t и n — соответственно серединные перпендикуляры, восстановленные в этих точках (рис. 79 а). Предположим, что серединные перпендикуляры t и n не пересекаются (рис. 79 б). Тогда углы между прямыми AC и n и прямыми AB и t прямые. Прямая AC пересекает прямую t . Действительно, если предположить противное, то AC параллельна t . Тогда через точку N проходит две прямые, параллельные t , что противоречит аксиоме Плейфера. Поэтому, в силу признака параллельности прямых на евклидовой плоскости, угол между t и AC прямой. С другой стороны, прямая t — серединный перпендикуляр к прямой AB . Таким образом, из точки A мы провели два

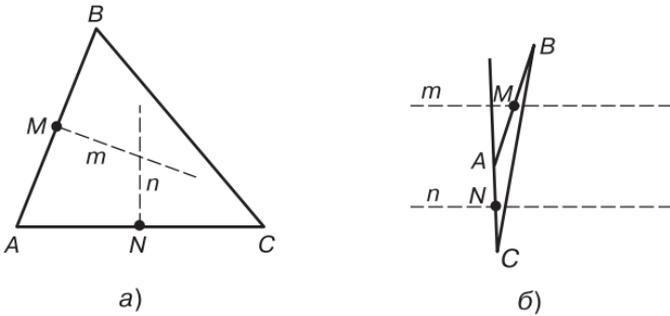


Рис. 79

перпендикуляра к прямой m , чего не может быть. Построенное противоречие опровергает наше предположение, серединные перпендикуляры m и n пересекаются. Вокруг любого треугольника на евклидовой плоскости можно описать окружность.

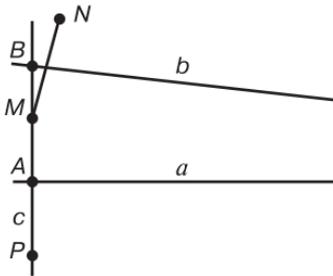


Рис. 80

Обратно. Предположим, что вокруг любого треугольника на плоскости можно описать окружность. Пусть дана произвольная прямая a и точка B , которая ей не принадлежит. Опустим из точки B перпендикуляр c на прямую a . Нам достаточно доказать, что любая прямая b , проходящая через точку B и неперпендикулярная прямой c , пересекается с прямой a . Ясно, что тогда будет выполняться аксиома

Плейфера. Рассмотрим такую прямую b (рис. 80). Выберем на отрезке AB произвольную точку M . Отразим ее симметрично относительно прямых a и b . Получим соответственно точки P и N . Так как прямые a и c перпендикулярны, то точка P принадлежит прямой c . Кроме того, прямые c и b не перпендикулярны друг другу, поэтому точка N не лежит на прямой c . Точки P , M и N являются вершинами треугольника, а прямые a и b служат его серединными перпендикулярами. Они, в силу предположения, пересекаются в центре окружности, описанной вокруг треугольника PMN . Теорема доказана.

§ 17. ТЕОРЕМЫ ЛЕЖАНДРА

В настоящем параграфе мы докажем теоремы Лежандра, которые лежат в основе утверждения о соответствии равенства суммы углов треугольника двум прямым углам и аксиомы параллельности евклидовой плоскости. В § 8 была приведена историческая справка о попытках Лежандра доказать пятый постулат Евклида. Теоремы Лежандра являются утверждениями абсолютной геометрии, при доказательстве всех утверждений настоящего параграфа мы не будем использовать аксиому V_1 Гильберта параллельности евклидовой геометрии (аксиому Плейфера).

При изучении свойств треугольника естественно возникает вопрос о сумме его углов. Из школьного курса геометрии известно, что на евклидовой плоскости сумма углов треугольника равна двум прямым углам. Какие ограничения наложены на это число в абсолютной геометрии? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 1 (первая теорема Лежандра). *Сумма углов треугольника не может превышать двух прямых углов.*

Доказательство. Введем следующее обозначение. Сумму углов произвольного треугольника ABC будем обозначать через $\sigma(ABC)$.

Пусть дан произвольный треугольник ABC , докажем, что существует такой треугольник $A_1B_1C_1$, у которого, во первых, угол A_1 меньше или равен половине угла A треугольника ABC ($\angle A_1 \leq \frac{1}{2} \angle A$), а во вторых,

$\sigma(A_1B_1C_1) = \sigma(ABC)$. Рассмотрим середину M стороны BC данного треугольника (рис. 81). Отложим на луче AM от точки M отрезок MD , равный отрезку AM . Получим треугольник ABD . Отрезок CM равен отрезку MB , так как M — середина отрезка CB , $AM = MD$ по построению, $\angle AMC = \angle BMD$ как вертикальные, поэтому треугольники AMC и BMD равны между собой по первому признаку равенства треугольников. Отсюда следует, что $\angle CAD = \angle ADB$, $\angle ACB = \angle MBD$. Следовательно, $\angle BAC = \angle BAM + \angle MDB$. Мы получили, что в треугольнике ABD один из углов $\angle BAM$

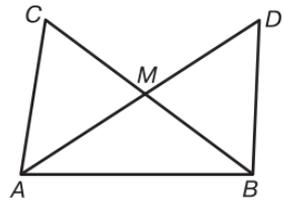


Рис. 81

или $\angle MDB$ меньше или равен половине $\angle BAC$ треугольника ABC . Кроме того, $\angle ABD = \angle ABM + \angle DBM$. Из полученных равенств вытекает, что

$$\begin{aligned}\sigma(ABC) &= \angle BAC + \angle ACB + \angle ABC = \\ &= \angle BAD + \angle ADB + \angle ABD = \sigma(ADB).\end{aligned}$$

Треугольник ABD искомый. Осталось только переименовать его вершины, обозначив при этом через A_1 ту из них, угол при которой меньше или равен половине $\angle BAC$ треугольника ABC .

Ясно, что повторив этот процесс n раз, мы придем к треугольнику $A_n B_n C_n$, сумма углов которого равна сумме углов треугольника ABC , а угол при вершине A_n удовлетворяет неравенству

$$\angle A_n \leq \frac{1}{2^n} \angle A. \quad (1)$$

Предположим, что существует треугольник ABC , для которого

$$\sigma(ABC) = \angle A + \angle B + \angle C > 2d. \quad (2)$$

Используя предыдущие рассуждения, построим треугольник $A_n B_n C_n$, сумма углов которого равна сумме углов треугольника ABC :

$$\sigma(A_n B_n C_n) = \angle A_n + \angle B_n + \angle C_n = \angle A + \angle B + \angle C = \sigma(ABC), \quad (3)$$

а угол A_n удовлетворяет неравенству (1). При этом выберем число n так, чтобы $\angle A_n = \frac{1}{2^n} \angle A < \sigma(ABC) - 2d$. Тогда из соотношений (1) — (3) следует, что $\angle A_n + \angle B_n + \angle C_n = \sigma(A_n B_n C_n) > 2d$ и $\sigma(A_n B_n C_n) - \angle A_n > 2d$. Таким образом,

$$\angle B_n + \angle C_n > 2d. \quad (4)$$

Воспользуемся теоремой 1 о внешнем угле треугольника, из нее следует, что сумма двух углов треугольника не может быть больше развернутого угла. Действительно, пусть $\angle A_n B_n P$ — внешний угол при вершине B_n треугольника $A_n B_n C_n$ (рис. 82). Тогда из теоремы о внешнем угле треугольника следует: $\angle A_n B_n P > \angle C_n$. Но $\angle A_n B_n P = 2d - \angle B_n$. Поэтому из неравенства (4) получим, что $\angle C_n > 2d - \angle B_n = \angle A_n B_n P$. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Таким образом, в абсолютной геометрии сумма углов треугольника не может превышать двух прямых углов. Возникает вопрос, могут ли одновременно существовать два треугольника, сумма углов одного из которых равна двум прямым, а у другого она меньше двух прямых углов. Ответ на этот вопрос, и ответ отрицательный, дает вторая теорема Лежандра. Прежде, чем приступить к ее доказательству, введем понятие дефекта треугольника и изучим его свойства.

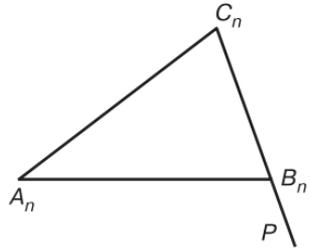


Рис. 82

Определение 1. Дефектом $\delta(ABC)$ треугольника ABC называется разность между развернутым углом и суммой углов этого треугольника: $\delta(ABC) = 2d - \sigma(ABC)$.

Из первой теоремы Лежандра следует, что

$$\delta(ABC) \geq 0. \tag{5}$$

Свойство 1. Пусть дан треугольник ABC , точка M принадлежит его стороне AC . Тогда

$$\delta(ABC) = \delta(ABM) + \delta(BMC). \tag{6}$$

Доказательство. Так как точка M принадлежит стороне AC данного треугольника, то $\angle ABC = \angle ABM + \angle MBC$ (рис. 83). Кроме того, сумма углов при вершине M треугольников ABM и BMC равна развернутому углу $\angle AMB + \angle BMC = 2d$. Из полученных равенств следует:

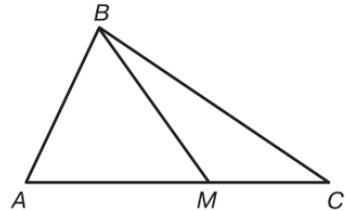


Рис. 83

$$\begin{aligned} \delta(ABM) + \delta(BMC) &= 2d - \angle BAM - \angle ABM - \angle BMA + 2d - \\ &\quad - \angle BMC - \angle MBC - \angle BCM = 4d - \angle BAM - \angle ABM - \\ &\quad - 2d - \angle MBC - \angle BCM = 2d - \angle BAC - \angle ABC - \angle BCA = \delta(ABC). \end{aligned}$$

Свойство доказано.

Свойство 2. Если точка M принадлежит стороне AC треугольника ABC , то

$$\delta(ABC) \geq \delta(ABM). \tag{7}$$

Доказательство следует из неравенства (5) и равенства (6).

Свойство 3. Если точка M принадлежит стороне AC треугольника ABC и $\delta(ABC) = 0$, то дефект треугольника ABM также равен нулю.

Доказательство этого свойства вытекает из неравенств (5) и (7).

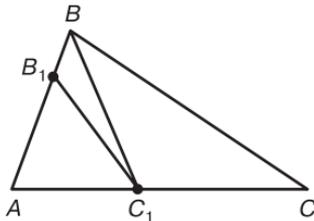


Рис. 84

Свойство 4. Если точки B_1 и C_1 принадлежат соответственно сторонам AB и AC треугольника ABC , то

$$\delta(ABC) \geq \delta(AB_1C_1). \quad (8)$$

Для доказательства достаточно провести отрезок BC_1 (рис. 84). Из свойства 2 следует, что $\delta(ABC) \geq \delta(ABC_1)$ и $\delta(ABC_1) \geq \delta(AB_1C_1)$. Откуда и следует искомое неравенство.

Свойство 5. Если точки B_1 и C_1 принадлежат соответственно сторонам AB и AC треугольника ABC и $\delta(ABC) = 0$, то $\delta(AB_1C_1) = 0$.

Доказательство этого свойства легко получить из неравенств (5) и (8).

Перейдем к доказательству второй теоремы Лежандра.

Теорема 2 (вторая теорема Лежандра). Пусть существует хотя бы один треугольник, сумма углов которого равна двум прямым углам, тогда сумма углов любого другого треугольника также равна развернутому углу.

Доказательство. Нам достаточно доказать, что из равенства нулю дефекта какого-либо треугольника на плоскости следует равенство нулю дефекта любого другого треугольника. Прежде всего докажем это утверждение для прямоугольных треугольников.

Лемма. Если дефект какого-либо прямоугольного треугольника на плоскости равен нулю, то дефект любого другого прямоугольного треугольника также равен нулю.

Доказательство. Пусть ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом A , дефект ABC равен нулю, M — середина гипотенузы CB . Построим точки B_1 , C_1 и P , симметричные точке A относительно точек B , C и M

(рис. 85). Обозначим угол CAM через $\angle\alpha$, а угол BAM — через $\angle\beta$. По условию треугольник ABC прямоугольный, поэтому

$$\angle\alpha + \angle\beta = d. \tag{9}$$

Ведем также обозначения $\angle ACB = \angle 1$, $\angle ABC = \angle 2$. Так как дефект треугольника ABC равен нулю, то

$$\angle 1 + \angle 2 = d. \tag{10}$$

Точки A и P симметричны относительно точки M , поэтому $\triangle ACM = \triangle PBM$, $\triangle AMB = \triangle PMC$. Отсюда следует, что $\angle ACM = \angle MBP = \angle 1$, $\angle MBA = \angle MCP = \angle 2$ и $\angle MAC = \angle MPB = \angle\alpha$, $\angle MAB = \angle MPC = \angle\beta$. В силу равенства (10) $\angle PBA = d$. Аналогично, $\angle ACP = d$. Прямая BP перпендикулярна прямой AB , а прямая PC перпендикулярна прямой AC . Треугольники ABP и ACP — прямоугольные. По построению точки A и B_1 центрально симметричны относительно точки B , следовательно, они симметричны относительно прямой PB . Аналогично, точки A и C_1 симметричны относительно прямой CP . Отсюда следует, что

$$\triangle APB = \triangle B_1PB, \quad \triangle APC = \triangle C_1PC \tag{11}$$

и треугольники BPB_1 и CPC_1 также прямоугольные. Из равенств треугольников вытекает, что $AB = B_1B$, $AC = C_1C$, $\angle BPB_1 = \angle BPA = \angle\alpha$ и $\angle CPC_1 = \angle CPA = \angle\beta$. Таким образом, в силу равенства (11), $\angle C_1PC + \angle CPA + \angle APB + \angle BPB_1 = 2\angle\alpha + 2\angle\beta = 4d$. Угол C_1PB_1 — развернутый, точки C_1 , P и B_1 лежат на одной прямой. Из равенств (11) также следует, что $\angle AC_1B_1 = \angle\alpha$ и $\angle AB_1C_1 = \angle\beta$. Мы построили прямоугольный треугольник AB_1C_1 , стороны которого в два раза больше сторон исходного треугольника ABC , а дефект $\delta(AB_1C_1)$ равен 0 (см. (10)). Ясно, что, продолжая этот процесс, мы можем построить такой прямоугольный треугольник AB_nC_n , для которого $\delta(AB_nC_n) = 0$ и $AB_n = 2^n AB$, $AC_n = 2^n AC$.

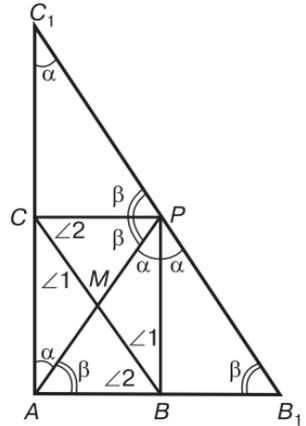


Рис. 85

Рассмотрим теперь произвольный прямоугольный треугольник RST с прямым углом R . Выберем такое натуральное число n , чтобы катеты RS и RT удовлетворяли неравенствам $RS < nAB$, $RT < nAC$, где AB и AC — катеты данного прямоугольного треугольника с нулевым дефектом. Построим указанным выше способом прямоугольный треугольник AB_nC_n , у которого $AB_n = nAB$, $AC_n = nAC$, $\delta(AB_nC_n) = 0$. Отложим на лучах RS и RT соответственно отрезки $RS_n = nAB$, $RT_n = nAC$ (рис. 86). Получим прямоугольный треугольник RS_nT_n , равный ΔAB_nC_n . По построению треугольник RS_nT_n имеет нулевой дефект и, в силу свойства 6, дефект треугольника RST равен нулю. Лемма доказана.

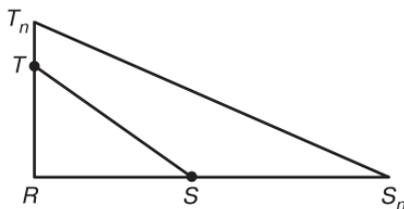


Рис. 86

Лемма представляет собой частный случай второй теоремы Лежандра. С ее помощью легко доказать это утверждение в общем случае. Предварительно сделаем следующее замечание. Если дан непрямоугольный треугольник, то его всегда можно разбить на два прямоугольных треугольника. Для этого достаточно провести высоту к его большей стороне, лежащую внутри треугольника.

Пусть на плоскости дан произвольный треугольник ABC , дефект которого равен нулю. Рассмотрим второй произвольный треугольник PQR . Разобьем их соответственно на прямоугольные треугольники ACH , AHB и PSR , PSQ (рис. 87). Так как $\delta(ABC) = 0$, то из свойства 5 следует, что дефекты прямоугольных треугольников AHB и AHC также равны нулю. Из леммы 8 вытекает, что дефект любого другого прямоугольного треугольника совпадает с нулем. Следовательно, $\delta(RSP) = \delta(PSQ) = 0$. Так как треугольник PRQ «составлен» из прямоугольных треугольников RSP

и PSQ , из свойства 2 следует, что $\delta(RPQ) = 0$. Вторая теорема Лежандра доказана полностью.

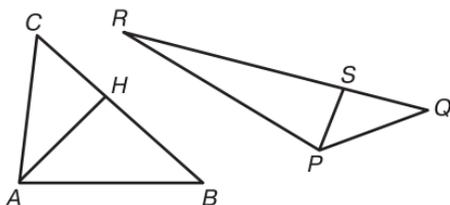


Рис. 87

Теоремы Лежандра имеют большое значение при построении основ геометрии Лобачевского. В следующем параграфе они будут использованы нами при доказательстве утверждений, равносильных аксиоме Плейфера.

§ 18. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ АКСИОМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ЕВКЛИДОВОЙ ПЛОСКОСТИ ТЕОРЕМЕ О СУММЕ УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА, ПОСТУЛАТУ ВАЛЛИСА И ПРЕДЛОЖЕНИЮ ЛЕЖАНДРА

Из первой и второй теорем Лежандра следует, что либо у любого треугольника сумма углов равна двум прямым, либо сумма углов любого треугольника строго меньше развернутого угла. Исследуем взаимосвязь аксиомы параллельности евклидовой плоскости и утверждения о равенстве суммы углов треугольника двум прямым углам.

Теорема 1. *Предположение о существовании треугольника, сумма углов которого совпадает с суммой двух прямых углов, равносильно аксиоме параллельности евклидовой плоскости.*

Доказательство. Мы не будем повторять доказательство известного утверждения школьного курса геометрии: на евклидовой плоскости сумма углов любого треугольника равна развернутому углу. Нас интересует обратное утверждение. Предположим, что на плоскости существует треугольник, сумма углов которого равна двум прямым углам. Докажем, что верно утверждение аксиомы Плейфера: *если даны точка и прямая, принадлежащие плоскости, причем точка не лежит на прямой, то в этой плоскости существует*

не более одной прямой, проходящей через данную точку и не пересекающей данную прямую.

Для доказательства нам необходимо следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. Сумма углов треугольника равна $2d$ тогда и только тогда, когда его внешний угол равен сумме внутренних углов, с ним не смежных.

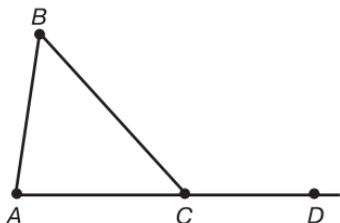


Рис. 88

Доказательство. Необходимость. Пусть в треугольнике ABC $\angle A + \angle B + \angle C = 2d$ (рис. 88). Тогда $\angle A + \angle B = 2d - \angle C$. Кроме того, внешний угол $\angle BCD$ составляет с углом C развернутый угол, поэтому $\angle BCD = 2d - \angle C$. Отсюда следует, что $\angle BCD = \angle A + \angle B$.

Достаточность. Пусть $\angle BCD = \angle A + \angle B$. Так как $\angle BCD = 2d - \angle C$, то $2d - \angle C = \angle A + \angle B$. Поэтому $\angle A + \angle B + \angle C = 2d$. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 1. Из второй теоремы Лежандра следует, что в условиях нашей теоремы сумма углов любого треугольника на плоскости равна $2d$. Поэтому для любого треугольника плоскости верна доказанная лемма.

Рассмотрим произвольную точку A и прямую m плоскости, точка A не принадлежит прямой m . Опустим из точки A перпендикуляр AB на прямую m (рис. 89) и восстановим в точке A перпендикуляр h к прямой AB . Как известно, прямые m и h не пересекаются (теорема 2, § 11). Предположим, что через точку A проходит еще

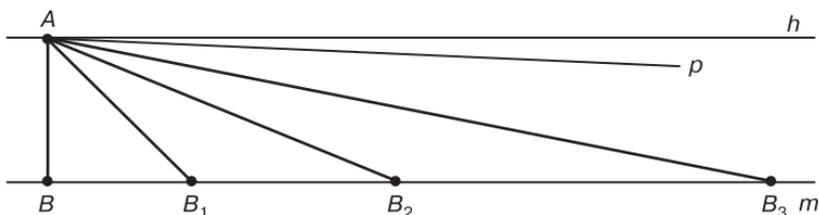


Рис. 89

одна прямая p , отличная от прямой h , не пересекающая прямую m . Рассмотрим ту полуплоскость с границей AB , в которой прямые p и AB образуют острый угол. Отложим в этой полуплоскости на прямой m от точки B отрезок BB_1 , равный отрезку AB . Сумма углов треугольника ABB_1 равна $2d$. Угол ABB_1 — прямой, поэтому $\angle A + \angle B_1 = d$. По построению $\triangle ABB_1$ — равнобедренный. Отсюда следует, что $\angle BAB_1 = \angle AB_1B = \frac{d}{2}$. Отложим на луче BB_1 от точки B_1 отрезок AB_1 . Получим точку B_2 . Угол AB_1B треугольника AB_1B является внешним углом $\triangle AB_1B_2$. В силу леммы 2, $\angle AB_1B = \angle B_1AB_2 + \angle AB_2B_1 = \frac{d}{2}$. Так как треугольник AB_1B_2 — равнобедренный, $\angle B_1AB_2 = \angle AB_2B_1 = \frac{d}{4}$. Следовательно, $\angle BAB_2 = \frac{d}{2} + \frac{d}{4}$. Аналогично, откладывая на луче BB_1 от точки B_2 отрезок AB_2 , получим равнобедренный треугольник AB_2B_3 , угол B_2AB_3 которого равен $\frac{d}{8}$. Отсюда следует, что $\angle BAB_3 = \frac{d}{2} + \frac{d}{4} + \frac{d}{8}$. Продолжая этот процесс, мы получим, что для любого n существует прямая VAB_n , лежащая внутри острого угла, образованного прямыми AB и h , такая, что $\angle VAB_n = \frac{d}{2} + \frac{d}{4} + \frac{d}{8} + \dots + \frac{d}{2^n}$. При n , стремящимся к бесконечности, мы получим в правой части этого выражения бесконечно убывающую геометрическую прогрессию $\frac{d}{2} + \frac{d}{4} + \frac{d}{8} + \dots + \frac{d}{2^n} + \dots$, первый член которой имеет вид $\frac{d}{2}$, а знаменатель равен $\frac{1}{2}$. Поэтому ее сумма S

равна $S = \frac{\frac{d}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = d$. Таким образом, $\lim_{n \rightarrow \infty} \angle VAB_n = d$.

Отсюда следует, что существует такое натуральное число n , при котором $\angle VAB_n$ будет больше острого угла, образованного прямыми AB и p . Таким образом, прямая p пересекает прямую m (см. теорему 5, § 14). Мы пришли к противоречию с нашим предположением. Теорема доказана.

Применяя теорему 1, докажем следующее утверждение.

Теорема 2. *Аксиома параллельности евклидовой геометрии равносильна утверждению о том, что на плоскости существует выпуклый четырехугольник, сумма углов которого равна $4d$.*

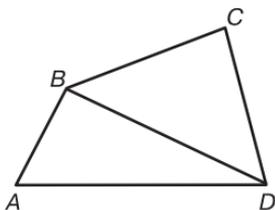


Рис. 90

Доказательство. В евклидовой геометрии, как показано в школьном курсе математики, сумма углов любого выпуклого четырехугольника равна $4d$. Докажем обратное утверждение. Предположим, что на плоскости существует выпуклый четырехугольник $ABCD$, сумма углов которого равна $4d$ (рис. 90).

Построив диагональ BD , получим два треугольника ABD и BCD . Легко видеть, что сумма углов этих треугольников совпадает с суммой углов данного четырехугольника. Предположим, что сумма углов треугольника ABD не равна $2d$. Тогда, по первой теореме Лежандра, $\sigma(ABD) < 2d$. Но из равенства суммы углов треугольников ABD и BCD сумме углов четырехугольника $ABCD$ следует, что $\sigma(BCD) > 2d$, что в свою очередь противоречит первой теореме Лежандра. Таким образом, $\sigma(ABD) = 2d$, и из теоремы 1 следует справедливость доказываемого утверждения.

Применяя метод математической индукции, нетрудно также доказать утверждение, обобщающее теорему 2 на случай произвольного выпуклого n -угольника.

Теорема 3. *Аксиома параллельности евклидовой геометрии равносильна утверждению о том, что на плоскости существует выпуклый n -угольник, сумма углов которого равна $2(n - 2)d$.*

Доказательство проведите самостоятельно.

Как уже отмечалось выше, Лежандр предпринимал неоднократные попытки доказательства пятого постулата Евклида. Сведя доказательство к построению треугольника, сумма углов которого равна $2d$, Лежандр безуспешно пытался найти пример такого треугольника. При его построении неявно использовались утверждения, равносильные аксиоме параллельности евклидовой геометрии. Рассмотрим некоторые из этих предположений.

Предложение Валлиса. *На плоскости существует хотя бы одна пара треугольников с соответственно равными углами, но не равными сторонами.*

Другими словами, на плоскости существуют два подобных, но не равных треугольника.

Теорема 4. *Предложение Валлиса эквивалентно аксиоме параллельности евклидовой геометрии.*

Доказательство. В школьном курсе геометрии на основе аксиомы параллельности доказывается, что на евклидовой плоскости существуют подобные, но не равные треугольники. Докажем обратное, если на плоскости существуют два неравных треугольника с одинаковыми углами, то верна аксиома параллельности евклидовой геометрии.

Пусть даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ такие, что

$$\angle A = \angle A_1, \quad \angle B = \angle B_1, \quad \angle C = \angle C_1, \quad (1)$$

и $AB \neq A_1B_1$. Будем для определенности считать, что

$$AB > A_1B_1. \quad (2)$$

Вспользуемся аксиомой III_1 аксиоматики Гильберта евклидова пространства (см. § 11) и отложим от точки A на луче AB отрезок AB' , равный отрезку A_1B_1 . Используя аксиому III_4 аксиоматики Гильберта, отложим на луче $B'A$ угол $B'A, h$, равный углу $A_1B_1C_1$ (рис. 91). Так как прямая h пересекает сторону AB треугольника ABC в точке B' , то, в соответствии с аксиомой II_4 (аксиома Паша, см. § 3), она пересекает вторую сторону этого треугольника. Пусть она пересекает прямую BC в точке M (рис. 91а). Тогда для треугольника $B'MB$ угол $\angle AB'M$ внешний и по построению он равен $\angle B'BM$. Мы пришли к противоречию с теоремой 1 о внешнем угле треугольника. Таким образом,

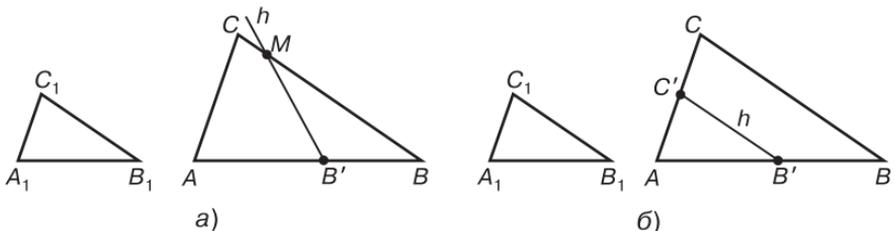


Рис. 91

прямая h пересекает отрезок AC в некоторой точке C' (рис. 91 б).

В силу условия (1) и равенства отрезков AB' и A_1B_1 , треугольники $A_1B_1C_1$ и $AB'C'$ равны между собой по второму признаку равенства треугольников. Рассмотрим четырехугольник $B'C'SB$. Очевидно, он является выпуклым. Из равенства треугольников $A_1B_1C_1$ и $AB'C'$ следует, что углы этого четырехугольника удовлетворяют равенствам

$$\angle C'B'B = 2d - \angle C'B'A = 2d - \angle CBB',$$

$$\angle CC'B = 2d - \angle B'C'A = 2d - \angle BCC'.$$

Найдем сумму углов четырехугольника $B'C'SB$:

$$\begin{aligned} & \angle C'B'B + \angle CC'B' + \angle BCC' + \angle CBB' = \\ & = 2d - \angle CBB' + 2d - \angle BCC' + \angle BCC' + \angle CBB' = 4d. \end{aligned}$$

Мы построили выпуклый четырехугольник, сумма углов которого равна $4d$, что, в силу теоремы 2, равносильно условию аксиомы параллельности евклидовой геометрии. Теорема доказана.

Следующее предложение, использованное Лежандром, носит его имя.

Предложение Лежандра. *Перпендикуляр, проведенный к стороне острого угла в любой точке этой стороны, пересекает вторую сторону угла.*

Теорема 5. *Предложение Лежандра эквивалентно аксиоме параллельности евклидовой геометрии.*

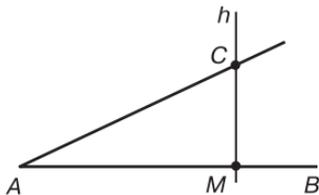


Рис. 92

Доказательство. Предположим, что на евклидовой плоскости дан острый угол BAC . Выберем произвольную точку M на луче AB и восставим в этой точке перпендикуляр h к стороне AB (рис. 92) $\angle MA, h = d, \angle BAC < d$. В силу пятого постулата Евклида, прямые AC и h пересекаются.

Обратно. Пусть на плоскости существует такой острый угол BAC , для которого перпендикуляр, восставленный в любой точке стороны AB , пересекает прямую AC . Выберем на стороне AB этого угла точку M и восставим в ней перпендикуляр к прямой AB . В силу нашего предположе-

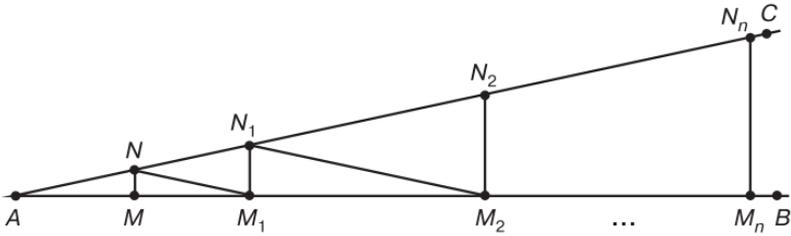


Рис. 93

ния, он пересекает сторону AC угла в некоторой точке N (рис. 93). Предположим, что дефект δ треугольника AMN (см. определение 1 § 17) отличен от нуля. Тогда, в силу второй теоремы Лежандра, дефект любого треугольника PQR плоскости удовлетворяет неравенствам:

$$0 < \delta(PQR) < 2d. \tag{3}$$

Отразим симметрично точку A относительно точки M . Получим точку M_1 . Восставим в точке M_1 перпендикуляр к прямой AB . Он пересечет сторону AC данного угла в точке N_1 . Из свойств центральной симметрии получим $\triangle AMN = \triangle MNM_1$. В силу свойства 1 § 17 для дефектов треугольников, $\delta(AM_1N) = 2\delta(AMN)$. Из свойства 2 § 17 следует, что $\delta(AM_1N_1) > 2\delta(AMN)$. Отразим теперь точку симметрично относительно точки M_1 , получим точку M_2 . Восставим перпендикуляр к прямой AB в точке M_2 . В силу нашего предположения, он пересечет сторону AC данного угла в некоторой точке N_2 . Проведя те же рассуждения, получим, что $\delta(AM_2N_2) > 2\delta(AM_1N_1)$. Отсюда следует, что $\delta(AM_2N_2) > 2^2\delta(AMN)$. Отразим далее точку A относительно точки M_2 , построим аналогичным образом треугольник AM_3N_3 , затем треугольник AM_4N_4 , и так далее. Получим треугольники $AM_1N_1, AM_2N_2, \dots, AM_nN_n$. Легко видеть, что $\delta(AM_nN_n) > 2^n\delta(AMN)$. Выберем число n таким, чтобы выполнялось неравенство $2^n\delta(AMN) > 2d$. Тогда $\delta(AM_nN_n) > 2d$. Мы пришли к противоречию с неравенством (3). Теорема доказана.

Следует заметить, что предложения, рассматриваемые Лежандром, их равносильность аксиоме параллельности евклидовой геометрии, были известны его предшественникам, в частности Саккери и Ламберту (см. § 8). Лежандр, по

сути, не внес ничего нового в решение проблемы пятого постулата Евклида. Но его учебники, в которых были опубликованы рассмотренные утверждения, оказали большое влияние на исследования Н. И. Лобачевского и Я. Бойяи.

§ 19. СВОЙСТВА ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА САККЕРИ. ПРЕДЛОЖЕНИЕ ПОСИДОНИЯ

В § 8 мы упоминали об исследованиях Омара Хайяма и Джироламо Саккери, в которых были использованы свойства так называемого четырехугольника Саккери. Рассмотрим их, основываясь только на фактах абсолютной геометрии.

Определение 1. *Четырехугольник, у которого два угла, имеющие общую сторону, являются прямыми, называется двупрямоугольником.*

В двупрямоугольнике $ABCD$, у которого углы A и D прямые, стороны AD и BC называются соответственно нижним и верхним основаниями, а стороны AB и CD — боковыми сторонами.

Определение 2. *Если в двупрямоугольнике боковые стороны равны между собой, то он носит название четырехугольника Саккери.*

Прежде всего отметим следующее свойство двупрямоугольников.

Теорема 1. *Двупрямоугольник $ABCD$ в том и только в том случае является четырехугольником Саккери, когда его диагонали равны между собой.*

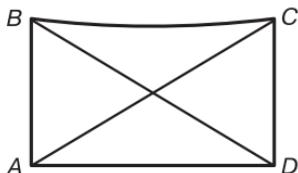


Рис. 94

Доказательство. *Необходимость.*

Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник Саккери, углы A и D — прямые, боковые стороны AB и CD равны между собой: $AB = CD$ (рис. 94). Треугольники ABD и ACD прямоугольные с общим катетом AD . Катеты AB и CD равны друг другу. Поэтому $\triangle ABD = \triangle ACD$. Отсюда следует, что их гипотенузы AC и BD , которые служат диагоналями в четырехугольнике Саккери $ABCD$, также равны между собой. Необходимость доказана.

Достаточность. Рассмотрим двупрямоугольник $ABCD$, у которого углы A и D прямые, а диагонали AC и BD равны между собой (см. рис. 94). Тогда прямоугольные треугольники ABD и ACD имеют общий катет AD и равные гипотенузы AC и BD , а значит, равны между собой. Отсюда следует, что их катеты AB и CD также равны друг другу. Поэтому в двупрямоугольнике $ABCD$ равны боковые стороны и он является четырехугольником Саккери. Теорема доказана.

Следующая теорема характеризует свойство углов четырехугольника Саккери, прилежащих к верхнему основанию.

Теорема 2. *В четырехугольнике Саккери углы, прилежащие к верхнему основанию, равны между собой.*

Доказательство. Пусть $ABCD$ — четырехугольник Саккери (см. рис. 94). Тогда, в силу теоремы 1, его диагонали AC и BD равны друг другу. Отсюда следует, что треугольники ABC и BCD равны между собой по трем сторонам. Следовательно, $\angle ABC = \angle BCD$. Теорема доказана.

Заметим еще раз, что доказательства этих теорем не выходят за рамки абсолютной геометрии. Вернемся к результатам Омара Хайяма и Джироламо Саккери. Как упоминалось в § 8, рассматривая четырехугольник Саккери, Хайям и Саккери делали предположения о величине угла, прилежащего к верхнему основанию. Рассматривались случаи, когда этот угол тупой, прямой или острый (так называемые гипотезы тупого, прямого и острого углов). Гипотеза тупого угла была опровергнута, а Иоганн Генрих Ламберт (см. § 8) показал, что она реализуется на сфере трехмерного евклидова пространства. Было показано, что гипотеза прямого угла равносильна утверждению пятого постулата Евклида. Хайям и Саккери пытались найти противоречие между гипотезой острого угла и утверждениями абсолютной геометрии. Допущенные ошибки в рассуждениях позволили им сделать вывод, что проблема пятого постулата решена. На самом деле гипотеза острого угла не может быть опровергнута средствами абсолютной геометрии. Она справедлива в пространстве Лобачевского, об этом мы будем говорить в следующей главе.

Из первой теоремы Лежандра (теорема 1 § 17) следует, что углы, прилежащие к верхнему основанию четырех-

угольника Саккери, не могут быть тупыми. Действительно, используя теорему 2, можно вычислить сумму углов этого четырехугольника. Легко видеть, она будет больше $4d$. Построив диагональ четырехугольника и рассмотрев суммы углов образовавшихся треугольников, легко получить противоречие с первой теоремой Лежандра. Рассуждения проведите самостоятельно. Покажем, что гипотеза прямого угла равносильна аксиоме параллельности евклидовой геометрии.

Теорема 3. *Предположение о том, что углы, прилежащие к верхнему основанию четырехугольника Саккери, прямые, равносильно аксиоме параллельности евклидовой геометрии.*

Доказательство. Пусть дан четырехугольник Саккери $ABCD$, углы A и D которого прямые. Как известно, в евклидовой плоскости сумма углов выпуклого четырехугольника равна $4d$. Таким образом, $\angle A + \angle D + \angle B + \angle C = 4d$. Так как $\angle A = \angle D = d$, то $\angle B + \angle C = 2d$, а в силу теоремы 2 $\angle B = \angle C$, поэтому углы B и C прямые.

Обратно, пусть существует такой четырехугольник Саккери $ABCD$ с прямыми углами A и D , у которого по крайней мере один из углов, прилежащих к верхнему основанию, например угол B , прямой. Тогда из теоремы 2 следует, что угол C также прямой. Поэтому сумма углов такого четырехугольника равна $4d$. В силу теоремы 2 § 18 выполнено утверждение аксиомы параллельности евклидовой геометрии. Теорема доказана.

Следующее утверждение характеризует необходимое нам свойство двупрямоугольников.

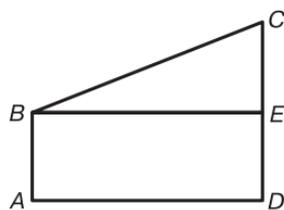


Рис. 95

Теорема 4. *Пусть дан двупрямоугольник $ABCD$, у которого углы A и D прямые. Тогда боковая сторона AB меньше боковой стороны CD в том и только в том случае, когда $\angle ABC > \angle BCD$.*

Доказательство. *Необходимость.*

Пусть $ABCD$ — двупрямоугольник, боковые стороны которого связаны неравенством $AB < CD$ (рис. 95). Требуется доказать, что $\angle ABC > \angle BCD$. Отложим на боковой стороне DC от точки D отрезок DE , равный отрезку AB . Тогда двупрямоугольник

$ABED$ — четырехугольник Саккери. Из теоремы 2 следует, что

$$\angle ABE = \angle BED. \quad (1)$$

Кроме того, так как $AB < CD$, E — внутренняя точка отрезка CD . Поэтому BE — внутренний луч угла ABC . Следовательно,

$$\angle ABC > \angle ABE. \quad (2)$$

В треугольнике BCE угол BED является внешним. По теореме о внешнем угле треугольника (теорема 1 § 16), этот угол больше любого внутреннего угла, с ним не смежного, т. е. $\angle BED > \angle BCD$. Отсюда и из (1) и (2) следует искомое неравенство.

Достаточность. Пусть дан двупрямоугольник $ABCD$, углы при верхнем основании которого удовлетворяют неравенству

$$\angle ABC > \angle BCD. \quad (3)$$

Следует доказать, что $AB < CD$. Предположим, что боковые стороны равны между собой. Тогда $ABCD$ — четырехугольник Саккери и, в силу теоремы 2, $\angle ABC = \angle BCD$, что противоречит условию (3). Поэтому боковые стороны AB и CD не равны между собой. Предположим, что $AB > CD$. Но тогда из первой части доказательства теоремы следует, что угол при верхнем основании, прилежащий к меньшей боковой стороне, т. е. $\angle BCD$, больше угла, прилежащего к большей боковой стороне, т. е. $\angle ABC$. Мы опять пришли к противоречию с неравенством (3). Теорема доказана.

Доказанное свойство двупрямоугольников позволит нам усилить условие теоремы 2.

Теорема 5. *Двупрямоугольник тогда и только тогда является четырехугольником Саккери, когда углы, прилежащие к верхнему основанию, равны между собой.*

Доказательство. Необходимость следует из утверждения теоремы 2. Докажем достаточность. Пусть дан двупрямоугольник $ABCD$, у которого углы, прилежащие к верхнему основанию, равны между собой:

$$\angle ABC = \angle BCD. \quad (4)$$

Предположим, что боковые стороны AB и CD не равны друг другу. Пусть, для определенности, $AB < CD$. Тогда из теоремы 4 следует, что $\angle ABC > \angle BCD$, что противоречит равенству (4). Теорема доказана.

Как отмечалось в § 8, одну из первых попыток доказательства пятого постулата Евклида предпринял Посидоний. Сформулируем его предложение в следующем виде.

Предложение Посидония. *На плоскости существуют по крайней мере три коллинеарные точки, расположенные в одной полуплоскости от данной прямой и равноудаленные от нее.*

Теорема 6. *Предложение Посидония эквивалентно утверждению аксиомы параллельности евклидовой геометрии.*

Доказательство. На евклидовой плоскости, как следует из школьного курса геометрии, точки, расположенные на прямой, параллельной данной, равноудалены от нее. Перпендикуляры, опущенные из этих точек на данную прямую, равны между собой.

Докажем обратное. Предположим, что существует такая прямая a и такие три точки B , C и M , что перпендикуляры AB , CD и MN , опущенные из них на прямую a , равны между собой (рис. 96). Тогда четырехугольники $ABCD$, $DCMN$ и $ABMN$ являются четырехугольниками Саккери. Предположим, что $\angle ABC$ — острый. Из теоремы 5 следует, что $\angle BCD = \angle ABC$ (так как $ABCD$ — четырехугольник Саккери), $\angle BMN = \angle ABC$ (так как $ABMN$ — четырехугольник Саккери), $\angle DCM = \angle BMN$ (так как $DCMN$ — четырехугольник Саккери). Следовательно, $\angle ABC = \angle BCD = \angle DCM$. Из нашего предположения следует, что углы BCD и DCM острые. Но они вместе составляют развернутый угол, поэтому один из них тупой, что приводит к противоречию. Таким образом, $\angle ABC$ — прямой, а следовательно, $\angle BCD$ — также прямой. Четырехугольник $ABCD$ имеет четыре прямых

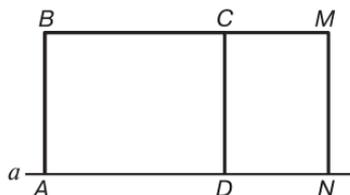


Рис. 96

угла. В силу теоремы 3 § 8, выполнено условие аксиомы параллельности евклидовой геометрии. Теорема доказана.

Мы завершили исследование утверждений, эквивалентных аксиоме параллельности евклидовой геометрии. Их список не является полным, существуют и другие утверждения, также эквивалентные этой аксиоме. С некоторыми из них можно познакомиться в пособиях [9], [12]–[15].

ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО

В настоящей главе мы познакомимся с основными геометрическими свойствами фигур пространства Лобачевского.

§ 20. АКСИОМАТИКА ПРОСТРАНСТВА ЛОБАЧЕВСКОГО. ОСНОВНЫЕ СЛЕДСТВИЯ

Будем использовать аксиоматику Гильберта пространства Лобачевского, основные объекты и основные отношения которой совпадают с основными объектами и основными отношениями трехмерного евклидова пространства, приведенными в гл. II. Первые четыре группы аксиом пространства Лобачевского, а именно аксиомы принадлежности, порядка, конгруэнтности и непрерывности, совпадают с такими же аксиомами трехмерного евклидова пространства. Поэтому в пространстве Лобачевского справедливы все следствия, которые вытекают из этих групп аксиом (см. § 10, 11). Также выполнены все утверждения абсолютной геометрии как следствия первых четырех групп аксиом аксиоматики Гильберта. В аксиоматике евклидова пространства пятая группа аксиом содержит одну аксиому параллельности евклидовой геометрии. В пятой же группе аксиом геометрии Лобачевского также содержится одна аксиома, так называемая аксиома параллельности Лобачевского, — логическое отрицание аксиомы параллельности евклидовой геометрии.

LV_1 (аксиома параллельности Лобачевского). В любой плоскости существуют прямая a_0 и точка A_0 , не принадлежащая этой прямой, такие, что через эту точку проходят по крайней мере две прямые, не пересекающие a_0 .

Множество точек, прямых и плоскостей, удовлетворяющих аксиомам принадлежности, порядка, конгруэнтности, непрерывности и аксиоме параллельности Лобачевского, будем называть трехмерным пространством Лобачевского и обозначать через L_3 . Аксиома LV_1 является формальным

логическим отрицанием аксиомы параллельности евклидовой геометрии. Требуется, чтобы на плоскости существовали, по крайней мере, одна точка и одна прямая, для которых не выполнено утверждение аксиомы Плейфера. Докажем теорему, из которой следует, что утверждение аксиомы параллельности Лобачевского справедливо для любой точки и любой прямой на плоскости пространства Лобачевского.

Теорема 1. Пусть a — произвольная прямая, A — точка, не лежащая на этой прямой. Тогда в плоскости пространства L_3 , определяемой данными точкой и прямой, существуют по крайней мере две прямые, проходящие через A и не пересекающие прямую a .

Доказательство. Доказательство проведем методом «от противного». Пусть в пространстве Лобачевского существует такая точка A и прямая a , что в плоскости, определяемой этой точкой и прямой, через точку A проходит единственная прямая, не пересекающая прямую a . Опустим из

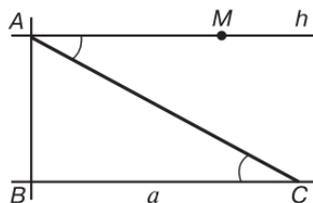


Рис. 97

точки A перпендикуляр AB на прямую a и в точке A восстановим перпендикуляр h к прямой AB (рис. 97). Как следует из теоремы 2 § 11, прямые h и a не пересекаются. Прямая h , в силу предположения, — единственная прямая, проходящая через точку A и не пересекающая прямую a . Выберем на прямой a произвольную точку C . Отложим от луча AC в полуплоскости с границей AB , не содержащей точку B , угол SAM , равный углу ACB . Тогда, как следует из той же теоремы 2 § 11, прямая AM не пересекает прямую a . Из нашего предположения следует, что она совпадает с прямой h . Поэтому точка M принадлежит прямой h . Треугольник ABC — прямоугольный, $\angle ABC = d$. Его сумма углов равна: $\angle ABC + \angle BAC + \angle BCA = d + \angle BAC + \angle CAM = 2d$. Таким образом, на плоскости построен треугольник, сумма углов которого совпадает с развернутым углом. Из теоремы 1 § 18 следует, что на этой плоскости выполнено условие аксиомы Плейфера. Поэтому на ней не могут существовать такие точка A_0 и прямая a_0 , которые удовлетворяют

условиям аксиомы LV_1 параллельности Лобачевского. Полученное противоречие доказывает теорему.

Следует заметить, что в дальнейшем мы будем пользоваться теоремой 1, по сути заменяя ею аксиому параллельности Лобачевского. Во многих учебниках именно это утверждение принято в качестве аксиомы параллельности геометрии Лобачевского.

Из теоремы 1 легко получить следующее следствие.

Следствие. *В плоскости Лобачевского через точку, не лежащую на данной прямой, проходит бесконечно много прямых, не пересекающих данную.*

Действительно, пусть a — данная прямая, A — точка, ей не принадлежащая, h_1 и h_2 — прямые, проходящие через точку A и не пересекающие прямую a (рис. 98). Очевидно, что все прямые, которые проходят через точку A и лежат в одном из углов, образованных прямыми h_1 и h_2 , не пересекают прямую a .

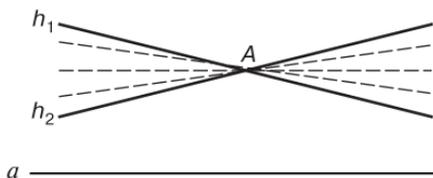


Рис. 98

В главе II мы доказали ряд утверждений, эквивалентных аксиоме параллельности евклидовой геометрии. Ясно, что на плоскости Лобачевского справедливы их логические отрицания.

На плоскости Лобачевского справедливо логическое отрицание пятого постулата Евклида. В § 16 нами был сформулирован сам постулат и доказана его эквивалентности аксиоме параллельности евклидовой геометрии. Его же логическое отрицание имеет следующий вид:

Утверждение 1. *На плоскости Лобачевского существуют две непересекающиеся прямые, которые при пересечении с третьей прямой образуют внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых углов.*

В § 19 нами было сформулировано предложение Посидония. Там же мы доказали, что предложение Посидония

эквивалентно утверждению аксиомы параллельности евклидовой геометрии. На плоскости Лобачевского действует отрицание этого утверждения.

Утверждение 2. *Множество точек, равноудаленных от прямой на плоскости Лобачевского и расположенных в одной полуплоскости относительно этой прямой, в свою очередь не лежат на одной прямой.*

На плоскости Лобачевского множество точек, равноудаленных от прямой и принадлежащих одной полуплоскости относительно нее, образуют кривую линию, так называемую эквидистанту. Позже мы изучим ее свойства.

Рассмотрим теперь предложение Лежандра: *перпендикуляр, проведенный к стороне острого угла в любой точке этой стороны, пересекает вторую сторону угла.* Доказанная нами теорема 6 § 18 утверждает, что *предложение Лежандра эквивалентно аксиоме параллельности евклидовой геометрии.* Отсюда следует, что на плоскости Лобачевского справедливо логическое отрицание этого предложения.

Утверждение 3. *На стороне любого острого угла существует такая точка, что перпендикуляр, восстановленный в этой точке к стороне угла, не пересекает вторую сторону угла.*

Отметим свойства треугольников и четырехугольников плоскости Лобачевского, которые непосредственно следуют из результатов § 16 и § 18. Прежде всего, в теореме 1 § 18 утверждается, что *предположение о существовании треугольника, сумма углов которого совпадает с суммой двух прямых углов, равносильно аксиоме параллельности евклидовой плоскости.* Отсюда и из первой теоремы Лежандра (см. теорему 1 § 17) следует утверждение.

Утверждение 4. *На плоскости Лобачевского сумма углов любого треугольника меньше $2d$.*

Из этого утверждения непосредственно вытекает, что *сумма углов любого выпуклого четырехугольника меньше $4d$, а сумма углов любого выпуклого n -угольника меньше $2(n - 1)d$.*

Так как на евклидовой плоскости углы, прилежащие к верхнему основанию четырехугольника Саккери, равны прямым углам, что в соответствии с теоремой 3 § 19, то можно сделать следующий вывод.

Утверждение 5. *Углы, прилегающие к верхнему основанию четырехугольника Саккери, острые.*

Нам осталось рассмотреть еще два свойства треугольников на плоскости Лобачевского. Первое из них связано с предложением Валлиса: *на плоскости существует хотя бы одна пара треугольников с соответственно равными углами, но не равными сторонами.* В § 18 мы доказали теорему 5, из которой следует эквивалентность этого предложения аксиоме параллельности евклидовой геометрии. Его логическое отрицание приводит нас к следующему выводу: на плоскости Лобачевского не существует треугольников с равными углами, но не равными сторонами. Таким образом, справедливо следующее предложение.

Утверждение 6 (четвертый признак равенства треугольников на плоскости Лобачевского). *Любые два треугольника на плоскости Лобачевского, имеющие соответственно равные углы, равны между собой.*

Ответим теперь на следующий вопрос. Вокруг любого ли треугольника на плоскости Лобачевского можно описать окружность? В соответствии с теоремой 4 § 16 (утверждение Ф. Бойяи), если вокруг любого треугольника на плоскости можно описать окружность, то на плоскости выполнено условие аксиомы параллельности евклидовой геометрии. Поэтому логическое отрицание утверждения этой теоремы приводит нас к следующему предложению.

Утверждение 7. *На плоскости Лобачевского существует треугольник, вокруг которого нельзя описать окружность.*

Как известно, если вокруг треугольника описана окружность, то ее центр лежит в точке пересечения серединных перпендикуляров сторон треугольника. Поэтому нам достаточно привести пример такого треугольника, серединные перпендикуляры которого не пересекаются. Выберем некоторую прямую a и точку A , которая ей не принадлежит. Опустим из точки A перпендикуляр h на прямую a . В силу аксиомы параллельности Лобачевского, через точку A проходит некоторая прямая b , которая не перпендикулярна прямой h и не пересекает прямую a (рис. 99). Выберем точку M на прямой h так, как показано на рис. 99. Симметрично отразим ее относительно прямых

a и b , получим точки N и P . Так как прямая b не перпендикулярна прямой h , то точки M , N и P лежат в вершинах треугольника. Прямые a и b служат по построению его серединными перпендикулярами. Они же, как было сказано выше, не пересекаются. Треугольник MNP — искомый.

Легко построить пример треугольника плоскости Лобачевского, вокруг которого можно описать окружность. Для этого достаточно взять две пересекающиеся прямые, выбрать точку, которая им не принадлежит, и отразить ее относительно этих прямых. Таким образом, на плоскости Лобачевского существуют треугольники, вокруг которых можно описать окружность, и вокруг которых такую окружность описать нельзя.

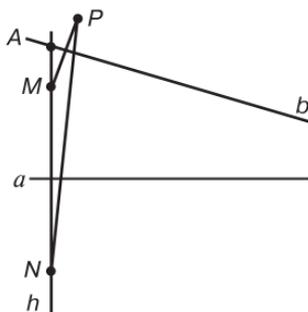


Рис. 99

§ 21. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Если на плоскости Лобачевского даны прямая a и точка A , которая ей не принадлежит, то, как было уже отмечено, существуют два пучка прямых, проходящих через точку A , удовлетворяющих следующим требованиям. Один из них состоит из прямых, не пересекающих прямую a , а второй — из прямых, которые имеют с a общую точку. В первом пучке можно выделить две особые прямые, занимающие как бы «пограничное» положение между прямыми, пересекающимися и не пересекающимися a . Настоящий параграф будет посвящен изучению их свойств.

Пучок прямых, проходящих через точку A и не пересекающих прямую a , симметричен относительно перпендикуляра, опущенного из точки A на эту прямую. Ясно, что нам следует исследовать свойства прямых в какой либо полуплоскости относительно этого перпендикуляра. Для этого мы будем рассматривать так называемые *направленные прямые* на плоскости Лобачевского. Пусть дана некоторая прямая a . Будем считать, что направление на этой прямой задано упорядоченной парой точек U и V .

Условимся, что все точки прямой a , которые мы используем в дальнейших рассуждениях, расположены между точками U и V . Направленные прямые будем обозначать через \overline{UV} .

Определение 1. Пусть даны две направленные прямые $a = \overline{A_1A_2}$ и $b = \overline{B_1B_2}$. Они называются параллельными, если выполнены условия:

- 1) прямые a и b не пересекаются;
- 2) для произвольных точек A и B прямых a и b любой внутренний луч h угла ABB_2 пересекает прямую a (рис. 100).

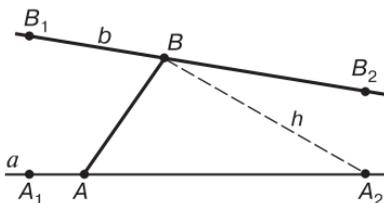


Рис. 100

Обозначать параллельные прямые будем так же, как принято в школьном курсе геометрии: $a \parallel b$. Заметим, что на евклидовой плоскости параллельные прямые также удовлетворяют этому определению.

Нам необходимо выяснить, существуют ли вообще параллельные прямые на плоскости Лобачевского. Кроме того, в определении 1 роль прямых a и b различна. Если прямая a параллельна прямой b , то из определения не следует, что прямая b параллельна прямой a . Но прежде всего докажем признак параллельности прямых. Понятно, что крайне неудобно использовать определение 1, проверяя его условие для всех точек прямых a и b . Следующая теорема позволяет преодолеть это затруднение.

Теорема 1 (признак параллельности прямых на плоскости Лобачевского). Пусть даны две непересекающиеся направленные прямые $a = \overline{A_1A_2}$ и $b = \overline{B_1B_2}$. Они параллельны тогда и только тогда, когда существуют по крайней мере две точки A_0 и B_0 , каждая из которых принадлежит соответственно прямой a и b , такие, что любой внутренний луч h угла $A_0B_0B_2$ пересекает прямую a .

Доказательство. *Необходимость* очевидна. Если условие определения 1 выполнено, то в качестве точек A_0 и B_0 можно выбрать любые точки прямых a и b .

Достаточность. Пусть даны точки $A_0 \in a$, $B_0 \in b$, для которых выполнено условие теоремы. Мы рассмотрим четыре случая. Выберем произвольные точки A_3, A_4 прямой a , лежащие соответственно между A_0, A_2 и A_1, A_0 , а также произвольные точки B_3, B_4 прямой b , которые находятся между соответственно точек B_0, B_2 и B_1, B_0 . Докажем, что любой внутренний луч углов $A_i B_0 B_2$, и $A_0 B_i B_2$ ($i = 3, 4$) пересекает прямую a . Тем самым будет доказано, что условие теоремы 2 выполнено для любых точек прямых a и b , т. е., в соответствии с определением 1, эти прямые параллельны.

1. Пусть точка A_3 прямой a лежит между точками A_0 и A_2 (рис. 101). Рассмотрим произвольный внутренний луч h угла $A_3 B_0 B_2$. Ясно, что он является также внутренним лучом угла $A_0 B_0 B_2$. В силу условия теоремы, он пересекает прямую a .

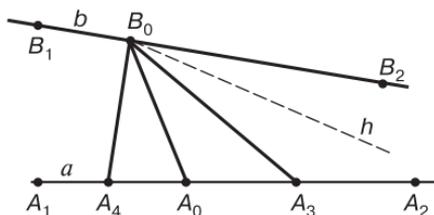


Рис. 101

2. Предположим, что точка A_4 лежит между точками A_1 и A_0 (рис. 101). Тогда внутренний луч угла $A_4 B_0 B_2$ может лежать внутри угла $A_4 B_0 A_0$, в этом случае он пересекает отрезок $A_4 A_0$, так как концы этого отрезка лежат на сторонах угла (см. теорему 5 § 14). Этот внутренний луч может совпадать с лучом $B_0 A_0$, тогда он пересекает прямую a в точке A_0 . И, наконец, рассматриваемый внутренний луч может принадлежать углу $A_0 B_0 B_2$. Тогда он пересекает прямую a в силу условия доказываемой теоремы.

3. Рассмотрим произвольную точку B_3 , принадлежащую лучу $B_0 B_2$ (рис. 102). Пусть h — внутренний луч угла $A_0 B_3 B_2$. Ясно, что все точки луча h являются внутренними

точками угла $A_0B_0B_2$. Возьмем на этом луче произвольную точку Q . Из теоремы 3 § 14 следует, что луч $m = B_0Q$ является внутренним лучом угла $A_0B_0B_2$. Поэтому он пересекает луч A_0A_2 в некоторой точке M . Кроме того, так как концы отрезка A_0B_3 лежат на сторонах угла $A_0B_0B_2$, то луч m пересекает этот отрезок в некоторой точке P (см. теорему 5 § 14). Таким образом, луч h пересекает сторону PM треугольника A_0PM в точке Q . Тогда, в соответствии с аксиомой Π_4 (аксиома Паша, см. § 10), этот луч пересекает либо сторону A_0P , либо сторону A_0M треугольника A_0PM . Пусть луч h пересекает сторону A_0P в некоторой точке T . Тогда через точки T и B_3 проходят две различные прямые A_0B_3 и h , что противоречит аксиоме I_2 аксиоматики Гильберта (см. § 10). Таким образом, луч h пересекает отрезок A_0M . Утверждение в этом случае доказано.

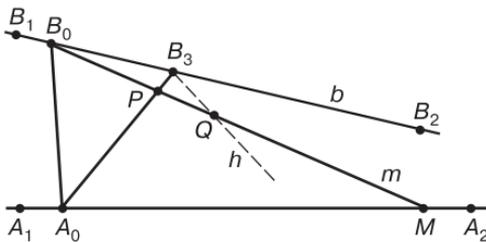


Рис. 102

4. Выберем произвольную точку B_4 , принадлежащую лучу B_0B_1 (рис. 103а). Пусть h — внутренний луч угла $A_0B_4B_2$. Тогда, в силу теоремы 5 § 14, луч h пересекает отрезок A_0B_0 в некоторой точке P . Отложим от луча B_0B_2 в полуплоскости с границей B_1B_2 , содержащей точку A_0 , угол B_0B_2, n , равный углу B_4B_2, h . В треугольнике B_4PB_0 угол B_4B_2, h является внутренним, а угол PB_0B_2 — внешним, не смежным с внутренним углом B_4B_2, h . Из теоремы о внешнем угле треугольника следует, что $\angle B_4B_2, h < \angle PB_0B_2$. Поэтому $\angle B_0B_2, n < \angle PB_0B_2$, луч n служит внутренним лучом угла PB_0B_2 . По условию теоремы, он пересекает прямую A_1A_2 в некоторой точке N . Таким образом, луч h пересекает сторону A_0B_0 треугольника A_0B_0N во внутренней точке P . Из аксиомы Π_4

Паша следует, что он пересекает либо сторону A_0N , либо сторону B_0N . Предположим, что луч h пересекает сторону B_0N в точке Q (рис. 103 б). Тогда в треугольнике B_4B_0Q внешний угол QB_0B_2 равен внутреннему углу QB_4B_0 , с ним не смежному, что противоречит теореме о внешнем угле треугольника. Таким образом, луч h пересекает отрезок A_0N , т. е. прямую A_1A_2 . Признак параллельности прямых на плоскости Лобачевского доказан полностью.

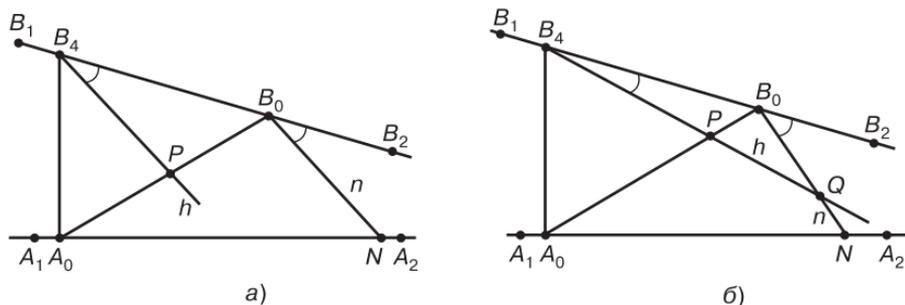


Рис. 103

Перейдем теперь к вопросу о существовании параллельных прямых.

Теорема 2 (теорема существования параллельных направленных прямых). Пусть на плоскости Лобачевского дана направленная прямая $a = \overline{A_1A_2}$ и точка B , которая ей не принадлежит. Тогда через данную точку проходит единственная направленная прямая $b = \overline{B_1B_2}$ такая, что прямая a параллельна прямой b .

Доказательство. Опустим из точки B перпендикуляр BA на прямую a и из точки B восставим перпендикуляр p к прямой BA (рис. 104 а). Прямая p , как уже неоднократно отмечалось, не пересекает данную прямую a . Выберем на ней произвольную точку C , разобьем точки отрезка AC на два класса K_1 и K_2 . Первому классу K_1 будут принадлежать такие точки S этого отрезка, для которых луч BS пересекает луч AA_2 , а второму классу K_2 будут принадлежать такие точки T , для которых луч BT не пересекает луч AA_2 . Докажем, что такое разбиение на классы производит дедекиндово сечение отрезка AC . В соответствии с теоремой 3 § 11, нам следует проверить, что:

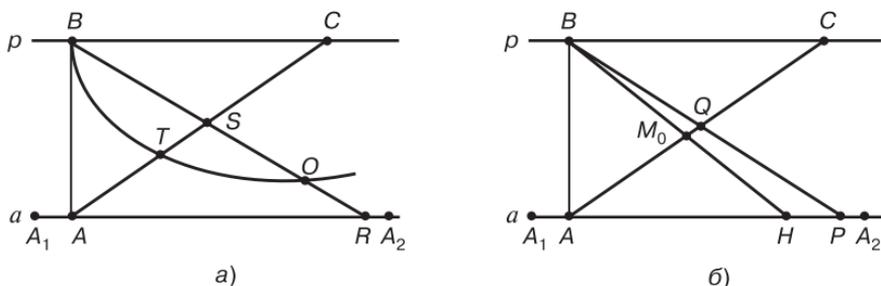


Рис. 104

- 1) $K_1 \cup K_2 = [AC]$, $K_1 \cap K_2 = \emptyset$;
- 2) $A \in K_1$, $C \in K_2$ и классы K_1 и K_2 содержат точки, отличные от точек A и C ;
- 3) любая точка класса K_1 , отличная от точки A , лежит между точкой A и любой точкой класса K_2 .

Первое условие очевидно: все точки отрезка принадлежат одному или другому классу, при этом сами классы, исходя из их определения, не имеют общих точек.

Второе условие также легко проверить. Очевидно, что $A \in K_1$ и $C \in K_2$. Класс K_1 содержит точки, отличные от точки A . Для проверки этого утверждения достаточно выбрать какую-либо точку луча AA_2 и соединить ее лучом с точкой B . Этот луч пересечет отрезок AC в точке первого класса. Класс K_2 также содержит точки, отличные от точки C , иначе мы приходим к противоречию с аксиомой параллельности Лобачевского.

Докажем третье условие. Пусть существует такая точка S первого класса, отличная от точки A , и существует точка T второго класса, лежащая между точками A и S (рис. 104 а). Так как $S \in K_1$, то луч BS пересекает луч AA_2 в некоторой точке R . Рассмотрим луч BT . Он пересекает сторону AS треугольника ASR в точке T . В соответствии с аксиомой Π_4 Паша, этот луч должен пересечь либо сторону AR , либо сторону SR этого треугольника. Предположим, что луч BT пересекает сторону SR в некоторой точке O . Тогда через точки B и O проходят две различные прямые BT и BR , что противоречит аксиоме I_2 аксиоматики Гильберта. Таким образом, луч BT пересекает сторону AR , из чего следует, что точка T не принадлежит классу K_2 . Полученное противоречие приводит к утверждению, что точка S лежит

между точками A и T . Условие теоремы 3 § 11 проверено полностью.

В соответствии с условием теоремы 3 § 11 о дедекиндовом сечении, на отрезке AC существует такая точка M_0 , что любая точка, лежащая между точками A и M_0 , принадлежит классу K_1 , а любая точка, лежащая между точками M_0 и C , принадлежит классу K_2 . Докажем, что направленная прямая $\overline{BM_0}$ параллельна прямой $a = \overline{A_1A_2}$. По сути, нам осталось доказать, что прямая $\overline{BM_0}$ не пересекает прямую a , так как в силу выбора точек класса K_1 любой внутренней луч угла $\overline{ABM_0}$ пересекает прямую $\overline{A_1A_2}$. Предположим, что прямая $\overline{BM_0}$ пересекает прямую a в некоторой точке H (рис. 104б). Выберем произвольную точку P на луче HA_2 и рассмотрим луч BP . Тогда он пересекает отрезок M_0C в некоторой точке Q (докажите это утверждение самостоятельно). Но внутренние точки отрезка M_0C принадлежат второму классу, луч BP не может иметь общих точек с прямой a . Таким образом, наше предположение о пересечении прямых $\overline{BM_0}$ и a неверно. Ясно, что прямая $\overline{BM_0}$ параллельна a . Эти прямые не пересекаются, и любой внутренний луч угла $\overline{ABM_0}$ будет пересекать отрезок $\overline{AM_0}$ в точке класса K_1 , т. е. пересекать луч $\overline{AA_2}$.

Легко проверить, что прямая $\overline{BM_0}$ — единственная направленная прямая, проходящая через точку B и параллельная прямой $\overline{A_1A_2}$. Действительно, пусть через точку B проходит еще одна направленная прямая $\overline{BM_1}$, которая, как и прямая $\overline{BM_0}$, параллельна прямой $\overline{A_1A_2}$. При этом будем считать, что M_1 — точка отрезка AC . Тогда, исходя из определения класса K_2 , $M_1 \in K_2$. Поэтому луч $\overline{BM_0}$ является внутренним лучом угла $\overline{ABM_1}$, следовательно, в силу определения 1, он пересекает прямую $\overline{A_1A_2}$. Мы пришли к противоречию с доказанным выше утверждением. Теорема 3 доказана полностью.

Рассмотрим точку B и направленную прямую $a = \overline{A_1A_2}$, которая ее не содержит. В соответствии с доказанной теоремой, через точку B , проходит направленная прямая $\overline{B_1B_2}$, параллельная прямой a . Опустим из точки B перпендикуляр \overline{BH} на прямую a (рис. 105). Легко видеть, что угол $\overline{HBB_2}$ — острый. Действительно, если предположить, что этот угол прямой, то из определения 1 следует, что любая прямая,

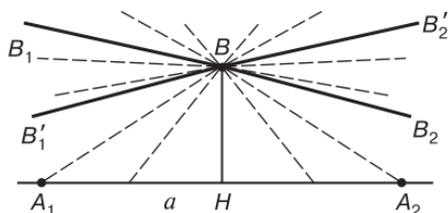


Рис. 105

проходящая через точку B и отличная от прямой B_1B_2 , пересекает прямую a , что противоречит теореме 1 § 20, т. е. аксиоме LV_1 параллельности Лобачевского. Легко видеть, что предположение о том, что этот угол тупой, также приводит к противоречию теперь уже с определением 1 и теоремой 1 настоящего параграфа, так как внутренний луч угла HVB_2 , перпендикулярный прямой VH , не пересекает луч AA_2 . Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть направленная прямая $\overline{A_1A_2}$ параллельна направленной прямой $\overline{B_1B_2}$. Если из точки B прямой $\overline{B_1B_2}$ опустить перпендикуляр VH на прямую $\overline{A_1A_2}$, то угол HVB_2 — острый.

Следствие. Если существует общий перпендикуляр на направленных прямых $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{B_1B_2}$, то прямая $\overline{A_1A_2}$ не параллельна прямой $\overline{B_1B_2}$.

Отразим симметрично относительно прямой VH прямую $\overline{B_1B_2}$. Получим направленную прямую $\overline{B'_2B'_1}$ (рис. 105). Легко видеть, что прямая $a' = \overline{A_2A_1}$ параллельна направленной прямой $\overline{B'_2B'_1}$. Действительно, в силу свойств симметрии, прямые $\overline{B'_2B'_1}$ и $\overline{A_2A_1}$ не пересекаются. Если мы возьмем произвольный внутренний луч угла B'_1VH , то он пересечет прямую $\overline{A_2A_1}$, так как симметричный ему относительно прямой VH луч пересекает прямую a как внутренний луч угла HVB_2 .

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Если направленная прямая $\overline{A_1A_2}$ параллельна направленной прямой $\overline{B_1B_2}$, то направленная прямая $\overline{A_2A_1}$ не параллельна прямой $\overline{B_2B_1}$.

Доказательство этого утверждения проведите самостоятельно, воспользуйтесь теоремой 3.

Введем понятие параллельности для ненаправленных прямых. Будем считать, что *две ненаправленные прямые параллельны, если на них можно выбрать направления так, чтобы они удовлетворяли определению 1*. Как известно, прямая имеет два направления. Поэтому из теоремы 2 следует, что через точку B , не принадлежащую прямой a , проходят две ненаправленные прямые, параллельные данной. Очевидно, они симметричны относительно перпендикуляра, опущенного из точки B на прямую a . Эти две прямые и являются теми самыми пограничными прямыми, разделяющими пучок прямых, проходящих через точку B и пересекающих прямую a , от пучка прямых, проходящих через точку B и не пересекающих прямую a (см. рис. 105).

Рассмотрим ряд свойств параллельных прямых на плоскости Лобачевского, исследуем свойство симметричности параллельности, вопрос о котором был поставлен выше. Докажем следующую лемму.

Лемма. Пусть направленная прямая $\overline{A_1A_2}$ параллельна направленной прямой $\overline{B_1B_2}$. Тогда эти прямые имеют ось симметрии.

Доказательство. Выберем на данных параллельных прямых $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{B_1B_2}$ соответственно точки A и B (рис. 106). Построим биссектрису l угла A_1BB_2 . Так как биссектриса l является внутренним лучом этого угла, то, в соответствии с определением параллельных направленных прямых по Лобачевскому, она пересекает луч AA_2 в некоторой точке L .

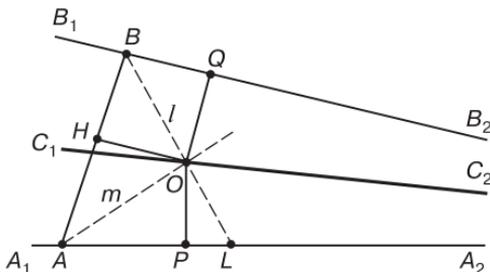


Рис. 106

Проведем биссектрису m угла $ВАА_2$. Так как биссектриса m является внутренним лучом угла $ВАА_2$, то она пересекает отрезок $ВL$, концы которого лежат на сторонах этого угла, в точке O (см. теорему 5 § 14). Опустим из точки O перпендикуляры OP , OH и OQ соответственно на прямые $АА_2$, $АВ$ и $ВВ_2$. Так как точка O принадлежит биссектрисе l угла $А_1ВВ_2$, а биссектриса является множеством всех внутренних точек угла, равноудаленных от его сторон, то $OH = OQ$. Аналогично, точка O принадлежит биссектрисе m угла $ВАА_2$, поэтому $OH = OP$. Из полученных равенств вытекает, что $OP = OQ$.

Отрезки OP и OQ не принадлежат одной прямой, угол POQ не является развернутым, иначе мы придем к противоречию с теоремой 4 § 20 и с аксиомой параллельности Лобачевского. Построим направленную прямую $\overline{C_1C_2}$, биссектрису угла POQ . Покажем, что она является искомой осью симметрии. Действительно, отразим симметрично относительно прямой $\overline{C_1C_2}$ прямую $\overline{A_1A_2}$, точка P преобразуется в точку Q , а так как при осевой симметрии перпендикулярные прямые преобразуются в перпендикулярные прямые, то прямая $\overline{A_1A_2}$ перейдет в прямую $\overline{B_1B_2}$. Лемма доказана.

Прямая $\overline{C_1C_2}$ называется *биссектралью* прямых $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{B_1B_2}$.

Теорема 5 (свойство симметричности параллельных прямых на плоскости Лобачевского). Пусть направленная прямая $\overline{A_1A_2}$ параллельна направленной прямой $\overline{B_1B_2}$. Тогда направленная прямая $\overline{B_1B_2}$ параллельна прямой $\overline{A_1A_2}$.

Доказательство. Рассмотрим биссектраль $\overline{C_1C_2}$ данных параллельных прямых $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{B_1B_2}$ (рис. 107). Выберем на прямой $\overline{A_1A_2}$ произвольную точку A и отразим ее симметрично относительно биссектралы $\overline{C_1C_2}$. Получим точку B , принадлежащую прямой $\overline{B_1B_2}$. В соответствии с признаком параллельности прямых на плоскости Лобачевского (см. теорему 1) нам осталось показать, что любой внутренний луч l угла $ВАА_2$ пересекает луч $ВВ_2$. Отразим его симметрично относительно прямой $\overline{C_1C_2}$. Его образ, в силу свойств симметрии, перейдет во внутренний луч l' угла $АВВ_2$. Из условия теоремы и определения 1 параллельности прямых на плоскости Лобачевского следует, что он пересекает прямую

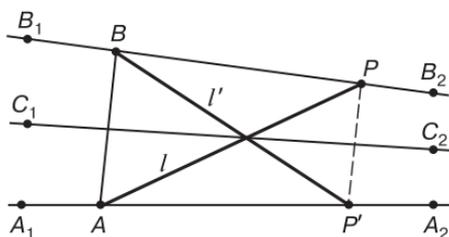


Рис. 107

$\overline{A_1A_2}$ в некоторой точке P' . Отразим точку P' симметрично относительно биссектрисы C_1C_2 , получим точку P . Тогда точка P , во-первых, принадлежит прямой $\overline{B_1B_2}$, так как прямые $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{B_1B_2}$ симметричны относительно прямой C_1C_2 , и, во-вторых, лежит на луче l , так как прямые l и l' симметричны относительно этой же биссектрисы C_1C_2 . Таким образом, внутренний луч l угла BA_2 пересекает луч BB_2 в точке P . Теорема доказана.

Свойство симметричности параллельных прямых на плоскости Лобачевского позволяет нам не указывать порядок направленных прямых при определении их параллельности. Заметим, что свойство симметричности параллельности прямых имеет место и на евклидовой плоскости. В евклидовой геометрии выполняется также свойство транзитивности: если прямая a параллельна прямой b , а прямая b параллельна прямой c , то прямые a и c также параллельны. Аналогичное свойство справедливо и для направленных прямых на плоскости Лобачевского.

Теорема 6 (свойство транзитивности параллельности прямых на плоскости Лобачевского). Пусть даны три различные направленные прямые $\overline{A_1A_2}$, $\overline{B_1B_2}$, $\overline{C_1C_2}$. Если $\overline{A_1A_2} \parallel \overline{B_1B_2}$ и $\overline{B_1B_2} \parallel \overline{C_1C_2}$, то $\overline{A_1A_2} \parallel \overline{C_1C_2}$.

Эту теорему можно доказать непосредственно, исходя из определения параллельных прямых на плоскости Лобачевского. Мы же вернемся к этому утверждению позже, рассматривая свойства интерпретации Кэли–Клейна планиметрии Лобачевского на евклидовой плоскости.

Рассмотрим направленную прямую $\overline{A_1A_2}$, параллельную направленной прямой $\overline{B_1B_2}$. Пересечем их третьей прямой $\overline{C_1C_2}$. Точки A и B — соответственно точки пересечения

прямых $\overline{A_1A_2}$, $\overline{C_1C_2}$ и $\overline{B_1B_2}$, $\overline{C_1C_2}$ (рис. 108). Справедлива следующая теорема.

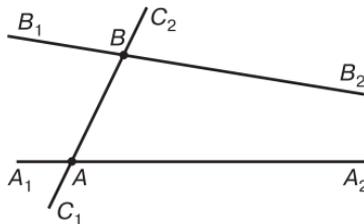


Рис. 108

Теорема 7. Угол C_2BB_2 больше угла BAA_2 .

Доказательство. Предположим противное, $\angle C_2BB_2 \leq \angle BAA_2$. Рассмотрим первый случай, $\angle C_2BB_2 = \angle BAA_2$ (рис. 109). Обозначим через M середину отрезка AB и опустим из точки M перпендикуляры MP и MQ соответственно на прямые A_1A_2 и B_1B_2 . Треугольники APM и BQM — прямоугольные, их гипотенузы MA и MB равны между собой по построению, $\angle C_2BB_2 = \angle QBM$ как вертикальные, следовательно, $\angle PAM = \angle QBM$. Таким образом, в рассматриваемых прямоугольных треугольниках равны гипотенузы и острые углы, $\triangle APM = \triangle BQM$. Из равенства этих треугольников следует, что $\angle AMP = \angle BMQ$. Поэтому точки P, Q и M лежат на одной прямой. Прямая PQ служит общим перпендикуляром направленных прямых $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{B_1B_2}$. Мы пришли к противоречию со следствием теоремы 3 настоящего параграфа. Таким образом, $\angle C_2BB_2 \neq \angle BAA_2$.

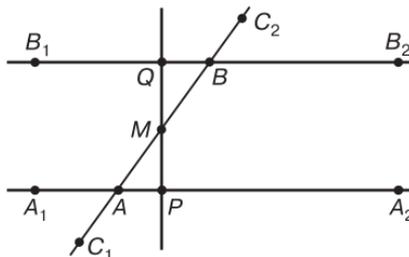


Рис. 109

Предположим теперь, что $\angle C_2BB_2 < \angle BAA_2$ (рис. 110). От луча BC_2 отложим угол, равный углу BAA_2 . В силу нашего предположения луч BP является внутренним лучом угла ABV_2 . Из параллельности прямых A_1A_2 и B_1B_2 следует, что этот луч пересекает A_1A_2 . Но с другой стороны, если при пересечении двух прямых третьей соответственные углы равны между собой, то эти прямые не пересекаются. Указанное противоречие опровергает наше предположение. Теорема доказана.

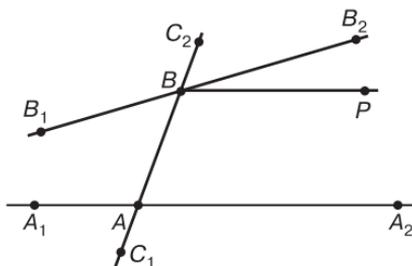


Рис. 110

Рассмотрим еще раз параллельные направленные прямые A_1A_2 и B_1B_2 , которые пересечены прямой C_1C_2 , причем A и B — соответственно точки пересечения прямых A_1A_2 , C_1C_2 и B_1B_2 , C_1C_2 (см. рис. 108). Фигуру A_2ABB_2 , образованную отрезком AB и лучами AA_2 , BB_2 будем называть *вырожденным треугольником на плоскости Лобачевского*. Отрезок AB назовем его *отрезочной стороной*, а лучи AA_2 и BB_2 — *лучевыми сторонами*. Углы BAA_2 и ABV_2 называются *внутренними углами* этого вырожденного треугольника, а углы C_1AA_2 и C_2BB_2 — его *внешними углами*. Вырожденный треугольник называется *прямоугольным*, если один из его внутренних углов прямой. Справедлива теорема, аналогичная теореме о внешнем угле треугольника на евклидовой плоскости (см. § 11).

Теорема 8. *Внешний угол вырожденного треугольника больше внутреннего угла, не смежного с ним.*

Доказательство непосредственно следует из теоремы 7.

§ 22. УГОЛ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ, ФУНКЦИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО

В настоящем параграфе мы рассмотрим замечательное свойство углов и отрезков на плоскости Лобачевского. Углы и отрезки в геометрии Лобачевского жестко связаны между собой. Поэтому мера отрезка может служить мерой угла и наоборот, мера угла может быть использована для измерения отрезка. Так как градусная мера угла не зависит от единицы измерения, то отсюда можно сделать вывод, что в геометрии Лобачевского существует абсолютная мера измерения отрезков, чего нет в евклидовой геометрии. Этот факт был установлен еще предшественниками Лобачевского, в частности, был отмечен Иоганном Генрихом Ламбертом (см. [13]). В евклидовой геометрии для измерения длины отрезка необходимо иметь единичный отрезок, т. е. эталон измерения.

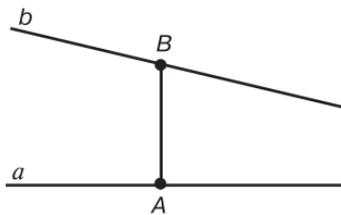


Рис. 111

Рассмотрим произвольный отрезок AB . Через точку A проведем прямую a , перпендикулярную прямой AB , а через точку B — прямую b , параллельную прямой a (рис. 111). Как было установлено в предыдущем параграфе, прямая b не перпендикулярна прямой AB .

Определение 1. Острый угол, образованный прямыми AB и b , называется *углом параллельности отрезка AB* .

Ясно, что каждому отрезку соответствует свой угол параллельности.

Теорема 1. *Равным отрезкам соответствуют равные углы параллельности.*

Доказательство. Пусть даны два равных отрезка AB и $A'B'$. Проведем через точки A и A' направленные прямые A_1A_2 и $A'_1A'_2$, перпендикулярные соответственно прямым AB и $A'B'$, а через точки B и B' — направленные прямые B_1B_2 и $B'_1B'_2$, параллельные соответственно прямым A_1A_2 и $A'_1A'_2$ (рис. 112). Тогда $\alpha_1 = \angle ABB_2$ и $\alpha_2 = \angle A'B'B'_2$ — соответственно углы параллельности отрезков AB и $A'B'$. Предположим, что

$$\alpha_1 > \alpha_2. \quad (1)$$

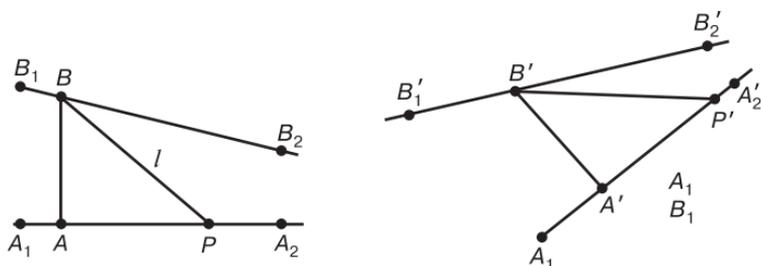


Рис. 112

Отложим от луча BA в полуплоскости $BA A_2$ угол $\alpha_2: \angle BA, l = \alpha_2$. В силу неравенства (1), луч l — внутренний луч угла ABB_2 . Так как $\overline{A_1 A_2} \parallel \overline{B_1 B_2}$, луч l пересекает луч AA_2 в некоторой точке P . Отложим на луче $A'A_2$ от точки A' отрезок $A'P'$, равный отрезку AP . Рассмотрим треугольники ABP и $A'B'P'$. Они прямоугольные, по условию теоремы имеют равные катеты AB и $A'B'$, по построению равные катеты AP и $A'P'$. Таким образом, прямоугольный треугольник ABP равен треугольнику $A'B'P'$. Поэтому $\angle ABP = \angle A'B'P' = \angle A'B'B'_2 = \alpha_2$. Однако, луч $B'P'$ пересекает луч $A'A_2'$, а направленная прямая $\overline{B'_1 B'_2}$ параллельна прямой $\overline{A'_1 A'_2}$. Следовательно луч $B'P'$ — внутренний луч угла $A'B'B'_2$, $\angle A'B'P' < \angle A'B'B'_2$. Полученное противоречие опровергает неравенство (1). Аналогично доказывается, что угол α_1 не может быть меньше угла α_2 . Теорема доказана.

Рассмотрим теперь, как связаны между собой углы параллельности неравных отрезков.

Теорема 2. Пусть отрезок AB больше отрезка $A'B'$, а углы α_1 и α_2 — соответственно их углы параллельности. Тогда $\alpha_1 < \alpha_2$.

Доказательство. Доказательство этой теоремы непосредственно следует из теоремы о внешнем угле вырожденного треугольника (см. § 21). Рассмотрим отрезок \overline{AB} . Проведем через точку A направленную прямую $\overline{A_1 A_2}$, перпендикулярную прямой AB , а через точку B — направленную прямую $\overline{B_1 B_2}$, параллельную направленной прямой $\overline{A_1 A_2}$ (рис. 113). Отложим на луче AB отрезок AP , равный отрезку $A'B'$. Так как $A'B' < AB$, то P — внутренняя точка отрезка AB . Проведем через точку P прямую $\overline{C_1 C_2}$, также

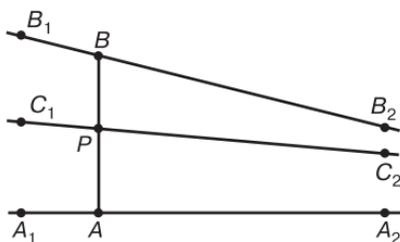


Рис. 113

параллельную прямой $\overline{A_1A_2}$. Угол $\alpha_2 = \angle APC_2$ является углом параллельности отрезка $A'B'$, а угол $\alpha_1 = \angle ABB_2$ — углом параллельности отрезка AB . Кроме того, из теоремы о транзитивности параллельных прямых (см. § 21) следует, что прямая $\overline{C_1C_2}$ параллельна прямой $\overline{B_1B_2}$. Поэтому треугольник B_2BPC_2 — вырожденный, α_2 — внешний, а α_1 — его внутренний углы. Из теоремы о внешнем угле вырожденного треугольника (теорема 8 § 21) следует истинность доказываемого утверждения.

Легко доказать обратное утверждение.

Теорема 3. Пусть α_1 и α_2 — углы параллельности отрезков AB и $A'B'$. Тогда если $\alpha_1 < \alpha_2$, то $AB > A'B'$.

Доказательство. Предположим противное, $AB \leq A'B'$. Тогда из теорем 2 и 3 следует $\alpha_1 \geq \alpha_2$, что противоречит условию данной теоремы.

Мы доказали, что каждому отрезку соответствует свой угол параллельности, причем большему отрезку соответствует меньший угол. Докажем, что для любого острого угла существует отрезок, для которого этот угол является углом параллельности. Тем самым будет установлено взаимно однозначное соответствие между отрезками и острыми углами на плоскости Лобачевского.

Теорема 4. Для любого острого угла существует отрезок, для которого этот угол является углом параллельности.

Доказательство. Пусть дан острый угол ABC (рис. 114). Будем считать, что все рассматриваемые в дальнейшем точки на лучах BA и BC лежат между точками B и A и точками B и C . Назовем луч допустимым, если его

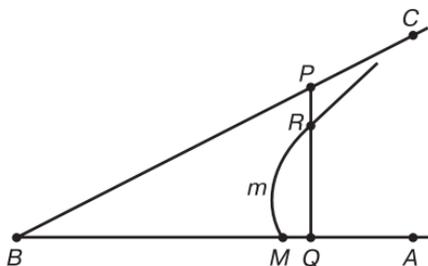


Рис. 114

начало принадлежит стороне угла BA , он перпендикулярен этой стороне и расположен в той же полуплоскости относительно прямой BA , что и сторона BC .

В § 20 мы обосновали утверждение 3: на стороне любого острого угла существует такая точка, что перпендикуляр, восстановленный в этой точке к этой стороне, не пересекает вторую сторону угла. Таким образом, существует такой допустимый луч m с началом в точке M , который не пересекает сторону BC данного угла. Разобьем точки отрезка BM на два класса. К классу K_1 отнесем те точки этого отрезка, для которых допустимые лучи с началами в этих точках пересекают сторону BC данного угла, а к классу K_2 — те точки отрезка BM , для которых допустимые лучи с началами в этих точках сторону BC не пересекают. Покажем, что такое разбиение отрезка BM образует его дедекиндово сечение (см. § 11). Для этого следует проверить, что:

- 1) $K_1 \cup K_2 = [BM]$, $K_1 \cap K_2 = \emptyset$;
- 2) $B \in K_1$, $M \in K_2$ и классы K_1 и K_2 содержат точки, отличные от точек B и M ;
- 3) любая точка класса K_1 , отличная от точки B , лежит между точкой B и любой точкой класса K_2 .

Первое утверждение очевидно. Любая точка отрезка BM принадлежит либо классу K_1 , либо классу K_2 . При этом точка не может принадлежать двум классам одновременно. Поэтому будем считать, что $B \in K_1$, а $M \in K_2$, так как допустимый луч с началом в точке M не пересекает прямую BC . Класс K_1 содержит по крайней мере одну точку, отличную от точки B . Для ее построения достаточно выбрать произвольную точку P на стороне BC и опустить

из нее перпендикуляр PQ на луч BA . Если предположить, что точка Q лежит между точками M и A , то точки P и Q окажутся в различных полуплоскостях относительно прямой, содержащей луч t (см. рис. 114). Поэтому отрезок PQ пересекает луч t в некоторой точке R . Мы получим, что из точки R на прямую BA опущены два перпендикуляра, что противоречит теореме о внешнем угле треугольника (см. § 11). Таким образом, точка Q принадлежит отрезку BM , класс K_1 содержит точки, отличные от точки B . Легко объяснить, почему на луче BA существует отрезок, содержащий по крайней мере одну точку, принадлежащую классу K_2 и отличную от его конца. Действительно, если класс K_2 рассматриваемого отрезка BM содержит единственную точку M , то выберем произвольную точку M' между точками M и A . Рассмотрим допустимый луч t' с началом в точке M' . Он не пересекает луч t , иначе из точки их пересечения опущены два перпендикуляра на прямую AB , поэтому луч t' не пересекает луч BC . Отрезок BM' — искомый, и все дальнейшие рассуждения следует проводить для отрезка BM' .

Проверим справедливость третьего условия построения дедекиндова сечения. Предположим, что существуют такие точки $P \in K_1$ и $U \in K_2$, что точка P лежит между точками U и M (рис. 115). Проведем допустимые лучи u и p с началами в точках U и P . Так как $P \in K_1$, то луч p пересекает сторону BC данного угла в некоторой точке Q . Прямая, содержащая луч u , пересекает сторону BP треугольника BPQ , поэтому, согласно аксиоме Π_4 аксиоматики Гильберта (аксиома Паша, см. § 10), она пересекает

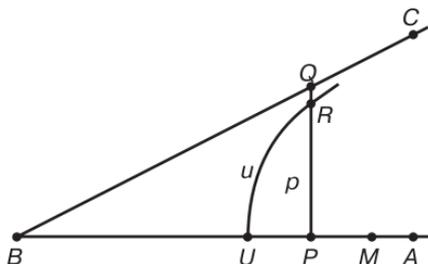


Рис. 115

либо сторону BQ , либо сторону PQ этого треугольника. Но $U \in K_2$, луч u является допустимым, он не пересекает сторону BQ , и следовательно, имеет с лучом p общую точку R (см. рис. 115). Мы снова пришли к противоречию, так как из точки R опущены два перпендикуляра на прямую AB . Классы K_1 и K_2 удовлетворяют условиям теоремы § 11 о построении дедекиндова сечения.

Таким образом, существует такая точка M_0 отрезка $[BM]$, для которой любая точка, лежащая между точками B и M_0 , принадлежит классу K_1 , а любая точка, лежащая между точками M_0 и M , принадлежит классу K_2 . Докажем, что допустимый луч m_0 с началом в точке M_0 параллелен прямой BC . Для этого в начале покажем, что луч m_0 не пересекает прямую BC . Предположим противное, луч m_0 пересекает сторону BC угла ABC в некоторой точке T (рис. 116). Выберем точку S луча BC , лежащую между точками T и C , и опустим из нее перпендикуляр на прямую BA . Ясно, что основание N этого перпендикуляра будет принадлежать отрезку M_0M . Мы получили противоречие, так как построили точку класса K_1 , лежащую между точками M_0 и M .

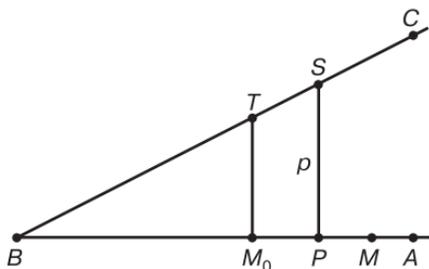


Рис. 116

Нам осталось доказать, что любой внутренний луч h угла m_0, M_0B пересекает луч BC . Выберем на луче h произвольную точку K , принадлежащую углу m_0, M_0B , и опустим из нее перпендикуляр на прямую BA (рис. 117). Нетрудно проверить, что основание S этого перпендикуляра принадлежит отрезку BM_0 , т. е. классу K_1 (докажите это самостоятельно). Поэтому перпендикуляр KS пересекает сторону BC угла ABC в некоторой точке T . Луч h

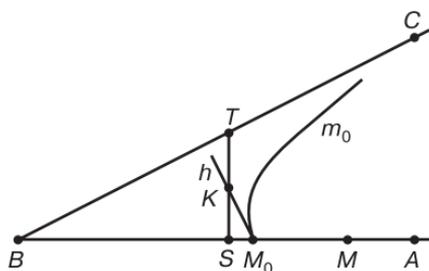


Рис. 117

пересек сторону ST треугольника BST в точке K , согласно аксиоме Π_4 (аксиоме Паша), он должен пересечь либо сторону BS , либо сторону BT этого треугольника. Ясно, что луч h не пересекает отрезок BS , иначе через две точки — предполагаемую точку пересечения и точку M_0 — проходят две прямые h и BA . Таким образом, луч h пересекает сторону BT , т. е. луч BC . Луч m_0 параллелен прямой BC . Теорема доказана.

Мы установили, что каждому отрезку в геометрии Лобачевского взаимно однозначно соответствует его угол параллельности. Мера угла на плоскости Лобачевского вводится так же, как на евклидовой плоскости. Длина отрезка будет введена нами позже, в следующей главе. Будем считать, что длина отрезка также определена.

Определение 2. *Функция $\varphi = \Pi(x)$, ставящая в соответствие длине x отрезка величину φ его угла параллельности, называется функцией Лобачевского.*

Ясно, что $0 < \Pi(x) < \frac{\pi}{2}$. Из доказанных свойств угла параллельности отрезка следует, что *функция Лобачевского является монотонно убывающей*. Николаем Ивановичем Лобачевским была получена следующая замечательная формула:

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\Pi(x)}{2} \right) = e^{-\frac{x}{k}},$$

где k — некоторое положительное число, называемое *радиусом кривизны* пространства Лобачевского. Два пространства Лобачевского с одним и тем же радиусом кривизны изометричны. Из приведенной формулы, как нетрудно видеть,

следует, что функция $\varphi = \Pi(x)$ непрерывна, монотонно убывает, ее значения принадлежат интервалу $(0; \frac{\pi}{2})$.

§ 23. СВОЙСТВА ПРЯМЫХ НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

В предыдущих параграфах мы познакомились с рядом свойств параллельных прямых на плоскости Лобачевского. Мы продолжим изучение свойств как параллельных, так и не параллельных прямых, при этом рассмотрим те свойства, которые не имеют аналогов на евклидовой плоскости. Введем следующее определение.

Определение 1. *Две прямые плоскости Лобачевского называются расходящимися, если они не пересекаются и не параллельны.*

На плоскости Лобачевского существуют расходящиеся прямые. Например, две прямые, имеющие общий перпендикуляр. Они не пересекаются и не параллельны (см. следствие теоремы 3, § 21). Определение 1 позволяет провести классификацию взаимного расположения прямых плоскости Лобачевского: *две прямые либо пересекаются, либо не имеют общих точек. Если они не пересекаются, то они либо расходятся, либо параллельны.*

Докажем признак расходимости прямых.

Теорема 1 (признак расходимости прямых на плоскости Лобачевского). *Две прямые плоскости Лобачевского являются расходящимися тогда и только тогда, когда они имеют общий перпендикуляр.*

Доказательство. *Достаточность* этого утверждения нами доказана в § 21. Если две прямые имеют общий перпендикуляр, то они не пересекаются и не параллельны. Докажем *необходимость*. Пусть даны две расходящиеся прямые a и b . Для дальнейших рассуждений удобно их рассматривать как направленные прямые: $a = \overline{A_1A_2}$ и $b = \overline{B_1B_2}$. Выберем на прямой a произвольную точку A и опустим из нее перпендикуляр AB на прямую b (рис. 118). Проведем через точку B направленные прямые \overline{BF} и \overline{BH} , соответственно параллельные прямым $\overline{A_2A_1}$ и $\overline{A_1A_2}$. По построению углы ABB_1 и ABB_2 прямые, поэтому углы FBB_1 и HBB_2 острые. Следовательно, существуют отрезки,

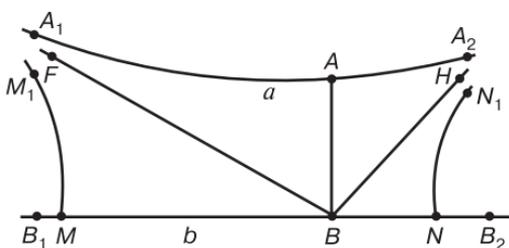


Рис. 118

для которых эти углы служат углами параллельности. Отложим их от точки B , получим точки M и N . Для отрезка BM углом параллельности является угол FBB_1 , а для отрезка BN — угол HBB_2 . Восставим в точках M и N перпендикуляры MM_1 и NN_1 к прямой b . Так как угол FBB_1 является углом параллельности отрезка BM , то $MM_1 \parallel BF$. Но с другой стороны, $BF \parallel A_2A_1$. Из свойства транзитивности параллельности направленных прямых (теорема 6 § 21) следует, что $MM_1 \parallel A_2A_1$. Аналогично доказывается, что перпендикуляр NN_1 параллелен направленной прямой A_1A_2 . Таким образом, мы построили на одной из расходящихся прямых, прямой b , две точки M и N , перпендикуляры в которых к прямой b параллельны второй прямой a .

Обозначим через P середину отрезка MN . Опустим из точки P перпендикуляр PQ на прямую a (рис. 119). Проведем через точку P направленные прямые PS и PT , параллельные прямой a : $PS \parallel A_2A_1$, $PT \parallel A_1A_2$. Но перпендикуляры, восставленные в точках M и N к прямой b ,

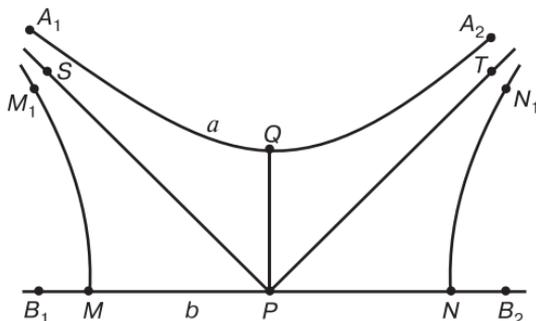


Рис. 119

также параллельны прямой a : $\overline{MM_1} \parallel \overline{A_2A_1}$, $\overline{NN_1} \parallel \overline{A_1A_2}$. Из свойства транзитивности параллельности прямых на плоскости Лобачевского следует, что $\overline{PS} \parallel \overline{MM_1}$, $\overline{PT} \parallel \overline{NN_1}$. По построению, прямая PQ перпендикулярна прямой a , покажем, что она также перпендикулярна прямой b . Для этого достаточно доказать, что

$$\angle QPB_1 = \angle QPB_2. \quad (1)$$

Так как $PQ \perp A_1A_2$, $\overline{PS} \parallel \overline{A_2A_1}$ и $\overline{PT} \parallel \overline{A_1A_2}$, то углы QPS и QPT являются углами параллельности одного и того же отрезка PQ . Поэтому

$$\angle QPS = \angle QPT. \quad (2)$$

Кроме того, $\overline{MM_1} \perp \overline{PB_1}$, $\overline{NN_1} \perp \overline{PB_2}$, $\overline{PS} \parallel \overline{MM_1}$ и $\overline{PT} \parallel \overline{NN_1}$. Отсюда следует, что углы SPM и TPN — углы параллельности отрезков PM и PN . Так как P — середина отрезка MN , то эти отрезки равны друг другу, таким образом,

$$\angle SPM = \angle TPN. \quad (3)$$

Так как $\angle QPB_1 = \angle QPS + \angle SPM$, $\angle QPB_2 = \angle QPT + \angle TPN$, то из равенств (2) и (3) следует равенство (1). Теорема доказана.

Легко видеть, что если две прямые имеют общий перпендикуляр, то он единствен. Действительно, если они имеют два общих перпендикуляра, то на плоскости Лобачевского существует четырехугольник, все углы которого прямые. Мы получили противоречие следствию утверждения 4 § 20. Таким образом, можно сказать, что *непересекающиеся прямые являются расходящимися, если они имеют общий перпендикуляр, и параллельными, если такого перпендикуляра они не имеют.*

Рассмотрим еще одно свойство непересекающихся прямых на плоскости Лобачевского. Пусть дана точка на одной из двух непересекающихся прямых, и пусть эта точка перемещается по прямой, которой она принадлежит. Как меняется расстояние от нее до другой прямой? Мы получим интереснейшие утверждения. Оказывается, что *для расходящихся прямых это расстояние стремится к бесконечности, если точка бесконечно удаляется от основания их общего перпендикуляра, а для параллельных прямых расстояние стремится к нулю при стремлении точки в направлении параллельности, и бесконечно возрастает,*

если точка стремится в направлении, противоположном направлению параллельности.

Докажем следующую лемму.

Лемма. Пусть даны две направленные прямые $a = \overline{A_1A_2}$ и $b = \overline{B_1B_2}$, из точки Q прямой b опущен перпендикуляр PQ на прямую a , $\angle PQB_2$ — прямой или тупой. Тогда если точка M бесконечно удаляется от точки Q по лучу QB_2 , то расстояние от M до прямой a бесконечно возрастает.

Доказательство. Пусть X — произвольная точка луча QB_2 , x — длина отрезка QX . Обозначим через $f(x)$ расстояние от точки X до прямой a . Нам следует доказать, что $f(x)$ — бесконечно возрастающая функция. Докажем, что она возрастает. Пусть $x_2 > x_1$, где $x_1 = QX_1$, $x_2 = QX_2$, Y_1 и Y_2 — основания перпендикуляров, опущенных из точек X_1 и X_2 на прямую a , $f(x_1) = X_1Y_1$, $f(x_2) = X_2Y_2$ (рис. 120 а). Воспользуемся доказанными в § 19 свойствами двупрямоугольников. Рассмотрим двупрямоугольники PQX_1Y_1 , PQX_2Y_2 и $Y_1X_1Y_2X_2$. По условию, $\angle PQB_2$ — прямой или тупой, в четырехугольнике на плоскости Лобачевского сумма углов не превышает $4d$, поэтому $\angle QX_1Y_1$, $\angle QX_2Y_2$ — острые углы. Отсюда следует, что в двупрямоугольнике $Y_1X_1Y_2X_2$ угол $\angle Y_1X_1X_2$ тупой. Согласно теореме 4 § 19, боковая сторона двупрямоугольника, прилежащая к большему углу верхнего основания, меньше боковой стороны, прилежащей к меньшему углу. Отсюда следует, что $X_1Y_1 > X_2Y_2$. Функция $f(x)$ — возрастающая.

Докажем, что функция $f(x)$ бесконечно возрастает. Для этого отложим на луче QB_2 равные отрезки $QX_1 = X_1X_2 = X_2X_3 = \dots = X_{n-1}X_n = \dots$ (рис. 120 б). На луче Y_1X_1 от его начала Y_1 отложим отрезки PQ и X_2Y_2 : $Y_1X'_1 = PQ$, $Y_1X'_2 = X_2Y_2$. Так как точка X_1 лежит между точками Q и X_2 , а функция $f(x)$ является возрастающей, точка X_1 лежит между точками X'_1 и X'_2 . Четырехугольники PQX'_1Y_1 и $Y_1X'_2X_2Y_2$ представляют собой четырехугольники Саккери, свойства которых рассмотрены нами в § 19. Углы при верхнем основании четырехугольника Саккери равны между собой, кроме того, они острые. Введем обозначения: $\alpha = \angle PQX'_1 = \angle Y_1X'_1Q$, $\beta = \angle Y_1X'_2X_2 = \angle X'_2X_2Y_2$, α и β — острые углы. В тре-

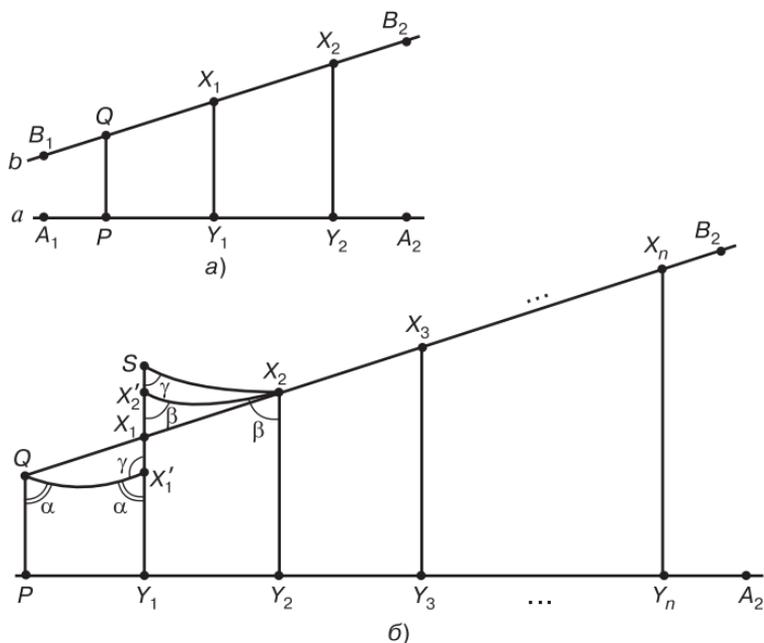


Рис. 120

угольниках $QX_1X'_1$ и $X_1X'_2X_2$ равны стороны QX_1 и X_1X_2 по построению, а $\angle QX_1X'_1 = \angle X'_2X_1X_2$ как вертикальные. Так как α — острый угол, то $\gamma = \angle QX'_1X_1$ — тупой угол. Треугольники $QX_1X'_1$ и $X_1X'_2X_2$ не равны друг другу, иначе $\gamma = \beta$, а один из этих углов острый, а другой тупой. Отсюда следует, что отрезки X'_1X_1 и $X_1X'_2$ не равны. Легко показать, что $X_1X'_1 < X_1X'_2$. Действительно, предположим противное, $X_1X'_1 > X_1X'_2$. Отрасим симметрично точку X'_1 относительно точки X_1 , получим точку S (рис. 120 б), причем $\triangle QX_1X'_1 = \triangle SX_1X_2$. Отсюда следует, что $\angle X_1SX_2 = \angle QX'_1X_1 = \gamma$. Так как по предположению $X_1X'_1 > X_1X'_2$, то точка X'_2 лежит между точками X_1 и S . Но тогда в треугольнике X'_2SX_2 внешний угол β — острый, а внутренний угол γ — тупой, что противоречит теореме о внешнем угле треугольника. Таким образом, мы доказали, что $X'_1X_1 < X_1X'_2$.

Обозначим: $\delta = X_1Y_1 - PQ = X_1X'_1$. Так как $X_2Y_2 = PQ + X_1X'_1 + X_1X'_2$, то из доказанного неравенства следует, что $X_2Y_2 > PQ + 2\delta$. Аналогично доказывается, что

$X_3Y_3 > PQ + 3\delta$. Продолжая эти рассуждения, получим, что для произвольной точки X_n расстояние до прямой a удовлетворяет неравенству $X_nY_n > PQ + n\delta$. Таким образом, если точка X бесконечно удаляется от точки Q по лучу QA_2 , то расстояние от X до прямой a бесконечно возрастает. Лемма доказана.

Замечание. Можно доказать, что $f(x)$ является непрерывной монотонно возрастающей функцией (см. [9], § 14).

Рассмотрим две расходящиеся прямые A_1A_2 и B_1B_2 . Пусть PQ — их общий перпендикуляр (см. рис. 119). Из леммы следует, что если точка M бесконечно удаляется от основания общего перпендикуляра Q либо по лучу QA_1 , либо по лучу QA_2 , то расстояние от нее до прямой b бесконечно возрастает.

Исследуем поведение функции $f(x)$ в случае параллельных прямых $a = \overline{A_1A_2}$ и $b = \overline{B_1B_2}$. Будем считать, что $\overline{A_1A_2} \parallel \overline{B_1B_2}$. Выберем произвольную точку Q на прямой b и опустим из нее перпендикуляр QP на прямую a (рис. 121). Тогда угол PQB_2 служит углом параллельности отрезка PQ , т. е. является острым углом. Поэтому $\angle PQB_1$ — тупой угол. Из леммы следует, что если точка M бесконечно удаляется от точки Q по лучу QB_1 , то ее расстояние до прямой a бесконечно возрастает. Докажем, что это расстояние бесконечно убывает, если точка M бесконечно удаляется от точки Q по лучу QB_2 .

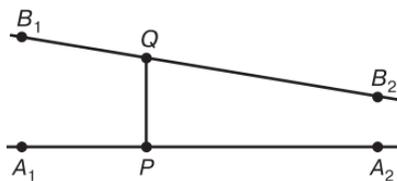


Рис. 121

Теорема 2. Пусть даны две направленные параллельные прямые $a = \overline{A_1A_2}$, $b = \overline{B_1B_2}$ и произвольный отрезок p . Тогда на прямой b существует такая точка M_0 , что длина перпендикуляра, опущенного из нее на прямую a , равна длине отрезка p .

Доказательство. Пусть $a = \overline{A_1A_2}$ и $b = \overline{B_1B_2}$ — данные параллельные направленные прямые. Выберем некоторый отрезок p . Так как расстояние от переменной точки прямой b до прямой a при ее движении в направлении, противоположном направлению параллельности, бесконечно возрастает, то на прямой b найдется такая точка M_1 , что расстояние от нее до прямой a больше длины данного отрезка p . Опустим из точки M_1 перпендикуляр M_1N_1 на прямую a и отложим от точки N_1 отрезок N_1S , равный отрезку p (рис. 122). Так как $p < M_1N_1$, то точка S лежит на отрезке M_1N_1 . Проведем через точку S две направленные прямые, параллельные прямым $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_2A_1}$: $\overline{S_2S_1} \parallel \overline{A_2A_1}$, $\overline{T_1T_2} \parallel \overline{A_1A_2}$. Углы S_1SN_1 и N_1ST_2 являются углами параллельности отрезка SN_1 , поэтому они оба острые, равные между собой. Следовательно, $\angle M_1ST_2$ — тупой угол, а поскольку $\angle M_1SS_2 = \angle S_1SN_1$ как вертикальные углы, $\angle M_1SS_2$ — острый угол. Поэтому луч SS_2 является внутренним лучом угла M_1ST_2 . В силу параллельности прямых $\overline{T_1T_2} \parallel \overline{A_1A_2}$ и $\overline{B_1B_2} \parallel \overline{A_1A_2}$, прямые $\overline{T_1T_2}$ и $\overline{B_1B_2}$ также параллельны. Луч SS_2 как внутренний луч угла M_1ST_2 пересекает прямую $\overline{B_1B_2}$ в некоторой точке M_2 .

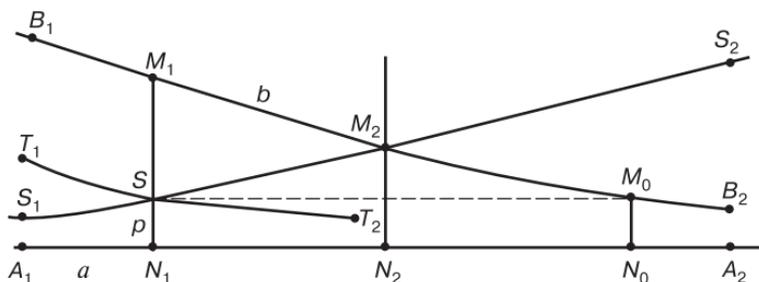


Рис. 122

Опустим из этой точки перпендикуляр M_2N_2 на прямую a . Тогда $\angle S_1M_2N_2 = \angle B_2M_2N_2$ как углы параллельности отрезка M_2N_2 . Отсюда следует, что прямые $\overline{B_1B_2}$ и $\overline{S_1S_2}$ симметричны относительно прямой M_2N_2 . Рассмотрим точку M_0 прямой $\overline{B_1B_2}$, симметричную точке S прямой $\overline{S_1S_2}$. В силу свойств симметрии отрезок перпендикуляра M_0N_0 , опущенного из M_0 на прямую a , равен отрезку p . Теорема доказана.

Так как при бесконечном уменьшении отрезка p точка M_0 будет бесконечно удаляться от точки M_1 , то при движении точки M_0 в сторону параллельности расстояние от M_0 до второй параллельной прямой бесконечно уменьшается.

Доказанные свойства параллельных и расходящихся прямых не имеют аналогов в евклидовой геометрии.

§ 24. ПУЧКИ ПРЯМЫХ НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО, ТРАЕКТОРИИ ПУЧКОВ

Введем следующее определение.

Определение 1. Множество всех прямых плоскости Лобачевского, проходящих через одну точку, называется пучком пересекающихся прямых. Множество всех расходящихся прямых, имеющих один и тот же общий перпендикуляр, — пучком расходящихся прямых. Множество всех прямых, параллельных между собой в одном и том же направлении, — пучком параллельных прямых.

Общая точка прямых, принадлежащих пучку пересекающихся прямых, называется его *центром*. Общий перпендикуляр прямых, составляющий пучок расходящихся прямых, называется его *базой*. Ясно, что любые две прямые принадлежат одному и только одному из указанных типов пучков.

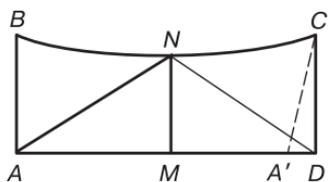


Рис. 123

Мы переходим к доказательству теоремы о серединных перпендикулярах треугольника на плоскости Лобачевского. Прежде всего рассмотрим необходимое нам свойство двупрямоугольников.

Пусть дан двупрямоугольник $ABCD$, AD — его нижнее, а BC — верхнее основания, N — середина верхнего основания BC , MN — перпендикуляр, опущенный из точки N на нижнее основание AD (рис. 123).

Лемма 1. Двупрямоугольник $ABCD$ тогда и только тогда является четырехугольником Саккери, когда прямая MN перпендикулярна верхнему основанию BC .

Доказательство. Необходимость. Пусть прямая MN перпендикулярна основанию BC . Требуется доказать, что

$ABCD$ — четырехугольник Саккери. Предположим, что $\angle ABN \neq \angle NCD$. Отразим симметрично отрезок AB относительно прямой MN . Так как N — середина основания BC , $MN \perp AD$, $MN \perp BC$, то точка B преобразуется в точку C , а в силу нашего предположения, точка A — в некоторую точку A' прямой AD , не совпадающую с точкой D . Так как при осевой симметрии сохраняются величины углов между прямыми, то $CA' \perp AD$. Мы получили, что из точки C на прямую AD опущено два перпендикуляра CD и CA' , что противоречит теореме о внешнем угле треугольника (см. теорему 1 § 11). Таким образом, $\angle ABN = \angle NCD$. В двупрямоугольнике $ABCD$ равны углы при верхнем основании, поэтому он является четырехугольником Саккери (см. теорему 5 § 19).

Достаточность. Пусть $ABCD$ — четырехугольник Саккери (см. рис. 123). Требуется доказать, что $NM \perp BC$. В силу свойств четырехугольника Саккери $AB = CD$, $\angle ABC = \angle BCD$. Так как N — середина основания BC , то $BN = NC$. Поэтому треугольники ABN и CND равны по первому признаку равенства треугольников. Отсюда следует, что $AN = DN$, $\angle BNA = \angle DNC$. Таким образом, треугольник AND — равнобедренный. Отрезок NM является его высотой, следовательно, и биссектрисой угла при вершине этого треугольника, поэтому $\angle ANM = \angle DNM$. Из полученных равенств следует, что $\angle BMN = \angle DNM$. Поэтому $NM \perp BC$. Лемма доказана.

Из леммы 1 вытекает следующее следствие.

Следствие 1. *Двупрямоугольник тогда и только тогда является четырехугольником Саккери, когда прямая, соединяющая середины оснований, перпендикулярна этим основаниям.*

Перейдем к доказательству следующей замечательной теоремы.

Теорема 1 (теорема о серединных перпендикулярах к сторонам треугольника). *Серединные перпендикуляры сторон треугольника на плоскости Лобачевского принадлежат либо пучку пересекающихся, либо пучку расходящихся, либо пучку параллельных прямых, при этом существуют треугольники, серединные перпенди-*

куляры которых принадлежат каждому из трех типов пучков.

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник, M_1 , M_2 и M_3 — соответственно середины сторон AB , BC и AC , h_1 , h_2 и h_3 — серединные перпендикуляры сторон треугольника, восстановленные в точках M_1 , M_2 и M_3 . Рассмотрим три возможных случая.

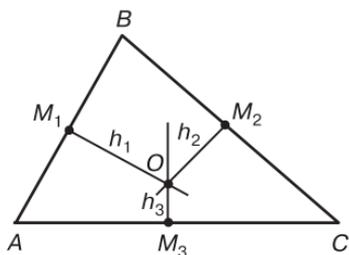


Рис. 124

1. Перпендикуляры h_1 и h_2 пересекаются в точке O (рис. 124). Тогда, используя те же рассуждения, что и в школьном курсе геометрии, легко доказать, что точка O равноудалена от всех вершин треугольника. Отсюда следует, что она принадлежит серединному перпендикуляру h_3 (подробное доказательство проведите самостоятельно).

Мы получили, что серединные перпендикуляры h_1 , h_2 и h_3 пересекаются в точке O , т. е. принадлежат пучку пересекающихся прямых.

2. Перпендикуляры h_1 и h_2 расходятся. Тогда существует общий перпендикуляр DE этих прямых. Опустим из вершин треугольника перпендикуляры AP , BR и CS на прямую DE (рис. 125). Четырехугольник $PABR$ является двупрямоугольником, PR и AB — соответственно его нижнее и верхнее основания, точка M_1 — середина верхнего основания, прямая h_1 перпендикулярна его основаниям PR и AB . Тогда, в соответствии с леммой 1, $PABR$ — четырехугольник

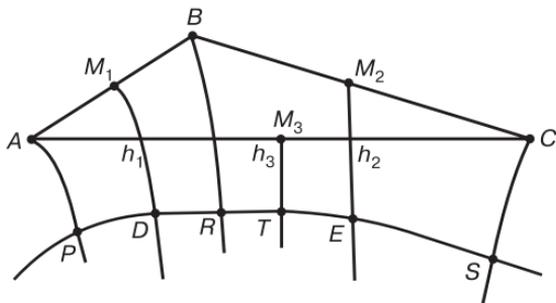


Рис. 125

Саккери. Поэтому $AP = BR$. Аналогично доказывается, что $RBCS$ также является четырехугольником Саккери. Отсюда получим, что $BR = CS$. Поэтому четырехугольник $PACS$ также является четырехугольником Саккери, а прямая h_3 , перпендикулярная его верхнему основанию, как следует из леммы 1, перпендикулярна прямой PS . Таким образом, серединные перпендикуляры h_1 , h_2 и h_3 принадлежат пучку расходящихся прямых с базой PS .

3. Перпендикуляры h_1 и h_2 параллельны. Заметим, что перпендикуляр h_3 не пересекается с прямыми h_1 и h_2 , так как иначе серединные перпендикуляры треугольника ABC , в соответствии с пунктом 1 доказываемой теоремы, должны принадлежать пучку пересекающихся прямых. Без ограничения общности можно предположить, что $AB \leq BC \leq AC$. Тогда в треугольниках AM_1M_3 и CM_2M_3 углы $\angle M_1M_3A$ и $\angle M_2M_3C$ острые. Отсюда следует, что точки M_1 и M_2 так же, как прямые h_1 и h_2 , лежат в различных полуплоскостях относительно прямой h_3 (рис. 126). Поэтому отрезок M_1M_2 пересекает прямую h_3 в некоторой точке N . Выберем на прямых h_1 и h_2 точки M'_1 и M'_2 так, чтобы $\overline{M_1M'_1} \parallel \overline{M_2M'_2}$. Очевидно, точки M'_1 и M'_2 лежат в одной полуплоскости относительно прямой M_1M_2 (примем это утверждение без доказательства). Выберем в той же полуплоскости на прямой h_3 точку N' . Легко показать, что $\overline{NN'} \parallel \overline{M_2M'_2}$. Действительно, эти прямые не пересекаются. Рассмотрим произвольный внутренний луч p угла $M_1M_2M'_2$. Он пересекает прямую h_1 , так как $\overline{M_1M'_1} \parallel \overline{M_2M'_2}$. Но прямые h_1 и h_2 лежат в различных полуплоскостях относительно прямой h_3 , поэтому луч p пересекает и прямую $\overline{NN'}$.

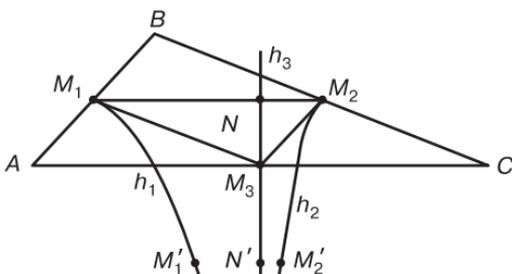


Рис. 126

Таким образом, прямые h_1 , h_2 и h_3 принадлежат пучку параллельных прямых.

Нам осталось доказать, что на плоскости Лобачевского существуют треугольники, серединные перпендикуляры которых принадлежат указанным типам пучков. Пусть даны две расходящиеся прямые h_1 и h_2 , обозначим через a их общий перпендикуляр. Выберем произвольную точку A плоскости, которая не лежит на прямых h_1 , h_2 и a . Отражая симметрично точку A относительно прямой h_1 , получим точку B . Точку B в свою очередь отразим симметрично относительно прямой h_2 . Ее образом будет точка C (рис. 127). Точки A , B и C являются вершинами треугольника. Действительно, если точки A , B и C лежат на одной прямой, то эта прямая отлична от общего перпендикуляра a , так как точка A по построению не принадлежит базе a , с другой стороны, прямые h_1 и h_2 ей перпендикулярны. Мы получили две прямые a и AC , перпендикулярные прямым h_1 и h_2 , чего не может быть. Построенный треугольник ABC является искомым, расходящиеся прямые h_1 и h_2 его серединными перпендикулярами. Поэтому, как было доказано выше, третий серединный перпендикуляр h_3 к стороне AC также принадлежит пучку расходящихся прямых с базой a (рис. 127).

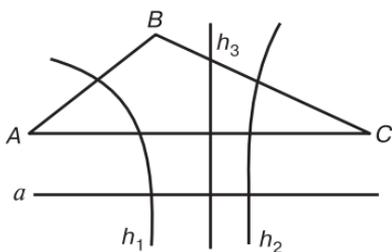


Рис. 127

Для построения примеров треугольников, для которых серединные перпендикуляры принадлежат пучкам параллельных или пересекающихся прямых, следует поступить аналогичным образом. Выбрать три прямые, принадлежащие одному или второму типу пучков, выбрать точку, не лежащую на этих прямых, и провести последовательно

симметрию относительно выбранных прямых. Подробное доказательство проведите самостоятельно. Теорема доказана.

Пусть на плоскости Лобачевского дан пучок прямых. Точку будем называть *обыкновенной*, если она не совпадает с центром в случае пучка пересекающихся прямых и не принадлежит базе в случае пучка расходящихся прямых. Если нам дан пучок параллельных прямых, то любая точка плоскости будет обыкновенной. Точки плоскости, совпадающие с центром пучка пересекающихся прямых или принадлежащие базе пучка расходящихся прямых, будем называть *особыми*. Пусть на плоскости Лобачевского дан некоторый пучок P прямых. Введем на множестве обыкновенных точек плоскости следующее бинарное отношение. Две обыкновенные точки A и B находятся в отношении Δ ($A\Delta B$), если *серединный перпендикуляр отрезка AB является прямой пучка*. Будем считать, что обыкновенная точка находится в отношении Δ сама с собой: AA . Докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Отношение Δ является отношением эквивалентности.*

Доказательство. Из определения отношения Δ следует, что оно удовлетворяет свойствам рефлексивности и симметричности. Проверим свойство транзитивности. Пусть даны три обыкновенные точки A , B и C , пусть $A\Delta B$, $B\Delta C$. Требуется доказать, что $A\Delta C$. Прежде всего покажем, что данные точки не лежат на одной прямой. Рассмотрим три случая.

1. Пучок P является пучком пересекающихся прямых. Если предположить, что точки A , B и C лежат на одной прямой, то *серединные перпендикуляры отрезков AB и BC перпендикулярны прямой AC* . Поэтому они являются расходящимися прямыми и не могут пересекаться. Из полученного противоречия следует, что точки A , B и C не коллинеарны.

2. P — пучок расходящихся прямых. Еще раз сделаем предположение о коллинеарности точек A , B и C . Тогда *серединные перпендикуляры отрезков AB и BC перпендикулярны прямой AC* . Точки A и C — обыкновенные, поэтому *прямая AC не совпадает с базой пучка*. Мы получили, что *серединные перпендикуляры отрезков AB*

и BC одновременно перпендикулярны двум прямым, с одной стороны базы, а с другой стороны, прямой AC . Мы пришли к противоречию, так как на плоскости Лобачевского не существует двух перпендикуляров к паре прямых.

3. Пучок P образован параллельными прямыми. Серединные перпендикуляры к отрезкам AB и BC параллельны. Из предположения о том, что точки A , B и C принадлежат одной прямой, следует, что перпендикуляры к этим отрезкам являются расходящимися прямыми. Полученное противоречие опровергает предположение о коллинеарности точек.

Таким образом, точки A , B и C лежат в вершинах треугольника. Тогда из теоремы о серединных перпендикулярах к сторонам треугольника следует, что серединные перпендикуляры отрезков AB , BC и AC принадлежат одному пучку, т. е. точки A и C находятся в отношении Δ . Теорема доказана.

Так как бинарное отношение Δ является отношением эквивалентности, множество всех обыкновенных точек плоскости разбивается на классы эквивалентности.

Определение 2. *Класс эквивалентностей на множестве обыкновенных точек относительно отношения Δ называется траекторией пучка.*

В настоящем параграфе мы исследуем геометрические свойства траекторий пучков. Прежде всего, докажем теорему.

Теорема 3. *Кривая тогда и только тогда служит траекторией пучка пересекающихся прямых, когда она является окружностью, центр которой совпадает с центром пучка.*

Доказательство. Пусть P — пучок пересекающихся прямых с центром в точке O , γ — его траектория, A — некоторая точка траектории γ . Обозначим через r длину отрезка OA . Выберем произвольную точку B траектории γ (рис. 128). Так как точки A и B принадлежат одной траектории, то они находятся в отношении Δ , поэтому существует прямая l пучка, относительно которой они симметричны. Отсюда следует, что треугольник OAB — равнобедренный $OA = OB$. Длина отрезка OB равна r ,

и точка B принадлежит окружности радиуса r с центром в точке O .

Обратное утверждение очевидно. Если мы рассмотрим окружность с центром в точке O и пучок пересекающихся прямых с тем же центром, то любые ее две точки симметричны относительно прямой, проходящей через центр пучка. Доказательство проведите самостоятельно.

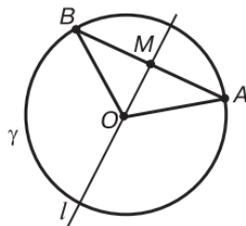


Рис. 128

Определение 3. Множество точек, принадлежащих полуплоскости плоскости Лобачевского и отстоящих от ее границы на одно и то же расстояние, называется эквидистантой.

Теорема 4. Траектория пучка расходящихся прямых является эквидистантой и наоборот, любая эквидистанта служит траекторией некоторого пучка расходящихся прямых.

Доказательство. Пусть P — пучок расходящихся прямых, p — его база. Рассмотрим обыкновенную точку A плоскости, обозначим через η траекторию пучка P , проходящую через точку A . Все точки траектории η находятся в отношении Δ с точкой A . Возьмем произвольную точку B , принадлежащую η . Тогда точки A и B симметричны относительно прямой t пучка P , $t \perp p$. Обозначим через a и b прямые пучка, содержащие точки A и B . Пусть C и D — точки пересечения прямых a и b с базой p (рис. 129). Докажем, что $AC = BD$. Так как $a \perp p$, $b \perp p$, то четырехугольник $CABD$ — двупрямоугольник. Так как точки A и B симметричны относительно прямой t , то $t \perp AB$. Кроме того, t —

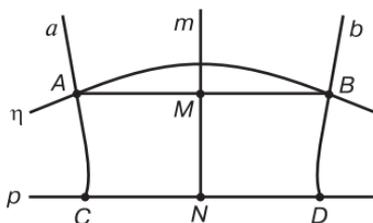


Рис. 129

прямая пучка, поэтому $m \perp p$. В соответствии с леммой 1, двупрямоугольник $ABCD$ является четырехугольником Саккери. Отсюда следует, что $AC = BD$. Все точки траектории η равноудалены от базы p , η — эквидистанта.

Обратно. Рассмотрим некоторую эквидистанту η , все точки которой равноудалены от прямой p . Выберем две точки A и B на эквидистанте η . Опустим из них перпендикуляры $a = AC$ и $b = BD$ на прямую p , $CA = DB$ (рис. 129). Тогда четырехугольник $CABD$ является четырехугольником Саккери. Пусть M — середина отрезка AB , а N — середина отрезка CD . Из следствия к лемме 1 вытекает, что $MN \perp p$. Точки A и B находятся в отношении Δ относительно пучка расходящихся прямых с базой p . Теорема доказана.

Введем следующее определение.

Определение 4. *Траектория пучка параллельных прямых называется орициклом.*

Таким образом, траектории состоят из *обыкновенных точек* плоскости. Они могут быть либо окружностями, либо эквидистантами, либо орициклами. Если для пучка P кривая γ является траекторией, то любую прямую пучка будем называть *осью* этой траектории.

Эквидистанта и орицикл обладают многими свойствами, совпадающими с известными свойствами окружности. В евклидовой геометрии некоторые свойства окружности нельзя доказать, не используя аксиому параллельности Плейфера, например теорему об измерении угла, вписанного в окружность. Ясно, что эти свойства не имеют места в геометрии Лобачевского. Но ряд свойств окружности доказывается с помощью утверждений абсолютной геометрии. Поэтому они справедливы в геометрии Лобачевского. Отметим их.

1. Окружность симметрична относительно любой прямой, проходящей через ее центр.
2. Серединный перпендикуляр к хорде окружности проходит через ее центр.
3. Прямые, проходящие через центр окружности, образуют равные углы с прямой, соединяющей их точки пересечения с окружностью.
4. Прямая линия пересекает окружность не более чем в двух точках.

5. Касательная к окружности перпендикулярна прямой, проходящей через центр и точку касания.

Докажем аналогичные свойства для траекторий пучков на плоскости Лобачевского.

Свойство 1. *Траектория пучка симметрична относительно любой своей оси.*

Доказательство этого свойства непосредственно следует из определения траектории пучка. Если взять какую-либо его ось, выбрать произвольную точку A , принадлежащую траектории γ , и рассмотреть точку A' , ей симметричную относительно выбранной оси, то точки A и A' эквивалентны друг другу в силу определения траектории пучка. Поэтому $A' \in \gamma$.

Введем следующее определение.

Определение 5. *Хордой траектории пучка называется отрезок, соединяющий его две точки.*

Свойство 2. *Серединный перпендикуляр к хорде траектории является осью пучка.*

Действительно, если дана хорда AA' траектории γ , то точки A и A' эквивалентны друг другу относительно отношения эквивалентности Δ . Поэтому они симметричны относительно оси пучка, которая служит серединным перпендикуляром отрезка AA' .

Свойство 3. *Пусть AB — хорда траектории пучка. Тогда прямая AB образует равные углы с осями траектории, проведенными в точках A и B .*

Доказательство. Рассмотрим пучок P пересекающихся прямых, точка O — его центр. Траектория представляет собой окружность с центром в точке O . Тогда треугольник ABO — равнобедренный, $\angle OAB = \angle OBA$ как углы при его основании. Прямая AB образует равные углы с осями OA и OB .

Пусть P — пучок расходящихся прямых с базой p , η — его траектория, AB — хорда этой траектории, a и b — соответственно оси траектории η , проходящие через точки A и B (см. рис. 129). Тогда из теоремы 4 следует, что η — эквидистанта с базой p . Обозначим точки пересечения осей a и b с базой p через C и D . Тогда двупрямоугольник $CABD$ является четырехугольником Саккери. Из свойств

четыреугольника Саккери (см. теорему 2 § 19) следует, что $\angle CAB = \angle DBA$. Для этого случая свойство доказано.

Рассмотрим, наконец, случай, когда P — пучок параллельных прямых. Рассмотрим его траекторию γ . Пусть AB — ее хорда, $a = \overline{A_1A_2}$ и $b = \overline{B_1B_2}$ — оси траектории, содержащие точки A и B , прямая $m = \overline{M_1M_2}$ — серединный перпендикуляр хорды AB , M — точка пересечения луча m с этой хордой (рис. 130). Прямая m , как следует из свойства 2, является осью орицикла γ , $\overline{M_1M_2} \parallel \overline{A_1A_2}, \overline{M_1M_2} \parallel \overline{B_1B_2}$. Так как отрезки AM и BM равны между собой, а $\angle MAA_2$ и $\angle MB B_2$ — их углы параллельности, то $\angle MAA_2 = \angle MB B_2$. Свойство доказано.

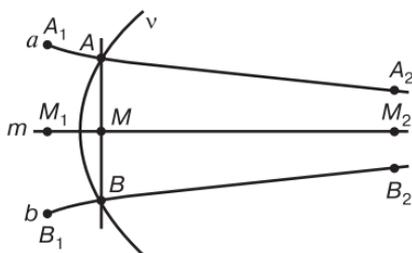


Рис. 130

Пусть даны пучок P и его траектория γ . Рассмотрим произвольную прямую t плоскости, которая в случае пучка расходящихся прямых не совпадает с его базой.

Свойство 4. Прямая t имеет с траекторией γ пучка не более двух общих точек.

Доказательство. Предположим, что прямая t , пересекающая ее в трех точках A , B и C , $a = \overline{A_1A_2}$,

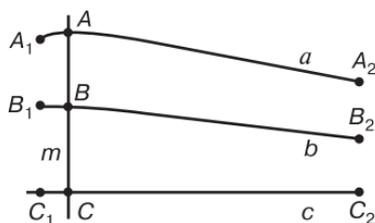


Рис. 131

$b = \overline{B_1B_2}$ и $c = \overline{C_1C_2}$ — оси пучка в этих точках (рис. 131). В силу свойства 4 $\angle BAA_2 = \angle ABB_2$, $\angle CAA_2 = \angle ACC_2$ и $\angle BCC_2 = \angle CBB_2$. Отсюда следует, что $\angle CBB_2 = \angle ABB_2$. Так как эти углы смежные, то $\angle CBB_2 = \angle ABB_2 = d$. Поэтому $\angle BAA_2 = \angle ABB_2 = \angle CBB_2 = \angle BCC_2 = d$. Покажем, что это равенство приводит к противоречию.

Пусть дан пучок пересекающихся прямых. Траектория γ представляет собой окружность с центром в точке пересечения прямых пучка (рис. 132). Тогда $\angle OA_1B_1 = \angle OB_1A_1 = d$. В треугольнике OA_1B_1 два угла прямые, чего не может быть.

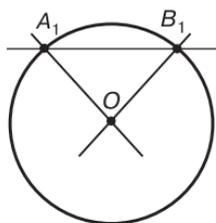


Рис. 132

Предположим, что γ служит траекторией пучка расходящихся прямых. Обозначим через P и Q соответственно точки пересечения осей пучка, проходящих через точки A_1 и B_1 , с его базой (рис. 133). Тогда в четырехугольнике PA_1B_1Q все углы прямые, что противоречит аксиоме параллельности Лобачевского.

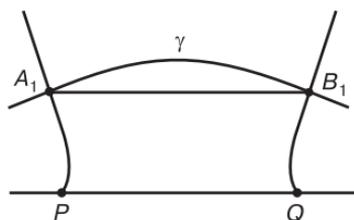


Рис. 133

Пусть, наконец, γ представляет собой траекторию пучка параллельных прямых. Прямая AB пересекает параллельные прямые $a = \overline{A_1A_2}$ и $b = \overline{B_1B_2}$ под прямыми углами (см. рис. 130). Мы также пришли к противоречию с аксиомой параллельности Лобачевского. Свойство доказано.

Свойство 5. *Касательная к траектории пучка перпендикулярна к его оси, проходящей через точку касания.*

Доказательство. Рассмотрим траекторию γ произвольного пучка. Выберем ее произвольную ось t , которая пересекает траекторию γ в точке M (рис. 134). Пусть A — произвольная точка траектории γ . Отражая ее симметрично

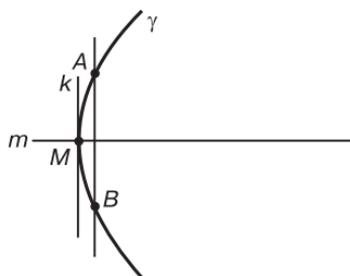


Рис. 134

относительно оси m , получим точку B , которая, в силу определения траектории пучка, принадлежит γ . Ось m перпендикулярна прямой AB . Будем перемещать точку A к точке M так, чтобы она двигалась по траектории γ . При этом хорда AB остается перпендикулярной прямой m . Предельное положение хорды AB совпадает с касательной k к траектории γ в точке M . Отсюда следует, что прямые k и m перпендикулярны. Свойство доказано.

Окружность, экидистанта и орицикл обладают рядом интересных свойств, изучение которых, к сожалению, выходит за рамки нашего пособия. С ними можно познакомиться в учебниках [9, 11, 12]. В частности, эти линии являются кривыми постоянной кривизны, и поэтому могут скользить без деформации сами по себе. На евклидовой плоскости таким свойством обладают прямая линия (как, впрочем, и на плоскости Лобачевского) и окружность.

Мы завершили изучение свойств фигур на плоскости Лобачевского. Далее нас будет интересовать вопрос построения модели этой плоскости, т. е. непротиворечивости аксиоматики плоскости Лобачевского.

§ 25. МОДЕЛЬ КЭЛИ–КЛЕЙНА ПЛАНИМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

В 1872 году немецкий математик Ф. Клейн на основе результатов, полученных английским математиком А. Кэли, построил модель геометрии Лобачевского, доказав таким образом ее содержательную непротиворечивость. Мы построим эту модель и рассмотрим некоторые ее свойства. На евклидовой плоскости зафиксируем окружность ω с центром

в некоторой точке O и радиусом, равным единице, будем называть ее *абсолютом*. Множество всех точек круга, ограниченного окружностью ω , обозначим через Ω' , а множество всех внутренних точек этого круга — через Ω . Таким образом, $\Omega' = \Omega \cup \omega$. Точки множества Ω будем называть *Λ -точками*. Множество Ω всех Λ -точек составляет *Λ -плоскость*, на которой будет строиться модель Кэли–Клейна плоскости Лобачевского. Назовем Λ -прямыми произвольные хорды окружности ω ¹⁾. Будем считать, что Λ -точка X принадлежит Λ -прямой x тогда и только тогда, когда точка X как точка евклидовой плоскости принадлежит хорде x абсолюта.

На рисунке 135 Λ -точки A, B, C лежат на Λ -прямой UV , а Λ -точка O не лежит на Λ -прямой UV . Точки U и V как точки абсолюта не принадлежат Λ -плоскости Ω , поэтому не являются Λ -точками и не принадлежат Λ -прямой UV . Таким образом, мы определили на этой модели основные понятия аксиоматики Гильберта плоскости Лобачевского, а также одно из основных отношений — отношение принадлежности.

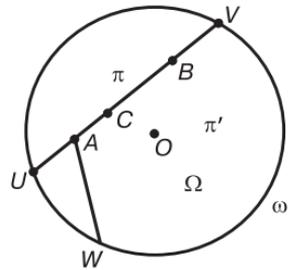


Рис. 135

Определим отношение «лежать между» для упорядоченных троек Λ -точек. Будем говорить, что Λ -точка C лежит между Λ -точками A и B ($A - C - B$) тогда и только тогда, когда A, B, C — три различные Λ -точки одной Λ -прямой и точка C лежит на отрезке AB как отрезке хорды евклидовой плоскости. Таким образом, $A - C - B$ в том и только в том случае, когда эти точки находятся в отношении «лежать между» как точки евклидовой плоскости. Понятие «лежать между» позволяет определить Λ -отрезок, Λ -луч, Λ -угол и Λ -полуплоскость. Соответствующие геометрические фигуры вводятся так же, как были определены нами на евклидовой плоскости в § 10. На рисунке 135 изображены, например, лучи CV и AU , угол UAW и полуплоскости π и π' .

¹⁾ Понятия Λ -точек и Λ -прямых введены для того, чтобы отличать точки и прямые рассматриваемой модели от соответствующих объектов евклидовой плоскости.

Для определения отношения конгруэнтности необходимо рассмотреть особые преобразования точек модели, которые мы назовем Λ -движениями. Введем понятие двойного или сложного отношения четырех точек прямой на евклидовой плоскости. Прежде всего напомним, что простым отношением упорядоченной тройки точек A, B и C евклидовой прямой называется такое число $(AB, C) = \lambda$, для которого $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}$.

Определение 1. Пусть A, B, C, D — упорядоченная четверка произвольных различных точек, лежащих на одной прямой евклидовой плоскости. Отношение двух простых отношений точек (AB, C) и (AB, D) называется двойным или сложным отношением четырех точек A, B, C, D .

Двойное отношение точек A, B, C и D будем обозначать через (AB, CD) . Таким образом,

$$(AB, CD) = \frac{(AB, C)}{(AB, D)}. \quad (1)$$

Докажем некоторые свойства двойных отношений точек.

Лемма 1. Если для точек A, B, C, D, D' одной прямой имеет место равенство $(AB, CD) = (AB, CD')$, то $D = D'$.

Доказательство. Из условия следует, что $\frac{(AB, C)}{(AB, D)} = (AB, CD) = (AB, CD') = \frac{(AB, C)}{(AB, D')}$. Поэтому $(AB, D) = (AB, D')$, а отсюда и из свойств простых отношений следует, что точки D и D' совпадают.

Лемма 2. Если на плоскости дана произвольная аффинная система координат, то для любых точек $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$ одной прямой имеют место равенства¹⁾

$$(AB, CD) = \frac{(x_3 - x_1)(x_2 - x_4)}{(x_2 - x_3)(x_4 - x_1)} = \frac{(y_3 - y_1)(y_2 - y_4)}{(y_2 - y_3)(y_4 - y_1)}.$$

Доказательство. Так как простое отношение $(AB, C) = \lambda$ удовлетворяет векторному равенству $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}$, а координаты векторов \overrightarrow{AC} и \overrightarrow{CB} равны $\overrightarrow{AC}\{x_3 - x_1; y_3 - y_1\}, \overrightarrow{CB}\{x_2 - x_3;$

¹⁾ Одна из двух дробей этих равенств теряет смысл для точек, лежащих на прямой, параллельной одной из осей координат. В этом случае соответствующая дробь не рассматривается.

$y_2 - y_3\}$, то $(AB, C) = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_3}$. Аналогично $(AB, D) = \frac{x_4 - x_1}{x_2 - x_4} = \frac{y_4 - y_1}{y_2 - y_4}$. Отсюда и из (1) следует истинность доказываемого соотношения. Лемма доказана.

Лемма 3. Для любых точек A, B, C и D одной прямой справедливо соотношение $(AB; CD) = (BA; DC)$.

Справедливость утверждения этой леммы непосредственно следует из (2). Проверьте его самостоятельно.

Ведем определение Λ -движений точек Λ -плоскости.

Определение 2. Биективное отображение $g: \Omega' \rightarrow \Omega'$ называется Λ -движением, если оно удовлетворяет следующим условиям:

- 1) отображение g переводит абсолют ω в себя: $g(\omega) = \omega$.
- 2) отображение g переводит хорды окружности ω в хорды окружности ω ;
- 3) если $A' = g(A)$, $B' = g(B)$, $C' = g(C)$ и $D' = g(D)$, где A, B, C, D — произвольные Λ -точки любой хорды абсолюта ω , то $(AB, CD) = (A'B', C'D')$.

Отображение g сохраняет сложное отношение четырех точек. Рассмотрим два примера простейших Λ -движений.

Пример 1. Вращение R_O^φ плоскости вокруг центра абсолюта O на произвольный угол φ является Λ -движением¹⁾.

Действительно, R_O^φ — биективное отображение; $R_O^\varphi(\Omega') = \Omega'$; $R_O^\varphi(\omega) = \omega$; R_O^φ переводит хорды окружности ω в хорды окружности ω ; R_O^φ сохраняет сложное отношение четырех точек, так как вращение евклидовой плоскости сохраняет простое отношение трех точек.

Пример 2. Симметрия S_d относительно произвольного диаметра d абсолюта является Λ -движением.

Истинность этого утверждения проверяется так же, как и в примере 1.

Пример 3. Пусть на плоскости дана прямоугольная декартова система координат, начало которой совпадает с центром O абсолюта (рис. 136). Выберем произволь-

¹⁾Точнее, нужно говорить не о вращении плоскости, а об ограничении этого вращения на множество Ω' . В дальнейшем, если не будет возникать путаницы, мы не будем делать этих уточнений.

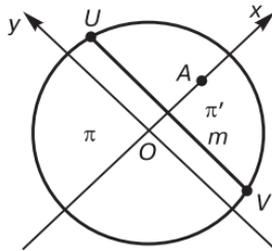


Рис. 136

ное число a , удовлетворяющее условию $0 < a < 1$. Тогда отображение $S^a: \Omega' \rightarrow \Omega'$, которое каждой точке $M(x; y)$ ставит в соответствие точку $S^a(M) = M'(x'; y')$, где

$$\begin{cases} x' = \frac{a - x}{1 - ax}, \\ y' = \frac{y\sqrt{1 - a^2}}{1 - ax}, \end{cases} \quad (2)$$

является Λ -движением.

Покажем, что S^a — биективное отображение множества Ω' на множество Ω' , причем $S^a(\omega) = \omega$. Для этого из формул (2) выразим x и y через x' и y' . Так как $x' = \frac{a - x}{1 - ax}$, то $x' - axx' = a - x$, поэтому $x = \frac{a - x'}{1 - ax'}$.

Из равенства $y' = \frac{y\sqrt{1 - a^2}}{1 - ax}$ следует, что $y = \frac{y'(1 - ax)}{\sqrt{1 - a^2}}$.

Заменим в этом выражении x на $\frac{a - x'}{1 - ax'}$, получим

$$y = \frac{y' \left(1 - a \frac{a - x'}{1 - ax'} \right)}{\sqrt{1 - a^2}} = \frac{y'(1 - a^2)}{\sqrt{1 - a^2}(1 - ax')} = \frac{y'\sqrt{1 - a^2}}{1 - ax'}.$$

Таким образом

$$\begin{cases} x = \frac{a - x'}{1 - ax'}, \\ y = \frac{y'\sqrt{1 - a^2}}{1 - ax'}. \end{cases} \quad (3)$$

Точка $M(x; y)$ принадлежит Ω' в том и только в том случае, когда $1 - x^2 - y^2 \geq 0$, и лежит на окружности ω тогда и только тогда, когда $1 - x^2 - y^2 = 0$. Из равенств (2) следует,

что

$$1 - x'^2 - y'^2 = \frac{(1 - ax)^2 - (a - x)^2 - y^2(1 - a^2)}{(1 - ax)^2} = \frac{(1 - x^2 - y^2)(1 - a^2)}{(1 - ax)^2}. \quad (4)$$

Если точка M принадлежит абсолюту ω , то $1 - x^2 - y^2 = 0$ и $1 - x'^2 - y'^2 = 0$, поэтому ее образ также принадлежит абсолюту ω . Пусть точка M принадлежит Λ -плоскости Ω . Тогда $1 - x^2 - y^2 > 0$. Из неравенства $0 < a < 1$ следует $1 - a^2 > 0$. Кроме того, первая координата x точки M удовлетворяет неравенству $|x| < 1$, поэтому число $(1 - ax)^2$ отлично от нуля. Из равенства (4) получим, что $1 - x'^2 - y'^2 > 0$. Таким образом, точка M' принадлежит Λ -плоскости Ω . Мы показали, что $S^a(\omega) \subset \omega$ и $S^a(\Omega) \subset \Omega$. Обратно, если точка M' принадлежит либо Λ -плоскости Ω , либо абсолюту ω , то из равенств (3) следует, что ее прообраз также принадлежит либо Ω , либо ω . Отображение S^a биективно отображает Ω' на себя, причем это отображение на абсолюте ω также биективно. Условие 1 определения 2 выполнено.

Докажем, что отображение S^a удовлетворяет условию 2 определения 2. Пусть UV — произвольная хорда окружности ω . Тогда координаты точек U и V удовлетворяют уравнению прямой $Ax + By + C = 0$ при некоторых коэффициентах A, B, C . Подставляя равенства (3), выражающие координаты x и y через x' и y' , в последнее уравнение, получаем, что координаты образов точек U и V при отображении S^a удовлетворяют уравнению вида $A'x' + B'y' + C' = 0$ при некоторых коэффициентах A', B', C' . Поскольку S^a — биективное отображение множества Ω' на себя и $S^a(\omega) = \omega$, $S^a(UV)$ является хордой окружности ω .

Проверим выполнение условия 3 определения 2. Пусть $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$ — произвольные точки, лежащие на некоторой хорде UV окружности ω , $A'(x'_1; y'_1), B'(x'_2; y'_2), C'(x'_3; y'_3)$ и $D'(x'_4; y'_4)$ — их образы при отображении S^a . Из равенств (2) получим

$x'_i - x'_j = \frac{(x_i - x_j)(a^2 - 1)}{(1 - ax_i)(1 - ax_j)}$ при любых $i, j = 1, 2, 3, 4$. Если хорда UV окружности ω не параллельна оси Oy , из последнего равенства и формулы (2) следует, что $(AB, CD) = (A'B', C'D')$. Если хорда UV параллельна оси Oy , то $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.

Поэтому $y'_i - y'_j = \frac{(y_i - y_j)\sqrt{1 - a^2}}{(1 - ax_i)}$ при $i, j = 1, 2, 3, 4$, откуда, в силу леммы 2, получим $(AB, CD) = (A'B', C'D')$. Преобразование S^a является Λ -движением.

Заметим, что из равенств (2) и (3) следует, что Λ -движение S^a инволютивно, т. е. совпадает со своим обратным преобразованием: $(S^a)^{-1} = S^a$. Можно показать, что это Λ -движение является осевой симметрией Λ -плоскости относительно некоторой хорды абсолюта UV , перпендикулярной оси Ox (см. рис. 136). Таким образом, Λ -движение S^a отображает Λ -полуплоскость π на π' , оставляя неподвижными точки хорды UV .

Рассмотрим теперь свойства произвольных Λ -движений.

Свойство 1. *Множество всех Λ -движений является группой относительно операции композиции отображений.*

Достаточно проверить, что произведение любых двух Λ -движений является Λ -движением, и отображение, обратное произвольному Λ -движению, является также Λ -движением. Справедливость этих двух условий следует непосредственно из определения Λ -движения (проверьте самостоятельно).

Свойство 2. *Если при Λ -движении точки A, B и C , принадлежащие одной Λ -прямой, преобразуются сами в себя, то любая точка этой прямой также является неподвижной.*

Доказательство этого свойства следует из условия сохранения двойного отношения точек, принадлежащих одной прямой, и из леммы 1.

Свойство 3. *Любое Λ -движение переводит Λ -прямую в Λ -прямую и сохраняет отношение «лежать между».*

Доказательство. Первое утверждение леммы непосредственно следует из определения Λ -движения. Покажем, что произвольное Λ -движение g сохраняет отношение «лежать между».

Если нам дана упорядоченная тройка точек A, B, C прямой на евклидовой плоскости, то точка C лежит между точками A и B в том и только в том случае, когда $(AB, C) > 0$ (см. § 14). Рассмотрим упорядоченную тройку точек A, B и C , лежащих на Λ -прямой UV , такую, что

точка C лежит между точками A и B . Тогда $(AB, C) > 0$. Кроме того, точка B лежит между точками A и V , поэтому $(AB, V) < 0$, и, следовательно, $(AB, CV) = \frac{(AB, C)}{(AB, V)} < 0$.

Рассмотрим произвольное Λ -движение g и точки $A' = g(A)$, $B' = g(B)$, $C' = g(C)$, $V' = g(V)$. Из определения Λ -движения имеем $(AB, CV) = (A'B', C'V') < 0$, $V' \in \omega$. Так как $(A'B', C'V') = \frac{(A'B', C')}{(A'B', V')}$ и точка B' лежит между точками A' и V' , т. е. $(A'B', V') < 0$, то $(A'B', C') > 0$. Таким образом, $A' - C' - B'$. Лемма доказана.

Из доказанного свойства вытекает, что любое Λ -движение переводит Λ -отрезок в Λ -отрезок, Λ -угол — в Λ -угол, Λ -полуплоскость — в Λ -полуплоскость.

Свойство 4. Для любой Λ -точки $A \in \Omega$ существует такое Λ -движение g , что $g(A) = O$.

Доказательство. В качестве требуемого Λ -движения g можно взять преобразование, рассмотренное в примере 3. Выберем прямоугольную декартову систему координат с началом в точке O и осью Ox , совпадающей с лучом OA . Точка A имеет в этой системе координат координаты $A(a, 0)$, где $0 < a < 1$. Полагая $g = S^a$, из равенств (2) находим координаты образов точек A и O : $S^a(A(a, 0)) = O(0, 0)$ и $S^a(O(0, 0)) = A(a, 0)$. Свойство доказано.

Свойство 5. Пусть на Λ -плоскости имеются два произвольных флага¹⁾ $F = (A, h, \pi)$ и $F' = (A', h', \pi')$. Тогда существует Λ -движение g такое, что $g(F) = F'$, т. е. $g(A) = A'$, $g(h) = h'$, $g(\pi) = \pi'$.

Доказательство. Пусть $F = (A, m, \pi)$ и $F' = (A', m', \pi')$ — два данных флага, где $m = AV$, π — сегмент, ограниченный хордой UV и дугой UYV , $m' = A'V'$, π' — сегмент, ограниченный хордой $U'V'$ и дугой $U'X'V'$ (рис. 137). В силу свойства 4, существуют Λ -движения d и f такие, что $d(A) = O$ и $f(A') = O$. Обозначим через $k = d(m) = OX$, $k' = f(m') = OX'$, $\sigma = d(\pi)$, $\sigma' = f(\pi')$ (на рис. 137 σ — полукруг XUY , а σ' — полукруг $X'U'Y'$).

¹⁾ Определение флага см. в § 11. Под точкой, лучом и полуплоскостью в данном случае имеются в виду Λ -точка, Λ -луч и Λ -полуплоскость.

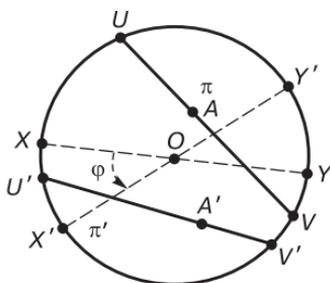


Рис. 137

Рассмотрим вращение R_O^φ вокруг точки O на угол φ , переводящее диаметр XY в диаметр $X'Y'$, для которого $R_O^\varphi(X) = X'$, $R_O^\varphi(Y) = Y'$. В случае если $R_O^\varphi(\sigma) = \sigma'$, положим $h = R_O^\varphi$. В противном случае будем считать, что $h = S_{X'Y'} \circ R_O^\varphi$, где $S_{X'Y'}$ — симметрия относительно оси $X'Y'$. В обоих случаях, очевидно, $h(\sigma) = \sigma'$ и $h(k) = h(OX) = OX' = k'$. Тогда, если положить $g = f^{-1} \circ h \circ d$, то, в силу свойства 1, отображение g является Λ -движением, причем, как нетрудно видеть, $g(F) = F'$. Свойство 5 доказано.

Свойство 6. Если Λ -движение g некоторый флаг $F = (O, h, \pi)$, где O — центр абсолюта, переводит в себя, то g — тождественное отображение.

Доказательство. Нам даны флаг $F = O, h, \pi$, где O — центр абсолюта, $h = OV$ и некоторое Λ -движение g , для которого (рис. 138): $g(O) = O$, $g(OV) = OV$, $g(\pi) = \pi$. Требуется доказать, что g — тождественное преобразование. Вначале покажем, что при этом преобразовании абсолют ω состоит из инвариантных точек. Легко видеть, что любая точка прямой UV инвариантна относительно g . Действительно, в силу свойства 3 Λ -прямая OV преобразуется в Λ -прямую OV , а так как $g(O) = O$, $g(OV) = OV$ и при Λ -движении точки абсолюта преобразуются в точки абсолюта, то $g(V) = V$ и $g(U) = U$. Рассмотрим произвольную точку D прямой UV . Тогда, если $D' = g(D)$, то $(UV; OD) = (g(U)g(V); g(O)g(D)) = (UV; OD')$. Отсюда и из леммы 1 следует, что $D = D'$.

Выберем произвольную точку A на абсолюте. Предположим, что образ $A' = g(A)$ точки A не совпадает с этой

точкой (рис. 138). Тогда, в силу свойства 3, Λ -прямая AB преобразуется в Λ -прямую $A'B'$. Выполним следующие построения на евклидовой плоскости, содержащей абсолют нашей модели. Во-первых, проведем биссектрису угла AOA' (на рис. 138 биссектриса изображена пунктирной линией). И во-вторых, выберем некоторую точку D на Λ -прямой UV , отличную от центра O , и проведем через D хорду EF абсолюта, перпендикулярную построенной биссектрисе. Тогда она пересекает хорды AB и $A'B'$ соответственно в точках H и G . Ясно, что отрезки OH и OG равны как отрезки евклидовой плоскости. В силу определения сложного отношения точек $(AB; OH) = (A'B'; OG)$. Но $g(A) = A'$, $g(B) = B'$, $g(O) = O$, поэтому $g(H) = G$. Кроме того, $g(D) = D$, так как точки диаметра UV неподвижны. Таким образом, точка H хорды EF преобразуется в точку G , точка D этой хорды неподвижна. Отсюда вытекает, что хорда EF при данном Λ -движении преобразуется сама в себя: $g(EF) = EF$. Точки дуги UAV абсолюта преобразуются в точки этой же дуги, поэтому $g(E) = E$ и, следовательно, $g(F) = F$. Таким образом, на хорде EF имеются три неподвижные точки E , F и D . Тогда из свойства 2 следует, что все точки хорды EF являются неподвижными. Но это противоречит тому, что $g(H) = G$. Полученное противоречие доказывает, что $g(A) = A$. Отсюда, так как точки O и A прямой OA неподвижны, а точки абсолюта при Λ -движении преобразуются в точки абсолюта, $g(B) = B$. Аналогично показывается, что любая точка дуги UBV абсолюта неподвижна.

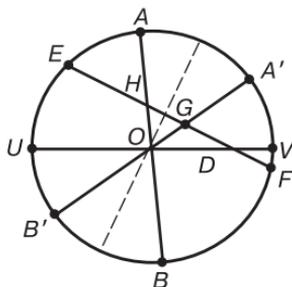


Рис. 138

Пусть теперь M — произвольная точка Λ -плоскости Ω и $M \notin UV$. Покажем, что $g(M) = M$. Рассмотрим диаметр

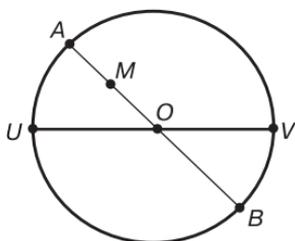


Рис. 139

AB абсолюта, проходящий через точку M (рис. 139). По доказанному выше точки A и B инвариантны относительно движения g . По условию точка O также неподвижна при преобразовании g . Поэтому из условия сохранения двойного отношения точек при Λ -движении следует

$$(AB, OM) = (g(A)g(B), g(O)g(M)) = (AB, Og(M)).$$

Отсюда получим $g(M) = M$. Свойство доказано.

Свойство 7. Пусть на Λ -плоскости имеются два произвольных флага $F = (A, t, \pi)$ и $F' = (A', t', \pi')$. Тогда существует ровно одно Λ -движение g такое, что $g(F) = F'$.

Доказательство. Пусть $F = (A, t, \pi)$ и $F' = (A', t', \pi')$ — два данных флага. В силу свойства 5, существует Λ -движение g , переводящее флаг F во флаг F' . Докажем его единственность. Пусть имеются Λ -движения g и f такие, что $g(F) = f(F) = F'$. Возьмем произвольный флаг $G = (O, k, \sigma)$. В силу свойства 5, найдутся Λ -движения h и d такие, что $h(G) = F$, $d(F') = G$. Тогда $d \circ f \circ h(G) = G$ и $d \circ g \circ h(G) = G$. Из свойства 6 следует, что $d \circ f \circ h$ и $d \circ g \circ h$ — тождественные преобразования, поэтому $d \circ f \circ h = d \circ g \circ h$. Умножая последнее равенство слева на d^{-1} , а затем — справа на h^{-1} , получим $f = g$. Свойство доказано.

Проверим выполнение аксиом Гильберта планиметрии Лобачевского для Λ -точек и Λ -прямых модели Кэли–Клейна. Выше мы определили отношение принадлежности: Λ -точка принадлежит Λ -прямой, если она как точка евклидовой плоскости лежит на хорде абсолюта, представляющей собой Λ -прямую. Поскольку это отношение совпадает с отношением принадлежности точек и прямых евклидовой плоскости, оно удовлетворяет требованиям аксиом I_1 – I_3 аксиоматики Гильберта (см. § 10).

В предыдущем параграфе нами также было определено понятие «лежать между» для упорядоченных троек Λ -точек одной Λ -прямой. Λ -точка C лежит между Λ -точками A и B , если эти точки принадлежат одной Λ -прямой и точки A, B и C находятся в отношении $A - C - B$ «лежать между» как точки евклидовой плоскости. На основании этого понятия в предыдущем параграфе нами были определены понятия Λ -отрезка, Λ -луча, Λ -полуплоскости и Λ -угла. Очевидно, что так определенное отношение «лежать между» удовлетворяет требованиям аксиом второй группы аксиоматики Гильберта, так как оно совпадает с таким же отношением для точек евклидовой плоскости. Поскольку введенные отношения принадлежности и «лежать между» удовлетворяет аксиомам второй группы аксиоматики Гильберта, сохраняются свойства Λ -отрезков, Λ -лучей, Λ -полуплоскостей и Λ -углов, приведенные в § 10 для соответствующих геометрических фигур евклидовой плоскости.

Перейдем к определению отношения конгруэнтности Λ -отрезков и Λ -углов и проверке требований аксиом третьей группы аксиоматики Гильберта.

Определение 3. *Произвольные фигуры F и G , лежащие на Λ -плоскости, называются конгруэнтными или равными, если существует Λ -движение g , при котором фигура F отображается на фигуру G .*

Термины «конгруэнтные» и «равные» применим только к фигурам, принадлежащим Λ -плоскости. Конгруэнтность фигур в евклидовом смысле в этом параграфе в дальнейшем не встречается. Конгруэнтность фигур на Λ -плоскости будем обозначать значком « \cong ». Опираясь на установленные свойства Λ -движения, покажем, что определение отношения конгруэнтности отрезков и углов удовлетворяет аксиомам третьей группы аксиоматики Гильберта (см. § 11).

Утверждение III₁. *Если дан Λ -отрезок AB и луч с началом в Λ -точке A' , то существует такая Λ -точка B' этого луча, что $AB \cong A'B'$. Для каждого Λ -отрезка AB требуется, чтобы $AB \cong BA$.*

Доказательство. Докажем не только существование точки B' , но и ее единственность. Рассмотрим два флага: $F = (A, h, \pi)$ и $F' = (A', h', \pi')$, где $h = AV$ — Λ -луч, содержащий AB , $h' = A'V'$, π и π' — произвольные Λ -полуплос-

кости с соответствующими границами. В силу свойства 5 Λ -движений, найдется такое Λ -движение g , для которого $g(F) = F'$. Обозначим через B' образ $g(B)$, тогда $B' \in h'$, так как $g(h) = h'$, и, в силу определения 3, $AB \cong A'B'$. Существование точки B' доказано. Докажем ее единственность. Пусть $AB \cong A'B'$ и $AB \cong A'B''$, покажем, что $B' = B''$. Обозначим Λ -лучи, соответственно дополнительные к лучам h и h' , через AU и $A'U'$. Очевидно, что $g(U) = U'$ и $g(V) = V'$. Так как отрезки AB и $A'B''$ конгруэнтны, то найдется Λ -движение g' такое, что $g'(A) = A'$, $g'(B) = B'$, следовательно, $g'(U) = U'$, $g'(V) = V'$. Из определения Λ -движения получим $(UV; AB) = (U'V'; A'B')$ и $(UV; AB) = (U'V'; A'B'')$. Поэтому из леммы 1 следует, что $B' = B''$.

Нам осталось доказать, что отрезок AB равен отрезку BA . Рассмотрим отрезок AB Λ -прямой PQ . Обозначим через h луч AQ , через p луч BP , а через π — Λ -полуплоскость, граница которой определена Λ -прямой PQ (рис. 140). По свойству 5, существует Λ -движение g , переводящее флаг $F_1 = (A, h, \pi)$ во флаг $F_2 = (B, p, \pi)$. Пусть $B_1 = g(B)$. Тогда $AB \cong BB_1$. Из определения Λ -движения получим $(PQ; AB) = (QP; BB_1)$. Но из следствия леммы 2 вытекает, что $(PQ; AB) = (QP; BA)$. Поэтому точка A совпадает с точкой B_1 и отрезок AB конгруэнтен отрезку BA . Утверждение доказано.

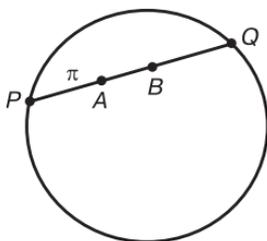


Рис. 140

Утверждение III₂. Если отрезок AB конгруэнтен отрезкам $A'B'$ и $A''B''$, то отрезки $A'B'$ и $A''B''$ конгруэнтны между собой.

Доказательство. Справедливость утверждения непосредственно следует из определения конгруэнтности и свойства 1 Λ -движений. Действительно, пусть $AB \cong A'B'$ и $AB \cong A''B''$,

докажем, что $A'B' \cong A''B''$. В силу определения конгруэнтности найдутся Λ -движения g и f такие, что $g(AB) = A'B'$ и $f(AB) = A''B''$. Композиция $f \circ g^{-1}$ представляет собой Λ -движение, удовлетворяющее условию $f \circ g^{-1}(A'B') = A''B''$. Поэтому $A'B' \cong A''B''$. Утверждение доказано.

Утверждение III₃. *Если точка B лежит между точками A и C , $A - B - C$, а точка B' — между точками A' и C' , $A' - B' - C'$, и $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, то $AC \cong A'C'$.*

Доказательство. Пусть для Λ -точек $A-B-C$ и $A'-B'-C'$ имеет место $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$. Из определения конгруэнтности следует, что существует такое Λ -движение g , для которого $g(AB) = A'B'$. Ясно, что это движение переводит луч BC в луч $B'C'$. В силу утверждения, доказанного при проверке аксиомы III₁, на Λ -луче $B'C'$ имеется единственная точка C' , для которой $BC \cong B'C'$, поэтому $g(C) = C'$, отсюда следует, что $g(AC) = g(A'C')$, т. е. $AC \cong A'C'$. Утверждение доказано.

Утверждение III₄. *Если даны угол $\angle hk$ и флаг (O', h', π') , то в полуплоскости π' существует один и только один луч k' с началом в точке O' , такой, что $\angle hk = \angle h'k'$. Каждый угол конгруэнтен сам себе.*

Доказательство. Пусть даны угол $\angle hk$ и флаг $F' = (O', h', \pi')$. Сначала докажем, что в Λ -полуплоскости π' существует такой Λ -луч k' с началом в Λ -точке O' , что $\angle hk \cong \angle h'k'$. Обозначим через O начало Λ -луча h , а через π — ту из двух Λ -полуплоскостей с общей границей h , которая содержит Λ -луч k . Рассмотрим флаг $F = (O, h, \pi)$. В силу свойства 7, существует единственное Λ -движение g такое, что $g(F) = F'$. Положим $k' = g(k)$. Тогда $k' \subset \pi'$, так как $k \subset \pi$ и $g(\pi) = \pi'$. Из определения конгруэнтности следует, что $\angle hk \cong \angle h'k'$. Существование Λ -луча k' , удовлетворяющего требованию утверждения аксиомы III₄, доказано.

Докажем единственность луча k' . Пусть в Λ полуплоскости π' существует еще один Λ -луч k'' с началом в Λ -точке O' , для которого $\angle hk \cong \angle h'k''$. В соответствии с определением конгруэнтности, найдется Λ -движение f , переводящее луч h в луч h' и луч k в луч k'' , $f(h) = h'$, $f(k) = k''$. Отсюда и из свойств Λ -движений следует, что $f(\pi) = \pi'$, т. е.

$f(F) = F'$. В силу свойства 7, $f = g$ и, следовательно, $k'' = k'$. Единственность доказана.

Конгруэнтность каждого угла самому себе очевидна, так как тождественное преобразование является Λ -движением. Утверждение доказано.

Утверждение III₅. Пусть A, B и C — три точки, не принадлежащие одной прямой, A', B' и C' — также три точки, не лежащие на одной прямой, пусть $AB = A'B', BC = B'C'$ и $\angle ABC = \angle A'B'C'$, тогда $\angle BAC = \angle B'A'C'$.

Доказательство. Так как $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$, то найдется Λ -движение g такое, что $g(\angle ABC) = \angle A'B'C'$, т. е. $g(B) = B', g([BA]) = [B'A']$, $g([BC]) = [B'C']$, где обозначение $[XY]$ используется для Λ -луча XY . При доказательстве утверждения аксиомы III₁ мы доказали единственность откладывания Λ -отрезка, равного данному, от начала данного луча. Поэтому, так как $BA \cong B'A'$, то $g(A) = A'$. Аналогичное рассуждение показывает, что $g(C) = C'$, следовательно, $g(\angle BAC) = \angle B'A'C'$, и, в силу определения конгруэнтности, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$. Утверждение доказано.

Мы проверили, что отношение конгруэнтности Λ -отрезков и Λ -углов удовлетворяет утверждениям аксиом третьей группы аксиоматики Гильберта. На модели Кэли–Клейна выполняется принцип Дедекинда, так как он выполняется для точек евклидовой плоскости. Как было указано в § 11, выполнение этого принципа равносильно справедливости утверждений аксиом Архимеда и Кантора. Таким образом, на рассматриваемой модели выполняются аксиомы четвертой группы аксиом аксиоматики Гильберта.

На Λ -плоскости имеет место аксиома параллельности Лобачевского: через Λ -точку B , не лежащую на Λ -прямой a , проходят по крайней мере две Λ -прямые b и c , не имеющие общих точек с Λ -прямой a . На рисунке 141 приведена иллюстрация этого утверждения. Выясним, что представляют собой параллельные направленные прямые Λ -плоскости. Рассмотрим рис. 142. Λ -прямая b проходит через точку пересечения Λ -прямой a с абсолютом. Поэтому направленная Λ -прямая A_1A_2 параллельна направленной Λ -прямой B_1A_2 . Действительно, эти прямые не пересекаются, и если выбрать произвольные Λ -точки A и B , принадлежащие соответственно этим прямым, то любой

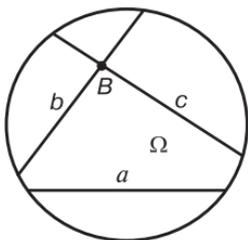


Рис. 141

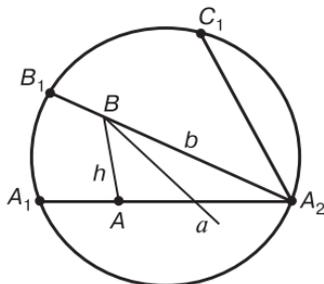


Рис. 142

внутренний луч h угла A_2BA пересекает прямую a . Таким образом, две Λ -прямые параллельны, если они имеют общую точку пересечения с абсолютом. Ясно, что выполняются свойства симметричности и транзитивности параллельности сонаправленных Λ -прямых. В § 21 свойство симметричности нами было доказано, свойство же транзитивности иллюстрируется на рис. 142. Прямая A_1A_2 параллельна прямой B_1A_2 , они пересекают абсолют в точке A_2 . Прямые B_1A_2 и C_1A_2 также параллельны, они также пересекают абсолют в той же точке A_2 . Поэтому прямые A_1A_2 и C_1A_2 параллельны.

Таким образом, определенные выше основные понятия удовлетворяют требованиям аксиом I_1 – I_3 , групп II, III, IV аксиоматики Гильберта и аксиоме параллельности Лобачевского. Мы построили модель плоскости Лобачевского, поэтому доказана содержательная непротиворечивость планиметрии Лобачевского. Сформулируем это утверждение в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Геометрия Лобачевского содержательно непротиворечива.*

С построением модели пространства Лобачевского, аналогичной рассмотренной на плоскости, можно познакомиться в пособии [9].

Из теоремы 1 следует важнейший вывод. *Аксиома параллельности не является следствием аксиом групп I–IV аксиоматики Гильберта. Так как пятый постулат Евклида равносильен аксиоме параллельности евклидовой геометрии, то этот постулат не зависит от остальных аксиом Гильберта.*

ТЕОРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ

Настоящая глава будет посвящена свойствам понятий длины отрезка, площади многоугольника и объема многогранника.

§ 26. ДЛИНА ОТРЕЗКА. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛИНЫ ОТРЕЗКА

В рассматриваемом параграфе мы покажем, как в рамках аксиоматики Гильберта евклидова пространства вводится понятие длины отрезка. Хотя в формулировках самих аксиом Гильберта отсутствуют числовые величины, однако аксиом первых трех групп вместе с аксиомой Архимеда достаточно для построения теории измерения длин отрезков. Сформулируем определение длины отрезка. Обозначим через L множество всех отрезков евклидова трехмерного пространства, а через \mathbb{R} — множество действительных чисел. Зафиксируем на плоскости некоторый отрезок EF и назовем его *единичным отрезком*.

Определение 1. *Измерением длины отрезка называется отображение $l: L \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющее следующим аксиомам.*

1. (Аксиома позитивности). Для любого отрезка $AB \in L$ имеет место неравенство $l(AB) \geq 0$.

2. (Аксиома инвариантности). Длины любых двух конгруэнтных отрезков AB и CD равны: $l(AB) = l(CD)$.

3. (Аксиома аддитивности). Если точка B лежит между точками A и C , то $l(AB) + l(BC) = l(AC)$.

4. (Аксиома нормированности). Длина единичного отрезка равна единице.

Число $l(AB)$ называется *длиной отрезка AB* .

Для того чтобы установить существование отображения $l: L \rightarrow \mathbb{R}$, обладающего указанными свойствами, воспользуемся способом измерения длин отрезков, принятым на практике. Пусть имеется некоторый отрезок. Возьмем шкалу с делениями, равными единичному отрезку, и измерим

длину заданного отрезка с точностью до 1 с недостатком. Затем, уменьшив вдвое деления шкалы, измерим длину данного отрезка с точностью до $1/2$ с недостатком¹⁾. Продолжая этот процесс, измерим длину отрезка с точностью до $1/2^n$, где n — произвольное целое неотрицательное число. Абстрагируясь от реально допустимых значений числа n , можно таким образом получить значение длины отрезка с любой наперед заданной точностью, а в пределе мы получим точное значения длины отрезка.

Перейдем к последовательному изложению описанного выше процесса измерения, формулируя промежуточные соглашения и утверждения в качестве определений и лемм.

Для определения длины отрезка с точностью до $1/2^n$ с недостатком заметим, что из существования середины любого отрезка²⁾ индукцией по n можно вывести, что каждый отрезок можно разделить на 2^n равных частей, т. е. получить $\frac{1}{2^n}$ -ю часть единичного отрезка.

Пусть имеется целое неотрицательное число n . Обозначим через EF_n отрезок, равный $\frac{1}{2^n}$ -й части единичного отрезка EF . В силу аксиомы Архимеда, для произвольного отрезка AB из множества L найдется целое неотрицательное число m и конечная последовательность точек $A_0 = A, A_1, \dots, A_m, A_{m+1}$ (рис. 143), удовлетворяющих следующим условиям:

- а) отрезки $A_i A_{i+1}$ и EF_n конгруэнтны при всех $i = 0, \dots, m$;
- б) $A_0 - A_1 - A_2, A_1 - A_2 - A_3, \dots, A_{m-1} - A_m - A_{m+1}$;
- в) либо $A_m = B$, либо $A_m - B - A_{m+1}$.



Рис. 143

¹⁾ Тот факт, что в метрической системе мер цена деления следующей шкалы в 10, а не в 2 раза меньше предыдущей, не имеет принципиального значения. В нашем распоряжении имеются шкалы со сколь угодно малой ценой деления.

²⁾ Существование середины отрезка выводится из первых трех групп аксиом Гильберта.

Определим отображение $l_n: L \rightarrow \mathbb{R}$, положив $l_n(AB) = \frac{m}{2^n}$.

В частности, из определения 1 следует, что при отображении $l_0: L \rightarrow \mathbb{R}$ отрезок EF_n равен единичному отрезку, поэтому отрезки $A_i A_{i+1}$ также совпадают с единичным отрезком EF . Построенное отображение обладает следующими свойствами.

Лемма 1. Для любого целого неотрицательного числа n справедливо равенство $l_n(EF) = 1$.

Доказательство. Пусть n — произвольное неотрицательное число и $l_n(EF) = \frac{m}{2^n}$. В силу определения отображения l_n верно равенство $m = 2^n$, откуда непосредственно следует лемма.

Лемма 2. Для любого целого неотрицательного n и произвольного отрезка AB выполняется неравенство $l_n(AB) \leq l_{n+1}(AB)$.

Доказательство. Пусть существуют произвольные число n и отрезок AB , для которых $l_n(AB) = \frac{p}{2^n}$

и $l_{n+1}(AB) = \frac{q}{2^{n+1}}$. В силу определения 1, существуют

последовательности точек $A'_0 = A, A'_1, \dots, A'_p, A'_{p+1}$ и $A''_0 = A, A''_1, \dots, A''_q, A''_{q+1}$ такие, что:

а) $A'_i A'_{i+1} \cong EF_n$ при всех $i = 0, \dots, p$ и $A''_i A''_{i+1} \cong EF_{n+1}$ при всех $i = 0, \dots, q$;

б) $A'_0 - A'_1 - A'_2, A'_1 - A'_2 - A'_3, \dots, A'_{p-1} - A'_p - A'_{p+1}$;
 $A''_0 - A''_1 - A''_2, A''_1 - A''_2 - A''_3, \dots, A''_{q-1} - A''_q - A''_{q+1}$;

в) $A'_p = B$ либо $A'_p - B - A'_{p+1}$, и $A''_q = B$ либо $A''_q - B - A''_{q+1}$. Поскольку $EF_n = 2EF_{n+1}$, точка A'_p совпадает с точкой A''_{2p} . Следовательно $q \geq 2p$, откуда следует,

что $l_{n+1}(AB) = \frac{q}{2^{n+1}} \geq \frac{2p}{2^{n+1}} = \frac{p}{2^n} = l_n(AB)$. Лемма доказана.

Лемма 3. Для любого натурального числа n и любого отрезка AB справедливо неравенство $l_n(AB) \leq l_0(AB) + 1$.

Доказательство. Пусть для произвольных числа n и отрезка AB верны равенства: $l_0(AB) = d$, $l_n(AB) = \frac{p}{2^n}$. Тогда, в силу определения 1, существуют последовательности точек

$A'_0 = A, A'_1, \dots, A'_d, A'_{d+1}$ и $A''_0 = A, A''_1, \dots, A''_p, A''_{p+1}$ такие, что:

а) отрезок $A'_i A'_{i+1} \cong EF$ при всех $i = 0, \dots, d$ и $A''_i A''_{i+1} \cong EF_n$ при всех $i = 0, \dots, p$;

б) $A'_0 - A'_1 - A'_2, A'_1 - A'_2 - A'_3, \dots, A'_{d-1} - A'_d - A'_{d+1};$
 $A''_0 - A''_1 - A''_2, A''_1 - A''_2 - A''_3, \dots, A''_{p-1} - A''_p - A''_{p+1};$

в) $A'_d = B$ либо $A'_d - B - A'_{d+1}$, и $A''_p = B$ либо $A''_p - B - A''_{p+1}$.

Из определения отрезка EF_n следует, что точка A''_p лежит на отрезке $A'_d B$, но из определения отображения l_n получим, что последний отрезок $A''_p A''_{p+1}$ содержится в отрезке $A'_d A'_{d+1}$, следовательно, точка A''_p лежит на отрезке $A'_d A'_{d+1}$. Поэтому $l_n(AB) = \frac{p}{2^n} \leq d + 1 = l_0(AB) + 1$.

Лемма доказана.

Лемма 4. Для любых двух конгруэнтных отрезков $AB \cong CD$ равенство $l_n(AB) = l_n(CD)$ справедливо при любом числе n .

Доказательство. Воспользуемся определением 1 и аксиомой III₃ аксиоматики Гильберта. Пусть $AB \cong CD$ и для данного числа n имеет место равенство $l_n(AB) = \frac{m}{2^n}$. Тогда найдется последовательность точек $A_0 = A, A_1, \dots, A_m, A_{m+1}, \dots$ такая, что:

а) $A_i A_{i+1} \cong EF_n$ при всех $i = 0, \dots, m$;

б) $A_0 - A_1 - A_2, A_1 - A_2 - A_3, \dots, A_{m-1} - A_m - A_{m+1}$;

в) $A_m = B$ либо $A_m - B - A_{m+1}$.

Отложим на луче CD от точки C последовательно m отрезков, конгруэнтных отрезку EF_n , получим последовательность точек $C_0 = C, C_1, \dots, C_m$, для которой:

а) $C_i C_{i+1} \cong EF_n$ при всех $i = 0, \dots, m-1$;

б) $C_0 - C_1 - C_2, C_1 - C_2 - C_3, \dots, C_{m-2} - C_{m-1} - C_m$.

На луче, дополнительном к лучу $C_m C$, от точки C_m последовательно отложим два отрезка: $C_m D' \cong A_m B$ и $D' C_{m+1} \cong B A_{m+1}$. В силу аксиомы III₃ индукцией по m получим: $AB \cong CD'$ и $A_m A_{m+1} \cong C_m C_{m+1}$, причем либо $C_m = D'$ (в случае, если $A_m = B$), либо $C_m - D' - C_{m+1}$ (в случае, если $A_m - B - A_{m+1}$). Но на луче CD от точки C можно отложить единственный отрезок, конгруэнтный отрезку AB . Так как, в силу условия леммы, $AB \cong CD$, точки D и D' совпадают.

Таким образом, мы получили последовательность точек $C_0 = C, C_1, \dots, C_{m+1}$ такую, что:

- а) $C_i C_{i+1} \cong EF_n$ при всех $i = 1, \dots, m$;
- б) $C_0 - C_1 - C_2, C_1 - C_2 - C_3, \dots, C_{m-1} - C_m - C_{m+1}$;
- в) точка D либо совпадает с точкой C_m , либо $C_m - D - C_{m+1}$.

Из определения 1 следует, что $l_n(CD) = \frac{m}{2^n} = l_n(AB)$.

Лемма доказана.

Замечание. Из доказанной леммы, в частности, следует, что результат измерения длины отрезка с недостатком $l_n(AB)$ не зависит от того, с какого из концов отрезка начато измерение, т. е. $l_n(AB) = l_n(BA)$, так как $AB \cong BA$.

Лемма 5. Если отрезок AB содержится¹⁾ в отрезке CD : $AB \subseteq CD$, то неравенство $l_n(AB) \leq l_n(CD)$ справедливо при любом натуральном числе n .

Доказательство. Пусть точки A, B, C, D расположены так, как показано на рис. 144, причем возможно, что $A = C$ или $B = D$. Тогда очевидно, что $l_n(BA) \leq l_n(BC)$ и $l_n(CB) \leq l_n(CD)$. В силу леммы 4 имеем: $l_n(AB) = l_n(BA)$ и $l_n(BC) = l_n(CB)$, из чего следует доказываемое утверждение.



Рис. 144

Лемма 6. Пусть имеются произвольные точки A, B, C такие, что точка B лежит между точками A и C : $A - B - C$. Тогда при любом натуральном числе n справедливы неравенства $l_n(AB) + l_n(BC) \leq l_n(AC) \leq l_n(AB) + l_n(BC) + \frac{1}{2^{n-1}}$.

Доказательство. Пусть A, B и C — данные точки и точка B лежит между A и C , причем $l_n(AB) = \frac{r}{2^n}$, $l_n(BC) = \frac{s}{2^n}$ для заданного числа n . Поскольку, в силу лем-

¹⁾ Имеется в виду нестрогое включение $AB \subseteq CD$, т. е. возможно $AB = CD$.

мы 4, $l_n(AB) = l_n(BA)$, найдутся последовательности точек $B'_0 = B, B'_1, \dots, B'_r, B'_{r+1}$ и $B''_0 = B, B''_1, \dots, B''_s, B''_{s+1}$ (рис. 145) такие, что:

а) $B'_i B'_{i+1} \cong B''_j B''_{j+1} \cong EF_n$ при всех $i = 0, \dots, r$ и $j = 0, \dots, s$;

б) $B'_0 - B'_1 - B'_2, B'_1 - B'_2 - B'_3, \dots, B'_{r-1} - B'_r - B'_{r+1}$;
 $B''_0 - B''_1 - B''_2, \dots, B''_{s-1} - B''_s - B''_{s+1}$;

в) $B'_r = A$ либо $B'_r - A - B'_{r+1}$, и $B''_s = C$ либо $B''_s - C - B''_{s+1}$.



Рис. 145

Нетрудно видеть, что $l_n(B'_r B''_s) = \frac{r+s}{2^n} = \frac{r}{2^n} + \frac{s}{2^n} = l_n(AB) + l_n(BC)$, и $l_n(B'_{r+1} B''_{s+1}) = \frac{r+s+2}{2^n} = \frac{r}{2^n} + \frac{s}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} = l_n(AB) + l_n(BC) + \frac{1}{2^{n-1}}$. Из включений $B'_r B''_s \subset AC \subset B'_{r+1} B''_{s+1}$ и из леммы 5 следуют неравенства $l_n(B'_r B''_s) \leq l_n(AC) \leq l_n(B'_{r+1} B''_{s+1})$. Лемма доказана.

Установленные в леммах 1–6 свойства длины отрезка с недостатком позволяют с помощью предельного перехода определить длину отрезка.

Теорема 1 (существования длины отрезка). Для данного единичного отрезка EF существует отображение $l: L \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющее аксиомам длины отрезка.

Доказательство. Определим отображение $l: L \rightarrow \mathbb{R}$, положив $l(AB) = \lim_{n \rightarrow +\infty} l_n(AB)$ для произвольного отрезка $AB \in L$. В силу лемм 2 и 3, числовая последовательность $\{l_n(AB)\}$ является возрастающей и ограниченной сверху. Поэтому предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} l_n(AB)$ существует для любого отрезка. Докажем, что определенное отображение удовлетворяет аксиомам 1–4 длины отрезка.

Из определения последовательности $\{l_n(AB)\}$ следует неравенство $l_n(AB) \geq 0$ для любых натурального числа n и отрезка AB . Поэтому $l(AB) \geq 0$ для любого отрезка AB .

Если нам даны два конгруэнтных отрезка $AB \cong CD$, то, в силу леммы 4, $l_n(AB) = l_n(CD)$. Отсюда следует,

что $l(AB) = \lim_{n \rightarrow +\infty} l_n(AB) = \lim_{n \rightarrow +\infty} l_n(CD) = l(CD)$. Свойство инвариантности отображения $l: L \rightarrow \mathbb{R}$ доказано.

Пусть A, B и C — произвольные точки, причем точка B лежит между точками A и C . В силу леммы 6 и определения длины отрезка, имеем:

$$\begin{aligned} l(AB) + l(BC) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} l_n(AB) + \lim_{n \rightarrow +\infty} l_n(BC) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (l_n(AB) + l_n(BC)) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} l_n(AC) = l(AC) \leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(l_n(AB) + l_n(BC) + \frac{1}{2^{n-1}} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} l_n(AB) + \lim_{n \rightarrow +\infty} l_n(BC) + 0 = l(AB) + l(BC). \end{aligned}$$

Поэтому $l(AB) + l(BC) = l(AC)$, что доказывает аддитивность отображения $l: L \rightarrow \mathbb{R}$. Непосредственно из леммы 1 следует нормированность отображения $l: L \rightarrow \mathbb{R}$. Теорема доказана.

Докажем, что установленное в теореме 1 отображение $l: L \rightarrow \mathbb{R}$ является единственным, удовлетворяющим определению 1 длины отрезка. Предположим, что имеется произвольное отображение $l': L \rightarrow \mathbb{R}$, для которого выполнены требования аксиом 1–4 определения 1. Установим, что $l = l'$, доказав предварительно два свойства отображения l' .

Лемма 7. *Для любого целого неотрицательного числа n справедливо равенство $l'(EF_n) = \frac{1}{2^n}$, где EF_n — $\frac{1}{2^n}$ -я часть заданного единичного отрезка EF .*

Доказательство. Проведем индукцию по n . В силу аксиомы 1, для отображения l' справедливо равенство $l'(EF) = 1$. Пусть $l'(EF_n) = \frac{1}{2^n}$ при некотором натуральном числе n , большем единицы. Точка F_{n+1} является, в силу определения, серединой отрезка EF_n . Из аксиомы 3 длины отрезка получим: $l'(EF_{n+1}) + l'(F_{n+1}F_n) = l'(EF_n) = \frac{1}{2^n}$, а так как $EF_{n+1} \cong F_{n+1}F_n$, то, в силу аксиомы 2 длины отрезка, $l'(EF_{n+1}) = l'(F_{n+1}F_n)$. Отсюда следует, что $l'(EF_{n+1}) = \frac{1}{2^{n+1}}$.

Лемма доказана.

Лемма 8. *Если отрезок AB содержится в CD : $AB \subseteq CD$, то имеет место неравенство $l'(AB) \leq l'(CD)$.*

Доказательство. Пусть точки A, B, C, D расположены так, как показано на рис. 144. Из аксиомы 2 длины отрезка получим: $l'(CA) + l'(AB) = l'(CB)$, $l'(CB) + l'(BD) = l'(CD)$ и, следовательно, $l'(CA) + l'(AB) + l'(BD) = l'(CD)$. Но, в силу аксиомы 1 длины отрезка, $l'(CA) \geq 0$ и $l'(BD) \geq 0$. Таким образом, $l'(AB) \leq l'(CD)$. Лемма доказана.

Теорема 2 (единственности длины отрезка). При выбранном единичном отрезке EF существует не более одного отображения $l: L \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющего аксиомам 1–4 длины отрезка.

Доказательство. Пусть $l': L \rightarrow \mathbb{R}$ — произвольное отображение, удовлетворяющее аксиомам длины отрезка. Покажем, что $l = l'$, где l — отображение, определенное при доказательстве теоремы 1. Для этого сравним значения $l'(AB)$ и $l_n(AB)$ на произвольном отрезке AB при любом заданном значении n .

Пусть $l_n(AB) = \frac{m}{2^n}$. Тогда существует такая последовательность точек $A_0 = A, A_1, \dots, A_m, A_{m+1}$, удовлетворяющая условиям:

- а) отрезки $A_i A_{i+1}$ и EF_n конгруэнтны при всех $i = 0, \dots, m$;
- б) $A_0 - A_1 - A_2, A_1 - A_2 - A_3, \dots, A_{m-1} - A_m - A_{m+1}$;
- в) либо $A_m = B$, либо $A_m - B - A_{m+1}$.

В силу леммы 8 справедливы неравенства $l'(AA_m) \leq l'(AB) \leq l'(AA_{m+1})$. Из леммы 7 и аксиомы 2 длины отрезка следует, что:

$$l'(AA_m) = l'(AA_1) + l'(A_1A_2) + \dots + l'(A_{m-1}A_m) = \frac{m}{2^n} = l_n(AB),$$

$$l'(AA_{m+1}) = l'(AA_m) + l'(A_mA_{m+1}) = \frac{m}{2^n} + \frac{1}{2^n} = l_n(AB) + \frac{1}{2^n}.$$

Таким образом, для любого натурального числа n имеют место неравенства: $l_n(AB) \leq l'(AB) \leq l_n(AB) + \frac{1}{2^n}$. Переходя в обоих неравенствах к пределу при $n \rightarrow +\infty$, в силу определения длины отрезка получим $l(AB) \leq l'(AB) \leq l(AB)$, т. е. $l(AB) = l'(AB)$. Теорема доказана.

Как видно из приведенных выше доказательств, существование и единственность длины отрезка является следствием первых трех групп аксиом аксиоматики Гильберта и аксиомы Архимеда. Поэтому введенное нами понятие

длины может быть применено и к отрезкам плоскости Лобачевского.

Естественно поставить вопрос: для любого ли действительного числа α существует отрезок длины α ? Можно построить модели, показывающие, что названных аксиом для этого недостаточно. Но если добавить к этим аксиомам аксиому Кантора, то ответ на поставленный вопрос будет положительным.

Теорема 3 (существование отрезка заданной длины). *Для любого действительного числа $\alpha > 0$ существует отрезок, длина которого равна α .*

Доказательство. Построение отрезка длины α опирается на аксиому Кантора, при этом используется приближение заданного числа двоично-рациональными дробями, т. е. числами вида $\frac{m}{2^n}$, где m и n — целые неотрицательные числа. Пусть имеется произвольное действительное число α . Нетрудно видеть, что для каждого целого неотрицательного числа n существует целое неотрицательное число m_n , такое, что $\frac{m_n}{2^n} \leq \alpha < \frac{m_n + 1}{2^n}$, причем при любом натуральном числе n справедливы неравенства

$$\frac{m_n}{2^n} \leq \frac{m_{n+1}}{2^{n+1}} < \frac{m_{n+1} + 1}{2^{n+1}} \leq \frac{m_n + 1}{2^n}. \quad (1)$$

От точки E на луче EF отложим последовательно m_n отрезков, конгруэнтных отрезку EF_n ¹⁾. Последний из концов отложенных отрезков обозначим через A_n . Отложим в том же направлении от точки A_n еще один отрезок $A_n B_n$, конгруэнтный отрезку EF_n . Нетрудно проверить, что $l(EA_n) = \frac{m_n}{2^n}$, $l(EB_n) = \frac{m_n + 1}{2^n}$, $l(A_n B_n) = \frac{1}{2^n}$. В силу неравенств (1) имеем последовательность вложенных отрезков $\{A_n B_n\}$, удовлетворяющую условиям аксиомы Кантора IV₂. Тогда существует точка A , принадлежащая всем отрезкам $A_n B_n$. Отсюда $EA_n \subset EA \subset EB_n$. Из леммы 7 следует, что неравенства $\frac{m_n}{2^n} = l(EA_n) \leq l(EA) \leq l(EB_n) = \frac{m_n + 1}{2^n}$ справедливы при любом натуральном числе n . Этим неравенствам

¹⁾ Напомним, что через EF_n мы обозначили $1/2^n$ -ю часть единичного отрезка.

удовлетворяет единственное действительное число α , следовательно, $\mathcal{I}(EA) = \alpha$. Теорема доказана.

В заключение отметим, что аксиом первых четырех групп аксиоматики Гильберта достаточно для измерения углов. Мэру угла можно определить аксиоматически, сделав соответствующие изменения в формулировке определения 1 длины отрезка. Для так определенной меры угла имеют место теоремы существования и единственности, а также теорема существования угла заданной величины, аналогичная теореме 3.

§ 27. ПЛОЩАДЬ МНОГОУГОЛЬНИКА. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ

В настоящем параграфе мы аксиоматически определим понятие площади многоугольника в евклидовом пространстве и установим ее существование и единственность. Для этого нам потребуются все аксиомы евклидовой геометрии, включая аксиому параллельности. Мы не будем связывать себя рамками той или иной аксиоматики, например аксиоматики Гильберта или Вейля евклидова пространства, но будем свободно пользоваться известными теоремами евклидовой геометрии и аппаратом векторной алгебры, изученными нами ранее в курсе аналитической геометрии.

Мы будем рассматривать плоские геометрические фигуры, лежащие в некоторой плоскости трехмерного евклидова пространства. Обобщим понятие плоского многоугольника школьного курса геометрии, рассматривая многоугольники, составленные из конечного числа попарно «неперекрывающихся» треугольников. Для уточнения последнего требования условимся называть точку *внутренней точкой треугольника*, если она принадлежит треугольнику вместе с некоторым кругом с центром в этой точке. Точки, принадлежащие сторонам треугольника, будем называть *граничными точками треугольника*. Любой круг с центром в граничной точке имеет как внутренние точки, так и внешние точки треугольника. На рисунке 146 X — внутренняя, а Y — граничная точки треугольника ABC .

Определение 1. *Многоугольником называется множество точек плоскости, совпадающее с объединением ко-*

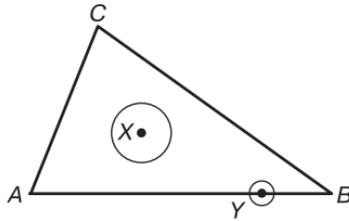


Рис. 146

конечного числа попарно не имеющих общих внутренних точек треугольников.

Таким образом, многоугольник M является объединением треугольников $T_i: M = \bigcup_{i=1}^n T_i$, где треугольники T_i и T_j не имеют общих внутренних точек при всех $i \neq j, i, j = 1, \dots, n$. Будем говорить, что многоугольник M составлен из треугольников (или разложен на треугольники) $T_i, i = 1, \dots, n$, и записывать $M = T_1 + T_2 + \dots + T_n$ или короче: $M = \sum_{i=1}^n T_i$. Внутренние точки треугольников T_i

будем называть *внутренними точками многоугольника M* . Аналогично, будем говорить, что многоугольник M составлен из конечного числа многоугольников $M_i, i = 1, \dots, n$, если M является объединением многоугольников M_i , которые попарно не имеют общих внутренних точек.

Будем также использовать запись $M = \sum_{i=1}^n M_i$. Множество всех многоугольников плоскости будем обозначать через μ . Ясно, что все многоугольники, изучаемые в школьном курсе геометрии, удовлетворяют определению 1.

Определение 2. Пусть дано отображение s множества μ многоугольников плоскости на множество действительных чисел $\mathbb{R}, s: \mu \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющее следующим условиям (аксиомам площади).

1. (Аксиома позитивности). Для любого многоугольника $M \in \mu$ имеет место неравенство $s(M) \geq 0$.

2. (Аксиома инвариантности). Для любых двух конгруэнтных многоугольников M и N выполняется $s(M) = s(N)$.

3. (Аксиома аддитивности). Если многоугольник M составлен из двух¹⁾ многоугольников M_1 и M_2 , то $s(M) = s(M_1) + s(M_2)$.

4. (Аксиома нормированности). Площадь единичного квадрата²⁾ Q равна единице: $s(Q) = 1$.

Число $s(M)$ называется площадью многоугольника.

Оставим на время в стороне вопрос существования отображения, удовлетворяющего аксиомам площади, установим единственность такого отображения. Вспомогательные утверждения приведем в качестве лемм, полагая в их формулировках, что s — произвольное отображение, удовлетворяющее определению 2.

Лемма 1. Пусть прямоугольник $P_1 = AB'C'D'$ содержится в прямоугольнике $P_2 = ABCD$, причем точка B' лежит на стороне AB , а точка D' — на стороне AD . Тогда $s(P_1) \leq s(P_2)$.

Доказательство. В силу аксиомы 3 площади (см. определение 2) имеет место равенство $s(P_1) + s(M) = s(P_2)$, где через M обозначен шестиугольник $BCDD'C'B'$ (рис. 147), который, как нетрудно видеть, является многоугольником в смысле определения 1. Из аксиомы 1 площади следует, что $s(M) \geq 0$. Поэтому $s(P_1) \leq s(P_2)$. Лемма доказана.

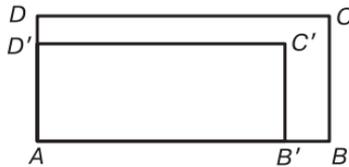


Рис. 147

Лемма 2. Пусть P — произвольный прямоугольник со сторонами a и b . Тогда $s(P) = ab$.

Доказательство. Рассмотрим следующие три случая. Предположим, во-первых, что прямоугольник P является

¹⁾ Очевидно, что утверждение, аналогичное утверждению аксиомы, имеет место и в том случае, когда данный многоугольник составлен из произвольного конечного числа многоугольников, что несложно вывести индукцией по числу многоугольников разложения.

²⁾ Под единичным квадратом понимается квадрат, сторона которого равна единичному отрезку.

квадратом со стороной, равной $\frac{1}{n}$, $a = b = \frac{1}{n}$, где n — некоторое натуральное число. Разложим единичный квадрат

Q на n^2 квадратов со стороной $\frac{1}{n}$ (рис. 148), $Q = \sum_{i=1}^{n^2} P_i$.

Положим $s(P_1) = c$. В силу аксиомы 2 определения 2 $s(P_i) = c$ при любом $i = 1, \dots, n^2$, поскольку все квадраты со стороной $\frac{1}{n}$ конгруэнтны. Из аксиомы 3 того же

определения следует, что $1 = s(Q) = \sum_{i=1}^{n^2} s(P_i) = cn^2$, откуда

$c = \frac{1}{n^2}$, следовательно, $s(P) = c = \frac{1}{n^2} = ab$, что доказывает лемму в этом случае.

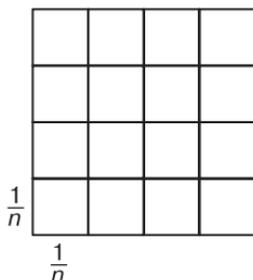


Рис. 148

Второй случай, когда $a = \frac{m_1}{n_1}$ и $b = \frac{m_2}{n_2}$, с помощью аксиомы 3 определения 2 сводится к рассмотренному случаю. Действительно, полагая $n = n_1 n_2$, получим $a = \frac{m_1 n_2}{n}$ и $b = \frac{m_2 n_1}{n}$. Поэтому прямоугольник P мож-

но составить из $m_1 n_2 m_2 n_1$ квадратов со стороной $\frac{1}{n}$ и, следовательно, в силу аксиомы 3 справедливо равенство $s(P) = \frac{m_1 n_2 m_2 n_1}{n^2} = \frac{m_1}{n_1} \frac{m_2}{n_2} = ab$, из которого следует справедливость леммы для этого случая.

В третьем случае длины сторон a и b прямоугольника P являются произвольными действительными числами. Воспользуемся леммой 1 и с помощью предельного перехода сведем этот случай к случаю рациональных длин сторон

a и b . Возьмем произвольные рациональные приближения действительных чисел a и b с недостатком и избытком: $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a'_n$, $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b'_n$, где рациональные числа a_n , b_n , a'_n , b'_n удовлетворяют неравенствам $a_n \leq a$, $b_n \leq b$ и $a'_n \geq a$, $b'_n \geq b$ при всех натуральных n . Нетрудно видеть, что прямоугольник P_n со сторонами a_n и b_n можно вложить в прямоугольник P так, как показано на рис. 147. Отсюда в силу леммы 1 следует, что $a_n b_n = s'(P_n) \leq s(P)$ при всех натуральных n . Аналогично, $s(P) \leq s(P'_n) = a'_n b'_n$, при всех n , где через P'_n обозначен прямоугольник с рациональными длинами сторон a'_n и b'_n . Таким образом, неравенство $a_n b_n \leq s(P) \leq a'_n b'_n$ справедливо при всех натуральных числах n . Переходя в последнем неравенстве к пределу, получаем: $ab = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n \leq s'(P) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a'_n b'_n = ab$, поэтому $s(P) = ab$. Лемма доказана.

Лемма 3. Для произвольного треугольника T со сторонами a , b , c , углами A , B , C и соответствующими высотами h_a , h_b , h_c имеют место равенства: $s'(T) = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} c h_c = \frac{1}{2} a b \sin C = \frac{1}{2} a c \sin B = \frac{1}{2} b c \sin A$.

Доказательство. Пусть T — данный треугольник с вершинами в точках A , B и C , причем $AB = c$ — его большая сторона. На стороне AB построим прямоугольник $P = ABB'A'$ со сторонами $AB = c$ и $AA' = \frac{1}{2} h_c$. Проведем отрезок CF , перпендикулярный прямой $A'B'$. Обозначим через E и D середины сторон AC и BC , а через T_1 , T_2 , T'_1 и T'_2 соответственно треугольнички CFE , CFD , $AA'E$ и $BB'D$ (рис. 149).

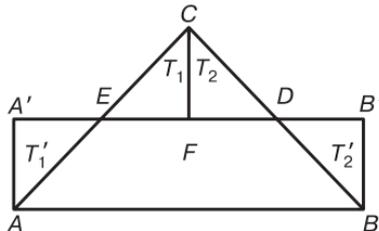


Рис. 149

Так как AB — большая сторона данного треугольника, то, как легко установить, F — внутренняя точка отрезка ED (докажите это самостоятельно). Имеют место следующие разложения: $P = ABDE + T'_1 + T'_2$ и $T = ABDE + T_1 + T_2$. Следовательно, в силу аксиомы 3 площади многоугольника,

$$\begin{aligned} s(P) &= s(ABDE) + s(T'_1) + s(T'_2), \\ s(T) &= s(ABDE) + s(T_1) + s(T_2). \end{aligned} \quad (1)$$

Нетрудно доказать конгруэнтность треугольников: $T_1 \cong T'_1$ и $T_2 \cong T'_2$, откуда, в силу аксиомы 2 площади, $s(T'_1) = s(T_1)$ и $s(T'_2) = s(T_2)$. Отсюда и из равенств (27), в силу леммы 2, получим

$$\begin{aligned} s(T) &= s(ABDE) + s(T_1) + s(T_2) = s(ABDE) + s(T'_1) + s(T') = \\ &= s(P) = s(ABB'A') = \frac{1}{2} ch_c. \end{aligned}$$

Из $h_c = b \sin A$ следует $\frac{1}{2} ch_c = \frac{1}{2} bc \sin A$. Остальные равенства выводятся с помощью теоремы синусов из доказанных равенств, что предлагается читателю в качестве упражнения. Лемма доказана.

Теорема 1 (о единственности площади многоугольника). *Существует не более одного отображения $s: \mu \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющего аксиомам площади 1–4.*

Доказательство. Пусть отображения $s: \mu \rightarrow \mathbb{R}$, и $s': \mu \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяют аксиомам площади 1–4 и M — произвольный многоугольник. Докажем, что $s(M) = s'(M)$. Из определения 1 следует, что найдутся треугольники T_1, T_2, \dots, T_n , для которых имеет место разложение $M = T_1 + T_2 + \dots + T_n$. В силу леммы 3, $s(T_i) = s'(T_i)$ для любого треугольника T_i . Из аксиомы 2 площади следует, что $s(M) = s(T_1) + \dots + s(T_n) = s'(T_1) + \dots + s'(T_n) = s'(M)$. Теорема доказана.

Установим существование отображения $s: \mu \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющего определению 2. Учитывая лемму 3, введем следующее определение.

Определение 3. *Определим на множестве τ всех треугольников плоскости π отображение $s: \tau \rightarrow \mathbb{R}$, положив*

для произвольного треугольника T со сторонами a и b и углом α между ними $s(T) = s(T) = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$ ¹⁾.

Теперь для вычисления площади произвольного многоугольника можно использовать его разложение на треугольники. Однако на этом пути встает непростой вопрос. Один и тот же многоугольник, в частности треугольник, допускает различные разложения на треугольники: $M = \sum_{i=1}^n M_i$

и $M = \sum_{j=1}^m N_j$, где M_i и N_j — некоторые треугольники.

Поэтому для корректности такого подхода необходимо, чтобы равенство

$$\sum_{i=1}^n s(M_i) = \sum_{j=1}^m s(N_j) \quad (2)$$

имело место для любых разложений многоугольника M на треугольники.

Вначале установим справедливость этого равенства для треугольника, используя специальное «разложение» произвольного треугольника на треугольники с вершиной в некоторой фиксированной точке. Для дальнейших рассуждений введем понятие ориентированного треугольника. *Ориентированным треугольником* будем называть произвольную упорядоченную тройку точек (ABC) плоскости. Если точки лежат на одной прямой, то ориентированный треугольник (ABC) будем называть *вырожденным*. Зафиксируем в евклидовом пространстве некоторую прямоугольную декартову систему координат $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ так, чтобы точка O лежала в плоскости π , а векторы \vec{i} и \vec{j} были ей параллельны.

Определение 4. *Площадью ориентированного треугольника (ABC) называется число $s_0(ABC) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \vec{k})$, где $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \vec{k})$ — смешанное произведение векторов \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} и \vec{k} .*

Из свойств смешанного произведения векторов (см. [2]) следует, что $s_0 = 0$ для вырожденного треугольника. Если треугольник не вырожден, то знак числа s_0 зависит от

¹⁾ В силу леммы 12.3, значение $s(T)$ не зависит от выбора одной из трех сторон треугольника.

ориентации базиса $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$. Если этот базис правый, т. е. его ориентация совпадает с ориентацией базиса \vec{i}, \vec{j} , то $s_0 > 0$, если левый, то $s_0 < 0$.

Лемма 4. Для трех произвольных точек A, B, C справедливы равенства $s_0(ABC) = s_0(BCA) = s_0(CAB) = -s_0(BAC) = -s_0(ACB) = -s_0(CBA)$.

Доказательство. Воспользуемся свойствами смешанного произведения векторов (см. [2]). Докажем, например, равенство $s_0(ABC) = s_0(BCA)$. Из определения значения $s_0(ABC)$ следует, что

$$\begin{aligned} 2s_0(BCA) &= (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}, \vec{k}) = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}, \vec{k}) = \\ &= (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BA}, \vec{k}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}, \vec{k}) = 0 + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \vec{k}) = 2s_0(ABC). \end{aligned}$$

Остальные равенства доказываются аналогично. Лемма доказана.

Поскольку из доказанной леммы следует, что ориентированные треугольники (ABC) , (BCA) и (CAB) имеют равные площади, мы будем их считать одним и тем же ориентированным треугольником, так же, как и тройку ориентированных треугольников (BAC) , (ACB) , (CBA) . Таким образом, каждому неориентированному треугольнику ABC соответствуют два ориентированных треугольника: (ABC) и (ACB) , площади которых противоположны по знаку.

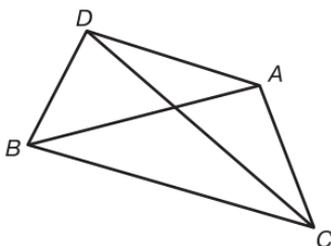


Рис. 150

Нетрудно видеть, что модуль площади ориентированного треугольника равен площади соответствующего ему неориентированного треугольника. Действительно, как следует из свойств смешанного произведения векторов (см. [2]), число $|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \vec{k}|$ совпадает с объемом параллелепипеда, построенного на векторах \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} и \vec{k} . Вектор \vec{k} перпен-

дикулярен плоскости π , т. е. векторам \vec{AB} и \vec{AC} , и его длина равна 1. Поэтому объем этого параллелепипеда равен модулю векторного произведения векторов \vec{AB} и \vec{AC} , т. е. произведению модулей сомножителей на синус угла между ними. Отсюда и из определений 3 и 4 следует, что $s(ABC) = |s_0(ABC)|$.

Лемма 5. Для произвольного ориентированного треугольника (ABC) и произвольной точки D справедливо равенство $s_0(ABC) = s_0(DBC) + s_0(DCA) + s_0(DAB)$.

Доказательство. Пусть (ABC) — данный ориентированный треугольник, D — произвольная точка плоскости (рис. 150). Из определения 4, свойств смешанного произведения векторов и леммы 4 получим

$$\begin{aligned} 2s_0(ABC) &= (\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{k}) = (\vec{DB} - \vec{DA}, \vec{DC} - \vec{DA}, \vec{k}) = \\ &= (\vec{DB}, \vec{DC}, \vec{k}) + (-\vec{DA}, \vec{DC}, \vec{k}) + (\vec{DB}, -\vec{DA}, \vec{k}) + (-\vec{DA}, -\vec{DA}, \vec{k}) = \\ &= 2s_0(DBC) - 2s_0(DAC) - 2s_0(DBA) + 0 = \\ &= 2s_0(DBC) + 2s_0(DCA) + 2s_0(DAB). \end{aligned}$$

В частности, из доказанной леммы несложно получить следствие.

Следствие 1. Для произвольного треугольника ABC и точки D , лежащей на стороне AB , справедливы равенства

$$s_0(ABC) = s_0(DBC) + s_0(DCA), \tag{3}$$

$$s(ABC) = s(DBC) + s(DCA). \tag{4}$$

Доказательство. В силу леммы 5, имеет место равенство

$$s_0(ABC) = s_0(DBC) + s_0(DCA) + s_0(DAB).$$

Так как точки D, A, B — коллинеарны, то $s_0(DAB) = 0$, откуда и следует равенство (3) (рис. 151). Равенство (4)

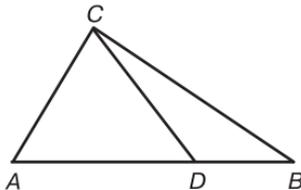


Рис. 151

непосредственно следует из леммы 3, поскольку треугольники DBC и DCA имеют общую высоту, проведенную из вершины C , а сумма их оснований AD и DB равна основанию AB треугольника ABC .

Равенство (4) позволяет свести случай произвольных разложений многоугольника на треугольники к их «правильным» разложениям, называемыми триангуляциями.

Определение 5. Разложение многоугольника M на треугольники T_1, T_2, \dots, T_n называется триангуляцией, если пересечение любых двух треугольников T_i, T_j , при $i \neq j$, является либо пустым множеством, либо их общей вершиной, либо их общей стороной.

Лемма 6. Для любого разложения многоугольника M на треугольники T_1, T_2, \dots, T_n существует триангуляция $\{T'_1, T'_2, \dots, T'_m\}$ многоугольника M такая, что $s(T_1) + s(T_2) + \dots + s(T_n) = s(T'_1) + s(T'_2) + \dots + s(T'_m)$.

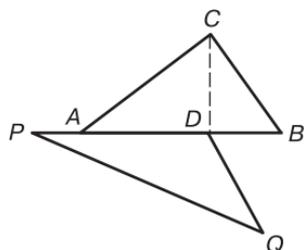


Рис. 152

Доказательство. Пусть $M = T_1 + T_2 + \dots + T_n$ — произвольное разложение многоугольника M на треугольники. Предположим, что вершина D некоторого треугольника PQD этого разложения лежит внутри стороны AB треугольника ABC , который также является элементом данного разложения (рис. 152). Соединим точку D с противоположной вершиной C треугольника ABC (пунктирная линия на рисунке). Заменяя в имеющемся разложении многоугольника M треугольник ABC двумя треугольниками ADC и DBC , получим новое разложение многоугольника M на треугольники, сумма площадей которых равна сумме площадей исходного разложения, так как из равенства (4) следует: $s(ABC) = s(DBC) + s(ADC)$. Прделавав последовательно описанное выше действие со всеми треугольниками, содержащими внутри некоторой своей стороны вершину какого-либо другого треугольника, получим триангуляцию $\{T'_1, T'_2, \dots, T'_m\}$, удовлетворяющую условию леммы.

Следующее утверждение устанавливает аддитивность определенного выше на множестве треугольников отображения $s: \tau \rightarrow \mathbb{R}$.

Лемма 7. Для любого разложения треугольника T на треугольники $T = T_1 + T_2 + \dots + T_n$ имеет место равенство $s(T) = s(T_1) + s(T_2) + \dots + s(T_n)$.

Доказательство. Пусть $T = T_1 + T_2 + \dots + T_n$ — произвольное разложение данного треугольника T . В силу леммы 6, найдется триангуляция $\{T'_1, \dots, T'_m\}$ треугольника T , для которой имеет место равенство

$$s(T_1) + s(T_2) + \dots + s(T_n) = s(T'_1) + s(T'_2) + \dots + s(T'_m).$$

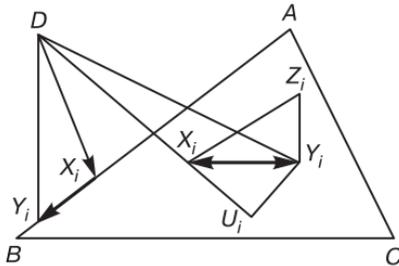


Рис. 153

Докажем, что $s(T) = s(T'_1) + s(T'_2) + \dots + s(T'_m)$, откуда и будет следовать справедливость утверждения леммы. Выберем положительную ориентацию треугольников $T, T'_1, T'_2, \dots, T'_m$ (рис. 153). Для наглядности будем считать, что вершины положительно ориентированных треугольников обходятся против часовой стрелки. Возьмем произвольную точку D и представим площадь каждого из ориентированных треугольников $T'_i, i = 1, \dots, m$, в виде суммы площадей трех ориентируемых треугольников, одна из вершин которых совпадает с точкой D :

$$s_0(T'_i) = s_0(DX_i Y_i) + s_0(DY_i Z_i) + s_0(DZ_i X_i),$$

где $T'_i = X_i Y_i Z_i$. Суммируя последнее равенство по всем $i=1, \dots, m$, получим

$$s_0(T'_1) + s_0(T'_2) + \dots + s_0(T'_m) = \sum s_0(DX_i Y_i), \tag{5}$$

где суммирование в правой части идет по всем сторонам $X_i Y_i$ всех положительно ориентированных треугольников $T, T'_1, T'_2, \dots, T'_m$. Докажем, что правая часть равенства (5) совпадает с числом $s_0(T)$.

Рассмотрим два случая: когда сторона $X_i Y_i$ лежит внутри треугольника T и когда сторона $X_i Y_i$ лежит на одной

из сторон треугольника T . В первом случае найдутся ровно два треугольника триангуляции со стороной $X_i Y_i$. Обозначим их через $Z_i X_i Y_i$ и $U_i X_i Y_i$. В разложение первого из этих треугольников, согласно лемме 5, входит слагаемое $D X_i Y_i$, а в разложение второго — слагаемое $D Y_i X_i$ (см. рис. 153). В силу леммы 4 имеет место равенство $s_0(D X_i Y_i) + s_0(D Y_i X_i) = 0$. Таким образом, сумма всех слагаемых вида $s_0(D X_i Y_i)$, где сторона $X_i Y_i$ лежит внутри треугольника T , равна 0.

Во втором случае, если сторона $X_i Y_i$ лежит на границе треугольника T , в сумму (5) входит лишь одно слагаемое вида $s_0(D X_i Y_i)$. Сгруппируем слагаемые вида $s_0(D X_i Y_i)$, для которых точки X_i и Y_i лежат на стороне AB треугольника T . Поскольку такие стороны $X_i Y_i$ составляют сторону AB , в силу равенства (3), их сумма равна $s_0(DAB)$. Аналогичные рассуждения показывают, что сумма слагаемых вида $s_0(D X_i Y_i)$, для которых точки X_i и Y_i лежат на стороне BC треугольника T , равна $s_0(DBC)$, а сумма слагаемых вида $s_0(D X_i Y_i)$, для которых точки X_i и Y_i лежат на стороне CA треугольника T , равна $s_0(DCA)$. Отсюда и из леммы 5 получим, что сумма, записанная в правой части равенства (5), равна $s_0(DAB) + s_0(DBC) + s_0(DCA) = s_0(ABC)$. Но из равенства (4) следует, что $s(ABC) = s_0(ABC)$, и поэтому $s(T) = s(T'_1) + s(T'_2) + \dots + s(T'_m) = s(T_1) + s(T_2) + \dots + s(T_n)$. Лемма доказана.

Докажем теорему о существовании площади многоугольника.

Теорема 2 (теорема существования площади многоугольника). *Существует отображение $s: \mu \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющее аксиомам площади 1–4 определения 2.*

Доказательство. Определим отображение $s: \mu \rightarrow \mathbb{R}$, положив для произвольного многоугольника M

$$s(M) = s(T_1) + s(T_2) + \dots + s(T_n), \quad (6)$$

где $M = T_1 + T_2 + \dots + T_n$ — произвольные разложения данного многоугольника на треугольники T_1, T_2, \dots, T_n .

Прежде всего установим корректность принятого определения, т. е. независимость правой части равенства (6) от произвола в выборе разложения многоугольника M на треугольники. Пусть имеются два произвольных разложения многоугольника M на треугольники:

$M = T_1 + T_2 + \dots + T_n$ и $M = T'_1 + T'_2 + \dots + T'_m$. Докажем, что $s(T_1) + s(T_2) + \dots + s(T_n) = s(T'_1) + s(T'_2) + \dots + s(T'_m)$. Для этого воспользуемся следующей простой конструкцией «измельчения» данных разложений. Заметим, что пересечение двух любых треугольников, имеющих общие внутренние точки, является многоугольником, т. е. это пересечение можно разложить на сумму нескольких треугольников. Рассмотрим всевозможные попарные пересечения треугольников T_i и T'_j , имеющих общие внутренние точки: $U_{ij} = T_i \cap T'_j$, $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$. Разложим каждый из этих многоугольников на треугольники, получим конечное множество попарно не имеющих общих внутренних точек треугольников V_1, V_2, \dots, V_k . Нетрудно видеть, что каждый из треугольников T_i или T'_j составлен¹⁾ из нескольких треугольников V_r и поэтому, в силу леммы 8, равенства $s(T_i) = \sum_{V_r \subset T_i} s(V_r)$ и $s(T'_j) = \sum_{V_r \subset T'_j} s(V_r)$ имеют место для всех $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$. Суммируя первое из них по всем $i = 1, \dots, n$; а второе — по всем $j = 1, \dots, m$, получим равенство

$$\begin{aligned} s(T_1) + s(T_2) + \dots + s(T_n) &= s(V_1) + s(V_2) + \dots + s(V_k) = \\ &= s(T'_1) + s(T'_2) + \dots + s(T'_m), \end{aligned}$$

доказывающее корректность определения отображения $s: \mu \rightarrow \mathbb{R}$.

Покажем, что определенное равенством (6) отображение $s: \mu \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет аксиомам 1–4 площади. Так как $s(T) \geq 0$ для любого треугольника T , то $s(M) \geq 0$ для любого многоугольника M , и поэтому отображение $s: \mu \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет аксиоме 1 определения 2.

Если многоугольники M и M' конгруэнтны, то найдется движение g такое, что $g(M) = g(M')$. Возьмем произвольное разложение многоугольника M на треугольники: $M = T_1 + T_2 + \dots + T_n$, тогда, очевидно, $M' = T'_1 + T'_2 + \dots + T'_n$, где $T'_i = g(T_i)$ при всех $i = 1, \dots, n$. В силу определения 3, площади конгруэнтных треугольников равны: $s(T'_i) = s(T_i)$. Отсюда и из равенства (6) имеем $s(M) = s(T_1) + s(T_2) + \dots + s(T_n) = s(T'_1) + s(T'_2) + \dots + s(T'_n) = s(M')$, что доказывает инвариантность отображения $s: \mu \rightarrow \mathbb{R}$ для конгруэнтных многоугольников.

¹⁾ Так как $T_i = \bigcup_j U_{ij}$ и $T'_j = \bigcup_i U_{ij}$.

Пусть многоугольник M составлен из двух многоугольников $M = M_1 + M_2$. Рассмотрим произвольные разложения многоугольников M_1 и M_2 на треугольники $M_1 = T_1 + T_2 + \dots + T_n$, $M_2 = U_1 + U_2 + \dots + U_m$. Очевидно, что $M = T_1 + T_2 + \dots + T_n + U_1 + U_2 + \dots + U_m$, поэтому из равенства (6) следует равенство $s(M) = s(T_1) + s(T_2) + \dots + s(T_n) + s(U_1) + s(U_2) + \dots + s(U_m) = s(M_1) + s(M_2)$, доказывающее, что отображение $s: \mu \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет аксиоме 3.

Проводя диагональ в единичном квадрате Q , получим два равнобедренных прямоугольных треугольника, длины катетов которых равны 1. Из определения 3 следует, что их площади равны $\frac{1}{2}$. Из формулы (6) получим равенство $s(Q) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, доказывающее, что отображение $s: \mu \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет аксиоме 4 площади. Теорема доказана.

§ 28. РАВНОВЕЛИКИЕ И РАВНОСОСТАВЛЕННЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ. ТЕОРЕМА БОЙЯИ–ГЕРВИНА. ОБЪЕМ МНОГОГРАННИКА

В предыдущем параграфе при доказательстве леммы 3 мы воспользовались тем, что треугольник и прямоугольник составлены из попарно конгруэнтных многоугольников. Отсюда мы сделали вывод, что их площади равны между собой. Ясно, что если два многоугольника служат объединением в том смысле, в каком было указано в § 27, конечного числа попарно конгруэнтных многоугольников, то их площади равны между собой (докажите это утверждение самостоятельно). В дальнейшем многоугольники с равными площадями будем называть *равновеликими*. Естественно поставить вопрос: если два многоугольника равновелики, можно ли представить их как объединения попарно конгруэнтных многоугольников? Ответ на него будет получен в настоящем параграфе. Введем следующее определение.

Определение 1. *Многоугольники A и B называются равносоставленными в том случае, когда существуют их разложения $A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$ и $B = B_1 + B_2 + \dots + B_n$ на попарно конгруэнтные многоугольники $A_1 \cong B_1, A_2 \cong B_2, \dots, A_n \cong B_n$.*

Равноставленные многоугольники A и B будем обозначать через $A \sim B$. Равноставленные многоугольники имеют одинаковые площади. Положительный ответ на вопрос, любые ли два равновеликих многоугольника являются равноставленными, дает теорема Бойяи–Гервина, доказанная независимо друг от друга венгерским математиком Ф. Бойяи в 1832 г. и немецким математиком П. Гервиным в 1833 г.

Рассмотрим несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Любой треугольник равноставлен с некоторым прямоугольником.*

Справедливость этого утверждения непосредственно следует из доказательства леммы 3, проведенного в предыдущем параграфе.

Следующая лемма устанавливает транзитивность отношения равноставленности многоугольников.

Лемма 2. *Если для произвольных многоугольников A, B, C имеют место соотношения $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$.*

Доказательство. В силу определения равноставленности имеют место следующие разложения:

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 + \dots + A_n, \\ B &= B_1 + B_2 + \dots + B_n = B'_1 + B'_2 + \dots + B'_m, \\ C &= C_1 + C_2 + \dots + C_m, \end{aligned} \quad (1)$$

где $A_1 \cong B_1, A_2 \cong B_2, \dots, A_n \cong B_n$ и $B'_1 \cong C_1, B'_2 \cong C_2, \dots, B'_m \cong C_m$. «Измельчим» разложения многоугольника B на многоугольники B_1, B_2, \dots, B_n и B'_1, B'_2, \dots, B'_m , взяв всевозможные попарные пересечения: $D_{ij} = B_i \cap B'_j$, для каждого $i = 1, \dots, n$ и $j = 1, \dots, m$ (рис. 154). При этом среди полученных частей D_{ij} могут оказаться пустые множества или отрезки. Можно исключить такие

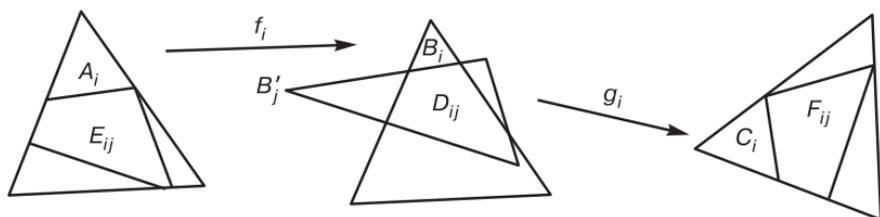


Рис. 154

множества из рассмотрения, но проще считать их здесь многоугольниками (вырожденными), к недоразумениям это не приведет. С другой стороны, нетрудно видеть, что каждое множество D_{ij} , отличное от пустого множества или отрезка, является многоугольником, поскольку пересечение двух треугольников, имеющих общие внутренние точки, является многоугольником.

Очевидно, что многоугольники D_{ij} и D_{rs} не имеют общих внутренних точек при $i \neq r$ или $j \neq s$, поскольку различные многоугольники B_i и различные многоугольники B'_j не имеют общих внутренних точек. Объединение всех D_{ij} совпадает с многоугольником B , так как

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m D_{ij} &= \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m (B_i \cap B'_j) = \bigcup_{i=1}^n \left(B_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^m B'_j \right) \right) = \\ &= \bigcup_{i=1}^n (B_i \cap B) = \bigcup_{i=1}^n B_i = B. \end{aligned}$$

Таким образом, многоугольник B составлен из многоугольников D_{ij} :

$$B = \sum_{i,j} D_{ij}. \tag{2}$$

Докажем, что из частей, конгруэнтных частям D_{ij} , можно составить многоугольники A и C . В силу определения конгруэнтных фигур найдутся движения f_1, f_2, \dots, f_n и g_1, g_2, \dots, g_m , для которых $f_1(A_1) = B_1, f_2(A_2) = B_2, \dots, f_n(A_n) = B_n$ и $g_1(B_1) = C_1, g_2(B_2) = C_2, \dots, g_m(B_m) = C_m$. С помощью движений f_1, f_2, \dots, f_n и g_1, g_2, \dots, g_m «перенесем» многоугольники D_{ij} на многоугольники A и C . Для любых значений $i=1, \dots, n$ и $j=1, \dots, m$ положим $E_{ij} = f_i^{-1}(D_{ij})$ и $F_{ij} = g_j(D_{ij})$. В силу разложений (1) и (2), имеют место разложения $A = \sum_{i,j} E_{ij}$ и $C = \sum_{i,j} F_{ij}$, причем при любых i и j имеем $E_{ij} \cong F_{ij}$, поскольку $F_{ij} = g_j(f_i(E_{ij}))$. Таким образом, многоугольники A и C равноставлены. Лемма доказана.

Следующая лемма устанавливает эквивалентность отношений равновеликости и равноставленности для прямоугольников.

Лемма 3. *Любые равновеликие прямоугольники равноставлены.*

Доказательство. Пусть имеются два равновеликих прямоугольника $ABCD$, $A'B'C'D'$ со сторонами $AB = a$, $AD = b$ и $A'B' = a'$, $A'D' = b'$. Так как их площади равны между собой, то $ab = a'b'$. Положим, для определенности, что $a' > a$ и $b > b'$. Без ограничения общности можно считать, что прямые углы при вершинах A и A' совмещены так, как показано на рис. 155. Возможны следующие два случая: отрезок DB' пересекает прямоугольник $ABHD'$ и отрезок DB' не пересекает прямоугольник $ABHD'$.

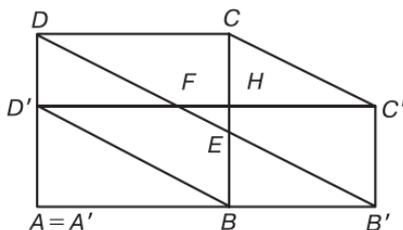


Рис. 155

Рассмотрим первый случай. Обозначим точки пересечения: отрезков BC и $C'D'$ через H , отрезков BC и $B'D$ — через E , а отрезков $D'C'$ и $B'D$ — через F . Сначала рассмотрим случай, когда точки E и F не совпадают с точкой H (рис. 155). В этом случае прямоугольник $ABCD$ разложен на пятиугольник $ABEFD'$ и треугольники $DD'F$ и CDE , а прямоугольник $AB'C'D'$ — на тот же пятиугольник $ABEFD'$ и треугольники $BB'E$ и $B'C'F$. Докажем, что треугольник $DD'F$ равен треугольнику $BB'E$, а треугольник CDE — треугольнику $B'C'F$, откуда и будет следовать справедливость утверждения леммы в рассматриваемом случае. Нетрудно видеть, что прямые $D'B$, DB' и CC' параллельны. Действительно, из равенства $ab = a'b'$ следует, что $\frac{a}{b'} = \frac{a'}{b}$ или

$\frac{AB}{A'D'} = \frac{A'B'}{AD}$. Поэтому треугольники $AD'B$ и ADB' подобны, откуда следует, что прямые $D'B$ и DB' параллельны. Далее, $HC' = BB' = a' - a$, $HC = D'D = b - b'$. Из равенства $ab = a'b'$ получим $\frac{a' - a}{b - b'} = \frac{a'}{b}$, следовательно, прямые CC' и DB' также параллельны. Из параллельности прямых $D'B$, DB' и CC' следует, что четырехугольники $DD'BE$, $CEB'C'$,

$DFC'C$ — параллелограммы, их противоположные стороны соответственно равны. Поэтому $BB' = D'F$, $DD' = BE$, $DC = FC'$ и $CE = C'B'$, откуда следует конгруэнтность прямоугольных треугольников $DD'F$ и $BB'E$, DCE и $C'B'F$. Аналогично рассматривается случай, когда точки E и F совпадают с точкой H , т. е. прямая $B'D$ содержит точку H . Доказательство для него проведите самостоятельно. Для рассматриваемого случая лемма доказана.

Во втором случае прямая DB' не пересекает прямоугольник $ABHD'$. Пусть точка B'' — середина отрезка AB' . Отразим отрезок AB'' симметрично относительно прямой $D'C'$ (рис. 156). Получим прямоугольник $A''B''C''D''$, на рис. 156 точка A'' совпадает с точкой A , отрезки $B''C''$ и $C''D''$ изображены пунктирной линией. Очевидно, полученный прямоугольник равносоставлен с прямоугольником $AB'C'D'$. Будем повторять это действие n раз, пока прямая $B^{(n)}D$ не будет пересекать прямоугольник $ABHD^{(n)}$. Но прямоугольник $A^{(n)}B^{(n)}C^{(n)}D^{(n)}$ равносоставлен в силу леммы 2 с прямоугольником $A'B'C'D'$, а из доказанного первого случая леммы следует, что он равносоставлен с прямоугольником $ABCD$. Воспользовавшись еще раз леммой 2, получим, что прямоугольники $ABCD$ и $A'B'C'D'$ равносоставлены. Лемма доказана.

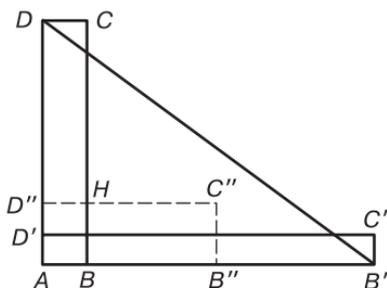


Рис. 156

Следующее предложение распространяет утверждение леммы 1 на произвольные многоугольники.

Лемма 4. *Любой многоугольник равносоставлен с некоторым прямоугольником.*

Доказательство. Пусть A — произвольный многоугольник. Используя приведенные выше леммы, покажем, что многоугольник A равносоставлен с некоторым прямоуголь-

ником P . Рассмотрим произвольное разложение многоугольника A на треугольники: $A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$. Из утверждения леммы 1 следует, что любой из этих треугольников равноставлен с некоторым прямоугольником: $A_1 \sim P_1$, $A_2 \sim P_2$, \dots , $A_n \sim P_n$, где P_1, P_2, \dots, P_n — некоторые прямоугольники, причем, в силу леммы 1,

$$s(A) = s(A_1) + s(A_2) + \dots + s(A_n) = s(P_1) + s(P_2) + \dots + s(P_n).$$

Таким образом, по определению, многоугольник A равноставлен с некоторым многоугольником $M = P_1 + P_2 + \dots + P_n$, который в свою очередь составлен из прямоугольников P_1, P_2, \dots, P_n . Рассмотрим прямоугольники P'_i , длины сторон которого равны 1 и $s(P_i)$. Тогда $s(P_i) = s(P'_i)$, и из леммы 3 следует, что каждый из прямоугольников P_i равноставлен с прямоугольником P'_i при всех $i = 1, \dots, n$.

Прикладывая последовательно прямоугольники P'_1, P'_2, \dots, P'_n один к другому общей стороной, равной 1 (рис. 157), получим прямоугольник $P = P'_1 + P'_2 + \dots + P'_n$, со стороной 1 и площадью $s(A)$. Прямоугольник P равновелик с прямоугольником $M = P_1 + P_2 + \dots + P_n$. Но многоугольники A и M равноставлены, поэтому из леммы 2 следует, что многоугольник A равноставлен с прямоугольником P . Лемма доказана.

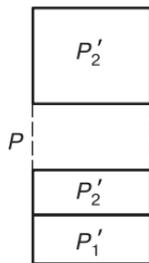


Рис. 157

Доказанные утверждения позволяют без труда доказать вышеупомянутое утверждение Бойяи–Гервина.

Теорема 1 (теорема Бойяи–Гервина). Любые два равновеликих многоугольника являются равноставленными.

Доказательство. Пусть имеются два произвольных равновеликих многоугольника A и B . В силу леммы 4, найдутся прямоугольники P и Q , для которых справедливы отношения $A \sim P$ и $B \sim Q$. Но тогда $s(P) = s(A)$ и $s(B) = s(Q)$, а по условию теоремы $s(A) = s(B)$, откуда $s(P) = s(Q)$. Из последнего равенства, в силу леммы 3, имеем отношение $P \sim Q$, поэтому из леммы 2 следует, что $A \sim B$. Теорема доказана.

При выводе формул для вычисления площадей многоугольников в школьном курсе геометрии наряду с мето-

дом разбиения многоугольников на попарно равные применяется и так называемый метод дополнения. Назовем два многоугольника A и B *равнодополняемыми* в случае, когда найдутся попарно конгруэнтные многоугольники $A' \cong B'$, $A_1 \cong B_1$, $A_2 \cong B_2$, \dots , $A_n \cong B_n$ такие, что $A' = A + A_1 + A_2 + \dots + A_n$ и $B' = B + B_1 + B_2 + \dots + B_n$. Ясно, что равнодополняемые многоугольники имеют одинаковые площади. Для них справедливо утверждение, аналогичное теореме 1 Бойяи–Гервина, в формулировке которой термин «равносоставленные» следует заменить термином «равнодополняемые».

В заключение параграфа коротко обсудим пути подхода к определению объема многогранника в евклидовом пространстве. При изложении теории объема многогранников целесообразно принять определение многогранника, аналогичное принятому выше определению 1 плоского многоугольника. Вместо треугольника естественно взять его трехмерный аналог — тетраэдр (треугольную пирамиду) и считать многогранником произвольное объединение конечного числа попарно не имеющих общих внутренних точек тетраэдров. Определение и обозначение разложения многогранника на многогранники аналогичны соответствующим определению и обозначению для многоугольника. Таким образом, запись $M = M_1 + M_2 + \dots + M_n$ означает, что многогранник M составлен из многогранников M_1, M_2, \dots, M_n (или разложен на эти многогранники).

Определение объема многогранника $v(M)$ дословно повторяет определение 2, с заменой термина «многоугольник» на термин «многогранник». В формулировке аксиомы 4 в качестве многогранника, имеющего объем, равный 1, вместо квадрата естественно взять единичный куб. Справедлива следующая теорема о существовании и единственности объема многогранника.

Теорема 2 (теорема существования и единственности объема многогранника). *Существует единственное отображение v множества многогранников на множество положительных действительных чисел, удовлетворяющее аксиомам объема.*

Не приводя доказательства этой теоремы, отметим лишь, что оно следует из справедливости аналогов всех приведен-

ных в § 23 лемм с очевидными заменами терминов: «прямоугольник» на «прямоугольный параллелепипед», «треугольник» на «тетраэдр» и т. п., а также изменениями соответствующих формул. Доказательства этих лемм для многогранников также аналогичны приведенным в § 27 для случая плоских многоугольников, за одним существенным исключением — доказательства аналога леммы 3. Остановимся на этом вопросе более подробно, так как он имеет непосредственное отношение к выводу формулы объема тетраэдра в школьном курсе стереометрии.

Аналог леммы 3 можно сформулировать так: *объем тетраэдра (треугольной пирамиды) равен одной трети произведения площади основания на высоту*. При выводе формулы площади треугольника (лемма 3) используется тот факт, что произвольный треугольник равноставлен с некоторым прямоугольником. Естественно поставить вопрос: нельзя ли получить аналогичным способом формулу для вычисления объема тетраэдра, точнее, не является ли произвольный тетраэдр равноставленным с некоторым прямоугольным параллелепипедом¹⁾?

Этот вопрос в течение нескольких десятилетий XIX века оставался открытым. За это время были найдены примеры тетраэдров, равноставленных с кубом того же объема, однако для произвольных тетраэдров соответствующих разложений найти не удавалось. Неудачи этих поисков привели к гипотезе о том, что произвольный тетраэдр, в частности правильный, не равноставлен с равновеликим кубом. В 1900 году на Парижском математическом конгрессе Давид Гильберт сформулировал 23 проблемы, которые, по его мнению, должны были определять основные направления развития математики в XX веке. Третьей в этом списке была поставлена проблема доказательства неравноставленности куба и правильного тетраэдра, имеющих равные объемы²⁾.

¹⁾ Можно показать, что любые равновеликие (не обязательно прямоугольные) параллелепипеды являются равноставленными. Доказательство справедливости этого утверждения опирается на конструкции, аналогичные приведенным при доказательстве леммы 3.

²⁾ Мы приводим краткую формулировку третьей проблемы Гильберта, в его докладе сделан содержательный анализ этой проблемы. Эта теорема была «доказана» в работе Р. Брикара в 1896 году, однако данное Брикаром доказательство содержало неустранимую ошибку.

Положительное решение поставленной проблемы было получено в 1900 году М. Деном. Из полученных М. Деном результатов вытекало следующее утверждение.

Теорема 3. *Если многогранники A и B являются равносоставленными (или равнодополняемыми), то найдутся натуральные числа $n_1, n_2, \dots, n_r, m_1, m_2, \dots, m_s$, и целое число k такие, что имеет место равенство:*

$$n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \dots + n_r\alpha_r = m_1\beta_1 + m_2\beta_2 + \dots + m_s\beta_s + k\pi,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ и $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ — величины всех двугранных углов многогранников A и B соответственно.

Применяя эту теорему, можно получить решение третьей проблемы Гильберта, а именно доказать, что правильный тетраэдр не равносоставлен (не равнодополняем) с равновеликим ему кубом. Не приводя доказательства этой теоремы, наметим лишь его основную идею. Обозначим через α двугранный угол правильного тетраэдра. Двугранные углы куба, очевидно, равны $\frac{\pi}{2}$. Если бы правильный тетраэдр был равносоставлен (или равнодополняем) с кубом, то, в силу теоремы 3, нашлись бы натуральные числа n, m и k , для которых было бы справедливо равенство $n\alpha = m\frac{\pi}{2} + k\pi$, откуда следовало бы, что $\frac{\alpha}{\pi}$ — некоторое рациональное число.

Можно проверить, что $\alpha = \arccos \frac{1}{3}$ и что отношение $\frac{\alpha}{\pi}$ есть число иррациональное, поэтому правильный тетраэдр не равносоставлен (и не равнодополняем) с кубом.

Таким образом, если для вывода формулы площади треугольника можно использовать наглядную и доступную для школьников 7–8 классов равносоставленность треугольника с прямоугольником, то в пространстве таких наглядных конструкций для вывода формулы объема пирамиды не существует. И потому любой вывод этой формулы обязательно должен использовать ту или иную форму предельного перехода, что требует от учащихся знакомства с теориями пределов и интегрирования.

ЧАСТЬ III

ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

В предлагаемой части курса мы приступаем к изучению вопросов проективной геометрии, в частности свойств фигур первого и второго порядков на проективной плоскости, проективных преобразований прямой и плоскости, а также проективных интерпретаций аффинной, евклидовой и неевклидовой геометрий.

Курс «Проективная геометрия» крайне важен для фундаментальной подготовки учителя математики. Проективные свойства фигур лежат в основе изучаемых в школе фактов евклидовой геометрии. Поэтому особое внимание уделено проективным интерпретациям аффинной, евклидовой и неевклидовых геометрий, изложенным в последней главе.

ПРОЕКТИВНАЯ ПЛОСКОСТЬ И ЕЕ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

§ 29. ЦЕНТРАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ. ИСТОРИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Проективная геометрия как самостоятельный раздел математики возникла в первой половине XIX века. В 1822 году в Париже французский математик и инженер Жан Виктор Понселе (1788–1867) издал книгу «Трактат о проективных свойствах фигур». В ней были выделены в качестве специального объекта изучения особые свойства геометрических фигур, названные проективными. Они, в свою очередь, были связаны со свойствами центрального проектирования, которые мы и рассмотрим в настоящем параграфе.

Пусть в трехмерном аффинном пространстве даны две пересекающиеся плоскости α и β . Выберем точку O , не принадлежащую этим плоскостям, назовем ее *центром проекции*. На плоскости β возьмем точку A и проведем прямую OA . Предположим, что она не параллельна плоскости α . Обозначим через A' ее точку пересечения с плоскостью α . Точку A' будем называть *центральной проекцией точки A из центра O* (рис. 158). Построенное таким образом отображение точек плоскости β на точки плоскости α будем называть *центральной проекцией* и обозначать через Π_O .

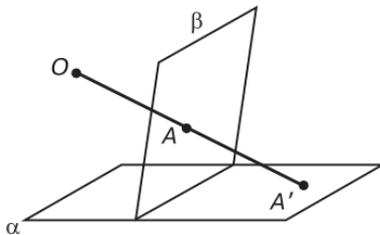


Рис. 158

Центральное проектирование обладает рядом свойств, отличных от изученных нами в части 1 свойств параллельного проектирования. Во-первых, не каждая точка плоскости β

имеет образ, и, во-вторых, не каждая точка плоскости α имеет прообраз. Проведем через центр проекции плоскости α' и β' , параллельные соответственно α и β . Обозначим через p и p' прямые пересечения плоскостей α' и β , α и β' (рис. 159). Тогда, если точка A плоскости β принадлежит прямой p , то прямая OA параллельна плоскости α , и точка A не имеет образа при центральном проектировании. Аналогично, если точка A' плоскости α лежит на прямой p' , то эта точка не имеет прообраза в плоскости β , так как прямая OA' параллельна β . Таким образом, центральное проектирование не отображает всю плоскость β на плоскость α , а является взаимно однозначным отображением плоскости β , из которой удалена прямая p ($\beta \setminus p$), на плоскость α , из которой удалена прямая p' ($\alpha \setminus p'$). Рассмотрим свойства центрального проектирования плоскости β без прямой p на плоскость α , из которой удалена прямая p' ; $\Pi_O: \beta \setminus p \rightarrow \alpha \setminus p'$.

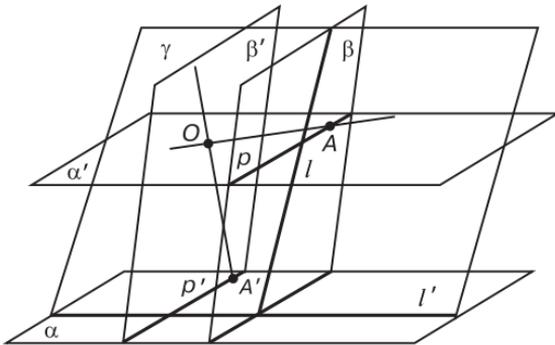


Рис. 159

1. Центральное проектирование Π_O отображает любую прямую l плоскости β , непараллельную прямой p , на прямую l' плоскости α .

Действительно, для построения образа l' прямой l достаточно через центр O и прямую l провести плоскость γ . Прямая l не параллельна прямой p , поэтому плоскость γ пересекается с плоскостью α по прямой l' — образом прямой l (рис. 159).

2. При центральном проектировании прямые плоскости β , пересекающиеся в точке прямой p , отображаются в параллельные прямые плоскости α .

Пусть m и n — прямые плоскости β , точка пересечения A которых принадлежит прямой p . Обозначим через γ и δ плоскости, проходящие через эти прямые и центр проекции O (рис. 160). Тогда прямая пересечения плоскостей γ и δ совпадает с прямой OA и параллельна плоскости α . Поэтому образы m' и n' прямых m и n параллельны прямой OA и, следовательно, они параллельны между собой.

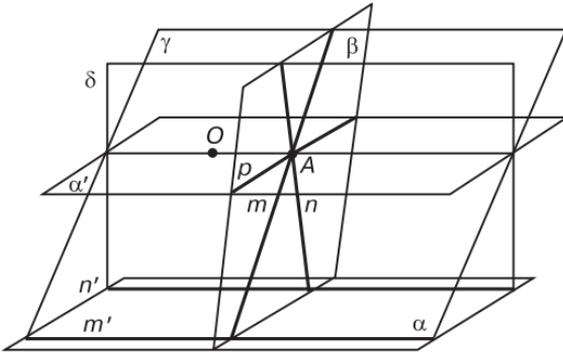


Рис. 160

3. При центральном проектировании параллельные прямые плоскости β , непараллельные прямой p , отображаются в пересекающиеся прямые плоскости α . Пусть s и t — параллельные прямые плоскости β , которые пересекают прямую p в точках P и Q , а прямую l пересечения плоскостей α и β соответственно в точках P_1 и Q_1 (рис. 161).

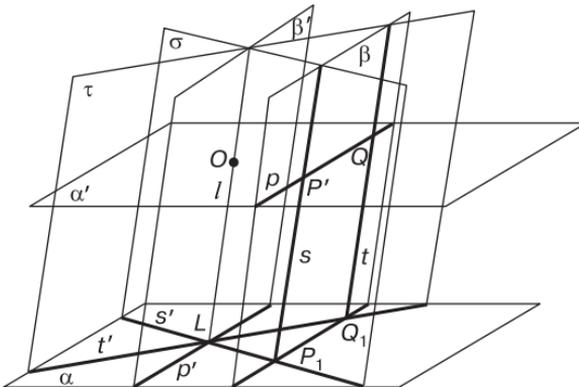


Рис. 161

Проведем через эти прямые и центр проекции O плоскости σ и τ . Прямые s' и t' пересечения плоскостей σ и τ с плоскостью α представляют собой центральные проекции рассматриваемых прямых на плоскость α . Плоскости σ и τ пересекаются по прямой l , проходящей через центр O и параллельной прямым s и t . Эта прямая пересекает прямую p' в точке L . Поэтому проекции s' и t' пересекаются в точке L .

4. При центральном проектировании отрезок может отображаться или в отрезок, или в луч, или в пару лучей. Перечисленные случаи зависят от того, имеет ли отрезок общие точки с прямой p . Рассмотрим отрезок AB , пересекающий прямую p в точке C (рис. 162). Он отображается в пару лучей h' и h'' . Остальные случаи рассмотрите самостоятельно.

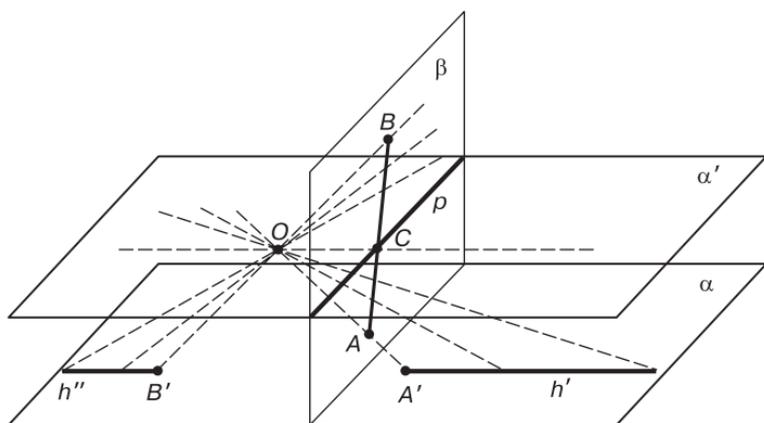


Рис. 162

5. При центральном проектировании, вообще говоря, не сохраняется простое отношение точек. Рассмотрим центральное проектирование прямой t на прямую t' из центра O . Выберем на прямой t такие три точки A , B и C , чтобы прямая OC была перпендикулярна t , а точка C служила серединой отрезка AB . (рис. 163). Тогда простое отношение (AB, C) равно 1. В силу того, что треугольник AOB равнобедренный, OC — биссектриса угла AOB . Пусть прямая t' не перпендикулярна OC . Тогда треугольник $A'O'B'$ не является равнобедренным, поэтому точка C' не

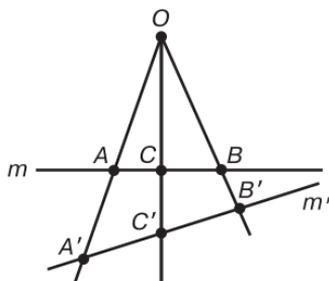


Рис. 163

совпадает с серединой отрезка $A'B'$. Отсюда следует, что $(A'B', C') \neq 1$.

Отметим также основное свойство точек и прямых, которое не изменяется при центральном проектировании: *коллинеарные точки отображаются в коллинеарные*.

Как мы видим, центральное проектирование обладает свойствами, которые существенно отличаются от свойств параллельного проектирования. Эти отличия связаны с тем, что центральное проектирование не является биективным отображением плоскости на плоскость. На плоскости β существует особая прямая p , точки которой не имеют образов, а на плоскости α существует прямая p' , точки которой не имеют прообразов. Но если мы будем считать, что всем параллельным между собой прямым соответствует одна, так называемая *несобственная* или *бесконечно удаленная* точка, а плоскость, дополненную несобственными точками, назовем *расширенной*, то центральное проектирование станет биективным отображением расширенной плоскости на расширенную плоскость. В самом деле, при таком соглашении точкам прямой p плоскости β будут соответствовать несобственные точки плоскости α . На рисунке 159 точке A соответствует несобственная точка плоскости α , соответствующая всем прямым пучка прямых, параллельных OA . И наоборот, прообразами точек прямой p' плоскости α служат несобственные точки плоскости β . На рисунке 161 прообразом точки L является несобственная точка плоскости β , соответствующая всем прямым пучка прямых, параллельных OL . Так как при центральном проектировании прямая должна преобразовываться в прямую, и так как точкам

прямой p плоскости β соответствуют несобственные точки плоскости α , то следует считать, что несобственные точки плоскости принадлежат одной, так называемой несобственной или бесконечно удаленной прямой. В последующем мы вернемся к понятию бесконечно удаленных точек плоскости, дадим им более четкое определение и изучим связанные с ними свойства.

Введение бесконечно удаленных точек позволило поставить изучение *проективных свойств* фигур плоскости, т. е. свойств, инвариантных при центральном проектировании, на четкую логическую основу. Потребность в их исследовании была актуальна. Она возникла в связи с тем, что человек воспринимает предметы окружающего мира с помощью их центрального проектирования на сетчатку глаза, центр которого находится в его хрусталике. Поэтому законы изображения пространственных объектов на плоскости рисунка или чертежа также должны подчиняться правилам центрального проектирования, центр которого совпадает с глазом художника. Описание правил построения пространственных тел на плоском чертеже можно найти в трудах античных ученых. Они изложены в «Десяти книгах об архитектуре» известного римского архитектора I века н. э. Витрувия, а также в трудах александрийского математика III века н. э. Паппа. Понятие бесконечно удаленной точки впервые в явном виде дано в труде «Оптическая часть астрономии» (1604) великого астронома и математика Иоганна Кеплера (1571–1630). Этому труду И. Кеплера предшествовали многочисленные сочинения по теории перспективы великих художников эпохи Возрождения. Важную роль в теории перспективы сыграли трактаты великих художников Леонардо да Винчи (1452–1519) и Альбрехта Дюрера (1471–1528).

Впервые систематическое исследование проективных преобразований было изложено в работах французского инженера, архитектора и геометра Жерара Дезарга (1591–1661). В своем труде «Черновой набросок подхода к явлениям, происходящим при встрече конуса с плоскостью» (1639) Дезарг дополняет плоскость бесконечно удаленной прямой, на которой расположены бесконечно удаленные точки, что позволяет ему рассматривать кривые второго порядка на плоскости, гиперболу и параболу, как замкнутые кривые,

соответственно пересекающие бесконечно удаленную прямую в двух точках и касающиеся ее. Дезарг рассматривал двойные отношения точек, которые впервые встречались в трудах Паппа, и проективные преобразования прямых, при которых эти двойные отношения инвариантны.

Интерес к синтетической проективной геометрии возродился в конце XVIII века после опубликования трактата «Начертательная геометрия» (1799) великого французского математика и деятеля Французской революции Гаспара Монжа (1746–1818). В нем были рассмотрены некоторые свойства центрального проектирования. Здесь же был доказан ряд теорем проективной геометрии, в частности утверждение о том, что касательные, проведенные из некоторой точки к поверхности второго порядка в пространстве, касаются этой поверхности в точках, расположенных в одной плоскости. Плоскость Монж назвал полярной по отношению к рассматриваемой точке, а точку — полюсом этой плоскости. Работы Монжа и других математиков по изучению проективных свойств фигур были продолжены уже упоминавшимся учеником Монжа, выпускником Высшей политехнической школы в Париже, французским математиком и инженером Жаном Виктором Понселе. Отметим интересный факт. Ж. В. Понселе как военный инженер Великой армии Наполеона Бонапарта принимал участие в войне Франции против России. В 1812 году во время отступления французской армии он был пленен русскими войсками в бою под селом Красным. Затем вместе с группой пленных французских офицеров был отправлен в г. Саратов. В этом городе, имея достаточно много свободного времени, Понселе разработал все основные положения своего будущего труда, трактата о проективных свойствах фигур, который был им опубликован в 1822 году в Париже после возвращения из русского плена. В трактате были четко сформулированы предмет проективной геометрии и методы исследования проективных свойств фигур. Этот трактат оказал большое влияние на развитие новой геометрической науки.

Последователи Понселе существенно развили теорию проективного пространства. Следует отметить работы Мориса Шаля (1793–1880) и Якоба Штейнера (1796–1863). Развивая синтетические методы изучения проективных свойств

фигур, Шаль, Штейнер и ряд других математиков достигли определенных успехов в усовершенствовании аппарата проективной геометрии и в применении его к различным геометрическим задачам. Однако же проективные методы исследования фигур у Штейнера и Шаля выглядели как часть элементарной геометрии, что приводило к серьезным трудностям, связанным с понятием бесконечно удаленных точек проективной плоскости. Обыкновенные и бесконечно удаленные точки в их рассуждениях не были равноправными, что противоречило свойствам центрального проектирования. Задача освобождения проективной геометрии от использования измерений отрезков и углов была решена немецким математиком Штаудом (1798–1876), который впервые разработал систему аксиом проективной геометрии. Его труды позволили превратить проективную геометрию в дисциплину, изучающую только свойства взаимного расположения геометрических образов. Проективная геометрия, освобожденная от метрики, превратилась в самостоятельную геометрическую дисциплину со своей аксиоматикой и собственной совокупностью основных объектов и отношений.

§ 30. АКСИОМЫ ВЕЙЛЯ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА. ПРЯМЫЕ НА ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ И ИХ СВОЙСТВА. МОДЕЛИ ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

В настоящем параграфе мы рассмотрим определение проективного пространства на основе аксиом Г. Вейля. Основными объектами назовем *ненулевые векторы* $(n+1)$ -мерного линейного векторного пространства V_{n+1} над полем \mathbb{R} вещественных чисел и элементы некоторого непустого множества P_n . Под основным отношением будем понимать отображение $\chi: V_{n+1} \setminus \{\vec{0}\} \rightarrow P_n$ множества всех ненулевых векторов пространства V_{n+1} на множество P_n .

Множество P_n называется *вещественным n -мерным проективным пространством*, а его элементы — *точками*, если основные объекты и основное отношение удовлетворяют следующим двум аксиомам Вейля:

Π_1 : Отображение χ является *сюръективным*, т. е. каждая точка пространства P_n имеет прообраз.

Π_2 : *Образы двух векторов совпадают тогда и только тогда, когда они коллинеарны.*

Отображение χ будем называть *базисным отображением*. Заметим, что из необходимого и достаточного условия коллинеарности двух векторов следует, что если $\chi(\vec{a}) = \chi(\vec{b})$, то существует такое ненулевое число λ , для которого $\vec{a} = \lambda\vec{b}$. Возникает естественный вопрос: *что является полным прообразом точки?* Ответ на него дает следующая теорема.

Теорема 1. *Полным прообразом точки пространства P_n при базисном отображении $\chi: V_{n+1} \setminus \{\vec{0}\} \rightarrow P_n$ является множество всех ненулевых векторов одномерного векторного подпространства пространства V_{n+1} . Двум различным точкам соответствуют различные одномерные векторные подпространства.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку A пространства P_n . В соответствии с аксиомой Π_1 существует такой ненулевой вектор \vec{a} линейного векторного пространства V_{n+1} , что $\chi(\vec{a}) = A$. Так как вектор \vec{a} отличен от нулевого, то множество всех векторов $V_1 = \{\lambda\vec{a}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ является одномерным векторным подпространством пространства V_{n+1} . Выберем произвольный ненулевой вектор \vec{b} , принадлежащий этому подпространству. Тогда существует число $\lambda_0 \neq 0$, что $\vec{b} = \lambda_0\vec{a}$. В соответствии с аксиомой Π_2 $\chi(\vec{b}) = A$. Поэтому ненулевые векторы подпространства V_1 принадлежат полному прообразу точки A . С другой стороны, в соответствии с аксиомой Π_2 ненулевые векторы, принадлежащие различным одномерным векторным подпространствам, не могут отображаться в одну и ту же точку. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что *базисное отображение χ устанавливает взаимно однозначное соответствие между одномерными векторными подпространствами пространства V_{n+1} без нулевого вектора и точками проективного пространства P_n .*

В дальнейшем мы будем изучать двумерное проективное пространство P_2 над полем \mathbb{R} действительных чисел, называемое *проективной плоскостью*. Условимся, не оговаривая особо, под вектором понимать ненулевой вектор пространства V_3 . Введем также следующее соглашение. Если $\chi(\vec{a}) = A$, то будем записывать $\vec{a}\chi A$ или $A\chi\vec{a}$. Аналогично,

если одномерное векторное подпространство $V_1 \setminus \{\vec{0}\}$ соответствует при отображении χ точке A , то будем записывать $V_1\chi A$, или $A\chi V_1$.

Линейное векторное пространство V_3 , помимо одномерных векторных подпространств, содержит также и двумерные векторные подпространства. Введем следующее определение.

Определение 1. *Прямой на проективной плоскости P_2 называется множество, состоящее из образов ненулевых векторов двумерного векторного подпространства пространства V_3 при базисном отображении χ .*

Прямые на проективной плоскости будем обозначать малыми латинскими буквами l, m, n , и т. д. Если двумерное векторное подпространство V_2 без нулевого вектора соответствует при базисном отображении χ прямой l , то будем использовать обозначения $V_2\chi l$ или $l\chi V_2$.

Рассмотрим свойства прямых на проективной плоскости.

Теорема 2. *Через любые две различные точки проходит единственная прямая.*

Доказательство. Рассмотрим две различные точки A и B проективной плоскости. В пространстве V_3 существуют такие векторы \vec{a} и \vec{b} , что $\vec{a}\chi A$, $\vec{b}\chi B$. Так как точки различны, векторы \vec{a} и \vec{b} неколлинеарные. Пусть V_2 двумерное векторное подпространство, базисом которого служат векторы \vec{a} и \vec{b} . Тогда $V_2 = \{\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}\}$, где α и β — произвольные вещественные числа, не равные нулю одновременно. Рассмотрим прямую l , соответствующую подпространству V_2 при базисном отображении χ : $l\chi V_2$. Так как векторы \vec{a} и \vec{b} принадлежат подпространству V_2 , точки A и B лежат на прямой l . Предположим, что существует еще одна прямая m , соответствующая некоторому подпространству W_2 , содержащая точки A и B . Тогда векторы \vec{a} и \vec{b} принадлежат подпространству W_2 . Так как эти векторы линейно независимы, то они образуют базис в W_2 . Следовательно, подпространства W_2 и V_2 совпадают друг с другом, поэтому прямые l и m также совпадают. Теорема доказана.

Доказанное свойство совпадает с аналогичным свойством точек и прямых на аффинной плоскости. Следующее же утверждение не имеет аналога в аффинной геометрии.

Теорема 3. Любые две различные прямые на проективной плоскости имеют единственную общую точку.

Доказательство. Рассмотрим две различные прямые l и m плоскости P_2 и соответствующие им двумерные векторные подпространства пространства $V_3: V_2\chi l, W_2\chi m$. Так как данные прямые различны, то подпространства V_2 и W_2 не совпадают. Но в трехмерном векторном пространстве любые два несовпадающих двумерных подпространства пересекаются по одномерному подпространству. Обозначим одномерное подпространство, общее для V_2 и W_2 , через V_1 и обозначим через A его образ при базисном отображении: $A\chi V_1$. Так как $V_1 \subset V_2$, то точка A принадлежит прямой l . Аналогично, $V_1 \subset W_2$, поэтому точка A принадлежит прямой m . Таким образом, данные прямые пересекаются в точке A . Предположим, что они имеют еще одну общую точку B , отличную от точки A . Но тогда, как следует из теоремы 2, существует единственная прямая, содержащая эти точки, что противоречит условию теоремы. Теорема доказана.

Как было отмечено в § 29, центральное проектирование одной аффинной плоскости на другую может переводить параллельные прямые в пересекающиеся, а пересекающиеся прямые в параллельные. В отличие от прямых на аффинной плоскости, на проективной плоскости нет «параллельных» прямых, любые две прямые пересекаются. Построенная конструкция позволит нам устранить трудности при изучении свойств центрального проектирования, отмеченные в предыдущем параграфе.

Перейдем к построению моделей или интерпретаций проективной плоскости. Как известно, под моделью или интерпретацией рассматриваемой системы аксиом мы понимаем конкретные объекты и отношения, которые удовлетворяют аксиомам системы. Существование модели системы аксиом доказывает ее непротиворечивость. Для построения модели системы аксиом Вейля проективной плоскости найдем конкретные множество P и отображение χ , удовлетворяющие аксиомам Π_1 и Π_2 .

Заметим, что одну из моделей проективной плоскости мы уже построили. Действительно, из теоремы 1 следует, что точки проективной плоскости P_2 находятся во взаимно

однозначном соответствии с одномерными векторными подпространствами линейного векторного пространства V_3 без нулевого вектора. Если под точками модели проективной плоскости понимать одномерные векторные подпространства V_3 без нулевого вектора, а под χ — отображение, которое каждому ненулевому вектору из V_3 ставит в соответствие одномерное векторное подпространство, для которого этот вектор является базисным, то точки и отображение χ будут удовлетворять аксиомам Вейля проективной плоскости (докажите это утверждение самостоятельно). Рассмотрим еще две модели проективной плоскости в трехмерном аффинном пространстве, которые будут необходимы нам при изучении проективных свойств фигур.

Связка прямых трехмерного аффинного пространства

Связкой прямых трехмерного аффинного пространства A_3 называется множество всех прямых, проходящих через одну точку O , называемую центром связки.

Связку прямых с центром в точке O обозначим через C_O . Пусть дана связка C_O прямых пространства A_3 . Обозначим через P_2 множество всех прямых связки: $P_2 = \{a : a \in C_O\}$. Поставим каждому ненулевому вектору линейного векторного пространства V_3 прямую A связки, для которой этот вектор является направляющим: $\vec{a}\chi A \Leftrightarrow \vec{a} \parallel A$. Определенное таким образом базисное отображение χ удовлетворяет аксиомам Π_1 и Π_2 проективной плоскости. Действительно, так как через точку O пространства A_3 можно провести прямую, параллельную любому ненулевому вектору, то отображение χ является сюръективным. Если двум векторам соответствует одна и та же прямая связки, то эти векторы являются направляющими векторами одной и той же прямой, т. е. они коллинеарны друг другу. Таким образом, связка прямых представляет собой модель проективной плоскости.

Выясним, как изображаются проективные прямые в этой модели. Рассмотрим произвольное двумерное подпространство V_2 пространства V_3 . Если мы отложим от центра связки O векторы подпространства V_2 , то их концы образуют плоскость, содержащую точку O . Поэтому *проективная*

прямая в построенной модели изображается прямыми связки, лежащими в одной плоскости. Так как через две прямые связки¹⁾ проходит единственная плоскость, то в построенной модели через две точки проходит единственная прямая.

Рассмотрим две прямые m и n связки S_O прямых и соответствующие им плоскости μ и ν (рис. 164). Эти плоскости в пространстве A_3 имеют общую точку O , поэтому они пересекаются по прямой l , проходящей через центр O . Эта прямая изображает точку L в рассматриваемой модели. Таким образом, любые две прямые в рассматриваемой модели имеют общую точку.

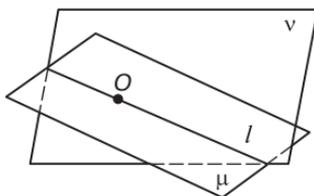


Рис. 164

Расширенная плоскость

Рассмотрим произвольную плоскость α трехмерного аффинного или евклидова пространства. Назовем *расширенной плоскостью* α_∞ множество, состоящее из всех точек плоскости α и одномерных векторных пространства без нулевых векторов этой плоскости. Точки плоскости α назовем *обыкновенным*, а одномерные векторные пространства — *бесконечно удаленными точками* расширенной плоскости. Обыкновенные точки будем обозначать большими латинскими буквами A, B, C, \dots , а бесконечно удаленные точки — также большими латинскими буквами, но снабженными индексом ∞ : $A_\infty, B_\infty, C_\infty, \dots$

Определим отображение χ ненулевых векторов трехмерного векторного пространства V_3 на множество α_∞ . Выберем произвольную точку O , не принадлежащую плоскости α (рис. 165). Рассмотрим ненулевой вектор пространства V_3 .

¹⁾Здесь и в дальнейшем, если выбраны две точки, прямые и т. д., то предполагается, что они различные.

Возможны два случая. В первом случае рассматриваемый вектор \vec{a} не параллелен плоскости α . Проведем через точку O прямую a с направляющим вектором \vec{a} . Она пересечет плоскость α в некоторой точке A . Будем считать, что в этом случае вектору \vec{a} соответствует обыкновенная точка A расширенной плоскости α_∞ . Во втором случае рассматриваемый вектор \vec{m} параллелен плоскости α . Так как он параллелен плоскости, то ему можно поставить в соответствие одномерное векторное подпространство, для которого он служит базисным, т. е. бесконечно удаленную точку из α_∞ .

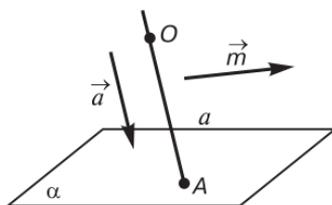


Рис. 165

Покажем, что введенное базисное отображение χ удовлетворяет аксиомам Π_1 и Π_2 проективной плоскости. Очевидно, χ является сюръективным отображением: любая точка как обыкновенная, так и бесконечно удаленная имеет прообраз. Требование аксиомы Π_1 выполнено. Рассмотрим два ненулевые коллинеарные вектора \vec{a} и \vec{b} пространства V_3 . В случае, когда они не параллельны плоскости α , прямые, проходящие через точку O и параллельные этим векторам, совпадают между собой. Поэтому они пересекают плоскость α в одной и той же обыкновенной точке. В случае, когда эти векторы параллельны плоскости α , они являются базисными векторами одного и того же одномерного векторного подпространства плоскости α и, следовательно, им соответствует одна и та же бесконечно удаленная точка. Предположим теперь, что $\chi(\vec{a}) = \chi(\vec{b})$. Если точка A , соответствующая данным векторам, обыкновенная, то векторы параллельны прямой OA , следовательно, они коллинеарные. Если же точка бесконечно удаленная, то векторы \vec{a} и \vec{b} принадлежат одному одномерному векторному подпространству плоскости α , поэтому они также коллинеарные. Требование аксиомы

Π_2 также выполнено. Таким образом, расширенная плоскость α_∞ представляет собой модель проективной плоскости.

Обозначим через W_2 множество всех векторов, параллельных плоскости α . Оно представляет собой двумерное векторное подпространство пространства V_3 . Рассмотрим произвольное двумерное векторное подпространство V_2 пространства V_3 . Возможны два случая. В первом случае векторные подпространства V_2 и W_2 различны. Отложим от точки O векторы подпространства V_2 , концы этих векторов будут составлять плоскость β , не параллельную плоскости α (рис. 166) и, следовательно, пересекающую плоскость α по прямой m , для которой множество ее направляющих векторов M_1 совпадает с пересечением подпространств V_2 и W_2 . Если ненулевой вектор подпространства V_2 не параллелен плоскости α , то ему соответствует обыкновенная точка модели, принадлежащая прямой m . На рисунке 166 векторы \vec{a} и \vec{b} не параллельны α и им соответствуют обыкновенные точки A и B . Если же вектор подпространства V_2 параллелен плоскости α , то он принадлежит одномерному подпространству M_1 прямой m (на рис. 166 прямая m' параллельна прямой m , $\vec{m} \in M_1$). В этом случае вектор подпространства V_2 соответствует бесконечно удаленной точке. Таким образом, если двумерное векторное подпространство V_2 без нулевого вектора не совпадает с множеством направляющих векторов плоскости α , то ему соответствует множество точек, расположенных на прямой плоскости α , дополненное одной бесконечно удаленной точкой, определяемой множеством направляющих векторов этой прямой. Такую прямую будем называть обыкновенной. В случае, когда подпространства V_2

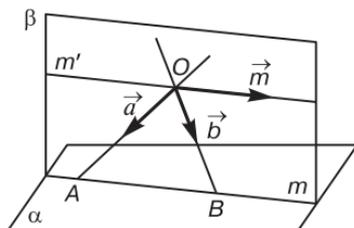


Рис. 166

и W_2 совпадают, любому вектору из V_2 соответствует бесконечно удаленная точка расширенной плоскости. Поэтому *все бесконечно удаленные точки принадлежат одной прямой*, которую будем называть *бесконечно удаленной*.

Рассмотрим на расширенной плоскости две прямые m и n , M_1 и N_1 — одномерные векторные подпространства векторов плоскости α , параллельных этим прямым. Если эти прямые обыкновенные и их векторные подпространства не совпадают, то прямые пересекаются в обыкновенной точке. Если векторные подпространства M_1 и N_1 совпадают, то прямые m и n параллельны на плоскости α . Они имеют общую бесконечно удаленную точку. Если одна из этих прямых, например m , бесконечно удаленная, то она пересекается с обыкновенной прямой n в ее бесконечно удаленной точке.

Пусть α и β — две плоскости трехмерного аффинного пространства, O — точка, им не принадлежащая. Дополняя эти плоскости бесконечно удаленными точками, получим две расширенные плоскости α_∞ и β_∞ . Проведем через точку O плоскости α' и β' , соответственно параллельные α и β , обозначим через m прямую пересечения плоскостей α' и β' , через n — прямую пересечения плоскостей α и β и через l — прямую пересечения плоскостей α' и β' (рис. 167). Выберем в плоскости β_∞ обыкновенную точку A , не принадлежащую прямой m . Проведем через точки A и O прямую OA . Так как $A \notin m$, то прямая OA пересекает плоскость α в точке A' . В этом случае поставим в соответствие обыкновенной

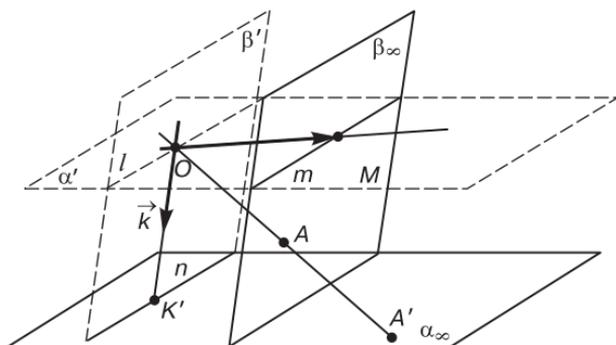


Рис. 167

точке A плоскости β_∞ обыкновенную точку A' плоскости α_∞ . Пусть обыкновенная точка M принадлежит прямой m . Тогда прямая OM параллельна плоскости β , вектор \overrightarrow{OM} является направляющим вектором плоскости α . Поставим в соответствие точке M бесконечно удаленную точку плоскости α_∞ , определяемую вектором \overrightarrow{OM} . Рассмотрим бесконечно удаленную точку K_∞ расширенной плоскости β_∞ , которая определяется одномерным векторным подпространством плоскости β , не совпадающим с векторным подпространством прямой m . Пусть вектор \vec{k} принадлежит этому подпространству. Проведем через точку O прямую с направляющим вектором \vec{k} . Эта прямая принадлежит плоскости β' и, так как вектор \vec{k} не параллелен прямой l , она пересекает прямую n в точке K' . Поставим в соответствие точке K_∞ расширенной плоскости β_∞ обыкновенную точку K' прямой n расширенной плоскости α_∞ . И, наконец, если бесконечно удаленная точка M_∞ расширенной плоскости β_∞ определяется векторным подпространством прямой m , в силу того, что прямая m параллельна плоскости α , то точка M_∞ принадлежит расширенной плоскости α_∞ . Поэтому точке M_∞ поставим в соответствие эту же точку M_∞ . Построенное отображение расширенной плоскости β_∞ на расширенную плоскость α_∞ называется *центральной проекцией расширенных плоскостей с центром в точке O* . Самостоятельно убедитесь в том, что это отображение является взаимно однозначным.

§ 31. КООРДИНАТЫ ТОЧЕК НА ПРОЕКТИВНЫХ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

В этом параграфе мы определим координаты точек проективных прямой и плоскости и рассмотрим их свойства. В результате мы получим эффективный инструмент для исследования свойств фигур проективной геометрии. Под системой координат понимается совокупность объектов геометрического пространства, с помощью которых каждому геометрическому объекту этого пространства ставится в соответствие алгебраический объект. Например, точке — ее координаты, прямой — уравнение и т. п. Поэтому система

координат на проективной плоскости может состоять только из ее точек и прямых.

Определение 1. Точки A_1, A_2, \dots, A_n проективной плоскости называются точками общего положения, если никакие три из них не лежат на одной прямой.

Определение 2. Репером или системой координат проективной плоскости называется ее упорядоченная четверка точек общего положения.

Репер R , составленный из точек A_1, A_2, A_3, E , будем записывать в виде $R = (A_1, A_2, A_3, E)$. Точки A_1, A_2, A_3, E будем называть базисными точками репера, точки A_1, A_2 и A_3 — вершинами, точку E — единичной точкой, а прямые $A_i A_j, EA_i, i \neq j$ — координатными прямыми репера. Так как базисные точки являются точками общего положения, никакие три из них не лежат на одной прямой. Свяжем с каждым репером проективной плоскости систему векторов пространства V_3 .

Определение 3. Система векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}$ пространства V_3 соответствует реперу $R = (A_1, A_2, A_3, E)$, если выполнены следующие условия:

$$\vec{e}_1 \chi A_1, \quad \vec{e}_2 \chi A_2, \quad \vec{e}_3 \chi A_3, \quad \vec{e} \chi E, \quad (1)$$

$$\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = \vec{e}. \quad (2)$$

В дальнейшем систему векторов, соответствующую реперу R , будем обозначать следующим образом: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e} \chi R$. Выясним, существует ли хотя бы одна система векторов, соответствующая данному реперу.

Теорема 1. Для каждого репера $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ существует система векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}$, ему соответствующая.

Доказательство. Выберем произвольные векторы $\vec{a}_1 \chi A_1, \vec{a}_2 \chi A_2, \vec{a}_3 \chi A_3, \vec{e} \chi E$. Точки A_1, A_2 и A_3 не лежат на одной прямой, поэтому векторы \vec{a}_1, \vec{a}_2 и \vec{a}_3 не принадлежат одному двумерному векторному подпространству, они линейно независимы и образуют базис в V_3 . Разложим вектор \vec{e} по векторам этого базиса:

$$\vec{e} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3. \quad (3)$$

Обозначим $\vec{e}_1 = \alpha_1 \vec{a}_1, \vec{e}_2 = \alpha_2 \vec{a}_2, \vec{e}_3 = \alpha_3 \vec{a}_3$. Так как векторы \vec{e}_i коллинеарны векторам \vec{a}_i ($i = 1, 2, 3$), то $\vec{e}_1 \chi A_1, \vec{e}_2 \chi A_2,$

$\vec{e}_3 \chi A_3$. Условие (1) выполнено. Условие (2) следует из равенства (3). Теорема доказана.

Из приведенного доказательства следует, что два различных вектора $\vec{e} \chi E$ и $\vec{e}' \chi E$ определяют две различные системы векторов, соответствующие реперу R . Таким образом, одному и тому же реперу соответствует бесконечно много систем векторов. Выясним, как они связаны между собой.

Определение 4. Две системы векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ и $\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \dots, \vec{a}'_n$ называются гомотетичными, если существует такое ненулевое число λ , что $\vec{a}_i = \lambda \vec{a}'_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Теорема 2. Две системы векторов соответствуют одному и тому же реперу в том и только в том случае, когда они гомотетичны.

Доказательство. Пусть даны две системы векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}$ и $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3, \vec{e}'$, соответствующих одному и тому же реперу $R = (A_1, A_2, A_3, E)$. Докажем, что существует такое число λ , для которого $\vec{e}'_1 = \lambda \vec{e}_1$, $\vec{e}'_2 = \lambda \vec{e}_2$, $\vec{e}'_3 = \lambda \vec{e}_3$ и $\vec{e}' = \lambda \vec{e}$. Так как $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e} \chi R$, $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3, \vec{e}' \chi R$, то в силу определения 3, $\vec{e}'_i \chi A_i$, $\vec{e}_i \chi A_i$ ($i = 1, 2, 3$), $\vec{e}' \chi E$, $\vec{e} \chi E$. Поэтому $\vec{e}'_1 = \lambda_1 \vec{e}_1$, $\vec{e}'_2 = \lambda_2 \vec{e}_2$, $\vec{e}'_3 = \lambda_3 \vec{e}_3$ и $\vec{e}' = \lambda \vec{e}$. Так как рассматриваемые векторы ненулевые, то $\lambda_i \neq 0$ ($i = 1, 2, 3$), $\lambda \neq 0$. Достаточно доказать, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$. Из равенства (2) следует, что $\vec{e}' = \vec{e}'_1 + \vec{e}'_2 + \vec{e}'_3$. Таким образом, $\lambda \vec{e} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3$, или $\vec{e} = \frac{\lambda_1}{\lambda} \vec{e}_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda} \vec{e}_2 + \frac{\lambda_3}{\lambda} \vec{e}_3$. С другой стороны, система векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}$ соответствует реперу R , поэтому из равенства (2) получим, что $\vec{e} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$. Мы построили два разложения вектора \vec{e} по векторам $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ образуют базис пространства V_3 , так как точки A_1, A_2, A_3 являются точками общего положения. В силу теоремы о единственности разложения вектора по векторам базиса, получим $\frac{\lambda_1}{\lambda} = \frac{\lambda_2}{\lambda} = \frac{\lambda_3}{\lambda} = 1$, откуда следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$. Данные системы векторов гомотетичны.

Докажем обратное утверждение. Пусть дана система векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}$, соответствующая реперу R , и пусть система векторов $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3, \vec{e}'$ гомотетична первой системе:

$$\vec{e}'_1 = \lambda \vec{e}_1, \quad \vec{e}'_2 = \lambda \vec{e}_2, \quad \vec{e}'_3 = \lambda \vec{e}_3, \quad \vec{e}' = \lambda \vec{e}. \quad (4)$$

Докажем, что система $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3, \vec{e}'$ также соответствует реперу R . Из равенств (4) следует, что $\vec{e}'_i \chi A_i, (i = 1, 2, 3), \vec{e}' \chi E$. Так как $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e} \chi R$, то $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = \vec{e}$. Тогда $\lambda \vec{e}_1 + \lambda \vec{e}_2 + \lambda \vec{e}_3 = \lambda \vec{e}$ и в силу равенств (4) $\vec{e}'_1 + \vec{e}'_2 + \vec{e}'_3 = \vec{e}'$. Условия (1) и (2) определения 3 выполнены, система векторов $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3, \vec{e}'$ соответствует реперу R . Теорема доказана.

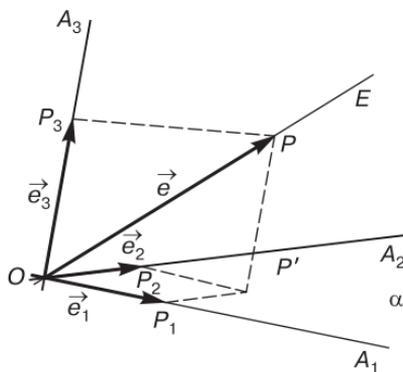


Рис. 168

Проиллюстрируем теорему 2 на связке прямых трехмерного аффинного пространства как на модели проективной плоскости. Пусть центр связки расположен в точке O . Так как точки в этой модели изображаются прямыми связки, то репер $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ состоит из четырех прямых, никакие три из которых не лежат в одной плоскости (рис. 168). Вектор тогда и только тогда соответствует при отображении χ точке этой модели, т. е. прямой связки, когда он является направляющим вектором этой прямой. Поэтому надо выбрать векторы \vec{e}_1, \vec{e}_2 и \vec{e}_3 — направляющие векторы соответственно прямых A_1, A_2 и A_3 — так, чтобы их сумма была направляющим вектором прямой E . Для этого на прямой E выберем точку P , обозначим через \vec{e} вектор \overrightarrow{OP} , проведем через точку P прямую, параллельную прямой A_3 . Так как прямая A_3 не параллельна плоскости α , проходящей через центр O , то она пересекает эту плоскость в некоторой точке P' . Через эту точку в плоскости α проведем прямые, параллельные A_1 и A_2 , и обозначим их пересечения соответственно с прямыми A_2 и A_1 через P_2

и P_1 . Через точку P проведем прямую, параллельную прямой OP' , ее точку пересечения с прямой A_3 обозначим через P_3 . Векторы $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OP_1}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OP_2}$ и $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OP_3}$ параллельны прямым A_1 , A_2 и A_3 и, в силу построения, $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = \vec{e}$. Таким образом, \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3 , $\vec{e}\chi R$. Если мы выберем другой направляющий вектор \vec{e}' прямой E , построим указанным способом векторы \vec{e}'_1 , \vec{e}'_2 , \vec{e}'_3 , то системы векторов \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3 , \vec{e} и \vec{e}'_1 , \vec{e}'_2 , \vec{e}'_3 , \vec{e}' будут гомотетичны. Убедитесь в этом самостоятельно.

Введем понятие координат точек проективной плоскости. Пусть даны репер $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ и произвольная точка M проективной плоскости. Выберем вектор \vec{m} и четверку векторов \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3 , \vec{e} , соответствующие точке M и реперу R при отображении χ . Так как базисные точки A_1 , A_2 и A_3 не лежат на одной прямой, то векторы \vec{e}_1 , \vec{e}_2 и \vec{e}_3 , им соответствующие, образуют базис пространства V_3 . Разложим по ним вектор \vec{m} : $\vec{m} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$.

Определение 5. Координатами точки M относительно репера $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ называются коэффициенты x_1 , x_2 и x_3 разложения вектора \vec{m} , представляющего точку M , по векторам \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3 .

Точку M с координатами x_1 , x_2 и x_3 будем обозначать $M(x_1 : x_2 : x_3)$.

Так как точка M представляется любым ненулевым вектором, коллинарным вектору \vec{m} , то из определения 5 следует, что ее координаты представляют собой ненулевую тройку чисел, которые определяются неоднозначно. Действительно, вектор \vec{m} выбирается с точностью до ненулевого числового множителя, базис \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3 выбирается с точностью до гомотетичности. Поэтому следует выяснить степень произвола в определении координат точек. Условимся о следующем. Пусть даны две тройки чисел $(x_1 : x_2 : x_3)$ и $(x'_1 : x'_2 : x'_3)$. Будем называть их пропорциональными, если существует такое ненулевое число λ , для которого

$$x'_1 = \lambda x_1, \quad x'_2 = \lambda x_2, \quad x'_3 = \lambda x_3. \quad (5)$$

Теорема 3. Две тройки чисел $(x_1 : x_2 : x_3)$ и $(x'_1 : x'_2 : x'_3)$ тогда и только тогда будут являться координатами одной и той же точки M относительно репера $R = (A_1, A_2, A_3, E)$, когда они пропорциональны.

Доказательство. Пусть даны две тройки точек $(x_1 : x_2 : x_3)$ и $(x'_1 : x'_2 : x'_3)$, которые являются координатами одной и той же точки M относительно данного репера R . Требуется доказать, что они пропорциональны. В силу определения 5, существуют такой вектор \vec{m} , соответствующий точке M при отображении χ , и такая четверка векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}$, соответствующая реперу R , что $\vec{m} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$. С другой стороны, тройка чисел $(x'_1 : x'_2 : x'_3)$ также служит координатами точки M . Поэтому существуют такие вектор \vec{m}' и четверка векторов $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3, \vec{e}'$, что $\vec{m}'\chi M$, $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3, \vec{e}'\chi R$ и $\vec{m}' = x'_1\vec{e}'_1 + x'_2\vec{e}'_2 + x'_3\vec{e}'_3$. Так как векторы \vec{m} и \vec{m}' соответствуют одной и той же точке M , то они коллинеарны: $\vec{m}' = \mu\vec{m}$, $\mu \neq 0$. Четверки векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}$ и $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3, \vec{e}'$ соответствуют одному и тому же реперу R , поэтому они гомотетичны: $\vec{e}'_1 = \lambda\vec{e}_1$, $\vec{e}'_2 = \lambda\vec{e}_2$, $\vec{e}'_3 = \lambda\vec{e}_3$, $\lambda \neq 0$. Отсюда следует, что

$$\vec{m}' = x'_1\vec{e}'_1 + x'_2\vec{e}'_2 + x'_3\vec{e}'_3 = \lambda x'_1\vec{e}_1 + \lambda x'_2\vec{e}_2 + \lambda x'_3\vec{e}_3.$$

Из равенства $\vec{m}' = \mu\vec{m}$ получим $\vec{m}' = \mu\vec{m} = \mu x_1\vec{e}_1 + \mu x_2\vec{e}_2 + \mu x_3\vec{e}_3$. Так как система векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ образует базис, из теоремы о единственности разложения вектора по векторам базиса следует, что $\lambda x'_1 = \mu x_1$, $\lambda x'_2 = \mu x_2$, $\lambda x'_3 = \mu x_3$. Числа λ и μ отличны от нуля, поэтому тройка чисел $(x_1 : x_2 : x_3)$ и $(x'_1 : x'_2 : x'_3)$ пропорциональны.

Докажем обратное утверждение. Пусть даны координаты $(x_1 : x_2 : x_3)$ точки M относительно репера R и тройка чисел $(x'_1 : x'_2 : x'_3)$, пропорциональная координатам точки M . Требуется доказать, что тройка чисел $(x'_1 : x'_2 : x'_3)$ также является координатами точки M . Так как $(x_1 : x_2 : x_3)$ — координаты точки M , то, в силу определения 5, существуют такая четверка векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}$, соответствующая реперу R , и такой вектор \vec{m} , соответствующий точке M при отображении χ , что $\vec{m} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$. Рассмотрим вектор $\vec{m}' = \lambda\vec{m}$. Так как векторы \vec{m} и \vec{m}' коллинеарны, то $\vec{m}'\chi M$. Координаты вектора \vec{m}' относительно базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ равны $\{\lambda x_1 : \lambda x_2 : \lambda x_3\}$, поэтому тройка $(x'_1 : x'_2 : x'_3)$ является координатами точки M в репере R . Теорема доказана.

Докажем утверждение, которое в дальнейшем будет нами часто использоваться.

Лемма 1. Пусть даны репер R , четверка векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}$, соответствующая R , и точка M , координаты которой в репере R равны $(m_1 : m_2 : m_3)$. Тогда вектор

$\vec{m} = m_1\vec{e}_1 + m_2\vec{e}_2 + m_3\vec{e}_3$ соответствует точке M при базисном отображении χ .

Доказательство. Нам даны координаты $(m_1 : m_2 : m_3)$ точки M относительно репера R , поэтому существует такой вектор \vec{m}' , что $\vec{m}'\chi M$, а также существует четверка векторов $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3, \vec{e}'\chi R$ и выполняется равенство $\vec{m}' = m_1\vec{e}'_1 + m_2\vec{e}'_2 + m_3\vec{e}'_3$. Так как четверки векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}$ и $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3, \vec{e}'$ соответствуют одному и тому же реперу, то, в силу теоремы 2, они гомотетичны: $\vec{e}'_1 = \lambda\vec{e}_1, \vec{e}'_2 = \lambda\vec{e}_2, \vec{e}'_3 = \lambda\vec{e}_3, \lambda \neq 0$. Поэтому

$$\vec{m}' = m_1\vec{e}'_1 + m_2\vec{e}'_2 + m_3\vec{e}'_3 = \lambda m_1\vec{e}_1 + \lambda m_2\vec{e}_2 + \lambda m_3\vec{e}_3 = \lambda\vec{m}.$$

Векторы \vec{m} и \vec{m}' коллинеарны и, следовательно, $\vec{m}\chi M$. Лемма доказана.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу. Пусть дан репер $R = (A_1, A_2, A_3, E)$. Требуется определить координаты его базисных и единичной точек. Выберем четверку векторов, соответствующих реперу R : $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}\chi R$. Из определения 3 следует, что $\vec{e}_1\chi A_1, \vec{e}_2\chi A_2, \vec{e}_3\chi A_3, \vec{e}\chi E$ и $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = \vec{e}$. Поэтому координаты точки A_1 совпадают с координатами вектора \vec{e}_1 относительно базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, т. е. равны $(1 : 0 : 0)$. Аналогично, координаты точек A_2 и A_3 имеют вид $A_2(0 : 1 : 0)$ и $A_3(0 : 0 : 1)$. Координаты точки E равны координатам вектора \vec{e} в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Из равенства (1) следует, что $E(1 : 1 : 1)$.

Так как проективная прямая является одномерным проективным пространством, то определение координат точек проективной прямой совершенно аналогично определению координат точек проективной плоскости.

Определение 6. Системой координат или репером на проективной прямой называется упорядоченная тройка точек, принадлежащих этой прямой.

Репер R , составленный из точек A_1, A_2, E , будем обозначать в виде $R = (A_1, A_2, E)$. Точки A_1 и A_2 называются вершинами репера, точка E — единичной. С каждым репером связывается тройка векторов пространства V_2 , соответствующего рассматриваемой прямой.

Определение 7. Система векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}$ пространства V_2 соответствует реперу $R = (A_1, A_2, E)$, если выполнены следующие условия: $\vec{e}_1\chi A_1, \vec{e}_2\chi A_2, \vec{e}\chi E, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \vec{e}$.

Систему векторов, соответствующую реперу R , будем обозначать $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_\chi R$. Так же, как и в случае плоскости, доказывается, что для любого репера существует тройка векторов, ему соответствующая, и две тройки векторов соответствуют одному реперу тогда и только тогда, когда они гомотетичны. Аналогично определяются координаты точки прямой. Пусть на проективной прямой даны репер $R = (A_1, A_2, E)$ и произвольная точка M . Выберем произвольные вектор \vec{m} , соответствующий точке M при отображении χ , и тройку векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}$, соответствующую реперу R . Так как вершины репера различны, то векторы \vec{e}_1 и \vec{e}_2 образуют базис подпространства V_2 . Координаты $(x_1 : x_2)$ точки M по определению совпадают с координатам вектора \vec{m} в базисе \vec{e}_1, \vec{e}_2 : $\vec{m} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$. Две тройки чисел тогда и только тогда служат координатами одной и той же точки относительно одного и того же репера, когда они пропорциональны. Доказательства этих утверждений проведите самостоятельно.

§ 32. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ ТОЧЕК ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ НА ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ. ОДНОРОДНЫЕ И НЕОДНОРОДНЫЕ КООРДИНАТЫ ТОЧЕК РАСШИРЕННОЙ ПЛОСКОСТИ

При изучении геометрии проективной плоскости координатным методом необходимо выяснить, как связаны друг с другом координаты одной и той же точки относительно двух различных систем координат. Аналогичную задачу мы решали в случае линейных векторных, аффинных и евклидовых пространств.

Напомним, как решалась такая задача в пространстве V_3 . Пусть в пространстве V_3 заданы два базиса $I: \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ и $II: \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$, причем координаты векторов второго базиса относительно первого имеют вид $\vec{e}_1\{c_{11}; c_{21}; c_{31}\}_I, \vec{e}_2\{c_{12}; c_{22}; c_{32}\}_I, \vec{e}_3\{c_{13}; c_{23}; c_{33}\}_I$. Тогда, если вектор \vec{m} имеет координаты $\{m_1, m_2, m_3\}_I$ относительно первого базиса и координаты $\{m'_1, m'_2, m'_3\}_{II}$ относительно второго, то

$$\begin{cases} m_1 = c_{11}m'_1 + c_{12}m'_2 + c_{13}m'_3, \\ m_2 = c_{21}m'_1 + c_{22}m'_2 + c_{23}m'_3, \\ m_3 = c_{31}m'_1 + c_{32}m'_2 + c_{33}m'_3. \end{cases} \quad (1)$$

Определитель матрицы $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$, называемой *матрицей перехода* от первого базиса ко второму, отличен от нуля, так как ее столбцы представляют собой координаты линейно независимых векторов $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$.

Рассмотрим аналогичную задачу на проективной плоскости. Пусть на проективной плоскости заданы два репера $R(A_1, A_2, A_3, E)$ и $R'(A'_1, A'_2, A'_3, E')$, и пусть известны координаты точек второго репера относительно первого: $A'_1(a_{11} : a_{21} : a_{31})$, $A'_2(a_{12} : a_{22} : a_{32})$, $A'_3(a_{13} : a_{23} : a_{33})$, $E'(a_{10} : a_{20} : a_{30})$. Найдем соотношения, выражающие координаты $(x_1 : x_2 : x_3)_I$ точки M относительно репера R через координаты $(x'_1 : x'_2 : x'_3)_{II}$ той же точки M относительно репера R' .

Решим эту задачу по аналогии с предыдущей. Назовем матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{20} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{30} \end{pmatrix} \tag{2}$$

матрицей перехода от репера R к реперу R' . Определитель матрицы

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{3}$$

отличен от нуля, так как базисные точки A'_1, A'_2 и A'_3 репера R' не лежат на одной прямой.

Выберем четверку векторов $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3, \vec{e}'$, соответствующую реперу R . Рассмотрим векторы \vec{a}_1, \vec{a}_2 и \vec{a}_3 , координаты которых в базисе $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ равны $\vec{a}_1\{a_{11} : a_{21} : a_{31}\}$, $\vec{a}_2\{a_{12} : a_{22} : a_{32}\}$, $\vec{a}_3\{a_{13} : a_{23} : a_{33}\}$. Рассмотрим также вектор \vec{e}' с координатами $\vec{e}'\{a_{10} : a_{20} : a_{30}\}$. Так как координаты векторов a_i ($i = 1, 2, 3$) и \vec{e}' являются координатами точек A'_i и E' , то в силу леммы 1 предыдущего параграфа $\vec{a}_1\chi A'_1$, $\vec{a}_2\chi A'_2$, $\vec{a}_3\chi A'_3$ и $\vec{e}'\chi E'$ и, следовательно, векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{e}'$ удовлетворяют требованию (1) определения 3 § 31 соответствия четверки векторов реперу. Найдем такие числа k_1, k_2 и k_3 , чтобы векторы $\vec{e}'_1 = k_1\vec{a}_1$, $\vec{e}'_2 = k_2\vec{a}_2$, $\vec{e}'_3 = k_3\vec{a}_3$ удовлетворяли условию (2) указанного определения. Для этого

достаточно потребовать, чтобы

$$k_1 \vec{a}_1 + k_2 \vec{a}_2 + k_3 \vec{a}_3 = \vec{e}'. \quad (4)$$

Равенство (4) в координатах имеет вид

$$\begin{cases} a_{10} = k_1 a_{11} + k_2 a_{12} + k_3 a_{13}, \\ a_{20} = k_1 a_{21} + k_2 a_{22} + k_3 a_{23}, \\ a_{30} = k_1 a_{31} + k_2 a_{32} + k_3 a_{33}. \end{cases} \quad (5)$$

Таким образом, искомые числа k_1 , k_2 и k_3 являются решением системы линейных уравнений (5). Она имеет единственное решение, так как определитель (3) отличен от нуля. Мы построили четверку векторов \vec{e}'_1 , \vec{e}'_2 , \vec{e}'_3 , \vec{e}' , соответствующую реперу R' , при этом координаты векторов базиса \vec{e}'_1 , \vec{e}'_2 , \vec{e}'_3 в базисе \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3 равны

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 \{k_1 a_{11} : k_1 a_{21} : k_1 a_{31}\}, \quad \vec{e}'_2 \{k_2 a_{12} : k_2 a_{22} : k_2 a_{32}\}, \\ \vec{e}'_3 \{k_3 a_{13} : k_3 a_{23} : k_3 a_{33}\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим точку M , координаты которой относительно реперов R и R' соответственно равны $(x_1 : x_2 : x_3)_I$ и $(x'_1 : x'_2 : x'_3)_{II}$. Воспользуемся леммой 1 § 31 и выберем вектор \vec{m} , соответствующий точке M при отображении χ , который в базисе \vec{e}'_1 , \vec{e}'_2 , \vec{e}'_3 имеет координаты $\{x'_1 : x'_2 : x'_3\}_{II}$. Так как $\vec{m} \chi M$, \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3 , $\vec{e} \chi R$ и координаты точки M в репере R равны $(x_1 : x_2 : x_3)_I$, то вектор \vec{m} имеет в базисе \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3 координаты $\{\rho x_1 : \rho x_2 : \rho x_3\}_I$. Таким образом, мы нашли координаты одного и того же вектора \vec{m} относительно двух базисов \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3 и \vec{e}'_1 , \vec{e}'_2 , \vec{e}'_3 . Кроме того, нам даны координаты векторов второго базиса относительно первого. Поэтому мы можем воспользоваться формулами перехода (1) от одного базиса к другому в векторном пространстве V_3 . Подставляя в них координаты векторов \vec{m} и \vec{e}'_1 , \vec{e}'_2 , \vec{e}'_3 , получим искомые соотношения:

$$\begin{cases} \rho x_1 = k_1 a_{11} x'_1 + k_2 a_{12} x'_2 + k_3 a_{13} x'_3, \\ \rho x_2 = k_1 a_{21} x'_1 + k_2 a_{22} x'_2 + k_3 a_{23} x'_3, \\ \rho x_3 = k_1 a_{31} x'_1 + k_2 a_{32} x'_2 + k_3 a_{33} x'_3. \end{cases} \quad (7)$$

Полученные соотношения называются *формулами перехода от репера R к реперу R' на проективной плоскости*.

Определив координаты точек на проективной плоскости, мы получили возможность находить уравнения линий и изучать их свойства с помощью этих уравнений. Простейшей линией на проективной плоскости является прямая.

Выберем на проективной плоскости репер R и четверку векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}$, соответствующую этому реперу.

Рассмотрим следующую задачу. *Даны координаты трех точек $A(a_1 : a_2 : a_3)$, $B(b_1 : b_2 : b_3)$, $C(c_1 : c_2 : c_3)$. Требуется найти необходимое и достаточное условие принадлежности этих точек одной прямой.*

Рассмотрим три вектора, координаты которых в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ имеют вид $\vec{a}\{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b}\{b_1, b_2, b_3\}$, $\vec{c}\{c_1 : c_2 : c_3\}$. Из леммы 1 предыдущего параграфа следует, что $\vec{a}\chi A$, $\vec{b}\chi B$, $\vec{c}\chi C$. Точки A , B и C принадлежат одной прямой в том и только в том случае, когда векторы \vec{a} , \vec{b} , и \vec{c} принадлежат одному двумерному векторному подпространству и, следовательно, они линейно зависимы, т. е. тогда и только тогда, когда определитель матрицы, составленный из координат этих векторов, равен нулю. Таким образом, точки A , B и C принадлежат одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

Равенство (8) называется *условием коллинеарности трех точек проективной плоскости в координатах*.

Используем это условие для составления уравнения прямой AB , проходящей через две различные точки $A(a_1 : a_2 : a_3)$ и $B(b_1 : b_2 : b_3)$. Точка $X(x_1 : x_2 : x_3)$ принадлежит прямой AB тогда и только тогда, когда точки X , A и B — коллинеарные. Поэтому их координаты удовлетворяют условию (8), которое здесь имеет вид

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (9)$$

Таким образом, точка X тогда и только тогда принадлежит прямой AB , когда ее координаты являются решением уравнения (9). Уравнение (9) является уравнением прямой AB на проективной плоскости.

Преобразуем полученное уравнение к более удобному виду:

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} x_3 = 0.$$

Заметим, что числа

$$u_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad u_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \quad u_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

удовлетворяют условию

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \neq 0. \quad (10)$$

Действительно, если все они равны нулю, то тройки чисел (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3) пропорциональны, откуда следует, что точки A и B совпадают, что противоречит начальному условию. Таким образом, уравнение (9) прямой AB можно записать в виде линейного однородного уравнения:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0. \quad (11)$$

Теорема 1. *Линия на плоскости тогда и только тогда является прямой, когда ее уравнение можно записать в виде линейного однородного уравнения с тремя неизвестными.*

Доказательство. Необходимость указанного в теореме условия была доказана. Действительно, если на плоскости дана некоторая прямая, то, выбрав на ней две точки, мы запишем уравнение этой прямой в виде (9), которое преобразуется к виду (11). Обратно, пусть на плоскости дана некоторая фигура γ , уравнение которой имеет вид (11), причем коэффициенты удовлетворяют неравенству (10). Среди них по крайней мере один отличен от нуля. Будем считать, что $u_1 \neq 0$. Рассмотрим две точки $A(-u_2 : u_1 : 0)$ и $B(-u_3 : 0 : u_1)$. Координаты этих точек непропорциональны, поэтому они различны. Составим уравнение прямой AB

по формуле (9):
$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -u_2 & u_1 & 0 \\ -u_3 & 0 & u_1 \end{vmatrix} = 0.$$
 Упростим его, раскрыв

определитель по первой строке: $u_1^2 x_1 + u_2 u_1 x_2 + u_3 u_1 x_3 = 0$. Разделим правую и левую часть полученного уравнения на ненулевой множитель u_1 , получим уравнение (11). Оно же служит уравнением прямой AB . Поэтому линия γ представляет собой прямую. Если $u_1 = 0$, то $u_2 \neq 0$, либо $u_3 \neq 0$. В этом случае следует выбрать точки с координатами $A(1 : -u_3 : u_2)$ и $B(2 : -u_3 : u_2)$, и провести аналогичные рассуждения (проведите их самостоятельно). Теорема доказана.

Уравнение (11) называется *общим уравнением прямой на проективной плоскости*. Коэффициенты u_1 , u_2 и u_3 этого уравнения называются *координатами прямой*. Так как уравнение (11) однородное, то координаты прямой, как и координаты точек, определяются с точностью до ненулевого сомножителя.

Введем следующее определение.

Определение 1. *Пучком прямых называется множество всех прямых, проходящих через одну точку, называемую центром пучка.*

Рассмотрим следующую задачу. Пусть на плоскости заданы три прямые общими уравнениями

$$\begin{aligned} u: u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0, \quad v: v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 = 0, \\ w: w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 = 0. \end{aligned}$$

Требуется найти необходимое и достаточное условие принадлежности данных прямых одному пучку.

Данные прямые принадлежат одному пучку в том и только в том случае, когда прямая w содержит точку пересечения прямых u и v . Если точка $M(x_1 : x_2 : x_3)$ является точкой пересечения прямых u и v , то ее координаты удовлетворяют уравнениям этих прямых, т. е. являются решением системы двух линейных однородных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0, \\ v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Эта система имеет бесконечно много решений. Так как прямые u и v различные, то коэффициенты уравнений системы (12) непропорциональны. Поэтому решения этой системы представляют собой пропорциональные тройки чисел, координаты точки M . Фундаментальное решение системы (12) имеет вид

$$x_1 = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \quad x_2 = \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \quad x_3 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}.$$

Действительно, в силу непропорциональности координат прямых u и v числа x_1 , x_2 и x_3 не равны нулю одновременно.

менно, и

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = \\ = u_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} + u_2 \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Аналогично проверяется, что $v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 = 0$. Подставив координаты найденной точки в уравнение прямой w , получим условие принадлежности трех прямых одному пучку:

$$w_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} + w_2 \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} + w_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Левая часть полученного равенства преобразуется к виду

$$w_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} + w_2 \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} + w_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Поэтому условие принадлежности трех прямых одному пучку можно записать так:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (13)$$

Обратное утверждение: если координаты трех прямых

$$u : u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0, \quad v : v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 = 0, \\ w : w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 = 0$$

удовлетворяют условию (13), то эти прямые принадлежат одному пучку, докажете самостоятельно.

Условие (8) принадлежности трех точек одной прямой и условие (13) принадлежности трех прямых одному пучку совершенно аналогичны: *три точки (прямые) принадлежат одной прямой (одному пучку) тогда и только тогда, когда определитель матрицы, составленный из координат этих точек (прямых), равен нулю*. Такое совпадение неслучайно. Оно связано с так называемым принципом двойственности на проективной плоскости. С ним мы познакомимся позже.

В § 30 мы рассмотрели одну из моделей проективной плоскости — расширенную плоскость. Ее обыкновенные точки образуют аффинную плоскость, на которой можно ввести

аффинную систему координат. Выясним, как связаны между собой аффинные и проективные координаты точек этой модели.

Рассмотрим расширенную плоскость α_∞ , обыкновенные точки которой образуют аффинную плоскость α . Зададим на плоскости α аффинную систему координат O, \vec{e}_1, \vec{e}_2 . Тогда любой обыкновенной точке A соответствует упорядоченная пара чисел $(x; y)$, совпадающая с координатами радиус-вектора \vec{OA} этой точки в базисе \vec{e}_1 и \vec{e}_2 : $\vec{OA} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$. Координаты x и y будем называть *неоднородными координатами точки A расширенной плоскости*, а систему координат O, \vec{e}_1, \vec{e}_2 — *неоднородной системой координат*.

Свяжем с неоднородной системой координат O, \vec{e}_1, \vec{e}_2 проективный репер $R = (O_{1\infty}, O_{2\infty}, O, E)$ расширенной плоскости, где вершина $O_{1\infty}$ является бесконечно удаленной точкой, определяемой одномерным векторным подпространством плоскости α , базис которого составляет вектор \vec{e}_1 . Аналогично, вершина $O_{2\infty}$ — бесконечно удаленная точка, определяемая вектором \vec{e}_2 , вершина O совпадает с обыкновенной точкой, началом неоднородной системы координат, и, наконец, вершина E — обыкновенная точка расширенной плоскости, неоднородные координаты которой равны $E(1; 1)$. Построенный таким образом репер R будем называть *однородной системой координат на расширенной плоскости, соответствующей выбранной неоднородной системе*. Если неоднородные координаты можно определить только для обыкновенных точек, то однородные координаты имеют все точки расширенной плоскости.

Установим зависимость между неоднородными и однородными координатами обыкновенных точек на расширенной плоскости. Пусть базисное отображение χ векторов трехмерного линейного векторного пространства V_3 на точки расширенной плоскости α_∞ устанавливается с помощью точки Q трехмерного аффинного пространства A_3 (см. § 30). Найдем четверку векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}$, соответствующую реперу R . Так как бесконечно удаленная точка $O_{1\infty}$ определяется одномерным векторным подпространством с базисным вектором \vec{e}_1 , то $\vec{e}_1\chi O_{1\infty}$. Аналогично, $\vec{e}_2\chi O_{2\infty}$. Как следует из определения базисного отображения (см. § 30), $\vec{e}_3 = \vec{QO}\chi O$, $\vec{e} = \vec{QE}\chi E$ (рис. 169). Таким образом, для данных векто-

ров выполнено условие (1) § 31 определения четверки векторов, соответствующей реперу R . Проверим выполнение условия (2) этого определения. Так как неоднородные координаты точки E равны $E(1 : 1)$, то $\vec{OE} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$. Поэтому $\vec{e} = \vec{QE} = \vec{QO} + \vec{OE} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, что совпадает с условием (2) указанного определения. Мы доказали, что $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e} \chi R$.

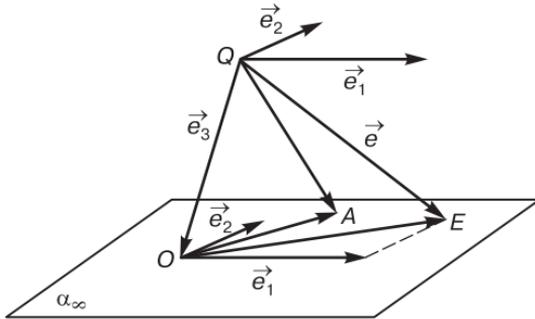


Рис. 169

Рассмотрим произвольную обыкновенную точку A расширенной плоскости, координаты которой в неоднородной системе координат O, \vec{e}_1, \vec{e}_2 равны x и y : $\vec{OA} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$, а в однородной системе $R = (O_{1\infty}, O_{2\infty}, O, E)$ равны x_1, x_2 и x_3 . При базисном отображении χ точке A расширенной плоскости соответствует вектор \vec{QA} . Разложим его по векторам $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$:

$$\vec{QA} = \vec{QO} + \vec{OA} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

Значит, координаты точки A в однородной системе координат $R = (O_{1\infty}, O_{2\infty}, O, E)$ равны $A(x : y : 1)$. Поэтому тройки чисел $(x : y : 1)$ и $(x_1 : x_2 : x_3)$ пропорциональны, и $x_3 \neq 0$. Таким образом, зависимость между однородными и неоднородными координатами обыкновенной точки расширенной плоскости имеет вид

$$\begin{cases} x = \frac{x_1}{x_3}, \\ y = \frac{x_2}{x_3}. \end{cases} \tag{14}$$

Пусть X_∞ — произвольная бесконечно удаленная точка расширенной плоскости α_∞ . Ей соответствует одномерное векторное подпространство плоскости α . Выберем произвольный вектор \vec{x} из этого подпространства, $\vec{x} \chi X_\infty$. Разложим

вектор \vec{x} по векторам $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Так как вектор \vec{x} параллелен плоскости α , то $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$. Поэтому координаты точки X_∞ в репере R имеют вид $X_\infty(x_1 : x_2 : 0)$. *Однородные координаты бесконечно удаленных точек расширенной плоскости характеризуются тем, что их третья координата равна нулю.* Отсюда следует, что уравнение бесконечно удаленной прямой в однородной системе координат имеет вид $x_3 = 0$.

Рассмотрим следующую задачу. *На расширенной плоскости α_∞ даны неоднородная и соответствующая ей однородная системы координат. Дана также прямая l , уравнение которой в неоднородной системе координат имеет вид $Ax + By + C = 0$. Требуется найти однородные координаты бесконечно удаленной точки этой прямой.*

Известно (см. [2]), что в уравнении $Ax + By + C = 0$ прямой l коэффициенты A и B не равны нулю одновременно, вектор $\vec{p}\{B, -A\}$ является направляющим вектором прямой l . Уравнению $Ax + By + C = 0$ удовлетворяют неоднородные координаты обыкновенных точек прямой. Для решения задачи найдем уравнение прямой l в однородных координатах. Воспользуемся формулами (14), заменим в уравнении прямой l неоднородные координаты точек их однородными координатами: $A \frac{x_1}{x_3} + B \frac{x_2}{x_3} + C = 0$. Умножим обе части полученного уравнения на x_3 : $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$. Мы получили уравнение прямой l в однородных координатах, которому удовлетворяют однородные координаты всех точек прямой, в том числе и бесконечно удаленной. Координаты бесконечно удаленной точки удовлетворяют также уравнению бесконечно удаленной прямой, т. е. являются ненулевым решением однородной системы уравнений

$$\begin{cases} Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что одно из ненулевых решений этой системы имеет вид $L_\infty(B : -A : 0)$, остальные решения будут ему пропорциональны. Таким образом, нами найдены однородные координаты искомой бесконечно удаленной точки. Обратим внимание, что первые две координаты точки L_∞ совпадают с координатами направляющего вектора прямой l .

§ 33. ПРИНЦИП ДВОЙСТВЕННОСТИ. ТЕОРЕМА ДЕЗАРГА

Введем следующее соглашение. Будем говорить, что точка и прямая проективной плоскости находятся в *отношении инцидентности*, если точка лежит на прямой, или, что то же самое, *прямая проходит через точку*. Отношение инцидентности будем обозначать символом « α ». Если A — точка и a — прямая проективной плоскости, то записи $A \alpha a$ или $a \alpha A$ означают, что точка A и прямая a находятся в отношении инцидентности. При этом по мере необходимости будем говорить: «точка инцидентна прямой» или «прямая инцидентна точке». Если точка A инцидентна двум прямым a и b , т. е. является их точкой пересечения, то будем использовать обозначение $A \alpha a, b$, а обозначение $a \alpha A, B$ будет означать, что прямая a содержит точки A и B .

Выберем на плоскости некоторую проективную систему координат. Точке A с координатами $A(a_1 : a_2 : a_3)$ поставим в соответствие прямую $a = f(A)$, уравнение которой имеет вид $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$. В § 32 коэффициенты в уравнении прямой названы ее координатами. Таким образом, построено отображение, которое каждой точке $A(a_1 : a_2 : a_3)$ ставит в соответствие прямую $f(A)$, координаты которой равны $f(A)(a_1 : a_2 : a_3)$. Рассмотрим также отображение f' множества прямых проективной плоскости на множество ее точек. Будем считать, что прямой a с координатами $(a_1 : a_2 : a_3)$ ставится в соответствие точка $f'(a)$, координаты которой относительно выбранного репера равны $f'(a)(a_1 : a_2 : a_3)$. Очевидно, что f является взаимно однозначным отображением множества точек на множество прямых, а отображение f' — множества прямых на множество точек проективной плоскости. Ясно также, что $f' = f^{-1}$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Если точка A и прямая u находятся в отношении инцидентности, то прямая $f(A)$ и точка $f'(u)$ также находятся в отношении инцидентности.*

Доказательство. Рассмотрим точку A с координатами $A(a_1 : a_2 : a_3)$ и прямую u , уравнение которой имеет вид $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$. Пусть $A \alpha u$. Тогда

$$u_1a_1 + u_2a_2 + u_3a_3 = 0. \quad (1)$$

Точке A ставится в соответствие прямая $f(A)$, уравнение которой имеет вид $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$, а прямой u — точка $f'(u)$ с координатами $f'(u)(u_1 : u_2 : u_3)$. Из равенства (1) следует, что точка $f'(u)$ принадлежит прямой $f(A)$, т. е. $f(A) \propto f'(u)$. Теорема доказана.

В качестве примера рассмотрим некоторые множества точек и прямых и выясним, что представляют собой их образы при отображении f , а также при отображении f' . Пусть M — множество точек прямой a . При отображении f прямая a отображается в точку $f(a)$, а точка A , принадлежащая прямой a , переходит в прямую $f'(A)$, содержащую точку $f(a)$. Таким образом, множество точек прямой a отображается в пучок прямых с центром в точке $f(a)$ (рис. 170). Аналогично, множество прямых пучка отображается на множество точек, принадлежащих прямой.

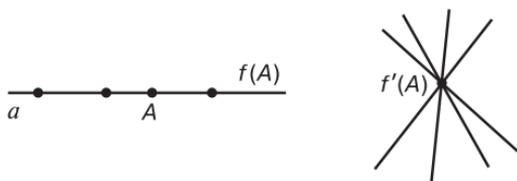


Рис. 170

Свойства отображений f и f' позволяют обосновать следующее замечательное утверждение, справедливое для точек и прямых проективной плоскости.

Теорема 2 (принцип двойственности). *Если предложение Δ , в котором говорится об инцидентности точек и прямых, является истинным, то истинным является также предложение Δ^* , которое получено из Δ заменой слова «точка» на слово «прямая», а слова «прямая» на слово «точка».*

Для обоснования принципа двойственности рассмотрим множество M точек и прямых проективной плоскости, удовлетворяющих предложению Δ . Так как Δ — истинное предложение, то точки и прямые множества M находятся в отношениях инцидентности, соответствующих утверждению Δ . Отобразим точки и прямые множества M на множество M' с помощью отображений f и f' . Так как при этих отоб-

ражениях сохраняются отношения инцидентности, то точки и прямые множества M' находятся в отношениях инцидентности, соответствующих предложению Δ^* . Таким образом, Δ^* — истинное предложение.

Утверждения Δ и Δ^* называются *двойственными*. Принцип двойственности позволяет принять без доказательства утверждение, если доказано двойственное ему предложение. Приведем примеры, иллюстрирующие этот принцип. В § 30 мы доказали теоремы:

Через любые две различные точки проходит единственная прямая.

Любые две различные прямые на проективной плоскости имеют единственную общую точку.

Легко видеть, что эти утверждения двойственны. Рассмотрим еще один пример двойственных утверждений. В § 32 нами было определено условие коллинеарности трех точек.

Даны координаты трех точек $A(a_1 : a_2 : a_3)$, $B(b_1 : b_2 : b_3)$, $C(c_1 : c_2 : c_3)$. Точки инцидентны одной прямой тогда и только тогда, когда определитель матрицы, составленный из их координат, равен нулю.

Если мы заменим слово «точка» на слово «прямая», а слово «прямая» на слово «точка», получим еще одно доказанное нами утверждение, условие принадлежности трех прямых одному пучку.

Даны координаты трех прямых $u(u_1 : u_2 : u_3)$, $v(v_1 : v_2 : v_3)$ и $w(w_1 : w_2 : w_3)$. Прямые инцидентны одной точке тогда и только тогда, когда определитель матрицы, составленный из их координат, равен нулю.

В § 29 мы упоминали о знаменитом трактате французского инженера, архитектора и геометра Жирара Дезарга (1591–1661) «Черновой набросок подхода к явлениям, происходящим при встрече конуса с плоскостью» (1639). Рассмотрим теорему, которая носит его имя, и в которой доказывается свойство точек пересечения сторон двух особых фигур проективной плоскости, так называемых трехвершинников. *Фигура, состоящая из трех точек общего положения и трех прямых, которые их содержат, называется трехвершинником проективной плоскости.* Точки называются *вершинами*, а прямые, их соединяющие, — *сторонами* трехвершинника. Напомним, что система точек проектив-

ной плоскости имеет общее положение, если никакие три из них не лежат на одной прямой. Таким образом, вершины трехвершинника не лежат на одной прямой, а его стороны не совпадают. На рисунке 171 изображен трехвершинник ABC , точки A , B и C — его вершины, а прямые AB , AC и BC — его стороны.

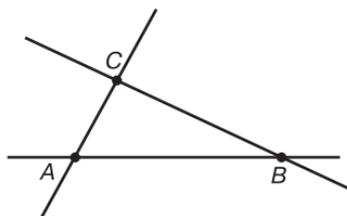


Рис. 171

Рассмотрим произвольный трехвершинник ABC . Легко видеть, что фигура, двойственная трехвершиннику, также является трехвершинником. При отображении f его вершины отображаются в прямые $f(A)$, $f(B)$ и $f(C)$, а прямые AB , AC и BC — в точки $f'(AB)$, $f'(AC)$ и $f'(BC)$. В силу теоремы 1, $f'(AB) = f(A) \cap f(B)$, $f'(AC) = f(A) \cap f(C)$ и $f'(BC) = f(B) \cap f(C)$. Таким образом, трехвершинник ABC отображается в трехвершинник $f(AB)$, $f(AC)$, $f(BC)$.

Рассмотрим два трехвершинника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. Если прямые A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 принадлежат одному пучку с центром в точке O (см. определение 1, § 32), то трехвершинники называются *перспективными* или *дезарговыми*, при этом центр пучка, точка O , называется *центром перспективы* или *дезарговым центром*. Если точки пересечения соответствующих сторон $P = A_1B_1 \cap A_2B_2$, $Q = A_1C_1 \cap A_2C_2$ и $R = B_1C_1 \cap B_2C_2$ трехвершинников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ принадлежат одной прямой, то эта прямая называется *осью перспективы* трехвершинников или их *дезарговой осью* (рис. 173).

Теорема 3 (теорема Дезарга). *Если два трехвершинника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ имеют центр перспективы, то они имеют ось перспективы.*

Доказательство. Прежде всего рассмотрим частные случаи расположения данных трехвершинников и их центра

перспективы. В первом случае предположим, что центр перспективы, точка O , лежит на одной из сторон данных трехвершинников, например на стороне A_1B_1 . Тогда из условия теоремы следует, что вершины A_2 и B_2 также принадлежат прямой A_1B_1 (рис. 172а). Выше мы ввели обозначения для точек пересечения соответствующих сторон данных трехвершинников: $P = A_1B_1 \cap A_2B_2$, $Q = A_1C_1 \cap A_2C_2$, $R = B_1C_1 \cap B_2C_2$. Так как стороны A_1B_1 и A_2B_2 совпадают, то можно считать, что точка P пересечения сторон A_1B_1 и A_2B_2 совпадает с точкой пересечения прямых QR и A_1B_1 . Таким образом, точки P, Q и R коллинеарны и, следовательно, данные трехвершинники имеют дезаргову ось QR .

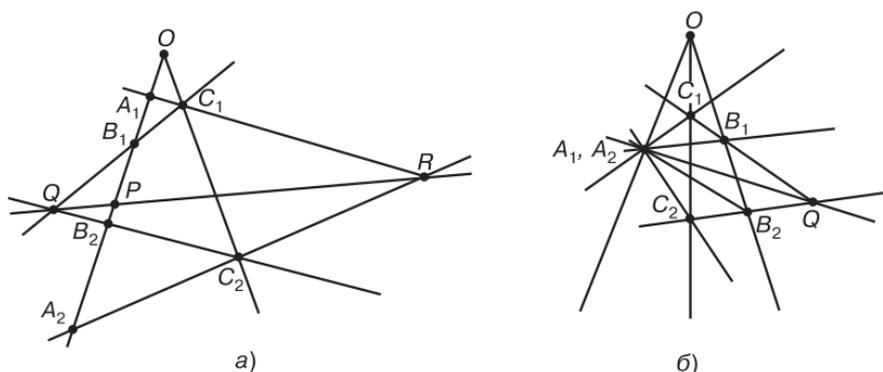


Рис. 172

Во втором случае предположим, что две вершины трехвершинников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, например A_1 и A_2 , совпадают (рис. 172б). Тогда можно считать, что точки $P = A_1B_1 \cap A_2B_2$ и $R = B_1C_1 \cap B_2C_2$ совпадают с точками A_1 и A_2 . Трехвершинники имеют дезаргову ось A_1Q .

Перейдем к доказательству общего случая. Дезаргов центр O не принадлежит ни одной из сторон данных трехвершинников, а вершины второго трехвершинника не совпадают с вершинами первого. В этом случае A_1, B_1, C_1, O образуют систему точек общего положения (рис. 173). Поэтому их можно принять за проективную систему координат $R = (A_1, B_1, C_1, O)$. Определим координаты точек P, Q и R и покажем, что они лежат на одной прямой. Так как вершины первого трехвершинника и центр перспективы O сов-

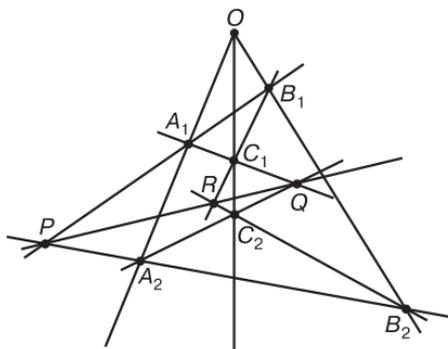


Рис. 173

падают с точками репера R , то их координаты имеют вид $A_1(1 : 0 : 0)$, $B_1(0 : 1 : 0)$, $C_1(0 : 0 : 1)$ и $O(1 : 1 : 1)$. Определим координаты вершин второго трехвершинника. Вершина A_2 лежит на прямой OA_1 , нам необходимо составить уравнение этой прямой. Воспользуемся уравнением (9) § 32:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

отсюда $OA_1: x_2 - x_3 = 0$. Поэтому координаты точки A_2 равны $A_2(a_1 : a_2 : a_2)$. Так как вершина A_2 не совпадает с вершиной A_1 , то $a_2 \neq 0$, следовательно, координаты точки A_2 можно представить в виде $A_2(a : 1 : 1)$. Аналогично определяются координаты остальных вершин второго трехвершинника: $B_2(1 : b : 1)$ и $C_2(1 : 1 : c)$. Заметим, что числа a , b и c отличны от единицы, иначе одна из вершин второго трехвершинника совпадала бы с дезарговым центром O , что исключено в рассматриваемом случае. Для определения координат точек P , Q и R нам необходимо найти уравнения прямых A_1B_1 и A_2B_2 , A_1C_1 и A_2C_2 , а также B_1C_1 и B_2C_2 . Для этого еще раз воспользуемся уравнением (9) § 32:

$$A_1B_1: \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad A_1B_1: x_3 = 0;$$

$$A_2B_2: \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или}$$

$$A_2B_2: (1-b)x_1 + (1-a)x_2 + (ab-1)x_3 = 0;$$

Аналогично, $A_1C_1: x_2 = 0$, $A_2C_2: (c-1)x_1 + (1-ac)x_2 + (a-1)x_3 = 0$, $B_1C_1: x_1 = 0$, $B_2C_2: (bc-1)x_1 + (1-c)x_2 + (1-b)x_3 = 0$. Точка P совпадает с точкой пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2 , ее координаты служат любым ненулевым решением однородной системы, составленной из уравнений

этих прямых: $\begin{cases} x_3 = 0, \\ (1-b)x_1 + (1-a)x_2 + (ab-1)x_3 = 0. \end{cases}$ Отсюда

следует, что координаты точки P имеют вид $P(1-a : b-1 : 0)$.

Аналогично, координаты точек Q и R являются ненулевыми решениями систем $\begin{cases} x_2 = 0, \\ (c-1)x_1 + (1-ac)x_2 + (a-1)x_3 = 0 \end{cases}$

и $\begin{cases} x_1 = 0, \\ (bc-1)x_1 + (1-c)x_2 + (1-b)x_3 = 0; \end{cases}$ т. е. соответственно

равны $Q(a-1 : 0 : 1-c)$, $R(0 : 1-b : c-1)$. В соответствии с условием коллинеарности трех точек (см. (8) § 32), прове-

рим, что определитель $\begin{vmatrix} 1-a & b-1 & 0 \\ a-1 & 0 & 1-c \\ 0 & 1-b & c-1 \end{vmatrix}$ матрицы, состав-

ленный из координат точек P , Q и R , равен нулю. Сумма строк матрицы этого определителя равна нулевой строке, поэтому он равен нулю, точки коллинеарны. Теорема доказана.

Возникает вопрос: верно ли утверждение, обратное к теореме Дезарга? Будут ли два трехвершинника, имеющие ось перспективы, дезарговыми, т. е. обладать при этом и центром перспективы? Мы получим ответ на этот вопрос, применив принцип двойственности.

Рассмотрим предложение, двойственное теореме Дезарга. Для этого запишем теорему Дезарга в следующем виде:

Даны два трехвершинника с вершинами A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 и сторонами a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2 : $a_1 \propto A_1, B_1, b_1 \propto B_1, C_1, c_1 \propto A_1, C_1$ и $a_2 \propto A_2, B_2, b_2 \propto B_2, C_2,$

$c_2 \propto A_2, C_2$. Вершины данных трехвершинников таковы, что прямые $p \propto A_1, A_2, q \propto C_1, C_2$ и $r \propto B_1, B_2$ инцидентны одной точке O : $O \propto p, q, r$. Тогда точки P, Q и R , принадлежащие прямым a_1, a_2, c_1, c_2 и b_1, b_2 ($P \propto a_1, a_2, Q \propto c_1, c_2, R \propto b_1, b_2$), инцидентны прямой o (рис. 174).

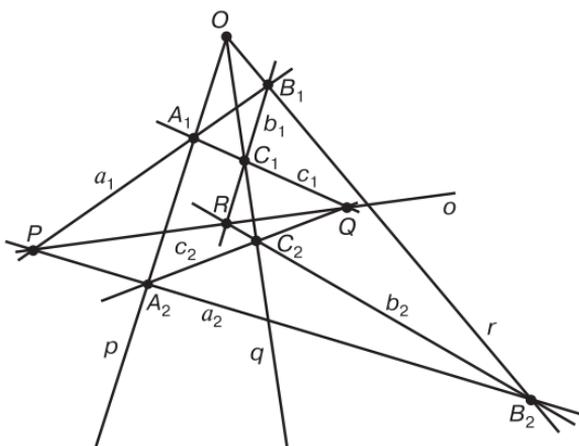


Рис. 174

Заменяя в полученном предложении слово «точка» на слово «прямая», «прямая» на «точка», «вершина» на «сторона», а «сторона» на «вершина», получим предложение, двойственное теореме Дезарга.

Даны два трехвершинника со сторонами a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2 и вершинами A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 : $a_1 \propto A_1, B_1, b_1 \propto B_1, C_1, c_1 \propto A_1, C_1$ и $a_2 \propto A_2, B_2, b_2 \propto B_2, C_2, c_2 \propto A_2, C_2$. Стороны данных трехвершинников таковы, что точки $P \propto a_1, a_2, Q \propto c_1, c_2, R \propto b_1, b_2$ принадлежат одной прямой o : $o \propto P, Q, R$. Тогда прямые p, q и r , инцидентные точкам A_1, A_2, C_1, C_2 и B_1, B_2 ($p \propto A_1, A_2, q \propto C_1, C_2, r \propto B_1, B_2$), инцидентны точке O .

Рисунок 174 также иллюстрирует двойственное предложение, которое совпадает с предложением, обратным к теореме Дезарга. Для трехвершинников A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 точка O является дезарговым центром, а прямая o — дезарговой осью. Таким образом, из принципа двойственности следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 4 (обратная к теореме Дезарга). Если два трехвершинника имеют ось перспективы, то они имеют также и центр перспективы.

Теорема Дезарга верна на расширенной плоскости. Применяя ее к обыкновенным точкам этой модели, можно получить утверждения, справедливые в аффинной геометрии. Рассмотрим некоторые из них.

Задача 1. На аффинной плоскости дана трапеция $ABCD$, основаниями которой служат отрезки AD и BC . Даны также две параллельные прямые a и b , пересекающие ее боковые стороны. Обозначим через E и N точки пересечения прямых a и b соответственно с боковыми сторонами AB и CD , а через F и M — их точки пересечения с диагоналями AC и BD , и, наконец, точку пересечения прямых EM и FN обозначим через P (рис. 175). Доказать, что точка P тогда и только тогда принадлежит прямой AD , когда прямые a и b параллельны основаниям трапеции.

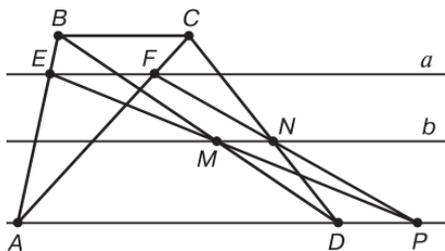


Рис. 175

Решение. Рассмотрим прямые a и b , параллельные основаниям AD и BC трапеции, и два треугольника BEM и CFN . Поставим в соответствие вершине B вершину C , вершине E — вершину F , а M — вершину N . Прямые BC , a и b , содержащие соответствующие вершины, параллельны между собой. Поэтому на расширенной плоскости они имеют общую бесконечно удаленную точку, которая является центром перспективы трехвершинников BEM и CFN . Точка A совпадает с точкой пересечения соответствующих сторон BE и CF , точка D — сторон BM и CN и P — сторон EM и FN . Таким образом, прямая AD является дезарговой осью этих трехвершинников, отсюда $P \in AD$.

Обратно, пусть точка P принадлежит прямой AD . Рассмотрим те же трехвершинники BEM и CFN . Как отмечено выше, точки A , D и P служат точками пересечения их соответствующих сторон. Так как эти точки лежат на одной прямой, то, в соответствии с теоремой, обратной к теореме Дезарга, трехвершинники имеют дезаргов центр. Таким образом, прямые BC , a и b на расширенной плоскости пересекаются в одной точке. Так как прямые a и b параллельны, то дезаргов центр совпадает с бесконечно удаленной точкой пересечения этих прямых. Отсюда следует, что прямая BC с аффинной точки зрения параллельна прямым a и b . Утверждение доказано.

Теорему Дезарга можно использовать при решении задач на построение одной линейкой. Как известно, теорема Штейнера утверждает, что любая задача на построение, разрешимая циркулем и линейкой, может быть решена одной линейкой, при условии, что на плоскости построена окружность и построен ее центр. Приведем пример одного из так называемых построений Штейнера.

Задача 2. *На плоскости даны две параллельные прямые q и r и точка A . Требуется, пользуясь одной линейкой, построить прямую, проходящую через A и параллельную данным прямым.*

Решение. Анализ. Будем предполагать, что данная задача рассматривается на расширенной плоскости. Через точку A требуется провести прямую p , параллельную q и r , т. е. на расширенной плоскости через точку A требуется провести прямую p , проходящую через бесконечно удаленную точку O_∞ пересечения прямых q и r . Задача будет решена, если мы построим два трехвершинника ABC и $A'B'C'$, которые имеют ось перспективы и у которых вершины B и B' принадлежат прямой r , а C и C' — прямой q . Тогда точка O_∞ будет представлять собой дезаргов центр этих трехвершинников (рис. 176). Прямая $p = AA'$ — искомая, так как она проходит через точку O_∞ , и поэтому с аффинной точки зрения параллельна прямым q и r .

Построение. На прямой q выбираем произвольные точки C и C' , на прямой r — точку B , проводим произвольную прямую o , пересекающую q и r (рис. 176).

Строим:

- 1) прямую CB ;

- 2) точку R пересечения CB и o ;
- 3) прямую $C'R$;
- 4) точку B' пересечения прямой $C'R$ и r , точка B' — одна из вершин второго трехвершинника;
- 5) прямую AC ;
- 6) точку Q пересечения прямых AC и o ;
- 7) прямую AB ;
- 8) точку P пересечения прямых AB и o ;
- 9) прямую PB' ;
- 10) прямую QC' ;
- 11) точку A' пересечения прямых PB' и QC' , точка A' — третья вершина искомого трехвершинника $A'B'C'$;
- 12) прямую AA' . Прямая AA' — искомая.

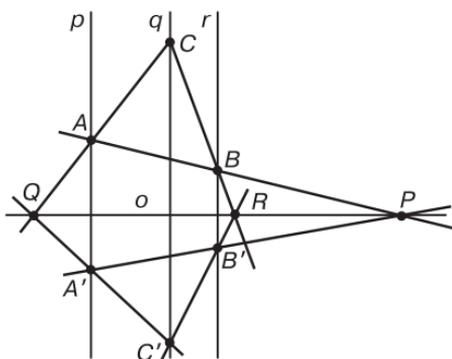


Рис. 176

Доказательство. По построению точки P , Q и R принадлежат прямой o . Эти точки служат точками пересечения соответствующих сторон трехвершинников ABC и $A'B'C'$: $P = AB \cap A'B'$, $Q = AC \cap A'C'$ и $R = BC \cap B'C'$. Отсюда следует, что o — дезаргова ось этих трехвершинников, поэтому, в соответствии с обратной теоремой к теореме Дезарга, они имеют дезаргов центр, в котором пересекаются прямые AA' , BB' и CC' . Так как по построению точки C и C' принадлежат прямой q , а точки B и B' — прямой r , то дезаргов центр совпадает с бесконечно удаленной точкой O_∞ прямых q и r . Отсюда следует, что прямая AA' параллельна прямым q и r .

Исследование. Как следует из аксиомы Плейфера, несмотря на допущенный произвол в выборе точек C , C' , B и прямой o , решение единственное.

ДВОЙНЫЕ ОТНОШЕНИЯ ТОЧЕК И ПРЯМЫХ, ПРОЕКТИВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 34. ДВОЙНЫЕ ОТНОШЕНИЯ ТОЧЕК НА ПРОЕКТИВНОЙ ПРЯМОЙ

Мы отмечали в § 29, что при центральном проектировании не сохраняется простое отношение коллинеарных точек. С другой стороны, в аффинной геометрии простое отношение точек является основным числовым инвариантом аффинных преобразований. С его помощью определяются простейшие геометрические фигуры и понятия аффинной геометрии, такие, например, как луч, отрезок, середина отрезка. Рассмотрим числовую характеристику, соответствующую четырем точкам проективной прямой, значение которой аналогично значению простого отношения точек в аффинной геометрии.

Пусть дана упорядоченная четверка точек прямой A, B, C, D . В дальнейшем, не оговаривая особо, будем предполагать, что эти точки различны. Рассмотрим произвольные векторы, им соответствующие: $\vec{a}_\chi A$, $\vec{b}_\chi B$, $\vec{c}_\chi C$ и $\vec{d}_\chi D$. Так как точки лежат на одной прямой, то векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} и \vec{d} принадлежат одному двумерному векторному подпространству. Точки A и B — различные, поэтому векторы \vec{a} и \vec{b} образуют базис этого подпространства. Разложим векторы \vec{c} и \vec{d} по векторам \vec{a} и \vec{b} :

$$\begin{cases} \vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, \\ \vec{d} = \alpha'\vec{a} + \beta'\vec{b}. \end{cases} \quad (1)$$

Так как рассматриваемые точки не совпадают друг с другом, то числа α , β , α' и β' отличны от нуля. Докажем следующее утверждение.

Лемма 1. Число $\frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'}$ не зависит от выбора векторов, соответствующих точкам A, B, C и D .

Доказательство. Рассмотрим другую четверку векторов, соответствующую точкам A, B, C и D : $\vec{a}_1_\chi A$, $\vec{b}_1_\chi B$, $\vec{c}_1_\chi C$ и $\vec{d}_1_\chi D$. Векторы \vec{a}_1 и \vec{b}_1 линейно независимы. Разложим

по ним векторы \vec{c}_1 и \vec{d}_1 :

$$\begin{cases} \vec{c}_1 = \alpha_1 \vec{a}_1 + \beta_1 \vec{b}_1, \\ \vec{d}_1 = \alpha'_1 \vec{a}_1 + \beta'_1 \vec{b}_1. \end{cases} \quad (2)$$

Нам следует доказать, что $\frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{\beta_1}{\alpha_1} : \frac{\beta'_1}{\alpha'_1}$. Векторы \vec{a} и \vec{a}_1 соответствуют одной и той же точке A , поэтому $\vec{a}_1 = \lambda \vec{a}$. Аналогично, $\vec{b}_1 = \mu \vec{b}$, $\vec{c}_1 = \delta \vec{c}$ и $\vec{d}_1 = \varepsilon \vec{d}$. Подставим полученные выражения в систему (2):

$$\begin{cases} \delta \vec{c} = \lambda \alpha_1 \vec{a} + \mu \beta_1 \vec{b}, \\ \varepsilon \vec{d} = \lambda \alpha'_1 \vec{a} + \mu \beta'_1 \vec{b}. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{cases} \vec{c} = \frac{\lambda \alpha_1}{\delta} \vec{a} + \frac{\mu \beta_1}{\delta} \vec{b}, \\ \vec{d} = \frac{\lambda \alpha'_1}{\varepsilon} \vec{a} + \frac{\mu \beta'_1}{\varepsilon} \vec{b}. \end{cases}$$

Так как разложение вектора по векторам базиса осуществляется единственным образом, то из (1) и полученных равенств вытекает: $\alpha = \frac{\lambda \alpha_1}{\delta}$, $\beta = \frac{\mu \beta_1}{\delta}$, $\alpha' = \frac{\lambda \alpha'_1}{\varepsilon}$, $\beta' = \frac{\mu \beta'_1}{\varepsilon}$. Отсюда,

проведя несложные выкладки, получим $\frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{\beta_1}{\alpha_1} : \frac{\beta'_1}{\alpha'_1}$.

Лемма доказана.

Введем следующее определение.

Определение 1. Дана упорядоченная четверка A, B, C и D различных точек проективной прямой. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и \vec{d} соответствуют этим точкам при базисном отображении χ . Пусть векторы \vec{c} и \vec{d} разложены по векторам \vec{a} и \vec{b} по формулам (1). Число

$$(AB; CD) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'} \quad (3)$$

называется двойным отношением точек A, B, C и D .

Двойное отношение точек определяется для любой упорядоченной четверки различных точек прямой и, как следует из леммы 1, не зависит от выбора векторов, соответствующих точкам A, B, C и D . В упорядоченной четверке точки A и B называются *базисными*, а точки C и D — *делящими*. Так как числа α, β, α' и β' отличны от нуля, то $(AB; CD) \neq 0$. Покажем, что $(AB; CD) \neq 1$.

Предположим, что $\frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'} = 1$. Тогда $\frac{\beta}{\beta'} = \frac{\alpha}{\alpha'}$ и из (1) следует, что векторы \vec{c} и \vec{d} коллинеарны, т. е. точки C и D совпадают, что противоречит определению 1.

Рассмотрим свойства двойного отношения.

Свойство 1. Пусть на проективной прямой даны три различные точки A, B и C , и дано ненулевое число λ , отличное от единицы. Тогда на этой прямой существует единственная точка D , для которой $(AB; CD) = \lambda$.

Доказательство. Рассмотрим векторы $\vec{a}_\chi A, \vec{b}_\chi B, \vec{c}_\chi C$. Так как данные точки принадлежат одной прямой, то векторы \vec{a} и \vec{b} образуют базис двумерного векторного подпространства V_2 , соответствующего этой прямой при базисном отображении χ . Разложим вектор \vec{c} по векторам \vec{a} и \vec{b} : $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Так как по условию данные точки различны, то $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$. Рассмотрим вектор $\vec{d} = \lambda\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, принадлежащий V_2 . Так как $\lambda \neq 0; 1$ и $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$, то вектор \vec{d} не совпадает с векторами \vec{a}, \vec{b} и \vec{c} . Пусть $D_\chi \vec{d}$. Точка D принадлежит данной прямой и, как следует из (3), $(AB; CD) = \lambda$.

Предположим, что на прямой существует еще одна точка D_1 , для которой $(AB; CD_1) = \lambda$. Пусть $\vec{d}_1 \chi D_1$. Разложим вектор \vec{d}_1 по векторам \vec{a} и \vec{b} : $\vec{d}_1 = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b}$. Так как $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ и $(AB; CD_1) = \lambda$, то $\frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta_1}{\alpha_1} = \lambda$. Отсюда следует, что $\alpha_1 = k\lambda\alpha, \beta_1 = k\beta$, где k — некоторое ненулевое число. Поэтому $\vec{d}_1 = k\vec{d}$, точки D_1 и D совпадают. Утверждение доказано.

Выясним, как изменяется двойное отношение при перестановке точек.

Свойство 2. Имеют место следующие равенства:

$$(AB; CD) = \frac{1}{(AB; DC)}, \quad (4)$$

$$(AB; CD) = (CD; AB), \quad (5)$$

$$(AB; CD) = 1 - (AC; BD). \quad (6)$$

Доказательство. Равенство (4) легко следует из определения двойного отношения точек и соотношения (1). Проверьте его самостоятельно.

Для доказательства равенства (5) выразим в соотношениях (1) векторы \vec{a} и \vec{b} через векторы \vec{c} и \vec{d} . Для этого первое из равенств в соотношениях (1) умножим

на β' , второе на $-\beta$, а затем сложим полученные равенства: $(\alpha\beta' - \beta\alpha')\vec{a} = \beta'\vec{c} - \beta\vec{d}$. Так как определитель

$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \alpha\beta' - \beta\alpha'$ отличен от нуля (в противном случае

векторы \vec{c} и \vec{d} коллинеарны, а точки C и D совпадают), то

$\vec{a} = \frac{\beta'}{\Delta}\vec{c} - \frac{\beta}{\Delta}\vec{d}$. Умножая первое из равенств (1) на α' , а второе

на $-\alpha$ и складывая их, получим $(\alpha\beta' - \beta\alpha')\vec{b} = -\alpha'\vec{c} + \alpha\vec{d}$. От-

сюда следует, что $\vec{b} = -\frac{\alpha'}{\Delta}\vec{c} + \frac{\alpha}{\Delta}\vec{d}$. Из найденных разложений

получим $(CD; AB) = \frac{\beta}{\beta'} : \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'} = (AB; CD)$. Равенство (5)

доказано.

Для доказательства равенства (6) выразим векторы \vec{b} и \vec{d} через векторы \vec{a} и \vec{c} (проведите выкладки самостоятельно):

$$\vec{b} = -\frac{\alpha}{\beta}\vec{a} + \frac{1}{\beta}\vec{c}, \quad \vec{d} = \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\beta}\vec{a} + \frac{\beta'}{\beta}\vec{c}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} (AC; BD) &= -\frac{1}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'\beta - \alpha\beta'} = \frac{\alpha\beta' - \alpha'\beta}{\alpha\beta'} = 1 - \frac{\alpha'\beta}{\alpha\beta'} = \\ &= 1 - \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'} = 1 - (AB; CD). \end{aligned}$$

Равенство (6) доказано.

Если дано двойное отношение четырех точек $(AB; CD)$, то равенства (4)–(6) позволяют вычислять двойное отношение этих точек, взятых в любом порядке. Верно следующее утверждение.

Свойство 3. Если $(AB; CD) = \lambda$, то при перестановке этих точек двойное отношение полученной упорядоченной четверки будет равно одному из следующих чисел: λ , $\frac{1}{\lambda}$, $1 - \lambda$, $\frac{1}{1 - \lambda}$, $\frac{\lambda - 1}{\lambda}$, $\frac{\lambda}{\lambda - 1}$.

Доказательство этого утверждения мы опускаем. Оно проводится простым перебором всех возможных случаев расположения точек в упорядоченной четверке.

В качестве примера выразим двойное отношение $(BD; CA)$ через $\lambda = (AB; CD)$. Из равенства (4) следует

$(BD; CA) = \frac{1}{(BD; AC)}$. Применяя равенства (5) и (6), получим

$$(BD; CA) = \frac{1}{(BD; AC)} = \frac{1}{(AC; BD)} = \frac{1}{1 - (AB; CD)} = \frac{1}{1 - \lambda}.$$

Докажем еще одно свойство двойного отношения четырех точек.

Свойство 4. Пусть на проективной прямой даны пять различных точек A, B, C, D и P . Тогда

$$\frac{(AB; PD)}{(AB; PC)} = (AB; CD).$$

Доказательство. Рассмотрим векторы $\vec{a}_\chi A, \vec{b}_\chi B, \vec{c}_\chi C, \vec{d}_\chi D$ и $\vec{p}_\chi P$. Разложим векторы \vec{c}, \vec{d} и \vec{p} по векторам \vec{a} и \vec{b} : $\vec{p} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, $\vec{c} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b}$, $\vec{d} = \alpha_2\vec{a} + \beta_2\vec{b}$. Из равенства (3) следует, что $(AB; PD) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta_2}{\alpha_2}$, $(AB; PC) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta_1}{\alpha_1}$, $(AB; CD) = \frac{\beta_1}{\alpha_1} : \frac{\beta_2}{\alpha_2}$. Поэтому $\frac{(AB; PD)}{(AB; PC)} = \frac{\beta_1}{\alpha_1} : \frac{\beta_2}{\alpha_2} = (AB; CD)$.

Утверждение доказано.

Доказанное свойство позволяет определить понятие отрезка проективной прямой. Введем следующее определение.

Определение 2. Пара точек A, B разделяет пару точек C, D проективной прямой, если $(AB; CD) < 0$ и она не разделяет пару C, D , если $(AB; CD) > 0$.

Из равенств (4) и (5) следует, что понятие разделенности пар точек не зависит от порядка точек в парах (A, B) и (C, D) . Если пара (A, B) разделяет пару (C, D) , то пара (A, B) разделяет пару (D, C) , пара (B, A) разделяет пару (C, D) , и т. д., пара (C, D) разделяет пару (A, B) и т. д. Понятие разделенности пар точек позволяет ввести понятие отрезка проективной прямой. Докажем следующую теорему.

Теорема 1. Пусть на проективной прямой даны две точки A и B . Тогда множество всех точек прямой, отличных от A и B , можно разбить на два непустых подмножества \mathfrak{K} и \mathfrak{L} . Точки C и D принадлежат одному подмножеству, если пара точек A и B не разделяет C и D , и они принадлежат различным подмножествам, если пара A, B их разделяет.

Доказательство. Возьмем произвольную точку P прямой, отличную от A и B . Обозначим через \mathfrak{K} множество точек прямой, состоящее из точки P и всех точек X , для которых $(AB; PX) > 0$. Множество \mathfrak{L} будут составлять такие точки Y прямой, что пара A, B разделяет пару P, Y : $(AB; PY) < 0$. Легко показать, что множества \mathfrak{K} и \mathfrak{L} искомые. Действительно, пусть $C \in \mathfrak{K}$, $D \in \mathfrak{L}$. Тогда

$(AB : PC) > 0$, $(AB; PD) < 0$. Воспользуемся свойством (4). Так как $\frac{(AB; PD)}{(AB; PC)} = (AB; CD)$, то $(AB; CD) < 0$, поэтому пара A, B разделяет пару C, D . Если точки C и D принадлежат одному множеству \mathfrak{K} или \mathfrak{I} , то двойные отношения $(AB; PC)$ и $(AB; PD)$ имеют одинаковые знаки. Из равенства (6) следует, что $(AB; CD) > 0$. Пара A, B не разделяет пару C, D . Теорема доказана.

Множество \mathfrak{K} вместе с точками A и B и множество \mathfrak{I} вместе с этими же точками называются отрезками проективной прямой. Таким образом, точки A и B разбивают проективную прямую на два отрезка. Здесь нельзя провести аналогию с отрезком на аффинной прямой, так как две точки разбивают аффинную прямую на отрезок и два луча. В данном случае уместно сравнение с окружностью и ее двумя дугами, на которые она разделена двумя своими точками. Проективную прямую можно считать замкнутой линией (например, на расширенной плоскости она «замыкается» бесконечно удаленной точкой).

Установим правило вычисления двойного отношения точек, если известны их координаты. Пусть на плоскости выбран некоторый проективный репер R и даны координаты точек $A(a_1 : a_2 : a_3)$, $B(b_1 : b_2 : b_3)$, $C(c_1 : c_2 : c_3)$ и $D(d_1 : d_2 : d_3)$, принадлежащих одной прямой. Рассмотрим произвольную четверку векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_\chi R$, соответствующую реперу R . Тогда, в соответствии с леммой § 31, векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и \vec{d} , координаты которых в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ равны $\vec{a}\{a_1 : a_2 : a_3\}$, $\vec{b}\{b_1 : b_2 : b_3\}$, $\vec{c}\{c_1 : c_2 : c_3\}$, $\vec{d}\{d_1 : d_2 : d_3\}$, соответствуют точкам A, B, C и D : $\vec{a}\chi A$, $\vec{b}\chi B$, $\vec{c}\chi C$, $\vec{d}\chi D$. Точки A, B, C и D принадлежат одной прямой, поэтому векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и \vec{d} лежат в двумерном векторном подпространстве, соответствующем этой прямой. Следовательно, коэффициенты разложения векторов \vec{c} и \vec{d} по векторам \vec{a} и \vec{b} можно найти как коэффициенты разложения столбцов координат векторов \vec{c} и \vec{d} по столбцам координат векторов \vec{a} и \vec{b} . Определив коэффициенты разложения, можно найти двойное отношение $(AB; CD)$ по формуле (3).

Аналогично, если на проективной прямой l дан проективный репер R и даны координаты ее четырех различных точек $A(a_1 : a_2)$, $B(b_1 : b_2)$, $C(c_1 : c_2)$ и $D(d_1 : d_2)$, то коэффициенты разложения векторов \vec{c} и \vec{d} , соответствующих

точкам C и D , по векторам \vec{a} и \vec{b} , соответствующим точкам A и B , определяются как коэффициенты разложения столбцов координат точек C и D по столбцам координат точек A и B .

Условимся в дальнейшем столбец из координат точки обозначать той же буквой, что и саму точку. Поэтому равенство $C = \alpha A + \beta B$ будет означать, что столбец из координат точки C разложен по столбцам из координат точек A и B с коэффициентами α и β .

Используем способ нахождения двойных отношений точек по их координатам при доказательстве следующей леммы.

Лемма 2. Пусть на прямой дан проективный репер $R = (A_1, A_2, E)$ и дана точка M , не совпадающая с координатными точками, координаты которой относительно R имеют вид $M(m_1 : m_2)$. Тогда $(A_1 A_2; EM) = \frac{m_1}{m_2}$.

Доказательство. Точки A_1 , A_2 и E — базисные точки репера, поэтому их координаты имеют вид $A_1(1 : 0)$, $A_2(0 : 1)$, $E(1 : 1)$. Разложим столбцы координат точек E и M по столбцам координат точек A_1 и A_2 :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \alpha' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что $\alpha = \beta = 1$, $\alpha' = m_1$, $\beta' = m_2$. Получим $(A_1 A_2; EM) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{m_1}{m_2}$. Лемма доказана.

Докажем аналогичное утверждение для точек прямой на плоскости.

Лемма 3. Пусть на плоскости дан репер $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ и дана точка M , не принадлежащая координатным прямым, координаты которой относительно этого репера равны $M(m_1 : m_2 : m_3)$. Спроектируем точки E и M на координатные прямые $A_1 A_2$, $A_1 A_3$ и $A_2 A_3$ соответственно из базисных точек A_3 , A_2 , A_1 репера, получим точки E_3 , E_2 , E_1 и M_3 , M_2 , M_1 (рис. 177). Тогда $(A_1 A_2; E_3 M_3) = \frac{m_1}{m_2}$, $(A_1 A_3; E_2 M_2) = \frac{m_1}{m_3}$, $(A_2 A_3; E_1 M_1) = \frac{m_2}{m_3}$.

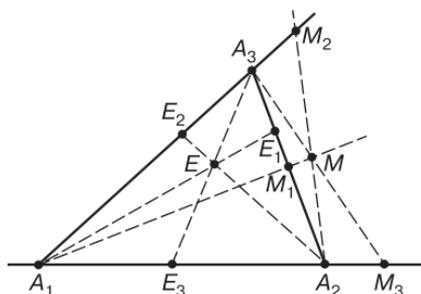


Рис. 177

Доказательство. Докажем первое из трех соотношений, остальные доказываются аналогично, выкладки для них проведите самостоятельно. Так как точки A_1 и A_2 — базисные точки репера R , то их координаты равны $A_1(1 : 0 : 0)$ и $A_2(0 : 1 : 0)$. Уравнение же $x_3 = 0$ служит уравнением прямой A_1A_2 . Используя уравнение (9) § 32, определим уравнения прямых A_3E и A_3M , $A_3E: x_1 - x_2 = 0$, $A_3M: m_2x_1 - m_1x_2 = 0$. Поэтому координаты точек E_3 и M_3 являются, соответственно, ненулевыми решениями систем однородных линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 0, \\ m_2x_1 - m_1x_2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что точки E_3 и M_3 имеют следующие координаты: $E_3(1 : 1 : 0)$, $M_3(m_1 : m_2 : 0)$. Разложим столбцы координат точек E_3 и M_3 по столбцам координат точек A_1 и A_2 :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\alpha = \beta = 1$, $\alpha' = m_1$, $\beta' = m_2$. Поэтому $(A_1A_2; E_3M_3) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{m_1}{m_2}$. Лемма доказана.

Пусть на плоскости дан репер $R = (A_1, A_2, A_3, E)$. Спроектируем точку E на координатные прямые A_1A_2 , A_1A_3 и A_2A_3 из базисных точек A_3 , A_2 , A_1 репера, получим точки E_3 , E_2 , E_1 . Если точка M принадлежит координатной прямой A_1A_2 , не совпадает с точками A_1 , A_2 , E_3 и ее координаты равны $M(m_1 : m_2 : 0)$, то $(A_1A_2; E_3M) = \frac{m_1}{m_2}$. Выше

мы показали, что координаты точки E_3 равны: $E_3(1 : 1 : 0)$. Тогда из леммы 4 следует, что $(A_1A_2; E_3M) = \frac{m_1}{m_2}$. Аналогично, если точка M принадлежит координатной прямой A_2A_3 , не совпадает с точками A_2, A_3 и E_1 и ее координаты равны $M(0 : m_2 : m_3)$, то $(A_2A_3; E_1M) = \frac{m_2}{m_3}$. И, наконец, если M принадлежит прямой A_1, A_3 , не совпадает с точками A_1, A_3, E_2 и ее координаты равны $M(m_1 : 0 : m_3)$, то $(A_1A_3; E_2M) = \frac{m_1}{m_3}$.

Аналогично доказывается следующая лемма (рассуждения проведите самостоятельно).

Лемма 4. Пусть на плоскости дан репер $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ и дана точка M , принадлежащая координатной прямой A_2A_3 , с координатами $M(0 : m_2 : m_3)$ относительно этого репера, точка E_1 — проекция точки E на координатную прямую A_2A_3 из базисной точки A_1 . Тогда $(A_1A_2; E_3M) = \frac{m_2}{m_3}$.

В § 33 мы познакомились с принципом двойственности, который утверждает, что в некотором смысле понятия и утверждения, верные для множества точек, могут трансформироваться в понятия и истинные утверждения для множества прямых. Так как фигура, двойственная множеству точек прямой, представляет собой пучок прямых, то можно определить двойное отношение четырех прямых пучка, двойственное понятию двойного отношения четырех точек прямой. Этому будет посвящен следующий параграф.

§ 35. ДВОЙНОЕ ОТНОШЕНИЕ ЧЕТЫРЕХ ПРЯМЫХ ПУЧКА И ЕГО СВОЙСТВА

Имеет место следующая замечательная теорема.

Теорема 1. Даны четыре прямые a, b, c и d , принадлежащие одному пучку, даны также две прямые m и n , не проходящие через его центр. Если A, B, C и D — соответственно точки пересечения прямых a, b, c, d с прямой m , а A', B', C', D' — точки пересечения этих прямых с прямой n , то $(AB; CD) = (A'B'; C'D')$.

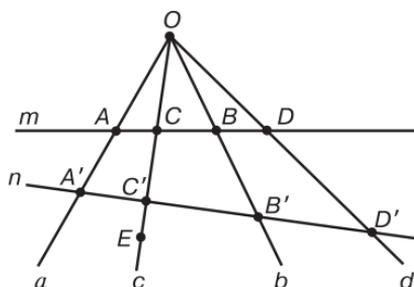


Рис. 178

Доказательство. Обозначим через O центр пучка, выберем на прямой c точку E так, чтобы она не совпадала с точкой C (рис. 178). Тогда точки O, A, B и E составляют систему точек общего положения. Примем их за вершины координатного репера $R = (O, A, B, E)$. Определим координаты точек A, B, C, D и A', B', C', D' , найдем двойные отношения $(AB; CD)$ и $(A'B'; C'D')$, и проверим, что они равны друг другу. Так как точки A и B — вершины координатного репера, то их координаты равны $A(0 : 1 : 0)$ и $B(0 : 0 : 1)$. Отсюда следует, что уравнение $x_1 = 0$ служит уравнением координатной прямой $m = AB$. Координаты точек O и E равны $O(1 : 0 : 0)$, $E(1 : 1 : 1)$, отсюда следует, что уравнение прямой OE имеет вид $x_2 - x_3 = 0$. Координаты точки C определим как координаты точки пересечения прямых AB и OE , получим $C(0 : 1 : 1)$ (выкладки проведите самостоятельно). Пусть точка D имеет координаты $D(d_1 : d_2 : d_3)$. Так как точка D принадлежит прямой m , то $d_1 = 0$. С другой стороны, точка D не совпадает с точками A и B , поэтому $d_2 \neq 0$, $d_3 \neq 0$. Разделим d_2 на d_3 и обозначим через d отношение: $d = \frac{d_2}{d_3}$. Координаты точки D можно представить в виде $D(0 : d : 1)$. Так как точка C совпадает с проекцией единичной точки E на координатную прямую AB из базисной точки O , то в соответствии с леммой 4 предыдущего параграфа

$$(AB; CD) = d. \quad (1)$$

Определим теперь координаты точек A', B', C' и D' . Они принадлежат прямой n , расположенной произвольным образом на плоскости и не проходящей через точку O . Если ее уравнение в репере R имеет вид $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$,

то $u_1 \neq 0$, иначе прямая n содержит точку O . Разделим коэффициенты уравнения на u_1 и введем обозначения $u = \frac{u_2}{u_1}$, $v = \frac{u_3}{u_1}$. Уравнение прямой n можно представить в виде $x_1 + ux_2 + vx_3 = 0$. Так как O , A и B — координатные точки репера R , то уравнения прямых OA и OB имеют вид $OA: x_3 = 0$, $OB: x_2 = 0$. Уравнение прямой OC нами было определено выше $OC: x_2 - x_3 = 0$. Найдем уравнение прямой OD . Координаты точек O и D равны $O(1 : 0 : 0)$, $D(0 : d : 1)$. Воспользуемся уравнением (9) (§ 32), после соответствующих выкладок получим $OD: x_2 - dx_3 = 0$. Таким образом, координаты точки A' являются ненулевым решением линейной системы однородных уравнений

$$\begin{cases} x_3 = 0, \\ x_1 + ux_2 + vx_3 = 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что они равны $A'(u : -1 : 0)$. Аналогично, координаты точки B' служат ненулевым решением системы:

$$\begin{cases} x_2 = 0, \\ x_1 + ux_2 + vx_3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $B'(v : 0 : -1)$. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + ux_2 + vx_3 = 0, \end{cases}$$

найдем координаты точки $C'(u + v : -1 : -1)$. Координаты точки D' находятся как ненулевое решение системы

$$\begin{cases} x_2 - dx_3 = 0, \\ x_1 + ux_2 + vx_3 = 0, \end{cases}$$

поэтому $D'(du + v : -d : -1)$. Разложим теперь столбцы координат точек C' и D' по столбцам координат точек A' и B' :

$$\begin{pmatrix} u+v \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} u \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} du+v \\ -d \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha'_1 \begin{pmatrix} u \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta'_1 \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что $\alpha_1 = \beta_1 = 1$, $\alpha'_1 = d$, $\beta'_1 = 1$. Поэтому $(A'B'; C'D') = \frac{\beta_1}{\alpha_1} : \frac{\beta'_1}{\alpha'_1} = 1 : \frac{1}{d} = d$. Из равенства (1) получим $(AB; CD) = (A'B'; C'D')$. Теорема доказана.

Доказанное утверждение крайне важно в проективной геометрии. Из него непосредственно выводится следствие.

Следствие 1. При центральном проектировании на проективной плоскости прямой на прямую сохраняется двойное отношение точек.

Определение 1. Пусть даны четыре прямые a , b , c и d , принадлежащие одному пучку. Двойным отношением $(ab; cd)$ называется число, равное двойному отношению $(AB; CD)$, где точки A , B , C и D являются точками пересечения прямых a , b , c и d с произвольной прямой m , не проходящей через центр пучка O (рис. 179).

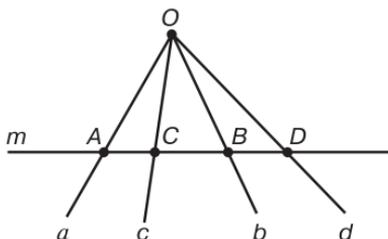


Рис. 179

Корректность введенного утверждения вытекает из теоремы 1. Действительно, из нее следует, что число $(ab; cd)$ не зависит от выбора прямой m . Прямые a и b называются *базисными*, а прямые c и d — *делящими*. Мы определили двойное отношение прямых через двойное отношение точек. Поэтому все свойства двойного отношения прямых аналогичны свойствам двойного отношения точек (см. свойства 1–4, § 34):

Свойство 1. Пусть даны три различные прямые a , b и c , принадлежащие одному пучку. Тогда в этом пучке существует единственная прямая d , для которой $(ab; cd) = \lambda$, где λ — произвольное ненулевое число, отличное от единицы.

Свойство 2. Пусть a , b , c и d — произвольные четыре прямые, принадлежащие одному пучку. Тогда справедливы следующие равенства:

$$(ab; cd) = \frac{1}{(ab; dc)}, \quad (ab; cd) = (cd; ab), \quad (ab; cd) = 1 - (ac; bd).$$

Свойство 3. Если даны четыре различные прямые a , b , c и d , принадлежащие одному пучку и $(ab; cd) = \lambda$, то при любом изменении порядка этих прямых двойное

отношение полученной упорядоченной четверки будет равно одному из следующих чисел:

$$\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1 - \lambda, \frac{1}{1 - \lambda}, \frac{\lambda - 1}{\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

Свойство 4. Пусть даны пять различных прямых пучка a, b, c, d и p . Тогда $\frac{(ab; pd)}{(ab; pc)} = (ab; cd)$.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. На плоскости выбран проективный репер $R = (A_1, A_2, A_3, E)$, даны уравнения четырех прямых, принадлежащих одному пучку: $a: a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$, $b: b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$, $c: c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0$ и $d: d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3 = 0$. Требуется найти двойное отношение $(ab; cd)$.

Решение. Прямые a, b, c и d проходят через одну точку. Поэтому их координаты удовлетворяют условию (13) § 32 принадлежности прямых одному пучку:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = 0.$$

В силу равенства нулю указанных определителей, их строки линейно зависимы. Поэтому мы можем разложить столбцы из координат прямых c и d по столбцам из координат прямых a и b :

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \alpha' \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \beta' \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Обозначим центр пучка данных прямых через O . Для того, чтобы найти двойное отношение $(ab; cd)$, как вытекает из определения 1, нам следует пересечь данные прямые пятой прямой, не проходящей через центр O , затем определить координаты точек пересечения и вычислить двойное отношение четверки полученных точек. В качестве прямой, пересекающей данные прямые, возьмем одну из координатных прямых A_1A_2, A_1A_3 или A_2A_3 . Координатные прямые не принадлежат одному пучку, поэтому по крайней мере одна из них не проходит через центр пучка O . Будем предполагать, что прямая A_1A_2 не проходит через

точку O . Если это условие не выполняется, то следует выбрать прямую A_1A_3 или A_2A_3 . В этих случаях рассуждения проводятся аналогично, доказательство проведите самостоятельно. Определим координаты точек A, B, C и D , пересечения прямых a, b, c и d с координатной прямой A_1A_2 . Уравнение прямой A_1A_2 имеет вид $x_3 = 0$, поэтому координаты точки пересечения прямых A_1A_2 и a определяются как ненулевое решение линейной однородной системы

$$\begin{cases} x_3 = 0, \\ a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0. \end{cases}$$

Из нее следует, что координаты точки A равны $A(a_2 : -a_1 : 0)$. Аналогично определяются координаты точек B, C и D : $B(b_2 : -b_1 : 0)$, $C(c_2 : -c_1 : 0)$, $D(d_2 : -d_1 : 0)$. Так как $(ab; cd) = (AB; CD)$, найдем двойное отношение $(AB; CD)$. Для этого разложим столбцы координат точек C и D по столбцам координат точек A и B :

$$\begin{pmatrix} c_2 \\ -c_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} b_2 \\ -b_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$\begin{pmatrix} d_2 \\ -d_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha'_1 \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta'_1 \begin{pmatrix} b_2 \\ -b_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Сравним разложения (2) и (3). Мы видим, что как коэффициенты α, β , так и α_1, β_1 являются решением одной и той же системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

а коэффициенты, α', β' и α'_1, β'_1 — решением системы

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = d_1, \\ a_2x + b_2y = d_2. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$ и $\alpha' = \alpha'_1$, $\beta' = \beta'_1$. Таким образом, $(ab; cd) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'}$.

При вычислении двойного отношения прямых по их координатам действует то же правило, что и при вычислении двойного отношения точек: *столбцы, составленные*

из координат делящих прямых, следует разложить по столбцам, составленных из координат базисных прямых (см. (2)), а затем вычислить двойное отношение $(ab; cd) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'}$.

В силу того, что правило вычисления в координатах двойного отношения прямых пучка дословно совпадает с правилом вычисления двойного отношения точек прямой, мы можем расширить принцип двойственности.

Расширенный принцип двойственности. Если утверждение Δ , в котором говорится об отношениях принадлежности и двойных отношениях точек и прямых, является истинным, то справедливым является также утверждение Δ^* , которое получается из Δ заменой слова «точка» на слово «прямая», а слова «прямая» на слово «точка».

§ 36. ДВОЙНОЕ ОТНОШЕНИЕ ТОЧЕК НА РАСШИРЕННОЙ ПЛОСКОСТИ. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ЧЕТВЕРКИ ТОЧЕК И ПРЯМЫХ

В § 30 мы рассмотрели свойства одной из моделей проективной плоскости — расширенной плоскости. Выясним, как связаны между собой на ней двойные и простые отношения обыкновенных точек.

Задача 1. На расширенной плоскости даны четыре обыкновенные точки A, B, C и D , расположенные на одной прямой. Известны простые отношения $\lambda = (AB, C)$ и $\mu = (AB, D)$. Требуется найти двойное отношение $(AB; CD)$.

Решение. Пусть α_∞ — расширенная плоскость, A, B, C и D — данные на ней обыкновенные точки (рис. 180). Из определения простого отношения точек следует, что

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}, \quad \overrightarrow{AD} = \mu \overrightarrow{DB}. \quad (1)$$

Для вычисления двойного отношения $(AB; CD)$ нам необходимо найти векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и \vec{d} , соответствующие точкам A, B, C и D при базисном отображении χ , а затем разложить векторы \vec{c} и \vec{d} по векторам \vec{a} и \vec{b} . Как следует из результатов § 30, при отображении χ любой вектор, параллельный прямой OA , соответствует

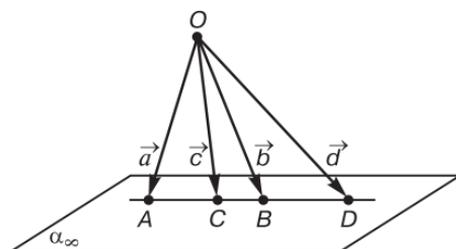


Рис. 180

точке A . Поэтому положим $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$. Аналогично, в качестве остальных векторов примем $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ и $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$. Разложим векторы \vec{c} и \vec{d} по векторам \vec{a} и \vec{b} . Так как $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \vec{c} - \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \vec{b} - \vec{c}$, то из (1) следует, что $\vec{c} - \vec{a} = \lambda(\vec{b} - \vec{c})$. Отсюда $\vec{c} = \frac{1}{1+\lambda}\vec{a} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\vec{b}$.

Проведя аналогичные рассуждения для вектора \vec{d} , получим $\vec{d} = \frac{1}{1+\mu}\vec{a} + \frac{\mu}{1+\mu}\vec{b}$. Из определения двойного отношения точек прямой (см. определение 1 § 34) следует, что

$$(AB; CD) = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{(AB, C)}{(AB, D)}. \quad (2)$$

Формула (2) объясняет смысл названия «двойное отношение точек». Двойное отношение четырех обыкновенных точек на расширенной плоскости равно отношению двух простых отношений. Установим, как связаны между собой простое отношение трех обыкновенных точек одной прямой и двойное отношение четверки точек, первые три из которых совпадают с данными точками, а четвертая — бесконечно удаленная точка этой прямой.

Задача 2. На расширенной плоскости даны три коллинеарные обыкновенные точки A , B и C . Требуется определить двойное отношение $(AB; CD_\infty)$, где D_∞ — бесконечно удаленная точка прямой AB .

Решение. Пусть α_∞ — данная расширенная плоскость, A, B и C — три обыкновенные коллинеарные точки. Так же, как и при решении предыдущей задачи, выберем произвольную точку O , не принадлежащую плоскости α_∞ , и рассмотрим векторы $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ (рис. 181).

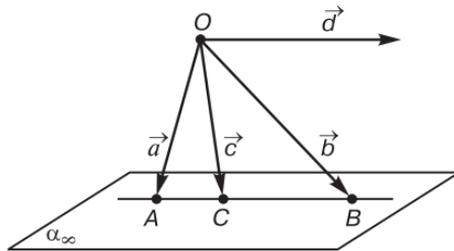


Рис. 181

Как установлено выше, $\vec{a}\chi A$, $\vec{b}\chi B$ и $\vec{c}\chi C$. Найдём вектор \vec{d} , соответствующий точке D_∞ . В § 30, при изучении свойств расширенной плоскости, мы отмечали, что бесконечно удалённой точке соответствует любой вектор, принадлежащий одномерному векторному подпространству, определяющему эту точку. Поэтому бесконечно удалённой точке прямой AB соответствует любой ненулевой вектор, параллельный этой прямой. Положим $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$, тогда $\vec{d}\chi D_\infty$. Разложим векторы \vec{c} и \vec{d} по векторам \vec{a} и \vec{b} . Если $\lambda = (AB, C)$, то из решения предыдущей задачи следует, что $\vec{c} = \frac{1}{1+\lambda}\vec{a} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\vec{b}$. Так как $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, то $\vec{d} = -\vec{a} + \vec{b}$. Определив искомые разложения, по формуле (3) (§ 34) найдём двойное отношение: $(AB; CD_\infty) = \lambda : (-1)$, или

$$(AB; CD_\infty) = -(AB, C). \quad (3)$$

Предположим, что точка C — середина отрезка AB . Тогда $(AB, C) = 1$. Из равенства (3) следует, что двойное отношение четверки точек A, B, C и D_∞ равно $(AB; CD_\infty) = -1$. Середина отрезка имеет особое значение в аффинной геометрии. На проективной плоскости четверка точек, двойное отношение которых равно -1 , также обладает особыми свойствами.

Определение 1. Упорядоченная четверка точек A, B, C и D называется гармонической, если $(AB; CD) = -1$.

Мы будем также говорить, что в этом случае точка D является четвертой гармонической к тройке точек A, B и C . Таким образом, бесконечно удалённая точка прямой AB на расширенной плоскости является четвертой гармонической к точкам A, B и середине C отрезка AB .

Так как $(AB; CD) = \frac{1}{(AB; DC)}$, $(AB; CD) = (CD; AB)$, $(AB; CD) = 1 - (AC; BD)$ (см. (4)–(6), § 34), то из условия $(AB; CD) = -1$ следует $(AB; DC) = (CD; AB) = (BA; CD) = -1$. Если дана гармоническая четверка точек, то, изменяя порядок в парах базисных и делящих точек, а также меняя местами эти пары, мы опять получим гармоническую четверку точек. Поэтому говорят, что в гармонической четверке точек пара точек A, B гармонически делит пару точек C, D .

Гармонические четверки точек обладают еще одним интересным свойством. В § 34 было отмечено, что если $(AB; CD) = \lambda$, то при любой перестановке точек в данной четверке двойное отношение полученной упорядоченной четверки будет равно одному из следующих шести чисел: $\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1 - \lambda, \frac{1}{1 - \lambda}, \frac{\lambda - 1}{\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda - 1}$. Если какие либо два числа из этих шести равны между собой, то легко проверить, что либо $\lambda = -1$, либо $\lambda = 2$, либо $\lambda = \frac{1}{2}$. Если двойное отношение четверки точек равно 2 или $\frac{1}{2}$, то всегда можно изменить порядок точек в этой четверке так, чтобы новая упорядоченная четверка была гармонической. Например, пусть $(AB; CD) = \frac{1}{2}$. Из равенств (4)–(6) § 34 следует, что $(AB; DC) = \frac{1}{(AB; CD)} = 2$ и $(AD; BC) = 1 - (AB; DC) = 1 - 2 = -1$. Четверка точек A, D, B, C — гармоническая.

Понятие гармонической четверки прямых одного пучка вводится точно так же, как и понятие гармонической четверки точек. *Упорядоченная четверка прямых a, b, c, d одного пучка называется гармонической, если $(ab; cd) = -1$.* Свойства гармонических четверок прямых аналогичны соответствующим свойствам гармонических четверок точек.

Рассмотрим свойства одной из фигур проективной плоскости — *полного четырехвершинника*, и определим гармонические четверки точек, естественным образом с ним связанные.

Введем следующее определение.

Определение 2. Пусть на плоскости даны четыре точки общего положения. Фигура, состоящая из этих точек и шести прямых, через них проходящих, носит название полного четырехвершинника. Точки называются вершинами, а прямые — сторонами.

На рисунке 182 изображен полный четырехвершинник $MNPQ$, точки M , N , P и Q — его вершины, а прямые MN , QP , MQ , NP , MP и NQ — стороны. Если мы выберем какую-либо сторону четырехвершинника, то среди оставшихся пяти сторон только одна не пересекается с ней в вершинах четырехвершинника. Такие стороны будем называть *противоположными*. Таким образом, MN и QP , MQ и NP , MP и NQ — пары противоположных сторон. Точки пересечения противоположных сторон будем называть *диагональными точками*. На рисунке 182 точки A , B и C — диагональные. Прямые, проходящие через диагональные точки, называются *диагоналями* полного четырехвершинника. Прямые AB , AC и BC на рис. 182 — диагонали полного четырехвершинника $MNPQ$. Таким образом, полный четырехвершинник обладает тремя диагональными точками и тремя диагоналями. Докажем следующее свойство диагональных точек.

Лемма 1. Диагональные точки полного четырехвершинника не лежат на одной прямой.

Доказательство. Так как вершины полного четырехвершинника образуют систему точек общего положения, то примем их за вершины проективного репера $R = (M, N, P, Q)$. Запишем в этом репере координаты вершин $M(1 : 0 : 0)$, $N(0 : 1 : 0)$, $P(0 : 0 : 1)$ и $Q(1 : 1 : 1)$. Уравнения сторон полного четырехвершинника, т. е. уравнения

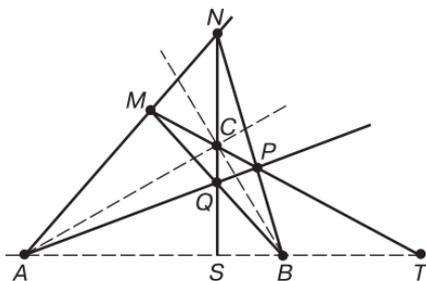


Рис. 182

координатных прямых репера R , имеют вид $MN: x_3 = 0$, $NP: x_1 = 0$, $MP: x_2 = 0$, $MQ: x_2 - x_3 = 0$, $NQ: x_1 - x_3 = 0$ и $PQ: x_1 - x_2 = 0$. Найдем координаты диагональных точек как ненулевые решения соответствующих линейных однородных систем уравнений: $A(1 : 1 : 0)$, $B(0 : 1 : 1)$ и $C(1 : 0 : 1)$. Нетрудно проверить, что определитель матрицы, составленный из координат этих точек, отличен

от нуля: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Условие (8) § 32 коллинеарности

точек A , B и C не выполнено. Лемма доказана.

Справедливо следующее замечательное свойство диагональных точек полного четырехвершинника.

Теорема 1 (гармоническое свойство полного четырехвершинника). *На каждой диагонали полного четырехвершинника пара диагональных точек гармонически делит пару точек, полученных при пересечении этой диагонали со сторонами, проходящими через третью диагональную точку.*

Доказательство. Доказательство проведем для диагонали AB полного четырехвершинника $MNPQ$ (см. рис. 182). Обозначим через S и T точки пересечения диагонали AB соответственно со сторонами MP и NQ , проходящими через третью диагональную точку C . При доказательстве леммы мы установили, что в репере $R = (M, N, P, Q)$ координаты точек A и B равны: $A(1 : 1 : 0)$, $B(0 : 1 : 1)$, а уравнения прямых MP и NQ имеют вид $MP: x_2 = 0$ и $NQ: x_1 - x_3 = 0$. Найдем уравнение прямой AB , а затем координаты точек S и T как точек пересечения прямой AB с прямыми NQ и MP .

Для нахождения уравнения прямой AB воспользуемся

уравнением (9) § 32: $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Преобразовав это

уравнение, получим $x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Координаты точки S являются ненулевым решением системы $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_3 = 0. \end{cases}$

Решая ее, находим, что $S(1 : 2 : 1)$. Аналогично, ненулевое

решение системы $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 = 0 \end{cases}$ представляет собой координаты точки $T(1: 0: -1)$. Вычислим двойное отношение $(AB; ST)$. Для этого разложим столбцы координат точек S и T по столбцам координат точек A и B :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что $\alpha = \beta = 1$, $\alpha' = 1$, $\beta' = -1$. Поэтому $(AB; ST) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'} = 1 : (-1) = -1$. Четверка точек A, B, S и T — гармоническая. Теорема доказана.

Приведенное доказательство этой теоремы является аналитическим. Интересно рассмотреть ее доказательство без использования метода координат. Обратимся к рис. 183. Осуществим центральное проектирование диагонали AB на сторону NQ из центра M . При этом проектировании точка A переходит в точку N , точка B — в точку Q , точка S — в точку S , а точка T — в точку C . Так как при центральном проектировании сохраняется двойное отношение точек (см. следствие теоремы, § 35), то $(AB; ST) = (NQ; SC)$. Рассмотрим еще одно центральное проектирование: будем проектировать сторону NQ на диагональ AB из центра P . При этом точка N преобразуется в точку B , точка Q — в точку A , точка S — в точку S , а точка C — в точку T . Поэтому $(NQ; SC) = (BA; ST)$. Таким образом, мы получили, что $(AB; ST) = (BA; ST)$. Применяя равенства (4) и (5) § 32, получим $(BA; ST) = \frac{1}{(AB; ST)}$ и $(AB; ST) = \frac{1}{(AB; ST)}$, следовательно, $(AB; ST) = -1$. Утверждение доказано.

Рассмотрим четырехвершинник $MNPQ$. Точку пересечения стороны MN с диагональю BC обозначим через D (рис. 183). Осуществим центральное проектирование диагонали AB на сторону MN из диагональной точки C . Так как при этом проектировании точка A переходит сама в себя, точка S — в точку N , точка B — в точку D , а точка T — в точку M , то, в силу следствия теоремы § 35, $(AB; ST) = (AD; NM)$. Тем самым мы доказали следствие теоремы 1.

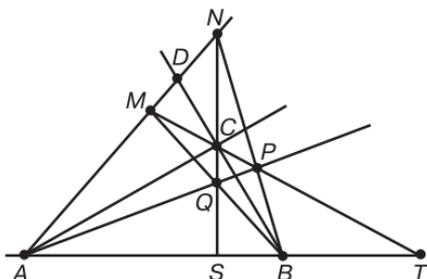


Рис. 183

Следствие 1. *Две вершины, лежащие на стороне полного четырехвершинника, гармонически делят пару точек, состоящую из диагональной точки и точки пересечения этой стороны с диагональю, проходящей через две другие диагональные точки.*

Еще раз обратимся к рис. 183. В силу доказанного следствия, $(MN; AD) = -1$. Но через точки M, N, A и D проходят соответственно стороны MP и NQ и диагонали AC и DC , принадлежащие пучку, с центром в диагональной точке C . Из определения двойного отношения прямых пучка (см. § 35) следует, что прямые MP, NQ, AC и DC образуют гармоническую четверку. Таким образом, верно еще одно следствие теоремы 1.

Следствие 2. *Две противоположные стороны полного четырехвершинника гармонически делят диагонали, проходящие через точку пересечения этих сторон.*

Гармонические свойства полного четырехвершинника имеют интересные приложения в элементарной геометрии. Мы установили, что на расширенной плоскости четвертой гармонической к точкам A, B и C , где C — середина отрезка AB , является бесконечно удаленная точка прямой AB . Используя этот факт, применим гармонические свойства полного четырехвершинника к доказательству леммы о трапеции.

Теорема 2 (лемма о трапеции). *Четырехугольник $ABCD$ тогда и только тогда является трапецией, когда точка пересечения его противоположных сторон AB и CD , точка пересечения диагоналей и середины сторон AD и BC лежат на одной прямой.*

Доказательство. Необходимость. Дополним плоскость, на которой лежит четырехугольник $ABCD$, бесконечно удаленными точками, тем самым превратим ее в расширенную плоскость. Пусть четырехугольник $ABCD$ — трапеция, AD и BC — ее основания, P — точка пересечения боковых сторон AB и CD , а Q — точка пересечения диагоналей AC и BD . Докажем, что точки M и N пересечения прямой PQ с основаниями BC и AD служат их серединами (рис. 184). Примем точки B, P, C и Q за вершины полного четырехвершинника. Тогда A, D и M служат его диагональными точками, прямая AD — диагональю, а N — точкой пересечения стороны PQ с диагональю AD . Так как прямые BC и AD по условию параллельны, то точка пересечения стороны BC четырехвершинника $BPCQ$ с диагональю AD является бесконечно удаленной точкой R_∞ прямой AD . С другой стороны, из теоремы 1 следует, что $(AD; NR_\infty) = -1$. Отсюда вытекает, что N — середина отрезка AD . Рассмотрим теперь сторону BC четырехвершинника $BPCQ$. Из следствия 1 теоремы 1 получим, что вершины B и C гармонически делят пару, состоящую из диагональной точки M , принадлежащей этой стороне, и точки пересечения стороны BC с диагональю AD . Но точка пересечения BC и AD в силу параллельности этих прямых совпадает с R_∞ . Поэтому $(BC; MR_\infty) = -1$ и, следовательно, M — середина отрезка BC .

Достаточность. Дан четырехугольник $ABCD$, противоположные стороны AB и CD которого пересекаются в точке P . Точку пересечения его диагоналей AC и BD обозначим через Q . Дано, что прямая PQ пересекает вторую пару противоположных сторон AD и BC в их серединах M и N . Требуется доказать, что данный четырехугольник — трапеция (рис. 184). Будем предполагать, что плоскость дополнена бесконечно удаленными точками, рассматриваемый четырехугольник лежит на расширенной плоскости. Рассмотрим четырехвершинник $BPCQ$, A, D и M служат его диагональными точками, прямая AD — его диагональ, а N — точка пересечения стороны BC с диагональю AD . Обозначим точку пересечения диагонали AD со стороной BC через R . Из теоремы 2 следует, что $(AD; NR) = -1$. Так как N — середина отрезка AD , то R — бесконечно удаленная точка прямой AD . Поэтому прямые AD и BC параллельны. Утверждение доказано.

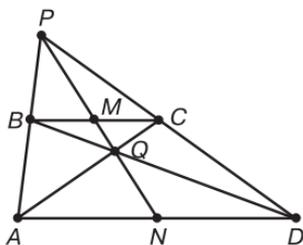


Рис. 184

Лемма о трапеции позволяет решить ряд задач на построение, выполняемых одной линейкой. Рассмотрим одну из них.

Задача 3. На плоскости дан отрезок AD , отмечена его середина N и дана точка B , не принадлежащая прямой AD . Требуется с помощью одной линейки построить прямую, проходящую через B и параллельную прямой AD .

Решение. Обратимся к рис. 184. Нам достаточно построить полный четырехвершинник $BPCQ$, одна из вершин которого совпадает с точкой B , точки A и D служат его диагональными точками, а точка M является точкой пересечения стороны PQ с диагональю AD . Тогда из леммы о трапеции следует, что прямая BC параллельна AD . Строим:

- 1) произвольную точку P на прямой AB ;
- 2) прямую PN ;
- 3) прямую BD ;
- 4) точку Q пересечения прямых PN и BD ;
- 5) прямую AQ ;
- 6) прямую PD ;
- 7) точку C пересечения прямых AQ и PD ;
- 8) прямую BC .

Мы построили четырехугольник $ABCD$, для которого точка P является точкой пересечения противоположных сторон AB и CD , Q — точкой пересечения диагоналей AC и BD , а точка N пересечения прямой PQ со стороной AD служит серединой отрезка AD . По теореме 2, четырехугольник $ABCD$ — трапеция. Прямая BC — искомая.

§ 37. ПРОЕКТИВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПРЯМЫХ И ПУЧКОВ

Известно, что геометрические преобразования лежат в основе изучения геометрических свойств фигур. Проективная геометрия рассматривает те свойства фигур, которые инвариантны, т. е. неизменны, при проективных преобразованиях. Мы начнем с изучения свойств проективных отображений прямых и пучков.

Определение 1. Если при взаимно однозначном отображении точек одной прямой на точки другой сохраняется двойное отношение точек, то такое отображение называется проективным.

Таким образом, если $f: l \rightarrow l'$ — проективное отображение прямой l на прямую l' , то оно биективное и для любых четырех точек A, B, C и D прямой l $(AB; CD) = (A'B'; C'D')$, где $A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C), D' = f(D)$.

Приведем пример проективного отображения. Рассмотрим две прямые l и l' и выберем точку O , им не принадлежащую. Каждой точке A прямой l поставим в соответствие точку A' прямой l' , которая коллинеарна с точками

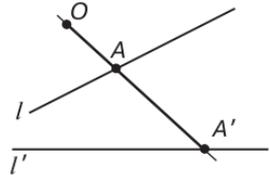


Рис. 185

образом точки A при центральном проектировании прямой l на прямую l' из центра O . При центральном проектировании прямой на прямую, в силу следствия теоремы, доказанной в § 35, сохраняется двойное отношение точек. Таким образом, центральное проектирование является проективным отображением одной прямой на другую. Его мы также будем называть *перспективным*, а центр проекции — *центром перспективы*. Докажем основное свойство проективных отображений прямых.

Теорема 1. Пусть даны две прямые l и l' и даны реперы $R = (A_1, A_2, E)$ и $R' = (A'_1, A'_2, E')$ этих прямых. Тогда существует единственное проективное отображение $f: l \rightarrow l'$ прямой l на прямую l' , при котором $f(A_1) = A'_1, f(A_2) = A'_2, f(E) = E'$.

Доказательство. Докажем существование такого отображения. Рассмотрим произвольную точку M прямой l . Пусть ее координаты относительно репера R равны t_1

и $m_2: M(m_1 : m_2)_R$. Поставим ей в соответствие точку M' прямой l' , которая имеет те же координаты m_1 и m_2 относительно репера R' : $M'(m_1 : m_2)_{R'}$. Мы имеем отображение φ прямой l на прямую l' . Очевидно, φ — взаимно однозначное отображение. Ясно также, что точкам A_1, A_2 и E прямой l соответствуют точки A'_1, A'_2 и E' прямой l' . Докажем инвариантность двойного отношения при отображении φ . Пусть дана четверка различных точек A, B, C, D прямой l . Известны их координаты в репере R : $A(a_1 : a_2)_R, B(b_1 : b_2)_R, C(c_1 : c_2)_R, D(d_1 : d_2)_R$. Для вычисления двойного отношения точек по их координатам (см. § 34) следует найти коэффициенты разложения столбцов, составленных из координат точек C и D , по столбцам координат точек A и B :

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \alpha' \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \beta' \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

тогда $(AB; CD) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'}$. Пусть $A' = \varphi(A), B' = \varphi(B), C' = \varphi(C), D' = \varphi(D)$ — образы точек A, B, C, D при отображении φ . Тогда эти точки имеют те же координаты, что и их образы, но уже относительно репера R' : $A'(a_1 : a_2)_{R'}, B'(b_1 : b_2)_{R'}, C'(c_1 : c_2)_{R'}, D'(d_1 : d_2)_{R'}$. Отсюда следует, что коэффициенты разложения столбцов из координат точек C' и D' по столбцам координат точек A' и B' определяются по тем же формулам (1), что и для их прообразов A, B, C, D . Поэтому $(A'B'; C'D') = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'} = (AB; CD)$.

Докажем единственность такого отображения. Для этого достаточно проверить, что произвольное проективное отображение $f: l \rightarrow l'$, переводящее репер R прямой l в репер R' прямой l' , совпадает с φ . Рассмотрим произвольную точку X прямой l . Так как отображения f и φ проективные и $\varphi(A_1) = f(A_1) = A'_1, \varphi(A_2) = f(A_2) = A'_2, \varphi(E) = f(E) = E'$, то $(A_1A_2; EX) = (A'_1A'_2; E'\varphi(X)) = (A'_1A'_2; E'f(X))$. В силу свойства 1 двойного отношения точек (см. § 34), $\varphi(X) = f(X)$. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть дано проективное отображение f прямой l на прямую l' , переводящее репер $R = (A_1, A_2, E)$ прямой l в репер $R' = (A'_1, A'_2, E')$ прямой l' . Если точка M прямой l имеет координаты m_1 и m_2 относительно

репера R , то координаты ее образа $M' = f(M)$ относительно репера R' также равны t_1 и t_2 .

Справедливость этого утверждения легко объяснить. При доказательстве теоремы 1 мы построили проективное отображение, удовлетворяющее требуемому условию. В силу единственности такого отображения оно будет совпадать с любым другим проективным отображением одной прямой на другую, переводящим R в R' .

Установим признак перспективности проективного отображения одной прямой на другую.

Теорема 2. *Проективное отображение f прямой l на прямую l' тогда и только тогда является перспективным, когда точка M пересечения прямых l и l' как точка прямой l отображается в ту же точку M прямой l' : $f(M) = M$.*

Доказательство. Необходимость этого утверждения очевидна. Если f — перспективное отображение, то $f(M) = M$. Докажем достаточность. Пусть $f(M) = M$. Выберем на прямой l две произвольные точки A и B , не совпадающие с точкой M . Рассмотрим их образы $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ на прямой l' (рис. 186). При отображении f репер $R = (A, B, M)$ прямой l отображается в репер $R' = (A', B', M)$ прямой l' . Обозначим через O точку пересечения прямых AA' и BB' , а через φ — перспективное отображение прямой l на прямую l' из центра O . Тогда $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$, $\varphi(M) = M'$. Таким образом, при перспективном отображении φ репер R прямой l отображается в репер R' прямой l' . Из теоремы 1 следует, что отображения f и φ совпадают друг с другом. Теорема доказана.

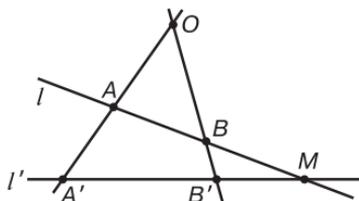


Рис. 186

К перспективным отображениям, как покажет следующее утверждение, «сводится» любое проективное отображение прямых.

Теорема 3. *Даны две различные прямые l и l' . Если отображение f прямой l на прямую l' является проективным, то оно совпадает с произведением двух перспективных отображений.*

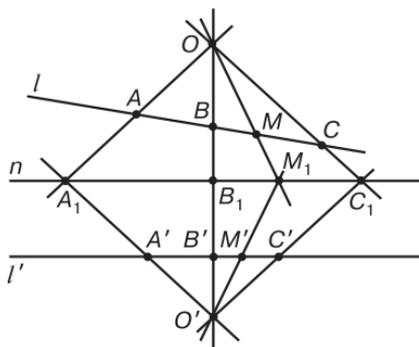


Рис. 187

Доказательство. Рассмотрим произвольный репер $R = (A, B, C)$ прямой l . Пусть при отображении f он отображается в репер $R' = (A', B', C')$ прямой l' : $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$.

Рассмотрим прямую BB' и выберем на ней две произвольные точки O и O' , отличные от точек B и B' (рис. 187). Проведем прямые OA и $O'A'$ и точку их пересечения обозначим через A_1 . Аналогично, построив прямые OC и $O'C'$, точку их пересечения обозначим через C_1 . Рассмотрим прямую n , проходящую через точки A_1 и C_1 , обозначим через B_1 точку ее пересечения с прямой BB' . Рассмотрим центральное проектирование φ прямой l на прямую n из точки O . При этом перспективном отображении репер $R = (A, B, C)$ прямой l преобразуется в репер $R_1 = (A_1, B_1, C_1)$ прямой n . Рассмотрим еще одно центральное проектирование φ' теперь уже прямой n на прямую l' из центра O' . При проектировании φ' репер $R_1 = (A_1, B_1, C_1)$ отображается на репер $R' = (A', B', C')$ прямой l' . Таким образом, при произведении перспективных отображений $\varphi' \circ \varphi$ прямая l

отображается на прямую l' , а репер $R = (A, B, C)$ прямой l — в репер $R' = (A', B', C')$ прямой l' . Очевидно, $\varphi' \circ \varphi$ — проективное отображение прямой l на прямую l' . В силу теоремы 1, отображения $f = \varphi' \circ \varphi$. Теорема доказана.

Таким образом, проективное отображение одной прямой на прямую, отличную от нее, либо является центральным проектированием, либо — произведением двух центральных проектирований. Используем теорему 3 при решении следующей задачи.

Задача 1. Даны две прямые l и l' и точка M на прямой l . Проективное отображение $f: l \rightarrow l'$ определено с помощью реперов $R = (A, B, C)$ и $R' = (A', B', C')$: $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$. Требуется построить образ точки M .

Решение. Обратимся к рис. 187. Заметим, что $f = \varphi' \circ \varphi$, где φ — центральное проектирование прямой l на прямую n из точки O , а φ' — центральное проектирование прямой n на прямую l' из центра O' . Спроектируем точку M из точки O на прямую n , получим точку M_1 . Спроектируем точку M_1 из точки O' на прямую l' , получим искомый образ M' точки M .

Рассмотрим свойства проективных преобразований прямой на проективной плоскости. Введем следующее определение.

Определение 2. Взаимно однозначное отображение прямой на себя называется проективным преобразованием, если оно сохраняет двойное отношение точек.

Таким образом, проективное преобразование прямой представляет собой проективное отображение этой прямой на себя. Поэтому для него выполнено основное свойство проективных отображений.

Теорема 4 (основное свойство проективных преобразований прямой). Пусть на проективной прямой даны два репера $R = (A_1, A_2, E)$ и $R' = (A'_1, A'_2, E')$. Тогда существует единственное проективное преобразование этой прямой, при котором $f(A_1) = A'_1$, $f(A_2) = A'_2$, $f(E) = E'$.

При доказательстве основного свойства проективных отображений прямых (см. теорему 1 § 37) мы установили, что проективное отображение одной прямой на другую,

переводящее репер R одной прямой в репер R' другой, сохраняет координаты точек относительно этих реперов. Поэтому справедливо следующее следствие основной теоремы проективных преобразований прямой.

Следствие 2. Пусть дано проективное преобразование f прямой, переводящее репер $R = (A_1, A_2, E)$ в репер $R' = (A'_1, A'_2, E')$. Если точка M имеет координаты t_1 и t_2 относительно репера R , то координаты ее образа $M' = f(M)$ относительно репера R' также равны t_1 и t_2 .

Легко доказать следующее групповое свойство проективных преобразований прямой.

Теорема 5. Множество проективных преобразований прямой образует группу преобразований.

Для доказательства достаточно проверить, что произведение проективных преобразований и обратное преобразование к проективному также являются проективными преобразованиями. Рассуждения проведите самостоятельно. Нами была доказана теорема 3, из которой следовало, что проективное отображение одной прямой на другую совпадает с произведением двух перспективных отображений.

Теорема 6. Проективное преобразование прямой совпадает с произведением трех перспективных отображений прямых.

Доказательство. Рассмотрим проективное преобразование f прямой g , произвольную прямую l и некоторую точку Q , не принадлежащую прямым g и l . Обозначим через ψ перспективное отображение g на l из центра Q . По теореме 3 настоящего параграфа, проективное отображение одной прямой на другую равно произведению двух перспективных отображений. Поэтому $\psi \circ f = \varphi_1 \circ \varphi_2$, где φ_1 и φ_2 — перспективные отображения. Отсюда следует, что $f = \psi^{-1} \circ \varphi_1 \circ \varphi_2$. Отображение ψ^{-1} , как нетрудно проверить, представляет собой перспективное отображение прямой l на прямую g из того же центра Q . Свойство доказано.

Рассмотрим свойства особых проективных преобразований прямых, так называемых инволюций.

Определение 3. Преобразование прямой называется инволюцией, если оно отлично от тождественного преобразования и совпадает со своим обратным.

Таким образом, если проективное преобразование прямой f является инволюцией, то $f \neq e$ и $f \circ f = e$, где e — тождественное преобразование.

Приведем пример инволюции. Пусть дана прямая l . Рассмотрим на ней два репера $R = (A, B, E)$ и $R' = (A, B, E')$, где точка E' удовлетворяет условию $(AB; EE') = -1$. В соответствии с основным свойством проективных преобразований прямой, существует единственное проективное преобразование f , переводящее репер R в репер R' . Покажем, что оно является инволюцией. Так как точка E не совпадает с точкой E' , то f отлично от тождественного преобразования. Пусть M — произвольная точка данной прямой, отличная от A, B, E и E' , координаты которой относительно репера R равны $M(m_1 : m_2)_R$. Тогда из следствия теоремы 1 вытекает, что координаты точки M' относительно репера R' имеют те же координаты: $M'(m_1 : m_2)_{R'}$. В § 34 мы установили, что если на прямой дан репер $R = (A, B, E)$ и дана точка M , не совпадающая с координатными точками репера, и если ее координаты относительно данного репера равны $M(m_1 : m_2)_R$, то $(AB; EM) = \frac{m_1}{m_2}$. Таким образом,

$$(AB; EM) = (AB; E'M') = \frac{m_1}{m_2}. \quad (2)$$

Воспользуемся свойством 4 двойных отношений точек прямой, доказанным в § 34: для любых пяти различных точек A, B, C, D и P прямой выполнено соотношение

$$\frac{(AB; PD)}{(AB; PC)} = (AB; CD). \quad (3)$$

Применим равенство (3) к точкам A, B, E, E' и M : $\frac{(AB; EM)}{(AB; EE')} = (AB; E'M)$. Так как A, B, E и E' — гармоническая четверка точек, то $(AB; EE') = -1$. Поэтому $(AB; EM) = -(AB; E'M)$. Из равенства (2) следует, что

$$(AB; E'M) = -\frac{m_1}{m_2}. \quad (4)$$

Применим еще раз равенство (3) к точкам A, B, E', M и M' . Из (2) и (4) получим $\frac{(AB; E'M)}{(AB; E'M')} = (AB; MM') = -1$.

Таким образом, преобразование f каждой точке M прямой ставит в соответствие точку M' , гармонически делящую вместе с точкой M пару точек A, B . Докажем, что f — инволюция. Пусть M'' — образ точки M' при преобразовании f : $M'' = f(M')$. Так как $(AB; MM') = -1$, то из свойств двойных отношений точек (см. § 34) следует, что $(AB; MM') = \frac{1}{(AB; M'M)}$. Поэтому $(AB; M'M) = -1$. С другой стороны, так как $M'' = f(M')$, то $(AB; M'M'') = -1$, т. е. $(AB; M'M) = (AB; M'M'')$. Следовательно, $M'' = M$. Преобразование f — инволюция.

Если при некотором геометрическом преобразовании образ точки совпадает с ее прообразом, то она называется неподвижной или инвариантной. В приведенном нами примере инволюции имеет две инвариантные точки A и B . Инволюция обладает следующим интересным свойством.

Теорема 7. *Инволюция либо не имеет инвариантных точек, либо имеет их ровно две.*

Доказательство. Предположим, что инволюция f имеет три инвариантные точки A, B и C : $f(A) = A$, $f(B) = B$, $f(C) = C$. Отображение f переводит репер $R = (A, B, C)$ в себя. Но тождественное преобразование e также переводит этот репер в себя. Поэтому, как следует из основного свойства проективных преобразований, f совпадает с тождественным преобразованием, чего в соответствии с определением 3 не может быть. Таким образом, инволюция не может иметь более двух неподвижных точек.

Нам осталось доказать, что инволюция не может иметь ровно одну инвариантную точку. Предположим, что на прямой существует только одна точка A , для которой $f(A) = A$. Рассмотрим произвольную точку M , отличную от A . Обозначим через M' ее образ: $M' = f(M)$. Тогда $f(M') = M$. Рассмотрим точку B прямой, которая вместе с точкой A гармонически делит пару точек M и M' : $(MM'; AB) = -1$. Пусть $f(B) = B'$. Так как инволюция f — проективное преобразование, то $(MM'; AB) = (f(M)f(M'); f(A)f(B)) = -1$. Но $f(M) = M'$, $f(M') = M$, $f(A) = A$ и $f(B) = B'$. Поэтому $(M'M; AB') = (MM'; AB) = -1$. Из свойств двойных отношений точек прямой, доказанных в § 34, следует, что $(M'M; AB') = (MM'; AB')$ (выкладки проведите самостоятель-

но). Таким образом, $(MM'; AB) = (MM'; AB')$. Отсюда следует, что $B = B'$, B' — вторая инвариантная точка инволюции. Теорема доказана.

Инволюция, которая имеет две инвариантные точки, называется *гиперболической*, если у нее инвариантных точек нет, то она носит название *эллиптической*. Из доказательства теоремы 7 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 3. *Пара инвариантных точек гиперболической инволюции гармонически делит любую несовпадающую с ней пару соответствующих точек этой инволюции.*

Интересно отметить, что если расширить проективную плоскость точками, координатами которых служат комплексные числа, то эллиптическая инволюция будет иметь две инвариантные точки с комплексно сопряженными координатами. Перейдем к изучению свойств понятия проективного отображения пучков прямых.

Определение 4. *Если при взаимно однозначном отображении прямых одного пучка на прямые другого пучка сохраняется двойное отношение прямых, то такое отображение называется проективным.*

Легко видеть, что определение 4 соответствует по принципу двойственности определению 1 проективного отображения точек прямых. Применяя этот принцип, изучим свойства проективного отображения пучков. Приведем пример проективного отображения одного пучка на другой. Пусть даны два пучка прямых с центрами в точках L и L' . Рассмотрим произвольную прямую o , не принадлежащую этим пучкам. Выберем прямую a первого пучка. Она пересекает прямую o в некоторой точке $A: a = LA$. Поставим ей в соответствие прямую $a' = L'A$ второго пучка (рис. 188). Очевидно, построенное отображение прямых одного пучка

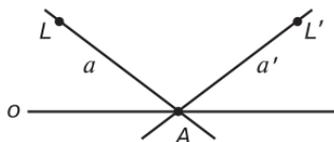


Рис. 188

на прямые другого является взаимно однозначным. В силу определения двойного отношения прямых пучка, при этом отображении сохраняется двойное отношение прямых. Такое отображение будем называть *перспективным*, а прямую o — *осью перспективного отображения*. Ясно, что перспективное отображение одного пучка на другой соответствует по принципу двойственности перспективному отображению прямых. Рассмотрим основное свойство проективных отображений пучков прямых.

Теорема 8. *Даны два пучка прямых и даны две тройки прямых этих пучков a_1, a_2 и e , принадлежащая первому пучку, и a'_1, a'_2 и e' , принадлежащая второму. Тогда существует единственное проективное отображение f первого пучка на второй, при котором $f(a_1) = a'_1, f(a_2) = a'_2, f(e) = e'$.*

Сформулированное утверждение двойственно теореме 1, его доказательство мы не приводим. Применим принцип двойственности к теоремам 2 и 3. Получим следующие утверждения.

Теорема 9. *Проективное отображение f пучка с центром в точке L на пучок с центром в точке L' тогда и только тогда является перспективным, когда общая прямая $t = LL'$ этих пучков как прямая первого пучка отображается в ту же прямую t второго пучка.*

Теорема 10. *Даны два различных пучка. Если отображение первого пучка на второй является проективным, то оно совпадает с произведением двух перспективных отображений.*

И, наконец, решим задачу, двойственную задаче 1.

Задача 2. *Даны два пучка прямых с центрами в точках L и L' и прямая t первого пучка. Проективное отображение f первого пучка на второй отображает три прямые a, b и c первого пучка в три прямые a', b' и c' второго. Требуется построить образ прямой t .*

Решение. Решение задачи проиллюстрировано на рис. 189. Применим принцип двойственности к доказательству теоремы 3 и решению задачи 1. Через точку пересечения прямых b и b' (она соответствует по принципу двойственности прямой BB' на рис. 187) проведем две

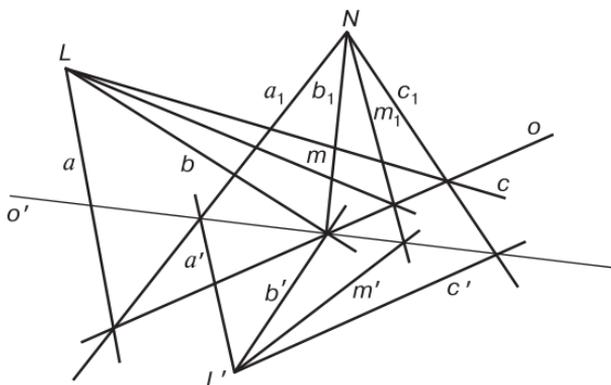


Рис. 189

произвольные прямые o и o' , не совпадающие с прямыми b и b' (сравните с рис. 187, точки O и O'). Рассмотрим точки пересечения прямых a и o , а также прямых a' и o' . Проведем через них прямую a_1 (сравните с рис. 187, точка A_1). Аналогично, через точки пересечения прямых c и o , c' и o' проведем прямую c_1 (сравните с рис. 187, точка C_1). Точку пересечения прямых a_1 и c_1 обозначим через N (на рис. 187 прямая n). Тогда данное отображение f является произведением двух перспективных отображений: пучок с центром в точке L отображается на пучок с центром в точке N , ось перспективы которого — прямая o , затем пучок с центром в точке N отображается на пучок с центром в точке L' с осью перспективы o' (проверьте самостоятельно). Рассмотрим прямую m первого пучка. Найдем точку ее пересечения с прямой o и проведем через эту точку и точку N прямую m_1 (сравните с рис. 187, точка M_1). Построим точку пересечения прямой m_1 с прямой o' и проведем через нее и центр L' искомую прямую m' . Задача решена.

§ 38. ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ

Перейдем к изучению проективных преобразований плоскости.

Определение 1. Преобразование проективной плоскости называется проективным, если оно коллинеарные точки преобразует в коллинеарные и сохраняет двойное отношение точек.

Таким образом, проективное преобразование f плоскости представляет собой взаимно однозначное отображение плоскости на себя, при котором точки A, B, \dots, M , принадлежащие одной прямой, преобразуются в точки $f(A), f(B), \dots, f(M)$, также принадлежащие одной прямой, и для любых четырех коллинеарных точек A, B, C и D выполняется $(AB; CD) = (f(A)f(B); f(C)f(D))$. Проективные преобразования обладают рядом свойств, аналогичных свойствам аффинных преобразований.

Свойство 1. При проективном преобразовании образы точек, не принадлежащих прямой, также не принадлежат прямой.

Доказательство. Пусть существуют три неколлинеарные точки A, B и C такие, что их образы $A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C)$ лежат на одной прямой m . Выберем произвольную точку K плоскости и проведем через нее прямую, которая пересекает прямую AB в точке P , не совпадающей с точкой A . Тогда она пересечет прямую AC в некоторой точке Q , также отличной от A (рис. 190). Обозначим образы точек K, P и Q через $K' = f(K), P' = f(P), Q' = f(Q)$. Так как точки A, B и P коллинеарны, то их образы A', B' и P' принадлежат одной прямой, т. е. лежат на прямой m . Аналогично, точки A, C и Q также коллинеарны, откуда следует, что их образы A', C' и Q' являются точками той же прямой m . Точка K лежит на прямой PQ , поэтому ее образ принадлежит прямой $P'Q'$, т. е. прямой m . Мы получили, что образ любой точки плоскости принадлежит прямой m . Нарушено условие взаимной однозначности для отображения f . Свойство доказано.

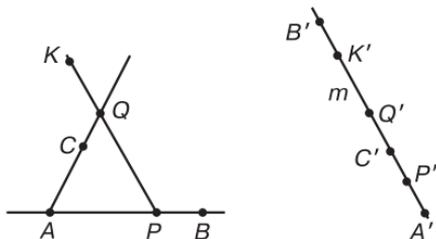


Рис. 190

Так как проективный репер состоит из упорядоченной четверки точек общего положения, то в силу доказанного свойства *при проективном преобразовании репер преобразуется в репер.*

Свойство 2. *Образом прямой при проективном преобразовании является прямая линия.*

Доказательство. Пусть дано проективное преобразование f плоскости. Рассмотрим произвольную прямую m . Выберем на ней две точки A и B . Обозначим через A' и B' их образы при преобразовании f , а через m' — прямую $A'B'$. Докажем, что $f(m) = m'$. Так как при проективном преобразовании коллинеарные точки преобразуются в коллинеарные, то образ любой точки, принадлежащей прямой m , принадлежит прямой m' . Следовательно, $f(m) \subseteq m'$. Для доказательства утверждения следует рассмотреть произвольную точку N' прямой m' и показать, что ее прообраз принадлежит прямой m . Для этого выберем на прямой m точку D , не совпадающую с точкой A или B , и рассмотрим ее образ $D' = f(D)$, принадлежащий прямой m' . Если точка D' совпадает с точкой N' , то утверждение доказано. Пусть точка D' не совпадает с точкой N' и $(A'B'; D'N') = \lambda$. Выберем на прямой m такую точку N , для которой $(AB; DN) = \lambda$. Так как при проективном преобразовании сохраняется двойное отношение точек, то $(A'B'; D'f(N)) = \lambda$. Отсюда следует, что $f(N) = N'$. Точка N прямой m является прообразом точки N' . Свойство доказано.

Из доказанного свойства вытекает следующее утверждение.

Свойство 3. *Если дано преобразование f плоскости, две прямые m и n , и если точка P совпадает с точкой пересечения прямых m и n , то точка $f(P)$ является точкой пересечения прямых $f(m)$ и $f(n)$.*

Доказательство этого свойства очевидно. Точка P принадлежит прямым m и n , поэтому ее образ $f(P)$ принадлежит прямым $f(m)$ и $f(n)$, т. е. является их точкой пересечения.

Свойство 4. *Множество проективных преобразований плоскости образует группу.*

Доказательство. Достаточно доказать, что произведение двух проективных преобразований и обратное к проективному преобразованию являются проективными преобразова-

ниями. Доказательство того, что произведение проективных преобразований — проективное преобразование, вытекает из определения 1 (проведите его самостоятельно). Докажем, что обратное преобразование к проективному также является проективным. Пусть f — данное проективное преобразование. Рассмотрим три точки A, B и C , принадлежащие одной прямой, и введем обозначения: $A_1 = f^{-1}(A)$, $B_1 = f^{-1}(B)$, $C_1 = f^{-1}(C)$. Пусть точки A_1, B_1 и C_1 не лежат на одной прямой. Так как $f(A_1) = A$, $f(B_1) = B$, $f(C_1) = C$, то точки A, B и C , в силу свойства 2, также неколлинеарные, что противоречит условию. Таким образом, преобразование f^{-1} сохраняет коллинеарность точек. Пусть четыре различные точки A, B, C и D принадлежат одной прямой. Рассмотрим их образы при обратном преобразовании $A_1 = f^{-1}(A)$, $B_1 = f^{-1}(B)$, $C_1 = f^{-1}(C)$, $D_1 = f^{-1}(D)$. Так как преобразование f проективное, т. е. оно сохраняет двойное отношение точек и $f(A_1) = A$, $f(B_1) = B$, $f(C_1) = C$, $f(D_1) = D$, то $(A_1B_1; C_1D_1) = (AB; CD)$. Поэтому при обратном преобразовании также сохраняется двойное отношение точек. Следовательно, f^{-1} — проективное преобразование. Свойство доказано.

Для проективных преобразований плоскости справедливо свойство, аналогичное основному свойству проективных преобразований прямой.

Теорема 1 (основное свойство проективных преобразований плоскости). Пусть на плоскости даны два репера $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ и $R' = (A'_1, A'_2, A'_3, E')$. Тогда существует единственное преобразование плоскости, переводящее репер R в репер R' .

Доказательство. Прежде всего докажем существование такого преобразования. Рассмотрим произвольную точку M плоскости, координаты которой относительно репера R равны $M(m_1 : m_2 : m_3)_R$. Поставим ей в соответствие такую точку M' плоскости, координаты которой относительно репера R' также равны m_1, m_2 и m_3 : $M'(m_1 : m_2 : m_3)_{R'}$. Обозначим это соответствие через φ . Очевидно, что φ является взаимно однозначным отображением плоскости на себя, т. е. преобразованием. Ясно также, что в силу определения преобразования φ , сохраняется условие коллинеарности точек в координатах (см. § 32). Поэтому колли-

неарные точки преобразуются в коллинеарные. Аналогично, из правила вычисления двойных отношений точек по их координатам (см. § 34) следует, что при преобразовании φ сохраняется двойное отношение точек. Преобразование φ — проективное. Так как точка A_1 имеет координаты $A_1(1 : 0 : 0)_R$, то ее образ имеет те же координаты относительно репера R' : $\varphi(A_1)(1 : 0 : 0)_{R'}$. Поэтому точка $\varphi(A_1)$ совпадает с точкой A'_1 . Аналогично доказывается, что $\varphi(A_2) = A'_2$, $\varphi(A_3) = A'_3$, $\varphi(E) = E'$. Мы доказали существование преобразования, переводящего репер R в репер R' .

Для доказательства единственности такого преобразования покажем, что всякое преобразование плоскости, переводящее репер R в репер R' , сохраняет координаты точек относительно реперов R и R' , т. е. совпадает с φ . Рассмотрим произвольное проективное преобразование f плоскости, переводящее репер R в репер R' . Выберем произвольную точку M плоскости, не принадлежащую координатным прямым репера R . Обозначим через M' образ точки M при преобразовании f : $M' = f(M)$. Проведем прямые A_1E и A_1M , обозначим их точки пересечения с прямой A_2A_3 через E_1 и M_1 . Аналогично, спроектируем точки E и M из центра A_3 на прямую A_1A_2 , получим точки E_3 и M_3 . Такие же построения проведем для репера R' и точек E' и M' , получим точки E'_1 , M'_1 , E'_3 и M'_3 (рис. 191). Пусть координаты точки M относительно репера R равны $M(m_1 : m_2 : m_3)_R$, а координаты точки M' относительно репера R' имеют вид $M'(m'_1 : m'_2 : m'_3)_{R'}$. Докажем, что тройка чисел $(m_1 : m_2 : m_3)$ пропорциональна тройке $(m'_1 : m'_2 : m'_3)$. Так как при преобразовании f точки A_1 , A_2 , A_3 , E преобразуются в точки A'_1 , A'_2 , A'_3 , E' , то, в силу свойства 3, точка E_1 как точка пересечения прямых A_1E и A_2A_3 преобразуется в точку пересечения прямых A'_1E' и $A'_2A'_3$, т. е. в точку E'_1 . Аналогично доказывается, что $f(E_3) = E'_3$, $f(M_1) = M'_1$, $f(M_3) = M'_3$. Так как при проективном преобразовании сохраняются двойные отношения точек, то

$$(A_1A_2; E_3M_3) = (A'_1A'_2; E'_3M'_3),$$

$$(A_1A_2; E_3M_3) = (A'_2A'_3; E'_1M'_1).$$

(1)

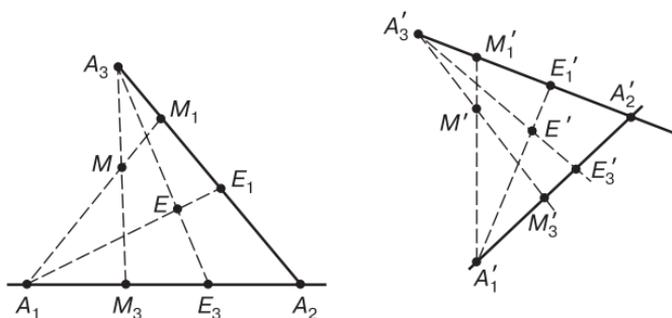


Рис. 191

Применим лемму 3 § 34. Из нее следует, что $(A_1A_2; E_3M_3) = \frac{m_1}{m_2}$ и $(A_2A_3; E_1M_1) = \frac{m_2}{m_3}$, $(A_1A_2; E_3M_3) = \frac{m'_1}{m'_2}$ и $(A_2A_3; E_1M_1) = \frac{m'_2}{m'_3}$. Из равенств (38) следует, что $\frac{m_1}{m_2} = \frac{m'_1}{m'_2}$ и $\frac{m_2}{m_3} = \frac{m'_2}{m'_3}$. Тройки чисел $(m_1 : m_2 : m_3)$ и $(m'_1 : m'_2 : m'_3)$ пропорциональны.

Если точка M лежит на координатных прямых репера R , то для доказательства следует воспользоваться леммой 4 § 34. Рассуждения проведите самостоятельно. Теорема доказана.

Следствие 1. Если проективное преобразование имеет четыре инвариантные точки общего положения, то оно совпадает с тождественным.

Для доказательства достаточно принять данные точки за базисные точки проективной системы координат. Тогда и данное и тождественное преобразования переводят этот репер в себя. Поэтому они совпадают. Из основного свойства проективных преобразований вытекает еще одно следствие.

Следствие 2. Если проективное преобразование f преобразует репер $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ в репер $R' = (A'_1, A'_2, A'_3, E')$, то оно каждой точке M плоскости с координатами $M(m_1 : m_2 : m_3)_R$ относительно репера R ставит в соответствие точку M' с теми же координатами относительно репера R' .

Выведем аналитическое выражение проективного преобразования. На проективной плоскости зададим репер

$R = (A_1, A_2, A_3, E)$. Рассмотрим проективное преобразование f , которое репер $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ переводит в репер $R' = (A'_1, A'_2, A'_3, E')$. Выберем произвольную точку $M(x_1 : x_2 : x_3)_R$ и рассмотрим ее образ — точку $M'(x'_1 : x'_2 : x'_3)_R$. Будем считать, что нам известны координаты базисных точек репера R' относительно репера R :

$$\begin{aligned} &A'_1(a_{11} : a_{21} : a_{31})_R, \quad A'_2(a_{12} : a_{22} : a_{32})_R, \\ &A'_3(a_{13} : a_{23} : a_{33})_R, \quad E'(a_{10} : a_{20} : a_{30})_R. \end{aligned} \tag{2}$$

Заметим, что матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

столбцы которой составлены из координат базисных точек репера, невырождена.

Искомые аналитические выражения представляют собой зависимости между координатами точки M и ее образа M' , вычисленными относительно одного и того же репера R . Для их определения воспользуемся результатами, полученными в § 32. Нам были даны два репера $R(A_1, A_2, A_3, E)$ и $R'(A'_1, A'_2, A'_3, E')$. Координаты точек второго репера относительно первого имели вид (2). В этих условиях были определены формулы перехода от первого репера ко второму, т. е. зависимости между координатами одной и той же точки относительно этих реперов. Если точка Y имеет координаты $Y(y_1 : y_2 : y_3)_R$ в репере R и координаты $Y(y'_1 : y'_2 : y'_3)_{R'}$ в репере R' , то

$$\begin{cases} \rho y_1 = k_1 a_{11} y'_1 + k_2 a_{12} y'_2 + k_3 a_{13} y'_3, \\ \rho y_2 = k_1 a_{21} y'_1 + k_2 a_{22} y'_2 + k_3 a_{23} y'_3, \\ \rho y_3 = k_1 a_{31} y'_1 + k_2 a_{32} y'_2 + k_3 a_{33} y'_3, \end{cases} \tag{4}$$

где коэффициенты k_1 , k_2 и k_3 определяются как решение линейной системы уравнений

$$\begin{cases} a_{10} = k_1 a_{11} + k_2 a_{12} + k_3 a_{13}, \\ a_{20} = k_1 a_{21} + k_2 a_{22} + k_3 a_{23}, \\ a_{30} = k_1 a_{31} + k_2 a_{32} + k_3 a_{33}. \end{cases} \tag{5}$$

Пусть координаты точки M относительно репера R равны $M(x_1 : x_2 : x_3)_R$. Рассмотрим точку $M' = f(M)$. Относительно репера R она имеет координаты $M'(x'_1 : x'_2 : x'_3)_R$, а относительно репера R' ее координаты, как вытекает из

следствия 2 теоремы 1, равны $M'(x_1 : x_2 : x_3)_{R'}$. Применим формулы перехода (4) к координатам точки M' . В этих соотношениях мы должны заменить y_1, y_2, y_3 на x'_1, x'_2, x'_3 , а y'_1, y'_2, y'_3 на x_1, x_2, x_3 . Получим

$$\begin{cases} \rho x'_1 = k_1 a_{11} x_1 + k_2 a_{12} x_2 + k_3 a_{13} x_3, \\ \rho x'_2 = k_1 a_{21} x_1 + k_2 a_{22} x_2 + k_3 a_{23} x_3, \\ \rho x'_3 = k_1 a_{31} x_1 + k_2 a_{32} x_2 + k_3 a_{33} x_3. \end{cases} \quad (6)$$

Соотношения (6) представляют собой искомые формулы данного проективного преобразования.

Нетрудно выяснить, что определитель матрицы, составленной из коэффициентов при x_i в левой части соотношений (6), отличен от нуля. Действительно, преобразуем этот определитель:

$$\begin{vmatrix} k_1 a_{11} & k_2 a_{12} & k_3 a_{13} \\ k_1 a_{21} & k_2 a_{22} & k_3 a_{23} \\ k_1 a_{31} & k_2 a_{32} & k_3 a_{33} \end{vmatrix} = k_1 k_2 k_3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Как отмечалось выше (см. (3)),

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Коэффициенты k_1, k_2 и k_3 также не равны нулю. Действительно, пусть, например, $k_1 = 0$. Тогда из (5) следует, что координаты точки E' линейно выражаются через координаты точек A'_2 и A'_3 . Поэтому точка E' принадлежит прямой $A'_2 A'_3$, чего быть не может, так как точки репера R' являются точками общего положения. Введем обозначения $c_{ij} = k_j a_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$. Тогда формулы (6) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \rho x'_1 = c_{11} x_1 + c_{12} x_2 + c_{13} x_3, \\ \rho x'_2 = c_{21} x_1 + c_{22} x_2 + c_{23} x_3, \\ \rho x'_3 = c_{31} x_1 + c_{32} x_2 + c_{33} x_3, \end{cases} \quad (7)$$

где

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (8)$$

Легко показать, что если аналитическое выражение некоторого преобразования f проективной плоскости имеет вид

(7), причем коэффициенты c_{ij} удовлетворяют условию (8), то это преобразование является проективным. Для этого рассмотрим репер $R(A_1, A_2, A_3, E)$. Точка A_1 , координаты которой равны $A_1(1 : 0 : 0)$, преобразуется в соответствии с формулами (7) в точку $f(A_1) = A'_1(c_{11} : c_{21} : c_{31})$. Аналогично, координаты образов остальных базисных точек репера равны $f(A_2) = A'_2(c_{12} : c_{22} : c_{32})$, $f(A_3) = A'_3(c_{13} : c_{23} : c_{33})$ и $f(E) = E'(c_{11} + c_{12} + c_{13} : c_{21} + c_{22} + c_{23} : c_{31} + c_{32} + c_{33})$. Из условия (8) следует, что система точек A'_1, A'_2, A'_3, E' является системой общего положения (проверьте самостоятельно). Они образуют репер $R'(A'_1, A'_2, A'_3, E')$. Рассмотрим проективное преобразование g , переводящее репер R в R' . Подставим координаты базисных точек репера R' в формулы (5) и (6). Из (5) следует, что система для определения коэффициентов k_1, k_2, k_3 имеет вид

$$\begin{cases} c_{11} + c_{12} + c_{13} = k_1 c_{11} + k_2 c_{12} + k_3 c_{13}, \\ c_{21} + c_{22} + c_{23} = k_1 c_{21} + k_2 c_{22} + k_3 c_{23}, \\ c_{31} + c_{32} + c_{33} = k_1 c_{31} + k_2 c_{32} + k_3 c_{33}. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $k_1 = k_2 = k_3 = 1$. Поэтому формулы проективного преобразования g также имеют вид (7). Аналитические выражения преобразований f и g совпадают, поэтому сами преобразования равны друг другу. Преобразование f проективное. В дальнейшем мы будем пользоваться формулами проективного преобразования именно в виде (7).

Проективная геометрия изучает свойства фигур, инвариантные (неизменные) при проективных преобразованиях. В частности, на плоскости к такому роду свойств относятся рассмотренные свойства прямой линии, трехвершинника, двойных отношений точек и четырехвершинника. Двойное отношение точек является основным числовым инвариантом проективных преобразований.

Рассмотрим свойства особых проективных преобразований плоскости, которые называются гомологиями.

Определение 2. *Нетождественное проективное преобразование плоскости называется гомологией, если оно имеет три коллинеарные инвариантные точки.*

Гомологии обладают следующими свойствами.

Свойство 5. Если коллинеарные точки A , B и C являются инвариантными для некоторой гомологии, то любая точка прямой AB также инвариантна.

Доказательство. Рассмотрим гомологию g и произвольную точку M прямой AB . Так как гомология g — проективное преобразование, то $(AB; CM) = (g(A)g(B); g(C)g(M))$. По условию A , B и C — инвариантные точки гомологии g , т. е. $g(A) = A$, $g(B) = B$, $g(C) = C$. Поэтому $(AB; CM) = (AB; Cg(M))$. Отсюда следует, что $g(M) = M$. Таким образом, точка M — также инвариантная точка этой гомологии. Утверждение доказано.

Прямая, состоящая из инвариантных точек гомологии, называется ее осью. В силу свойства 1, ось гомологии — инвариантная прямая. Помимо нее гомология имеет другие инвариантные прямые, т. е. прямые, переходящие при гомологии в себя.

Свойство 6. Прямая, проходящая через несовпадающие соответственные точки гомологии, является инвариантной прямой.

Доказательство. Даны гомология g и две соответственные точки A и A' : $A' = g(A)$, $A' \neq A$. Требуется доказать, что прямая $m = AA'$ преобразуется сама в себя. Обозначим через l ось гомологии g и рассмотрим точку B пересечения прямых m и l . Так как точка B принадлежит оси гомологии, то $g(B) = B$. Точка A не совпадает с точкой B , так как в противном случае $A' = A$. Поэтому, в силу свойства 2 проективных преобразований плоскости, прямая AB преобразуется в прямую $g(A)g(B)$, т. е. в себя. Утверждение доказано.

Ось гомологии — инвариантная прямая, состоящая из инвариантных точек. По принципу двойственности эта гомология должна иметь особую инвариантную точку.

Свойство 7. Прямые, проходящие через несовпадающие соответственные точки гомологии, принадлежат одному пучку. Центр этого пучка — инвариантная точка гомологии.

Доказательство. Рассмотрим гомологию g с осью l и две различные прямые m и n , проходящие через различные соответственные точки гомологии: $m = AA'$, $n = BB'$, где $A' = g(A)$, $B' = g(B)$. Пусть O — точка пересечения прямых

m и n (рис. 192). Точка $O' = g(O)$ должна принадлежать прямым $g(m)$ и $g(n)$. Так как прямые m и n инвариантные, точка O' принадлежит пересечению прямых m и n , т.е. совпадает с точкой O . Таким образом, точка O — инвариантная точка данной гомологии.

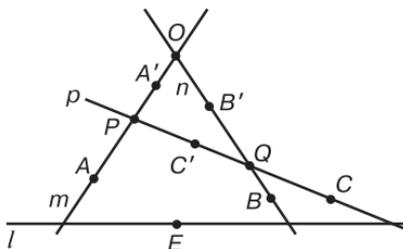


Рис. 192

Предположим, что существует инвариантная прямая p , проходящая через различные соответственные точки C и C' , которая не содержит точку O . Тогда она пересекает прямые m и n соответственно в точках P и Q (рис. 192). Проведя те же рассуждения, что и для точки O , мы получим, что точки P и Q — инвариантные точки гомологии g . Выберем на оси l точку E так, чтобы система точек O, P, Q и E была системой точек общего положения. Рассматриваемые точки образуют проективный репер $R = (O, P, Q, E)$, вершины которого инвариантны: $g(O) = O, g(P) = P, g(Q) = Q, g(E) = E$. Таким образом, репер R при гомологии g преобразуется сам в себя. Отсюда следует, что гомология g совпадает с тождественным преобразованием, а это противоречит ее определению. Поэтому O — единственная точка, удовлетворяющая условию. Свойство доказано.

Точка O называется *центром гомологии*. Если центр гомологии не принадлежит ее оси, то гомология называется *гиперболической*, если же принадлежит, то *параболической*. Докажем следующее утверждение.

Свойство 8. Любая прямая, проходящая через центр гиперболической гомологии, является инвариантной.

Доказательство. Пусть точка Q — центр данной гиперболической гомологии g , l — ее ось. Рассмотрим произвольную прямую a , проходящую через Q . Прямая a пересекает ось l

в некоторой точке P . Тогда $g(Q) = Q$, $g(P) = P$. Прямая QP преобразуется сама в себя. Следовательно, $g(a) = QP = a$. Свойство доказано.

Из этого свойства следует, что гомология не может иметь двух инвариантных точек, не принадлежащих ее оси, так как в противном случае образы всех точек плоскости, не принадлежащих оси гомологии, лежали бы на прямой, проходящей через эти точки. Отсюда также вытекает, что у гиперболической гомологии не может быть инвариантных точек, не совпадающих с центром и не принадлежащих ее оси. Можно доказать, что параболическая гомология не имеет инвариантных точек, не принадлежащих ее оси (докажите самостоятельно).

Рассмотрим задачу на построение соответственных точек гомологии с помощью специального инструмента — «проективной линейки», которая позволяет:

- а) строить на проективной плоскости прямую линию, если построены две ее точки;
- б) строить на проективной плоскости точку пересечения двух прямых.

Задача 1. *Дана ось гомологии, ее центр и пара соответствующих точек, не принадлежащих оси. Требуется построить образ произвольной точки плоскости при этой гомологии.*

Решение. *Анализ.* Обозначим ось гомологии g через l , а ее центр — через O . Нам даны точки A и $A' = g(A)$, причем $A \notin l$. Выберем произвольную точку B плоскости. Обозначим через B' ее образ при гомологии: $B' = g(B)$. Естественно предположить, что $B \notin l$ и $B \neq O$, иначе задача становится тривиальной. В силу доказанных свойств, прямые AA' и BB' содержат центр O гомологии. Построим прямую AB . Она пересекает ось l в точке M (рис. 193). Так как точка M принадлежит оси гомологии, то $g(M) = M$. Таким образом, прямая AB преобразуется в прямую $A'M$. Поэтому точка B' лежит на прямой $A'M$. С другой стороны, прямая BB' — инвариантная прямая гомологии и, в силу свойства 4, она содержит центр O . Следовательно, точка B' совпадает с точкой пересечения прямых $A'M$ и OB .

Построение. Строим:

- 1) прямую AB ;

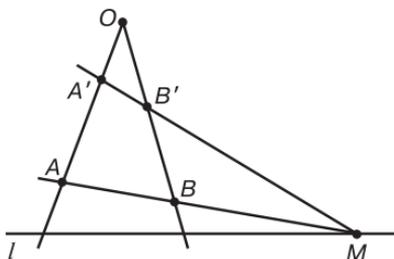


Рис. 193

- 2) точку M пересечения прямых AB и оси l ;
- 3) прямую $A'M$;
- 4) прямую BO ;
- 5) точку V' пересечения прямых $A'M$ и BO .

Точка V' — искомая. Доказательство и исследование проведите самостоятельно.

Из приведенного решения следует, что гомология полностью определена, если даны ее центр, ось и пара соответственных точек, не принадлежащих оси.

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

§ 39. ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

Для изучения свойств линий второго порядка на проективной плоскости нам потребуются рассмотреть особые отображения векторов многомерного векторного пространства во множество вещественных чисел, так называемые билинейные и квадратичные формы. Пусть V_n — n -мерное векторное пространство.

Определение 1. *Билинейной формой g , заданной на векторном пространстве V_n , называется отображение, которое каждой упорядоченной паре векторов \vec{x}, \vec{y} пространства V_n ставит в соответствие число $g(\vec{x}, \vec{y})$, которое для любых векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{y}_2$ и любых чисел α и β удовлетворяет условиям*

$$\begin{aligned} g(\alpha \cdot \vec{x}_1 + \beta \cdot \vec{x}_2, \vec{y}) &= \alpha \cdot g(\vec{x}_1, \vec{y}) + \beta \cdot g(\vec{x}_2, \vec{y}), \\ g(\vec{x}, \alpha \cdot \vec{y}_1 + \beta \cdot \vec{y}_2) &= \alpha \cdot g(\vec{x}, \vec{y}_1) + \beta \cdot g(\vec{x}, \vec{y}_2). \end{aligned} \quad (1)$$

Если нам даны базис $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ пространства V_n и векторы $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$ и $\vec{y} = \sum_{j=1}^n y_j \vec{e}_j$, то из (1) получим

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = g\left(\sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i, \sum_{j=1}^n y_j \vec{e}_j\right) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j g(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} x_i y_j, \quad (2)$$

где $g_{ij} = g(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$, $i, j = 1, \dots, n$. Квадратная матрица $G = (g_{ij})$ порядка n называется *матрицей билинейной формы g в базисе (\vec{e}_i)* . Нетрудно проверить, что если $G = (g_{ij})$ — матрица билинейной формы g , то

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Установим правило изменения матрицы билинейной формы при переходе от одного базиса к другому. В курсе алгебры рассматривались свойства матрицы перехода от одного базиса к другому в пространстве V_n . Пусть $C = (c_{ij})$ — матрица перехода от базиса $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ к базису $\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n$. Ее столбцы равны координатам векторов второго базиса относительно первого. Она невырождена и координаты (x_1, \dots, x_n) вектора \vec{x} в первом базисе связаны с его координатами (x'_1, \dots, x'_n) во втором соотношениями

$$x_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} x'_j \text{ или}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Транспонируем матричное равенство (4): $(x_1, \dots, x_n) = (x'_1, \dots, x'_n) C^T$, сделаем замену в равенстве (3):

$$\begin{aligned} g(\vec{x}, \vec{y}) &= (x_1, \dots, x_n) (g_{ij}) \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \\ &= (x'_1, \dots, x'_n) (c_{ij})^T (g_{ij}) (c_{ij}) \begin{pmatrix} y'_1 \\ \dots \\ y'_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Получим

$$G' = C^T G C. \tag{5}$$

Так как матрица перехода C невырожденная, то из равенства (5) следует, что матрицы G и G' имеют одинаковые ранги.

Определение 2. Рангом билинейной формы называется ранг ее матрицы G . Билинейная форма называется вырожденной, если ее ранг меньше размерности n пространства.

Ранг матрицы билинейной формы не зависит от выбора базиса.

Определение 3. Билинейная форма g называется симметрической, если $g(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{y}, \vec{x})$ для любых векторов \vec{x}, \vec{y} .

Для базисных векторов \vec{e}_i получим соотношение $g_{ij} = g(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = g(\vec{e}_j, \vec{e}_i) = g_{ji}$, поэтому матрица G симметрической билинейной формы симметрическая.

Определение 4. Симметрическая билинейная форма g называется положительно определенной, если $g(\vec{x}, \vec{x}) > 0$ для любого ненулевого вектора \vec{x} .

Скалярное произведение векторов плоскости или пространства, рассмотренное нами в курсе аналитической геометрии, является положительно определенной симметрической билинейной формой.

Определение 5. Ненулевые векторы \vec{a} и \vec{b} называются сопряженными относительно билинейной формы g , если $g(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. Ненулевой вектор \vec{a} , для которого $g(\vec{a}, \vec{a}) = 0$, называется самосопряженным относительно билинейной формы g .

Таким образом, в трехмерном пространстве перпендикулярные векторы сопряжены относительно скалярного произведения. В этом пространстве существует базис, состоящий из попарно перпендикулярных (сопряженных) векторов. В следующей теореме утверждается, что аналогичное свойство справедливо и в n -мерном векторном пространстве V_n .

Теорема 1. Пусть в пространстве V_n задана билинейная симметрическая форма $g = g(\vec{x}, \vec{y})$. Тогда в этом пространстве и в любом его подпространстве существует базис, состоящий из попарно сопряженных относительно этой формы векторов.

Доказательство этой теоремы мы опускаем. С ним можно познакомиться в пособиях [6] и [10].

Если в пространстве V_n базис $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ состоит из попарно сопряженных векторов относительно билинейной симметрической формы g , то из (2) следует, что в этом базисе сама форма имеет вид

$$g(\vec{x}; \vec{y}) = g_{11}x_1y_1 + g_{22}x_2y_2 + \dots + g_{rr}x_r y_r, \quad (6)$$

где r — ранг формы. В этом базисе ее матрица является диагональной:

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & g_{rr} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Пусть q — билинейная симметрическая форма на n -мерном векторном пространстве V_n .

Определение 6. Квадратичной формой g на векторном пространстве V_n , соответствующей билинейной симметрической форме q , называется отображение пространства V_n во множество действительных чисел, удовлетворяющее условию

$$g(\vec{x}) = q(\vec{x}; \vec{x}). \quad (8)$$

Две различные билинейные симметрически формы не могут определить одну и ту же квадратичную форму. Действительно, $g(\vec{x} + \vec{y}) = q(\vec{x} + \vec{y}; \vec{x} + \vec{y}) = q(\vec{x}; \vec{x}) + 2q(\vec{x}; \vec{y}) + q(\vec{y}; \vec{y})$, поэтому

$$q(\vec{x}; \vec{y}) = \frac{1}{2} (g(\vec{x} + \vec{y}) - g(\vec{x}) - g(\vec{y})).$$

Отсюда следует, что значение $q(\vec{x}; \vec{y})$ единственным образом определяется значениями квадратичной формы g на векторах \vec{x} , \vec{y} и $\vec{x} + \vec{y}$.

Если в пространстве V_n задан базис $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, и вектор \vec{x} имеет координаты x_1, \dots, x_n то, как было показано выше, $q(\vec{x}; \vec{x}) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}x_i x_j$, где $g_{ij} = q(\vec{e}_i; \vec{e}_j)$ — значения

билинейной формы q на базисных векторах \vec{e}_i и \vec{e}_j . Поэтому в координатной записи квадратичная форма имеет вид

$$g(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}x_i x_j. \quad (9)$$

Билинейная форма, соответствующая квадратичной, симметрическая, $g_{ij} = g_{ji}$, в этой связи в развернутой записи формулы (9) коэффициент g_{ij} , $i < j$ при произведении

координат $x_i x_j$ будем удваивать, так как он равен коэффициенту g_{ji} . Матрица $G = (g_{ij})$ симметрической билинейной формы называется также матрицей квадратичной формы, соответствующей этой билинейной. Квадратичную форму так же, как и билинейную, можно записать в матричном виде:

$$g(\vec{x}) = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где матрица $G = \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix}$ симметрическая. При

переходе к другому базису матрица G квадратичной формы меняется по тому же закону, что и матрица билинейной формы (см. (5)): $G' = C^T G C$, где C — матрица перехода от первого базиса ко второму. Так как C — невырожденная матрица, то *ранг матрицы квадратичной формы не зависит от выбора базиса. Он называется рангом квадратичной формы.* Квадратичную форму назовем *вырожденной*, если ее ранг меньше размерности пространства n .

Из теоремы 1 следует, что в пространстве V_n существует базис $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, состоящий из сопряженных векторов билинейной симметрической формы $q(\vec{x}; \vec{y})$. В этом базисе форма q имеет вид (6). Тогда в этом базисе соответствующая ей квадратичная форма представляется в виде

$$g(\vec{x}) = g_{11}x_1^2 + g_{22}x_2^2 + \dots + g_{rr}x_r^2, \quad (11)$$

где r — ранг квадратичной формы. Такой вид квадратичной формы и сам базис $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ называются *каноническими*. В каноническом базисе матрица квадратичной формы диагональная.

Рассмотрим метод Лагранжа, который позволяет привести квадратичную форму к каноническому виду. Пусть дана не нулевая квадратичная форма $g(\vec{x}) = \sum_{ij=1}^n g_{ij}x_i x_j$, для которой один из коэффициентов g_{ii} отличен от нуля. Пусть для определенности $g_{11} \neq 0$. Рассмотрим вспомогательную квадратичную форму $f_1 = \frac{1}{g_{11}}(g_{11}x_1 + g_{12}x_2 + \dots + g_{1n}x_n)^2$.

Такая замена соответствует переходу от базиса $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ к базису $\vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{e}'_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{e}'_3 = \vec{e}_3$, \dots , $\vec{e}'_n = \vec{e}_n$. В новом базисе квадратичная форма примет вид $g(\vec{x}) = 2g_{12}(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) + \dots = 2g_{12}y_1^2 - 2g_{12}y_2^2 + \dots$. Таким образом, в новой записи коэффициент при y_1^2 отличен от нуля, и для приведения формы к каноническому виду мы можем применить метод, описанный выше.

Пусть в каноническом базисе $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_2$ квадратичная форма имеет вид $g(\vec{x}) = g_{11}x_1^2 + g_{22}x_2^2 + \dots + g_{rr}x_r^2$, где r — ранг формы. Рассмотрим новый базис: $\vec{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{|g_{11}|}}\vec{e}_1, \dots$, $\vec{e}'_r = \frac{1}{\sqrt{|g_{rr}|}}\vec{e}_r$, $\vec{e}'_{r+1} = \vec{e}_{r+1}, \dots, \vec{e}'_n = \vec{e}_n$. Тогда, если q — билинейная форма, определяющая квадратичную форму g , то $q(\vec{e}'_i; \vec{e}'_j) = 0$, $i \neq j$; $g(\vec{e}'_i) = \frac{1}{|g_{ii}|}q(\vec{e}_i; \vec{e}_i) = \varepsilon_i$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $i \leq r$; $g(\vec{e}'_j) = 0$, $r < j \leq n$. При этом $\varepsilon_i = 1$, если $g_{ii} > 0$, и $\varepsilon_i = -1$, если $g_{ii} < 0$. В этом базисе канонический вид квадратичной формы существенно упрощается: $g(\vec{x}) = \varepsilon_1 x_1^2 + \dots + \varepsilon_r x_r^2$, коэффициенты при квадратах координат вектора равны либо 1, либо -1 , либо 0. Перенумеруем базисные векторы так, чтобы первые p коэффициентов ε_i были равны 1, а последующие $r - p$ равнялись -1 . Такой базис будем называть *нормальным*, вид квадратичной формы в этом базисе также называется *нормальным*:

$$g(\vec{x}) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2. \quad (13)$$

Число $r - p$ отрицательных членов в нормальном виде квадратичной формы носит название ее *индекса*.

В пространстве V_n базис, в котором квадратичная форма имеет канонический и нормальный вид, не является единственным. Число ненулевых слагаемых в каноническом или нормальном виде квадратичной формы в любом каноническом или нормальном базисе одно и то же, равное ее рангу. Но одинаков ли индекс квадратичной формы в различных нормальных базисах? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 2 (закон инерции квадратичных форм). *Индекс квадратичной формы не зависит от выбора ее нормального базиса.*

Доказательство этой теоремы мы приводить не будем, с ним можно познакомиться в пособиях [6] и [10].

Из теоремы 2 следует, что *число положительных и отрицательных слагаемых в каноническом виде (4) квадратичной формы не зависит от выбора ее канонического базиса.*

Определение 7. *Квадратичная форма называется положительно определенной, если соответствующая ей симметрическая билинейная форма положительно определена.*

Из закона инерции квадратичных форм получим: *квадратичная форма является положительно определенной тогда и только тогда, когда ее ранг равен размерности пространства, а индекс — нулю.*

Перейдем к изучению свойств кривых второго порядка на проективной плоскости.

Рассмотрим уравнение $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ некоторой кривой на проективной плоскости. Координаты точек проективной плоскости определены с точностью до пропорциональности. Поэтому уравнение $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ является уравнением некоторой фигуры проективной плоскости в том и только в том случае, когда вместе с каждым его решением (x_1, x_2, x_3) тройка чисел вида (kx_1, kx_2, kx_3) , где k — любое не нулевое вещественное число, также удовлетворяет этому уравнению.

Определение 8. *Линией или кривой второго порядка на проективной плоскости называется множество точек этой плоскости, удовлетворяющих уравнению кривой, которое в некоторой системе координат R имеет вид*

$$g_{11}x_1^2 + g_{22}x_2^2 + g_{33}x_3^2 + 2g_{12}x_1x_2 + 2g_{13}x_1x_3 + 2g_{23}x_2x_3 = 0, \quad (14)$$

где среди коэффициентов g_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, по крайней мере один отличен от нуля.

Уравнение (9) является однородным алгебраическим уравнением второго порядка, оно удовлетворяет сформулированному выше условию.

Если в некотором проективном репере уравнение кривой имеет вид (9), то в любом другом репере уравнение этой

кривой также является однородным уравнением второго порядка. В самом деле, формулы перехода от системы координат R к системе R' имеют вид (см. § 31):

$$\begin{cases} \rho x_1 = k_1 a_{11} x'_1 + k_2 a_{12} x'_2 + k_3 a_{13} x'_3, \\ \rho x_2 = k_1 a_{21} x'_1 + k_2 a_{22} x'_2 + k_3 a_{23} x'_3, \\ \rho x_3 = k_1 a_{31} x'_1 + k_2 a_{32} x'_2 + k_3 a_{33} x'_3. \end{cases} \quad (15)$$

Заменив в уравнении (9) координаты x_1, x_2, x_3 их выражениями через x'_1, x'_2, x'_3 по формулам (10), мы получим уравнение линии второго порядка в системе координат R' . При этом степень уравнения не увеличится, так как числа x_i выражаются через x'_i линейно. Предположим, что она уменьшилась. Тогда при обратном переходе от системы R' к R степень уравнения должна увеличиться, чего быть не может.

Левую часть уравнения (9) можно рассматривать как квадратичную форму, заданную на трехмерном векторном пространстве. Запишем это уравнение в сокращенной форме: $\sum_{i,j=1}^3 g_{ij} x_i x_j = 0$, где $g_{ij} = g_{ji}$, $i \neq j$. Матрицу

$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{pmatrix} \text{ будем называть матрицей линии}$$

второго порядка. При умножении матрицы G слева на строку, составленную из координат точки, а справа на столбец, составленный из этих же координат, получим левую часть уравнения (9):

$$\sum_{i,j=1}^3 g_{ij} x_i x_j = (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Обозначая столбец координат точки через X , а строку — через X^T , где верхний индекс T — знак транспонирования матрицы, запишем уравнение (1) в матричной форме:

$$X^T G X = 0. \quad (16)$$

Матричная форма позволяет легко найти уравнение линии второго порядка в любой системе координат R' . В самом деле, в матричной форме формулы перехода (2) имеют вид

$\rho X = CX'$, где

$$C = \begin{pmatrix} k_1 a_{11} & k_2 a_{12} & k_3 a_{13} \\ k_1 a_{21} & k_2 a_{22} & k_3 a_{23} \\ k_1 a_{31} & k_2 a_{32} & k_3 a_{33} \end{pmatrix}.$$

Транспонируя матричное равенство $\rho X = CX'$, получим $\rho X^T = (X')^T C^T$. Отсюда следует, что в репере R' линия второго порядка имеет уравнение $(X')^T C^T G C X' = 0$. Мы видим, что при переходе к системе координат R' матрица G' преобразуется по правилу $G' = C^T G C$, так же, как и матрица квадратичной формы при линейной замене переменных. Так как матрица C не вырождена, то ранги матриц G и G' равны между собой. Ранг матрицы G называется *рангом линии второго порядка*. Так как среди коэффициентов g_{ij} имеется по крайней мере один отличный от нуля, ранг линии второго порядка больше нуля. Линия второго порядка называется *невыврожденной (вырожденной)*, если ее ранг равен трем (меньше трех).

Как было показано, квадратичную форму с помощью линейного преобразования можно привести к нормальному виду. Поэтому на проективной плоскости существует такая система координат, в которой уравнение линии второго порядка имеет вид

$$x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \varepsilon_3 x_3^2 = 0, \quad (17)$$

где $\varepsilon_2, \varepsilon_3 = 0, 1, -1$. Уравнение (12) называется *каноническим уравнением* линии второго порядка, а система координат, в которой линия имеет такое уравнение, — *канонической*.

Проведем классификацию кривых второго порядка. Если ранг линии равен трем, то коэффициенты ε_2 и ε_3 канонического уравнения отличны от нуля. Возможны следующие случаи.

I_1 . $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$. Уравнение линии приводится к виду $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$. В этом случае линия не имеет вещественных точек, все ее точки — мнимые. Такая линия называется *мнимой овальной линией второго порядка*.

I_2 . $\varepsilon_2 = 1, \varepsilon_3 = -1$. Уравнение линии приводится к виду $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$. Такая линия называется *вещественной овальной линией второго порядка*. В случае, когда $\varepsilon_2 = -1, \varepsilon_3 = 1$ или $\varepsilon_2 = -1, \varepsilon_3 = -1$ линия также является

вещественной овальной линией второго порядка. Например, если $\varepsilon_2 = -1$, $\varepsilon_3 = -1$, то уравнение линии имеет вид $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$. Переходя к новой системе координат, формулы перехода к которой имеют вид

$$\begin{cases} \rho x_1 = x'_3, \\ \rho x_2 = x'_2, \\ \rho x_3 = x'_1, \end{cases}$$

получим $-(x'_1)^2 - (x'_2)^2 + (x'_3)^2 = 0$ или $(x'_1)^2 + (x'_2)^2 - (x'_3)^2 = 0$.

Пусть ранг линии равен двум. Без ограничения общности можно считать, что в уравнении (17) $\varepsilon_3 = 0$. Возможны следующие случаи.

II₁. $\varepsilon_2 = 1$. Уравнение линии имеет вид $x_1^2 + x_2^2 = 0$. Его можно представить как $(x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2) = 0$. Поэтому линия распадается на две мнимые прямые с уравнениями $x_1 + ix_2 = 0$ и $x_1 - ix_2 = 0$, она имеет всего одну вещественную точку с координатами $(0 : 0 : 1)$. Такая линия представляет собой *пару мнимых пересекающихся прямых*.

II₂. $\varepsilon_2 = -1$. Уравнение линии имеет вид $x_1^2 - x_2^2 = 0$. Это уравнение можно представить в виде $(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0$. Линия представляет собой *пару вещественных пересекающихся прямых* $x_1 + x_2 = 0$ и $x_1 - x_2 = 0$.

И, наконец, возможен случай, когда ранг линии равен 1. Можно считать, что $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$. Уравнение линии имеет вид $x_1^2 = 0$. Линия представляет собой *пару совпавших вещественных прямых*.

№	Название линии	Каноническое уравнение	Ранг линии
1	Мнимая овальная линия	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	3
2	Вещественная овальная линия	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$	3
3	Пара мнимых пересекающихся прямых	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	2
4	Пара вещественных пересекающихся прямых	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	2
5	Пара вещественных совпавших прямых	$x_1^2 = 0$	1

Таким образом, на проективной плоскости существует пять типов линий второго порядка.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Дано уравнение линии второго порядка $x_1x_2 - x_3^2 = 0$. Требуется установить ее тип.

Решение. Для решения задачи достаточно найти ранг данной кривой и выяснить, сколько вещественных точек она имеет. Коэффициенты уравнения кривой имеют вид $g_{11} = g_{22} = g_{13} = g_{23} = 0$, $g_{33} = -1$, $g_{12} = \frac{1}{2}$. Матрица данной линии равна

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ранг линии равен 3. Поэтому кривая представляет собой либо мнимую, либо вещественную овальную линию второго порядка. Нетрудно проверить, что она содержит точку с координатами $(1 : 1 : 1)$. Так как мнимая овальная линия не содержит точек с вещественными координатами, то данная линия является вещественной овальной линией второго порядка.

§ 40. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПРЯМОЙ, ПОЛЮСЫ И ПОЛЯРЫ

Прежде чем приступить к дальнейшему изучению кривых второго порядка на проективной плоскости, необходимо рассмотреть свойства ее мнимых точек.

Введем понятие комплексной проективной плоскости. Рассмотрим трехмерное векторное пространство $\mathbb{C}V_3$ над полем \mathbb{C} комплексных чисел. Оно определяется так же, как и вещественное трехмерное векторное пространство V_3 , с той лишь разницей, что вместо вещественных чисел векторы умножаются на комплексные числа.

Множество точек $\mathbb{C}P_2$ называется проективной плоскостью над полем комплексных чисел \mathbb{C} или комплексной проективной плоскостью, если существует сюръективное отображение $\chi: \mathbb{C}V_3 \rightarrow \mathbb{C}P_2$ ненулевых векторов простран-

ства CV_3 такое, что $\chi(\vec{a}) = \chi(\vec{b})$ тогда и только тогда, когда $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, где λ — ненулевое комплексное число.

На проективной плоскости CP_2 точно так же, как и на плоскости P_2 , определяются прямые, проективные системы координат и проективные координаты точек. Выбрав на плоскости CP_2 систему координат, мы каждой ее точке поставим в соответствие множество упорядоченных ненулевых троек комплексных чисел. Две тройки (x_1, x_2, x_3) и (x'_1, x'_2, x'_3) тогда и только тогда служат координатами одной и той же точки в одной и той же системе координат, когда они пропорциональны, т. е. $x_i = \lambda x'_i$, $i = 1, 2, 3$, где λ — ненулевое комплексное число.

Определение 1. Точка комплексной проективной плоскости называется вещественной, если ее координаты — вещественные числа или произведения вещественных чисел на ненулевое комплексное число. В противном случае точка называется мнимой.

Например, точка $M(2i : -3i : 0)$ — вещественная, так как ее координаты являются произведениями вещественных чисел 2, -3 и 0 на комплексное число i , а точка $N(1 + 2i : -3 - 4i : 5)$ — мнимая. В дальнейшем мы будем рассматривать только такие системы координат на комплексной плоскости, базисные точки которых вещественные. Формулы перехода от одного такого проективного репера к другому имеют такой же вид, как и на вещественной проективной плоскости (см. § 32), они содержат только вещественные коэффициенты $k_i a_{ji}$, $i, j = 1, 2, 3$. Отсюда следует, что мнимость или вещественность точки не зависит от выбора системы координат. Вещественные точки можно рассматривать как точки вещественной проективной плоскости, вложенной в комплексную плоскость.

Две точки называются комплексно сопряженными, если их координаты можно умножением на ненулевые комплексные числа привести к виду $A_1(a_1 + ib_1, a_2 + ib_2, a_3 + ib_3)$ и $A_2(a_1 - ib_1, a_2 - ib_2, a_3 - ib_3)$. Например, точки с координатами $A(1 - 3i : 4 - 2i : -2i)$ и $B(2 + i : 3 - i : 1 + i)$ являются комплексно сопряженными. Действительно, если координаты точки A умножить на комплексное число $\frac{1}{2}(1 + i)$, то получим числа, соответственно комплексно сопряженные с координатами точки B .

Прямая на комплексной проективной плоскости так же, как и на вещественной плоскости, определяется линейным однородным уравнением $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$, где $u_i, i = 1, 2, 3$ — комплексные числа. Числа $u_1; u_2; u_3$ называются *координатами прямой*. Они определены с точностью до умножения на ненулевое комплексное число. Поэтому координаты прямой представляются упорядоченной тройкой $(u_1 : u_2 : u_3)$. Прямая называется *вещественной*, если ее координаты — вещественные числа или произведения вещественных чисел на ненулевое комплексное число. В противном случае прямая называется *мнимой*. Вещественность или мнимость прямой не зависят от выбора системы координат. Прямые комплексной проективной плоскости обладают рядом интересных свойств. Приведем их без доказательства, подробно с ними можно познакомиться в пособиях [1, 5].

Свойство 1. *На вещественной прямой существует бесконечно много вещественных точек.*

Свойство 2. *Если точка принадлежит вещественной прямой, то комплексно сопряженная ей точка также принадлежит этой прямой.*

Свойство 3. *На мнимой прямой существует только одна вещественная точка.*

Свойство 4. *Через две различные точки проходит единственная прямая. Через две различные комплексно сопряженные точки проходит вещественная прямая.*

Для коллинеарных точек комплексной проективной плоскости точно так же, как и для точек вещественной плоскости, определяется двойное отношение, которое обладает всеми свойствами, рассмотренными в гл. II.

Выясним, сколько точек пересечения имеют прямая и линия второго порядка. Очевидно, если линия второго порядка имеет ранг 2, т. е. представляет собой пару вещественных или пару мнимых прямых, то прямая на плоскости либо принадлежит линии второго порядка, либо имеет с ней две, либо одну, либо не имеет с ней общих вещественных точек. Если ранг линии равен 1, т. е. линия является парой совпавших прямых, то прямая либо принадлежит линии второго порядка, либо имеет с ней одну общую точку. Для линий второго порядка, имеющих ранг 3, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Если ранг линии второго порядка равен трем, то она имеет не более двух точек пересечения с прямой.*

Доказательство. Будем предполагать, что линия второго порядка γ задана общим уравнением

$$g_{11}x_1^2 + g_{22}x_2^2 + g_{33}x_3^2 + 2g_{12}x_1x_2 + 2g_{13}x_1x_3 + 2g_{23}x_2x_3 = 0, \quad (1)$$

где среди коэффициентов $g_{ij}, i, j = 1, 2, 3$, по крайней мере один отличен от нуля. Предположим, что прямая l пересекает линию γ в трех точках A_1, A_2 и A_3 . Выберем на плоскости репер таким образом, чтобы координаты точек пересечения были равны $A_1(1 : 0 : 0), A_2(0 : 1 : 0), A_3(1 : 1 : 0)$. Так как точка A_1 принадлежит линии γ , то $g_{11} = 0$. Аналогично, из принадлежности точек A_2 и A_3 линии γ следует, что $g_{22} = g_{12} = 0$. Поэтому в выбранной системе координат матрица кривой второго порядка равна

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & g_{13} \\ 0 & 0 & g_{23} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{pmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен двум, откуда следует, что ранг линии γ также равен двум, что противоречит условию теоремы. Утверждение доказано.

Пусть прямая l задана двумя своими точками $A(a_1 : a_2 : a_3)$ и $B(b_1 : b_2 : b_3)$. Точка $X(x_1 : x_2 : x_3)$ принадлежит прямой AB тогда и только тогда, когда для точек X, A, B выполнено условие коллинеарности

(см. § 32): $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$. Отсюда следует, что точка

X принадлежит прямой AB тогда и только тогда, когда столбец ее координат линейно выражается через столбцы координат точек A и B :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где числа α и β не равны нулю одновременно. Уравнение (2) называется *параметрическим уравнением прямой AB* , числа α и β — *параметрами* точки X . Координаты точки

определены с точностью до пропорциональности, поэтому ее параметры также определены с точностью до пропорциональности.

Обозначим столбцы координат точек A , B и X теми же буквами, что и сами точки A , B , X . Тогда формулу (2) можно записать в виде $X = \alpha A + \beta B$. Запишем уравнение кривой (1) в матричном виде (см. § 39):

$$X^T G X = 0. \tag{3}$$

Найдем точки пересечения прямой l с линией второго порядка γ , заданной этим уравнением. Подставляя в уравнение (3) $X = \alpha A + \beta B$, получим $(\alpha A^T + \beta B^T)G(\alpha A + \beta B) = 0$. Преобразуем полученное уравнение: $A^T G A \alpha^2 + (A^T G B + B^T G A)\alpha\beta + B^T G B \beta^2 = 0$. Так как матрица G симметрическая, то $A^T G B = B^T G A$ (проверьте это равенство самостоятельно). Полученное уравнение можно записать в виде

$$P\alpha^2 + 2Q\alpha\beta + R\beta^2 = 0, \tag{4}$$

коэффициенты после соответствующих преобразований равны:

$$P = (a_1 a_2 a_3) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = g_{11}a_1^2 + g_{22}a_2^2 + g_{33}a_3^2 + 2g_{12}a_1a_2 + 2g_{13}a_1a_3 + 2g_{23}a_2a_3, \tag{5}$$

$$Q = (a_1 a_2 a_3) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = g_{11}a_1b_1 + g_{22}a_2b_2 + g_{33}a_3b_3 + g_{12}(a_1b_2 + a_2b_1) + g_{13}(a_1b_3 + a_3b_1) + g_{23}(a_2b_3 + a_3b_2), \tag{6}$$

$$R = (b_1 b_2 b_3) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = g_{11}b_1^2 + g_{22}b_2^2 + g_{33}b_3^2 + 2g_{12}b_1b_2 + 2g_{13}b_1b_3 + 2g_{23}b_2b_3. \tag{7}$$

Из формул (5) и (7) следует, что коэффициенты P и R равны значениям левой части уравнения линии γ при подстановке в нее координат точек A и B . Поэтому

$P = 0$ (или $Q = 0$), если точка A (или B) принадлежит линии γ . Левая часть уравнения кривой представляет собой квадратичную форму $g(X, X)$. Как было отмечено в § 39, квадратичной форме однозначно соответствует симметрическая билинейная форма. Из формулы (6), следует, что коэффициент Q равен значению соответствующей билинейной формы в точках A и B : $Q = g(A, B)$.

Для определения координат точек пересечения прямой l и линии γ достаточно найти числа α и β , удовлетворяющие уравнению (4) и не равные нулю одновременно, а затем вычислить координаты точки по формулам (2). Уравнение (4) однородное, поэтому, если α_0, β_0 — его решение, то $t\alpha_0, t\beta_0$, при $t \neq 0$, также является его решением. Всем этим решениям соответствует одна и та же точка проективной плоскости. Различным точкам пересечения прямой и кривой соответствуют непропорциональные решения уравнения (4).

Рассмотрим первый случай, когда $P = Q = R = 0$. Любая пара чисел α, β — решения уравнения (4). Поэтому прямая l лежит на линии γ . В этом случае линия γ является вырожденной.

Во втором случае $P = R = 0$, но $Q \neq 0$. Уравнение (4) принимает вид $2Q\alpha\beta = 0$, и его решениями являются пары чисел, пропорциональные $(1 : 0)$ и $(0 : 1)$. Поэтому прямая l пересекает линию γ в двух точках A и B .

Рассмотрим третий случай, когда $P \neq 0$. Тогда пара чисел $(\alpha; 0)$, $\alpha \neq 0$ не является решением уравнения (4). Действительно, предположим, что такое решение существует. Тогда $P\alpha^2 = 0$ и, следовательно, $\alpha = 0$, что противоречит условию. Поэтому $\beta \neq 0$. Разделим уравнение (4) на β^2 . Получим:

$$Pt^2 + 2Qt + R = 0, \quad (8)$$

где $t = \frac{\alpha}{\beta}$. В силу неравенства $P \neq 0$, уравнение (8) является квадратным. Ясно, что если t_0 — его решение, то все числа α_0 и β_0 , удовлетворяющие условию $t_0 = \frac{\alpha_0}{\beta_0}$, пропорциональны и им соответствует одна и та же точка проективной плоскости, координаты которой вычисляются по формулам (2). Таким образом, число точек пересечения прямой и кривой совпадает с числом решений уравнения (8). Дискриминант D уравнения (8) равен $D = Q^2 - PR$.

Поэтому, если $Q^2 - PR > 0$, то уравнение (8) имеет два вещественных решения. В этом случае прямая l пересекает линию γ в двух вещественных точках X_1 и X_2 (рис. 194). Если $Q^2 - PR = 0$, то уравнение (8) имеет одно вещественное решение, прямая l имеет с линией γ одну общую вещественную точку, или, как говорят, пересекает линию γ в двух совпавших вещественных точках $X_1 = X_2$ (рис. 195). И, наконец, если $Q^2 - PR < 0$, то уравнение (8) имеет два комплексно сопряженных решения. Если найти эти решения и вычислить координаты точек пересечения по формулам (2), то получим две комплексно сопряженные точки проективной плоскости. В этом случае будем говорить, что прямая l пересекает линию γ в двух комплексно сопряженных точках. Четвертый случай $P = 0$, а $Q \neq 0$ сводится к предыдущему.

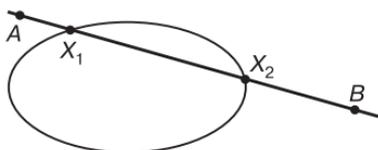


Рис. 194

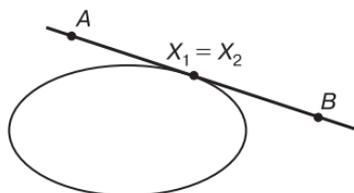


Рис. 195

Так как во втором случае $D = Q^2 - PR > 0$, то он формально совпадает с третьим. Мы доказали следующую теорему.

Теорема 2. На проективной плоскости прямая либо лежит на линии второго порядка, либо пересекает ее в двух вещественных, совпавших или комплексно сопряженных точках.

Исследуем весьма интересные геометрические свойства линии второго порядка на проективной плоскости. Введем следующее определение.

Определение 2. Прямая называется касательной к невырожденной линии второго порядка, если она пересекает ее в двух совпавших вещественных точках.

Пусть невырожденная линия второго порядка γ на плоскости задана своим общим уравнением (1). Рассмотрим

точку $A(a_1 : a_2 : a_3)$, принадлежащую кривой. Выведем уравнение касательной к линии γ , которая проходит через эту точку. Пусть точка $X(x_1 : x_2 : x_3)$ — произвольная точка касательной. Так как точка A принадлежит кривой, то из (5) следует, что коэффициент P в уравнении (4) равен нулю. Так как касательная пересекает линию γ в паре совпавших точек, то дискриминант уравнения (8) равен 0: $D = Q^2 - PR = 0$. Таким образом, точка X тогда и только тогда принадлежит касательной, проходящей через точку A , когда $Q = 0$. Из (6) следует, что координаты точки X удовлетворяют уравнению

$$g_{11}a_1x_1 + g_{22}a_2x_2 + g_{33}a_3x_3 + g_{12}(a_1x_2 + a_2x_1) + \\ + g_{13}(a_1x_3 + a_3x_1) + g_{23}(a_2x_3 + a_3x_2) = 0.$$

Преобразуем полученное уравнение:

$$(g_{11}a_1 + g_{12}a_2 + g_{13}a_3)x_1 + (g_{12}a_1 + g_{22}a_2 + g_{23}a_3)x_2 + \\ + (g_{13}a_1 + g_{23}a_2 + g_{33}a_3)x_3 = 0. \quad (9)$$

Это линейное однородное уравнение первого порядка, оно служит уравнением прямой на проективной плоскости при условии, что коэффициенты при x_1 , x_2 и x_3 не равны нулю одновременно. Действительно, предположим, что

$$g_{11}a_1 + g_{12}a_2 + g_{13}a_3 = g_{12}a_1 + g_{22}a_2 + g_{23}a_3 = \\ = g_{13}a_1 + g_{23}a_2 + g_{33}a_3 = 0.$$

Так как числа a_i , $i = 1, 2, 3$ — координаты точки A — не равны нулю одновременно, то строки матрицы

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{pmatrix} \text{ линейно зависимы и, следовательно,}$$

линия γ вырождена, что противоречит условию. Поэтому уравнение (9) определяет на плоскости прямую, касательную к линии γ в точке A .

Левая часть уравнения линии второго порядка на проективной плоскости представляет собой квадратичную форму $g(X, X)$, которой взаимно однозначно соответствует симметрическая билинейная форма $g(X, Y)$.

Определение 3. Точки A и B называются сопряженными относительно невырожденной линии второго порядка, заданной уравнением $g(X, X) = 0$, если $g(A, B) = 0$.

Если координаты точек A и B равны $A(a_1 : a_2 : a_3)$ и $B(b_1 : b_2 : b_3)$, то точки сопряжены в том и только в том случае, когда

$$g(A, B) = g_{11}a_1b_1 + g_{22}a_2b_2 + g_{33}a_3b_3 + \\ + g_{12}(a_1b_2 + a_2b_1) + g_{13}(a_1b_3 + a_3b_1) + g_{23}(a_2b_3 + a_3b_2) = 0. \quad (10)$$

Понятие сопряженности точек относительно невырожденной линии второго порядка имеет интересный геометрический смысл. Выясним, что представляет собой множество точек плоскости, сопряженных с данной точкой относительно невырожденной линии второго порядка. Введем определение.

Определение 4. *Множество точек, сопряженных с точкой A относительно линии второго порядка, называется полярной точки A относительно этой линии.*

Если точка A принадлежит линии второго порядка, то, как следует из (9) и (10), все точки, ей сопряженные, принадлежат касательной к кривой в точке A . Поэтому *полярной точки, принадлежащей кривой, является ее касательная в этой точке.*

Пусть точка A не принадлежит кривой. Уравнение, которому удовлетворяют координаты точек X , сопряженных с точкой A , выводится точно так же, как и уравнение (9) касательной в случае принадлежности точки A кривой. Таким образом, *поляра точки, не принадлежащей кривой, является прямой, определяемой уравнением (9).*

Рассмотрим следующую задачу: найти точку, для которой данная прямая l является полярной. Пусть прямая l задана уравнением $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$. Тогда, как следует из (9), прямая l служит полярной точки $A(a_1 : a_2 : a_3)$ в том и только в том случае, когда

$$\begin{cases} g_{11}a_1 + g_{12}a_2 + g_{13}a_3 = u_1, \\ g_{12}a_1 + g_{22}a_2 + g_{23}a_3 = u_2, \\ g_{13}a_1 + g_{23}a_2 + g_{33}a_3 = u_3. \end{cases} \quad (11)$$

Система (11) представляет собой систему линейных уравнений с тремя неизвестными a_1 , a_2 и a_3 . Она имеет решение, так как ее матрица, совпадающая с матрицей G линии γ , невырожденная. Система неоднородная, так как среди чисел u_1 , u_2 , u_3 по крайней мере одно отлично от нуля, поэтому

ее решения ненулевые. Таким образом, для любой прямой существует точка, для которой эта прямая является полярной.

Определение 5. Точка, для которой прямая является полярной, называется ее полюсом относительно линии второго порядка.

Если прямая касается линии γ , то ее полюс совпадает с точкой касания. Таким образом, с помощью невырожденной линии второго порядка на проективной плоскости можно установить взаимно однозначное соответствие между множеством точек и множеством прямых, поставив в соответствие каждой точке ее полярю и каждой прямой — ее полюс. Такое соответствие называется *поляритетом*. В § 33 мы использовали аналогичное взаимно однозначное соответствие для обоснования принципа двойственности. Каждой точке $A(a_1 : a_2 : a_3)$ мы ставили в соответствие прямую $a: a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ и наоборот, прямой $a: a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ ставили в соответствие точку $A(a_1 : a_2 : a_3)$, координаты которой совпадали с коэффициентами прямой. Можно доказать, что такое соответствие является поляритетом относительно мнимой овальной линии $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$. Проведите доказательство самостоятельно.

Точки A и B сопряжены относительно невырожденной линии второго порядка в том и только в том случае, когда $g(A, B) = 0$. Из соотношения (10) следует, что значение билинейной формы $g(A, B)$, выраженное через координаты точек A и B , симметрично относительно координат этих точек. Поэтому полярю точки A содержит точку B и наоборот, полярю точки B проходит через точку A . Мы доказали следующую теорему.

Теорема 3 (теорема о взаимности поляритета). Если точка B принадлежит полярю точки A относительно невырожденной линии второго порядка, то точка A лежит на полярю точки B .

Выясним геометрический смысл понятия сопряженности точек. Пусть точки A и B сопряжены относительно невырожденной линии второго порядка γ , заданной общим уравнением, и не принадлежат ей. Тогда прямая AB пересекает линию γ в двух вещественных или комплексно

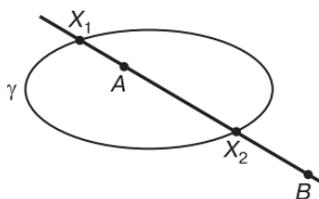


Рис. 196

сопряженных точках X_1 и X_2 (рис. 196). В этом случае для определения координат точек X_1 и X_2 надо найти корни t_1 и t_2 уравнения (8): $Pt^2 + 2Qt + R = 0$, затем выбрать пары чисел α_1, β_1 и α_2, β_2 , удовлетворяющие соотношениям $\frac{\alpha_i}{\beta_i} = t_i, i = 1, 2$, и определить координаты точек X_1 и X_2 по

формулам (2):
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha_i \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \beta_i \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2.$$
 Отсюда

и из правила вычисления двойного отношения точек по их координатам следует, что

$$(AB; X_1X_2) = \frac{\beta_1}{\alpha_1} : \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \frac{t_2}{t_1}. \quad (12)$$

По условию точки A и B сопряжены относительно линии γ , поэтому $Q = g(A, B) = 0$ и уравнение (8) имеет вид $Pt^2 + R = 0$. Из теоремы Виета следует, что корни этого квадратного уравнения подчиняются равенству $t_1 + t_2 = 0$, отсюда $t_1 = -t_2$. Поэтому из равенства (12) получим, что $(AB; X_1X_2) = -1$. Пара сопряженных точек A, B гармонически делит пару точек X_1, X_2 пересечения прямой AB с линией γ . Обратно, пусть точки A и B не принадлежат линии γ . Предположим, что они гармонически делят пару точек X_1, X_2 пересечения прямой AB с этой линией. Тогда из соотношения (12) получим, что $\frac{t_2}{t_1} = -1$, т. е. $t_1 + t_2 = 0$. Из теоремы Виета вытекает, что в уравнении (8) коэффициент $Q = g(AB) = 0$, т. е. точки A и B сопряжены относительно линии γ . Нами доказана следующая теорема.

Теорема 4. Если точки A и B не принадлежат линии, то они сопряжены относительно нее в том и только

в том случае, когда пара точек A и B гармонически делит пару точек пересечения линии с прямой AB .

Рассмотрим на плоскости невырожденную линию второго порядка γ , выберем произвольную точку O_1 , не принадлежащую линии γ . Пусть прямая o_1 — полярная точка O_1 . Выберем на этой полярной точке O_2 . Тогда, в силу теоремы 1 о взаимности полярности, точка O_1 принадлежит полярной o_2 точки O_2 . Так как $O_1 \notin \gamma$, то точки O_1 и O_2 не совпадают, поэтому прямые o_1 и o_2 различны. Обозначим через O_3 их точку пересечения. По теореме 1 полярная o_3 точки O_3 совпадает с прямой O_1O_2 (рис. 197). Построенный трехвершинник $O_1O_2O_3$ называется автополярным относительно невырожденной линии второго порядка. Проверьте самостоятельно, если выбрать репер $R' = (O_1, O_2, O_3, E')$, первые три вершины которого образуют автополярный трехвершинник относительно линии γ , то в такой системе координат ее уравнение приведено к каноническому виду $g_{11}x_1^2 + g_{22}x_2^2 + g_{33}x_3^2 = 0$.

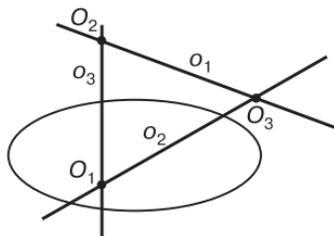


Рис. 197

Рассмотрим следующую задачу: на плоскости даны вещественная овальная линия γ и пучок прямых с центром в некоторой точке M . Требуется выяснить, в каком случае все прямые пучка пересекают линию γ , а в каком случае линию γ пересекают только некоторые из них. Решение этой задачи сводится к нахождению числа решений уравнения (8). Будем считать, что на плоскости выбрана такая система координат, в которой уравнение линии γ приведено к каноническому виду: $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$. Пусть в этой системе координат $M(m_1 : m_2 : m_3)$. Рассмотрим произвольную точку $N(n_1 : n_2 : n_3)$ плоскости. Тогда коэффициенты в уравнении (8), соответствующие прямой MN пучка, определяются из

соотношений (5)–(7):

$$P = (m_1 m_2 m_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = m_1^2 + m_2^2 - m_3^2, \quad (13)$$

$$Q = (n_1 n_2 n_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = m_1 n_1 + m_2 n_2 - m_3 n_3, \quad (14)$$

$$R = (n_1 n_2 n_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = n_1^2 + n_2^2 - n_3^2. \quad (15)$$

Теорема 5. *Если центр M пучка принадлежит линии γ , то любая его прямая, не совпадающая с касательной к линии γ , пересекает эту линию еще в одной точке.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную прямую $a = MN$, проходящую через M и не совпадающую с касательной t в этой точке. Так как точка M принадлежит линии γ , а точка N ей не принадлежит, то из формул (13) и (15) следует, что $P = 0$ и $R \neq 0$. Таким образом, уравнение (8) имеет вид $2Q\alpha\beta + R\beta^2 = 0$. Отсюда следует, что его решениями являются пары чисел, пропорциональные $(1 : 0)$ и $(R : -2Q)$. Так как прямая a не совпадает с прямой t , т. е. не является касательной, то, как отмечалось выше, $Q \neq 0$. Следовательно, найденным решениям соответствуют две различные точки пересечения прямой a с линией γ , одна из которых совпадает с точкой M . Теорема доказана.

Определение 6. *Точка проективной плоскости называется внутренней относительно вещественной овальной линии, если любая прямая пучка с центром в этой точке пересекает линию, и внешней, если в пучке существует прямая, не имеющая с линией общих точек.*

Выведем условия, характеризующие в канонической системе координат координаты внутренних и внешних точек вещественной овальной линии второго порядка.

Теорема 6. *Точка $M(m_1 : m_2 : m_3)$ тогда и только тогда является внутренней относительно вещественной овальной линии, заданной каноническим уравнением*

$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, когда ее координаты удовлетворяют условию:

$$m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 < 0, \quad (16)$$

и внешней, когда выполнено условие:

$$m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 > 0. \quad (17)$$

Доказательство. Необходимость. Предположим, что координаты точки M удовлетворяют условию (16). Выберем произвольную прямую m , принадлежащую пучку с центром в точке M . Пусть ее уравнение имеет вид $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$. Заметим, что коэффициенты a_1 и a_2 этого уравнения не равны нулю одновременно. В самом деле, если $a_1 = a_2 = 0$, то $a_3 \neq 0$, и уравнение прямой m имеет вид $x_3 = 0$. Так как точка M принадлежит прямой m , то ее координаты равны $(m_1 : m_2 : 0)$. Но тогда они не удовлетворяют неравенству (16), что противоречит условию. Таким образом, мы можем выбрать точку N с координатами $N(a_2 : -a_1 : 0)$. Как нетрудно проверить, точка N принадлежит прямой m . Число точек пересечения прямой $m = MN$ с линией второго порядка γ совпадает с числом корней уравнения (8): $Pt^2 + 2Qt + R = 0$. Его коэффициенты определяются по формулам (13)–(15): $P = m_1^2 + m_2^2 - m_3^2$, $Q = m_1a_2 - m_2a_1$ и $R = a_1^2 + a_2^2$. Дискриминант квадратного уравнения с этими коэффициентами имеет вид: $D = Q^2 - PR$. Но для выбранных точек $P < 0$, $R > 0$, поэтому $D > 0$. Уравнение имеет два решения, прямая m пересекает линию γ в двух точках. Следовательно, M — внутренняя точка.

Пусть координаты точки M удовлетворяют неравенству (17). Тогда ее координаты m_1 и m_2 не равны нулю одновременно. Действительно, если координаты точки M равны $(0 : 0 : m_3)$, то они не удовлетворяют неравенству (17). Рассмотрим точку $N(m_2 : -m_1 : 0)$. Точка N , как нетрудно проверить, не принадлежит линии γ . Для прямой MN коэффициенты уравнения (8) равны $P = m_1^2 + m_2^2 - m_3^2$, $Q = m_1m_2 - m_2m_1 = 0$, $R = m_1^2 + m_2^2$. В рассматриваемом случае дискриминант уравнения (8) отрицателен:

$$D = Q^2 - PR = -(m_1^2 + m_2^2 - m_3^2)(m_1^2 + m_2^2) < 0.$$

Уравнение не имеет решений, поэтому прямая MN не пересекает линию, M — внешняя точка.

Достаточность утверждения теоремы можно доказать методом от противного (проведите самостоятельно). Теорема доказана.

Наглядные соображения подсказывают нам, что через внешнюю точку овальной линии можно провести две ее касательные. Следующая теорема обосновывает это интуитивное представление.

Теорема 7. *Даны вещественная овальная линия и ее внешняя точка. Тогда через эту точку проходят две касательные к линии.*

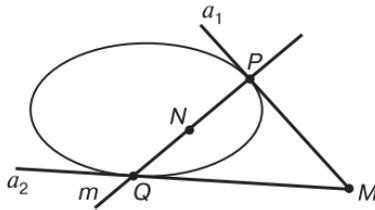


Рис. 198

Доказательство. На плоскости выберем систему координат, в которой уравнение овальной линии γ имеет канонический вид $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$. Так как, по условию, M — внешняя точка, то ее координаты $(m_1 : m_2 : m_3)$ удовлетворяют неравенству (17): $m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 > 0$. Воспользуемся уравнением (9) и найдем уравнение поляры t точки M : $m_1x_1 + m_2x_2 - m_3x_3 = 0$. Докажем, что прямая t содержит внутреннюю точку N линии γ , т. е. пересекает ее в двух точках. Для этого достаточно рассмотреть точку с координатами $N(m_1m_3 : m_2m_3 : m_1^2 + m_2^2)$. Нетрудно проверить, что ее координаты удовлетворяют уравнению поляры t . Подставим координаты этой точки в левую часть неравенства (16):

$$m_1^2m_3^2 + m_2^2m_3^2 - (m_1^2 + m_2^2)^2 = (m_1^2 + m_2^2)(m_3^2 - m_1^2 - m_2^2).$$

Точка M внешняя, ее координаты удовлетворяют неравенству (17), поэтому $m_3^2 - m_1^2 - m_2^2 < 0$. Отсюда следует, что координаты точки N — решения неравенства (16), N — внутренняя точка. Таким образом, поляра t пересекает линию γ в точках P и Q (рис. 198). Воспользуемся свойством взаимности поляритета (теорема 3). Из него вытекает, что

поляры точек P и Q , принадлежащих прямой m , проходят через полюс этой прямой, т. е. через точку M . Но полярами точек P и Q являются касательные a_1 и a_2 к линии γ в этих точках. Теорема доказана.

§ 41. ТЕОРЕМЫ ШТЕЙНЕРА, ПАСКАЛЯ И БРИАНШОНА

В § 37 мы ввели определение проективного отображения пучков прямых, понимая под этим взаимно однозначное отображение прямых одного пучка на прямые другого, при котором сохраняется двойное отношение прямых. Было доказано, что если в пучках выбраны упорядоченные тройки прямых, то существует единственное проективное отображение первого пучка на второй, при котором первая тройка переходит во вторую. Мы также рассмотрели пример проективного отображения одного пучка на другой, так называемое перспективное отображение. При перспективном отображении точки пересечения соответствующих друг другу прямых принадлежат одной прямой — оси перспективного отображения. Признаком перспективного отображения является следующее свойство: прямая, соединяющая центры пучков, преобразуется сама в себя.

Якоб Штейнер (1796–1863), известный немецкий математик, профессор Берлинского университета, ученик знаменитого педагога Иоганна Генриха Песталоцци, доказал следующую замечательную теорему.

Теорема 1 (теорема Штейнера). *Если между двумя пучками с различными центрами O_1 и O_2 установлено проективное, но не перспективное отображение, то точки пересечения соответствующих прямых этих пучков образуют вещественную овальную линию второго порядка, содержащую центры O_1 и O_2 .*

Доказательство. Обозначим прямую O_1O_2 через l . Пусть $m = f^{-1}(O_1O_2) = f^{-1}(l)$, а $l' = f(O_1O_2) = f(l)$. Прямая m принадлежит пучку с центром в точке O_1 , а прямая l' — пучку с центром в точке O_2 (рис. 199). Рассмотрим произвольную прямую n первого пучка, не совпадающую с прямыми l и m . Тогда ее образ $n' = f(n)$, принадлежащий второму пучку, не совпадает с прямой l' . Так как f — проективное, но не перспективное отображение, прямые

m , l и l' попарно различны. Обозначим через O_3 точку пересечения прямых l' и m , а через E — прямых n и n' . Нетрудно проверить, что точки O_1 , O_2 , O_3 и E являются точками общего положения, они образуют проективный репер.

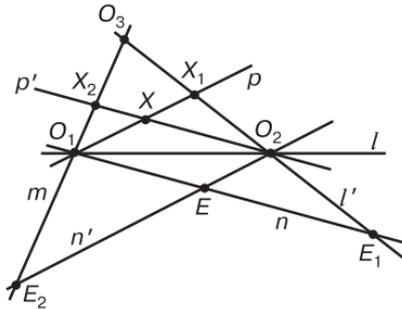


Рис. 199

Выберем произвольную прямую p первого пучка и обозначим ее образ при отображении f через p' : $p' = f(p)$. Пусть $X(x_1 : x_2 : x_3)$ — их точка пересечения. Обозначим через X_1 , X_2 , E_1 и E_2 соответственно точки пересечения прямых $p = O_1X$, $p' = O_2X$, n и n' с координатными прямыми $l' = O_2O_3$ и $m = O_1O_3$ (рис. 199). В силу определения двойного отношения прямых пучка (см. § 35), $(lm; nO_1X) = (O_2O_3; E_1X_1)$, $(l'l'; n'O_2X) = (O_3O_1; E_2X_2)$. Из леммы 4 § 34 следует:

$$\begin{aligned} (lm; nO_1X) = (O_2O_3; E_1X_1) &= \frac{x_2}{x_3}, \\ (l'l'; n'O_2X) = (O_3O_1; E_2X_2) &= \frac{x_3}{x_1}. \end{aligned} \tag{1}$$

Так как $l' = f(l)$, $l = f(m)$, $n' = f(n)$, $O_2X = f(O_1X)$, а f — проективное отображение первого пучка на второй, то $(lm; nO_1X) = (l'l'; n'O_2X)$. Отсюда и из (1) получим: координаты точки X удовлетворяют равенству $\frac{x_2}{x_3} = \frac{x_3}{x_1}$, т. е.

$$x_1x_2 - x_3^2 = 0. \tag{2}$$

В задаче, рассмотренной в § 39, определен вид кривой, уравнение которой совпадает с (2). Такая кривая является вещественной овальной линией второго порядка. Таким

образом, точки пересечения соответствующих прямых данных пучков принадлежат вещественной овальной линии второго порядка γ . Нетрудно проверить, что центры пучков принадлежат линии γ .

Предположим, что X — произвольная точка овальной линии γ , не совпадающая с центрами пучков O_1 и O_2 . Покажем, что она служит точкой пересечения соответственных прямых этих пучков. Координаты этой точки удовлетворяют уравнению (2), т. е. $\frac{x_2}{x_3} = \frac{x_3}{x_1}$. Отсюда и из равенств (1) следует, что $(lm; nO_1X) = (l'l; n'O_2X)$. Поэтому образом прямой O_1X пучка с центром в точке O_1 при проективном отображении f является прямая O_2X пучка с центром в точке O_2 , а точка X является точкой пересечения этих прямых. Теорема доказана.

Найдем уравнения касательных к линии γ в точках O_1 и O_2 . Для этого воспользуемся уравнением касательной к кривой второго порядка (см. § 40):

$$(g_{11}a_1 + g_{12}a_2 + g_{13}a_3)x_1 + (g_{12}a_1 + g_{22}a_2 + g_{23}a_3)x_2 + (g_{13}a_1 + g_{23}a_2 + g_{33}a_3)x_3 = 0. \quad (*)$$

Координаты центров пучков равны: $O_1(1 : 0 : 0)$, $O_2(0 : 1 : 0)$, а коэффициенты g_{ij} уравнения линии γ , в силу (2), имеют вид $g_{11} = g_{22} = g_{13} = g_{23} = 0$, $g_{33} = -1$, $g_{12} = \frac{1}{2}$. Подставляя эти коэффициенты g_{ij} и координаты точек O_1 и O_2 в уравнение (*), получим, что прямая $x_1 = 0$ касается линии γ в точке O_1 , а прямая $x_2 = 0$ — в точке O_2 . Доказано следующее утверждение.

Следствие 1. Если f — отображение, определенное в теореме 1, то прямые $f^{-1}(O_1O_2)$ и $f(O_1O_2)$ являются касательными к вещественной овальной линии γ соответственно в точках O_1 и O_2 .

Докажем теорему, обратную теореме Штейнера.

Теорема 2 (обратная теорема Штейнера). Пусть на плоскости дана вещественная овальная линия второго порядка γ и даны две точки O_1 и O_2 , ей принадлежащие. Касательной к линии γ в точке O_1 поставим в соответствие прямую O_1O_2 , а прямой O_1O_2 — касательную к линии γ в точке O_2 . Любой другой прямой a пучка с центром в точке O_1 поставим в соответствие прямую

O_2M , где M — точка пересечения прямой a и линии γ . Тогда отображение f пучка с центром в точке O_1 на пучок с центром в точке O_2 является проективным, но не перспективным.

Доказательство. Выберем на проективной плоскости репер $R = (O_1, O_2, O_3, E)$. Пусть точки O_1 и O_2 репера совпадают с данными в условии теоремы точками, третья точка O_3 является точкой пересечения касательных к линии γ в точках O_1 и O_2 , единичная точка E — произвольная точка линии γ , не совпадающая с точками O_1 и O_2 (рис. 200).

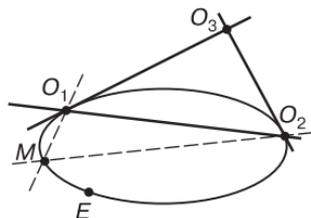


Рис. 200

Рассмотрим общее уравнение линии γ :

$$g_{11}x_1^2 + g_{22}x_2^2 + g_{33}x_3^2 + 2g_{12}x_1x_2 + 2g_{13}x_1x_3 + 2g_{23}x_2x_3 = 0.$$

Выясним, какие условия накладываются на ее коэффициенты в результате выбора базисных точек репера R . Так как точки $O_1(1 : 0 : 0)$ и $O_2(0 : 2 : 0)$ принадлежат линии γ , то, подставляя их координаты в уравнение линии, получим, что $g_{11} = g_{22} = 0$. Уравнение линии γ принимает вид $g_{33}x_3^2 + 2g_{12}x_1x_2 + 2g_{13}x_1x_3 + 2g_{23}x_2x_3 = 0$. Из уравнения (*) касательной к линии γ следует, что ее касательные в базисных точках O_1 и O_2 имеют соответственно уравнения: $g_{12}x_2 + g_{13}x_3 = 0$ и $g_{12}x_1 + g_{23}x_3 = 0$. С другой стороны, уравнения этих касательных, являющихся координатными прямыми O_1O_3 и O_2O_3 , имеют вид $x_2 = 0$ и $x_1 = 0$. Поэтому $g_{13} = g_{23} = 0$ и уравнение линии γ можно записать в виде $g_{33}x_3^2 + 2g_{12}x_1x_2 = 0$. Наконец, точка $E(1 : 1 : 1)$ принадлежит линии γ , поэтому $g_{33} + 2g_{12} = 0$. Мы получили, что уравнение линии γ имеет вид (2): $x_1x_2 - x_3^2 = 0$.

В § 37 изучались свойства проективных отображений пучков прямых. Было доказано утверждение, из которого следует, что существует единственное проективное отображение одного пучка прямых на другое, которое переводит упорядоченную тройку прямых первого пучка в упорядоченную тройку прямых второго. Воспользуемся этим утверждением и рассмотрим проективное отображение φ пучка с центром в точке O_1 в пучок с центром

в точке O_2 , заданное следующими тройками прямых: трем прямым пучка с центром в точке O_1 , а именно касательной O_1O_3 к данной линии γ , прямой O_1O_2 и прямой O_1E ставятся в соответствие три прямые пучка с центром в точке O_2 : прямая O_1O_2 , касательная O_2O_3 к линии γ в точке O_2 и прямая O_2E . Ясно, что такое отображение не является перспективным. Из теоремы Штейнера следует, что в выбранном репере координаты точек пересечения соответственных прямых удовлетворяют уравнению (2), т. е. принадлежат вещественной овальной линии γ . Таким образом, отображения f и ϕ совпадают. Теорема доказана.

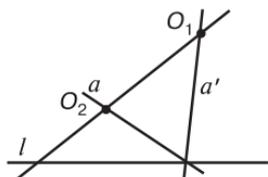


Рис. 201

Как уже отмечалось, при перспективном отображении пучков точки пересечения соответственных прямых принадлежат одной прямой — оси перспективы. На рисунке 201 изображены точки O_1 и O_2 — центры пучков, прямая l — ось перспективы, прямой a соответствует прямая a' , их точка пересечения принадлежит оси l . Прямой O_1O_2 соответствует та же прямая O_1O_2 , что, как было показано в § 37, является признаком перспективности отображения пучков. Ось l состоит из точек пересечения прямых, соответствующих друг другу при этом соответствии. Таким образом, при перспективном соответствии пучков прямых точки пересечения соответствующих прямых также принадлежат кривой второго порядка, но вырожденной, представляющей собой пару совпавших прямых.

Теорема Штейнера дает геометрическое определение вещественной овальной линии второго порядка как множества точек пересечения соответствующих друг другу прямых при проективном, но не перспективном отображении пучков. Из обратной теоремы Штейнера следует, что центры пучков, определяющих овальную линию, можно выбрать на ней произвольно.

Теорему Штейнера можно применять при доказательстве некоторых геометрических свойств вещественной овальной линии второго порядка. Докажем следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть на проективной плоскости даны пять точек общего положения. Тогда существует един-

ственная вещественная овальная линия второго порядка, содержащая эти точки.

Доказательство. Обозначим данные точки через O_1 , O_2 , A , B и C . Рассмотрим пучки прямых с центрами в точках O_1 и O_2 . Применим теорему 8 § 37, из которой следует, что существует единственное проективное отображение прямых первого пучка на прямые второго, при котором тройке прямых пучка с центром в точке O_1 соответствует тройка прямых пучка с центром в O_2 . Установим проективное отображение f прямых пучка с центром в точке O_1 на прямые пучка с центром в O_2 : $f(O_1A) = O_2A$, $f(O_1B) = O_2B$, $f(O_1C) = O_2C$ (рис. 202). Отображение f не является перспективным, так как точки A , B и C не принадлежат одной прямой. Тогда из теоремы Штейнера следует, что точки пересечения соответствующих друг другу прямых принадлежат вещественной овальной линии γ , содержащей данные точки.

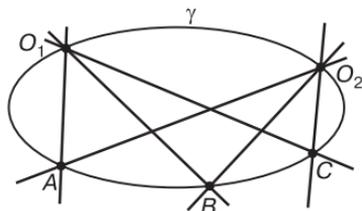


Рис. 202

Предположим, что существует еще одна вещественная овальная линия γ' , проходящая через данные точки. Тогда из теоремы 2 следует, что линия γ' устанавливает проективное соответствие f' пучков с центрами в точках O_1 и O_2 , при котором $f'(O_1A) = O_2A$, $f'(O_1B) = O_2B$ и $f'(O_1C) = O_2C$. Из теоремы 8 § 37 следует, что $f = f'$. Поэтому $\gamma = \gamma'$. Теорема доказана.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Даны пять точек общего положения, определяющие вещественную овальную линию. Построить еще одну точку этой линии.

Решение. Обозначим данные точки через O_1 , O_2 , A , B и C . Овальная линия, в силу теоремы 3, совпадает

с множеством точек пересечения прямых, соответственных друг другу при проективном отображении f , построенном при доказательстве теоремы 3. Для решения задачи достаточно выбрать произвольную прямую x , проходящую через точку O_1 и не совпадающую с прямыми O_1A , O_1B и O_1C , построить ее образ x' при отображении f и найти искомую точку X пересечения прямых x и x' . Как было показано в § 37, проективное отображение f является произведением двух перспективных отображений. Выберем их оси d и d' так, чтобы они проходили через данную точку A (рис. 203). Пусть S и T — точки пересечения прямых O_1B и O_1C с прямой d , а S' и T' — прямых O_2B и O_2C с прямой d' , а точка Q — прямых SS' и TT' . Тогда данное проективное отображение f является произведением двух перспективных отображений φ и φ' , определенных следующим образом: перспективное отображение φ отображает пучок с центром в точке O_1 на пучок с центром в точке Q , его осью служит прямая d , а φ' отображает пучок с центром в точке Q на пучок с центром в точке O_2 , его осью является прямая d' . Возьмем произвольную прямую x пучка с центром в точке O_1 (рис. 203). Она пересекает прямую d в точке R . Поэтому при перспективном отображении φ прямая x преобразуется в прямую QR пучка с центром в точке Q . Прямая QR пересекает ось d' преобразования φ' в точке R' . Поэтому прямая x при проективном преобразовании пучков с центрами в точках O_1 и O_2 переходит в прямую $x' = QR'$. Точка X пересечения прямых x и x' — искомая.

Блез Паскаль (1623–1662), знаменитый французский естествоиспытатель и математик, будучи шестнадцатилет-

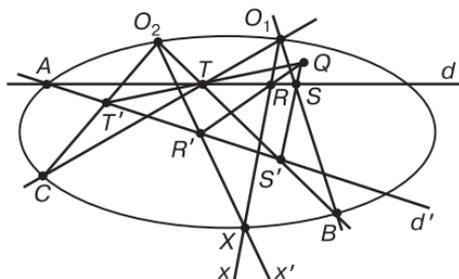


Рис. 203

ним юношей, написал замечательный трактат «Опыт о конических сечениях» (*Essai pour les coniques*), содержащий теорему, которая носит его имя. В соответствии с этой теоремой, во всяком шестиугольнике (как называл его Паскаль «мистическом шестивершиннике»), вписанном в эллипс, гиперболу или параболу, точки пересечения трех пар противоположных сторон лежат на одной прямой.

Прежде всего, введем необходимые определения.

Определение 1. Упорядоченную шестерку точек общего положения проективной плоскости $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ и шесть прямых $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6, A_6A_1$ будем называть шестивершинником.

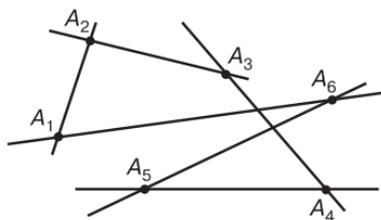


Рис. 204

Шестивершинник будет обозначаться нами как $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Точки A_i называются *вершинами*, прямые $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6, A_6A_1$ — *сторонами* шестивершинника. Вершины A_1 и A_4, A_2 и A_5, A_3 и A_6 будем называть *противоположными*. Стороны A_1A_2 и A_4A_5, A_2A_3 и A_5A_6, A_3A_4 и A_6A_1 , проходящие через противоположные вершины, также называются *противоположными* сторонами. На рисунке 204 изображен шестивершинник. Расположение вершин может быть произвольным, лишь бы никакие три из них не лежали на одной прямой. В теореме Паскаля доказывается свойство шестивершинника, вписанного в вещественную овальную линию.

Теорема 4 (теорема Паскаля). Точки пересечения противоположных сторон шестивершинника, вписанного в вещественную овальную линию, лежат на одной прямой.

Доказательство. Будем считать, что нам дан шестивершинник O_1ABCO_2D , вписанный в вещественную овальную линию γ . Тогда пары сторон O_1A и CO_2 , AB и O_2D , BC и DO_1 являются противоположными. Из теоремы 2, обратной теореме Штейнера, следует, что линия γ порождает проективное отображение f прямых пучка с центром в точке O_1 на прямые пучка с центром в точке O_2 , при этом $f(O_1C) = O_2C$, $f(O_1D) = O_2D$, $f(O_1A) = O_2A$, $f(O_1B) = O_2B$. Отображение f порождает проективное отображение φ прямых $d_1 = BC$ и $d_2 = BA$, при котором каждой точке X прямой d_1 ставится в соответствие такая точка X' прямой d_2 , что точки пересечения прямых O_1X и O_2X' принадлежат линии γ (рис. 205). Тогда из равенства $f(O_1B) = O_2B$ следует, что $\varphi(B) = B$. Таким образом, точка пересечения прямых d_1 и d_2 преобразуется сама в себя.

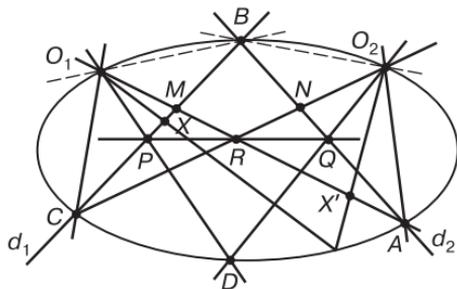


Рис. 205

Из теоремы 2 § 37 следует, что φ — перспективное отображение прямых. Определим его центр перспективы. Согласно определению отображения φ , точка C отображается в точку N , а точка M — в точку A . Поэтому центром перспективы служит точка R пересечения противоположных сторон O_1A и CO_2 шестивершинника. Рассмотрим точки пересечения остальных пар противоположных сторон, точку P пересечения прямых BC и DO_1 и точку Q пересечения прямых AB и O_2D . Нетрудно проверить, что $\varphi(P) = Q$. Поэтому прямая PQ проходит через точку R . Теорема доказана.

Легко доказать обратное утверждение.

Теорема 5 (обратная теорема Паскаля). Пусть дан шестивершинник, вершины которого образуют систему

точек общего положения. Если точки пересечения его противоположных сторон принадлежат одной прямой, то шестивершинник вписан в вещественную овальную линию.

Доказательство. Обозначим вершины шестивершинника через O_1 , A , B , C , O_2 и D . В соответствии с теоремой 3 предыдущего параграфа, существует вещественная овальная линия γ , проходящая через точки O_1 , B , C , O_2 и D . Предположим, что $A \notin \gamma$. Обозначим через A' точку пересечения прямой O_2A и γ (рис. 206). Шестивершинник $O_1A'BCO_2D$ вписан в линию γ , поэтому из теоремы Паскаля следует, что точки пересечения его противоположных сторон $R = O_1A' \cap CO_2$, $P = BC \cap DO_1$ и $Q = A'B \cap O_2D$ принадлежат одной прямой PQ . Кроме того, по условию, точки пересечения противоположных сторон данного шестивершинника O_1ABCO_2D принадлежат прямой PQ . Поэтому точка пересечения R сторон O_1A' и CO_2 шестивершинника $O_1A'BCO_2D$ и точка пересечения R' сторон O_1A и CO_2 шестивершинника O_1ABCO_2D совпадают с точкой пересечения прямых CO_2 и PQ , т. е. совпадают друг с другом. Отсюда следует, что точки A и A' так же совпадают. Точка A принадлежит линии γ . Теорема доказана.

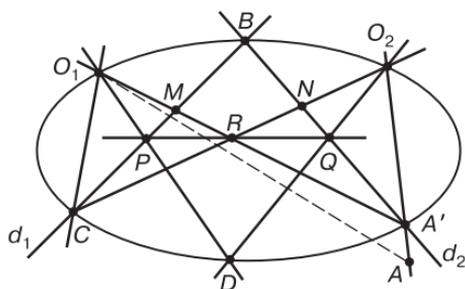


Рис. 206

Интересно проверить, верна ли теорема Паскаля, если линия второго порядка вырождена. Ответ на этот вопрос дает теорема, доказанная Паппом Александрийским около 300-го года нашей эры.

Теорема 6 (теорема Палпа).

Дан шестивершинник O_1ABCO_2D . Вершины O_1 , B , и O_2 принадлежат одной прямой, а вершины A , C и D другой. Тогда его противоположные стороны пересекаются в трех коллинеарных точках.

Доказательство. Данные в условии прямые обозначим через a и b . Требуется доказать, что точки $P = O_1D \cap BC$, $Q = BA \cap O_2D$ и $R = O_1A \cap O_2C$ принадлежат одной прямой (рис. 207). Рассмотрим перспективное отображение f пучка с центром в точке O_1 на пучок с центром в точке O_2 , осью которого является прямая b . Из определения перспективного отображения пучков следует, что $f(O_1O_2) = O_1O_2$, $f(O_1C) = O_2C$, $f(O_1D) = O_2D$, $f(O_1A) = O_2A$. Отображение f устанавливает проективное отображение φ прямой BC на прямую BA , при котором точке X , принадлежащей прямой BC , ставится в соответствие точка $\varphi(X)$ прямой BA , которая совпадает с точкой пересечения прямых BA и O_1X . Таким образом, $f(O_1X) = O_2\varphi(X)$. Поэтому, если точка M совпадает с точкой пересечения прямых O_1A и BC , то $\varphi(M) = A$, если точка N совпадает с точкой пересечения прямых O_2C и BA , то $\varphi(C) = N$, и, наконец, $\varphi(P) = Q$. Так как $f(O_1O_2) = O_1O_2$, то $\varphi(B) = B$, поэтому φ — перспективное отображение. Отсюда следует, что прямые, соединяющие соответственные точки при отображении φ , принадлежат одному пучку с центром в точке R пересечения прямых

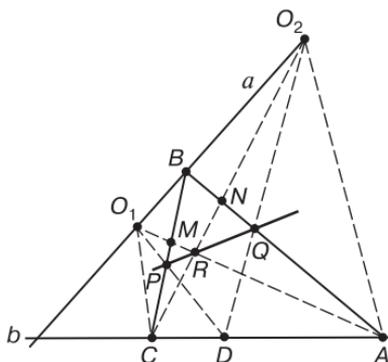


Рис. 207

O_1A и O_2C . Точки P , Q и R принадлежат одной прямой. Теорема доказана.

По существу мы повторили доказательство теоремы Паскаля, с той лишь разницей, что перспективное отображение f пучков с центрами в точках O_1 и O_2 было установлено с помощью вырожденной линии второго порядка (прямые a и b).

Рассмотрим на проективной плоскости вещественную овальную линию. Будем предполагать, что на плоскости задана каноническая система координат, в которой уравнение этой линии имеет вид

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0. \quad (3)$$

При изучении принципа двойственности (см. § 33) мы рассмотрели отображение f множества точек на множество прямых и отображение f' множества прямых на множество точек проективной плоскости, при котором в некоторой системе координат каждой точке $A(a_1 : a_2 : a_3)$ ставится в соответствие прямая с теми же координатами $f(A)(a_1 : a_2 : a_3)$, имеющая уравнение $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$, и каждой прямой u : $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ ставится в соответствие точка $f'(u) = U(u_1 : u_2 : u_3)$. При отображениях f и f' сохраняется условие принадлежности точек и прямых.

Выясним, какое множество прямых соответствует точкам вещественной овальной линии γ при указанном отображении f . Пусть координаты точки $A(a_1 : a_2 : a_3)$ удовлетворяют уравнению (3). Ей соответствует прямая $f(A) : a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$. Покажем, что прямая $f(A)$ совпадает с касательной в точке A к линии γ . Из канонического уравнения (3) овальной линии следует, что $g_{11} = g_{22} = 1$, $g_{33} = -1$, $g_{12} = g_{13} = g_{23} = 0$. Поэтому уравнение (*) касательной в точке A имеет вид $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$. Таким образом, множество точек линии γ при отображении f отображается в множество касательных к этой линии.

Рассмотрим произвольный шестивершинник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, вписанный в линию γ . При отображении f он преобразуется в шестивершинник, описанный вокруг линии γ (рис. 208), точки A_i перейдут в касательные $f(A_i)$ в этих же точках. Таким образом, вписанный шестивершинник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ преобразуется в шестивершинник $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$, описанный вокруг линии γ . Стороне A_1A_2

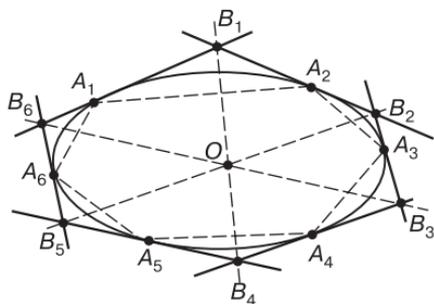


Рис. 208

будет соответствовать вершина $B_1 = f'(A_1A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$. Ее противоположной стороне A_4A_5 будет соответствовать противоположная вершина $B_4 = f'(A_4A_5) = f(A_4) \cap f(A_5)$. Аналогично, противоположным сторонам A_2A_3 и A_5A_6 будут соответствовать вершины B_2 и B_5 , а противоположным сторонам A_3A_4 и A_6A_1 — вершины B_3 и B_6 . В соответствии с теоремой Паскаля точки пересечения противоположных сторон шестивершинника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ принадлежат одной прямой. Следовательно, при отображении f прямые, соединяющие противоположные вершины B_1B_4 , B_2B_5 и B_3B_6 шестивершинника $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$, пересекаются в точке O .

Мы получили замечательное утверждение, названное в честь французского математика Шарля Жульена Брианшона (1785–1864), доказавшего его в 1806 году.

Теорема 7 (теорема Брианшона). *Если шестивершинник описан вокруг вещественной овальной линии, то прямые, соединяющие его противоположные вершины, пересекаются в одной точке.*

Теорема Брианшона, как следует из ее доказательства, является двойственной теореме Паскаля.

ПРОЕКТИВНЫЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ АФФИННОЙ И ЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИЙ И НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

§ 42. ПРОЕКТИВНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ АФФИННОЙ ГЕОМЕТРИИ

Зафиксируем на проективной плоскости какую-нибудь линию γ . Рассмотрим множество всех проективных преобразований плоскости, при которых линия γ преобразуется сама в себя. Такие преобразования будем называть *автоморфизмами линии γ* . Множество автоморфизмов M линии γ представляет собой подгруппу в группе проективных преобразований плоскости. Действительно, если проективные преобразования f и g принадлежат множеству M , то $f(\gamma) = \gamma$, $g(\gamma) = \gamma$, следовательно, $g(f(\gamma)) = \gamma$. Поэтому произведение $g \circ f$ также принадлежит множеству M . Рассмотрим преобразование f^{-1} . Так как $f^{-1} \circ f = e$, где e — тождественное преобразование, и $f(\gamma) = \gamma$, то $e(\gamma) = f^{-1} \circ f(\gamma) = f^{-1}(\gamma) = \gamma$. Отсюда следует, что преобразование f^{-1} , обратное к преобразованию f , переводит линию γ в себя, т. е. оно принадлежит множеству M . Подгруппа M называется *стационарной подгруппой* линии γ .

Найдем стационарную подгруппу прямой проективной плоскости. Выберем некоторую прямую a и введем проективную систему координат $R = (O_1, O_2, O_3, E)$ так, чтобы базисные точки O_1 и O_2 принадлежали прямой a . В этой системе координат уравнение прямой a примет вид $x_3 = 0$. Рассмотрим произвольное преобразование f из ее стационарной подгруппы G_a . Так как автоморфизм f — проективное преобразование плоскости, то его аналитическое выражение, как было установлено в § 38, имеет вид

$$\begin{cases} \rho x'_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3, \\ \rho x'_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3, \\ \rho x'_3 = c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3, \end{cases} \quad (*)$$

где

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (**)$$

В силу того, что $O_1 \in a$, $O_2 \in a$ и $f \in G_a$, получим $f(O_1) \in a$ и $f(O_2) \in a$. Отсюда следует, что $f(O_1)(a_1 : a_2 : 0)$ и $f(O_2)(b_1 : b_2 : 0)$. Подставив координаты точек $O_1(1 : 0 : 0)$ и $O_2(0 : 1 : 0)$ в (*), получим $f(O_1)(c_{11} : c_{21} : c_{31})$ и $f(O_2)(c_{12} : c_{22} : c_{32})$. Таким образом, $c_{31} = c_{32} = 0$, и аналитическое выражение преобразования f имеет вид

$$\begin{cases} \rho x'_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3, \\ \rho x'_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3, \\ \rho x'_3 = c_{33}x_3. \end{cases} \quad (1)$$

Из (**), следует, что

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \quad c_{33} \neq 0. \quad (2)$$

Рассмотрим множество A_2 точек проективной плоскости, не принадлежащих прямой a . В репере R третьи координаты точек множества A_2 отличны от нуля. Поэтому автоморфизм f переводит точки множества A_2 в точки этого же множества: если $M(x_1 : x_2 : x_3) \in A_2$, то $f(M)(x'_1 : x'_2 : x'_3) \in A_2$, где $x_3 \neq 0$, $x'_3 \neq 0$. Введем обозначения $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$, $x' = \frac{x'_1}{x'_3}$, $y' = \frac{x'_2}{x'_3}$. В силу неравенств (2) мы можем поделить первые две строки формул (1) на третью строку, получим систему

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}, \end{cases} \quad (3)$$

где $a_{ij} = \frac{c_{ij}}{c_{33}}$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$ и $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$. Формулы

(3) представляют собой аналитическое выражение аффинного преобразования аффинной плоскости (см. [2, § 34]). Таким образом, каждому проективному преобразованию из стационарной подгруппы G_a прямой a , действующему на множестве A_2 , соответствует аффинное преобразование некоторой аффинной плоскости. *Можно доказать, что такое*

соответствие устанавливает изоморфизм между группой G_a и группой аффинных преобразований плоскости.

Этот изоморфизм позволяет построить интерпретацию аффинной плоскости на множестве A_2 точек проективной плоскости, не принадлежащих прямой a . Напомним аксиомы аффинной плоскости (см. [6, § 2]). Дано некоторое множество A , элементы которого называются точками, и любой упорядоченной паре точек A и B ставится в соответствие вектор \overrightarrow{AB} двумерного векторного пространства V . Множество A называется *аффинной плоскостью*, если выполнены две аксиомы:

- I. Для любого вектора \vec{a} из V и любой точки A из A существует единственная точка B , для которой $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$.
- II. Для любых трех точек A , B и C из A верно равенство $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Для построения модели аффинной плоскости на множестве A_2 нам следует найти двумерное векторное пространство и установить соответствие между упорядоченными парами точек этого множества и векторами, удовлетворяющее указанным аксиомам.

В качестве искомого двумерного векторного пространства выберем подпространство W , соответствующее прямой a : $W\chi a$. Для того чтобы установить отображение множества упорядоченных пар точек из A_2 на множество векторов подпространства W , введем понятие нормированного вектора, соответствующего точке из A_2 .

Определение 1. Пусть \vec{p} — произвольный фиксированный вектор, не принадлежащий подпространству W . Вектор \vec{m} , соответствующий при базисном отображении χ точке M , принадлежащей A_2 , будем называть *нормированным*, если его можно представить в виде $\vec{m} = \vec{p} + \vec{w}$, где $\vec{w} \in W$, $\vec{p} \neq \vec{0}$.

Очевидно, что нормированные векторы не принадлежат подпространству W . Нормированный вектор, соответствующий точке M , будем в дальнейшем обозначать через \vec{m}_M . Докажем следующую лемму.

Лемма 1. Точке M множества A_2 взаимно однозначно соответствует некоторый нормированный вектор \vec{m}_M .

Доказательство. Рассмотрим произвольный нормированный вектор $\vec{m} = \vec{p} + \vec{w}$. Так как вектор $\vec{p} \neq \vec{0}$, вектору \vec{m} соответствует при базисном отображении χ некоторая точка M проективной плоскости. Вектор \vec{m} не принадлежит W , поэтому точка M принадлежит A_2 . Каждому нормированному вектору соответствует некоторая точка множества A_2 .

Обратно, рассмотрим произвольную точку M множества A_2 . Выберем базис трехмерного векторного пространства V_3 , составленный из векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{p}$, где \vec{e}_1, \vec{e}_2 — базис подпространства W . Пусть \vec{x} — произвольный вектор, соответствующий точке M при базисном отображении $\chi: M \chi \vec{x}$. Разложим вектор \vec{x} по векторам базиса: $\vec{x} = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \gamma \vec{p}$. Точка M не принадлежит прямой a , поэтому вектор \vec{x} не принадлежит подпространству W , следовательно, $\gamma \neq 0$. Рассмотрим вектор $\vec{m}_M = \frac{1}{\gamma} \vec{x} = \frac{\alpha}{\gamma} \vec{e}_1 + \frac{\beta}{\gamma} \vec{e}_2 + \vec{p}$. Так как вектор $\vec{w} = \frac{\alpha}{\gamma} \vec{e}_1 + \frac{\beta}{\gamma} \vec{e}_2$ принадлежит подпространству W , то вектор \vec{m}_M нормированный. Поскольку он коллинеарен \vec{x} , имеем $\vec{m}_M \chi M$.

Пусть точке M соответствуют два нормированных вектора \vec{m}_M и \vec{m}'_M . Разложим эти векторы по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{p}$: $\vec{m}_M = \mu \vec{e}_1 + \nu \vec{e}_2 + \vec{p}$, $\vec{m}'_M = \mu' \vec{e}_1 + \nu' \vec{e}_2 + \vec{p}$. Так как эти векторы соответствуют одной и той же точке M при базисном отображении χ , то $\vec{m}_M = \lambda \vec{m}'_M$, следовательно, их координаты связаны между собой соотношениями $\mu = \lambda \mu'$, $\nu = \lambda \nu'$, $1 = \lambda$. Отсюда следует, что $\lambda = 1$, $\vec{m}_M = \vec{m}'_M$. Лемма доказана.

Установим соответствие между упорядоченными парами точек множества A_2 и векторами подпространства W .

Определение 2. Если точки A и B принадлежат множеству A_2 , \vec{a}_A и \vec{b}_B — нормированные векторы, соответствующие этим точкам при отображении χ , то вектором, соответствующим упорядоченной паре точек AB , будем называть вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{b}_B - \vec{a}_A$.

Вектор \overrightarrow{AB} принадлежит подпространству W . Действительно, в соответствии с определением 1, $\vec{a}_A = \vec{w} + \vec{p}$, $\vec{b}_B = \vec{v} + \vec{p}$, где $\vec{w}, \vec{v} \in W$. Поэтому $\overrightarrow{AB} = \vec{b}_B - \vec{a}_A = \vec{v} - \vec{w} \in W$.

Докажем, что построенное соответствие удовлетворяет аксиомам I и II двумерного аффинного пространства. Рас-

смотрим произвольную точку A из A_2 , не принадлежащую прямой a , выберем произвольный вектор \vec{u} двумерного векторного подпространства W . Пусть $\vec{a}_A = \vec{w} + \vec{p}$ — нормированный вектор, соответствующий точке A при отображении χ . Рассмотрим вектор $\vec{b} = \vec{u} + \vec{w} + \vec{p}$. Так как сумма $\vec{u} + \vec{w}$ принадлежит подпространству W , то вектор \vec{b} также нормированный. В соответствии с леммой 1, существует единственная точка B , принадлежащая A_2 , для которой $B\chi\vec{b}$. Из определения 2 следует, что $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. Условие аксиомы I выполнено.

Легко проверить, что аксиома II также выполнена. Пусть A, B и C — точки множества A_2 , $\vec{a}_A, \vec{b}_B, \vec{c}_C$ — их нормированные векторы. Тогда, в соответствии с определением 2, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}_B - \vec{a}_A$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}_C - \vec{b}_B$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}_C - \vec{a}_A$. Отсюда следует, что $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Нами доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Множество точек A_2 проективной плоскости, не принадлежащих прямой a , является моделью двумерного аффинного пространства.*

Условимся в дальнейшем прямую a называть *абсолютом* этой модели.

Рассмотрим проективные интерпретации некоторых фактов аффинной геометрии. Прежде всего, выясним, как изображаются в этой модели прямые аффинной плоскости. Известно, что прямая на аффинной плоскости определяется точкой и ненулевым вектором. Точка M принадлежит прямой l , определяемой точкой A и вектором \vec{u} , в том и только в том случае, когда вектор \overrightarrow{AM} коллинеарен вектору \vec{u} : $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}$, где λ — некоторое действительное число. Рассмотрим произвольную точку A проективной плоскости, принадлежащую A_2 . Пусть точка M из A_2 принадлежит прямой l . Тогда $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}$. Поэтому, если \vec{m}_M и \vec{a}_A — нормированные векторы, соответствующие точкам M и A , то $\vec{m}_M - \vec{a}_A = \lambda\vec{u}$ или $\vec{m}_M = \vec{a}_A + \lambda\vec{u}$. Рассмотрим произвольный вектор \vec{m} , соответствующий точке M при базисном отображении χ , тогда $\vec{m} = \nu\vec{m}_M$ и $\vec{m} = \nu\vec{a}_A + \lambda\nu\vec{u}$. Так как ненулевые векторы \vec{a}_A и \vec{u} линейно независимы, то вектор \vec{m} принадлежит двумерному векторному подпространству V_2 , базисом которого они и являются. Следовательно, точка M принадлежит прямой проективной

плоскости, содержащей точку A , которой соответствует двумерное векторное подпространство V_2 . Таким образом, прямые аффинной плоскости изображаются в модели A_2 прямыми проективной плоскости, из которых удалена их точка пересечения с абсолютом a .

Теперь мы легко можем ответить на вопрос, каким отличительным свойством обладают параллельные прямые на модели аффинной плоскости A_2 . Так как две прямые аффинной плоскости параллельны, если они не имеют общих точек, то две параллельные аффинные прямые будут изображаться в модели A_2 прямыми проективной плоскости, которые пересекаются в точке абсолюта a (рис. 209).

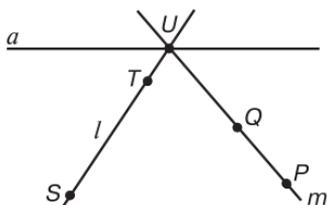


Рис. 209

В дальнейшем нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2. Пусть даны две точки S и T , принадлежащие аффинной плоскости A_2 , U — точка пересечения прямой $l = ST$ с абсолютом a . Если \vec{t}_T и \vec{s}_S — нормированные векторы, соответствующие точкам S и T , а \vec{u} — вектор пространства W , соответствующий точке U при базисном отображении χ , то $\vec{t}_T = \vec{s}_S + \mu\vec{u}$, где μ — некоторое вещественное число.

Доказательство. Из определения 1 следует, что $\vec{s}_S = \vec{p} + \vec{v}$, $\vec{t}_T = \vec{p} + \vec{w}$, где векторы \vec{v} и \vec{w} принадлежат подпространству W . Так как точки S , T и U лежат на одной прямой проективной плоскости, то векторы, соответствующие им при базисном отображении χ , принадлежат одному двумерному векторному подпространству. Поэтому вектор \vec{t}_T раскладывается по векторам \vec{s}_S и \vec{u} : $\vec{t}_T = \lambda\vec{s}_S + \mu\vec{u}$ или $\vec{p} + \vec{w} = \lambda(\vec{p} + \vec{v}) + \mu\vec{u}$. Отсюда следует, что $(1 - \lambda)\vec{p} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{u} - \vec{w}$. Правая часть полученного равенства, равная линейной

комбинации векторов \vec{u} , \vec{v} и \vec{w} , принадлежит подпространству W , вектор \vec{p} этому подпространству не принадлежит, поэтому $\lambda = 1$. Следовательно, $\vec{t}_T = \vec{s}_S + \mu\vec{u}$. Лемма доказана.

Рассмотрим в модели A_2 две параллельные прямые l и m . Выберем на первой прямой две точки S и T , а на второй — точки P и Q (рис. 209). Докажем, что векторы \overrightarrow{ST} и \overrightarrow{PQ} коллинеарны. Пусть U — точка пересечения прямых l и m , принадлежащая абсолюту a . Так как при базисном отображении χ нормированным векторам \vec{t}_T и \vec{s}_S соответствуют точки S и T , а вектору \vec{u} пространства W — точка U , то, в силу леммы 2, $\vec{t}_T = \vec{s}_S + \mu\vec{u}$. Вектор \overrightarrow{ST} равен $\overrightarrow{ST} = \vec{t}_T - \vec{s}_S$ (см. определение 2), поэтому $\overrightarrow{ST} = \mu\vec{u}$. Вектор \overrightarrow{ST} коллинеарен вектору \vec{u} . Аналогично доказывается, что вектор \overrightarrow{PQ} коллинеарен вектору \vec{u} . Векторы \overrightarrow{ST} и \overrightarrow{PQ} коллинеарны.

Выясним, что представляют собой с проективной точки зрения два четырехугольника аффинной плоскости: трапеция и параллелограмм. Трапецией называется четырехугольник, две противоположные стороны которого параллельны. Поэтому вершины трапеции на аффинной плоскости A_2 совпадают с вершинами четырехвершинника проективной плоскости, две противоположные стороны которого пересекаются на абсолюте. На рисунке 210 изображен четырехвершинник $ABCD$, отмечены его четыре стороны AB , BC , CD и AD , диагональная точка P пересечения сторон AB и CD принадлежит абсолюту a . AB и CD — основания трапеции.

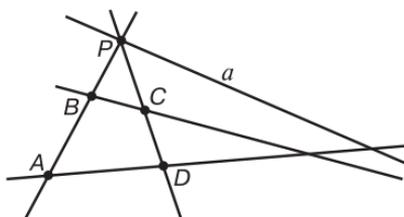


Рис. 210

Аналогично, параллелограммом на аффинной плоскости A_2 является четырехвершинник, две диагональные точки которого принадлежат абсолюту. Другими словами, диаго-

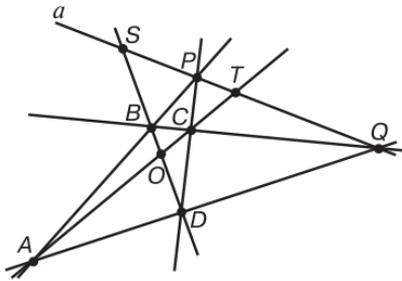


Рис. 211

наль этого четырехвершинника совпадает с абсолютом. На рисунке 211 изображен полный четырехвершинник $ABCD$, диагональные точки P и Q которого лежат на абсолютe. Четырехвершинник $ABCD$ — параллелограмм аффинной плоскости A_2 .

Рассмотрим проективную интерпретацию основного аффинного инварианта — простого отношения трех точек.

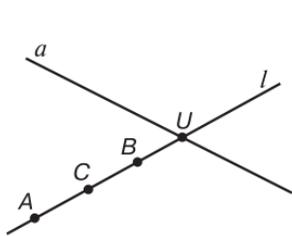


Рис. 212

Напомним, простым отношением упорядоченной тройки коллинеарных точек (AB, C) называется число λ , для которого $\vec{AC} = \lambda \vec{CB}$. Рассмотрим три коллинеарные точки A, B, C , принадлежащие прямой l . Обозначим через U точку пересечения прямой l с абсолютом a (рис. 212). Найдем двойное отношение $(AB; CU)$. В соответствии

с определением двойного отношения четырех точек проективной прямой (см. определение 1, § 34), необходимо выбрать векторы, соответствующие при базисном отображении χ точкам A, B, C и U , и разложить два последних вектора по первым двум. Выберем нормированные векторы $\vec{a}_A, \vec{b}_B, \vec{c}_C$, соответствующие точкам A, B и C , и произвольный вектор \vec{u} , соответствующий точке U . Разложим векторы \vec{c}_C и \vec{u} по векторам \vec{a}_A и \vec{b}_B . Так как $\vec{AC} = \vec{c}_C - \vec{a}_A$, $\vec{CB} = \vec{b}_B - \vec{c}_C$ и $\vec{AC} = \lambda \vec{CB}$, то $\vec{c}_C - \vec{a}_A = \lambda(\vec{b}_B - \vec{c}_C)$. Отсюда получим, что $\vec{c}_C = \frac{1}{1+\lambda} \vec{a}_A + \frac{\lambda}{1+\lambda} \vec{b}_B$. Согласно лемме 2, $\vec{a}_A = \vec{b}_B + \mu \vec{u}$.

Поэтому $\vec{u} = \frac{1}{\mu} \vec{a}_A - \frac{1}{\mu} \vec{b}_B$. Отсюда и из определения двойного

отношения точек следует, что $(AB; CU) = -\lambda$, или

$$(AB, C) = -(AB; CU). \quad (4)$$

Нами доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Если A, B и C — точки аффинной плоскости A_2 , принадлежащие одной прямой, U — точка пересечения этой прямой с абсолютом, то простое отношение точек (AB, C) равно двойному отношению $(AB; CU)$, взятому с противоположным знаком.*

Следствием доказанной теоремы является следующее утверждение.

Лемма 3. *Если точка O — середина отрезка AB , а U — точка пересечения прямой AB с абсолютом, то четверка точек A, B, O, U — гармоническая.*

Доказательство. Из равенства (4) получим $(AB; OU) = -(AB, O)$. Но $(AB, O) = 1$, поэтому $(AB; OU) = -1$. Утверждение доказано.

Лемма 3 позволяет объяснить с проективной точки зрения свойство точки пересечения диагоналей параллелограмма. Обратимся еще раз к рис. 211. Как утверждается в следствии 1 теоремы о гармонических свойствах полного четырехвершинника (см. § 36), пара вершин A и C гармонически делит пару точек O и T : $(AC; OT) = -1$. Из леммы 5 следует, что точка O — середина отрезка AC аффинной плоскости A_2 .

Рассмотрим на плоскости A_2 аффинную систему координат O, \vec{u}_1, \vec{u}_2 . Известно, что координаты x и y любой точки M плоскости A_2 удовлетворяют соотношению

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2. \quad (5)$$

Докажем, что с аффинной системой координат на проективной плоскости естественным образом связан проективный репер. Пусть точки U_1 и U_2 соответствуют векторам \vec{u}_1 и \vec{u}_2 при базисном отображении $\chi: U_1\chi\vec{u}_1, U_2\chi\vec{u}_2$. Так как векторы $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in W$, точки U_1 и U_2 лежат на абсолюте a . Рассмотрим точку E плоскости A_2 , координаты которой равны $(1; 1)$: $\overrightarrow{OE} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ (рис. 213). Очевидно, точки U_1, U_2, O, E являются точками общего положения проективной плоскости (проверьте это самостоятельно). Будем считать, что проективная система координат $R = (U_1, U_2, O, E)$ соответствует аффинной O, \vec{u}_1, \vec{u}_2 . Пусть \vec{d}_O и \vec{e}_E — нормирован-

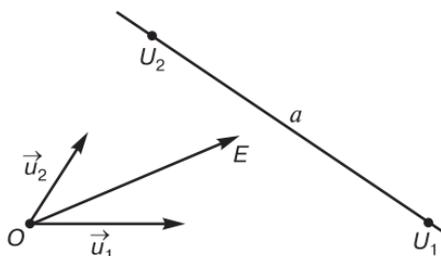


Рис. 213

ные векторы, соответствующие точкам O и E : $\vec{o}_O \chi O$, $\vec{e}_E \chi E$. Покажем, что четверка векторов \vec{u}_1 , \vec{u}_2 , \vec{o}_O , \vec{e}_E соответствует реперу R . Нам достаточно проверить только второе условие соответствия проективного репера и четверки векторов: $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{o}_O = \vec{e}_E$. Так как $\vec{OE} = \vec{e}_E - \vec{o}_O$ и $\vec{OE} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$, то $\vec{e}_E - \vec{o}_O = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$, или $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{o}_O = \vec{e}_E$. Таким образом, \vec{u}_1 , \vec{u}_2 , \vec{o}_O , $\vec{e}_E \chi R$.

Обратно. Пусть на проективной плоскости задана система координат $R = (U_1, U_2, O, E)$, базисные точки U_1 и U_2 которой принадлежат абсолюту. Докажем, что на плоскости A_2 можно однозначно выбрать аффинную систему координат O , \vec{u}_1 , \vec{u}_2 , которой соответствует данная проективная система. Так как точки U_1 и U_2 принадлежат абсолюту, то базисные точки O и E лежат в плоскости A_2 . Выберем векторы \vec{u}'_1 и \vec{u}'_2 , соответствующие точкам U_1 и U_2 при базисном отображении χ . Так как точки U_1 и U_2 различные, то векторы \vec{u}'_1 и \vec{u}'_2 образуют базис подпространства W . Пусть \vec{o}_O и \vec{e}_E — нормированные векторы, соответствующие точкам O и E : $\vec{o}_O \chi O$, $\vec{e}_E \chi E$. Тогда $\vec{o}_O = \vec{p} + \vec{s}$, $\vec{e}_E = \vec{p} + \vec{t}$, где $\vec{s} \in W$, $\vec{t} \in W$. Покажем, что существуют такие числа α и β , для которых $\vec{e}_E = \alpha \vec{u}'_1 + \beta \vec{u}'_2 + \vec{o}_O$. Действительно, числа α и β должны удовлетворять равенству $\vec{p} + \vec{t} = \alpha \vec{u}'_1 + \beta \vec{u}'_2 + \vec{p} + \vec{s}$ или $\vec{t} - \vec{s} = \alpha \vec{u}'_1 + \beta \vec{u}'_2$. Вектор $\vec{t} - \vec{s}$ принадлежит подпространству W , а векторы \vec{u}'_1 и \vec{u}'_2 образуют его базис, поэтому числа α и β — координаты вектора $\vec{t} - \vec{s}$ в базисе \vec{u}'_1, \vec{u}'_2 . Обозначим $\vec{u}_1 = \alpha \vec{u}'_1$, $\vec{u}_2 = \beta \vec{u}'_2$. Тогда $\vec{e}_E = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{o}_O$. Система векторов \vec{u}_1 , \vec{u}_2 , \vec{o}_O , \vec{e}_E соответствует реперу $R = (U_1, U_2, O, E)$ при отображении χ . Аффинная системе координат O , \vec{u}_1 , \vec{u}_2 соответствует реперу $R = (U_1, U_2, O, E)$.

Пусть на плоскости A_2 дана аффинная система координат и соответствующий ей проективный репер R . Установим

связь между аффинными и проективными координатами одной и той же точки плоскости A_2 . Рассмотрим точку M и соответствующий ей нормированный вектор \vec{m}_M . Пусть координаты точки M в репере R равны $(x_1 : x_2 : x_3)$. Так как точка M не принадлежит абсолюту, уравнение которого в репере R имеет вид $x_3 = 0$, то ее третья координата отлична от нуля. Координаты точки M пропорциональны коэффициентам разложения вектора \vec{m}_M по векторам $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{o}_O$. Так как $\vec{OM} = \vec{m}_M - \vec{o}_O$, то из (5) следует, что $\vec{m}_M - \vec{o}_O = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2$ или $\vec{m}_M = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + \vec{o}_O$. Таким образом, $x = \frac{x_1}{x_3}, y = \frac{x_2}{x_3}$. Если на плоскости A_2 даны две точки A и B , координаты которых относительно аффинной системы координат равны $A(a_1; a_2)$ и $B(b_1; b_2)$, то в базисе \vec{u}_1, \vec{u}_2 вектор \vec{AB} имеет координаты $\vec{AB}\{b_1 - a_1; b_2 - a_2\}$ (проверьте это самостоятельно).

Внимательный читатель наверняка обратил внимание на то, что аналогичные рассуждения были проведены нами в § 32 при изучении свойств однородных и неоднородных координат точек расширенной плоскости. Множество обыкновенных точек расширенной плоскости представляет собой модель аффинной плоскости A_2 при условии, что абсолютom является бесконечно удаленная прямая.

Сделаем еще одно замечание. В начале параграфа мы рассматривали проективное преобразование, принадлежащее стационарной подгруппе прямой. Мы выбрали особую систему координат, первые две базисные точки которой принадлежали прямой. В этой системе формулы преобразования имели вид (1). Но такая проективная система координат соответствует аффинной системе на плоскости A_2 , для которой выбранная прямая является абсолютom. В аффинной же системе, соответствующей этой проективной, формулы преобразования имеют вид (3), т. е. являются аффинными преобразованиями плоскости A_2 . Аффинную геометрию можно рассматривать как геометрию, изучающую свойства фигур плоскости A_2 , инвариантных относительно стационарной подгруппы абсолютa a .

§ 43. ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ С ФИКСИРОВАННОЙ ПРЯМОЙ

Пусть дана модель аффинной плоскости A_2 , для которой прямая a служит абсолютom, и линия второго порядка θ ,

лежащая в A_2 . Известно (см. [2, глава III]), что линия θ на аффинной плоскости является линией второго порядка, если в произвольной аффинной системе координат O, \vec{e}_1, \vec{e}_2 ее уравнение имеет вид $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$. Рассмотрим проективную систему координат, соответствующую аффинной системе O, \vec{e}_1, \vec{e}_2 (см. § 42), и воспользуемся формулами $x = \frac{x_1}{x_3}, y = \frac{x_2}{x_3}$, полученными в предыдущем параграфе, которые связывают координаты одной и той же точки плоскости A_2 в аффинной и соответствующей ей проективной системах координат. Подставим эти выражения в уравнение линии θ . После преобразований получим $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{00}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{10}x_1x_3 + 2a_{20}x_2x_3 = 0$. Таким образом, линия θ является частью линии второго порядка проективной плоскости, точки которой не принадлежат абсолюту.

Выясним, что же с проективной точки зрения представляют собой невырожденные линии второго порядка аффинной плоскости: эллипс, гипербола и парабола. Так как каждая из этих линий невырождена, она является частью вещественной овальной линии. Возможны три случая взаимного расположения вещественной овальной линии γ и абсолюта: первый — абсолют не имеет с линией γ общих точек, второй — абсолют пересекает линию γ в двух точках, и третий — абсолют касается линии γ .

Будем считать, что на проективной плоскости задана вещественная овальная линия γ своим уравнением

$$g_{11}x_1^2 + g_{22}x_2^2 + g_{33}x_3^2 + 2g_{12}x_1x_2 + 2g_{13}x_1x_3 + 2g_{23}x_2x_3 = 0. \quad (*)$$

Рассмотрим случай, когда линия γ не касается абсолюта a . Тогда полюс O абсолюта a относительно линии γ ему не принадлежит. Выберем на плоскости A_2 аффинную систему координат O, \vec{u}_1, \vec{u}_2 , началом которой служит полюс O . Рассмотрим проективную систему координат $R = (U_1, U_2, O, E)$, построенную следующим образом. Базисная точка U_1 — произвольная точка абсолюта. Точка U_2 совпадает с пересечением абсолюта a и поляры точки U_1 относительно линии γ . Тогда, в силу теоремы о взаимности поляритета (см. теорему 1 § 40), точка U_1 принадлежит поляре точки U_2 , т. е. совпадает с пересечением абсолюта a и поляры точки U_2 (рис. 214). Таким образом, трехвер-

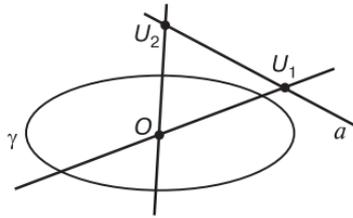


Рис. 214

шинник U_1, U_2, O является автополярным относительно линии γ . В § 40 нами было установлено, что в репере $R = (U_1, U_2, O, E)$ уравнение линии γ имеет вид

$$g_{11}x_1^2 + g_{22}x_2^2 + g_{33}x_3^2 = 0. \quad (**)$$

Так как ранг линии γ равен трем, то $g_{11} \neq 0, g_{22} \neq 0, g_{33} \neq 0$. Без ограничения общности можно считать, что $g_{11} > 0$. Кроме того, γ — вещественная овальная линия, поэтому коэффициенты g_{22} и g_{33} не могут быть одновременно положительными.

Рассмотрим первый случай: линия γ не имеет с абсолютном общих точек. Тогда система, составленная из уравнений кривой и прямой a

$$\begin{cases} g_{11}x_1^2 + g_{22}x_2^2 + g_{33}x_3^2 = 0, \\ x_3 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

не имеет ненулевых решений. Эта система равносильна уравнению

$$g_{11}x_1^2 + g_{22}x_2^2 = 0. \quad (2)$$

Так как $g_{11} > 0$, то полученное уравнение не имеет ненулевых решений в том и только в том случае, когда $g_{22} > 0$. Так как коэффициенты g_{22} и g_{33} не могут быть одновременно положительными, то $g_{33} < 0$. Перейдем к аффинной системе координат O, \vec{u}_1, \vec{u}_2 , соответствующей проективному реперу R . Аффинные и проективные координаты точек плоскости A_2 связаны между собой соотношениями $x = \frac{x_1}{x_3}, y = \frac{x_2}{x_3}$. Разделим обе части уравнения (**), на x_3^2 : $g_{11}x^2 + g_{22}y^2 = -g_{33}$. Так как $g_{11} > 0, g_{22} > 0$ и $g_{33} < 0$, то $|g_{33}| = -g_{33}$, и, обозначив $a^2 = \frac{|g_{33}|}{g_{11}}, b^2 = \frac{|g_{33}|}{g_{22}}$, окончательно получим $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Линия является эллипсом.

Таким образом, с проективной точки зрения эллипс — вещественная овальная линия, не пересекающая абсолют.

Рассмотрим второй случай, когда линия γ пересекает абсолют в двух точках. Система (1) имеет две серии пропорциональных ненулевых решений, что возможно тогда и только тогда, когда в уравнении (2), при условии $g_{11} > 0$, выполнено условие $g_{22} < 0$. Будем считать, что $g_{33} < 0$. Уравнение (**) при переходе к аффинным координатам примет вид $g_{11}x^2 - |g_{22}|y^2 = |g_{33}|$. Введя обозначения $a^2 = \frac{|g_{33}|}{g_{11}}$,

$b^2 = \frac{|g_{33}|}{|g_{22}|}$, преобразуем уравнение линии к виду

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3)$$

Линия является гиперболой. Нетрудно проверить, что в случае $g_{33} > 0$ уравнение линии приводится к виду $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (проверьте это самостоятельно), т. е. и в этом случае линия также является гиперболой. Таким образом, с проективной точки зрения гипербола является вещественной овальнной линией, пересекающей абсолют в двух точках.

Перейдем теперь к третьему случаю расположения овалной линии и абсолюта, при котором γ касается абсолюта a . Выберем на проективной плоскости такой проективный репер $R = (U_1, U_2, O, E)$, точка O которого принадлежит линии γ , точка U_1 совпадает с точкой касания линии с абсолютом, а точка U_2 является точкой пересечения абсолюта a и касательной к линии γ в точке O (рис. 215).

Рассмотрим общее уравнение (*) линии γ . Определим условия, которым удовлетворяют его коэффициенты в выбранной системе координат. Так как точка $O(0 : 0 : 1)$

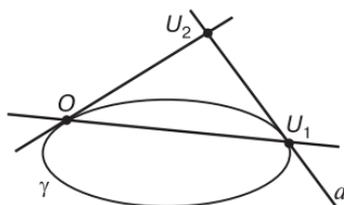


Рис. 215

принадлежит линии γ , то, подставляя ее координаты в уравнение (*), получим $g_{33} = 0$. Аналогично, так как базисная точка $U_1(1 : 0 : 0)$ принадлежит линии γ , то $g_{11} = 0$. Таким образом, уравнение линии γ имеет вид $g_{22}x_2^2 + 2g_{12}x_1x_2 + 2g_{13}x_1x_3 + 2g_{23}x_2x_3 = 0$. Координатные прямые U_1U_2 и OU_2 касаются линии γ соответственно в точках U_1 и O . Полагая $g_{11} = g_{33} = 0$ в уравнении касательной к линии второго порядка (см. § 40), получим уравнение касательной к кривой γ в точке $A(a_1 : a_2 : a_3) : (g_{12}a_2 + g_{13}a_3)x_1 + (g_{12}a_1 + g_{22}a_2 + g_{23}a_3)x_2 + (g_{13}a_1 + g_{33}a_2)x_3 = 0$. Отсюда следует, что уравнение $g_{13}x_1 + g_{23}x_2 = 0$ является уравнением касательной к линии γ в точке $O(0 : 0 : 1)$. С другой стороны, эта касательная как координатная прямая OU_2 имеет уравнение $x_1 = 0$. Поэтому $g_{23} = 0$. Аналогично, рассматривая абсолют a как касательную к линии γ , получим равенство $g_{12} = 0$. Таким образом, в выбранной системе координат линия γ имеет уравнение

$$g_{22}x_2^2 + 2g_{13}x_1x_3 = 0. \tag{4}$$

Линия γ — невырожденная, поэтому $g_{22} \neq 0$, $g_{13} \neq 0$. Рассмотрим аффинную систему координат плоскости A_2 , соответствующую выбранной проективной системе. Перейдем к аффинным координатам по формулам $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$. Для этого разделим обе части уравнения (4) на x_3^2 : $g_{22}y^2 + 2g_{13}x = 0$. Так как $g_{22} \neq 0$, $g_{13} \neq 0$, то это уравнение приводится к виду $y^2 = 2px$, где $p = -\frac{g_{13}}{g_{22}}$. Линия γ является параболой. Таким образом, *парабола с проективной точки зрения представляет собой вещественную овальную линию, касающуюся абсолюта.*

Рассмотрим проективную интерпретацию некоторых свойств эллипса, гиперболы и параболы. Докажем, что *если абсолют не касается линии второго порядка, то его полюс O является центром этой линии на A_2 .* Для этого достаточно показать, что любая хорда кривой, проходящая через точку O , делится в этой точке пополам. Проведем произвольную прямую через точку O . Она пересечет линию γ в точках P и Q , а абсолют a — в точке R (рис. 216). Так как точки O и R сопряжены относительно линии γ ,

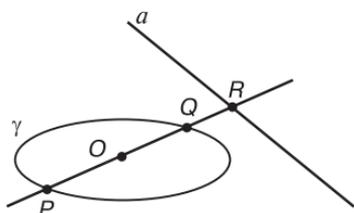


Рис. 216

четверка точек P, Q, O, R — гармоническая. Из леммы 3 предыдущего параграфа следует, что O — середина отрезка PQ . Утверждение доказано.

Известно, что эллипс и гипербола являются центральными кривыми, а парабола не имеет центра симметрии (см. [2, § 19]). С проективной точки зрения, абсолют не касается эллипса и гиперболы, поэтому его полюс не принадлежит этим кривым и является точкой плоскости A_2 . Парабола же касается абсолюта, его полюс совпадает с точкой касания, он не принадлежит аффинной плоскости A_2 . Парабола не является центральной кривой.

Отметим интересное свойство гиперболы. Докажем, что ее асимптоты являются касательными к овальной линии в точках пересечения с абсолютом. Пусть на плоскости A_2 выбрана такая аффинная система координат, в которой уравнение гиперболы имеет вид (3). Возьмем проективную систему координат, соответствующую этой аффинной системе, и перейдем к проективным координатам по формулам $x = \frac{x_1}{x_3}, y = \frac{x_2}{x_3}$. Получим

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - x_3^2 = 0.$$

В выбранной проективной системе координат уравнение $x_3 = 0$ является уравнением абсолюта. Используя уравнение (4), определим координаты точек P и Q пересечения гиперболы с абсолютом: $P(a : b : 0)$, $Q(a : -b : 0)$. Найдем уравнения касательных в точках P и Q . Для этого воспользуемся уравнением (9) § 40 касательной к точке

$A(a_1 : a_2 : a_3)$ линии, заданной общим уравнением

$$(g_{11}a_1 + g_{12}a_2 + g_{13}a_3)x_1 + (g_{12}a_1 + g_{22}a_2 + g_{23}a_3)x_2 + (g_{13}a_1 + g_{23}a_2 + g_{33}a_3)x_3 = 0.$$

В рассматриваемом случае, как следует из (4), $g_{11} = \frac{1}{a^2}$, $g_{22} = -\frac{1}{b^2}$, $g_{33} = -1$, $g_{ij} = 0$, $i \neq j$. Отсюда получим, что уравнение касательной в точке P имеет вид $\frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b} = 0$, а в точке Q — вид $\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} = 0$. Перейдем к аффинным координатам по формулам $x = \frac{x_1}{x_3}$, тогда $y = \frac{x_2}{x_3}$, $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$. Мы получили уравнения асимптот гиперболы (см. [2, § 17]). На рисунке 217 прямая a — абсолют, P и Q — точки пересечения гиперболы γ с абсолютом, O — точка пересечения касательных к γ в точках P и Q , прямые PO и QO — асимптоты гиперболы. Самостоятельно, из свойства взаимности поляритета, выведите, что O — центр гиперболы γ .

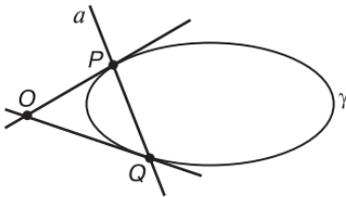


Рис. 217

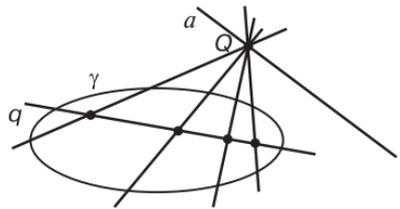


Рис. 218

Нетрудно также интерпретировать на проективной плоскости диаметральные свойства линий второго порядка. Как известно, если на аффинной плоскости дан пучок параллельных хорд кривой второго порядка, то множество середин этих хорд составляет прямую линию (см. [2, § 19]). Действительно, с проективной точки зрения параллельные хорды линии γ принадлежат прямым, пересекающим абсолют в одной точке Q (рис. 218). В соответствии с леммой 3 предыдущего параграфа, точки пересечения прямой, содержащей хорду с кривой γ , середина хорды и точка Q

образуют гармоническую четверку точек. Поэтому середины хорд сопряжены с точкой Q относительно линии γ , т. е. образуют поляр q точки Q относительно этой линии.

Так же, используя теорему 3 § 40 о взаимности поляритета, можно с точки зрения проективной геометрии объяснить свойство сопряженных диаметров центральных линий второго порядка. Рассуждение проведите самостоятельно.

Рассмотрим проективную интерпретацию диаметрального свойства параболы. Как известно, диаметры параболы параллельны между собой (см. [2, § 19]). Рассмотрим прямые плоскости A_2 , содержащие параллельные хорды параболы. Они пересекают абсолют a в одной точке Q (рис. 219). Середины хорд, как следует из леммы 3 § 42, образуют поляр q точки Q . Но точка Q принадлежит касательной a к параболе γ , поэтому ее поляр q , как следует из теоремы о взаимности поляритета, проходит через точку P касания абсолюта и параболы. Отсюда следует, что все диаметры поляр q содержат точку P абсолюта, поэтому они с аффинной точки зрения параллельны между собой.

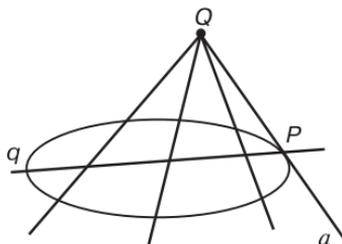


Рис. 219

§ 44. ПРОЕКТИВНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

В § 39 мы ввели понятие комплексной проективной плоскости, определенное так же, как и обычная проективная плоскость, только вместо трехмерного вещественного векторного пространства рассматривается трехмерное линейное векторное пространство $\mathbb{C}V_3$ над полем \mathbb{C} комплексных чисел. Были введены понятия вещественных и мнимых точек, комплексно сопряженных точек, вещественных и мнимых прямых и изучены их некоторые свойства. Докажем сле-

дующее утверждение, необходимое нам для дальнейшего изложения.

Лемма 1. Для любой вещественной точки P и двух комплексно сопряженных точек J_1 и J_2 вещественной прямой существуют на этой прямой единственные вещественные точки Q_1 , Q_2 , и Q_3 , удовлетворяющие условиям $(J_1J_2; PQ_1) = -1$, $(J_1J_2; PQ_2) = i$ и $(J_1J_2; PQ_3) = -i$.

Доказательство. Зададим на плоскости проективную систему координат $R = (A_1, P, A_3, E)$, где P — данная точка, а точка A_1 принадлежит данной прямой. Уравнение координатной прямой A_1P имеет вид $x_3 = 0$, точки P , J_1 и J_2 имеют координаты $P(0 : 1 : 0)$, $J_1(a_1 + ib_1 : a_2 + ib_2 : 0)$ и $J_2(a_1 - ib_1 : a_2 - ib_2 : 0)$. Заметим, что числа a_1 и b_1 не равны нулю одновременно, иначе точки P , J_1 и J_2 совпадают друг с другом. Отсюда следует, что координаты точек J_1 и J_2 можно представить в виде $J_1\left(1 : \frac{a_2 + ib_2}{a_1 + ib_1} : 0\right)$

и $J_2\left(1 : \frac{a_2 - ib_2}{a_1 - ib_1} : 0\right)$. Числа $\frac{a_2 + ib_2}{a_1 + ib_1}$ и $\frac{a_2 - ib_2}{a_1 - ib_1}$ комплексно сопряжены. Обозначая $\frac{a_2 + ib_2}{a_1 + ib_1} = a + ib$, $\frac{a_2 - ib_2}{a_1 - ib_1} = a - ib$,

запишем координаты точек J_1 и J_2 в виде $J_1(1 : a + ib : 0)$ и $J_2(1 : a - ib : 0)$. Первая координата искомой точки Q_1 отлична от нуля, иначе она совпадает с точкой P . Поэтому ее координаты можно представить в виде $Q_1(1 : q : 0)$. Точка Q лежит на прямой A_1P , она отлична от точек P , J_1 и J_2 и для нее $(J_1J_2; PQ_1) = -1$. Записывая разложение столбцов из координат точек P и Q_1 по столбцам координат точек J_1 и J_2

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ a + ib \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ a - ib \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ q \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha' \begin{pmatrix} 1 \\ a + ib \\ 0 \end{pmatrix} + \beta' \begin{pmatrix} 1 \\ a - ib \\ 0 \end{pmatrix},$$

получим $(J_1J_2; PQ_1) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'} = -1$. Отсюда следует, что

$$\alpha + \beta = 0, \quad \alpha - \beta = -\frac{i}{b}, \quad \alpha' + \beta' = 1, \quad q = a + i(\alpha' - \beta')b. \quad (1)$$

Из первого равенства (1) следует, что $\frac{\beta}{\alpha} = -1$. Поэтому

$\frac{\beta'}{\alpha'} = 1$, т. е. $\alpha' = \beta'$. Из последнего равенства (1) находим,

что $q = a$. Таким образом существует единственная точка $Q_1(1 : a : 0)$, для которой $(J_1J_2; PQ_1) = -1$.

Аналогично, рассмотрим точку $Q_2(1 : g : 0)$ прямой A_1P , отличную от точек P, J_1, J_2 и для которой $(J_1J_2; PQ_2) = i$. Записывая разложение столбцов из координат точек P и Q_2 по столбцам координат точек J_1 и J_2

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ a+ib \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ a-ib \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ g \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda' \begin{pmatrix} 1 \\ a+ib \\ 0 \end{pmatrix} + \mu' \begin{pmatrix} 1 \\ a-ib \\ 0 \end{pmatrix},$$

получим $(J_1J_2; PQ_1) = \frac{\mu}{\lambda} : \frac{\mu'}{\lambda'} = i$ и

$$\lambda + \mu = 0, \quad \lambda - \mu = -\frac{i}{b}, \quad \lambda' + \mu' = 1, \quad g = a + i(\lambda' - \mu')b. \quad (2)$$

Из первого равенства (2) следует, что $\frac{\mu}{\lambda} = -1$. По-

этому $\frac{\mu'}{\lambda'} = -i$, т. е. $\lambda' = i\mu'$. Так как $\lambda' = 1 - \mu'$ и $\lambda' = i\mu'$, то $1 - \mu' = i\mu'$ и, следовательно, $\mu' = \frac{1}{1+i} = \frac{i}{i-1}$. Из последнего равенства (2) находим, что $g = a + i(i\mu' - \mu')b = a + i\mu'(i-1)b = a - b$. Таким образом, существует единственная точка $Q_2(1 : a - b : 0)$, для которой $(J_1J_2; PQ_2) = i$.

Аналогично доказывается, что существует единственная точка $Q_3(1 : a + b : 0)$, для которой $(J_1J_2; PQ_3) = -i$. Рассуждения проведите самостоятельно. Лемма доказана.

Следствие 1. Если в условиях леммы 1 базисные точки системы координат $R(A_1, A_2, A_3, E)$ выбраны так, что точка A_1 совпадает с точкой Q_1 , точка A_2 — с точкой P , а точка Q_2 — с точкой пересечения координатных прямых A_1A_2 и A_3E , то координаты точек J_1 и J_2 имеют вид $J_1(1 : i : 0)$, $J_2(1 : -i : 0)$.

Действительно, в выбранной системе координаты точек Q_1 и Q_2 равны $Q_1(1 : 0 : 0)$, $Q_2(1 : 1 : 0)$. Поэтому $a = 0$, $b = 1$.

Как известно, евклидова геометрия изучает свойства фигур, инвариантных при преобразованиях подобия. Группа подобий евклидова пространства является подгруппой группы аффинных преобразований. Поэтому при построении интерпретации евклидовой планиметрии на проективной

плоскости мы будем использовать модель A_2 аффинной плоскости, рассмотренную в предыдущих параграфах. На проективной плоскости зафиксируем прямую a и две ее комплексно сопряженные точки I_1 и I_2 . Назовем абсолютом d множество $a \cup (I_1 \cup I_2)$. Докажем, что с помощью абсолюта d можно определить структуру евклидовой плоскости на множестве всех точек проективной плоскости, не принадлежащих прямой a . Точки I_1 и I_2 в дальнейшем мы назовем циклическими, а множество точек проективной плоскости, не принадлежащих прямой a , обозначим через E_2 .

Рассмотрим стационарную подгруппу H_d абсолюта d группы проективных преобразований плоскости. Ее преобразования переводят абсолют d в себя, т. е. точки прямой a — в точки прямой a , точку I_1 в точку I_1 или I_2 , а точку I_2 — в точку I_2 или I_1 . Очевидно, что H_d — подгруппа стационарной группы G_a абсолюта a аффинной плоскости A_2 , т. е. подгруппа группы аффинных преобразований. Для изучения этой подгруппы введем специальную систему координат на E_2 и соответствующий ей проективный репер R_d . Воспользуемся леммой и следствием из нее, доказанными выше. Рассмотрим произвольную точку U_1 прямой a . В силу указанной леммы на прямой a существуют такие точки U_2 и E_3 , для которых

$$(I_1 I_2; U_1 U_2) = -1, \quad (I_1 I_2; U_2 E_3) = i. \quad (3)$$

Зададим проективный репер $R_d = (U_1, U_2, O, E)$, где точка O — произвольная точка множества E_2 , а точка E принадлежит прямой OE_3 (рис. 220). В этой системе координат

$$I_1(1 : i : 0), \quad I_2(1 : -i : 0). \quad (4)$$

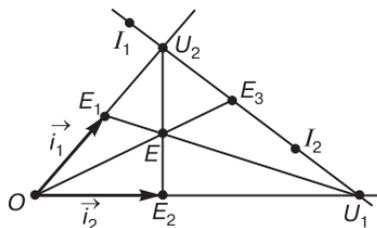


Рис. 220

Рассмотрим аффинную систему координат O, \vec{i}_1, \vec{i}_2 , соответствующую проективному реперу R_d , где $\vec{i}_1 = \overrightarrow{OE_2}$, $\vec{i}_2 = \overrightarrow{OE_1}$. Аффинную систему координат, соответствующую реперу R_d , назовем декартовой.

Пусть f — произвольный автоморфизм подгруппы H_d . Из утверждений, доказанных в § 42, следует, что в репере R_d аналитическое задание преобразования f имеет вид

$$\begin{cases} \rho x'_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3, \\ \rho x'_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3, \\ \rho x'_3 = c_{33}x_3, \end{cases} \quad (5)$$

где

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \quad c_{33} \neq 0. \quad (6)$$

Рассмотрим первый случай: $f(I_1) = I_1$, $f(I_2) = I_2$. Подставляя координаты (3) циклической точки I_1 в формулу (5), получим

$$\begin{cases} \rho = c_{11} + ic_{12}, \\ i\rho = c_{21} + ic_{22}. \end{cases} \quad \text{Отсюда следует, что}$$

$c_{21} + ic_{22} = i(c_{11} + ic_{12})$, поэтому $c_{11} = c_{22}$, $c_{12} = -c_{21}$. В этом случае формулы (5) имеют вид

$$\begin{cases} \rho x'_1 = c_{11}x_1 - c_{21}x_2 + c_{13}x_3, \\ \rho x'_2 = c_{21}x_1 + c_{11}x_2 + c_{23}x_3, \\ \rho x'_3 = c_{33}x_3. \end{cases} \quad (7)$$

Во втором случае $f(I_1) = I_2$, $f(I_2) = I_1$, проводя те же рассуждения, получим, что в формуле (5) коэффициенты c_{ij} удовлетворяют условиям $c_{11} = c_{22}$, $c_{12} = -c_{21}$ (проведите вычисления самостоятельно). Получим

$$\begin{cases} \rho x'_1 = c_{11}x_1 + c_{21}x_2 + c_{13}x_3, \\ \rho x'_2 = c_{21}x_1 - c_{11}x_2 + c_{23}x_3, \\ \rho x'_3 = c_{33}x_3. \end{cases} \quad (8)$$

Формулы (7) и (8) можно объединить друг с другом. Полагая $\varepsilon = 1$ в первом случае и $\varepsilon = -1$ во втором, запишем эти формулы в виде

$$\begin{cases} \rho x'_1 = c_{11}x_1 - \varepsilon c_{21}x_2 + c_{13}x_3, \\ \rho x'_2 = c_{21}x_1 + \varepsilon c_{11}x_2 + c_{23}x_3, \\ \rho x'_3 = c_{33}x_3. \end{cases} \quad (9)$$

Рассмотрим декартову систему координат O, \vec{i}_1, \vec{i}_2 , соответствующую реперу R_d . Напомним формулы, связывающие аффинные и проективные координаты одной и той же точки из E_2 в соответствующих друг другу проективной и аффинной системах координат: $x = \frac{x_1}{x_3}, y = \frac{x_2}{x_3}$. Учитывая неравенства (6), поделим в формуле (8) первые две строки на третью, получим

$$\begin{cases} x' = a_{11}x - \varepsilon a_{21}y + a_{13}, \\ y' = a_{21}x + \varepsilon a_{11}y + a_{23}, \end{cases} \quad \text{где } a_{ij} = \frac{c_{ij}}{c_{33}}.$$

В силу неравенств (6)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{21} \\ a_{21} & a_{11} \end{vmatrix} = a_{11}^2 + a_{21}^2 \neq 0.$$

Полагая $k = \sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}$ и $\cos \varphi = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}},$

$\sin \varphi = \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}},$ запишем в декартовой системе координат

полученные формулы в виде

$$\begin{cases} x' = kx \cos \varphi - k\varepsilon y \sin \varphi + a_{13}, \\ y' = kx \sin \varphi + k\varepsilon y \cos \varphi + a_{23}. \end{cases}$$

Мы получили аналитическое выражение подобия евклидовой плоскости (см. [2, § 32]). Таким образом, стационарная группа H_d абсолюта d представляет собой группу подобий евклидовой плоскости. При этом в случае $\varepsilon = 1$ ($f(I_1) = I_1, f(I_2) = I_2$), преобразование f плоскости E_2 является подобием первого рода, а в случае $\varepsilon = -1$ ($f(I_1) = I_2, f(I_2) = I_1$) — подобием второго рода.

Рассмотрим проективные интерпретации евклидовых свойств фигур. Прежде всего, дадим проективное истолкование понятия перпендикулярности прямых. Нами была введена декартова система координат O, \vec{i}_1, \vec{i}_2 , оси которой должны быть перпендикулярными прямыми. Соответствующая ей проективная система координат $R_d = (U_1, U_2, O, E)$ обладает тем свойством, что точки U_1 и U_2 пересечения осей с абсолютом d гармонически сопряжены с циклическими точками (см. рис. 220). Введем следующее определение.

Определение 1. Две прямые плоскости E_2 назовем перпендикулярными, если их точки пересечения с абсолютom гармонически сопряжены с циклическими.

Покажем, что введенное определение не противоречит аналитическому условию перпендикулярности прямых на плоскости E_2 . Рассмотрим прямые a и b плоскости E_2 , уравнения которых в декартовых координатах имеют вид $a: A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $b: A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Применяя формулы $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$, найдем уравнения прямых a и b в проективной системе координат, которая соответствует декартовой: $a: A_1x_1 + B_1x_2 + C_1x_3 = 0$, $b: A_2x_1 + B_2x_2 + C_2x_3 = 0$. Найдем координаты точек A и B пересечения прямых a и b с абсолютom d . Так как $x_3 = 0$ — уравнение абсолюта, то, решая системы линейных уравнений

$$\begin{cases} A_1x_1 + B_1x_2 + C_1x_3 = 0, \\ x_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} A_2x_1 + B_2x_2 + C_2x_3 = 0, \\ x_3 = 0, \end{cases}$$

получим $A(B_1 : -A_1 : 0)$, $B(B_2 : -A_2 : 0)$. Вычислим двойное отношение $\lambda = (AB, I_1I_2)$. Для этого разложим столбцы координат циклических точек по столбцам координат точек A и B :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} B_1 \\ -A_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} B_2 \\ -A_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha' \begin{pmatrix} B_1 \\ -A_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta' \begin{pmatrix} B_2 \\ -A_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем коэффициенты α , β , α' и β' как решения систем линейных уравнений

$$\begin{cases} B_1\alpha + B_2\beta = 1, \\ -A_1\alpha - A_2\beta = i, \end{cases} \quad \begin{cases} B_1\alpha' + B_2\beta' = 1, \\ -A_1\alpha' - A_2\beta' = -i. \end{cases}$$

Тогда $\alpha = \frac{A_2 + B_2i}{-\Delta}$, $\beta = \frac{A_1 + B_1i}{\Delta}$, $\alpha' = \frac{A_2 - B_2i}{-\Delta}$

и $\beta' = \frac{A_1 - B_1i}{\Delta}$, где $\Delta = A_1B_2 - A_2B_1$. Так как

$(AB; I_1I_2) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'}$, то $(AB; I_1I_2) = \frac{(B_1 - A_1i)(B_2 + A_2i)}{(B_1 + A_1i)(B_2 - A_2i)}$ или

$$(AB; I_1I_2) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + (A_2B_1 - A_1B_2)i}{A_1A_2 + B_1B_2 + (A_1B_2 - A_2B_1)i}. \quad (10)$$

Пусть прямые a и b перпендикулярны. Тогда, в соответствии с определением 1, $(AB, I_1I_2) = -1$. Из формулы (10)

следует, что

$$A_1A_2 + B_1B_2 + (A_2B_1 - A_1B_2)i = -(A_1A_2 + B_1B_2 + (A_1B_2 - A_2B_1)i),$$

откуда $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$. Очевидно и обратное. Если $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$, то из (10) следует $(AB, I_1I_2) = -1$. Прямые a и b перпендикулярны. Мы получили известное условие перпендикулярности прямых на евклидовой плоскости в декартовых координатах.

Укажем проективные интерпретации некоторых известных из школьного курса геометрии свойств перпендикулярных прямых. Как известно, на евклидовой плоскости через точку, не принадлежащую прямой, проходит единственная прямая, перпендикулярная данной. На рисунке 221 изображена прямая p плоскости E_2 и точка M , ей не принадлежащая. Точка P является

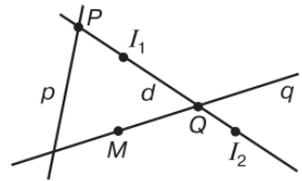


Рис. 221

точкой пересечения прямой p и абсолюта d . Любая прямая, перпендикулярная прямой p , проходит через точку Q абсолюта, гармонически сопряженную с точкой P относительно циклических точек. Таким образом, прямая $q = (MQ)$ — единственная перпендикулярная прямая к прямой p .

На рисунке 222 изображен параллелограмм $ABCD$. Пары его противоположных сторон AB, DC и AD, BC пересекаются в точках S и T , принадлежащих абсолюту d . Диагонали AC и BD пересекают абсолют в точках E и F . Если точки S и T гармонически сопряжены относительно циклических точек I_1 и I_2 , то $ABCD$ — прямоугольник, если точки E и F гармонически сопряжены относительно циклических

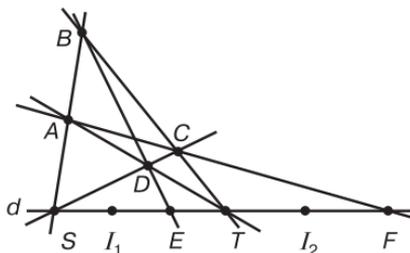


Рис. 222

точек, то $ABCD$ — ромб. Если пары точек S, T и E, F одновременно гармонически сопряжены с циклическими точками, то $ABCD$ — квадрат.

Рассмотрим две прямые a и b плоскости E_2 , заданные в декартовых координатах своими уравнениями $a: A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $b: A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Пусть A и B — их точки пересечения с абсолютом d . Из (10) следует формула, позволяющая связать двойное отношение $\lambda = (AB; I_1I_2)$ с величиной ориентированного угла между прямыми a и b . Напомним, что на ориентированной плоскости в правой декартовой системе координат косинус и синус ориентированного угла между прямыми $a: A_1x_1 + B_1x_2 + C_1x_3 = 0$ и $b: A_2x_1 + B_2x_2 + C_2x_3 = 0$ вычисляются по формулам (см. [2, § 14])

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Разделив числитель и знаменатель выражения, стоящего в правой части формулы (10), на $\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}$, получим $(AB; I_1I_2) = \frac{\cos \varphi - i \sin \varphi}{\cos \varphi + i \sin \varphi}$.

В курсе математического анализа, в разделе «Теория функций комплексного переменного» доказывается формула Эйлера $\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$. Применяя ее, запишем полученную формулу в виде $(AB; I_1I_2) = \frac{e^{-i\varphi}}{e^{i\varphi}}$ или $(AB; I_1I_2) = e^{-2i\varphi}$.

Тогда

$$\varphi = \frac{i}{2} \ln(AB; I_1I_2). \quad (11)$$

Формула (11) называется формулой Лагерра в честь известного французского математика Эдмона Николая Лагерра (1834–1886).

В дальнейшем, если не оговорено особо, будем предполагать, что на плоскости E_2 заданы декартова система координат O, \vec{i}_1, \vec{i}_2 и соответствующий ей проективный репер $R_d = (U_1, U_2, O, E)$. Найдем проективное свойство, определяющее окружность на плоскости E_2 . Так как окружность является частным случаем эллипса, то на проективной плоскости она представляет собой вещественную

овальную линию, не имеющую с абсолютом вещественных точек пересечения. Рассмотрим окружность ω , уравнение которой в декартовой системе координат имеет вид

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \quad (12)$$

Вспользуемся формулами $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$ и запишем уравнение окружности в проективном репере R_d : $(x_1 - ax_3)^2 + (x_2 - bx_3)^2 = R^2 x_3^2$. Решая систему $\begin{cases} (x_1 - ax_3)^2 + (x_2 - bx_3)^2 = R^2 x_3^2, \\ x_3 = 0, \end{cases}$ получим, что точки пересечения окружности с абсолютом d являются мнимыми и совпадают с циклическими точками.

Обратно. Рассмотрим на проективной плоскости вещественную овальную линию ω , пересекающую абсолют в циклических точках. Будем предполагать, что линия ω задана в репере R_d общим уравнением

$$g_{11}x_1^2 + g_{22}x_2^2 + g_{33}x_3^2 + 2g_{12}x_1x_2 + 2g_{13}x_1x_3 + 2g_{23}x_2x_3 = 0.$$

Так как точка $I_1(1 : i : 0)$ принадлежит линии ω , то, подставив ее координаты в уравнение линии ω , получим $g_{11} - g_{22} + 2g_{12}i = 0$. Подставив в уравнение линии ω координаты второй циклической точки $I_2(1 : -i : 0)$, получим $g_{11} - g_{22} - 2g_{12}i = 0$. Из этих равенств следует, что линия ω пересекает абсолют в циклических точках в том и только в том случае, когда $g_{11} - g_{22} = 0$, $g_{12} = 0$. Таким образом, уравнение данной вещественной овальной линии имеет вид $g_{11}x_1^2 + g_{22}x_2^2 + g_{33}x_3^2 + 2g_{13}x_1x_3 + 2g_{23}x_2x_3 = 0$. Выделим в этом уравнении полные квадраты, после преобразований получим:

$$\left(x_1 + \frac{g_{13}}{g_{11}}x_3\right)^2 + \left(x_2 + \frac{g_{23}}{g_{11}}x_3\right)^2 = \left(\frac{g_{13}^2 + g_{23}^2 - g_{11}g_{33}}{g_{11}^2}\right)x_3^2.$$

Перейдем к декартовым координатам по формулам, разделив обе части полученного равенства на x_3^2 :

$$\left(x + \frac{g_{13}}{g_{11}}\right)^2 + \left(y + \frac{g_{23}}{g_{11}}\right)^2 = \frac{g_{13}^2 + g_{23}^2 - g_{11}g_{33}}{g_{11}^2}.$$

В силу того, что ω — вещественная овальная линия, $g_{13}^2 + g_{23}^2 - g_{11}g_{33} > 0$. Таким образом, на декартовой плоскости E_2 уравнение линии ω имеет вид (12), т. е. она является

окружностью с центром в точке $Q\left(\frac{g_{13}}{g_{11}}; \frac{g_{23}}{g_{11}}\right)$ и радиусом

$$R = \sqrt{\frac{g_{13}^2 + g_{23}^2 - g_{11}g_{33}}{g_{11}^2}}. \quad (13)$$

Нетрудно проверить, что точка Q является полюсом абсолюта d . Мы доказали теорему.

Теорема 1. *Окружность евклидовой плоскости изображается на плоскости E_2 линией второго порядка, пересекающей абсолют d в двух циклических точках, ее центр совпадает с полюсом абсолюта d .*

Доказанная теорема позволяет ввести следующее определение.

Определение 2. *Окружностью на плоскости E_2 называется овальная линия, пересекающая абсолют d в двух циклических точках, а ее центром — полюс абсолюта d .*

Приведем без доказательства следующую теорему.

Теорема 2. *Если на евклидовой плоскости даны две точки O и A , то существует единственная окружность с центром в точке O , проходящая через точку A .*

С ее доказательством можно познакомиться в пособиях [1, 5]. Используя эту теорему, введем понятие равенства отрезков на плоскости E_2 . Напомним, что если на евклидовой плоскости заданы окружность ω с центром в точке $O(a; b)$ и точка $Q(p; q)$, то при параллельном переносе на вектор \overrightarrow{OQ} образом ω является окружность с центром в точке Q того же радиуса. Обратное, если даны две окружности с центрами в точках O и Q одного и того же радиуса, то параллельный перенос на вектор \overrightarrow{OQ} переведет первую окружность во вторую. Эти утверждения легко проверить, если воспользоваться формулами параллельного переноса в декартовых координатах.

Определение 3. *Отрезки AB и PQ на плоскости E_2 называются равными, если существует параллельный перенос, при котором окружность с центром в точке A и радиуса AB переходит в окружность с центром в точке P и радиуса PQ .*

Другими словами, два отрезка AB и PQ будут равными в том и только в том случае, когда радиусы окружностей,

указанных в определении 3, равны между собой. Ясно также, если дан некоторый отрезок AB и дан луч с началом в точке P , то на луче существует единственная точка Q такая, что $AB = PQ$. Действительно, для построения точки Q достаточно рассмотреть окружность с центром в точке A и радиуса AB , а затем параллельно перенести эту окружность на вектор \overrightarrow{AP} .

Определение 3 позволяет ввести понятие длины отрезка на плоскости E_2 . Зафиксируем на этой плоскости некоторый отрезок, который назовем *единичным*, и зададим декартову систему координат O , $\vec{i}_1 = \overrightarrow{OU_1}$, $\vec{i}_2 = \overrightarrow{OU_2}$, где OU_2 и OU_1 равны единичному отрезку. Такую систему назовем *прямоугольной декартовой системой координат*. Длину отрезка AB на плоскости E_2 можно определить как радиус окружности с центром в точке A , проходящей через точку B .

Пусть в прямоугольной декартовой системе координаты точек A и B равны $A(a_1; b_1)$, $B(a_2; b_2)$. Уравнение окружности с центром в точке A и радиуса R имеет вид $(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = R^2$. Так как точка B принадлежит окружности, то $(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 = R^2$. Таким образом, расстояние между точками A и B вычисляется по формуле $R = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}$.

Определив длину отрезка, можно выделить в группе подобий, т. е. в стационарной подгруппе абсолюта d , подгруппу движений как таких преобразований, при которых сохраняется длина отрезка. Самостоятельно проверьте, что аналитическое выражение движения в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид

$$\begin{cases} x' = x \cos \varphi - \varepsilon y \sin \varphi + a_{13}, \\ y' = x \sin \varphi + \varepsilon y \cos \varphi + a_{23}, \end{cases} \text{ где } \varepsilon = \pm 1.$$

§ 45. ПРОЕКТИВНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

На проективной плоскости рассмотрим вещественную овальную линию γ . Обозначим через L_γ ее стационарную подгруппу. Напомним, что точка M проективной плоскости называется внутренней относительно линии γ , если любая прямая, проходящая через M , пересекает линию γ в двух

точках (§ 40). На рисунке 223 точка M — внутренняя. Мы доказали, что если на плоскости выбрана каноническая система координат, в которой уравнение линии имеет вид

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0, \quad (1)$$

то точка $M(m_1 : m_2 : m_3)$ тогда и только тогда является внутренней, когда ее координаты удовлетворяют неравенству

$$m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 < 0. \quad (2)$$

Так как при проективных преобразованиях прямые переходят в прямые, а точки пересечения линий — в точки пересечения их образов, то при любом преобразовании из L_γ внутренняя точка переходит во внутреннюю точку.

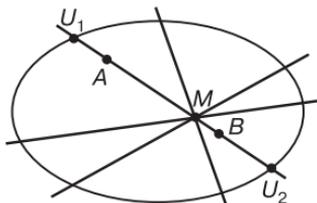


Рис. 223

Докажем, что на множестве внутренних точек линии γ можно построить интерпретацию плоскости Лобачевского, так называемую модель Кэли–Клейна. В качестве группы преобразований этой модели мы будем рассматривать группу L_γ автоморфизмов линии γ , ее элементы назовем *л-движениями*. Назовем внутреннюю точку линии γ *л-точкой*, множество внутренних точек — *плоскостью* L_2 , овальную линию γ — *абсолютом плоскости* L_2 . Рассмотрим прямую проективной плоскости, проходящую через л-точку. Она пересекает абсолют в двух точках U_1 и U_2 (рис. 223). *л-прямой* плоскости L_2 назовем множество внутренних точек абсолюта, принадлежащих проективной прямой U_1U_2 . *л-точка* принадлежит л-прямой, если она как внутренняя точка абсолюта принадлежит проективной прямой, частью которой является рассматриваемая л-прямая. Выберем на л-прямой U_1U_2 две л-точки A и B (рис. 223). Двойное отношение $(U_1U_2; AB)$ не изменяется при л-движении, так как оно сохраняется при любом

проективном преобразовании и, следовательно, при л-движении, переводящем абсолют γ в себя. Таким образом, это двойное отношение является инвариантом группы L_γ .

Из свойств прямых проективной плоскости следует, что для л-точек и л-прямых выполнены аксиомы первой группы (аксиомы принадлежности) аксиоматики Гильберта плоскости Лобачевского. А именно, через любые две л-точки проходит л-прямая, через любые две л-точки проходит единственная л-прямая, на любой л-прямой существуют по крайней мере две л-точки (на самом деле их бесконечно много), существует л-точка, не принадлежащая л-прямой (в действительности таких точек также бесконечно много) (см. § 10). Доказательства этих утверждений проверьте самостоятельно.

Напомним следующие определения и свойства, рассмотренные нами в § 34. Пара точек A, B разделяет пару точек C, D проективной прямой, если $(AB; CD) < 0$; пара точек A, B не разделяет пару C, D , если $(AB; CD) > 0$. Если на проективной прямой даны различные точки A и B , то множество всех точек прямой, отличных от точек A и B , разбивается на два непустых подмножества M и N . Точки C и D принадлежат одному подмножеству, если пара точек A, B не разделяет пару точек C, D , и они принадлежат различным подмножествам, если пара точек A, B разделяет пару точек C, D . Множество M вместе с точками A и B и множество N вместе с этими точками называются отрезками проективной прямой. Таким образом, пара точек проективной прямой разбивает ее на два отрезка.

Теорема 1. Пусть л-точки A и B принадлежат л-прямой U_1U_2 . Тогда

$$(U_1U_2; AB) > 0. \quad (3)$$

Доказательство. На проективной плоскости зададим проективный репер, в котором уравнение абсолюта имеет вид (1). Относительно этого репера координаты точек равны $A(a_1 : a_2 : a_3)$, $B(b_1 : b_2 : b_3)$, $U_1(x_1 : x_2 : x_3)$ и $U_2(y_1 : y_2 : y_3)$. Координаты точек A и B удовлетворяют неравенству (2), а точек U_1 и U_2 — равенству (1). Разложим столбцы координат точек A и B по столбцам координат точек U_1

и U_2 :

$$\begin{cases} a_1 = \alpha x_1 + \beta y_1, \\ a_2 = \alpha x_2 + \beta y_2, \\ a_3 = \alpha x_3 + \beta y_3, \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = \alpha' x_1 + \beta' y_1, \\ b_2 = \alpha' x_2 + \beta' y_2, \\ b_3 = \alpha' x_3 + \beta' y_3. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в неравенство (2) и учитывая равенство (1), после преобразований получим $\alpha\beta(x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3) < 0$, $\alpha'\beta'(x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3) < 0$. Заметим, что $(x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3) \neq 0$, иначе точка U_2 будет сопряжена с точкой U_1 относительно абсолюта (см. § 40), т.е. должна принадлежать касательной к абсолюту γ в точке U_1 , чего быть не может. Разделим первое из полученных неравенств на второе: $\frac{\alpha\beta}{\alpha'\beta'} > 0$. Умножим это неравенство на положительное число $\frac{\alpha'^2}{\alpha^2}$, после преобразований получим $\frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'} > 0$. Так как $(U_1U_2; AB) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'}$, то неравенство (3) доказано.

Из леммы 1 вытекает, что точки A и B проективной прямой U_1U_2 принадлежат одному из отрезков с концами в точках U_1 и U_2 , а именно отрезку, состоящему только из внутренних точек кривой γ . Обратно, точки U_1 и U_2 проективной прямой AB принадлежат отрезку AB , который содержит внешние точки кривой γ .

Определение 1. Пусть даны две л-точки A и B . Л-отрезком AB называется отрезок проективной прямой AB , состоящий из л-точек.

Введем понятие «лежать между» для трех точек л-плоскости.

Определение 2. Л-точка M лежит между л-точками A и B , если она принадлежит л-отрезку AB .

Из определения 1 следует, что л-точка M принадлежит л-отрезку AB в том и только в том случае, когда пары M, U_1 и M, U_2 разделяют пару A, B . Таким образом, доказано утверждение.

Теорема 2. Л-точка M лежит между л-точками A и B л-прямой U_1U_2 в том и только в том случае, когда выполнены неравенства

$$(AB; MU_1) < 0, \quad (AB; MU_2) < 0. \quad (4)$$

Можно проверить выполнение аксиом второй группы аксиоматики Гильберта (см. § 10). Проверим, например, выполнение аксиомы Π_1 , в которой утверждается: *если л-точка M лежит между л-точками A и B , то M лежит между B и A* . Из свойств двойных отношений точек проективной прямой следует: $(AB; MU_1) = \frac{1}{(BA; MU_1)}$,

$(AB; MU_2) = \frac{1}{(BA; MU_2)}$ (свойство 2 двойных отношений, § 34). Л-точка M лежит между л-точками A и B л-прямой U_1U_2 , поэтому для них выполнены неравенства (4). Отсюда следует, что $(BA; MU_1) < 0$, $(BA; MU_2) < 0$. Точка M лежит между точками B и A .

Напомним, что с помощью аксиом второй группы помимо отрезка определяются луч, угол и полуплоскость. На рисунке 224 изображен луч OW , угол V_1QV_2 и полуплоскость, границей которой является прямая U_1U_2 .

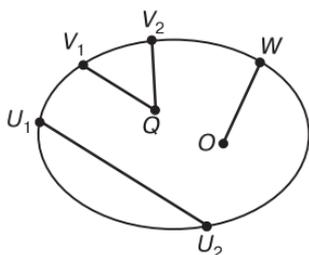


Рис. 224

Движением плоскости L_2 , или л-движением, будем называть любой автоморфизм из группы L_γ , т. е. любое проективное преобразование, переводящее абсолют γ в себя. Две фигуры плоскости L_2 будем называть равными, если существует л-движение, переводящее первую фигуру во вторую. Можно доказать, что при таком определении равенства фигур выполняются все аксиомы третьей группы аксиоматики Гильберта (см. § 11). Также можно доказать, что на плоскости L_2 выполняются аксиомы Кантора и Архимеда.

И, наконец, проверим выполнение аксиомы параллельности Лобачевского: *через точку, не принадлежащую прямой, проходят, по крайней мере, две прямые, не*

пересекающие данную. Рассмотрим произвольную точку A и л-прямую $a = U_1U_2$, которая не содержит этой точки (рис. 225). Рассмотрим две л-прямые U_1V_1 и U_2V_2 , проходящие через точку A . Тогда эти л-прямые не пересекают л-прямую a . Аксиома параллельности Лобачевского проверена. Заметим также, что любая л-прямая, лежащая внутри угла, образованного лучами AU_1 и AV_1 , не пересекает a .

Интерпретация Кэли–Клейна наглядно объясняет понятие параллельности прямых на плоскости Лобачевского. По определению параллельности прямых на плоскости Лобачевского, направленная прямая $b = V_1V_2$ параллельна направленной прямой $a = U_1U_2$, если прямые a и b не пересекаются и для произвольных точек этих прямых $A \in b$ и $B \in a$ любой внутренний луч угла, образованного лучами AB и AU_2 , пересекает прямую a . Обратимся еще раз к рис. 225. Ясно, что прямые V_1U_2 и U_1U_2 удовлетворяют этому определению: они не пересекаются, так как их точка пересечения принадлежит абсолюту, а любой внутренний луч угла BAU_2 пересекает прямую a . Таким образом, *прямые на плоскости L_2 параллельны, если их точка пересечения принадлежит абсолюту.*

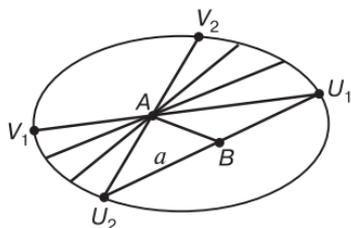


Рис. 225

Легко построить интерпретацию следующего замечательного свойства углов на плоскости Лобачевского. Известно, что на плоскости Лобачевского существует прямая, параллельная двум сторонам данного угла. На рисунке 226 изображен угол U_1AU_2 , прямая U_1U_2 параллельна сторонам AU_1 и AU_2 .

Рассмотрим на плоскости L_2 интерпретацию абсолютно вырожденного треугольника. Три прямые плоскости Лобачевского образуют абсолютно вырожденный треугольник,

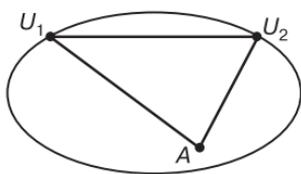


Рис. 226

если они попарно параллельны друг другу. Легко понять, что точки пересечения сторон такого треугольника расположены на абсолютe. На рисунке 227 треугольник $U_1U_2U_3$ абсолютно вырожденный, его стороны попарно параллельны друг другу.

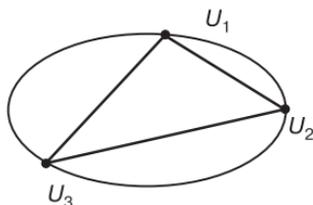


Рис. 227

Рассмотрим понятие перпендикулярных прямых плоскости L_2 . Как известно, угол называется прямым, если он равен своему смежному. Рассмотрим л-прямую $a_1 = U_1U_2$. Обозначим полюс прямой U_1U_2 через A_1 . Ясно, что A_1 — внешняя точка относительно абсолютa. Пусть л-прямая V_1V_2 проективной плоскости проходит через A_1 и пересекает U_1U_2 в некоторой л-точке A_3 (рис. 228). Докажем следующее утверждение.

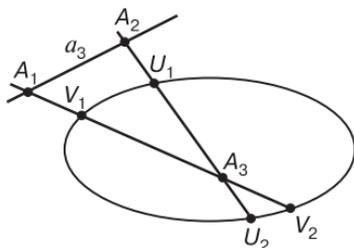


Рис. 228

Теорема 3. *Л-прямая V_1V_2 перпендикулярна л-прямой U_1U_2 .*

Доказательство. Для доказательства этого утверждения достаточно найти такой автоморфизм из группы L_γ , при котором угол $V_1A_3U_1$ переходит в угол $V_1A_3U_2$. Обозначим через a_3 полярную точку A_3 относительно абсолюта, а через A_2 — точку пересечения прямых U_1U_2 и a_3 (рис. 228). Тогда $A_1 \in a_3$, четверка точек U_1, U_2, A_3, A_2 — гармоническая. Трехвершинник $A_1A_2A_3$ является автополярным относительно абсолюта. В § 39 мы видели, что можно выбрать такую единичную точку E , что в проективном репере $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ уравнение абсолюта будет иметь вид $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$. Найдем координаты точек U_1 и U_2 . Так как координатная прямая A_2A_3 имеет уравнение $x_1 = 0$, то решая систему уравнений
$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0, \\ x_1 = 0, \end{cases}$$
 получим:

$U_1(0 : 1 : 1), U_2(0 : 1 : -1)$. Аналогично находим координаты точек V_1 и $V_2: V_1(1 : 0 : 1), V_2(1 : 0 : -1)$.

Рассмотрим преобразование f , формулы которого в репере R имеют вид

$$\begin{cases} \rho x'_1 = -x_1, \\ \rho x'_2 = x_2, \\ \rho x'_3 = -x_3. \end{cases}$$

Эти формулы задают проективное преобразование плоскости (см. § 38). Проверим, что преобразование f принадлежит группе L_γ автоморфизмов абсолюта. Для этого заменим координаты прообраза точки на координаты ее образа в уравнении абсолюта, получим $x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 = 0$. Отсюда следует, что если точка X принадлежит абсолюту, то ему же принадлежит и точка $f(X)$. При преобразовании f вершины трехвершинника $A_1A_2A_3$ неподвижны: $f(A_i) = A_i, i = 1, 2, 3$. Поэтому л-прямые U_1U_2 и V_1V_2 преобразуются в себя. Кроме того, $f(V_1)(-1 : 0 : -1), f(V_2)(-1 : 0 : 1)$. Поэтому $f(V_1) = V_1, f(V_2) = V_2$. Аналогично, $f(U_1)(0 : 1 : -1) = U_2$ и $f(U_2)(0 : 1 : 1) = U_1$. Отсюда следует, что при преобразовании f угол $V_1A_3U_1$ перейдет в угол $V_1A_3U_2$. Теорема доказана.

Из теоремы о взаимности поляритета (§ 40) следует, что если прямая U_1U_2 перпендикулярна прямой V_1V_2 , то прямая V_1V_2 перпендикулярна прямой U_1U_2 .

Построим проективную интерпретацию известной теоремы геометрии Лобачевского: *перпендикуляр, восстановленный в произвольной точке к стороне острого угла, может не пересекать вторую сторону угла. Существует точка, в которой этот перпендикуляр параллелен второй стороне.* Пусть на плоскости L_2 дан острый угол UAV . Обозначим через P полюс стороны AU этого угла. Как известно, полюс P совпадает с точкой пересечения касательных, проведенных к абсолюту в точках U и W (рис. 229). Из теоремы 3 следует, что любая л-прямая, принадлежащая проективной прямой, проходящей через точку P и пересекающая прямую UW , перпендикулярна прямой AU . Свойство перпендикуляров к стороне острого угла легко объяснить, используя рисунок. Прямая PA перпендикулярна прямой UW . Угол UAV — острый, следовательно, лучи AU и AV лежат в одной полуплоскости относительно л-прямой, лежащей на прямой AP . Отсюда следует, что прямая PV пересекает луч AU в некоторой точке X . Л-прямая XV , с одной стороны, перпендикулярна прямой AU , а с другой — параллельна прямой AV . Л-прямые, принадлежащие проективным прямым, проходящим через точку P и пересекающим прямую AU в точках отрезка AX , пересекают вторую сторону угла AV и перпендикулярны прямой AU (на рис. 229 изображена одна из таких прямых, прямая BP). Аналогичные л-прямые, пересекающие луч XU , перпендикулярны прямой AU , но не пересекают прямую AV (на рис. 229 изображена одна из таких прямых, прямая CP).

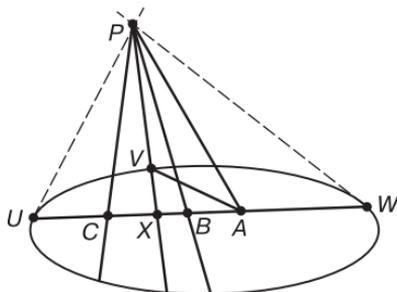


Рис. 229

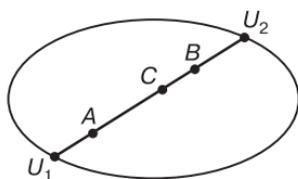


Рис. 230

Точки A и B л-прямой обладают инвариантом $(U_1U_2; AB)$, который не меняется при л-движениях (здесь U_1 и U_2 — точки пересечения прямой AB с абсолютом (рис. 230)). Выше мы показали, что $(U_1U_2; AB) > 0$. Поэтому инвариантом точек A и B является также число $\ln(U_1U_2; AB)$. Покажем, что число $c|\ln(U_1U_2; AB)|$, где $c > 0$, можно рассматривать как аналог расстояния между точками A и B на плоскости L_2 . В § 34 было доказано следующее свойство двойного отношения точек прямой: если на проективной плоскости даны пять различных коллинеарных точек A, B, C, D и P , то $\frac{(AB; PD)}{(AB; PC)} = (AB; CD)$. Пусть на л-прямой даны три точки A, B и C , причем точка C лежит между точками A и B . Обозначим через U_1 и U_2 точки пересечения данной прямой с абсолютом (рис. 230). Применим указанную формулу к точкам A, B, C, U_1 и U_2 : $\frac{(U_1U_2; CB)}{(U_1U_2; CA)} = (U_1U_2; AB)$. С другой стороны, как было показано в том же § 34, $\frac{1}{(U_1U_2; CA)} = (U_1U_2; AC)$. Поэтому верно следующее равенство: $(U_1U_2; AB) = (U_1U_2; AC)(U_1U_2; CB)$. Тогда, обозначая $d(AB) = c|\ln(U_1U_2; AB)|$, $c > 0$, получим: $d(AB) = d(AC) + d(CB)$.

Обратим внимание на то, что полученная формула для вычисления расстояния между точками аналогична формуле Лагерра для вычисления углов в проективной интерпретации евклидовой геометрии (см. § 44).

ЧАСТЬ IV

**ЭЛЕМЕНТЫ ТОПОЛОГИИ
И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ
ГЕОМЕТРИИ**

История возникновения топологии ведет свое начало от классических работ Кантора, Жордана, Пуанкаре, Лебега, посвященных изучению свойств подмножеств евклидовых пространств. Начало собственно топологическим исследованиям в середине XIX века положил Риман, который продемонстрировал, что понятия евклидова и метрического пространств недостаточны для решения важных проблем математики. В результате возникла и стала активно развиваться более общая концепция пространства — понятие топологического пространства. Абстрактные пространства, наделенные топологической структурой, рассматривались в работах Фреше (1906), Рисса (1908), Хаусдорфа (1914). Окончательное определение топологического пространства было сформулировано Куратовским (1922) и Александровым (1924). К настоящему времени оно стало универсальным в том смысле, что структура топологического пространства, являясь достаточно богатой и содержательной, обычно предшествует введению других геометрических структур. Теория топологических пространств позволила получить много глубоких результатов во всех разделах математики, связанных с понятием пространства. Дифференциальная геометрия — раздел математики, в котором геометрические образы изучаются средствами математического анализа. Первые свойства линий и поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве были получены уже во второй половине XVII века основателями дифференциального исчисления И. Ньютоном и Г. Лейбницем. Становление дифференциальной геометрии в конце XVIII—начале XIX века связано с именами таких знаменитых математиков, как Л. Эйлер, Г. Монж, К. Гаусс, заложивших базу классической теории поверхностей. Позднее исследования Б. Римана и А. Пуанкаре привели к понятию гладкого многообразия, которое является многомерным обобщением понятия поверхности. В этой части мы изложим основы топологии и дифференциальной геометрии, а более подробные сведения можно найти в книгах [18]–[20] и [22]. Необходимые факты из курса аналитической геометрии рекомендуем повторить по учебнику [2].

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И МНОГООБРАЗИЯ

§ 46. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

В этом параграфе мы познакомимся с определением топологического пространства и связанных с ним понятий.

Нам потребуются некоторые сведения по теории множеств, например следующая лемма.

Лемма. Пусть во множестве X дано семейство его подмножеств A_i , $i \in I$, где I есть некоторое нумерующее множество. Тогда

- 1) $X \setminus (\cup\{A_i : i \in I\}) = \cap\{X \setminus A_i : i \in I\}$;
- 2) $X \setminus (\cap\{A_i : i \in I\}) = \cup\{X \setminus A_i : i \in I\}$.

Доказательство. Два множества равны тогда и только тогда, когда каждый элемент первого множества принадлежит второму, и наоборот. Проверим, что выполняется равенство 1). Если $x \in X \setminus (\cup\{A_i : i \in I\})$, то $x \notin \cup\{A_i : i \in I\}$ и для всех $i \in I$ выполнено $x \notin A_i$ или $x \in X \setminus A_i$. Таким образом, $x \in \cap\{X \setminus A_i : i \in I\}$. Обратно, если $x \in \cap\{X \setminus A_i : i \in I\}$, то $x \in X \setminus A_i$ или $x \notin A_i$ для всех $i \in I$. Тогда $x \notin \cup\{A_i : i \in I\}$, откуда $x \in X \setminus (\cup\{A_i : i \in I\})$. Аналогично проверяется равенство 2). Лемма доказана.

Понятие топологического пространства

Определение 1. Пусть дано некоторое множество X , элементы которого будем называть точками. Топологией на множестве X называется семейство τ его подмножеств, удовлетворяющее следующим свойствам (аксиомам топологии):

- 1) $\emptyset, X \in \tau$;
- 2) объединение любого семейства множеств из τ принадлежит τ ;
- 3) пересечение любого конечного числа множеств из τ принадлежит τ .

Множество X вместе с заданной на нем топологией τ называется *топологическим пространством* и обозначается (X, τ) или, если не возникает недоразумений, просто X .

Определение 2. Множества из семейства τ называются открытыми в пространстве X .

Приведем примеры топологических пространств.

Пример 1. (X, τ) , где X — произвольное множество, а τ состоит из всех его подмножеств. Такая топология называется дискретной.

Пример 2. (X, τ) , где X — произвольное множество, а τ состоит только из пустого множества и самого множества X . Такая топология называется антидискретной.

Пример 3. (X, τ) , где X — произвольное бесконечное множество, а τ состоит из пустого множества, самого множества X и тех множеств, дополнение каждого из которых до X является конечным. Доказать, что семейство τ является топологией на множестве X . Она называется топологией Зариского.

Решение. Возьмем любые два открытых множества O_1 и O_2 . Если одно из этих множеств пусто, то их пересечение пусто, а значит, открыто. Пусть теперь данные множества непустые. Тогда множество $X \setminus (O_1 \cap O_2) = (X \setminus O_1) \cup (X \setminus O_2)$ либо конечно, либо пусто, если $O_1 = O_2 = X$. В любом из последних двух случаев заключаем, что $O_1 \cap O_2$ является непустым открытым множеством.

Рассмотрим произвольные открытые множества O_i , $i \in I$, где I — нумерующее множество. Без ограничения общности, будем считать, что хотя бы одно из этих открытых множеств не пусто. Тогда множество $X \setminus (\cup\{O_i : i \in I\}) = \cap\{X \setminus O_i : i \in I\}$ конечно или пусто, а значит, множество $\cup\{O_i : i \in I\}$ открыто.

Пример 4. Если на двухэлементном множестве $X = \{a, b\}$ задана топология τ , то возможны следующие случаи: 1) $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\}$ — дискретная топология, тогда пространство (X, τ) называется простым двоеточием; 2) $\tau = \{\emptyset, X\}$ — антидискретная топология, тогда пространство (X, τ) называется слипшимся двоеточием; 3) $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$, тогда пространство (X, τ) называется связным двоеточием.

Определение 3. Множества, дополнения которых до X открыты, называются замкнутыми в пространстве X .

Таким образом, если O открыто, то $X \setminus O$ замкнуто, и наоборот, если F замкнуто, то $X \setminus F$ открыто. Семейство $\bar{\tau} = \{X \setminus O : O \in \tau\}$ всех замкнутых множеств пространства X удовлетворяет следующим свойствам.

Свойство 1. $\emptyset, X \in \bar{\tau}$.

Доказательство. Поскольку $\emptyset, X \in \tau$, из равенств $X \setminus X = \emptyset$ и $X \setminus \emptyset = X$ следует, что $\emptyset, X \in \bar{\tau}$. Свойство доказано.

Свойство 2. Пересечение любого семейства множеств из $\bar{\tau}$ принадлежит $\bar{\tau}$.

Доказательство. Пусть $F_i \in \bar{\tau}$, $i \in I$, где I — нумерующее множество. Обозначив $O_i = X \setminus F_i$, получим $O_i \in \tau$, причем $F_i = X \setminus O_i$ для всех $i \in I$. Так как $\cup\{O_i : i \in I\} \in \tau$, то в соответствии с доказанной леммой из равенства $\cap\{F_i : i \in I\} = \cap\{X \setminus O_i : i \in I\} = X \setminus (\cup\{O_i : i \in I\})$ следует $\cap\{F_i : i \in I\} \in \bar{\tau}$. Свойство доказано.

Свойство 3. Объединение любого конечного числа множеств из $\bar{\tau}$ принадлежит $\bar{\tau}$.

Доказательство. Достаточно проверить справедливость этого свойства для двух множеств. Пусть $F_1, F_2 \in \bar{\tau}$. Обозначив $O_1 = X \setminus F_1$ и $O_2 = X \setminus F_2$, получим, что $O_1, O_2 \in \tau$, причем $F_1 = X \setminus O_1$ и $F_2 = X \setminus O_2$. Поскольку $O_1 \cap O_2 \in \tau$, из $F_1 \cup F_2 = (X \setminus O_1) \cup (X \setminus O_2) = X \setminus (O_1 \cap O_2)$ следует: $F_1 \cup F_2 \in \bar{\tau}$. Свойство доказано.

Пример 5. В пространстве X с дискретной топологией из примера 1 любое подмножество множества X является одновременно открытым и замкнутым.

Пример 6. В пространстве X с антидискретной топологией из примера 2 любое непустое подмножество множества X , отличное от X , не является ни открытым, ни замкнутым.

Пример 7. Доказать, что пересечение бесконечного семейства открытых множеств не всегда является открытым множеством, а объединение бесконечного семейства замкнутых множеств не всегда является замкнутым множеством.

Решение. Рассмотрим пространство X с топологией Зарисского из примера 3. В этом пространстве все одноточечные множества замкнуты, но не открыты, а их дополнения

открыты, но не замкнуты. Фиксируем точку $x_0 \in X$. Равенство $\{x_0\} = \cap\{X \setminus \{x\} : x \neq x_0\}$ показывает, что пересечение бесконечного семейства открытых множеств не всегда является открытым множеством. Переходя в последнем равенстве к дополнениям, получим, что объединение бесконечного семейства замкнутых множеств не всегда является замкнутым множеством.

Пример 8. Рассмотрим простое двоеточие $X = \{a, b\}$ из примера 4. В этом пространстве множество $\{a\}$ открыто, но не замкнуто, а множество $\{b\}$ замкнуто, но не открыто.

База топологии

Введем понятие базы топологии. Пусть дано топологическое пространство (X, τ) . Часто бывает удобным для задания топологии в пространстве указывать не все открытые множества, а только их часть.

Определение 4. Семейство β открытых в X множеств называется базой топологии τ (или пространства X), если любое непустое открытое в X множество является объединением некоторой совокупности множеств, принадлежащих β .

База, которая состоит из конечного или счетного числа множеств, называется *счетной*. Установим два признака базы топологии:

Теорема 1. Семейство β открытых в X множеств является базой топологии τ тогда и только тогда, когда для любых множества $U \in \tau$ и точки $x \in U$ найдется такое множество $V \in \beta$, что $x \in V \subset U$.

Доказательство. Необходимость. Пусть β есть база топологии τ . По определению базы топологии, всякое непустое множество $U \in \tau$ представимо в виде $U = \cup\{U_i : i \in I\}$ объединения элементов $U_i \in \beta$ при $i \in I$, где I — нумерующее множество. Тогда для любой точки $x \in U$ найдется такой номер $i \in I$, что $x \in U_i \subset U$.

Достаточность. Пусть семейство β удовлетворяет условию теоремы. Рассмотрим произвольное непустое множество $U \in \tau$. Тогда для любой точки $x \in U$ найдется такое множество $U_x \in \beta$, что $x \in U_x \subset U$, следовательно, множество

$U = \cup\{U_x: x \in U\}$ является объединением элементов из β . Таким образом, β есть база топологии τ . Теорема доказана.

Теорема 2. Семейство β подмножеств множества X , объединение которых равно X , может служить базой некоторой топологии на X тогда и только тогда, когда для любых двух множеств $U, V \in \beta$ и каждой точки $x \in U \cap V$ найдется такое множество $W \in \beta$, что $x \in W \subset U \cap V$.

Доказательство. Необходимость. Пусть β есть база некоторой топологии на X . Рассмотрим произвольные множества $U, V \in \beta$ и точку $x \in U \cap V$. Поскольку множество $U \cap V$ открыто, из определения базы топологии следует существование такого множества $W \in \beta$, что $x \in W \subset U \cap V$.

Достаточность. Пусть семейство β удовлетворяет условию теоремы. Рассмотрим семейство τ , состоящее из пустого множества и всевозможных объединений элементов семейства β . В частности, $X = \cup U\{U \subset \beta\} \in \tau$. Докажем, что если $U, V \in \tau$, то $U \cap V \in \tau$. Для любой точки $x \in U \cap V$ найдутся такие множества $U_x, V_x \in \beta$, что $x \in U_x \subset U$ и $x \in V_x \subset V$. По условию, существует множество $W_x \in \beta$ со свойством $x \in W_x \subset U_x \cap V_x$. Но $U_x \cap V_x \subset U \cap V$, следовательно, $x \in W_x \subset U \cap V$. Заключаем, что множество $U \cap V$ принадлежит τ как объединение элементов вида $W_x \in \beta$. Осталось заметить, что всякое объединение элементов семейства τ является в то же время объединением некоторых элементов семейства β , а значит, принадлежит τ . Таким образом, семейство τ является топологией на X , а семейство β — базой этой топологии. Теорема доказана.

Пример 9. Указать базу некоторой топологии в n -мерном аффинном пространстве A_n .

Решение. На аффинной плоскости A_2 рассмотрим три точки A, B, C , не лежащие на одной прямой. Множество всех точек $X \in A_2$ со свойством $\overrightarrow{AX} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$, где $0 < \alpha < 1$ и $0 < \beta < 1$, называется *открытым параллелограммом*. Можно доказать, что семейство всех открытых параллелограммов удовлетворяет условиям теоремы 2 и является базой некоторой топологии на множестве A_2 . Аналогично вводится топология в n -мерном аффинном пространстве A_n .

Пример 10. Пусть на произвольном несчетном множестве X задана топология Зариского τ из примера 3. Доказать, что она не имеет счетной базы.

Решение. Доказательство проведем методом от противного, предположив, что существует счетная база β топологии τ . Выберем произвольно точку $x \in X$ и рассмотрим пересечение $A = \bigcap \{U \in \beta: x \in U\}$ всех подмножеств базы β , содержащих точку x . Пусть существует отличная от x точка $y \in A$. В силу определения топологии Зариского множество $V = X \setminus \{y\}$ открыто, причем $x \in V$. Из теоремы 1 теперь следует существование такого множества $W \in \beta$, что $x \in W \subset V$. По построению $A \subset W$, тогда и подавно $A \subset V$, а стало быть $y \in V$, что противоречит определению множества V . Таким образом, множество A состоит из одной точки x . Рассмотрим теперь дополнение $X \setminus A = X \setminus \bigcap \{U \in \beta: x \in U\} = \bigcup \{X \setminus U: U \in \beta, x \in U\}$. В правой части этого равенства стоит счетное множество (как счетное объединение конечных множеств вида $X \setminus U$), тогда как слева имеется несчетное множество $X \setminus A = X \setminus \{x\}$. Мы пришли к противоречию, которое и завершает доказательство.

Топология метрического пространства

В различных разделах математики существенно используется возможность находить расстояние между элементами множеств. Понятие метрического пространства возникло как глубокое обобщение целой серии конкретных множеств, в которых введено расстояние, и получило самое широкое применение в современной математике. Ниже мы изложим некоторые факты теории метрических пространств.

Определение 5. Пусть дано некоторое множество X , элементы которого будем называть точками. Метрикой на множестве X называется отображение $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, сопоставляющее каждой паре $(x, y) \in X \times X$ действительное число $\rho(x, y)$ и удовлетворяющее следующим свойствам (аксиомам метрики):

- 1) $\rho(x, y) \geq 0$;
- 2) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
- 3) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксиома симметрии);
- 4) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (аксиома треугольника).

Множество X вместе с заданной на нем метрикой ρ называется *метрическим пространством* и обозначается (X, ρ) или просто X . Приведем примеры метрических пространств.

Пример 11. (X, ρ) , где X есть произвольное множество и для любых точек $x, y \in X$ положено $\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ 1, & \text{если } x \neq y. \end{cases}$ Такая метрика называется *дискретной*.

Пример 12. (E_n, ρ) , где E_n есть n -мерное евклидово пространство и для любых двух точек $A, B \in E_n$ положено $\rho(A, B) = |\overrightarrow{AB}|$.

Пример 13. (\mathbb{R}, ρ) , где \mathbb{R} есть множество всех действительных чисел и для любых чисел $x, y \in \mathbb{R}$ положено $\rho(x, y) = |x - y|$.

Пример 14. (\mathbb{R}^n, ρ) , где \mathbb{R}^n есть множество упорядоченных групп из n действительных чисел и для любых двух таких групп $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ положено $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$. Доказать, что выполняются аксиомы метрик.

Решение. Справедливость аксиом 1)–3) очевидна. Проверим, что выполняется аксиома треугольника. Пусть даны три точки $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, $z = (z_1, \dots, z_n)$ множества \mathbb{R}^n . Нам следует доказать неравенство

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2}. \quad (1)$$

Для всех $i = 1, \dots, n$ положим $a_i = x_i - z_i$ и $b_i = z_i - y_i$. Тогда $x_i - y_i = a_i + b_i$, неравенство (1) примет вид

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}. \quad (2)$$

Мы пришли к известному неравенству Минковского, для доказательства которого используется другое классическое

неравенство Коши–Буняковского:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}. \quad (3)$$

Действительно, в силу неравенства (3) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 &= \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2 \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2} + \sum_{i=1}^n b_i^2 = \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \right)^2, \end{aligned}$$

что, как нетрудно видеть, равносильно (2). Осталось доказать само неравенство Коши–Буняковского. Рассмотрим очевидное неравенство

$\sum_{i=1}^n (a_i + \lambda b_i)^2 \geq 0$, которое выполнено для произвольного действительного числа λ .

Так как $\sum_{i=1}^n (a_i + \lambda b_i)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^n a_i b_i + \lambda^2 \sum_{i=1}^n b_i^2$, то

$\sum_{i=1}^n a_i^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^n a_i b_i + \lambda^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 \geq 0$. Левая часть этого нера-

венства представляет собой квадратный трехчлен относительно λ . Этот трехчлен неотрицателен для любого λ ,

поэтому его дискриминант $D = \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$

меньше или равен нулю, что и приводит к неравенству

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

Пусть даны метрическое пространство (X, ρ) и множество $A \subset X$. На множестве A естественным образом определяется метрика, в которой расстояние между любыми двумя точками равно расстоянию между ними как точками самого метрического пространства X . В этом случае говорят, что метрика на A индуцируется из X , а полученное таким образом метрическое пространство A называют *подпространством* метрического пространства X .

Определение 6. Пусть даны точка $x \in X$ и число $\varepsilon > 0$. Множество $O_\varepsilon(x) = \{y \in X : \rho(x, y) < \varepsilon\}$ называется ε -окрестностью точки x или открытым шаром радиуса ε с центром в точке x .

Теорема 3. Семейство всех открытых шаров в метрическом пространстве X является базой некоторой топологии на X .

Доказательство. Проверим выполнение условия теоремы 2. Ясно, что объединение всех открытых шаров совпадает со всем множеством X . Рассмотрим два произвольных открытых шара $O_{\varepsilon_1}(x_1)$ и $O_{\varepsilon_2}(x_2)$ с непустым пересечением. Пусть $x \in O_{\varepsilon_1}(x_1) \cap O_{\varepsilon_2}(x_2)$ и $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1 - \rho(x, x_1), \varepsilon_2 - \rho(x, x_2)\}$. Тогда для любой точки $y \in O_\varepsilon(x)$ имеем

$$\begin{aligned} \rho(y, x_1) &\leq \rho(y, x) + \rho(x, x_1) < \varepsilon + \rho(x, x_1) \leq \\ &\leq \varepsilon_1 - \rho(x, x_1) + \rho(x, x_1) = \varepsilon_1 \end{aligned}$$

и

$$\rho(y, x_2) \leq \rho(y, x) + \rho(x, x_2) < \varepsilon + \rho(x, x_2) \leq \varepsilon_2 - \rho(x, x_2) = \varepsilon_2,$$

следовательно, $y \in O_{\varepsilon_1}(x_1) \cap O_{\varepsilon_2}(x_2)$. Таким образом, $x \in O_\varepsilon(x) \subset O_{\varepsilon_1}(x_1) \cap O_{\varepsilon_2}(x_2)$. Все условия теоремы 2 выполнены и система открытых шаров представляет собой базу топологии на X . Теорема доказана.

Определение 7. Топология, базой которой является семейство всех открытых шаров в метрическом пространстве (X, ρ) , называется топологией, порожденной метрикой ρ , и обозначается τ_ρ .

Таким образом, открытыми множествами топологии τ_ρ являются всевозможные объединения открытых шаров и пустое множество.

Теорема 4. Множество A является открытым в X тогда и только тогда, когда для любой точки $x \in A$ найдется такое число $\varepsilon > 0$, что $O_\varepsilon(x) \subset A$.

Доказательство. Необходимость. Пусть множество A открыто в X . Рассмотрим произвольную точку $x \in A$. По определению топологии τ_ρ , найдутся такие точка $y \in A$ и число $\delta > 0$, что $x \in O_\delta(y) \subset A$. Полагая $\varepsilon = \delta - \rho(x, y) > 0$, для любой точки $z \in O_\varepsilon(x)$ получим $\rho(z, y) \leq \rho(z, x) + \rho(x, y) < \varepsilon + \rho(x, y) = \delta$, следовательно, $z \in O_\delta(y)$. Таким образом, $O_\varepsilon(x) \subset O_\delta(y) \subset A$. Необходимость утверждения доказана. Его достаточность непосредственно следует из определения 7. Теорема доказана.

Все приведенные выше пространства в примерах 11–14 будем рассматривать как топологические с топологией,

порожденной соответствующей метрикой. Ясно, что дискретная метрика порождает дискретную топологию.

Пример 15. Доказать, что в пространстве \mathbb{R} из примера 13 любое непустое открытое множество представимо в виде объединения конечного или счетного числа конечных или бесконечных интервалов.

Доказательство. В силу теоремы 4, любой интервал, конечный или бесконечный, является открытым множеством. Рассмотрим произвольное открытое множество $O \subset \mathbb{R}$ и введем на нем бинарное отношение \sim , считая, что $x \sim y$ тогда и только тогда, когда существует интервал (a, b) со свойством $x, y \in (a, b) \subset O$. Очевидно, что это отношение рефлексивно и симметрично. Проверим его транзитивность. Пусть $x \sim y$ и $y \sim z$, тогда существуют такие интервалы (a, b) и (c, d) , что $x, y \in (a, b) \subset O$ и $y, z \in (c, d) \subset O$. Обозначив $e = \min\{a, c\}$ и $f = \max\{b, d\}$, получим, что $x, z \in (e, f) \subset O$, поэтому $x \sim z$. Таким образом, множество O можно представить в виде объединения непересекающихся классов эквивалентности O_i , $i \in I$. Для каждого $i \in I$ обозначим $a_i = \inf O_i$, $b_i = \sup O_i$ и проверим, что $O_i = (a_i, b_i)$. Включение $O_i \subset (a_i, b_i)$ очевидно. Заметим, что если $x, y \in O_i$ и $x < y$, то $(x, y) \subset O_i$. Ясно, что для достаточно малого $\varepsilon > 0$ интервалы $(a, a + \varepsilon)$ и $(b - \varepsilon, b)$ содержат точки из O_i . Поэтому множество O_i содержит любой интервал, концы которого принадлежат интервалу (a_i, b_i) , откуда $O_i = (a_i, b_i)$. Наконец покажем, что нумерующее множество I не более чем счетно. Действительно, поставив каждому индексу $i \in I$ в соответствие фиксированную рациональную точку из O_i , мы установим биективное отображение множества I на некоторое подмножество счетного множества рациональных чисел. Ясно, что пространство \mathbb{R} обладает счетной базой, которую образуют всевозможные интервалы с концами в рациональных точках.

§ 47. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ В ТОПОЛОГИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В этом параграфе мы рассмотрим операции замыкания, выделения внутренней, внешней части и границы множества,

которые обобщают известные из курса математического анализа понятия.

Подпространство топологического пространства

Пусть дано топологическое пространство (X, τ) и множество $A \subset X$. На множестве A естественным образом возникает топология $\tau_A = \{A \cap O : O \in \tau\}$, образованная всевозможными пересечениями элементов из τ со множеством A . В этом случае говорят, что топология на A *индуцируется* из X , а полученное таким образом топологическое пространство A называют *подпространством* топологического пространства X .

Докажем, что семейство τ_A удовлетворяет всем аксиомам топологии. Действительно, из $\emptyset, X \in \tau$ следует $\emptyset = A \cap \emptyset \in \tau_A$ и $A = A \cap X \in \tau_A$. Далее, если $O_1, O_2 \in \tau$, то $O_1 \cap O_2 \in \tau$. Обозначив $U_1 = A \cap O_1$ и $U_2 = A \cap O_2$, получим $U_1 \cap U_2 = (A \cap O_1) \cap (A \cap O_2) = A \cap (O_1 \cap O_2) \in \tau_A$. Наконец, если $O_i \in \tau$ для всех $i \in I$, где I есть некоторое нумерующее множество, то $\cup\{O_i : i \in I\} \in \tau$. Если $U_i = A \cap O_i$, $i \in I$, то $\cup\{U_i : i \in I\} = \cup\{A \cap O_i : i \in I\} = A \cap (\cup\{O_i : i \in I\}) \in \tau_A$.

Пример 1. Пусть на бесконечном множестве X задана топология Зариского (§ 46). Доказать, что топология подпространства A является либо топологией Зариского, если множество A бесконечно, либо дискретной топологией, если множество A конечно.

Решение. Пусть множество A бесконечно. Возьмем произвольное множество $U \subset A$, имеющее до A конечное дополнение $A \setminus U$, и положим $O = U \cup (X \setminus A) = X \setminus (A \setminus U)$. Множество O открыто в X , поскольку его дополнение $X \setminus O = A \setminus U$ до X является конечным множеством. Далее, $A \cap O = U$, откуда следует, что множество U открыто в индуцированной на A из X топологии. Обратно, пусть открытое в X множество O имеет конечное дополнение $X \setminus O$. Обозначив $U = A \cap O$, заключаем, что множество $A \setminus U = A \cap (X \setminus O)$ конечно или пусто. Таким образом, на подпространстве A индуцирована топология Зариского.

Аналогично доказывается, что если множество A конечно, то любое его подмножество открыто в индуцированной

из X топологии. В этом случае топология подпространства A является дискретной.

Операции над множествами в топологическом пространстве

Введем следующие определения.

Определение 1. *Окрестностью точки $x \in X$ называется любое открытое множество, содержащее эту точку.*

Определение 2. *Точка $x \in A$ называется внутренней точкой множества A , если найдется окрестность этой точки, целиком содержащаяся в A .*

Множество внутренних точек называется *внутренней частью* (внутренностью) множества A и обозначается $\text{int } A$.

В качестве примера рассмотрим два подмножества множества вещественных чисел \mathbb{R} , на котором введена метрическая топология. Первое множество $A = (0, 1]$, для него, исходя из определения 2, $\text{int } A = (0, 1)$. Второе множество — $B = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$, его внутренняя часть представляет собой пустое множество.

Установим свойства операции выделения внутренней части множества.

Свойство 1. *Множество $\text{int } A$ открыто и является наибольшим (по включению) открытым множеством, содержащимся во множестве A .*

Доказательство. Рассмотрим семейство $\alpha = \{O \in \tau : O \subset A\}$ открытых множеств, содержащихся в A . Достаточно проверить, что $\text{int } A = \cup \alpha$. Если $x \in \text{int } A$, то найдется такое множество $O \in \tau$, что $x \in O \subset A$, следовательно, $O \in \alpha$ и $x \in \cup \alpha$. Обратно, если $x \in \cup \alpha$, то найдется такое множество $O \in \alpha$, что $x \in O$, следовательно, $x \in O \subset A$ и $x \in \text{int } A$. Свойство доказано.

Из свойства 1 следует свойство 2.

Свойство 2. *Множество A открыто тогда и только тогда, когда $A = \text{int } A$.*

Следующее свойство очевидно.

Свойство 3. *Если $A \subset B$, то $\text{int } A \subset \text{int } B$.*

Свойство 4. $\text{int } (A \cap B) = \text{int } A \cap \text{int } B$.

Доказательство. По свойству 3 имеем $\text{int}(A \cap B) \subset \text{int} A$ и $\text{int}(A \cap B) \subset \text{int} B$, откуда $\text{int}(A \cap B) \subset \text{int} A \cap \text{int} B$. Далее, так как $\text{int} A \subset A$ и $\text{int} B \subset B$, то $\text{int} A \cap \text{int} B \subset A \cap B$. Но множество $\text{int} A \cap \text{int} B$ открыто как пересечение двух открытых множеств, поэтому $\text{int} A \cap \text{int} B \subset \text{int}(A \cap B)$. Свойство доказано.

Следующие два свойства доказываются аналогично.

Свойство 5. $\text{int}(A \cup B) \supset \text{int} A \cup \text{int} B$.

Свойство 6. $\text{int}(A \setminus B) \subset \text{int} A \setminus \text{int} B$.

Определение 3. Точка $x \in X$ называется *внешней точкой* множества A , если она является внутренней точкой множества $X \setminus A$.

Множество таких точек называется *внешней частью* множества A и обозначается $\text{ext} A$.

Для рассмотренных выше подмножеств $A = (0, 1]$ и $B = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ числовой прямой находим $\text{ext} A = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ и $\text{ext} B = (-\infty, 0) \cup \left(\bigcup \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1} \right) : n \in \mathbb{N} \right\} \right) \cup (1, +\infty)$.

Для операции выделения внешней части множества справедливы следующие свойства.

Свойство 7. $\text{int} A = \text{ext}(X \setminus A)$ и $\text{ext} A = \text{int}(X \setminus A)$, в частности, множество $\text{ext} A$ открыто.

Свойство 8. Если $A \subset B$, то $\text{ext} A \supset \text{ext} B$.

Свойство 9. $\text{ext}(A \cup B) = \text{ext} A \cap \text{ext} B$.

Доказательство. Используя свойства 4 и 7, находим, что $\text{ext}(A \cup B) = \text{int}(X \setminus (A \cup B)) = \text{int}((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) = \text{int}(X \setminus A) \cap \text{int}(X \setminus B) = \text{ext} A \cap \text{ext} B$. Свойство доказано.

Следующее свойство доказывается аналогично.

Свойство 10. $\text{ext}(A \cap B) \supset \text{ext} A \cup \text{ext} B$.

Определение 4. Точка $x \in X$ называется *точкой прикосновения* множества A , если любая окрестность этой точки имеет с A непустое пересечение.

Множество таких точек называется *замыканием* множества A и обозначается через \bar{A} .

Для рассмотренных выше подмножеств $A = (0, 1]$ и $B = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ числовой прямой находим, что $\bar{A} = [0, 1]$ и $\bar{B} = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

Установим свойства операции замыкания множества.

Свойство 11. $\overline{X \setminus A} = X \setminus \text{int } A$; в частности, множество \bar{A} замкнуто.

Из свойств 7 и 11 следует свойство 12.

Свойство 12. $\overline{X \setminus A} = X \setminus \text{int } A$ и $X \setminus \bar{A} = \text{int } (X \setminus A)$.

Свойство 13. Множество \bar{A} является наименьшим (по включению) замкнутым множеством, содержащим множество A .

Доказательство. Рассмотрим семейство $\bar{a} = \{F \in \tau : A \subset F\}$ замкнутых множеств, содержащих A . Достаточно проверить, что $\bar{A} = \bigcap \bar{a}$. В силу свойства 11 множество \bar{A} замкнуто, а поскольку $A \subset \bar{A}$, имеем $\bar{A} \in \bar{a}$, следовательно, $\bigcap \bar{a} \subset \bar{A}$. Далее, рассмотрим произвольное множество $F \in \bar{a}$. Имеем $A \subset F$, значит $X \setminus F \subset X \setminus A$. Но множество $X \setminus F$ открыто, поэтому $X \setminus F \subset \text{int } (X \setminus A) = \text{ext } A$, откуда $\bar{A} = X \setminus \text{ext } A \subset F$. Таким образом, $\bar{A} \subset \bigcap \bar{a}$. Свойство доказано.

Из свойства 13 следует свойство 14.

Свойство 14. Множество A замкнуто тогда и только тогда, когда $\bar{A} = A$.

Следующее свойство очевидно.

Свойство 15. Если $A \subset B$, то $\bar{A} \subset \bar{B}$.

Свойство 16. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Доказательство. Используя свойства 9 и 11, находим, что $\overline{A \cup B} = X \setminus \text{ext } (A \cup B) = X \setminus (\text{ext } A \cap \text{ext } B) = (X \setminus \text{ext } A) \cup (X \setminus \text{ext } B) = \bar{A} \cup \bar{B}$. Свойство доказано.

Следующие два свойства доказываются аналогично.

Свойство 17. $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$.

Свойство 18. $\overline{A \setminus B} \supset \bar{A} \setminus \bar{B}$.

Определение 5. Точка $x \in X$ называется *граничной точкой* множества A , если каждая окрестность этой точки имеет непустое пересечение, как с множеством A , так и с его дополнением $X \setminus A$.

Множество таких точек называется *границей* множества A и обозначается ∂A . Для рассмотренных множеств $A=(0, 1]$ и $B=\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ числовой прямой находим, что $\partial A = \{0, 1\}$ и $\partial B = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Установим свойства операции выделения границы множества. Следующее свойство очевидно.

Свойство 19. *Множество X представимо в виде объединения трех попарно не пересекающихся множеств: $\text{int } A$, $\text{ext } A$ и ∂A .*

Из свойства 19 следует свойство 20.

Свойство 20. $\partial A = X \setminus (\text{int } A \cup \text{ext } A)$; в частности, множество ∂A замкнуто.

Из свойств 11 и 20 следует свойство 21.

Свойство 21. $\partial A = \overline{A} \setminus \text{int } A$ и $\overline{A} = \text{int } A \cup \partial A$.

Свойство 22. $\overline{A} = A \cup \partial A$.

Доказательство. Поскольку $\text{int } A \subset A$, выполняется $\overline{A} = \text{int } A \cup \partial A \subset A \cup \partial A$. Обратно, из очевидных включений $A \subset \overline{A}$ и $\partial A \subset \overline{A}$ следует $A \cup \partial A \subset \overline{A}$. Свойство доказано.

Из свойств 14 и 22 получим свойство 23.

Свойство 23. *Множество A замкнуто тогда и только тогда $\partial A \subset A$.*

Следующее свойство очевидно.

Свойство 24. $\partial A = \partial(X \setminus A)$.

Свойство 25. *Множество A открыто тогда и только тогда $\partial A \subset X \setminus A$.*

Доказательство. Множество A открыто тогда и только тогда, когда его дополнение $X \setminus A$ замкнуто, что в силу свойств 23 и 24 равносильно включению $\partial A = \partial(X \setminus A) \subset X \setminus A$. Свойство доказано.

Свойство 26. $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.

Доказательство. По определению границы множества $x \in \partial A$ тогда и только тогда, когда любая окрестность точки x имеет непустое пересечение, как с множеством A , так и с его дополнением $X \setminus A$, что в свою очередь равносильно одновременному выполнению включений $x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{X \setminus A}$ или окончательно $x \in \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$. Таким образом, $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$. Свойство доказано.

Свойство 27. $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$.

Доказательство. Используя свойства 16, 17 и 26, находим, что

$$\begin{aligned} \partial(A \cup B) &= \overline{A \cup B} \cap \overline{(X \setminus (A \cup B))} = (\overline{A \cup B}) \cap (\overline{X \setminus A}) \cap (\overline{X \setminus B}) \subset \\ &\subset (\overline{A \cup B}) \cap \overline{X \setminus A} \cap \overline{X \setminus B} \subset (\overline{A} \cap \overline{X \setminus A}) \cup (\overline{B} \cap \overline{X \setminus B}) = \partial A \cup \partial B. \end{aligned}$$

Свойство доказано.

Следующее свойство доказывается аналогично.

Свойство 28. $\partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B$.

Определение 6. Точка $x \in X$ называется предельной точкой множества A , если каждая окрестность этой точки содержит хотя бы одну точку множества A , отличную от самой точки x .

Множество таких точек называется производным множеством множества A и обозначается A' . Ясно, что $x \in A'$ тогда и только тогда, когда $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$. Для множеств $A = (0; 1]$ и $B = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ в пространстве \mathbb{R} находим $A' = [0; 1]$ и $B' = \{0\}$.

Пример 2. Пусть на бесконечном множестве X задана топология Зариского (§ 46, пример 3). Для открытого в X множества A найди $\text{int } A$, $\text{ext } A$, \overline{A} , ∂A и A' .

Решение. Поскольку множество A открыто в X , из свойства 2 следует, что $\text{int } A = A$. Далее, мы видели, что любые два непустые открытые в X множества имеют непустое пересечение. Учитывая это замечание и определения оставшихся операций, находим, что, $\text{ext } A = \emptyset$, $\partial A = X \setminus A$ и $\overline{A} = A' = X$.

Установим свойства операции перехода к производному множеству.

Свойство 29. $\overline{A} = A \cup A'$.

Доказательство. Ясно, что $A \subset \overline{A}$ и $A' \subset \overline{A}$, откуда $A \cup A' \subset \overline{A}$. Проверим обратное включение $\overline{A} \subset A \cup A'$. Если $x \in \overline{A}$, то любая окрестность точки x имеет с множеством A хотя бы одну общую точку, которая не совпадает с точкой x , при условии, что $x \notin A$. В этом случае $x \in A'$. Итак, либо $x \in A$, либо $x \in A'$, а значит $x \in A \cup A'$. Свойство доказано.

Из свойств 14 и 29 следует свойство 30.

Свойство 30. Множество A замкнуто тогда и только тогда, когда $A' \subset A$.

Следующее свойство очевидно.

Свойство 31. Если $A \subset B$, то $A' \subset B'$;

Свойство 32. $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

Доказательство. По свойству 31 имеем $(A \cup B)' \supset A'$ и $(A \cup B)' \supset B'$, откуда $(A \cup B)' \supset A' \cup B'$. Для доказательства обратного включения рассмотрим произвольную точку $x \in (A \cup B)'$. Из равенства $(A \cup B) \setminus \{x\} = (A \setminus \{x\}) \cup (B \setminus \{x\}) = \overline{A \setminus \{x\}} \cup \overline{B \setminus \{x\}}$ сразу следует, что $x \in A' \cup B'$. Таким образом, $(A \cup B)' \subset A' \cup B'$. Свойство доказано.

Следующие два свойства доказываются аналогично.

Свойство 33. $(A \cap B)' \subset A' \cap B'$.

Свойство 34. $(A \setminus B)' \supset A' \setminus B'$.

Операции над множествами в метрическом пространстве

Пусть на множестве X заданы метрика ρ и порожденная этой метрикой топология τ_ρ . Для любых точки $x \in X$ и числа $r > 0$ определены три множества $O_r(x) = \{y \in X: \rho(x, y) < r\}$, $B_r(x) = \{y \in X: \rho(x, y) \leq r\}$ и $S_r(x) = \{y \in X: \rho(x, y) = r\}$, которые называются соответственно *открытым шаром*, *замкнутым шаром* и *сферой* с центром в точке x радиуса r .

Теорема 1. Множество $O_r(x)$ является открытым, а множества $B_r(x)$ и $S_r(x)$ замкнутыми.

Доказательство. Тот факт, что $O_r(x)$ — открытое множество, следует из определения топологии τ_ρ . Рассмотрим произвольную точку $y \notin B_r(x)$ и положим $\varepsilon = \rho(x, y) - r > 0$. Если $z \in O_\varepsilon(y)$, то $\rho(y, z) < \varepsilon$ и, в силу аксиомы треугольника, имеем $\rho(x, z) \geq \rho(x, y) - \rho(z, y) > \rho(x, y) - \varepsilon = r$, откуда следует, что $z \notin B_r(x)$, а значит, $O_\varepsilon(y) \subset X \setminus B_r(x)$. Таким образом, множество $X \setminus B_r(x)$ открыто, поэтому само множество $B_r(x)$ замкнуто.

Наконец, множество $S_r(x)$ является замкнутым как пересечение двух замкнутых множеств $B_r(x)$ и $X \setminus O_r(x)$. Теорема доказана.

Теорема 2. В метрическом пространстве сфера $S_r(x)$ тогда и только тогда является границей открытого

шара $O_r(x)$, когда его замыканием служит замкнутый шар $B_r(x)$.

Доказательство. Пусть $\overline{O_r(x)} = B_r(x)$. Тогда $S_r(x) = B_r(x) \setminus O_r(x) = \overline{O_r(x)} \setminus O_r(x) = \partial O_r(x)$. Обратно, пусть $S_r(x) = \partial O_r(x)$. Тогда $\overline{O_r(x)} = O_r(x) \cup \partial O_r(x) = O_r(x) \cup S_r(x) = B_r(x)$. Теорема доказана.

Пример 3. Пусть даны метрическое пространство \mathbb{R}^n (§ 46), точка $x = (x_1, \dots, x_n)$ и число $r > 0$. Доказать, что $\overline{O_r(x)} = B_r(x)$.

Решение. Поскольку множество $B_r(x)$ замкнуто и $O_r(x) \subset B_r(x)$, имеем $\overline{O_r(x)} \subset B_r(x)$. Проверим обратное включение. Возьмем произвольную точку $y \in B_r(x)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, и содержащее ее открытое множество U . Найдется такое положительное число $\varepsilon < 2r$, что $O_\varepsilon(y) \subset U$. Для всех $i = 1, \dots, n$ обозначим $z_i = \frac{\varepsilon x_i + (2r - \varepsilon)y_i}{2r}$ и рассмотрим точку $z = (z_1, \dots, z_n)$. Имеем

$$\begin{aligned} \rho(x, z) &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} = \frac{2r - \varepsilon}{2r} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \\ &= \frac{2r - \varepsilon}{2r} \cdot \rho(x, y) \leq \frac{2r - \varepsilon}{2r} \cdot r = r - \frac{\varepsilon}{2} < r \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \rho(z, y) &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2} = \frac{\varepsilon}{2r} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \\ &= \frac{\varepsilon}{2r} \cdot \rho(x, y) \leq \frac{\varepsilon}{2r} \cdot r = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Из этих неравенств следует, что $z \in O_r(x)$ и $z \in O_\varepsilon(y) \subset U$, поэтому произвольная окрестность U точки y пересекает множество $O_r(x)$ в точке z . Таким образом, $B_r(x) \subset \overline{O_r(x)}$.

Определение 7. Последовательность $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ точек множества X называется сходящейся, если существует такая точка $x \in X$, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $n \in \mathbb{N}$, что $\rho(x, x_i) < \varepsilon$ для всех номеров $i > n$.

В этом случае говорят, что последовательность $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ сходится к точке x , которая называется пределом этой по-

следовательности, и пишут $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x$. Данное определение равносильно тому, что $\lim_{i \rightarrow \infty} \rho(x, x_i) = 0$.

Непосредственно из этого определения вытекает, что никакая последовательность точек метрического пространства не может иметь двух различных пределов.

Справедлив признак предельной точки в терминах сходящихся последовательностей, который используется в курсе математического анализа как ее определение.

Теорема 3. *Точка $x \in X$ является предельной точкой множества $A \subset X$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{x_i: i \in \mathbb{N}\}$ точек множества A , сходящаяся к точке x , где $x_i \neq x$ для всех $i \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $x \in A'$, следовательно, существует точка $x_0 \in A$, $x_0 \neq x$. Выберем произвольную последовательность $\{\delta_i: i \in \mathbb{N}\}$ положительных действительных чисел, которая сходится к нулю. По определению предельной точки, для каждого номера $i \in \mathbb{N}$ и положительного числа $\varepsilon_i < \min\{\delta_i, \rho(x, x_{i-1})\}$ найдется точка $x_i \in A \cap O_{\varepsilon_i}(x)$, $x_i \neq x$. Ясно, что числовая последовательность $\{\varepsilon_i: i \in \mathbb{N}\}$ сходится к нулю, а поскольку $\rho(x, x_i) < \varepsilon_i$ при всех $i \in \mathbb{N}$, последовательность $\{x_i: i \in \mathbb{N}\}$ точек множества A сходится к точке x .

Достаточность. Пусть существует последовательность $\{x_i: i \in \mathbb{N}\}$ точек множества A , сходящаяся к точке x , где $x_i \neq x$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Рассмотрим произвольную окрестность O точки x в пространстве X . Найдутся такие число $\varepsilon > 0$ и номер $n \in \mathbb{N}$, что $O_\varepsilon(x) \subset O$ и $\rho(x, x_i) < \varepsilon$ для всех номеров $i > n$. Отсюда $x_i \in O_\varepsilon(x) \subset O$ при $i > n$ и $x_i \neq x$. Таким образом, $x \in A'$. Теорема доказана.

§ 48. НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Непрерывность — одно из важнейших математических понятий, встречающееся в двух основных концепциях: топологического пространства и непрерывного отображения. Средства топологии позволяют сформулировать наиболее общее определение непрерывного отображения, которое играет здесь такую же фундаментальную роль, как, например, в алгебре понятие гомоморфизма алгебраических структур

(групп, колец и т. д.). Введенное далее понятие гомеоморфного отображения позволяет описать свойства пространств, изучением которых занимается топология, и определить тем самым ее предмет.

Пусть даны два топологических пространства (X, τ_1) и (Y, τ_2) .

Непрерывные отображения топологических пространств

Определение 1. *Отображение $f: X \rightarrow Y$ топологических пространств называется непрерывным, если для любой точки $x \in X$ и любой окрестности O_y точки $y = f(x)$ в пространстве Y найдется такая окрестность O_x точки x в пространстве X , что $f(O_x) \subset O_y$.*

Теорема 1. *Для отображения $f: X \rightarrow Y$ следующие условия равносильны.*

1. *Отображение $f: X \rightarrow Y$ является непрерывным.*
2. *Прообраз $f^{-1}(O)$ любого открытого в Y множества O открыт в X .*
3. *Прообраз $f^{-1}(U)$ любого элемента базы β в Y открыт в X .*
4. *Прообраз $f^{-1}(F)$ любого замкнутого в Y множества F замкнут в X .*
5. *Для любого множества $A \subset X$ имеем $\overline{f(A)} \subset \overline{f(A)}$.*
6. *Для любого множества $B \subset Y$ имеем $f^{-1}(\overline{B}) \subset \overline{f^{-1}(B)}$.*
7. *Для любого множества $B \subset Y$ имеем $f^{-1}(\text{int } B) \subset \text{int } f^{-1}(B)$.*

Доказательство. Докажем, что из условия 1 следует условие 2. Если множество $f^{-1}(O)$ является пустым, то оно открыто в X . Пусть $f^{-1}(O) \neq \emptyset$. Тогда для любой точки $x \in f^{-1}(O)$ будет $f(x) \in O$. Открытое множество O является окрестностью точки $y = f(x)$. По определению непрерывного отображения, найдется такая окрестность O_x точки x в X , что $f(O_x) \subset O$, откуда $O_x = f^{-1}f(O_x) \subset f^{-1}(O)$. Таким образом, множество $f^{-1}(O) = \cup\{O_x: x \in f^{-1}(O)\}$ открыто в X как объединение открытых множеств.

Ясно, что из условия 2 следует условие 3.

Докажем, что из условия 3 следует условие 4. В силу очевидного равенства $f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F)$, достаточно проверить, что множество $f^{-1}(Y \setminus F)$ открыто в X . Рассмотр-

рим произвольную точку $x \in f^{-1}(Y \setminus F)$. Множество $Y \setminus F$ открыто в Y и содержит точку $y = f(x)$, следовательно, существует такой элемент $U \in \beta$, что $y \in U \subset X \setminus F$. По условию 3, множество $f^{-1}(U)$ открыто в X , причем $x \in f^{-1}(U) \subset f^{-1}(X \setminus F)$. Таким образом, все точки множества $f^{-1}(Y \setminus F)$ являются внутренними, а значит, это множество открыто в X .

Докажем, что из условия 4 следует условие 5. В силу условия 4 множество $f^{-1}(\overline{f(A)})$ замкнуто в X и, очевидно, содержит множество A . Так как \overline{A} — минимальное замкнутое множество, содержащее A , то $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$. Отсюда следует, что $f(\overline{A}) \subset ff^{-1}(\overline{f(A)}) = \overline{f(A)}$.

Докажем, что из условия 5 следует условие 6. Для этого применим условие 5 к множеству $f^{-1}(B)$. Имеем $f(f^{-1}(B)) \subset ff^{-1}(B) \subset \overline{B}$, откуда $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.

Докажем, что из условия 6 следует условие 7. Для этого применим условие 6 к множеству $Y \setminus B$. Получим включение $\overline{f^{-1}(Y \setminus B)} \subset f^{-1}(\overline{Y \setminus B})$, из которого следует $f^{-1}(\text{int } B) = f^{-1}(Y \setminus \overline{Y \setminus B}) = X \setminus f^{-1}(\overline{Y \setminus B}) \subset X \setminus \overline{f^{-1}(Y \setminus B)} = X \setminus \overline{X \setminus f^{-1}(B)} = \text{int } f^{-1}(B)$.

Докажем, что из условия 7 следует условие 1. Рассмотрим произвольную точку $x \in X$ и окрестность O_y точки $y = f(x)$ в Y . В силу условия 7, имеем $x \in f^{-1}(O_y) = f^{-1}(\text{int } O_y) \subset \text{int } f^{-1}(O_y)$, откуда $f^{-1}(O_y) = \text{int } f^{-1}(O_y)$. Значит, множество $f^{-1}(O_y) = O_x$ открыто в X и является окрестностью точки x , причем $f(O_x) = ff^{-1}(O_y) \subset O_y$. Таким образом, для отображения $f: X \rightarrow Y$ выполняются все условия из определения 1, следовательно, оно является непрерывным. Теорема доказана.

Пример 1. Каждое отображение пространства с дискретной топологией в любое топологическое пространство является непрерывным. Аналогично, каждое отображение любого топологического пространства в пространство с антидискретной топологией является непрерывным.

Пример 2. Пусть даны множество \mathbb{R} всех действительных чисел с топологией, порожденной метрикой (§ 46, пример 13), и бесконечное множество X , снабженное топологией Зариского (§ 46, пример 3). Доказать, что

всякое непрерывное отображение $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ принимает ровно одно значение, т. е. является постоянным.

Решение. Предположим, что найдутся две различные точки $x, y \in f(X) \subset \mathbb{R}$, и обозначим $\varepsilon = \frac{|x-y|}{2}$. Тогда непустые открытые в X множества $O_1 = f^{-1}(O_\varepsilon(x))$ и $O_2 = f^{-1}(O_\varepsilon(y))$ не пересекаются, поскольку не пересекаются ε -окрестности точек x и y . Но в пространстве Зариского, как известно, любые два непустые открытые множества пересекаются. Мы пришли к противоречию, утверждение доказано.

Пример 3. Доказать, что свойства множества быть открытым или замкнутым могут не сохраняться при непрерывном отображении.

Решение. Рассмотрим простое двоеточие $X = \{a, b\}$ и связанное двоеточие $Y = \{\tilde{a}, \tilde{b}\}$ с открытой точкой $\{\tilde{a}\}$ (см. § 46). Тогда отображение $f: X \rightarrow Y$, для которого $f(a) = \tilde{a}$ и $f(b) = \tilde{b}$, является непрерывным. Образ открытого в X множества $\{b\}$ есть множество $\{\tilde{b}\}$, которое замкнуто, но не открыто в Y . Образ замкнутого в X множества $\{a\}$ совпадает с множеством $\{\tilde{a}\}$, которое открыто, но не замкнуто в Y .

Пусть дано непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ и множество $A \subset X$. Будем считать, что топология на множестве A индуцируется из X . Тогда ограничение $f|_A: A \rightarrow Y$ отображения $f: X \rightarrow Y$ на множество A можно рассматривать как отображение топологических пространств.

Теорема 2. Отображение $f|_A: A \rightarrow Y$ непрерывно.

Доказательство. Рассмотрим произвольно открытое в Y множество O . По теореме 1, множество $f^{-1}(O)$ открыто в X , следовательно, множество $(f|_A)^{-1}(O) = f^{-1}(O) \cap A$ открыто в A . Вновь применяя теорему 1, заключаем, что отображение $f|_A: A \rightarrow Y$ непрерывно. Теорема доказана.

Если $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$ — непрерывные отображения топологических пространств X, Y и Z , то их композиция $gf: X \rightarrow Z$ определена по правилу $gf(x) = g(f(x))$ для любой точки $x \in X$.

Теорема 3. Отображение $gf: X \rightarrow Z$ непрерывно.

Доказательство проведите самостоятельно, используя теорему 1.

Гомеоморфизмы

Определение 2. *Непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ называется гомеоморфизмом, если оно взаимно однозначно отображает X на Y и обратное отображение $f^{-1}: Y \rightarrow X$ является непрерывным.*

Топологические пространства X и Y называются *гомеоморфными*, если существует гомеоморфизм пространства X на пространство Y . Ясно, что тождественное отображение топологического пространства на себя является гомеоморфизмом. Также очевидно, что отображение, обратное гомеоморфизму, является гомеоморфизмом. Наконец, с помощью теоремы 3 легко показать, что композиция двух гомеоморфизмов является гомеоморфизмом. Таким образом, отношение гомеоморфности топологических пространств представляет собой отношение эквивалентности.

Пример 4. *Доказать, что пространство \mathbb{R} всех действительных чисел с топологией, порожденной метрикой (§ 46, пример 13), гомеоморфно своему подпространству $(-1, 1)$.*

Самостоятельно проверьте, что искомым гомеоморфизмом осуществляет функция $f(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(x)$.

Пример 5. *Доказать, что гомеоморфизмами являются движения и подобия евклидовой плоскости E_2 , а также аффинные преобразования аффинной плоскости A_2 .*

Решение. Достаточно проверить непрерывность этих отображений. Мы видели, что базу пространства E_2 составляют открытые шары, а их прообразы при движении и подобии также являются открытыми шарами. По отношению к аффинным отображениям аналогичным свойством обладает база, состоящая из открытых параллелограммов пространства A_2 . Таким образом, выполняется условие 3 теоремы 1, откуда и следует непрерывность указанных отображений.

Определение 3. *Свойства топологических пространств, сохраняющиеся при гомеоморфизмах, называются топологическими свойствами.*

Гомеоморфные пространства обладают одинаковыми топологическими свойствами, поэтому в дальнейшем мы их

будем рассматривать просто как тождественные. Изучение топологических свойств является предметом топологии как науки, а одна из ее основных задач состоит в нахождении эффективного способа различать негомеоморфные пространства.

Непрерывные отображения метрических пространств

Пусть даны два метрических пространства (X, ρ_1) и (Y, ρ_2) . Рассмотрим два топологических пространства (X, τ_{ρ_1}) и (Y, τ_{ρ_2}) , топология которых порождена соответствующей метрикой. Под непрерывным отображением (гомеоморфизмом) $f: X \rightarrow Y$ будем понимать их непрерывное отображение (гомеоморфизм) как топологических пространств (X, τ_{ρ_1}) и (Y, τ_{ρ_2}) . Из теоремы 1 и определения открытого множества метрического пространства непосредственно следует утверждение.

Теорема 4. *Отображение $f: X \rightarrow Y$ является непрерывным тогда и только тогда, когда для любой точки $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\rho_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$, как только $\rho_1(x, y) < \delta$, или иначе $f(O_\delta(x)) \subset O_\varepsilon(f(x))$.*

Определение 4. *Биективное отображение $f: X \rightarrow Y$ метрических пространств называется изометрией, если для любых двух точек $x, y \in X$ верно равенство $\rho_1(x, y) = \rho_2(f(x), f(y))$.*

Сами пространства X и Y в этом случае называются *изометричными*. Ясно, что изометрия является частным случаем гомеоморфизма. Изометричные пространства обладают одинаковыми метрическими свойствами своих элементов, в дальнейшем такие пространства мы будем рассматривать просто как тождественные.

Пример 6. *Доказать, что пространство \mathbb{R}^n (§ 46, пример 14) и пространство E_n (§ 46, пример 12) изометричны.*

Искомую изометрию осуществляет отображение, ставящее каждой упорядоченной группе (x_1, \dots, x_n) из n действительных чисел пространства \mathbb{R}^n в соответствие точку пространства E_n с координатами x_1, \dots, x_n относительно

фиксированной прямоугольной декартовой системы координат. В заключение докажем признак непрерывности отображения в терминах сходящихся последовательностей.

Теорема 5. *Отображение $f: X \rightarrow Y$ является непрерывным тогда и только тогда, когда выполняется условие (*): для любых точки $x \in X$ и последовательности $\{x_i: i \in \mathbb{N}\}$, сходящейся к точке x в пространстве X , последовательность $\{f(x_i): i \in \mathbb{N}\}$ сходится к точке $f(x)$ в пространстве Y .*

Доказательство. Необходимость. Пусть отображение $f: X \rightarrow Y$ является непрерывным. Проверим условие (*). Рассмотрим произвольно точку $x \in X$, число $\varepsilon > 0$ и последовательность $\{x_i: i \in \mathbb{N}\}$, сходящуюся к точке x в пространстве X . По теореме 4, найдется такое $\delta > 0$, что $\rho_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$, как только $\rho_1(x, y) < \delta$. Далее, из определения сходящейся последовательности, следует существование такого номера $n \in \mathbb{N}$, что для всех номеров $i > n$ будет выполнено $\rho_1(x, x_i) < \delta$, а значит, и $\rho_2(f(x), f(x_i)) < \varepsilon$. Таким образом, последовательность $\{f(x_i): i \in \mathbb{N}\}$ сходится к точке $f(x)$ в пространстве Y .

Достаточность. Пусть выполняется условие (*). Докажем, что отображение $f: X \rightarrow Y$ непрерывно. Рассмотрим произвольную точку $x \in X$, число $\varepsilon > 0$ и последовательность $\{\delta_i: i \in \mathbb{N}\}$ положительных действительных чисел, которая сходится к нулю. Предположим, что для любого числа $i \in \mathbb{N}$ найдется хоть одна такая точка $x_i \in O_{\delta_i}(x)$, что $f(x_i) \notin O_\varepsilon(f(x))$. Тогда при всех $i \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства $\rho_1(x, x_i) < \delta_i$, причем последовательность чисел δ_i сходится к нулю, поэтому последовательность $\{x_i: i \in \mathbb{N}\}$ сходится к точке x в пространстве X . С другой стороны, неравенство $\rho_2(f(x), f(x_i)) \geq \varepsilon$ также выполняется для любого $i \in \mathbb{N}$, поэтому последовательность $\{f(x_i): i \in \mathbb{N}\}$ не сходится к точке $f(x)$ в пространстве Y . Мы пришли к противоречию с условием (*), следовательно, найдется число $n \in \mathbb{N}$, для которого $f(O_{\delta_n}(x)) \subset O_\varepsilon(f(x))$. Поэтому выполнено условие теоремы 4. Теорема доказана.

§ 49. СВЯЗНЫЕ И КОМПАКТНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Свойство связности обобщает интуитивное представление о пространстве, которое состоит из одной нераздельной

части, в отличие пространств, состоящих из многих удаленных друг от друга частей. Дадим определения этих понятий. Пусть дано топологическое пространство (X, τ) .

Понятие связности топологического пространства

Определение 1. Пространство X называется несвязным, если его можно представить в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых множеств. В противном случае пространство X называется связным.

Пример 1. Пространство с дискретной топологией несвязно, а пространство с антидискретной топологией связно.

Проверку утверждения осуществите самостоятельно.

Пример 2. Пространство с топологией Зариского связно, поскольку любые два непустые открытые в нем множества имеют непустое пересечение (§ 46).

Пример 3. Пусть дано пространство \mathbb{R} с топологией, порожденной метрикой (§ 46). Доказать, что отрезок $[a, b]$ является его связным подпространством.

Решение. Предположим, что пространство $X = [a, b]$, топология которого индуцируется из \mathbb{R} , является несвязным. Тогда найдутся такие непустые открытые в X множества O_1 и O_2 , что $X = O_1 \cup O_2$ и $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Пусть $a \in O_1$. Рассмотрим множество $A = \{x \in X : [a, x] \subset O_1\}$. Окрестность O_1 точки a содержит ее ε -окрестность, которая в индуцированной топологии имеет вид $O_\varepsilon(a) = [a, a + \varepsilon)$, при условии, что $\varepsilon \leq b - a$, поэтому $a + \varepsilon \in A$. Отсюда следует, что множество A непустое. Это множество ограничено сверху точками y , для которых $y > b$. Таким образом, множество A имеет точную верхнюю грань $c = \sup A$, причем $c \neq b$. Поскольку $c \in X = O_1 \cup O_2$, одно из множеств O_1 или O_2 является окрестностью точки c , поэтому содержит ее δ -окрестность, которая имеет вид $O_\delta(c) = (c - \delta, c + \delta)$, при условии, что $\delta \leq \min\{c - a, b - c\}$. Если $c \in O_1$, то $O_\delta(c) \subset O_1$, следовательно $c < c + \delta \in A$, что противоречит определению точки c . Если $c \in O_2$, то $O_\delta(c) \subset O_2$, следовательно, на промежутке $(c - \delta, c)$ нет точек множества A и число $(c - \delta) \in X$, которое меньше c , ограничивает множество

А сверху, что вновь противоречит определению точки c . Таким образом, $c \notin O_1 \cup O_2 = X$, чего не может быть. В итоге мы получили противоречие, которое показывает, что отрезок $[a, b]$ есть связное подпространство.

Теорема 1. *Непрерывный образ связного топологического пространства является связным топологическим пространством.*

Доказательство. Пусть задано непрерывное сюръективное отображение $f: X \rightarrow Y$ связного топологического пространства X на некоторое топологическое пространство Y . Предположим, что пространство Y несвязно. Тогда найдутся такие непустые открытые в Y множества O_1 и O_2 , что $Y = O_1 \cup O_2$ и $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Множества $f^{-1}(O_1)$ и $f^{-1}(O_2)$ непустые, поскольку отображение f сюръективно, и открытые в X , поскольку отображение f непрерывно. Кроме того, $X = f^{-1}(O_1) \cup f^{-1}(O_2)$ и $f^{-1}(O_1) \cap f^{-1}(O_2) = \emptyset$. Отсюда следует, что пространство X несвязно. Мы пришли к противоречию. Таким образом, пространство Y связно. Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что связность является топологическим свойством.

Пример 4. Пусть даны пространство \mathbb{R}^2 с топологией, порожденной метрикой, и окружность $S = \{(x, y): x^2 + y^2 = 1\}$. Доказать, что пространство S , топология которого индуцирована из \mathbb{R}^2 , является связным.

Решение. Пространство S связно как образ отрезка $[0, 1]$ при непрерывном отображении, заданном формулами $x = \cos 2\pi t$, $y = \sin 2\pi t$, $0 \leq t \leq 1$.

Теорема 2. *Пространство X связно, если любые две его точки лежат в некотором связном подпространстве.*

Доказательство. Предположим, что пространство X несвязно. Тогда найдутся такие непустые открытые в X множества O_1 и O_2 , что $X = O_1 \cup O_2$ и $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Рассмотрим две произвольные точки $x_1 \in O_1$ и $x_2 \in O_2$. По условию теоремы, эти точки принадлежат некоторому связному подпространству A пространства X . Обозначим $U_1 = A \cap O_1$ и $U_2 = A \cap O_2$. Множества U_1 и U_2 непустые и открытые в A , причем $A = U_1 \cup U_2$ и $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, что противоречит связности пространства A . Таким образом, пространство X связно. Теорема доказана.

Пример 5. Пусть даны пространство \mathbb{R}^n с топологией, порожденной метрикой (§ 46), и выпуклое множество $A \subset \mathbb{R}^n$. Доказать, что пространство A , топология которого индуцирована из \mathbb{R}^n , является связным.

Решение. Пространство A связно, поскольку выпуклое множество вместе с любыми двумя своими точками содержит весь отрезок с концами в этих точках.

Определение 2. Топологическое пространство X называется линейно связным, если для любых двух его точек x, y найдется такое непрерывное отображение $f: I \rightarrow X$ отрезка $I = [0, 1]$ в пространство X , что $f(0) = x$ и $f(1) = y$.

В этом случае образ $f(I)$ отрезка $I = [0, 1]$ называется путем, соединяющим точки x, y . Ясно, что путь $f(I)$ является связным подпространством пространства X . Из теоремы 2 следует, что всякое линейно связное пространство обязательно связно. Обратное неверно, как показывает следующий пример.

Пример 6. Пусть даны пространство \mathbb{R}^2 с топологией, порожденной метрикой, и множества $A = \{(x, y): x=0, -1 \leq y \leq 1\}$, $B = \{(x, y): y = \sin \frac{1}{x}, 0 < x \leq \frac{2}{\pi}\}$, $C = A \cup B$. Доказать, что пространство C , топология которого индуцирована из \mathbb{R}^2 , связно, но не линейно связно.

Для доказательства достаточно заметить, что точку множества A нельзя соединить путем с точкой множества B .

Компоненты связности

Если топологическое пространство не является связным, то его можно разложить на связные куски, которые и называются компонентами связности.

Теорема 3. Пусть в пространстве X для некоторого нумерующего множества I дано семейство $\{A_i: i \in I\}$ связных подпространств, пересечение которых не пусто. Тогда подпространство $A = \cup\{A_i: i \in I\}$ связно.

Доказательство. Предположим, что подпространство A несвязно. Тогда существуют такие непустые открытые в A множества O_1 и O_2 , что $A = O_1 \cup O_2$ и $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. По условию, найдется хоть одна точка $x \in \cap\{A_i: i \in I\}$.

Пусть $x \in O_1$. Рассмотрим произвольную точку $y \in O_2$. Поскольку $y \in A$, найдется номер $i \in I$ со свойством $y \in A_i$. Множества $U_1 = O_1 \cap A_i$ и $U_2 = O_2 \cap A_i$ непустые и открытые в A_i , причем $A_i = U_1 \cup U_2$ и $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Мы пришли к противоречию со связностью подпространства A_i . Таким образом, само подпространство A связно. Теорема доказана.

Пример 7. Пусть дано пространство \mathbb{R} с топологией, порожденной метрикой (§ 46). Доказать, что полуинтервал $[a, b)$, интервал (a, b) , замкнутый луч $[a, \infty)$ и открытый луч (a, ∞) являются его связными подпространствами.

Решение. Проверим, например, первое утверждение. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ отрезок $\left[a, b - \frac{b-a}{2n} \right]$ является связным подпространством, содержащим точку a . Объединение таких отрезков по всем $n \in \mathbb{N}$ даст полуинтервал $[a, b)$, и, в силу теоремы 3, этот полуинтервал связан. Аналогично можно доказать связность замкнутого луча. Далее, интервал представим в виде объединения двух полуинтервалов, а открытый луч — в виде объединения полуинтервала и замкнутого луча, имеющих общий конец, откуда следует их связность.

Теорема 4. Замыкание связного подпространства связно.

Доказательство. Пусть в пространстве X дано связное подпространство A . Предположим, что его замыкание \overline{A} несвязно. Тогда существуют такие непустые открытые в \overline{A} множества O_1 и O_2 , что $\overline{A} = O_1 \cup O_2$ и $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Рассмотрим произвольные точки $x_1 \in O_1$ и $x_2 \in O_2$. По определению индуцированной топологии, найдутся окрестности U_1 и U_2 точек x_1 и x_2 в пространстве X со свойством $O_1 = \overline{A} \cap U_1$ и $O_2 = \overline{A} \cap U_2$. Поскольку $x_1, x_2 \in \overline{A}$, эти точки являются точками прикосновения множества A , следовательно, любые их окрестности имеют со множеством A непустое пересечение. Таким образом, множества $V_1 = A \cap U_1$ и $V_2 = A \cap U_2$ непустые и открытые в A , причем $A = V_1 \cup V_2$ и $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Мы пришли к противоречию со связностью пространства A . Значит само пространство \overline{A} связно. Теорема доказана.

Определение 3. Для каждой точки $x \in X$ объединение A_x всех связных подпространств пространства X , со-

держащих точку x , называется компонентой связности этой точки.

Из теоремы 3 следует, что подпространство A_x связно, а, в силу теоремы 4, его замыкание $\overline{A_x}$ также связно. По определению компоненты связности, имеем $\overline{A_x} \subset A_x$, откуда $\overline{A_x} = A_x$, а значит, множество A_x замкнуто в X . Пусть $x, y \in X$ и $A_x \cap A_y \neq \emptyset$. Тогда подпространство $A = A_x \cup A_y$ связно, поэтому $A \subset A_x$ и $A \subset A_y$. Таким образом, $A = A_x = A_y$. Обратно, если $A_x \neq A_y$, то $A_x \cap A_y = \emptyset$. Доказана следующая теорема.

Теорема 5. *Всякое топологическое пространство можно представить в виде объединения замкнутых и непересекающихся компонент связности.*

Можно доказать, что свойство пространств состоять из определенного числа компонент связности, понимаемого в общем случае как мощность множества, является топологическим. В случае конечного числа компонент связности каждая из них является одновременно открытым и замкнутым множеством.

Пример 8. *Пусть дано пространство \mathbb{R} действительных чисел с топологией, порожденной метрикой. Доказать, что в его подпространстве \mathbb{Q} рациональных чисел компоненты связности являются одноточечными множествами.*

Решение. Предположим, что в пространстве \mathbb{Q} , топология которого индуцирована из \mathbb{R} , найдется связное подпространство A и две различные точки $x, y \in A$, причем $x < y$. Фиксируем такое иррациональное число z , что $x < z < y$, и рассмотрим два открытых луча $O_1 = (-\infty, z)$ и $O_2 = (z, +\infty)$. Множества $U_1 = A \cap O_1$ и $U_2 = A \cap O_2$ непустые и открытые в A , причем $A = U_1 \cup U_2$ и $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Мы пришли к противоречию со связностью пространства A . Таким образом, пространство \mathbb{Q} представимо в виде объединения счетного числа одноточечных компонент связности, каждая из которых является замкнутым, но не открытым множеством.

Понятие компактного топологического пространства

Перейдем к изучению свойств так называемых компактных пространств. Хорошо известно, что многие фундаментальные утверждения математического анализа основаны на одном замечательном свойстве отрезка, известном под названием леммы Гейне–Бореля–Лебега и заключающемся в том, что из любого покрытия отрезка открытыми интервалами можно выбрать конечное подпокрытие. По этой причине оказалось естественным выделить класс топологических пространств, обладающих аналогичным свойством, что и привело к одному из основных понятий топологии — понятию компактного пространства. Будем считать, что нам дано топологическое пространство (X, τ) .

Определение 4. *Покрытием пространства X называется такое семейство Ω его подмножеств, объединение которого совпадает с X . Покрытие Ω называется открытым, если оно состоит из открытых в X множеств. Подпокрытием покрытия Ω называется такое его подсемейство $\omega \subset \Omega$, которое само является покрытием пространства X .*

Определение 5. *Пространство X называется компактным, если любое его открытое покрытие имеет конечное подпокрытие.*

Пример 9. *Бесконечное множество с антидискретной топологией является, а с дискретной — не является компактным пространством.*

Пример 10. *Доказать, что бесконечное множество X , на котором задана топология Зариского (§ 46), является компактным пространством.*

Решение. Рассмотрим произвольное открытое покрытие Ω пространства X и множество $O \in \Omega$. Тогда множество $X \setminus O$ является конечным: $X \setminus O = \{x_1, \dots, x_n\}$. Обозначим через O_i такой элемент покрытия Ω , что $x_i \in O_i$. Тогда $\omega = \{O, O_1, \dots, O_n\}$ есть конечное подпокрытие покрытия Ω .

Пример 11. *Пусть дано пространство \mathbb{R} с топологией, порожденной метрикой. Доказать, что полуинтервал $[a, b)$, интервал (a, b) , замкнутый луч $[a, \infty)$ и откры-*

тый луч (a, ∞) не являются, а отрезок $[a, b]$ — является его компактными подпространствами.

Решение. Действительно, открытое покрытие $\left\{ \left[a, b - \frac{b-a}{2n} \right) : n \in \mathbb{N} \right\}$ полуинтервала $[a, b)$, как нетрудно видеть, не имеет конечного подпокрытия. Аналогичные примеры можно провести и в случае интервала, открытого и замкнутого луча. Докажем, что пространство $X = [a, b]$, топология которого индуцируется из \mathbb{R} , является компактным. Рассмотрим произвольное открытое покрытие Ω пространства X . Точку $x \in X$, отличную от точки a , назовем отмеченной, если отрезок $[a, x]$ можно покрыть конечным числом множеств из Ω . Множество отмеченных точек обозначим через A . То открытое множество из Ω , которому принадлежит точка a , содержит ее ε -окрестность, имеющую в индуцированной топологии вид $O_\varepsilon(a) = [a, a + \varepsilon)$, при условии, что $\varepsilon \leq b - a$, поэтому $a + \frac{\varepsilon}{2} \in A$. Отсюда следует, что множество A непустое. Это множество ограничено сверху точками y , для которых $y > b$. Таким образом, множество A имеет точную верхнюю грань $c = \sup A$. Предположим, что $c \neq b$. Поскольку $c \in X$, найдется такое множество $O \in \Omega$, что $c \in O$. Тогда окрестность O точки c содержит ее δ -окрестность, которая имеет вид $O_\delta(c) = (c - \delta, c + \delta)$, при условии, что $\delta \leq \min\{c - a, b - c\}$. По определению точной верхней грани $c - \frac{\delta}{2} \in A$, следовательно, отрезок $\left[a, c - \frac{\delta}{2} \right]$ можно покрыть конечным числом элементов O_1, \dots, O_n из Ω . Присоединим к этому семейству множество O . Тогда семейство $\{O, O_1, \dots, O_n\}$ образует конечное покрытие отрезка $\left[a, c + \frac{\delta}{2} \right]$ множествами из Ω . Поэтому $c + \frac{\delta}{2} \in A$. Но $c < c + \frac{\delta}{2}$. Последнее соотношение противоречит определению точки c . Тем самым доказано, что $c = b$. Из определения отмеченной точки теперь существование конечного подпокрытия \mathcal{U} покрытия Ω , следовательно, и компактность отрезка $[a, b]$.

Теорема 6. *Непрерывный образ компактного топологического пространства является компактным топологическим пространством.*

Доказательство. Пусть задано непрерывное сюръективное отображение $f: X \rightarrow Y$ компактного топологического пространства X на некоторое топологическое пространство Y . Рассмотрим произвольное открытое покрытие Ω пространства Y . Тогда семейство $f^{-1}(\Omega) = \{f^{-1}(O): O \in \Omega\}$ образует открытое покрытие пространства X . Поскольку пространство X компактно, покрытие $f^{-1}(\Omega)$ имеет конечное подпокрытие $\{f^{-1}(O_i): i = 1, \dots, n\}$. Тогда семейство $\omega = \{O_i: i = 1, \dots, n\}$ в свою очередь образует конечное подпокрытие покрытия Ω . Таким образом, пространство Y компактно. Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что компактность является топологическим свойством.

Пример 12. Пусть даны пространство \mathbb{R}^2 с топологией, порожденной метрикой, и окружность $S = \{(x, y): x^2 + y^2 = 1\}$. Доказать, что пространство S , топология которого индуцирована из \mathbb{R}^2 , является компактным.

Решение. Пространство S компактно как образ отрезка $[0, 1]$ при непрерывном отображении, заданном формулами $x = \cos 2\pi t$, $y = \sin 2\pi t$, $0 \leq t \leq 1$.

Определение 6. Пространство X называется *отделимым* (или *хаусдорфовым*), если у любых двух его различных точек существуют непересекающиеся окрестности.

Можно доказать, что отделимость является топологическим свойством.

Пример 13. Пусть дано метрическое пространство (X, ρ) . Доказать, что топологическое пространство (X, τ_ρ) является отделимым.

Решение. Если даны две различные точки $x, y \in X$, то обозначив $\varepsilon = \rho(x, y) > 0$, получим, что $\frac{\varepsilon}{2}$ -окрестности данных точек не пересекаются.

Пример 14. Пространство с дискретной топологией является, а с антидискретной — не является отделимым.

Пример 15. Пространство с топологией Зариского не является отделимым, поскольку любые два непустые открытые в нем множества имеют непустое пересечение.

Пример 16. Простое двоеточие является, а слипшееся и связное двоеточия не являются отделимыми пространствами.

Пример 3 из § 48 теперь показывает, что непрерывный образ отделимого пространства может не быть отделимым пространством.

Свойства компактных топологических пространств

Теорема 6. Всякое замкнутое множество A , лежащее в компактном топологическом пространстве X , есть компактное топологическое пространство.

Доказательство. Рассмотрим произвольное открытое покрытие $\Omega = \{O_i : i \in I\}$ пространства A . Для любого номера $i \in I$ найдется такое открытое в X множество U_i , что $O_i = A \cap U_i$. Поскольку множество A замкнуто, множество $U = X \setminus A$ открыто в X . Семейство $\{U_i : i \in I\}$ и множество U образуют открытое покрытие пространства X . В силу его компактности это покрытие имеет конечное подпокрытие $\{U, U_{i_1}, \dots, U_{i_n}\}$ для некоторых номеров $i_1, \dots, i_n \in I$. Тогда семейство $\omega = \{O_{i_1}, \dots, O_{i_n}\}$ представляет собой конечное подпокрытие покрытия Ω . Таким образом, пространство A компактно. Теорема доказана.

Теорема 7. Пусть A есть компактное подпространство отделимого пространства X . Тогда множество A замкнуто в X .

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $x \in X \setminus A$. Поскольку пространство X отделимо, для любой точки $y \in A$ найдутся непересекающиеся окрестности $O_x(y)$ и $O_y(x)$ точек x и y соответственно. Семейство $\Omega = \{O_y(x) \cap A : y \in A\}$ образует открытое покрытие пространства A . В силу компактности пространства A , это покрытие имеет конечное подпокрытие $\omega = \{O_{y_i}(x) \cap A : i = 1, \dots, n\}$. Ясно, что множества $O_A = \cup \{O_{y_i}(x) \cap A : i = 1, \dots, n\}$ и $O_x = \cap \{O_x(y_i) : i = 1, \dots, n\}$ открыты в X и не пересекаются. В частности, окрестность O_x точки x не пересекается с множеством A . Таким образом, множество $X \setminus A$ открыто, а само множество A замкнуто в X . Теорема доказана.

Теорема 8. *Всякое бесконечное подмножество A компактного пространства X имеет в X хоть одну предельную точку.*

Доказательство. Предположим противное, а именно, что производное множество A' (см. § 47) пусто. Тогда, по свойству 29 из § 47, имеем $\overline{A} = A$, следовательно, множество A замкнуто, а множество $O = X \setminus A$ открыто в X . Далее, для любой точки $x \in A$ найдется в X такая окрестность O_x , которая не имеет с A общих точек, отличных от x , так что $A \cap O_x = \{x\}$. Семейство $\{O_x : x \in A\}$ и множество O образуют открытое покрытие пространства X , которое, в силу бесконечности множества A , не имеет конечного подпокрытия. Мы получили противоречие с компактностью пространства X . Теорема доказана.

Компактность в метрическом пространстве

В курсе математического анализа также рассматриваются свойства компактных подпространств в метрическом пространстве. Но понятие компактности вводится несколько иначе, чем было введено нами. Выясним, эквивалентны ли они, и какова структура компактных подпространств метрического пространства. Пусть на множестве X заданы метрика ρ и порожденная этой метрикой топология τ_ρ . Тогда можно рассматривать метрическое пространство (X, ρ) и топологическое пространство (X, τ_ρ) . Ниже мы получим признак компактности пространства X в терминах сходящихся последовательностей.

Определение 7. *Метрическое пространство X называется секвенциально компактным, если каждая последовательность точек в X имеет сходящуюся подпоследовательность.*

Теорема 9. *Пространство X является секвенциально компактным тогда и только тогда, когда каждое бесконечное подмножество множества X имеет в X предельную точку.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть пространство X является секвенциально компактным и дано бесконечное множество $A \subset X$. Тогда множество A содержит счетное подмножество, элементы которого можно занумеровать в виде

последовательности $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$. Эта последовательность имеет подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $x \in X$, которая и является предельной точкой множества A .

Достаточность. Пусть всякое бесконечное подмножество множества X имеет в X предельную точку и дана последовательность $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ точек множества X . Если лишь конечное множество этих точек являются попарно различными, то данная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность из совпадающих между собой точек. В противном случае подмножество $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ множества X бесконечно, следовательно, имеет предельную точку $x \in X$. В силу теоремы 3 из § 47, эта точка является пределом некоторой подпоследовательности данной последовательности. Теорема доказана.

Определение 8. Число $\varepsilon > 0$ называется числом Лебега открытого покрытия Ω метрического пространства X , если ε -окрестность каждой точки этого пространства содержится в некотором множестве из Ω .

Теорема 10. Всякое открытое покрытие Ω секвенциально компактного пространства X имеет число Лебега.

Доказательство. Предположим, что покрытие Ω не имеет числа Лебега. Тогда для фиксированной последовательности $\{\varepsilon_i : i \in \mathbb{N}\}$ положительных действительных чисел, сходящейся к нулю, найдется такая последовательность $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ точек множества X , что для всех $i \in \mathbb{N}$ окрестность $O_i = O_{\varepsilon_i}(x_i)$ точки x_i не содержится ни в одном множестве из Ω . В силу секвенциальной компактности пространства X , можно выбрать подпоследовательность $\{x_{i_k} : k \in \mathbb{N}\}$, сходящуюся к точке $x \in X$. Найдется множество $O \in \Omega$, содержащее эту точку, а значит, для некоторого $\varepsilon > 0$ будет $O_\varepsilon(x) \subset O$. Возьмем настолько большой номер $n \in \mathbb{N}$, что для всех номеров $k > n$ одновременно выполняются неравенства $\rho(x, x_{i_k}) < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\varepsilon_{i_k} < \frac{\varepsilon}{2}$. Для любой точки $y \in O_{i_k}$ имеем $\rho(x_{i_k}, y) < \varepsilon_{i_k} < \frac{\varepsilon}{2}$, откуда $\rho(x, y) < \rho(x, x_{i_k}) + \rho(x_{i_k}, y) < \varepsilon$, следовательно, $y \in O_\varepsilon(x) \subset O$. Поэтому $O_{i_k} \subset O$. Это включение противоречит тому, что множество O_{i_k} не содержится ни в одном множестве из Ω . Теорема доказана.

Для метрического пространства компактность и секвенциальная компактность равносильны, а именно справедлива теорема.

Теорема 11. *Метрическое пространство X компактно тогда и только тогда, когда оно секвенциально компактно.*

Доказательство. *Необходимость* следует из теорем 4 и 5.

Достаточность. Пусть пространство X секвенциально компактно, но существует его открытое покрытие Ω , не имеющее конечного подпокрытия. Обозначим через ε число Лебега этого покрытия и рассмотрим еще одно покрытие $\omega = \{O_\varepsilon(x) : x \in X\}$ пространства X . Тогда каждое множество из ω содержится в некотором множестве из Ω , следовательно, покрытие ω также не имеет конечного подпокрытия. Фиксируем точку $x_1 \in X$ и для каждого номера $i \in \mathbb{N}$ найдем точку $x_i \in X \setminus \cup\{O_\varepsilon(x_j) : j < i\}$. Тем самым по индукции построена бесконечная последовательность $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ точек множества X со свойством $\rho(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ для любых $i, j \in \mathbb{N}$. В силу секвенциальной компактности пространства X , можно выбрать подпоследовательность $\{x_{i_k} : k \in \mathbb{N}\}$, сходящуюся к точке $x \in X$. Существует такой номер $n \in \mathbb{N}$, что для всех номеров $k > n$ будет $\rho(x, x_{i_k}) < \frac{\varepsilon}{2}$, следовательно $\rho(x_{i_k}, x_{i_{k+1}}) < \rho(x, x_{i_k}) + \rho(x, x_{i_{k+1}}) < \varepsilon$. Мы пришли к противоречию со свойством последовательности $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$. Таким образом, всякое открытое покрытие пространства X имеет конечное подпокрытие и само пространство X компактно. Теорема доказана.

Из курса математического анализа известно, что всякое бесконечное ограниченное множество в пространстве \mathbb{R}^n имеет хотя одну предельную точку, поэтому в качестве следствия из доказанных теорем получаем признак компактности в пространстве \mathbb{R}^n .

Теорема 12. *Подпространство пространства \mathbb{R}^n компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

Заметим, что неограниченное подпространство не может быть компактным, поскольку из его покрытия семейством концентрических открытых шаров нельзя выделить конечного подпокрытия.

§ 50. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

В этом параграфе мы познакомимся с определением и свойствами двумерных топологических многообразий — пространств, в которых точки локально обладают двумя числовыми координатами. Являясь обобщением понятия поверхности в трехмерном евклидовом пространстве, понятие многообразия охватило целый ряд геометрических объектов, возникавших в классической механике, теории дифференциальных уравнений, аналитической геометрии. При изучении теории топологических многообразий мы ограничимся лишь формулировкой основных результатов, доказательства которых можно найти в книгах [17] и [19].

Понятие двумерного топологического многообразия

Двумерным многообразием называется отделимое топологическое пространство F , каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную либо плоскости \mathbb{R}^2 (*внутренняя точка*), либо замкнутой полуплоскости $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ (*краевая точка*). Можно доказать, что никакая точка многообразия не может быть одновременно внутренней и краевой. Множество краевых точек многообразия F замкнуто в F . Оно называется *краем* F и обозначается ∂F . При этом F носит названия *многообразия с краем*, если $\partial F \neq \emptyset$, и *многообразия без края* в противном случае. Можно доказать, что у компактного многообразия край, если он не пуст, состоит из конечного числа частей, каждая из которых гомеоморфна окружности.

Назовем *клеткой* любое многообразие с краем, гомеоморфное выпуклому многоугольнику. Предполагается, что для данной клетки этот гомеоморфизм фиксирован. Образ вершины многоугольника при этом гомеоморфизме называется *вершиной клетки*, а образ стороны многоугольника — ее *стороной*.

Говорят, что многообразие F *разложено на конечное количество клеток* F_1, \dots, F_n , если $F = \bigcup_{i=1}^n F_i$ и пересечение любых двух клеток F_i и F_j при $i \neq j$ либо пусто, либо является общей вершиной этих клеток, либо их общей стороной (*соседние клетки*). Можно доказать, что всякое компактное многообразие допускает клеточное разложение.

Пусть дано клеточное разложение K многообразия F .

Точка $x \in F$ называется *вершиной разложения K* , если она является вершиной хотя бы одной клетки из K . Подмножество $\gamma \subset F$ называется *стороной разложения K* , если оно является стороной хотя бы одной клетки из K . Обозначим α_0 число вершин, α_1 — число сторон, α_2 — число клеток разложения K . Число $\chi(F) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$ называется *эйлеровой характеристикой* многообразия F . Можно доказать, что оно не зависит от выбора клеточного разложения и является топологическим инвариантом многообразия.

Для каждой клетки разложения K зададим ориентацию, т. е. порядок обхода ее вершин. Две соседние клетки называются *одинаково ориентированными*, если их ориентации определяют на общей стороне противоположные направления. Многообразию F называется *ориентируемым*, если существует его клеточное разложение, в котором клетки можно ориентировать так, что любые две соседние клетки одинаково ориентированы. Можно доказать, что свойство быть ориентируемым не зависит от выбора клеточного разложения и является топологическим инвариантом многообразия.

Пример 1. Доказать, что граница любого тетраэдра ориентируема.

Решение. Клеточное разложение границы тетраэдра $ABCD$ образуют его грани ABC , DBA , DCB , DAC . Установим следующий порядок обхода вершин клеток: $A \rightarrow B \rightarrow C$, $D \rightarrow B \rightarrow A$, $D \rightarrow C \rightarrow B$, $D \rightarrow A \rightarrow C$. Этот порядок задает ориентацию, при которой соседние клетки одинаково ориентированы.

Пример 2. Доказать, что сфера ориентируема, найти ее эйлерову характеристику.

Решение. Сфера ориентируема, поскольку она гомеоморфна границе тетраэдра. Эйлерова характеристика сферы равна 2.

Операция склеивания

Пусть даны два многообразия F' и F'' , на краях $\partial F'$ и $\partial F''$ которых можно выделить гомеоморфные части L' и L'' . Пусть точки $X' \in L'$ и $X'' \in L''$ соответствуют друг другу при некотором гомеоморфизме $f: L' \rightarrow L''$, так что

$X'' = f(X')$. отождествим их, как бы «склеим» в одну точку X . Склеенные таким образом окрестности точек X' и X'' составят окрестность точки X . В итоге получим новое многообразие $F = F' \cup_f F''$, склеенное из F' и F'' посредством гомеоморфизма f .

Докажем, что если L' и L'' гомеоморфны окружности, то справедлива формула $\chi(F' \cup_f F'') = \chi(F') + \chi(F'')$. Рассмотрим такие клеточные разложения многообразий F' и F'' , чтобы на L' и L'' получались гомеоморфные разложения, состоящие из α вершин и такого же количества сторон клеточного разложения окружности. После склейки числа вершин, сторон и клеток будут равны $\alpha'_0 + \alpha''_0 - \alpha$, $\alpha'_1 + \alpha''_1 - \alpha$, $\alpha'_2 + \alpha''_2$ соответственно. Наша формула теперь следует из равенства

$$\begin{aligned} & (\alpha'_0 + \alpha''_0 - \alpha) - (\alpha'_1 + \alpha''_1 - \alpha) + (\alpha'_2 + \alpha''_2) = \\ & = (\alpha'_0 - \alpha'_1 + \alpha'_2) + (\alpha''_0 - \alpha''_1 + \alpha''_2). \end{aligned}$$

Отметим, что склеивать можно и отдельные части края одного и того же многообразия. При этом либо изменится граница многообразия, либо исходное многообразие трансформируется в многообразие без края.

Пример 3. Следующие многообразия можно получить, склеивая противоположные стороны прямоугольника (склеиваемые стороны обозначены одинаковыми буквами и стрелками в зависимости от направления склейки):

1) ручка

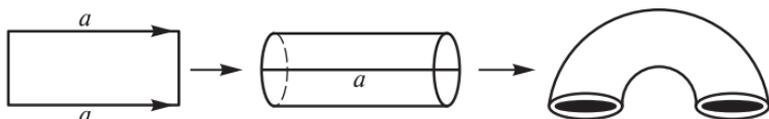


Рис. 231

2) лист Мебиуса

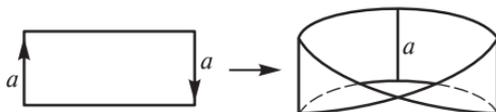


Рис. 232

3) тор

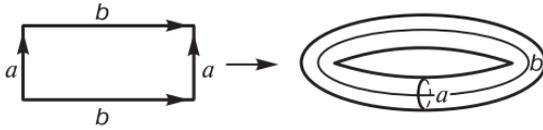


Рис. 233

4) бутылка Клейна

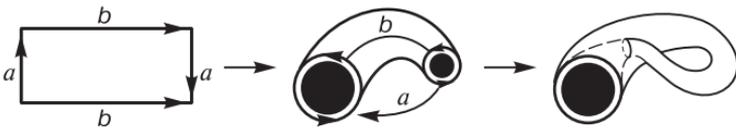


Рис. 234

5) проективная плоскость

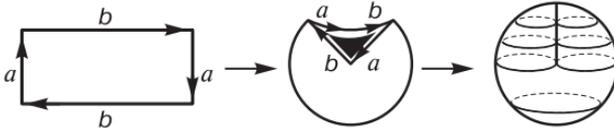


Рис. 235

Отметим, что край листа Мебиуса гомеоморфен окружности, а край ручки состоит из двух частей, гомеоморфных окружности.

Пример 4. Доказать, что лист Мебиуса не ориентируем, и найти его эйлерову характеристику.

Решение. На рисунке 236 приведено разложение листа Мебиуса на три клетки F_1 , F_2 , F_3 , где согласованные ориентации соседних клеток F_1 , F_2 и F_2 , F_3 определяют одинаковые, а не противоположные направления на общей стороне AB клеток F_1 , F_3 . Поэтому лист Мебиуса не ориентируем.

Для данного разложения $\alpha_0 = 3$, $\alpha_1 = 6$, $\alpha_2 = 3$, поэтому $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 0$. Таким образом, эйлерова характеристика листа Мебиуса равна 0.

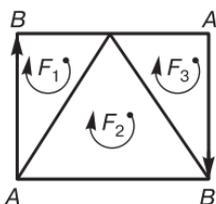


Рис. 236

Классификация двумерных многообразий

Для построения классификации двумерных многообразий введем определения.

Сферой с r дырами называется многообразие S_r , полученное удалением из сферы S внутренних точек непересекающихся дисков в количестве r штук.

Сферой с p ручками называется многообразие Φ_p , которое получено из сферы S_{2p} с $2p$ дырами при заклеивании каждой пары этих дыр ручкой.

Сферой с q листами Мебиуса называется многообразие Ψ_q , которое получается из сферы S_q с q дырами при заклеивании этих дыр листами Мебиуса.

Теорема. Любое связное, компактное двумерное многообразие без края гомеоморфно либо сфере Φ_p с p ручками, если оно ориентируемо, либо сфере Ψ_q с q листами Мебиуса в противном случае. При этом многообразия Φ_p и Ψ_q не гомеоморфны, если p и q не равны нулю одновременно; многообразия $\Phi_p(\Psi_q)$ при различных значениях $p(q)$ также не гомеоморфны.

Пример 5. Доказать, что $\chi(S_r) = 2 - r$, $\chi(\Phi_p) = 2(1 - p)$ и $\chi(\Psi_q) = 2 - q$.

Решение. Если на сферу S_r с r дырами приклеить обратно r дисков, эйлерова характеристика каждого из которых равна 1, то получим сферу S с эйлеровой характеристикой, равной 2. Таким образом, $\chi(S_r) + r = 2$, откуда $\chi(S_r) = 2 - r$. Учитывая, что эйлеровы характеристики ручки и листа Мебиуса равны 0, получим, что $\chi(\Phi_p) = 2(1 - p)$ и $\chi(\Psi_q) = 2 - q$.

Пример 6. Тор гомеоморфен сфере с ручкой.

Пример 7. Доказать, что проективная плоскость гомеоморфна сфере с одним листом Мебиуса и найти ее эйлерову характеристику.

Решение. Воспользуемся рис. 237.

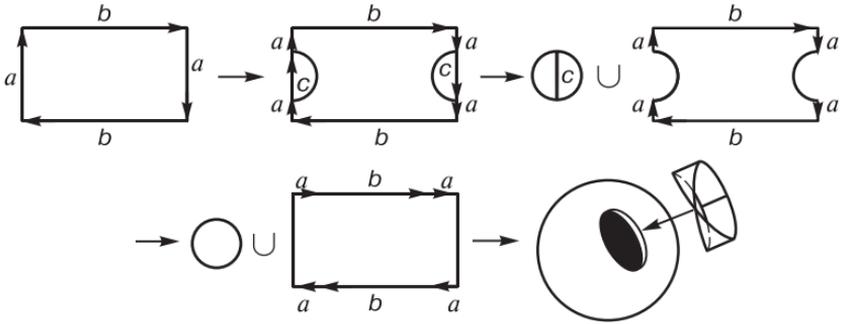


Рис. 237

Вырежем из прямоугольника два полудиска и склеим их по стрелке c . В результате получим диск, гомеоморфный сфере с одной дырой. Эту дыру надо заклеить листом Мебиуса, который образуется из оставшейся части прямоугольника в результате склейки стрелок a и b . По формуле из примера 5 теперь находим, что эйлерова характеристика проективной плоскости Ψ_1 равна 1.

Пример 8. Доказать, что бутылка Клейна гомеоморфна сфере с двумя листами Мебиуса и найти ее эйлерову характеристику.

Решение. Рассмотрим рис. 238.

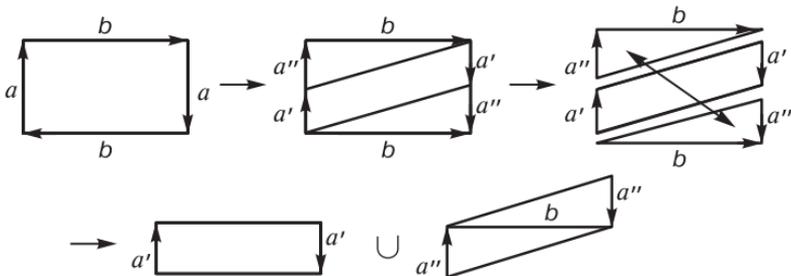


Рис. 238

Разрежем прямоугольник по двум параллельным прямым на три части. Средняя часть, а также крайние части, склеенные по стрелке b , дадут два листа Мебиуса. Осталось заметить, что склейка двух листов Мебиуса по их общему краю эквивалентна вклейке этих листов в сферу с двумя дырами. По формуле из примера 5 теперь находим, что эйлерова характеристика бутылки Клейна Ψ_2 равна 0.

Пример 9. Пусть дано многообразие, которое получается из сферы S_3 с тремя дырами при заклеивании одной из них листом Мебиуса, а оставшихся двух — ручкой. Доказать, что это многообразие гомеоморфно сфере Ψ_3 с тремя листами Мебиуса.

Решение. Если одну из подошв ручки переместить к листу Мебиуса, провести вдоль его оси, а затем вернуть в прежнее положение, то ручка займет новое положение, которое называется вывернутой ручкой и отличается от обычного способом приклейки подошв к сфере. Очевидно, что сфера с вывернутой ручкой гомеоморфна бутылке Клейна. Таким образом, заклеивание дыр в сфере листами Мебиуса и ручками одновременно не дает новых многообразий.

Классификация правильных многогранников

Интересные приложения эйлерова характеристика имеет в теории выпуклых многогранников. Можно доказать, что поверхность выпуклого многогранника гомеоморфна сфере и является двумерным многообразием, клеточное разложение которого образуют грани этого многогранника. Поэтому, если α_0 — число вершин, α_1 — число ребер, α_2 — число граней выпуклого многогранника, то $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2$. Это равенство называется *формулой Эйлера для выпуклого многогранника*.

Если все грани выпуклого многогранника содержат m ребер, а в каждой его вершине сходится n ребер, то говорят, что такой многогранник имеет тип $\{m, n\}$. Поскольку каждое ребро входит в две грани и соединяет две вершины, то $\alpha_0 n = \alpha_2 m = 2\alpha_1$. Подставляя значения для α_0, α_2 из этих равенств в формулу Эйлера, получим $\frac{2\alpha_1}{n} - \alpha_1 + \frac{2\alpha_1}{m} = 2$, откуда $\frac{1}{n} - \frac{1}{2} + \frac{1}{m} = \frac{1}{\alpha_1} > 0$. В итоге

приходим к следующему неравенству между натуральными числами m, n : $2m - mn + 2n > 0$ или $(m - 2)(n - 2) < 4$. Легко видеть, что последнее неравенство имеет всего пять решений $\{3, 3\}, \{4, 3\}, \{3, 4\}, \{5, 3\}, \{3, 5\}$, которым соответствуют пять типов многогранников, представленных в таблице.

m	n	α_0	α_1	α_2	Тип
3	3	4	6	4	тетраэдр
4	3	8	12	6	гексаэдр (куб)
3	4	6	12	8	октаэдр
5	3	20	30	12	додекаэдр
3	5	12	30	20	икосаэдр

В элементарной геометрии доказывается, что каждому из этих типов принадлежит единственный правильный многогранник, у которого равны все ребра, все плоские углы и все двугранные углы (рис. 239).

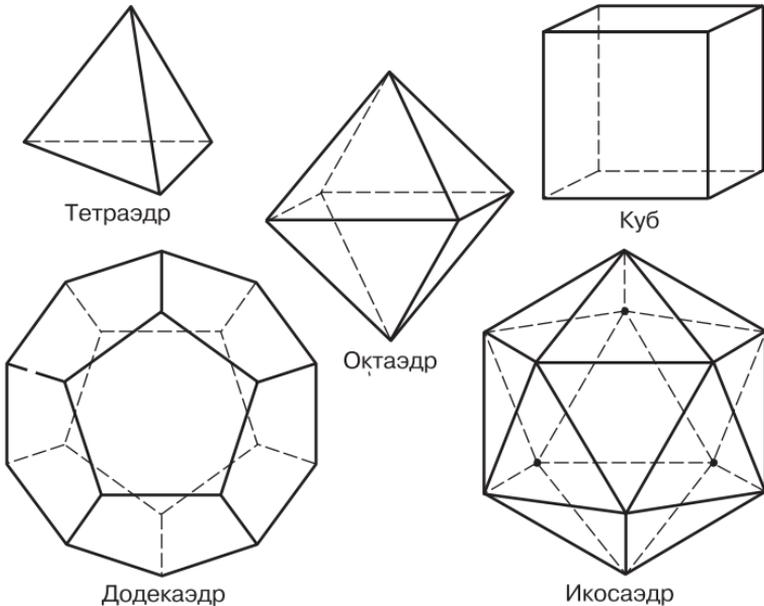


Рис. 239

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

§ 51. ВЕКТОРНАЯ ФУНКЦИЯ ОТ ОДНОЙ И ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Свойства векторной функции одной или двух переменных составляют удобный математический аппарат, позволяющий компактно проводить вычисления и наглядно исследовать геометрические свойства объектов в трехмерном пространстве. Мы сможем привлечь средства математического анализа и векторной алгебры для исследования свойств линий и поверхностей в пространстве.

Векторная функция одной переменной

Пусть даны трехмерное евклидово векторное пространство V и некоторый числовой промежуток I .

Определение 1. *Отображение $\vec{u}: I \rightarrow V$, которое каждой числу $t \in I$ ставит в соответствие определенный вектор $\vec{u}(t) \in V$, называется векторной функцией скалярного аргумента t .*

Как мы видим, понятие векторной функции практически не отличается от аналогичного понятия вещественной функции одной переменной. По аналогии вводится определение предела векторной функции одной переменной:

Определение 2. *Постоянный вектор $\vec{a} \in V$ называется пределом векторной функции $\vec{u}(t)$ в точке $t_0 \in I$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $|t - t_0| < \delta$ длина вектора $\vec{u}(t) - \vec{a}$ будет меньше ε : $|\vec{u}(t) - \vec{a}| < \varepsilon$.*

Если предел векторной функции $\vec{u}(t)$ в точке t_0 равен \vec{a} , то используется обозначение $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{u}(t) = \vec{a}$.

Теорема 1. *Если векторная функция $\vec{u}(t)$ имеет в точке t_0 предел \vec{a} , то длина вектора $\vec{u}(t)$ стремится к длине вектора \vec{a} при t , стремящемся к t_0 : $\lim_{t \rightarrow t_0} |\vec{u}(t)| = |\vec{a}|$.*

Доказательство. По свойству длины вектора выполняется неравенство $\| |\vec{u}(t)| - |\vec{a}| \| \leq |\vec{u}(t) - \vec{a}|$. Тогда при условии опреде-

ления 2 при $|t - t_0| < \delta$ выполнено неравенство $\|\vec{u}(t) - \vec{a}\| < \varepsilon$, откуда и следует результат теоремы 1.

Рассмотрим какой-нибудь ортонормированный базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ пространства V . Тогда координаты вектора $\vec{u}(t)$ будут представлять собой обычные скалярные функции аргумента t : $\vec{u}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$.

Теорема 2. Векторная функция $\vec{u}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ имеет в точке t_0 предел $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ тогда и только тогда, когда ее координаты $x(t), y(t), z(t)$ имеют в этой точке соответственно пределы a_1, a_2, a_3 .

Доказательство. Необходимость. Пусть векторная функция $\vec{u}(t)$ имеет в точке t_0 предел \vec{a} . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $|t - t_0| < \delta$ выполнено неравенство $|\vec{u}(t) - \vec{a}| < \varepsilon$. Как известно, в ортонормированном базисе

$$|\vec{u}(t) - \vec{a}| = \sqrt{(x(t) - a_1)^2 + (y(t) - a_2)^2 + (z(t) - a_3)^2}. \quad (1)$$

Так как при $|t - t_0| < \delta$ выполнено неравенство $|\vec{u}(t) - \vec{a}| < \varepsilon$, то из (1) следует, что $|x(t) - a_1| < \varepsilon, |y(t) - a_2| < \varepsilon, |z(t) - a_3| < \varepsilon$. Таким образом, $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = a_1, \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = a_2, \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = a_3$.

Достаточность. Пусть функции $x(t), y(t), z(t)$ имеют в точке t_0 пределы a_1, a_2, a_3 соответственно. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие числа $\delta_1, \delta_2, \delta_3 > 0$, что при $|t - t_0| < \delta_1, \delta_2, \delta_3$ будут соответственно выполнены неравенства

$$|x(t) - a_1| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}, \quad |y(t) - a_2| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}, \quad |z(t) - a_3| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}. \quad (2)$$

Если $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, то при $|t - t_0| < \delta$ выполняются все три неравенства (2). Из равенства (1) следует, что $|\vec{u}(t) - \vec{a}| < \varepsilon$. Поэтому $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{u}(t) = \vec{a}$. Теорема доказана.

Определение 3. Векторная функция $\vec{u}(t)$ называется непрерывной в точке $t_0 \in I$, если $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{u}(t) = \vec{u}(t_0)$.

Векторная функция $\vec{u}(t)$ называется непрерывной в промежутке I , если она непрерывна в каждой точке этого промежутка. Из теоремы 2 следует

Теорема 3. Векторная функция $\vec{u}(t)$ непрерывна в промежутке I тогда и только тогда, когда ее координаты непрерывны в этом же промежутке.

Рассмотрим точку $t \in I$, зададим приращение Δt , $t + \Delta t \in I$, и обозначим $\Delta \vec{u} = \vec{u}(t + \Delta t) - \vec{u}(t)$.

Определение 4. Векторная функция $\vec{u}(t)$ называется дифференцируемой в точке t , если существует предел $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t}$, который называется производной функции $\vec{u}(t)$ в точке t .

Производная функции $\vec{u}(t)$ в точке t обозначается через $\vec{u}'(t)$ или $\frac{d\vec{u}}{dt}$. Вектор $d\vec{u} = \vec{u}' dt$ называется дифференциалом функции $\vec{u}(t)$ в точке t . Функция $\vec{u}(t)$ носит название дифференцируемой в промежутке I , если она дифференцируема в каждой точке этого промежутка.

Теорема 4. Векторная функция $\vec{u}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ дифференцируема в промежутке I тогда и только тогда, когда ее координаты дифференцируемы в этом промежутке, причем

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}. \quad (3)$$

Доказательство. Положим $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$, $\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$, $\Delta z = z(t + \Delta t) - z(t)$. Тогда $\Delta \vec{u} = \vec{u}(t + \Delta t) - \vec{u}(t) = (x(t + \Delta t) - x(t))\vec{i} + (y(t + \Delta t) - y(t))\vec{j} + (z(t + \Delta t) - z(t))\vec{k} = \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j} + \Delta z \vec{k}$. Отсюда следует, что $\frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \vec{k}$. В силу теоремы 2, предел $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} = \frac{d\vec{u}}{dt}$ существует тогда и только тогда, когда существуют пределы $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$, $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt}$, $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz}{dt}$ и имеет место равенство (3). Теорема доказана.

Для значений векторных функций в точках вводятся такие же алгебраические операции, как и для обычных векторов, а именно: сложение, вычитание, умножение на числовую функцию, а также скалярное, векторное и смешанное произведения. В связи с задачей вычисления производной отметим, что справедлива следующая теорема.

Теорема 5. Для любых векторных функций $\vec{u}(t)$, $\vec{v}(t)$ и числовой функции $f(t)$, дифференцируемых в промежутке

ке I , выполняются следующие правила дифференцирования:

$$1) \frac{d}{dt} (\vec{u} + \vec{v}) = \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt};$$

$$2) \frac{d}{dt} (\vec{u} \cdot \vec{v}) = \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt};$$

$$3) \frac{d}{dt} [\vec{u}, \vec{v}] = \left[\frac{d\vec{u}}{dt}, \vec{v} \right] + \left[\vec{u}, \frac{d\vec{v}}{dt} \right];$$

$$4) \frac{d}{dt} (f\vec{u}) = \frac{df}{dt} \vec{u} + f \frac{d\vec{u}}{dt}.$$

Доказательство. В качестве примера докажем свойство 2). Рассмотрим точку $t \in I$ и зададим приращение Δt , $t + \Delta t \in I$. Обозначим $\vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{v}$. Тогда $\vec{w} + \Delta \vec{w} = (\vec{u} + \Delta \vec{u}) \cdot (\vec{v} + \Delta \vec{v})$, откуда по свойству дистрибутивности скалярного умножения $\Delta \vec{w} = \Delta \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \Delta \vec{v} + \Delta \vec{u} \cdot \Delta \vec{v}$ и

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{w}}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{w}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} \cdot \vec{v} \right) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\vec{u} \cdot \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \right) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} \cdot \Delta \vec{v} \right) = \\ &= \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}. \end{aligned}$$

Аналогично доказываются остальные свойства. Теорема доказана.

В дальнейшем нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. Если векторная функция $\vec{u}(t)$ дифференцируема в промежутке I и $|\vec{u}(t)| = \text{const}$ в каждой точке $t \in I$, то вектор $\vec{u}(t)$ в некоторой точке промежутка I ортогонален производной $\frac{d\vec{u}}{dt}$, найденной в этой же точке.

Доказательство. Обозначим константу, заданную в условии леммы, через c . По условию леммы, в промежутке I справедливо тождество $\vec{u}^2 = c^2$. Дифференцируя это тождество, используя свойство 2), находим $\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = 0$, откуда и следует, что векторы \vec{u} и $\frac{d\vec{u}}{dt}$ ортогональны в каждой точке промежутка I . Лемма доказана.

Векторная функция двух переменных

Введем понятие векторной функции двух переменных. Пусть даны трехмерное евклидово векторное пространство V и непустое открытое связное множество $G \subset \mathbb{R}^2$, которое мы также будем называть плоской областью.

Определение 5. *Отображение $\vec{r}: G \rightarrow V$, которое каждой паре чисел $(u, v) \in G$ ставит в соответствие определенный вектор $\vec{r}(u, v) \in V$, называется векторной функцией двух скалярных аргументов (u, v) .*

Если фиксирован ортонормированный базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ пространства V , то координаты вектора $\vec{r}(u, v)$ будут обычными скалярными функциями двух аргументов (u, v) : $\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$.

Определения и свойства пределов, непрерывности, алгебраических операций над векторными функциями двух переменных дословно повторяют доказанные выше свойства векторных функций одной переменной. Некоторые изменения касаются дифференцирования:

Определение 6. *Для фиксированного $v = v_0$ рассмотрим числовой промежуток $I = \{u : (u, v_0) \in G\}$. Если в некоторой точке $u_0 \in I$ векторная функция $\vec{r}(u, v_0)$ одного аргумента u имеет производную $\frac{d\vec{r}(u, v_0)}{du}$, то она называется частной производной векторной функции $\vec{r}(u, v)$ по переменной u в точке (u_0, v_0) и обозначается $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ или \vec{r}_u . Аналогично определяется частная производная $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \vec{r}_v$.*

Из теоремы 4 следует, что частные производные \vec{r}_u и \vec{r}_v существуют в точке $(u, v) \in G$ тогда и только тогда, когда в этой точке существуют частные производные

$$\begin{aligned} x_u &= \frac{\partial x(u, v)}{\partial u}, & y_u &= \frac{\partial y(u, v)}{\partial u}, & z_u &= \frac{\partial z(u, v)}{\partial u}, \\ x_v &= \frac{\partial x(u, v)}{\partial v}, & y_v &= \frac{\partial y(u, v)}{\partial v}, & z_v &= \frac{\partial z(u, v)}{\partial v}, \end{aligned}$$

причем $\vec{r}_u = x_u\vec{i} + y_u\vec{j} + z_u\vec{k}$ и $\vec{r}_v = x_v\vec{i} + y_v\vec{j} + z_v\vec{k}$.

Определение 7. *Векторная функция $\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$ называется дифференцируемой в точке $(u, v) \in G$, если ее координаты дифференцируемы в этой точке.*

Вектор $d\vec{r}(u, v) = dx(u, v)\vec{i} + dy(u, v)\vec{j} + dz(u, v)\vec{k}$ называется дифференциалом векторной функции $\vec{r}(u, v)$ в точке (u, v) . Ясно, что $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$. Векторная функция $\vec{r}(u, v)$ называется дифференцируемой в области G , если она дифференцируема в каждой точке этой области.

§ 52. ГЛАДКИЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ. ПОНЯТИЯ ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ

В настоящем параграфе мы введем определения линий и поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве. Указанные фигуры охватываются единым понятием гладкого подмногообразия.

Гладкие подмногообразия в евклидовом пространстве

Пусть в пространстве \mathbb{R}^n , $m \in \mathbb{N}$, дана область G , т. е. непустое открытое связное множество. Всякое отображение $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, можно представить как упорядоченный набор из n функций:

$$f(t_1, \dots, t_m) = (x_1(t_1, \dots, t_m), \dots, x_n(t_1, \dots, t_m)). \quad (1)$$

Определение 1. *Отображение f называется гладким класса C^r или C^r -отображением, $r \in \mathbb{N}$, если на G каждая функция x_k , $k = 1, \dots, n$, имеет все непрерывные частные производные $\frac{\partial^s x_k}{\partial^{s_1} t_1 \dots \partial^{s_m} t_m}$, где $s_1 + \dots + s_m = s$, до порядка $s = r$ включительно.*

Для таких функций используют обозначение $f \in C^r$. Если каждая функция x_k , $k = 1, \dots, n$, имеет непрерывные частные производные любого порядка, то отображение f называется *бесконечно гладким*, при этом используют обозначение $f \in C^\infty$.

Определение 2. *Матрица $\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial t_m} \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_m} \end{pmatrix}$ первых*

производных отображения f , вычисленных в точке $t \in G$, называется матрицей Якоби отображения f в точке t и обозначается $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_t$.

Ранг этой матрицы называется *рангом отображения f в точке t* и обозначается $\text{rank}_t f$.

Пусть при $n \geq m$ даны множество $M \subset \mathbb{R}^n$, точка $x_0 \in M$ и ее окрестность $O(x_0) \subset M$.

Определение 3. *Если $f: G \rightarrow O(x_0)$ — такой гомеоморфизм, что $f \in C^r$ как отображение из G в \mathbb{R}^n и $\text{rank}_t f = m$ для любой точки $t \in G$, то пара $(O(x_0), f)$*

называется картой класса C^r или коротко C^r -картой точки x_0 в M .

Набор компонент точки $t = f^{-1}(x)$ называется криволинейными координатами точки $x \in O(x_0)$. Если $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $t = (t_1, \dots, t_m)$, а гомеоморфизм f задан равенством (1), то

$$x_1 = x_1(t_1, \dots, t_m), \quad \dots, \quad x_n = x_n(t_1, \dots, t_m). \quad (2)$$

Эти уравнения однозначно определяют окрестность $O(x_0)$ в \mathbb{R}^n .

Определение 4. Множество M называется n -мерным подмногообразием класса C^r или коротко C^r -подмногообразием в \mathbb{R}^n , если каждая точка этого множества имеет некоторую C^r -карту.

Семейство всех таких карт называется атласом подмногообразия M . Поскольку одна и та же точка C^r -подмногообразия M может принадлежать нескольким C^r -картам из одного или различных атласов, она приобретает несколько наборов криволинейных координат. Пусть в M даны две C^r -карты (O_1, f_1) и (O_2, f_2) , такие что $O = O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$.

Определение 5. Гомеоморфизм $f = f_2^{-1} \circ f_1: f_1^{-1}(O) \rightarrow f_2^{-1}(O)$ называется функцией замены криволинейных координат.

Легко доказать, что $f \in C^r$ как отображение из $f_1^{-1}(O)$ в $f_2^{-1}(O)$ и $\text{rank}_t f = m$ для любой точки $t \in f_1^{-1}(O)$.

Пример 1. Доказать, что сфера является двумерным C^∞ -подмногообразием в \mathbb{R}^3 .

Решение. Пусть в пространстве \mathbb{R}^3 дана сфера S с центром в точке $(0, 0, 0)$ единичного радиуса. Тогда точки $(0, 0, 1)$ и $(0, 0, -1)$ являются соответственно ее северным и южным полюсами. Докажем, что множества $O_1 = S \setminus \{(0, 0, 1)\}$ и $O_2 = S \setminus \{(0, 0, -1)\}$ служат двумя C^∞ -картами, составляющими, как нетрудно видеть, атлас данной сферы. Рассмотрим произвольную точку $x = (x_1, x_2, x_3)$ на сфере S и точку $t = (t_1, t_2)$ на плоскости \mathbb{R}^2 . Пусть $x \in O_1$. Если прямая, проходящая через точки $(0, 0, 1)$ и $(t_1, t_2, 0)$, содержит точку x , то говорят, что точка t является стереографической проекцией точки x из северного полюса сферы. Аналитически это означает, что для некоторого $u \in \mathbb{R}$ выполняются равенства $x_1 = t_1 u$, $x_2 = t_2 u$, $x_3 = 1 - u$. Отсюда

следует, что компоненты точки x и ее стереографической проекции — точки t — связаны равенствами

$$t_1 = \frac{x_1}{1 - x_3}; \quad t_2 = \frac{x_2}{1 - x_3}. \quad (3)$$

Пусть теперь $x \in O_2$. Если прямая, проходящая через точки $(0, 0, -1)$ и $(t_1, t_2, 0)$, содержит точку x , то говорят, что точка t является стереографической проекцией точки x из южного полюса сферы. Самостоятельно докажите, что в этом случае компоненты точки x и ее стереографической проекции точки t связаны равенствами:

$$t_1 = \frac{x_1}{1 + x_3}; \quad t_2 = \frac{x_2}{1 + x_3}. \quad (4)$$

Соотношения (3) и (4) устанавливают гомеоморфные отображения $f_1(x) = \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}\right)$ и $f_2(x) = \left(\frac{x_1}{1 + x_3}, \frac{x_2}{1 + x_3}\right)$ соответственно множеств O_1 и O_2 на плоскость \mathbb{R}^2 (рис. 240).

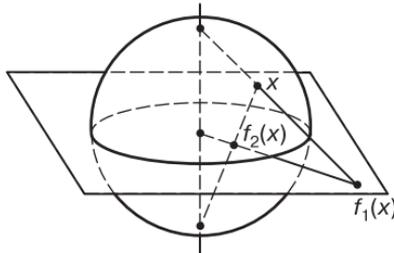


Рис. 240

В свою очередь отображения f_1^{-1} и f_2^{-1} являются гомеоморфизмами из \mathbb{R}^2 на O_1 и O_2 соответственно. Легко доказать, что $f_1^{-1}, f_2^{-1} \in C^\infty$ и $\text{rank}_t f_1^{-1} = \text{rank}_t f_2^{-1} = 2$ для любой точки $t \in \mathbb{R}^2$. Таким образом, сфера S имеет атлас, состоящий из двух C^∞ -карт $(O_1, f_1^{-1}), (O_2, f_2^{-1})$ и является двумерным C^∞ -подмногообразием в \mathbb{R}^3 .

Удобный способ аналитического задания и построения подмногообразий дает следующая теорема.

Теорема 1. Пусть дана система уравнений вида

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad \dots, \quad f_m(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad (5)$$

где $n > m$ и каждая функция $f_k, k = 1, \dots, m$, является C^r -отображением из \mathbb{R}^n в \mathbb{R} . Тогда определено

C^r -отображение $f: R^n \rightarrow R^m$ по закону $f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$. Если M — множество всех решений данной системы, $M \neq \emptyset$ и для всякой точки $x \in M$ выполнено условие $\text{rank}_x f = m$, то M является $(n - m)$ -мерным C^r -подмногообразием в R^n .

Пример 2. Доказать, что сфера в R^3 удовлетворяет условиям этой теоремы.

Решение. Сфера S из примера 1 имеет уравнение $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$. Если $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$, то $f \in C^\infty$ и для всякой точки $x \in S$ имеем $\text{rank}_x f = 1$. Таким образом, мы еще раз доказали, что сфера S является двумерным C^∞ -подмногообразием в R^3 .

Пример 3. Показать, что существуют многообразия, для которых условия сформулированной выше теоремы не выполняются.

Решение. В пространстве R^3 рассмотрим коническую поверхность M , заданную уравнением $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$. Как и в предыдущем случае, можно доказать, что множество $M \setminus \{(0, 0, 0)\}$ является двумерным C^∞ -подмногообразием в R^3 . Для этого достаточно рассмотреть отображение $f: R^3 \rightarrow R^1$, определенное по правилу $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$. Матрица Якоби отображения f имеет вид $(2x_1 - 2x_2 - 2x_3)$. Во всех точках множества $M \setminus \{(0, 0, 0)\}$ ранг этой матрицы максимален и равен 1, а в точке $(0, 0, 0)$ ее ранг равен нулю. В таком случае говорят, что многообразие имеет особую точку.

Понятие линии

Определим понятие линии. Во всех дальнейших рассуждениях этого и последующих параграфов будем предполагать, что в трехмерном евклидовом пространстве E_3 задана прямоугольная декартова система координат $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$. Приведенное ниже определение линии формализует представления об этой фигуре, сформированные в курсах математического анализа и аналитической геометрии:

Определение 6. Фигура $\gamma \subset E_3$ называется гладкой линией класса C^r или коротко C^r -линией, если множество γ_0 всех упорядоченных троек координат точек этой фигуры является одномерным C^r -подмногообразием в R^3 .

В соответствии с теоремой, аналитически C^r -линия может быть задана системой двух уравнений с тремя неизвестными x, y, z вида (5).

Пример 4. *Окружность радиуса a с центром в точке O на плоскости Oxy задается системой уравнений вида $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$ и является C^∞ -линией.*

В дальнейшем нас будут интересовать только локальные свойства гладких линий, поэтому мы будем считать, что атлас соответствующего подмногообразия состоит из одной карты. В таком случае C^r -линия γ задается параметрическими уравнениями вида (2):

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad (6)$$

где параметр t изменяется в некотором открытом числовом интервале I , а гомеоморфизм $f: I \rightarrow \gamma_0$ по закону $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$ является C^r -отображением, в частности

$$\text{rank}_t f = 1 \quad (7)$$

в каждой точке $t \in I$. Условие (7) означает, что во всех точках промежутка I производные $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ не равны нулю одновременно.

Пример 5. *При фиксированных положительных числах a и b параметрические уравнения $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$, где $t \in \mathbb{R}$, задают C^∞ -линию, которая называется обыкновенной винтовой линией. Из первых двух ее уравнений находим, что $x^2 + y^2 = a^2$, следовательно, винтовая линия лежит на прямом круговом цилиндре с осью Oz (рис. 241).*

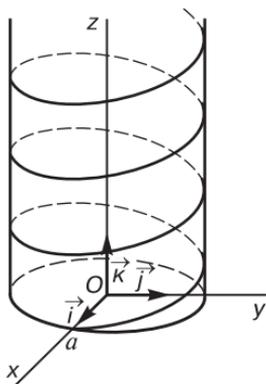


Рис. 241

Для дальнейшего изучения свойств гладких линий удобно считать, что они заданы не системой (6), а соответствующей ей векторной функцией. Умножив уравнения (6) соответственно на \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} и сложив, получим векторную функцию $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ скалярного аргумента t , определенную на интервале I . Таким образом, уравнения (6) равносильны одному векторному уравнению

$$\vec{r}' = \vec{r}(t), \quad (8)$$

которое служит уравнением той же линии γ в так называемой векторной форме. Поскольку $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$,

условие (7) означает, что $\frac{d\vec{r}}{dt} \neq \vec{0}$ в каждой точке $t \in I$.

Для любой точки $M \in \gamma$ найдется такое число $t \in I$, что $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t)$. В этом случае говорят, что точка M соответствует параметру t . Если рассматривать уравнение (8) на отрезке $[a, b] \subset I$, то оно определяет фигуру $\gamma_0 \subset \gamma$, которая называется *дугой линии* γ с концами в точках, соответствующих параметрам a и b . Так как линия определяется C^r -отображением, где $r \geq 3$, то векторная функция $\vec{r}(t)$, стоящая в правой части уравнения (8), имеет непрерывные производные до третьего порядка включительно.

Дифференциальная геометрия изучает такие свойства линий, которые не зависят от выбора параметра. Как было показано выше, гомеоморфизм $s: I \rightarrow J$ интервала I на некоторый интервал J по закону $s = s(t)$ осуществляет замену параметра, если $s \in C^r$ и $\frac{ds}{dt} \neq 0$ в каждой точке $t \in I$.

Легко показать, что одна и та же гладкая линия может иметь различные параметрические уравнения. Например, окружность единичного радиуса с центром в точке O на плоскости Oxy без точки с координатами $(-1, 0, 0)$ имеет параметрические уравнения $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 0$, где $-\pi < t < \pi$. Легко доказать, что гомеоморфизм $s: (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ по закону $s = \operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right)$ осуществляет замену параметра. Поскольку

$$\cos t = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}, \quad \sin t = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}},$$

в новой параметризации окружность имеет уравнения

$$x = \frac{1-s^2}{1+s^2}, \quad y = \frac{2s}{1+s^2}, \quad z = 0, \quad \text{где } s \in \mathbb{R}.$$

Понятие поверхности

Рассмотрим понятие поверхности, одного из основных геометрических объектов пространства. Оно формируется в результате глубокой абстракции наших первоначальных представлений о поверхностях как границах тел.

Определение 7. *Фигура $F \subset E_3$ называется гладкой поверхностью класса C^r или C^r -поверхностью, если множество F_0 всех упорядоченных троек координат точек этой фигуры является двумерным C^r -подмногообразием в \mathbb{R}^3 .*

Аналитически C^r -поверхность может быть задана одним уравнением с тремя неизвестными x, y, z вида (5). Примером такой поверхности является сфера. В дальнейшем нас будут интересовать только локальные свойства гладких поверхностей, поэтому мы будем считать, что атлас соответствующего подмногообразия состоит из одной карты. В таком случае C^r -поверхность F задается параметрическими уравнениями вида (2):

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (9)$$

где пара параметров (u, v) изменяется в некоторой области G , а гомеоморфизм $f: G \rightarrow F$ по закону $f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ является C^r -отображением, в частности

$$\text{rank} \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = 2 \quad (10)$$

в каждой точке $(u, v) \in G$.

Пример 6. *Доказать, что параметрические уравнения $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = av$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, задают C^∞ -поверхность. Она называется прямым геликоидом.*

Решение. Ясно, что функции x, y, z по каждой переменной имеют непрерывные частные производные любого порядка. Кроме того, для данной поверхности матрица $\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$ принимает вид $\begin{pmatrix} \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & a \end{pmatrix}$, поэтому

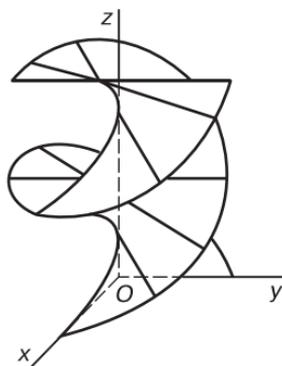


Рис. 242

условие (10) выполняется во всех точках $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Таким образом, прямой геликоид является C^∞ -поверхностью (рис. 242).

Умножив уравнения (9) соответственно на \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} и сложив, получим

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v), \quad (11)$$

где $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ и $\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$. Здесь $\vec{r}(u, v)$ — векторная функция двух скалярных аргументов (u, v) , заданная в области G . Таким образом, уравнения (9) равносильны одному векторному уравнению (11), которое является уравнением той же поверхности F в векторной форме. Так как поверхность определяется C^r -отображением, где $r \geq 3$, то векторная функция $\vec{r}(u, v)$, стоящая в правой части уравнения (11), имеет непрерывные производные до третьего порядка включительно. Геометрический смысл условия (10) заключается в том, что векторы \vec{r}_u и \vec{r}_v не коллинеарны ни в одной точке из G . Для каждой точки $M \in F$ найдется такая пара чисел $(u, v) \in G$, что $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(u, v)$. В этом случае говорят, что точка M имеет криволинейные координаты (u, v) .

Дифференциальная геометрия изучает такие свойства поверхностей, которые не зависят от выбора параметров. Пусть гомеоморфизм $h: G \rightarrow G'$ области G на некоторую область G' каждой точке $(u, v) \in G$ ставит в соответствие точку $(\alpha, \beta) \in G'$ по закону $\alpha = \alpha(u, v)$, $\beta = \beta(u, v)$. Мы видели,

что гомеоморфизм h осуществляет замену параметров, если $h \in C^r$ и $\text{rank} \begin{pmatrix} \alpha_u & \alpha_v \\ \beta_u & \beta_v \end{pmatrix} = 2$ в каждой точке $(u, v) \in G$.

§ 53. КАСАТЕЛЬНАЯ И ДЛИНА ДУГИ ГЛАДКОЙ ЛИНИИ. КРИВИЗНА И КРУЧЕНИЕ, НАТУРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛИНИИ

В этом параграфе мы изучим некоторые свойства C^r -линии γ , $r \geq 3$, заданной в пространстве E_3 своим векторным уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in I$. Векторная функция $\vec{r}(t)$, как было отмечено в предыдущем параграфе, имеет непрерывные производные до третьего порядка включительно и $\frac{d\vec{r}}{dt} \neq \vec{0}$ во всех точках интервала I .

Касательная к гладкой линии

Фиксируем точку $t \in I$ и зададим приращение Δt , $t + \Delta t \in I$. Если точки M и M_1 соответствуют параметрам t и $t + \Delta t$, то $\overrightarrow{MM_1} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = \Delta\vec{r}$. Вектор $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ коллинеарен секущей MM_1 , а вектор $\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ коллинеарен предельному положению секущей MM_1 , когда M_1 стремится к M . Таким образом, $\frac{d\vec{r}}{dt}$ является направляющим вектором касательной к линии γ в точке M (рис. 243).

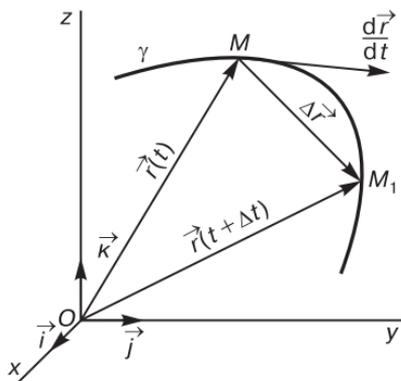


Рис. 243

Если взять другую параметризацию $s = s(t)$, то по правилу дифференцирования сложной функции $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$, тогда векторы $\frac{d\vec{r}}{dt}$ и $\frac{d\vec{r}}{ds}$ коллинеарны, поэтому $\frac{d\vec{r}}{ds}$ является направляющим вектором той же касательной. Мы доказали теорему.

Теорема 1. В каждой точке M линии γ , заданной векторным уравнением, существует касательная прямая, которая определяется точкой M и вектором $\frac{d\vec{r}}{dt}$.

Пример 1. Доказать, что обыкновенная винтовая линия (§ 52) пересекает под одним и тем же углом образующие цилиндра, на котором она лежит.

Решение. Обыкновенная винтовая линия имеет векторное уравнение $\vec{r}(t) = a \cos t \vec{i} + a \sin t \vec{j} + bt \vec{k}$, $t \in \mathbb{R}$. Образующие содержащего ее цилиндра параллельны оси Oz , а значит, и вектору \vec{k} . Как известно, под углом между линиями понимается угол между касательными в точке их пересечения. Находим, что $\vec{r}'(t) = -a \sin t \vec{i} + a \cos t \vec{j} + b \vec{k}$, $|\vec{r}'(t)| = \sqrt{a^2 + b^2}$ и

$$\cos \angle(\vec{r}'(t), \vec{k}) = \frac{\vec{r}'(t) \cdot \vec{k}}{|\vec{r}'(t)| \cdot |\vec{k}|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \text{const},$$

следовательно, угол между образующей цилиндра и касательной к обыкновенной винтовой линии в любой ее точке является постоянным.

Длина дуги

Пусть гомеоморфизм $s: I \rightarrow J$ интервала I на некоторый интервал J по закону $s = s(t)$ осуществляет замену параметра.

Определение 1. Параметр s называется естественным, если длина вектора $\frac{d\vec{r}}{ds}$ равна единице в каждой точке интервала J .

Докажем существование такого параметра. Так как при замене параметра $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$, равенство $\left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = 1$ выполняется тогда и только тогда, когда $\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \left| \frac{ds}{dt} \right|$ или $\frac{ds}{dt} = \pm \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|$,

т. е. $s(t) = \pm \int \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt$. При фиксированном $t_0 \in I$ положим

$s(t) = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt$, так что $s(t_0) = 0$ и $\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| > 0$. Поскольку

γ является C^r -линией, имеем $s \in C^r$. Наконец, функция $s = s(t)$ монотонно возрастает, поэтому существует обратная функция $t = t(s)$, при этом $\frac{dt}{ds} = \left(\frac{ds}{dt} \right)^{-1} > 0$, а значит, $t \in C^r$.

Таким образом, s — искомый естественный параметр.

Покажем, что для каждого $t \in I$, $t \geq t_0$, значение $s(t)$ равно длине $\rho(t)$ дуги линии γ с концами в точках, соответствующих параметрам t_0 и t . Если задать приращение Δt , $t + \Delta t \in I$, то числа $|\Delta \vec{r}| = |\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)|$ и $\Delta \rho = \rho(t + \Delta t) - \rho(t)$ являются длинами хорды и дуги линии γ с концами в точках, соответствующих параметрам t и $t + \Delta t$. Ясно, что

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \rho}{|\Delta \vec{r}|} = 1 \quad \text{или} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho(t + \Delta t) - \rho(t)}{|\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)|} = 1,$$

откуда

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho(t + \Delta t) - \rho(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)|}{\Delta t} \quad \text{или} \quad \frac{d\rho}{dt} = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \frac{ds}{dt}.$$

Отсюда получим, что $\rho(t) = s(t) + C$, а поскольку выполнено условие $\rho(t_0) = s(t_0) = 0$, имеем $C = 0$ и окончательно

$$\rho(t) = s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2} dt.$$

Доказано следующее утверждение.

Теорема 2. Для каждой гладкой линии существует единственный естественный параметр, который равен по абсолютной величине длине дуги этой линии, отсчитываемой от некоторой точки.

Если линия задана векторным уравнением $\vec{r} = \vec{r}(s)$, где параметр $s \in J$ естественный, то говорят, что линия задана в своей естественной или натуральной параметризации.

Пример 2. Записать уравнение обыкновенной винтовой линии в естественной параметризации.

Решение. Рассмотрим обыкновенную винтовую линию, заданную векторным уравнением $\vec{r}(t) = a \cos t \vec{i} + a \sin t \vec{j} + bt \vec{k}$,

$t \in \mathbb{R}$. Находим, что

$$s(t) = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt = \int_{t_0}^t \sqrt{a^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2}(t - t_0),$$

следовательно, при $t_0 = 0$ получим $t = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Таким образом, естественная параметризация винтовой линии имеет вид

$$\vec{r}(s) = a \cos \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \vec{i} + a \sin \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) t \vec{j} + \left(\frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \vec{k}.$$

Кривизна и кручение

Мы покажем, что всякая линия с точностью до положения в пространстве характеризуется в каждой своей точке двумя величинами, так называемыми кривизной и кручением. Пусть C^r -линия γ задана в естественной параметризации уравнением $\vec{r} = \vec{r}(s)$, $s \in J$. Мы видели, что вектор $\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}$ является единичным вектором касательной к линии γ в точке M , соответствующей параметру s . Вектор $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \vec{N}$ называется *вектором кривизны*, а его длина $|\vec{N}| = k$ — *кривизной* линии γ в точке M . Если $k \neq 0$, то число $\rho = \frac{1}{k}$ называется *радиусом кривизны* линии γ в точке M . В дальнейшем мы будем предполагать, что в каждой точке линии γ кривизна отлична от нуля. Вектор $\frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \vec{\nu}$ называется *единичным вектором главной нормали*, а прямая $(M, \vec{\nu})$ — *главной нормалью* линии γ в точке M . Так как $|\vec{N}| = k$, то

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{\nu}. \quad (1)$$

В силу леммы из § 51, имеем $\vec{\tau} \perp \vec{\nu}$, следовательно, главная нормаль $(M, \vec{\nu})$ перпендикулярна касательной $(M, \vec{\tau})$. Вектор

$$\vec{\beta} = [\vec{\tau}, \vec{\nu}] \quad (2)$$

называется *единичным вектором бинормали*, а прямая $(M, \vec{\beta})$ — *бинормалью* линии γ в точке M . Таким образом, с каждой точкой M линии γ можно связать ортонормированный репер $R_M = \{M, \vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}\}$, который называется

каноническим или подвижным репером линии γ в точке M (рис. 244).

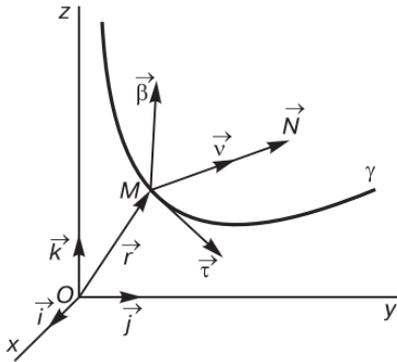


Рис. 244

Координатные плоскости этого репера носят следующие названия: $(M, \vec{\tau}, \vec{\nu})$ — *соприкасающаяся плоскость*; $(M, \vec{\nu}, \vec{\beta})$ — *нормальная плоскость*; $(M, \vec{\tau}, \vec{\beta})$ — *спрямляющая плоскость*.

Поскольку $|\vec{\nu}| = 1$, вектор $\frac{d\vec{\nu}}{ds}$ перпендикулярен $\vec{\nu}$ и параллелен спрямляющей плоскости, его можно разложить по векторам $\vec{\tau}$ и $\vec{\beta}$:

$$\frac{d\vec{\nu}}{ds} = \alpha\vec{\tau} + \kappa\vec{\beta}. \tag{3}$$

Продифференцируем тождество $\vec{\tau} \cdot \vec{\nu} = 0$ по параметру s , используя формулы (1) и (3). Получим

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \vec{\nu} + \vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{\nu}}{ds} = (k\vec{\nu})\vec{\nu} + \vec{\tau}(\alpha\vec{\tau} + \kappa\vec{\beta}) = \\ &= k\vec{\nu}^2 + \alpha\vec{\tau}^2 + \kappa(\vec{\tau} \cdot \vec{\beta}) = k + \alpha, \end{aligned}$$

откуда $\alpha = -k$ и формула (3) принимает вид

$$\frac{d\vec{\nu}}{ds} = -k\vec{\tau} + \kappa\vec{\beta}. \tag{4}$$

Продифференцируем тождество (2) по параметру s , используя формулы (1) и (4). Получим

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\beta}}{ds} &= \left[\frac{d\vec{\tau}}{ds}, \vec{\nu} \right] + \left[\vec{\tau}, \frac{d\vec{\nu}}{ds} \right] = [k\vec{\nu}, \vec{\nu}] + [\vec{\tau}, -k\vec{\tau} + \kappa\vec{\beta}] = \\ &= k[\vec{\nu}, \vec{\nu}] - k[\vec{\tau}, \vec{\tau}] + \kappa[\vec{\tau}, \vec{\beta}] = -\kappa\vec{\nu}. \end{aligned}$$

Число κ называется *кручением* линии γ в точке M . Таким образом

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}, \quad \frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{\nu}, \quad \frac{d\vec{\nu}}{ds} = -k\vec{\tau} + \kappa\vec{\beta}, \quad \frac{d\vec{\beta}}{ds} = -\kappa\vec{\nu}. \quad (5)$$

Мы получили так называемые *формулы Френе*, которые являются основными в теории гладких линий.

Для C^r -линии γ векторные функции $\vec{\tau} = \vec{\tau}(s)$, $\vec{\nu} = \vec{\nu}(s)$, $\vec{\beta} = \vec{\beta}(s)$ являются непрерывными. Поскольку $k = \left| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right|$

и $\kappa = -\vec{\nu} \cdot \frac{d\vec{\beta}}{ds}$, кривизна и кручение также представляют собой непрерывные числовые функции длины s дуги линии γ . Уравнения $k = k(s)$ и $\kappa = \kappa(s)$ называются *натуральными уравнениями* линии γ . Их роль в теории гладких линий раскрывает следующее утверждение, которое мы приведем без доказательства.

Теорема 3. Пусть на интервале J заданы две непрерывные функции $k = k(s)$ и $\kappa = \kappa(s)$, причем $k(s) > 0$ при $s \in J$. Тогда существует единственная с точностью до положения в пространстве линия, для которой s является длиной дуги, а кривизна и кручение совпадают с заданными функциями от s .

Вычисление кривизны и кручения

Выведем формулы для вычисления кривизны и кручения линии в произвольной параметризации, а также раскроем геометрический смысл этих понятий.

Пусть C^r -линия γ , $r \geq 3$, задана в произвольной параметризации векторным уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in I$. Введем на линии γ естественную параметризацию, которую осуществляет гомеоморфизм $s: I \rightarrow J$ интервала I на некоторый интервал J , $s = s(t)$.

По правилу дифференцирования сложной функции найдем:

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}, & \vec{r}'' &= \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \cdot \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{d^2s}{dt^2}, \\ \vec{r}''' &= \frac{d^3\vec{r}}{dt^3} = \frac{d^3\vec{r}}{ds^3} \cdot \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 + 3 \cdot \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{d^3s}{dt^3}, \end{aligned}$$

откуда

$$[\vec{r}', \vec{r}'] = \left[\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right] \cdot \left(\frac{ds}{dt} \right)^3$$

и

$$(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''') = \left(\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \frac{d^3\vec{r}}{ds^3} \right) \cdot \left(\frac{ds}{dt} \right)^6.$$

С другой стороны, из формул Френе следует, что

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}, \quad \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{\nu}, \quad \frac{d^3\vec{r}}{ds^3} = \frac{dk}{ds}\vec{\nu} + k\frac{d\vec{\nu}}{ds} = -k^2\vec{\tau} + \frac{dk}{ds}\vec{\nu} + k\kappa\vec{\beta},$$

поэтому

$$\left[\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right] = k[\vec{\tau}, \vec{\nu}] = k\vec{\beta} \quad \text{и} \quad \left(\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \frac{d^3\vec{r}}{ds^3} \right) = k^2\kappa(\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}) = k^2\kappa.$$

Учитывая, что $\frac{ds}{dt} = |\vec{r}'|$, получим $\vec{r}' = \vec{\tau} \cdot \frac{ds}{dt} = |\vec{r}'|\vec{\tau}$,

$$[\vec{r}', \vec{r}'] = k \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 \vec{\beta} = k|\vec{r}'|^3 \vec{\beta}, \quad (\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''') = k^2\kappa \left(\frac{ds}{dt} \right)^6 = k^2\kappa|\vec{r}'|^6.$$

В итоге приходим к следующим формулам:

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|}, \quad \vec{\beta} = \frac{[\vec{r}', \vec{r}']}{|[\vec{r}', \vec{r}']|}, \quad \vec{\nu} = [\vec{\beta}, \vec{\tau}], \quad k = \frac{|[\vec{r}', \vec{r}']|}{|\vec{r}'|^3}, \\ \kappa &= \frac{(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''')}{k^2|\vec{r}'|^6} = \frac{(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''')}{|[\vec{r}', \vec{r}']|^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Пример 3. Найти кривизну и кручение, а также векторы подвижного репера обыкновенной винтовой линии.

Решение. Рассмотрим обыкновенную винтовую линию, заданную векторным уравнением $\vec{r}(t) = a \cos t \vec{i} + a \sin t \vec{j} + bt \vec{k}$, $t \in \mathbb{R}$. Находим что $\vec{r}' = -a \sin t \vec{i} + a \cos t \vec{j} + b \vec{k}$, $\vec{r}'' = -a \cos t \vec{i} - a \sin t \vec{j}$, $\vec{r}''' = a \sin t \vec{i} - a \cos t \vec{j}$, $|\vec{r}'| = \sqrt{a^2 + b^2}$,

$$[\vec{r}', \vec{r}'] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a \sin t & a \cos t & b \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \end{vmatrix} = ab \sin t \vec{i} - ab \cos t \vec{j} + a^2 \vec{k},$$

$$(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''') = \begin{vmatrix} -a \sin t & a \cos t & b \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \\ a \sin t & -a \cos t & 0 \end{vmatrix} = a^2 b, \quad |[\vec{r}', \vec{r}']| = a \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (-a \sin t \vec{i} + a \cos t \vec{j} + b \vec{k}), \\ \vec{\beta} &= \frac{[\vec{r}', \vec{r}']}{|[\vec{r}', \vec{r}']|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (b \sin t \vec{i} - b \cos t \vec{j} + a \vec{k}), \end{aligned}$$

$$\vec{v} = [\vec{\beta}, \vec{\tau}] = \frac{1}{a^2 + b^2} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b \sin t & -b \cos t & a \\ -a \sin t & a \cos t & b \end{vmatrix} = -\cos t \vec{i} - \sin t \vec{j}.$$

Наконец,

$$k = k = \frac{|[\vec{r}', \vec{r}'']|}{|\vec{r}'|^3} = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad \text{и} \quad \kappa = \frac{(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''')}{[\vec{r}', \vec{r}'']^2} = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Таким образом, кривизна и кручение обыкновенной винтовой линии постоянны. Пусть $M \in \gamma$ и $\vec{OM} = a \cos t \vec{i} + a \sin t \vec{j} + bt \vec{k}$. Если точка N является проекцией точки M на плоскость Oxy , то $\vec{ON} = a \cos t \vec{i} + a \sin t \vec{j} = -a\vec{v}$, поэтому главной нормалью винтовой линии γ в точке M служит перпендикуляр к оси Oz , проведенный через точку M . Из теоремы 3 следует, что всякая линия, имеющая ненулевые постоянные кривизну k и кручение κ , подходящим движением совмещается с обыкновенной винтовой линией γ , в уравнении которой $a = \frac{k}{k^2 + \kappa^2}$ и $b = \frac{\kappa}{k^2 + \kappa^2}$.

Плоские линии

При выводе формул Френе мы предполагали, что в каждой точке линии γ кривизна $k \neq 0$. Заметим, что кривизна $k = 0$ тогда и только тогда, когда $[\vec{r}', \vec{r}'] = \vec{0}$, т. е. векторы \vec{r}' и \vec{r}'' коллинеарны в каждой точке линии γ . Оказывается, что кривизна позволяет определить, насколько данная линия отличается от прямой. Именно, справедлива

Теорема 4. *Линия γ является частью некоторой прямой тогда и только тогда, когда в каждой точке этой линии кривизна равна нулю.*

Доказательство. Необходимость. Пусть кривизна $k = 0$ в каждой точке линии γ . Перейдем к естественной параметризации и воспользуемся формулами Френе. Имеем $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \vec{0}$, следовательно, $\vec{\tau} = \vec{a}$, где вектор \vec{a} не зависит от параметра s . Интегрируя уравнение $\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{a}$, получим, что решением этого дифференциального уравнения является вектор-функция $\vec{r} = \vec{a}s + \vec{r}_0$, где $s \in J$, \vec{r}_0 — некоторый постоянный вектор. Поэтому линия γ является частью прямой (M_0, \vec{a}) , где $\vec{OM}_0 = \vec{r}_0$.

Достаточность. Пусть линия γ является частью прямой. Тогда она имеет векторное уравнение вида $\vec{r} = \vec{a}t + \vec{r}_0$, $t \in I$, откуда $\vec{r}' = \vec{a}$, $\vec{r}'' = \vec{0}$ и $k = \frac{[\vec{r}', \vec{r}'']}{|\vec{r}'|^3} = 0$ в каждой точке линии γ . Теорема доказана.

Пусть теперь в каждой точке линии γ кривизна $k \neq 0$. Заметим, что кручение $\kappa = 0$ тогда и только тогда, когда $(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''') = 0$, т. е. векторы \vec{r}' , \vec{r}'' , \vec{r}''' компланарны между собой в каждой точке этой линии. Оказывается, что кручение характеризует отличие пространственной линии от плоской. Именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Линия γ лежит в некоторой плоскости тогда и только тогда, когда в каждой точке этой линии кручение равно нулю.*

Доказательство. Необходимость. Пусть кручение $\kappa = 0$ в каждой точке линии γ . Перейдем к естественной параметризации и воспользуемся формулами Френе. Имеем: $\frac{d\vec{\beta}}{ds} = \vec{0}$, следовательно, $\vec{\beta} = \vec{b}$, где вектор \vec{b} не зависит от параметра s . Поскольку $\vec{b} \cdot \vec{\tau} = 0$ и $\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}$, выполняется $\frac{d(\vec{b} \cdot \vec{r})}{ds} = 0$, следовательно, $\vec{b} \cdot \vec{r} = C$, где C — некоторая константа. Если $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ и $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$, то все точки линии γ лежат в плоскости, заданной уравнением $xb_1 + yb_2 + zb_3 - C = 0$.

Достаточность. Пусть линия γ лежит в некоторой плоскости σ . Фиксируем точку $M_0 \in \gamma$ и обозначим $\vec{OM}_0 = \vec{r}_0$. Если \vec{b} — единичный вектор нормали плоскости σ , то $\vec{b}(\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$ или $\vec{b} \cdot \vec{r} = \vec{b} \cdot \vec{r}_0$, откуда $\vec{b} \cdot \vec{r}' = \vec{b} \cdot \vec{r}'' = \vec{b} \cdot \vec{r}''' = 0$. Таким образом, векторы \vec{r}' , \vec{r}'' , \vec{r}''' ортогональны постоянному вектору \vec{b} , т. е. компланарны между собой, следовательно, $\kappa = \frac{(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''')}{|\vec{r}', \vec{r}''|^2} = 0$ в каждой точке линии. Теорема доказана.

Пусть линия γ лежит в некоторой плоскости σ и отнесена к произвольной параметризации. Тогда по правилу дифференцирования сложной функции находим: $\vec{r}' = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$

и $\vec{r}'' = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \cdot \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{d^2s}{dt^2}$. Поскольку $\frac{ds}{dt} = |\vec{r}'|$,

имеем $\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|}$. Далее, $\frac{d|\vec{r}'|^2}{dt} = 2|\vec{r}'| \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$ и $\frac{d(\vec{r}' \cdot \vec{r}')}{dt} = 2\vec{r}' \cdot \vec{r}''$,

следовательно $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d|\vec{r}'|}{dt} = \frac{1}{2|\vec{r}'|} \cdot \frac{d|\vec{r}'|^2}{dt} = \frac{1}{2|\vec{r}'|} \cdot \frac{d(\vec{r}' \cdot \vec{r}')}{dt} = \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}''}{|\vec{r}'|}$.

Таким образом, $\vec{r}'' = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \cdot |\vec{r}'|^2 + \vec{r}' \cdot \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}''}{|\vec{r}'|^2}$. Окончательно получим:

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{1}{|\vec{r}'|^2} \cdot (\vec{r}'' - \vec{r}' \cdot \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}''}{|\vec{r}'|^2}), \tag{7}$$

$$k = \left| \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right| = \frac{1}{|\vec{r}'|^2} \cdot |\vec{r}'' - \vec{r}' \cdot \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}''}{|\vec{r}'|^2}|. \tag{8}$$

Пусть в прямоугольной декартовой системе координат $O\vec{i}\vec{j}$ на плоскости σ линия γ имеет векторное уравнение $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Тогда $\vec{r}' = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ и $\vec{r}'' = x''\vec{i} + y''\vec{j}$, поэтому $\vec{r}' \cdot \vec{r}'' = x'x'' + y'y''$. Из равенства (7) получим:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} &= \frac{1}{(x')^2 + (y')^2} \cdot \left(x''\vec{i} + y''\vec{j} - (x'\vec{i} + y'\vec{j}) \frac{x'x'' + y'y''}{(x')^2 + (y')^2} \right) = \\ &= \frac{1}{(x')^2 + (y')^2} \cdot \left(\left(x'' - x' \frac{x'x'' + y'y''}{(x')^2 + (y')^2} \right) \vec{i} + \left(y'' - y' \frac{x'x'' + y'y''}{(x')^2 + (y')^2} \right) \vec{j} \right) = \\ &= \frac{1}{((x')^2 + (y')^2)^2} \cdot ((x''(y')^2 - x'y'y'')\vec{i} + (y''(x')^2 - y'x'x'')\vec{j}) = \\ &= \frac{1}{((x')^2 + (y')^2)^2} \cdot (y'(x''y' - x'y'')\vec{i} + x'(y''x' - y'x'')\vec{j}). \end{aligned}$$

Отсюда и из (8) следует, что

$$\begin{aligned} k^2 &= \left| \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right|^2 = \frac{1}{((x')^2 + (y')^2)^4} \cdot ((y')^2(x''y' - x'y'')^2 + \\ &+ (x')^2(y''x' - y'x'')^2) = \frac{(x'y'' - x''y')^2}{((x')^2 + (y')^2)^3}. \end{aligned}$$

Окончательно приходим к следующей формуле для вычисления кривизны:

$$k = \frac{|x'y'' - x''y'|}{((x')^2 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Пример 4. Найти кривизну окружности радиуса a .

Решение. Окружность радиуса a с центром в точке с координатами (x_0, y_0) на плоскости σ имеет параметрические уравнения $x = a \cos t + x_0$, $y = a \sin t + y_0$. Находим, что $x' = -a \sin t$, $y' = a \cos t$, $x'' = -a \cos t$, $y'' = -a \sin t$, следовательно, $(x')^2 + (y')^2 = x'y'' - x''y' = a^2$ и $k = \frac{|x'y'' - x''y'|}{((x')^2 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a}$.

Заметим, что радиус кривизны $\rho = \frac{1}{k}$ для окружности совпадает с ее радиусом $\rho = a$.

По теореме 5, в каждой точке плоской линии γ кручение равно нулю. Кроме того, при доказательстве этой теоремы мы видели, что все производные векторной функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$, определяющей линию, параллельны плоскости σ . В таком случае формулы Френе принимают вид: $\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}$, $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{\nu}$, $\frac{d\vec{\nu}}{ds} = -k\vec{\tau}$. Уравнение $k = k(s)$ называется *натуральным уравнением* плоской линии γ .

Теорема 6. Пусть на интервале J задана непрерывная функция $k = k(s)$, причем $k(s) > 0$ при $s \in J$. Тогда существует единственная с точностью до положения на плоскости σ линия, для которой s является длиной дуги, а кривизна является заданной функцией от s .

Доказательство непосредственно следует из теорем 3 и 5. Проведите его самостоятельно.

Пример 5. Доказать, что всякая линия, имеющая постоянную кривизну $k > 0$, лежит на окружности радиуса $\frac{1}{k}$.

Решение. Пусть линия γ на плоскости σ в естественной параметризации задана уравнением $\vec{r} = \vec{r}(s)$, α — ориентированный угол между векторами \vec{i} и \vec{r} . Тогда $\vec{\tau} = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}$ и $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = (-\sin \alpha \vec{i} + \cos \alpha \vec{j}) \cdot \frac{d\alpha}{ds}$, следовательно, $k = \left| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right| = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right|$.

Поскольку $d\vec{r} = \vec{\tau} ds$ и $ds = \pm \frac{1}{k} d\alpha$, имеем $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$, где

$$x = \int \cos \alpha ds = \pm \frac{1}{k} \int \cos \alpha d\alpha = \pm \frac{1}{k} \sin \alpha + x_0,$$

$$y = \int \sin \alpha ds = \pm \frac{1}{k} \int \sin \alpha d\alpha = \mp \frac{1}{k} \cos \alpha + y_0.$$

Таким образом, все точки искомой линии лежат на окружности, заданной уравнением $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{1}{k^2}$.

Если $k = 0$, то $\alpha = \alpha_0$, где α_0 не зависит от параметра s . Тогда $x = \int \cos \alpha ds = s \cos \alpha_0 + x_0$ и $y = \int \sin \alpha ds = s \sin \alpha_0 + y_0$. В этом случае все точки

искомой линии лежат на прямой, уравнение которой имеет вид $y - y_0 = (x - x_0) \operatorname{tg} \alpha_0$.

§ 54. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ ПОВЕРХНОСТИ. ПЕРВАЯ КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА

В этом параграфе мы изучим некоторые свойства C^r -поверхности F , $r \geq 3$, заданной в пространстве E_3 своим векторным уравнением:

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v), \quad (u, v) \in G. \quad (1)$$

Здесь векторная функция $\vec{r}(u, v)$ в каждой точке области G имеет непрерывные частные производные до порядка $r \geq 3$ включительно, а частные производные $\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ и $\vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ не коллинеарны во всех точках из G .

Касательная плоскость и нормаль

Пусть плоская C^r -линия γ_0 в области G задана параметрическими уравнениями

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad (2)$$

где параметр t изменяется в некотором открытом числовом интервале I . Точка с координатами $M(u(t), v(t))$ принадлежит области G при каждом значении $t \in I$. Функции $u(t)$ и $v(t)$ имеют в интервале I непрерывные производные до порядка r включительно, причем первые производные $\frac{du}{dt}$

и $\frac{dv}{dt}$ не обращаются в нуль ни в одной точке из I . По-

скольку $\vec{r}(u(t), v(t)) = x(u(t), v(t))\vec{i} + y(u(t), v(t))\vec{j} + z(u(t), v(t))\vec{k}$, координаты векторной функции $\vec{r}(t) = \vec{r}(u(t), v(t))$ являются сложными функциями аргумента t и имеют в интервале I непрерывные производные до порядка r включительно. Так как векторы \vec{r}_u и \vec{r}_v линейно независимы, то вектор

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}_u \frac{du}{dt} + \vec{r}_v \frac{dv}{dt} \quad (3)$$

не обращается в нуль ни в одной точке интервала I . Таким образом, уравнение $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$, $t \in I$, задает C^r -линию γ в пространстве E_3 , всеми своими точками принадлежащую поверхности F . В этом случае говорят, что линия γ имеет *внутренние уравнения* вида (2).

Если фиксирована точка $(u_0, v_0) \in G$, то линия с внутренними уравнениями $u = t$, $v = v_0$ называется *линией u* , а линия с внутренними уравнениями $u = u_0$, $v = t$ — *линией v* . Обе эти линии проходят через точку M_0 с криволинейными координатами (u_0, v_0) на поверхности F .

Пример 1. *Описать линии u и v прямого геликоида (§ 52, пример 6).*

Решение. Прямой геликоид имеет векторное уравнение $\vec{r}(u, v) = u \cos v \vec{i} + u \sin v \vec{j} + av \vec{k}$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Фиксируем на нем точку M_0 с криволинейными координатами (u_0, v_0) . Линия u задается уравнениями $x = t \cos v_0$, $y = t \sin v_0$, $z = av_0$ и является прямой, пересекающей ось Oz под прямым углом. Линия v задается уравнениями $x = u_0 \cos t$, $y = u_0 \sin t$, $z = at$ и является обыкновенной винтовой линией при $u_0 \neq 0$ или совпадает с осью Oz при $u_0 = 0$. Как следует из приведенного в § 53 примера 3, линия u служит главной нормалью к линии v в точке M_0 при $u_0 \neq 0$.

Пусть гладкая линия γ на поверхности F задана внутренними уравнениями (2). Если точка $M_0 \in \gamma$, то для ее параметра $t_0 \in I$ выполнено $u_0 = u(t_0)$ и $v_0 = v(t_0)$. Касательная к линии γ в точке M_0 имеет направляющий вектор $\frac{d\vec{r}}{dt}$, который можно найти по формуле (3), где частные производные \vec{r}_u и \vec{r}_v вычислены в точке (u_0, v_0) , а производные $\frac{du}{dt}$ и $\frac{dv}{dt}$ — в точке t_0 . Рассмотрим двумерное векторное пространство $T_{M_0} = \{\alpha \vec{r}_u + \beta \vec{r}_v : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Тогда $\frac{d\vec{r}}{dt} \in T_{M_0}$.

Верно и обратное утверждение. Всякий ненулевой вектор $\vec{a} \in T_{M_0}$ однозначно представим в виде $\vec{a} = \alpha \vec{r}_u + \beta \vec{r}_v$, где числа α и β не равны нулю одновременно. Во внутренних уравнениях линии γ положим $u(t) = u_0 + \alpha t$ и $v(t) = v_0 + \beta t$. Тогда $u(0) = u_0$ и $v(0) = v_0$, следовательно, $M_0 \in \gamma$. Далее, $\frac{du}{dt} = \alpha$ и $\frac{dv}{dt} = \beta$, откуда $\frac{d\vec{r}}{dt} = \alpha \vec{r}_u + \beta \vec{r}_v = \vec{a}$. Таким образом, вектор \vec{a} является направляющим вектором касательной к линии γ в точке M_0 .

Частные производные \vec{r}_u и \vec{r}_v , образуют базис пространства T_{M_0} . Они являются направляющими векторами касательных к линиям u и v в точке M_0 (рис. 245).

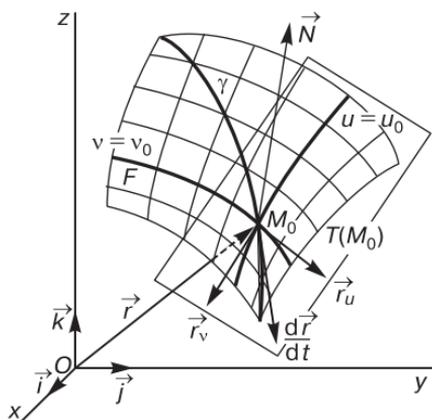


Рис. 245

Определение 1. Двумерное векторное пространство T_{M_0} называется касательным пространством к поверхности F в точке M_0 .

Введенное нами понятие не зависит от выбора параметризации. Действительно, если перейти к параметризации (α, β) по закону $\alpha = \alpha(u, v)$, $\beta = \beta(u, v)$, то $\vec{r}_u = \vec{r}_\alpha \alpha_u + \vec{r}_\beta \beta_u$ и $\vec{r}_v = \vec{r}_\alpha \alpha_v + \vec{r}_\beta \beta_v$, причем $\text{rank} \begin{pmatrix} \alpha_u & \alpha_v \\ \beta_u & \beta_v \end{pmatrix} = 2$. Так как векторы \vec{r}_u и \vec{r}_v неколлинеарны, то векторы \vec{r}_α и \vec{r}_β также неколлинеарны и образуют новый базис того же векторного пространства T_{M_0} .

Определение 2. Плоскость $T(M_0)$ с направляющим пространством T_{M_0} , проходящая через точку M_0 , называется касательной плоскостью к поверхности F в точке M_0 .

Ясно, что вектор $\vec{N} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v]$ ортогонален касательной плоскости. Он служит направляющим вектором прямой, проходящей через M_0 и перпендикулярной касательной плоскости $T(M_0)$. Эта прямая называется нормалью к поверхности в точке M_0 (рис. 245).

Пример 2. Найти уравнения касательной плоскости и нормали прямого геликоида.

Решение. Рассмотрим прямой геликоид, заданный векторным уравнением $\vec{r}(u, v) = u \cos v \vec{i} + u \sin v \vec{j} + av \vec{k}$,

$(u, v) \in \mathbb{R}^2$. В точке (u_0, v_0) находим $\vec{r}_u = \cos v_0 \vec{i} + \sin v_0 \vec{j}$ и $\vec{r}_v = -u_0 \sin v_0 \vec{i} + u_0 \cos v_0 \vec{j} + a \vec{k}$, откуда

$$\vec{N} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v_0 & \sin v_0 & 0 \\ -u_0 \sin v_0 & u_0 \cos v_0 & a \end{vmatrix} = a \sin v_0 \vec{i} - a \cos v_0 \vec{j} + u_0 \vec{k}.$$

Тогда в точке $M_0(u_0 \cos v_0, u_0 \sin v_0, av_0)$ касательная плоскость имеет уравнение

$$(x - u_0 \cos v_0)a \sin v_0 - (y - u_0 \sin v_0)a \cos v_0 + (z - av_0)u_0 = 0$$

или

$$xa \sin v_0 - ya \cos v_0 + zu_0 - au_0 v_0 = 0,$$

а нормаль имеет уравнение

$$\frac{x - u_0 \cos v_0}{a \sin v_0} = \frac{y - u_0 \sin v_0}{-a \cos v_0} = \frac{z - av_0}{u_0}.$$

В § 52 мы отмечали, что C^r -поверхность может быть задана уравнением вида

$$F(x, y, z) = 0 \tag{4}$$

с тремя неизвестными, причем функция $F(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные до порядка $r \geq 3$ включительно, а частные производные F_x, F_y, F_z не обращаются одновременно в нуль для каждого решения уравнения (4).

Теорема 1. *Если гладкая поверхность задана уравнением (4), то в соответствующей точке вектор $\vec{N} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$ — направляющий вектор нормали.*

Доказательство. Поскольку рассматривается гладкая поверхность, вектор \vec{N} — ненулевой. Достаточно доказать, что если на данной поверхности гладкая линия γ проходит через фиксированную точку, то вектор \vec{N} ортогонален направляющему вектору касательной к линии γ в этой точке. Пусть линия γ имеет параметрические уравнения $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$. Тогда выполняется тождество $F(x(t), y(t), z(t)) = 0$, дифференцируя которое, получим $F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} + F_z \frac{dz}{dt} = 0$. Таким образом, вектор \vec{N} ортогонален вектору $\vec{a} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}$, который является направляющим вектором касательной к линии γ в соответствующей точке. Теорема доказана.

Пример 3. Найдите уравнение касательной плоскости к эллипсоиду, заданному каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, в его точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Решение. Полагая $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$, найдем частные производные $F_x = \frac{2x}{a^2}$, $F_y = \frac{2y}{b^2}$, $F_z = \frac{2z}{c^2}$.

Тогда вектор $\vec{N} = \frac{2x_0}{a^2} \vec{i} + \frac{2y_0}{b^2} \vec{j} + \frac{2z_0}{c^2} \vec{k}$ — направляющий вектор нормали к эллипсоиду в точке M_0 , а уравнение касательной плоскости в этой точке примет вид $\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{2z_0}{c^2}(z - z_0) = 0$. Поскольку точка M_0 лежит на эллипсоиде, $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1$. Окончательно для плоскости $T(M_0)$ получаем уравнение $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} - 1 = 0$.

Введем следующее определение.

Определение 3. Пусть на поверхности F заданы два семейства σ и σ' гладких линий. Говорят, что эти семейства образуют сеть на поверхности F , если через каждую точку $M_0 \in F$ проходит по одной линии $\gamma \in \sigma$ и $\gamma' \in \sigma'$ каждого семейства, причем направляющие векторы касательных к линиям γ и γ' в точке M_0 образуют базис векторного пространства T_{M_0} .

В частности, два семейства координатных линий u и v образуют на поверхности F сеть, которая называется координатной.

Первая квадратичная форма поверхности

Первая квадратичная форма позволяет на поверхности измерять длину дуги линии, угол между линиями, а также площадь участка поверхности.

Пусть поверхность F задана уравнением (1). Дифференциал векторной функции $\vec{r}(u, v)$ в произвольной точке $M \in F$ имеет вид $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$. Тогда скалярный квадрат этого вектора равен

$$(d\vec{r})^2 = \gamma_{11}(du)^2 + \gamma_{12} du dv + \gamma_{21} dv du + \gamma_{22}(dv)^2, \quad (5)$$

где

$$\gamma_{11} = \vec{r}_u^2, \quad \gamma_{12} = \gamma_{21} = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v, \quad \gamma_{22} = \vec{r}_v^2. \quad (6)$$

Правая часть равенства (5) представляет собой квадратичную форму, заданную на касательном пространстве T_M к поверхности F в точке M . Эта форма положительно определена: если du и dv не равны нулю одновременно, то $(d\vec{r})^2 > 0$.

Определение 4. *Квадратичная форма*

$$\gamma_{11}(du)^2 + 2\gamma_{12} du dv + \gamma_{22}(dv)^2$$

называется первой квадратичной формой поверхности F или ее линейным элементом.

В силу равенств (6), для любых двух векторов $\vec{a}, \vec{b} \in T_M$ таких, что $\vec{a} = a_1\vec{r}_u + a_2\vec{r}_v$ и $\vec{b} = b_1\vec{r}_u + b_2\vec{r}_v$, имеем $\vec{a} \cdot \vec{b} = \gamma_{11}a_1b_1 + \gamma_{12}a_1b_2 + \gamma_{21}a_2b_1 + \gamma_{22}a_2b_2$. Отсюда заключаем, что билинейная форма, сопряженная с первой квадратичной формой на пространстве T_M , совпадает с обычным евклидовым скалярным умножением из объемлющего трехмерного векторного пространства.

Пример 4. *Найти первую квадратичную форму прямого геликоида.*

Решение. Рассмотрим прямой геликоид, заданный векторным уравнением $\vec{r}(u, v) = u \cos v \vec{i} + u \sin v \vec{j} + av \vec{k}$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Поскольку $\vec{r}_u = \cos v \vec{i} + \sin v \vec{j}$ и $\vec{r}_v = -u \sin v \vec{i} + u \cos v \vec{j} + a \vec{k}$, получаем $\gamma_{11} = \vec{r}_u^2 = 1$, $\gamma_{12} = \gamma_{21} = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 0$ и $\gamma_{22} = \vec{r}_v^2 = u^2 + a^2$. Таким образом, первая квадратичная форма прямого геликоида имеет вид $(du)^2 + (u^2 + a^2)(dv)^2$.

Заметим, что ранг первой квадратичной формы равен

2, поэтому $\gamma = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{vmatrix} \neq 0$. Коэффициенты

$\gamma_{11} = \vec{r}_u^2$ и $\gamma_{22} = \vec{r}_v^2$ положительны как квадраты ненулевых векторов. Полагая $\varphi = \angle(\vec{r}_u, \vec{r}_v)$, находим, что $\gamma_{12} = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = |\vec{r}_u||\vec{r}_v| \cos \varphi = \sqrt{\gamma_{11}}\sqrt{\gamma_{22}} \cos \varphi$, откуда

$$\cos \varphi = \frac{\gamma_{12}}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22}}}. \quad (7)$$

Поскольку $\varphi \neq 0$, $\gamma_{11} = \vec{r}_u^2$, $\gamma_{22} = \vec{r}_v^2$ и $\gamma_{11}\gamma_{22} > 0$, из равенства

$\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 - \frac{\gamma_{12}^2}{\gamma_{11}\gamma_{22}}} = \sqrt{\frac{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}{\gamma_{11}\gamma_{22}}}$ следует, что

$\gamma = \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2 > 0$. Тогда

$$|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| = |\vec{r}_u||\vec{r}_v|\sin\varphi = \sqrt{\gamma_{11}}\sqrt{\gamma_{22}}\sin\varphi = \sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2} = \sqrt{\gamma}. \quad (8)$$

Длина дуги линии на поверхности

Пусть гладкая линия γ на поверхности F задана внутренними уравнениями (2), где параметр t изменяется в некотором открытом числовом интервале I . Тогда в пространстве линия γ имеет векторное уравнение $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$, $t \in I$. Дифференцируя это уравнение по t , получим $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}_u \frac{du}{dt} + \vec{r}_v \frac{dv}{dt}$.

Поскольку $\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$, где s — длина дуги линии γ , по формулам (6) находим:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\gamma_{11} \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\gamma_{12} \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \gamma_{22} \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}. \quad (9)$$

Отсюда следует, что $(ds)^2 = \gamma_{11}(du)^2 + \gamma_{12} du dv + \gamma_{21} dv du + \gamma_{22}(dv)^2$. Геометрический смысл равенства (9) заключается в следующем: значение первой квадратичной формы поверхности представляет собой квадрат дифференциала длины дуги линии, лежащей на поверхности, при бесконечно малом смещении точки вдоль этой линии.

Из равенства (9) вытекает, что длину s дуги линии γ с концами в точках, соответствующих параметрам t_1 и t_2 , где $t_1 < t_2$, можно найти по формуле

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\gamma_{11} \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\gamma_{12} \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \gamma_{22} \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt. \quad (10)$$

Пример 5. На прямом геликоиде с линейным элементом $(ds)^2 = (du)^2 + (u^2 + 1)(dv)^2$ дан криволинейный треугольник ABC , стороны AB , BC , AC которого заданы уравнениями $u = 0$, $v = 1$, $u = \frac{e^v - e^{-v}}{2} = \text{sh } v$. Найти длины сторон этого треугольника.

Решение. Заметим, что точки A , B , C имеют криволинейные координаты $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(\text{sh } 1, 1)$. Длины сторон

треугольника ABC найдем по формуле (10), в которой $\gamma_{11} = 1$, $\gamma_{12} = 0$, $\gamma_{22} = u^2 + 1$. Дуга AB имеет внутренние уравнения $u = 0$, $v = t$, где $0 \leq t \leq 1$, так что $\frac{du}{dt} = 0$,

$\frac{dv}{dt} = 1$, а длина этой дуги равна $\int_0^1 dt = t \Big|_0^1 = 1$. Далее,

дуга BC имеет внутренние уравнения $u = t$, $v = 1$, где $0 \leq t \leq \text{sh } 1$, так что $\frac{du}{dt} = 1$, $\frac{dv}{dt} = 0$, а длина этой дуги равна

$\int_0^{\text{sh } 1} dt = t \Big|_0^{\text{sh } 1} = \text{sh } 1$. Наконец, дуга AC имеет внутренние

уравнения $u = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \text{sh } t$, $v = t$, где $0 \leq t \leq 1$, так что

$\frac{du}{dt} = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \text{ch } v$, $\frac{dv}{dt} = 1$, а длина этой дуги равна

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{\text{ch}^2 t + (\text{sh}^2 t + 1)} dt &= \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 + \left(\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 + 1\right)} dt = \\ &= \int_0^1 \sqrt{\frac{e^{2t} + e^{-2t} + 2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \sqrt{(e^t + e^{-t})^2} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 (e^t + e^{-t}) dt = \frac{e^t - e^{-t}}{\sqrt{2}} \Big|_0^1 = \sqrt{2} \frac{e^1 - e^{-1}}{2} = \sqrt{2} \text{sh } 1. \end{aligned}$$

Угол между линиями на поверхности

Пусть две гладкие линии γ и γ' проходят на поверхности F через точку M .

Определение 5. Угол между касательными к линиям γ и γ' в их общей точке M называется углом между этими линиями.

Обозначим через d и δ символы дифференцирования вдоль линий γ и γ' . Тогда угол φ между линиями γ и γ' равен углу между векторами $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$ и $\delta\vec{r} = \vec{r}_u \delta u + \vec{r}_v \delta v$, которые являются направляющими векторами касательных к линиям γ и γ' в точке M (рис. 246).

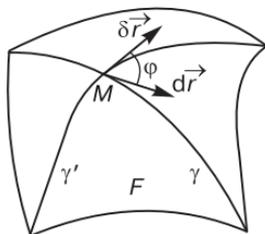


Рис. 246

Учитывая, что $\cos \varphi = \frac{(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)(\vec{r}_u \delta u + \vec{r}_v \delta v)}{\sqrt{(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)^2} \sqrt{(\vec{r}_u \delta u + \vec{r}_v \delta v)^2}}$, по формулам (6) окончательно находим:

$$\cos \varphi = \frac{\gamma_{11} du \delta u + \gamma_{12} (du \delta v + dv \delta u) + \gamma_{22} dv \delta v}{\sqrt{\gamma_{11} (du)^2 + 2\gamma_{12} du dv + \gamma_{22} (dv)^2} \sqrt{\gamma_{11} (\delta u)^2 + 2\gamma_{12} \delta u \delta v + \gamma_{22} (\delta v)^2}}. \quad (11)$$

В частности, если γ является линией u , а γ' является линией v , то $dv = \delta u = 0$ и формула (11) совпадает с формулой (7). Таким образом, координатные линии на поверхности F ортогональны ($\varphi = \frac{\pi}{2}$), или, как говорят, координатная сеть на поверхности F является ортогональной тогда и только тогда, когда $\gamma_{12} = 0$ в каждой точке этой поверхности.

Пример 6. Найти величины углов криволинейного треугольника из примера 5.

Решение. Величины углов треугольника ABC найдем по формуле (11), в которой положим $\gamma_{11} = 1$, $\gamma_{12} = 0$, $\gamma_{22} = u^2 + 1$. Вдоль линий AB и AC будет $du = 0$ и $\delta u = \frac{e^v + e^{-v}}{2} \delta v = \operatorname{ch} v \delta v$, поэтому

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{(u^2 + 1) dv \delta v}{\sqrt{(u^2 + 1)(dv)^2} \sqrt{(\operatorname{ch}^2 v + u^2 + 1)(\delta v)^2}} \Bigg|_{u=0}^{v=0} = \\ &= \frac{(u^2 + 1)}{\sqrt{(u^2 + 1)} \sqrt{(\operatorname{ch}^2 v + u^2 + 1)}} \Bigg|_{u=0}^{v=0} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Далее, для линий AB и BC имеем $du = 0$ и $\delta v = 0$, поэтому $\cos B = 0$. Наконец, вдоль линий BC и AC имеем

$dv = 0$, $\delta u = \operatorname{ch} v \delta v$, поэтому

$$\begin{aligned} \cos C &= \frac{\operatorname{ch} v \, du \, \delta v}{\sqrt{(du)^2} \sqrt{(\operatorname{ch}^2 v + u^2 + 1)(\delta v)^2}} \Bigg|_{u=\operatorname{sh} 1}^{v=1} = \\ &= \frac{\operatorname{ch} v}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 v + u^2 + 1}} \Bigg|_{u=\operatorname{sh} 1}^{v=1} = \frac{\operatorname{ch} 1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 1 + \operatorname{sh}^2 1 + 1}} = \\ &= \frac{\frac{e + e^{-1}}{2}}{\sqrt{\left(\frac{e + e^{-1}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e - e^{-1}}{2}\right)^2 + 1}} = \frac{e + e^{-1}}{\sqrt{2(e^2 + e^{-2} + 2)}} = \\ &= \frac{e + e^{-1}}{\sqrt{2(e + e^{-1})^2}} = \frac{e + e^{-1}}{\sqrt{2}(e + e^{-1})} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Площадь участка поверхности

Пусть на множестве $G_0 \subset G$ уравнение (1) определяет гладкую поверхность $F_0 \subset F$ площади S . Рассмотрим точку $(u_0, v_0) \in G_0$ и зададим такие приращения Δu , Δv , что $(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) \in G_0$. Обозначим через ΔS — площадь элемента поверхности F_0 , ограниченного линиями $u = u_0$, $u = u_0 + \Delta u$, $v = v_0$, $v = v_0 + \Delta v$, а через ΔS_1 — площадь параллелограмма, построенного на векторах $\Delta \vec{r}_u = \vec{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \vec{r}(u_0, v_0)$ и $\Delta \vec{r}_v = \vec{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \vec{r}(u_0, v_0)$ (рис. 247).

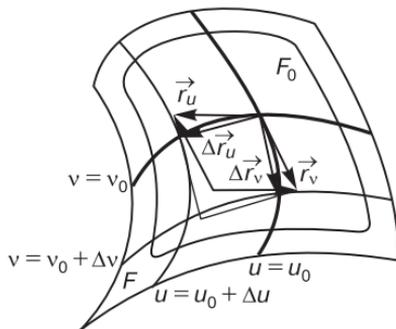


Рис. 247

Тогда

$$\lim_{\substack{\Delta u \rightarrow 0 \\ \Delta v \rightarrow 0}} \frac{\Delta S}{\Delta S_1} = 1. \tag{12}$$

Поскольку существует предел $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_u}{\Delta u} = \vec{r}_u$, для вектора $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{r}_u}{\Delta u} - \vec{r}_u$ выполнены равенства $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \vec{a} = \vec{0}$ и $\Delta \vec{r}_u = \vec{r}_u \Delta u + \vec{a} \Delta u$. Аналогично, $\Delta \vec{r}_v = \vec{r}_v \Delta v + \vec{b} \Delta v$, где $\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_v}{\Delta v} = \vec{r}_v$ и $\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \vec{b} = \vec{0}$. Обозначим через ΔS_2 площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{r}_u \Delta u$ и $\vec{r}_v \Delta v$. Тогда

$$\lim_{\substack{\Delta u \rightarrow 0 \\ \Delta v \rightarrow 0}} \frac{\Delta S_1}{\Delta S_2} = 1. \tag{13}$$

Из равенств (12) и (13) получим

$$\lim_{\substack{\Delta u \rightarrow 0 \\ \Delta v \rightarrow 0}} \frac{\Delta S}{\Delta S_2} = 1. \tag{14}$$

Полагая $\Delta u = du$, $\Delta v = dv$, с помощью равенства (8) находим

$$\Delta S_2 = [\vec{r}_u, \vec{r}_v] du dv = \sqrt{\gamma} du dv. \tag{15}$$

Из свойства аддитивности измерения площадей следует, что площадь S поверхности F_0 равна сумме пределов $\sum \lim_{\substack{\Delta u \rightarrow 0 \\ \Delta v \rightarrow 0}} \Delta S$,

которую, в силу равенства (14), можно заменить на сумму пределов $\sum \lim_{\substack{\Delta u \rightarrow 0 \\ \Delta v \rightarrow 0}} \Delta S_2$ или на предел суммы $\lim_{\substack{\Delta u \rightarrow 0 \\ \Delta v \rightarrow 0}} \sum \Delta S_2$. Ис-

пользуя равенство (15), по определению двойного интеграла окончательно получим

$$S = \iint_{G_0} \sqrt{\gamma} du dv. \tag{16}$$

Пример 7. *Найти площадь криволинейного треугольника из примера 5.*

Решение. Площадь S треугольника ABC найдем по формуле (16), где $\sqrt{\gamma} = \sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2} = \sqrt{u^2 + 1}$ и $G_0 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq \operatorname{sh} v, 0 \leq v \leq 1\}$ (рис. 248).

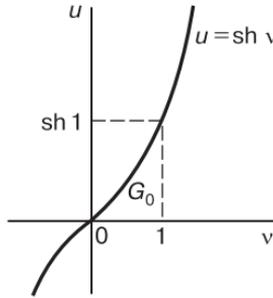


Рис. 248

Поскольку

$$\begin{aligned} \int_0^{\text{sh } v} \sqrt{u^2 + 1} du &= \frac{1}{2} (u\sqrt{u^2 + 1} + \ln(u + \sqrt{u^2 + 1})) \Big|_0^{\text{sh } v} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^v - e^{-v}}{2} \sqrt{\left(\frac{e^v - e^{-v}}{2}\right)^2 + 1} + \ln \left(\frac{e^v - e^{-v}}{2} + \sqrt{\left(\frac{e^v - e^{-v}}{2}\right)^2 + 1} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^v - e^{-v}}{2} \cdot \frac{e^v + e^{-v}}{2} + \ln \left(\frac{e^v - e^{-v}}{2} + \frac{e^v + e^{-v}}{2} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} v + \frac{e^{2v} - e^{-2v}}{8}, \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} S &= \iint_{G_0} \sqrt{\gamma} du dv = \int_0^1 \int_0^{\text{sh } v} \sqrt{u^2 + 1} du dv = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} v + \frac{e^{2v} - e^{-2v}}{8} \right) dv = \\ &= \left(\frac{1}{4} v^2 + \frac{e^{2v} + e^{-2v}}{16} \right) \Big|_0^1 = \frac{e^2 + e^{-2} + 2}{16} = \frac{1}{4} \left(\frac{e + e^{-1}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \text{ch}^2 1. \end{aligned}$$

§ 55. КРИВИЗНА ЛИНИИ НА ПОВЕРХНОСТИ. ВТОРАЯ КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА

Изучение пространственного строения окрестности точки на поверхности производится с помощью второй квадратичной формы, которая и рассматривается в данном параграфе.

Пусть C^r -поверхность F , $r \geq 3$, задана уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in G$.

Вторая квадратичная форма поверхности

Рассмотрим на поверхности F гладкую линию γ (рис. 249).

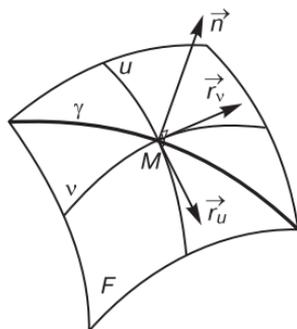


Рис. 249

При смещении точки M вдоль линии γ имеем $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$, откуда

$$d^2\vec{r} = \vec{r}_{uu}(du)^2 + 2\vec{r}_{uv} du dv + \vec{r}_{vv}(dv)^2 + \vec{r}_u d^2u + \vec{r}_v d^2v, \quad (1)$$

где $\vec{r}_{uu} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^2}$, $\vec{r}_{uv} = \vec{r}_{vu} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u \partial v}$, $\vec{r}_{vv} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial v^2}$. Как было

показано в предыдущем параграфе, длина вектора нормали $\vec{N} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v]$ к поверхности F в точке M равна $\sqrt{\gamma}$, где $\gamma = \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2$, γ_{ij} , $i, j = 1, 2$. Тогда вектор $\vec{n} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{\sqrt{\gamma}}$ является единичным вектором нормали к поверхности F в точке M . Поскольку

$$\vec{n} \cdot \vec{r}_u = \vec{n} \cdot \vec{r}_v = 0, \quad (2)$$

с помощью равенства (2) находим

$$\vec{n} \cdot d^2\vec{r} = (\vec{n} \cdot \vec{r}_{uu})(du)^2 + 2(\vec{n} \cdot \vec{r}_{uv}) du dv + (\vec{n} \cdot \vec{r}_{vv})(dv)^2. \quad (3)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} b_{11} &= \vec{n} \cdot \vec{r}_{uu} = \frac{(\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_{uu})}{\sqrt{\gamma}}, \\ b_{12} &= b_{21} = \vec{n} \cdot \vec{r}_{uv} = \frac{(\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_{uv})}{\sqrt{\gamma}}, \\ b_{22} &= \vec{n} \cdot \vec{r}_{vv} = \frac{(\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_{vv})}{\sqrt{\gamma}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Равенство (3) примет вид

$$\vec{n} \cdot d^2\vec{r} = b_{11}(du)^2 + 2b_{12} du dv + b_{22}(dv)^2. \quad (5)$$

Правая часть равенства (5) является квадратичной формой, заданной на касательном пространстве T_M к поверхности F в точке M .

Определение 1. Квадратичная форма $\varphi = b_{11}(du)^2 + 2b_{12} du dv + b_{22}(dv)^2$ называется второй квадратичной формой поверхности F .

Пример 1. Найти вторую квадратичную форму прямого геликоида.

Решение. Рассмотрим прямой геликоид, заданный векторным уравнением $\vec{r}(u, v) = u \cos v \vec{i} + u \sin v \vec{j} + av \vec{k}$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Поскольку $\vec{r}_u = \cos v \vec{i} + \sin v \vec{j}$, $\vec{r}_v = -u \sin v \vec{i} + u \cos v \vec{j} + a \vec{k}$, $\vec{r}_{uu} = \vec{0}$, $\vec{r}_{uv} = -\sin v \vec{i} + \cos v \vec{j}$ и $\vec{r}_{vv} = -u \cos v \vec{i} - u \sin v \vec{j}$, имеем $(\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_{uu}) = 0$,

$$(\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_{uv}) = \begin{vmatrix} \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & a \\ -\sin v & \cos v & 0 \end{vmatrix} = -a$$

и

$$(\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_{vv}) = \begin{vmatrix} \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & a \\ -u \cos v & -u \sin v & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

В примере 4 из § 11 мы видели, что $\gamma_{11} = 1$, $\gamma_{12} = 0$ и $\gamma_{22} = u^2 + a^2$, следовательно, $\gamma = \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2 = u^2 + a^2$. По формулам (4) находим $b_{11} = b_{22} = 0$, $b_{12} = \frac{-a}{\sqrt{u^2 + a^2}}$. Таким образом, вторая квадратичная форма прямого геликоида имеет вид $\varphi = \frac{-a du dv}{\sqrt{u^2 + a^2}}$.

Помимо равенств (4) существует другой способ определения коэффициентов второй квадратичной формы. Дифференцируя равенства (2) по u и v , получим, что $\vec{n}_u \cdot \vec{r}_u + \vec{n} \cdot \vec{r}_{uu} = \vec{n}_v \cdot \vec{r}_u + \vec{n} \cdot \vec{r}_{uv} = \vec{n}_u \cdot \vec{r}_v + \vec{n} \cdot \vec{r}_{vu} = \vec{n}_v \cdot \vec{r}_v + \vec{n} \cdot \vec{r}_{vv} = 0$. Из (4) следует

$$\vec{n}_u \cdot \vec{r}_u = -b_{11}, \quad \vec{n}_u \cdot \vec{r}_v = \vec{n}_v \cdot \vec{r}_u = -b_{12}, \quad \vec{n}_v \cdot \vec{r}_v = -b_{22}. \quad (6)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} d\vec{n} \cdot d\vec{r} &= (\vec{n}_u du + \vec{n}_v dv) \cdot (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv) = \\ &= (\vec{n}_u \cdot \vec{r}_u)(du)^2 + (\vec{n}_u \cdot \vec{r}_v) du dv + (\vec{n}_v \cdot \vec{r}_u) dv du + (\vec{n}_v \cdot \vec{r}_v)(dv)^2 = \\ &= -b_{11}(du)^2 - 2b_{12} du dv - b_{22}(dv)^2 = -\varphi. \end{aligned}$$

Мы получили, что вторую квадратичную форму можно также представить в виде

$$\varphi = -d\vec{n} \cdot d\vec{r}. \quad (7)$$

В то время как коэффициенты первой квадратичной формы поверхности не могли одновременно обращаться в нуль, тождественное равенство нулю коэффициентов второй квадратичной формы имеет геометрический смысл.

Теорема 1. *Поверхность F лежит в некоторой плоскости тогда и только тогда, когда в каждой точке этой поверхности вторая квадратичная форма тождественно равна нулю.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $b_{11} = b_{12} = b_{22} = 0$ в каждой точке поверхности F . Тогда

$$\begin{aligned} d\vec{n} \cdot \vec{r}_u &= (\vec{n}_u du + \vec{n}_v dv) \cdot \vec{r}_u = (\vec{n}_u \cdot \vec{r}_u)du + (\vec{n}_v \cdot \vec{r}_u)dv = \\ &= -b_{11} du - b_{12} dv = 0. \end{aligned}$$

Аналогично, $d\vec{n} \cdot \vec{r}_v = 0$. Кроме того, из $|\vec{n}| = 1$ следует $d\vec{n} \cdot \vec{n} = 0$. Таким образом, вектор $d\vec{n}$ ортогонален трем линейно независимым векторам \vec{r}_u , \vec{r}_v , \vec{n} , следовательно, $d\vec{n} = \vec{0}$ или $\vec{n} = \vec{n}_0$, где \vec{n}_0 — постоянный вектор. Так как $\vec{n}_0 \cdot d\vec{r} = 0$, то $d(\vec{n}_0 \cdot \vec{r}) = 0$, тогда $\vec{n}_0 \cdot \vec{r} = C$, где C — некоторая константа. Если $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ и $\vec{n}_0 = n_1\vec{i} + n_2\vec{j} + n_3\vec{k}$, то поверхность F лежит в плоскости, заданной уравнением $xn_1 + yn_2 + zn_3 - C = 0$.

Достаточность. Пусть поверхность F лежит в некоторой плоскости σ . Тогда векторы \vec{r}_u и \vec{r}_v параллельны плоскости σ , а единичный вектор \vec{n} ортогонален этой плоскости. Таким образом, вектор \vec{n} является постоянным, поэтому $\vec{n}_u = \vec{n}_v = \vec{0}$. Из формул (6) теперь следует, что $b_{11} = b_{12} = b_{22} = 0$ в каждой точке поверхности F . Теорема доказана.

Нормальная кривизна

Пусть поверхность F задана векторным уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in G$, а гладкая линия γ на поверхности F — внутренними уравнениями $u = u(s)$, $v = v(s)$, где параметр s является естественным. Установим взаимосвязь между кривизной линии на поверхности и величинами, определяемыми векторным уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$. По формулам Френе

найдем единичный вектор касательной $\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{r}_u \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \frac{dv}{ds}$ и вектор кривизны

$$k\vec{v} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \vec{r}_{uu} \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\vec{r}_{uv} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \vec{r}_{vv} \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \vec{r}_u \frac{d^2u}{ds^2} + \vec{r}_v \frac{d^2v}{ds^2} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$$

к линии γ в ее точке M . Умножая обе части последнего равенства скалярно на вектор \vec{n} , с учетом формул (3) получим

$$\vec{n} \cdot (k\vec{v}) = b_{11} \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2b_{12} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + b_{22} \left(\frac{dv}{ds}\right)^2. \quad (8)$$

Определение 2. Проекция k_n вектора кривизны $k\vec{v}$ на единичный вектор нормали \vec{n} называется нормальной кривизной линии γ в точке M .

Так как $k_n = \vec{n} \cdot (k\vec{v})$, равенство (8) принимает вид

$$k_n = \frac{\varphi}{(ds)^2} \quad \text{или} \quad k_n = \frac{b_{11}(du)^2 + 2b_{12} du dv + b_{22}(dv)^2}{\gamma_{11}(du)^2 + 2\gamma_{12} du dv + \gamma_{22}(dv)^2}. \quad (9)$$

В касательной плоскости $T(M)$ направление касательной к линии γ определяется отношением $du : dv$. Равенство (9) показывает, что нормальная кривизна линии γ в точке M зависит только от направления касательной. Таким образом, все гладкие линии, проходящие на поверхности F через точку M и имеющие в этой точке общую касательную, имеют одну и ту же нормальную кривизну в точке M .

Если нам известен угол ψ между единичными векторами \vec{n} и \vec{v} , то $k_n = \vec{n} \cdot (k\vec{v}) = k \cos \psi$. Если угол ψ отличен от прямого угла, то из (9) следует, что

$$k = \frac{1}{\cos \psi} \cdot \frac{b_{11}(du)^2 + 2b_{12} du dv + b_{22}(dv)^2}{\gamma_{11}(du)^2 + 2\gamma_{12} du dv + \gamma_{22}(dv)^2}.$$

Мы получили решение сформулированной выше задачи, установив связь между кривизной линии на поверхности и коэффициентами первой и второй ее квадратичных форм.

Если линия γ является *нормальным сечением* поверхности F , т. е. линией пересечения поверхности F и плоскости, проходящей через нормаль к этой поверхности в точке M , то либо $\vec{n} = \vec{v}$, либо $\vec{n} = -\vec{v}$. В первом случае $k_n = k$, а во втором $k_n = -k$. Следовательно, нормальная кривизна всякой линии, проходящей на поверхности F через точку M ,

с точностью до знака равна кривизне нормального сечения, имеющего с данной линией общую касательную в точке M .

Пример 2. На прямом геликоиде дана точка M с криволинейными координатами (u_0, v_0) и линия γ , имеющая внутренние уравнения $u = u_0 + t, v = v_0 - t$. Найти нормальную кривизну этой линии в данной точке.

Решение. Нормальную кривизну k_n линии γ в точке M найдем по формуле (9), в которой положим $\gamma_{11} = 1, \gamma_{12} = 0, \gamma_{22} = u^2 + a^2$ и $b_{11} = b_{22} = 0, b_{12} = \frac{-a}{\sqrt{u^2 + a^2}}$. Поскольку $du = -dv$ вдоль линии γ , получа-

$$\text{ется } k_n = \frac{2a}{\sqrt{u^2 + a^2}(1 + u^2 + a^2)} \Big|_{u=u_0}^{v=v_0} = \frac{2a}{\sqrt{u_0^2 + a^2}(1 + u_0^2 + a^2)}.$$

Индикатриса кривизны поверхности

На поверхности F фиксируем точку M . Выясним, как изменяется нормальная кривизна линии, проходящей на поверхности через точку M , в зависимости от направления ее касательной. В касательной плоскости $T(M)$ от точки M в каждом направлении отложим отрезок длины $\frac{1}{\sqrt{|k_n|}}$, где k_n — нормальная кривизна линий, проведенных на поверхности F через точку M в этом направлении.

Определение 3. Линия, образованная вторыми концами указанных отрезков, называется *индикатрисой кривизны* или *индикатрисой Дюпена поверхности F в точке M* .

В касательной плоскости $T(M)$ введем аффинную систему координат $M\vec{r}_u\vec{r}_v$. По определению индикатрисы Дюпена, для любой ее точки $P(x, y)$ выполняется равенство $\vec{MP} = \frac{\vec{\tau}}{\sqrt{|k_n|}}$ или

$$x\vec{r}_u + y\vec{r}_v = \frac{\vec{\tau}}{\sqrt{|k_n|}}, \tag{10}$$

где k_n — нормальная кривизна в направлении единичного вектора $\vec{\tau} = \frac{\vec{MP}}{|\vec{MP}|}$. Заметим, что это направление в данном случае характеризуется отношением $x : y$ координат точки P , поэтому формула (9) для вычисления нормальной

кривизны принимает вид $k_n = \frac{b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2}{\gamma_{11}x^2 + 2\gamma_{12}xy + \gamma_{22}y^2}$. Возводя обе части равенства (10) скалярно в квадрат, получим $\gamma_{11}x^2 + 2\gamma_{12}xy + \gamma_{22}y^2 = \frac{\gamma_{11}x^2 + 2\gamma_{12}xy + \gamma_{22}y^2}{|b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2|}$, откуда следует

$$|b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2| = 1. \tag{11}$$

Мы получили уравнение индикатрисы Дюпена поверхности F в точке M . Отсюда следует, что индикатриса Дюпена представляет собой кривую второго порядка. Обозначим через b инвариант кривой (11), $b = b_{11}b_{22} - b_{12}^2$, и рассмотрим три случая.

1. $b > 0$. Уравнение (11) определяет эллипс (рис. 250 а). В этом случае точка M называется *эллиптической*. Частным случаем является *омбилическая* точка, в которой индикатриса Дюпена совпадает с окружностью.

2. $b < 0$. Уравнение (11) определяет пару сопряженных гипербол (рис. 250 б). В этом случае точка M называется *гиперболической*.

3. $b = 0$. Уравнение (11) определяет пару параллельных прямых (рис. 250 в). В этом случае точка M называется *параболической*.

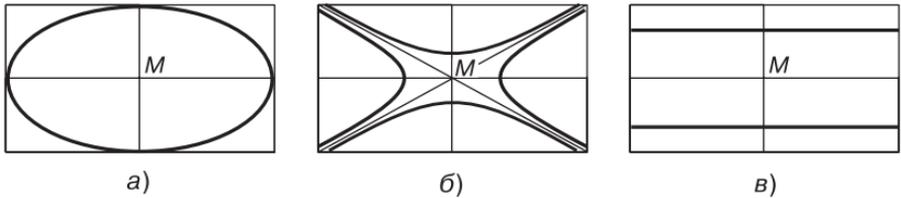


Рис. 250

Пример 3. Выяснить, какому типу принадлежат точки прямого геликоида.

Решение. В примере 1 мы видели, что в каждой точке прямого геликоида выполняются равенства $b_{11} = b_{22} = 0$, $b_{12} = \frac{-a}{\sqrt{u^2 + a^2}}$, следовательно, $b = b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = \frac{-a^2}{u^2 + a^2} < 0$. Таким образом, прямой геликоид целиком состоит из гиперболических точек.

§ 56. ГЛАВНЫЕ КРИВИЗНЫ. ПОЛНАЯ И СРЕДНЯЯ КРИВИЗНЫ ПОВЕРХНОСТИ

В этом параграфе мы рассмотрим те числовые характеристики гладкой поверхности, которые позволяют дать ее локальное описание.

Пусть C^r -поверхность F , $r \geq 3$, задана уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in G$.

Главные кривизны поверхности

На поверхности F фиксируем точку M .

Определение 1. Главные направление индикатрисы Дюпена в точке M называются главными направлениями поверхности F в этой точке.

Если точка M поверхности F не является омбилической, т.е. индикатриса Дюпена не представляет собой окружность, то в этой точке существует единственная пара главных направлений. Будем считать, что они определяются векторами $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$ и $\delta\vec{r} = \vec{r}_u \delta u + \vec{r}_v \delta v$. Согласно определению 1, векторы $d\vec{r}$ и $\delta\vec{r}$ ортогональны и сопряжены относительно индикатрисы Дюпена, следовательно, выполняются два условия (см. [2]):

1) условие ортогональности $d\vec{r} \cdot \delta\vec{r} = 0$ или

$$\gamma_{11} du \delta u + \gamma_{12} du \delta v + \gamma_{21} dv \delta u + \gamma_{22} dv \delta v = 0; \quad (1)$$

2) условие сопряженности

$$b_{11} du \delta u + b_{12} du \delta v + b_{21} dv \delta u + b_{22} dv \delta v = 0. \quad (2)$$

Учитывая равенства (6) из § 55, заключаем, что условие сопряженности может быть записано в виде $d\vec{n} \cdot \delta\vec{r} = 0$, где $d\vec{n} = \vec{n}_u du + \vec{n}_v dv$ — дифференциал единичного вектора главной нормали, соответствующий смещению $d\vec{r}$ точки M . Таким образом, векторы $d\vec{r}$ и $\delta\vec{r}$ определяют главные направления в точке M на поверхности F тогда и только тогда, когда

$$d\vec{r} \cdot \delta\vec{r} = d\vec{n} \cdot \delta\vec{r} = 0. \quad (3)$$

Поскольку вектор $\delta\vec{r}$ ненулевой δu , δv не обращаются в нуль одновременно. Рассматривая равенства (1) и (2) как однородную систему линейных уравнений относительно переменных δu , δv , получим, что определитель матрицы этой

системы равен нулю:
$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} du + \gamma_{21} dv & \gamma_{12} du + \gamma_{22} dv \\ b_{11} du + b_{21} dv & b_{12} du + b_{22} dv \end{vmatrix} = 0$$
 или

$$(du)^2 \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ b_{11} & b_{12} \end{vmatrix} + du dv \left(\begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{22} \\ b_{11} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma_{21} & \gamma_{12} \\ b_{21} & b_{12} \end{vmatrix} \right) + (dv)^2 \begin{vmatrix} \gamma_{21} & \gamma_{22} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Из этого уравнения находим главные направления в точке M .

Пример 1. Найти главные направления в каждой точке прямого геликоида.

Решение. Рассмотрим прямой геликоид, заданный векторным уравнением $\vec{r}(u, v) = u \cos v \vec{i} + u \sin v \vec{j} + av\vec{k}$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Мы видели, что $\gamma_{11} = 1$, $\gamma_{12} = 0$, $\gamma_{22} = u^2 + a^2$ и $b_{11} = b_{22} = 0$, $b_{12} = \frac{-a}{\sqrt{u^2 + a^2}}$, следовательно, уравнение (4) примет вид

$(du)^2 - (u^2 + a^2)(dv)^2 = 0$, откуда $du = \pm \sqrt{u^2 + a^2} dv$. Таким образом, в каждой точке геликоида главные направления определяются векторами $\vec{p}_1 = \sqrt{u^2 + a^2} \vec{r}_u + \vec{r}_v$ и $\vec{p}_2 = -\sqrt{u^2 + a^2} \vec{r}_u + \vec{r}_v$. Поскольку $\vec{r}_u = \cos v \vec{i} + \sin v \vec{j}$ и $\vec{r}_v = -u \sin v \vec{i} + u \cos v \vec{j} + a \vec{k}$, находим векторы

$$\vec{p}_1 = \left(\sqrt{u^2 + a^2} \cos v - u \sin v \right) \vec{i} + \left(\sqrt{u^2 + a^2} \sin v + u \cos v \right) \vec{j} + a \vec{k}$$

и

$$\begin{aligned} \vec{p}_2 &= \left(-\sqrt{u^2 + a^2} \cos v - u \sin v \right) \vec{i} + \\ &+ \left(-\sqrt{u^2 + a^2} \sin v + u \cos v \right) \vec{j} + a \vec{k}. \end{aligned}$$

Докажем, что главные направления прямого геликоида в каждой точке делят пополам углы между его координатными линиями. В данном случае векторы \vec{r}_u и \vec{r}_v ортогональны, поэтому достаточно доказать, что $\angle(\vec{r}_u, \vec{p}_1) = \frac{\pi}{4}$. Получим: $\vec{r}_u \cdot \vec{p}_1 = \vec{r}_u \cdot (\sqrt{u^2 + a^2} \vec{r}_u + \vec{r}_v) = \sqrt{u^2 + a^2}$

и $\vec{p}_1^2 = (\sqrt{u^2 + a^2} \vec{r}_u + \vec{r}_v)^2 = 2(u^2 + a^2)$, а значит, $|\vec{p}_1| = \sqrt{2(u^2 + a^2)}$. Учитывая, что $|\vec{r}_u| = 1$, находим $\cos \angle(\vec{r}_u, \vec{p}_1) = \frac{\vec{r}_u \cdot \vec{p}_1}{|\vec{r}_u| |\vec{p}_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Утверждение доказано.

Определение 2. *Нормальные кривизны по главным направлениям в точке M называются главными кривизнами поверхности F в этой точке.*

Пример 2. *Найти главные кривизны в каждой точке прямого геликоида.*

Решение. В примере 1 мы видели, что главные направления прямого геликоида определяются равенством $du = \pm\sqrt{u^2 + a^2} dv$. Формула (9) из § 55, в которой $\gamma_{11} = 1$, $\gamma_{12} = 0$, $\gamma_{22} = u^2 + a^2$ и $b_{11} = b_{22} = 0$, $b_{12} = \frac{-a}{\sqrt{u^2 + a^2}}$, позволяет найти нормальные кривизны по главным направлениям $k_n = \mp \frac{a}{u^2 + a^2}$. Таким образом, в каждой точке прямого геликоида главные кривизны по главным направлениям $\vec{p}_1 = \sqrt{u^2 + a^2}\vec{r}_u + \vec{r}_v$ и $\vec{p}_2 = -\sqrt{u^2 + a^2}\vec{r}_u + \vec{r}_v$ равны $k_1 = -\frac{a}{u^2 + a^2}$ и $k_2 = \frac{a}{u^2 + a^2}$.

Определение 3. *Гладкая линия на поверхности F называется линией кривизны, если в каждой точке этой линии направление касательной является главным.*

Ясно, что если точка M поверхности F не является омбилической, то через нее проходят две линии кривизны.

Пусть координатная сеть на поверхности F образована линиями кривизны. Тогда из условий (3) следует, что $\gamma_{12} = b_{12} = 0$ и формула (9) из § 55 для нахождения нормальной кривизны в произвольном направлении примет вид

$$k_n = \frac{b_{11}(du)^2 + b_{22}(dv)^2}{\gamma_{11}(du)^2 + \gamma_{22}(dv)^2}. \quad (5)$$

В рассматриваемом случае главные кривизны k_1 и k_2 являются нормальными кривизнами вдоль линий u и v . По формуле (5) находим $k_1 = \frac{b_{11}}{\gamma_{11}}$ и $k_2 = \frac{b_{22}}{\gamma_{22}}$, откуда $b_{11} = k_1\gamma_{11}$ и $b_{22} = k_2\gamma_{22}$. Саму формулу (5) теперь можно записать так:

$$k_n = k_1 \frac{\gamma_{11}(du)^2}{\gamma_{11}(du)^2 + \gamma_{22}(dv)^2} + k_2 \frac{\gamma_{22}(dv)^2}{\gamma_{11}(du)^2 + \gamma_{22}(dv)^2}. \quad (6)$$

Пусть направление на поверхности определяет единичный вектор $\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{r}_u \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \frac{dv}{ds}$. Поскольку векторы \vec{r}_u

и \vec{r}_v ортогональны, имеем $\vec{\tau} = \frac{\vec{r}_u}{\sqrt{\gamma_{11}}} \cos \alpha + \frac{\vec{r}_v}{\sqrt{\gamma_{22}}} \sin \alpha$, где $\alpha = \angle(\vec{r}_u, \vec{\tau})$. Имеем $\frac{du}{ds} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\gamma_{11}}}$ и $\frac{dv}{ds} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\gamma_{22}}}$, следовательно, $\cos^2 \alpha = \frac{\gamma_{11}(du)^2}{(ds)^2}$ и $\sin^2 \alpha = \frac{\gamma_{22}(dv)^2}{(ds)^2}$. Отсюда и из равенства (6) окончательно получаем, что нормальная кривизна в направлении $\vec{\tau}$ вычисляется по формуле Эйлера $k_n = k_1 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha$.

Полная и средняя кривизны поверхности

Для нахождения главных кривизн используется следующее утверждение.

Теорема 1 (теорема Родрига). Для того, чтобы направление $d\vec{r}$ в точке M поверхности F было главным, необходимо и достаточно, чтобы $d\vec{n} = -k d\vec{r}$ (формула Родрига). Здесь $d\vec{n}$ — дифференциал единичного вектора главной нормали, соответствующий смещению $d\vec{r}$ точки M , а k — нормальная кривизна в этом направлении.

Доказательство. Необходимость. Пусть вектор $d\vec{r}$ определяет главное направление в точке M . Единичный вектор \vec{n} ортогонален вектору $d\vec{n}$, следовательно, вектор $d\vec{n}$ принадлежит касательному пространству T_M . Обозначим второе главное направление в точке M через $\delta\vec{r}$. Из условия (3) следует, что векторы $d\vec{r}$ и $d\vec{n}$ коллинеарны. Имеем $d\vec{n} = \lambda d\vec{r}$, откуда $d\vec{n} \cdot d\vec{r} = \lambda (d\vec{r})^2$. Поскольку $(d\vec{r})^2 = (ds)^2$ и $\varphi = -d\vec{n} \cdot d\vec{r}$, получаем $\lambda = -\frac{\varphi}{(ds)^2} = -k$, а значит, $d\vec{n} = -k d\vec{r}$.

Достаточность. Пусть справедлива формула Родрига. В касательном пространстве T_M выберем направление $\delta\vec{r}$, ортогональное направлению $d\vec{r}$, так что $d\vec{r} \cdot \delta\vec{r} = 0$. Поскольку $d\vec{n} = -k d\vec{r}$, имеем $d\vec{n} \cdot \delta\vec{r} = (-k d\vec{r}) \cdot \delta\vec{r} = 0$. Условие (3) выполнено, следовательно, направление $d\vec{r}$ является главным. Теорема доказана.

В формуле Родрига число k представляет собой главную кривизну по главному направлению $d\vec{r}$. Запишем формулу Родрига подробнее: $\vec{n}_u du + \vec{n}_v dv = -k(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)$, и умножим скалярно обе части этого равенства сначала на \vec{r}_u , а затем на \vec{r}_v . Используя формулы для коэффициентов первой и второй квадратичных форм поверхности,

получим:

$$\begin{aligned}(b_{11} - k\gamma_{11})du + (b_{12} - k\gamma_{12})dv &= 0, \\ (b_{21} - k\gamma_{21})du + (b_{22} - k\gamma_{22})dv &= 0.\end{aligned}\quad (7)$$

Поскольку вектор $d\vec{r}$ ненулевой, du , dv не обращаются в нуль одновременно. Рассматривая равенства (7) как однородную систему линейных уравнений относительно переменных du , dv , получим, что определитель матрицы этой системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} b_{11} - k\gamma_{11} & b_{12} - k\gamma_{12} \\ b_{21} - k\gamma_{21} & b_{22} - k\gamma_{22} \end{vmatrix} = 0 \text{ или}$$

$$k^2 \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{vmatrix} - k \left(\begin{vmatrix} \gamma_{11} & b_{12} \\ \gamma_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & \gamma_{12} \\ b_{21} & \gamma_{22} \end{vmatrix} \right) + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

Таким образом, главные кривизны k_1 и k_2 поверхности F в точке M являются корнями квадратного уравнения (8).

Определение 4. Полусумма главных кривизн $H = \frac{k_1 + k_2}{2}$ называется средней кривизной поверхности F в точке M . Произведение главных кривизн $K = k_1 k_2$ называется полной или гауссовой кривизной поверхности F в точке M .

Из уравнения (8) по формулам Виета находим

$$H = \frac{1}{2} \cdot \frac{\begin{vmatrix} \gamma_{11} & b_{12} \\ \gamma_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & \gamma_{12} \\ b_{21} & \gamma_{22} \end{vmatrix}}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}, \quad (9)$$

$$K = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}. \quad (10)$$

Так как $\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2 > 0$, то в эллиптических точках $K > 0$, в гиперболических точках $K < 0$, в параболических точках $K = 0$.

Пример 3. Найти среднюю и полную кривизны прямого геликоида.

Решение. Для прямого геликоида из примера 1 коэффициенты его квадратичных форм имеют такие значения:

$$\gamma_{11} = 1, \quad \gamma_{12} = 0, \quad \gamma_{22} = u^2 + a^2, \quad b_{11} = b_{22} = 0, \quad b_{12} = \frac{-a}{\sqrt{u^2 + a^2}},$$

поэтому уравнение (8) примет вид $k^2(u^2 + a^2) - \frac{a^2}{u^2 + a^2} = 0$.

Корни $k_1 = -\frac{a}{u^2 + a^2}$ и $k_2 = \frac{a}{u^2 + a^2}$ этого уравнения являются главными кривизнами в каждой точке прямого геликоида, что полностью согласуется с результатом примера 2. Теперь среднюю и полную кривизны можно найти либо по определению 3, либо непосредственно по формулам (9) и (10). Получим $H = 0$ и $K = \frac{-a^2}{(u^2 + a^2)^2} < 0$, так что все точки прямого геликоида являются гиперболическими.

Поверхности вращения

Рассмотрим поверхность F , образованную вращением плоской линии γ вокруг некоторой оси. Выберем прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ так, чтобы осью вращения была ось Oz . В плоскости σ , содержащей линию γ , введем прямоугольную декартову систему координат Ouz , где $Ou = \sigma \cap Oxy$. Будем считать, что линия γ является гладкой и определяется в системе координат Ouz уравнением $z = f(u)$. Обозначим через φ угол xOu . Если φ изменяется в промежутке $[0, 2\pi)$, то каждая точка M линии γ описывает окружность γ_M , которая имеет центр в точке O' на оси Oz и лежит в плоскости, перпендикулярной этой оси. Тогда $F = \cup\{\gamma_M : M \in \gamma\}$ (рис. 251).

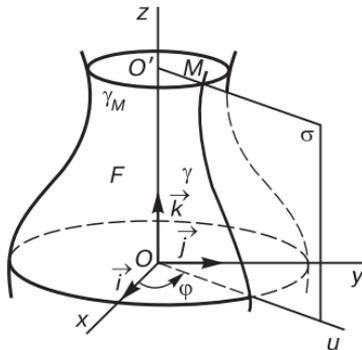


Рис. 251

Обозначив координаты точки M через x, y, z , получим параметрические уравнения поверхности вращения $F: x = u \cos \varphi, y = u \sin \varphi, z = f(u)$. Правые части

этих уравнений дифференцируемы в некоторой области G изменения параметров u и φ . При этом матрица $\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_\varphi & y_\varphi & z_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & f'(u) \\ -u \sin \varphi & u \cos \varphi & 0 \end{pmatrix}$ имеет ранг, равный двум, в любой точке $(u, \varphi) \in G$, если $u \neq 0$. Таким образом, фигура F , за исключением, быть может, ее точек, лежащих на оси вращения, является гладкой поверхностью. Эту поверхность можно задать векторным уравнением: $\vec{r}(u, \varphi) = u \cos \varphi \vec{i} + u \sin \varphi \vec{j} + f(u) \vec{k}$. Находим частные производные: $\vec{r}_u = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j} + f'(u) \vec{k}$, $\vec{r}_\varphi = -u \sin \varphi \vec{i} + u \cos \varphi \vec{j}$, $\vec{r}_{uu} = f''(u) \vec{k}$, $\vec{r}_{u\varphi} = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}$, $\vec{r}_{\varphi\varphi} = -u \cos \varphi \vec{i} - u \sin \varphi \vec{j}$. Тогда коэффициенты первой квадратичной формы равны $\gamma_{11} = \vec{r}_u^2 = 1 + f'^2(u)$, $\gamma_{12} = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_\varphi = 0$, $\gamma_{22} = \vec{r}_\varphi^2 = u^2$, следовательно, $\gamma = \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2 = u^2(1 + f'^2(u))$. Далее,

$$[\vec{r}_u, \vec{r}_\varphi] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos \varphi & \sin \varphi & f'(u) \\ -u \sin \varphi & u \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = -uf'(u) \cos \varphi \vec{i} - uf'(u) \sin \varphi \vec{j} +$$

$+ u\vec{k}$, поэтому $(\vec{r}_u, \vec{r}_\varphi, \vec{r}_{uu}) = [\vec{r}_u, \vec{r}_\varphi] \cdot \vec{r}_{uu} = uf''(u)$, $(\vec{r}_u, \vec{r}_\varphi, \vec{r}_{u\varphi}) = [\vec{r}_u, \vec{r}_\varphi] \cdot \vec{r}_{u\varphi} = 0$, $(\vec{r}_u, \vec{r}_\varphi, \vec{r}_{\varphi\varphi}) = [\vec{r}_u, \vec{r}_\varphi] \cdot \vec{r}_{\varphi\varphi} = u^2 f'(u)$. Тогда коэффициенты второй квадратичной формы равны

$$b_{11} = \frac{(\vec{r}_u, \vec{r}_\varphi, \vec{r}_{uu})}{\sqrt{\gamma}} = \frac{uf''(u)}{\sqrt{u^2(1 + f'^2(u))}}, \quad b_{12} = \frac{(\vec{r}_u, \vec{r}_\varphi, \vec{r}_{u\varphi})}{\sqrt{\gamma}} = 0,$$

$$b_{22} = \frac{(\vec{r}_u, \vec{r}_\varphi, \vec{r}_{\varphi\varphi})}{\sqrt{\gamma}} = \frac{u^2 f'(u)}{\sqrt{u^2(1 + f'^2(u))}}, \quad \text{следовательно,}$$

$$b = b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = \frac{uf'(u)f''(u)}{1 + f'^2(u)}. \quad \text{Таким образом, в каждой точке}$$

поверхности F , не лежащей на оси Oz , полная кривизна равна

$$K = \frac{b}{\gamma} = \frac{f'(u)f''(u)}{u(1 + f'^2(u))^2}. \quad (11)$$

Поскольку $\gamma_{12} = b_{12} = 0$, линиями кривизны на поверхности вращения являются параллели и меридианы.

В следующих примерах рассматриваются два частных случая поверхности вращения.

Пример 4. Найти полную кривизну сферы радиуса a .

Решение. Сфера радиуса a с центром в начале координат может быть получена вращением вокруг оси Oz полуокружности γ , заданной уравнением вида

$z = f(u)$, где $f(u) = \sqrt{a^2 - u^2}$. Поскольку $f'(u) = \frac{-u}{\sqrt{a^2 - u^2}}$

и $f''(u) = \frac{-a^2}{(a^2 - u^2)\sqrt{a^2 - u^2}}$, по формуле (11) находим $K = \frac{1}{a^2}$.

Таким образом, сфера является поверхностью постоянной положительной кривизны.

Пример 5. Найти полную кривизну псевдосферы, полученной вращением вокруг оси Oz трактрисы с параметрическими уравнениями $z = a \left(\ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t \right)$, $u = a \sin t$.

Решение. Так как $z'_t = \frac{dz}{dt} = \frac{a \cos^2 t}{\sin t}$ и $u'_t = \frac{du}{dt} = a \cos t$, то

$$f'(u) = \frac{z'_t}{u'_t} = \operatorname{ctg} t \text{ и } f''(u) = \frac{\frac{d}{dt} f'(u)}{u'_t} = \frac{-1}{a \sin^2 t \cos t}.$$

По формуле (11) находим $K = -\frac{1}{a^2}$. Таким образом,

псевдосфера является поверхностью постоянной отрицательной кривизны. В заключение отметим характеризующее трактрису свойство, которое состоит в том, что отрезок касательной от точки касания до оси Oz имеет постоянную длину a (рис. 252).

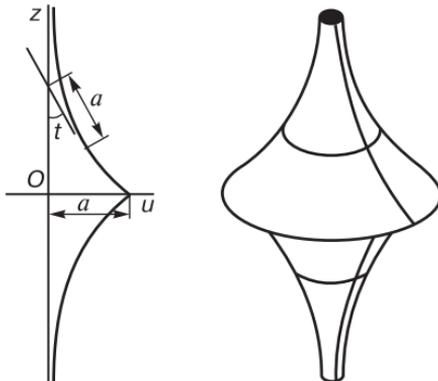


Рис. 252

§ 57. ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ ПОВЕРХНОСТИ. ТЕОРЕМА ГАУССА. ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ КРИВИЗНА

Внутренняя геометрия поверхности изучает такие ее свойства, которые определяются только первой квадратичной формой. Сюда относятся, в частности, задачи о вычислении длины дуги линии на поверхности, угла между линиями, площади участка поверхности. Пусть C^r -поверхность F , $r \geq 3$, задана уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in G$.

Деривационные формулы

Векторы $\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$, $\vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$, $\vec{n} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{\|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]\|}$ линейно независимы и образуют базис положительной ориентации в каждой точке M поверхности F . Частные производные \vec{r}_{uu} , \vec{r}_{uv} , \vec{r}_{vv} , \vec{n}_u , \vec{n}_v можно разложить по векторам указанного базиса:

$$\begin{aligned}\vec{r}_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \vec{r}_u + \Gamma_{11}^2 \vec{r}_v + \lambda_{11} \vec{n}, \\ \vec{r}_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \vec{r}_u + \Gamma_{12}^2 \vec{r}_v + \lambda_{12} \vec{n},\end{aligned}\quad (1)$$

$$\vec{r}_{vv} = \Gamma_{22}^1 \vec{r}_u + \Gamma_{22}^2 \vec{r}_v + \lambda_{22} \vec{n},$$

$$\vec{n}_u = \alpha_1^1 \vec{r}_u + \alpha_1^2 \vec{r}_v, \quad \vec{n}_v = \alpha_2^1 \vec{r}_u + \alpha_2^2 \vec{r}_v. \quad (2)$$

В формулах (2) мы учли, что единичный вектор \vec{n} ортогонален векторам \vec{r}_u , \vec{r}_v , потому эти векторы раскладываются только по векторам \vec{r}_u , \vec{r}_v .

Определение 1. Формулы (1) и (2) называются *деривационными формулами поверхности F* .

Покажем, что коэффициенты правых частей деривационных формул можно выразить через коэффициенты первой и второй квадратичных форм и их производные.

1. *Отыскание коэффициентов α_i^j* . Умножим скалярно обе части равенств (2) сначала на \vec{r}_u , а затем на \vec{r}_v . Используя формулы (6) из § 54 и § 55, получим две системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} \gamma_{11} \alpha_1^1 + \gamma_{12} \alpha_1^2 = -b_{11}, \\ \gamma_{21} \alpha_1^1 + \gamma_{22} \alpha_1^2 = -b_{12}, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \gamma_{11} \alpha_2^1 + \gamma_{12} \alpha_2^2 = -b_{21}, \\ \gamma_{21} \alpha_2^1 + \gamma_{22} \alpha_2^2 = -b_{22}. \end{cases} \quad (4)$$

Каждая из этих систем имеет единственное решение, поскольку определитель их матрицы $\gamma = \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2 > 0$. По правилу Крамера находим:

$$\alpha_1^1 = \frac{-\gamma_{22}b_{11} + \gamma_{12}b_{12}}{\gamma}, \quad \alpha_1^2 = \frac{-\gamma_{11}b_{12} + \gamma_{21}b_{11}}{\gamma},$$

$$\alpha_2^1 = \frac{-\gamma_{22}b_{21} + \gamma_{12}b_{22}}{\gamma}, \quad \alpha_2^2 = \frac{-\gamma_{11}b_{22} + \gamma_{21}b_{21}}{\gamma}. \quad (5)$$

2. *Отыскание коэффициентов λ_{ij} .* Умножим обе части равенств (1) скалярно на \vec{n} . Используя формулы (5) из § 55, получим:

$$\lambda_{11} = b_{11}, \quad \lambda_{12} = b_{12}, \quad \lambda_{22} = b_{22}. \quad (6)$$

3. *Отыскание коэффициентов Γ_{ij}^k .* Умножим скалярно обе части равенств (1) сначала на \vec{r}_u , а затем на \vec{r}_v . Используя формулы (6) из § 54, получим три системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} \gamma_{11}\Gamma_{11}^1 + \gamma_{12}\Gamma_{11}^2 = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_{uu}, \\ \gamma_{21}\Gamma_{11}^1 + \gamma_{22}\Gamma_{11}^2 = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_{uu}, \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \gamma_{11}\Gamma_{12}^1 + \gamma_{12}\Gamma_{12}^2 = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_{uv}, \\ \gamma_{21}\Gamma_{12}^1 + \gamma_{22}\Gamma_{12}^2 = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_{uv}, \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \gamma_{11}\Gamma_{22}^1 + \gamma_{12}\Gamma_{22}^2 = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_{vv}, \\ \gamma_{21}\Gamma_{22}^1 + \gamma_{22}\Gamma_{22}^2 = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_{vv}. \end{cases} \quad (9)$$

Определение 2. Свободные коэффициенты систем (7), (8), (9) называются символами Кристоффеля первого рода.

Найдем символы Кристоффеля первого рода. Имеем $\frac{\partial \vec{r}_u^2}{\partial u} = 2(\vec{r}_u \cdot \vec{r}_{uu})$, $\frac{\partial \vec{r}_u^2}{\partial v} = 2(\vec{r}_u \cdot \vec{r}_{uv})$, $\frac{\partial \vec{r}_v^2}{\partial u} = 2(\vec{r}_v \cdot \vec{r}_{uv})$, $\frac{\partial \vec{r}_v^2}{\partial v} = 2(\vec{r}_v \cdot \vec{r}_{vv})$, откуда $\vec{r}_u \cdot \vec{r}_{uu} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{11}}{\partial u}$, $\vec{r}_u \cdot \vec{r}_{uv} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{11}}{\partial v}$, $\vec{r}_v \cdot \vec{r}_{uv} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{22}}{\partial u}$, $\vec{r}_v \cdot \vec{r}_{vv} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{22}}{\partial v}$. Далее, $\frac{\partial(\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)}{\partial u} = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_{uv} + \vec{r}_v \cdot \vec{r}_{uu}$, $\frac{\partial(\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)}{\partial v} = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_{vv} + \vec{r}_v \cdot \vec{r}_{uv}$, следовательно, $\vec{r}_v \cdot \vec{r}_{uu} = \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{11}}{\partial v}$, $\vec{r}_u \cdot \vec{r}_{vv} = \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{22}}{\partial u}$.

Таким образом, символы Кристоффеля первого рода выражаются только через производные коэффициентов первой квадратичной формы. Каждая из систем (7), (8), (9) имеет

единственное решение, поскольку определитель их матрицы $\gamma = \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2 > 0$.

Определение 3. Коэффициенты Γ_{ij}^k называются символами Кристоффеля второго рода.

Символы Кристоффеля второго рода являются решениями систем (7), (8), (9), а значит, выражаются только через коэффициенты первой квадратичной формы и их производные.

Одним из основных утверждений внутренней геометрии поверхности является следующая теорема.

Теорема 1 (теорема Гаусса). Полная кривизна гладкой поверхности F выражается только через коэффициенты первой квадратичной формы и их производные.

Доказательство. Воспользуемся деривационными формулами. Дифференцируя первое из уравнений (1) по v и учитывая формулы (6), находим: $\vec{r}_{uvv} = \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial v} \vec{r}_u + \Gamma_{11}^1 \vec{r}_{uv} + \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} \vec{r}_v + \Gamma_{11}^2 \vec{r}_{vv} + \frac{\partial b_{11}}{\partial v} \vec{n} + b_{11} \vec{n}_v$. Подставив сюда выражения для \vec{r}_{uv} , \vec{r}_{vv} , \vec{n}_v из деривационных формул, получим разложение вектора \vec{r}_{uvv} по базисным векторам \vec{r}_u , \vec{r}_v , \vec{n} :

$$\begin{aligned} \vec{r}_{uvv} = & \left(\frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial v} + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2 + b_{11} \alpha_2^1 \right) \vec{r}_u + \\ & + \left(\frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + b_{11} \alpha_2^2 \right) \vec{r}_v + \\ & + \left(\frac{\partial b_{11}}{\partial v} + \Gamma_{11}^1 b_{12} + \Gamma_{11}^2 b_{22} \right) \vec{n}. \end{aligned}$$

Аналогично, дифференцируя второе из уравнений (1) по u , получим:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{uvu} = & \left(\frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial u} + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 + b_{12} \alpha_1^1 \right) \vec{r}_u + \\ & + \left(\frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u} + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 + b_{12} \alpha_1^2 \right) \vec{r}_v + \\ & + \left(\frac{\partial b_{12}}{\partial u} + \Gamma_{12}^1 b_{11} + \Gamma_{12}^2 b_{12} \right) \vec{n}. \end{aligned}$$

Поскольку $\vec{r}_{uvv} = \vec{r}_{uvu}$, можно приравнять коэффициенты при \vec{r}_v : $\frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + b_{11} \alpha_2^2 = \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u} + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 +$

+ $b_{12}\alpha_1^2$. Отсюда следует

$$b_{11}\alpha_2^2 - b_{12}\alpha_1^2 = \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u} - \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2. \quad (10)$$

Используя формулы (5), находим:

$$\begin{aligned} b_{11}\alpha_2^2 - b_{12}\alpha_1^2 &= \frac{b_{11}(-\gamma_{11}b_{22} + \gamma_{21}b_{21}) - b_{12}(-\gamma_{11}b_{12} + \gamma_{21}b_{11})}{\gamma} = \\ &= \frac{-\gamma_{11}(b_{11}b_{22} - b_{12}^2)}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2} = -\gamma_{11}K. \end{aligned}$$

Тогда формула (10) примет вид

$$K = \frac{1}{\gamma_{11}} \left(\frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} - \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u} + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)^2 \right).$$

Таким образом, полная кривизна K поверхности F выражается только через коэффициенты первой квадратичной формы и их производные. Теорема доказана.

Геодезическая кривизна линии на поверхности

Пусть на поверхности F гладкая линия γ задана внутренними уравнениями $u = u(s), v = v(s)$, где параметр s является естественным. В § 56 мы нашли вектор кривизны линии γ в ее точке M :

$$k\vec{v} = \vec{r}_{uu} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2\vec{r}_{uv} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \vec{r}_{vv} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + \vec{r}_u \frac{d^2u}{ds^2} + \vec{r}_v \frac{d^2v}{ds^2}.$$

Подставив сюда выражения для \vec{r}_{uu} , \vec{r}_{uv} , \vec{r}_{vv} из дериационных формул, получим, что

$$k\vec{v} = \vec{k}_T + \vec{k}_N, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{k}_T &= \left(\Gamma_{11}^1 \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2\Gamma_{12}^1 \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + \frac{d^2u}{ds^2} \right) \vec{r}_u + \\ &+ \left(\Gamma_{11}^2 \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2\Gamma_{12}^2 \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \Gamma_{22}^2 \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + \frac{d^2v}{ds^2} \right) \vec{r}_v, \quad (12) \end{aligned}$$

$$\vec{k}_N = \left(b_{11} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2b_{12} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + b_{22} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \right) \vec{n}. \quad (13)$$

В этих формулах вектор \vec{k}_T принадлежит касательному пространству T_M , а вектор \vec{k}_N параллелен нормали к поверхности F в точке M .

Определение 4. Вектор \vec{k}_T называется вектором геодезической кривизны линии γ в точке M .

Поскольку векторы $k\vec{v}$ и \vec{k}_N ортогональны единичному вектору $\vec{\tau}$ касательной к линии γ в точке M , вектор \vec{k}_T коллинеарен вектору $\vec{g} = [\vec{\tau}, \vec{n}]$. Имеем:

$$\vec{k}_T = k_g \vec{g}. \quad (14)$$

Определение 5. Число k_g называется геодезической кривизной линии γ в точке M .

Учитывая, что вектор \vec{g} единичный, из формулы (14) находим $|k_g| = |\vec{k}_T|$. Отсюда и из формулы (12) следует, что геодезическая кривизна линии выражается только через коэффициенты первой квадратичной формы и их производные.

Заметим, что в формуле (13) коэффициентом при векторе \vec{n} служит нормальная кривизна k_n линии γ в точке M , поэтому формула (11) примет вид

$$k\vec{v} = k_g \vec{g} + k_n \vec{n}, \quad (15)$$

откуда

$$(\vec{\tau}, \vec{n}, k\vec{v}) = k_g (\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{g}) = k_g. \quad (16)$$

Пример 1. Найти геодезическую кривизну координатной линии u прямого геликоида.

Решение. Рассмотрим прямой геликоид, заданный векторным уравнением $\vec{r}(u, v) = u \cos v \vec{i} + u \sin v \vec{j} + av\vec{k}$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, и найдем кривизну винтовой линии $u = c$. Так как $\vec{r}_u = \cos v \vec{i} + \sin v \vec{j}$ и $\vec{r}_v = -u \sin v \vec{i} + u \cos v \vec{j} + a\vec{k}$,

$$\text{то } [\vec{r}_u, \vec{r}_v] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & a \end{vmatrix} = a \sin v \vec{i} - a \cos v \vec{j} + u \vec{k}$$

$$\text{и } |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| = \sqrt{u^2 + a^2}, \text{ следовательно, } \vec{n} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}} (a \sin v \vec{i} - a \cos v \vec{j} + u \vec{k}). \quad \text{Данная винто-$$

вая линия определяется векторным уравнением $\vec{r}(v) = c \cos v \vec{i} + c \sin v \vec{j} + av\vec{k}$. Получим $\frac{d\vec{r}}{dv} = -c \sin v \vec{i} + c \cos v \vec{j} + a\vec{k}$,

откуда следует, что $\left| \frac{d\vec{r}}{dv} \right| = \sqrt{u^2 + a^2} = \frac{ds}{dv}$, где s —

естественный параметр, так что $\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dv} \frac{dv}{ds} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 + c^2}} (-c \sin v \vec{i} + c \cos v \vec{j} + a \vec{k}). \text{ Далее, } k\vec{v} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{d\vec{\tau}}{dv} \frac{dv}{ds} =$$

$$= \frac{-c}{a^2 + c^2} (\cos v \vec{i} + \sin v \vec{j}). \text{ В итоге, при } u = c \text{ из (16) следует:}$$

$$k_g = (\vec{\tau}, \vec{n}, k\vec{v}) = \frac{-c}{(a^2 + c^2)^2} \begin{vmatrix} -c \sin v & c \cos v & a \\ a \sin v & -a \cos v & c \\ \cos v & \sin v & 0 \end{vmatrix} = \frac{-c}{a^2 + c^2}.$$

Геодезические линии

Определение 6. Гладкая линия γ на поверхности F называется геодезической, если в каждой ее точке геодезическая кривизна равна нулю.

Из формулы (15) следует, что $k_g = 0$ тогда и только тогда, когда векторы $k\vec{v}$ и \vec{n} коллинеарны. Поскольку $k\vec{v}$ есть вектор кривизны линии γ , он в соответствующей точке параллелен соприкасающейся плоскости этой линии. Таким образом, геодезическая линия характеризуется тем свойством, что в каждой ее точке соприкасающаяся плоскость проходит через нормаль к поверхности в этой точке. В качестве примера рассмотрим сферу. Из свойств ее больших окружностей следует утверждение: на сфере большие окружности являются геодезическими линиями.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть дана некоторая точка M_0 поверхности F . Тогда через каждую точку M поверхности F по каждому направлению в достаточно малой окрестности на поверхности точки M_0 проходит единственная геодезическая линия.

Доказательство. Пусть гладкая линия на поверхности F имеет внутренние уравнения $u = u(s)$, $v = v(s)$, где s — естественный параметр. По формуле (14), данная линия является геодезической тогда и только тогда, когда $\vec{k}_T = \vec{0}$. Поэтому формула (12) приводит к следующей системе дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{ds^2} + \Gamma_{11}^1 \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\Gamma_{12}^1 \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 0, \\ \frac{d^2v}{ds^2} + \Gamma_{11}^2 \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\Gamma_{12}^2 \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \Gamma_{22}^2 \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Поскольку F представляет собой C^r -поверхность, $r \geq 3$, функции $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k(u, v)$ непрерывны в области G изменения параметров u, v . В теории дифференциальных уравнений доказано, что такая система (17) в достаточно малой окрестности точки $(u_0, v_0) \in G$ имеет единственное решение при заданных начальных значениях

$$u|_{s=s_0} = u_0, \quad v|_{s=s_0} = v_0, \quad \left. \frac{du}{ds} \right|_{s=s_0} = a, \quad \left. \frac{dv}{ds} \right|_{s=s_0} = b, \quad (18)$$

где хотя бы одно из чисел a, b отлично от нуля. Геометрический смысл этих начальных значений состоит в том, что произвольно заданной точке $(u_0, v_0) \in G$ соответствует точка $M_0 \in F$, а числа a, b определяют вектор касательной к линии γ в точке M_0 . Теорема доказана.

Пример 2. Если линия γ лежит на поверхности F и является частью некоторой прямой, то в каждой точке этой линии кривизна равна нулю. Тогда по формуле (11) получим, что $\vec{k}_T = \vec{0}$ в каждой точке линии γ , поэтому эта линия является геодезической. В частности, прямые линии на плоскости являются геодезическими. Из теоремы 1 теперь следует, что других геодезических линий на плоскости нет.

Пример 3. Найти геодезические линии сферы.

Решение. Поскольку через каждую точку сферы и по каждому направлению проходит единственная большая окружность, геодезическими линиями на сфере являются только большие окружности.

Полугеодезическая сеть

Введем определение, необходимое для дальнейшего изучения свойств геодезических линий.

Определение 7. Сеть на поверхности F называется полугеодезической, если она является ортогональной и одно из ее семейств состоит из геодезических линий.

Чтобы построить такую сеть, фиксируем гладкую линию γ , которая проходит на поверхности F через точку M . Пусть первое семейство образуют геодезические линии, ортогональные линии γ , а второе семейство состоит из ортогональных траекторий первого семейства (т. е. из таких линий, которые пересекают каждую линию первого

семейства под прямым углом). Поскольку линии каждого семейства получаются с помощью решения соответствующих систем дифференциальных уравнений, построенная сеть будет определена лишь на некотором участке F_0 поверхности F , содержащем точку M (рис. 253).

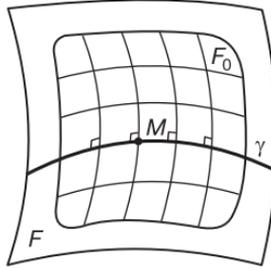


Рис. 253

Пусть на поверхности F_0 координатная сеть является полугеодезической с геодезическими линиями u . Линия u имеет внутренние уравнения $u = s, v = v_0$, следовательно, $\frac{du}{ds} = 1$ и $\frac{dv}{ds} = \frac{d^2v}{ds^2} = 0$. Далее, из второго уравнения системы (17) находим $\Gamma_{11}^2 = 0$. Наконец, условие ортогональности координатной сети дает $\gamma_{12} = \gamma_{21} = 0$. Подставим теперь эти данные во второе уравнение системы (7): $\gamma_{21}\Gamma_{11}^1 + \gamma_{22}\Gamma_{11}^2 = \frac{\partial\gamma_{12}}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial\gamma_{11}}{\partial v}$. Получим $\frac{\partial\gamma_{11}}{\partial v} = 0$, следовательно, γ_{11} — функция только одной переменной u : $\gamma_{11} = \gamma_{11}(u)$. Первая квадратичная форма поверхности F_0 примет вид $(ds)^2 = \gamma_{11}(u)(du)^2 + \gamma_{22}(u, v)(dv)^2$. Обозначим $\sqrt{\gamma_{11}(u)} du = d\bar{u}$, где $\bar{u} = \int \sqrt{\gamma_{11}(u)} du + c$. Тогда $(ds)^2 = (d\bar{u})^2 + \gamma_{22}(dv)^2$. Считая такую замену уже осуществленной, заключаем, что если на поверхности F_0 координатная сеть является полугеодезической с геодезическими линиями u , то первая квадратичная форма этой поверхности имеет вид

$$(ds)^2 = (du)^2 + \gamma_{22}(dv)^2. \tag{19}$$

Расстояние между точками на поверхности

Пусть на поверхности F даны две точки M_1, M_2 . Рассмотрим множество $\alpha(M_1, M_2)$ длин гладких дуг на поверхности F с концами в точках M_1, M_2 . Это множество ограничено снизу, например нулем, следовательно, оно имеет точную нижнюю грань.

Определение 8. Точная нижняя грань множества $\alpha(M_1, M_2)$ называется расстоянием между точками M_1, M_2 на поверхности F и обозначается $\rho_F(M_1, M_2)$.

Таким образом, $\rho_F(M_1, M_2) = \inf \alpha(M_1, M_2)$. Важнейшее свойство геодезической линии заключается в следующем:

Теорема 3. Если точки M_1, M_2 лежат на геодезической линии γ поверхности F и расстояние $\rho_F(M_1, M_2)$ достаточно мало, то это расстояние равно длине дуги линии γ с концами в точках M_1, M_2 .

Доказательство. На поверхности F через точку M_1 проведем гладкую линию γ_0 , ортогональную линии γ . Существует участок F_0 поверхности F , на котором координатной является полугеодезическая сеть, построенная с помощью линии γ_0 . Если расстояние $\rho_F(M_1, M_2)$ настолько мало, что точка M_2 лежит на поверхности F_0 , то $\rho_F(M_1, M_2) = \rho_{F_0}(M_1, M_2)$ (рис. 254).

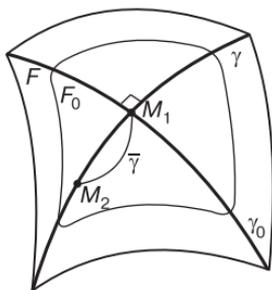


Рис. 254

Пусть произвольная гладкая дуга $\bar{\gamma}$ на поверхности F_0 с концами в точках M_1, M_2 имеет внутренние уравнения $u = u(t), v = v(t), a \leq t \leq b$, причем точки M_1, M_2 соответствуют параметрам a, b . Тогда длина \bar{s} дуги $\bar{\gamma}$ вычисляется по формуле

$$\bar{s} = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \gamma_{22} \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt \geq \int_a^b \left|\frac{du}{dt}\right| dt \geq \left|\int_a^b du\right| = |u(b) - u(a)|.$$

Поскольку линия $\gamma \cap F_0$ является одной из линий u , величина $s = |u(b) - u(a)|$ есть длина ее дуги с концами в точках M_1, M_2 . Таким образом, $\rho_F(M_1, M_2) = s$. Теорема доказана.

Свойства геодезических линий, установленные в теоремах 2 и 3, позволяют сделать вывод, что геодезические линии на поверхности являются аналогом прямых линий на плоскости.

Дефект геодезического треугольника

Рассмотрим на поверхности F участок F_0 , граница которого состоит из n гладких дуг $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, образующих в общих концах углы $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ (рис. 255).

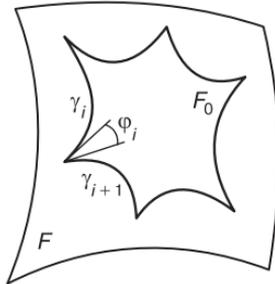


Рис. 255

Следующую теорему приведем без доказательства, его можно найти в пособии [20].

Теорема 4 (теорема Гаусса–Бонне). Для поверхности F_0 выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^n \oint_{\gamma_i} k_g ds + \sum_{i=1}^n (\pi - \varphi_i) = 2\pi - \iint_{F_0} K d\sigma, \quad (20)$$

где k_g — геодезическая кривизна линии γ_i , K — полная кривизна данной поверхности, $d\sigma$ — элемент ее площади.

Если граница поверхности F_0 состоит из трех дуг $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ геодезических линий, то такая поверхность называется геодезическим треугольником. В этом случае $n = 3$ и $k_g = 0$,

поэтому формула (20) примет вид $\sum_{i=1}^3 (\pi - \varphi_i) = 2\pi - \iint_{F_0} K d\sigma$
или

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \pi + \iint_{F_0} K d\sigma. \quad (21)$$

Отсюда легко получается следующая теорема.

Теорема 5. *Если во всех точках геодезического треугольника полная кривизна K имеет один и тот же знак или равна нулю, то сумма углов этого треугольника больше π , если $K > 0$; меньше π , если $K < 0$; равна π , если $K = 0$.*

Определение 9. *Число $\delta(F_0) = \pi - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3$ называется дефектом геодезического треугольника F_0 .*

Формулу (5) теперь можно записать так:

$$\delta(F_0) = - \iint_{F_0} K d\sigma. \quad (22)$$

Пример 4. *Найти дефект геодезического треугольника на плоскости.*

Решение. Пусть поверхность F является плоскостью. Тогда $K = 0$ и по формуле (22) находим $\delta(F_0) = 0$. Поскольку в данном случае F_0 есть обыкновенный треугольник, мы получаем хорошо известный из курса планиметрии результат: дефект треугольника на плоскости равен нулю, т. е. сумма его углов равна π .

Пример 5. *Найти дефект геодезического треугольника на сфере.*

Решение. Пусть поверхность F является сферой радиуса a . Тогда $K = \frac{1}{a^2}$ и по формуле (22) получаем $\delta(F_0) = -\frac{1}{a^2} \iint_{F_0} d\sigma = -\frac{1}{a^2} S(F_0)$, где $S(F_0)$ есть площадь сферического треугольника. Таким образом, дефект сферического треугольника отрицателен, а сумма его углов больше π .

Пусть граница сферического треугольника F_0 состоит из трех дуг больших окружностей, по которым пересекают сферу три попарно перпендикулярные плоскости, проходящие

через ее центр. Тогда $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \frac{\pi}{2}$, следовательно, $\delta(F_0) = -\frac{\pi}{2}$ и $S(F_0) = -a^2\delta(F_0) = \frac{\pi a^2}{2}$. Поскольку площадь данного сферического треугольника составляет восьмую часть площади всей сферы, мы получаем хорошо известный из курса стереометрии результат: площадь сферы радиуса a равна $4\pi a^2$.

Пример 6. *Найти дефект геодезического треугольника на псевдосфере.*

Решение. Пусть поверхность F является псевдосферой. Тогда $K = -\frac{1}{a^2}$ для некоторой константы a и по формуле (22) получаем $\delta(F_0) = \frac{1}{a^2} \iint_{F_0} d\sigma = \frac{1}{a^2} S(F_0)$, где $S(F_0)$

есть площадь геодезического треугольника на псевдосфере. Таким образом, дефект геодезического треугольника на псевдосфере отрицателен, а сумма его углов меньше π .

Геодезические линии на достаточно малом по диаметру участке псевдосферы служат аналогом прямых линий на плоскости. Поскольку сумма углов геодезического треугольника на этом участке меньше π , мы можем сделать вывод, что на псевдосфере реализуется «в малом» геометрия Лобачевского.

§ 58. ИЗОМЕТРИЧНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ. ИЗГИБАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ

В этом параграфе мы покажем, что предметом внутренней геометрии поверхности являются те ее свойства, которые можно установить путем непосредственных измерений по самой поверхности, не выходя за ее пределы.

Изометричные поверхности

Рассмотрим две C^r -поверхности F и F' , $r \geq 3$, такие что криволинейные координаты (u, v) поверхности F изменяются в области G , а криволинейные координаты (α, β) поверхности F' изменяются в области G' . Пусть биективное отображение $f: F \rightarrow F'$ ставит каждой точке $M(u, v)$ в соответствие точку $M'(\alpha, \beta)$. Уравнения $\alpha = \alpha(u, v)$, $\beta = \beta(u, v)$

определяют биективное отображение $f^*: G \rightarrow G'$. Будем считать, что $f^* \in C^r$. Тогда на поверхности F' получим ту же параметризацию (u, v) , что и на поверхности F . При этом соответствующие друг другу точки M и M' имеют одинаковые криволинейные координаты (u, v) .

Определение 1. Поверхности F и F' называются *изометричными*, если существует биективное отображение $f: F \rightarrow F'$, сохраняющее длину любой гладкой дуги, лежащей на поверхности F . Само отображение f называется *изометрией*.

Основным результатом в теории изометричных поверхностей является следующее утверждение.

Теорема. Две гладкие поверхности изометричны тогда и только тогда, когда они допускают такие параметризации, при которых в точках этих поверхностей с одинаковыми криволинейными координатами равны соответствующие коэффициенты их первых квадратичных форм.

Доказательство. Необходимость. Пусть даны две изометричные поверхности F и F' , а изометрию осуществляет отображение $f: F \rightarrow F'$. Мы видели, что данные поверхности допускают такую общую параметризацию (u, v) , что соответствующие в отображении f точки имеют одинаковые криволинейные координаты. Тогда произвольную гладкую линию γ на поверхности F и ее образ $f(\gamma) = \gamma'$ на поверхности F' можно задать общими внутренними уравнениями $u = u(t)$, $v = v(t)$, $t \in I$. Возьмем произвольное число $t_0 \in I$, для которого существует $t \in I$, $t > t_0$. Поскольку отображение f сохраняет длину гладкой дуги, по формуле (9) из § 54 получим:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t \sqrt{\gamma_{11} \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\gamma_{12} \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \gamma_{22} \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt = \\ & = \int_{t_0}^t \sqrt{\gamma'_{11} \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\gamma'_{12} \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \gamma'_{22} \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt, \end{aligned} \quad (1)$$

где γ_{ij} — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности F , а γ'_{ij} — коэффициенты первой квадратичной формы

поверхности F' . Равенство (1) справедливо для любого t , следовательно, справедливо и равенство

$$\begin{aligned} \gamma_{11} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2\gamma_{12} \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \gamma_{22} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 &= \\ = \gamma'_{11} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2\gamma'_{12} \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \gamma'_{22} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2. \end{aligned}$$

Но линия γ выбрана произвольно, поэтому последнее равенство должно выполняться для любых функций u , v . Таким образом,

$$\gamma_{11} = \gamma'_{11}, \quad \gamma_{12} = \gamma'_{12}, \quad \gamma_{22} = \gamma'_{22}. \quad (2)$$

Достаточность. Пусть гладкие поверхности F и F' допускают такую общую параметризацию (u, v) , что в точках с одинаковыми криволинейными координатами выполняются равенства (2). Рассмотрим биективное отображение $f: F \rightarrow F'$, которое точке с данными криволинейными координатами на поверхности F ставит в соответствие точку с теми же криволинейными координатами на поверхности F' . Тогда для любой линии γ на поверхности F и ее образа $f(\gamma) = \gamma'$ на поверхности F' выполняется равенство (1). Отсюда получим, что отображение f сохраняет длину любой гладкой дуги, лежащей на поверхности F , и поэтому является изометрией. Теорема доказана.

Следствие. Если две гладкие поверхности изометричны, то соответствующие в изометрии точки этих поверхностей принадлежат одному типу, т.е. одновременно являются эллиптическими, гиперболическими или параболическими.

Доказательство. По предыдущей теореме, в указанных точках равны соответствующие коэффициенты первых квадратичных форм, а, в силу теоремы Гаусса, в этих точках будут равны и полные кривизны изометричных поверхностей. Отсюда и вытекает сформулированное в следствии утверждение.

Пример 1. Доказать, что сфера и псевдосфера не изометричны.

Решение. Достаточно заметить, что все точки сферы являются эллиптическими, а все точки псевдосферы — гиперболическими.

Пример 2. Доказать, что цилиндрическая поверхность вращения изометрична поверхности, являющейся частью плоскости.

Решение. Рассмотрим поверхности F и F' , заданные параметрическими уравнениями $x = \cos u$, $y = \sin u$, $z = v$ и $x = u$, $y = v$, $z = 0$, где $u \in \mathbb{R}$, $v \in [0, 2\pi)$. Ясно, что F и F' являются C^∞ -поверхностями. Параметрические уравнения поверхности F равносильны одному уравнению $x^2 + y^2 = 1$. Таким образом, F — цилиндрическая поверхность вращения радиуса 1 с осью Oz . Поверхность F' является частью координатной плоскости Oxy , но не совпадает с этой плоскостью. По формулам (6) из § 54 находим, что коэффициенты первых квадратичных форм поверхностей F и F' равны $\gamma_{11} = 1$, $\gamma_{12} = 0$, $\gamma_{22} = 1$ и $\gamma'_{11} = 1$, $\gamma'_{12} = 0$, $\gamma'_{22} = 1$. Таким образом, выполняются равенства (2) и по доказанной теореме поверхности F и F' изометричны.

Пример 3. Доказать, что коническая поверхность вращения без вершины изометрична поверхности, являющейся частью плоскости.

Решение. Рассуждая, как и в примере 2, можно доказать, что параметрические уравнения $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = u$ и $x = \sqrt{2}u \cos \frac{v}{\sqrt{2}}$, $y = \sqrt{2}u \sin \frac{v}{\sqrt{2}}$, $z = 0$ определяют соответственно искомые коническую поверхность вращения и часть плоскости.

Изгибание поверхности

Пусть дано однопараметрическое семейство попарно изометричных гладких поверхностей F_t , непрерывно зависящих от параметра t (функции, определяющие поверхность F_t , непрерывны по t).

Определение 2. Если поверхности F_1 и F_2 принадлежат данному семейству, соответствуя параметрам t_1 и t_2 , то говорят, что каждая из поверхностей F_1 и F_2 получена изгибанием другой или наложима на другую.

Поверхность F называется *изгибаемой*, если она наложима на некоторую другую поверхность. Можно доказать, что гладкие поверхности изгибаемы «в малом» (их участки достаточно малого диаметра изгибаемы), но существуют

неизгибаемые «в целом» поверхности (сфера неизгибаема). Из доказанной выше теоремы следует, что при изгибании поверхности сохраняются: 1) длина любой гладкой дуги на поверхности; 2) угол между гладкими линиями на поверхности; 3) площадь участка поверхности; 4) полная кривизна поверхности; 5) геодезическая кривизна любой гладкой линии на поверхности.

Пример 4. Фиксируем в пространстве гладкую линию γ , отличную от прямой. Точки всевозможных касательных к линии γ образуют фигуру F , которая называется поверхностью касательных. Сама линия γ называется ребром возврата поверхности касательных F . Доказать, что поверхность F является изгибаемой.

Решение. Пусть линия γ задана векторным уравнением $\vec{p} = \vec{p}(s)$, где s есть длина дуги линии γ . Вектор $\frac{d\vec{p}}{ds} = \vec{\tau}$ является направляющим вектором касательной PT к линии γ в точке P (рис. 256).

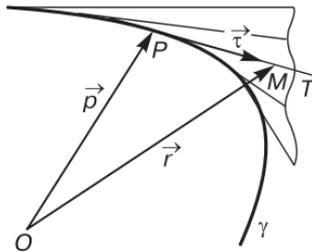


Рис. 256

Всякую точку M касательной PT можно задать радиус-вектором $\vec{r} = \vec{p} + v\vec{\tau}$, который зависит от двух переменных s , v и описывает поверхность F . Учитывая формулы Френе, находим

$$\vec{r}_s = \vec{\tau} + vk\vec{v}, \quad \vec{r}_v = \vec{\tau}, \quad (3)$$

откуда $[\vec{r}_s, \vec{r}_v] = vk[\vec{v}, \vec{\tau}] = -vk\beta$. По условию $k \neq 0$, следовательно, вектор $[\vec{r}_s, \vec{r}_v]$ является нулевым тогда и только тогда, когда $v = 0$, что верно только в том случае, когда точки M и P совпадают. Таким образом, фигура $F \setminus \gamma$ является гладкой поверхностью. Используя равенства (3), находим $\gamma_{11} = \vec{r}_s^2 = 1 + k^2v^2$, $\gamma_{12} = \vec{r}_s \cdot \vec{r}_v = 1$, $\gamma_{22} = \vec{r}_v^2 = 1$.

Закключаем, что коэффициенты первой квадратичной формы поверхности касательных зависят от кривизны ребра возврата, но не зависят от его кручения. Возьмем две функции $k = k(s)$ и $\kappa = \kappa(s, t)$, где параметр t изменяется в некотором открытом числовом интервале I . Предполагается, что $k(s) > 0$, а функция $\kappa(s, t)$ непрерывна по t . Для каждого $t \in I$ существует гладкая линия γ_t с кривизной $k(s)$ и кручением $\kappa(s, t)$, которая служит ребром возврата для поверхности касательных F_t . При непрерывном изменении параметра t мы получим однопараметрическое семейство F_t попарно изометричных поверхностей. Отсюда следует, что поверхность касательных изгибаема, поскольку любые две поверхности семейства F_t наложимы друг на друга. Зададим функцию $\kappa(s, t)$ так, что для некоторого $t_0 \in I$ будет выполняться условие $\lim_{t \rightarrow t_0} \kappa(s, t) = 0$. Например, если $\kappa(s, t) = t\kappa(s)$, то $\lim_{t \rightarrow 0} \kappa(s, t) = 0$. В пределе мы получим плоскую линию с нулевым кручением. Ее поверхность касательных также является частью плоскости. Таким образом, любая поверхность касательных изометрична некоторой фигуре на плоскости. Примеры 2 и 3 показывают, что аналогичным свойством обладают цилиндрические и конические поверхности. Можно доказать, что не существует других поверхностей, наложимых на часть плоскости.

Определение 3. *Поверхности касательных, цилиндрические и конические поверхности называются развертывающимися поверхностями.*

Каждую развертывающуюся поверхность можно наложить на часть плоскости или, как говорят, «развернуть на плоскость».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Атанасян Л. С., Базылев В. Т.* Геометрия. Ч. 2. — М.: Просвещение, 1987.
2. *Атанасян С. Л.* Геометрия 1. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014.
3. *Атанасян С. Л.* Методы изображений. — М.: МГПУ, 2010.
4. *Атанасян С. Л., Покровский В. Г.* Основания геометрии. — М.: МГПУ, 2010.
5. *Атанасян С. Л.* Проективная геометрия. — М.: МГПУ, 2010.
6. *Атанасян С. Л., Глизбург В. И.* Многомерная геометрия. — М.: МГПУ, 2010.
7. *Ушаков А. В.* Элементы топологии и дифференциальной геометрии. — М.: МГПУ, 2011.
8. *Глаголев Н. А.* Начертательная геометрия. — М.: ГТТИ, 1946.
9. *Атанасян Л. С.* Геометрия Лобачевского. — 2-е изд., испр. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014.
10. *Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия. — М.: Просвещение, 1970.
11. *Гильберт Д.* Основания геометрии. — М.;Л.: ОГИЗ, Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948.
12. *Ефимов Н. В.* Высшая геометрия. — М.: Высшая школа, 1978.
13. *Костин В. И.* Основания геометрии. — М.;Л.: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, 1946.
14. *Трайнин Я. Л.* Основания геометрии. — М.: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, 1961.
15. *Розенфельд Б. А.* История неевклидовой геометрии. — М.: Наука, 1976.
16. *Атанасян С. Л., Шевелева Н. В., Покровский В. Г.* Сборник задач по геометрии. Ч. 2. — М.: Экмо Education, Эксмо, 2008.
17. *Александров А. Д., Нецветаев Н. Ю.* Геометрия. — М.: Наука, 1990.
18. *Борисович Ю. Г., Близняков Н. М., Израилевич Я. А., Фоменко Т. Н.* Введение в топологию. — М.: Наука, 1995.

19. Вернер А. Л., Кантор Б. Е., Франгулов С. А. Геометрия. Ч. 2. — СПб.: Специальная литература, 1997.
20. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. — М.: Факториал пресс, 2000.
21. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия. — М.: Наука, 1969.
22. Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Часть I. Методы изображений	
Глава I. Свойства изображений	7
§ 1. Изображение плоских фигур при параллельном проектировании	7
§ 2. Изображение многогранников при параллельном проектировании	16
§ 3. Изображение цилиндра, конуса и шара	23
Глава II. Построение изображений	31
§ 4. Аксонометрия	31
§ 5. Полные и неполные изображения. Сечения многогранников	42
§ 6. Метрические задачи аксонометрии	48
§ 7. Метод Монжа	55
Часть II. Основания геометрии	
Глава I. Аксиоматика евклидова пространства	65
§ 8. История попыток доказательства пятого постулата Евклида	65
§ 9. Общие вопросы аксиоматики. Требования, предъявляемые к системам аксиом	79
§ 10. Система аксиом Гильберта трехмерного евклидова пространства. Обзор следствий аксиом принадлежности и порядка	90
§ 11. Обзор следствий аксиом конгруэнтности, непрерывности и параллельности	98
§ 12. Аксиоматика Вейля трехмерного евклидова пространства	107
§ 13. Свойства прямых и плоскостей в аксиоматике Вейля трехмерного евклидова пространства	113
§ 14. Свойства понятия «лежать между» в аксиоматике Вейля. Свойства отрезков, лучей полуплоскостей и углов	120
§ 15. Равенство отрезков и углов в аксиоматике Вейля. Аксиомы непрерывности	131
Глава II. Аксиома параллельности и утверждения, ей эквивалентные	140
§ 16. Эквивалентность пятого постулата Евклида и утверждения Фаркаша Бойяи аксиоме параллельности евклидовой геометрии	140

§ 17. Теоремы Лежандра	145
§ 18. Эквивалентность аксиомы параллельности евклидовой плоскости теореме о сумме углов треугольника, постулату Валлиса и предложению Лежандра	151
§ 19. Свойства четырехугольника Саккери. Предложение Посидония	158
Глава III. Геометрия Лобачевского	164
§ 20. Аксиоматика пространства Лобачевского. Основные следствия	164
§ 21. Параллельные прямые на плоскости Лобачевского	169
§ 22. Угол параллельности, функция Лобачевского	182
§ 23. Свойства прямых на плоскости Лобачевского	189
§ 24. Пучки прямых на плоскости Лобачевского, траектории пучков	196
§ 25. Модель Кэли–Клейна планиметрии Лобачевского	208
Глава IV. Теория измерений	224
§ 26. Длина отрезка. Теоремы существования и единственности длины отрезка	224
§ 27. Площадь многоугольника. Теоремы существования и единственности	233
§ 28. Равновеликие и равноставленные многоугольники. Теорема Бойяи–Гервина. Объем многогранника	246
Часть III. Проективная геометрия	
Глава I. Проективная плоскость и ее основные свойства	257
§ 29. Центральное проектирование. История возникновения проективной геометрии	257
§ 30. Аксиомы Вейля проективного пространства. Прямые на проективной плоскости и их свойства. Модели проективной плоскости	264
§ 31. Координаты точек на проективных прямой и плоскости	273
§ 32. Преобразования координат точек проективной плоскости. Уравнение прямой на проективной плоскости. Однородные и неоднородные координаты точек расширенной плоскости	280
§ 33. Принцип двойственности. Теорема Дезарга	290

Глава II. Двойные отношения точек и прямых, проективные отображения и преобразования . . .	301
§ 34. Двойные отношения точек на проективной прямой	301
§ 35. Двойное отношение четырех прямых пучка и его свойства	309
§ 36. Двойное отношение точек на расширенной плоскости. Гармонические четверки точек и прямых	315
§ 37. Проективные отображения прямых и пучков . .	325
§ 38. Проективные преобразования плоскости	335
Глава III. Кривые второго порядка на проективной плоскости	348
§ 39. Линии второго порядка на проективной плоскости	348
§ 40. Пересечение линии второго порядка с прямой, полюсы и поляры	359
§ 41. Теоремы Штейнера, Паскаля и Брианшона . . .	374
Глава IV. Проективные интерпретации аффинной и евклидовой геометрий и неевклидовой геометрии Лобачевского	387
§ 42. Проективная интерпретация аффинной геометрии	387
§ 43. Линии второго порядка на проективной плоскости с фиксированной прямой	397
§ 44. Проективная интерпретация евклидовой геометрии	404
§ 45. Проективная интерпретация геометрии Лобачевского	415

Часть IV. Элементы топологии и дифференциальной геометрии

Глава I. Топологические пространства и многообразия	427
§ 46. Топологические пространства	427
§ 47. Операции над множествами в топологическом пространстве	436
§ 48. Непрерывные отображения топологических пространств	445
§ 49. Связные и компактные топологические пространства	451
§ 50. Топологические многообразия	464

Глава II. Дифференциальная геометрия	472
§ 51. Векторная функция от одной и двух переменных	472
§ 52. Гладкие подмногообразия в евклидовом пространстве. Понятия линии и поверхности	477
§ 53. Касательная и длина дуги гладкой линии. Кривизна и кручение, натуральные уравнения линии	485
§ 54. Касательная плоскость и нормаль поверхности. Первая квадратичная форма	496
§ 55. Кривизна линии на поверхности. Вторая квадратичная форма	507
§ 56. Главные кривизны. Полная и средняя кривизны поверхности	514
§ 57. Внутренняя геометрия поверхности. Теорема Гаусса. Геодезическая кривизна	522
§ 58. Изометричные поверхности. Изгибание поверхности	533
Литература	539

Минимальные системные требования определяются соответствующими требованиями программы Adobe Reader версии не ниже 11-й для платформ Windows, Mac OS, Android, iOS, Windows Phone и BlackBerry; экран 10"

Учебное электронное издание

Атанасян Сергей Леонович
Покровский Владимир Григорьевич
Ушаков Андрей Владимирович

ГЕОМЕТРИЯ 2

Учебное пособие для вузов

Ведущий редактор *Н. А. Шихова*
Художник *Н. А. Новак*
Технический редактор *Е. В. Денюкова*
Корректор *О. И. Белова*

Оригинал-макет подготовлен *Е. Г. Ивлевой* в пакете L^AT_EX 2_ε

Подписано к использованию 27.01.15. Формат 125×200 мм

Издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний»
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: binom@Lbz.ru, <http://www.Lbz.ru>



Сергей Леонович Атанасян – профессор и заведующий кафедрой геометрии математического факультета Московского педагогического университета, доктор педагогических наук. Автор более 80 научных и научно-методических работ. Область научных интересов – геометрия пространств с вырожденными проективными метриками, информатизация образования и методика преподавания математики в высшей школе.



Владимир Григорьевич Покровский – доцент кафедры алгебры, геометрии и методики их преподавания Института математики и информатики Московского городского педагогического университета, кандидат физико-математических наук. Автор более 40 научных работ. Область научных интересов – комбинаторная геометрия.



Андрей Владимирович Ушаков – доцент кафедры высшей математики и методики преподавания математики Института математики, информатики и естественных наук Московского городского педагогического университета, кандидат физико-математических наук. Автор более 20 научных работ. Область научных интересов – общая топология.