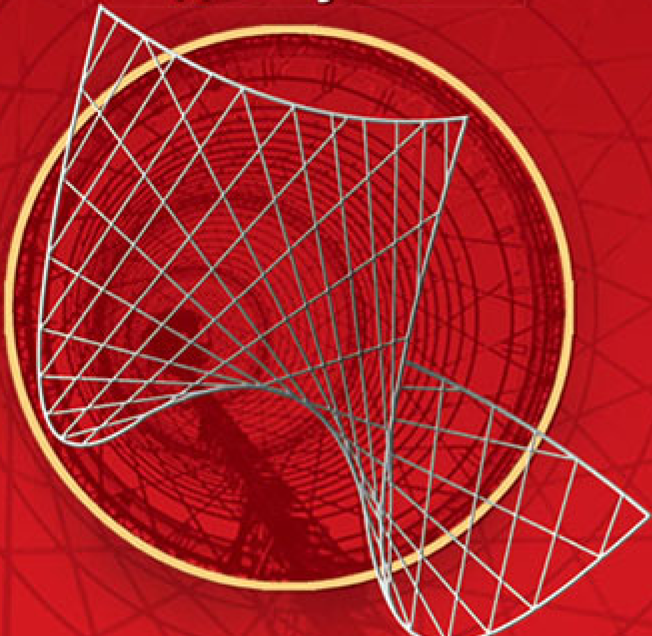
УЧЕБНИК ДЛЯ ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ

С. Л. Атанасян, В. Г. Покровский

ГЕОМЕТРИЯ

1

Учебное пособие
для вузов



издательство
БИНОМ

УЧЕБНИК ДЛЯ ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ

С. Л. Атанасян, В. Г. Покровский

ГЕОМЕТРИЯ

1

Учебное пособие
для вузов

Допущено
Учебно-методическим объединением
по направлениям педагогического образования
в качестве учебного пособия по направлению 050100
Педагогическое образование

ЭЛЕКТРОННОЕ ИЗДАНИЕ

Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2014

УДК 514
ББК 22.1
А92

Атанасян С. Л.

А92 Геометрия 1 [Электронный ресурс] : учебное пособие для вузов / С. Л. Атанасян, В. Г. Покровский ; под ред. С. Л. Атанасяна. — Эл. изд. — Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf : 334 с.). — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. — Систем. требования: Adobe Reader XI ; экран 10".

ISBN 978-5-9963-2371-5

В учебнике собран материал первой части единого курса геометрии, изучение которого необходимо будущему учителю математики для успешной работы со школьниками. Изложение теоретического материала проиллюстрировано типовыми примерами.

Для студентов, аспирантов и преподавателей математических факультетов вузов.

УДК 514
ББК 22.1

Деривативное электронное издание на основе печатного аналога: Геометрия 1 : учебное пособие для вузов / С. Л. Атанасян, В. Г. Покровский ; под ред. С. Л. Атанасяна. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. — 331 с. : ил.

ISBN 978-5-9963-2371-5

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемое учебное пособие написано в соответствии с программой, подготовленной кафедрой алгебры и геометрии и методики их преподавания государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Московский городской педагогический университет». Пособие предназначено студентам, будущим бакалаврам, обучающимся по направлению «Педагогическое образование» и осваивающим профиль «Математика». Оно также будет полезно студентам-бакалаврам, обучающимся по профилям «Информатика», «Физика» и «Технология». Пособие пригодится и магистрантам, осваивающим соответствующие программы магистратуры.

Пособие включает следующие разделы: векторы на плоскости и в пространстве, метод координат, прямые и кривые второго порядка на плоскости, плоскости, прямые и поверхности второго порядка в пространстве, геометрические преобразования, геометрические построения на плоскости. В пособии представлен материал первой части единого курса геометрии, изучение которого необходимо будущему учителю математики для успешной работы со школьниками. Изложение ведется в традиционной, векторно-координатной форме. При этом авторы постарались обстоятельно рассмотреть основы, достаточно подробно доказать свойства линейных операций над векторами, скалярного, векторного и смешанного произведений векторов, ориентации плоскости и пространства.

Следует отметить, что Федеральный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению «Педагогическое образование», по которому в настоящее время ведется подготовка будущих учителей, на 10% учебного времени увеличил долю самостоятельной работы студентов-бакалавров. Организацию учебного процесса требуется планировать из расчета 50% аудиторных и 50% самостоятельных занятий. Сократилось число аудиторных часов, в связи с этим пришлось пересмотреть программу курса геометрии, оставив в ней материал, необходимый для подготовки учителя математики. В частности, пришлось исключить раздел «Многомерная геометрия», традиционно присутствовавший в предшествующих программах. Его можно изложить факультативно или в рамках дисциплин по выбору. Существенно возросла роль учебных пособий, представляющих преподавателям и студентам возможность эффективной организации самостоятельной работы. Авторы предприняли все усилия для выполнения этого условия. Преподаватели и студенты найдут в пособии весь необходимый для этого материал, изложенный в достаточно подробной форме.

Отличительная особенность предлагаемого пособия состоит в его практической направленности. По мнению авторов, будущему школьному учителю математики недостаточно освоить указанные разделы, необходимо понимать их взаимосвязь со школьной математикой и научиться применять их материал к решению задач элементарной геометрии. Поэтому уделено особое внимание приложениям векторной алгебры, метода координат, теории преобразований и других разделов пособия к проблемам методики и практики решения задач школьной геометрии.

Пособие пригодится также и учителям средней школы. Они найдут в нем полезный материал для применения векторной алгебры, координатного метода, теории преобразований и геометрических построений на плоскости циркулем и линейкой к решению задач школьной геометрии.

Главы 1—5 подготовлены профессором С.Л. Атанасяном, а глава 6 — доцентом В.Г. Покровским. Общая редакция осуществлена профессором С.Л. Атанасяном.

Глава I

ВЕКТОРЫ И ИХ СВОЙСТВА

§ 1. ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Из школьных курсов математики и физики нам известно, что в естествознании используются величины, характеризуемые не только числовым значением, но и направлением (например, скорость, ускорение, сила и т. д.). Такого рода объекты носят название векторов. В переводе с латинского языка «вектор» означает «переносить». Впервые векторы в значении, близком к современному, рассматривались в книге ирландского математика и механика У. Гамильтона «Лекции о кватернионах» (1853 г.). В современном виде векторное исчисление было изложено в работах американского физика Д. Гиббса «Элементы векторного исчисления» (1881—1884 гг.) и английского физика О. Хевисайда «Электромагнитная теория» (1893 г.). Систематическое изложение векторного исчисления неслучайно появилось в трудах ученых, занимавшихся проблемами естествознания и физики. Оно позволяет наглядно и просто описать сложные математические и физические явления. Поэтому начала векторного исчисления изучаются в школе, они также составляют основу данного курса.

Как известно, в школьном курсе геометрии векторы отождествляются с направленными отрезками. Такое представление удобно для упрощенного изложения свойств векторов, но не является математически корректным. Однако для изучения свойств векторов направленные отрезки нам понадобятся. Отрезок называется *направленным*, если для него указан порядок его концов. Первый из них называется *началом*, а второй — *концом* направленного отрезка. На рисунках конец такого отрезка обозначается стрелкой (рис. 1). Если M — начало, а N — конец направленного отрезка, то будем его обозначать как $\overline{MN}$.

Определение 1. *Направленные отрезки, расположенные на одной прямой или на параллельных прямых, называются коллинеарными. Если коллинеарные направленные отрезки имеют одинаковые направления, то они называются сонаправленными, если их направления различны, то противоположно направленными.*

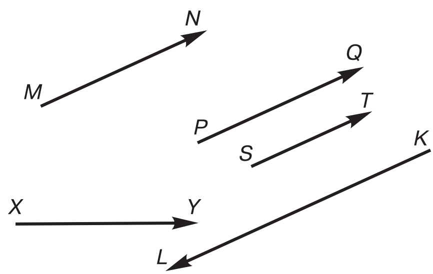


Рис. 1

Коллинеарные направленные отрезки будем обозначать как $\overline{MN} \parallel \overline{PQ}$. Сонаправленные и противоположно направленные отрезки обозначаются соответственно через $\overline{MN} \uparrow\uparrow \overline{PQ}$ и $\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{CD}$. На рисунке 1 отрезки $\overline{MN}$, $\overline{PQ}$ и $\overline{ST}$ сонаправлены между собой, а отрезок $\overline{KL}$ им противоположно направлен. На этом же рисунке отрезок $\overline{XY}$ не коллинеарен отрезкам $\overline{MN}$, $\overline{PQ}$, $\overline{ST}$ и $\overline{KL}$, поэтому он не сонаправлен и не противоположно направлен этим отрезкам.

Отметим признак сонаправленности отрезков. Пусть $\overline{MN}$ и $\overline{PQ}$ — коллинеарные направленные отрезки, не лежащие на одной прямой. Ясно, что отрезки сонаправлены в том и только в том случае, когда их концы N и Q лежат в одной полуплоскости относительно прямой MP, проходящей через их начала (рис. 2, a). Отсюда следует, что $\overline{MN} \uparrow\uparrow \overline{PQ}$ тогда и только тогда, когда отрезки MP и NQ не пересекаются. Если $\overline{MN}$ и $\overline{PQ}$ противоположно направлены и не лежат на одной прямой, то их концы N и Q принадлежат различным полуплоскостям относительно

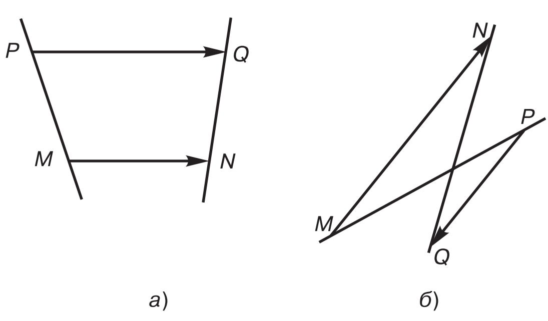


Рис. 2

прямой MP. Таким образом, $\overline{MN} \uparrow\downarrow \overline{PQ}$ в том и только в том случае, когда отрезки MP и NQ пересекаются (рис. 2, *б*).

Под *длиной* направленного отрезка $\overline{AB}$ понимается расстояние между точками A и B. Направленный отрезок называется *нулевым*, если его начало совпадает с его концом. У такого отрезка длина равна нулю. Считается, что его направление произвольное, т. е. *он сонаправлен с любым отрезком*. Будем его обозначать как $\bar{0}$.

Из курса алгебры известно, что под *бинарным отношением* Δ на множестве M понимается такое соответствие между элементами этого множества, что для любых двух элементов a и b из M можно сказать, находятся ли они в этом отношении (соответствуют друг другу, $a \Delta b$) или нет. Такое отношение называется *отношением эквивалентности*, если выполнены следующие три условия:

1) *рефлексивности* — любой элемент множества находится в бинарном отношении сам с собой ($a \Delta a$);
2) *симметричности* — если элемент a находится в бинарном отношении с элементом b, то b также находится в бинарном отношении с элементом a (если $a \Delta b$, то $b \Delta a$);
3) *транзитивности* — если элемент a находится в бинарном отношении с элементом b, а b, в свою очередь, с элементом c, то a находится в том же отношении с c (если $a \Delta b$ и $b \Delta c$, то $a \Delta c$).

Пример 1. *На множестве направленных отрезков введено бинарное отношение* Δ: *два отрезка находятся в этом отношении, если они коллинеарны. Является ли* Δ *отношением эквивалентности?*

Решение. Выясним, удовлетворяет ли данное отношение условиям рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Условие рефлексивности выполнено, так как направленный отрезок коллинеарен сам себе. Легко видеть, что условие симметричности также выполнено. Выясним, выполняется ли условие транзитивности. Нам следует проверить, что из $\overline{AB} \| \overline{CD}$ и $\overline{CD} \| \overline{MN}$ вытекает $\overline{AB} \| \overline{MN}$. Покажем, что эти условия выполняются не для любых направленных отрезков $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ и $\overline{MN}$. Действительно, пусть $\overline{CD} = \bar{0}$. Нулевой вектор сонаправлен любому вектору, поэтому из условий $\overline{AB} \, || \, \bar{0}$ и $\bar{0} \, || \, \overline{MN}$ не следует, что $\overline{AB} \, || \, \overline{MN}$. Данное бинарное отношение не является отношением эквивалентности.

Если на множестве введено отношение эквивалентности, то это множество естественным образом разбивается на непересекающиеся подмножества — классы эквивалентности. Их образуют все те элементы множества, которые эквивалентны между собой. Введем понятие равенства двух направленных отрезков.

Определение 2. *Два ненулевых направленных отрезка называются равными друг другу, если они сонаправлены и их длины одинаковы. Два нулевых направленных отрезка всегда равны между собой.*

Введенное отношение удовлетворяет следующим свойствам.

Свойство 1. *Отношение равенства направленных отрезков является отношением эквивалентности.*

Действительно, любой направленный отрезок равен самому себе. Если $\overline{AB} = \overline{CD}$, то $\overline{CD} = \overline{AB}$. Если $\overline{AB} = \overline{CD}$ и $\overline{CD} = \overline{EF}$, то длины этих трех отрезков одинаковы, а их направления совпадают, поэтому $\overline{AB} = \overline{EF}$. Таким образом, условия рефлексивности, симметричности и транзитивности для отношения равенства направленных отрезков выполнены.

Свойство 2. *Отрезок $\overline{AB}$ равен отрезку $\overline{CD}$ в том и только в том случае, когда середины отрезков AD и BC совпадают.*

Если равные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ не лежат на одной прямой (рис. 3, *а*), то из определения 2 следует, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, поэтому его диагонали в точке пересечения делятся пополам. Наоборот, если отрезки AD и BC в точке пересечения делятся пополам, то четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, отсюда вытекает равенство направленных отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.

Свойство 2 справедливо также и для отрезков, лежащих на одной прямой (рис. 3, *б*). Проверьте это самостоятельно.

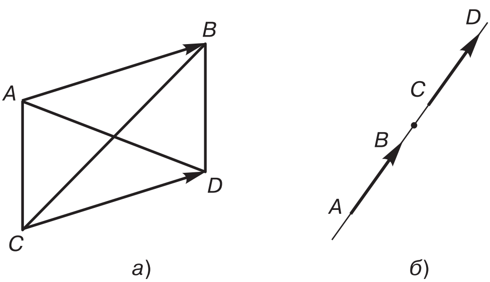


Рис. 3

Свойство 3. *Отрезок* $\overline{AB}$ *равен отрезку* $\overline{CD}$ *тогда и только тогда, когда* $\overline{AC} = \overline{BD}$.

Доказательство этого свойства аналогично предыдущему.

Свойство 4. *Если даны направленный отрезок* $\overline{AB}$ *и точка* C, *то существует единственная точка* D, *для которой* $\overline{AB} = \overline{CD}$.

Действительно, через точку C всегда можно провести прямую, параллельную AB, а затем выбрать на ней такую точку D, для которой отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равны друг другу. В этом случае говорят, что направленный отрезок $\overline{AB}$ отложен от точки C.

Отношение равенства направленных отрезков, как следует из свойства 1, является отношением эквивалентности. Поэтому множество направленных отрезков разбивается на классы эквивалентности, т. е. классы равных между собой отрезков.

Определение 3. *Вектором называется класс равных между собой направленных отрезков.*

Если рассматривать класс равных между собой направленных отрезков, лежащих во всем пространстве, то они образуют вектор пространства; если же рассматривать класс равных между собой направленных отрезков плоскости, то они составляют вектор плоскости. Для обозначения векторов будем использовать строчные латинские буквы со стрелкой сверху: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Направленный отрезок, принадлежащий вектору, будем называть его *представителем*. Если дан направленный отрезок $\overline{AB}$, то вектор, которому принадлежит этот отрезок, будем обозначать через $\overrightarrow{AB}$. Таким образом, все множество направленных отрезков разбивается на непересекающиеся классы эквивалентности — векторы. При этом от любой точки плоскости можно «отложить данный вектор», т. е. построить его представитель с началом в этой точке.

Легко видеть, что все нулевые направленные отрезки равны между собой. Действительно, у каждого из них длина равна 0 и они сонаправлены друг с другом. Вектор, представителем которого является нулевой направленный отрезок, называется *нулевым*. Он будет нами обозначаться через $\vec{0}$.

Как следует из определения 2, все равные между собой направленные отрезки имеют одну и ту же длину. Ее мы будем называть *длиной* или *модулем* вектора и обозначать через $|\vec{a}|$ или $|\overrightarrow{AB}|$. Модуль нулевого вектора равен нулю. Если два вектора имеют одинаковый модуль, но противоположные направления, то их будем называть *противоположными*. Вектор, противоположный $\vec{a}$, будет обозначаться как $-\vec{a}$.

Векторы назовем соответственно коллинеарными, сонаправленными или противоположно направленными, если коллинеарны, сонаправлены или противоположно направлены любые два их представителя. Очевидно, что это определение не зависит от выбора представителей векторов. Обозначать коллинеарные, сонаправленные и противоположно направленные векторы будем соответственно через $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. *Систему векторов a_1, a_2, ... a_n будем называть коллинеарной, если любые два вектора системы коллинеарны друг другу.*

Будем говорить, что *вектор параллелен прямой*, если его представитель параллелен или лежит на этой прямой. Очевидно, что введенное понятие не зависит от выбора представителя вектора. Ясно, что система векторов коллинеарна в том и только в том случае, когда существует прямая линия, которой параллельны все векторы системы.

§ 2. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

Под линейными операциями над векторами понимаются сложение векторов и умножение вектора на число. Введем понятие суммы векторов.

Определение 1. *Пусть даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. От точки A отложим вектор $\vec{a}$: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, а от конца направленного отрезка $\overline{AB}$ отложим вектор $\vec{b}$: $\overline{BC} = \vec{b}$. Вектор $\vec{c}$, определенный направленным отрезком $\overline{AC}$, называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.*

Построение суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ показано на рис. 4. Из определения 1 следует, что для любых трех точек A, B и C выполнено равенство $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, поэтому такой способ сложения векторов часто называют *правилом треугольника*. Наряду с ним используется еще один способ сложения векторов — *правило параллелограмма*. Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два неколлинеарных вектора, то для построения суммы $\vec{a} + \vec{b}$ по правилу параллелограмма отложим их от одной точки: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Затем треугольник ABD достроим до параллелограмма $ABCD$. Искомая сумма равна вектору $\overrightarrow{AC}$ (рис. 5). Такое правило сложения векторов часто используется в физике, например для определения равнодействующей двух сил.

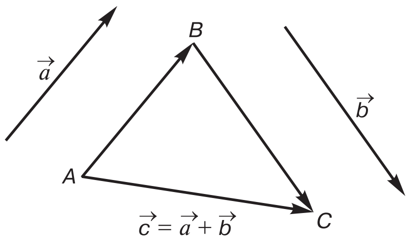


Рис. 4

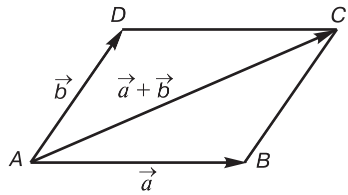


Рис. 5

Для обоснования корректности определения 1 следует проверить, что сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не зависит от выбора начальной точки A. Действительно, возьмем две точки A и A_1, отложим от них вектор $\vec{a}$: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} = \vec{a}$, от точек B и B_1 отложим вектор $\vec{b}$: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1} = \vec{b}$ (рис. 6). Так как $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$, то из свойства 3 отношения равенства (§ 1) $\overline{AA_1} = \overline{BB_1}$. Аналогично, из равенства $\overline{BC} = \overline{B_1C_1}$ вытекает $\overline{BB_1} = \overline{CC_1}$. Следовательно, $\overline{AA_1} = \overline{CC_1}$, откуда получим, что $\overline{AC} = \overline{A_1C_1}$.

Рассмотрим свойства операции сложения векторов.

Свойство 1. *Для любых векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *справедливо равенство* $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (*свойство коммутативности*).

Доказательство. Отложим от точки A вектор $\vec{a}$: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, а от точки B вектор $\vec{b}$: $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Тогда $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ (рис. 7). Теперь отложим от точки A вектор $\vec{b}$: $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Так как направленные отрезки $\overline{AD}$ и $\overline{BC}$ равны друг другу, то $\overline{AB} = \overline{DC}$ (свойство 3, § 1). Отсюда следует, что $\overrightarrow{DC} = \vec{a}$, т. е. $\vec{b} + \vec{a} = \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$. Свойство доказано.

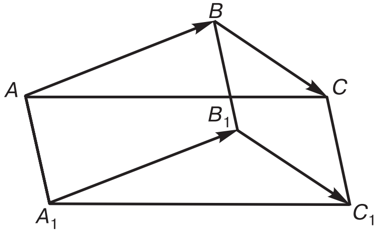


Рис. 6

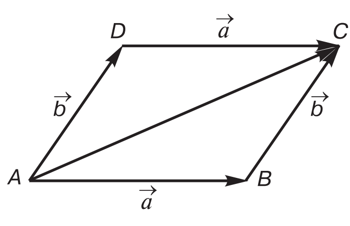


Рис. 7

Свойство 2. *Для любых векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *выполнено равенство* $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (*свойство ассоциативности*).

Доказательство. Отложим последовательно от точки A вектор $\vec{a}$: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, от точки B вектор $\vec{b}$: $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, а от точки C вектор $\vec{c}$: $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$ (рис. 8). Тогда $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$ и из равенств $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$ следует $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\overrightarrow{AD}$. В то же время, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}$, поэтому $\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{BD}$. Так как $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$, то $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AD}$. Свойство доказано.

Свойство 2 позволяет определить сумму любого числа векторов $\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_n$. Она равна результату последовательного суммирования $(((\vec{a}_1+\vec{a}_2)+\vec{a}_3)+\ldots+\vec{a}_n)$: к сумме первых двух векторов прибавляется третий, затем четвертый и т. д. Из свойства 1 вытекает, что результат суммирования любого числа векторов не зависит от порядка суммирования. На рисунке 9 изображен процесс построения суммы шести векторов.

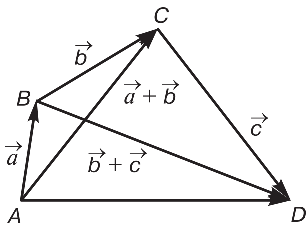


Рис. 8

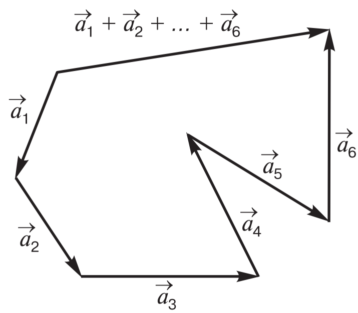


Рис. 9

Свойство 3. *Для любого вектора* $\vec{a}$ *выполнено соотношение* $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

Доказательство. Отложим от точки A вектор $\vec{a}$: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, а от точки B вектор $\vec{0}$. Так как $\vec{0}=\overrightarrow{BB}$, то $\vec{a}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}=\vec{a}$. Свойство доказано.

Свойство 4. *Для любого вектора* $\vec{a}$ *его сумма с противоположным вектором* $(-\vec{a})$ *равна нулевому вектору*: $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

Доказательство. Вектор $(-\vec{a})$, противоположный $\vec{a}$, имеет ту же длину, что и $\vec{a}$, но противоположное направление. Отложим от точки A вектор $\vec{a}$: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$. Если от точки B отложить вектор $(-\vec{a})$, то, в силу отмеченных свойств противоположного вектора, его конец совпадет с точкой A. Поэтому $\vec{a}+(-\vec{a})=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$. Свойство доказано.

Исходя из правила треугольника сложения векторов, можно сделать вывод: при суммировании векторов, вообще говоря, их модули не складываются. Действительно, возьмем два произвольных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отложим от точки A вектор $\vec{a}$: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, а от точки B — вектор $\vec{b}$, получим $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарные. Тогда точки A, B и C лежат в вершинах треугольника. Исходя из неравенства, связывающего длины сторон треугольника, получим $|\overrightarrow{AC}|<|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|$, т. е. $|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|$. Пусть теперь векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарные. Если они сонаправлены, то точка B лежит между A и C, поэтому $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|$, т. е. $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$. Если они противоположно направлены, то точка B не лежит между A и C, следовательно, $|\overrightarrow{AC}|<|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|$, т. е. $|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|$. Таким образом, нами доказано неравенство $|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$.

Определим теперь разность векторов.

Определение 2. *Под разностью двух векторов $\vec{a}-\vec{b}$ понимается вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий условию $\vec{c}+\vec{b}=\vec{a}$.*

Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Рассмотрим сумму вектора $\vec{a}$ и вектора, противоположного $\vec{b}$: $\vec{a}+(-\vec{b})=\vec{c}$. Докажем, что $\vec{c}$ удовлетворяет условию $\vec{c}+\vec{b}=\vec{a}$. Используем свойства 3 и 4 операции сложения: $\vec{a}+(-\vec{b})+\vec{b}=\vec{a}+((-\vec{b})+\vec{b})=\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$. Таким образом, $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$.

Мы свели процесс нахождения разности $\vec{a}-\vec{b}$ к вычислению суммы $\vec{a}+(-\vec{b})$. Можно найти разность $\vec{a}-\vec{b}$ иначе. Для этого отложим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от одной точки A: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ (рис. 10). Соединив концы C и B, выберем направление отрезка CB от вычитаемого к уменьшаемому, т. е. от вектора $\vec{b}$ к вектору $\vec{a}$, от C к B. Так как $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$, то $\overrightarrow{CB}=\vec{a}-\vec{b}$.

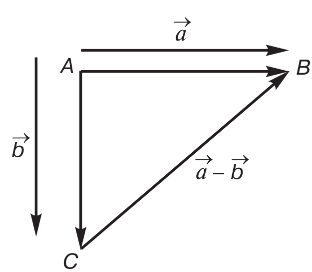


Рис. 10

Для модуля разности двух векторов справедливы неравенства $|\vec{a}|-|\vec{b}|\le|\vec{a}-\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$. Проверьте их самостоятельно.

Определение 3. *Под произведением ненулевых числа λ и вектора $\vec{a}$ понимается такой вектор $\vec{b}$, который удовлетворяет следующим условиям*:

1. $|\vec{b}|=|\lambda||\vec{a}|$, *где $|\lambda|$ — абсолютная величина λ.*

2. *Если $\lambda>0$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены; если $\lambda<0$, то $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направлены.*

В случае, когда $\lambda=0$ или $\vec{a}=\vec{0}$, полагают $\lambda\vec{a}=\vec{0}$.

Пример 1. *Дан параллелограмм $ABCD$, O — точка пересечения его диагоналей. Найти $\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.*

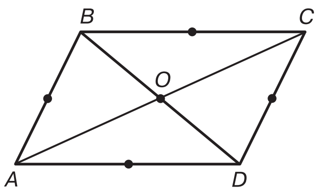


Рис. 11

Решение. Вектор $(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC})$ равен по длине половине модуля вектора $\overrightarrow{AC}$ и противоположен ему по направлению, поэтому $(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{CO}$ (рис. 11). Так как $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, то $\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{DO}$.

Рассмотрим свойства операции произведения вектора на число.

Свойство 1. *Пусть $\vec{a}$ — произвольный вектор, тогда* $1\vec{a}=\vec{a}$, $(-1)\vec{a}=(-\vec{a})$.

Первое равенство непосредственно следует из определения 3. Для доказательства второго достаточно проверить, что векторы $(-1)\vec{a}$ и $(-\vec{a})$ имеют равные модули и одинаковые направления. Проверьте самостоятельно.

Свойство 2. *Для любых чисел α и β и любого вектора $\vec{a}$ справедливо равенство*:

$$\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Если среди чисел α и β есть хотя бы одно, равное нулю, либо вектор $\vec{a}$ — нулевой, то $\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}=\vec{0}$. В этом случае равенство (2.1) истинно.

Предположим, что $\alpha\ne0$, $\beta\ne0$, $\vec{a}\ne\vec{0}$. Введем обозначения: $\vec{b}=\alpha(\beta\vec{a})$, $\vec{b}'=(\alpha\beta)\vec{a}$. Для доказательства свойства достаточно проверить, что $|\vec{b}|=|\vec{b}'|$ и $\vec{b}\uparrow\uparrow\vec{b}'$.

Из определения 3 следует: $|\vec{b}| = |\alpha||\beta\vec{a}| = |\alpha||\beta||\vec{a}|$, $|\vec{b}'| = |\alpha\beta||\vec{a}| = |\alpha||\beta||\vec{a}|$, поэтому $|\vec{b}| = |\vec{b}'|$. Пусть числа α и β имеют одинаковые знаки. Тогда $\alpha\beta > 0$, поэтому $\vec{b}' \uparrow\uparrow \vec{a}$. В то же время, если $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, то $\beta\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$ и $\alpha(\beta\vec{a}) \uparrow\uparrow \vec{a}$. При условии, когда $\alpha < 0$, $\beta < 0$, получим $\beta\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$ и $\alpha(\beta\vec{a}) \uparrow\downarrow \beta\vec{a}$, т. е. $\alpha(\beta\vec{a}) \uparrow\uparrow \vec{a}$. Мы показали, что в этом случае $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{b}'$.

Если числа α и β имеют разные знаки, то $\alpha\beta < 0$. Отсюда следует, что $\vec{b}' \uparrow\downarrow \vec{a}$. Пусть $\alpha < 0$, а $\beta > 0$. Тогда $\beta\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$, $\alpha(\beta\vec{a}) \uparrow\downarrow \beta\vec{a}$, т. е. $\alpha(\beta\vec{a}) \uparrow\downarrow \vec{a}$. Если $\alpha > 0$, а $\beta < 0$, то $\beta\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$, $\alpha(\beta\vec{a}) \uparrow\uparrow \beta\vec{a}$. Отсюда вытекает, что $\alpha(\beta\vec{a}) \uparrow\downarrow \vec{a}$. Таким образом, и вектор $\vec{b}$, и вектор $\vec{b}'$ противоположно направлены вектору $\vec{a}$, поэтому они сонаправлены. Свойство доказано.

Свойство 3. *Для любых чисел* α *и* β *и любого вектора* $\vec{a}$ *справедливо равенство*:

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}. \tag{2.2}$$

Доказательство. Пусть $\vec{a} = \vec{0}$. Тогда и левая, и правая части равенства (2.2) равны нулевому вектору. Если $\alpha = 0$ или $\beta = 0$, то, очевидно, равенство (2.2) выполнено. Будем предполагать, что $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\vec{a} \neq \vec{0}$.

1. Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$. В этом случае $\alpha\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$, $\beta\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$. Отложим от точки A вектор $\alpha\vec{a}$: $\overrightarrow{AB} = \alpha\vec{a}$, затем от точки B — вектор $\beta\vec{a}$: $\overrightarrow{BC} = \beta\vec{a}$ (рис. 12, *а*). Тогда $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Так как $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, то точка B лежит между A и C. Поэтому

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| = \alpha|\vec{a}| + \beta|\vec{a}| = (\alpha + \beta)|\vec{a}|, \quad \overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \vec{a}.$$

В то же время, $\alpha + \beta > 0$, отсюда $(\alpha + \beta)\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$. Таким образом, вектор $(\alpha + \beta)\vec{a}$ равен по длине и сонаправлен с $\overrightarrow{AC}$. Следователь-

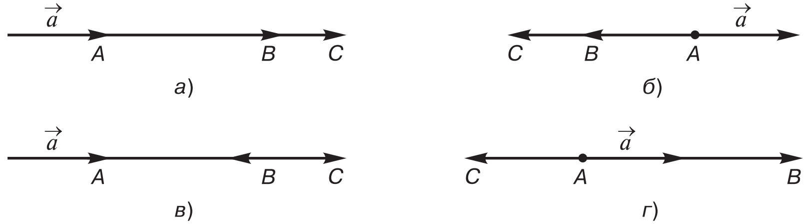


Рис. 12

но, $(\alpha+\beta)\vec{a} = \overrightarrow{AC} = \alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$. В этом случае равенство (2.2) доказано.

2. Пусть $\alpha < 0$, $\beta < 0$. Тогда $\alpha\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a}$, $\beta\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a}$. Отложим от точки A вектор $\alpha\vec{a}$: $\overrightarrow{AB}=\alpha\vec{a}$, затем от точки B отложим вектор $\beta\vec{a}$: $\overrightarrow{BC}=\beta\vec{a}$ (рис. 12, *б*). Тогда $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}\uparrow\downarrow\vec{a}$. Так как векторы $\alpha\vec{a}$ и $\beta\vec{a}$ сонаправлены, то точка B лежит между A и C. Поэтому

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{BC}\right|=|\alpha||\vec{a}|+|\beta||\vec{a}|=(|\alpha|+|\beta|)|\vec{a}|.$$

В силу того что α и β — отрицательные числа, $\left|\overrightarrow{AC}\right|=|\alpha+\beta||\vec{a}|$. Определим длину и направление вектора $(\alpha+\beta)\vec{a}$. В рассматриваемом случае $\alpha + \beta < 0$, следовательно, $(\alpha+\beta)\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a}$, $|(\alpha+\beta)\vec{a}|=|\alpha+\beta||\vec{a}|$. Таким образом, длины и направления векторов $\overrightarrow{AC}$ и $(\alpha+\beta)\vec{a}$ совпадают, $\overrightarrow{AC} = (\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$. В этом случае равенство (2.2) доказано.

Предположим, что α и β имеют различные знаки. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha > 0$, а $\beta < 0$.

3. Пусть $\alpha > 0$, $\beta < 0$, и $|\alpha|>|\beta|$. Тогда $\alpha\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{a}$, $\beta\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a}$. Отложим от точки A вектор $\alpha\vec{a}$: $\overrightarrow{AB}=\alpha\vec{a}$, затем от точки B отложим вектор $\beta\vec{a}$: $\overrightarrow{BC}=\beta\vec{a}$ (рис. 12, *в*). $\overrightarrow{AC} = \alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$. Так как $|\alpha|>|\beta|$, то точка C лежит между A и B. Поэтому $\overrightarrow{AC}\uparrow\uparrow\vec{a}$,

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|-\left|\overrightarrow{BC}\right|=|\alpha||\vec{a}|-|\beta||\vec{a}|=(|\alpha|-|\beta|)|\vec{a}|=|\alpha+\beta||\vec{a}|.$$

В то же время, $\alpha + \beta > 0$, следовательно, $(\alpha+\beta)\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{a}$, причем $|(\alpha+\beta)\vec{a}|=|\alpha+\beta||\vec{a}|$. Векторы $\overrightarrow{AC}$ и $(\alpha+\beta)\vec{a}$ имеют одинаковые длины и направления. Равенство (2.2) для этого случая также доказано.

4. Пусть $\alpha > 0$, $\beta < 0$, и $|\alpha|<|\beta|$. Отложим от точки A вектор $\alpha\vec{a}$: $\overrightarrow{AB}=\alpha\vec{a}$, затем от точки B отложим вектор $\beta\vec{a}$: $\overrightarrow{BC}=\beta\vec{a}$ (рис. 12, *г*). $\overrightarrow{AC}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$. В этом случае точка A лежит между точками B и C. Поэтому $\overrightarrow{AC}\uparrow\downarrow\vec{a}$,

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|-\left|\overrightarrow{AB}\right|=(|\beta|-|\alpha|)\vec{a}=|\alpha+\beta||\vec{a}|.$$

Но в рассматриваемом случае $\alpha + \beta < 0$. Следовательно, $(\alpha+\beta)\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a}$ Так как $|(\alpha+\beta)\vec{a}|=|\alpha+\beta||\vec{a}|$, то длины и направления векторов $\overrightarrow{AC}$ и $(\alpha+\beta)\vec{a}$ совпадают. Таким образом, для данного случая $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$.

5. В последнем случае осталось лишь предположить, что $\alpha > 0$, $\beta < 0$ и $\alpha + \beta = 0$. Тогда $(\alpha+\beta)\vec{a} = \vec{0}$. Покажем, что $\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ также совпадает с нулевым вектором. Действительно, $\alpha = -\beta$, поэтому векторы $\alpha\vec{a}$ и $\beta\vec{b}$ противоположные, а их сумма равна нулевому вектору. Таким образом, и в этом последнем случае равенство (2.2) доказано.

Прежде чем приступить к изложению последнего, четвертого свойства операции произведения вектора на число, докажем теорему о коллинеарных векторах.

Теорема 1 (о коллинеарных векторах). *Пусть даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, причем $\vec{a} \neq \vec{0}$. Они коллинеарны в том и только в том случае, когда существует единственное число λ, для которого $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.*

Доказательство. Пусть $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Докажем, что существует требуемое число λ. В случае сонаправленности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ положим $\lambda = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. В частности, если $\vec{b} = \vec{0}$, то $\lambda = 0$. Если $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$, то будем считать, что $\lambda = -\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Легко показать, что λ удовлетворяет требуемому условию. Действительно, $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}| = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}|\vec{a}|$. Если $\lambda = 0$, то $0\vec{a} = \vec{0} = \vec{b}$. Если $\lambda > 0$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, поэтому векторы $\lambda\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены и имеют одинаковую длину, следовательно, они совпадают. Если $\lambda < 0$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. Но $\lambda\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$, отсюда вытекает, что $\lambda\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. В этом случае векторы $\lambda\vec{a}$ и $\vec{b}$ также имеют одинаковые длины и направления. Таким образом, $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Докажем единственность числа λ. Пусть существуют два числа λ_1 и λ_2, удовлетворяющие условию $\vec{b} = \lambda_1\vec{a}$ и $\vec{b} = \lambda_2\vec{a}$. Тогда $\lambda_1\vec{a} - \lambda_2\vec{a} = \vec{0}$. Используя соотношения (2.1) и (2.2), получаем: $\lambda_1\vec{a} - \lambda_2\vec{a} = \lambda_1\vec{a} + (-1)\lambda_2\vec{a} = (\lambda_1 - \lambda_2)\vec{a}$. Таким образом, $(\lambda_1 - \lambda_2)\vec{a} = \vec{0}$. Так как $\vec{a} \neq \vec{0}$, то $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, т. е. $\lambda_1 = \lambda_2$.

Если $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, то коллинеарность векторов непосредственно следует из определения 3. Теорема доказана.

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — нулевые векторы, то при любом λ справедливо равенство $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Докажем последнее свойство операции умножения вектора на число.

Свойство 4. *Для любого числа* α *и любых векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *справедливо равенство*

$$\alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}. \qquad (2.3)$$

Доказательство. Если $\alpha = 0$, то равенство (2.3) очевидно. В дальнейшем будем предполагать, что $\alpha \neq 0$. Пусть $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Тогда из теоремы о коллинеарных векторах следует, что $\vec{b} = \lambda\vec{a}$. Используя соотношения (2.1) и (2.2), преобразуем правую и левую части равенства (2.3):

$$\alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha(\vec{a}+\lambda\vec{a}), \quad \alpha\vec{a}+\alpha\vec{b} = \alpha\vec{a}+\alpha\lambda\vec{a} = (\alpha+\alpha\lambda)\vec{a} = \alpha(\lambda+1)\vec{a}.$$

В этом случае $\alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$.

Далее будем предполагать, что вектор $\vec{a}$ не коллинеарен $\vec{b}$. Пусть $\alpha > 0$. Тогда векторы $\alpha\vec{a}$ и $\alpha\vec{b}$ сонаправлены с $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно. Отложим от точки A векторы $\vec{a}$ и $\alpha\vec{a}$: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB'} = \alpha\vec{a}$, а от точек B и B' векторы $\vec{b}$ и $\alpha\vec{b}$: $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{B'C'} = \alpha\vec{b}$ (рис. 13, *а*). Докажем, что треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны между собой. Действительно, $\angle ABC = \angle AB'C'$, вектор $\vec{b}$ сонаправлен с $\alpha\vec{b}$, значит, $|AB'|:|AB| = |B'C'|:|BC| = \alpha$. Треугольники подобны, так как равны их углы и прилежащие стороны пропорциональны. Отсюда следует, что $\angle BAC = \angle B'AC'$, т. е. точки A, C и C' лежат на одной прямой, и поэтому $\overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AC'}$. Кроме того, из подобия треугольников вытекает $|AC'|:|AC| = \alpha$. Таким образом, $\overrightarrow{AC'} = \alpha\overrightarrow{AC}$. Но $\overrightarrow{AC} = \vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{AC'} = \alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$, поэтому

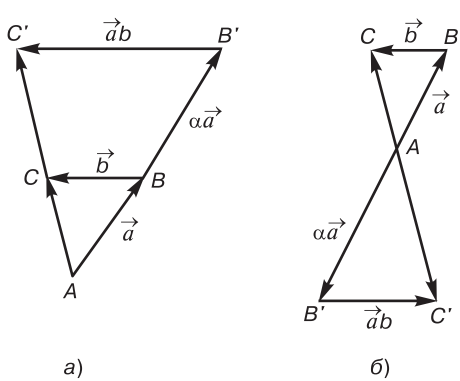


Рис. 13

$\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$. Для рассматриваемого случая равенство (2.3) доказано.

Предположим теперь, что $\alpha < 0$. Тогда $\alpha\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a}$, $\alpha\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{b}$. Отложим векторы $\vec{a}$ и $\alpha\vec{a}$ от точек A и A': $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB'}=\alpha\vec{a}$, а от точек B и B' векторы $\vec{b}$ и $\alpha\vec{b}$: $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{B'C'}=\alpha\vec{b}$ (рис. 13, *б*). Так же как и в предыдущем случае, доказывается подобие треугольников ABC и $AB'C'$. Из подобия следует, что $\angle BAC = \angle B'AC'$. Так как векторы $\vec{b}$ и $\alpha\vec{b}$ противоположно направлены, то углы BAC и $B'AC'$ вертикальные. Поэтому точки C', A и C лежат на одной прямой. Из подобия треугольников следует, что $|AC'|:|AC|=|\alpha|$. Векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AC'}$ противоположно направлены, следовательно, $\overrightarrow{AC'}=\alpha\overrightarrow{AC}$. В то же время, $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}, \overrightarrow{AC'}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$. Таким образом, $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$. Равенство (2.3) доказано полностью.

§ 3. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРОВ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Мы приступаем к изучению основных понятий аналитической геометрии — координат векторов и точек. Фундаментальное значение этих понятий объясняется тем, что они позволяют геометрическому объекту, вектору или точке, однозначно поставить в соответствие алгебраический объект, его координаты, что дает возможность применить алгебраические методы к исследованию геометрических свойств фигур. Прежде всего, рассмотрим свойства линейно зависимых систем векторов, с их помощью и будут введены координаты векторов на плоскости и в пространстве.

Условимся вектор $\vec{m}=\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\ldots+\lambda_n\vec{a}_n$ называть *линейной комбинацией векторов* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ *с коэффициентами* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. В этом случае будем также говорить, что вектор $\vec{m}$ линейно выражается через векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ или линейно раскладывается по этим векторам с указанными коэффициентами.

Определение 1. *Система векторов* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ *называется линейно зависимой, если существуют такие числа* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, *среди которых, по крайней мере, одно отлично от нуля, что линейная комбинация* $\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\ldots+\lambda_n\vec{a}_n$ *равна нулевому вектору.*

Если система векторов не является линейно зависимой, то она называется *линейно независимой*. Таким образом, система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ линейно независима в том и только в том случае, когда из равенства $\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\ldots+\lambda_n\vec{a}_n=\vec{0}$ следует $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$.

Докажем некоторые свойства линейно зависимых систем векторов.

Свойство 1. *Если система содержит нулевой вектор, то она линейно зависима.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\vec{a}_1=\vec{0}$. Положим $\lambda_1=1, \lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$. Тогда

$$\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\ldots+\lambda_n\vec{a}_n=1\vec{a}_1+0\vec{a}_2+\ldots+0\vec{a}_n=\vec{0}.$$

Мы получили нулевую линейную комбинацию векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$, среди коэффициентов которых — отличный от нуля коэффициент λ_1. Утверждение доказано.

Свойство 2. *Если в системе векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ содержится линейно зависимая подсистема, то вся система также линейно зависима.*

Доказательство. Перенумеруем векторы системы так, чтобы линейно зависимую подсистему составляли первые k векторов. Таким образом, существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, среди которых по крайней мере одно отлично от нуля, такие, что $\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\ldots+\lambda_k\vec{a}_k=\vec{0}$. Положим $\lambda_{k+1}=\ldots=\lambda_n=0$. Тогда линейная комбинация векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ равна нулевому вектору: $\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\ldots+\lambda_n\vec{a}_n=\lambda_1\vec{a}_1+$ $+\lambda_2\vec{a}_2+\ldots+\lambda_k\vec{a}_k+0\vec{a}_{k+1}+\ldots+0\vec{a}_n=\vec{0}$. Утверждение доказано.

Свойство 3. *Система, содержащая не менее двух векторов, линейно зависима тогда и только тогда, когда один из ее векторов линейно выражается через остальные.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ линейно зависима. Тогда существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, среди которых содержится по крайней мере одно, отличное от нуля, для которых $\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\ldots+\lambda_n\vec{a}_n=\vec{0}$. Перенумеруем векторы и числа так, что $\lambda_1\neq 0$. Тогда $\lambda_1\vec{a}_1=-\lambda_2\vec{a}_2-\ldots-\lambda_n\vec{a}_n$. Разделим обе части этого равенства на ненулевое число λ_1: $\vec{a}_1=-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{a}_2-\ldots-\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\vec{a}_n$. Вектор $\vec{a}_1$ представлен как линейная комбинация векторов $\vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ с коэффициентами $-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \ldots, -\frac{\lambda_n}{\lambda_1}$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть один из векторов системы, например $\vec{a}_1$, линейно выражается через остальные: $\vec{a}_1 = \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n$. Тогда $\vec{a}_1 - \alpha_2\vec{a}_2 - \ldots - \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$. Мы получили нулевую линейную комбинацию векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ с коэффициентами $1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n$, среди которых содержится число 1, отличное от нуля. Система $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ линейно зависима. Утверждение доказано.

Из рассмотренных свойств вытекает, *что линейно независимая система векторов не содержит нулевого вектора, любая ее подсистема также линейно независима, и ни один из ее векторов линейно не выражается через остальные*.

Понятие линейной зависимости было введено нами алгебраическим способом. Но в аналитической геометрии каждое алгебраическое свойство геометрических объектов имеет геометрический смысл. Установим его для линейно зависимых систем векторов. Теорема о коллинеарных векторах (теорема 1, § 2) позволяет выяснить этот смысл для линейной зависимой системы, состоящей из двух векторов.

Теорема 1. *Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.*

Доказательство. Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ — линейно зависимая система векторов. Из свойства 3 настоящего параграфа следует, что один из векторов, например $\vec{a}$, линейно выражается через второй: $\vec{a} = \lambda\vec{b}$. Поэтому векторы коллинеарны.

Пусть $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Тогда из теоремы о коллинеарных векторах (§ 2) следует, что один из векторов, например $\vec{a}$, линейно выражается через вектор $\vec{b}$: $\vec{a} = \lambda\vec{b}$. Из того же свойства 3 следует, что система $\vec{a}$, $\vec{b}$ линейно зависима. Теорема доказана.

Следствие. *Система, состоящая из двух неколлинеарных векторов, линейно независима.*

Будем говорить, что *вектор $\vec{a}$ параллелен плоскости π, если его представитель параллелен или лежит в этой плоскости.* Ясно, что это определение не зависит от выбора представителя вектора.

Определение 2. *Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называется компланарной, если существует плоскость, которой параллельны все векторы системы.*

Приведем примеры компланарных систем векторов.

1. *Если система* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ *состоит из коллинеарных векторов, то она компланарна.*

Действительно, согласно определению коллинеарных векторов, существует прямая a, параллельная представителям данных векторов. Возьмем произвольную плоскость, параллельную прямой a. Тогда векторы параллельны выбранной плоскости.

2. *Система, состоящая из двух векторов, всегда является компланарной.*

В самом деле, рассмотрим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то справедливость утверждения вытекает из предыдущего примера. Если они неколлинеарны, то отложим их от некоторой точки A: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Точки A, B и C не лежат на одной прямой, поэтому существует проходящая через них плоскость. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллельны этой плоскости.

Если вектор $\vec{a}$ параллелен плоскости, то существует представитель этого вектора, принадлежащий плоскости. Поэтому *можно отождествить систему, состоящую из всех векторов, компланарных между собой, с множеством векторов той плоскости, которой параллельны векторы системы.* Все утверждения, доказанные для векторов плоскости, будут справедливы для системы векторов, параллельных плоскости, и наоборот.

Введем следующие фундаментальные определения.

Определение 3. *Система, состоящая из двух неколлинеарных векторов плоскости, заданных в определенном порядке, называется базисом плоскости.*

Из следствия теоремы 1 вытекает, что базис плоскости образует линейно независимую систему векторов. Базис будем называть *ортонормированным* или *прямоугольным декартовым*, если его векторы взаимно перпендикулярны и имеют единичную длину. Произвольный базис плоскости называется *аффинным* или *общим декартовым*.

Теорема 2 (о разложении вектора плоскости по векторам базиса). *Если на плоскости дан базис, то любой ее вектор линейно выражается через векторы базиса, при этом коэффициенты разложения определяются единственным образом.*

Доказательство. Вначале докажем существование разложения. Обозначим векторы базиса через $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Отложим их от некоторой точки O: $\overrightarrow{OE_1} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{OE_2} = \vec{e}_2$. От этой же точки также отложим произвольный вектор $\vec{a}$: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ (рис. 14). Через точку A

проведем прямую, параллельную $\vec{e}_2$. Так как $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ не коллинеарны, то эта прямая пересечет прямую OE_1 в некоторой точке A_1. Тогда $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A}$. Так как по построению $\overrightarrow{OA_1} \parallel \vec{e}_1$, $\overrightarrow{A_1A} \parallel \vec{e}_2$, то, согласно теореме о коллинеарных векторах (§ 2), существуют такие числа α и β, для которых $\overrightarrow{OA_1} = \alpha\vec{e}_1$, $\overrightarrow{A_1A} = \beta\vec{e}_2$. Таким образом, $\vec{a} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2$. Существование разложения доказано.

Теперь докажем его единственность. Пусть наряду с найденным разложением существует еще одно: $\vec{a} = \alpha'\vec{e}_1 + \beta'\vec{e}_2$. Вычтем из одного равенства другое. После преобразований получим $(\alpha - \alpha')\vec{e}_1 + (\beta - \beta')\vec{e}_2 = \vec{0}$. Мы нашли нулевую линейную комбинацию линейно независимых векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Поэтому $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$. Теорема доказана.

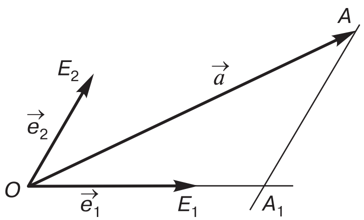


Рис. 14

Теорема о разложении вектора плоскости по векторам базиса позволит установить геометрический смысл линейной зависимости трех векторов.

Теорема 3 (о компланарных векторах). *Система, состоящая из трех векторов, линейно зависима тогда и только тогда, когда векторы компланарны.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$ линейно зависимы. Тогда по свойству 3 один из них, например $\vec{a}_3$, линейно выражается через $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$:

$$\vec{a}_3 = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2. \tag{3.1}$$

Возможны следующие случаи:

1. Векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ коллинеарны. Воспользуемся теоремой о коллинеарных векторах. Один из этих векторов выразится через второй. Пусть $\vec{a}_1 = \alpha\vec{a}_2$. Тогда из равенства (3.1) следует $\vec{a}_3 = (\alpha\lambda_1 + \lambda_2)\vec{a}_2$, вектор $\vec{a}_3$ также коллинеарен $\vec{a}_2$. Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ коллинеарная, поэтому, как показано выше, она компланарная.

2. Векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ не коллинеарны. Отложим их от некоторой точки O: $\overrightarrow{OA_1} = \vec{a}_1$, $\overrightarrow{OA_2} = \vec{a}_2$. Точки O, A_1, A_2 не лежат

на одной прямой, поэтому они принадлежат одной плоскости π. Отложим от точки O векторы $\lambda_1\vec{a}_1$ и $\lambda_2\vec{a}_2$: $\overrightarrow{OB_1}=\lambda_1\vec{a}_1$, $\overrightarrow{OB_2}=\lambda_2\vec{a}_2$. Точки B_1 и B_2 лежат соответственно на прямых OA_1 и OA_2, поэтому они также принадлежат плоскости π. Отложим теперь от точки O вектор $\vec{a}_3$: $\overrightarrow{OC}=\vec{a}_3$. Согласно (3.1), $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}$. Отсюда следует, что точка C также лежит в плоскости π, вектор $\vec{a}_3=\overrightarrow{OC}$ параллелен π. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$ компланарны. Покажем, что они линейно зависимы. Для этого рассмотрим следующие случаи.

1. Векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ коллинеарны. Тогда они образуют линейно зависимую подсистему в системе $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$. Следовательно, вся система линейно зависима (свойство 2).

2. Векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ не коллинеарны. Обозначим через π плоскость, параллельную данным векторам. Тогда $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ образуют ее базис. По теореме о разложении вектора плоскости по векторам базиса $\vec{a}_3$ линейно выражается через $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Из свойства 3 линейно зависимых систем векторов следует, что вся система $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ линейно зависима. Теорема доказана.

Следствие. *Система, состоящая из трех некомпланарных векторов, линейно независима.*

Введем основное понятие аналитической геометрии — координаты вектора.

Определение 4. *Коэффициенты разложения вектора плоскости по векторам базиса называются координатами этого вектора относительно базиса.*

Таким образом, координаты вектора плоскости представляют собой упорядоченную пару чисел — коэффициенты разложения вектора по векторам базиса. Как следует из теоремы 2, если на плоскости выбран базис, то любому вектору однозначно соответствуют его координаты. Координаты вектора будем заключать в фигурные скобки. Если векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ образуют базис, а координаты вектора $\vec{a}$ равны $\{\alpha_1;\ \alpha_2\}$, то $\vec{a}=\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2$.

Пример 1. *Дан треугольник ABC, O — точка пересечения его медиан. Найти координаты вектора $\overrightarrow{OC}$ в базисе $\vec{e}_1=\overrightarrow{OA}$, $\vec{e}_2=\overrightarrow{OB}$.*

Решение. Для решения можно воспользоваться способом разложения вектора по векторам базиса, изложенным при доказательстве теоремы 2. Но удобнее найти искомые координаты, используя линейные зависимости между векторами, вытекающие из условия. Пусть ABC — данный треугольник (рис. 15). Так как O — точка пересечения его медиан, то $\overrightarrow{OC} = -2\overrightarrow{OM}$. Но $\overrightarrow{OM} = \vec{e}_1 + \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\vec{e}_2 - \vec{e}_1)$.

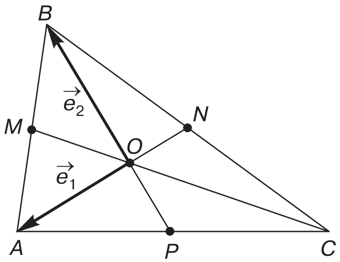


Рис. 15

Таким образом, $\overrightarrow{OM} = \vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 - \frac{1}{2}\vec{e}_1 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2$ и $\overrightarrow{OC} = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2$. Искомые координаты равны $\{-1; -1\}$.

Легко найти координаты нулевого вектора и базисных векторов. Действительно, поскольку $\vec{0} = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2$, нулевой вектор имеет нулевые координаты: $\vec{0}\{0;\ 0\}$. Из соотношений $\vec{e}_1 = 1\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2$, $\vec{e}_2 = 0\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2$ получаем $\vec{e}_1\{1;\ 0\}$, $\vec{e}_2\{0;\ 1\}$.

Введем понятие базиса пространства.

Определение 5. *Упорядоченная система, состоящая из трех некомпланарных векторов пространства, называется его базисом.*

Из теоремы 3 следует, что векторы, составляющие базис пространства, линейно независимы. Так же как и в случае плоскости, базис пространства называется *ортонормированным* или *прямоугольным декартовым*, если его векторы взаимно перпендикулярны и имеют единичную длину. Произвольный базис пространства носит название *аффинного* или *общего декартова*.

Теорема 4 (о разложении вектора пространства по векторам базиса). *Пусть в пространстве дан произвольный базис. Тогда любой вектор пространства линейно выражается через базисные векторы, при этом коэффициенты разложения определяются единственным образом.*

Доказательство. Обозначим векторы базиса через $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$. Возьмем произвольный вектор $\vec{a}$ пространства. Отложим векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ и $\vec{a}$ от одной точки O: $\overrightarrow{OE_1} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{OE_2} = \vec{e}_2$, $\overrightarrow{OE_3} = \vec{e}_3$, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ (рис. 16). Обозначим через π плоскость, определяемую точками O, E_1, E_2. Так как векторы базиса не компланарны, то точка E_3 не лежит в этой плоскости. Проведем через точку A

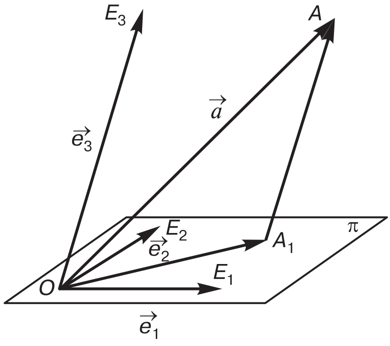


Рис. 16

прямую, параллельную вектору $\vec{e}_3$. Она не параллельна плоскости π, поэтому пересекает ее в некоторой точке A_1:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A}. \qquad (3.2)$$

Векторы $\overrightarrow{A_1A}$ и $\vec{e}_3$ коллинеарны. Из теоремы о коллинеарных векторах следует:

$$\overrightarrow{A_1A} = \alpha_3\vec{e}_3. \qquad (3.3)$$

Векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ образуют базис плоскости π. Вектор $\overrightarrow{OA_1}$ компланарен векторам $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Поэтому по теореме о разложении вектора плоскости по векторам базиса имеем:

$$\overrightarrow{OA_1} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2. \qquad (3.4)$$

Подставим соотношения (3.3) и (3.4) в (3.2): $\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + {} + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3$. Мы построили искомое разложение вектора $\vec{a}$ по векторам базиса.

Докажем единственность. Пусть существует еще одно разложение: $\vec{a} = \alpha_1'\vec{e}_1 + \alpha_2'\vec{e}_2 + \alpha_3'\vec{e}_3$. Вычтем из первого разложения второе: $(\alpha_1 - \alpha_1')\vec{e}_1 + (\alpha_2 - \alpha_2')\vec{e}_2 + (\alpha_3 - \alpha_3')\vec{e}_3 = \vec{0}$. Мы получили нулевую комбинацию линейно независимых векторов. Поэтому ее коэффициенты равны нулю, т. е. $\alpha_1 = \alpha_1'$, $\alpha_2 = \alpha_2'$, $\alpha_3 = \alpha_3'$. Теорема доказана.

Теорема 4 позволяет ответить на вопрос о максимальном числе векторов, составляющих линейно независимую систему пространства.

Теорема 5. *Система, состоящая из четырех и более векторов пространства, является линейно зависимой.*

Доказательство. Пусть дана система, состоящая из четырех векторов пространства $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$. Предположим, что подсистема $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ линейно зависима. Тогда из свойства 2 линейно зависимых систем следует, что и вся система $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$ линейно зависима. Если же система $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ линейно независима, то она образует базис пространства. Из теоремы 4 следует, что вектор $\vec{a}_4$ линейно раскладывается по векторам $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$.

Поэтому из свойства 3 линейно зависимых систем вытекает, что и в этом случае вся система векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$ линейно зависима. Теорема доказана.

Определение 6. *Коэффициенты разложения вектора пространства по векторам базиса называются его координатами относительно этого базиса.*

Из теоремы 4 следует, что если в пространстве выбран базис, то любому вектору пространства однозначно соответствует упорядоченная тройка чисел — его координаты относительно этого базиса. Если $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ — базис пространства, а вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3\}$, то $\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3$.

Выясним, как вычисляются координаты суммы векторов и произведения вектора на число.

Теорема 6. *Пусть на плоскости или в пространстве дан базис. Тогда координаты суммы двух векторов равны сумме их соответствующих координат, а координаты произведения вектора на число — произведению этого числа на соответствующие координаты вектора.*

Доказательство. Теорему докажем для случая плоскости. Для векторов пространства рассуждения аналогичны, проведите их самостоятельно. Пусть $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ — данный базис плоскости. Запишем координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{a}\{\alpha_1; \alpha_2\}$, $\vec{b}\{\beta_1; \beta_2\}$. Так как $\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2$, $\vec{b} = \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2$, то $\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1)\vec{e}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\vec{e}_2$. Таким образом, координаты суммы данных векторов равны суммам соответствующих координат слагаемых: $(\vec{a} + \vec{b})\{\alpha_1 + \beta_1; \alpha_2 + \beta_2\}$.

Аналогично проводятся доказательства для случая произведения вектора на число. Если $\vec{a}\{\alpha_1; \alpha_2\}$, то $\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2$. Поэтому $\lambda\vec{a} = \lambda\alpha_1\vec{e}_1 + \lambda\alpha_2\vec{e}_2$. Отсюда следует, что координаты вектора $\lambda\vec{a}$ равны $\{\lambda\alpha_1; \lambda\alpha_2\}$. Теорема доказана.

Следствие. *Если вектор $\vec{a}$ плоскости или пространства равен линейной комбинации векторов $\vec{a} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n$, то его координаты равны сумме соответствующих координат векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ умноженных на коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.*

Выведем условия коллинеарности и компланарности векторов в координатах. Не оговаривая особо, будем предполагать, что на плоскости или в пространстве выбран некоторый базис.

Теорема 7. *Два вектора плоскости или пространства коллинеарны в том и только в том случае, когда их координаты пропорциональны.*

Доказательство. Доказательство теоремы непосредственно следует из теорем 1 и 6. По теореме 1 два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда они линейно зависимы, а из теоремы 6 вытекает, что они линейно зависимы в том и только в том случае, когда линейно зависимы строки, составленные из их координат.

Следствие. *Пусть даны координаты векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$: $\vec{a}\{\alpha_1;\alpha_2\}$, $\vec{b}\{\beta_1;\beta_2\}$. *Векторы коллинеарны в том и только в том случае, когда*

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.5}$$

Из курса алгебры следует, что условие (3.5) равносильно требованию пропорциональности строк определителя, т. е. коллинеарности данных векторов.

Введем условие компланарности трех векторов пространства в координатах.

Теорема 8. *Пусть даны координаты трех векторов пространства* $\vec{a}\{\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3\}$, $\vec{b}\{\beta_1;\beta_2;\beta_3\}$, $\vec{c}\{\gamma_1;\gamma_2;\gamma_3\}$. *Тогда эти векторы компланарны в том и только в том случае, когда*

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.6}$$

Доказательство этого утверждения следует из теоремы 3 свойства координат линейной комбинации векторов (следствие теоремы 6). Проведите его самостоятельно.

Пример 2. *Доказать, что векторы* $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ *компланарны и найти координаты вектора* $\vec{c}$ *в базисе* $\vec{a}$, $\vec{b}$, если $\vec{a}\{1;-1;2\}$, $\vec{b}\{3;1;4\}$, $\vec{c}\{2;2;2\}$.

Решение. Проверим условие (3.6):

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Так как координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не пропорциональны, то они неколлинеарны и образуют базис в системе векторов плоскости, параллельной $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Вектор $\vec{c}$ раскладывается по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$. Координаты линейной комбинации $x\vec{a} + y\vec{b}$ равны $\{x+3y; -x+y; 2x+y\}$, поэтому

$$\begin{cases} x+3y=2, \\ -x+y=2, \\ 2x+4y=2. \end{cases}$$

Полученная линейная система состоит из трех уравнений и содержит два неизвестных. В силу компланарности векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ она совместна. Найдем x и y из первых двух уравнений: $x = -1$; $y = 1$. Легко видеть, эти значения удовлетворяют третьему уравнению. Искомые координаты вектора $\vec{c}$ равны $\{-1; 1\}$.

§ 4. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Мы переходим к изучению свойств скалярного, векторного и смешанного произведений векторов. Они впервые были определены в книге У. Гамильтона «Лекции о кватернионах», а также в трудах немецкого математика Г. Грассмана. В дальнейшем их абстрактные математические исследования были успешно применены при изучении различных свойств физических объектов. Например, с помощью скалярного произведения векторов определяется работа силы при перемещении тела.

В настоящем параграфе мы рассмотрим свойства скалярного произведения векторов. Для этого нам потребуется ввести несколько геометрических понятий.

Определение 1. *Под углом между двумя ненулевыми векторами* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *будем понимать величину угла* AOB, *где* $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. *Если векторы* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *сонаправлены, то угол между ними равен* 0, *если же противоположно направлены, то* π.

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будем обозначать через $\angle\vec{a}\vec{b}$. Ясно, что это понятие не зависит от выбора точки O. Угол между ненулевыми векторами заключается в пределах от 0 до π: $0 \le \angle\vec{a}\vec{b} \le \pi$. *Если среди векторов содержится хотя бы один нулевой, то будем считать, что угол между ними принимает произ-*

вольное значение в пределах от 0 *до* π. Для изучения свойств скалярного произведения введем понятие проекции вектора на ось.

Определение 2. *Под осью будем понимать прямую, для которой указан параллельный ей ненулевой вектор.*

Будем говорить, что вектор оси задает ее *направление*. Будем также считать *две оси равными друг другу, если они образованы одной и той же прямой, а векторы, определяющие их направления, сонаправлены*. Таким образом, нам не существенна длина вектора оси, мы будем использовать только его направление. Вектор оси, имеющий единичную длину, называется ее *ортом*.

Пусть в пространстве даны ось l и точка A. Проведем через A плоскость, перпендикулярную l. Точку пересечения этой плоскости с осью будем называть *ортогональной проекцией точки A на l*.

Определение 3. *Пусть даны вектор $\vec{a}$ и ось l, $\overrightarrow{AB}$ — произвольный представитель $\vec{a}$. Тогда под векторной проекцией $\vec{a}$ на l будем понимать вектор $\overrightarrow{A'B'}$, где A' и B' — ортогональные проекции точек A и B на l.*

Векторную проекцию $\vec{a}$ на l будем обозначать $\overrightarrow{pr_l\vec{a}}$. Ясно, что она не зависит от выбора представителя вектора $\vec{a}$. Пусть $\vec{e}$ — орт оси, тогда $\overrightarrow{pr_l\vec{a}} \parallel \vec{e}$. Так как $\vec{e}$ — ненулевой вектор, то из теоремы о коллинеарных векторах (§ 2) следует, что существует единственное число λ, удовлетворяющее условию $\overrightarrow{pr_l\vec{a}} = \lambda\vec{e}$.

Определение 4. *Под проекцией вектора $\vec{a}$ на ось l будем понимать число, на которое следует умножить орт оси, чтобы получить векторную проекцию $\vec{a}$ на l.*

Проекцию $\vec{a}$ на l будем обозначать через $pr_l\vec{a}$. Если $\vec{e}$ — орт оси, то

$$\overrightarrow{pr_l\vec{a}} = pr_l\vec{a}\,\vec{e}. \tag{4.1}$$

Легко видеть, что $pr_l\vec{a} > 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{pr_l\vec{a}}$ и $\vec{e}$ сонаправлены. В этом случае угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{e}$ острый (рис. 17, *а*); $\overrightarrow{pr_l\vec{a}} = \vec{0}$ в том и только в том случае, когда либо $\vec{a} \perp \vec{e}$ (рис. 17, *б*), либо $\vec{a} = \vec{0}$; $pr_l\vec{a} < 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{pr_l\vec{a}}$ и $\vec{e}$ противоположно направлены. При этом угол между $\vec{a}$ и $\vec{e}$ тупой (рис. 17, *в*).

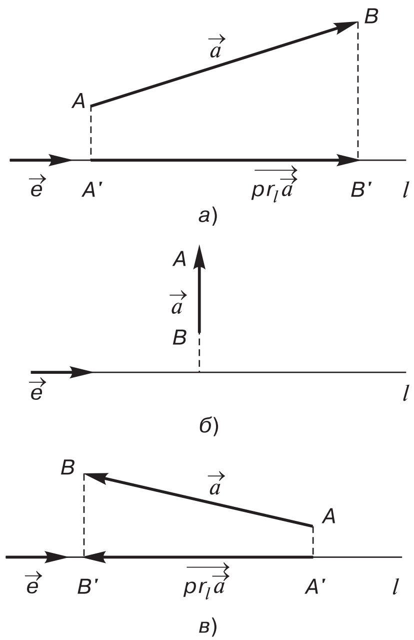


Рис. 17

Свойство 1. *Пусть l — ось, а $\vec{e}$ — ее орт. Тогда для любого ненулевого вектора $\vec{a}$ выполняется равенство*

$$pr_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos(\angle \vec{a}\vec{e}). \tag{4.2}$$

Доказательство. Предположим, что $pr_l \vec{a} = \vec{0}$. Так как $\vec{a} \neq \vec{0}$, то в этом случае $\vec{a} \perp \vec{e}$. Тогда $\cos(\angle \vec{a}\vec{e}) = 0$. Равенство (4.2) выполнено.

Пусть $pr_l \vec{a} > 0$. Отложим от точки A вектор $\vec{a}$: $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$, обозначим через $\overrightarrow{AB}$ векторную проекцию $\overrightarrow{pr_l \vec{a}}$ (рис. 18, *а*). Треугольник ACB — прямоугольный. Так как $pr_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos(\angle \vec{a}\vec{e}) > 0$, то из равенства (4.1) следует, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{e}$ сонаправлены. Поэтому $\angle CAB = \angle \vec{a}\vec{e}$. Из свойств прямоугольного треугольника ACB следует $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| \cos(\angle CAB)$ или $pr_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos(\angle \vec{a}\vec{e})$. Равенство (4.2) в этом случае доказано.

Наконец, рассмотрим случай, когда $pr_l \vec{a} < 0$. Пусть $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{pr_l \vec{a}}$. Отложим от точки A вектор $\vec{a}$: $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ (рис. 18, *б*). Треугольник ABC — прямоугольный. Так как $pr_l \vec{a} < 0$, то $pr_l \vec{a} = -|\overrightarrow{AB}|$ и векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{e}$ противоположно направлены, а значит, $\angle CAB = \pi - \angle \vec{a}\vec{e}$. Из свойств прямоугольного треугольника ABC следует $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|\cos(\angle CAB)$. Но $\cos(\angle CAB) = \cos(\pi - \angle \vec{a}\vec{e}) = -\cos(\angle \vec{a}\vec{e})$, поэтому $|\overrightarrow{AB}| = -|\overrightarrow{AC}|\cos(\angle \vec{a}\vec{e})$, $-pr_l\vec{a} = -|\vec{a}|\cos(\angle \vec{a}\vec{e})$, и $pr_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\angle \vec{a}\vec{e})$. Свойство доказано.

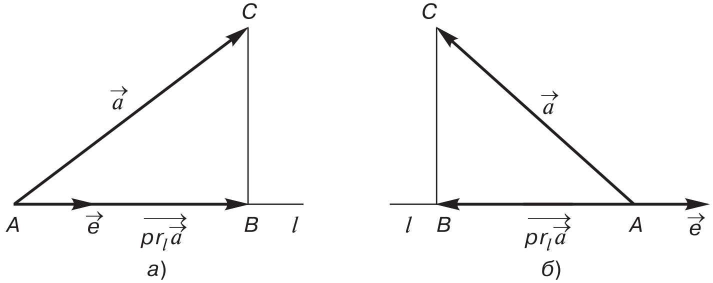


Рис. 18

Свойство 2. *Пусть l — произвольная ось. Тогда для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо следующее соотношение*:

$$pr_l(\vec{a} + \vec{b}) = pr_l\vec{a} + pr_l\vec{b}. \tag{4.3}$$

Доказательство. Отложим от точки A последовательно векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, тогда $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$. Проектируя точки A, B и C на ось l, получим: $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{pr_l\vec{a}}$, $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{pr_l\vec{b}}$, $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{pr_l(\vec{a} + \vec{b})}$ (рис. 19). Тогда $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'}$, т. е.

$$\overrightarrow{pr_l(\vec{a} + \vec{b})} = \overrightarrow{pr_l\vec{a}} + \overrightarrow{pr_l\vec{b}}. \tag{4.4}$$

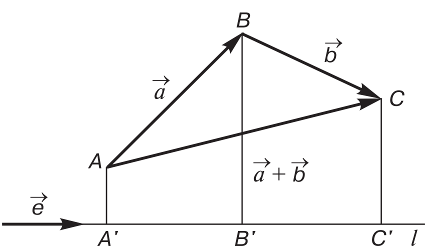


Рис. 19

Если $\vec{e}$ — орт оси, то, согласно равенству (4.1), $\overrightarrow{pr_l(\vec{a} + \vec{b})} = pr_l(\vec{a} + \vec{b})\vec{e}$, $\overrightarrow{pr_l\vec{a}} = pr_l\vec{a}\vec{e}$, $\overrightarrow{pr_l\vec{b}} = pr_l\vec{b}\vec{e}$. Подставив эти соотношения в выражение (4.4), получаем: $pr_l(\vec{a}+\vec{b})\vec{e} = pr_l\vec{a}\vec{e} + {}$ $+ pr_l\vec{b}\vec{e}$. Отсюда непосредственно следует соотношение (4.3). Свойство доказано.

Свойство 3. *Пусть l — произвольная ось. Тогда для любого числа λ и вектора $\vec{a}$ выполняется равенство*

$$pr_l\lambda\vec{a} = \lambda pr_l\vec{a}. \tag{4.5}$$

Доказательство. Равенство очевидно, если $\lambda = 0$. В дальнейшем будем предполагать, что $\lambda \neq 0$. Равенство легко проверить при $pr_l\vec{a} = 0$. Действительно, в этом случае либо $\vec{a} = \vec{0}$, либо $\angle\vec{a}\vec{e} = \dfrac{\pi}{2}$. Но тогда либо $\lambda\vec{a}$ — нулевой вектор, либо он перпендикулярен оси. И в том, и в другом случае $pr_l\vec{a} = 0$.

Рассмотрим случай $pr_l\vec{a} \neq 0$. Отложим векторы $\vec{a}$ и $\lambda\vec{a}$ от одной точки A оси l: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \lambda\vec{a}$, $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{pr_l\vec{a}}$, $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{pr_l(\lambda\vec{a})}$. Пусть $\lambda > 0$, тогда $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{AB'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AC'}$ (рис. 20, *а*). Легко видеть, что прямоугольные треугольники ABB' и ACC' подобны между собой, при этом $|\overrightarrow{AC}| : |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC'}| : |\overrightarrow{AB'}| = \lambda$. Так как $\lambda > 0$ и $\overrightarrow{AB'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AC'}$ то $\overrightarrow{AC'} = \lambda\overrightarrow{AB'}$ или

$$\overrightarrow{pr_l\lambda\vec{a}} = \lambda\overrightarrow{pr_l\vec{a}}. \tag{4.6}$$

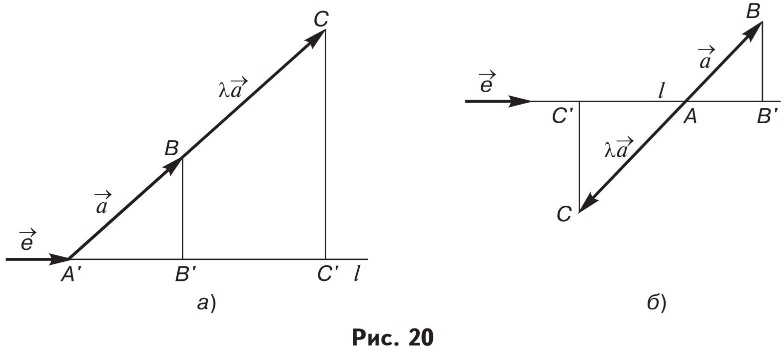


Рис. 20

Предположим теперь, что $\lambda < 0$, $\vec{a} \neq \vec{0}$. Тогда $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB'} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AC'}$ (рис. 20, *б*). Из подобия треугольников ABB' и ACC' следует, что $|\overrightarrow{AC}| : |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC'}| : |\overrightarrow{AB'}| = |\lambda|$. Так как $\lambda < 0$ и $\overrightarrow{AB'} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AC'}$ то $\overrightarrow{AC'} = \lambda\overrightarrow{AB'}$, в этом случае также справедлива формула (4.6).

Воспользуемся теперь равенством (4.1). Если $\vec{e}$ — орт оси l, то $\overrightarrow{pr_l(\lambda\vec{a})} = pr_l(\lambda\vec{a})\vec{e}$, $\overrightarrow{pr_l\vec{a}} = (pr_l\vec{a})\vec{e}$. Подставим эти равенства в формулу (4.6): $pr_l(\lambda\vec{a})\vec{e} = \lambda(pr_l\vec{a})\vec{e}$. Отсюда следует равенство (4.5). Свойство доказано.

Свойства 1—3 служат основой для изучения скалярного произведения векторов.

Определение 5. *Под скалярным произведением ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будем понимать число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Если среди сомножителей хотя бы один совпадет с нулевым вектором, то скалярное произведение равно* 0.

Скалярное произведение векторов будем обозначать через $\vec{a}\vec{b}$. Таким образом, если $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, то

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\angle\vec{a}\vec{b}). \qquad (4.7)$$

В определении 5 специально выделен случай нулевых сомножителей, так как при этом угол между векторами не определен и формула (4.7) не имеет места.

Докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Если $\vec{b} \neq \vec{0}$, а l — произвольная ось, направление которой определено вектором $\vec{b}$, то для любого вектора $\vec{a}$ справедливо соотношение*

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{b}|\, pr_l\vec{a}. \qquad (4.8)$$

Доказательство. Если $\vec{a} = \vec{0}$, то, согласно определению скалярного произведения векторов, $\vec{a}\vec{b} = 0$. Но в этом случае $pr_l\vec{a} = 0$. Равенство (4.8) выполнено.

Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$. Воспользуемся свойством 1 проекции вектора на ось: $pr_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\angle\vec{a}\vec{e})$, где $\vec{e}$ — орт оси. Так как орт $\vec{e}$ сонаправлен с $\vec{b}$, то $\angle\vec{a}\vec{e} = \angle\vec{a}\vec{b}$. Поэтому $pr_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\angle\vec{a}\vec{b})$. Подставив это равенство в соотношение (4.8), получим формулу (4.7). Лемма доказана.

Рассмотрим свойства скалярного произведения векторов.

Свойство 1. *Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо равенство*

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a} \qquad (4.9)$$

(*свойство коммутативности*).

Справедливость утверждения следует из формулы (4.7) и равенства $\angle\vec{a}\vec{b} = \angle\vec{b}\vec{a}$.

Свойство 2. *Для любых векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *справедливы следующие равенства*:

$$(\vec{a}+\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}, \tag{4.10}$$

$$\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}. \tag{4.11}$$

Доказательство. Вначале докажем равенство (4.10). Если $\vec{c}=\vec{0}$, то $\vec{a}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=0$, равенство (4.10) выполнено. Пусть $\vec{c}\neq\vec{0}$. Рассмотрим произвольную ось l, направление которой определено вектором $\vec{c}$. Согласно доказанной лемме 1, $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=|\vec{c}|\,pr_l(\vec{a}+\vec{b})$, $\vec{a}\vec{c}=|\vec{c}|\,pr_l\vec{a}$, $\vec{b}\vec{c}=|\vec{c}|\,pr_l\vec{b}$. Воспользуемся свойством 2 проекции вектора на ось: $|\vec{c}|\,pr_l(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{c}|\,pr_l\vec{a}+|\vec{c}|\,pr_l\vec{b}$. Отсюда следует, что $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}$.

Для доказательства соотношения (4.11) воспользуемся свойством 1 скалярного произведения векторов и доказанным равенством (4.10): $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{b}+\vec{c})\vec{a}=\vec{b}\vec{a}+\vec{c}\vec{a}=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}$. Свойство 2 доказано.

Замечание. Ясно, что свойство 2 распространяется на любое число слагаемых: $(\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_n)\vec{b}=\vec{a}_1\vec{b}+\vec{a}_2\vec{b}+\ldots+\vec{a}_n\vec{b}$, $\vec{a}(\vec{b}_1+\vec{b}_2+\ldots+\vec{b}_n)=\vec{a}\vec{b}_1+\vec{a}\vec{b}_2+\ldots+\vec{a}\vec{b}_n$.

Свойство 3. *Для любых векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *и числа* λ *справедливы следующие соотношения*:

$$(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a}\vec{b}), \tag{4.12}$$

$$\vec{a}(\lambda\vec{b}) = \lambda\vec{a}\vec{b}. \tag{4.13}$$

Доказательство. Вначале проверим равенство (4.12). Если $\vec{b}=\vec{0}$, то $(\lambda\vec{a})\vec{b}=\lambda(\vec{a}\vec{b})=\vec{0}$. Следовательно, равенство (4.12) выполняется. Пусть $\vec{b}\neq\vec{0}$. Рассмотрим произвольную ось l, направление которой определено вектором $\vec{b}$. Воспользуемся доказанной леммой 1. Из соотношения (4.8) следует $(\lambda\vec{a})\vec{b}=|\vec{b}|\,pr_l(\lambda\vec{a})$. Теперь используем свойство 3 проекции вектора на ось. Согласно равенству (4.5), $|\vec{b}|\,pr_l\lambda\vec{a}=\lambda|\vec{b}|\,pr_l\vec{a}=\lambda\vec{a}\vec{b}$. Поэтому $(\lambda\vec{a})\vec{b}=\lambda(\vec{a}\vec{b})$. Равенство (4.12) доказано.

Доказательство равенства (4.13) проведите самостоятельно по аналогии с доказательством соотношения (4.11) свойства 2.

Свойство 4. *Для любого ненулевого вектора $\vec{a}$ справедливо неравенство*

$$\vec{a}\vec{a} > 0. \tag{4.14}$$

Доказательство. Так как $\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2 \cos\angle\vec{a}\vec{a}$ и $\angle\vec{a}\vec{a} = 0$, т. е. $\cos\angle\vec{a}\vec{a} = 1$, то $\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2$. Но $\vec{a} \neq \vec{0}$, поэтому $\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2 > 0$.

Скалярное произведение $\vec{a}\vec{a}$ обычно обозначают как $\vec{a}^2$. Его называют скалярным квадратом вектора. Мы получили, что $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Доказанные утверждения аналогичны соответствующим свойствам операции умножения чисел. На первый взгляд кажется, что свойства скалярного произведения векторов полностью аналогичны свойствам чисел. Но такое мнение ошибочно. Например, скалярное произведение двух векторов равно нулю, когда либо один из сомножителей нулевой, либо, как вытекает из формулы (4.7), угол между ними прямой.

Пример 1. *Найти угол между единичными векторами $\vec{s}$ и $\vec{t}$, если известно, что векторы $\vec{m} = 2\vec{t} - \vec{s}$ и $\vec{n} = \vec{t} + 3\vec{s}$ перпендикулярны.*

Решение. Определим значение косинуса угла между векторами $\vec{s}$ и $\vec{t}$. Так как $\vec{s}\vec{t} = |\vec{s}||\vec{t}|\cos(\angle\vec{s}\vec{t})$ и $|\vec{s}| = |\vec{t}| = 1$, то $\cos(\angle\vec{s}\vec{t}) = \vec{s}\vec{t}$. Векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ перпендикулярны, $\vec{m}\vec{n} = (2\vec{t} - \vec{s})(\vec{t} + 3\vec{s}) = 0$; отсюда $2\vec{t}^2 - 3\vec{s}^2 + 5\vec{s}\vec{t} = 0$. Но $\vec{t}^2 = \vec{s}^2 = 1$, поэтому $\vec{s}\vec{t} = \frac{1}{5}$. Искомый угол равен $\arccos\frac{1}{5}$.

Выведем формулы для вычисления скалярного произведения векторов в координатах в ортонормированном базисе. Пусть в пространстве дан ортонормированный базис $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в этом базисе: $\vec{a}\{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3\}$, $\vec{b}\{\beta_1; \beta_2; \beta_3\}$. Тогда $\vec{a} = \alpha_1\vec{i} + \alpha_2\vec{j} + \alpha_3\vec{k}$, $\vec{b} = \beta_1\vec{i} + \beta_2\vec{j} + \beta_3\vec{k}$. Так как базис ортонормированный, то $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$, $\vec{i}\vec{j} = \vec{j}\vec{k} = \vec{i}\vec{k} = 0$. Найдем скалярное произведение:

$$\vec{a}\vec{b} = (\alpha_1\vec{i} + \alpha_2\vec{j} + \alpha_3\vec{k})(\beta_1\vec{i} + \beta_2\vec{j} + \beta_3\vec{k}) = \alpha_1\beta_1\vec{i}^2 + \alpha_2\beta_2\vec{j}^2 + \alpha_3\beta_3\vec{k}^2 +$$
$$+\alpha_1\beta_2\vec{i}\vec{j} + \alpha_1\beta_3\vec{i}\vec{k} + \alpha_2\beta_1\vec{i}\vec{j} + \alpha_2\beta_3\vec{j}\vec{k} + \alpha_3\beta_1\vec{k}\vec{i} + \alpha_3\beta_2\vec{k}\vec{j}.$$

Подставляя в это равенство значения попарных скалярных произведений базисных векторов, окончательно получим

$$\vec{a}\vec{b} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3. \tag{4.15}$$

Аналогично выводится формула для вычисления скалярного произведения векторов плоскости через координаты сомножителей. Если на плоскости в прямоугольном декартовом базисе заданы координаты векторов:

$$\vec{a}\{\alpha_1;\alpha_2\},\quad \vec{b}\{\beta_1;\beta_2\},$$

то

$$\vec{a}\vec{b} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2. \tag{4.16}$$

Докажите это соотношение самостоятельно.

Формулы (4.15) и (4.16) часто используются в аналитической геометрии. Выведем с их помощью формулы для вычисления длины вектора и косинуса угла между векторами через их координаты. Пусть в пространстве в ортонормированном базисе даны координаты векторов $\vec{a}\{\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3\}$, $\vec{b}\{\beta_1;\beta_2;\beta_3\}$. Так как $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$, то из (4.15) следует, что

$$|\vec{a}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}. \tag{4.17}$$

Из соотношения (4.7) получим, что для ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедлива формула $\cos(\angle\vec{a}\vec{b}) = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$. Подставляя в нее соотношения (4.15) и (4.17), получим

$$\cos(\angle\vec{a}\vec{b}) = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}}. \tag{4.18}$$

Аналогично, если на плоскости в ортонормированном базисе заданы координаты векторов $\vec{a}\{\alpha_1;\alpha_2\}$, $\vec{b}\{\beta_1;\beta_2\}$, то

$$|\vec{a}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \tag{4.19}$$

$$\cos(\angle\vec{a}\vec{b}) = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}}. \tag{4.20}$$

Формулы для вычисления скалярного произведения векторов можно вывести в произвольном аффинном базисе, но при этом они будут иметь гораздо более сложный вид, чем соотношения (4.15) и (4.16).

§ 5. ОРИЕНТАЦИЯ ПЛОСКОСТИ И ПРОСТРАНСТВА

Рассмотрим задачу. На плоскости или в пространстве даны два базиса. Требуется найти зависимости между координатами одного и того же вектора в этих базисах. Эти зависимости называются *формулами перехода* от одного базиса ко второму. Условимся координаты вектора в первом базисе снабжать индексом 1, а во втором — индексом 2; например, $\vec{a}\{\alpha_1;\alpha_2\}_1$; $\vec{b}\{\beta_1;\beta_2\}_2$. Все рассуждения проведем вначале для случая плоскости, затем рассмотрим пространственный случай.

Пусть даны два базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$. Известны координаты векторов второго базиса относительно первого: $\vec{e}_1'\{a_1;a_2\}_1$; $\vec{e}_2'\{b_1;b_2\}_1$; при этом

$$\vec{e}_1' = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2;\ \ \vec{e}_2' = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2. \qquad (5.1)$$

Эти координаты по сути определяют взаимное расположение базисов друг относительно друга и необходимы для решения поставленной задачи. Так как векторы $\vec{e}_1'$ и $\vec{e}_2'$ линейно независимы, то (§ 3)

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (5.2)$$

Пусть $\vec{a}$ — произвольный вектор плоскости. Запишем его координаты относительно данных базисов: $\vec{a}\{\alpha_1;\alpha_2\}_1$, $\vec{a}\{\alpha_1';\alpha_2'\}_2$. Вектор $\vec{a}$ представим в виде $\vec{a} = \alpha_1'\vec{e}_1' + \alpha_2'\vec{e}_2'$. Заменим векторы второго базиса $\vec{e}_1'$ и $\vec{e}_2'$ на их разложения (5.1) по векторам первого:

$$\vec{a} = \alpha_1'(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2) + \alpha_2'(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2) = (a_1\alpha_1' + b_1\alpha_2')\vec{e}_1 + (a_2\alpha_1' + b_2\alpha_2')\vec{e}_2.$$

В то же время, $\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2$. Из теоремы о разложении вектора плоскости по векторам базиса (теорема 2, § 3) следует, что

$$\begin{cases} \alpha_1 = a_1\alpha_1' + b_1\alpha_2', \\ \alpha_2 = a_2\alpha_1' + b_2\alpha_2'. \end{cases} \qquad (5.3)$$

Соотношения (5.3) *представляют собой искомые формулы перехода от первого базиса ко второму*. Если известны координаты вектора $\vec{a}$ во втором базисе, то с помощью этих соотношений можно вычислить его координаты в первом. Наоборот, если даны координаты $\vec{a}$ в первом базисе, то, рассматривая формулы перехода (5.3) как систему двух линейных уравнений с неизвестными α_1' и α_2' и решая ее, можно найти координаты вектора во втором. Заметим, что в силу условия (5.2) такая система всегда совместна.

Ведем следующее определение.

Определение 1. *Даны два базиса. Матрица, столбцы которой равны координатам векторов второго базиса относительно первого, называется матрицей перехода от первого базиса ко второму.*

Матрицу перехода от первого базиса B_1 ко второму B_2 будем обозначать $(B_1|B_2)$, а ее определитель — $|B_1|B_2|$. Таким образом, если B_1: $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$; B_2: $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$ и $\vec{e}_1'\{a_1; a_2\}_1$, $\vec{e}_2'\{b_1; b_2\}_1$, то $(B_1|B_2) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$. Если известна матрица перехода, то можно составить формулы перехода (5.3). Из соотношения (5.2) следует $|B_1|B_2| \neq 0$.

Докажем свойства матриц перехода.

Свойство 1. *Пусть даны базисы B_1, B_2, и B_3. Тогда определитель матрицы перехода от базиса B_1 к базису B_3 равен произведению определителей матриц перехода от B_1 к B_2 и от B_2 к B_3:*

$$|B_1|B_3| = |B_1|B_2| \cdot |B_2|B_3|. \tag{5.4}$$

Доказательство. Пусть базисы B_1, B_2, и B_3 состоят из векторов B_1: $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$; B_2: $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$; B_3: $\vec{e}_1''$, $\vec{e}_2''$, а матрицы перехода имеют следующий вид:

$$(B_1|B_2) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \ (B_2|B_3) = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \vec{e}_1' &= a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2, \\ \vec{e}_2' &= b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2; \end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_1'' &= c_1\vec{e}_1' + c_2\vec{e}_2', \\ \vec{e}_2'' &= d_1\vec{e}_1' + d_2\vec{e}_2'. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Подставим выражения (5.5) в (5.6):

$$\vec{e}_1'' = c_1(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2) + c_2(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2) = (c_1a_1 + c_2b_1)\vec{e}_1 + (c_1a_2 + c_2b_2)\vec{e}_2,$$
$$\vec{e}_2'' = d_1(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2) + d_2(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2) = (d_1a_1 + d_2b_1)\vec{e}_1 + (d_1a_2 + d_2b_2)\vec{e}_2.$$

Мы получили коэффициенты разложения векторов $\vec{e}_1''$ и $\vec{e}_2''$ по векторам первого базиса, поэтому $(B_1|B_3)=$ $=\begin{pmatrix} c_1a_1+c_2b_1 & d_1a_1+d_2b_1 \\ c_1a_2+c_2b_2 & d_1a_2+d_2b_2 \end{pmatrix}$. Полученная матрица совпадает с произведением

$$(B_1|B_2)(B_2|B_3)=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} c_1a_1+c_2b_1 & d_1a_1+d_2b_1 \\ c_1a_2+c_2b_2 & d_1a_2+d_2b_2 \end{pmatrix}=(B_1|B_3).$$

Из курса алгебры известно, что определитель произведения двух матриц равен произведению их определителей. Поэтому $|B_1|B_3|=|B_1|B_2|\cdot|B_2|B_3|$. Свойство доказано.

Свойство 2. *Для любого базиса B*

$$|B|B|=1. \tag{5.7}$$

Доказательство свойства непосредственно следует из того, что матрица $(B|B)$ — единичная. Проверьте самостоятельно.

Свойство 3. Пусть даны базисы B_1 и B_2. Тогда

$$|B_1|B_2|=\frac{1}{|B_2|B_1|}. \tag{5.8}$$

Доказательство. Из равенства (5.4) получим $|B_1|B_2||B_2|B_1|=|B_1|B_1|$. Отсюда и из формулы (5.7) $|B_1|B_2|\cdot|B_2|B_1|=1$. Равенство (5.8) доказано.

Приступим к изучению понятия ориентации плоскости.

Определение 2. *Два базиса называются одинаково ориентированными, если определитель матрицы перехода от первого базиса ко второму положителен.*

В этом случае будем также говорить, что *ориентации базисов совпадают*, или *они имеют одну и ту же ориентацию*. Если базисы не имеют одинаковой ориентации, то говорят, что их *ориентации различны или противоположны*.

Пример 1. *Дан треугольник ABC, O — точка пересечения его медиан. Найти матрицу перехода от базиса* $\vec{e}_1=\overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2=\overrightarrow{AC}$ *к базису* $\vec{e}_1'=\overrightarrow{OC}$, $\vec{e}_2'=\overrightarrow{OA}$. *Выяснить, имеют ли эти базисы одинаковую ориентацию.*

Решение. Найдем координаты векторов $\vec{e}_1{}' = \overrightarrow{OC}$, $\vec{e}_2{}' = \overrightarrow{OA}$ в базисе $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AC}$. Пусть M и N — середины сторон AB и BC (рис. 21). Тогда $\overrightarrow{MC} = -\frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2$. Так как $\overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MC}$, то $\overrightarrow{OC} = -\frac{1}{3}\vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2$, поэтому $\vec{e}_1{}'\left\{-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right\}$. Кроме того, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2$, $\overrightarrow{OA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AN}$. Следовательно, $\overrightarrow{OA} = -\frac{1}{3}\vec{e}_1 - \frac{1}{3}\vec{e}_2$ и $\vec{e}_2{}'\left\{-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right\}$. Искомая матрица перехода имеет вид $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Ее определитель равен $\frac{1}{3}$. Так как он положителен, то базисы имеют одинаковую ориентацию.

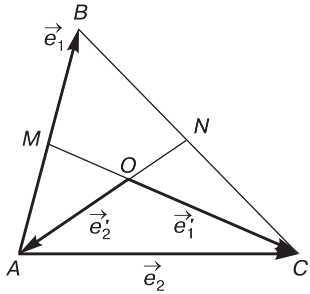


Рис. 21

Справедливо утверждение, которое позволяет по чертежу определить, имеют ли два базиса одну и ту же ориентацию или она у них различна. Отложим векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ первого базиса от точки O, а второго $\vec{e}_1{}'$ и $\vec{e}_2{}'$ — от точки O'. Если кратчайшие повороты от $\vec{e}_1$ к $\vec{e}_2$ и от $\vec{e}_1{}'$ к $\vec{e}_2{}'$ одновременно видны либо по ходу движения часовой стрелки, либо против ее движения, то ориентации базисов совпадают. Если для одного базиса такой поворот виден по ходу движения часовой стрелки, а для другого — против ее движения, то их ориентации различны. Это утверждение примем без доказательства. В качестве упражнения примените его к базисам примера 1.

Определим на множестве базисов следующее бинарное отношение. *Базис B_1 находится в бинарном отношении Δ с B_2, если их ориентации одинаковы*. Таким образом, $B_1 \Delta B_2$ в том и только в том случае, когда $|B_1|B_2| > 0$.

Теорема 1. *Бинарное отношение Δ является отношением эквивалентности.*

Доказательство. Проверим, что отношение Δ подчиняется условиям рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Рефлексивность. Необходимо проверить, что любой базис находится в отношении Δ сам с собой. Согласно свойству 2, для любого базиса B плоскости выполнено соотношение $|B|B|=1>0$. Следовательно, $B\Delta B$.

Симметричность. Даны базисы B_1 и B_2, для которых выполнено условие $B_1\Delta B_2$. Требуется доказать, что $B_2\Delta B_1$. По условию, $|B_1|B_2|>0$. Но из свойства 3 вытекает, что $|B_2|B_1|=\dfrac{1}{|B_1|B_2|}$. Поэтому $|B_2|B_1|>0$ и $B_2\Delta B_1$.

Транзитивность. Даны базисы B_1, B_2, B_3, удовлетворяющие условиям $B_1\Delta B_2$, $B_2\Delta B_3$. Требуется доказать, что $B_1\Delta B_3$. Нам дано: $|B_1|B_2|>0$ и $|B_2|B_3|>0$. Согласно свойству 1, $|B_1|B_3|=$ $=|B_1|B_2|\cdot|B_2|B_3|$. Поэтому $|B_1|B_3|>0$. Теорема доказана.

Так как Δ — отношение эквивалентности, множество всех базисов плоскости разбивается на классы эквивалентности. Два базиса принадлежат одному классу в том и только в том случае, когда они одинаково ориентированы. Докажем следующее утверждение.

Теорема 2. *Число классов эквивалентности, на которое отношение Δ разбивает множество базисов плоскости, равно двум.*

Доказательство. Пусть B — произвольный базис плоскости. Обозначим через K_1 тот класс эквивалентности, которому он принадлежит. Базис B' содержится в K_1 тогда и только тогда, когда $B\Delta B'$. Теорема будет доказана, если мы проверим, что все базисы, ориентация которых противоположна B, также принадлежат одному классу эквивалентности. Предположим, что ориентации базисов B_1 и B_2 противоположны ориентации B. Тогда $|B|B_1|<0$ и $|B_2|B|<0$. Но из равенства (5.4) следует, что $|B_2|B_1|=|B_2|B|\cdot|B|B_1|$. Таким образом, $|B_2|B_1|>0$. Любые два базиса, противоположно ориентированные базису B, эквивалентны между собой, т. е. содержатся в одном классе. Теорема доказана.

Определение 3. *Плоскость называется ориентированной, если на множестве ее базисов зафиксирован один из классов эквивалентности, определенных отношением Δ.*

В этом случае также говорят, что на плоскости задана ориентация. Базис, принадлежащий выбранному классу, называют *правым*. Если он не принадлежит этому классу, то носит название *левого*. Ясно, что при задании ориентации классы эквивалентности абсолютно равноправны. Ориентацию на плоскости можно задать, выбрав некоторый базис. Тем самым будет зафиксирован класс эквивалентности, которому этот базис принадлежит. Обычно ориентацию задают с помощью такого базиса, для которого поворот от первого базисного вектора ко второму, при условии что они отложены от одной точки, виден против движения часовой стрелки. Тогда все базисы, обладающие этим свойством, являются правыми. Если при этом для базиса такой поворот виден по ходу движения часовой стрелки, то он левый.

Рассмотрим, как вводится понятие ориентации пространства. Все выкладки и рассуждения в случае пространства аналогичны соответствующим выкладкам и рассуждениям, проведенным для базисов плоскости.

Формулы перехода от одного базиса пространства к другому выводятся так же, как и в случае плоскости. Если заданы координаты векторов $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, $\vec{e}_3'$ второго базиса относительно первого $\vec{e}_1'\{a_1; a_2; a_3\}$, $\vec{e}_2'\{b_1; b_2; b_3\}$, $\vec{e}_3'\{c_1; c_2; c_3\}$, то формулы перехода, связывающие координаты одного и того же вектора $\vec{a}$ относительно этих базисов, имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \alpha_1 = a_1\alpha_1' + b_1\alpha_2' + c_1\alpha_3', \\ \alpha_2 = a_2\alpha_1' + b_2\alpha_2' + c_2\alpha_1', \\ \alpha_3 = a_3\alpha_1' + b_3\alpha_2' + c_3\alpha_3'. \end{cases} \tag{5.9}$$

Здесь $\{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3\}$ — координаты вектора $\vec{a}$ относительно первого базиса, $\{\alpha_1'; \alpha_2'; \alpha_3'\}$ — его координаты относительно второго. Матрица $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, столбцы которой совпадают с координатами векторов $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, $\vec{e}_3'$ относительно первого базиса, называется *матрицей перехода* от первого базиса ко второму. Ее определитель всегда не равен нулю, так как векторы $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, $\vec{e}_3'$ линейно независимы. Если этот определитель положителен, то базисы имеют *одинаковую ориентацию*, если отрицателен, то *ориентации различны*.

Пример 2. *Даны два базиса пространства* $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ *и* $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, $\vec{e}_3'$, *для которых* $\vec{e}_1 \uparrow\uparrow \vec{e}_1'$, $\vec{e}_2 \uparrow\uparrow \vec{e}_2'$. *Доказать, что базисы имеют одинаковую ориентацию в том и только в том случае, когда векторы* $\vec{e}_3$ *и* $\vec{e}_3'$, *отложенные от некоторой точки O, лежат* *в одном полупространстве относительно плоскости, проходящей через точку O и параллельной векторам $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$.*

Решение. Отложим векторы базисов от одной точки O:

$$\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA},\quad \vec{e}_2 = \overrightarrow{OB},\quad \vec{e}_3 = \overrightarrow{OC},\quad \vec{e}_1' = \overrightarrow{OA'},\quad \vec{e}_2' = \overrightarrow{OB'},\quad \vec{e}_3' = \overrightarrow{OC'}$$

(рис. 22). Обозначим через l прямую, проходящую через O и параллельную $\vec{e}_3$, а через π — плоскость, содержащую O и параллельную $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Пусть π' — плоскость, проведенная через C' и параллельная π, N — ее точка пересечения с l. Тогда $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NC'}$. Вектор $\overrightarrow{ON}$ коллинеарен $\vec{e}_3$, поэтому $\overrightarrow{ON} = \lambda\vec{e}_3$. Вектор $\overrightarrow{NC'}$ компланарен $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, следовательно, $\overrightarrow{NC'} = \gamma\vec{e}_1 + \delta\vec{e}_2$. Таким образом, вектор $\vec{e}_3'$ в первом базисе имеет вид $\vec{e}_3'\{\gamma; \delta; \lambda\}$. Так как $\vec{e}_1 \uparrow\uparrow \vec{e}_1'$ и $\vec{e}_2 \uparrow\uparrow \vec{e}_2'$, то $\vec{e}_1' = \alpha\vec{e}_1$, $\vec{e}_2' = \beta\vec{e}_2$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Координаты векторов $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$ в первом базисе имеют вид $\vec{e}_1'\{\alpha; 0; 0\}$, $\vec{e}_2'\{0; \beta; 0\}$. Поэтому матрица $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \gamma \\ 0 & \beta & \delta \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ представляет собой матрицу перехода от первого базиса ко второму. Ее определитель равен $\alpha\beta\lambda$. Так как $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, то знак определителя совпадает со знаком λ. Легко видеть, что если $\lambda > 0$, то $\overrightarrow{ON} \uparrow\uparrow \vec{e}_3$ и точки C' и C лежат в одном полупространстве относительно плоскости π. Если же $\lambda < 0$, то $\overrightarrow{ON} \uparrow\downarrow \vec{e}_3$ и точки лежат в разных полупространствах. Утверждение доказано.

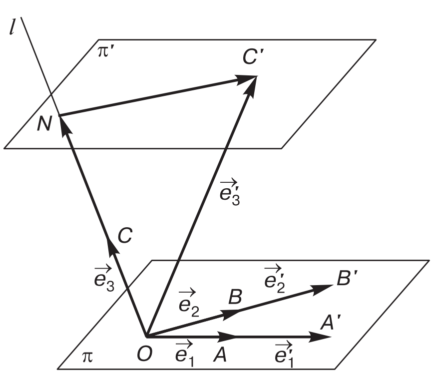


Рис. 22

Для базисов пространства так же, как и на плоскости, вводится бинарное отношение Δ. Если B_1 и B_2 — базисы пространства, то $B_1 \Delta B_2$ в том и только в том случае, когда $\left|B_1\right| B_2 \left.\right| > 0$. При этом Δ — отношение эквивалентности, которое разбивает множество всех базисов пространства на два класса. Пространство называется *ориентированным*, если для него задан один из классов эквивалентности. Базисы, принадлежащие выбранному классу, называются *правыми*, а находящиеся во втором классе — *левыми*.

Справедливо следующее правило, которое примем без доказательства. Отложим векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ первого базиса от точки O, а векторы $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, $\vec{e}_3'$ второго базиса — от точки O'. Базисы имеют одинаковую ориентацию, если кратчайшие повороты от вектора $\vec{e}_1$ к $\vec{e}_2$ из конца вектора $\vec{e}_3$ и от $\vec{e}_1'$ к $\vec{e}_2'$ из конца вектора $\vec{e}_3'$ видны одновременно либо по ходу движения часовой стрелки, либо против ее движения. Если один из этих поворотов виден по ходу движения, а другой против, то базисы имеют различные ориентации. Обычно пространство ориентируют с помощью такого базиса, для которого этот поворот виден против движения часовой стрелки. Примените это правило к базисам, определенным в примере 2.

В курсе алгебры средней школы при изучении свойств тригонометрических функций наряду с обычными углами рассматриваются так называемые ориентированные углы. Покажем, как вводится это понятие на ориентированной плоскости, и рассмотрим некоторые свойства ориентированных углов.

Определение 4. *Пусть дана упорядоченная пара неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Под ориентированным углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будем понимать величину угла $\angle\vec{a}\vec{b}$, взятую со знаком «+», если базис $\vec{a}$, $\vec{b}$ правый, и со знаком «−», если этот базис левый. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, то ориентированный угол равен* 0; *если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направлены, то этот угол равен* π.

Ориентированный угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будем обозначать через $\measuredangle\vec{a}\vec{b}$. Итак,

$$-\pi < \measuredangle\vec{a}\vec{b} \leq \pi. \tag{5.10}$$

При этом $0 < \measuredangle\vec{a}\vec{b} < \pi$, если ориентация базиса $\vec{a}$, $\vec{b}$ положительна, и $-\pi < \measuredangle\vec{a}\vec{b} < 0$, если она отрицательна.

Рассмотрим некоторые свойства ориентированных углов.

Свойство 1. *Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не противоположно направлены, то*

$$\measuredangle\vec{a}\vec{b} = -\measuredangle\vec{b}\vec{a}. \tag{5.11}$$

Доказательство. Если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, то, согласно определению 1, $\measuredangle\vec{a}\vec{b} = \measuredangle\vec{b}\vec{a} = 0$ и соотношение (5.11) выполнено. Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то они образуют базис плоскости. Базисы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{b}$, $\vec{a}$ имеют разные ориентации (проверьте самостоятельно), поэтому модули ориентированных углов $\measuredangle\vec{a}\vec{b}$ и $\measuredangle\vec{b}\vec{a}$ совпадают, а их знаки различны. Свойство доказано.

Свойство 2. *Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — произвольные векторы, то*

$$\cos\angle\vec{a}\vec{b} = \cos\measuredangle\vec{a}\vec{b}. \tag{5.12}$$

Справедливость равенства (5.12) непосредственно следует из четности функции $y = \cos x$.

Следующее свойство приведем без доказательства.

Свойство 3. *Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ справедливы следующие соотношения*:

$$\begin{aligned} \cos\left(\measuredangle\vec{a}\vec{b} + \measuredangle\vec{b}\vec{c}\right) &= \cos(\measuredangle\vec{a}\vec{c}), \\ \sin\left(\measuredangle\vec{a}\vec{b} + \measuredangle\vec{b}\vec{c}\right) &= \sin(\measuredangle\vec{a}\vec{c}). \end{aligned} \tag{5.13}$$

В дальнейшем, не оговаривая особо, будем предполагать, что координаты векторов даны в прямоугольном декартовом правом базисе.

Теорема 3. *Пусть координаты вектора в прямоугольном декартовом базисе $\vec{i}, \vec{j}$ имеют вид $\vec{a}\{\alpha_1; \alpha_2\}$. Тогда*

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= |\vec{a}|\cos(\measuredangle\vec{i}\vec{a}), \\ \alpha_2 &= |\vec{a}|\sin(\measuredangle\vec{i}\vec{a}). \end{aligned} \tag{5.14}$$

Доказательство. Представим данный вектор $\vec{a}$ в виде $\vec{a} = \alpha_1\vec{i} + \alpha_2\vec{j}$. Так как $\vec{i}, \vec{j}$ — прямоугольный декартов правый базис, то $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$, $\measuredangle\vec{i}\vec{j} = \dfrac{\pi}{2}$. Скалярно умножив вектор $\vec{a}$ на базисные векторы, получим $\vec{a}\vec{i} = (\alpha_1\vec{i} + \alpha_2\vec{j})\vec{i} = \alpha_1$, $\vec{a}\vec{j} = (\alpha_1\vec{i} + \alpha_2\vec{j})\vec{j} = \alpha_2$. В то же время $\vec{a}\vec{i} = |\vec{a}|\cos(\angle\vec{i}\vec{a})$, поэтому из (5.12) следует, что $\alpha_1 = |\vec{a}|\cos(\measuredangle\vec{i}\vec{a})$. Аналогично, $\alpha_2 = |\vec{a}|\cos(\measuredangle\vec{j}\vec{a})$. Используем соотношения (5.13) и равенство $\measuredangle\vec{j}\vec{i}=-\frac{\pi}{2}$: $\cos(\measuredangle\vec{j}\vec{a})=\cos(\measuredangle\vec{j}\vec{i}+\measuredangle\vec{i}\vec{a})=$ $=\cos\left(\measuredangle\vec{i}\vec{a}-\frac{\pi}{2}\right)=\sin(\measuredangle\vec{i}\vec{a})$. Отсюда следует $\alpha_2=|\vec{a}|\sin(\measuredangle\vec{i}\vec{a})$. Теорема доказана.

Рассмотрим задачу нахождения ориентированного угла между векторами по их прямоугольным декартовым координатам. Ориентированный угол лежит на полуинтервале $(-\pi;\pi]$, поэтому для его вычисления необходимо знать значения двух тригонометрических функций. Выведем формулы, выражающие значения синуса и косинуса ориентированного угла между векторами через их координаты. Они позволят решить поставленную задачу.

Как мы условились, на плоскости выбран правый прямоугольный декартов базис $\vec{q}\left\{0;0;\frac{\alpha}{\varepsilon}\right\}\ \vec{j}$. Даны векторы $\vec{a}\{\alpha_1;\alpha_2\}$ и $\vec{b}\{\beta_1;\beta_2\}$. Из соотношений (5.14) следует:

$$\cos(\measuredangle\vec{i}\vec{a})=\frac{\alpha_1}{|\vec{a}|};\quad \sin(\measuredangle\vec{i}\vec{a})=\frac{\alpha_2}{|\vec{a}|},$$
$$\cos(\measuredangle\vec{i}\vec{b})=\frac{\beta_1}{|\vec{b}|};\quad \sin(\measuredangle\vec{i}\vec{b})=\frac{\beta_2}{|\vec{b}|}. \tag{5.15}$$

Из (5.13) получаем $\sin(\measuredangle\vec{a}\vec{b})=\sin(\measuredangle\vec{a}\vec{i}+\measuredangle\vec{i}\vec{b})$. Так как $\measuredangle\vec{a}\vec{i}=-\measuredangle\vec{i}\vec{a}$, то

$$\sin(\measuredangle\vec{a}\vec{b})=\sin(\measuredangle\vec{i}\vec{b}-\measuredangle\vec{i}\vec{a})=\sin(\measuredangle\vec{i}\vec{b})\cos(\measuredangle\vec{i}\vec{a})-\cos(\measuredangle\vec{i}\vec{b})\sin(\measuredangle\vec{i}\vec{a}).$$

Подставим в полученное выражение соотношения (5.15): $\sin(\measuredangle\vec{a}\vec{b})=\frac{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1}{|\vec{a}||\vec{b}|}$. Так как $|\vec{a}|=\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}$, $|\vec{b}|=\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}$, $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}$, то окончательно имеем:

$$\sin(\measuredangle\vec{a}\vec{b})=\frac{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}}. \tag{5.16}$$

Проведем аналогичные выкладки для $\cos(\measuredangle\vec{a}\vec{b})$:

$$\cos(\measuredangle\vec{a}\vec{b})=\frac{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}}. \tag{5.17}$$

В силу свойства 2 ориентированных углов, формула (5.17) вычисления косинуса ориентированного угла совпадает с соответствующей формулой (4.20) для вычисления косинуса неориентированного угла между векторами.

Выведем формулы перехода от одного прямоугольного декартова базиса к другому. Будем предполагать, что нам даны два таких базиса $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, причем ориентация плоскости определена с помощью первого из них. Прямоугольные декартовы базисы — частные случаи аффинных, поэтому формулы перехода имеют вид (5.3). Напомним, что коэффициенты a_1, a_2 и b_1, b_2 в этих формулах равны соответственно координатам векторов $\vec{i}'$, $\vec{j}'$ в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$: $\vec{i}'\{a_1; a_2\}$, $\vec{j}'\{b_1; b_2\}$. Покажем, что в данном случае эти координаты зависят только от одного параметра — ориентированного угла $\varphi = \measuredangle\vec{i}\vec{i}'$.

Рассмотрим первый случай, когда базисы $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{i}'$, $\vec{j}'$ имеют одинаковую ориентацию. Тогда $\measuredangle\vec{i}'\vec{j}' = \dfrac{\pi}{2}$. Из соотношений (5.14) следует, что

$$a_1 = |\vec{i}'|\cos(\measuredangle\vec{i}\vec{i}') = \cos\varphi, \quad a_2 = |\vec{i}'|\sin(\measuredangle\vec{i}\vec{i}') = \sin\varphi,$$
$$b_1 = |\vec{j}'|\cos(\measuredangle\vec{i}\vec{j}) = \cos(\measuredangle\vec{i}\vec{j}), \quad b_2 = |\vec{j}'|\sin(\measuredangle\vec{i}\vec{j}) = \sin(\measuredangle\vec{i}\vec{j}).$$

Воспользуемся соотношениями (5.13):

$$\cos(\measuredangle\vec{i}\vec{j}') = \cos(\measuredangle\vec{i}\vec{i}' + \measuredangle\vec{i}'\vec{j}') = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\varphi;$$

$$\sin(\measuredangle\vec{i}\vec{j}') = \sin(\measuredangle\vec{i}\vec{i}' + \measuredangle\vec{i}'\vec{j}') = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\varphi.$$

Таким образом, вектор $\vec{j}$ имеет координаты $\vec{j}\{-\sin\varphi; \cos\varphi\}$, формулы перехода имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_1' \cos\varphi - \alpha_2' \sin\varphi, \\ \alpha_2 = \alpha_1' \sin\varphi + \alpha_2' \cos\varphi. \end{cases} \tag{5.18}$$

Во втором случае ориентации данных базисов различны, $\measuredangle\vec{i}'\vec{j}' = -\dfrac{\pi}{2}$. Координаты вектора $\vec{i}'$ имеют такой же вид, что и в первом случае: $\vec{i}'\{\cos\varphi; \sin\varphi\}$. Определим координаты $\vec{j}'$:

$$b_1 = |\vec{j}'|\cos(\measuredangle\vec{i}\vec{j}') = \cos(\measuredangle\vec{i}\vec{i}' + \measuredangle\vec{i}'\vec{j}') = \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\varphi,$$

$$b_2 = |\vec{j}'|\sin(\measuredangle\vec{i}\vec{j}') = \sin(\measuredangle\vec{i}\vec{i}' + \measuredangle\vec{i}'\vec{j}') = \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\varphi.$$

Поэтому формулы перехода в этом случае имеют вид

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_1' \cos\varphi + \alpha_2' \sin\varphi, \\ \alpha_2 = \alpha_1' \sin\varphi - \alpha_2' \cos\varphi. \end{cases} \tag{5.19}$$

Формулы (5.18) и (5.19) можно объединить:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_1' \cos\varphi - \varepsilon\alpha_2' \sin\varphi, \\ \alpha_2 = \alpha_1' \sin\varphi + \varepsilon\alpha_2' \cos\varphi. \end{cases} \tag{5.20}$$

где $\varepsilon = 1$, если ориентации базисов одинаковы, и $\varepsilon = -1$, если они различны.

§ 6. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Будем предполагать, что пространство является ориентированным. Как принято, будем считать, что ориентация задана классом эквивалентности, базисы которого удовлетворяют условию: если их векторы отложены от одной точки, то кратчайший поворот от первого базисного вектора ко второму из конца третьего виден против движения часовой стрелки. Такие базисы мы называем правыми (§ 5).

Определение 1. *Под векторным произведением* $[\vec{a}\vec{b}]$ *двух неколлинеарных векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *будем понимать третий вектор* $\vec{c}$, *удовлетворяющий следующим условиям*:

1) *его модуль равен произведению длин сомножителей, умноженному на синус угла между ними*:

$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\angle\vec{a}\vec{b}); \tag{6.1}$$

2) *вектор* $\vec{c}$ *перпендикулярен сомножителям* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$;

3) *тройка векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *имеет правую ориентацию.*

Если векторы $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *коллинеарны, то их векторное произведение равно нулевому вектору.*

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — неколлинеарные векторы. Отложим их от некоторой точки O (рис. 23). Обозначим через α плоскость, содержащую точку O и параллельную векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а через l — прямую, проходящую через O и перпендикулярную α. По формуле (6.1) найдем длину векторного произведения $\vec{c} = [\vec{a}\vec{b}]$. Из условия 2) определения следует, что конец вектора $\vec{c}$, отложенного от точ-

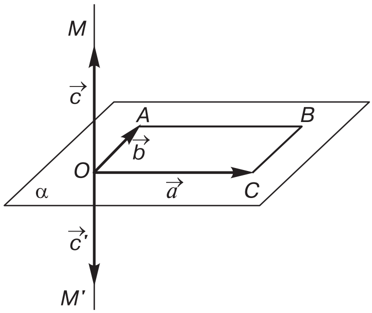


Рис. 23

ки O, принадлежит прямой l. На этой прямой существуют две точки M и M', для которых $|\overrightarrow{OM}| = |\overrightarrow{OM'}| = |\vec{c}|$. Третье условие позволяет выбрать из этих двух точек одну. Так как $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — правая тройка, то, согласно нашей договоренности, из точки M кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден против движения часовой стрелки. Таким образом, результат векторного произведения векторов зависит от того, какой класс эквивалентности зафиксирован на множестве базисов при выборе ориентации пространства. Если выбран класс, отличный от указанного выше, то направление векторного произведения будет противоположным для той же самой упорядоченной пары векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Рассмотрим свойства векторного произведения.

Свойство 1. *Если сомножители векторного произведения неколлинеарны, то его длина численно равна площади параллелограмма, построенного на сомножителях.*

Действительно, отложим сомножители векторного произведения, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, от точки O: $\overrightarrow{OC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OA} = \vec{b}$ (рис. 23). $OABC$ — параллелограмм, построенный на этих векторах. Из школьного курса геометрии известно, что его площадь равна $S = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OC}|\sin(\angle AOC)$. Из (6.1) следует, что $S = |[\vec{a}\vec{b}]|$.

Свойство 2. *Векторное произведение* $[\vec{a}\vec{b}]$ *равно нулевому вектору в том случае, когда* $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Справедливость этого утверждения непосредственно следует из определения 1.

Свойство 3. *Для любых векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *справедливо равенство*:

$$[\vec{a}\vec{b}] = -[\vec{b}\vec{a}] \tag{6.2}$$

(*свойство антикоммутативности*).

Доказательство. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то $[\vec{a}\vec{b}] = [\vec{b}\vec{a}] = \vec{0}$, поэтому равенство (6.2) выполнено. Пусть сомножители неколлинеарны. Ведем обозначения: $\vec{c} = [\vec{a}\vec{b}]$, $\vec{c}\,' = [\vec{b}\vec{a}]$. Проверим, что длины этих векторов совпадают: $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\angle\vec{a}\vec{b})$, $|\vec{c}\,'| = |\vec{b}||\vec{a}|\sin(\angle\vec{b}\vec{a})$. Так как $\angle\vec{a}\vec{b}$ и $\angle\vec{b}\vec{a}$ — неориентированные углы, то $\sin\angle\vec{a}\vec{b} = \sin\angle\vec{b}\vec{a}$, поэтому $|\vec{c}| = |\vec{c}\,'|$. Векторы $\vec{c}$ и $\vec{c}\,'$ коллинеарны между собой, так как перпендикулярны сомножителям $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Поэтому можно записать $\vec{c}\,' = \varepsilon\vec{c}$. Из равенства длин векторов $\vec{c}$ и $\vec{c}\,'$ следует, что $\varepsilon = \pm 1$. Докажем, что $\varepsilon = -1$. Согласно определению 1, базисы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{b}$, $\vec{a}$, $\vec{c}\,'$ имеют правую ориентацию. Координаты второго базиса относительно первого имеют вид $\vec{b}\{0; 1; 0\}$, $\vec{a}\{1; 0; 0\}$, $\vec{c}\,'\{0; 0; \varepsilon\}$. Составим матрицу перехода от первого базиса ко второму: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$. Ее определитель равен $-\varepsilon$. Базисы одинаково ориентированы, значит, этот определитель положителен: $-\varepsilon > 0$. Таким образом, $\varepsilon = -1$ и $\vec{c}\,' = -\vec{c}$. Свойство доказано.

Свойство 4. *Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и любого числа α справедливы соотношения*:

$$[\alpha\vec{a}\vec{b}] = \alpha[\vec{a}\vec{b}], \tag{6.3}$$

$$[\vec{a}\alpha\vec{b}] = \alpha[\vec{a}\vec{b}]. \tag{6.4}$$

Доказательство. Вначале докажем соотношение (6.3). Пусть $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Тогда $\alpha\vec{a} \parallel \vec{b}$. Поэтому $\alpha[\vec{a}\vec{b}] = [\alpha\vec{a}\vec{b}] = \vec{0}$. В этом случае равенство (6.3) выполнено. Ясно, что оно выполняется и при $\alpha = 0$.

Предположим теперь, что сомножители неколлинеарны и число α отлично от нуля. Введем обозначения: $[\vec{a}\vec{b}] = \vec{c}$, $[\alpha\vec{a}\vec{b}] = \vec{q}$. Требуется доказать, что $\vec{q} = \alpha\vec{c}$. Покажем, что модули этих векторов равны. Пусть $\alpha > 0$. Тогда $\alpha\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$, поэтому $\angle\vec{a}\vec{b} = \angle(\alpha\vec{a})\vec{b}$, $|\alpha\vec{c}| = |\alpha||\vec{a}||\vec{b}|\sin(\angle\vec{a}\vec{b})$, $|\vec{q}| = |\alpha\vec{a}||\vec{b}|\sin(\angle(\alpha\vec{a})\vec{b}) = |\alpha||\vec{a}||\vec{b}|\sin(\angle\vec{a}\vec{b})$. В этом случае $|\vec{q}| = |\alpha\vec{c}|$ Предположим теперь, что $\alpha < 0$. Тогда $\alpha\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$ и $\angle\vec{a}\vec{b} = \angle(\alpha\vec{a})\vec{b} = \pi - \angle\vec{a}\vec{b}$, $|\alpha\vec{c}| = |\alpha||\vec{a}||\vec{b}|\sin(\angle\vec{a}\vec{b})$ и $|\vec{q}| = |\alpha\vec{a}||\vec{b}|\sin(\angle(\alpha\vec{a})\vec{b}) = |\alpha||\vec{a}||\vec{b}|\sin(\pi - \angle\vec{a}\vec{b})$. Так как для любого угла $\sin\varphi = \sin(\pi - \varphi)$, то и в этом случае $|\vec{q}| = |\alpha\vec{c}|$.

Обозначим через π произвольную плоскость, параллельную векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Ясно, что эта же плоскость также параллельна векторам $\alpha\vec{a}$ и $\vec{b}$. Согласно определению 1, векторы $\alpha\vec{c}$ и $\vec{q}$ перпендикулярны плоскости π. Поэтому они коллинеарны: $\alpha\vec{c}=\varepsilon\vec{q}$. Так как их модули равны, то либо $\varepsilon = 1$, либо $\varepsilon = -1$. Докажем, что $\varepsilon = 1$. Рассмотрим два базиса $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\alpha\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{q}$. Найдем координаты векторов второго базиса относительно первого. Очевидно, что $\alpha\vec{a}\{\alpha; 0; 0\}$, $\vec{b}\{0; 1; 0\}$. Так как $\alpha\vec{c}=\varepsilon\vec{q}$, то координаты вектора $\vec{q}$ равны $\vec{q}\left\{0; 0; \dfrac{\alpha}{\varepsilon}\right\}$. Таким образом, матрица перехода от первого базиса ко второму имеет вид $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\alpha}{\varepsilon} \end{pmatrix}$. Ее определитель равен $\dfrac{\alpha^2}{\varepsilon}$. Ориентации рассматриваемых базисов совпадают, поэтому $\dfrac{\alpha^2}{\varepsilon} > 0$, отсюда $\varepsilon > 0$, т. е. $\varepsilon = 1$. Соотношение (6.3) доказано.

Для доказательства соотношения (6.4) воспользуемся формулами (6.2) и (6.3): $[\vec{a}\alpha\vec{b}]=-[\alpha\vec{b}\vec{a}]=-\alpha[\vec{b}\vec{a}]=\alpha[\vec{a}\vec{b}]$. Свойство 4 доказано полностью.

Для обоснования следующего свойства потребуется вспомогательное утверждение. Пусть $\vec{a}$ — произвольный вектор, $\overrightarrow{AB}$ — его представитель, а π — некоторая плоскость. Опустим из точек A и B перпендикуляры на π, обозначим через A' и B' их точки пересечения с этой плоскостью. Тогда вектор $\overrightarrow{A'B'}$ будем называть *векторной проекцией* $\vec{a}$ *на плоскость* π. Очевидно, векторная проекция не зависит от выбора представителя вектора $\vec{a}$. Векторную проекцию будем обозначать $\overrightarrow{pr_\pi\vec{a}}$. Легко видеть, что $\overrightarrow{pr_\pi\vec{a}}=\vec{0}$ в том и только в том случае, когда вектор $\vec{a}$ либо нулевой, либо перпендикулярен π.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — произвольные векторы, причем $\vec{b}\neq\vec{0}$. Обозначим через $\vec{c}$ векторное произведение $\vec{c}=[\vec{a}\vec{b}]$. Отложим векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ от одной точки O: $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$. Пусть π — плоскость, проходящая через O и перпендикулярная вектору $\vec{b}$, вектор $\vec{c}$ принадлежит π. Обозначим через $\vec{a}'$ проекцию $\vec{a}$ на π: $\vec{a}'=\overrightarrow{pr_\pi\vec{a}}$ (рис. 24). Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то $\vec{a}'\neq\vec{0}$, в этом случае обозначим через $\vec{a}_1$ вектор плоскости π, полученный из $\vec{a}'$ поворотом на угол $\frac{\pi}{2}$, который виден из точки B по ходу движения часовой стрелки. Если же $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a}' = \vec{0}$. Тогда положим: $\vec{a}_1 = \vec{0}$. Без ограничения общности можно считать, что в этом случае вектор $\vec{a}_1$ также получен из $\vec{a}'$ указанным поворотом. Для этих векторов справедлива следующая лемма.

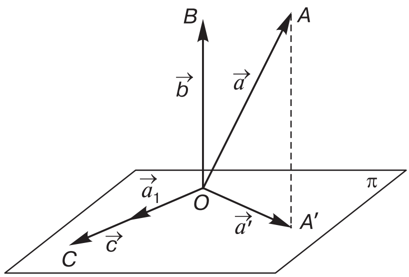


Рис. 24

Лемма. *Векторное произведение* $\vec{c} = [\vec{a}\vec{b}]$ *совпадает с вектором* $|\vec{b}|\vec{a}_1$.

Доказательство. Обозначим вектор $|\vec{b}|\vec{a}_1$ через $\vec{q}$. Пусть $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Тогда $\vec{c} = \vec{a}_1 = \vec{q} = \vec{0}$. Поэтому $\vec{c} = \vec{q}$, в этом случае лемма доказана.

Предположим теперь, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Вначале докажем, что модули $\vec{q}$ и $\vec{c}$ совпадают. Отложим вектор $\vec{a}'$ от точки O: $\overrightarrow{OA'} = \vec{a}'$ (рис. 24). Треугольник OAA' — прямоугольный. Поэтому $|\overrightarrow{OA'}| = |\overrightarrow{OA}|\cos(\angle A'OA)$. Но $\angle A'OA = \frac{\pi}{2} - \angle\vec{a}\vec{b}$. Следовательно, $|\vec{a}_1| = |\vec{a}|\sin(\angle\vec{a}\vec{b})$. Таким образом, $|\vec{q}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\angle\vec{a}\vec{b})$. Модули векторов $\vec{q}$ и $\vec{c}$ совпадают.

По построению вектор $\vec{a}_1$ лежит в плоскости π и перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Поэтому $\vec{q}$ также перпендикулярен $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и, как следует из определения векторного произведения векторов, коллинеарен $\vec{c}$. Так как модули $\vec{q}$ и $\vec{c}$ равны друг другу, то $\vec{q} = \varepsilon\vec{c}$, где $\varepsilon = 1$, либо $\varepsilon = -1$. Для завершения доказательства необходимо установить, что $\varepsilon = 1$. Вектор $\vec{a}_1$ был выбран таким образом, что базис $\vec{a}'$, $\vec{a}_1$, $\vec{b}$ имеет левую ориентацию. Ясно, что и базис $\vec{a}'$, $\vec{a}_1$, $\vec{b}$ также является левым базисом (рис. 24). Векторы $\vec{q}$ и $\vec{a}_1$ сонаправлены, поэтому базис $\vec{a}$, $\vec{q}$, $\vec{b}$ имеет левую ориентацию. По определению векторного произведения векторов, базис $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — правый. Тогда $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{b}$ — левый базис (докажите самостоятельно). Таким образом, базисы $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{b}$ и $\vec{a}$, $\vec{q}$, $\vec{b}$ имеют одинаковые ориентации. Матрица перехода от базиса $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{b}$ к базису $\vec{a}$, $\vec{q}$, $\vec{b}$ имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ее определитель, равный ε, положителен. Следовательно, $\varepsilon = 1$ и $\vec{c} = \vec{q}$. Лемма доказана.

Свойство 5. *Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ справедливы соотношения*

$$[(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}] = [\vec{a}\vec{c}] + [\vec{b}\vec{c}], \tag{6.5}$$

$$[\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})] = [\vec{a}\vec{b}] + [\vec{a}\vec{c}]. \tag{6.6}$$

Доказательство. Вначале докажем равенство (6.5). Предположим, что $\vec{c} = \vec{0}$. Тогда $[(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}] = [\vec{a}\vec{c}] = [\vec{b}\vec{c}] = \vec{0}$. Соотношение (6.5) для этого случая справедливо. Легко видеть, что оно также справедливо и в случае, когда $\vec{a} = \vec{0}$ или $\vec{b} = \vec{0}$. Будем предполагать, что данные векторы отличны от нулевого.

Пусть $\vec{c} \neq \vec{0}$. Отложим от произвольной точки O векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, обозначим через π плоскость, проходящую через O и перпендикулярную $\vec{c}$ (рис. 25). Отложим от точки A вектор $\vec{b}$: $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Отсюда $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$. Пусть $\overrightarrow{OA'} = \vec{a}\,' = \overrightarrow{pr_\pi \vec{a}}$, $\overrightarrow{A'B'} = \vec{b}\,' = \overrightarrow{pr_\pi \vec{b}}$. Тогда $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{pr_\pi \overrightarrow{OB}}$. Но $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B'}$, следовательно, $\overrightarrow{pr_\pi(\vec{a}+\vec{b})} = \overrightarrow{pr_\pi \vec{a}} + \overrightarrow{pr_\pi \vec{b}}$. Повернем треугольник $OA'B'$ в плоскости π на прямой угол так, чтобы из точки C этот поворот был виден по ходу движения часовой стрелки. Получим треугольник $OA''B''$. Осуществим гомотетию с центром в точке O и коэффициентом $|\vec{c}|$. Треугольник $OA''B''$ преобразуется в треугольник $OA'''B'''$. Тогда $\overrightarrow{OA'''} = |\vec{c}|\overrightarrow{OA''}$, $\overrightarrow{A'''B'''} = |\vec{c}|\overrightarrow{A''B''}$, $\overrightarrow{OB'''} = |\vec{c}|\overrightarrow{OB''}$. Согласно доказанной лемме, $\overrightarrow{OA'''} = [\vec{a}\vec{c}]$, $\overrightarrow{A'''B'''} = [\vec{b}\vec{c}]$, $\overrightarrow{OB'''} = [(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}]$. Так как $\overrightarrow{OA'''} + \overrightarrow{A'''B'''} = \overrightarrow{OB'''}$, то $[\vec{a}\vec{c}] + [\vec{b}\vec{c}] = [(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}]$. Равенство (6.5) доказано.

Для доказательства формулы (6.6) воспользуемся соотношениями (6.2) и (6.5): $[\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})] = -[(\vec{b}+\vec{c})\vec{a}] = -[\vec{b}\vec{a}] - [\vec{c}\vec{a}] = [\vec{a}\vec{b}] + [\vec{a}\vec{c}]$. Свойство 5 доказано полностью.

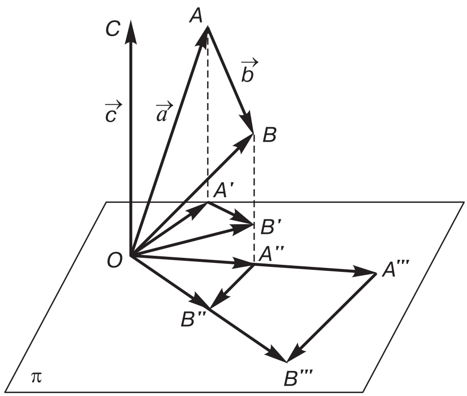


Рис. 25

Выведем формулы, выражающие координаты векторного произведения векторов через координаты сомножителей. Пусть дан прямоугольный декартов правый базис $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ и даны координаты векторов $\vec{a}\{\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3\}$ и $\vec{b}\{\beta_1;\beta_2;\beta_3\}$. Используя свойства векторного произведения векторов, получим:

$$\begin{gathered}[\vec{a}\vec{b}]=[(\alpha_1\vec{i}+\alpha_2\vec{j}+\alpha_3\vec{k})(\beta_1\vec{i}+\beta_2\vec{j}+\beta_3\vec{k})]=\\ =\alpha_1\beta_1[\vec{i}\vec{i}]+\alpha_1\beta_2[\vec{i}\vec{j}]+\alpha_1\beta_3[\vec{i}\vec{k}]+\\ +\alpha_2\beta_1[\vec{j}\vec{i}]+\alpha_2\beta_2[\vec{j}\vec{j}]+\alpha_2\beta_3[\vec{j}\vec{k}]+\alpha_3\beta_1[\vec{k}\vec{i}]+\alpha_3\beta_2[\vec{k}\vec{j}]+\alpha_3\beta_3[\vec{k}\vec{k}].\end{gathered}\tag{6.7}$$

Найдем попарные векторные произведения базисных векторов. Из определения векторного произведения векторов следует, что $[\vec{i}\vec{i}]=[\vec{j}\vec{j}]=[\vec{k}\vec{k}]=\vec{0}$. Обозначим через $\vec{c}$ векторное произведение $[\vec{i}\vec{j}]$. Так как базис прямоугольный декартов, то $|\vec{i}|=|\vec{j}|=1$, $\angle\vec{i}\,\vec{j}=\dfrac{\pi}{2}$. Поэтому $|\vec{c}|=|\vec{i}||\vec{j}|\sin(\angle\vec{i}\,\vec{j})=1$. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен $\vec{i}$ и $\vec{j}$, а значит, коллинеарен вектору $\vec{k}$. Так как $|\vec{c}|=|\vec{k}|$ и базисы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ и $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{c}$ оба правые, то $[\vec{i}\,\vec{j}]=\vec{k}$. Из свойства 3 следует, что $[\vec{j}\,\vec{i}]=-\vec{k}$.

Аналогично, $|[\vec{i}\,\vec{k}]|=1$, поэтому либо $[\vec{i}\,\vec{k}]=\vec{j}$, либо $[\vec{i}\,\vec{k}]=-\vec{j}$. Рассмотрим базисы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ и $\vec{i}$, $\vec{k}$, $-\vec{j}$. Матрица перехода от первого базиса ко второму имеет вид $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$. Ее определитель равен 1. Тройка векторов $\vec{i}$, $\vec{k}$, $-\vec{j}$ правая. Отсюда вытекает, что $[\vec{i}\,\vec{k}]=-\vec{j}$. Из соотношения (6.2) получим $[\vec{k}\,\vec{i}\,]=\vec{j}$. Аналогично определяются векторные произведения $[\vec{j}\vec{k}]$ и $[\vec{k}\,\vec{j}]$: $[\vec{j}\vec{k}]=\vec{i}$, $[\vec{k}\,\vec{j}\,]=-\vec{i}$. Итак, найдены все попарные произведения базисных векторов:

$$\begin{gathered}[\vec{i}\vec{i}\,]=[\vec{j}\vec{j}\,]=[\vec{k}\vec{k}]=\vec{0};\\ [\vec{i}\vec{j}\,]=\vec{k},\ [\vec{j}\vec{i}\,]=-\vec{k};\\ [\vec{i}\vec{k}]=-\vec{j},\ [\vec{k}\vec{i}\,]=\vec{j};\\ [\vec{k}\vec{j}\,]=-\vec{i},\ [\vec{j}\vec{k}]=\vec{i}.\end{gathered} \tag{6.8}$$

Подставим найденные попарные векторные произведения (6.8) базисных векторов в разложение (6.7):

$$\begin{aligned}[\vec{a}\vec{b}]&=\alpha_1\beta_2\vec{k}-\alpha_1\beta_3\vec{j}-\alpha_2\beta_1\vec{k}+\alpha_2\beta_3\vec{i}+\alpha_3\beta_1\vec{j}-\alpha_3\beta_2\vec{i}=\\ &=(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)\vec{i}-(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1)\vec{j}+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\vec{k}=\\ &=\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}\vec{k}.\end{aligned}$$

Отсюда можно получить координаты векторного произведения $[\vec{a}\vec{b}]$:

$$[\vec{a}\vec{b}]\left\{\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}\right\}. \tag{6.9}$$

Выражение (6.9) можно преобразовать к более удобному для запоминания виду:

$$[\vec{a}\vec{b}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}. \tag{6.10}$$

Правую часть равенства (6.10) нельзя считать определителем матрицы, так как первая строка состоит из векторов, а две другие из чисел. Но если формально раскрыть этот определитель по первой строке, то получим разложение вектора $[\vec{a}\vec{b}]$ по базисным векторам.

В примере 1 будем предполагать, что координаты векторов даны в прямоугольном декартовом правом базисе.

Пример 1. *Дана треугольная пирамида ABCD. Даны также координаты векторов* $\overrightarrow{AB}\{1;1;1\}$, $\overrightarrow{AC}\{-2;0;3\}$, $\overrightarrow{AD}\{4;1;0\}$. *Найти величину двугранного угла между основанием ABC и боковой гранью ABD.*

Решение. Пусть $ABCD$ — данная пирамида (рис. 26). Величина двугранного угла между плоскостями ABC и ADB равна углу, образованному двумя векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$, перпендикулярными этим плоскостям. Положим $\vec{n}_1=[\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}]$, $\vec{n}_2=[\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AD}]$, найдем координаты этих векторов, затем определим угол между ними:

$$[\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ -2 & 0 & -3\end{vmatrix}=-3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k},$$

$$[\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AD}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 4 & 1 & 0\end{vmatrix}=-\vec{i}+4\vec{j}-3\vec{k}.$$

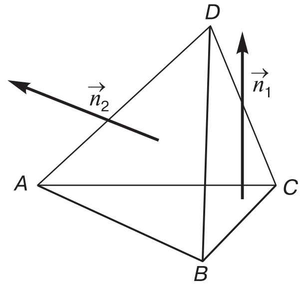


Рис. 26

Таким образом, $[\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}]\{-3;1;2\}$, $[\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AD}]\{-1;4;-3\}$. Вычислим косинус угла φ между ними по формуле (4.18): $\cos\varphi=$ $=\dfrac{3+4-6}{\sqrt{9+1+4}\sqrt{1+16+9}}=\dfrac{1}{2\sqrt{91}}$. Искомый угол равен $\arccos\dfrac{1}{2\sqrt{91}}$.

§ 7. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Определение 1. *Смешанным произведением векторов* $\vec{a},\vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *называется скалярное произведение вектора* $\vec{c}$ *и векторного произведения* $[\vec{a}\vec{b}]$.

Смешанное произведение векторов, в отличие от векторного, является числом. Его будем обозначать как $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$:

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=[\vec{a}\vec{b}]\vec{c}. \tag{7.1}$$

Смешанное произведение обладает рядом важных геометрических свойств.

Свойство 1. *Смешанное произведение векторов в том и только в том случае равно нулю, когда сомножители компланарны.*

Доказательство. Пусть дана компланарная тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Сначала рассмотрим частные случаи, когда $\vec{a}\parallel\vec{b}$ или $\vec{c}=\vec{0}$. В первом случае в соответствии с определением векторного произведения векторов $[\vec{a}\vec{b}]=\vec{0}$, поэтому из равенства (7.1) следует, что $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=0$. Во втором случае из того же равенства также получим, что $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=0$.

Рассмотрим основной случай, при котором векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, а вектор $\vec{c}$ отличен от нулевого. Пусть π — плоскость, параллельная векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Отложим их от одной точки O этой плоскости. Тогда вектор $[\vec{a}\vec{b}]$ перпендикулярен π, поэтому $[\vec{a}\vec{b}]\perp\vec{c}$. Из свойств скалярного произведения векторов следует, что $[\vec{a}\vec{b}]\vec{c}=(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=0$.

Обратно, рассмотрим тройку векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, для которой $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=0$. Так как $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=[\vec{a}\vec{b}]\vec{c}=0$, то возможны следующие случаи.

1. $[\vec{a}\vec{b}]=\vec{0}$. Тогда $\vec{a}\parallel\vec{b}$, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы, следовательно, тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ также линейно зависима и поэтому компланарна (§ 3).

2. $\vec{c}=\vec{0}$. Тогда система векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ также линейно зависима, так как содержит нулевой вектор, а следовательно, компланарна.

3. $[\vec{a}\vec{b}]\neq\vec{0}$, $\vec{c}\neq\vec{0}$. Отсюда вытекает, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны. Рассмотрим плоскость π, параллельную векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отложим $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ от точки O этой плоскости (рис. 27). Так как $[\vec{a}\vec{b}]\vec{c}=\vec{0}$ и $[\vec{a}\vec{b}]\neq\vec{0}$, $\vec{c}\neq\vec{0}$, то угол между этими векторами прямой. Но вектор $[\vec{a}\vec{b}]$ перпендикулярен π, отсюда следует, что вектор $\vec{c}$ параллелен плоскости π. Свойство доказано.

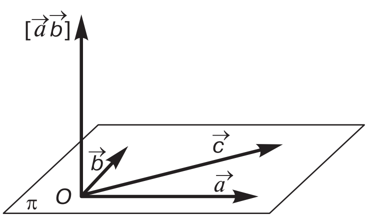


Рис. 27

Свойство 2. *Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не компланарны, то абсолютная величина их смешанного произведения равна объему параллелепипеда, построенного на этих векторах. Смешанное произведение положительно, если тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ правая, и отрицательно, если эта тройка левая.*

Доказательство. Рассмотрим первый случай, когда тройка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — правая. Отложим векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ от одной точки A: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$. Достроим полученную систему точек до параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ (рис. 28). Обозначим через $\vec{n}$ вектор $[\vec{a}\vec{b}]$, а через π — плоскость основания $ABCD$ параллелепипеда. Пусть l — прямая, проходящая через A и перпендикулярная π. Отложим вектор $\vec{n}$ от точки A: $\overrightarrow{AN}=\vec{n}$. Так как вектор $\vec{n}$ перпендикулярен π, то точка N лежит на прямой l. Тройки векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{n}$ правые, поэтому концы векторов $\vec{c}$ и $\vec{n}$ — точки A' и N — лежат в одном полупространстве относительно плоскости π (пример 2, § 5). Обозначим через φ угол между прямыми l и AA'. В рассматриваемом случае $\varphi=\angle\vec{n}\vec{c}$. Опустим из вершины A' высоту $A'H$ на плоскость основания. Обозначим ее длину через h. Тогда объем параллелепипеда равен: $V=Sh$, где S — площадь параллелограмма $ABCD$. Но, согласно свойству 1 векторного произведения векторов, $\left|[\vec{a}\vec{b}]\right|=S$. Поэтому $V=\left|[\vec{a}\vec{b}]\right|h$. Проецируя отрезок $A'H$ на l, получаем отрезок AK. Так как длина AK равна h, то из свойств прямоугольного треугольника $AA'K$ следует $h=|\vec{c}|\cos\varphi$. Таким образом, $V=\left|[\vec{a}\vec{b}]\right||\vec{c}|\cos\varphi=\left|(\vec{a}\vec{b}\vec{c})\right|$.

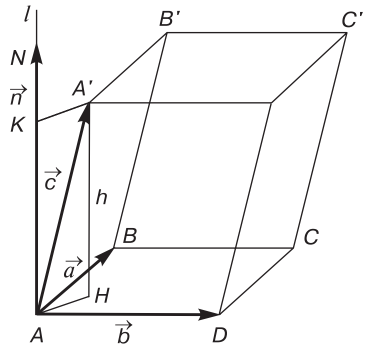


Рис. 28

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — левая тройка векторов. Отложим векторы от точки A: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$. Достроим эту тройку векторов до параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ (рис. 29). Как и в предыдущем случае, обозначим плоскость $ABCD$ через π, векторное произведение $[\vec{a}\vec{b}]$ через $\vec{n}$. Проведем через вершину A

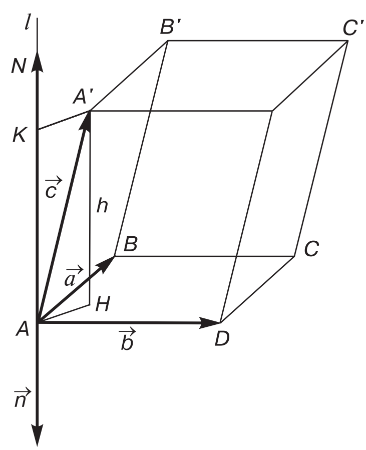


Рис. 29

прямую l, перпендикулярную π, и отложим от точки A вектор $\vec{n}$: $\overrightarrow{AN} = \vec{n}$. Так как вектор $\vec{n}$ перпендикулярен π, то точка N принадлежит прямой l. Пусть φ — угол между ребром AA' и l. Так как ориентации троек векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{n}$ различны, то точки A' и N лежат в разных полупространствах относительно плоскости π. Если $\psi = \angle\vec{n}\vec{c}$, то в этом случае $\psi = \pi - \varphi$. Пусть $A'H$ — высота параллелепипеда, h — ее длина. Объем параллелепипеда V равен Sh, где S — площадь параллелограмма $ABCD$. Поэтому $V = \left|[\vec{a}\vec{b}]\right|h$. Проецируя отрезок $A|H$ на прямую l, получим отрезок AK. Из свойств прямоугольного треугольника $AA'K$ следует, что $h = |\vec{c}|\cos\varphi$. Так как $\cos\varphi = \cos(\pi - \psi) = -\cos\psi$, ψ — острый угол, а φ — тупой, то $\cos\varphi = |\cos\psi|$. Поэтому $h = |\vec{c}||\cos\psi|$, $V = \left|[\vec{a}\vec{b}]\right||\vec{c}||\cos\psi| = |(\vec{a}\vec{b}\vec{c})|$.

Нетрудно проверить, что если $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) > 0$, то тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — правая, а в случае, когда $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) < 0$, эта тройка левая. Действительно, так как $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \left|[\vec{a}\vec{b}]\right||\vec{c}|\cos\varphi$, где φ — угол между векторами $[\vec{a}\vec{b}]$ и $\vec{c}$, то $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) > 0$ в том и только в том случае, когда $\cos\varphi > 0$, т. е. угол φ острый. Отсюда следует, что векторы $[\vec{a}\vec{b}]$ и $\vec{c}$, отложенные от точки A, лежат в одном полупространстве относительно плоскости π, проходящей через A и параллельной векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. В этом случае (пример 2, § 6) тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{n}$ имеют одинаковые ориентации. Но тройки $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{n}$ правая, следовательно, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — также правая тройка векторов.

Если $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) < 0$, то аналогично доказывается, что векторы $[\vec{a}\vec{b}]$ и $\vec{c}$ лежат в различных полуплоскостях относительно π. Поэтому $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — левая тройка векторов. Свойство 2 доказано.

Свойства 1 и 2 обосновывают геометрический смысл смешанного произведения векторов.

Свойство 3. *Для любых векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *и* $\vec{d}$ *справедливы следующие соотношения*:

$$((\vec{a} + \vec{b})\vec{c}\vec{d}) = (\vec{a}\vec{c}\vec{d}) + (\vec{b}\vec{c}\vec{d}), \tag{7.2}$$

$$(\vec{a}(\vec{b} + \vec{c})\vec{d}) = (\vec{a}\vec{b}\vec{d}) + (\vec{a}\vec{c}\vec{d}), \tag{7.3}$$

$$(\vec{a}\vec{b}(\vec{c} + \vec{d})) = (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) + (\vec{a}\vec{b}\vec{d}). \tag{7.4}$$

Доказательство. Воспользуемся свойствами скалярного и векторного произведений векторов (§ 4, 6). Докажем равенство (7.2), остальные соотношения проверяются аналогично. Согласно (7.1), $((\vec{a}+\vec{b})\vec{c}\vec{d})=[(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}]\vec{d}$, поэтому

$$((\vec{a}+\vec{b})\vec{c}\vec{d})=([\vec{a}\vec{c}]+[\vec{b}\vec{c}])\vec{d}=[\vec{a}\vec{c}]\vec{d}+[\vec{b}\vec{c}]\vec{d}=(\vec{a}\vec{c}\vec{d})+(\vec{b}\vec{c}\vec{d}).$$

Свойство 3 доказано.

Свойство 4. *Для любых векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *и любого числа* α *справедливы следующие соотношения*:

$$((\alpha\vec{a})\vec{b}\vec{c})=\alpha(\vec{a}\vec{b}\vec{c}), \tag{7.5}$$

$$(\vec{a}(\alpha\vec{b})\vec{c})=\alpha(\vec{a}\vec{b}\vec{c}), \tag{7.6}$$

$$(\vec{a}\vec{b}(\alpha\vec{c}))=\alpha(\vec{a}\vec{b}\vec{c}). \tag{7.7}$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся формулой (7.1), а также свойствами скалярного и векторного произведений векторов (§ 4, 6). Докажем соотношение (7.5), остальные равенства обосновываются аналогично: $((\alpha\vec{a})\vec{b}\vec{c})=[(\alpha\vec{a})\vec{b}]\vec{c}=$ $=\alpha([\vec{a}\vec{b}]\vec{c})=\alpha(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$. Свойство 4 доказано.

Выведем формулу для подсчета смешанного произведения векторов через координаты сомножителей. Пусть в пространстве дан прямоугольный декартов правый базис $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ и даны координаты векторов $\vec{a}\{\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3\}$, $\vec{b}\{\beta_1;\beta_2;\beta_3\}$ и $\vec{c}\{\gamma_1;\gamma_2;\gamma_3\}$ относительно этого базиса. По формулам (6.9) (§ 6) найдем координаты векторного произведения $[\vec{a}\vec{b}]$: $[\vec{a}\ \vec{b}]\left\{\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}\right\}$. Так как $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=[\vec{a}\vec{b}]\vec{c}$, то, воспользовавшись формулой (4.15) для определения скалярного произведения векторов в координатах (§ 4), получим $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=\gamma_1\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}-\gamma_2\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_3\end{vmatrix}+\gamma_3\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}$. Легко видеть, что правая часть этого выражения равна определителю третьего порядка, составленного из координат векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}. \tag{7.8}$$

Как вытекает из формулы (7.8) и свойства 1 смешанного произведения векторов, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны в том и только в том случае, когда определитель, составленный из их координат, вычисленных в прямоугольном декартовом базисе, равен нулю. Это утверждение полностью согласуется с результатом теоремы 9, § 3. Но при этом следует иметь в виду, что упомянутая теорема доказывалась нами при условии, что координаты векторов даны в произвольном аффинном базисе.

§ 8. ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВ ВЕКТОРОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Задачи элементарной геометрии можно условно разделить на две части: аффинные и метрические. К первому классу относятся задачи, решения которых сводятся к доказательству параллельности прямых, принадлежности точек одной прямой, нахождению отношения отрезков, лежащих на одной или параллельных прямых. Метрический же класс составляют задачи, в которых требуется определить длины отрезков, величины углов, площади фигур или объемы тел. При решении векторным способом аффинных задач используют линейные операции над векторами, а метрических — свойства скалярного, векторного и смешанного произведений векторов.

Если для решения задачи элементарной геометрии применяется векторный способ, то обычно вводят систему векторов, определяющую заданную в условии фигуру. Для этого, как правило, фиксируют какую-либо точку, затем вводят векторы, начало которых находится в этой точке, а концы — в точках, определяющих фигуру (вершинах, серединах отрезков и т. д.), устанавливают зависимости между введенными векторами, которые равносильны данным и искомым условиям, доказывают необходимые соотношения. При этом, вообще говоря, не требуется, чтобы введенная система векторов представляла собой базис плоскости или пространства. Эта система должна удобным образом определять заданную фигуру. От того, как она выбрана, существенным образом зависит простота выполнения вычислений.

Разберем решения задач, которые носят аффинный характер.

Пример 1. *Дан четырехугольник $ABCD$, P и Q — середины диагоналей AC и BD. Известно, что длина отрезка PQ равна половине модуля разности сторон AD и BC. Доказать, что данный четырехугольник — трапеция или параллелограмм.*

Решение. Без ограничения общности можно считать, что $|AD| \geq |BC|$. Примем вершину A за начало, обозначим радиус-векторы остальных вершин через $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ (рис. 30): $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$. Тогда $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\vec{c}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{d})$. Так как $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP}$,

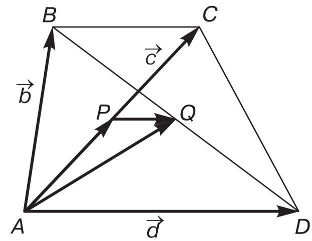


Рис. 30

то $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{d}) - \frac{1}{2}\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{d} - \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b})$. В то же время, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$. Таким образом, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC})$. По условию задачи, $|\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{AD}| - |\overrightarrow{BC}|)$. Как следует из свойств операции вычитания векторов, векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{PQ}$ коллинеарны (докажите самостоятельно). Утверждение доказано.

Пример 2. *Доказать, что в произвольном четырехугольнике средние линии в точке пересечения делятся пополам*[1].

Решение. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник, M, N, P и Q — середины его сторон (рис. 31). Примем точку A за начало и обозначим радиус-векторы остальных вершин через $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$: $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$. Пусть $\overrightarrow{AM} = \vec{m}$, $\overrightarrow{AN} = \vec{n}$, $\overrightarrow{AP} = \vec{p}$, $\overrightarrow{AQ} = \vec{q}$. Будем считать, что O_1 — середина средней линии MP, O_2 — середина QN. Для решения достаточно выразить радиус-векторы $\vec{o}_1 = \overrightarrow{AO_1}$ и $\vec{o}_2 = \overrightarrow{AO_2}$ через $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ и показать, что они равны друг другу. По условию, $\vec{m} = \frac{1}{2}\vec{b}$, $\vec{p} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d})$, отсюда $\vec{o}_1 = \frac{1}{4}(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$; $\vec{n} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$, $\vec{q} = \frac{1}{2}\vec{d}$, поэтому $\vec{o}_2 = \frac{1}{4}(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$. Таким образом, $\vec{o}_1 = \vec{o}_2$. Точки O_1 и O_2 совпадают.

Пример 3. *Доказать, что диагональ AC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ делится плоскостями A_1BD и B_1D_1C на три равные части.*

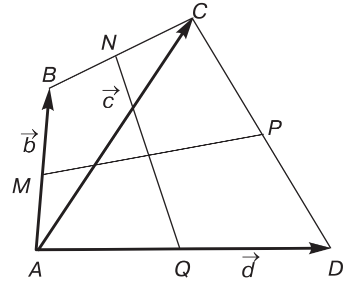


Рис. 31

[1] Под средней линией четырехугольника понимается отрезок, соединяющий середины его противоположных сторон.

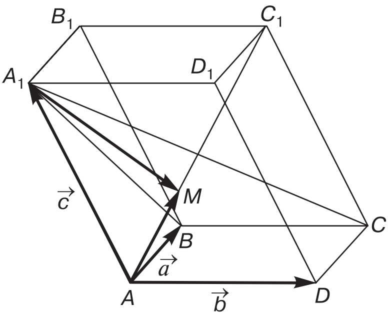


Рис. 32

Решение. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — данный параллелепипед (рис. 32). Введем обозначения: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$. Пусть M — такая точка диагонали AC_1, что $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$. Покажем, что вектор $\overrightarrow{A_1M}$ линейно выражается через векторы $\overrightarrow{A_1D}$ и $\overrightarrow{A_1B}$. Отсюда будет следовать, что M лежит в плоскости A_1BD. Выразим через $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ векторы $\overrightarrow{A_1M}$, $\overrightarrow{A_1D}$ и $\overrightarrow{A_1B}$. Так как AC_1 — диагональ параллелепипеда, то $\overrightarrow{AC_1}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$. Так как $\overrightarrow{A_1M}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AA_1}$ то $\overrightarrow{A_1M}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{c}=\frac{1}{3}(\vec{a}-\vec{c})+\frac{1}{3}(\vec{b}-\vec{c})$. Но, с другой стороны, $\overrightarrow{A_1B}=\vec{a}-\vec{c}$, $\overrightarrow{A_1D}=\vec{b}-\vec{c}$. Поэтому $\overrightarrow{A_1M}=\frac{1}{3}\overrightarrow{A_1D}+\frac{1}{3}\overrightarrow{A_1D}$. Векторы $\overrightarrow{A_1M}$, $\overrightarrow{A_1D}$ и $\overrightarrow{A_1B}$ компланарные, точка M принадлежит плоскости A_1BD. Аналогично доказывается, что плоскость B_1D_1C отсекает от диагонали AC_1 отрезок, равный трети ее длины. Рассуждения проведите самостоятельно.

Рассмотрим примеры решений метрических задач с помощью скалярного произведения векторов.

Пример 4. *Дан равнобедренный треугольник ABC. На боковой стороне AB и на основании AC построены квадраты, которые расположены вне треугольника. Доказать, что центры этих квадратов и середина боковой стороны BC являются вершинами равнобедренного прямоугольного треугольника.*

Решение. Пусть ABC — данный треугольник, K, M и N — середины его сторон, а P и Q — центры данных квадратов (рис. 33). Введем следующие обозначения: $\overrightarrow{AN}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AM}=\vec{b}$, $\overrightarrow{NQ}=\vec{m}$, $\overrightarrow{MP}=\vec{n}$. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{m}$, $\vec{b}$ и $\vec{n}$ равны по длине и перпендикулярны друг другу:

$$|\vec{a}|=|\vec{m}|,\quad \vec{a}\vec{m}=0; \tag{8.1}$$

$$|\vec{b}|=|\vec{n}|,\quad \vec{b}\vec{n}=0. \tag{8.2}$$

Выразим векторы $\overrightarrow{KQ}$ и $\overrightarrow{KP}$ через $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{m}$ и $\vec{n}$. Для решения задачи достаточно показать, что их длины равны между собой, а скалярное произведение равно нулю.

$$\overrightarrow{AQ} = \vec{a} + \vec{m}.$$

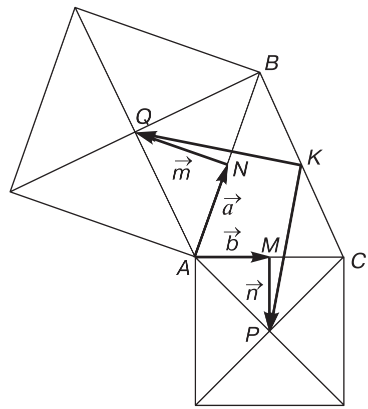


Рис. 33

Так как K — середина стороны BC, то $\overrightarrow{AK} = \vec{a} + \vec{b}$. Из равенства $\overrightarrow{KQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AK}$ следует

$$\overrightarrow{KQ} = \vec{m} - \vec{b}. \qquad (8.3)$$

Аналогично получим

$$\overrightarrow{KP} = \vec{n} - \vec{a}. \qquad (8.4)$$

Теперь выясним, как связаны между собой скалярные произведения $\vec{m}\vec{n}$, $\vec{m}\vec{b}$, $\vec{n}\vec{a}$ и $\vec{a}\vec{b}$. Пусть φ — величина угла A треугольника ABC. Тогда $\angle\vec{b}\vec{m} = \angle\vec{a}\vec{n} = \varphi + \frac{\pi}{2}$, $\angle\vec{m}\vec{n} = \pi - \varphi$. Поэтому из формул (8.1) и (8.2) следует:

$$\vec{b}\vec{m} = \vec{a}\vec{n}, \qquad (8.5)$$

$$\vec{a}\vec{b} = -\vec{m}\vec{n}. \qquad (8.6)$$

Возведем равенства (8.3) и (8.4) в квадрат: $\left|\overrightarrow{KQ}\right|^2 = \vec{m}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{m}\vec{b}$, $\left|\overrightarrow{KP}\right|^2 = \vec{n}^2 + \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{n}$. Из (8.1), (8.2) и (8.5) получим $\left|\overrightarrow{KQ}\right| = \left|\overrightarrow{KP}\right|$, длины отрезков KQ и KP равны между собой. Рассмотрим скалярное произведение $\overrightarrow{KQ}\overrightarrow{KP} = (\vec{m} - \vec{b})(\vec{n} - \vec{a})$. Раскроем скобки и воспользуемся равенствами (8.1) и (8.2): $\overrightarrow{KQ}\overrightarrow{KP} = \vec{m}\vec{n} + \vec{a}\vec{b}$. Из формулы (8.6) следует $\overrightarrow{KQ}\overrightarrow{KP} = 0$, угол PKQ — прямой. Утверждение доказано.

Пример 5. *Доказать, что сумма квадратов длин медиан треугольника равна трем четвертям от суммы квадратов длин его сторон.*

Решение. Пусть ABC — данный треугольник, M, N и P — середины его сторон (рис. 34). Обозначим через $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ векторы

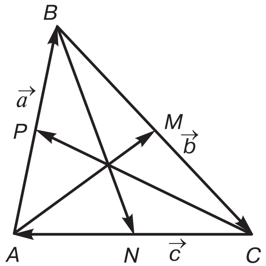


Рис. 34

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$. Тогда $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{BN} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$, $\overrightarrow{CP} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}$. Возведем эти выражения в квадрат и сложим их, после преобразований получим

$$|AM|^2 + |BN|^2 + |CP|^2 = \frac{5}{4}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2) + \vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{c}.$$

Выразим скалярные произведения $\vec{a}\vec{b}$, $\vec{b}\vec{c}$, $\vec{a}\vec{c}$ через $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{c}|$. Так как $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, то $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = 0$, или $\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + 2\vec{a}\vec{c} + 2\vec{b}\vec{c} = 0$. Отсюда следует, что $\vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c} = -\frac{1}{2}(|\vec{c}|^2 + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2)$. Таким образом, $|AM|^2 + |BN|^2 + |CP|^2 = \frac{5}{4}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2) - \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2) = \frac{3}{4}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2)$. Утверждение доказано.

Пример 6. *Противоположные ребра тетраэдра взаимно перпендикулярны между собой. Доказать, что суммы квадратов длин противоположных ребер равны друг другу.*

Решение. Пусть $ABCD$ — данный тетраэдр (рис. 35). Обозначим векторы $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{DC}$ через $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Тогда $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$. Нам следует доказать, что $\vec{a}^2 + (\vec{c} - \vec{b})^2 = \vec{b}^2 + (\vec{a} - \vec{c})^2 = \vec{c}^2 + (\vec{b} - \vec{a})^2$. Преобразуем равенство $\vec{a}^2 + (\vec{c} - \vec{b})^2 = \vec{b}^2 + (\vec{a} - \vec{c})^2$ в истинное и тем самым докажем его справедливость. Раскроем в этом равенстве скобки: $\vec{a}^2 + \vec{c}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{c}\vec{b} = \vec{b}^2 + \vec{a}^2 + \vec{c}^2 - 2\vec{a}\vec{c}$. Отсюда следует, что $\vec{c}\vec{b} = \vec{a}\vec{c}$, или $\vec{c}(\vec{b} - \vec{a}) = 0$. Последнее равенство является истинным, так как его можно записать в виде $\overrightarrow{DC}\,\overrightarrow{AB} = 0$, а по условию нам дано, что противоположные ребра тетраэдра взаимно перпендикулярны. Аналогично доказывается, что $\vec{b}^2 + (\vec{a} - \vec{c})^2 = \vec{c}^2 + (\vec{b} - \vec{a})^2$.

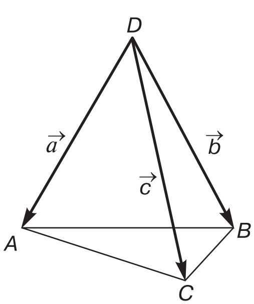


Рис. 35

При решении следующего примера используем смешанное произведение векторов.

Пример 7. *Дана треугольная призма $ABCA'B'C'$. Точки M, N и P — середины ребер CC', $A'B'$ и BC. Найти отношение объема призмы к объему пирамиды $AMNP$.*

Решение. Введем обозначения: $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$ (рис. 36). Из школьного курса геометрии известно, что объем данной призмы V_1 равен половине объема параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, а объем V_2 пирамиды $AMNP$ — шестой части от объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AN}$. Таким образом, из свойства 2 смешанного произведения векторов следует:

$$V_1=\frac{1}{2}\left|(\vec{a}\vec{b}\vec{c})\right|,\quad V_2=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AM}\,\overrightarrow{AP}\,\overrightarrow{AN})\right|. \tag{8.7}$$

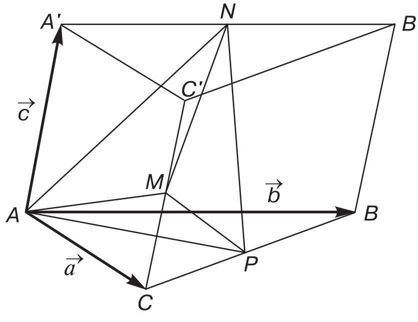


Рис. 36

Выразим векторы $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AN}$ через $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$: $\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$, $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$. Поэтому $(\overrightarrow{AM}\,\overrightarrow{AP}\,\overrightarrow{AN})=\left(\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)\times\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}\right)\right)$. Воспользуемся свойствами 3 и 4, § 7:

$$(\overrightarrow{AM}\,\overrightarrow{AP}\,\overrightarrow{AN})=\frac{1}{2}\left(\vec{a}(\vec{a}+\vec{b})\left(\frac{1}{2}\vec{b}+c\right)\right)+\frac{1}{4}\left(\vec{c}(\vec{a}+\vec{b})\left(\frac{1}{2}\vec{b}+c\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\vec{a}(\vec{a}+\vec{b})\vec{b}\right)+\frac{1}{2}\left(\vec{a}(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}\right)+\frac{1}{8}\left(\vec{c}(\vec{a}+\vec{b})\vec{b}\right)+\frac{1}{4}\left(\vec{c}(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(\vec{a}\vec{a}\vec{c})+\frac{1}{2}(\vec{a}\vec{b}\vec{c})+\frac{1}{8}(\vec{c}\vec{a}\vec{b})+\frac{1}{8}(\vec{c}\vec{b}\vec{b}).$$

Так как соответствующие тройки векторов компланарны, то $\left(\vec{a}(\vec{a}+\vec{b})\vec{b}\right)=\left(\vec{c}(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}\right)=(\vec{a}\vec{a}\vec{c})=(\vec{c}\vec{a}\vec{c})=0$. Нетрудно проверить, что $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=(\vec{c}\vec{a}\vec{b})$, поэтому $(\overrightarrow{AM}\,\overrightarrow{AP}\,\overrightarrow{AN})=\frac{5}{8}(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$. Воспользовавшись формулой (8.7), получим, что $\frac{V_1}{V_2}=\frac{24}{5}$.

Если примеры 2 и 5 можно достаточно легко решить, применяя утверждения элементарной геометрии, то решения остальных примеров существенно упрощаются при использовании средств векторной алгебры. Следует обратить особое внимание на примеры 3, 6 и 7. В них даны произвольные призмы и тетраэдр, удовлетворяющие условиям задачи, поэтому их решения средствами элементарной геометрии существенно сложнее приведенных векторных решений.

Глава II

КООРДИНАТЫ ТОЧЕК НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 9. АФФИННЫЕ И ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ ТОЧЕК НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

С понятием координат точек мы познакомились в школьном курсе математики. С помощью этого понятия исследуются свойства элементарных функций, оно лежит в основе изучения начал аналитической геометрии. Это эффективный инструмент исследования, используемый в различных областях математики. Наш подход как к введению, так и изучению свойств координат точек будет несколько отличаться от школьного и основываться на понятии координат векторов.

Для того чтобы ввести координаты точек, необходимо иметь некоторую геометрическую конструкцию, с помощью которой они определяются. Для векторов роль такой конструкции выполняет базис в системе векторов плоскости или пространства. Введем следующее определение.

Определение 1. *Под аффинной или общей декартовой системой координат плоскости или пространства будем понимать точку и базис векторов плоскости или пространства. Если базис ортонормированный, то систему координат будем называть прямоугольной декартовой.*

Аффинная система координат плоскости, таким образом, состоит из точки O и базиса $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$, а пространства — точки O и базиса $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ векторов пространства. Точка O называется *началом системы координат*. Оси, проходящие через начало O и сонаправленные с базисными векторами, называются *осями координат*. Если $O,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2$ — система координат плоскости, то ось, сонаправленная с $\vec{e}_1$, называется *осью абсцисс* и обозначается через Ox; ось, сонаправленная с $\vec{e}_2$, — *осью ординат* и обозначается через Oy. Если $O,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ — система координат пространства, то первые две оси координат имеют те же названия и обозначения, а ось, сонаправленная с вектором $\vec{e}_3$, называется *осью аппликат* и обозначается через Oz.

Пусть O — начало системы координат плоскости или пространства, а M — произвольная точка. Вектор $\overrightarrow{OM}$ будем называть *радиус-вектором* этой точки.

Определение 2. *Пусть на плоскости или в пространстве дана аффинная система координат. Под аффинными координатами точки будем понимать координаты ее радиус-вектора относительно базиса, входящего в систему координат.*

Если система координат прямоугольная декартова, то координаты точки называются *прямоугольными декартовыми*.

Условимся координаты точек, в отличие от координат векторов, заключать в круглые скобки. Таким образом, если на плоскости выбрана система координат O, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, то каждой ее точке A однозначно соответствует упорядоченная пара чисел $(x; y)$ — координаты точки, удовлетворяющие условию

$$\overrightarrow{OA} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2. \tag{9.1}$$

Если O, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ — система координат в пространстве, то любой точке A пространства однозначно соответствует упорядоченная тройка ее координат $(x; y; z)$ таких, что

$$\overrightarrow{OA} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3. \tag{9.2}$$

Первая координата точки называется ее *абсциссой*, вторая — *ординатой*, третья — *аппликатой*. Мы определили координаты точек на плоскости или в пространстве, полностью опираясь при этом на понятие координат векторов. Так как координаты векторов определены однозначно, каждой точке также однозначно соответствует ее радиус-вектор, то справедливо следующее утверждение. *Если на плоскости (в пространстве) выбрана система координат, то каждой точке плоскости (пространства) взаимно однозначно соответствует упорядоченная пара (тройка) чисел — ее координаты.*

В школьном курсе математики рассматривались только прямоугольные декартовы координаты точек, причем, согласно принятым нами обозначениям, они определялись как проекции радиус-вектора точки на соответствующую ось. Легко показать, что введенное нами понятие координат полностью согласуется с рассмотренным в школьном курсе математики. Пусть O, $\vec{i}$, $\vec{j}$ — прямоугольная декартова система координат плоскости, A — произвольная точка, $(x; y)$ — ее координаты: $\overrightarrow{OA} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Обозначим через $pr_x\overrightarrow{OA}$ и $pr_y\overrightarrow{OA}$ проекции радиус-вектора $\overrightarrow{OA}$ на оси координат Ox и Oy. Так как $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — орты этих осей, то из леммы 1, § 4 следует

$$pr_x\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA}\vec{i} = (x\vec{i} + y\vec{j})\vec{i} = x,$$

$$pr_y\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA}\vec{j} = (x\vec{i} + y\vec{j})\vec{j} = y.$$

Аналогичное свойство справедливо для пространства. Рассмотрим примеры решения задач на нахождение координат точек.

Пример 1. *Дан равносторонний треугольник ABC, длина стороны которого равна 2. Начало прямоугольной декартовой системы координат совпадает с центром O треугольника, ось абсцисс сонаправлена с вектором $\overrightarrow{AC}$, а ось ординат — с вектором $\overrightarrow{OB}$. Найти в этой системе координаты вершины A.*

Решение. Пусть ABC — данный треугольник, точка M — середина AC (рис. 37). Координаты точки A совпадают с координатами радиус-вектора $\overrightarrow{OA}$ в прямоугольном декартовом базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$. Тогда, как было уже отмечено выше, они имеют такой вид: $x = |\overrightarrow{OA}|\cos(\angle\vec{i}\,\overrightarrow{OA})$, $y = |\overrightarrow{OA}|\sin(\angle\vec{i}\,\overrightarrow{OA})$. По условию, $|AB| = 2$. Так как $|OA| = \frac{2}{3}|BM|$, $|BM| = \frac{\sqrt{3}}{2}|AB|$, то $|\overrightarrow{OA}| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Легко видеть, что $\angle\vec{i}\,\overrightarrow{OA} = -150^\circ$, поэтому

$$x = \frac{2\sqrt{3}}{3}\cos(-150^\circ) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1,$$

$$y = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin(-150^\circ) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Пример 2. *Дан тетраэдр $ABCS$, M — точка пересечения медиан основания ABC. Найти ее координаты в системе S, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{SA}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{SB}$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{SC}$.*

Решение. Пусть $ABCS$ — данный тетраэдр (рис. 38). Координаты точки M совпадают с коэффициентами разложения вектора $\overrightarrow{SM}$ по базисным векторам $\vec{e}_1 = \overrightarrow{SA}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{SB}$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{SC}$ системы координат. Легко видеть,

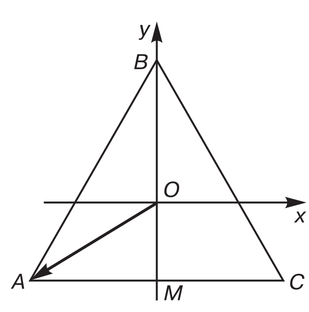


Рис. 37

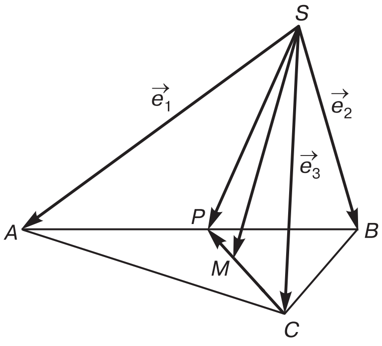


Рис. 38

$\overrightarrow{SM}=\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{CM}$. Обозначим через P середину стороны AB, тогда $\overrightarrow{SP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SB}=\frac{1}{2}\vec{e}_1++\frac{1}{2}\vec{e}_2$. Так как M — точка пересечения медиан треугольника ABC, то $\overrightarrow{CM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$. Кроме того, $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{SP}-\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SP}-\vec{e}_3$. Таким образом, $\overrightarrow{CP}=\frac{1}{2}\vec{e}_1+\frac{1}{2}\vec{e}_2-\vec{e}_3$, $\overrightarrow{CM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CP}=\frac{1}{3}\vec{e}_1+\frac{1}{3}\vec{e}_2-\frac{2}{3}\vec{e}_2$, $\overrightarrow{SM}=\vec{e}_3+\overrightarrow{CM}=\frac{1}{3}\vec{e}_1+\frac{1}{3}\vec{e}_2+\frac{1}{3}\vec{e}_2$. Искомые координаты точки M равны $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть на плоскости даны две системы координат. Требуется определить соотношения, которые связывают координаты одной и той же точки в этих системах. Аналогичная задача была нами решена в § 5 для векторов плоскости и пространства, мы получили так называемые формулы перехода (5.3) и (5.9) от одного базиса к другому.

Выведем формулы перехода от одной аффинной системы координат к другой. Пусть на плоскости даны две системы координат O, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и O', $\vec{e}\,'_1$, $\vec{e}\,'_2$ и известны координаты точки O' в первой системе $O'(x_0;y_0)$, а также координаты векторов $\vec{e}\,'_1$ и $\vec{e}\,'_2$ относительно базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$: $\vec{e}\,'_1\{a_1;b_1\}$, $\vec{e}\,'_2\{a_2;b_2\}$ Так как векторы $\vec{e}\,'_1$ и $\vec{e}\,'_2$ линейно независимы, то $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$.

Рассмотрим произвольную точку A плоскости. Ее координаты относительно первой системы равны $(x;\ y)$, а относительно второй — $(x';\ y')$. Нам следует найти зависимости между x, y и x', y'. Рассмотрим равенство $\overrightarrow{O'A}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OO'}$. Согласно определению 2, координаты вектора $\overrightarrow{O'A}$ относительно базиса $\vec{e}\,'_1$, $\vec{e}\,'_2$ равны $\{x';\ y'\}$. Определим его координаты в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$. Векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OO'}$ в этом базисе имеют координаты $\{x;\ y\}$ и $\{x_0;\ y_0\}$. Поэтому координаты вектора $\overrightarrow{O'A}$ в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$

равны $\{x - x_0;\ y - y_0\}$. Воспользуемся формулами (5.3) перехода от базиса $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$ к $\vec{e}_1{}',\ \vec{e}_2{}'$ (§ 5):

$$\begin{cases} x - x_0 = a_1x' + a_2y', \\ y - y_0 = b_1x' + b_2y', \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x = a_1x' + a_2y' + x_0, \\ y = b_1x' + b_2y' + y_0, \end{cases} \tag{9.3}$$

где $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Соотношения (9.3) — искомые формулы перехода от первой системы координат ко второй.

Если базисные векторы этих систем совпадают, $\vec{e}_1 = \vec{e}_1{}',\ \vec{e}_2 = \vec{e}_2{}'$, то формулы перехода принимают вид $\begin{cases} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0. \end{cases}$ В этом случае говорят, что вторая система получена из первой параллельным переносом начала системы координат.

Аналогично доказывается, что если в пространстве даны две аффинные системы координат $O,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ и $O',\ \vec{e}_1{}',\ \vec{e}_2{}',\ \vec{e}_3{}'$, причем координаты точки O' в первой системе равны $(x_0;\ y_0;\ z_0)$, а векторы $\vec{e}_1{}',\ \vec{e}_2{}'$ и $\vec{e}_3{}'$ относительно базиса $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ имеют вид $\vec{e}_1{}'\{a_1; b_1; c_1\},\ \vec{e}_2{}'\{a_2; b_2; c_2\};\ \vec{e}_3{}'\{a_3; b_3; c_3\}$, то координаты $(x;\ y;\ z)$ точки A относительно первой системы и ее координаты $(x';\ y';\ z')$ относительно второй удовлетворяют равенствам

$$\begin{cases} x = a_1x' + a_2y' + a_3z' + x_0, \\ y = b_1x' + b_2y' + b_3z' + y_0, \\ z = c_1x' + c_2y' + c_3z' + z_0, \end{cases} \tag{9.4}$$

при этом $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$. Полученные соотношения представляют собой формулы перехода в пространстве от первой системы координат ко второй.

Пусть на ориентированной плоскости даны две прямоугольные декартовы системы координат $O,\ \vec{i},\ \vec{j}$ и $O',\ \vec{i}',\ \vec{j}'$. Даны координаты точки O' относительно первой системы: $O'(x_0;\ y_0)$. Если ориентации базисов $\vec{i},\ \vec{j}$ и $\vec{i}',\ \vec{j}'$ совпадают, то векторы $\vec{i}'$ и $\vec{j}'$

имеют относительно базиса $\vec{i}$, $\vec{j}$ следующие координаты: $\vec{i}'\{\cos\varphi; \sin\varphi\}$, $\vec{j}'\{-\sin\varphi; \cos\varphi\}$, где $\varphi = \measuredangle\vec{i}\vec{i}'$. Если ориентации этих базисов различны, то $\vec{i}'\{\cos\varphi; \sin\varphi\}$, $\vec{j}'\{\sin\varphi; -\cos\varphi\}$, где φ — тот же угол (§ 5). Поэтому, согласно соотношениям (9.3), в первом случае формулы перехода от первой системы координат ко второй имеют вид: $\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi + x_0, \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi + y_0, \end{cases}$ а во втором — $\begin{cases} x = x'\cos\varphi + y'\sin\varphi + x_0, \\ y = x'\sin\varphi - y'\cos\varphi + y_0. \end{cases}$ Полученные формулы можно объединить в одну:

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - \varepsilon y'\sin\varphi + x_0, \\ y = x'\sin\varphi + \varepsilon y'\cos\varphi + y_0, \end{cases} \tag{9.5}$$

где $\varepsilon = 1$, если ориентации базисов $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{i}'$, $\vec{j}'$ одинаковы, и $\varepsilon = -1$, если их ориентации различны. Если ориентации систем координат одинаковы и совпадают их начала, то говорят, что вторая система получена из первой поворотом на угол φ. В этом случае формулы перехода имеют вид $\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi. \end{cases}$

Помимо аффинных координат на плоскости, при решении ряда задач удобно рассматривать так называемые полярные системы координат. Прежде всего, введем понятие полярной системы координат. Будем предполагать, что плоскость ориентирована.

Определение 3. *Полярную систему координат на плоскости образуют точка O и единичный вектор $\vec{i}$ плоскости.*

Точка O называется *полюсом*, а ось, проходящая через O и сонаправленная с $\vec{i}$, — *полярной осью* такой системы координат. Каждой точке M плоскости, отличной от полюса O, поставим в соответствие два числа: $\rho = |OM|$ и $\varphi = \measuredangle\vec{i}\,\overrightarrow{OM}$. Таким образом, ρ — расстояние от точки M до полюса O, а φ — ориентированный угол между векторами $\vec{i}$ и $\overrightarrow{OM}$.

Определение 4. *Для точки M, отличной от полюса O полярной системы координат, под полярными координатами будем понимать числа ρ и φ, где $\rho = |OM|$ и $\varphi = \prec \vec{i}\,\overrightarrow{OM}$.*

Будем называть ρ *полярным радиусом*, а φ — *полярным углом точки M* (ρ; φ). Если M совпадает с полюсом O, то будем считать, что для нее $\rho = 0$, а полярный угол не определен. Полярный радиус любой точки неотрицателен. Так как полярный угол φ совпадает с углом между двумя векторами ориентированной плоскости, то $-\pi < \varphi \le \pi$. Итак, для полярных координат ρ и φ любой точки M выполненены условия

$$\rho \ge 0, \quad -\pi < \varphi \le \pi. \tag{9.6}$$

Каждой точке плоскости, отличной от полюса, однозначно соответствует единственная пара чисел $(\rho;\, \varphi)$, удовлетворяющих неравенствам (9.6), — ее полярные координаты. Любой паре чисел $(\rho;\, \varphi)$, удовлетворяющих этим условиям, соответствует единственная точка M, для которой они служат полярными координатами.

Пусть на плоскости задана полярная система координат $O,\ \vec{i}$. Свяжем с ней правую прямоугольную декартову систему $O,\ \vec{i},\ \vec{j}$ так, чтобы ее начало совпало с полюсом O, а ось абсцисс была сонаправлена с полярной осью (рис. 39). Такие системы координат будем называть согласованными. Даны полярные координаты точки M в системе $O,\ \vec{i}$: $(\rho;\, \varphi)$, $\rho \ne 0$. Найдем координаты точки M в согласованной прямоугольной декартовой системе координат $O,\ \vec{i},\ \vec{j}$. Так как прямоугольные декартовы координаты x и y точки M совпадают с координатами вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе $\vec{i},\ \vec{j}$, то

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi. \tag{9.7}$$

Если даны прямоугольные декартовы координаты x и y точки M, $x \ne 0$, $y \ne 0$, то из формул (9.7) следует, что в согласованной полярной системе координат полярные координаты точки M определяются из соотношений:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{9.8}$$

В ряде задач ограничения (9.6) неудобны. Поэтому наряду с обычными полярными координатами рассматривают также *обобщенные полярные координаты*. Выберем полярную систему координат. Пусть дана произвольная пара чисел $(\rho;\, \varphi)$, где $-\infty < \rho < +\infty$, $-\infty < \varphi < \infty$. Поставим в соответствие паре $(\rho;\, \varphi)$ точку M такую, что если $\rho = 0$, то M совпадает с полюсом O, а если $\rho > 0$, то M совпадает

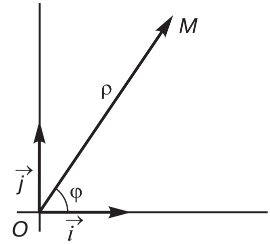


Рис. 39

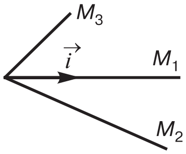


Рис. 40

с точкой, полярные координаты которой равны $(\rho;\ \varphi_0)$, где φ_0 удовлетворяет условиям $-\pi < \varphi_0 \le \pi$, $\varphi = \varphi_0 + 2\pi k$ (k — целое число). Если $\rho < 0$, то берется точка M', полярные координаты которой равны $(-\rho;\ \varphi_0)$, где $-\pi < \varphi_0 \le \pi$, $\varphi = \varphi_0 + 2\pi k$ (k — целое число), точка M совпадает с точкой, симметричной M' относительно полюса O. Числа $(\rho;\ \varphi)$ называются *обобщенными полярными координатами* точки M. С помощью введенного правила каждой паре чисел $(\rho;\ \varphi)$ ставится в соответствие единственная точка плоскости, но каждая точка имеет бесконечно много соответствующих ей обобщенных полярных координат $(\rho;\ \varphi)$. На рисунке 40 изображены точки, обобщенные полярные координаты которых заданы: $M_1(-3;\ \pi)$, $M_2\left(3;\dfrac{53\pi}{6}\right)$, $M_3\left(2;-\dfrac{7\pi}{4}\right)$.

§ 10. ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

В настоящем параграфе мы рассмотрим так называемые простейшие задачи аналитической геометрии, которые часто используются в вычислениях и при доказательстве различных утверждений. В дальнейшем, не оговаривая особо, будем предполагать, что на плоскости или в пространстве выбрана аффинная система координат $O,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2$ или $O,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$.

Рассмотрим первую простейшую задачу.

Задача 1. *Даны координаты точек* $A(x_1;\ y_1)$ *и* $B(x_2;\ y_2)$. *Найти координаты вектора* $\overrightarrow{AB}$ *в базисе* $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$.

Нам даны координаты точек A и B, поэтому можно записать координаты их радиус-векторов в базисе $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$: $\overrightarrow{OA}\{x_1;y_1\}$, $\overrightarrow{OB}\{x_2;y_2\}$. Представим вектор $\overrightarrow{AB}$ в виде $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ (рис. 41). Тогда его координаты α и β в базисе $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$ равны

$$\alpha = x_2 - x_1;\quad \beta = y_2 - y_1. \qquad (10.1)$$

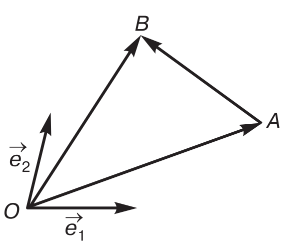


Рис. 41

Формулы (10.1) — искомые.

Аналогично, если в пространстве дана система координат $O,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$, известны координаты точек $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B(x_2;\ y_2;\ z_3)$, то координаты α, β и γ вектора $\overrightarrow{AB}$ в базисе $O,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ имеют вид

$$\alpha = x_2 - x_1; \quad \beta = y_2 - y_1, \quad \gamma = z_2 - z_1. \qquad (10.2)$$

Пример 1. *Доказать, что три точки* $A(2;\ 1;\ 8)$, $B(3;\ 2;\ 6)$ *и* $C(-2;\ -3;\ 16)$ *лежат на одной прямой.*

Решение. Точки A, B, и C принадлежат одной прямой в том и только в том случае, когда векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны. Определим по формулам (10.2) их координаты: $\overrightarrow{AB}\{1; 1; -2\}$, $\overrightarrow{AC}\{-4; -4; 8\}$. Координаты векторов пропорциональны: $\overrightarrow{AC} = -4\overrightarrow{AB}$. Точки лежат на одной прямой.

Пример 2. *Даны координаты вершин пирамиды*: $A(2;\ -1;\ 1)$, $B(3;\ 1;\ 1)$, $C(4;\ 0;\ -2)$, $D(1;\ 1;\ 4)$. *Найти угол между ребром* CD *и плоскостью основания* ABC, *если система координат прямоугольная декартова.*

Решение. Как известно из школьного курса геометрии, угол между прямой и плоскостью равен углу между прямой и ее проекцией на эту плоскость. Поэтому он дополняет до прямого угол между прямой и перпендикуляром к плоскости. Пусть $ABCD$ — данная пирамида (рис. 42). Рассмотрим вектор $\vec{n} = [\overrightarrow{CB}\overrightarrow{CA}]$. Так как векторное произведение перпендикулярно сомножителям, то вектор $\vec{n}$ перпендикулярен плоскости основания ABC пирамиды.

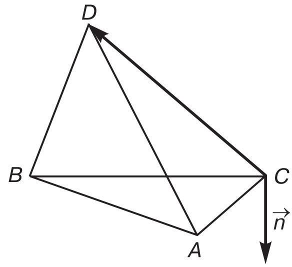


Рис. 42

Угол между прямой и плоскостью всегда острый или прямой. Поэтому искомый угол φ равен либо $\frac{\pi}{2} - \angle\vec{n}\overrightarrow{CD}$, либо $\angle\vec{n}\overrightarrow{CD} - \frac{\pi}{2}$ в зависимости от того, является угол $\angle\vec{n}\overrightarrow{CD}$ острым или тупым. Определим координаты векторов $\overrightarrow{CD}$ и $\vec{n}$. Воспользуемся формулами (10.2): $\overrightarrow{CD}\{-3; 1; 6\}$, $\overrightarrow{CB}\{-1; 1; 3\}$, $\overrightarrow{CA}\{-2; -1; 3\}$. Вычислим координаты векторного произведения, пользуясь соотношением (6.10): $\vec{n} = [\overrightarrow{CB}\overrightarrow{CA}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$. Координаты вектора $\vec{n}$ равны $\{6;\ -3;\ 3\}$. Найдем косинус угла $\angle\vec{n}\overline{CD}$:

$$\cos(\angle\vec{n}\overrightarrow{CD}) = \frac{-18 - 3 + 18}{\sqrt{46}\sqrt{54}} = -\frac{1}{2\sqrt{69}}.$$

Так как $\cos(\angle\vec{n}\overrightarrow{CD})<0$, то $\frac{\pi}{2}<\angle\vec{n}\overrightarrow{CD}<\pi$ (рис. 42). Поэтому искомый угол равен $\arccos\left(-\frac{1}{2\sqrt{69}}\right)-\frac{\pi}{2}$.

Рассмотрим три различные точки A, B и C одной прямой. Ясно, что условие принадлежности точек прямой равносильно условию коллинеарности векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$.

Определение 2. *Пусть A, B и C — три различные точки одной прямой. Под простым отношением упорядоченной тройки точек A, B и C будем понимать число λ, удовлетворяющее условию*

$$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}. \tag{10.3}$$

Простое отношение определено для любой упорядоченной тройки различных точек прямой. Это число будет нами обозначаться как (AB, C). Точки A и B будем называть *базисными*, а точку C — делящей.

Легко видеть, что $|(AB,C)|=\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{CB}|}$; $(AB, C) > 0$, если $\overrightarrow{AC}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CB}$, и $(AB, C) < 0$, если $\overrightarrow{AC}\uparrow\downarrow\overrightarrow{CB}$. Поэтому если точка C лежит между A и B, то при перемещении точки C от A к B простое отношение (AB, C) меняется от 0 до $+\infty$ (рис. 43). При этом $(AB, C) = 1$ в том и только в том случае, когда $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$, т. е. тогда и только тогда, когда C — середина отрезка AB.

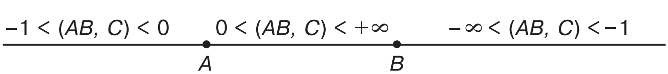


Рис. 43

Если точка B лежит между A и C, то $(AB, C) < 0$ и $|\overrightarrow{AC}|>|\overrightarrow{CB}|$, поэтому $|(AB,C)|>1$. При этом видно, что если точка C бесконечно удаляется от B, то модуль простого отношения $|(AB,C)|$ стремится к единице. Таким образом, в этом случае $-\infty < (AB, C) < -1$ (рис. 43).

Рассмотрим, наконец, случай, когда точка A лежит между C и B. Тогда $(AB,C)<0$ и $|\overrightarrow{AC}|<|\overrightarrow{CB}|$, поэтому $|(AB,C)|<1$. Ясно, что при бесконечном удалении точки C от точки A модуль $|(AB,C)|$ стремится к единице. Итак, в этом случае $-1 < (AB, C) < 0$ (рис. 43). Заметим, что на прямой AB не существует точки C, для которой $(AB, C) = -1$ (проверьте это утверждение самостоятельно).

Рассмотрим вторую простейшую задачу.

Задача 2. *Пусть даны число* λ, *отличное от* -1, *и координаты двух точек* A *и* B *плоскости* $A(x_0; y_0)$, $B(x_1; y_1)$. *Найти координаты такой точки* C *прямой* AB, *для которой* $(AB, C) = \lambda$.

Обозначим искомые координаты через x и y: $C\ (x; y)$. Тогда, согласно формулам (10.1), $\overrightarrow{AC}\{x - x_0; y - y_0\}$, $\overrightarrow{CB}\{x_1 - x; y_1 - y\}$. Из условия (10.3) получаем: $x - x_0 = \lambda(x_1 - x)$, $y - y_0 = \lambda(y_1 - y)$. Выразим отсюда x и y через данные нам координаты точек A и B и простое отношение λ:

$$x = \frac{x_0 + \lambda x_1}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_0 + \lambda y_1}{1 + \lambda}. \tag{10.4}$$

Формулы (10.4) — искомые. Как уже отмечалось, точка C является серединой отрезка AB в том и только в том случае, когда $(AB, C) = 1$. Из формулы (10.4) следует, что ее координаты равны

$$x = \frac{x_0 + x_1}{2}; \quad y = \frac{y_0 + y_1}{2}. \tag{10.5}$$

Соотношения (10.5) известны из школьного курса геометрии.

Аналогично, если в пространстве даны координаты точек $A(x_0; y_0; z_0)$, $B(x_1; y_1; z_1)$ и задано число λ, отличное от -1, то координаты точки C прямой AB, для которой $(AB, C) = \lambda$, вычисляются по формулам

$$x = \frac{x_0 + \lambda x_1}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_0 + \lambda y_1}{1 + \lambda}; \quad z = \frac{z_0 + \lambda z_1}{1 + \lambda}. \tag{10.6}$$

В случае пространства координаты середины отрезка AB равны

$$x = \frac{x_0 + x_1}{2}; \quad y = \frac{y_0 + y_1}{2}; \quad z = \frac{z_0 + z_1}{2}. \tag{10.7}$$

Пример 3. *Даны координаты вершин* A, B *и* C *параллелепипеда* $ABCDA'B'C'D'$, *а также точки* O *пересечения его диагоналей*: $A(1; 1; -3)$, $B(3; -2; 3)$, $C(1; 0; 1)$, $O(2; 3; 5)$. *Найти координаты центра симметрии грани* $AA'B'B$.

Решение. Пусть $ABCDA'B'C'D'$ — данный параллелепипед (рис. 44). Точка O — середина любой его диагонали, в том числе $A'C$. Обозначим через x_1, y_1, z_1 координаты вершины A'. Тогда из формулы (10.7) следует:

$$\frac{x_1 + 1}{2} = 2; \quad \frac{y_1}{2} = 3; \quad \frac{z_1 + 1}{2} = 5.$$

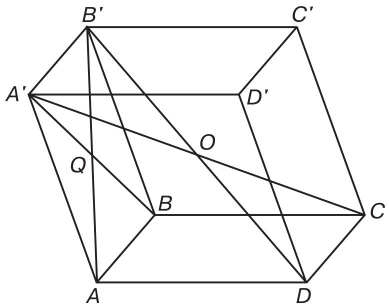


Рис. 44

Отсюда $x_1 = 3$, $y_1 = 6$, $z_1 = 9$. Требуется найти координаты центра симметрии Q параллелограмма $AA'B'B$. Точка Q является точкой пересечения диагоналей параллелограмма, т. е. серединой отрезка $A'B$. Воспользуемся еще раз формулой (10.7). Получим $Q(3; 2; 6)$.

Перейдем к решению третьей простейшей задачи.

Задача 3. *Пусть на плоскости в прямоугольной декартовой системе координат даны координаты точек A и B: $A(x_0; y_0)$, $B(x_1; y_1)$. Найти длину отрезка AB.*

Длина отрезка AB совпадает с модулем вектора $\overrightarrow{AB}$. Согласно формулам (10.1), координаты $\overrightarrow{AB}$ в прямоугольном декартовом базисе равны $(x_1 - x_1;\ y_2 - y_1)$. Воспользуемся соотношением (5.20), выражающим длину вектора через его координаты (§ 4):

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Аналогично, если в пространстве выбрана прямоугольная декартова система координат, то расстояние между точками $A(x_0; y_0; z_0)$ и $B(x_1; y_1; z_1)$ вычисляется по формуле

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

§ 11. УРАВНЕНИЯ ЛИНИЙ И ПОВЕРХНОСТЕЙ

Метод координат не только позволяет решать задачи, связанные с координатами точек, но и служит эффективным средством при изучении геометрических свойств множеств точек. Нам необходимо выяснить, каким способом, используя координаты точек, можно задать множества точек на плоскости или в пространстве. Для этого используются так называемые аналитические условия, определяющие множества точек. В дальнейшем, не оговаривая особо, будем предполагать, что на плоскости или в пространстве задана аффинная система координат.

Определение 1. *Под аналитическими условиями, определяющими множество точек плоскости, будем понимать уравнения,* *неравенства, систему или совокупность уравнений и неравенств с двумя неизвестными, которым удовлетворяют координаты точек множества и только координаты этих точек.*

Например, система неравенств

$$\begin{cases} x > 0, \\ y > 0 \end{cases} \tag{11.1}$$

определяет на координатной плоскости множество точек, принадлежащих первому координатному углу.

Ясно, что одно и то же множество может определяться различными аналитическими условиями. Множество точек, принадлежащих первому координатному углу, также описывается системой неравенств $\begin{cases} x^3 + y^2 x + x > 0, \\ y > 0. \end{cases}$ Действительно, $x^3 + y^2x + x = x(x^2 + y^2 + 1)$. Так как $x^2 + y^2 + 1 > 0$ для любых x и y, то данная система неравенств равносильна (11.1). В то же время, как следует из определения 1, одно аналитическое условие не может определять два различных множества. *Если два множества определяются одним и тем же аналитическим условием, то они совпадают.*

В аналитической геометрии большое внимание уделяется изучению геометрических свойств линий. В школьном курсе математики мы получили представление об этих множествах. Они рассматривались в основном как графики элементарных функций. Вообще понятие линии является сложным математическим понятием, и в настоящее время мы не будем заниматься его определением. В одной из заключительных частей курса геометрии мы рассмотрим определение и свойства широкого класса кривых линий, так называемых гладких кривых. Сейчас же нам достаточно считать, что кривая линия на плоскости определяется одним уравнением с двумя неизвестными:

$$F(x;y) = 0. \tag{11.2}$$

Точка $M(x;\ y)$ в том и только в том случае лежит на кривой, определяемой уравнением (11.2), когда ее координаты удовлетворяют этому уравнению, т. е. служат его решением.

Используя понятие уравнения кривой, нетрудно решить задачу о нахождении координат точек пересечения кривых. Пусть даны кривые линии γ_1 и γ_2, а $F_1(x,\ y) = 0$ и $F_2(x,\ y) = 0$ — их уравнения. Тогда точка $M(x;\ y)$ в том и только в том случае является точкой пересечения кривых γ_1 и γ_2, когда ее координаты удовлетворяют каждому из уравнений этих кривых, т. е. являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0. \end{cases} \tag{11.3}$$

Как известно, сумма слагаемых вида ax^ty^s, где a — число, не зависящее от x и y, а t и s — натуральные числа, называется *многочленом с двумя переменными*. Само слагаемое ax^ty^s носит название *одночлена*, а число $t + s$ называется его *степенью*. Наибольшее число из всех степеней одночленов, составляющих многочлен, носит название *степени многочлена*. Например, степень многочлена $3x^3y^2 + 2x^4y + xy^3 - x^2y^4$ равна 6.

Определение 2. *Кривая линия называется алгебраической, если левая часть ее уравнения представляет собой многочлен с двумя переменными. Степень многочлена носит название порядка кривой.*

Левая часть уравнения (11.2) кривой зависит от выбора системы координат. Пусть γ — алгебраическая линия, ее уравнение является многочленом степени n. Перейдем к другой аффинной системе координат. Выясним, будет ли ее уравнение в новой системе координат представлять собой многочлен той же степени.

Теорема 1. *Пусть в системе O, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ левая часть уравнения* (11.2) *кривой γ представляет собой многочлен степени n. Тогда в любой другой системе координат уравнение этой кривой также является многочленом степени n.*

Доказательство. Пусть в системе координат O, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ кривая γ задана уравнением $F(x;\ y) = 0$. Степень многочлена $F(x; y)$ равна n. Он представляет собой сумму одночленов вида ax^ty^s. Произвольно выберем вторую систему координат O', $\vec{e}\,'_1$, $\vec{e}\,'_2$, и пусть формулы перехода от первой системы ко второй имеют вид $\begin{cases} x = a_1x' + a_2y' + x_0, \\ y = b_1x' + b_2y' + y_0. \end{cases}$ Для нахождения уравнений кривой во второй системе координат следует в заданном уравнении кривой заменить x и y на их выражения через x' и y'. Если провести такую замену для одночлена, то получим $a(a_1x' + a_2y' + x_0)^t(b_1x' + b_2y' + y_0)^s$. Раскрыв скобки и приведя подобные члены, придем к многочлену степени $t + s$. Таким образом, после подстановки в левую часть уравнения кривой γ вместо x и y их выражений через x' и y' получим многочлен $F'(x'; y')$, степень которого не больше степени исходного многочлена.

Пусть степень $F'(x'; y')$ меньше n. Осуществим обратный переход от системы O', $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$ к системе O, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$. Получим исходный многочлен $F(x; y)$, степень которого равна n. При этом переходе степень многочлена увеличилась, чего не может быть. Теорема доказана.

В дальнейшем мы будем изучать свойства алгебраических кривых линий первого и второго порядков. Согласно определению, уравнения кривых первого порядка имеют вид $Ax + By + C = 0$, где A, B и C — произвольные числа, причем A и B не равны одновременно нулю ($A^2 + B^2 \neq 0$). Уравнение же кривой второго порядка представимо в виде $a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$, где a_{ij} (i, $j = 0$, 1, 2) — произвольные числа, и коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} также не равны одновременно нулю ($a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$).

Пример 1. *Даны координаты* x_0, y_0 *точки* M *и число* R. *Найти уравнение окружности с центром в точке* M *и радиуса* R *при условии, что система координат прямоугольная декартова.*

Решение. Пусть точка N $(x; y)$ лежит на окружности. Тогда расстояние от нее до центра M равно R: $|NM| = R$. В координатах это равенство имеет следующий вид: $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R$. Отсюда

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \tag{11.4}$$

Обратно, пусть координаты некоторой точки N $(x; y)$ удовлетворяют уравнению (11.4). Тогда $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R$, т. е. расстояние от точки N до центра M равно радиусу. Точка лежит на окружности. Таким образом, точка в том и только в том случае лежит на окружности, когда ее координаты удовлетворяют уравнению (11.4).

Ясно, что окружность — алгебраическая линия второго порядка.

Пример 2. *Пусть на плоскости даны точки* A *и* B. *Найти множество всех таких точек* M *плоскости, для которых* $|AM| : |MB| = \lambda$, *где* $\lambda \neq 1$.

Решение. Введем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы точка A была ее началом, а точка B лежала на положительной части оси абсцисс. Если a — длина отрезка AB, то можно записать координаты точек A и B: $A(0; 0)$, $B(a; 0)$. Пусть точка M $(x; y)$ принадлежит искомому множеству, заданному условием $|AM|:|MB| = \lambda$. Так как система координат прямоугольная декартова, то $|AM| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $|MB| = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$. Поэтому

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} = \lambda. \tag{11.5}$$

Отсюда

$$\sqrt{x^2+y^2} = \lambda\sqrt{(x-a)^2+y^2}; \tag{11.6}$$

$$x^2 + y^2 = \lambda^2 x^2 - 2\lambda^2 ax + \lambda^2 a^2 + \lambda^2 y^2; \tag{11.7}$$

$$(\lambda^2 - 1)x^2 - 2\lambda^2 ax + (\lambda^2 - 1)y^2 + \lambda^2 a^2 = 0. \tag{11.8}$$

Преобразуем полученное уравнение, выделив полный квадрат:

$$(\lambda^2-1)\left(x^2 - 2\frac{\lambda^2 a}{\lambda^2-1}x + \frac{\lambda^4 a^2}{(\lambda^2-1)^2}\right) + (\lambda^2-1)y^2 = \frac{\lambda^4 a^2}{\lambda^2-1} - \lambda^2 a^2; \tag{11.9}$$

$$\left(x - \frac{\lambda^2 a}{\lambda^2-1}\right)^2 + y^2 = \frac{\lambda^2 a^2}{(\lambda^2-1)^2}. \tag{11.10}$$

Полученное уравнение является уравнением окружности с центром в точке $Q\left(\frac{\lambda^2 a}{\lambda^2-1}; 0\right)$ и радиусом $\frac{\lambda a}{|\lambda^2-1|}$. Таким образом, если точка принадлежит указанному множеству, то она лежит на окружности (11.10). Покажем обратное. Пусть M — произвольная точка, координаты которой удовлетворяют уравнению (11.10). Но тогда они удовлетворяют соотношениям (11.9)—(11.7), равносильным (11.10). Так как $\lambda > 0$, то, извлекая из обеих частей равенства (11.7) квадратные корни, получаем соотношения (11.6) и (11.5). Поэтому точка M принадлежит данному множеству. Мы доказали, что точка в том и только в том случае принадлежит данному множеству, когда ее координаты удовлетворяют уравнению окружности (11.10). Таким образом, множество представляет собой окружность.

Пример 3. *Даны точки A и B. Найти множество всех точек плоскости, для которых разность квадратов расстояний до точек A и B равна постоянному числу k.*

Решение. Пусть точка M принадлежит данному множеству, тогда

$$|AM|^2 - |BM|^2 = k. \tag{11.11}$$

Выберем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы ее начало совпадало с точкой A, а точка B принадлежала положительной части оси абсцисс. В этой системе запишем координаты данных точек: $A(0; 0)$, $B(a; 0)$, где a — длина отрезка AB. Если точка M имеет координаты $(x; y)$, то из условия (11.11) получим $\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 - \left(\sqrt{(x-a)^2+y^2}\right)^2 = k.$ После элементарных преобразований имеем

$$x = \frac{k+a^2}{2a}. \tag{11.12}$$

Обратно, возьмем произвольную точку $M(x; y)$, координаты которой удовлетворяют уравнению (11.12). Тогда $2ax - a^2 = k$, или $x^2 + y^2 - (x^2 - 2ax + a^2 + y^2) = k.$ Отсюда получим $\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 - \left(\sqrt{(x-a)^2+y^2}\right)^2 = k.$ Таким образом, точка M удовлетворяет условию (11.11), т. е. принадлежит рассматриваемому множеству. Мы показали, что (11.12) служит уравнением данного множества. Из школьного курса математики известно, что множество, определенное уравнением $x = \text{const}$, — прямая, перпендикулярная оси абсцисс. Поэтому данное множество представляет собой прямую, перпендикулярную AB.

Пример 4. *Даны точки A и B. Найти множество всех точек плоскости, для которых сумма квадратов расстояний до точек A и B равна постоянному числу k.*

Решение. Введем прямоугольную декартову систему координат таким образом, чтобы ее начало совпадало с серединой отрезка AB, а ось абсцисс содержала этот отрезок. Тогда, если $2a$ — длина отрезка AB, то в этой системе его концы имеют вид: $A(-a; 0)$ и $B(a; 0)$. Точка $M(x; y)$ в том и только в том случае принадлежит данному множеству, когда $\left(\sqrt{(x-a)^2+y^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x+a)^2+y^2}\right)^2 = k.$ Отсюда после преобразований получим $2x^2 + 2y^2 = k^2 - 2a^2$, или

$$x^2 + y^2 = \frac{k^2-2a^2}{2}. \tag{11.13}$$

Легко проверить обратное: если координаты некоторой точки удовлетворяют уравнению (11.3), то точка принадлежит данному множеству. Это утверждение проверьте самостоятельно. Таким образом, найденное уравнение (11.3) представляет собой уравнение данного множества. Отсюда следует, что данное множество представляет собой окружность с центром в середине отрезка AB и радиуса $\sqrt{\dfrac{k^2-2a^2}{2}}$.

Уравнения вида $F(x;\, y) = 0$ в дальнейшем будем называть *общими уравнениями* кривых на плоскости. Помимо общих уравнений, в ряде задач удобнее использовать так называемые параметрические уравнения кривых.

Определение 3. *Соотношения*

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \tag{11.14}$$

где t принадлежит числовому промежутку I, называются параметрическими уравнениями линии γ, если для любой точки этой кривой существует такое число t из промежутка I, что координаты x и y этой точки вычисляются по формулам (11.14) *при подстановке в них t. И наоборот, для любого t из промежутка I числа x и y, полученные из соотношений* (11.14), *служат координатами некоторой точки кривой.*

Пример 5. *Даны параметрические уравнения кривой*:

$$\begin{cases} x = 2t+1, \\ y = t^2-6, \end{cases} \quad t \in (-\infty;\, +\infty).$$

Найти ее общее уравнение.

Решение. Выразим из первого уравнения t через x: $t = \dfrac{x-1}{2}$, и подставим это выражение во второе соотношение: $y = \left(\dfrac{x-1}{2}\right)^2 - 6$. После преобразований получим искомое уравнение: $x^2 - 4y - 4x - 20 = 0$.

Пример 6. *Дано уравнение кривой*: $2x - y + 3 = 0$. *Найти ее параметрические уравнения.*

Решение. Выразим y через x: $y = 2x + 3$. Примем в качестве параметра абсциссу точки: $x = t$. Получим

$$\begin{cases} x = t, \\ y = 2t+3, \end{cases} \quad t \in (-\infty;\, +\infty).$$

Как известно (§ 9), на плоскости можно ввести полярную систему координат. Так же как и в случае аффинной системы, определяется уравнение кривой в полярных координатах. *Точка $M(\rho; \varphi)$ тогда и только тогда принадлежит кривой γ, когда ее полярные координаты удовлетворяют уравнению $F(\rho; \varphi) = 0$.*

Например, уравнение $\rho = \text{const}$ служит уравнением окружности с центром в начале системы координат.

Рассмотрим теперь понятия уравнений поверхностей и линий в пространстве.

Определение 4. *Под аналитическими условиями, определяющими множество точек пространства, будем понимать уравнение, неравенство, систему или совокупность уравнений и неравенств, решения которых представляют собой координаты тех и только тех точек пространства, которые принадлежат данному множеству.*

Например, рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2 = 0, \\ y + 1 = 0. \end{cases}$$

Ее решениями являются такие числа x, y и z, для которых $x = 2$, $y = 1$, а z — произвольное число. Поэтому точки, координаты которых служат решением системы, лежат на прямой, параллельной оси аппликат. Ясно, что данная система представляет собой аналитические условия, определяющие эту прямую.

Очевидно, что одно и то же множество может описываться различными аналитическими условиями. Но из определения 4 вытекает, что если два множества определяются одними и теми же аналитическими условиями, то они совпадают.

В школьном курсе геометрии мы получили представление о поверхности в пространстве. Строгое определение гладкой поверхности будет дано в заключительных разделах курса геометрии. Сейчас же нам достаточно считать, что поверхность определяется одним уравнением с тремя неизвестными:

$$F(x; y; z) = 0. \tag{11.15}$$

Пример 7. *Найти уравнение сферы с центром в точке $Q(x_0; y_0; z_0)$ и радиуса R, при условии что в пространстве выбрана прямоугольная декартова система координат.*

Решение. Пусть точка $M(x;\ y;\ z)$ принадлежит сфере. Тогда $|QM| = R.$ Так как в прямоугольной декартовой системе координат

$$|QM| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2},$$

то

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = R \tag{11.16}$$

или

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2. \tag{11.17}$$

Таким образом, координаты точки, принадлежащей сфере, удовлетворяют уравнению (11.17).

Обратно, пусть координаты точки M являются решением уравнения (11.17). Тогда они удовлетворяют уравнению (11.16), т. е. $|QM| = R.$ Точка M лежит на сфере. Таким образом, уравнение (11.17) служит уравнением сферы.

Если левая часть уравнения (11.15) — многочлен с тремя переменными, то поверхность называется алгебраической. Степень многочлена называется порядком алгебраической поверхности. Например, порядок поверхности, уравнение которой имеет вид $x^3yz - x^2y^2 + 2x^4y^2z^2 - 4x = 0,$ равен 8, так как одночлен $2x^4y^2z^2$ обладает максимальной степенью $(4 + 2 + 2 = 8)$ среди всех одночленов, образующих уравнения поверхности. Легко видеть, что сфера — алгебраическая поверхность второго порядка. Так же как и в случае плоскости, доказывается, что при переходе к другой аффинной системе координат пространства порядок алгебраической поверхности не меняется.

Рассмотрим способы задания линии в пространстве. Если в пространстве даны две поверхности и если они пересекаются, то обычно множество точек пересечения представляет собой линию пространства. Пусть уравнения поверхностей имеют вид $F_1(x;\ y;\ z) = 0$ и $F_2(x;\ y;\ z) = 0$. Точка $M(x;\ y;\ z)$ тогда и только тогда принадлежит кривой пересечения поверхностей, когда ее координаты удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} F_1(x;y;z) = 0, \\ F_2(x;y;z) = 0. \end{cases} \tag{11.18}$$

Система (11.18) представляет собой аналитические условия, определяющие кривую. Они носят название *общих уравнений кривой*.

Линию в пространстве можно задать другим способом. Пусть даны функции $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$. Будем предполагать, что аргумент t принадлежит некоторому числовому промежутку I. Множество точек пространства, координаты которых равны значениям этих функций, обычно представляет собой кривую линию. Будем считать, что система

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \tag{11.19}$$

где t принадлежит промежутку I, представляет собой *параметрические уравнения линии* γ, если для любой точки этой линии существует такое число t из промежутка I, что координаты точки равны значениям функций (11.19) при этом t. И наоборот, если x, y и z равны значениям функций (11.19) при некотором t из I, то они служат координатами точки кривой.

§ 12. ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВ КООРДИНАТ ТОЧЕК К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Для того чтобы в решении задачи элементарной геометрии можно было использовать метод координат, следует, прежде всего, наиболее удобным образом выбрать систему координат. Затем найти соотношения, которым подчиняются координаты данных и искомых точек, определить условия, наложенные на них, которые приводят к решению задачи, а затем проверить их. Выше, в § 8, мы определили два класса задач — *аффинные и метрические*. При решении аффинных задач обычно используются формулы для определения координат вектора по координатам его концов и точки, делящей отрезок в данном отношении. При этом чаще всего используется аффинная система координат. При решении же метрических задач обычно выбирается прямоугольная декартова система координат и, помимо указанных выше формул, применяются соотношения для определения длин отрезков.

Рассмотрим примеры решения аффинных задач. Прежде всего докажем утверждение, которое будем в дальнейшем часто использовать.

Пример 1 (лемма о трапеции). *Доказать, что четырехугольник тогда и только тогда является трапецией, когда точки*

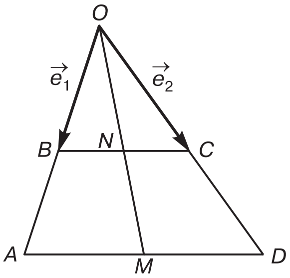


Рис. 45

пересечения продолжений двух его противоположных сторон и середины двух других сторон лежат на одной прямой.

Решение. *Необходимость.* Пусть $ABCD$ — трапеция, O — точка пересечения продолжений боковых сторон AB и CD, M и N — середины оснований AD и BC (рис. 45). Требуется доказать, что точки O, M и N лежат на одной прямой.

Выберем аффинную систему координат O, $\vec{e}_1=\overrightarrow{OB}$, $\vec{e}_2=\overrightarrow{OC}$. Найдем координаты точек M и N и покажем, что векторы $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{OM}$ коллинеарны. Найдем координаты точек O, B и C: $O(0;\ 0)$, $B(1;\ 0)$, $C(0;\ 1)$. Точки A и D лежат на координатных осях, поэтому имеют следующий вид: $A(\lambda;\ 0)$, $D(0;\ \mu)$. Из формул, устанавливающих координаты векторов по координатам его концов (задача 1, § 10), следует, что $\overrightarrow{BC}\{-1;1\}$, $\overrightarrow{AD}\{-\lambda;\mu\}$. Так как четырехугольник $ABCD$ — трапеция, то $\overrightarrow{BC}\parallel\overrightarrow{AD}$. Воспользуемся условием коллинеарности векторов в координатах (§ 3): $\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -\lambda & \mu\end{vmatrix}=0$. Отсюда следует, что $\mu=\lambda$. Точки M и N — середины отрезков AD и BC, найдем их координаты: $M\left(\frac{\lambda}{2};\frac{\lambda}{2}\right)$, $N\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. Таким образом, $\overrightarrow{OM}\left\{\frac{\lambda}{2};\frac{\lambda}{2}\right\}$, $\overrightarrow{ON}\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$. Еще раз применив условие коллинеарности векторов в координатах, получим $\overrightarrow{ON}\parallel\overrightarrow{OM}$. Точки O, N и M лежат на одной прямой.

Достаточность. Пусть $ABCD$ — четырехугольник, у которого точка O пересечения сторон AB и CD, середина M стороны AD и середина N стороны BC лежат на одной прямой. Требуется доказать, что $ABCD$ — трапеция. Введем систему координат O, $\vec{e}_1=\overrightarrow{OB}$, $\vec{e}_2=\overrightarrow{OC}$. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ и покажем, что они коллинеарны. Запишем в выбранной системе координаты точек: $O(0;\ 0)$, $B(1;\ 0)$, $C(0;\ 1)$, $A(\lambda;\ 0)$, $D(0;\ \mu)$, $N\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $M\left(\frac{\lambda}{2};\frac{\mu}{2}\right)$. Векторы $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{OM}$ имеют координаты $\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$ и $\left\{\frac{\lambda}{2};\frac{\mu}{2}\right\}$.

Так как по условию они коллинеарны, то $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\lambda}{2} & \frac{\mu}{2} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$. Отсюда $\lambda = \mu$, координаты точек A и D равны $(\lambda;\ 0)$ и $(0;\ \lambda)$. Поэтому $\overrightarrow{BC}\{-1; 1\}$, $\overrightarrow{AD}\{-\lambda; \lambda\}$. Легко видеть, что векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ коллинеарны. Четырехугольник $ABCD$ — трапеция.

Аналогично доказывается следующее утверждение: *четырехугольник тогда и только тогда является трапецией, когда точка пересечения его диагоналей и середины двух противоположных сторон лежат на одной прямой*. Проверьте это утверждение самостоятельно.

Пример 2. *Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точки M и P — соответственно середины ребер AA_1 и AD. Найти, в каком отношении плоскость BB_1P делит отрезок MC_1.*

Решение. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — данный параллелепипед (рис. 46). Введем систему координат так, чтобы вершина B была ее началом, а векторы $\vec{e}_1 = \overrightarrow{BA}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{BC}$ и $\vec{e}_3 = \overrightarrow{BB_1}$ совпадали с базисными. Пусть Q — точка пересечения прямой MC_1 и плоскости BB_1P. Выразим координаты Q через искомое отношение $\lambda = (MC_1, Q)$, а затем найдем λ из условия компланарности векторов $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{BQ}$ и $\overrightarrow{BN}$.

В силу выбора системы координат вершины параллелепипеда имеют вид: $B(0; 0; 0)$, $A(1; 0; 0)$, $D(1; 1; 0)$, $C(0; 1; 0)$, $B_1(0; 0; 1)$, $A_1(1;\ 0;\ 1)$, $D_1(1;\ 1;\ 1)$, $C_1(0;\ 1;\ 1)$. Отсюда можно найти координаты середин ребер M и P: $M\left(1; 0; \frac{1}{2}\right)$, $P\left(1; \frac{1}{2}; 0\right)$. Из формул для вычисления координат точки, делящей отрезок в данном отношении (§10), вытекает, что координаты точки Q равны $\left(\frac{1}{1+\lambda}; \frac{\lambda}{1+\lambda}; \frac{1+2\lambda}{2(1+\lambda)}\right)$. Так как вершина B служит началом системы координат, то $\overrightarrow{BB_1}\{0; 0; 1\}$, $\overrightarrow{BP}\left\{1; \frac{1}{2}; 0\right\}$, $\overrightarrow{BQ}\left\{\frac{1}{1+\lambda}; \frac{\lambda}{1+\lambda}; \frac{1+2\lambda}{2(1+\lambda)}\right\}$. Точ-

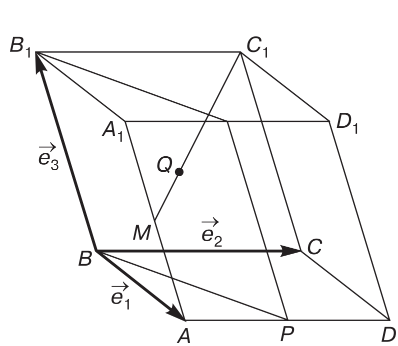


Рис. 46

ка Q тогда и только тогда принадлежит плоскости BB_1P, когда эти векторы компланарны. Из условия компланарности векторов в координатах следует, что

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{1+\lambda} & \frac{\lambda}{1+\lambda} & \frac{1+2\lambda}{2(1+\lambda)} \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель и решая полученное уравнение, найдем $\lambda = \frac{1}{2}$.

Рассмотрим приложения координатного метода к решению метрических задач.

Пример 3. *Медиана и биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника образуют угол, косинус которого равен k. Найти тангенсы острых углов треугольника.*

Решение. Пусть ABC — данный треугольник, AL и AM — биссектриса и медиана, проведенные из вершины прямого угла A (рис. 47). Обозначим длины катетов через a и b. Так как тангенсы искомых углов равны $\operatorname{tg}\angle B = \frac{a}{b}$, $\operatorname{tg}\angle C = \frac{b}{a}$, то для решения необходимо найти отношение катетов $\frac{a}{b}$. Введем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы вершина A была ее началом, а вершины острых углов B и C лежали на осях координат. Найдем координаты вершин в этой системе: $A(0;\ 0)$, $B(0;\ b)$, $C(a;\ 0)$, середина M отрезка AB имеет координаты $\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right)$. Координаты вектора $\overrightarrow{AM}$ совпадают с координатами точки M: $\overrightarrow{AM}\left\{\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right\}$. Вектор $\overrightarrow{AL}$, как легко видеть, коллинеарен вектору

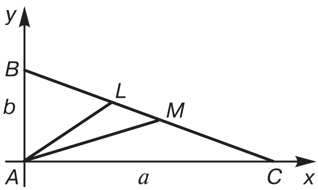


Рис. 47

$\vec{l}\{1; 1\}$. По условию, нам дан косинус угла между векторами $\overrightarrow{AM}$ и $\vec{l}$. Так как нам известны координаты этих векторов, то, используя формулу для вычисления косинуса угла с помощью координат векторов, сонаправленных со сторонами угла (§ 4), получим

$$k=\frac{\frac{a}{2}+\frac{b}{2}}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}}}=\frac{a+b}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Отсюда $\sqrt{2}k\sqrt{a^2+b^2}=a+b$ Возведем обе части этого равенства в квадрат: $2k^2(a^2+b^2)=a^2+2ab+b^2$. Разделим обе части этого равенства на b^2 и обозначим $\frac{a}{b}$ через t. После преобразования получим квадратное уравнение относительно t: $(2k^2-1)t^2-2t+(2k^2-1)=0$. Найдем его корни: $t_{1,2}=\frac{1\pm 2k\sqrt{1-k^2}}{2k^2-1}$. Из теоремы Виета вытекает $t_1t_2=1$. Таким образом,

$$\operatorname{tg}\measuredangle B=\frac{a}{b}=\frac{1+2k\sqrt{1-k^2}}{2k^2-1},\ \operatorname{tg}\measuredangle C=\frac{b}{a}=\frac{1-2k\sqrt{1-k^2}}{2k^2-1}.$$

Пример 4. *Дан правильный тетраэдр $ABCD$. Найти угол между гранью ABC и плоскостью CMN, где M и N — середины ребер AD и BD.*

Решение. При решении этой задачи мы используем свойства векторного произведения векторов. Следует отметить, что при этом мы выходим за рамки материала, рассматриваемого в школьном курсе геометрии. Основная идея решения данной задачи состоит в том, что угол между плоскостями равен углу между прямыми, перпендикулярными этим плоскостям. Поэтому для решения задачи достаточно найти векторы $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$, перпендикулярные плоскостям ABC и CMN, а затем найти острый угол между прямыми, параллельными этим векторам. Для нахождения же векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ мы используем векторное произведение векторов. Выберем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы ее начало находилось в центре O правильного треугольника ABC — основания тетраэдра. Ось абсцисс при этом будет проходить через вершину A и пересекать сторону BC в ее середине P, ось ординат будет сонаправлена с вектором $\overrightarrow{BC}$, а ось аппликат — проходить через вершину D (рис. 48). Обозначим длину ребра тетраэдра через a. Из свойств прямоугольного треугольника ACP следует, что $|AP|=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Так как точка O делит медиану AP в отношении $|AO|:|OP| = 2:1$, то $|AO| = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $|OP| = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. Треугольник AOD — прямоугольный, из теоремы Пифагора следует, что $|DO| = \sqrt{|DA|^2 - |OA|^2} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}a$. Таким образом, мы нашли координаты вершин тетраэдра: $A\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}; 0; 0\right)$, $C\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{6}; \dfrac{a}{2}; 0\right)$, $B\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{6}; -\dfrac{a}{2}; 0\right)$, $D\left(0; 0; \dfrac{a\sqrt{6}}{3}\right)$. Отсюда найдем координаты середин M и N ребер AD и BD: $M\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6}; 0; \dfrac{a\sqrt{6}}{6}\right)$, $N\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{12}; -\dfrac{a}{4}; \dfrac{a\sqrt{6}}{6}\right)$. Определим координаты векторов, перпендикулярных плоскостям ABC и CMN. Так как ABC — координатная плоскость $O\vec{i}\vec{j}$, то ей перпендикулярен вектор $\vec{k}\{0; 0; 1\}$. Найдем координаты вектора $\vec{n} = [\overrightarrow{CN}\overrightarrow{CM}]$, который, в свою очередь, перпендикулярен плоскости CMN. Так как $\overrightarrow{CM}\left\{\dfrac{a\sqrt{3}}{3}; -\dfrac{a}{2}; \dfrac{a\sqrt{6}}{6}\right\}$, $\overrightarrow{CN}\left\{\dfrac{a\sqrt{3}}{12}; -\dfrac{3a}{4}; \dfrac{a\sqrt{6}}{6}\right\}$, то

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{a\sqrt{3}}{12} & -\dfrac{3a}{4} & \dfrac{a\sqrt{6}}{6} \\ \dfrac{a\sqrt{3}}{3} & -\dfrac{a}{2} & \dfrac{a\sqrt{6}}{6} \end{vmatrix} = -\frac{a^2\sqrt{6}}{24}\vec{i} + \frac{a^2\sqrt{18}}{24}\vec{j} + \frac{a^2 5\sqrt{3}}{24}\vec{k}.$$

Для вычисления искомого угла φ удобнее использовать не вектор $\vec{n}$, а вектор $\vec{m}\{-\sqrt{2}; \sqrt{6}; 5\}$, коллинеарный $\vec{n}$. Таким образом,

$$\cos\varphi = \frac{\vec{m}\vec{k}}{|\vec{m}||\vec{k}|} = \frac{5}{\sqrt{2+6+1}} = \frac{5}{\sqrt{33}},$$

$$\varphi = \arccos\frac{5}{\sqrt{33}}.$$

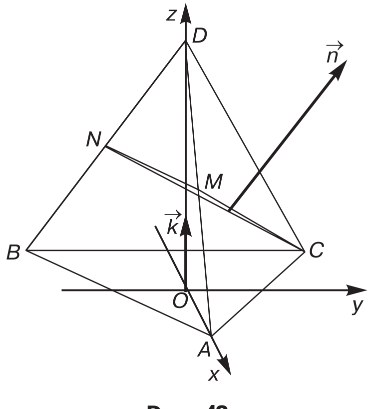


Рис. 48

Глава III

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЛИНИИ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ НА ПЛОСКОСТИ

В § 11 мы определили понятие алгебраической линии на плоскости произвольного порядка. Согласно приведенным определениям, под алгебраической кривой первого порядка понимается линия, уравнение которой в некоторой аффинной системе координат имеет вид $Ax + By + C = 0$, где коэффициенты A и B не равны нулю одновременно ($A^2 + B^2 \neq 0$). Под алгебраической же кривой второго порядка понимается линия, уравнение которой в некоторой аффинной системе координат имеет вид $a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$, где a_{ij} ($i, j = 0, 1, 2$) — произвольные числа и коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} также не равны одновременно нулю ($a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$). Настоящая глава посвящена изучению свойств этих кривых.

§ 13. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ В АФФИННОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Будем предполагать, что на плоскости выбрана аффинная система координат. Рассмотрим произвольную прямую плоскости. *Под ее направляющим вектором будем понимать любой ненулевой вектор, который ей параллелен.* Ясно, что любая прямая полностью определена, если даны координаты какой-либо ее точки и направляющего вектора. Через эту точку проходит единственная прямая, параллельная данному ненулевому вектору.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. *Даны координаты точки $M_0(x_0;\ y_0)$ и ненулевого вектора $\vec{p}\{\alpha; \beta\}$. Найти уравнение прямой, которая проходит через M и для которой вектор $\vec{p}$ — направляющий.*

Решение. Рассмотрим произвольную точку $M(x;\ y)$, принадлежавшую данной прямой (рис. 49). Тогда $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{p}$. Вектор $\overrightarrow{M_0M}$ имеет следующие координаты: $\{x - x_0; y - y_0\}$. Воспользуемся условием коллинеарности векторов в координатах (§ 3):

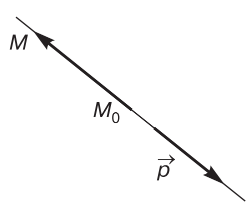


Рис. 49

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0. \qquad (13.1)$$

Соотношение (13.1) можно рассматривать как уравнение с неизвестными x и y. Таким образом, если точка M лежит на прямой, то ее координаты служат решением уравнения (13.1). Обратно, пусть координаты некоторой точки $N(x; y)$ удовлетворяют уравнению (13.1). Так как координаты вектора $\overrightarrow{M_0N}$ равны $\{x-x_0; y-y_0\}$, то из соотношений (13.1) следует, что $\overrightarrow{M_0N} \parallel \vec{p}$. Отсюда получим, что точка N лежит на прямой, проходящей через точку M_0 и параллельной вектору $\vec{p}$. Мы показали, что точка лежит на данной прямой в том и только в том случае, когда ее координаты удовлетворяют уравнению (13.1).

Как известно, через две различные точки проходит единственная прямая. В связи с этим рассмотрим следующую задачу.

Задача 2. *Даны координаты двух различных точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Требуется определить уравнение прямой AB.*

Решение. Решение этой задачи легко сводится к решению предыдущей. Так как точки A и B различны, то $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$. Поэтому $\overrightarrow{AB}$ можно принять в качестве направляющего вектора искомой прямой. Так как $\overrightarrow{AB}\{x_2-x_1; y_2-y_1\}$, то, воспользовавшись соотношением (13.1), получим искомое уравнение: $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix} = 0.$

В § 11 было дано определение параметрических уравнений линий на плоскости. Выведем параметрические уравнения прямой. Пусть прямая l задана точкой $M(x_0; y_0)$ и направляющим вектором $\vec{p}\{\alpha; \beta\}$. Предположим, что $M(x; y)$ — произвольная точка прямой. Тогда $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{p}$. Из теоремы о коллинеарных векторах (§ 2) следует, что существует такое число t, для которого $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{p}$. Так как координаты вектора $\overrightarrow{M_0M}$ равны $\{x-x_0; y-y_0\}$, то

$$\begin{cases} x-x_0 = \alpha t, \\ y-y_0 = \beta t, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t. \end{cases} \qquad (13.2)$$

Обратно, пусть дана точка $N(x; y)$ и пусть существует такое число t, при котором координаты x и y удовлетворяют соотношениям (13.2). Тогда $x-x_0 = \alpha t$, $y-y_0 = \beta t$. Так как $\{x-x_0; y-y_0\}$ — координаты вектора $\overrightarrow{M_0N}$, $\{\alpha; \beta\}$ — координаты вектора $\vec{p}$, то полученное соотношение равносильно векторному равенству $\overrightarrow{M_0N} = t\vec{p}$. Поэтому $\overrightarrow{M_0N} \parallel \vec{p}$ и точка N лежит на прямой l. Таким образом, точка лежит на прямой тогда и только тогда, когда существует такое число t, что ее координаты вычисляются по формулам (13.2), которые и представляют собой искомые параметрические уравнения.

Ясно, что параметрические уравнения прямой можно записать в виде, отличном от (13.2). Например, если в этих соотношениях заменить t на любую монотонную функцию, зависящую от t и принимающую все действительные значения, то опять получим параметрические уравнения той же прямой. Условимся в дальнейшем под параметрическими уравнениями прямой понимать только уравнения вида (13.2).

Уравнение (13.1) не всегда удобно в использовании. Например, для того чтобы проверить, лежит ли точка на прямой, следует подставить ее координаты в это уравнение, а затем раскрыть определитель, стоящий в левой части. Поэтому раскроем определитель и преобразуем уравнение (13.1) к виду

$$\beta x - \alpha y + \alpha y_0 - \beta x_0 = 0. \qquad (13.3)$$

Теперь для проверки достаточно подставить координаты точки в левую часть этого уравнения. Уравнение (13.3) также позволяет нам сделать важное заключение. Числа α и β как координаты ненулевого вектора $\vec{p}$ не равны нулю одновременно, поэтому уравнение (13.3) представляет собой линейное уравнение. Следовательно, *прямая линия является алгебраической линией первого порядка* (§ 11). Возникает следующий вопрос: всегда ли алгебраическая линия первого порядка является прямой линией? Ответ на него дает следующая теорема.

Теорема 1. *Линия на плоскости тогда и только тогда является алгебраической линией первого порядка, когда она представляет собой прямую линию.*

Доказательство. Необходимость этого утверждения почти очевидна. Любая прямая на плоскости определена некоторой точкой и направляющим вектором. Поэтому ее уравнение представимо в виде (13.3), т. е. в виде

$$Ax + By + C = 0, \qquad (13.4)$$

где $A = \beta$, $B = -\alpha$, $C = \alpha y_0 - \beta x_0$. Так как α и β — координаты направляющего вектора, который по определению отличен от нуля, то коэффициенты при неизвестных в этом уравнении удовлетворяют неравенству

$$A^2 + B^2 \neq 0. \tag{13.5}$$

Необходимость доказана.

Проверим достаточность утверждения теоремы. Пусть на плоскости дана некоторая линия γ, уравнение которой имеет вид $Ax + By + C = 0$, где $A^2 + B^2 \neq 0$. Покажем, что это уравнение имеет, по крайней мере, одно решение. Пусть $A \neq 0$. Рассмотрим точку M_0, координаты которой равны $\left(-\frac{C}{A}; 0\right)$. Легко видеть, что $A\left(-\frac{C}{A}\right) + B \cdot 0 + C = 0$, т. е. M_0 принадлежит γ. Если $A = 0$, то в силу неравенства (13.5) $B \neq 0$. В этом случае следует рассмотреть точку N_0 с координатами $\left(0; -\frac{C}{B}\right)$. В дальнейшем рассуждение будем проводить при условии $A \neq 0$. Для случая $A = 0$ доказательство приводится аналогично. Проведем через точку $M_0\left(-\frac{C}{A}; 0\right)$ прямую l, направляющий вектор $\vec{p}$ которой имеет координаты $\{-B; A\}$. Так как $A \neq 0$, то $\vec{p} \neq \vec{0}$, поэтому вектор $\vec{p}$ может служить в качестве направляющего вектора прямой. Из формулы (13.1) следует, что уравнение прямой l можно представить в виде $\begin{vmatrix} x + \frac{C}{A} & y \\ -B & A \end{vmatrix} = 0$. Отсюда $A\left(x + \frac{C}{A}\right) + By = 0$, или $Ax + By + C = 0$. Таким образом, кривая γ и прямая l имеют одно и то же уравнение. Поэтому они совпадают. Теорема доказана полностью.

Уравнение (13.4) называют *общим уравнением прямой на плоскости*.

В дальнейшем мы часто будем использовать следующую лемму.

Лемма. *Пусть даны прямая, общее уравнение которой имеет вид* $Ax + By + C = 0$, и вектор $\vec{p}\{\alpha; \beta\}$. *Тогда вектор в том и только в том случае параллелен прямой, когда*

$$A\alpha + B\beta = 0. \tag{13.6}$$

Доказательство. Пусть вектор $\vec{p}\{\alpha; \beta\}$ параллелен прямой. Тогда на ней существуют точки $M(x_1; y_1)$ и $N(x_2; y_2)$ такие, что $\vec{p} = \overrightarrow{MN}$. Координаты этих точек удовлетворяют уравнению прямой, поэтому $Ax_2 + By_2 + C = 0$, $Ax_1 + By_1 + C = 0$. Вычтем из первого равенства второе: $A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = 0$. Так как $\vec{p} = \overrightarrow{MN}$, то $x_2 - x_1 = \alpha$, $y_2 - y_1 = \beta$. Равенство (13.6) доказано.

Обратно, пусть координаты вектора $\vec{p}$ удовлетворяют соотношению (13.6). Выберем произвольную точку $M(x_1; y_1)$ на прямой и отложим от нее вектор $\vec{p}$: $\overrightarrow{MN} = \vec{p}$. Пусть координаты точки N равны $(x_2; y_2)$, тогда $x_2 = x_1 + \alpha$, $y_2 = y_1 + \beta$. Ясно, что вектор $\vec{p}$ в том и только в том случае параллелен прямой, когда ей принадлежит точка N. Подставим ее координаты в левую часть уравнения прямой: $Ax_2 + By_2 + C = A(x_1 + \alpha) + B(y_1 + \beta) + C = Ax_1 + By_1 + A\alpha + B\beta$. Но $Ax_1 + By_1 + C = 0$ так как точка M принадлежит прямой, а $A\alpha + B\beta = 0$ в силу условия (13.6). Поэтому N лежит на прямой, а вектор $\vec{p}$ ей параллелен. Лемма доказана.

Следствие. *Если уравнение прямой l имеет вид $Ax + By + C = 0$, то векторы $\vec{p}\{B; -A\}$ и $\vec{q}\{-B; A\}$ параллельны прямой.*

Действительно, координаты векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ удовлетворяют соотношению (13.6).

Пример 1. *Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(3; -1)$ и параллельной прямой l, заданной своим общим уравнением $2x - 3y + 5 = 0$.*

Решение. Так как искомая прямая параллельна данной, то они имеют одни и те же направляющие векторы. Из следствия леммы вытекает, что в качестве направляющего можно выбрать вектор с координатами $\vec{p}\{3; 2\}$. Таким образом, нам дана точка $M(3; -1)$ искомой прямой и ее направляющий вектор $\vec{p}$. Воспользуемся уравнением (13.1), получим: $\begin{vmatrix} x-3 & y+1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$ или $2x - 3y - 9 = 0$.

Если сравнить найденное уравнение прямой, параллельной l, с уравнением самой прямой l, то мы видим, что коэффициенты при неизвестных x и y совпадают, а свободные члены различны. Этот факт не является случайным. Рассмотрим следующую задачу.

Задача 3. *Прямые l и m заданы своими общими уравнениями l: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и m: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Выяснить, при каких условиях, наложенных на коэффициенты их уравнений, прямые пересекаются, параллельны или совпадают.*

Ясно, что решение задачи зависит от количества общих точек данных прямых. Если существует единственная общая точка, то прямые пересекаются. Если таких точек две, то прямые совпадают и любая точка одной прямой принадлежит второй, и, если прямые не имеют общих точек, то они параллельны. Координаты общих точек прямых l и m являются решениями системы, составленной из их уравнений (§ 11):

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases} \tag{13.7}$$

Обозначим через r ранг основной матрицы этой системы

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}, \tag{13.8}$$

а через R — ранг ее расширенной матрицы

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}. \tag{13.9}$$

Рассмотренные матрицы имеют две строки, поэтому $r \le 2$ и $R \le 2$. Ясно, что $R \ge r$. Коэффициенты A_1, B_1 и A_2, B_2 удовлетворяют условию (13.5), они не равны одновременно нулю, поэтому $r \ge 1$. В курсе алгебры доказывается, что система (13.7) имеет единственное решение в том и только в том случае, когда $r = 2$. Эта система несовместна, т. е. не имеет решения в том случае, когда $R > r$. Она имеет бесконечно много решений тогда и только тогда, когда $R = r < 2$. Мы доказали следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть прямые l и m заданы своими общими уравнениями l: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и m: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, r и R — ранги матриц* (13.8) *и* (13.9). *Прямые тогда и только тогда пересекаются, когда $r = R = 2$, параллельны, когда $r = 1$, $R = 2$ и совпадают, когда $R = r = 1$.*

Если $r = 2$, то строки матрицы (13.8) не пропорциональны, а ее определитель отличен от нуля. Если $r = 1$, $R = 2$, то строки матрицы (13.8) пропорциональны между собой, а матрицы (13.9) не пропорциональны друг другу. И наконец, если $r = R = 1$, то строки расширенной матрицы системы (13.7) пропорциональны между собой. Таким образом, справедливо следствие теоремы 2:

Следствие. *Прямые l и m, заданные своими общими уравнениями $l: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $m: A_2x + B_2y + C_2 = 0$, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда*

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \ne 0; \tag{13.10}$$

параллельны, если существует такое число $k \neq 0$, *что*

$$A_1 = kA_2,\ B_1 = kB_2,\ C_1 \neq kC_2; \tag{13.11}$$

и совпадают, если существует такое число $k \neq 0$, *что*

$$A_1 = kA_2,\ B_1 = kB_2,\ C_1 = kC_2. \tag{13.12}$$

Полученные соотношения имеют следующий геометрический смысл. Нами установлено, что векторы $\vec{p}_1\{B_1; -A_1\}$ и $\vec{p}_2\{B_2; -A_2\}$ параллельны прямым l и m. Неравенство (13.10) равносильно неколлинеарности векторов $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$, но в этом и только в этом случае прямые пересекаются в единственной точке. Если $A_1 = kA_2$, $B_1 = kB_2$, то $\vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2$, поэтому прямые l и m либо параллельны, либо совпадают друг с другом.

Рассмотрим прямую l, заданную своим общим уравнением $Ax + By + C = 0$. Координаты начала O системы координат равны (0; 0). *Поэтому точка O в том и только в том случае принадлежит прямой l, когда $C = 0$.* Так как ось абсцисс имеет уравнение $y = 0$, то из формул (13.11) и (13.12) следует, что *прямая l параллельна оси абсцисс в том и только в том случае, когда $A = 0$, $C \neq 0$, и совпадает с этой осью, когда $A = C = 0$.* Аналогично, уравнение оси ординат имеет вид $x = 0$. Поэтому *прямая l параллельна оси ординат тогда и только тогда, когда $B = 0$, $C \neq 0$, и совпадает с этой осью, когда $B = C = 0$.*

Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости, для которых она служит границей. Выведем аналитические условия, определяющие эти полуплоскости. Для упрощения дальнейших выкладок введем следующие обозначения. *Если дано уравнение $Ax + By + C = 0$, а некоторая точка M имеет координаты $(x; y)$, то под $\delta(M)$ будем понимать число, равное $\delta(M) = Ax + By + C$.*

Пусть прямая l задана своим общим уравнением $Ax + By + C = 0$. Рассмотрим две точки M и N, не принадлежащие этой прямой. Из геометрических соображений ясно, что точки M и N лежат в различных полуплоскостях, определяемых прямой l, в том и только в том случае, когда отрезок MN пересекается с l в некоторой своей внутренней точке (рис. 50, *а*). Точки M и N лежат в одной полуплоскости, если отрезок MN не пересекается с l. В этом случае точка пересечения прямых MN и l лежит вне отрезка MN (рис. 50, *б*) либо прямые MN и l параллельны (рис. 50, *в*). Пусть заданы координаты точек M и N: $M(x_1; y_1)$, $N(x_2; y_2)$. Найдем условия, при которых точка T пересечения

MN и l лежит на отрезке MN. Обозначим через t простое отношение: $t=(MN,T)$. Тогда если x и y — координаты точки T, то $x=\dfrac{x_1+tx_2}{1+t}$, $y=\dfrac{y_1+ty_2}{1+t}$ (§ 10). Точка T принадлежит l в том и только в том случае, когда $A\dfrac{x_1+tx_2}{1+t}+B\dfrac{y_1+ty_2}{1+t}+C=0$. Отсюда $(Ax_2+By_2+C)t+Ax_1+By_1+C=0$ или $\delta(N)t+\delta(M)=0$. Так как M и N не лежат на прямой l, то $\delta(M)\neq 0$, $\delta(N)\neq 0$, поэтому $t=-\dfrac{\delta(M)}{\delta(N)}$.

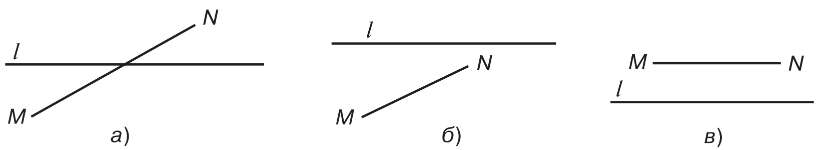


Рис. 50

В § 10 мы установили, точка T в том и только в том случае лежит на отрезке MN, когда $(MN,T)>0$. Следовательно, точки M и N лежат в разных полуплоскостях относительно прямой l тогда и только тогда, когда $\delta(M)$ и $\delta(N)$ имеют разные знаки. Если точка T пересечения прямых MN и l лежит вне отрезка MN, то $t=(MN,T)<0$, поэтому знаки чисел $\delta(M)$ и $\delta(N)$ одинаковы. Легко доказать, что знаки этих чисел совпадают и в случае, когда прямые MN и l параллельны. Действительно, при этом вектор $\overrightarrow{MN}$ параллелен l, и его координаты $\{x_2-x_1;\, y_2-y_1\}$ удовлетворяют условию параллельности вектора и прямой (см. лемму): $A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)=0$. Отсюда получим $Ax_2+By_2=Ax_1+By_1$ или $Ax_2+By_2+C=Ax_1+By_1+C$. Таким образом, $\delta(M)=\delta(N)$. Знаки этих чисел одинаковы. Итак, нами доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Точки M и N лежат в разных полуплоскостях относительно прямой l тогда и только тогда, когда числа $\delta(M)$ и $\delta(N)$ имеют различные знаки, и в одной полуплоскости, когда их знаки совпадают.*

Возьмем на плоскости произвольную точку M, координаты которой удовлетворяют неравенству $Ax+By+C>0$. Тогда, как следует из теоремы 3, этому неравенству удовлетворяют координаты тех и только тех точек, которые лежат в той же полуплоскости относительно l, что и точка M. Неравенству же

$Ax+By+C<0$ удовлетворяют координаты всех точек, принадлежащих второй полуплоскости. Таким образом, справедливо следствие.

Следствие. *Точки, координаты которых являются решением неравенства* $Ax+By+C>0$, *образуют полуплоскость, граница которой имеет уравнение* $Ax+By+C=0$. *Координаты точек, лежащих в другой полуплоскости, определенной той же границей, удовлетворяют неравенству* $Ax+By+C<0$.

Можно указать геометрический способ, с помощью которого можно выяснить, какая полуплоскость соответствует неравенству $Ax+By+C>0$. Рассмотрим вектор $\vec{n}\{A; B\}$. Так как $A^2+B^2\neq 0$, из леммы следует, что $\vec{n}$ не параллелен l. Отложим этот вектор от произвольной точки N, принадлежащей l: $\overrightarrow{NM}=\vec{n}$ (рис. 51). Если координаты точки N равны $(x_1; y_1)$, то точка M имеет координаты $(x_1+A; y_1+B)$. Найдем $\delta(M)$: $\delta(M)=$ $=A(x_1+A)+B(y_1+B)+C=Ax_1+By_1+C+A^2+B^2$. Так как N лежит на l, то $Ax_1+By_1+C=0$, поэтому $\delta(M)=A^2+B^2$. Таким образом, нами построена точка M, которая принадлежит полуплоскости, определяемой неравенством $Ax+By+$ $+C>0$. *Для того чтобы выяснить, какая из полуплоскостей определяется неравенством* $Ax+By+C>0$, *достаточно от произвольной точки прямой отложить вектор* $\vec{n}$, *его конец будет принадлежать искомой полуплоскости.*

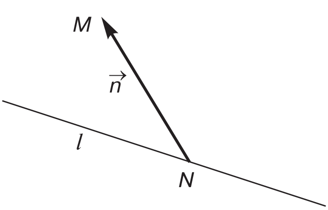


Рис. 51

Пример 2. *Даны уравнения прямых* l: $4x+y-8=0$ *и* m: $x-$ $-3y+1=0$, *а также координаты точки* $M(1; 1)$. *Найти систему неравенств, определяющую угол, полученный при пересечении* l *и* m, *которому принадлежит точка* M.

Решение. Подставим координаты точки M в левые части уравнений данных прямых: $\delta_1(M)=4+1-8<0$, $\delta_2(M)=1-3+1<0$. Рассмотрим полуплоскости π_1 и π_2, определяемые неравенствами $4x+y-8<0$, $x-3y+1<0$. Так как $\delta_1(M)<0$, $\delta_2(M)<0$, точка M лежит и в π_1 и в π_2, поэтому она принадлежит углу, образованному при пересечении этих полуплоскостей. Искомые аналитические условия имеют вид $\begin{cases}4x+y-8<0,\\ x-3y+1<0.\end{cases}$

§ 14. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

В настоящем параграфе мы рассмотрим задачи, решения которых удобно проводить в прямоугольной декартовой системе координат. Будем предполагать, если не оговорено особо, что на плоскости выбрана именно такая система координат. Так как прямоугольная декартова система координат является частным случаем аффинной, то в ней справедливы все уравнения и формулы, полученные в § 13.

Прежде всего, введем следующее определение.

Определение 1. *Ненулевой вектор $\vec{n}$ называется нормальным вектором прямой, если он перпендикулярен любому вектору, ей параллельному.*

Ясно, что ненулевой вектор $\vec{n}$ будет нормальным вектором прямой, если он перпендикулярен хотя бы одному из ее направляющих векторов. Если $\vec{n}$ — нормальный вектор прямой l, а прямая m параллельна $\vec{n}$, то l и m перпендикулярны.

Лемма. *Пусть прямая l задана своим общим уравнением $Ax+By+C=0$. Тогда $\vec{n}\{A;B\}$ — нормальный вектор прямой l.*

Доказательство. Так как $A^2+B^2\neq 0$ (§ 13), то $\vec{n}\neq\vec{0}$ Пусть α и β — координаты произвольного вектора $\vec{p}$, параллельного прямой l. Тогда, как следует из леммы, доказанной в предыдущем параграфе, $A\alpha+B\beta=0$. Так как система координат прямоугольная декартова, то левая часть этого неравенства равна скалярному произведению $\vec{n}\vec{p}$. Таким образом, $\vec{n}\vec{p}=0$, векторы $\vec{n}$ и $\vec{p}$ перпендикулярны. Лемма доказана.

Если на плоскости задана точка и ненулевой вектор, то существует единственная прямая, которая проходит через эту точку и для которой данный вектор служит нормальным. Рассмотрим следующую задачу.

Задача. *Даны координаты точки $M(x_0;y_0)$ и ненулевого вектора $\vec{n}\{A;B\}$. Требуется составить уравнение прямой, для которой $\vec{n}$ — нормальный вектор и которая проходит через данную точку.*

Решение. Рассмотрим вектор $\vec{p}\{-B;A\}$. Так как $\vec{p}\neq\vec{0}$ и $\vec{n}\vec{p}=-AB+AB=0$, то вектор $\vec{p}$ параллелен искомой прямой и является ее направляющим вектором. Составим уравнение прямой по точке и направляющему вектору (§ 13):

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ -B & A \end{vmatrix}=0$$

или

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \qquad (14.1)$$

Уравнение (14.1) — искомое.

Пример 1. *Даны уравнение прямой* l: $x-5y+4=0$ *и координаты точки* $M(2;-4)$. *Найти координаты точки* N, *симметричной* M *относительно* l.

Решение. Точка N будет искомой, если она лежит на прямой m, перпендикулярной l и проходящей через M, а точка O пересечения m и l делит отрезок MN пополам (рис. 52). Так как прямые m и l перпендикулярны, то m параллельна любому нормальному вектору прямой l. Вектор $\bar{n}\{1;-5\}$, как следует из леммы 1, служит нормальным вектором по отношению к l, поэтому прямая m определяется точкой $M(2; -4)$ и направляющим вектором $\bar{n}$. Составим ее уравнение: $\begin{vmatrix} x-2 & y+4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}=0$. После преобразования получим $5x+y-6=0$. Для определения координат точки O следует решить систему, составленную из уравнений прямых m и l:

$$\begin{cases} x-5y+4=0, \\ 5x+y-6=0. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим, что точка O имеет координаты (1; 1). Если обозначить координаты искомой точки N через x и y, то из формул для определения координат середин отрезка по координатам его концов (§ 10) следует, что $\frac{x+2}{2}=1$, $\frac{y-4}{2}=1$. Таким образом, $x = 0$, $y = 6$. Координаты искомой точки N равны (0; 6).

В школьном курсе математики изучались свойства прямой пропорциональной зависимости $y = kx + b$. При этом доказывалось, что ее графиком является прямая линия, не параллельная оси ординат. Нетрудно видеть, что это утверждение полностью согласуется с фактами, доказанными в предыдущем параграфе. Преобразуем уравнение к виду $kx-y+b=0$. Кривая, определяемая этим уравнением, является алгебраической первого порядка, т. е. прямой линией. Так как коэффициент

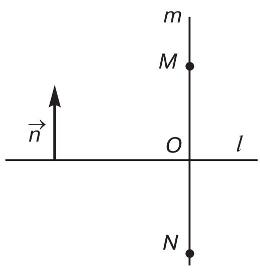


Рис. 52

при неизвестном y отличен от нуля, то эта прямая не параллельна оси ординат. Число k называется *угловым коэффициентом прямой*, а уравнение такого вида — *уравнением прямой с угловым коэффициентом*. Общее уравнение прямой, не параллельной оси ординат, легко преобразовать к уравнению прямой с угловым коэффициентом. Действительно, если дано общее уравнение такой прямой $Ax+By+C=0$, то $B\neq 0$. Отсюда $y=-\dfrac{A}{B}x-\dfrac{C}{A}$. Угловой коэффициент k равен $-\dfrac{A}{B}$.

Выведем формулы для вычисления угла между прямыми на плоскости. Как известно, под углом между ними понимается острый или прямой угол, образованный при их пересечении. Такой угол мы будем называть *неориентированным углом* между прямыми. Если рассматривать упорядоченную пару неперпендикулярных прямых l и m на ориентированной плоскости (§ 3), то можно между ними определить ориентированный угол. Обозначим через $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ направляющие векторы прямых l и m. Возможны два случая. В первом угол между $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ острый. Тогда ориентированный угол φ между l и m будет равен ориентированному углу между векторами $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ (рис. 53, *а*):

$$\varphi=\measuredangle\vec{p}_1\vec{p}_2. \tag{14.2}$$

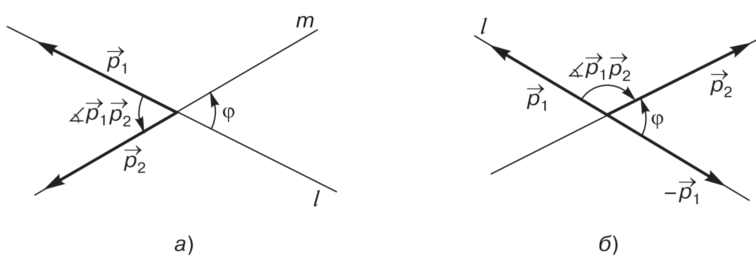


Рис. 53

Во втором случае угол между $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ тупой. Тогда ориентированный угол φ между прямыми будет равен $\measuredangle(-\vec{p}_1)\vec{p}_2$ (рис. 53, *б*). Ясно, что при этом $\varphi=\measuredangle\vec{p}_1(-\vec{p}_2)$. Так как в данном случае углы φ и $\measuredangle\vec{p}_1\vec{p}_2$ имеют разные знаки, а их модули дополняют друг друга до π, то

$$\varphi=\pm\pi+\measuredangle\vec{p}_1\vec{p}_2. \tag{14.3}$$

Если прямые l и m перпендикулярны друг другу, то ориентированный угол между ними не определяется, так как смежные углы, образованные при их пересечении, равны между собой. Таким образом, ориентированный угол φ между прямыми удовлетворяет условиям

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Выведем формулы для вычисления ориентированного и неориентированного углов между прямыми. Будем предполагать, что l и m заданы своими общими уравнениями l: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, m: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Определим величину неориентированного угла φ между ними. В качестве направляющих векторов этих прямых примем векторы $\vec{p}_1\{-B_1; A_1\}$ и $\vec{p}_2\{-B_2; A_2\}$. Если угол $\angle\vec{p}_1\vec{p}_2$ острый, то $\varphi = \angle\vec{p}_1\vec{p}_2$. Если же угол между направляющими векторами тупой, то $\varphi = \pi - \angle\vec{p}_1\vec{p}_2$. Так как φ — острый или прямой угол, то для его определения достаточно найти значение хотя бы одной его тригонометрической функции. В первом случае $\cos\varphi = \cos\angle\vec{p}_1\vec{p}_2$, во втором $\cos\varphi = -\cos\angle\vec{p}_1\vec{p}_2$. Поэтому в обоих случаях: $\cos\varphi = \left|\cos\angle\vec{p}_1\vec{p}_2\right|$. Так как нам известны координаты векторов $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$, то из формулы, выражающей косинус угла между векторами через их координаты (§ 4), получим

$$\cos\varphi = \frac{\left|A_1A_2 + B_1B_2\right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad (14.4)$$

Из формулы (14.4) следует, что *прямые l и m перпендикулярны между собой в том и только в том случае, когда* $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

Выведем формулы для вычисления ориентированного угла φ между прямыми l и m. Напомним, что l и m не перпендикулярны между собой. Согласно формулам (5.16) и (5.17), полученным в § 5, ориентированный угол $\measuredangle\vec{p}_1\vec{p}_2$ между направляющими векторами $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ этих прямых удовлетворяет следующим условиям:

$$\sin(\measuredangle\vec{p}_1\vec{p}_2) = \frac{\begin{vmatrix} -B_1 & A_1 \\ -B_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}},$$

$$\cos(\measuredangle\vec{p}_1\vec{p}_2) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Углы φ и $\measuredangle\vec{p}_1\vec{p}_2$ связаны между собой соотношениями (14.2) и (14.3). И в первом, и во втором случаях $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\measuredangle\vec{p}_1\vec{p}_2)$. Поэтому

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}{A_1A_2 + B_1B_2}. \tag{14.5}$$

Полученная формула позволяет проверить утверждение, известное из школьного курса математики. Покажем, что угловой коэффициент k прямой l равен тангенсу ориентированного угла между осью абсцисс и l. Пусть прямая l задана своим уравнением с угловым коэффициентом $y = kx + b$, или $kx - y + b = 0$. Ось абсцисс Ox задается уравнением $y = 0$. Применим формулу (14.5) для вычисления тангенса φ ориентированного угла между упорядоченной парой прямых Ox и l. Получим $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ k & -1 \end{vmatrix}}{-1} = k.$

Пример 2. *Луч света, направленный по прямой* a: $x + y = 0$, *зеркально отразился от прямой* b: $3x - 2y - 5 = 0$. *Найти уравнение прямой* a', *содержащей отраженный луч.*

Решение. Согласно законам отражения, ориентированный угол между прямыми a и b равен ориентированному углу между b и a'. При этом a' проходит через точку пересечения a и b (рис. 54). Вначале определим точку пересечения a и b. Для этого решим систему $\begin{cases} x + y = 0, \\ 3x - 2y - 5 = 0. \end{cases}$ Получим $x = 1$, $y = -1$. По формуле (14.5) найдем тангенс ориентированного угла φ между a и b: $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}{3 - 2} = -5$. Обозначим коэффициенты искомого уравнения прямой a' через A, B и C; тогда прямая a' задается уравнением $Ax + By + C = 0$. Так как a' содержит точку с координатами $(1; -1)$, то $A - B + C = 0$. Тангенс ориентированного угла между b и a' равен -5. Еще раз воспользуемся формулой (14.5), получим $\dfrac{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ A & B \end{vmatrix}}{3A - 2B} = -5$ или $17A - 7B = 0$. Таким образом,

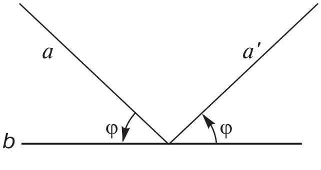


Рис. 54

для определения искомых коэффициентов следует найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} A - B + C = 0, \\ 17A - 7B = 0. \end{cases}$$

Полученная система является однородной, она состоит из двух линейно независимых уравнений и содержит три неизвестных A, B и C. Поэтому ее решение определяется с точностью до пропорциональности. Но A, B и C — коэффициенты уравнения прямой a', поэтому они и должны быть определены с точностью до пропорциональности. Для решения достаточно найти любое ненулевое решение системы. Положим $A = 7$, $B = 17$. Тогда из первого уравнения $C = 10$. Окончательно получаем $7x + 17y + 10 = 0$.

Выведем формулы для вычисления расстояния от точки до прямой. Пусть уравнение прямой l имеет вид $Ax + By + C = 0$. Даны координаты точки $M(x_0;\ y_0)$. Требуется найти расстояние от M до l. Выберем на l произвольную точку $N(x_1;\ y_1)$ и проведем через нее прямую m, перпендикулярную l. Рассмотрим вектор $\vec{n}\{A; B\}$, нормальный к прямой l. Рассмотрим также произвольную ось m, сонаправленную с вектором $\vec{n}$. Без ограничения общности, можно считать, что ось m проходит через точку N (рис. 55). Спроектируем на m точку M, получим точку K. Искомое расстояние d равно длине отрезка NK, или, как нетрудно видеть, абсолютной величине проекции вектора $\overrightarrow{NM}$ на ось m: $d = \left| pr_m \overrightarrow{NM} \right|$. В § 4 нами была доказана лемма 1, в соответствии с которой скалярное произведение векторов $\overrightarrow{NM}$ и $\vec{n}$ равно $\overrightarrow{NM}\vec{n} = |\vec{n}|\, pr_m \overrightarrow{NM}$. Отсюда следует, что

$$d = \frac{\left|\vec{n}\overrightarrow{NM}\right|}{|\vec{n}|}. \tag{14.6}$$

Координаты вектора $\overrightarrow{NM}$ равны $\{x_0 - x_1;\ y_0 - y_1\}$, поэтому

$$\vec{n}\overrightarrow{NM} = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) =$$
$$= Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1.$$

Так как точка N лежит на прямой l, ее координаты удовлетворяют уравнению этой прямой: $Ax_1 + By_1 + C = 0$ Отсюда $C = -Ax_1 - By_1$ и $\vec{n}\overrightarrow{NM} = Ax_0 + By_0 + C$.

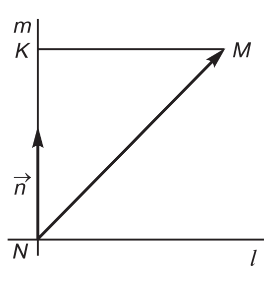


Рис. 55

Следовательно, $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{|\vec{n}|}$. Так как $|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2}$, окончательно получим

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{14.7}$$

Пример 3. *Даны уравнения прямых* a: $3x + 2y - 6 = 0$ *и* b: $3x - 2y + 1 = 0$, *а также координаты точки* $M(1; 4)$. *Найти уравнение биссектрисы того угла, образованного при пересечении прямых* a *и* b, *которому принадлежит точка* M.

Решение. Как известно, биссектриса представляет собой множество всех точек плоскости, равноудаленных от сторон угла. При пересечении прямых a и b образуются две пары вертикальных углов. Поэтому множество всех точек плоскости, равноудаленных от прямых a и b, совпадает с биссектрисами этих вертикальных углов. Точка $A(x; y)$ тогда и только тогда принадлежит этому множеству, когда $\dfrac{|3x + 2y - 6|}{\sqrt{9+4}} = \dfrac{|3x - 2y + 1|}{\sqrt{9+4}}$, или $|3x + 2y - 6| = |3x - 2y + 1|$. Если модули двух чисел совпадают, т. е. $|a| = |b|$, то либо $a = b$, либо $a = -b$. Раскрывая модуль, получаем $3x + 2y - 6 = 3x - 2y + 1$ или $3x + 2y - 6 = -3x + 2y - 1$. Упростив, приходим к уравнениям $4y - 7 = 0$ или $3x - 5 = 0$. Таким образом, биссектриса одной из пар вертикальных углов имеет уравнение $4y - 7 = 0$, а $6x - 5 = 0$ — уравнение биссектрисы другой пары вертикальных углов. Нам следует определить уравнение той биссектрисы, которая делит пополам угол, содержащий точку $M(1; 4)$. Пусть $X(x; y)$ — произвольная точка искомой биссектрисы (рис. 56). Тогда точка X лежит в той же полуплоскости, что и точка M, относительно прямой a, а также относительно прямой b. Подставим координаты точки M в уравнения прямых a и b: $3 + 8 - 6 > 0$, $3 - 8 + 1 < 0$. Таким образом, точка $X(x; y)$ принадлежит искомому углу в том и только в том случае, когда она удовлетворяет системе неравенств (§ 13)

$$\begin{cases} 3x + 2y - 6 > 0, \\ 3x - 2y + 1 < 0. \end{cases}$$

Поэтому искомое уравнение имеет вид $3x + 2y - 6 = -3x + 2y - 1$ или $6x - 5 = 0$.

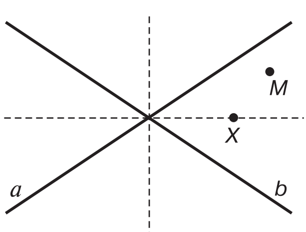


Рис. 56

§ 15. ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВ УРАВНЕНИЙ ПРЯМОЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Вначале рассмотрим аффинные задачи, т. е. задачи, в которых используются свойства принадлежности точек и прямых, условие параллельности вектора и прямой, взаимное расположение прямых на плоскости, простое отношение точек. Для решения такого рода задач удобно использовать свойства прямой в аффинной системе координат.

Пример 1. *Доказать, что в четырехугольнике середины диагоналей и середины средних линий (отрезков, соединяющих середины противоположных сторон) лежат на одной прямой.*

Решение. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник (рис. 57), M, N, P и Q — середины его сторон, а S и T — середины диагоналей. Примем вершину A за начало аффинной системы координат, а $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AD}$ и $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AB}$ будем считать ее базисными векторами. Запишем координаты вершин четырехугольника:

$$A(0; 0),\ \ B(0; 1),\ \ C(a; b),\ \ D(0; 1).$$

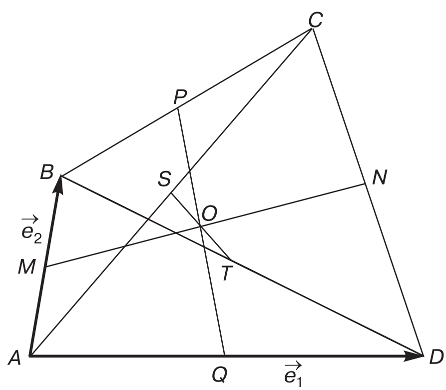


Рис. 57

Если $a = b = 1$, то данный четырехугольник — параллелограмм. Утверждение задачи в этом случае становится очевидным, так как середины диагоналей и середины средних линий совпадают с центром симметрии параллелограмма. Будем предполагать, что либо $a \neq 1$, либо $b \neq 1$. Найдем координаты середин сторон и диагоналей: $M\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$, $P\left(\dfrac{a}{2}; \dfrac{b+1}{2}\right)$, $N\left(\dfrac{a+1}{2}; \dfrac{b}{2}\right)$,

$Q\left(\frac{1}{2};0\right)$, $S\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2}\right)$, $T\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. Легко проверить (вычисления проведите самостоятельно), что середины средних линий MN и PQ совпадают, их общая точка O имеет координаты $\left(\frac{a+1}{4};\frac{b+1}{4}\right)$. Составим уравнение прямой ST и покажем, что координаты точки O удовлетворяют этому уравнению. Так как координаты точек S и T нам известны, то, воспользовавшись результатами, полученными в § 13, выведем уравнение этой прямой. Получим $\begin{vmatrix} x-\frac{1}{2} & y-\frac{1}{2} \\ \frac{a-1}{2} & \frac{b-1}{2} \end{vmatrix}=0$ или $(b-1)x-(a-1)y-\frac{b-a}{2}=0$. Подставив координаты точки O в это уравнение и проведя вычисления, убеждаемся, что она принадлежит прямой ST.

Пример 2 (теорема Чевы). *Дан треугольник ABC, точки A_1, B_1 и C_1 принадлежат соответственно прямым BC, AC и AB. Доказать, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда* $(AB, C_1)(BC, A_1)(CA, B_1)=1$.

Решение. Пусть ABC — данный треугольник, а A_1, B_1 и C_1 — данные точки (рис. 58). Введем систему координат так, чтобы ее начало совпадало с точкой A, а векторы $\vec{e}_1=\overrightarrow{AC}$, $\vec{e}_2=\overrightarrow{AB}$ были базисными. Запишем координаты вершин треугольника: $A(0;0)$, $B(0;1)$, $C(1;0)$. Пусть $(AB, C_1)=\lambda$, $(BC, A_1)=\mu$ и $(CA, B_1)=\nu$. Воспользовавшись соотношениями для определения координат точки, делящей отрезок в данном отношении (§ 10), найдем координаты точек A_1, B_1 и C_1: $A_1\left(\frac{\mu}{\mu+1};\frac{1}{\mu+1}\right)$, $B_1\left(\frac{1}{\nu+1};0\right)$, $C_1\left(0;\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)$. Воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через две точки (§ 13), найдем уравнения прямых AA_1: $x-\mu y=0$; BB_1: $(1+\nu)x+y-1=0$; CC_1: $\lambda x+(1+\lambda)y-\lambda=0$. Определим координаты точки M пересечения прямых AA_1 и BB_1, затем выясним, при каких условиях эта точка принадлежит прямой CC_1.

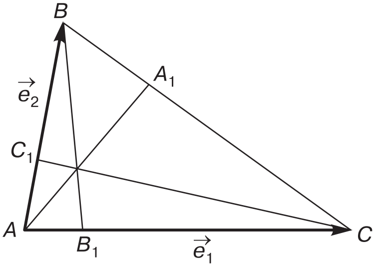


Рис. 58

Для этого решим систему $\begin{cases} x - \mu y = 0, \\ (1+\nu)x + y - 1 = 0. \end{cases}$ Из первого уравнения $x = \mu y$. Произведем замену во втором уравнении: $(1+\nu)\mu y + y = 1$. Отсюда получим координаты точки M: $y = \dfrac{1}{1+\mu+\nu\mu}$ и $x = \dfrac{\mu}{1+\mu+\nu\mu}$. Точка M в том и только в том случае лежит на прямой CC_1, когда $\dfrac{\lambda\mu}{1+\mu+\nu\mu} + \dfrac{1+\lambda}{1+\mu+\nu\mu} - \lambda = 0$ или $\lambda\mu + 1 + \lambda - \lambda - \lambda\mu - \lambda\mu\nu = 0$. Таким образом, $\lambda\mu\nu = 1$. Утверждение доказано.

Рассмотрим задачи, для решения которых необходимо использовать свойства уравнения прямой в прямоугольной декартовой системе координат. Они носят метрический характер и связаны с вычислением расстояний и величин углов (§ 14).

Пример 3. *Доказать, что прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.*

Решение. Пусть ABC — произвольный треугольник, AP, BO и CQ — его высоты (рис. 59). Введем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы ее начало совпадало с точкой O, ось абсцисс содержала вершины A и C, а ось ординат — вершину B. Запишем в этой системе координаты вершин $A(a;\ 0)$, $B(0;\ b)$, $C(c;\ 0)$ $(a \neq c, b \neq 0)$. Найдем уравнения прямых AP, BO и CQ и покажем, что они пересекаются в одной точке.

Прямая BO совпадает с осью ординат, поэтому ее уравнение имеет вид $x = 0$. Так как прямая AP перпендикулярна прямой BC, то вектор $\overrightarrow{BC}$ является ее нормальным вектором. Поэтому прямая AP определена точкой $A(a;\ 0)$ и нормальным вектором $\overrightarrow{BC}\{c; -b\}$. Составим уравнение прямой по точке и нормальному вектору (§ 14): $c(x-a) - by = 0$, или $cx - by - ac = 0$. Аналогично, прямая CQ определена точкой $C(c;\ 0)$ и нормальным вектором $\overrightarrow{AB}\{-a; b\}$: $ax - by - ac = 0$. Найдем координаты точки H пересечения прямых OB и AP. Для этого решим систему

$$\begin{cases} cx - by - ac = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

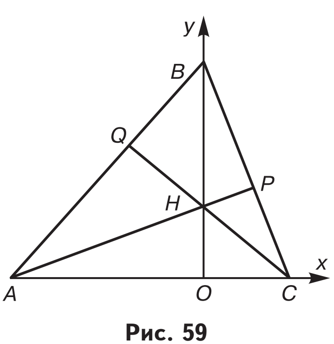


Рис. 59

Получим $H\left(0; -\frac{ac}{b}\right)$. Подставим координаты H в уравнение прямой CQ: $-b\left(-\frac{ac}{b}\right)-ac=0$. Точка H лежит на прямой CQ, утверждение доказано.

Пример 4. *Угол при основании равнобедренного треугольника равен* $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$. *Найти угол между медианой и биссектрисой, проведенной к боковой стороне.*

Решение. Пусть ABC — данный треугольник (рис. 60), AM и AL — его медиана и биссектриса. Обозначим через $3a$ половину OC его основания. Так как $\operatorname{tg}\angle ACB=\frac{4}{3}$, то $|BO|=4a$. Введем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы точка O — середина основания — была ее центром, ось Ox была сонаправлена с вектором $\overrightarrow{OC}$, а ось Oy — с $\overrightarrow{OB}$. Запишем в этой системе координаты вершин: $A(-3a;\ 0)$, $B(0;\ 4a)$, $C(3a;\ 0)$. Определим уравнение медианы AM и биссектрисы AL, затем вычислим угол между ними. Точка M — середина отрезка BC, поэтому ее координаты равны $\left(\frac{3a}{2}; 2a\right)$. Прямая AM проходит через точки A и M, координаты которых известны. Составим уравнение этой прямой по двум точкам (§ 13). После преобразования получим AM: $4x-9y+12a=0$. Для того чтобы определить уравнения биссектрисы AL, необходимо составить уравнения сторон угла AB и AC. Сторона AC совпадает с осью абсцисс, поэтому ее уравнение имеет вид $y=0$. Прямая AB определена точками A и B. Составим уравнение прямой AB по известным координатами этих точек, получим AB: $4x-3y+12a=0$. Мы нашли уравнения прямых, содержащих стороны угла BAC. Вначале определим аналитические условия множества точек, равноудаленных от сторон AB и AC (пример 3, § 14). Имеем:

$$\frac{|4x-3y+12a|}{5}=|y|. \qquad (15.1)$$

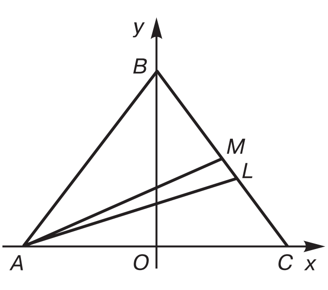


Рис. 60

Точки биссектрисы AL лежат в тех же полуплоскостях относительно сторон AC и AB, что и соответственно вершины B и C. Если подставить координаты точки B

в левую часть уравнения прямой AC, то получим положительное число. Поэтому модуль в правой части уравнения (15.1) раскрывается со знаком «+». Аналогично, после подстановки координат точки C в левую часть уравнения прямой AB также получим положительное число. Модуль в левой части уравнения (15.1) следует раскрывать с тем же знаком «+». Таким образом, уравнение биссектриссы AL имеет вид $4x-3y+12a=5y$ или $x-2y+3a=0$. Определим косинус искомого угла (§ 14):

$$\cos\varphi=\frac{|4+18|}{\sqrt{16+81}\sqrt{1+4}}=\frac{22}{\sqrt{485}}.$$

Искомый угол равен $\varphi=\arccos\frac{22}{\sqrt{485}}$

Пример 5. *Дан равнобедренный треугольник. Доказать, что сумма расстояний от любой точки, лежащей на основании, до боковых сторон равна высоте треугольника, опущенной на боковую сторону.*

Решение. Пусть ABC — данный равнобедренный треугольник, O — середина основания AC (рис. 61). Введем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы ее начало совпадало с точкой O, а оси абсцисс и ординат были соответственно сонаправлены с векторами $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OB}$. Введем обозначения: $|AO|=|OC|=a$, $|OB|=b$. Запишем координаты вершин треугольника $A(-a;\ 0)$, $B(0;\ b)$, $C(a;\ 0)$. Пусть $M(m;\ 0)$ — произвольная точка основания AC. Тогда ее абсцисса удовлетворяет условию:

$$-a\le m\le a. \tag{15.2}$$

Определим уравнения прямых AB: $bx-ay+ab=0$ и AC: $bx+ay-ab=0$. Длина высоты h треугольника, опущенной на боковую сторону BC, равна расстоянию от точки A до прямой BC. Используем формулу, полученную в § 14 для вычисления расстояния от точки до прямой: $h=\frac{|ab+ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Затем найдем расстояния d_1 и d_2 от точки M до сторон AB и AC: $d_1=\frac{|bm+ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $d_2=\frac{|bm-ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

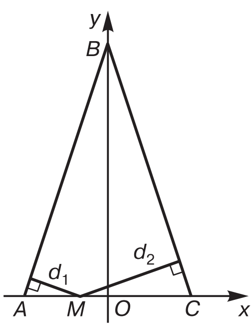


Рис. 61

Из неравенства (15.2) следует, что $ab+bm>0$, $bm-ab<0$. Поэтому $d_1=\dfrac{bm+ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $d_2=\dfrac{ab-bm}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Отсюда $d_1+d_2=h$. Утверждение доказано.

§ 16. ЭЛЛИПС И ЕГО СВОЙСТВА

В настоящем параграфе мы рассмотрим геометрические свойства эллипса. Эта линия, наряду с гиперболой и параболой (их свойства будут рассмотрены в последующих параграфах), является алгебраической кривой второго порядка. Напомним, что в соответствии с определением, сформулированным в § 11, под алгебраической кривой второго порядка понимается линия на плоскости, уравнение которой в некоторой аффинной системе координат имеет вид

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00}=0,$$

где коэффициенты a_{11}, a_{12} и a_{22} не равны одновременно нулю.

Свойства эллипса, гиперболы и параболы исследовались еще античными математиками, которые рассматривали эти кривые как сечения конуса плоскостью. Эти свойства используются при изучении различных вопросов естествознания. Например, траектории движения планет вокруг солнца представляют собой эллипс. Оптические свойства параболы широко применяются в технике, в различных осветительных приборах.

Определение 1. *Эллипсом называется множество всех точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2, принадлежащих той же плоскости, является постоянной величиной, большей расстояния между F_1 и F_2.*

Точки F_1 и F_2 называются фокусами эллипса. Обозначим расстояние между фокусами через $2c$, а сумму расстояний от точек эллипса до фокусов через $2a$. Тогда, как следует из определения 1,

$$a>c. \tag{16.1}$$

Пусть M — точка эллипса, F_1 и F_2 — его фокусы (рис. 62). Из неравенства, связывающего длины сторон треугольника MF_1F_2, следует, что $|MF_1|+|MF_2|>|F_1F_2|$, что полностью согласуется с неравенством (16.1). Ясно, что не существует точек плоскости, для которых $|MF_1|+|MF_2|< <|F_1F_2|$. Если же потребовать, чтобы $|MF_1|+|MF_2|=|F_1F_2|$, то множество точек, удовлетворяющих этому условию, представляет собой отрезок F_1F_2. Таким образом, ограничения, наложенные неравенством (16.1), являются естественными, вытекающими из неравенства треугольника. Фокусы F_1 и F_2 могут совпадать. В этом случае эллипс представляет собой окружность радиуса a, центр которой находится в точке F_1. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что фокусы F_1 и F_2 не совпадают друг с другом.

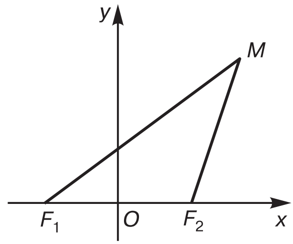


Рис. 62

Выведем уравнение эллипса. Для этого выберем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы ее начало совпадало с серединой отрезка F_1F_2, а ось абсцисс содержала фокусы F_1 и F_2 (рис. 62). Такая система координат называется *канонической*. В этой системе запишем координаты фокусов: $F_1(-c;\ 0)$, $F_2(c;\ 0)$. Если точка M имеет координаты x и y, то $|MF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$, $|MF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$. Поэтому точка M принадлежит эллипсу в том и только в том случае, когда ее координаты удовлетворяют уравнению

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a. \qquad (16.2)$$

Полученное выражение, по сути, и является уравнением эллипса. Для упрощения преобразуем его, перенеся один из радикалов в правую часть равенства:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Возведем обе его части в квадрат:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2.$$

Отсюда

$$x^2+2cx+c^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2,$$

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx.$$

Еще раз возведем обе части полученного равенства в квадрат:

$$a^2(x-c)^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2,$$

или

$$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2,$$
$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Из неравенства (16.1) следует $a^2-c^2>0$. Поэтому разность a^2-c^2 равна некоторому положительному числу. Положим

$$a^2-c^2=b^2. \qquad (16.3)$$

Тогда полученное уравнение приобретает вид $b^2x^2+a^2y^2=$ $=a^2b^2$. Разделив обе части равенства на a^2b^2, окончательно получим

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (16.4)$$

Мы показали, что если точка принадлежит эллипсу, т. е. ее координаты в канонической системе координат удовлетворяют уравнению (16.2), то они также служат решениями уравнения (16.4). Обратное не является очевидным, так как в процессе перехода от первого уравнения ко второму мы дважды использовали неравносильное преобразование — возведение в квадрат обеих частей уравнения. Покажем, что если координаты точки являются решением уравнения (16.4), то они удовлетворяют (16.2), т. е. точка лежит на эллипсе. Тем самым будет доказано, что (16.4) — уравнение эллипса. Возьмем произвольную точку $M(x;\ y)$, координаты которой удовлетворяют уравнению (16.4). Обозначим через r_1 и r_2 расстояния от точки M до точек F_1 и F_2: $r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$, $r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$. Числа r_1 и r_2 носят название *фокальных радиусов* точки M. Из уравнения (16.4) выразим y^2 через x^2: $y^2=b^2\dfrac{a^2-x^2}{a^2}$. Поэтому

$$r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x+c)^2+b^2\frac{a^2-x^2}{a^2}}=$$
$$=\frac{1}{a}\sqrt{a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+b^2a^2-b^2x^2}=$$
$$=\frac{1}{a}\sqrt{(a^2-b^2)x^2+2a^2cx+a^2(c^2+b^2)}.$$

Из соотношения (16.3) следует, что $a^2 - b^2 = c^2$, $c^2 + b^2 = a^2$. Отсюда

$$r_1 = \frac{1}{a}\sqrt{c^2x^2 + 2a^2cx + a^4} = \frac{1}{a}\sqrt{(cx + a^2)^2}.$$

Таким образом,

$$r_1 = \left|a + \frac{c}{a}x\right|. \qquad (16.5)$$

Аналогично доказывается, что

$$r_2 = \left|a - \frac{c}{a}x\right|. \qquad (16.\ 6)$$

Покажем, что $r_1 + r_2 = 2a$. Координаты точки M удовлетворяют уравнению (16.4). Поэтому $x^2 \le a^2$, т. е.

$$|x| \le a. \qquad (16.7)$$

Предположим сначала, что $x \ge 0$. Тогда $a + \frac{c}{a}x > 0$, отсюда следует, что $r_1 = a + \frac{c}{a}x$. Теперь раскроем модуль в соотношении (16.6). Из неравенства (16.7) получим: $x \le a$. Так как c — положительное число, то $cx \le ac$. Но числа a и c удовлетворяют неравенству (16.1): $c < a$. Поэтому $ac < a^2$, следовательно, $cx < a^2$ или $a - \frac{c}{a}x > 0$. Отсюда вытекает, что $r_2 = a - \frac{c}{a}x$. Таким образом,

$$r_1 + r_2 = a + \frac{c}{a}x + a - \frac{c}{a}x = 2a.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $x < 0$. Тогда $a - \frac{c}{a}x > 0$, т. е. $r_2 = a - \frac{c}{a}x$. Из неравенства (16.7) следует, что $-cx < ca$. Поэтому, используя (16.1), получим $-cx < a^2$ или $a + \frac{c}{a}x > 0$. Таким образом, $r_1 = a + \frac{c}{a}x$ и $r_1 + r_2 = 2a$.

Мы доказали, что точка в том и только в том случае принадлежит эллипсу, когда ее координаты удовлетворяют уравнению (16.4). Его называют *каноническим уравнением* эллипса. Оно является алгебраическим второго порядка, поэтому *эллипс представляет собой алгебраическую кривую второго порядка.*

Исследуем простейшие свойства эллипса. Из уравнения (16.4) следует, что $|x| \le a$, $|y| \le b$. Поэтому все точки эллипса находятся внутри прямоугольника, ограниченного прямыми $x = \pm a$ и $y = \pm b$ (рис. 63). Пусть эллипс пересекает ось абсцисс в точке $A(x_0; 0)$. Тогда из уравнения (15.4) следует, что $\frac{x_0}{a^2} = 1$, т. е. $x_0 = \pm a$. Таким образом, эллипс пересекает ось абсцисс в точках $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$. Аналогично можно найти координаты точек пересечения эллипса с осью ординат: $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$ (рис. 63). Точки A_1, A_2, B_1 и B_2 называются *вершинами* эллипса, а числа a и b — его *полуосями*, причем a — большой, а b — малой полуосью эллипса[1].

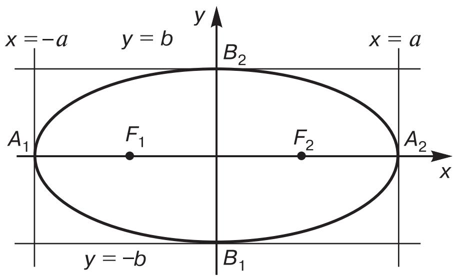


Рис. 63

Покажем, что эллипс симметричен относительно осей канонической системы координат и центрально симметричен относительно ее начала. Возьмем произвольную точку $M(x_0; y_0)$, принадлежащую эллипсу: $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$. Запишем координаты точек M_1, M_2 и M_3, симметричных точке M соответственно относительно осей абсцисс и ординат и относительно начала системы координат: $M_1(x_0; -y_0)$, $M_2(-x_0; y_0)$, $M_3(-x_0; -y_0)$. Очевидно, координаты этих точек удовлетворяют уравнению (16.4), точки лежат на эллипсе.

Исходя из доказанного, для построения эллипса достаточно определить множество его точек в первой координатной четверти, а затем воспользоваться свойством симметричности относительно координатных осей. Если $x \ge 0$ и $y \ge 0$, то из уравнения

[1] Определения большой и малой полуосей эллипса являются традиционными и никак не согласуются с понятием оси, приведенным выше.

(16.4) получаем: $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Средствами математического анализа доказывается, что эта функция представляет собой гладкую непрерывную кривую. Эллипс изображен на рис. 63.

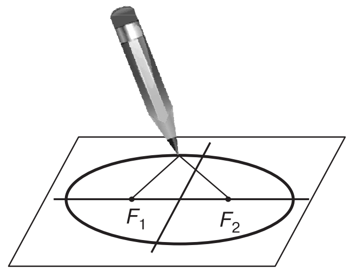


Рис. 64

Из определения 1 вытекает способ построения эллипса, который может использоваться на практике. Возьмем нить длиной $2a$, закрепим ее концы в точках F_1 и F_2, натянем ее с помощью острия карандаша. Передвигая карандаш по бумаге и натягивая при этом нить, получаем рисунок эллипса (рис. 64).

Разберем еще один способ построения эллипса. Пусть A_1, A_2, B_1 и B_2 — вершины эллипса, O — его центр, a и b — полуоси. Проведем оси канонической системы координат (рис. 65). Построим две окружности α и β с центром в точке O и радиусами a и b. Вершины A_1 и A_2 лежат на окружности α, а B_1 и B_2 — на β. Проведем луч l с началом в точке O. Обозначим через t ориентированный угол между положительным направлением оси абсцисс и лучом l. Легко найти координаты точек Q и P пересечения окружностей α и β с лучом l: $Q(a\cos t; a\sin t)$ и $P(b\cos t; b\sin t)$. Построим точку M пересечения двух прямых, одна из которых проходит через Q и параллельна оси ординат, а другая — через P и параллельна оси абсцисс. Тогда координаты точки M равны $(a\cos t; b\sin t)$. Подставив их в каноническое уравнение эллипса, получим

$$\frac{a^2\cos^2 t}{a^2} + \frac{b^2\sin^2 t}{b^2} = 1.$$

Таким образом, точка M лежит на эллипсе. Меняя положение луча, можно получить любое количество точек эллипса. Уравнения

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t \end{cases}$$

называются *параметрическими уравнениями эллипса*.

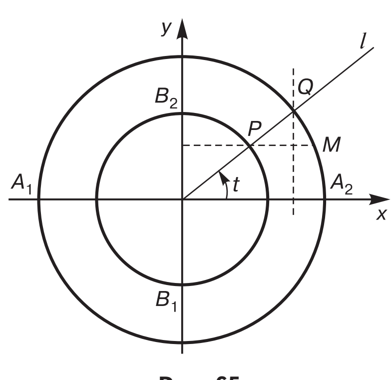


Рис. 65

Рассмотрим так называемое директориальное свойство эллипса.

Определение 2. *Эксцентриситетом эллипса называется число, равное отношению расстояния между фокусами к сумме фокальных радиусов любой его точки.*

Эксцентриситет эллипса будем обозначать через ε. Так как $|F_1F_2| = 2c$ а $r_1 + r_2 = 2a$, то

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \tag{16.8}$$

Из неравенства (16.1) следует, что $\varepsilon < 1$. Так как полуоси a и b и половина расстояния между фокусами c связаны соотношением $b^2 = a^2 - c^2$ (согласно (16.3)), то $b^2 = a^2(1-\varepsilon^2)$. Отсюда следует, что если $\varepsilon = 0$, то $b^2 = a^2$, т. е. эллипс представляет собой окружность. С увеличением эксцентриситета от 0 до 1 отношение $\frac{b}{a}$ уменьшается от 1 до 0, т. е. эллипс «сжимается» к оси Ox и «приближается» к отрезку. В дальнейшем будем предполагать, что $\varepsilon \neq 0$.

Определение 3. *Прямые*

$$d_1\colon x = -\frac{a}{\varepsilon}, \quad d_2\colon x = \frac{a}{\varepsilon} \tag{16.9}$$

называются директрисами эллипса.

Директрисы d_1 и d_2 параллельны оси ординат. В силу того, что $\frac{a}{\varepsilon} > a$, они не пересекают эллипс. Будем считать, что директриса d_1 соответствует фокусу F_1, а директриса d_2 — фокусу F_2. На рисунке 66 изображен эллипс и его директрисы.

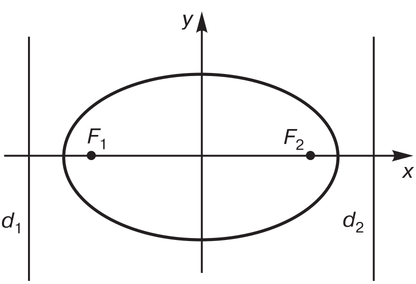


Рис. 66

Вычислим расстояния ρ_1 и ρ_2 от произвольной точки $M(x; y)$ эллипса до директрис d_1 и d_2. Воспользуемся формулой для вычисления расстояния от точки до прямой, полученной в § 14:

$$\rho_1 = \frac{|a+\varepsilon x|}{\varepsilon}, \ \ \rho_2 = \frac{|a-\varepsilon x|}{\varepsilon}. \qquad (16.10)$$

Сравним найденные соотношения с формулами (16.5) и (16.6). Используя формулу (16.8), соотношения, выражающие фокальные радиусы точки через a и c, можно выразить через a и эксцентриситет ε: $r_1 = |a+\varepsilon x|$, $r_2 = |a-\varepsilon x|$. Таким образом, если точка принадлежит эллипсу, то отношения $\frac{r_1}{\rho_1}$ и $\frac{r_2}{\rho_2}$ равны эксцентриситету.

Покажем обратное. Пусть даны эллипс и точка, отношение расстояния от которой до фокуса к расстоянию до соответствующей директрисы равно эксцентриситету эллипса. Покажем, что эта точка лежит на эллипсе. Введем его каноническую систему координат. Обозначим через x и y координаты точки. Будем считать, что $\frac{r_2}{\rho_2} = \varepsilon$, где r_2 и ρ_2 — расстояния от данной точки до фокуса F_2 и до директрисы d_2. Так как координаты F_2 равны $(c; 0)$, а уравнение директрисы d_2 имеет вид $x = \frac{a}{\varepsilon}$, то $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, $\rho_2 = \frac{|a-\varepsilon x|}{\varepsilon}$. Поэтому

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = |a-\varepsilon x|.$$

Возведем обе части этого равенства в квадрат и преобразуем полученное выражение, используя соотношения (16.3) и (16.8):

$$(x-c)^2 + y^2 = a^2 - 2a\varepsilon x + \varepsilon^2 x^2,$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = a^2 - 2a\frac{c}{a}x + \frac{c^2}{a^2}x^2,$$

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2}x^2 + y^2 = a^2 - c^2,$$

$$\frac{b^2}{a^2}x^2 + y^2 = b^2.$$

Разделив обе части этого равенства на b^2, окончательно получим $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Таким образом, точка M лежит на эллипсе. Аналогично доказывается такое же утверждение для фокуса F_1 и директрисы d_1. Мы доказали следующую теорему.

Теорема (директориальное свойство эллипса). *Эллипс представляет собой множество всех точек плоскости, для которых отношение расстояния до точки (фокуса) к расстоянию до прямой (директрисы), не содержащей эту точку, является постоянным числом (эксцентриситетом), меньшим единицы.*

Пример 1. *Найти каноническое уравнение эллипса, если расстояние между его фокусами равно 12, а уравнения директрис имеют вид* $x = \pm\frac{50}{3}$.

Решение. Так как расстояние между фокусами равно $2c$, то из условия следует, что $c = 6$. Уравнения директрис имеют вид $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$, но $\varepsilon = \frac{c}{a}$, поэтому $\frac{a^2}{c} = \frac{50}{3}$. Отсюда $a^2 = 100$, $a = 10$. По формуле (19.3) $b^2 = a^2 - c^2$. Поэтому $b^2 = 100 - 36 = 64$. Таким образом, искомое уравнение имеет вид $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$.

§ 17. ГИПЕРБОЛА И ЕЕ СВОЙСТВА

В настоящем параграфе мы познакомимся со свойствами еще одной кривой второго порядка, так называемой гиперболой.

Определение 1. *Гиперболой называется множество точек плоскости, для каждой из которых модуль разности расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2, принадлежащих той же плоскости, является постоянной величиной, меньшей расстояния между точками F_1 и F_2.*

Точки F_1 и F_2, как и в случае эллипса, будем называть *фокусами*. Очевидно, следует предполагать, что фокусы не совпадают друг с другом. Пусть $|F_1F_2| = 2c$, а модуль разности расстояний от точки гиперболы до фокусов равен $2a$. Тогда, как следует из определения,

$$a < c. \tag{17.1}$$

Из неравенств, связывающих стороны треугольника, следует, что не существует таких точек M, для которых $\left||F_1M| - |F_2M|\right| < 2c$. Заметим, что эта разность равна $2c$ в том и только в том случае, когда точка M лежит на прямой F_1F_2 и не принадлежит отрезку между фокусами. Будем также предполагать, что $a \neq 0$. В противном случае выполнялось бы равенство $|F_1M| = |F_2M|$, а точки, удовлетворяющие этому условию, образуют серединный перпендикуляр отрезка F_1F_2.

Выведем уравнение гиперболы. Как и в случае эллипса, введем прямоугольную декартову систему координат, которую также будем называть *канонической*, ось абсцисс которой содержит фокусы F_1 и F_2, а ось ординат совпадает с серединным перпендикуляром отрезка F_1F_2 (рис. 67). В этой системе запишем координаты фокусов: $F_1(-c;\ 0)$, $F_2(c;\ 0)$. Точка $M(x;\ y)$ в том и только в том случае лежит на гиперболе, когда ее координаты удовлетворяют уравнению:

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a. \qquad (17.2)$$

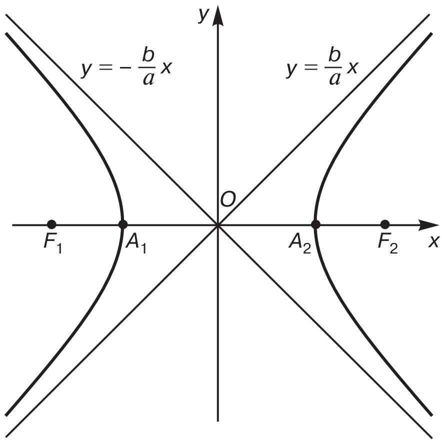


Рис. 67

Упростим это уравнение. Раскроем модуль: $\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a$ и «уединим» один из радикалов: $\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm 2a$. Возведем обе части полученного уравнения в квадрат:

$$(x+c)^2+y^2 = (x-c)^2+y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+4a^2.$$

После упрощений получим $cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$. Еще раз возведем обе части в квадрат:

$$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$

или

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2).$$

В силу неравенства (17.1) $c^2-a^2>0$ поэтому существует число b, для которого

$$b^2=c^2-a^2. \tag{17.3}$$

Тогда $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$. Разделив обе части этого равенства на b^2, окончательно получим

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{17.4}$$

Таким образом, координаты любой точки гиперболы удовлетворяют уравнению (17.4). Покажем обратное. Возьмем произвольную точку $M(x;\,y)$, координаты которой являются решением этого уравнения. Пусть $r_1=|F_1M|$, $r_2=|F_2M|$. Эти числа будем называть *фокальными радиусами* точки M. Нам следует показать, что $|r_1-r_2|=2a$. Из уравнения (17.4) следует, что

$$|x|\ge a, \tag{17.5}$$

$$|y|=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}. \tag{17.6}$$

Так как $r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$, то, заменив в этом выражении y по формуле (17.6), получим

$$r_2=\sqrt{(x+c)^2+b^2\frac{a^2-x^2}{a^2}}=\frac{1}{a}\sqrt{a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+b^2a^2-b^2x^2}=$$

$$=\frac{1}{a}\sqrt{(a^2+b^2)x^2-2a^2cx+a^2(c^2-b^2)}.$$

Из формулы (17.3) следует, что $a^2+b^2=c^2$, $c^2-b^2=a^2$. Поэтому

$$r_2=\frac{1}{a}\sqrt{c^2x^2-2a^2cx+a^4}=\frac{1}{a}\sqrt{(cx-a^2)^2}.$$

Таким образом,

$$r_2=\left|\frac{c}{a}x-a\right|. \tag{17.7}$$

Аналогично показывается, что

$$r_1 = \left|\frac{c}{a}x + a\right|. \tag{17.8}$$

Раскроем модули в полученных формулах. Пусть $x \geq 0$. Тогда $\frac{c}{a}x + a > 0$, поэтому $r_1 = \frac{c}{a}x + a$. Из неравенства (17.5) следует, что $x \geq a$. Так как $c > a$, то, перемножая эти неравенства, получим $cx \geq a^2$. Отсюда следует, что $\frac{c}{a}x - a > 0$. Таким образом, $r_2 = \frac{c}{a}x - a$ и $|r_1 - r_2| = 2a$.

Пусть $x < 0$. Тогда $\frac{c}{a}x - a < 0$ и $r_2 = a - \frac{c}{a}x$. Из неравенства (17.5) следует, что $-x \geq a$; перемножая это неравенство с неравенством $c > a$, получим: $-cx \geq a^2$ или $\frac{c}{a}x + a < 0$. Таким образом, $r_1 = -\frac{c}{a}x - a$ и $|r_1 - r_2| = 2a$. И в первом, и во втором случаях модуль разности фокальных радиусов постоянен и равен $2a$. Уравнение (17.4) является уравнением гиперболы. Оно носит название *канонического*.

Рассмотрим свойства гиперболы, которые позволят построить ее изображение. Вначале найдем ее точки пересечения с осями канонической системы координат. Пусть точка $A(x_0; y_0)$ служит точкой пересечения гиперболы с осью абсцисс. Тогда из уравнения (17.4) следует, что $\frac{x_0^2}{a^2} = 1$, т. е. либо $x = a$, либо $x = -a$. Гипербола пересекается с осью абсцисс в двух точках $A_1(-a; 0)$ и $A_2(a; 0)$. Она не пересекает оси ординат. Действительно, если точка $B(0; y_0)$ лежит на гиперболе, то число y_0 удовлетворяет уравнению $\frac{y^2}{b^2} = -1$, которое не имеет действительных корней. Точки A_1 и A_2 называются *вершинами* гиперболы, а числа a и b — ее *действительной и мнимой полуосями*.

Если точка $M(x; y)$ лежит на гиперболе, то, как следует из ее канонического уравнения, точки $M_1(-x; y)$, $M_2(x; -y)$ и $M_3(-x; -y)$ также лежат на гиперболе. Отсюда следует, что гипербола симметрична относительно осей и центрально симметрична относительно начала канонической системы координат. Поэтому достаточно построить точки гиперболы, лежащие в первой координатной четверти, а затем отразить их симметрично относительно осей и начала системы координат. Из формулы (17.6) следует, что в этой четверти гипербола совпадает с графиком функции $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$. Средствами математического анализа доказывается, что при $x \geq a$ эта функция является непрерывной, гладкой и возрастающей. Кроме того, она имеет асимптоту. Как доказывается в курсе математического анализа, прямая $y=kx+p$ тогда и только тогда служит асимптотой функции $y=f(x)$ при $x \to \infty$, когда $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$, $p=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)$. В данном случае

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{b\sqrt{x^2-a^2}}{ax}=\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}=\frac{b}{a},$$

$$p=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{b\sqrt{x^2-a^2}}{a}-\frac{bx}{a}\right)=\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-a^2-x^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x}=0.$$

Таким образом, прямая $y=\frac{b}{a}x$ — асимптота гиперболы в первой координатной четверти. Так как гипербола симметрична относительно координатных осей, то эта же прямая служит ее асимптотой в третьей четверти, а прямая $y=-\frac{b}{a}x$ — во второй и четвертой четвертях. Гипербола изображена на рис. 67.

Укажем способ построения точек гиперболы циркулем и линейкой. Пусть F_1 и F_2 — ее фокусы, A_1 и A_2 — точки пересечения с осью абсцисс. Построим окружность α с центром в точке F_2 радиуса r. Затем увеличим раствор циркуля на длину отрезка A_1A_2 и построим окружность β с центром в точке F_1 с радиусом $r+A_1A_2$. Ясно, что точки пересечения окружностей α и β лежат на гиперболе. Меняя радиус r, можно построить любое число точек гиперболы (рис. 68).

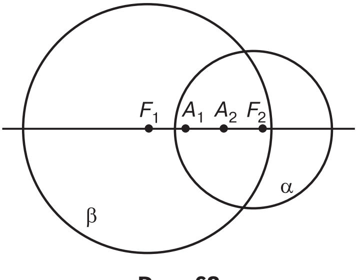


Рис. 68

Гипербола, как и эллипс, обладает директориальным свойством.

Определение 2. *Эксцентриситетом гиперболы называется* *число* ε, *равное отношению расстояния между фокусами к модулю разности фокальных радиусов любой точки гиперболы*:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \tag{17.9}$$

Из неравенства (17.1) следует, что для гиперболы $\varepsilon > 1$ (сравните, для эллипса эксцентриситет меньше единицы). Выясним, как меняется форма гиперболы, если ее эксцентриситет принимает значения от 1 до $+\infty$. Тогда из формулы (17.9) получим $a = \frac{c}{\varepsilon}$. Пусть $\varepsilon \to 1$, тогда $a \to c$. Как мы уже отмечали, в этом случае гипербола «сжимается», ее ветви приближаются к двум лучам оси абсцисс, начала которых лежат в ее фокусах. При $\varepsilon \to +\infty$ $a \to 0$, ветви гиперболы «распрямляются» к серединному перпендикуляру отрезка F_1F_2, т. е. к оси ординат.

Определение 3. *Прямые*

$$d_1 : x = -\frac{a}{\varepsilon}, \ \ d_2 : x = \frac{a}{\varepsilon} \tag{17.10}$$

называются директрисами гиперболы.

Считается, что директриса d_1 соответствует фокусу F_1, а d_2 — фокусу F_2. Так как $\varepsilon > 1$, то $\frac{a}{\varepsilon} < a$. Поэтому директрисы пересекают ось абсцисс во внутренних точках отрезка, заключенного между вершинами гиперболы (рис. 69). Докажем директориальное свойство гиперболы.

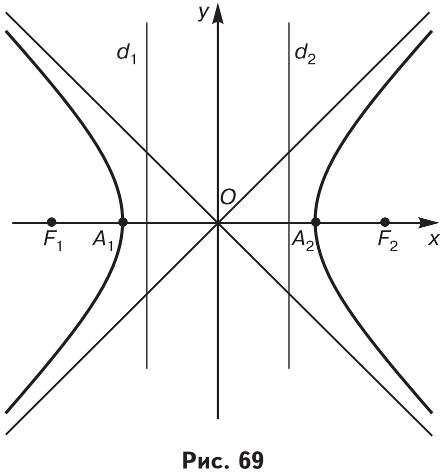


Рис. 69

Теорема (директориальное свойство гиперболы). *Гипербола представляет собой множество всех точек плоскости, для каждой из которых отношение расстояния от этой точки до фокуса к расстоянию до директрисы, соответствующей этому фокусу, является постоянным числом, равным эксцентриситету.*

Доказательство. Пусть дана гипербола. Будем предполагать, что на плоскости выбрана ее каноническая система координат. Рассмотрим точку $M(x; y)$, лежащую на гиперболе. Обозначим через ρ_1 и ρ_2 расстояния от нее до директрис d_1 и d_2. Из формулы для вычисления расстояния от точки до прямой (§ 14) следует, что $\rho_1 = \left|x + \frac{a}{\varepsilon}\right| = \frac{|a + \varepsilon x|}{\varepsilon}$, $\rho_2 = \left|x - \frac{a}{\varepsilon}\right| = \frac{|a - \varepsilon x|}{\varepsilon}$. Найдем отношения $\frac{r_1}{\rho_1}$ и $\frac{r_2}{\rho_2}$ где r_1 и r_2 — фокальные радиусы точки M. Из равенств (17.7)—(17.9) получим $r_1 = |a + \varepsilon x|$ и $r_2 = |a - \varepsilon x|$. Поэтому $\frac{r_1}{\rho_1} = \frac{r_2}{\rho_2} = \varepsilon$.

Покажем обратное. Пусть отношение расстояния от некоторой точки M до фокуса гиперболы к расстоянию от M до соответствующей директрисы равно эксцентриситету. Проверим, что точка лежит на гиперболе. Доказательство проведем для фокуса F_1 и директрисы d_1. Для вторых фокуса и директрисы рассуждения проводятся аналогично. Пусть даны координаты точки: $M(x; y)$. Тогда $r_1 = |MF_1| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$. Расстояние ρ_1 до директрисы d_1 равно $\rho_1 = \frac{|a + \varepsilon x|}{\varepsilon}$. Так как $\frac{r_1}{\rho_1} = \varepsilon$, то $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = |a + \varepsilon x|$. Отсюда

$$(x+c)^2 + y^2 = \left(a + \frac{c}{a}x\right)^2,$$

$$a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2,$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Так как по формуле (17.3) $b^2 = c^2 - a^2$, то $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, или $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Точка M принадлежит гиперболе, теорема доказана.

Директориальные свойства эллипса и гиперболы позволяют иначе подойти к определению этих кривых. Из доказанных теорем следует, что если на плоскости даны прямая (директриса) и точка (фокус), которая не лежит на этой прямой, то множество всех точек плоскости, для каждой из которых отношение расстояния до фокуса к расстоянию до директрисы равно постоянному числу, представляет собой эллипс, если это число меньше единицы, и гиперболу, если оно больше единицы. Ответ на вопрос, какой вид имеет это множество, если отношение равно единице, будет дан в следующем параграфе.

Пример 1. *Доказать, что директрисы гиперболы проходят через основания перпендикуляров, опущенных из соответствующих фокусов на асимптоты.*

Решение. Пусть гипербола задана своим каноническим уравнением. Доказательство проведем для фокуса $F_2(c;\ 0)$ и асимптоты l: $y=\frac{b}{a}x$. Обозначим через n перпендикуляр, опущенный из F_2 на l, а через N — точку пересечения l и n. Покажем, что N лежит на директрисе d_2: $x=\frac{a}{\varepsilon}$ (рис. 70). Уравнение асимптоты можно представить в виде $bx-ay=0$. Ее направляющий вектор имеет координаты $\vec{p}\{a;b\}$ (лемма, § 13). Вектор $\vec{p}$ служит нормальным вектором прямой n. Этот перпендикуляр проходит через $F_2(c;\ 0)$. Составим его уравнение по точке и нормальному вектору (§ 14): $a(x-c)+by=0$, или $ax+by-ac=0$. Найдем абсциссу точки пересечения прямых l и n. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} bx-ay=0,\\ ax+by-ac=0. \end{cases}$$

Умножая первое уравнение на b, а второе на a, и складывая их, получим $(a^2+b^2)x-a^2c=0$. Так как $a^2+b^2=c^2$ и $\varepsilon=\frac{c}{a}$ ((17.3) и (17.9)), то $x=\frac{a^2c}{a^2+b^2}=\frac{a^2}{c}=\frac{a}{\varepsilon}$. Точка N лежит на директрисе d_2. Аналогично это же утверждение доказывается для фокуса F_2 и асимптоты d_1: $y=-\frac{b}{a}x$, а также фокуса F_1 и асимптот $y=\pm\frac{b}{a}x$.

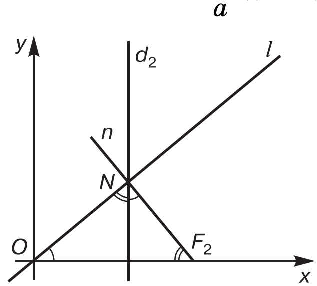


Рис. 70

§ 18. ПАРАБОЛА, ПОЛЯРНЫЕ УРАВНЕНИЯ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В предыдущих параграфах мы доказали директориальные свойства эллипса и гиперболы. Из них следует, что кривая в том и только в том случае является эллипсом или гиперболой, когда для точек этих кривых выполнено такое условие: отношение расстояния до фокуса к расстоянию до директрисы, соответствующей этому фокусу, является постоянным числом (эксцентриситетом). Для эллипса эксцентриситет меньше единицы, а для гиперболы — больше. В настоящем параграфе мы ответим на вопрос, какой вид имеет множество точек, для каждой из которых отношение расстояния до точки к расстоянию до прямой, не содержащей эту точку, равно единице. Мы покажем, что такое множество точек хорошо известно из школьного курса алгебры, оно совпадает с параболой.

Определение 1. *Множество точек плоскости, для каждой из которых расстояние до фиксированной точки плоскости равно расстоянию до фиксированной прямой, не содержащей эту точку, называется параболой.*

Точку и прямую, которые упомянуты в определении, будем называть соответственно *фокусом* и *директрисой* параболы. Будем также считать, что эксцентриситет параболы равен единице. Нетрудно выяснить, что представляет собой множество точек, удовлетворяющих определению 1, если фокус лежит на директрисе. Если F — фокус, d — директриса, а M — точка множества, то в этом случае отрезок FM перпендикулярен d. Поэтому такое множество совпадает с прямой, проходящей через фокус и перпендикулярной директрисе.

Выведем уравнение параболы. Для этого выберем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы ось абсцисс проходила через фокус F и была перпендикулярна директрисе d параболы, а ее начало O совпадало с серединой отрезка, заключенного между F и точкой Q пересечения оси абсцисс и директрисы. Направление оси абсцисс определяется вектором $\overrightarrow{QF}$ (рис. 71). Такую систему координат будем на-

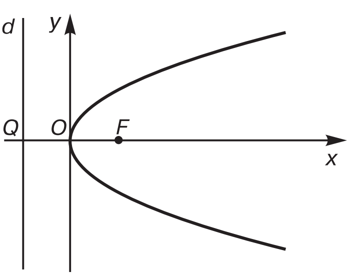


Рис. 71

зывать *канонической*. Обозначим через p длину отрезка FQ, Число p называется *фокальным параметром* параболы. Тогда в канонической системе координаты фокуса F равны $\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, а уравнение директрисы d имеет вид $x+\frac{p}{2}=0$.

Рассмотрим произвольную точку $M(x;\ y)$. Расстояние ρ от M до F равно $\rho=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$. Длина δ перпендикуляра, опущенного из M на директрису d, согласно формуле для вычисления расстояния от точки до прямой (§ 14), равна $\left|x+\frac{p}{2}\right|$. Поэтому из определения 1 следует, что точка M в том и только в том случае лежит на параболе, когда

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|. \tag{18.1}$$

Уравнение (18.1) представляет собой уравнение параболы. Нам необходимо его упростить. Для этого возведем обе части в квадрат:

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2. \tag{18.2}$$

Отсюда следует, что

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}. \tag{18.3}$$

После приведения подобных членов получим

$$y^2=2px. \tag{18.4}$$

Таким образом, если точка принадлежит параболе, то ее координаты удовлетворяют уравнению (18.4). Нетрудно убедиться в обратном. Если координаты точки M служат решением уравнения (18.4), то они удовлетворяют уравнениям (18.3) и (18.2). Извлекая квадратный корень из обеих частей равенства (18.2), получим, что координаты точки M удовлетворяют (18.1). Точка лежит на параболе.

Уравнение (18.4) носит название *канонического уравнения* параболы. Отметим ее свойства. Начало O канонической системы координат лежит на параболе, так как $x = y = 0$ — решение уравнения (18.4). Эта точка называется вершиной параболы. Парабола симметрична относительно оси абсцисс и не симметрична относительно оси ординат канонической системы. Действительно, если координаты точки $M(x;\ y)$ удовлетворяют уравнению (18.4), то координаты точки $M'(x;\ -y)$ также удовлетворяют уравнению (18.4), а координаты точки $M''(-x;\ y)$ не являются решением этого уравнения. Таким образом, для построения параболы достаточно изобразить график степенной функции $y = \sqrt{2px}$, а затем отобразить его симметрично относительно оси абсцисс. Средствами математического анализа доказывается, что эта функция непрерывная, гладкая и бесконечно возрастающая. Парабола изображена на рисунке 71.

Рассмотрим способ построения точек параболы. Пусть F — ее фокус, а d — директриса. Проведем ось симметрии параболы, т. е. прямую l, содержащую F и перпендикулярную d. Затем построим несколько прямых, перпендикулярных оси. На каждой прямой определим две точки пересечения с окружностью, центр которой находится в фокусе F, а радиус равен расстоянию между этой прямой и директрисой (см. рис. 72). Ясно, что эти точки лежат на параболе.

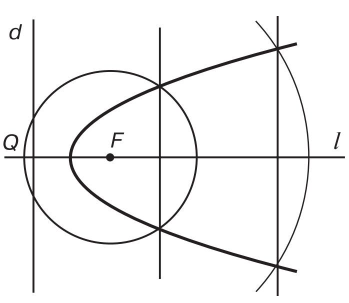


Рис. 72

Пример 1. *В параболу вписан равнобедренный треугольник так, что его вершина, общая для боковых сторон, совпадает с вершиной параболы. Доказать, что основание треугольника перпендикулярно оси параболы. Найти длины сторон равнобедренного прямоугольного треугольника, вписанного указанным способом в параболу, заданную своим каноническим уравнением* $y^2 = 2px$.

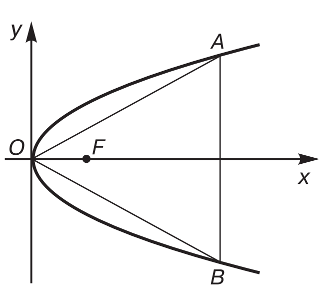


Рис. 73

Решение. Пусть OAB — данный треугольник, где O — вершина параболы (рис. 73). Пусть координаты вершин A и B равны $(x_1;\ y_1)$ и $(x_2;\ y_2)$. Так как $y^2 = 2px$ — каноническое уравнение параболы, то

$$x_1 > 0, \ \ x_2 > 0. \tag{18.5}$$

В канонической системе координат $|OA| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, $|OB| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$. Из условия $|OA| = |OB|$ следует, что $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$. Точки A и B лежат на параболе, поэтому $x_1^2 + 2px_1 = x_2^2 + 2px_2$. Отсюда $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 2p) = 0$. В силу неравенств (18.5) $(x_1 + x_2 + 2p) > 0$, поэтому $x_1 = x_2$. Точки A и B лежат на прямой, параллельной оси ординат. Первое утверждение доказано.

Пусть OAB — равнобедренный прямоугольный треугольник. Тогда координаты точек A и B имеют вид $A\left(\dfrac{y^2}{2p}; y\right)$, $B\left(\dfrac{y^2}{2p}; -y\right)$. Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ равно нулю. Следовательно, $\dfrac{y^4}{4p^2} - y^2 = 0$. Отсюда получим $y^2 = 4p^2$ и координаты точек A и B равны $(2p;\ 2p)$ и $(2p;\ -2p)$. Таким образом, $|OA| = |OB| = 2\sqrt{2}p$, $|AB| = 4p$.

В § 9 были введены полярная система координат и полярные координаты точек плоскости. Выведем уравнения эллипса, гиперболы и параболы в полярной системе координат. Пусть кривая γ представляет собой эллипс, одну ветвь гиперболы, либо параболу. Пусть F — фокус, а d — директриса кривой γ, соответствующая этому фокусу. При этом будем предполагать, что в случае гиперболы фокус и директриса выбраны так, что рассматриваемая ветвь кривой лежит в той же полуплоскости относительно d, что и фокус F. Будем также предполагать, что полюс полярной системы координат совпадает с F, а полярная ось l лежит на оси симметрии и не пересекает директрису d (рис. 74). Восставим в точке F перпендикуляр к l, P — точка его пересечения с γ. Обозначим через p длину отрезка FP. Число p будем называть фокальным параметром γ.

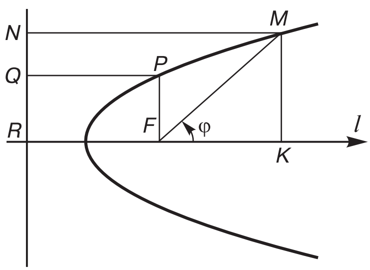


Рис. 74

Обозначим через ρ и φ полярные координаты точки M. Напомним, что в нашем случае $\rho = |FM|$, а φ — ориентированный угол между полярной осью l и вектором $\overrightarrow{FM}$. Обозначим через Q и N проекции точек P и M на директрису d, а через K — проекцию M на ось симметрии кривой γ (рис. 74). Тогда если R — точка пересечения директрисы d и оси симметрии l, то $|NM| = |RK| = |RF| + pr_l\,\overrightarrow{FM}$. Так как проекция $\overrightarrow{FM}$ на l имеет вид $pr_l\,\overrightarrow{FM} = |\overrightarrow{FM}|\cos\varphi = \rho\cos\varphi$, а $|RF| = |QP|$, то $|NM| = |QP| + \rho\cos\varphi$. Воспользуемся директориальным свойством кривой второго порядка. Если ε — эксцентриситет γ, то $\dfrac{p}{|QP|} = \dfrac{\rho}{|NM|} = \varepsilon$. Поэтому $|QP| = \dfrac{p}{\varepsilon}$, а $|NM| = \dfrac{\rho}{\varepsilon}$. Таким образом, $\dfrac{p}{\varepsilon} = \dfrac{\rho}{\varepsilon} + \rho\cos\varphi$. Помножив это соотношение на ε и выделив ρ, окончательно получим

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}. \tag{18.6}$$

Уравнение (18.6) называется *полярным уравнением* кривой второго порядка γ.

Пусть $\varepsilon < 1$. Тогда γ представляет собой эллипс. В этом случае $1 - \varepsilon\cos\varphi > 0$ для любого φ. Так как полярный радиус всегда положителен, для любого угла φ существует значение ρ, определяемое формулой (18.6), для которого точка $M(\rho;\ \varphi)$ лежит на эллипсе. Любой луч с началом в полюсе полярной системы координат пересекает эллипс (рис. 75). Если $\varepsilon = 1$, то γ представляет собой параболу. В этом случае $1 - \cos\varphi \geq 0$ для любого φ, причем $1 - \cos\varphi = 0$ при $\varphi = 0$. Таким образом, в уравнении (18.6) φ принимает все значения на полуинтервале $(-\pi;\ \pi]$, за исключением 0. Любой луч с началом в фокусе F, за исключением полярной оси, пересекает параболу (рис. 76). Рассмотрим случай, когда $\varepsilon > 1$. Тогда γ представляет собой ветвь гиперболы. Как следует из уравнения (18.6), угол φ удовлетворяет неравенству $1 - \varepsilon\cos\varphi > 0$. Отсюда

$$\cos\varphi < \frac{1}{\varepsilon}. \tag{18.7}$$

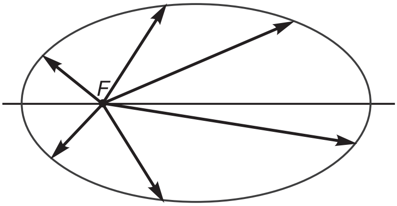


Рис. 75

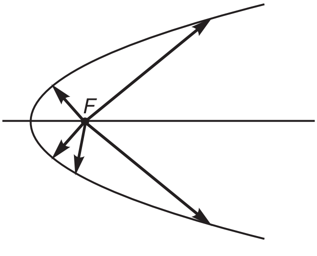


Рис. 76

Решим это неравенство. Пусть $\cos\varphi_0 = \dfrac{1}{\varepsilon}$. Так как $\operatorname{tg}^2\varphi_0 = \dfrac{1}{\cos^2\varphi_0} - 1$, то $\operatorname{tg}^2\varphi_0 = \varepsilon^2 - 1$. Воспользуемся формулами, выражающими эксцентриситет гиперболы через ее полуоси и расстояние между фокусами (§ 17): $\operatorname{tg}^2\varphi_0 = \dfrac{b^2}{a^2}$, т. е. $\operatorname{tg}\varphi_0 = \pm\dfrac{b}{a}$. Нетрудно видеть, что φ является решением неравенства (18.7) в том и только в том случае, когда $\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} < \varphi \le \pi$, $-\pi < \varphi < \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$. Геометрически это означает, что если угол φ принадлежит отрезку $[-\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}; \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}]$, то луч, составляющий угол φ с полярной осью и с началом в фокусе F, не пересекает ветвь гиперболы. Отметим, что лучи, образующие с полярной осью углы, равные $-\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$ и $\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$, параллельны асимптотам гиперболы (рис. 77). Можно доказать, что если на плоскости введены обобщенные полярные координаты (§ 9), то уравнение (18.6) в случае $1 - \varepsilon\cos\varphi < 0$ задает вторую ветвь гиперболы.

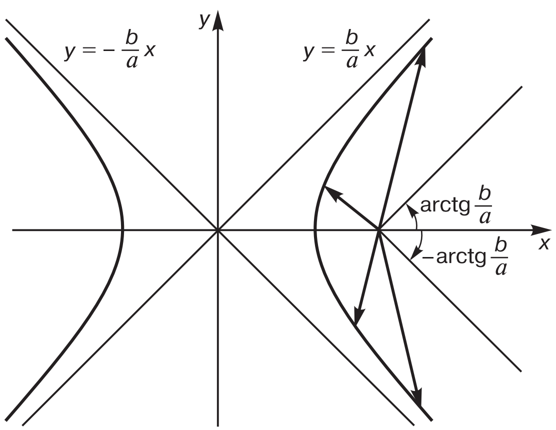


Рис. 77

§ 19. ИССЛЕДОВАНИЕ КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПО ЕЕ ОБЩЕМУ УРАВНЕНИЮ, АСИМПТОТИЧЕСКИЕ НАПРАВЛЕНИЯ, ЦЕНТРЫ И КАСАТЕЛЬНЫЕ КРИВОЙ

Как известно (см. § 11), под кривой второго порядка понимается множество точек, координаты которых в некоторой аффинной системе координат являются решениями алгебраического уравнения второго порядка с двумя неизвестными, т. е. уравнения

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0, \qquad (19.1)$$

где коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} не равны нулю одновременно. Было также показано, что порядок уравнения алгебраической кривой не зависит от выбора системы координат. В настоящем параграфе мы изучим некоторые свойства кривой второго порядка по ее общему уравнению (19.1).

Вопросы исследования многих свойств кривой зависят от решения задачи о ее взаимном расположении с прямой линией. Пусть даны кривая второго порядка γ своим общим уравнением (19.1) и прямая l, проходящая через точку $M_0(x_0;\ y_0)$ и параллельная вектору $\vec{p}\{\alpha; \beta\}$. Требуется найти их точки пересечения. Рассмотрим параметрические уравнения прямой: $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$ (§ 13). Заменим значения x и y в уравнении γ на их выражения через параметр t, а затем решим полученное уравнение относительно t. Найденные корни будут параметрами точек пересечения γ и l. Проведем указанную замену:

$$a_{11}(x_0 + \alpha t)^2 + 2a_{12}(x_0 + \alpha t)(y_0 + \beta t) + a_{22}(y_0 + \beta t)^2 +$$
$$+ 2a_{10}(x_0 + \alpha t) + 2a_{20}(y_0 + \beta t) + a_{00} = 0.$$

После преобразований получим

$$Pt^2 + 2Qt + R = 0, \qquad (19.2)$$

где

$$P = a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2, \qquad (19.3)$$

$$Q = a_{11}\alpha x_0 + a_{12}\alpha y_0 + a_{12}\beta x_0 + a_{22}\beta y_0 + a_{10}\alpha + a_{20}\beta, \qquad (19.4)$$

$$R = a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{10}x_0 + 2a_{20}y_0 + a_{00}. \qquad (19.5)$$

Если $P \neq 0$, то (19.2) представляет собой квадратное уравнение, у которого либо два действительных, либо один, либо два комплексно сопряженных корня. Поэтому γ и l имеют либо две общие точки, либо одну (или, как говорят, две совпавшие вещественные точки), либо ни одной вещественной, но, как принято говорить, две так называемые комплексно сопряженные точки. Если $P = 0$, $Q \neq 0$, то уравнение (19.2) линейное, оно имеет один вещественный корень. В этом случае прямая и кривая обладают единственной общей точкой. Ясно, что этот случай по сути отличается от предыдущего случая двух совпавших вещественных точек. Если $P = Q = 0$, а $R \neq 0$, то уравнение (19.2) не имеет корней, а γ и l — общих точек. И наконец, если $P = Q = R = 0$, то любое значение t — корень уравнения, а все точки прямой l принадлежат γ.

Из формулы (19.3) следует, что коэффициент P уравнения (19.2) не зависит от координат начальной точки прямой. Он является однородным многочленом второго порядка от координат α и β направляющего вектора прямой. Поэтому если координаты некоторого вектора $\vec{m}$ обращают коэффициент P в нуль, то он также равен нулю при подстановке в (19.3) координат α и β любого вектора, коллинеарного $\vec{m}$

Определение 1. *Прямая l называется прямой асимптотического направления кривой γ, если координаты любого ее направляющего вектора обращают коэффициент P уравнения* (19.2) *в нуль.*

Из введенного определения не следует, что координаты направляющего вектора прямой, обращая в нуль коэффициент P в некоторой системе координат, будут также обладать этим свойством в любой другой системе координат. Но, как было показано выше, прямая имеет асимптотическое направление в том и только в том случае, когда либо не имеет с кривой второго порядка γ общих точек, либо имеет только одну такую точку, либо целиком ей принадлежит γ. Поэтому свойство прямой иметь асимптотическое направление имеет геометрический характер. Оно не зависит от выбора системы координат.

Определение 2. *Любой направляющий вектор прямой асимптотического направления будем называть вектором асимптотического направления, а класс таких коллинеарных между собой векторов — асимптотическим направлением.*

Из определений 1 и 2, а также из формулы (19.3) следует, что вектор $\vec{a}\{\alpha;\beta\}$ тогда и только тогда имеет асимптотическое направление, когда он отличен от нулевого и

$$a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0. \tag{19.6}$$

Мы получили однородное уравнение второго порядка с неизвестными α и β. Если существует какое-либо его ненулевое решение $(\alpha_0;\beta_0)$, то все пары чисел $(t\alpha_0;t\beta_0)$, где $t \neq 0$, также служат решениями (19.6). Поэтому вектор $\vec{m}\{\alpha, \beta\}$ определяет асимптотическое направление прямой. Выясним, сколько асимптотических направлений может иметь кривая второго порядка. Для этого найдем число непропорциональных друг другу решений уравнения (19.6).

Рассмотрим вначале случай, когда $a_{11} = a_{22} = 0$. Тогда $a_{12} \neq 0$ и уравнение (19.6) преобразуется к виду $\alpha \cdot \beta = 0$. Полученное уравнение имеет два непропорциональных друг другу решения: (1; 0) и (0; 1), а все его решения имеют вид $(t;\ 0)$ или $(0;\ t)$, где t — любое действительное число, отличное от нуля. Кривая имеет два асимптотических направления.

Во втором случае предположим, что $a_{11} \neq 0$. Тогда пара чисел $(t;\ 0)$, где $t \neq 0$, не является решением уравнения (19.6). Действительно, если подставить эти числа в уравнение, то получим противоречивое равенство $a_{11}t^2 = 0$. Таким образом, в рассматриваемом случае для любого решения $(\alpha; \beta)$ уравнения (19.6) $\beta \neq 0$. Поэтому, разделив это уравнение на β, мы не потеряем его решений. Обозначим $\frac{\alpha}{\beta} = \lambda$, тогда

$$a_{11}\lambda^2 + 2a_{12}\lambda + a_{22} = 0. \tag{19.7}$$

Мы получили квадратное уравнение относительно λ. Его дискриминант равен $D = 4a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22}$. Обозначим через Δ определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{19.8}$$

Легко видеть, что $\Delta = -4D$. Таким образом, если $\Delta < 0$, то уравнение (19.7) имеет два решения, а кривая γ — два асимптотических направления. Если $\Delta = 0$, то такое направление одно, а в случае $\Delta > 0$ кривая не имеет асимптотических направлений.

В третьем случае, когда $a_{11} = 0$, но $a_{22} \neq 0$, для отыскания асимптотических направлений уравнение (19.6) следует делить на α^2. Аналогично рассуждая, придем к тому же результату: если $\Delta < 0$, то кривая имеет два асимптотических направления, если $\Delta = 0$, то это направление одно, если $\Delta > 0$, то таких направлений у кривой нет. Отметим также, что в первом случае, когда $a_{11} = a_{22} = 0$, $a_{12} \neq 0$ и кривая имеет два асимптотических направления, определитель (19.8) удовлетворяет неравенству $\Delta = -a_{12}^2 < 0$.

Таким образом, число асимптотических направлений кривой зависит от знака числа Δ. Покажем, что знак и условие равенства нулю этого числа не зависят от выбора аффинной системы координат. Для этого следует воспользоваться формулами (9.3) перехода от одной аффинной системы координат к другой (§ 9):

$$\begin{cases} x = mx' + ny' + p, \\ y = qx' + ry' + s, \end{cases} \tag{19.9}$$

где

$$\begin{vmatrix} m & n \\ q & r \end{vmatrix} \neq 0. \tag{19.10}$$

Для определения коэффициентов уравнения кривой в новой системе координат следует в общем уравнении (19.1) кривой второго порядка заменить неизвестные x, y на их выражения через x', y' по формулам (19.9). В новой системе координат уравнение кривой примет вид

$$a'_{11}x^2 + 2a'_{12}xy + a'_{22}y^2 + 2a'_{10}x + 2a'_{20}y + a'_{00} = 0,$$

где

$$a'_{11} = a_{11}m^2 + a_{12}mq + a_{22}q^2,$$
$$a'_{12} = a_{11}mn + a_{12}mr + a_{12}nq + a_{22}qr,$$
$$a'_{22} = a_{11}n^2 + a_{12}nr + a_{22}r^2.$$

После соответствующих вычислений получим

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{12} & a'_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m & n \\ q & r \end{vmatrix}^2 \tag{19.11}$$

(все вычисления проведите самостоятельно). В силу (19.10) отсюда следует, что равенство нулю определителя Δ и его знак не зависят от выбора аффинной системы координат на плоскости. Полученный результат можно было предвидеть, так как количество асимптотических направлений является внутренним, геометрическим свойством кривой второго порядка и оно одинаково в любой системе координат. Нами доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Кривая второго порядка в том и только в том случае имеет два асимптотических направления, когда в некоторой аффинной системе координат определитель* (19.8) *отрицателен. Такое направление одно, если этот определитель равен* *нулю. Кривая не имеет асимптотических направлений, если этот определитель положителен.*

Будем считать, что уравнение кривой мы рассматриваем в прямоугольной декартовой системе координат. Формулы (19.9) перехода от одной прямоугольной декартовой системы координат к другой имеют вид (9.5):

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - \varepsilon y'\sin\varphi + x_0, \\ y = x'\cos\varphi + \varepsilon y'\sin\varphi + y_0, \end{cases}$$

где $\varepsilon = 1$ или $\varepsilon = -1$ в зависимости от ориентаций ортонормированных базисов этих систем (§ 9). В этом случае из равенства (19.11) получим

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{12} & a'_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\varepsilon\sin\varphi \\ \sin\varphi & \varepsilon\cos\varphi \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta.$$

Таким образом, *при переходе от одной прямоугольной декартовой системы координат к другой значение определителя Δ не меняется*. Определитель Δ носит название *первого инварианта кривой второго порядка*.

Найдем асимптотические направления эллипса гиперболы и параболы. Нетрудно определить, что для эллипса первый инвариант Δ положителен. Для этого достаточно найти этот инвариант в случае канонического уравнения эллипса. *Кривые, для которых первый инвариант положителен, называются кривыми эллиптического типа. Такие кривые не имеют асимптотических направлений.*

Рассмотрим гиперболу, заданную своим каноническим уравнением $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Тогда инвариант Δ имеет вид $\Delta = -\dfrac{1}{a^2b^2}$. Так как $\Delta < 0$, гипербола имеет два асимптотических направления. В этом случае уравнение (19.7) принимает вид $\dfrac{1}{a^2}\lambda^2 - \dfrac{1}{b^2} = 0$. Его корнями являются $\lambda_1 = \dfrac{a}{b}$ и $\lambda_2 = -\dfrac{a}{b}$. Поэтому векторы асимптотических направлений имеют координаты $\{ta;\ tb\}$ и $\{ta;\ -tb\}$, где t — любое действительное число, отличное от нуля. Легко видеть, что они параллельны асимптотам гиперболы (§ 17). *Кривые, для которых первый инвариант отрицателен, называются* *кривыми гиперболического типа. Такие кривые имеют два асимптотических направления.*

Определим асимптотические направления параболы. Рассмотрим ее каноническое уравнение $y^2 = 2px$ и вычислим для нее первый инвариант: $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Таким образом, парабола имеет одно асимптотическое направление. Для его нахождения составим уравнение (19.7): $\beta^2 = 0$. Координаты векторов асимптотического направления параболы равны $\{t;\ 0\}$, где t — любое действительное число, отличное от нуля. Эти векторы параллельны оси параболы. *Кривые, для которых первый инвариант равен нулю, называются кривыми параболического типа. Такие кривые имеют одно асимптотическое направление.*

В дальнейшем под *центром* кривой будем понимать ее центр симметрии. Найдем способ определения ее центра по общему уравнению. Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма. *Пусть прямая задана своими параметрическими уравнениями:* $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t, \end{cases}$ *точкам* M_1 *и* M_2 *соответствуют значения параметра* t_1 *и* t_2. *Тогда начальная точка* $M_0(x_0;\ y_0)$ *в том и только в том случае совпадает с серединой отрезка* M_1M_2, *когда* $t_1 + t_2 = 0$.

Доказательство. Пусть координаты данных точек M_1 и M_2 равны $(x_1;\ y_1)$ и $(x_2;\ y_2)$. Тогда

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + \alpha t_1, \\ y_1 = y_0 + \beta t_1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = x_0 + \alpha t_2, \\ y_2 = y_0 + \beta t_2. \end{cases} \tag{19.12}$$

Точка $M_0(x_0;\ y_0)$ в том и только в том случае является серединой отрезка M_1M_2, когда $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = x_0$, $\dfrac{y_1 + y_2}{2} = y_0$. Подставим сюда соотношения (19.12): $\dfrac{2x_0 + \alpha(t_1 + t_2)}{2} = x_0$, $\dfrac{2y_0 + \beta(t_1 + t_2)}{2} = y_0$. Полученные равенства равносильны условию $t_1 + t_2 = 0$. Утверждение доказано.

Теорема 2. *Пусть кривая* γ *второго порядка задана общим уравнением*

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0.$$

Тогда точка $M_0(u;\ v)$ в том и только в том случае служит центром симметрии γ, когда координаты этой точки удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} a_{11}u + a_{12}v + a_{10} = 0, \\ a_{12}u + a_{22}v + a_{20} = 0. \end{cases} \tag{19.13}$$

Доказательство. Пусть $M_0(u;\ v)$ — центр симметрии кривой. Тогда любая прямая не асимптотического направления пересекает эту кривую в двух точках M_1 и M_2, которые симметричны относительно M_0. Если $\begin{cases} x = u + \alpha t, \\ y = v + \beta t, \end{cases}$ — параметрическое уравнение этой прямой, а t_1 и t_2 — параметры точек M_1 и M_2, то, согласно доказанной лемме, $t_1 + t_2 = 0$. В то же время t_1 и t_2 — корни квадратного уравнения (19.2). Тогда по теореме Виета коэффициент Q этого уравнения равен нулю. Из формулы (19.4) получим $a_{11}\alpha u + a_{12}\alpha v + a_{12}\beta u + a_{22}\beta v + a_{10}\alpha + a_{20}\beta = 0$, или $(a_{10}u + a_{12}v + a_{10})\alpha + (a_{12}u + a_{22}v + a_{20})\beta = 0$. Найденное равенство выполняется для координат α и β любого вектора не асимптотического направления. Поэтому оно справедливо только тогда, когда $a_{10}u + a_{12}v + a_{10} = a_{12}u + a_{22}v + a_{20} = 0$. Таким образом, u и v — решения системы (19.13).

Рассмотрим теперь произвольное решение u, v системы (19.13). Обозначим через l прямую не асимптотического направления, проходящую через точку $M_0(u;v)$. Пусть $\begin{cases} x = u + \alpha t, \\ y = v + \beta t \end{cases}$ — ее параметрические уравнения, а M_1 и M_2 — точки пересечения l с кривой. Тогда параметры t_1 и t_2 точек M_1 и M_2 являются решением квадратного уравнения (19.2). Из формул (19.4) и (19.13) следует, что второй коэффициент Q этого уравнения равен нулю. По теореме Виета $t_1 + t_2 = 0$. Поэтому согласно лемме 1 точка M_0 — середина отрезка M_1M_2. Так как наши рассуждения справедливы для любой прямой асимптотического направления, то M_0 — центр симметрии кривой γ. Теорема доказана.

Из системы (19.3) непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие. *Если центр кривой совпадает с началом координат, то* $a_{10} = a_{20} = 0$, *и ее общее уравнение имеет вид* $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{00} = 0$.

Как легко видеть, определитель системы (19.13) совпадает с первым инвариантом Δ кривой. Мы уже отмечали, что для кривых эллиптического и гиперболического типов $\Delta \neq 0$. Поэтому *кривые эллиптического и гиперболического типов имеют единственный центр симметрии*. Они носят название *центральных кривых второго порядка*. Для кривых параболического типа $\Delta = 0$. Эти кривые либо не имеют центров симметрии, либо имеют их бесконечно много. Такие кривые называются *нецентральными*. Проверьте самостоятельно, что парабола не имеет центров симметрии.

Пример 1. *Найти центры кривой* $x^2 + 2xy + y^2 - 2y + 8 = 0$.

Решение. В данном случае система (19.13) примет вид $\begin{cases} u+v-1=0, \\ u+v-1=0. \end{cases}$ Она имеет бесконечно много решений. Числа u и v в том и только в том случае являются решениями системы, когда $u+v-1=0$. Поэтому центры кривой образуют прямую линию $x+y-1=0$.

Определение 3. *Точка кривой второго порядка называется обыкновенной, если она не совпадает с ее центром симметрии. В противном случае она носит название особой.*

Легко видеть, что эллипс, гипербола и парабола состоят из обыкновенных точек.

Как известно из курса математического анализа, под касательной к кривой в точке M_0 понимается предельное положение секущей MM_0, при условии что точка M кривой стремится к M_0. Поэтому касательная представляет собой прямую, которая пересекает кривую в двух совпавших точках и имеет не асимптотическое направление. Касательные к кривой будем рассматривать только в ее обыкновенных точках.

Теорема 3. *Если* $M_0(x_0;\ y_0)$ *— обыкновенная точка кривой второго порядка, заданной своим общим уравнением, то уравнение касательной в этой точке имеет вид*

$$\begin{aligned}(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10})x + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20})y + \\ + a_{10}x_0 + a_{20}y_0 + a_{00} = 0.\end{aligned} \tag{19.14}$$

Доказательство. Касательная пересекает кривую в двух совпавших точках. Обозначим через α и β координаты направляющего вектора касательной. Если уравнение прямой имеет параметрический вид $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t, \end{cases}$ то параметры точек пересечения определяются как решения уравнения (19.2). Так как это уравнение имеет единственный корень, то его дискриминант $D = 4Q^2 - 4PR$ равен нулю. Таким образом, $Q^2 - PR = 0$. По условию точка $M_0(x_0;\, y_0)$ принадлежит кривой. Поэтому из формулы (19.5) следует, что $R = 0$. Итак, прямая l тогда и только тогда является касательной к кривой в ее точке $M_0(x_0;\, y_0)$, когда координаты x_0 и y_0 и координаты направляющего вектора α и β удовлетворяют условию $Q = 0$, или, как следует из (19.4):

$$(a_{10}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10})\alpha + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20})\beta = 0. \qquad (19.15)$$

Пусть $M(x;\, y)$ — произвольная точка касательной. Тогда вектор $\overrightarrow{M_0M}\{x - x_0;\, y - y_0\}$ коллинеарен ее направляющему вектору, поэтому $x - x_0 = \lambda\alpha;\quad y - y_0 = \lambda\beta$. Отсюда вытекает соотношение $(a_{10}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10})(x - x_0) + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20})(y - y_0) = 0$. Преобразуем полученное выражение:

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10})x + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20})y -$$
$$-a_{11}x_0^2 - 2a_{12}x_0y_0 - a_{22}y_0^2 - a_{10}x_0 - a_{20}y_0 - a_{00} = 0.$$

Точка M_0 принадлежит кривой, поэтому

$$-a_{11}x_0^2 - 2a_{12}x_0y_0 - a_{22}y_0^2 - a_{10}x_0 - a_{20}y_0 - a_{00} = a_{10}x_0 + a_{20}y_0 + a_{00}.$$

Таким образом, уравнение касательной примет вид

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10})x + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20})y + a_{10}x_0 + a_{20}y_0 + a_{00} = 0,$$

т. е. (19.14). Полученное уравнение является уравнением прямой, так как коэффициенты при x и y отличны от нуля в силу того, что точка M_0 — обыкновенная. Теорема доказана.

Найдем уравнения касательных к эллипсу, гиперболе и параболе. Пусть $M_0(x_0;\, y_0)$ — точка эллипса, определенного своим каноническим уравнением $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ Для уравнения данного эллипса $a_{11} = \dfrac{1}{a^2}$, $a_{22} = \dfrac{1}{b^2}$, $a_{00} = -1$, $a_{12} = a_{10} = a_{20} = 0$. Тогда из (19.14) получим $\dfrac{x_0}{a^2}x + \dfrac{y_0}{b^2}y = 1$. Аналогично доказывается, что уравнение касательной в точке $M_0(x_0;\, y_0)$ гиперболы, заданной своим каноническим уравнением, можно представить как $\frac{x_0}{a^2}x-\frac{y_0}{b^2}y=1$. В случае параболы $y^2=2px$ уравнение такой же касательной имеет вид

$$yy_0=p(x+x_0). \qquad (19.16)$$

Касательные к кривым второго порядка обладают интересными геометрическими свойствами. Установим одно из них — оптическое свойство параболы.

Пример 2 (оптическое свойство параболы). *Пусть M_0 — точка параболы, F — ее фокус. Доказать, что касательная к параболе в точке M_0 образует равные углы как с прямой M_0F, так и с прямой, проходящей через M_0 и параллельной оси параболы.*

Решение. Будем считать, что данная парабола имеет каноническое уравнение $y^2=2px$, координаты точки M_0 равны $(x_0;\ y_0)$ (рис. 78). В этом случае фокус F имеет координаты $\left(\frac{p}{2};0\right)$ (§ 18). Составим уравнение прямой M_0F: $\begin{vmatrix} x-\frac{p}{2} & y \\ x_0-\frac{p}{2} & y_0 \end{vmatrix}=0$,

или $y_0x+\left(\frac{p}{2}-x_0\right)y-\frac{p}{2}y_0=0$. Обозначим через m прямую, проходящую через M_0 и параллельную оси параболы. Для параболы, заданной каноническим уравнением, ее ось совпадает с осью абсцисс, поэтому m задается уравнением $y-y_0=0$. Пусть l — касательная к параболе в точке M_0. Ее уравнение имеет вид (19.16). Найдем косинусы углов φ_1 и φ_2 между прямыми l и M_0F, l и m (§ 14):

$$\cos\varphi_1=\frac{\left|py_0-\frac{p}{2}y_0+x_0y_0\right|}{\sqrt{p^2+y_0{}^2}\sqrt{y_0{}^2+(\frac{p}{2}-x_0)^2}},$$

$$\cos\varphi_2=\frac{|y_0|}{\sqrt{p^2+y_0{}^2}}.$$

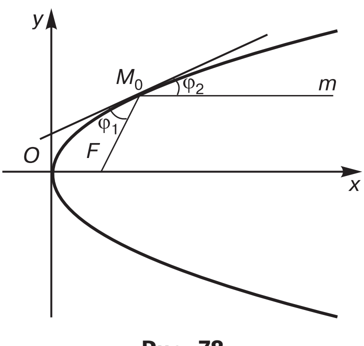


Рис. 78

Углы φ_1 и φ_2 лежат в первой четверти, поэтому для доказательства их равенства достаточно проверить, что их косинусы равны. Преобразуем $\cos\varphi_1$, учитывая при этом, что $y_0^2 = 2px_0$:

$$\cos\varphi_1 = \frac{\left|\frac{p}{2}y_0 + x_0 y_0\right|}{\sqrt{p^2 + y_0^2}\sqrt{2px_0 + \frac{p^2}{4} - px_0 + x_0^2}} =$$

$$= \frac{|y_0|\left|x_0 + \frac{p}{2}\right|}{\sqrt{p^2 + y_0^2}\sqrt{\left(x_0 + \frac{p}{2}\right)^2}} = \frac{|y_0|}{\sqrt{p^2 + y_0^2}}.$$

Таким образом, $\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2$. Утверждение доказано.

Оптическое свойство параболы широко используется при изготовлении осветительных приборов (прожекторов, фар автомобиля и т. д.). Отражательная поверхность таких устройств делается в виде параболического зеркала, а источник света помещают в его фокус. Тогда отраженные лучи образуют концентрированный световой пучок, направленный вдоль оси параболы. Эллипс и гипербола также обладают интересными оптическими свойствами. Например, если источник света поместить в фокусе эллиптического зеркала, то отраженные лучи будут проходить через второй его фокус.

§ 20. ДИАМЕТРЫ И ГЛАВНЫЕ ДИАМЕТРЫ КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Мы установили, что любая прямая не асимптотического направления пересекает кривую второго порядка либо в двух различных действительных, либо в двух совпавших, либо в двух комплексно сопряженных точках. Отрезок прямой, заключенный между этими точками, будем называть ее хордой. Оказывается, что множество середин всех хорд, параллельных между собой, обладает интересным свойством: оно образует прямую линию. Из школьного курса геометрии нам хорошо известно аналогичное свойство для середин параллельных между собой хорд окружности. Они образуют ее диаметр, перпендикулярный этим хордам.

Пусть даны кривая второго порядка γ, заданная своим общим уравнением (19.1) и пучок параллельных между собой прямых, имеющих не асимптотическое направление. Требуется найти множество середин хорд, отсекаемых этой кривой от прямых. Заметим, если точки M_1 и M_2 пересечения γ и прямой имеют комплексно сопряженные координаты $(x_1;\, y_1)$ и $(x_2;\, y_2)$, то координаты $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$ середины хорды M_1M_2 являются действительными числами. Рассмотрим произвольную прямую l данного пучка. Обозначим через α и β координаты ее направляющего вектора. Все прямые пучка параллельны между собой, поэтому вектор является направляющим для любой прямой пучка. Пусть $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$ — точки пересечения γ и l, а $M(x;y)$ — середина хорды M_1M_2 (рис. 79). Примем точку M в качестве начальной и составим параметрические уравнения прямой l. Пусть t_1 и t_2 — параметры точек M_1 и M_2, тогда $\begin{cases} x_1 = x + \alpha t_1, \\ y_1 = y + \beta t_1, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = x + \alpha t_2, \\ y_2 = y + \beta t_2. \end{cases}$ Согласно лемме, доказанной в предыдущем параграфе, точка M в том и только в том случае совпадает с серединой отрезка M_1M_2, когда $t_1 + t_2 = 0$. Но t_1 и t_2 — корни уравнения (19.2). Из теоремы Виета для корней квадратного уравнения следует, что точка M тогда и только тогда будет серединой хорды M_1M_2, когда ее координаты обращают в нуль коэффициент Q этого уравнения. Поэтому из формулы (19.4) получим

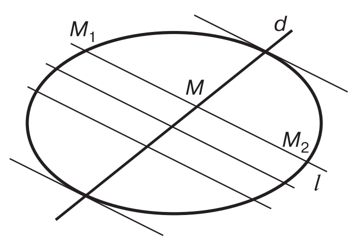


Рис. 79

$$a_{11}\alpha x + a_{12}\alpha y + a_{12}\beta x + a_{22}\beta y + a_{10}\alpha + a_{20}\beta = 0$$

или

$$(a_{11}\alpha + a_{12}\beta)x + (a_{12}\alpha + a_{22}\beta)y + a_{10}\alpha + a_{20}\beta = 0. \qquad (20.1)$$

Коэффициенты $a_{11}\alpha + a_{12}\beta$ и $a_{12}\alpha + a_{22}\beta$ не равны одновременно нулю. Действительно, если $a_{11}\alpha + a_{12}\beta = a_{12}\alpha + a_{22}\beta = 0$, то $(a_{11}\alpha + a_{12}\beta)\alpha + (a_{12}\alpha + a_{22}\beta)\beta = 0$, т. е. $a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0$. Это означает, что, согласно (19.6), вектор $\vec{a}\{\alpha;\beta\}$ имеет асимптотическое направление, чего не может быть по условию. Таким образом, уравнение (20.1) представляет собой уравнение прямой. Доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Множество середин всех хорд кривой второго порядка, параллельных между собой и имеющих не асимптотическое направление, образуют прямую линию.*

Введем следующее определение.

Определение 1. *Прямая, содержащая середины всех хорд кривой второго порядка, параллельных между собой и имеющих не асимптотическое направление, называется диаметром, сопряженным этому направлению.*

На рисунке 79 изображены кривая второго порядка, параллельные между собой хорды и спряженный им диаметр d. Если направление определено вектором $\vec{a}\{\alpha;\beta\}$, то уравнение сопряженного ему диаметра d имеет вид (20.1). При этом также говорят, что *диаметр d сопряжен вектору $\vec{a}$.* Ясно, что все диаметры центральной кривой второго порядка (т. е. кривой эллиптического или гиперболического типа, см. §19) проходят через ее центр.

Нас будет интересовать, в каком случае диаметр кривой имеет асимптотическое направление и как связаны между собой его направляющий вектор и вектор, ему сопряженный. Ответ на первый вопрос дает следующее утверждение.

Теорема 2. *Диаметр d кривой второго порядка в том и только в том случае имеет асимптотическое направление, когда кривая принадлежит параболическому типу. При этом все ее диаметры параллельны между собой.*

Доказательство. Так как уравнение диаметра d, сопряженного направлению вектора $\vec{a}\{\alpha;\beta\}$, имеет вид (20.1), то направляющий вектор этой прямой имеет вид $\vec{p}\{a_{12}\alpha+a_{22}\beta;-a_{11}\alpha-a_{12}\beta\}$. Выясним, при каких условиях этот вектор имеет асимптотическое направление. Проведем следующие преобразования:

$$a_{11}(a_{12}\alpha+a_{22}\beta)^2+2a_{12}(a_{12}\alpha+a_{22}\beta)(-a_{11}\alpha+a_{12}\beta)+a_{22}(-a_{11}\alpha-a_{12}\beta)^2=$$
$$=a_{11}\alpha^2(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)+2a_{12}\alpha\beta(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)+a_{22}\beta^2(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)=$$
$$=\Delta(a_{11}\alpha^2+2a_{12}\alpha\beta+a_{22}\beta^2),$$

где, согласно (19.8), $\Delta=a_{11}a_{22}-a_{12}^2$ — первый инвариант кривой. Отсюда следует, что вектор $\vec{p}$ имеет асимптотическое направление в том и только в том случае, когда $\Delta(a_{11}\alpha^2+2a_{12}\alpha\beta+a_{22}\beta^2)=0$. Но направление вектора $\vec{p}$ не является асимптотическим, $a_{11}\alpha^2+2a_{12}\alpha\beta+a_{22}\beta^2\neq 0$. Поэтому для того, чтобы диаметр d имел асимптотическое направление, необходимо и достаточно, чтобы $\Delta = 0$, т. е. чтобы кривая принадлежала параболическому типу. Кривая параболического типа имеет единственное асимптотическое направление. Отсюда следует, что все ее диаметры параллельны между собой. Теорема доказана.

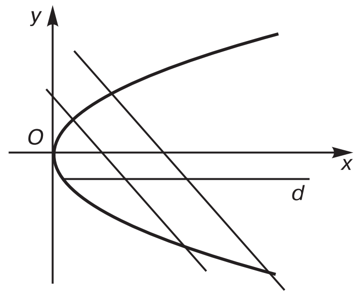


Рис. 80

На рисунке 80 изображены парабола, две прямые из пучка параллельных прямых и сопряженный с ними диаметр d. Этот диаметр параллелен оси параболы и имеет асимптотическое направление.

Рассмотрим теперь произвольную кривую γ непараболического типа.

Теорема 3 (о сопряженных диаметрах). *Пусть γ — кривая эллиптического или гиперболического типов. Обозначим через d_1 диаметр, сопряженный неасимптотическому направлению вектора $\vec{q}$, через $\vec{p}$ — направляющий вектор d_1, а через d_2 — диаметр, сопряженный направлению вектора $\vec{p}$. Тогда вектор $\vec{q}$ параллелен d_2.*

Доказательство. Пусть вектор $\vec{q}$ имеет координаты α_1 и β_1. Тогда координаты вектора $\vec{p}$, направляющего для диаметра d_1, равны $\{a_{12}\alpha_1 + a_{22}\beta_1; -a_{11}\alpha_1 - a_{12}\beta_1\}$. Обозначим через $\vec{a}$ направляющий вектор диаметра d_2, сопряженного с вектором $\vec{p}$. Вычислим координаты α_3 и β_3 вектора $\vec{a}$ и покажем, что они пропорциональны α_1 и β_1. Если α_2 и β_2 — координаты $\vec{p}$, то

$$\alpha_3 = a_{12}\alpha_2 + a_{22}\beta_2 = a_{12}(a_{12}\alpha_1 + a_{22}\beta_1) + a_{22}(-a_{11}\alpha_1 - a_{12}\beta_1) =$$
$$= -(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\alpha_1 = -\Delta\alpha_1,$$
$$\beta_3 = -a_{11}\alpha_2 - a_{12}\beta_2 = -a_{11}(a_{12}\alpha_1 + a_{22}\beta_1) - a_{12}(-a_{11}\alpha_1 - a_{12}\beta_1) =$$
$$= -(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\beta_1 = -\Delta\beta_1.$$

Кривая имеет непараболический тип, следовательно, $\Delta \neq 0$. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{p}$ коллинеарны. Теорема доказана.

Векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$, один из которых параллелен диаметру, сопряженному направлению второго вектора, называются *сопряженными относительно кривой*. Так же называются диаметры и направления, определенные сопряженными векторами.

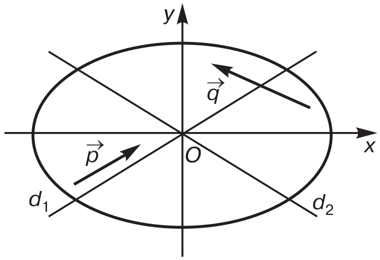


Рис. 81

На рисунке 81 изображены сопряженные векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$, а также сопряженные диаметры d_1 и d_2. В школьном курсе геометрии доказывается, что векторы, сопряженные относительно окружности, перпендикулярны.

Выведем условие сопряженности векторов в координатах. Обозначим через α_1 и β_1 координаты вектора $\vec{p}$. Тогда уравнение диаметра d, сопряженного направлению вектора $\vec{p}$, имеет вид (20.1): $(a_{11}\alpha_1+a_{12}\beta_1)x+(a_{12}\alpha_1+a_{22}\beta_1)y+a_{10}\alpha_1+a_{20}\beta_1=0$. Поэтому вектор $\vec{q}\{\alpha_2;\beta_2\}$ параллелен прямой d в том и только в том случае, когда

$$(a_{11}\alpha_1+a_{12}\beta_1)\alpha_2+(a_{12}\alpha_1+a_{22}\beta_1)\beta_2=0.$$

Полученное равенство преобразуем к виду

$$a_{11}\alpha_1\alpha_2+a_{12}(\beta_1\alpha_2+\alpha_1\beta_2)+a_{22}\beta_1\beta_2=0. \tag{20.2}$$

Это и есть искомое условие, наложенное на координаты сопряженных относительно кривой векторов.

Пример 1. *Составить уравнения сопряженных диаметров кривой, заданной уравнением* $4x^2-2xy+3y^2-6x+2y+4=0$, *один из которых параллелен прямой* $2x-y+1=0$.

Решение. В качестве направляющего вектора данной прямой можно принять вектор $\vec{p}$ с координатами $\{1;\,2\}$. Используя соотношение (20.1), найдем уравнение диаметра d_1, сопряженного направлению вектора $\vec{p}$: $(4-2)x+(-1+6)y-3+2=0$ или $2x+5y-1=0$. Направляющий вектор $\vec{q}$ диаметра d_1 имеет координаты $\{5;\ -2\}$. Еще раз воспользуемся соотношением (20.1) и определим уравнение диаметра d_2, сопряженного направлению вектора $\vec{q}$: $22x-11y-17=0$. Легко видеть, что прямая d_2 параллельна данной прямой.

Проверьте самостоятельно, что координаты центра данной кривой равны $\left(\dfrac{8}{11};-\dfrac{1}{11}\right)$ и он принадлежит найденным диаметрам d_1 и d_2.

Выясним, при каких условиях диаметр перпендикулярен своему сопряженному направлению. Этот случай имеет особый интерес, так как, с одной стороны, диаметр содержит середины параллельных между собой хорд, а с другой — им перпендикулярен. Поэтому он служит осью симметрии кривой второго порядка.

Определение 2. *Диаметр, перпендикулярный своему сопряженному направлению, называется главным.*

Заметим, что в случае эллипса или гиперболы главными являются направления осей канонической системы координат, а в случае параболы — ось абсцисс канонической системы координат.

Найдем условия, определяющие координаты главного направления кривой. Пусть кривая второго порядка задана своим общим уравнением. Будем считать, что на плоскости введена прямоугольная декартова система координат. Рассмотрим произвольный вектор $\vec{p}\{p_1; p_2\}$; координаты вектора $\vec{q}$, ему перпендикулярного, равны $\{p_2; -p_1\}$. Векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ сопряжены относительно кривой в том и только в том случае, когда их координаты удовлетворяют равенству (20.2). Подставим в него координаты этих векторов, после преобразований получим

$$(a_{11}-a_{22})p_1p_2+a_{12}(p_2^2-p_1^2)=0$$

или

$$a_{12}p_1^2+(a_{22}-a_{11})p_1p_2-a_{12}p_2^2=0. \tag{20.3}$$

Решения уравнения (20.3) определены с точностью до пропорциональности, что вполне согласуется с геометрическими соображениями: если вектор $\vec{p}$ определяет главное направление, то это же направление определяет и любой ненулевой вектор, ему коллинеарный. Для определения числа главных направлений кривой нам достаточно найти число непропорциональных решений уравнения (20.3). Рассмотрим следующие случаи.

1. $a_{11}=a_{22}$, $a_{12}=0$. В уравнении (20.3) все коэффициенты равны нулю, неизвестные p_1 и p_2 могут принимать любые значения, все направления являются главными. В этом случае уравнение кривой имеет вид $a_{11}x^2+a_{11}y^2+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00}=0$. Выделяя полные квадраты, после преобразований получим, что кривая представляет собой окружность. Окружность, как известно, симметрична относительно любого своего диаметра, поэтому из геометрических соображений также следует, что любое направление для нее является главным. Ясно, что справедливо и обратное утверждение. Если любое направление для кривой

главное, то из (20.3) получим $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$, а значит, кривая представляет собой окружность.

2. $a_{11} \neq a_{22}$, $a_{12} = 0$. В этом случае уравнение (20.3) принимает вид $(a_{22} - a_{11})p_1 p_2 = 0$. Кривая имеет два главных направления, определяемых векторами $\vec{p}\{1;0\}$ и $\vec{p}\,'\{0;1\}$.

3. $a_{12} \neq 0$. Тогда из (20.3) следует, что p_2 не равно нулю. Действительно, если $p_2 = 0$, то уравнение принимает вид $a_{12} p_1^2 = 0$. Так как вектор $\vec{p}$ отличен от нулевого, то получим $a_{12} = 0$, что противоречит условию. Разделив обе части уравнения (20.3) на p_2, мы не «потеряем» решения уравнения. Обозначим $t = \dfrac{p_1}{p_2}$, получим квадратное уравнение

$$a_{12} t^2 + (a_{22} - a_{11}) t - a_{12} = 0. \tag{20.4}$$

Его дискриминант равен $D = (a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2$. Так как $D > 0$, то уравнение (20.4) имеет два решения, поэтому у кривой два главных направления.

Нами доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Если кривая совпадает с окружностью, то любое направление для нее является главным. Если она не совпадет с окружностью, то имеет два главных направления.*

Для нахождения главных направлений кривой можно воспользоваться уравнением (20.4). Мы же рассмотрим другой способ их определения. Преобразуем левую часть равенства (20.3):

$$a_{12} p_1^2 + (a_{22} - a_{11}) p_1 p_2 - a_{12} p_2^2 = -(a_{11} p_1 + a_{12} p_2) p_2 + (a_{12} p_1 + a_{22} p_2) p_1.$$

Таким образом,

$$(a_{11} p_1 + a_{12} p_2) p_2 - (a_{12} p_1 + a_{22} p_2) p_1 = 0.$$

Полученное равенство равносильно следующему:

$$\begin{vmatrix} a_{11} p_1 + a_{12} p_2 & p_1 \\ a_{12} p_1 + a_{22} p_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Как известно, определитель второго порядка равен нулю, если его столбцы пропорциональны. Поэтому

$$\begin{cases} a_{11} p_1 + a_{12} p_2 = \lambda p_1, \\ a_{12} p_1 + a_{22} p_2 = \lambda p_2 \end{cases} \tag{20.5}$$

или

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda) p_1 + a_{12} p_2 = 0, \\ a_{12} p_1 + (a_{22} - \lambda) p_2 = 0. \end{cases}$$

Мы пришли к линейной однородной системе уравнений, которой удовлетворяют координаты главных направлений кривой. Поэтому она имеет ненулевые решения, что, как известно из курса алгебры, возможно в том и только в том случае, когда ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{20.6}$$

Уравнение (20.6) носит название *характеристического уравнения кривой*, а его решения — *характеристических значений кривой*. Мы получили второй способ определения главных направлений кривой. Для этого достаточно решить характеристическое уравнение (20.6), подставить найденные решения в уравнения системы (20.5) и определить ненулевые решения полученной системы.

Выясним, сколько решений имеет уравнение (20.6). Для этого раскроем определитель в его левой части и преобразуем уравнение к виду

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0. \tag{20.7}$$

Мы получили приведенное квадратное уравнение. Определим его дискриминант: $D = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2$. Так как $D \geq 0$, то уравнение всегда имеет решение, а кривая — главное направление. Легко видеть, что $D = 0$ в том и только в том случае, когда $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$. Уравнение (20.7) имеет одно решение, при этом кривая представляет собой окружность. Во всех остальных случаях у кривой имеется два характеристических значения. Свободный член уравнения (20.7) совпадает с первым инвариантом Δ кривой (§ 19). Поэтому для кривых параболического типа, для которых $\Delta = 0$, одно из собственных значений также равно нулю.

Найдем способ упрощения уравнения кривой второго порядка. Для этого определим новую прямоугольную декартову систему координат, в которой уравнение кривой будет иметь наиболее простой вид. При этом большое значение будут иметь решения λ_1 и λ_2 характеристического уравнении кривой. Пусть на плоскости дана прямоугольная декартова система координат, в которой общее уравнение кривой имеет вид

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0.$$

Рассмотрим прямоугольную декартову систему координат, полученную из данной таким поворотом вокруг начала системы, что ось ординат совпадает с главным направлением кривой. Такую систему будем называть *новой*. Если φ — ориентированный угол между осями абсцисс исходной и новой систем координат, то формулы перехода от первой системы ко второй при указанном повороте имеют следующий вид (§ 9):

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi, \end{cases}$$

где x, y и x', y' — координаты одной и той же точки соответственно в старой и новой системах координат. При этом единичные направляющие векторы $\vec{i}'$ и $\vec{j}'$ новой системы имеют вид

$$\vec{i}'\{\cos\varphi; \sin\varphi\}, \quad \vec{j}'\{-\sin\varphi; \cos\varphi\}. \tag{20.8}$$

Найдем коэффициенты в общем уравнении кривой в новой системе координат. Для этого выражения x и y через x' и y' из формул поворота системы координат следует подставить в общее уравнение кривой:

$$a_{11}(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi)^2 + 2a_{12}(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi)(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi) +$$
$$+ a_{22}(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi)^2 + 2a_{10}(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi) +$$
$$+ 2a_{20}(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi) + a_{00} = 0.$$

Раскроем скобки и сгруппируем члены при x'^2, $x'y'$, y'^2. Получим искомые коэффициенты уравнений кривой в новой системе координат:

$$\begin{gathered} a'_{11} = a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi, \\ a'_{12} = -a_{11}\cos\varphi\sin\varphi + a_{12}\cos^2\varphi - a_{12}\sin^2\varphi + a_{22}\cos\varphi\sin^2\varphi, \\ a'_{22} = a_{11}\sin^2\varphi - 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin\varphi, \\ a'_{10} = a_{10}\cos\varphi + a_{20}\sin\varphi, \\ a'_{20} = -a_{10}\sin\varphi + a_{20}\cos\varphi, \\ a'_{00} = a_{00}. \end{gathered} \tag{20.9}$$

Ось ординат новой системы координат имеет главное направление, поэтому векторы $\vec{i}'$ и $\vec{j}'$ также имеют главные направления, их координаты удовлетворяют уравнению (20.3). При условии, что координаты этих векторов определяются согласно (20.8), это уравнение имеет вид

$$a_{12}\cos^2\varphi+(a_{22}-a_{11})\cos\varphi\sin\varphi-a_{12}\sin^2\varphi=0. \qquad (20.10)$$

Сравним коэффициент a'_{12} уравнения кривой в новой системе координат из соотношений (20.9) и левую часть уравнения (20.10), получим $a'_{12}=0$. Таким образом, *если ось ординат системы координат имеет главное направление относительно кривой второго порядка, то коэффициент ее уравнения при произведении неизвестных x и y равен нулю.*

Определим значения коэффициентов a'_{11} и a'_{22} в новой системе координат. Пусть корни характеристического уравнения кривой равны λ_1 и λ_2. Будем считать, что базисный вектор $\vec{i}'\{\cos\varphi;\sin\varphi\}$ новой системы координат соответствует корню λ_1. Тогда из (20.5) получим

$$\begin{cases} a_{11}\cos\varphi+a_{12}\sin\varphi=\lambda_1\cos\varphi, \\ a_{12}\cos\varphi+a_{22}\sin\varphi=\lambda_1\sin\varphi. \end{cases} \qquad (20.11)$$

Рассмотрим теперь коэффициент a'_{11}. Согласно (20.9),

$$a'_{11}=a_{11}\cos^2\varphi+2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi+a_{22}\sin^2\varphi=$$
$$=(a_{11}\cos\varphi+a_{12}\sin\varphi)\cos\varphi+(a_{12}\cos\varphi+a_{22}\sin\varphi)\sin\varphi$$
$$=\lambda_1\cos^2\varphi+\lambda_1\sin^2\varphi=\lambda_1.$$

Аналогично показывается, что $a'_{22}=\lambda_2$. Таким образом, мы доказали следующее утверждение:

Теорема 5. *На плоскости существует такая система координат, в которой уравнение кривой второго порядка имеет вид*

$$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00}=0,$$

где λ_1 и λ_2 — корни характеристического уравнения кривой.

§ 21. КЛАССИФИКАЦИЯ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим кривую γ второго порядка. В предыдущем параграфе мы показали, что всегда можно выбрать такую прямоугольную декартову систему координат, что ось ординат имеет главное направление относительно этой кривой, а уравнение кривой имеет вид

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0, \tag{21.1}$$

где λ_1 и λ_2 — корни характеристического уравнения кривой (характеристические числа кривой). В настоящем параграфе мы проведем полную классификацию кривых второго порядка и рассмотрим примеры нахождения канонического уравнения кривой.

Пусть кривая γ центральная, эллиптического или гиперболического типа, ее первый инвариант Δ отличен от нуля (§ 19). Из (19.8) и (20.7) следует, что первый инвариант кривой равен $\Delta = \lambda_1\lambda_2$. В этом случае характеристические числа λ_1 и λ_2 также отличны от нуля. Без ограничения общности можно считать, что в уравнении (21.1) коэффициент при x^2 положителен, иначе следует поменять знаки у коэффициентов этого уравнения. Выделим полные квадраты в левой части уравнения (21.1), приведем уравнение к виду $\lambda_1\left(x + \dfrac{a_{10}}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y + \dfrac{a_{20}}{\lambda_2}\right)^2 = \dfrac{a_{10}^2}{\lambda_1} + \dfrac{a_{20}^2}{\lambda_2} - a_{00}$. Осуществим параллельный перенос системы координат по формулам $\begin{cases} X = x + \dfrac{a_{10}}{\lambda_1}, \\ Y = y + \dfrac{a_{20}}{\lambda_2}. \end{cases}$ Введем обозначение $\dfrac{a_{10}^2}{\lambda_1} + \dfrac{a_{20}^2}{\lambda_2} - a_{00} = p$. Тогда уравнение (21.1) примет вид

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = p. \tag{21.2}$$

Рассмотрим различные типы кривых.

I. *Кривая имеет эллиптический тип*. Тогда $\Delta > 0$, $\lambda_1\lambda_2 > 0$ и характеристические числа λ_1 и λ_2 положительны.

I_1. $p > 0$. Уравнение (21.2) можно привести к такому виду: $\dfrac{X^2}{\left(\dfrac{\sqrt{p}}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2} + \dfrac{Y^2}{\left(\dfrac{\sqrt{p}}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^2} = 1$. Если обозначить $\dfrac{\sqrt{p}}{\sqrt{\lambda_1}} = a$, $\dfrac{\sqrt{p}}{\sqrt{\lambda_2}} = b$, то получим $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$, т. е. каноническое уравнение эллипса. В этом случае кривая представляет собой *эллипс*. При этом его центр находится в точке с координатами $x=-\frac{a_{10}}{\lambda_1}$, $y=-\frac{a_{20}}{\lambda_2}$ (проверьте самостоятельно).

I$_2$. $p = 0$. Уравнение (21.2) можно привести к виду $\frac{X^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2}+\frac{Y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^2}=0$. Если ввести обозначения $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}=a$, $\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}=b$, то окончательно получим $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=0$. На плоскости существует только одна точка $O'(0;\ 0)$, координаты которой удовлетворяют этому уравнению. Но если бы мы рассматривали точки, координаты которых являются комплексными числами, то полученное уравнение определяло бы пару пересекающихся прямых. Потому кривая с таким каноническим уравнением называется *парой мнимых пересекающихся прямых*.

I$_3$. $p < 0$. Ясно, что в этом случае уравнение (21.2) не имеет решения. Преобразуем его к виду $\frac{X^2}{\left(\frac{\sqrt{|p|}}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2}+\frac{Y^2}{\left(\frac{\sqrt{|p|}}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^2}=-1$. Введя обозначения $\frac{\sqrt{|p|}}{\sqrt{\lambda_1}}=a$, $\frac{\sqrt{|p|}}{\sqrt{\lambda_2}}=b$, окончательно получим $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=-1$. Такой кривой на плоскости не существует. Но если рассматривать точки с комплексными координатами, то существуют точки, координаты которых удовлетворяют полученному уравнению. Кривая в этом случае носит название *мнимого эллипса*.

Мы рассмотрели всевозможные случаи для кривых эллиптического типа.

II. Кривая имеет *гиперболический тип*. Тогда ее первый инвариант $\Delta=\lambda_1\lambda_2$ отрицателен и в силу наших договоренностей $\lambda_1>0$, $\lambda_2<0$.

II$_1$. Предположим, что в уравнении (21.2) $p > 0$. Тогда его можно преобразовать к виду $\frac{X^2}{\left(\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2}-\frac{Y^2}{\left(\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{|\lambda_2|}}\right)^2}=1$. Введя обозначения $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}=a$, $\frac{1}{\sqrt{|\lambda_2|}}=b$, окончательно получим $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$. Кривая представляет собой *гиперболу*.

Если в уравнении (21.2) $p < 0$, то умножим обе части уравнения на -1 и сделаем замену неизвестных по формулам $\begin{cases} X' = Y, \\ Y' = X. \end{cases}$ Мы придем к предыдущему случаю, опять получим гиперболу.

II$_2$. $p = 0$. Уравнение (21.2) можно привести к виду $\dfrac{X^2}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2} - \dfrac{Y^2}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{|\lambda_2|}}\right)^2} = 0$. Если сделать замену $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = a$, $\dfrac{1}{\sqrt{|\lambda_2|}} = b$, то окончательно получим

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0.$$

Представим левую часть полученного уравнения в виде

$$\left(\frac{X}{a} - \frac{Y}{b}\right)\left(\frac{X}{a} + \frac{Y}{b}\right) = 0.$$

Кривая представляет собой *пару пересекающихся прямых*, имеющих соответственно уравнения

$$\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} = 0 \text{ и } \frac{X}{a} - \frac{Y}{b} = 0.$$

Мы рассмотрели всевозможные случаи кривых, имеющих центр. Нетрудно установить, что во всех случаях начало канонической системы координат совпадает с центром кривой.

III. Кривая имеет *параболический тип*. Тогда, как отмечалось в предыдущем параграфе, одно из собственных значении кривой равно нулю. Будем считать, что $\lambda_1 = 0$. Тогда уравнение (20.1) примет вид $\lambda_2 y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$. Без ограничения общности можно считать, что $\lambda_2 > 0$, иначе полученное уравнение следует умножить на -1. Преобразуем его к виду

$$\lambda_2\left(y + \frac{a_{20}}{\lambda_2}\right)^2 = -2a_{10}x + \frac{a_{20}^2}{\lambda_2} - a_{00}. \qquad (21.3)$$

III$_1$. $a_{10} \neq 0$. Преобразуем правую часть уравнения (21.3): $-2a_{10}x + \dfrac{a_{20}^2}{\lambda_2} - a_{00} = -2a_{10}\left(x - \dfrac{a_{20}^2}{\lambda_2 a_{10}} + \dfrac{a_{00}}{a_{10}}\right)$. Осуществим параллельный перенос системы координат по формулам

$$\begin{cases} X = x - \dfrac{a_{20}^2}{\lambda_2 a_{10}} + \dfrac{a_{00}}{a_{10}}, \\ \quad Y = y + \dfrac{a_{20}}{\lambda_2}, \end{cases}$$

тогда уравнение (21.3) приводится к виду $Y^2 = -2\dfrac{a_{10}}{\lambda_2}X$. Если обозначить $-\dfrac{a_{10}}{\lambda_2} = p$, то окончательно получим $Y^2 = 2pX$. Мы получили каноническое уравнение *параболы* при условии, что $p > 0$. Если $p < 0$, то следует поменять направление оси абсцисс.

Рассмотрим теперь случай, когда $a_{10} = 0$. Обозначим $\dfrac{a_{20}^2}{\lambda_2^2} - \dfrac{a_{00}}{\lambda_2} = q$. Тогда уравнение (21.3) примет вид

$$\left(y + \frac{a_{20}}{\lambda_2}\right)^2 = q. \tag{21.4}$$

III$_2$. $q > 0$. Уравнение (21.4) можно представить как совокупность двух уравнений $y + \dfrac{a_{20}}{\lambda_2} = q$ и $y + \dfrac{a_{20}}{\lambda_2} = -q$. Поэтому кривая представляет собой две *параллельные прямые* с уравнениями

$$y = q - \frac{a_{20}}{\lambda_2} \text{ и } y = -q - \frac{a_{20}}{\lambda_2}.$$

Прямые параллельны оси абсцисс.

III$_3$. $q = 0$. Уравнение (21.4) принимает вид $y = -\dfrac{a_{20}}{\lambda_2^2}$. Кривая представляет собой прямую, или, как говорят, *пару совпавших параллельных прямых*.

III$_4$. $q < 0$. Уравнение (21.4) не имеет решений. В этом случае говорят, что кривая является *парой мнимых параллельных прямых*.

Мы провели полную классификацию кривых второго порядка на плоскости. Существует три типа (эллиптический, гиперболический и параболический) и девять видов таких кривых. Мы доказали следующую теорему.

Теорема. *Если на плоскости задана кривая второго порядка, то она принадлежит одному из следующих трех типов и девяти видов.*

№	Тип кривой	Название кривой	Каноническое уравнение
1	Эллиптический	Эллипс	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
2		Мнимый эллипс	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$
3		Пара мнимых пересекающихся прямых	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$
4	Гиперболический	Гипербола	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
5		Пара действительных пересекающихся прямых	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$
6	Параболический	Парабола	$y^2=2px$
7		Пара параллельных прямых	$y^2=k,\quad k>0$
8		Пара мнимых параллельных прямых	$y^2=k,\quad k<0$
9		Пара совпавших прямых	$y^2=0$

Рассмотрим примеры на приведение кривых второго порядка к каноническому виду. Нас будет интересовать не только сам вид и тип кривой, но и формулы перехода от исходной системы координат к канонической.

Пример 1. *Привести к каноническому виду уравнение кривой* $xy=k$, $k>0$.

Решение. Если сравнить данное уравнение с общим уравнением (19.1) кривой второго порядка, то в рассматриваемом случае

$$a_{11}=a_{22}=a_{10}=a_{20}=0,\ \ a_{12}=\frac{1}{2},\ \ a_{00}=-k.$$

Поэтому характеристическое уравнение кривой (20.6) приводится к виду $\lambda^2-\frac{1}{4}=0$. Оно имеет корни $\lambda_1=\frac{1}{2}$, $\lambda_2=-\frac{1}{2}$. Определим, на какой угол φ следует повернуть исходную систему координат, чтобы в новой системе уравнение кривой имело вид (21.1). В новой системе базисные векторы имеют вид $\vec{i}'\{\cos\varphi;\sin\varphi\}$ и $\vec{j}'\{-\sin\varphi;\cos\varphi\}$; их координаты удовлетворяют системе (20.11):

$$\begin{cases}a_{11}\cos\varphi+a_{12}\sin\varphi=\lambda_1\cos\varphi,\\ a_{12}\cos\varphi+a_{22}\sin\varphi=\lambda_1\sin\varphi.\end{cases}$$

Для определения координат базисных векторов новой системы достаточно первое уравнение разделить на $\cos\varphi$ и решить полученное уравнение относительно $\operatorname{tg}\varphi$:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}. \tag{21.5}$$

Можно воспользоваться вторым уравнением этой системы. Самостоятельно проверьте, что при этом получается то же значение тангенса искомого угла. Определив тангенс угла, найдем его синус и косинус по известным из тригонометрии формулам: $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}$, $\sin\varphi = \dfrac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}$. При этом следует иметь в виду, что искомый угол φ расположен в первой четверти. Для упрощения уравнения кривой следует произвести замену неизвестных по формулам поворота системы координат вокруг ее начала: $\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi. \end{cases}$

В рассматриваемом случае, согласно (21.5), $\operatorname{tg}\varphi = 1$. Искомый угол равен $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$; $\cos\varphi = \sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Поэтому формулы поворота системы координат имеют вид $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x' - \dfrac{1}{\sqrt{2}}y', \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y'. \end{cases}$ Подставив их в уравнение данной кривой, получим $\dfrac{(x')^2}{2} - \dfrac{(y')^2}{2} = k$ или $\dfrac{(x')^2}{2k} - \dfrac{(y')^2}{2k} = 1$. Кривая представляет собой гиперболу.

В школьном курсе алгебры изучалась свойства обратной пропорциональной зависимости $y = \dfrac{k}{x}$. Из разобранного примера следует, что ее графиком служит гипербола, оси которой совпадают с биссектрисами координатных углов, а асимптоты — с осями координат.

Пример 2. *Определить каноническое уравнение кривой*

$$9x^2 - 6xy + y^2 - 3\sqrt{10}x - 9\sqrt{10}y - 90 = 0.$$

Решение. Найдем коэффициенты общего уравнения данной кривой: $a_{11}=9$, $a_{12}=-3$, $a_{22}=1$, $a_{10}=-\frac{3}{2}\sqrt{10}$, $a_{20}=-\frac{9}{2}\sqrt{10}$, $a_{00}=-90$. Характеристическое уравнение кривой имеет вид $\begin{vmatrix} 9-\lambda & -3 \\ -3 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$. Раскрыв определитель, получим $\lambda^2-10\lambda=0$. Характеристические значения кривой равны $\lambda_1=10$, $\lambda_2=0$. Из (21.5) следует, что $\operatorname{tg}\varphi=\frac{\lambda_1-a_{11}}{a_{12}}=3$. Отсюда получим $\cos\varphi=$ $=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\sin\varphi=\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$. Поэтому формулы поворота системы координат вокруг ее начала на угол φ имеют вид $\begin{cases} x=\frac{x'}{\sqrt{10}}-\frac{3y'}{\sqrt{10}}, \\ y=\frac{3x'}{\sqrt{10}}+\frac{y'}{\sqrt{10}}. \end{cases}$ Сделаем по этим формулам замену в уравнении данной кривой, после преобразований получим $y'^2-3x'-9=0$ или $y'^2=3(x'-3)$. Осуществим параллельный перенос системы координат по формулам $\begin{cases} X=x'-3, \\ Y=y'. \end{cases}$ Окончательно каноническое уравнение данной кривой примет вид $Y^2=3X$, она представляет собой параболу. Чтобы получить окончательные формулы перехода от данной системы координат к канонической, следует из формул параллельного переноса выразить координаты x', y' через X, Y и подставить полученные выражения в формулы поворота системы координат:

$$\begin{cases} x=\frac{X}{\sqrt{10}}-\frac{3Y}{\sqrt{10}}+\frac{3}{\sqrt{10}}, \\ y=\frac{3X}{\sqrt{10}}+\frac{Y}{\sqrt{10}}+\frac{9}{\sqrt{10}}. \end{cases}$$

Глава IV

ПЛОСКОСТИ, ПРЯМЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПРОСТРАНСТВЕ

В настоящей главе мы используем средства векторной алгебры и метод координат для изучения свойств плоскостей, прямых и поверхностей второго порядка в пространстве. При этом мы так же, как в предыдущей главе, будем рассматривать их свойства в аффинной и прямоугольной декартовой системах координат.

§ 22. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Свойства уравнений плоскостей в аффинной системе координат

Не оговаривая особо, будем считать, что в пространстве дана некоторая аффинная система координат. Ясно, что плоскость в пространстве можно определить точкой M и двумя неколлинеарными векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$, параллельными этой плоскости (рис. 82). Пусть заданы координаты точки M и векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$:

$$M(x_0; y_0; z_0),\ \ \vec{p}\{\alpha_1; \beta_1; \gamma_1\},\ \ \vec{q}\{\alpha_2; \beta_2; \gamma_2\}.$$

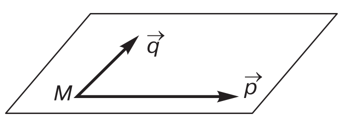


Рис. 82

Найдем уравнение плоскости. Предположим, что в этой плоскости лежит точка $N(x; y; z)$. Тогда вектор $\overrightarrow{MN}\{x-x_0; y-y_0; z-z_0\}$ параллелен плоскости, а векторы $\overrightarrow{MN}$, $\vec{p}$ и $\vec{q}$ — компланарные. Воспользуемся условием компланарности векторов в координатах (§ 3):

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (22.1)$$

Это соотношение можно рассматривать как уравнение относительно x, y и z. Таким образом, если точка лежит на плоскости, то ее координаты удовлетворяют уравнению (22.1). Обратно, если координаты x, y и z какой-либо точки N служат решением уравнения (22.1), то векторы $\overrightarrow{MN}$, $\vec{p}$ и $\vec{q}$ компланарны, поэтому вектор $\overrightarrow{MN}$ параллелен плоскости, а точка N лежит в этой плоскости. Уравнение (22.1) представляет собой *уравнение плоскости, определенной точкой M и векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$*.

С помощью уравнения (22.1) можно решить следующую задачу. Даны координаты точек $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $C(x_3;\ y_3;\ z_3)$, не лежащих на одной прямой. Требуется найти уравнение плоскости ABC. Легко видеть, что искомая плоскость определена точкой A и неколлинеарными векторами $\overrightarrow{AB}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$, $\overrightarrow{AC}\{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}$. Поэтому из (22.1) получим искомое уравнение:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

При решении задач уравнение (22.1) обычно упрощают. Раскроем определитель в его левой части по первой строке и получим

$$\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}(x - x_0) + \begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}(y - y_0) + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}(z - z_0) = 0.$$

Обозначим $A = \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}$, $C = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$. Так как векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ неколлинеарные, то эти числа не равны одновременно нулю, т. е. $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Итак, уравнение плоскости принимает вид $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ или $Ax + By + Cz + D = 0$, где $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Таким образом, уравнение плоскости представляет собой алгебраическое уравнение первого порядка (§11). Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Поверхность в пространстве является плоскостью тогда и только тогда, когда она представляет собой алгебраическую поверхность первого порядка.*

Доказательство. Требуется доказать, что поверхность является плоскостью в том и только в том случае, когда ее уравнение можно представить в виде

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{22.2}$$

где

$$A^2 + B^2 + C^2 \neq 0. \tag{22.3}$$

Первая часть утверждения уже доказана. Мы показали, что уравнение любой плоскости можно преобразовать к виду (22.2) и при этом выполнено условие (22.3).

Обратно, пусть дана поверхность σ, уравнение которой имеет вид (22.2), а его коэффициенты удовлетворяют неравенству (22.3). Докажем, что она является плоскостью. В силу неравенства (22.3) среди коэффициентов A, B и C существует по крайней мере один ненулевой. Пусть $A \neq 0$. Рассмотрим точку $M\left(\frac{D}{A}; 0; 0\right)$, векторы $\vec{p}\{B; -A; 0\}$ и $\vec{q}\{C; 0; -A\}$. Так как $A \neq 0$, то векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ неколлинеарные. Поэтому точка M и векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ определяют некоторую плоскость π пространства. Используя соотношение (22.1), составим ее уравнение:

$$\begin{vmatrix} x + \frac{D}{A} & y & z \\ B & -A & 0 \\ C & 0 & -A \end{vmatrix} = 0.$$

Раскроем определитель по первой строке: $A^2\left(x + \frac{D}{A}\right) + ABy + {}$ $+ ACz = 0$. Так как $A \neq 0$, то, сократив обе части уравнения на A, получим $Ax + By + Cz + D = 0$. Уравнение плоскости π имеет тот же вид, что и уравнение поверхности σ. Поэтому плоскость и поверхность совпадают друг с другом. Случаи, когда $A = 0$, но $B \neq 0$, либо $A = B = 0$, а $C \neq 0$, рассмотрите самостоятельно. Теорема доказана.

Уравнение (22.2) называется *общим уравнением плоскости в пространстве*. Оно позволяет исследовать аналитическими методами геометрические свойства плоскостей. Прежде всего, докажем теорему, характеризующую взаимное расположение вектора и плоскости.

Теорема 2. *Вектор* $\vec{p}\{\alpha; \beta; \gamma\}$ *тогда и только тогда параллелен плоскости, заданной своим общим уравнением* (21.2), *когда*

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0. \tag{22.4}$$

Доказательство. Очевидно, что вектор $\vec{p}$ параллелен плоскости π в том и только в том случае, когда она содержит такие точки M и N, для которых $\overrightarrow{MN} = \vec{p}$.

Пусть вектор $\vec{p}$ параллелен данной плоскости π. Тогда она содержит такие точки $M(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $N(x_2;\ y_2;\ z_2)$, для которых $\overrightarrow{MN} = \vec{p}$. Точки принадлежат плоскости, поэтому их координаты удовлетворяют ее уравнению: $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$, $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0$. Вычтем из второго равенства первое: $A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) + D = 0$. Так как $\overrightarrow{MN} = \vec{p}$, то $x_2 - x_1 = \alpha$, $y_2 - y_1 = \beta$, $z_2 - z_1 = \gamma$. Поэтому $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$. Соотношение (22.4) доказано,

Обратно, пусть координаты α, β и γ некоторого вектора $\vec{p}$ удовлетворяют равенству (22.4). Возьмем произвольную точку $M(x_1;\ y_1;\ z_1)$, принадлежащую плоскости π. Тогда $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$. Отложим от точки M вектор $\vec{p}$: $\overrightarrow{MN} = \vec{p}$. Тогда координаты точки N равны $(x_1 + \alpha;\ y_1 + \beta;\ z_1 + \gamma)$. Подставим их в уравнение плоскости, получим:

$$\begin{aligned} &A(x_1 + \alpha) + B(y_1 + \beta) + C(z_1 + \gamma) + D = \\ &= Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D + A\alpha + B\beta + C\gamma = 0. \end{aligned}$$

Координаты точки удовлетворяют уравнению плоскости, следовательно, точка N лежит в этой плоскости, поэтому вектор $\vec{p}$ ей параллелен. Теорема доказана.

Доказанное утверждение позволяет вывести условия, характеризующие взаимное расположение плоскости и системы координат. Пусть плоскость π задана своим общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Выясним, при каких условиях, наложенных на коэффициенты A, B, C и D ее уравнения, она содержит начало системы координат или параллельна координатным осям. Легко видеть, точка $O(0; 0; 0)$ тогда и только тогда принадлежит плоскости, когда $D = 0$. Поэтому *плоскость содержит начало координат в том и только в том случае, когда* $D = O$. Направляющий вектор $\vec{i}\{1; 0; 0\}$, согласно соотношению (22.4), тогда и только тогда параллелен π, когда $A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 0 = 0$. Таким образом, *плоскость в том и только в том случае параллельна оси абсцисс, когда* $A = 0$. Аналогично доказывается, что *плоскость соответственно параллельна оси ординат или аппликат тогда и только тогда, когда* $B = 0$ *или* $C = 0$. Ясно, что плоскость π *параллельна координатной плоскости Oxy в том и только в том случае, когда* $A = B = 0$, а *условия параллельности* π *координатным плоскостям Oxz и Oyz равносильны равенствам* $A = C = 0$ *и* $B = C = 0$.

Теорема 2 позволяет легко исследовать взаимное расположение двух плоскостей.

Теорема 3. *Пусть плоскости* π_1 *и* π_2 *заданы своими общими уравнениями*: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. *Обозначим через* R *и* r *ранги матриц*

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}; \tag{22.5}$$

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}. \tag{22.6}$$

Тогда данные плоскости пересекаются в том и только в том случае, когда $r = 2$, *параллельны тогда и только тогда, когда* $r = 1$, $R = 2$, *и совпадают, когда* $r = R = 1$.

Доказательство. Рассмотрим векторы $\vec{p}\{B_2; -A_2; 0\}$, $\vec{q}\{C_2; 0; -A_2\}$ и $\vec{r}\{0; C_2; -B_2\}$. Согласно соотношению (22.4), эти векторы параллельны π_2. В силу неравенства (22.3) по крайней мере один из коэффициентов A_2, B_2 или C_2 отличен от нуля. Например, если $A_2 \neq 0$, то векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ неколлинеарные. Если же $A_2 = 0$, то либо $B_2 \neq 0$, либо $C_2 \neq 0$. В первом случае вектор $\vec{p}$ не коллинеарен вектору $\vec{r}$, во втором вектор $\vec{r}$ не коллинеарен вектору $\vec{q}$. Таким образом, из рассматриваемой тройки векторов два заведомо линейно независимы.

Плоскости π_1 и π_2 пересекаются в том и только в том случае, когда среди векторов $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$ существует хотя бы один из векторов, непараллельный π_1. Пусть вектор $\vec{p}$ непараллелен π_1. Тогда из формулы (22.4) следует, что $A_1B_2 - B_1A_2 \neq 0$, или $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$ Аналогично, если вектор $\vec{q}$ непараллелен π_1, то $\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0,$ когда вектор $\vec{r}$ непараллелен π_1, выполняется неравенство $\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0.$ Таким образом, плоскости пересекаются тогда и только тогда, когда хотя бы один из миноров матрицы (22.6) отличен от нуля, т. е. когда $r = 2$.

Пусть плоскости π_1 и π_2 параллельны. В этом случае они не имеют общих точек, а система двух линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{22.7}$$

несовместна. Матрицы (22.5) и (22.6) являются, соответственно, основной и расширенной матрицами системы (22.7). Из теории решения линейных систем следует, что в этом случае ранги r и R этих матриц удовлетворяют неравенству $r < R$. Так как матрицы (22.5) и (22.6) содержат ненулевые элементы и состоят из двух строк, то $0 < r \le 2$, $0 < R \le 2$. Таким образом, если плоскости параллельны, то $r = 1$, $R = 2$. Обратно, если $r = 1$, $R = 2$, то система (22.7) несовместна, она не имеет решений, плоскости π_1 и π_2 параллельны.

И наконец, если плоскости π_1 и π_2 совпадают, то векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$ параллельны плоскости π_1. Отсюда следует, что $A_1B_2 - B_1A_2 = A_1C_2 - C_1A_2 = B_1C_2 - C_1B_2 = 0$ или

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, ранг матрицы (22.6) равен 1. Система же (22.7) в этом случае совместна, поэтому ранги r и R совпадают: $r = R = 1$. Наоборот, если $r = R = 1$, то векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$ параллельны плоскости π_1. Отсюда следует, что π_2 либо параллельна π_1, либо совпадает с ней. Кроме того, так как $r = R$, то система (22.7) имеет решение, т. е. существуют точки, принадлежащие и π_1 и π_2. Поэтому плоскости π_1, и π_2 совпадают. Теорема доказана.

Легко выяснить, в каком случае ранги матриц (22.5) и (22.6) равны 1 или 2. Так как эти матрицы имеют две строки, то их ранги равны 2, когда строки непропорциональны. Если существует коэффициент пропорциональности между строками, то ранги матриц равны 1.

Легко видеть, что доказанные утверждения аналогичны соответствующим свойствам прямой на плоскости, доказанным в § 13.

Пример 1. *Найти значения коэффициентов A_1 и C_2, при которых плоскости π_1: $A_1x + 2y + 4z + 1 = 0$ и π_2: $x + y - C_2z + 3 = 0$ параллельны.*

Решение. Как следует из теоремы 3, плоскости параллельны в том и только в том случае, когда ранг матрицы $\begin{pmatrix} A_1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -C_2 \end{pmatrix}$ равен единице, а матрицы $\begin{pmatrix} A_1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -C_2 & 3 \end{pmatrix}$ — двум. Ранг первой матрицы равен единице тогда и только тогда, когда $\dfrac{A_1}{1} = \dfrac{2}{1} = \dfrac{4}{-C_2}$.

Отсюда получим $A_1 = 2$, $C_2 = -2$. Так как $2 \neq \frac{1}{3}$, то ранг второй матрицы при найденных A_1 и C_2 равен 2.

Рассмотрим плоскость, заданную своим общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. *Если x, y, z — координаты точки M, то через $\delta(M)$ обозначим результат подстановки координат этой точки в уравнение плоскости*: $\delta(M) = Ax + By + Cz + D$. $\delta(M) = 0$ в том и только в том случае, когда точка лежит в плоскости.

Теорема 4. *Точки $M(x_1; y_1; z_1)$ и $N(x_2; y_2; z_2)$ тогда и только тогда лежат в одном полупространстве относительно плоскости π, заданной своим общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, когда $\delta(M)$ и $\delta(N)$ имеют одинаковые знаки. Точки расположены в различных полупространствах, когда знаки этих чисел различны.*

Доказательство. Любой точке T прямой MN, отличной от данных точек M и N, можно поставить в соответствие простое отношение $\lambda = (MN,\ T)$. Найдем координаты x, y и z точки T: $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$, $z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$ (§ 10). Точки M и N лежат в различных полупространствах относительно плоскости π в том и только в том случае, когда отрезок MN пересекает π в некоторой своей внутренней точке T. Найдем простое отношение $\lambda = (MN,\ T)$. Для этого необходимо подставить координаты точки T в уравнение плоскости и решить его относительно λ:

$$A\frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} + B\frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} + C\frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} + D = 0.$$

Отсюда получим $A(x_1 + \lambda x_2) + B(y_1 + \lambda y_2) + C(z_1 + \lambda z_2) + D(1 + \lambda) = 0$ или $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + \lambda(Ax_2 + By_2 + Cz_2) = 0$. Таким образом, $\delta(M) + \lambda\delta(N) = 0$. Точка N не принадлежит плоскости π, поэтому $\delta(N) \neq 0$. Окончательно имеем

$$\lambda = -\frac{\delta(M)}{\delta(N)}. \tag{22.8}$$

Для того чтобы точка T лежала на отрезке MN, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\lambda > 0$ (§ 10). Таким образом, из формулы (22.8) следует, что M и N лежат в разных полупространствах тогда и только тогда, когда знаки $\delta(M)$ и $\delta(N)$ различны. Поэтому условие совпадения знаков и равносильно условию принадлежности точек M и N одному полупространству. Теорема доказана.

Следствие. *Точки, координаты которых являются решением неравенства* $Ax + By + Cz + D > 0$, *образуют полупространство, граница которого определена плоскостью* π, *имеющей уравнение* $Ax + By + Cz + D = 0$. *Координаты точек, образующих дополнительное полупространство, удовлетворяют неравенству* $Ax + By + Cz + D < 0$.

Действительно, если мы возьмем произвольную точку M пространства, координаты которой удовлетворяют неравенству $Ax + By + Cz + D > 0$, то, как следует из доказанной теоремы, этому неравенству удовлетворяют координаты тех и только тех точек, которые лежат в том же полупространстве относительно π, что и точка M. Неравенству же $Ax + By + Cz + D < 0$ удовлетворяют координаты всех точек, принадлежащих второму полупространству.

Рассмотрим плоскость π: $Ax + By + Cz + D = 0$ и вектор $\vec{n}\{A; B; C\}$. Как следует из теоремы 2, вектор $\vec{n}$ не параллелен плоскости π. Возьмем в π произвольную точку $M(x_0; y_0; z_0)$, при этом $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. Отложим от M вектор $\overrightarrow{MN} = \vec{n}$. Тогда координаты точки N имеют вид $x = x_0 + A$, $y = y_0 + B$, $z = z_0 + C$. Найдем $\delta(N)$:

$$\delta(N) = A(x_0 + A) + B(y_0 + B) + C(z_0 + C) + D = A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

Таким образом, конец вектора $\vec{n}$, отложенного от произвольной точки плоскости π, принадлежит полупространству, определяемому неравенством $Ax + By + Cz + D > 0$.

Здесь мы также видим полную аналогию между доказанной теоремой 4 о принадлежности точек двум различным полупространствам и вытекающими из нее следствиями и свойствами точек, принадлежащих двум полуплоскостям на плоскости, доказанными в § 13.

Свойства уравнений плоскостей в прямоугольной декартовой системе координат

Будем предполагать, что в пространстве выбрана некоторая прямоугольная декартова система координат. Такая система представляет собой частный случай аффинной системы. Поэтому для нее справедливы все утверждения, доказанные выше.

Теорема 5. *Если плоскость* π *задана своим общим уравнением* $Ax + By + Cz + D = 0$, *то вектор* $\vec{n}\{A; B; C\}$ *перпендикулярен любому вектору, параллельному этой плоскости.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный вектор $\vec{p}\{\alpha; \beta; \gamma\}$, параллельный плоскости. Тогда, согласно равенству (22.4), его координаты удовлетворяют соотношению $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$. Так как система координат прямоугольная декартова, то скалярное произведение векторов $\vec{n}$ и $\vec{p}$ имеет следующий вид: $\vec{n}\vec{p} = A\alpha + B\beta + C\gamma$ (§ 4). Таким образом, условие параллельности вектора $\vec{p}$ и плоскости π равносильно равенству нулю скалярного произведения векторов $\vec{n}$ и $\vec{p}$. Отсюда следует, что вектор $\vec{n}$ перпендикулярен любому вектору, параллельному плоскости. Теорема доказана.

Вектор, перпендикулярный любому вектору плоскости, называется ее *нормальным вектором*. Ясно, что *прямая в том и только в том случае перпендикулярна плоскости, когда она параллельна ее нормальному вектору*.

Пусть даны точка $M(x_0; y_0; z_0)$ и вектор $\vec{n}\{A; B; C\}$, отличный от нулевого. Существует единственная плоскость π, проходящая через M, для которой вектор $\vec{n}$ является нормальным. Составим ее уравнение. Пусть точка принадлежит π (рис. 83). Тогда векторы $\overrightarrow{MN}\{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$ и $\vec{n}$ перпендикулярны, их скалярное произведение равно нулю: $\overrightarrow{MN}\vec{n} = 0$. Отсюда следует, что координаты точки N удовлетворяют уравнению

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{22.9}$$

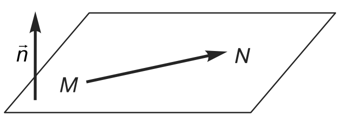


Рис. 83

Обратно, пусть координаты некоторой точки $N(x; y; z)$ — решение уравнения (22.9). Тогда вектор $\overrightarrow{MN}\{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$ перпендикулярен вектору $\vec{n}\{A; B; C\}$. Так как точка M лежит в плоскости π, то и точка N также принадлежит этой плоскости. Уравнение (22.9) является уравнением этой плоскости.

Пример 2. *Даны уравнения двух пересекающихся плоскостей* α: $4x - y + z + 1 = 0$, β: $2x + 3y - z + 1 = 0$, *а также координаты точки* M (1; −1; 5). *Найти уравнение плоскости, проходящей через* M *и перпендикулярной данным плоскостям*.

Решение. Как известно из школьного курса геометрии, искомая плоскость γ в том и только в том случае перпендикулярна плоскостям α и β, когда она параллельна прямым, перпен-

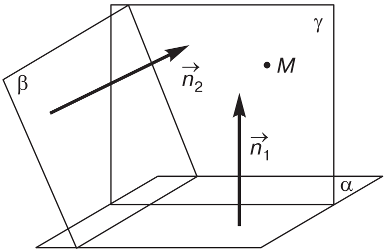


Рис. 84

дикулярным к данным плоскостям. Поэтому искомая плоскость γ параллельна векторам $\vec{n}_1\{4;-1;1\}$ и $\vec{n}_2\{2;3;-1\}$ (рис. 84). Векторы $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ не коллинеарные. Уравнение плоскости определим с помощью уравнения (22.1), где в качестве начальной точки выбрана точка $M\,(1;\,-1;\,5)$:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-5 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

После преобразований получим $x - 3y - 7z + 31 = 0$.

Рассмотрим задачу об определении угла между двумя плоскостями. Из школьного курса геометрии известно, что угол между плоскостями измеряется величиной линейного угла, который соответствует острому или прямому двугранному углу, образованному при пересечении этих плоскостей. Отсюда следует, что этот линейный угол по величине либо совпадает с углом между нормальными векторами к этим плоскостям, либо дополняет его до π (рис. 85). Пусть плоскости π_1 и π_2 заданы уравнениями π_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, π_2: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Тогда их нормальные векторы имеют вид $\vec{n}_1\{A_1;B_1;C_1\}$ и $\vec{n}_2\{A_2;B_2;C_2\}$. Таким образом, если φ — искомый угол между плоскостями π_1 и π_2, то $\varphi = \angle\vec{n}_1\vec{n}_2$ или $\varphi = \pi - \angle\vec{n}_1\vec{n}_2$. Поэтому $\cos\varphi = \left|\cos(\angle n_1 n_2)\right|$.

Используем формулу для вычисления угла между векторами в координатах (§ 4):

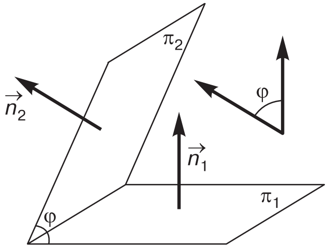


Рис. 85

$$\cos\varphi = \frac{\left|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (22.10)$$

Плоскости π_1 и π_2 взаимно перпендикулярны в том и только в том случае, когда $\cos\varphi = 0$. Из формулы (22.10) следует, что условие перпендикулярности равносильно равенству

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (21.11)$$

Выведем формулу для вычисления расстояния от точки до плоскости. Будем рассуждать так же, как и в § 14, в котором мы получили аналогичную формулу для вычисления расстояния от точки до прямой на плоскости. Будем считать, что плоскость π задана своим общим уравнением π: $Ax + By + Cz + D = 0$. Рассмотрим точку $M(x_0;\ y_0;\ z_0)$, которая ей не принадлежит. Выберем на плоскости π произвольную точку $N(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и рассмотрим вектор $\vec{n}\{A; B; C\}$, перпендикулярный плоскости. Пусть m — ось, сонаправленная с вектором $\vec{n}$. Без ограничения общности можно считать, что она проходит через точку N (рис. 86). Обозначим через K проекцию точки M на ось m. Искомое расстояние d равно длине отрезка NK, или, как нетрудно видеть, абсолютной величине проекции вектора $\overrightarrow{NM}$ на ось m: $d = \left|pr_m\overrightarrow{NM}\right|$. В § 4 нами была доказана лемма 1, в соответствии с которой скалярное произведение векторов $\overrightarrow{NM}$ и $\vec{n}$ равно $\overrightarrow{NM}\vec{n} = |\vec{n}|\,pr_m\overrightarrow{NM}$. Отсюда следует, что $d = \dfrac{\left|\vec{n}\overrightarrow{NM}\right|}{|\vec{n}|}$. Координаты вектора $\overrightarrow{NM}$ равны $\{x_0 - x_1; y_0 - y_1; z_1 - z_0\}$, поэтому $\vec{n}\overrightarrow{NM} = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1) = Ax_0 + By_0 + Cz_0 - Ax_1 - By_1 - Cz_1$. Координаты точки N, лежащей в плоскости π, удовлетворяют уравнению этой плоскости: $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$. Отсюда $D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1$. Таким образом: $\vec{n}\overrightarrow{NM} = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D$. Следовательно, $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{|\vec{n}|}$. Так как $|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, то окончательно получим

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (21.12)$$

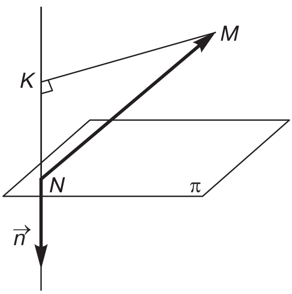


Рис. 86

Пример 3. *Дан тетраэдр, три грани которого совпадают с координатными плоскостями, а четвертая лежит в плоскости* $2x + 2y + z - 4 = 0$. *Найти координаты центра и радиус вписанного в тетраэдр шара.*

Решение. Прежде всего определим координаты вершин тетраэдра. Одна из них совпадает с началом координат — точкой $O(0;\ 0;\ 0)$, три другие — с точками пересечения осей координат с плоскостью $2x + 2y + z - 4 = 0$. Нетрудно найти координаты этих точек. Они равны $A(2; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 4)$. Таким образом, грани тетраэдра имеют уравнения OAB: $z = 0$, OAC: $y = 0$, OBC: $x = 0$, ABC: $2x + 2y + z - 4 = 0$.

Обозначим через u, v, w координаты центра Q вписанного в тетраэдр шара. Если R — его радиус, то расстояние от Q до граней равно R. Поэтому из формулы (22.12) следует, что $R = |u| = |v| = |w| = \dfrac{|2u+2v+w-4|}{3}$.

Центр Q лежит в том же полупространстве относительно грани ABC, что и вершина O. Значит, координаты этих точек удовлетворяют одному и тому же линейному неравенству, определяющему это полупространство. Так как координаты точки O удовлетворяют неравенству $2x + 2y + z - 4 < 0$, то $2u + 2v + w - 4 < 0$ и $|2u + 2v + w - 4| = 4 - 2u - 2v - w$. Аналогично проверяется, что $|u| = u$, $|v| = v$, $|w| = w$. Таким образом, $u = v = w = \dfrac{4-2u-2v-w}{3}$. Решая эту систему уравнений, получаем: $4 - 5u = 3u,\ u = \dfrac{1}{2}$. Точка Q имеет координаты $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$, а радиус равен $\dfrac{1}{2}$.

§ 23. УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ ЛИНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Свойства уравнений прямой линии в аффинной системе координат

Будем предполагать, что в пространстве выбрана некоторая *аффинная система координат*. В § 11 были рассмотрены два способа задания линий в пространстве. Линию можно задать как пересечение двух поверхностей, а также параметрически, когда каждой ее точке ставится в соответствие некоторое число — параметр точки, при этом уравнения линии представляют собой функции координат от этого параметра.

Существует бесконечно много поверхностей, которые пересекаются по прямой линии. Удобнее всего прямую задать как линию пересечения двух плоскостей. Пусть даны две пересекающиеся по прямой l плоскости π_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и π_2: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Плоскости пересекаются, поэтому ранг

R матрицы $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ равен двум (теорема 3, § 21). Точка тогда и только тогда принадлежит l, когда ее координаты удовлетворяют одновременно уравнениям плоскостей π_1 и π_2. Отсюда следует, что система двух линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \tag{23.1}$$

представляет собой *аналитические условия, определяющие прямую* l (§ 11). Ясно, что любая прямая пространства может быть определена с помощью такой системы. Уравнения (23.1) называются *общими уравнениями прямой в пространстве*.

Рассмотрим параметрический способ задания прямой. Выберем точку $M(x_0;\, y_0;\, z_0)$ прямой и ненулевой вектор $\vec{p}\{\alpha; \beta; \gamma\}$, параллельный прямой. Точку M будем называть *начальной точкой* прямой, а вектор $\vec{p}$ — ее *направляющим вектором*. Ясно, что существует единственная прямая, проходящая через M и параллельная $\vec{p}$. Точка $N(x;\, y;\, z)$ тогда и только тогда принадлежит прямой, когда вектор $\overrightarrow{MN}$ коллинеарен направляющему вектору $\vec{p}$, т. е. тогда и только тогда, когда существует такое число t, что $\overrightarrow{MN} = t\vec{p}$. С учетом того что координаты вектора $\overrightarrow{MN}$ равны $\{x - x_0;\, y - y_0;\, z - z_0\}$, получаем $x - x_0 = \alpha t$, $y - y_0 = \beta t$, $z - z_0 = \gamma t$, или

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t, \\ z = z_0 + \gamma t. \end{cases} \tag{23.2}$$

Таким образом, точка N тогда и только тогда принадлежит прямой, когда существует такое число t, что ее координаты вычисляются по формулам (23.2). Соотношения (23.2) носят название *параметрических уравнений прямой*. Правые части этих соотношений представляют собой линейные функции от t. Можно составить бесконечно много параметрических уравнений прямой в пространстве, для которых функции, стоящие в правых частях, отличны от линейных. Но в дальнейшем под параметрическими уравнениями прямой мы будем понимать только уравнения вида (23.2).

Пусть координаты направляющего вектора $\vec{p}$ прямой отличны от нуля. Тогда из соотношений (23.2) следует, что

$t = \dfrac{x - x_0}{\alpha} = \dfrac{y - y_0}{\beta} = \dfrac{z - z_0}{\gamma}$. Таким образом, точка $N(x;\, y;\, z)$ в том и только в том случае принадлежит прямой, заданной начальной точкой $M(x_0;\, y_0;\, z_0)$ и направляющим вектором $\vec{p}\{\alpha; \beta; \gamma\}$ $(\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0,\ \gamma \neq 0)$, когда ее координаты удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}. \tag{23.3}$$

Уравнения (23.3) носят название *канонических уравнений прямой*.

Уравнения $\dfrac{x - x_0}{\alpha} = \dfrac{y - y_0}{\beta}$, $\dfrac{y - y_0}{\beta} = \dfrac{z - z_0}{\gamma}$ и $\dfrac{x - x_0}{\alpha} = \dfrac{z - z_0}{\gamma}$ определяют плоскости, параллельные осям координат. Первое уравнение — плоскость, параллельную оси аппликат, второе уравнение — плоскость, параллельную оси абсцисс, и третье — параллельную оси ординат (§ 22). Поэтому *канонические уравнения прямой представляют собой систему, составленную из уравнений плоскостей, проходящих через прямую линию и параллельных осям координат*.

При решении задач возникает необходимость найти параметрические уравнения прямой при условии, что даны ее общие уравнения. Ясно, что для этого достаточно определить координаты какой-либо точки прямой и ее направляющего вектора.

Теорема 1. *Пусть прямая задана своими общими уравнениями*

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0, \end{cases}$$

тогда вектор

$$\vec{p}\left\{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right\} \tag{23.4}$$

является ее направляющим.

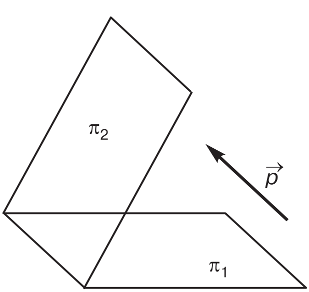


Рис. 87

Доказательство. Вектор $\vec{p}$ параллелен прямой в том и только в том случае, когда он параллелен плоскостям π_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и π_2: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, образующим в пересечении данную прямую (рис. 87). Проверим условие параллельности вектора и плоскости π_1 (теорема 2, § 22):

$$A_1\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} + B_1\begin{vmatrix} C_1 & A_2 \\ C_1 & A_2 \end{vmatrix} + C_1\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда следует, что вектор $\vec{p}$ параллелен плоскости π_1. Аналогично доказывается, что вектор $\vec{p}$ параллелен плоскости π_2. Теорема доказана.

Пример 1. *Найти параметрические и канонические уравнения прямой l, заданной своими общими уравнениями*

$$\begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0, \\ x + 2y - 3z + 1 = 0. \end{cases}$$

Решение. Определим координаты начальной точки прямой. Для этого найдем произвольное решение данной системы. Положим $z = 0$, тогда $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0, \\ x + 2y + 1 = 0. \end{cases}$ Получим $x = 1$; $y = -1$. Таким образом, точка $M(1; -1; 0)$ лежит на данной прямой. Для нахождения координат направляющего вектора $\vec{p}$ воспользуемся соотношениями (23.4): $\vec{p}\left\{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right\}$ или $\vec{p}\{-1; 5; 3\}$.

Искомые уравнения имеют вид

$$\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = -1 + 5t, \\ z = 3t \end{cases}$$

или

$$1 - x = \frac{y+1}{5} = \frac{z}{3}.$$

Таким образом, при любом способе задания прямой можно найти ее направляющий вектор и начальную точку.

Теорема 2. *Пусть в пространстве задана плоскость π: $Ax + By + Cz + D = 0$ и прямая l с начальной точкой $M\,(x_0; y_0; z_0)$ и направляющим вектором $\vec{p}\{\alpha; \beta; \gamma\}$. Тогда прямая l и π плоскость пересекаются в том и только в том случае, когда*

$$A\alpha + B\beta + C\gamma \neq 0, \tag{23.5}$$

l и π параллельны тогда и только тогда, когда

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0,\ \ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0, \tag{23.6}$$

и l лежит в плоскости π в том и только в том случае, когда

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \tag{23.7}$$

Доказательство. Параметрические уравнения прямой l имеют вид

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t, \\ z = z_0 + \gamma t. \end{cases}$$

Найдем общие точки прямой l и плоскости π. Для этого следует заменить в общем уравнении плоскости неизвестные x, y и z на их выражения через параметр t из параметрических уравнений прямой. Получим уравнение относительно t, корни которого являются параметрами точек пересечения прямой и плоскости. Итак, сделав замену

$$A(\alpha + x_0t) + B(\beta + y_0t) + C(\gamma + z_0t) = 0$$

или

$$(A\alpha + B\beta + C\gamma)t + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \tag{23.8}$$

получим линейное уравнение относительно t. Оно имеет единственное решение в том и только в том случае, когда коэффициент при t отличен от нуля, т. е. тогда и только тогда, когда выполнено неравенство (23.5). В этом случае прямая и плоскость пересекаются в точке. Уравнение (23.8) не имеет решений тогда и только тогда, когда выполнены условия (23.6). Этот случай возможен только при условии параллельности прямой и плоскости. И наконец, для того чтобы уравнение имело бесконечно много решений, необходимо и достаточно, чтобы и коэффициент при t, и свободный член совпадали с нулем, т. е. чтобы выполнялись равенства (23.7). В этом случае все точки прямой принадлежат плоскости. Теорема доказана.

Исследуем взаимное расположение двух прямых. Будем предполагать, что прямая l_1 задана точкой $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$ и направляющим вектором $\vec{p}_1\{\alpha_1;\beta_1;\gamma_1\}$, а прямая l_2 — точкой $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$ и направляющим вектором $\vec{p}_2\{\alpha_2;\beta_2;\gamma_2\}$.

Прямые l_1 и l_2 скрещиваются в том и только в том случае, когда не существует плоскости, содержащей эти прямые. Пусть существует плоскость π, содержащая l_1 и l_2 (рис. 88). Тогда векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ компланарны. Ясно, что справедливо и обратное утверждение: если эти векторы компланарны, то прямые l_1 и l_2 принадлежат одной плоскости. Используя условие компланарности векторов в пространстве (§ 3), получим, что прямые l_1 и l_2 скрещиваются тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (23.9)$$

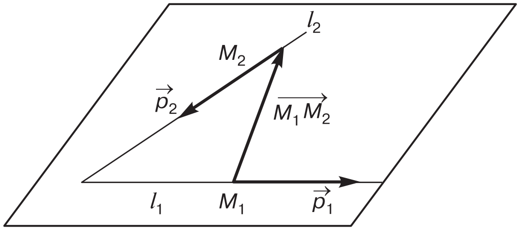


Рис. 88

Изучим теперь условия параллельности прямых l_1 и l_2.

Обозначим соответственно через R и r ранги матриц

$$\begin{pmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \, \beta_1 \, \gamma_1 \\ \alpha_1 \, \beta_2 \, \gamma_2 \end{pmatrix}.$$

Пусть прямые l_1 и l_2 параллельны. Тогда векторы $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ коллинеарны, а значит, $r = 1$. Но при этом точка M_2 не лежит на прямой l_1 (рис. 89, *а*). Отсюда вытекает, что вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ не коллинеарен $\vec{p}_1$. Это означает, что $R = 2$. Ясно, что эти условия также являются и достаточными. Таким образом, если

$$r = 1, R = 2, \qquad (23.10)$$

то прямые l_1 и l_2 параллельны. Отметим, что из условия $r = 1$ следует, что векторы $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ компланарны.

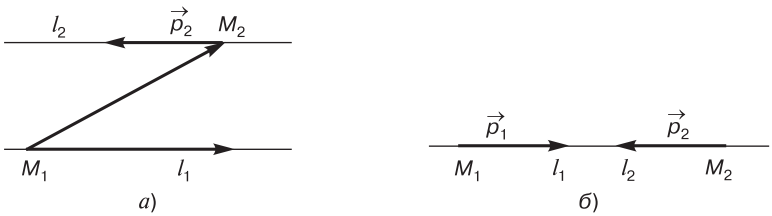


Рис. 89

Рассмотрим теперь совпадающие прямые l_1 и l_2. Тогда векторы $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$, а также вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ коллинеарны (рис. 89, *б*). Отсюда следует, что

$$R = r = 1. \tag{23.11}$$

Очевидно обратное: если выполнены соотношения (23.11), то прямые l_1 и l_2 совпадают. Мы доказали следующую теорему.

Теорема 3. *Для того чтобы прямые l_1 и l_2 скрещивались, были параллельны или совпадали, необходимо и достаточно, чтобы соответственно выполнялись условия* (23.9), (23.10) *или* (23.11).

Пример 2. *Даны уравнения двух прямых*

$$l_1: \begin{cases} x = 2, \\ y = -1 + t, \\ z = -7 + 3t, \end{cases} \quad l_2: \begin{cases} x = 5 - t, \\ y = -2 + t, \\ z = -4 + t. \end{cases}$$

Доказать, что прямые пересекаются, и найти координаты точки пересечения.

Решение. Первая прямая определена точкой $M_1(2, -1, -7)$ и вектором $\vec{p}_1\{0; 1; 3\}$, вторая — точкой $M_2(5, -2, -4)$ и вектором $\vec{p}_2\{-1; 1; 1\}$. Проверим условия (23.9) и (23.10). Вычислим определитель, составленный из координат векторов $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Значит, прямые l_1 и l_2 лежат в одной плоскости. Координаты векторов $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ непропорциональны, поэтому они неколлинеарные, следовательно, выполнено условие (23.10). Прямые l_1 и l_2 пересекаются.

Пусть x, y и z — координаты точки пересечения, а u и v — соответственно параметры этой точки в параметрических уравнениях прямых l_1 и l_2. Тогда $x = 2$, $y = 1 + u$, $z = -7 + 3u$ и $x = 5 - v$, $y = -2 + v$, $z = -4 + v$. Отсюда следует, что

$$\begin{cases} 2 = 5 - v, \\ -1 + u = -2 + v, \\ -7 + 3u = -4 + v. \end{cases}$$

Мы получили систему трех линейных уравнений с двумя неизвестными u и v. Такие системы в основном случае не имеют решений. Но так как прямые l_1 и l_2 пересекаются, то полученная система совместна. Найдем u и v из первых двух уравнений: $u = 2$, $v = 3$. Нетрудно видеть, что эти значения удовлетворяют третьему уравнению. Подставляя $u = 2$ в параметрические уравнения прямой l_1, получим координаты искомой точки X пересечения прямых: $X\,(2; 1; -1)$.

Свойства уравнений прямой линии в прямоугольной декартовой системе координат

Будем предполагать, что в пространстве выбрана прямоугольная декартова система координат. Так как прямоугольная декартова система координат является частным случаем аффинной системы, то при этом остаются справедливыми все свойства прямой, доказанные выше. Рассмотрим задачи, для решения которых удобно использовать именно прямоугольную декартову систему координат. Выведем формулы для вычислений углов между двумя прямыми, между прямой и плоскостью, расстояний от точки до прямой и между двумя прямыми.

Прежде всего, отметим следующее. Пусть прямая задана своими общими уравнениями $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$ Тогда вектор $\vec{p}\left\{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right\}$ является для нее направляющим согласно теореме 1. Но в прямоугольной декартовой системе координат векторы $\vec{n}_1\{A_1; B_1; C_1\}$ и $\vec{n}_2\{A_2; B_2; C_2\}$ перпендикулярны плоскостям π_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и π_2: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, пересекающимся по данной прямой. Вектор $\vec{p}$, как следует из формул для вычисления его координат, равен векторному произведению векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$: $\vec{p} = [\vec{n}_1\vec{n}_2]$ (§ 6). Этот факт имеет ясный геометрический смысл. Векторное произведение перпендикулярно сомножителям $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$, т. е. параллельно плоскостям π_1 и π_2. Поэтому вектор $\vec{p}$ параллелен прямой l пересечения этих плоскостей.

Пусть дана плоскость π: $Ax + By + Cz + D = 0$ и прямая l, определенная начальной точкой $M(x_0; y_0; z_0)$ и направляющим вектором $\vec{p}\{\alpha; \beta; \gamma\}$. Как известно из школьного курса стереометрии, прямая l перпендикулярна плоскости π, если она образует прямой угол с любой прямой, принадлежащей π. В этом случае $\vec{p}$ — нормальный вектор плоскости и, следовательно, он коллинеаран вектору $\vec{n}\{A; B; C\}$. Таким образом, прямая l *перпендикулярна плоскости* π *тогда и только тогда, когда ранг матрицы* $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ A & B & C \end{pmatrix}$ *равен единице.*

Если прямая l не перпендикулярна плоскости π, то под углом φ между прямой и плоскостью понимается острый угол между этой прямой и ее проекцией e' на плоскость π. Если m — прямая, перпендикулярная плоскости, а ψ — угол между m и l, то $\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \psi$, $\sin\varphi = \cos\psi$. Вектор $\vec{n}\{A; B; C\}$ перпендикулярен π, т. е. параллелен прямой m.

Поэтому $\psi = \angle \vec{n}\vec{p}$, если угол $\measuredangle \vec{n}\vec{p}$ острый (рис. 90, *а*), и $\psi = \pi - \angle \vec{n}\vec{p}$, если угол $\angle \vec{n}\vec{p}$ тупой (рис. 90, *б*). Отсюда следует, что $\sin\psi = |\cos\angle \vec{n}\vec{p}|$. Таким образом, $\sin\psi = |\cos\angle \vec{n}\vec{p}| = \dfrac{|\vec{n}\vec{p}|}{|\vec{n}||\vec{p}|}$. Так как координаты векторов $\vec{n}$ и $\vec{p}$ даны в прямоугольной декартовой системе координат, то

$$\sin\psi = \frac{|A\alpha + B\beta + C\gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}. \qquad (22.12)$$

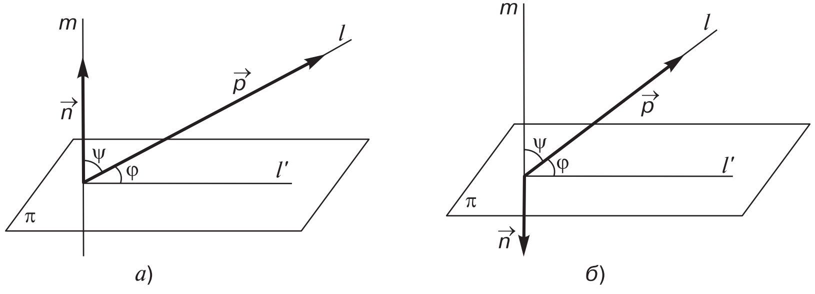


Рис. 90

Рассмотрим в пространстве две прямые l_1 и l_2 с направляющими векторами $\vec{p}_1\{\alpha_1;\beta_1;\gamma_1\}$ и $\vec{p}_2\{\alpha_2;\beta_2;\gamma_2\}$. Как известно, под величиной угла φ между прямыми l_1 и l_2 понимается острый угол между пересекающимися прямыми l_1' и l_2', параллельными l_1 и l_2. Следовательно, $\varphi=\angle\vec{p}_1\vec{p}_2$, если угол $\angle\vec{p}_1\vec{p}_2$ острый или прямой, и $\varphi=\pi-\angle\vec{p}_1\vec{p}_2$, если угол $\angle\vec{p}_1\vec{p}_2$ тупой. Отсюда

$$\cos\varphi=\frac{|\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2|}{\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2}\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2}}.$$

Выведем формулу для вычисления расстояния от точки до прямой в пространстве. Пусть даны координаты точки $N(x_1;y_1;z_1)$, а прямая l задана своей начальной точкой $M(x_0;y_0;z_0)$ и направляющим вектором $\vec{p}\{\alpha;\beta;\gamma\}$. Рассмотрим параллелограмм $MNPQ$, построенный на векторах $\overrightarrow{MN}$ и $\vec{p}$ (рис. 91). Искомое расстояние равно длине h высоты NH этого параллелограмма. Если S — его площадь, то $h=\dfrac{S}{|MQ|}$. Но, как было показано в § 6, $S=\left|[\overrightarrow{MN}\vec{p}]\right|$. Кроме того, $|\overrightarrow{MN}|=|\vec{p}|$. Поэтому $h=\dfrac{\left|[\overrightarrow{MN}\vec{p}]\right|}{|\vec{p}|}$. Так как координаты вектора $\overrightarrow{MN}$ равны $\{x_1-x_0;\ y_1-y_0;\ z_1-z_0\}$, то, используя формулы для вычисления координат векторного произведения векторов, получаем искомое выражение:

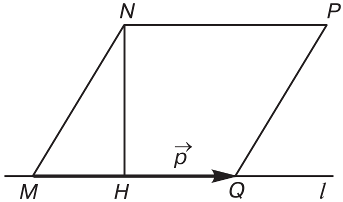


Рис. 91

$$h=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}x_1-x_0 & y_1-y_0\\ \alpha & \beta\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1-x_0 & z_1-z_0\\ \alpha & \gamma\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}y_1-y_0 & z_1-z_0\\ \beta & \gamma\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}.$$

Пусть l_1 и l_2 — скрещивающиеся прямые в пространстве. Прямая l_1 определена точкой $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и направляющим вектором $\vec{p}\{\alpha_1;\beta_1;\gamma_1\}$, а прямая l_2 — точкой $N(x_2;\ y_2;\ z_2)$ и направляющим вектором $\vec{q}\{\alpha_2;\beta_2;\gamma_2\}$. Найдем расстояние d между этими прямыми. Оно равно расстоянию между параллельными плоскостями, каждая из которых параллельна одной из этих прямых и содержит вторую. Рассмотрим тройку неком-

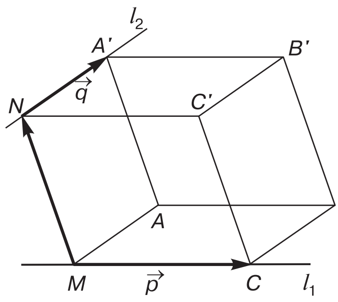


Рис. 92

планарных векторов $\overrightarrow{MN}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$ и достроим ее до параллелепипеда $MABCNA'B'C'$ (рис. 92). Искомое расстояние в равно высоте этого параллелепипеда. Поэтому $d=\dfrac{V}{S}$, где V — его объем, а S — площадь основания $MABC$. Из свойств смешанного и векторного произведений векторов (§ 6, 7), имеем: $d=\dfrac{\left|(\overrightarrow{MN},\vec{p},\vec{q})\right|}{\left|[\vec{p}\,\vec{q}]\right|}$.

Координаты вектора $\overrightarrow{MN}$ равны $\{x_2-x_1;\, y_2-y_1;\, z_2-z_1\}$, отсюда следует, что

$$d=\frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}^2}}.$$

§ 24. ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВ УРАВНЕНИЙ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

В § 8, 12 и 15 мы рассматривали способы применения векторного и координатного методов к решению задач элементарной геометрии. Отмечалось, что, прежде всего, задачу следует перевести на «аналитический язык». Для этого необходимо наиболее удобным образом ввести систему координат, определить аналитические условия, связывающие между собой данные, и выяснить, каким условиям подчиняются искомые геометрические объекты. Используя свойства координат векторов и точек, а также свойства уравнений плоскостей и прямых в пространстве, провести необходимые вычисления и доказать требуемые условия.

Пример 1. *Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$. Диагональ AC' образует с ребрами AB и AD углы, равные α и β. Найти косинус угла между плоскостями ABC и ADC'.*

Решение. Пусть $ABCDA'B'C'D'$ — данный прямоугольный параллелепипед (рис. 93). Введем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы точка A была ее началом, а вершины B, D и A' лежали на осях абсцисс, ординат и аппликат. Пусть точка C' имеет координаты $(a; b; c)$. Из условия следует, что величины углов между вектором $\overrightarrow{AC'}$ и осями координат равны углам между векторами: $\alpha = \angle \vec{i}\,\overrightarrow{AC}$, $\beta = \angle \vec{j}\,\overrightarrow{AC}$. Так как $\overrightarrow{AC'}\{a; b; c\}$, то

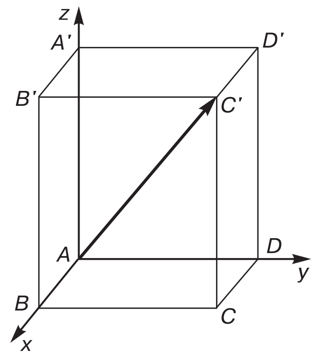


Рис. 93

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$
$$\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \qquad (24.1)$$

Составим уравнения плоскостей $AC'B$ и $AC'D$. Плоскость $AC'B$ определена точкой A и векторами $\vec{i}$ и $\overrightarrow{AC'}$. Ее уравнение имеет вид $\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, или $cy - bz = 0$. Аналогично находим уравнение плоскости $AC'D$: $cx - az = 0$. Используя формулу для вычисления угла между плоскостями, полученную в § 22, найдем косинус искомого угла:

$$\cos\varphi = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + c^2}\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

Преобразуем полученное выражение, используя при этом равенства (24.1):

$$\cos\varphi = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - b^2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - a^2}} =$$

$$= \frac{\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \cdot \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}{\sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2+b^2+c^2}} \cdot \sqrt{1 - \dfrac{a^2}{a^2+b^2+c^2}}} = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}\sqrt{1-\cos^2\beta}} = \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta.$$

Таким образом, $\cos\varphi = \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$.

Пример 2. *Дан тетраэдр $ABCD$, у которого все плоские углы при вершине D прямые. Длины ребер AD, BD и CD равны a, b и c.*

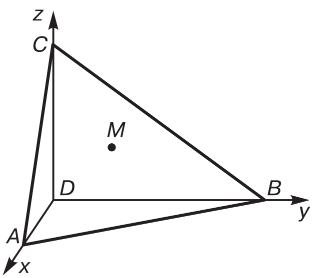


Рис. 94

Точка M принадлежит грани ABC и равноудалена от остальных граней тетраэдра. Найти длину DM.

Решение. Так как плоские углы при вершине D данного тетраэдра прямые, то удобно ввести прямоугольную декартову систему координат так, чтобы вершина D была ее началом, а вершины A, B и C лежали на осях координат (рис. 94). Так как нам даны длины ребер AD, BD и CD, то можно определить координаты вершин тетраэдра:

$$D(0; 0; 0), A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c).$$

Составим уравнение плоскости ABC, она определена точкой A и векторами $\overrightarrow{AB}\{-a; b; 0\}$ и $\overrightarrow{AC}\{-a; 0; c\}$. Получим

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Точка M принадлежит плоскости ABC. Обозначим ее координаты через u, v и w. Тогда

$$\frac{u}{a}+\frac{v}{b}+\frac{w}{c}=1. \tag{24.2}$$

Нам необходимо найти расстояние от точки D до M. По условию, расстояния от точки M до координатных плоскостей $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$ равны между собой. Из формулы для вычисления расстояния от точки до плоскости, выведенной в § 22, следует, что расстояния от M до плоскостей $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$ соответственно равны $|u|$, $|v|$ и $|w|$. Поэтому $|u| = |v| = |w|$. Точка M находится внутри трехгранного угла, образованного координатными плоскостями, координаты точек которого положительны. Отсюда следует, что $u = v = w$. Из полученного равенства и соотношения (24.2) получаем $\frac{u}{a}+\frac{u}{b}+\frac{u}{c}=1$. Таким образом, $u = v = w =$

$= \dfrac{abc}{ab+ac+bc}$. Так как система координат прямоугольная декартова, то $|DM| = \sqrt{u^2+v^2+w^2}$. Поэтому искомое расстояние равно

$$|DM| = \frac{\sqrt{3}abc}{ab+ac+bc}.$$

Пример 3. *Основанием пирамиды SABC служит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC, длина гипотенузы AB которого равна* $4\sqrt{2}$. *Боковое ребро SC перпендикулярно к плоскости основания, и его длина равна 2. Найти величину угла и расстояние между прямыми SM и CN, где M и N — середины ребер AC и AB.*

Решение. Пусть $SABC$ — данная пирамида (рис. 95). Очевидно, что удобнее всего ввести прямоугольную декартову систему координат так же, как мы ввели ее в предыдущей задаче: C — начало, а вершины A, B и S принадлежат, соответственно, осям абсцисс, ординат и аппликат (рис. 95). Так как $|SC| = 2$, то координаты точки S равны (0; 0; 2). По условию, треугольник ABC равнобедренный прямоугольный, его гипотенуза AB имеет длину $4\sqrt{2}$. Отсюда следует, что $|AB| = |BC| = 4$. Поэтому координаты вершин A и B равны (4; 0; 0) и (0; 4; 0). Тогда середины сторон AC и AB имеют координаты M (2; 0; 0) и N (2; 2; 0). Определим координаты векторов $\overrightarrow{SM}$ и $\overrightarrow{CN}$: $\overrightarrow{SM}\{2; 0; -2\}$, $\overrightarrow{CN}\{2; 2; 0\}$. Эти векторы являются направляющими для прямых SM и CN. Поэтому косинус угла φ между ними вычисляется по формуле, полученной в § 23:

$$\cos\varphi = \frac{4}{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

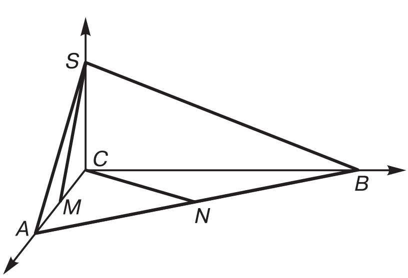


Рис. 95

Таким образом, сам угол φ составляет 60°.

Для вычисления расстояния d между прямыми SM и CN воспользуемся формулой, выведенной в § 23. Прямая SM определена точкой $S(0;\,0;\,2)$ и вектором $\overrightarrow{SM}\{2;\,0;\,-2\}$, а прямая CN — точкой $C(0;\,0;\,0)$ и вектором $\overrightarrow{CN}\{2;\,2;\,0\}$. Поэтому

$$d=\frac{\begin{vmatrix}0 & 0 & 2\\ 2 & 0 & -2\\ 2 & 2 & 0\end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix}2 & 0\\ 2 & 2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}2 & -2\\ 2 & 0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{vmatrix}^2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

§ 25. МЕТОД СЕЧЕНИЙ, ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ И КОНИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ, ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

В § 11 было дано определение алгебраической поверхности и ее порядка. Там же было показано, что порядок поверхности не зависит от выбора системы координат. Согласно этому определению, поверхность пространства является алгебраической второго порядка в том и только в том случае, когда в некоторой аффинной системе координат ее уравнение имеет вид

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+$$
$$+2a_{23}yz+2a_{10}x+2a_{20}y+2a_{30}z+a_{00}=0.$$

Мы изучим некоторые свойства таких поверхностей по их каноническим уравнениям. Не оговаривая особо, в дальнейшем будем предполагать, что в пространстве дана прямоугольная декартова система координат.

Любую поверхность можно рассматривать как множество линий, полученных при ее пересечении всеми плоскостями, параллельными между собой. Изучение свойств поверхности по этим линиям называется *методом сечений*. В дальнейшем будем рассматривать множества плоскостей, параллельных плоскостям координат.

Пусть в пространстве даны поверхность P и плоскость π, параллельная координатной плоскости Oxy и определенная уравнением $z=h$. Обозначим через γ' линию пересечения P и π, а через γ — проекцию γ' на координатную плоскость Oxy.

Определение 1. *Кривая* γ *называется линией уровня поверхности* P *на плоскости* Oxy*, соответствующей значению* h.

Аналогично определяются линии уровня поверхности P на координатных плоскостях Oxz и Oyz.

Теорема 1. *Пусть уравнение поверхности* P *в системе координат* $O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ *имеет вид* $F(x;\ y;\ z) = 0$. *Тогда уравнение* $F(x;\ y;\ h) = 0$ *представляет собой уравнение ее линии уровня* γ' *на плоскости* Oxy*, соответствующей значению* h*, в системе координат* $O, \vec{i}, \vec{j}$.

Доказательство. Возьмем произвольную точку $M(x;\ y)$, принадлежащую γ. Покажем, что ее координаты — решение уравнения $F(x;\ y;\ h) = 0$. Так как M лежит на γ, то существует точка M' кривой γ' пересечения P и плоскости π: $z = h$, которая проектируется параллельно оси Oz в точку M (рис. 96). M' лежит в π и проектируется в точку M, поэтому $M'(x;\ y;\ h)$. Но координаты точки M', лежащей на поверхности P, удовлетворяют уравнению поверхности $F(x;\ y;\ h) = 0$. Таким образом, координаты M удовлетворяют уравнению линии γ.

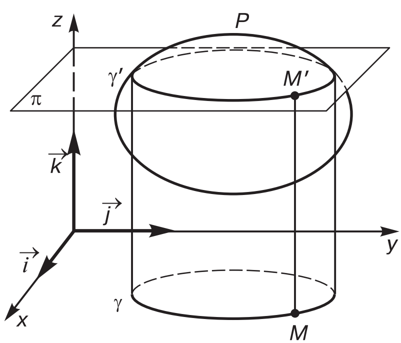


Рис. 96

Обратно, пусть M — некоторая точка плоскости Oxy, координаты x и y которой в системе $O, \vec{i}, \vec{j}$ удовлетворяют уравнению $F(x;\ y;\ h) = 0$. Покажем, что M принадлежит линии уровня γ. Рассмотрим точку M' плоскости π, которая проектируется параллельно оси Oz в точку M. Координаты M' равны $(x;\ y;\ h)$. Так как они удовлетворяют уравнению $F(x;\ y;\ h) = 0$, то M' лежит на поверхности P. Поэтому M' принадлежит пересечению γ' поверхности P и плоскости π, а точка M находится на проекции γ линии γ' на плоскость Oxy. Теорема доказана.

Аналогично определяются уравнения линий уровня поверхности на координатных плоскостях Oxz и Oyz. Например, уравнение линии уровня поверхности P: $F(x;\ y;\ z) = 0$ на плоскости Oyz, соответствующей значению h, в системе координат $O,\ \vec{j},\ \vec{k}$ имеет вид $F(x;\ y;\ z) = 0$. Меняя h, получим систему линий уровня на каждой из координатных плоскостей. Такие системы позволяют судить о форме поверхности.

Метод сечений используется на практике. Например, с его помощью на топографических картах изображается рельеф местности, а на морских — рельеф дна.

Перейдем к изучению цилиндрических поверхностей.

Определение 2. *Поверхность называется цилиндрической, если она вместе с каждой своей точкой содержит прямую, параллельную некоторому фиксированному ненулевому вектору.*

Прямые цилиндрической поверхности, параллельные указанному вектору, называются ее *образующими*. Ясно, что любую цилиндрическую поверхность можно определить, выбрав в пространстве кривую γ и ненулевой вектор $\vec{p}$, а затем построить прямые, параллельные $\vec{p}$, проходящие через точки кривой γ (рис. 97). Кривая γ называется *направляющей* цилиндрической поверхности. Простейшей цилиндрической поверхностью является плоскость. Ее направляющей может служить ее любая прямая, а образующие могут быть параллельны произвольному вектору, который не параллелен направляющей прямой.

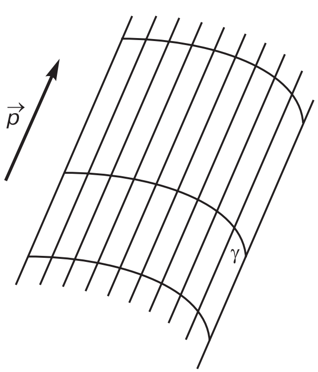


Рис. 97

Теорема 2. *Пусть образующие цилиндрической поверхности параллельны оси аппликат прямоугольной декартовой системы координат $O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$, а ее направляющая принадлежит координатной плоскости Oxy и имеет уравнение $F(x;\ y) = 0$ в системе координат $O,\ \vec{i},\ \vec{j}$ этой плоскости. Тогда это же уравнение $F(x;\ y) = 0$ является уравнением всей поверхности в системе координат $O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ пространства.*

Доказательство. Выберем произвольную точку $M(x;\ y;\ z)$, принадлежащую данной цилиндрической поверхности. Проведем через нее образующую l, которая пересечет направляющую γ в некоторой точке M_1 (рис. 98). Так как образующая параллельна оси Oz, то у точки M_1 в системе O, $\vec{i}$, $\vec{j}$ координаты совпадают с первыми двумя координатами точки M: $M_1(x;\ y)$. Так как M_1 принадлежит γ, то ее координаты удовлетворяют уравнению $F(x;\ y) = 0$. Следовательно, координаты точки M удовлетворяют тому же уравнению.

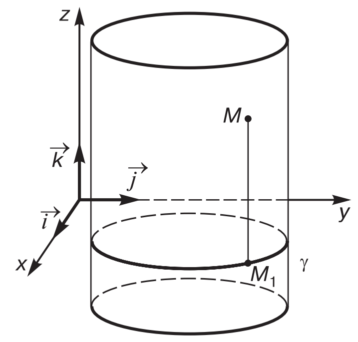


Рис. 98

Обратно, пусть координаты x, y и z некоторой точки M удовлетворяют уравнению $F(x;\ y) = 0$. Покажем, что она лежит на данной цилиндрической поверхности. Проведем через M прямую l, параллельную оси аппликат, и обозначим через M_1 точку пересечения l с плоскостью Oxy. Координаты точки M_1 в системе O, $\vec{i}$, $\vec{j}$ равны $(x;\ y)$. Но, по условию, x и y удовлетворяют уравнению кривой γ: $F(x;\ y) = 0$. Поэтому M_1 лежит на направляющей γ, следовательно, l — образующая цилиндрической поверхности. Данная точка M лежит на этой поверхности. Теорема доказана.

С помощью этой теоремы можно описать все вещественные цилиндрические поверхности второго порядка. Для этого на плоскости Oxy в качестве направляющей выберем кривую второго порядка, образующие поверхности будут параллельны оси аппликат. Приведем канонические уравнения таких поверхностей.

1. Эллиптический цилиндр: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

2. Гиперболический цилиндр: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

3. Параболический цилиндр: $y^2 = 2px$.

4. Цилиндрическая поверхность, представляющая собой пару плоскостей, пересекающихся на оси Oz: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0.$

5. Цилиндрическая поверхность, представляющая собой пару параллельных плоскостей: $\dfrac{x^2}{a^2}=1$.

6. Цилиндрическая поверхность, представляющая собой пару слившихся параллельных плоскостей: $x^2 = 0$.

На рисунке 99, *а—в* изображены эллиптический, гиперболический и параболический цилиндры.

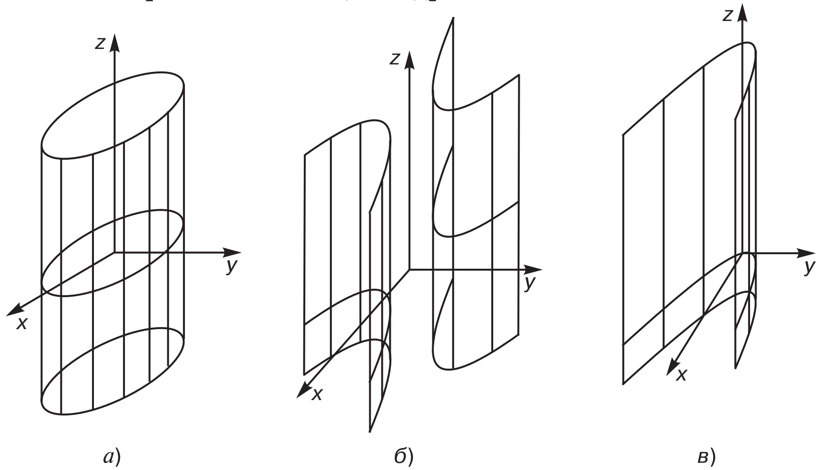


Рис. 99

Рассмотрим свойства вещественной конической поверхности второго порядка.

Определение 3. *Поверхность p называется конической, если для нее можно указать такую точку O, для которой прямая, проходящая через нее и любую другую точку поверхности, целиком принадлежит p.*

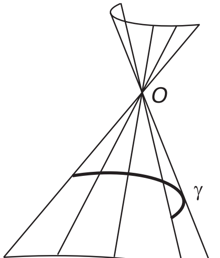


Рис. 100

Эти прямые называются *образующими конической поверхности*. Точка, в которой пересекаются все образующие, называется *вершиной*. Любую коническую поверхность можно построить следующим образом. Выберем в пространстве некоторую кривую γ и зафиксируем точку O. Затем через нее и через каждую точку кривой проведем прямые — образующие конической поверхности. В этом случае кривая γ называется *направляющей* этой поверхности (рис. 100). Докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Поверхность, заданная уравнением*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \qquad (25.1)$$

является конической с вершиной в начале координат.

Доказательство. Выберем на этой поверхности произвольную точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$. Ее координаты удовлетворяют уравнению (25.1): $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=0$. Если O — начало координат, то координаты вектора $\overrightarrow{OM_0}$ равны $\{x_0;\ y_0;\ z_0\}$. Поэтому параметрические уравнения прямой OM_0 имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x = x_0 t, \\ y = y_0 t, \\ z = z_0 t. \end{cases}$$

Возьмем произвольную точку M этой прямой, соответствующей параметру t, и покажем, что ее координаты x_0t, y_0t и z_0t удовлетворяют уравнению (25.1). Действительно,

$$\frac{(x_0t)^2}{a^2}+\frac{(y_0t)^2}{b^2}-\frac{(z_0t)^2}{c^2}=t^2\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}\right)=0.$$

Таким образом, прямая OM_0 целиком лежит на поверхности. Теорема доказана.

Уравнение (25.1) называется *каноническим уравнением вещественной конической поверхности второго порядка*. Построим ее линии уровня на координатных плоскостях, начав с плоскости Oxy. Пусть плоскость сечения имеет уравнение $z = h$. Тогда уравнение соответствующей линии уровня имеет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}$. При $h = 0$ получим $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$. Этому уравнению соответствует начало системы координат, т. е. вершина конуса. Если $h \neq 0$, то преобразуем уравнение линии уровня к виду $\frac{x^2}{h^2\frac{a^2}{c^2}}+\frac{y^2}{h^2\frac{b^2}{c^2}}=1$.

Полученное уравнение при любом h, отличном от нуля, определяет эллипс, оси симметрии которого совпадают с осями координат. Отношение его полуосей равно $\frac{a}{b}$, т. е. не зависит от h. Таким образом, линии уровня на плоскости Oxy представляют собой множество подобных между собой эллипсов, имеющих одни и те же оси симметрии, причем с увеличением h полуоси эллипсов бесконечно возрастают (рис. 101, *а*).

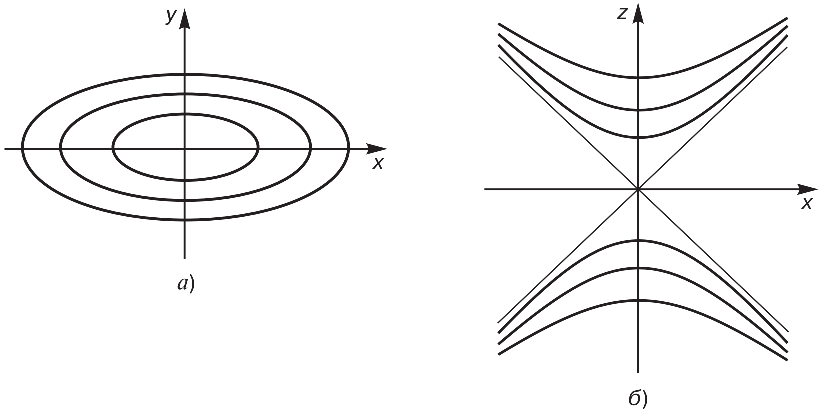


Рис. 101

Рассмотрим теперь сечения поверхности плоскостью $y = h$, параллельной координатной плоскости Oxz. Линия уровня на плоскости определяется уравнением $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{h^2}{b^2}$. Если $h = 0$, то линия уровня определяется уравнением $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0$, т. е. представляет собой две прямые $z = \frac{c}{a}x$, $z = -\frac{c}{a}x$ — образующие конической поверхности.

Пусть $h \neq 0$. Преобразуем уравнение к виду $\frac{z^2}{h^2 \frac{c^2}{b^2}} - \frac{x^2}{h^2 \frac{a^2}{b^2}} = 1$. В этом случае линией уровня является гипербола, для которой оси координат Oz и Ox служат действительной и мнимой осями симметрии, а отношение действительной полуоси к мнимой постоянно, не зависит от h и равно $\frac{c}{a}$. Поэтому все эти гиперболы имеют одни и те же асимптоты, определяемые уравнениями $z = \frac{c}{a}x$, $z = -\frac{c}{a}x$. Это те самые прямые, которые служат линиями уровня конической поверхности при $h = 0$.

Карта линий уровня $y = h$ приведена на рисунке 101, *б*. Ясно, что аналогичную карту линий уровня получим при пересечении поверхности плоскостями $x = z$. На рисунке 102 изображена вещественная коническая поверхность второго порядка, показаны сечения плоскостями, параллельными координатным плоскостям Oxy и Oxz.

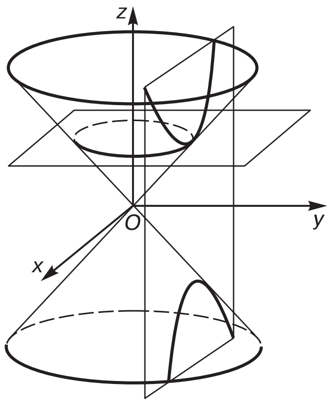


Рис. 102

Интересно отметить следующий факт. Если пересечь коническую поверхность второго порядка плоскостью, параллельной ее образующей, то в сечении образуется парабола. Это сечение изображено на рис. 103. Эллипс, гиперболу и параболу часто называют *коническими сечениями*.

Определение 4. *Поверхность p называется поверхностью вращения, если для нее можно указать такую прямую l, что она вместе с каждой своей точкой целиком содержит линию, полученную при вращении этой точки вокруг l.*

Прямая l называется *осью вращения*. Линии, полученные при вращении точек поверхности вокруг оси, называются *параллелями* поверхности вращения. Если точка не принадлежит l, то параллель, проходящая через нее, представляет собой окружность, если же точка принадлежит l, то параллель совпадает с самой точкой. Ясно, что плоскости, содержащие параллели поверхности, перпендикулярны ее оси. Кривая, полученная при пересечении поверхности вращения с плоскостью, проходящей через ее ось, называется *меридианом* этой поверхности. Поверхность можно получить, вращая любой ее меридиан вокруг оси.

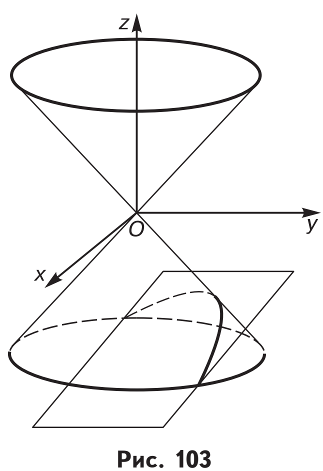


Рис. 103

Теорема 4. *Пусть в пространстве дана прямоугольная декарто-*

ва система координат $O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. *Если на координатной плоскости* Oxz *в системе координат* $O, \vec{i}, \vec{k}$ *задана кривая* γ *своим уравнением* $x = f(z)$, *то уравнение поверхности, полученной при вращении* γ *вокруг оси* Oz, *в системе координат* $O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ *имеют следующий вид*:

$$x^2 + y^2 = f^2(z). \tag{25.2}$$

Доказательство. Пусть p — данная поверхность вращения, а $M(x; y; z)$ — ее произвольная точка (рис. 104). Обозначим через ω параллель поверхности p, проходящую через точку M. Эта параллель представляет собой окружность, центр которой находится в точке N оси Oz, а радиус равен длине отрезка MN. Так как отрезок MN перпендикулярен оси Oz, то координаты точки N равны $(0; 0; z)$. Поэтому $|MN| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Пусть ω пересекает координатную плоскость Oxz в точках P_1 и P_2. Отрезки P_1N и P_2N также перпендикулярны оси Oz, точки P_1 и P_2 симметричны относительно N, поэтому их координаты имеют вид $P_1(a; 0; z)$, $P_2(-a; 0; z)$, где a — некоторое положительное число. Но из равенств $|P_1N| = |P_2N| = |MN|$ следует, что $|a| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Таким образом, для точек P_1 и P_2 имеем: $P_1(\sqrt{x^2 + y^2}; 0; z)$, $P_2(-\sqrt{x^2 + y^2}; 0; z)$. Одна из этих точек принадлежит кривой ω, следовательно, либо $\sqrt{x^2 + y^2} = f(z)$, либо $-\sqrt{x^2 + y^2} = f(z)$. Поэтому координаты точки M удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = f^2(z)$.

Обратно, пусть координаты x, y и z некоторой точки M удовлетворяют уравнению (25.2). Покажем, что она принадлежит поверхности вращения p. Спроектируем M на ось Oz, получим точку N, координаты которой равны $(0; 0; z)$. Построим окружность ω с центром в точке N, радиуса $|MN|$, плоскость которой перпендикулярна оси Oz. Эта окружность пересекает координатную плоскость Oxz в точках P_1 и P_2. Ранее были найдены координаты этих точек: $P_1(\sqrt{x^2 + y^2}; 0; z)$, $P_2(-\sqrt{x^2 + y^2}; 0; z)$. Из уравнения (25.2) следует, что

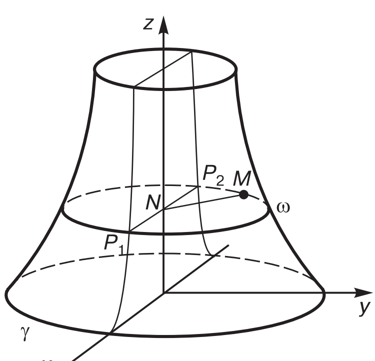


Рис. 104

$\sqrt{x^2+y^2}=|f(z)|$. Если $f(z)\geq 0$, то $\sqrt{x^2+y^2}=f(z)$ и точка P_1 лежит на кривой ω. Если $f(z)<0$, то $-\sqrt{x^2+y^2}=f(z)$, в этом случае P_2 принадлежит ω. Таким образом, ω — окружность вращения либо точки P_1, либо точки P_2 вокруг оси Oz, поэтому она целиком принадлежит поверхности вращения p. Следовательно, на этой поверхности лежит и точка M. Теорема доказана.

Можно доказать, что уравнение поверхности, образованной вращением вокруг оси Oz кривой, принадлежащей плоскости Oyz и определенной в системе уравнением $y=f(z)$, также совпадает с уравнением (25.2). Аналогично определяются уравнения поверхностей вращения вокруг осей Ox и Oy.

Приведем примеры поверхностей вращения второго порядка.

Пример 1. *В плоскости Oxz дана прямая $x=r$, параллельная оси Oz. Определить уравнение поверхности, образованной вращением прямой вокруг оси Oz.*

Решение. Воспользуемся уравнением (25.2). Так как $f(z)=r$, то уравнение поверхности вращения имеет вид $x^2+y^2=r^2$. Эта поверхность в соответствии с теоремой 2 является цилиндрической. Она носит название *кругового цилиндра*.

Пример 2. *В плоскости Oxz дана прямая $x=kz$, проходящая через начало координат. Определить уравнение поверхности, образованной вращением этой прямой вокруг оси Oz.*

Решение. Как следует из формулы (25.2), искомое уравнение имеет вид $x^2+y^2=k^2z^2$, или $\frac{x^2}{k^2}+\frac{y^2}{k^2}-z^2=1$. Полученная поверхность является конической (теорема 3). Ее называют *круговым конусом*.

Пример 3. *В плоскости Oxz дан эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Определить уравнение, полученное при его вращении вокруг оси Oz.*

Решение. Так как эллипс, определенный своим каноническим уравнением, симметричен относительно начала координат, то для построения поверхности достаточно вращать вокруг оси Oz только его половину, для точек которой абсциссы больше или равны 0. Эта часть эллипса определена уравнением $x=\frac{a}{c}\sqrt{c^2-z^2}$. Из формулы (25.2) следует, что уравнение искомой поверхности можно записать в виде $x^2+y^2=\frac{a^2}{c^2}(c^2-z^2)$ или

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Такая поверхность называется *эллипсоидом вращения*. Она представлена на рис. 105.

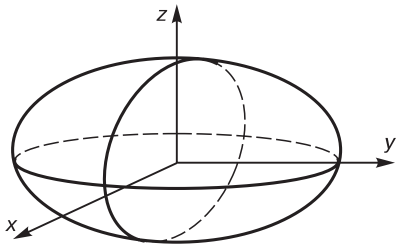


Рис. 105

Пример 4. *В плоскости Oxz дана гипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. Определить уравнение поверхности, полученной при вращении вокруг оси Oz.*

Решение. Как следует из уравнения гиперболы, она пересекает ось Ox и не пересекает ось вращения Oz. Исходя из свойств симметрии гиперболы, для построения поверхности достаточно вращать только одну ее ветвь, для точек которой абсцисса положительна. Уравнение этой ветви можно представить в виде $x=\frac{a}{c}\sqrt{z^2+c^2}$. Используя (25.2), получим уравнение искомой поверхности вращения: $x^2+y^2=\frac{a^2}{c^2}(z^2+c^2)$ или $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

Такая поверхность называется *однополостным гиперболоидом вращения* (рис. 106).

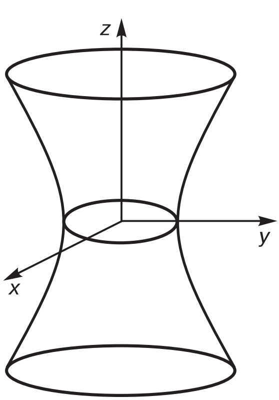


Рис. 106

Пример 5. *В плоскости Oxz дана гипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$. Определить уравнение поверхности, полученной при ее вращении вокруг оси аппликат.*

Решение. Данная гипербола пересекает ось Oz и не пересекает оси Ox. Из соображений симметрии будем вращать только ту часть гиперболы, точки которой имеют положительную абсциссу. Уравнение этой части представим в виде $x=\frac{a}{c}\sqrt{z^2-c^2}$. Поэтому из (25.2) следует, что уравнение $x^2+y^2=$ $=\frac{a^2}{c^2}(z^2-c^2)$ служит уравнением искомой поверхности. Преобразуем его к виду $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$. Полученная поверхность называется *двуполостным гиперболоидом вращения* (рис. 107).

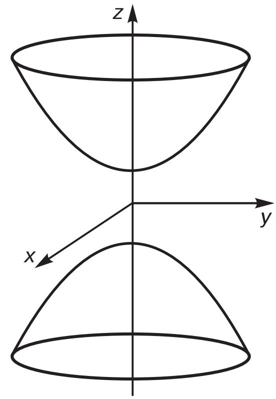


Рис. 107

Пример 6. *В плоскости Oxz дана парабола $x^2=2pz$. Найти уравнение поверхности, полученной при ее вращении вокруг оси Oz.*

Решение. Искомую поверхность можно получить, вращая только одну ветвь параболы, определенную уравнением $x=\sqrt{2pz}$. Из (25.2) следует, что уравнение поверхности имеет вид $x^2+y^2=$ $=2pz$.

Эта поверхность называется *эллиптическим параболоидом вращения*. Она изображена на рис. 108.

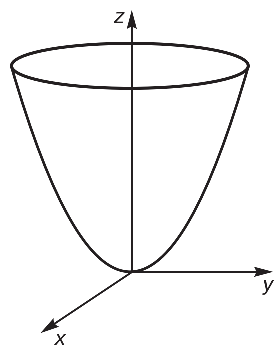


Рис. 108

§ 26. ЭЛЛИПСОИДЫ И ГИПЕРБОЛОИДЫ

В предыдущем параграфе мы познакомились с эллипсоидом и гиперболоидами вращения. Теперь изучим общий вид этих поверхностей.

Определение 1. *Под эллипсоидом понимается поверхность, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат имеет уравнение*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Из уравнения эллипсоида следует, что он пересекает каждую из осей координат в двух точках: ось абсцисс в точках $A_1(a;0;0)$ и $A_2(-a;0;0)$, ось ординат в точках $B_1(0;b;0)$ и $B_2(0;-b;0)$, а ось аппликат — в точках $C_1(0;0;c)$ и $C_2(0;0;-c)$. Координаты точек эллипсоида удовлетворяют неравенствам

$$\begin{cases} -a \le x \le a, \\ -b \le y \le b, \\ -c \le z \le c. \end{cases}$$

Из уравнения эллипсоида также следует, что он симметричен относительно координатных плоскостей и центрально симметричен относительно начала координат.

Исследуем эллипсоид с помощью метода сечений. Выясним вид линий уровня на координатной плоскости Oxy. Пересечем эллипсоид плоскостью $z = h$. Как следует из теоремы 1 (§ 25), уравнение линии уровня, соответствующей значению h, в системе $O, \vec{i}, \vec{j}$ имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{h^2}{c^2} = 1$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}. \tag{26.1}$$

Если $|h| > c$, то $1 - \frac{h^2}{c^2} < 0$, на плоскости не существует точек, координаты которых удовлетворяют уравнению (26.1), плоскость не пересекает эллипсоида. Если $h = \pm c$, то из соотношений (26.1) получим: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$. Этому уравнению удовлетворяет единственная точка плоскости $O(0;\ 0)$. Плоскости касаются эллипсоида в точках $C_1(0;\ 0;\ c)$ и $C_2(0;\ 0;\ -c)$. Пусть $|h| < c$. Преобразуем соотношение (26.1) к виду $\frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1$. Полученное уравнение определяет эллипс, оси симметрии которого совпадают с осями координат, а полуоси равны $a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$ и $b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$. В этом случае линиями уровня служат эллипсы, симметричные относительно осей координат, отношение полуосей которых постоянно, при этом длины полуосей максимальны при $h = 0$. Карта линий уровня приведена на рисунке 109. Аналогично строятся линии уровня на плоскостях Oxz и Oyz. Эллипсоид изображен на рис. 110.

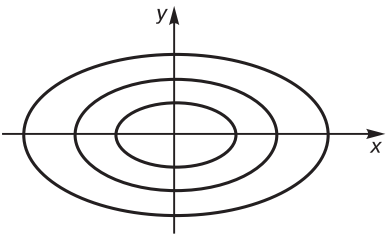


Рис. 109

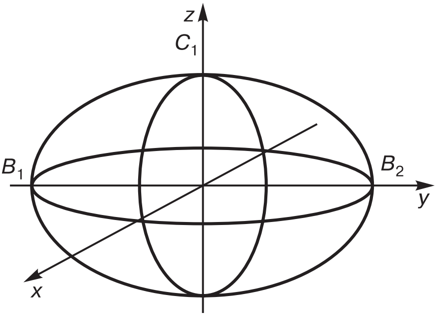


Рис. 110

Перейдем к изучению свойств гиперболоидов. Существуют два различных вида гиперболоидов.

Определение 2. *Под однополостным гиперболоидом понимается поверхность, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат имеет уравнение*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (26.2)$$

Прежде всего, отметим простейшие свойства однополостного гиперболоида, вытекающего из его уравнения. Так как в уравнении (26.2) содержатся только квадраты неизвестных, то однополостный гиперболоид симметричен относительно координатных плоскостей и центрально симметричен относительно начала координат. Нетрудно видеть, что однополостный гиперболоид пересекает ось абсцисс в двух точках $A_1(a;\ 0;\ 0)$ и $A_2(-a;\ 0;\ 0)$, а ось ординат в точках $B_1(0;\ b;\ 0)$ и $B_2(0;\ -b;\ 0)$; ось Oz не имеет общих точек с гиперболоидом. Найдем точки пересечения однополостного гиперболоида с прямой, проходящей через начало координат. Если $\vec{q}\{q_1;q_2;q_3\}$ — направляющий вектор такой прямой, то ее параметрические уравнения имеют вид $\begin{cases} x=q_1t,\\ y=q_2t,\\ z=q_3t.\end{cases}$ Подставив эти соотношения в равенство (26.2), получим уравнение для определения параметров точек пересечения:

$$t^2\frac{q_1^2}{a^2}+t^2\frac{q_2^2}{b^2}-t^2\frac{q_3^2}{c^2}=1. \qquad (26.3)$$

Введем следующее обозначение: $Q=\frac{q_1^2}{a^2}+\frac{q_2^2}{b^2}-\frac{q_3^2}{c^2}$. Если $Q > 0$, то уравнение (26.3) имеет два действительных корня. В этом случае прямая пересекает однополостный гиперболоид в двух точках. Если $Q < 0$, то корни уравнения (26.3) — комплексно-сопряженные числа. Тогда говорят, что прямая не имеет с гиперболоидом общих точек и она пересекает поверхность в двух комплексно сопряженных точках. В случае $Q = 0$ уравнение (26.3) не имеет ни действительных, ни комплексных корней. Такая прямая называется прямой *асимптотического направления* однополостного гиперболоида. Легко видеть, точка $M(x; y; z)$ тогда и только тогда лежит на прямой асимптотического направления однополостного гиперболоида, когда ее координаты удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \tag{26.4}$$

Поверхность, определяемая этим уравнением, — коническая (§ 25). Она называется *асимптотическим конусом однополостного гиперболоида*.

Исследуем однополостный гиперболоид методом сечений. Положим $z=h$. Тогда из равенства (26.2) следует, что $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}$, или $\frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}=1$. Линии уровня на плоскости Oxy, определяемые этим уравнением, являются эллипсами. Их оси совпадают с осями координат, а отношение полуосей постоянно и равно $\frac{a}{b}$. Если $h = 0$, то длины полуосей равны a и b. Такой эллипс называется горловым. При увеличении модуля числа h длины полуосей эллипса возрастают и стремятся к бесконечности. Линии уровня на плоскости Oxy изображены на рис. 111.

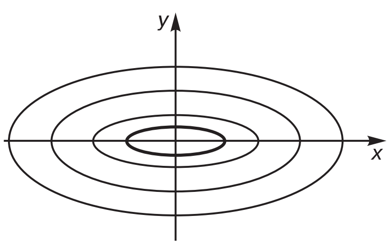


Рис. 111

Исследуем линии уровня однополостного гиперболоида на плоскости Oxz. Положим $y = h$, тогда из уравнения (25.4) получим:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2}. \qquad (26.5)$$

Уравнение (26.5) определяет кривую гиперболического типа.

Если $h_2 = b_2$, то $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0.$ В этом случае линии уровня — две прямые линии l_1: $z=\frac{c}{a}x$ и l_2: $z=-\frac{c}{a}x$. Они целиком принадлежат однополостному гиперболоиду.

Если $h^2 < b^2$, то уравнение (26.5) определяет гиперболу $\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{h^2}{b^2}\right)}-\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{h^2}{b^2}\right)}=1$, которая пересекает ось Ox и не пересекает ось Oz. Длины ее полуосей равны $a\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}$ и $c\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}$. Так как $0 \le h^2 \le b^2$, то действительная и мнимая полуоси гиперболы подчиняются неравенствам $0<a\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}\le a,\ 0<c\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}\le c.$ Наибольшие значения, равные a и c, они принимают при $h = 0$. Отношение полуосей постоянно и равно $\frac{a}{c}$. Поэтому при любом h гипербола имеет одни и те же асимптоты l_1: $z=\frac{c}{a}x$ и l_1: $z=-\frac{c}{a}x$; это те самые прямые, которые служат линиями уровня при $h=0$.

Если $h^2 > b^2$, то преобразуем формулу (26.5) к виду $\frac{x^2}{a^2\left(\frac{h^2}{b^2}-1\right)}-\frac{z^2}{c^2\left(\frac{h^2}{b^2}-1\right)}=-1.$ Это уравнение при любом h также определяет гиперболу, но такую, которая пересекает ось Oz и не пересекает ось Ox. При этом при бесконечном возрастании h по абсолютной величине длины полуосей изменяются от нуля до бесконечности, а отношение полуосей постоянно и равно $\frac{c}{a}$. Поэтому прямые l_1: $z=\frac{c}{a}x$ и l_1: $z=-\frac{c}{a}x$ служат асимптотами и этих гипербол тоже. Линии уровня однополостного гиперболоида на плоскости Oxz представлены на рис. 112.

Такое же строение имеют линии уровня этой поверхности на плоскости Oyz. Однополостный гиперболоид изображен на рис. 113. Там же пунктиром показан его асимптотический конус.

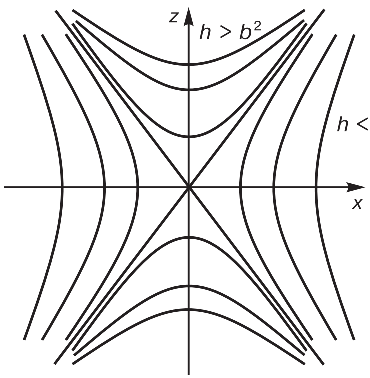


Рис. 112

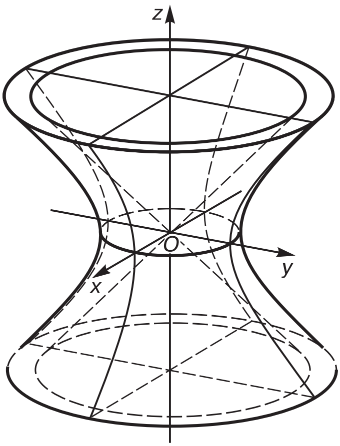


Рис. 113

Как мы уже видели, на однополостном гиперболоиде существуют прямые, целиком ему принадлежащие. Покажем, что таких прямых бесконечно много и они составляют два семейства. Преобразуем уравнение (26.4) к виду

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}$$

или

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right). \tag{26.6}$$

Рассмотрим две системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} q\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=p\left(1-\dfrac{y}{b}\right), \\ p\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=q\left(1+\dfrac{y}{b}\right) \end{cases} \tag{26.7}$$

и

$$\begin{cases} m\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=n\left(1+\dfrac{y}{b}\right), \\ n\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=m\left(1-\dfrac{y}{b}\right). \end{cases} \qquad (26.8)$$

Каждая из полученных систем при условии, что пары чисел p, q и m, n не равны одновременно нулю, представляет собой общие уравнения прямых в пространстве, которые целиком принадлежат гиперболоиду. Действительно, если координаты точки удовлетворяют либо системе (26.7), либо (26.8), то они являются решением уравнения (26.6), при этом точка принадлежит гиперболоиду. Меняя числа p, q и m, n, получим две системы прямолинейных образующих однополостного гиперболоида, определяемых указанными системами уравнений. Прямолинейные образующие обладают следующими свойствами: через каждую точку однополостного гиперболоида проходит только одна прямая каждого семейства; любые две прямые одного семейства скрещиваются, а принадлежащие различным семействам лежат в одной плоскости. Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида изображены на рис. 114.

Замечательный русский инженер В. Г. Шухов использовал линейные свойства однополостного гиперболоида при строительстве высотных радиомачт, водонапорных башен и т. д. Конструкции, составленные из балок, расположенных по прямолинейным образующим однополостного гиперболоида, оказались прочными, легкими и простыми в изготовлении. Шаболовская телемачта в Москве построена по этому методу.

Пример 1. *Найти уравнения прямолинейных образующих однополостного гиперболоида* $x^2+y^2-\dfrac{z^2}{4}=1$, *проходящих через его точку* $M(1;\ 1;\ 2)$.

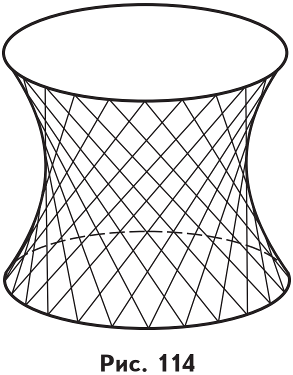


Рис. 114

Решение. Уравнения первого и второго семейств прямолинейных образующих, как следует из (26.7) и (26.8), имеют вид

$$\begin{cases} q\left(x-\dfrac{z}{2}\right)=p(1-y), \\ p\left(x+\dfrac{z}{2}\right)=q(1+y) \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} m\left(x-\dfrac{z}{2}\right)=n(1+y), \\ n\left(x+\dfrac{z}{2}\right)=m(1-y). \end{cases}$$

Ясно, что пары p и q, а также m и n заданы с точностью до пропорциональности. Из условия принадлежности точки M этим прямым следует $\begin{cases} q(1-1)=p(1-1), \\ p(1+1)=q(1+1) \end{cases}$ или $p = q$. Аналогично, $\begin{cases} m(1-1) = n(1+1), \\ n(1+1) = m(1-1). \end{cases}$ Получим $n = 0$, m — произвольное число. Таким образом, уравнения искомых образующих имеют вид

$$\begin{cases} x-\dfrac{z}{2}=1-y, \\ x+\dfrac{z}{2}=1+y, \end{cases} \quad \begin{cases} x-\dfrac{z}{2}=0, \\ 1-y=0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2x+2y-z-2=0, \\ 2x-2y+z-2=0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-z=0, \\ y-1=0. \end{cases}$$

Изучим свойства еще одной поверхности второго порядка — двуполостного гиперболоида.

Определение 3. *Поверхность называется двуполостным гиперболоидом, если ее уравнение в некоторой прямоугольной декартовой системе координат имеет вид*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \tag{25.9}$$

Из приведенного уравнения следует, что двуполостный гиперболоид симметричен относительно координатных плоскостей и центрально симметричен относительно начала координат. Он не пересекает оси абсцисс и ординат, а с осью аппликат имеет две общие точки $C_1(0;\,0;\,c)$ и $C_2(0;\,0;\,-c)$, которые называются его вершинами. Так же как и в случае однополостного гиперболоида, доказывается, что эта поверхность и прямая, проходящая через начало координат, либо пересекаются в двух вещественных, либо в двух комплексно сопряженных точках, либо не имеют общих точек. В третьем случае направление прямой называется *асим-*

птотическим. Аналогично доказывается, что точка лежит на прямой асимптотического направления в том и только в том случае, когда ее координаты удовлетворяют уравнению конической поверхности $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, которая носит название *асимптотического конуса двуполостного гиперболоида*.

Исследуем двуполостный гиперболоид методом сечений. Положим $z = h$. Тогда из равенства (26.9) следует, что $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1$. Полученное уравнение при $h^2 < c^2$ не имеет вещественных решений. При $h^2 = c^2$ ему удовлетворяют координаты единственной точки $O(0;\ 0)$. В этом случае плоскости $z = c$ и $z = -c$ касаются двуполостного гиперболоида в его вершинах. Если $h^2 > c^2$, то уравнение определяет на плоскости Oxy эллипс $\frac{x^2}{a^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)}=1$, который симметричен относительно координатных осей. Отношение его полуосей не зависит от h, поэтому все эллипсы подобны друг другу. Длины полуосей бесконечно возрастают при увеличении h.

Рассмотрим сечение двуполостного гиперболоида плоскостью $y = h$. Из равенства (25.9) следует $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1+\frac{h^2}{b^2}$. Полученное уравнение при любом h определяет гиперболу, для которой оси координат являются осями симметрии, причем ось Oz — действительной, а ось Ox — мнимой осью. Полуоси принимают наименьшее значение при $h = 0$. При бесконечном увеличении h полуоси стремятся к бесконечности. Их отношение не зависит от h и равно $\frac{c}{a}$. Поэтому при любом h гиперболы имеют одни и те же асимптоты, уравнения которых имеют вид $z=\pm\frac{c}{a}x$. Линии уровня двуполостного гиперболоида на плоскости Oxz изображены на рис. 115.

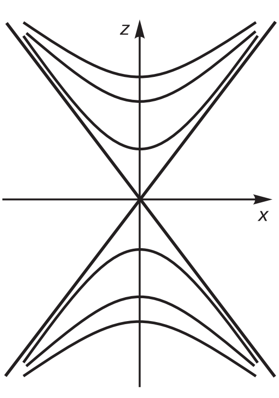


Рис. 115

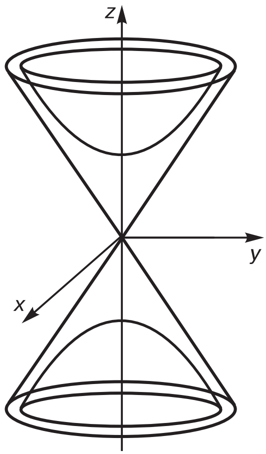


Рис. 116

Аналогично исследуются линии уровня на плоскости Oyz. Они представляют собой такое же семейство гипербол, как и на плоскости Oxz. Двуполостный гиперболоид представлен на рис. 116. Там же изображен его асимптотический конус.

В заключении отметим, что ни эллипсоид, ни двуполостный гиперболоид не имеют прямолинейных образующих. Эллипсоид целиком лежит в прямоугольном параллелепипеде, следовательно, не может содержать прямую. Сечения двуполостного гиперболоида плоскостями, параллельными координатной плоскости Oxy, представляют собой эллипсы. Поэтому он не может содержать прямую, параллельную этой плоскости. Если бы существовала прямолинейная образующая двуполостного гиперболоида, не параллельная плоскости Oxy, то она пересекала бы Oxy в некоторой точке, однако гиперболоид с плоскостью Oxy общих точек не имеет.

§ 27. ПАРАБОЛОИДЫ

В § 25 мы познакомились с эллиптическим параболоидом вращения. Изучим свойства такого параболоида общего вида.

Определение 1. *Под эллиптическим параболоидом понимается поверхность, уравнение которой в некоторой прямоугольной декартовой системе координат имеет вид*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z. \tag{27.1}$$

Отметим простейшие свойства, вытекающие из этого уравнения. Эллиптический параболоид проходит через начало координат. Других точек пересечения с осями координат нет. Поверхность симметрична относительно координатных плоскостей Oxz и Oyz, но не симметрична относительно плоскости Oxy. Третья координата любой точки эллиптического гиперболоида, как следует из уравнения (27.1), всегда неотрицательна.

Исследуем эту поверхность методом сечений. Пусть $z = h$. Из (27.1) следует, что соответствующая линия уровня определяется уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2h$. Ясно, что при $h < 0$ не существует точек плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют этому уравнению. Поэтому плоскость $z = h$ при $h < 0$ не пересекает эллиптический параболоид. Если $h = 0$, то из уравнения линии уровня следует, что $x = y = 0$. Линия представляет собой точку — начало координат. Если $h > 0$, то кривая, определяемая уравнением линии уровня — эллипс: $\frac{x^2}{2ha^2}+\frac{y^2}{2hb^2}=1$. Он симметричен относительно координатных осей. При любом h отношение его полуосей постоянно и при бесконечном увеличении h полуоси также стремятся к бесконечности. Линии уровня эллиптического параболоида на плоскости Oxy изображены на рис. 117.

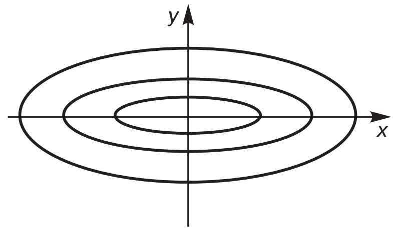


Рис. 117

Рассмотрим сечения этой поверхности плоскостями $y = h$. Из уравнения (27.1) получим

$$\frac{x^2}{a^2}=2z-\frac{h^2}{b^2}$$

или

$$x^2=2a^2\left(z-\frac{h^2}{a^2b^2}\right). \qquad (27.2)$$

Уравнение (27.2) определяет на плоскости Oxz параболу. Она симметрична относительно оси Oz. При всех значениях h параболы имеют один и тот же фокальный параметр, поэтому равны между собой. Вершина параболы, заданной уравнением (27.2), имеет координаты $\left(0;\frac{h^2}{a^2b^2}\right)$. При $h = 0$ вершина совпадает с началом системы координат. При бесконечном увеличении h вторая координата вершины стремится к бесконечности. Линии уровня эллиптического параболоида на плоскости Oxz представлены на рис. 118. Аналогичными свойствами обладают линии

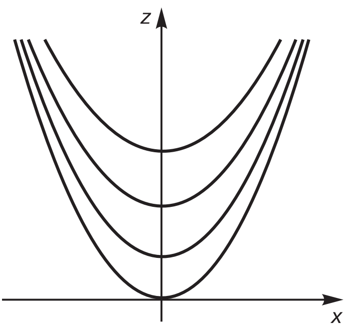


Рис. 118

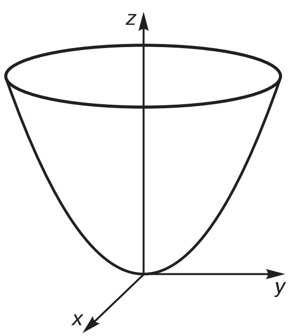


Рис. 119

уровня этой поверхности на плоскости Oyz. Эллиптический параболоид изображен на рисунке 119.

Нетрудно показать, что эллиптический параболоид не имеет прямолинейных образующих. Действительно, пусть такие образующие существуют. Тогда они не лежат в плоскости, параллельной координатной плоскости Oxy, так как такая плоскость пересекает эллиптический параболоид по эллипсу. Таким образом, если существует прямолинейная образующая, то она пересекает плоскость Oxy, и, следовательно, на ней существуют точки с отрицательной аппликатой. Эллиптический же параболоид таких точек не содержит.

Наиболее сложной и интересной поверхностью является гиперболический параболоид, который не является поверхностью вращения.

Определение 2. *Поверхность, уравнение которой в некоторой прямоугольной декартовой системе координат имеет вид*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z, \tag{27.3}$$

называется гиперболическим параболоидом.

Нетрудно видеть, что эта поверхность пересекает оси координат только в точке $O(0;\ 0;\ 0)$. Поверхность симметрична относительно координатных плоскостей Oxz и Oyz, но не симметрична относительно плоскости Oxy.

Проведем исследование гиперболического параболоида методом сечений. Определим его линии уровня на плоскости Oxy. Положим $z = h$. Тогда уравнение соответствующей линии уровня имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2h, \qquad (27.4)$$

она является кривой второго порядка гиперболического типа. Если $h=0$, то линия уровня представляет собой пару пересекающихся прямых

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$$

или

$$y=\pm\frac{b}{a}x. \qquad (27.5)$$

Если $h>0$, то уравнение (27.4) определяет гиперболу, которая симметрична относительно координатных осей и пересекает ось абсцисс. Так как ее каноническое уравнение имеет вид $\frac{x^2}{2ha^2}-\frac{y^2}{2hb^2}=1$, то полуоси бесконечно возрастают при бесконечном увеличении h. При этом отношение действительной полуоси к мнимой не зависит от h и равно $\frac{a}{b}$. Отсюда следует, что при любом h гиперболы имеют одни и те же асимптоты, которые определяются уравнениями (27.5). Если $h<0$, то уравнение (27.4) преобразуется к виду $\frac{y^2}{2|h|b^2}-\frac{x^2}{2|h|a^2}=1$. Оно также определяет на плоскости Oxy гиперболу, оси симметрии которой совпадают с осями координат, но для которой ось Oy является действительной, а ось Ox — мнимой. Полуоси этой гиперболы бесконечно возрастают при бесконечном увеличении абсолютной величины h, их отношение постоянно и равно $\frac{a}{b}$. Отсюда следует, что все эти гиперболы имеют одни и те же асимптоты, определяемые теми же уравнениями (27.5). Линии уровня гиперболического параболоида на плоскости Oxy представлены на рис. 120.

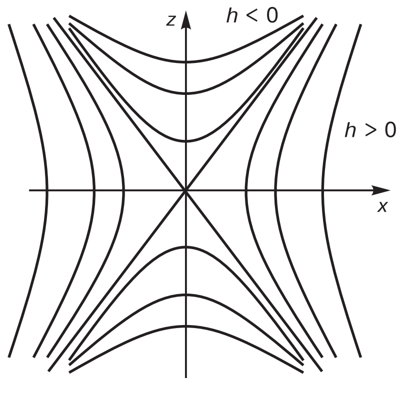


Рис. 120

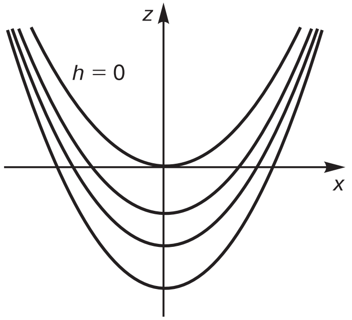


Рис. 121

Исследуем линии уровня плоскости Oxz. Положим $y = h$. Из (27.4) вытекает, что ее уравнение имеет вид $x^2 = 2a^2\left(z + \frac{h^2}{2b}\right)$. Мы получили уравнение параболы, симметричной относительно оси Oz, ветви которой направлены «вверх», т. е. в положительном направлении оси Oz. Координаты ее вершины Q равны $\left(0; -\frac{h^2}{2b}\right)$. Поэтому при изменении h^2 от 0 до бесконечности Q перемещается по оси Oz от начала координат до $-\infty$. При всех значениях h фокальные параметры парабол одинаковы. Отсюда следует, что все линии уровня равны между собой (рис. 121).

Рассмотрим линии уровня гиперболического параболоида на плоскости Oyz. Положим $x = h$. Из (27.4) следует $-\frac{y^2}{b^2} = 2z - \frac{h^2}{a^2}$ или $y^2 = -2b^2\left(z - \frac{h^2}{2a^2}\right)$. Так же как и в предыдущем случае, мы получили, что линии уровня представляют собой параболы, симметричные относительно оси Oz, только при этом их ветви направлены «вниз», т. е. в отрицательном направлении оси Oz. Параметры парабол не зависят от h, поэтому они равны между собой. Вершина пераболы имеет координаты $\left(0; \frac{h^2}{2a^2}\right)$ и при бесконечном увеличении h^2 вершина перемещается по оси Oz от начала координат до ∞. Линии уровня плоскости Oyz приведены на рис. 122. Карты линий уровней параболического параболоида на координатных плоскостях позволяют судить о форме этой поверхности. Она имеет вид седла и изображена на рис. 123.

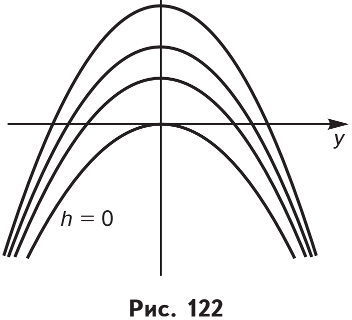


Рис. 122

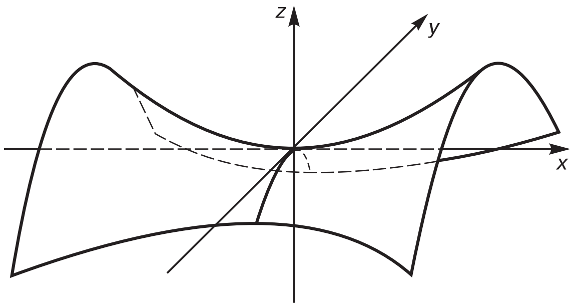


Рис. 123

Гиперболический параболоид, в отличие от эллиптического параболоида, имеет прямолинейные образующие. Представим его уравнение (27.4) в виде $\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=2z$, и и рассмотрим две прямые $\begin{cases} p\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=qz, \\ q\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=2p \end{cases}$ и $\begin{cases} m\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=nz, \\ n\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=2m, \end{cases}$ где p, q и m, n не равны одновременно нулю. Легко видеть, что координаты любой точки каждой из этих прямых удовлетворяют уравнению (27.4), поэтому каждая из прямых всеми своими точками принадлежит параболоиду. При различных m и n, p и q, не равных одновременно нулю, эти уравнения и определяют два типа прямолинейных образующих гиперболического параболоида. Они обладают свойствами, аналогичным свойствам прямолинейных образующих однополостного гиперболоида (§ 26), а именно через любую точку поверхности проходит единственная прямолинейная образующая каждого семейства, любые две образующие одного семейства скрещиваются, а различных семейств — принадлежат одной плоскости. Прямолинейные образующие гиперболического параболоида представлены на рис. 124.

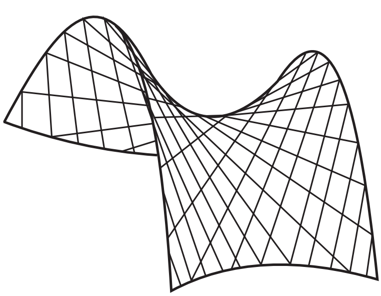


Рис. 124

Глава V

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 28. ОТОБРАЖЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МНОЖЕСТВ

Вспомним необходимые нам понятия теории множеств, которые изучались в курсах алгебры и математического анализа.

Пусть даны два множества X и Y. Если каждому элементу множества X поставлен в соответствие один и только один элемент множества Y, то говорят, что задано *отображение множества* X во множество Y, f: $X \to Y$. Если, например, X и Y — множества действительных чисел, то отображение f: $X \to Y$ представляет собой числовую функцию действительного переменного, свойства которой изучаются в курсе математического анализа.

Пусть при отображении f: $X \to Y$ элементу x из множества X поставлен в соответствие элемент y из Y: $y = f(x)$. Тогда y называется *образом элемента* x, а x — *прообразом элемента* y. Обозначим через $f(X)$ подмножество в Y, образованное всеми его элементами, для которых существует прообраз в X. Это подмножество будем называть *образом множества* X *при отображении* f. Например, образом числовой прямой при отображении, определяемом функцией $y = 2^x$, служит множество положительных действительных чисел.

Пусть дано отображение f: $X \to Y$. Если для любого элемента y из $f(X)$ существует только один прообраз, то отображение называется *инъективным* или *однозначным*. В этом случае нельзя найти два элемента x_1 и x_2 множества X, для которых $f(x_1) = f(x_2)$. Если при отображении f выполнено условие $f(X) = Y$, т. е. для любого элемента из Y существует по крайней мере один прообраз, то отображение называется *сюръективным* или *отображением* X *на* Y. Отображение, которое одновременно является сюръективным и инъективным, носит название *биективного* или *взаимно однозначного* отображения. Таким образом, отображение f: $X \to Y$ тогда и только тогда является биективным, когда для любого элемента y из множества Y существует один и только один элемент x из X, для которого $f(x) = y$.

Рассмотрим в качестве примера функцию $y = \sin x$, отображающую числовую прямую на промежуток $[-1; 1]$. Так как для любого числа y из этого промежутка существует число $x = \arcsin y$, которое, в свою очередь, принадлежит отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то данная функция устанавливает сюръективное отображение числовой прямой $(-\infty; +\infty)$ на отрезок $[-1; 1]$. Легко видеть, что данное отображение не является инъективным в силу свойства периодичности функции $y = \sin x$.

Пусть $f\colon X \to Y$ — взаимно однозначное отображение множества X на множество Y. Поставим в соответствие каждому элементу y из Y его прообраз x из множества X. Мы построили отображение $Y \to X$, которое носит название *обратного* к отображению $f\colon X \to Y$. Оно обычно обозначается через f^{-1}. Легко показать, что $f^{-1}\colon Y \to X$ — также биективное отображение. Действительно, в силу того что $f\colon X \to Y$ — взаимно однозначное отображение, для любого элемента y из Y существует один и только один прообраз x в множестве X. Таким образом, каждому элементу y из Y ставится в соответствие один и только один элемент $x = f^{-1}(y)$ из X. Например, функция $y = \sin x$ взаимно однозначно отображает промежуток $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ на отрезок $[-1;1]$. Обратное отображение определяется функцией $y = \arcsin(x)$.

Определение 1. *Взаимно однозначное отображение множества X на себя называется преобразованием этого множества.*

Функция $y = x^3$ определяет преобразование множества действительных чисел, а функция $y = 2^x$ не задает преобразование этого множества, так как определяемое ею отображение не является сюръективным.

Если дана некоторая плоскость, то ее отображение в себя можно задать в координатной форме. Выберем на плоскости π некоторую аффинную систему координат. Рассмотрим отображение $f\colon \pi \to \pi$. Будем считать, что точке $A(x; y)$ ставится в соответствие точка $A'(x'; y')$. Координаты x', y' точки A' зависят от x, y, координат точки A:

$$\begin{cases} x' = x'(x; y), \\ y' = y'(x; y). \end{cases} \tag{28.1}$$

Обратно, если заданы функции (28.1), то можно считать что они определяют некоторое отображение f плоскости π в себя, когда каждой точке $A(x; y)$ ставится в соответствие точка $A'(x'; y')$. Соотношения (28.1) называются *аналитическим выражением* или *формулами отображения f*.

Пример 1. *Отображение f задано своим аналитическим выражением* $\begin{cases} x' = 2x + y - 3, \\ y' = x - y - 1. \end{cases}$ *Выяснить, является ли оно преобразованием плоскости.*

Решение. Проверим условия инъективности и сюръективности. Пусть $A_1(x_1;\ y_1)$ и $A_2(x_2;\ y_2)$ — две точки, удовлетворяющие условию $f(A_1) = f(A_2)$. Тогда $\begin{cases} 2x_1 + y_1 - 3 = 2x_2 + y_2 - 3, \\ x_1 - y_1 - 1 = x_2 - y_2 - 1, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} 2(x_1 - x_2) = y_2 - y_1, \\ x_1 - x_2 = y_1 - y_2. \end{cases}$ Мы получили систему уравнений относительно $x_1 - x_2$ и $y_1 - y_2$. Она совместна и имеет единственное решение $x_1 - x_2 = y_1 - y_2 = 0$. Таким образом, из условия $f(A_1) = f(A_2)$ следует, что точки A_1 и A_2 совпадают. Отображение f инъективно.

Пусть $A'(x';\ y')$ — произвольная точка плоскости. Для того чтобы существовала такая точка A, для которой $f(A) = A'$, достаточно, чтобы ее координаты x, y удовлетворяли системе уравнений $\begin{cases} x' = 2x + y - 3, \\ y' = x - y - 1. \end{cases}$ Так как определитель этой системы отличен от нуля, она всегда имеет единственное решение. Нетрудно выразить x и y через x' и y'. Для этого сложим уравнения системы и вычтем из первого удвоенное второе. После преобразований получим $x = \dfrac{x' + y' + 4}{3}$; $y = \dfrac{x' - 2y' + 1}{3}$. Сюръективность отображения f доказана. Таким образом, f — преобразование плоскости.

Пример 2. *Дано аналитическое выражение преобразования f плоскости*:

$$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = x - y - 1. \end{cases}$$

Найти формулы обратного преобразования.

Решение. Отображение f^{-1} каждой точке M плоскости ставит в соответствие точку M', для которой $f(M) = M'$. Обозначим координаты точек M и M' через $(x,\ y)$ и $(x',\ y')$. Из данного аналитического выражения следует $\begin{cases} x = x' + y', \\ y = x' - y' - 1. \end{cases}$ Выразим отсюда x', y' через x и получим формулы обратного преобразования f^{-1}

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x + y + 1}{2}, \\ y' = \dfrac{x - y - 1}{2}. \end{cases}$$

Рассмотрим примеры необходимых нам преобразований плоскости и выведем их аналитические выражения.

Определение 2. *Пусть дан вектор* $\vec{a}$. *Отображение плоскости на себя, которое каждой точке M ставит в соответствие такую точку M′, для которой* $\overline{MM'} = \vec{a}$, *называется параллельным переносом плоскости на вектор* $\vec{a}$.

Легко видеть, что параллельный перенос является преобразованием плоскости, будем обозначать его через $T_{\vec{a}}$. Найдем аналитическое выражение параллельного переноса. Пусть в выбранной системе координаты вектора $\vec{a}$ равны $\{a;\ b\}$. Предположим, что точка M имеет координаты $(x;\ y)$, а ее образ $M' = T_{\vec{a}}(M)$ — координаты $(x';\ y')$. Так как $\overline{MM'} = \vec{a}$, то $x' - x = a$, $y' - y = b$. Отсюда получим формулы параллельного переноса:

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b. \end{cases} \tag{28.2}$$

Рассмотрим еще одно преобразование — вращение плоскости.

Определение 3. *Пусть на ориентированной плоскости даны точка O и ориентированный угол* φ. *Преобразование, которое точке O ставит в соответствие ту же точку O, а любой точке A, отличной от O, — точку A′, удовлетворяющую условиям* $|OA| = |OA'|$, $\measuredangle AOA' = \varphi$, *называется вращением плоскости с центром в точке O на угол* φ.

Преобразование вращения будем обозначать через R_O^{φ}. Найдем его аналитическое выражение при условии, что на плоскости дана правая прямоугольная декартова система координат, а центр вращения совпадает с ее началом.

Пусть точка A имеет координаты x и y, а ее образ $A' = R_O^{\varphi}(A)$ — x' и y'. Обозначим через α ориентированный угол между положительным направлением оси абсцисс и вектором $\overrightarrow{OA}$ (рис. 125). Тогда ориентированный угол между векторами $\vec{i}$ и $\overrightarrow{OA'}$ равен $\varphi + \alpha$. Как было показано в § 9, $x = |OA|\cos\alpha$, $y = |OA|\sin\alpha$ и $x' = |OA'|\cos(\alpha + \varphi)$, $y' = |OA'|\sin(\alpha + \varphi)$. Так как $|OA| = |OA'|$, то

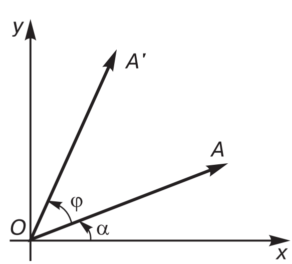


Рис. 125

$$x' = |OA|\cos(\alpha+\varphi) = |OA|\cos\alpha\cos\varphi - |OA|\sin\alpha\sin\varphi = \\ = x\cos\varphi - y\sin\varphi,$$
$$y' = |OA|\sin(\alpha+\varphi) = |OA|\sin\alpha\cos\varphi + |OA|\cos\alpha\sin\varphi = \\ = x\sin\varphi + y\cos\varphi.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{cases} \qquad (28.3)$$

Соотношения (28.3) представляют собой аналитическое выражение вращения.

При $\varphi = \pi$ формулы вращения имеют вид $\begin{cases} x' = -x, \\ y' = -y. \end{cases}$ В этом случае преобразование представляет собой центральную симметрию относительно центра вращения.

Определение 4. *Пусть дана прямая l. Отображение, которое каждой точке прямой l ставит в соответствие ту же точку, а точке A, не принадлежащей l, точку A' такую, что прямая AA' перпендикулярна l и середина отрезка AA' принадлежит l, называется осевой симметрией плоскости с осью l.*

Осевую симметрию будем обозначать через S_l. Докажите самостоятельно, что осевая симметрия — преобразование плоскости.

Пусть на плоскости выбрана прямоугольная декартова система координат. Найдем аналитическое выражение осевой симметрии при условии, что ее ось совпадает с осью абсцисс. Обозначим координаты точки A через $(x;\ y)$, а ее образа A' при указанной симметрии — $(x';\ y')$ (рис. 126). Тогда вектор $\overrightarrow{AA'}$ параллелен оси ординат, а середина M отрезка AA' лежит на оси абсцисс. Координаты вектора $\overrightarrow{AA'}$ и точки M соответственно равны $\{x'-x; y'-y\}$ и $\left(\dfrac{x+x'}{2}; \dfrac{y+y'}{2}\right)$. Используя условие параллельности вектора $\overrightarrow{AA'}$ оси Oy, получим $\begin{vmatrix} x'-x & y'-y \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ или $x' - x = 0$. Так как точка M лежит на оси Ox, то $y' + y = 0$. Таким образом,

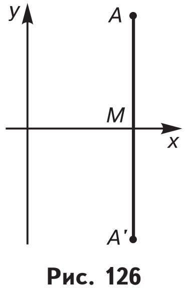


Рис. 126

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y. \end{cases} \qquad (28.4)$$

Формулы (28.4) являются искомым аналитическим выражением осевой симметрии.

Рассмотрим произвольное множество X. На множестве его преобразований можно ввести алгебраическую операцию — произведение преобразований. Введем следующее определение.

Определение 5. *Пусть f и g — два преобразования множества X. Под произведением $g \circ f$ преобразования f и преобразования g будем понимать отображение, определяемое формулой $g \circ f(x) = g(f(x))$, где x — произвольный элемент множества X.*

Покажем, что произведение преобразований также является преобразованием множества X. Пусть $h = g \circ f$. Так как f и g — биективные отображения множества X на себя, то из $x_1 \neq x_2$ следует $g(x_1) \neq g(x_2)$ и $f(g(x_1)) \neq f(g(x_2))$. Поэтому h — инъективное отображение. Докажем его сюръективность. Пусть y — произвольный элемент из X. Тогда существует такой элемент z, что $y = g(z)$. Аналогично, существует такой элемент x из множества X, для которого $z = f(x)$. Отсюда вытекает, что $y = g(f(x))$. Таким образом, h — сюръективное отображение. Биективность h доказана.

Пример 3. *Найти формулы произведения $g \circ f$, если даны аналитические выражения преобразований* g: $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = 2x - y + 1 \end{cases}$ и f: $\begin{cases} x' = -x, \\ y' = y - 2. \end{cases}$

Решение. Возьмем произвольную точку M $(x;\ y)$. Пусть $M' = f(M)$, тогда координаты M' равны $(-x;\ y - 2)$. Обозначим через M'' образ точки M' при преобразовании g: $M'' = g(M')$. Используя формулы преобразования g, найдем координаты этой точки: $M''(-x + y - 2; -2x - (y - 2) + 1)$, или $M''(-x + y - 2; -2x - y + 3)$. Таким образом, аналитическое выражение преобразования $g \circ f$ имеет вид

$$\begin{cases} x' = -x + y - 2, \\ y' = -2x - y + 3. \end{cases}$$

Замечание. Если мы определим формулы произведения $f \circ g$, то получим $\begin{cases} x' = -x - y, \\ y' = 2x - y - 1 \end{cases}$ (проведите вычисления самостоятельно). Отсюда видно, что произведение преобразований, вообще говоря, не обладает свойством коммутативности.

Определение 6. *Преобразование, которое каждому элементу множества X ставит в соответствие тот же самый элемент, называется тождественным.*

Тождественное преобразование обычно обозначается через e. Легко видеть, что аналитическое выражение тождественного преобразования плоскости имеет вид $\begin{cases} x' = x, \\ y' = y. \end{cases}$ Тождественное преобразование является *нейтральным элементом относительно операции произведения преобразований*; это означает, что для любого преобразования f выполняются равенства $f \circ e = e \circ f = f$. Действительно, возьмем произвольный элемент x множества X: $f \circ e(x) = f(e(x)) = f(x)$, $e \circ f(x) = e(f(x)) = f(x)$.

Выберем произвольное преобразование f и найдем произведение $f \circ f^{-1}$. Пусть y — произвольный элемент множества X. Согласно определению обратного преобразования, элемент $x = f^{-1}(y)$ удовлетворяет условию $f(x) = y$. Поэтому $f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$. Отсюда следует, что $f \circ f^{-1} = e$. Возьмем произвольный элемент x множества X. Пусть $y = f(x)$, тогда $f^{-1}(y) = x$. Таким образом, $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$, откуда $f^{-1} \circ f = e$. Мы показали, что преобразование f^{-1} обратно к преобразованию f относительно операции произведения преобразований. Итак, операция произведения преобразований обладает свойством обратимости. Однако, как отмечалось выше, она не удовлетворяет свойству коммутативности. Докажем ее ассоциативность.

Теорема 1. *Для любых трех преобразований f, g и h множества X справедливо равенство* $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Доказательство. Пусть x — произвольный элемент множества X. Тогда из определения произведения преобразований получим $(f \circ g) \circ h(x) = f \circ g(h(x)) = f(g(h(x)))$. В то же время, $f \circ (g \circ h)(x) = f(g \circ h(x)) = f(g(h(x)))$. Таким образом, для любого элемента x справедливо равенство $((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ (g \circ h))(x)$. Теорема доказана.

Из курса алгебры известно, что множество G называется *группой*, если на нем определена ассоциативная и обратимая алгебраическая операция. Если эта операция коммутативна, то G называется *абелевой группой*. Пусть F — совокупность всех преобразований множества X. Произведение преобразований является ассоциативной и обратимой алгебраической операцией на F. Поэтому F — группа относительно операции произведения преобразований. Она, вообще говоря, не является абелевой.

Определение 7. *Любая подгруппа группы F называется группой преобразований множества X.*

Пусть G — подмножество F. В силу теоремы 1 G тогда и только тогда является группой преобразований, когда операция произведения преобразований алгебраически замкнута и обратима на G. Поэтому G — группа преобразований в том и только в том случае, когда для *любых двух элементов f и g из G их произведение $f \circ g$ принадлежит G и для любого элемента f этому же множеству принадлежит и обратное преобразование f^{-1}.*

Пример 4. *Доказать, что множество, состоящее из четырех преобразований*

$$f\colon \begin{cases} x' = x, \\ y' = -y; \end{cases} \quad g\colon \begin{cases} x' = -x, \\ y' = -y; \end{cases}$$

$$h\colon \begin{cases} x' = -x, \\ y' = y; \end{cases} \quad e\colon \begin{cases} x' = x, \\ y' = y, \end{cases}$$

образует группу преобразований плоскости.

Решение. Составим таблицу произведений элементов из G

	e	f	g	h
e	e	f	g	h
f	f	e	h	g
g	g	h	e	f
h	h	g	f	e

В таблице на пересечении соответствующей строки и столбца помещается произведение элемента строки, умноженной слева на элемент столбца. Проверим, например, что $f \circ g = h$. Пусть точка M имеет координаты $(x; y)$, $M' = g(M)$, $M'' = f(M') = f \circ g(M)$. Точка M' имеет координаты $(-x; -y)$. Поэтому координаты точки $M'' = f(M')$ равны $(-x; y)$. Отсюда следует, что $f \circ g = h$. Результаты остальных произведений проверьте самостоятельно. Из таблицы следует, что операция произведения преобразований алгебраически замкнута на G. Легко видеть, что e — тождественное преобразование в G. Каждый элемент из G имеет обратный, причем он совпадает с самим элементом: $f \circ f = g \circ g = h \circ h = e$. Нами проверено, что G — группа преобразований.

§ 29. ДВИЖЕНИЯ ПЛОСКОСТИ

Введем определение движения плоскости.

Определение 1. *Преобразование плоскости называется движением, если расстояние между образами любых двух точек совпадает с расстоянием между самими точками.*

Таким образом, f — движение плоскости в том и только в том случае, когда для любых двух ее точек A и B выполнено равенство $|AB| = |f(A)f(B)|$. Покажем, что параллельный перенос, вращение и осевая симметрия, введенные нами в предыдущем параграфе, — движения плоскости.

Рассмотрим параллельный перенос плоскости на вектор $\vec{a}$. Пусть A и B — две произвольные точки, $A' = T_{\vec{a}}(A)$, $B' = T_{\vec{a}}(B)$ — их образы при рассматриваемом параллельном переносе. Следует доказать, что $|AB| = |A'B'|$. Из определения параллельного переноса (§ 28) получим $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \vec{a}$. Представим вектор $\overrightarrow{AB'}$ в виде $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'}$ (рис. 127). Отсюда следует, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$. Так как векторы равны, их длины совпадают. Параллельный перенос является движением.

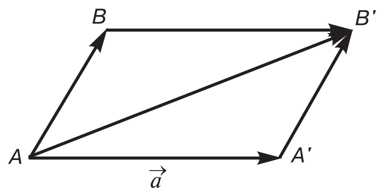


Рис. 127

Рассмотрим осевую симметрию с осью l. Пусть A и B — две произвольные точки, $A' = S_l(A)$, $B' = S_l(B)$ — их образы при данной осевой симметрии. Докажем, что $|A'B'| = |AB|$. Выберем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы ось абсцисс содержала прямую l (рис. 128). Если в этой системе точки A и B имеют координаты соответственно $(x_1;\ y_1)$ и $(x_2;\ y_2)$, то из формулы осевой симметрии (§ 28) следует, что координаты точек A' и B' равны $(x_1;\ -y_1)$ и $(x_2;\ -y_2)$. Найдем расстояния между этими точками: $|A'B'| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2} = |AB|$.

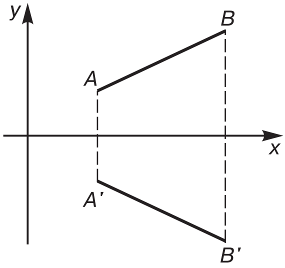


Рис. 128

Осевая симметрия — движение плоскости.

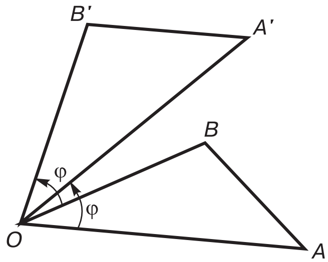


Рис. 129

Наконец, рассмотрим вращение плоскости и покажем, что оно также является движением плоскости. Пусть A и B — две произвольные точки, $A' = R_O^{\varphi}(A)$, $B' = R_O^{\varphi}(B)$ — их образы при вращении вокруг точки O на ориентированный угол φ (рис. 129). Воспользуемся аналитическим выражением вращения (§ 28). Выберем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы ее начало совпадало с центром O вращения. Запишем координаты точек A, B, A', B' в этой системе: $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $A'(x_1'; y_1')$, $B'(x_2'; y_2')$. Из формул вращения следует $\begin{cases} x_1' = x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi, \\ y_1' = x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2' = x_2\cos\varphi - y_2\sin\varphi, \\ y_2' = x_2\sin\varphi + y_2\cos\varphi. \end{cases}$ Вычислим расстояние между точками A' и B':

$$|A'B'| = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_2')^2} =$$
$$= \sqrt{((x_2 - x_1)\cos\varphi - (y_2 - y_1)\sin\varphi)^2 + ((x_2 - x_1)\sin\varphi + (y_2 - y_1)\cos\varphi)^2} =$$
$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + (y_2 - y_1)^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} =$$
$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_2)^2} = |AB|.$$

Таким образом, при вращении сохраняется расстояние между точками. Утверждение доказано.

Перейдем к изучению свойств движений общего вида.

Теорема 1. *Движения плоскости образуют группу преобразований.*

Доказательство. Как было доказано в § 28, нам достаточно проверить, что произведение любых двух движений является движением, и обратное преобразование к движению также представляет собой движение плоскости.

Рассмотрим два произвольных движения g и h. Тогда для любых двух точек A и B плоскости справедливы соотношения $|g(A)g(B)| = |AB|$ и $|h(g(A))h(g(B))| = |g(A)g(B)| = |AB|$. Так как $h(g(A)) = h \circ g(A)$ и $h(g(B)) = h \circ g(B)$, то произведение $h \circ g$ сохраняет расстояние между точками, т. е. является движением.

Пусть f — произвольное движение плоскости. Рассмотрим две точки A и B, обозначим через A' и B' их образы при обратном преобразовании f^{-1}: $A' = f^{-1}(A)$, $B' = f^{-1}(B)$. Тогда $f(A') = A$, $f(B') = B$. Так как f — движение плоскости, то $|AB| = |f(A')f(B')| = |A'B'| = |f^{-1}(A)f^{-1}(B)|$. Поэтому преобразование, обратное к движению, также является движением. Теорема доказана.

Параллельный перенос и вращение являются частными видами движений. Можно доказать, что *множество всех параллельных переносов, а также множества всех вращений с фиксированным центром образуют подгруппы в группе движений плоскости*. Нетрудно показать, что множество всех движений, переводящих фигуру F в себя, образует подгруппу в группе движений. Доказательство этих утверждений проведите самостоятельно. Если такое движение отлично от тождественного, то оно называется *симметрией фигуры* F, а указанная подгруппа — *группой ее симметрий*.

Выясним, какие множества служат образами прямых, отрезков, лучей, углов и окружностей при движении.

Свойство 1. *Пусть f — движение плоскости, A', B' и C' — образы точек A, B и C при движении f. Тогда точки A', B' и C' лежат на одной прямой в том и только в том случае, когда точки A, B и C коллинеарны.*

Доказательство. Как известно из школьного курса геометрии, три точки A, B и C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда сумма расстояний от одной из них до двух других равна расстоянию между этими двумя точками; например, когда выполнено условие $|AC| = |AB| + |BC|$. В этом случае точка B лежит между A и C (рис. 130, *а*). Предположим, что A, B и C коллинеарны и B лежит между A и C. Так как при движении сохраняются расстояния между точками, то $|A'C'| = |AC| = |AB| + |BC| = |A'B'| + |B'C'|$. Поэтому точки A', B' и C' тоже коллинеарны.

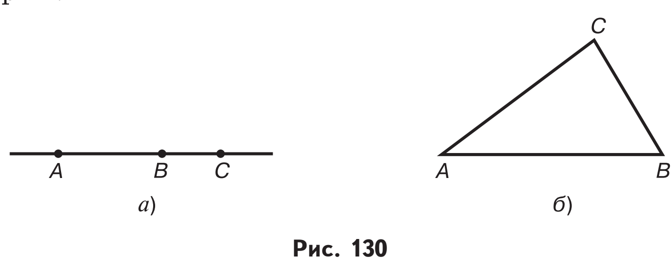


Рис. 130

Пусть точки A, B и C не лежат на одной прямой. Тогда они расположены в вершинах треугольника (рис. 130, *б*). Поэтому расстояния между ними удовлетворяют неравенствам $|AB| + |BC| > |AC|$, $|AC| + |BC| > |AB|$, $|AB| + |AC| > |BC|$. В силу того что f сохраняет расстояния между точками, то $|A'B'| + |B'C'| > |A'C'|$, $|A'C'| + |B'C'| > |A'B'|$, $|A'B'| + |A'C'| > |B'C'|$. Поэтому точки A', B' и C' также лежат в вершинах треугольника. Свойство доказано.

Таким образом, при движении коллинеарные точки преобразуются в коллинеарные, а точки, не лежащие на одной прямой, — в точки, не лежащие на одной прямой.

Свойство 2. *При движении образом прямой является прямая линия.*

Доказательство. Пусть l — прямая линия, A и B — две ее произвольные точки, f — некоторое движение, $A' = f(A)$, $B' = f(B)$. Обозначим через l' прямую $A'B'$. В соответствии со свойством 1, точки, принадлежащие прямой AB, преобразуются в точки, которые лежат на прямой $A'B'$. Поэтому $f(l) \subseteq l'$. Покажем, что прообраз любой точки C' прямой l' лежит на прямой l. Тем самым будет доказано, что $f(l) = l'$. Пусть $C = f^{-1}(C')$. При доказательстве теоремы 1 мы проверили, что преобразование f^{-1} также является движением. Так как $A = f^{-1}(A')$, $B = f^{-1}(B')$, а точки A', B' и C' — коллинеарные, то A, B и C также лежат на одной прямой. Свойство доказано.

Для того чтобы найти образы отрезков, лучей и углов при движениях, нам следует воспользоваться свойствами простого отношения точек прямой. Напомним это понятие, введенное нами в главе 2. *Пусть A, B и C — различные точки, принадлежащие одной прямой. Число λ называется их простым отношением ($\lambda = (AB, C)$), если $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$.* При этом точки A и B называются базисными, а точка C — делящей. Точка C в том и только в том случае лежит на отрезке AB, когда $(AB, C) > 0$. Точка C в том и только в том случае лежит на луче прямой AB, не содержащем точку A, с началом в точке B, когда $(AB, C) < -1$. И наконец, точка C лежит на луче прямой AB, не содержащем точку B, с началом в точке A, тогда и только тогда, когда $-1 < (AB, C) < 0$ (рис. 131).

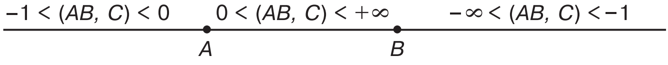


Рис. 131

Свойство 3. *При движении сохраняется простое отношение точек.*

Доказательство. Пусть точка C принадлежит отрезку AB. Тогда $(AB, C) > 0$. Так как в силу своего определения простое отношение задается отношением векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$, то в данном случае оно равно отношению длин отрезков: $(AB,C)=\dfrac{|AC|}{|BC|}$. Рассмотрим произвольное движение f, обозначим через A', B' и C' образы точек A, B и C при этом движении. Точка C принадлежит отрезку AB, поэтому лежит между его концами A и B, следовательно, $|AC| + |BC| = |AB|$. Так как движение сохраняет расстояния между точками, то $|A'C'|+|B'C'|=|A'B'|$. Отсюда вытекает, что точка C' лежит между A' и B', и $(A'B',C')=\dfrac{|A'C'|}{|C'B'|}=\dfrac{|AC|}{|CB|}=(AB,C)$.

Предположим теперь, что точка B лежит между A и C (рис. 131). Тогда $|AB| + |BC| = |AC|$, и, как следует из определения простого отношения, $(AB,C)=-\dfrac{|AC|}{|BC|}$. В силу того что f — движение, $|A'B'|+|B'C'|=|A'C'|$. Поэтому точка B' лежит между A' и C' и $(A'B',C')=-\dfrac{|A'C'|}{|C'B'|}=-\dfrac{|AC|}{|CB|}=(AB,C)$. Для рассматриваемого случая свойство доказано. Аналогично проводится доказательство для точек A, B и C, при условии что точка A лежит между C и B. Сделайте это самостоятельно.

Свойство 4. *При движении отрезок преобразуется в равный ему отрезок.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный отрезок AB. Пусть f — некоторое движение, $A'=f(A)$, $B'=f(B)$. Точка C в том и только в том случае принадлежит отрезку AB, когда эти точки коллинеарные и $(AB, C) > 0$. Обозначим через C' образ точки C при движении f. Из свойств 1 и 3 следует, что точки A', B' и C' коллинеарные и $(A'B',C') = (AB, C) > 0$. Поэтому точка C' принадлежит отрезку $A'B'$. Таким образом, $f(AB)\subseteq A'B'$. Легко видеть, что прообраз любой точки C' отрезка $A'B'$ также принадлежит AB. Действительно, обратное преобразование f^{-1} также является движением, отсюда следует, что f^{-1} лежит на отрезке AB. Поэтому $f(AB) = A'B'$. Так как при движении сохраняются расстояния между точками, то отрезки AB и $A'B'$ равны друг другу. Свойство доказано.

Свойство 5. *При движении луч преобразуется в луч.*

Доказательство. Доказательство этого свойства аналогично предыдущему. Рассмотрим луч l с началом в точке A. Обозначим через B точку луча l, отличную от A. Пусть f — произвольное движение, $A' = f(A)$, $B' = f(B)$. Пусть l' — луч с началом в точке A', проходящий через B'. Если C — некоторая точка луча l, то она лежит либо на отрезке AB, либо на его продолжении. Если $C \in AB$, то в соответствии со свойством 4 ее образ $C' = f(C)$ лежит на отрезке $A'B'$. Пусть C принадлежит продолжению отрезка AB. Тогда $(AB, C) < -1$. Так как при движении сохраняется простое отношение точек, то $(A'B', C') < -1$. Отсюда следует, что точка C' принадлежит продолжению отрезка $A'B'$ луча l'. Таким образом, $f(l) \subseteq l'$. Для доказательства утверждения осталось проверить, что прообраз любой точки C' луча l' принадлежит лучу l. Рассуждения проведите самостоятельно, воспользуйтесь при этом, что обратное преобразование f^{-1} также является движением.

Как известно из школьного курса геометрии, под углом понимаются два луча, имеющие общее начало.

Свойство 6. *При движении угол преобразуется в равный ему угол.*

Доказательство. Рассмотрим лучи m и n, имеющие общее начало в точке A. При движении f они преобразуются в лучи m' и n' с началом в точке $A' = f(A)$. Поэтому угол преобразуется в угол. Выберем на лучах m и n точки B и C: $B \in m$, $C \in n$. Обозначим через B' и C' их образы при движении f. Тогда $B' \in m'$, $C' \in n'$ (рис. 132). Так как $|AB| = |A'B'|$, $|AC| = |A'C'|$, $|BC| = |B'C'|$, то треугольник ABC равен треугольнику $A'B'C'$. Поэтому $\angle ABC = \angle A'B'C'$. Свойство доказано.

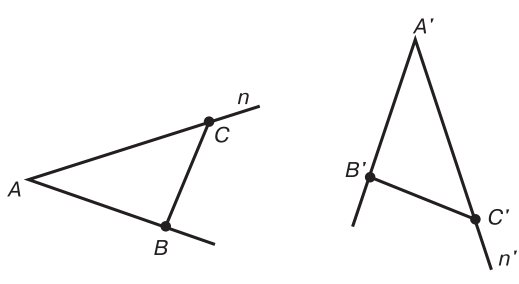


Рис. 132

Выясним, что представляет собой образ окружности при движении.

Свойство 7. *Пусть дана окружность радиуса r с центром в точке O. Тогда при движении она преобразуется в окружность того же радиуса с центром в точке, совпадающей с образом центра O.*

Доказательство. Пусть ω — окружность радиуса r с центром в точке O, f — произвольное движение, $O' = f(O)$ — образ центра O при этом движении. Обозначим через ω' окружность с центром в точке O' радиуса r. Возьмем точку C, принадлежащую ω. Пусть $C' = f(C)$. Так как $r = |OC| = |f(O)f(C)| = |O'C'|$, то точка C' принадлежит окружности ω'. Обратно, пусть C' — произвольная точка окружности ω', $C = f^{-1}(C')$ — ее прообраз при движении. Так как обратное преобразование f^{-1} является движением, то $r = |O'C'| = |f^{-1}(O)f^{-1}(C)| = |OC|$, т. е. точка C принадлежит окружности ω. Таким образом, $f(\omega) = \omega'$. Свойство доказано.

Ведем необходимое нам понятие репера.

Определение 2. *Под аффинным репером плоскости будем понимать упорядоченную тройку неколлинеарных точек.*

В дальнейшем аффинный репер R будем обозначать следующим образом: $R = (O_1, O_2, O_3)$, где O_1, O_2 и O_3 — соответственно его первая, вторая и третья точки. Часто слово «аффинный» будем опускать, понимая под репером аффинный репер. Если точки репера $R = (O_1, O_2, O_3)$ удовлетворяют условию $|O_1O_2| = |O_1O_3| = 1$, а угол $\angle O_2O_1O_3$ — прямой, то репер будем называть *ортонормированным*.

Свяжем с каждым репером аффинную систему координат. Если нам дан репер $R = (O_1, O_2, O_3)$, то поставим ему в соответствие систему $O_1, \vec{e}_1, \vec{e}_2$, где $\vec{e}_1 = \overrightarrow{O_1O_2}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{O_1O_3}$ (рис. 133, *а*). И наоборот, каждой аффинной системе координат поставим в соответствие репер, удовлетворяющий указанным условиям. Очевидно, что ортонормированному реперу соответствует прямоугольная декартова система координат (рис. 133, *б*), а прямоугольной декартовой системе координат соответствует ортонормированный репер. В дальнейшем под *координатами точки относительно*

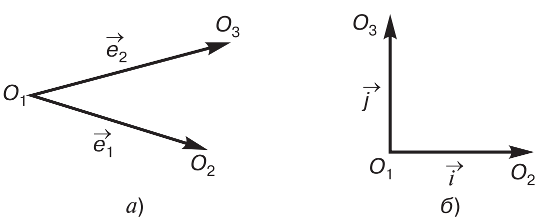


Рис. 133

репера будем понимать ее координаты в соответствующей системе координат.

Легко видеть, что справедливо еще одно свойство движения.

Свойство 8. *При движении репер преобразуется в репер, а ортонормированный репер — в ортонормированный репер*.

Утверждение непосредственно следует из свойств 4 и 6 движения.

Справедливо следующее основное свойство, из которого следует, что любое движение полностью определяется с помощью двух ортонормированных реперов.

Теорема 2 (основное свойство движений). *Пусть на плоскости даны ортонормированные реперы* $R = (O_1, O_2, O_3)$ *и* $R' = (O_1', O_2', O_3')$. *Тогда существует единственное движение* g, *переводящее репер* R *в* R': $g(O_1) = O_1'$, $g(O_2) = O_2'$, $g(O_3) = O_3'$.

Доказательство. Покажем, что такое движение существует. Рассмотрим две прямоугольные декартовы системы координат, соответствующие данным ортонормированным реперам. Первая система образована точкой O_1 и векторами $\vec{i} = \overrightarrow{O_1O_2}$, $\vec{j} = \overrightarrow{O_1O_3}$, а вторая — точкой O_1' и векторами $\vec{i}' = \overrightarrow{O_1'O_2'}$, $\vec{j}' = \overrightarrow{O_1'O_3'}$. Координаты точек в этих системах будем снабжать индексами 1 и 2: $(x; y)_1$, $(x; y)_2$. Поставим в соответствие каждой точке M плоскости с координатами x и y относительно первой системы точку M' с теми же координатами x и y относительно второй системы координат. Ясно, что такое соответствие g является взаимно однозначным отображением плоскости на себя.

Покажем, что g — движение точек плоскости. Рассмотрим произвольные точки M и N, координаты которых в первой системе равны $(x_1; y_1)_1$ и $(x_2; y_2)_1$. Так как система координат прямоугольная декартова, то расстояние между данными точками вычисляется по формуле $|MN| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Если M' и N' — образы M и N при преобразовании g, то эти точки имеют те же координаты относительно второй системы: $M'(x_1; y_1)_2$, $N'(x_2; y_2)_2$. Вторая система координат также прямоугольная декартова. Поэтому $|M'N'| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Таким образом, $|MN| = |M'N'|$, g — движение точек плоскости. Так как при этом преобразовании сохраняются координаты точек, то $O_i' = g(O_i)$ ($i = 1, 2, 3$). Существование движения, переводящего репер R в R', доказано.

Докажем его единственность. Предположим, что существуют два движения f и g, переводящие репер R в R': $f(O_1) = g(O_1) = O_1'$,

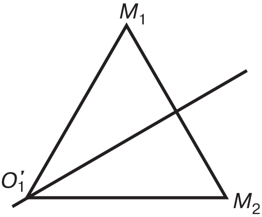


Рис. 134

$f(O_2) = g(O_2) = O_2'$, $f(O_3) = g(O_3) = O_3'$, такие, что для некоторой точки M плоскости $M_1 = f(M) \neq g(M) = M_2$. Так как f — движение плоскости, то $|M_1O_1'| = |MO_1|$. В то же время, g — также движение, поэтому $|M_2O_1'| = |MO_1|$. Следовательно, точка O_1' равноудалена от точек M_1 и M_2, т. е. принадлежит серединному перпендикуляру отрезка M_1M_2 (рис. 134). Аналогично показывается, что O_2' и O_3' также лежат на этом перпендикуляре. Мы пришли к противоречию, так как из определения 2 следует, что точки O_1', O_2' и O_3' репера R' не могут принадлежать одной прямой. Предположение о существовании двух различных движений, переводящих репер R в R', ложно. Теорема доказана.

Следствие. *Если f — движение плоскости, переводящее ортонормированный репер R в ортонормированный репер R', то каждой точке M плоскости с координатами x и y относительно репера R соответствует точка $M' = f(M)$ с теми же координатами x и y относительно репера R'.*

Действительно, при доказательстве теоремы 1 мы построили движение g, удовлетворяющее указанному свойству. Так как существует единственное движение, переводящее репер R в R', то движения f и g совпадают. Введем следующее определение.

Определение 3. *Под флагом плоскости будем понимать точку, луч с началом в этой точке и полуплоскость, граница которой содержит этот луч.*

Обозначать флаг будем следующим образом: $F = (M, l, \pi)$, где M — точка, l — луч, а π — полуплоскость флага. Каждому флагу однозначно соответствует ортонормированный репер $R = (M, O_2, O_3)$, где M — точка флага, O_2 лежит на его луче, а O_3 принадлежит полуплоскости флага (рис. 135). Ясно, что каждому флагу соответствует ортонормированный репер и наоборот, каждому такому реперу по указанному правилу однозначно соответствует флаг.

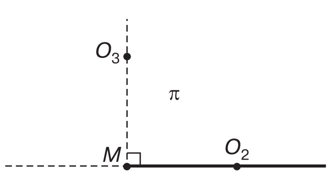


Рис. 135

Теорема 3. *Пусть даны два флага $F = (M, l, \pi)$ и $F' = (M', l', \pi')$. Тогда существует единственное* *движение g, переводящее флаг F во флаг F': $g(M) = M'$, $g(l) = l'$, $g(\pi) = \pi'$.*

Доказательство. Рассмотрим ортонормированные реперы R и R', соответствующие флагам F и F'. Координаты x и y точки M, точек луча l и полуплоскости π флага F в репере R соответственно удовлетворяют условиям: $x = y = 0$, $x > 0$, $y = 0$ и $y > 0$. Таким же условиям подчиняются координаты точки M', точек луча l' и полуплоскости π' флага F' в репере R'. Из теоремы 2 и ее следствия вытекает, что существует единственное движение g, переводящее R в R', при котором сохраняются координаты точек относительно этих реперов. Отсюда следует, что существует единственное движение, переводящее флаг F во флаг F'. Теорема доказана.

Ведем следующее определение.

Определение 4. *Две фигуры плоскости назовем геометрически равными (или просто равными), если существует движение плоскости, переводящее первую фигуру во вторую.*

Ясно, что равные фигуры обладают такими свойствами, которые не меняются (инвариантны) при преобразованиях из группы движений. Введенное определение полностью согласуется с понятием равенства геометрических фигур, изложенным в большинстве школьных курсов геометрии. В элементарной геометрии основополагающее значение имеет понятие равенства треугольников, признаки которого используются при доказательстве большого числа планиметрических и стереометрических теорем. Применяя основное свойство движений, покажем, что два треугольника равны в том и только в том случае, когда выполнен первый признак равенства треугольников.

Теорема 4. *Два треугольника равны между собой в том и только в том случае, когда равны их соответственные стороны и углы между ними.*

Доказательство. Из определения равенства геометрических фигур непосредственно следует, что два равных треугольника переводятся друг в друга некоторым движением точек плоскости. Это же движение переводит друг в друга все соответствующие элементы треугольников. Поэтому соответственные стороны и углы равных треугольников равны между собой.

И наоборот, пусть даны два треугольника ABC и $A'B'C'$, стороны и углы которых удовлетворяют условиям $|AB| = |A'B'|$, $|AC| = |A'C'|$, $\angle BAC = \angle B'A'C'$. Докажем, что существует такое движение g плоскости, при котором $g(A) = A'$, $g(B) = B'$, $g(C) = C'$. Присоединим к треугольнику ABC флаг $F = (A, l, \pi)$ таким образом, чтобы точка флага совпадала с вершиной A, луч l содержал вершину B, а вершина C принадлежала полуплоскости π. Аналогичным образом присоединим флаг $F' = (A', l', \pi')$ к треугольнику $A'B'C'$ (рис. 136). Пусть R и R' — ортонормированные реперы, соответствующие флагам F и F'. Тогда координаты вершин первого треугольника относительно репера R имеют вид $A(0; 0)$, $B(a; 0)$, $C(b\cos\varphi; b\sin\varphi)$, где $a = |AB|$, $b = |BC|$, φ — ориентированный угол BAC треугольника ABC. Так как, по условию, $|AB| = |A'B'|$ $|AC| = |A'C'|$ и $\angle BAC = \angle B'A'C'$, то в репере R' вершины A', B' и C' второго треугольника имеют те же координаты $A'(0; 0)$, $B'(a; 0)$, $C'(b\cos\varphi; b\sin\varphi)$. Из теоремы 3 вытекает, что существует движение g, переводящее репер R в R', при котором, как следует из следствия к теореме 2, сохраняются координаты точек. Поэтому $g(A) = A'$, $g(B) = B'$, $g(C) = C'$. Теорема доказана.

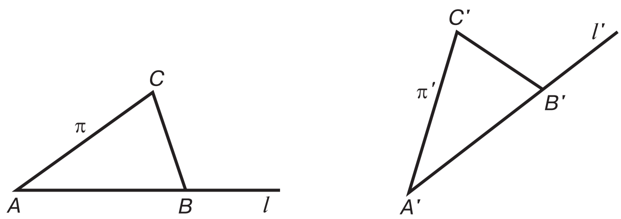


Рис. 136

Можно также показать, что для любых двух равных многоугольников справедливо следующее утверждение: *два многоугольника равны в том и только в том случае, когда равны их соответствующие стороны и углы*.

§ 30. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ, КЛАССИФИКАЦИЯ ДВИЖЕНИЙ

Напомним введенное в § 5 понятие ориентации базисов. Под матрицей перехода от базиса B_1: $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ к базису B_2: $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2$ плоскости понимается матрица

$$(B_1 \mid B_2) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix},$$

чьи столбцы равны координатам векторов второго базиса относительно первого. Поэтому в наших обозначениях $\vec{e}\,'_1 = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$,

$\vec{e}_2' = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2$. Два базиса имеют одинаковую ориентацию, если определитель матрицы перехода от первого базиса ко второму положителен. Их ориентации различны, если этот определитель меньше нуля. Напомним одно из свойств матриц перехода. Если даны три базиса B_1, B_2 и B_3, то

$$(B_1|B_3) = (B_1|B_2)\,(B_2|B_3). \tag{30.1}$$

В предыдущем параграфе было введено понятие репера. Каждому реперу была однозначно поставлена в соответствие система координат. Под матрицей перехода $(R|R')$ от репера R к реперу R' будем понимать матрицу перехода от базиса системы координат, соответствующей реперу R, к базису системы, соответствующей R'. Пусть $R = (O_1, O_2, O_3)$, $R' = (O_1', O_2', O_3')$. Реперу R соответствует система координат O_1, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{O_1O_2}$, $e_2' = \overrightarrow{O_1O_3}$, а реперу R' — система координат O_1', $\vec{e}_1 = \overrightarrow{O_1'O_2'}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{O_1'O_3'}$. Если в первой системе координаты точек второго репера обозначить $O_1'(x_1; y_1)_1$, $O_2'(x_2; y_2)_1$, $O_3'(x_3; y_3)_1$, то матрица перехода $(R|R')$ примет вид

$$(R\,|\,R') = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}. \tag{30.2}$$

Ясно, что для матриц перехода от одного репера к другому справедливо свойство, аналогичное (30.1). Если даны реперы R_1, R_2, R_3, то

$$(R_1|R_3) = (R_1|R_2)(R_2|R_3). \tag{30.3}$$

В соответствии с определением ориентации базисов введем аналогичное понятие для реперов.

Определение 1. *Два репера имеют одинаковую ориентацию, если определитель матрицы перехода от одного репера ко второму положителен. Их ориентации различны, если такой определитель меньше нуля.*

Итак, два репера имеют одну и ту же ориентацию в том и только в том случае, когда одинаково ориентированы базисы соответствующих им систем координат.

Пусть даны реперы R_1 и R_2. Обозначим через R_1' и R_2' их образы при некотором движении d: $R_1' = d(R_1)$, $R_2' = d(R_2)$. Выясним, как связаны между собой ориентации реперов R_1 и R_1', R_2 и R_2'. Если, например, R_1 и R_1' имеют одинаковую ориентацию, будет ли ориентация реперов R_2 и R_2' также одинакова? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть d — движение плоскости, R_1 и R_2 — реперы, R_1' и R_2' — их образы при этом движении. Тогда ориентации реперов R_1 и R_1' совпадают в том и только в том случае, когда совпадают ориентации реперов R_2* и *R_2'*.

Доказательство. Рассмотрим матрицы перехода $(R_1|R_2)$ и $(R_1' \,|\, R_2')$. Как следует из соотношения (30.2), матрица $(R_1|R_2)$ образована координатами точек репера R_2 относительно R_1, а матрица $(R_1' \,|\, R_2')$ — координатами точек репера R_2' относительно R_1'. Из следствия теоремы 2 (основное свойство движения, § 29) вытекает, что координаты точек репера R_2' относительно R_1' совпадают с координатами соответствующих точек R_2 относительно R_1. Отсюда следует, что рассматриваемые матрицы перехода равны между собой:

$$(R_1|R_2) = (R_1' \,|\, R_2'). \tag{30.4}$$

Воспользуемся равенством (30.3) и найдем матрицу перехода от репера R_1 к реперу R_2'. Получим $(R_1 \,|\, R_2') = (R_1 \,|\, R_2)(R_2 \,|\, R_2')$. В то же время, $(R_1 \,|\, R_2') = (R_1 \,|\, R_1')(R_1' \,|\, R_2')$. Таким образом, $(R_1 \,|\, R_1')(R_1 \,|\, R_2') = (R_1 \,|\, R_2)(R_2 \,|\, R_2')$. Если равны две матрицы, то равны их определители. Используя свойство определителей произведения матриц, получим $|R_1 \,|\, R_2| \cdot |R_2 \,|\, R_2'| = |R_1 \,|\, R_1'| \cdot |R_1' \,|\, R_2'|$. И наконец, из равенства (30.4) вытекает, что $|R_1 \,|\, R_2| = |R_1' \,|\, R_2'|$. Поэтому $|R_2 \,|\, R_2'| = |R_1 \,|\, R_1'|$. Следовательно, определители матриц перехода от R_1 к R_1' и от R_2 к R_2' одновременно либо положительны, либо отрицательны. Реперы одновременно либо одинаково ориентированы, либо имеют различные ориентации. Теорема доказана.

Теорема 1 позволяет ввести следующее определение.

Определение 2. *Движение g плоскости называется движением первого рода, если ориентация любого репера R совпадает с ориентацией его образа $R' = g(R)$. Это движение называется движением второго рода, если ориентация любого репера R противоположна ориентации его образа R'.*

Из теоремы 1 следует, что для определения рода движения достаточно проверить ориентации какого-либо одного репера и его образа.

Определим род параллельного переноса, вращения и осевой симметрии.

Пусть дан некоторый параллельный перенос $T_{\vec{a}}$, определенный вектором $\vec{a}$. Рассмотрим ортонормированный репер $R = (O_1,$

O_2, O_3). Пусть координаты вектора $\vec{a}$ в этом репере равны $\{a; b\}$. Тогда формулы параллельного переноса (§ 28) имеют вид $\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b. \end{cases}$ Координаты точек репера R заданы: $O_1(0; 0)$, $O_2(1; 0)$, $O_3(0; 1)$. Поэтому можно найти координаты их образов: $T_{\vec{a}}(O_1) = O_1'(a; b)$, $T_{\vec{a}}(O_2) = O_2'(a+1; b)$, $T_{\vec{a}}(O_3) = O_3'(a; b+1)$. Для определения матрицы перехода от репера R к реперу $R' = (O_1', O_2', O_3')$ воспользуемся соотношением (30.2). Получим $(R \mid R') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Отсюда следует, что $|R|R'| = 1$. Параллельный перенос является движением первого рода.

Рассмотрим теперь произвольное вращение R_O^{φ} вокруг точки O на ориентированный угол φ. Выберем ортонормированный репер R так, чтобы его первая точка совпадала с центром вращения O: $R(O, O_2, O_3)$. Тогда в этом репере аналитическое выражение вращения имеет вид: $\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{cases}$ Репер R преобразуется в репер $R' = R_O^{\varphi}(R)$ с точками $O(0; 0)$, $O_2'(\cos\varphi; \sin\varphi)$, $O_3'(-\sin\varphi; \cos\varphi)$. Из соотношения (30.2) следует, что матрица перехода от R к R' имеет вид $(R \mid R')\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. Ее определитель равен 1, т. е. числу положительному. Вращение, как и параллельный перенос, является движением первого рода.

Рассмотрим, наконец, осевую симметрию S_l с осью l. Покажем, что она служит примером движения второго рода. Выберем ортонормированный репер $R = (O_1, O_2, O_3)$ так, чтобы его первые две точки принадлежали оси l. Тогда формулы симметрии (§ 28) имеют вид $\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y \end{cases}$. Самостоятельно определите, что матрица перехода от репера R к реперу $R' = S_l(R)$ равна $(R \mid R') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Таким образом, $|R|R'| = -1 < 0$. Осевая симметрия представляет собой движение второго рода.

Движения первого рода обладают групповым свойством.

Теорема 2. *Движения первого рода образуют подгруппу в группе движений плоскости.*

Доказательство. Выше отмечалось, что для доказательства теоремы достаточно проверить, что для любых движений f и g первого рода их произведение $f \circ g$, а также обратное преобразование f^{-1} также являются движениями первого рода. Пусть R — произвольный репер, $R' = g(R)$, $R'' = f(R') = f \circ g(R)$. Так как g — преобразование первого рода, то ориентации реперов R и R' совпадают. Аналогично, f — также движение первого рода, отсюда следует, что ориентации реперов R' и R'' одинаковы. Поэтому ориентации реперов R и R'' совпадают, движение $f \circ g$ имеет первый род.

Обозначим через R_1 прообраз репера R при движении f первого рода. Предположим, что f^{-1} — движение второго рода. Тогда реперы R_1 и R имеют различные ориентации. Но $R = f(R_1)$. Так как f — движение первого рода, то ориентации этих реперов совпадают. Мы пришли к противоречию. Поэтому f^{-1} — движение первого рода. Теорема доказана.

Легко видеть, что *произведение двух движений второго рода является движением первого рода*. Действительно, пусть f и g — движения второго рода, а R — некоторый репер. Если $R' = g(R)$, $R'' = f(R') = f \circ g(R)$, то ориентация репера R' противоположна ориентации репера R, а репера R' — ориентации репера R''. Поэтому реперы R и R'' имеют одинаковые ориентации, т. е. движение $f \circ g$ имеет первый род. Таким образом, множество движений второго рода не образует группу преобразований.

Для нахождения аналитического выражения движения используем формулы перехода от одной прямоугольной декартовой системы координат к другой, полученные в § 9. Напомним их. Пусть даны две прямоугольные декартовы системы координат $O, \vec{i}, \vec{j}$ и $O', \vec{i}', \vec{j}'$. Известны координаты точки $O'(a; b)_1$ в первой системе координат, а также ориентированный угол φ между векторами $\vec{i}$ и $\vec{i}'$. Тогда координаты одной и той же точки M относительно этих двух систем $M(u_1; v_1)_1$, $M(u_2; v_2)_2$ связаны между собой соотношениями

$$\begin{cases} u_1 = u_2 \cos\varphi - \varepsilon v_2 \sin\varphi + a, \\ v_1 = u_2 \sin\varphi + \varepsilon v_2 \cos\varphi + b, \end{cases} \tag{30.5}$$

где $\varepsilon = 1$, если ориентации систем координат одинаковы и $\varepsilon = -1$, если их ориентации различны. Если на плоскости даны ортонормированные реперы $R_1 = (O_1, O_2, O_3)$ и $R_2 = (Q_1, Q_2, Q_3)$, то координаты одной и той же точки M относительно этих двух реперов $M(u_1; v_1)_1$, $M(u_2; v_2)_2$ также связаны друг с другом соотношениями (30.5). В силу правила соответствия ортонормированного репера и прямоугольной декартовой системы координат параметры в формулах (30.5) имеют следующий смысл: φ — ориентированный угол между векторами $\overrightarrow{O_1O_2}$ и $\overrightarrow{Q_1Q_2}$, a и b — координаты точки Q_1 в первом репере, $\varepsilon = 1$, если ориентации реперов совпадают и $\varepsilon = -1$, если они различны.

Пусть d — некоторое движение. Выберем произвольный ортонормированный репер $R = (O_1, O_2, O_3)$. Рассмотрим произвольную точку M плоскости и обозначим через M' ее образ при движении d: $M' = d(M)$. Если $(x, y)_1$ и $(x', y')_1$ — координаты точек M и M' относительно репера R, то искомые аналитические выражения движения d представляют собой зависимости координат x' и y' от x и y. Обозначим через R' образ репера R при движении d: $R' = d(R) = (O_1', O_2', O_3')$. Ориентации реперов R и R' одинаковы, если d — движение первого рода, эти ориентации различны, если движение имеет второй род. Согласно следствию основного свойства движения (§ 29), точка M' имеет те же координаты относительно репера R', что и точка M относительно R: $M'(x; y)_2$. Применим формулы (30.5) перехода от репера R к реперу R' для координат точки M':

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi - \varepsilon y \sin\varphi + a, \\ y' = x\sin\varphi + \varepsilon y\cos\varphi + b. \end{cases} \tag{30.6}$$

Полученные соотношения являются искомыми. Здесь $\varepsilon = 1$, если движение имеет первый род, и $\varepsilon = -1$, если оно второго рода, a и b — координаты точки O_1' относительно репера R: $O_1'(a; b)_1$, φ — величина ориентированного угла между векторами $\overrightarrow{O_1O_2}$ и $\overrightarrow{O_1'O_2'}$. Легко видеть, что аналитические выражения параллельного переноса, вращения и осевой симметрии, являются частными случаями формул (30.6).

Проведем классификацию движений по числу их неподвижных или инвариантных точек. Введем следующее определение.

Определение 3. *Фигура P называется инвариантной относительно преобразования f, если ее образ совпадает с P: $f(P) = P$.*

Точку, инвариантную относительно преобразования, часто называют *неподвижной*.

Пример 1. *Найти инвариантные точки движения, заданного формулами*

$$\begin{cases} x' = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y - \dfrac{1}{5}, \\ y' = \dfrac{3}{5}x - \dfrac{4}{5}y + \dfrac{3}{5}. \end{cases}$$

Решение. Если точка $M(x;\ y)$ неподвижна относительно данного движения, то координаты x' и y' ее образа совпадают с координатами x и y точки M. Поэтому координаты $(x;\ y)$ неподвижной точки являются решением системы уравнений $\begin{cases} x = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y - \dfrac{1}{5}, \\ y = \dfrac{3}{5}x - \dfrac{4}{5}y + \dfrac{3}{5}. \end{cases}$ Преобразуем уравнения этой системы: $\begin{cases} x - 3y + 1 = 0, \\ 3x - 9y + 3 = 0. \end{cases}$ Мы видим, что полученная система неопределенная, она имеет бесконечно много решений. Точка $N(x;\ y)$ тогда и только тогда инвариантна относительно данного движения, когда ее координаты удовлетворяют уравнению $x - 3y + 1 = 0$. Таким образом, данное движение имеет прямую неподвижных точек.

Пример 2. *Найти прямые, инвариантные относительно движения*

$$\begin{cases} x' = -y + 2, \\ y' = -x - 2. \end{cases}$$

Решение. Введем уравнение искомой прямой l в виде $Ax + By + C = 0$. Определим уравнение ее образа. Для этого следует выразить x и y через x' и y': $\begin{cases} x = -y' - 2, \\ y = -x' + 2, \end{cases}$ а затем подставить полученные выражения в уравнение прямой l. Получим $A(-y' - 2) + B(-x' + 2) + C = 0$. Отсюда после преобразований уравнение образа l' данной прямой примет вид $Bx + Ay + 2A - 2B - C = 0$. Так как l совпадает с l', то воспользуемся полученными нами в § 13 условиями совпадения прямых, заданных своими общими уравнениями. В рассматриваемом случае коэффициенты A, B и C должны удовлетворять условиям $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = 0$, и $\begin{vmatrix} B & C \\ A & 2A - 2B - C \end{vmatrix} = 0$. Из первого равенства вытекает, что $A^2 - B^2 = 0$, т. е. либо $A = -B$, либо $A = B$. Второе равенство при $A = -B$ приобретает вид $\begin{vmatrix} B & C \\ -B & -4B - C \end{vmatrix} = 0$. Отсюда следует, что $A = B = 0$, чего не может быть, так как A и B — коэффициенты при неизвестных в общем уравнении прямой l. Таким образом, $A = B$, и из второго равенства вытекает $BC = 0$. Так как при $B = 0$ мы приходим к противоречию, то $C = 0$. Уравнение искомой прямой имеет вид $x + y = 0$.

Проведем классификацию движений. Вначале проверим справедливость нескольких вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Если движение имеет три инвариантные точки, не лежащие на одной прямой, то оно совпадает с тождественным преобразованием.*

Доказательство. Пусть O_1, O_2 и O_3 — неподвижные точки движения g, не принадлежащие одной прямой. Рассмотрим флаг $F = (O_1, l, \pi)$, где l — луч с началом в точке O_1, содержащий O_2, а π — полуплоскость с границей O_1O_2, включающая в себя точку O_3. Так как точки инвариантны относительно движения g, то $g(O_1) = O_1$, $g(l) = l$ и $g(\pi) = \pi$. Таким образом, $g(F) = F$. В то же время, тождественное преобразование также переводит флаг F в себя. В силу теоремы 3 § 29, существует единственное движение, переводящее один флаг в другой. Отсюда следует, что движение g совпадает с тождественным преобразованием. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если движение g имеет две неподвижные точки O_1 и O_2, то каждая точка прямой O_1O_2 является инвариантной.*

Доказательство. Пусть h — луч O_1O_2 с началом в точке O_1. Прямая O_1O_2 разбивает плоскость на две полуплоскости π_1 и π_2. Поэтому существуют только два флага $F_1 = (O_1, l, \pi_1)$ и $F_2 = (O_1, l, \pi_2)$, точки и лучи которых совпадают с O_1 и h. Так как O_1 и O_2 неподвижны при движении g, то $g(O_1) = O_1$ и $g(h) = h$. Поэтому образом флага F_1 при данном движении является либо сам флаг F_1, либо флаг F_2. Но флаг F_1 отображается сам в себя при тождественном преобразовании, и F_1 переходит в F_2 при осевой симметрии с осью O_1O_2. Из теоремы 3, § 29, следует, что движение g совпадает либо с тождественным преобразованием, либо с указанной осевой симметрией. И в первом, и во втором случае прямая O_1O_2 является инвариантной. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если при движении g образы точек P и Q принадлежат прямой PQ, то эта прямая инвариантна относительно данного движения.*

Справедливость леммы непосредственно вытекает из второго свойства движений (§ 29). Докажем теперь свойство движения, у которого нет неподвижных точек.

Лемма 4. *Если движение не имеет неподвижных точек, то оно имеет инвариантную прямую.*

Доказательство. Рассмотрим движение g, которое не имеет инвариантных точек. Возьмем произвольную точку A плоскости и введем следующие обозначения:

$$A_1 = g(A), \quad A_2 = g(A_1), \quad A_3 = g(A_2). \tag{30.7}$$

Предположим, что либо точки A, A_1, A_2, либо A_1, A_2, A_3 лежат на одной прямой. Тогда, согласно лемме 3, либо прямая AA_1, либо A_1A_2 является инвариантной. В этом случае лемма доказана.

Рассмотрим случай, когда точки A, A_1, A_2 и A_1, A_2, A_3 находятся в вершинах двух треугольников. В силу (30.7) эти треугольники равны между собой. Отсюда следует, что $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$, $AA_2 = A_1A_3$, $\angle AA_1A_2 = \angle A_1A_2A_3$. Возможны следующие два случая расположения точек A и A_3 относительно прямой A_1A_2:

1) указанные точки лежат в одной полуплоскости относительно этой прямой;
2) точки лежат в различных полуплоскостях.

Покажем, что в первом случае движение g обладает инвариантной точкой. Пусть точки A и A_3 лежат в одной полуплоскости относительно прямой A_1A_2. Обозначим через M, N и P соответственно середины отрезков AA_1, A_1A_2 и A_2A_3, а через m, n и p — серединные перпендикуляры этих отрезков (рис. 137). Из указанных выше равенств отрезков и углов вытекает, что треугольники AA_1A_2 и $A_1A_2A_3$ симметричны относительно перпендикуляра n. Отсюда следует, что серединные перпендикуляры m, n и p пересекаются в одной точке O. Покажем, что эта точка инвариантна относительно движения g. Так как при движении сохраняются величины отрезков и углов, то середина любого отрезка преобразуется в середину его образа, а серединный перпендикуляр — в серединный перпендикуляр к образу этого отрезка. Следовательно, $g(m) = n$, $g(n) = p$. Точка O совпадает с пересечением m и n. Поэтому $g(O)$ совпадает с пересечением $g(m)$ и $g(n)$. Но $g(m) = n$, $g(n) = p$, $n \cap p = O$. Вследствие этого $g(O) = O$, O — инвариантная точка движения g. Но, по условию леммы, движение g не имеет неподвижных точек, поэтому справедлив только второй случай, точки A и A_3 лежат в различных полуплоскостях относительно прямой A_1A_2.

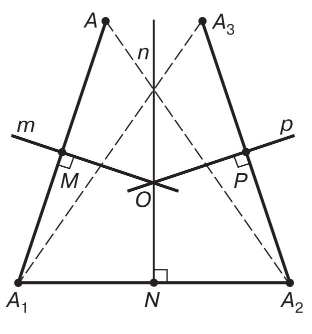


Рис. 137

В силу равенства треугольников AA_1A_2 и $A_1A_2A_3$ во втором случае четырехугольник $AA_1A_2A_3$ представляет собой параллелограмм (рис. 138). Середины M, N и P отрезков AA_1, A_1A_2 и A_2A_3 лежат на одной прямой l, параллельной стороне A_1A_3 параллелограмма. Как отмечалось выше, точки M и N при движении g преобразуются соответственно в N и P: $g(M) = N$, $g(N) = P$. Отсюда и из леммы 3 получим, что прямая l инвариантна при движении g. Лемма доказана.

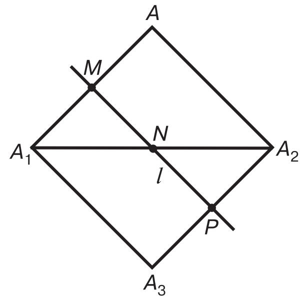


Рис. 138

Проведем классификацию движений первого рода.

Теорема 3 (теорема Шаля). *Любое движение первого рода является либо тождественным преобразованием, либо параллельным переносом, либо вращением.*

Доказательство. Пусть дано движение первого рода g. Его аналитическое выражение имеет вид (30.6), причем $\varepsilon = 1$:

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi + a, \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi + b. \end{cases} \qquad (30.8)$$

Как было ранее установлено, точка $M(x;\ y)$ в том и только в том случае является инвариантной точкой движения g, когда ее координаты удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x = x\cos\varphi - y\sin\varphi + a, \\ y = x\sin\varphi + y\cos\varphi + b. \end{cases} \qquad (30.9)$$

Возможны следующие случаи:

1) движение g имеет по крайней мере две неподвижные точки;
2) движение g обладает ровно одной инвариантной точкой;
3) неподвижных точек у движения g нет.

Рассмотрим первый случай, когда движение g имеет, по крайней мере, две инвариантные точки. Тогда, согласно лемме 2, прямая, проходящая через них, целиком состоит из неподвижных точек. Выберем ортонормированный репер $R = (O_1,\ O_2,\ O_3)$ так, чтобы точки O_1 и O_2 принадлежали этой прямой. Запишем координаты этих точек в репере R: $O_1(0;\ 0)$, $O_2(1;\ 0)$. Подставив эти координаты в (30.8), получим $a = b = \sin\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$. Поэтому формулы движения g имеют вид $\begin{cases} x' = x, \\ y' = y. \end{cases}$ Движение является тождественным преобразованием.

Рассмотрим второй случай, когда движение обладает единственной неподвижной точкой O. Выберем ортонормированный репер так, чтобы эта точка была его началом. В этом случае $x = y = 0$ — решение системы (30.9). Поэтому $a = b = 0$, и формулы движения (30.8) принимают вид $\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{cases}$ Движение представляет собой вращение вокруг точки O на угол φ (§ 28).

Наконец, перейдем к третьему случаю, когда движение g не имеет неподвижных точек. Тогда, согласно лемме 4, это движение имеет инвариантную прямую. На этот раз выберем ортонормированный репер $R = (O_1, O_2, O_3)$ так, чтобы точки O_1 и O_2 принадлежали инвариантной прямой. Запишем их координаты в репере R: $O_1(0; 0)$, $O_2(1; 0)$. Пусть $O_1' = g(O_1)$, $O_2' = g(O_2)$. Так как O_1' принадлежит прямой O_1O_2, то ее координаты равны $(c; 0)$. Подставляя координаты точек O_1 и O_1' в выражения (30.8), получим $a = c$, $b = 0$. Длины отрезков O_1O_2 и $O_1'O_2'$ равны между собой, точка O_2' принадлежит прямой O_1O_2, поэтому ее координаты равны либо $(c - 1; 0)$, либо $(c + 1; 0)$.

Предположим, что эта точка имеет координаты $(c - 1; 0)$. Тогда из формул (30.8) следует, что $\begin{cases} c - 1 = \cos\varphi + c, \\ 0 = \sin\varphi. \end{cases}$ Отсюда получим $\sin\varphi = 0$, $\cos\varphi = -1$. Формулы движения g имеют вид $\begin{cases} x' = -x + c, \\ y' = y. \end{cases}$ Полученное преобразование является центральной симметрией относительно точки $Q\left(\dfrac{c}{2}; 0\right)$; для него точка Q инвариантна. Мы пришли к противоречию, так как по предположению движение не имеет инвариантных точек. Таким образом, координаты точки O_2' равны $(c + 1; 0)$. Еще раз подставим координаты O_2 и O_2' в (30.8). Получим $\begin{cases} c - 1 = \cos\varphi + c, \\ 0 = \sin\varphi. \end{cases}$ Следовательно, $\sin\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$, и формулы движения g имеют вид $\begin{cases} x' = x + c, \\ y' = y. \end{cases}$ Мы получили, что движение g — параллельный перенос на вектор $\overline{O_1O_2'}$. Теорема доказана.

Теорема Шаля позволяет полностью классифицировать движения плоскости первого рода. Рассмотрим аналогичную задачу для движений второго рода. Как отмечалось выше, произведение двух движений второго рода является движением первого рода. Поэтому любое движение второго рода совпадает с произведением некоторых движений первого и второго родов. Из теоремы Шаля следует, что *любое движение второго рода является либо осевой симметрией, либо произведением осевой симметрии на параллельный перенос или на вращение*. Проведем более детальную классификацию движений второго рода.

Теорема 4. *Любое движение второго рода либо имеет бесконечно много инвариантных точек, принадлежащих одной прямой, либо не имеет их вообще.*

Доказательство. Рассмотрим аналитическое выражение движения g второго рода. Оно имеет вид (30.6), причем $\varepsilon = -1$:

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi + a, \\ y' = x\sin\varphi - y\cos\varphi + b. \end{cases} \tag{30.10}$$

Координаты его инвариантной точки совпадают с решениями системы уравнений

$$\begin{cases} x = x\cos\varphi + y\sin\varphi + a, \\ y = x\sin\varphi - y\cos\varphi + b. \end{cases} \tag{30.11}$$

Преобразуем ее к виду

$$\begin{cases} x(\cos\varphi - 1) + y\sin\varphi = -a, \\ x\sin\varphi - y(\cos\varphi + 1) = -b. \end{cases}$$

Определитель Δ полученной системы равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\varphi - 1 & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi - 1 \end{vmatrix} = 1 - \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = 0.$$

Отсюда следует, что система (30.11) либо не имеет решений, либо имеет их бесконечно много, т. е. движение g либо не имеет неподвижных точек, либо имеет их бесконечно много.

Пусть движение g второго рода обладает бесконечным множеством инвариантных точек. Все они принадлежат одной прямой, так как если существуют три неколлинеарные неподвижные точки движения g, то из леммы 1 вытекает, что g — тождественное преобразование, т. е. не является движением второго рода. Теорема доказана.

Рассмотрим движение g второго рода, которое имеет прямую инвариантных точек. Выберем ортонормированный репер $R = (O_1, O_2, O_3)$ так, чтобы точки O_1 и O_2 были инвариантными относительно g: $O_1 = g(O_1)$, $O_2 = g(O_2)$. Тогда пары чисел (0; 0) и (1; 0) служат решениями системы (30.11). Подставляя их в уравнения системы, получим $a = b = 0$, $\cos\varphi = 1$, $\sin\varphi = 0$. Поэтому формулы движения g имеют следующий вид: $\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y. \end{cases}$ Данное движение, как было показано в § 28, представляет собой осевую симметрию относительно прямой O_1O_2, состоящей из инвариантных точек.

Пусть движение g второго рода не имеет инвариантных точек. Тогда, согласно лемме 4, оно имеет инвариантную прямую. Обозначим ее через l. Выберем ортонормированный репер $R = (O_1, O_2, O_3)$ так, чтобы точки O_1 и O_2 принадлежали l. Тогда образы этих точек $O_1' = g(O_1)$, $O_2' = g(O_2)$ также принадлежат l. Координаты точек O_1 и O_2 в репере R равны (0; 0) и (1; 0), а сама прямая l имеет уравнение $y = 0$. Поэтому координаты O_1' имеют вид (c; 0). Подставив в (30.10) координаты точек O_1 и O_1', получим:

$$a = c, b = 0. \qquad (30.12)$$

Так как $|O_1O_2| = |O_1'O_2'| = 1$, а точка O_2' лежит на прямой l, то ее координаты равны либо ($c - 1$; 0), либо ($c + 1$; 0). В первом случае подставим координаты точек O_2 и O_2' в соотношения (30.10) и осуществим замену по формулам (30.12). Получим $\cos\varphi = -1$, $\sin\varphi = 0$. Тогда аналитическое выражение движения g приобретает вид $\begin{cases} x' = -x + c, \\ y' = y. \end{cases}$ В этом случае движение g имеет неподвижную точку, например $M\left(\dfrac{c}{2}; 0\right)$; и вообще, g является осевой симметрией с осью m: $x = \dfrac{c}{2}$. Так как мы предполагали, что g не имеет инвариантных точек, то координаты точки O_2' равны ($c + 1$; 0). Заменим в (30.10) x и y на 1 и 0, x' и y' на $c + 1$ и 0 и, воспользовавшись соотношениями (30.12), получим $\cos\varphi = 1$, $\sin\varphi = 0$. Аналитическое выражение движения g имеет вид

$$\begin{cases} x' = x + c, \\ y' = -y. \end{cases} \qquad (30.13)$$

Из (30.13) следует, что движение g представляет собой произведение $S_l \circ T_{\vec{a}}$, где S_l — осевая симметрия с осью l и аналитическим выражением $\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y, \end{cases}$ а $T_{\vec{a}}$ — параллельный перенос на вектор $\vec{a}$ $\{c;\ 0\}$, параллельный прямой l, с аналитическим выражением $\begin{cases} x' = x + c, \\ y' = y. \end{cases}$ Такое преобразование носит названия *скользящей симметрии*, прямая l называется ее *осью*, вектор $\vec{a}$ — *вектором* скользящей симметрии.

Нами доказана теорема о классификации движений второго рода.

Теорема 5. *Любое движение второго рода является либо симметрией, либо скользящей симметрией.*

Пример 3. *Проверить, существует ли скользящая симметрия, при которой точки* $A(2;\ 1)$ *и* $B(-3;\ 2)$ *преобразуются соответственно в точки* $A'(2;\ 3)$ *и* $B'(3;\ -2)$. *Если существует, то определить ее аналитическое выражение.*

Решение. Вычислим длины отрезков AB и $A'B'$: $|AB| = |A'B'| = \sqrt{26}$. Так как длины отрезков совпадают, то существует единственное движение второго рода, при котором точки A и B преобразуются соответственно в точки A' и B' (докажите самостоятельно). Воспользуемся следующим утверждением. Если при скользящей симметрии точка M преобразуется в M', то середина отрезка MM' принадлежит ее оси (это утверждение также проверьте самостоятельно). Отсюда вытекает, что ось l искомой скользящей симметрии проходит через точки P и Q — середины отрезков AA' и BB'. Определим координаты точек P и Q: $P(2;\ 2)$, $Q(0;\ 0)$, затем найдем уравнение прямой PQ: $x - y = 0$. Нетрудно определить аналитическое выражение осевой симметрии S_l с осью PQ: $\begin{cases} x' = y, \\ y' = x. \end{cases}$ Отсюда следует, что координаты точки $A_1 = S_l(A)$ равны $(1;\ 2)$. Ясно, что вектор $\overrightarrow{A_1A'}\{1; 1\}$ служит вектором параллельного переноса искомой скользящей симметрии. Поэтому ее формулы имеют вид $\begin{cases} x' = y + 1, \\ y' = x + 1. \end{cases}$

В заключение параграфа отметим еще одно интересное свойство осевой симметрии. Выше говорилось о том, что произведение двух движений второго рода является движением первого рода. Пусть даны две осевые симметрии S_m и S_l с осями l и m.

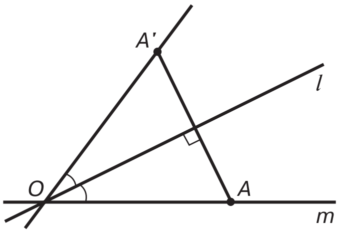


Рис. 139

Их произведение $S_m \circ S_l$ представляет собой движение первого рода и, согласно теореме Шаля, совпадает либо с тождественным преобразованием, либо с параллельным переносом, либо с вращением.

Пусть оси m и l данных осевых симметрий совпадают. Легко видеть, что в этом случае $S_m \circ S_l$ является тождественным преобразованием. Предположим, что оси l и m пересекаются в некоторой точке O. Тогда это единственная неподвижная точка произведения $S_m \circ S_l$. Из теоремы Шаля следует, что произведение $S_m \circ S_l$ совпадает с вращением вокруг этой точки. Возьмем некоторую точку A, отличную от O, на прямой m (рис. 139). Тогда ее образ при произведении $S_m \circ S_l$ совпадает с точкой $A' = S_l(A)$. Если обозначить ориентированный угол между прямыми m и l через φ, то $\measuredangle AOA' = 2\varphi$. Таким образом, произведение $S_m \circ S_l$ совпадает с вращением вокруг точки O на угол 2φ.

Если оси l и m параллельны друг другу (рис. 140), то произведение $S_m \circ S_l$ не имеет неподвижных точек. Поэтому оно совпадает с параллельным переносом. Найдем его вектор. Для этого достаточно выбрать точку A на прямой m и построить точку $A' = S_m \circ S_l(A) = S_l(A)$. Вектор $\overrightarrow{AA'}$ — искомый.

Любое движение второго рода совпадает с произведением осевой симметрии на движение первого рода. Итак, мы доказали следующую теорему:

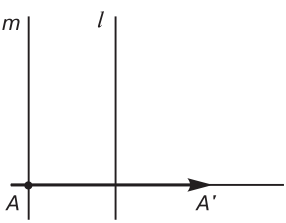


Рис. 140

Теорема 6. *Любое движение первого рода является произведением двух осевых симметрий, а движение второго рода — либо осевой симметрией, либо произведением трех осевых симметрий.*

§ 31. ДВИЖЕНИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Определение движения трехмерного пространства дословно совпадает с определением этого преобразования в случае плоскости: *под движением пространства понимается такое его* *преобразование, при котором сохраняется расстояние между точками* (§ 29).

Свойства движений трехмерного пространства во многом аналогичны его свойствам в случае плоскости. При движении пространства коллинеарные точки преобразуются в коллинеарные, точки, не лежащие на одной прямой, — в точки, которые одной прямой не принадлежат; сохраняется простое отношение точек; прямая преобразуется в прямую, отрезок — в отрезок, луч — в луч, угол — в равный ему угол; множество движений пространства образует группу преобразований. Доказательства этих утверждений не отличаются от доказательств соответствующих свойств, приведенных в § 29.

Рассмотрим те свойства движений пространства, которые не имеют аналогов в случае плоскости.

Свойство 1. *При движении пространства плоскость преобразуется в плоскость.*

Доказательство. Пусть d — произвольное движение пространства, α — некоторая плоскость. Выберем три неколлинеарные точки A, B и C, принадлежащие этой плоскости. Пусть $d(A)=A'$, $d(B)=B'$, $d(C)=C'$. Точки A', B' и C' также не лежат на одной прямой. Поэтому существует единственная плоскость α', которая содержит эти точки. Докажем, что $\alpha'=d(\alpha)$. Рассмотрим произвольную точку X плоскости α. Выберем такую прямую l, проходящую через X, которая пересекает прямые AB и AC. Обозначим точки пересечения этих прямых соответственно через S и T (рис. 141, *а*). Пусть $d(X)=X'$, $d(S)=S'$, $d(T)=T'$, $d(l)=l'$. При движении прямые преобразуются в прямые. Поэтому точки S' и T' являются точками пересечения прямой l' соответственно с прямыми $A'B'$ и $A'C'$. Отсюда следует, что прямая l' принадлежит плоскости α'. Так как $X'\in l'$, то точка X' принадлежит плоскости α'. Мы показали, что $d(\alpha)\subseteq\alpha'$.

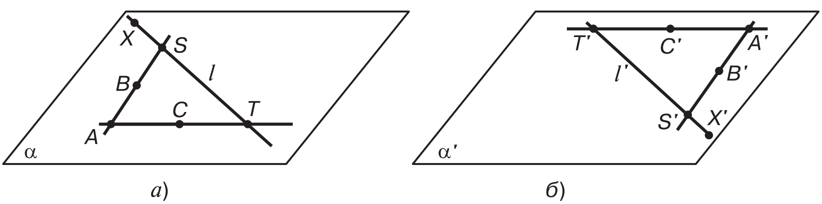


Рис. 141

Докажем, что прообраз любой точки X' плоскости α' лежит в α. Для этого проведем через X' прямую, которая пересекает $A'B'$ и $A'C'$ соответственно в точках S' и T' (рис. 141, *б*). Их прообразы $S = d^{-1}(S')$ и $T = d^{-1}(T')$ принадлежат прямым AB и AC. Поэтому прямая ST лежит в плоскости α. Но $X = d^{-1}(X')$ — точка прямой ST, поэтому она также принадлежит плоскости α. Утверждение доказано.

Свойство 2. *При движении пространства полуплоскость преобразуется в полуплоскость, двугранный угол — в равный ему двугранный угол.*

Свойство 3. *При движении пространства скрещивающиеся прямые преобразуются в скрещивающие прямые, их общий перпендикуляр переходит в общий перпендикуляр образов, и при этом сохраняется расстояние между ними.*

Доказательство свойств 2 и 3 проведите самостоятельно.

Под репером пространства понимается упорядоченная четверка его точек $R = (O_1, O_2, O_3, O_4)$, не лежащих в одной плоскости. Отсюда следует, что никакие три из этих точек не принадлежат одной прямой. Так же как и в случае плоскости, с репером пространства связывается система координат $O_1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, где $\vec{e}_1 = \overrightarrow{O_1O_2}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{O_1O_3}$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{O_1O_4}$. Репер называется ортонормированным, если соответствующая ему система координат является прямоугольной декартовой. Под координатами точки относительно репера R, как и в случае плоскости, понимаются ее координаты относительно соответствующей системы координат.

Теорема 1. *Существует единственное движение пространства, переводящее один ортонормированный репер в другой.*

Отсюда следует, что движение в том и только в том случае является тождественным, когда оно ортонормированный репер переводит в себя. Доказательство теоремы опускаем, так как оно полностью аналогично доказательству теоремы 2, § 29.

Справедливо также утверждение, аналогичное теореме 1, § 30: если даны два репера R_1 и R_2 пространства, R_1' и R_2' — их образы при некотором движении, то ориентации реперов R_1 и R_1' совпадают в том и только в том случае, когда совпадают ориентации реперов R_2 и R_2'. В силу этого утверждения движения пространства, как и в случае плоскости, подразделяются на движения первого и второго рода. Движение называется движением первого рода, если оно не меняет ориентации реперов, движение имеет второй род, если ориентации реперов меняются.

Рассмотрим примеры движений пространства. Как и в случае плоскости, в пространстве определяется преобразование параллельного переноса. Пусть дан вектор $\vec{p}$. *Под параллельным переносом пространства на вектор* $\vec{p}$ *понимается такое преобразование, которое каждой точке* M *ставит в соответствие точку* M', *удовлетворяющую условию* $\overrightarrow{MM'} = \vec{p}$. Очевидно, что в пространстве справедливы все свойства параллельного переноса, доказанные в §29 для случая плоскости.

Пусть в пространстве даны ось l и некоторый угол φ, удовлетворяющий условию $-\pi < \varphi \leq \pi$. Обозначим через $\vec{e}$ орт оси l, т. е. единичный вектор, сонаправленный с осью. Рассмотрим произвольную точку M пространства. Пусть α — плоскость, проходящая через M и перпендикулярная l, а O — точка пересечения плоскости α и оси l (рис. 142). Ориентируем α таким образом, чтобы ее базис $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ был правым в том и только в том случае, когда базис $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}$ пространства является правым. Точке M поставим в соответствие такую точку M' плоскости α, которая является образом M при вращении этой плоскости вокруг точки O на ориентированный угол φ. Такое преобразование пространства будем называть *вращением вокруг оси*. Если $\varphi = \pi$, то точки M и M' центрально симметричны в плоскости α относительно точки O. В этом случае преобразование называется *отражением относительно оси*. Произведение вращения вокруг оси и параллельного переноса на ненулевой вектор, параллельный оси вращения, называется *винтовым движением*.

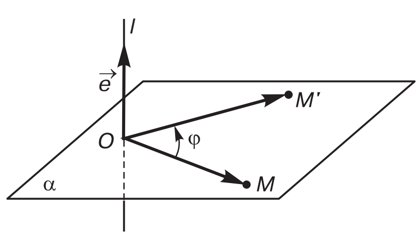


Рис. 142

Параллельный перенос, вращение вокруг оси и винтовое движение являются движениями первого рода пространства.

Пусть в пространстве дана точка O. Каждой точке M пространства поставим в соответствие такую точку M', для которой O служит серединой отрезка MM'. Такое преобразование пространства называется центральной симметрией относительно точки O. Если начало системы координат совпадает с центром симметрии O, то формулы этого преобразования имеют вид

$$\begin{cases} x' = -x, \\ y' = -y, \\ z' = -z. \end{cases} \tag{31.1}$$

Легко показать, что центральная симметрия представляет собой движение второго рода пространства. Выберем репер $R = (O_1, O_2, O_3, O_4)$, пространства таким образом, чтобы его первая базисная точка O_1 совпадала с центром симметрии. Тогда, согласно системе (31.1), этот репер преобразуется в репер $R' = (O, O_2', O_3', O_4')$, для которого $\overrightarrow{OO_2'} = -\overrightarrow{OO_2}$, $\overrightarrow{OO_3'} = -\overrightarrow{OO_3}$, $\overrightarrow{OO_4'} = -\overrightarrow{OO_4}$. Матрица перехода от R к R' имеет вид $(R|R') = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Ее определитель равен -1. Ориентации реперов R и R' различны. Центральная симметрия — преобразование второго рода пространства.

Определим в пространстве преобразование симметрии относительно плоскости. Пусть дана плоскость α. Каждой точке N плоскости α поставим в соответствие ту же точку N. Если точка M не принадлежит этой плоскости, то поставим ей в соответствие такую точку M', для которой прямая MM' перпендикулярна плоскости α, а точка P их пересечения — середина отрезка MM' (рис. 143).

Пусть в пространстве выбраны некоторая ось l и перпендикулярная плоскость π. Произведение вращения вокруг оси l и симметрии относительно плоскости π называется *поворотным отражением*.

Предположим, что в пространстве даны плоскость π и некоторый ненулевой вектор $\vec{p}$, который ей параллелен. Произведение параллельного переноса на вектор $\vec{p}$ и симметрии относительно плоскости π называется *скользящей симметрией*. Симметрия относительно плоскости, поворотное и скользящее отражения — движения второго рода.

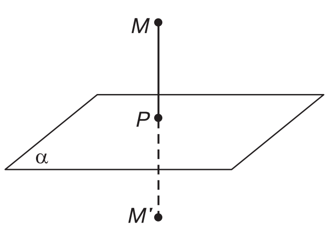


Рис. 143

Как и в случае плоскости, классификация движений пространства проводится по числу их инвариантных точек и прямых. Справедлива следующая теорема, которую мы приводим без доказательства.

Теорема 2. *Любое движение пространства принадлежит к одному из следующих типов*:

1) *движения первого рода — тождественное преобразование, параллельный перенос на ненулевой вектор, вращение относительно оси и винтовое движение*;

2) *движения второго рода — симметрия относительно точки, симметрия относительно плоскости, поворотное отражение с углом* φ, *где* $\varphi \neq 0$, *и скользящее отражение*.

§ 32. ПОДОБИЯ ПЛОСКОСТИ

Мы приступаем к изучению свойств подобий плоскости.

Определение 1. *Преобразование* f *плоскости называется подобием, если для любых двух ее точек* A *и* B *выполнено условие*: $|f(A)f(B)| = k|AB|$, *где* k *— постоянное число, большее нуля*.

Другими словами, подобие плоскости изменяет расстояние между точками плоскости в k раз, причем k — положительное число. Оно называется *коэффициентом подобия*. Ясно также, что движение — частный случай подобия с коэффициентом $k = 1$. Прежде всего, рассмотрим свойства важнейшего частного случая подобия — гомотетии.

Определение 2. *Пусть на плоскости дана точка* O. *Под гомотетией с центром в точке* O *и коэффициентом* m *понимается такое отображение точек плоскости на себя, при котором каждой точке* A *ставится в соответствие точка* A', *удовлетворяющая условию* $\overrightarrow{OA'} = m\overrightarrow{OA}$, *где* m *— постоянное число, отличное от нуля*.

Легко видеть, что гомотетия является преобразованием плоскости. Если $m = 1$, то из определения 2 следует $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA}$, в этом случае гомотетия совпадает с тождественным преобразованием. Если $m = -1$, то $\overrightarrow{OA'} = -\overrightarrow{OA}$ и гомотетия представляет собой центральную симметрию относительно точки O. Гомотетию с центром в точке O и коэффициентом m будем обозначать через H_O^m.

Свойство 1. *Гомотетия* H_O^m *— подобие с коэффициентом* $|m|$.

Доказательство. Возьмем две произвольные точки A и B плоскости. Пусть $A' = H_O^m(A)$, $B' = H_O^m(B)$. Тогда $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'}$. Из определения гомотетии следует, что $\overrightarrow{A'B'} = m\overrightarrow{OB} - m\overrightarrow{OA} = m\overrightarrow{AB}$, поэтому $|A'B'| = |m||AB|$. Свойство доказано.

У этого свойства есть непосредственное следствие.

Следствие. Если A' и B' — образы точек A и B при гомотетии H_O^m, то $\overrightarrow{A'B'} = m\overrightarrow{AB}$.

Свойство 2. *Множество всех гомотетий с фиксированным центром образует группу преобразований.*

Доказательство. Нам достаточно доказать, что произведение двух гомотетий и обратное преобразование к гомотетии с центром в данной точке также являются гомотетией с тем же центром. Пусть H_O^m и H_O^n — две гомотетии с центром в точке O, A — произвольная точка плоскости. Введем обозначения: $A' = H_O^m(A)$, $A'' = H_O^n(A') = H_O^n \circ H_O^m(A)$. Из определения 2 следует, что $\overrightarrow{OA'} = m\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OA''} = n\overrightarrow{OA'}$, поэтому $\overrightarrow{OA''} = mn\overrightarrow{OA}$. Таким образом, произведение $H_O^n \circ H_O^m$ совпадает с гомотетией с центром в точке O и коэффициентом mn:

$$H_O^n \circ H_O^m = H_O^{mn}. \tag{32.1}$$

Пусть дана гомотетия H_O^m. Рассмотрим гомотетию $H_O^{\frac{1}{m}}$ с центром в той же точке O и коэффициентом $\dfrac{1}{m}$. Тогда из доказанного соотношения (32.1) следует, что произведение этих гомотетий совпадает с гомотетией с центром в точке O и коэффициентом 1, т. е., как отмечалось выше, является тождественным преобразованием. Отсюда получим $(H_O^m)^{-1} = H_O^{\frac{1}{m}}$. Свойство доказано.

Рассмотрим некоторую гомотетию с центром в точке O и коэффициентом m. Выберем на плоскости аффинную систему координат так, чтобы ее начало совпадало с центром O. Пусть точка A в этой системе имеет координаты x и y, а ее образ $A' = H_O^m(A)$ — координаты x' и y'. В силу выбора начала системы координаты векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OA'}$ равны $\{x; y\}$ и $\{x'; y'\}$. Так как в силу определения гомотетии $\overrightarrow{OA'} = m\overrightarrow{OA}$, то

$$\begin{cases} x' = mx, \\ y' = my. \end{cases} \tag{32.2}$$

Полученные уравнения представляют собой *аналитическое выражение гомотетии*.

Выясним, что представляют собой образы прямых, отрезков, лучей и углов при гомотетии.

Свойство 3. *Если прямая содержит центр гомотетии, то при этой гомотетии она преобразуется сама в себя, если прямая не содержит центра гомотетии, то переходит в прямую, ей параллельную.*

Доказательство. Пусть дана гомотетия с центром в точке O и коэффициентом m. Выберем аффинную систему координат так, чтобы ее начало совпало с центром O. Тогда аналитическое выражение гомотетии имеет вид (32.2). Рассмотрим прямую l, пусть $Ax + By + C = 0$ — ее уравнение в этой системе координат. Определим уравнение ее образа $l' = H_O^m(l)$. Для этого воспользуемся формулами (32.2), выразим x и y через x' и y' и подставим полученные выражения в уравнение прямой l: $A\dfrac{1}{m}x' + B\dfrac{1}{m}y' + C = 0$, или $Ax + By + mC = 0$. Если $C = 0$, то прямые l и l' совпадают друг с другом, они проходят через центр гомотетии O. Если $C \neq 0$, то точка O не лежит на l и в этом случае, как нетрудно видеть, прямые l и l' параллельны между собой. Свойство доказано.

Из этого свойства можно сделать следующий вывод: *при гомотетии коллинеарные точки преобразуются в коллинеарные*.

Свойство 4. *При гомотетии сохраняется простое отношение трех точек.*

Доказательство. Пусть дана гомотетия H_O^m. Рассмотрим три точки A, B и C, принадлежащие одной прямой. Обозначим их простое отношение (AB, C) через λ. Это означает, что $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$. Пусть $A' = H_O^m(A)$, $B' = H_O^m(B)$, $C' = H_O^m(C)$. Точки A', B', и C' также лежат на одной прямой и, согласно следствию свойства 1, $\overrightarrow{A'C'} = m\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{C'B'} = m\overrightarrow{CB}$. Поэтому $\overrightarrow{A'C'} = \lambda\overrightarrow{C'B'}$ и простое отношение $(A'B', C')$ также равно λ. Свойство доказано.

У этого утверждения есть непосредственное следствие.

Свойство 5. *При гомотетии отрезок преобразуется в отрезок, а луч — в луч.*

При доказательстве этого свойства следует провести те же рассуждения, что и случаях доказательств свойств 4 и 5 движений (§ 29).

Свойство 6. *При гомотетии угол преобразуется в равный ему угол.*

Доказательство. При гомотетии луч преобразуется в луч, а коллинеарные точки — в коллинеарные. Поэтому угол как фигура плоскости преобразуется в угол. Следует доказать, что образ угла по величине совпадает с самим углом. Для этого достаточно проверить, что их косинусы равны между собой. Рассмотрим произвольный угол MON. Пусть он при гомотетии преобразуется в угол $M'O'N'$. Выберем на сторонах угла MON точки A и B. Пусть $A' = H_O^m(A)$ и $B' = H_O^m(B)$, тогда, согласно следствию свойства 1, $\overrightarrow{O'A'} = m\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{O'B'} = m\overrightarrow{OB}$. Так как $\cos\angle AOB = \dfrac{\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}$, $\cos\angle A'O'B' = \dfrac{\overrightarrow{O'A'}\overrightarrow{O'B'}}{|\overrightarrow{O'A'}||\overrightarrow{O'B'}|}$ и $\dfrac{\overrightarrow{O'A'}\overrightarrow{O'B'}}{|\overrightarrow{O'A'}||\overrightarrow{O'B'}|} = \dfrac{m^2\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB}}{m^2|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}$, то $\cos\angle A'O'B' = \cos\angle AOB$. Свойство доказано.

Применим свойства гомотетии к изучению свойств подобий общего вида.

Теорема 1. *Любое подобие p можно представить в виде произведения $d \circ H$, где d — движение плоскости, а H — некоторая гомотетия.*

Доказательство. Пусть k — коэффициент подобия p. Рассмотрим гомотетию $H_O^{\frac{1}{k}}$ с произвольным центром O и коэффициентом $\dfrac{1}{k}$. Легко видеть, что произведение $d = p \circ H_O^{\frac{1}{k}}$ является движением. Действительно, если A и B — две произвольные точки, то $\left|H_O^{\frac{1}{k}}(A)H_O^{\frac{1}{k}}(B)\right| = \dfrac{1}{k}|AB|$ и $\left|p \circ H_O^{\frac{1}{k}}(A)p \circ H_O^{\frac{1}{k}}(B)\right| = k\left|H_O^{\frac{1}{k}}(A)H_O^{\frac{1}{k}}(B)\right|$.

Отсюда следует, что $|d(A)d(B)| = |AB|$. Преобразование $d = p \circ H_O^{\frac{1}{k}}$ сохраняет расстояния между точками. При доказательстве свойства 2 гомотетии мы получили, что $(H_O^k)^{-1} = H_O^{\frac{1}{k}}$, поэтому $d \circ H_O^k = (p \circ H_O^{\frac{1}{k}}) \circ H_O^k = p$. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что *в качестве центра гомотетии O можно выбрать любую точку плоскости, а коэффициент гемотетии равен коэффициенту подобия*. Легко показать, что любое подобие можно представить также в виде произведения $H \circ d$, где H — гомотетия с коэффициентом, равным коэффициенту подобия, а d — некоторое движение.

С помощью теоремы 1 нетрудно выяснить, как при подобии преобразуются прямые, лучи, отрезки и углы. Действительно, как следует из свойств движения и гомотетии, при этих преобразованиях прямая, луч и отрезок преобразуются соответственно в прямую, луч и отрезок, а угол — в равный ему угол. Этому же свойству удовлетворяют образы прямых, лучей, отрезков и углов при произведении этих преобразований. Таким образом, справедливо следствие теоремы 1.

Следствие. *При подобии прямая преобразуется в прямую, луч — в луч, отрезок — в отрезок, а угол — в равный ему угол.*

Определим аналитические выражения подобия. Представим данное подобие p в виде произведения $d \circ H$ движения d и гомотетии H, причем в качестве центра гомотетии примем начало прямоугольной декартовой системы координат. Тогда аналитическое выражение гомотетии, как следует из результатов настоящего параграфа, имеет вид $\begin{cases} x' = kx, \\ y' = ky, \end{cases}$ а аналитическое выражение движения (§ 30) имеет вид $\begin{cases} x' = x\cos\varphi - \varepsilon y\sin\varphi + a, \\ y' = x\sin\varphi + \varepsilon y\cos\varphi + b. \end{cases}$ Чтобы найти формулы произведения $d \circ H$, следует подставить аналитическое выражение гомотетии H в формулы движения d. Получим

$$\begin{cases} x' = kx\cos\varphi - k\varepsilon y\sin\varphi + a, \\ y' = kx\sin\varphi + k\varepsilon y\cos\varphi + b. \end{cases} \tag{32.3}$$

В случае, когда $\varepsilon = 1$, подобие называется *подобием первого рода*. Если $\varepsilon = -1$, то подобие носит название *подобия второго рода*. Если $k = 1$, то подобие является движением. При этом соотношения (32.3) совпадают с формулами движения.

Рассмотрим ортонормированный репер $R = (O, E_1, E_2)$, $O(0;\,0)$, $E_1(1;\,0)$, $E_1(0;\,1)$, определяющий прямоугольную декартову систему координат. При подобии, заданном формулами (32.3), репер R преобразуется в репер $R' = (O', E_1', E_2')$ с базисными точками $O'(a;\,b)$, $E_1'(k\cos\varphi;\, k\sin\varphi)$, $E_2'(-\varepsilon k\sin\varphi;\, \varepsilon k\cos\varphi)$. Легко проверить, что при подобии первого рода ориентации реперов R и R' совпадают, а при подобии второго рода их ориентации различны.

Проведем классификацию подобий. Докажем теорему о числе инвариантных точек подобия.

Теорема 2. *Любое подобие, отличное от движения, имеет одну и только одну инвариантную точку.*

Доказательство. Рассмотрим подобие p плоскости, отличное от движения. Тогда его коэффициент k не совпадает с единицей. Аналитическое выражение подобия имеет вид (32.3). Точка M тогда и только тогда является инвариантной точкой подобия p, когда ее координаты x и y удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x = kx\cos\varphi - k\varepsilon y\sin\varphi + a, \\ y = kx\sin\varphi + k\varepsilon y\cos\varphi + b. \end{cases}$$

Преобразуем ее к виду

$$\begin{cases} k(\cos\varphi - 1)x - k\varepsilon y\sin\varphi + a = 0, \\ k\sin\varphi x + (k\varepsilon\cos\varphi - 1)y + b = 0. \end{cases} \tag{32.4}$$

Система линейных уравнений тогда и только тогда имеет единственное решение, когда ее определитель отличен от нуля. В случае подобия первого рода $\varepsilon = 1$ определитель Δ системы (32.4) равен $\Delta = (k\cos\varphi - 1)^2 + k^2\sin^2\varphi$. Поэтому $\Delta = 0$ в том и только в том случае, когда $k\cos\varphi = 1$ и $k\sin\varphi = 0$. Из второго равенства следует, что $\varphi = k\pi$. Тогда из первого получим $k = 1$ или $k = -1$. Так как коэффициент подобия всегда положителен, то $k \neq -1$. Но данное подобие отлично от движения, поэтому $k \neq 1$. Таким образом, $\Delta \neq 0$. Для подобий первого рода утверждение доказано.

Рассмотрим теперь подобие второго рода. В этом случае $\varepsilon = -1$. Определитель системы (32.4) имеет вид

$$\Delta = (k\cos\varphi - 1)(-k\cos\varphi - 1) - k^2\sin^2\varphi = 1 - k^2.$$

По условию подобие не является движением, поэтому $k \neq 1$. Отсюда следует, что $\Delta \neq 1$, и система (32.4) имеет единственное решение. Теорема доказана полностью.

Следствие. *Если подобие имеет хотя бы две неподвижные точки или не имеет их вообще, то оно является движением.*

Инвариантная точка подобия, отличного от движения, называется его центром.

Проведем классификацию подобий. Пусть p — подобие первого рода, отличное от движения. Согласно доказанной теореме, оно имеет единственную неподвижную точку O. Представим подобие в виде произведения гомотетии H и движения: $p = d \circ H$. В соответствии с выводом, полученным из доказательства теоремы 1, можно считать, что центр O подобия совпадет с центром гомотетии. Легко видеть, что для движения d в этом случае O — также неподвижная точка. Так как p — подобие первого рода, то d —движение также первого рода. По теореме Шаля (§ 30), оно является либо параллельным переносом, либо тождественным преобразованием, либо вращением. Можно считать, что тождественное преобразование представляет собой вращение на нулевой угол. Параллельный перенос не имеет неподвижных точек, поэтому движение d представляет собой вращение плоскости вокруг центра подобия — точки O. Таким образом, подобие первого рода, отличное от движения, является произведением гомотетии и вращения, причем центр подобия служит и центром гомотетии, и центром вращения. Такое подобие называется *центрально-подобным вращением*.

Пусть p — подобие второго рода, отличное от движения. Обозначим через O его центр подобия и представим p в виде произведения гомотетии H и движения d: $p = d \circ H$. Как отмечалось выше, можно считать, что O — центр гомотетии H. Кроме того, O — единственная неподвижная точка движения d. Из классификации движений второго рода, проведенной в § 30, следует, что d совпадает либо с осевой, либо со скользящей симметрией. Но скользящая симметрия не имеет инвариантных точек. Поэтому в данном случае движение d представляет собой осевую симметрию, причем центр O гомотетии H принадлежит оси симметрии d. Таким образом, рассматриваемое подобие представляет собой произведение гомотетии осевой симметрии, центр подобия совпадает с центром гомотетии и лежит на оси симметрии. Такого рода подобие называется *центрально-подобной симметрией*.

Мы провели классификацию подобий первого и второго родов, отличных от движений. Движения, в свою очередь, являются частными случаями подобий. Их классификация была приведена в § 30. Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 3. *Любое подобие первого рода является либо тождественным преобразованием, либо параллельным переносом, либо вращением, либо центрально-подобным вращением, а подобие второго рода — либо скользящей, либо осевой, либо центрально-подобной симметрией.*

Пример 1. *Доказать, что преобразование, заданное аналитическим выражением* $\begin{cases} x' = -6x - 8y - 1, \\ y' = -8x + 6y + 13, \end{cases}$ *является центрально-подобной симметрией. Найти ее центр и ось.*

Решение. Сравним аналитическое выражение данного преобразования с формулами (32.3). Получим $k\cos\varphi = -6$, $k\varepsilon\sin\varphi = 8$, $k\sin\varphi = -8$, $k\varepsilon\cos\varphi = 6$. Отсюда следует, что $\varepsilon = -1$, $k = 10$, $\cos\varphi = -\dfrac{3}{5}$, $\sin\varphi = -\dfrac{4}{5}$. Таким образом, данное преобразование представляет собой подобие второго рода, коэффициент которого отличен от единицы. Согласно теореме 3, оно является центрально-подобной симметрией. Определим ее инвариантную точку. Для этого необходимо найти решение системы линейных уравнений $\begin{cases} x = -6x - 8y - 1, \\ y = -8x + 6y + 13. \end{cases}$ После вычислений получим $x = 1$, $y = -1$. Точка $Q(1; -1)$ служит центром данного подобия, которое, в свою очередь, представляет собой произведение гомотетии с центром в точке Q и коэффициентом $k = 10$ и осевой симметрии, ось которой проходит через эту точку Q.

Для нахождения уравнения оси данной центрально-подобной симметрии удобно выполнить параллельный перенос системы координат так, чтобы ее начало совпало с точкой Q. Формулы такого переноса имеют вид $\begin{cases} X = x - 1, \\ Y = y + 1. \end{cases}$ В этой системе координат аналитическое выражение данного подобия принимает вид

$$\begin{cases} X' = -6X - 8Y, \\ Y' = -8X + 6Y \end{cases} \tag{32.5}$$

(проверьте самостоятельно). Точка $M(X; Y)$ в том и только в том случае принадлежит оси симметрии, когда ее образ при данном подобии, точка $M'(X'; Y')$, подчиняется условию $\overrightarrow{QM'} = \lambda\overrightarrow{QM}$, где $\lambda = 10$ (рис. 144). Отсюда следует, что $X' = \lambda X$, $Y' = \lambda Y$. Заменив в формулах (32.5) X' и Y' на λX и λY, получим

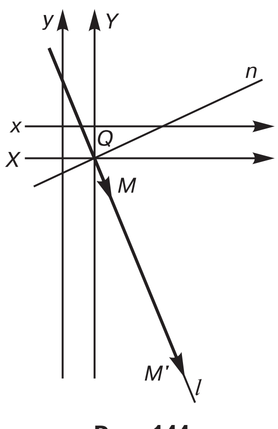


Рис. 144

$$\begin{cases} \lambda X = -6X - 8Y, \\ \lambda Y = -8X + 6Y \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (\lambda + 6)X + 8Y = 0, \\ 8X + (\lambda - 6)Y = 0. \end{cases} \tag{32.6}$$

Мы пришли к однородной системе линейных уравнений, решениями которой являются координаты всех точек, принадлежащих оси l. Поэтому система имеет ненулевые решения. Отсюда следует, что ее определитель равен нулю: $\begin{vmatrix} \lambda+6 & 8 \\ 8 & \lambda-6 \end{vmatrix} = 0$. Раскрыв определитель, получим уравнение $\lambda^2 - 100 = 0$ с решениями $\lambda = 10$ и $\lambda = -10$. Таким образом, существуют два значения λ, для которых система (32.6) вырождена. Одно из них совпадает с коэффициентом подобия, ему соответствует искомая инвариантная прямая l. Второе значение противоположно коэффициенту подобия. Соответствующая ему прямая n также инвариантна относительно данного подобия. Она, как можно проверить, перпендикулярна l и проходит через точку Q (рис. 144). Подставив $\lambda = 10$ в систему (32.6), получим систему, состоящую из двух пропорциональных уравнений $\begin{cases} 16X + 8Y = 0, \\ 8X + 4Y = 0. \end{cases}$ Решения этой системы представляют собой координаты произвольной точки оси l. Поэтому ее уравнение в системе координат QXY имеет вид $2X + Y = 0$. Для определения уравнения оси симметрии в исходной системе координат в полученном уравнении вместо X и Y следует подставить их выражения через x и y по формулам $\begin{cases} x = X + 1, \\ y = Y - 1, \end{cases}$ представляющим собой аналитическое выражение параллельного переноса, обратного к рассматриваемому выше. После соответствующих вычислений получим уравнение $2x + y - 1 = 0$.

Докажем групповое свойство подобия.

Теорема 4. *Подобия плоскости образуют группу преобразований.*

Доказательство. Нам достаточно проверить, что как произведение подобий, так и обратное к подобию преобразование также являются подобиями.

Пусть даны подобия p_1 и p_2, коэффициенты которых равны k_1 и k_2. Рассмотрим две произвольные точки A и B. Пусть $A' = p_1(A)$, $A'' = p_2 \circ p_1(A)$, $B' = p_1(B)$, $B'' = p_1 \circ p_2(B)$. Так как p_1 и p_2 — подобия, то $|A'B'| = |p_2(A')p_2(B')| = k_2|A'B'| = k_2|p_1(A)p_1(B)| = k_2k_1|AB|$.

Таким образом, произведение $p_2 \circ p_1$ представляет собой подобие с коэффициентом k_2k_1.

Рассмотрим теперь некоторое подобие p с коэффициентом k и обозначим через A_1 и B_1 прообразы двух произвольных точек A и B: $A_1 = p^{-1}(A)$, $B_1 = p^{-1}(B)$. Тогда $p(A) = A_1$, $p(B) = B_1$. Так как p — подобие, то $|AB| = k|A_1B_1|$, следовательно, $|A_1B_1| = \frac{1}{k}|AB|$. Отсюда вытекает, что обратное преобразование p^{-1} также является подобием с коэффициентом $\frac{1}{k}$. Теорема доказана.

Как было показано в § 28, движения плоскости образуют группу преобразований. В то же время, движения плоскости — подобия с коэффициентом, равным единице. Поэтому *движения образуют подгруппу в группе подобий*.

Еще одними примером подгруппы в группе подобий является *множество гомотетий с фиксированным центром*. Согласно свойству 2 настоящего параграфа, это множество образует группу преобразований плоскости, т. е. подгруппу в группе подобий. Нетрудно показать, что тождественные преобразования, вращения и центрально-подобные вращения составляют подгруппы в группе подобий, а подобия второго рода подгруппу не образуют (проверьте самостоятельно).

Введем следующее определение.

Определение 3. *Две фигуры F и F' называются подобными, если существует такое преобразование подобия p, при котором $F' = p(F)$.*

Как мы видим, подобие фигур аналогично понятию их геометрического равенства, которое мы рассматривали в § 28. В школьном курсе геометрии фундаментальное значение имеют свойства подобных треугольников. Докажем следующую теорему.

Теорема 5. *Два треугольника ABC и $A'B'C'$ подобны между собой в том и только в том случае, когда*

$$\begin{gathered}\angle A = \angle A', \quad \angle B = \angle B', \quad \angle C = \angle C', \\ |AB| : |A'B'| = |BC| : |B'C'| = |AC| : |A'C'|.\end{gathered} \tag{32.7}$$

Доказательство. Пусть существует преобразование подобия p, при котором $p(A) = A'$, $p(B) = B'$, $p(C) = C'$. Из свойств подобий следует, что углы преобразуются в равные углы, а отношение соответствующих отрезков равно коэффициенту подобия. Поэтому для подобных треугольников справедливы соотношения (32.7).

Пускай теперь даны треугольники ABC и $A'B'C'$, для которых выполнены равенства (32.7). Рассмотрим гомотетию H_A^k с центром в точке A и коэффициентом $k = \dfrac{|A'B'|}{|AB|}$. Обозначим через B'' и C'' образы вершин B и C при этой гомотетии: $B'' = H_A^k(B)$, $C'' = H_A^k(C)$ (рис. 145). Тогда $|AB''| : |AB| = |AC''| : |AC| = |B''C''| : |BC| = k$. Из равенств (32.7) следует, что $|AB''| = |A'B'|$, $|AC''| = |A'C'|$, $|B''C''| = |B'C'|$. При гомотетии сохраняются углы треугольника. Поэтому $\angle B'' = \angle B'$, $\angle C'' = \angle C'$. Соответственные стороны и углы треугольников $A'B'C'$ и $A''B''C''$ равны между собой. Согласно теореме 4, § 28, эти треугольники тоже равны. Отсюда следует, что существует движение d, переводящее один треугольник в другой: $d(A'') = A'$, $d(B'') = B'$, $d(C'') = C'$. Следовательно, подобие $p = d \circ H_A^k$ переводит треугольник ABC в треугольник $A'B'C'$. Теорема доказана.

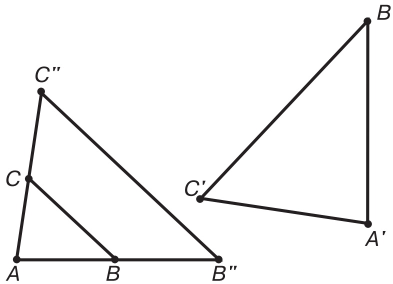


Рис. 145

В школьных учебниках по определению под подобными треугольниками понимаются те из них, которые удовлетворяют условиям (32.7). Под подобными же многоугольниками понимаются такие, у которых соответственные стороны пропорциональны, а соответственные углы равны между собой. Можно доказать, что и в этом случае существует подобие, переводящее один многоугольник во второй.

Выясним, при каких условиях подобны две кривые второго порядка. Докажем следующую теорему.

Теорема 6. *Любые две параболы подобны между собой.*

Доказательство. Рассмотрим две параболы γ_1 и γ_2. Тогда, как было доказано в § 18, существуют ортонормированные реперы $R_1 = (O_1, O_2, O_3)$ и $R_2 = (Q_1, Q_2, Q_3)$, в которых их уравнения имеют канонический вид: $y = 2p_1x$ для γ_1 и $y = 2p_2x$ для γ_2. Как следует из основного свойства движений (§ 28), существует движение d, которое переводит репер R_2 в R_1. При этом парабола γ_2 преобразуется в параболу γ', которая в репере R_1 имеет то же уравнение $y = 2p_2x$, что и парабола γ_2 в репере R_2 (рис. 146).

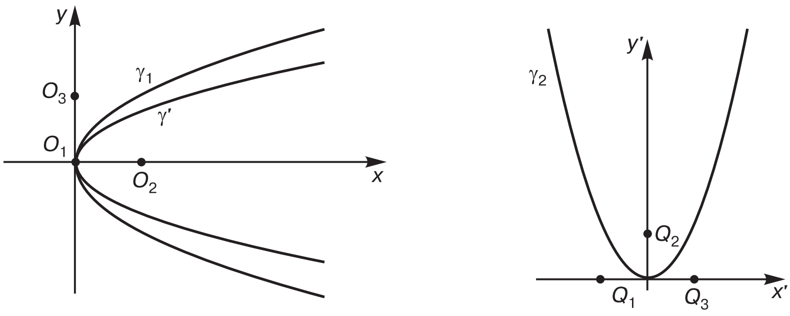


Рис. 146

Рассмотрим гомотетию $H_{O_1}^k$ с центром в точке O_1 и коэффициентом $k = \dfrac{p_1}{p_2}$. Пусть $\gamma'' = H_{O_1}^k(\gamma')$. Легко видеть, что уравнение γ'' в репере R_1 имеет вид $y = 2p_1x$. Поэтому параболы γ'' и γ_1 совпадают друг с другом. Таким образом, подобие $p = H_{O_1}^k \circ d$ переводит γ_2 в γ_1. Теорема доказана.

Можно показать, что два эллипса (гиперболы) подобны друг другу в том и только в том случае, когда совпадают их эксцентриситеты.

Понятия гомотетии и подобия пространства вводятся точно так же, как и в случае плоскости. Их свойства в пространстве во многом совпадают со свойствами этих преобразований на плоскости. При гомотетиях и подобиях пространства прямые преобразуются в прямые, отрезки и лучи — в отрезки и лучи, углы — в равные углы. Подобия пространства являются произведением гомотетии и движения. Они образуют группу преобразований. Доказательства этих свойств проводятся так же, как и в случае плоскости. Можно показать, что при подобии пространства плоскости преобразуются в плоскости, а двугранные углы — в равные двугранные углы. Доказательства этих утверждений проводятся аналогично доказательствам в случае движений пространства.

§ 33. ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВ ДВИЖЕНИЯ И ПОДОБИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

В настоящем параграфе мы рассмотрим задачи элементарной геометрии, при решении которых удобно использовать свойства различных видов движений и подобий. При этом мы не будем рассматривать задачи на построение циркулем и линейкой, для решения которых применяются указанные преобразования плоскости. Их методы решения будут разобраны в следующей главе пособия.

Трудно дать конкретные рекомендации по использованию геометрических преобразований для решения задач элементарной геометрии. Общие же соображения таковы: геометрические преобразования применяются для упрощения задачи, для отыскания закономерностей, позволяющих определить решение. При этом рассматривается образ либо всей фигуры, либо ее части при существующем преобразовании. Применяя движение или подобие при решении задачи элементарной геометрии, следует помнить, что оно преобразует элементы фигуры в соответствующие элементы ее образа. Например, высоты треугольника преобразуются в высоты, центр вписанной окружности — в центр вписанной окружности образа и т. д.

Рассмотрим примеры задач, для решения которых удобно использовать параллельный перенос.

Пример 1. *Даны две пересекающиеся окружности равных радиусов, расстояние между центрами которых равно m. Прямая l, параллельная линии центров, пересекает первую окружность в точках A и B, а вторую — в точках C и D (лучи AB и CD сонаправлены). Найти длину отрезка AC.*

Решение. Пусть ω_1 и ω_2 — данные окружности (рис. 147). Рассмотрим параллельный перенос $T_{\vec{a}}$ на вектор $\vec{a} = \overrightarrow{O_1O_2}$, где O_1 и O_2 — центры окружностей. По условию, прямая l параллельна вектору $\vec{a}$, лучи AB и CD которой сонаправлены, $A \in \omega_1$, $C \in \omega_2 = T_{\vec{a}}(\omega_1)$. Отсюда следует, что $C = T_{\vec{a}}(\omega_1)$. Поэтому $|AC| = |\vec{a}| = m$.

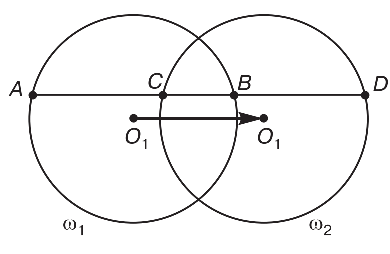


Рис. 147

Пример 2. *Доказать, что в трапеции разность длин оснований по модулю больше абсолютной величины разности длин боковых сторон.*

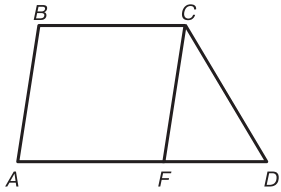


Рис. 148

Решение. Пусть $ABCD$ — данная трапеция (рис. 148). Осуществим параллельный перенос стороны AB на вектор $\overrightarrow{BC}$. Получим отрезок CF. Четырехугольник $ABCF$ — параллелограмм. Поэтому $|AF| = |BC|$, $|FC| = |AB|$ и $|DF| = |AD| - |BC|$. Так как в любом треугольнике модуль разности двух сторон меньше третьей, то $|AD| - |BC| > ||AB| - |CD||$. Утверждение доказано.

Приведем пример решения задачи, в которой удобно использовать свойства вращения плоскости.

Пример 3. *На прямой l даны три точки A, B и C, причем точка B лежит между A и C. На отрезках AB и BC построены равносторонние треугольники ABP и BCQ так, что вершины P и Q лежат в одной полуплоскости относительно прямой l. Обозначим через M середину отрезка AQ, а через N — середину CP. Доказать, что треугольник BMN также является равносторонним.*

Решение. Пусть ABP и BCQ — данные треугольники (рис. 149). Рассмотрим вращение вокруг точки B на угол $\varphi = -\dfrac{\pi}{3}$. При этом преобразовании точки A и Q переходят соответственно в точки P и C. Поэтому образом отрезка AQ является отрезок PC. Так как при движении середина отрезка преобразуется в середину, то образом точки M при указанном вращении служит точка N. Отсюда следует, что треугольник BMN — равносторонний.

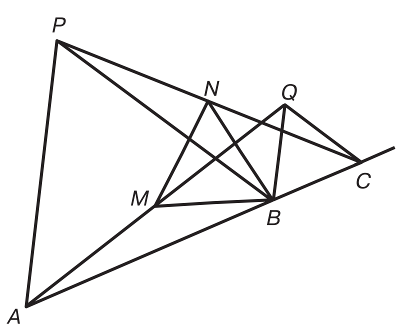


Рис. 149

Рассмотрим решения задач, в которых используется осевая симметрия.

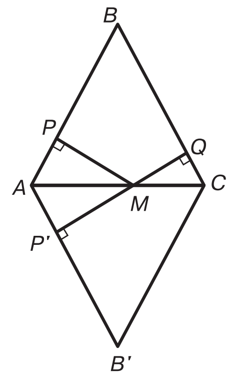


Рис. 150

Пример 4. *Доказать, что сумма расстояний от любой точки основания равнобедренного треугольника до боковых сторон равна длине высоты, опущенной из вершины основания на боковую сторону.*

Решение. Пусть ABC — данный треугольник, M — произвольная точка его основания AC, MP и MQ — перпендикуляры, опущенные на стороны AB и BC (рис. 150). Из равенства углов $\angle BAC$ и $\angle BCA$ при основании треугольника следует, что другие острые углы прямоугольных треугольников APM и MCQ также равны между собой:

$$\angle PMA = \angle QMC. \tag{33.1}$$

Рассмотрим осевую симметрию с осью AC. Точка B преобразуется в B', P — в P', сторона AB — в сторону AB'. Из свойств осевой симметрии следует, что $\angle PMA = \angle AMP'$. Поэтому, учитывая равенство (33.1), имеем: $\angle AMP' = \angle QMC$. Отсюда вытекает: точки P', M и Q лежат на одной прямой. Отрезок $P'Q$ — общий перпендикуляр параллельных прямых AB и AB'. Поэтому его длина h равна высоте треугольника, опущенной на боковую сторону. Но $|PM| = |P'M|$, следовательно, $|PM| + |MQ| = |P'Q| = h$. Утверждение доказано.

Пример 5. *Дан треугольник ABC, CL — биссектриса его внешнего угла, M — произвольная точка луча CL. Доказать, что $|MA| + |MB| > |CA| + |CB|$.*

Решение. Пусть ABC — данный треугольник. Рассмотрим точку B', симметричную B относительно биссектрисы CL. Так как биссектриса является осью симметрии угла, то точка B' принадлежит FC продолжению стороны AC треугольника (рис. 151). Из свойств симметрии следует: $|AM| + |BM| = |AM| + |MB'|$,

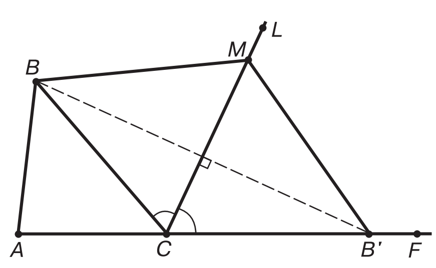


Рис. 151

$|CA| + |CB| = |CA| + |CB'| = |AB'|$. Из неравенств, связывающих длины сторон треугольника AMB', вытекает: $|AM| + |MB'| > |AB'|$. Таким образом, $|AM| + |BM| > |CA| + |CB|$. Утверждение доказано.

Рассмотрим приложения свойств гомотетии и подобия к решению задач элементарной геометрии.

Прежде всего, рассмотрим задачу, которая была решена в параграфе 12. Но здесь будут продемонстрированы приложения свойства преобразования подобия при решении задачи.

Пример 6 (лемма о трапеции). *Дан четырехугольник $ABCD$, M и N середины сторон DC и AB, Q — точка пересечения прямых AB и CD. Доказать, что этот четырехугольник в том и только в том случае является трапецией, когда точки M, N и Q лежат на одной прямой.*

Решение. Пусть $ABCD$ — данная трапеция (рис. 152), основания BC и AD параллельны между собой, точка Q совпадает с точкой пересечения прямых, содержащих боковые стороны AB и CD, M и N — соответственно середины сторон BC и AD. Тогда треугольники AQD и BQC подобны друг другу, а коэффициент k их подобия равен $k = \dfrac{b}{a}$, где a и b — длины сторон BC и AD. Легко видеть, что отрезок BC преобразуется в AD при гомотетии H_Q^k с центром в точке Q и коэффициентом k. При этой гомотетии середина отрезка преобразуется в середину отрезка, поэтому $N = H_Q^k(M)$. Гомотетичные точки лежат на одной прямой, следовательно, M, N и Q — коллинеарные.

Обратно. Предположим, что четырехугольник $ABCD$ не является трапецией, но точки M, N и Q — коллинеарные (рис. 153).

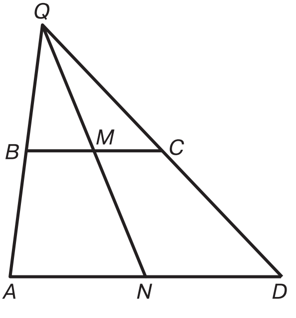


Рис. 152

Рассмотрим гомотетию H_Q^k с центром в точке Q и коэффициентом k, равным $k = \dfrac{|QN|}{|QM|}$. При этой гомотетии точка M преобразуется в точку N, вершины B и C — в точки $B' = H_Q^k(B)$ и $C' = H_Q^k(C)$, которые соответственно лежат на прямых AB и CD и не совпадают с точками A и D. В силу свойств гомотетии отрезок $B'C'$ параллелен BC и точка N — его середина. Отсюда следует, что треугольник $AB'N$ равен треугольнику

NDC'. Угол $B'AN$ соответствует углу $C'DN$. Поэтому они равны между собой. Но $\angle B'AN$ — внешний угол треугольника AQD, а $\angle C'DN$ — его внутренний угол. Мы пришли к противоречию, так как внешний угол треугольника больше любого внутреннего, с ним не смежного. Отсюда следует, что точки B' и C' совпадают с точками A и D, а отрезок DC параллелен AB. Утверждение доказано.

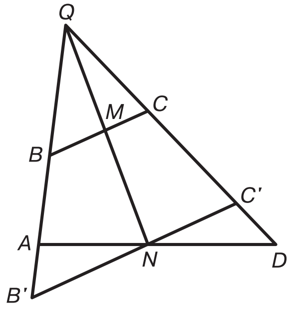


Рис. 153

Пример 7. *Даны две окружности* ω_1 *и* ω_2, *которые касаются внутренним образом в точке* A. *Через произвольную точку* K *внутренней окружности* ω_2 *проведена ее касательная, которая пересекает* ω_1 *в точках* B *и* C. *Доказать, что* AK *— биссектриса треугольника* ABC.

Решение. Пусть ω_1 и ω_2 — данные окружности (рис. 154). Тогда они гомотетичны друг другу, причем центр гомотетии H, переводящей ω_1 в ω_2, совпадает с точкой A, а ее коэффициент равен $\frac{r_1}{r_2}$, где r_1 и r_2 — соответственно радиусы окружностей ω_1 и ω_2 (проверьте это утверждение самостоятельно). При этой гомотетии точки B и C окружности ω_1 преобразуются в точки $B' = H(B)$ и $C' = H(C)$, принадлежащие ω_2. Так как A — центр гомотетии, то точки B, B', A и C, C', A лежат на одних прямых. В силу свойств гомотетии хорда $B'C'$ окружности ω_2 параллельна касательной BC. Поэтому точка K касания — середина дуги $B'C'$ окружности ω_2. Отсюда следует, что $\angle B'AK = \angle KAC'$. Утверждение доказано.

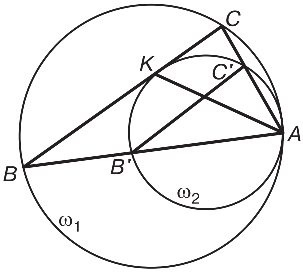


Рис. 154

§ 34. АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Изученные в предыдущих параграфах движения и подобия плоскости являются частными случаями более общего класса преобразований.

Определение 1. *Преобразование плоскости называется аффинным, если оно переводит коллинеарные точки в коллинеарные и сохраняет простое отношение точек.*

Таким образом, преобразование f в том и только в том случае аффинное, когда для любых трех коллинеарных точек A, B и C выполнены условия:

1) точки $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ лежат на одной прямой;

2) $(f(A), f(B), f(C)) = (AB, C)$.

Из утверждений, доказанных в предыдущих параграфах, следует, что движения и подобия плоскости — аффинные преобразования.

Рассмотрим свойства аффинных преобразований.

Свойство 1. *При аффинном преобразовании точки, не лежащие на одной прямой, преобразуются в точки, не лежащие на одной прямой.*

Доказательство. Предположим, что неколлинеарные точки A, B и C при аффинном преобразовании f перешли в точки $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$, которые принадлежат одной прямой l' (рис. 155). Рассмотрим произвольную точку M плоскости. Так как A, B и C расположены в вершинах треугольника, то существует прямая, проходящая через M и пересекающая две его стороны. Пусть она пересекает сторону AB в точке P, а сторону BC — в точке Q. Обозначим через P' и Q' образы этих точек при преобразовании f: $P' = f(P)$, $Q' = f(Q)$. Точки A, B и P лежат на одной прямой, поэтому A', B' и P' также расположены на одной прямой. Так как $A' \in l'$, $B' \in l'$, то $P' \in l'$. Аналогично доказывается, что точка Q' также принадлежит прямой l'. В то же время, точка M расположена на прямой PQ. Следовательно, точка $M' = f(M)$ лежит на прямой $P'Q'$, т. е. $M' \in l'$. Мы показали, что образ любой точки плоскости принадлежит прямой l', поэтому отображение f не является преобразованием, так как оно не сюръективно. Предположение о коллинеарности точек A, B и C привело к противоречию. Свойство доказано.

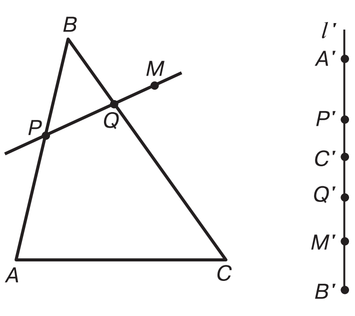


Рис. 155

Свойство 2. *При аффинном преобразовании аффинный репер отображается в аффинный репер.*

Доказательство этого предложения непосредственно вытекает из свойства 1.

Свойство 3. *При аффинном преобразовании образом прямой линии является прямая линия.*

Доказательство. Пусть дано аффинное преобразование f. Рассмотрим произвольную прямую l, A и B — ее две точки. Обозначим через A' и B' их образы при данном преобразовании: $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, а через l' — прямую $A'B'$. Докажем, что $f(l) = l'$. Рассмотрим произвольную точку C прямой l. Как следует из определения аффинного преобразования, точка $C' = f(C)$ принадлежит l'. Поэтому $f(l) \subset l'$. Проверим, что прообраз любой точки прямой l' лежит на l. Выберем на l' произвольную точку M' (рис. 156). Пусть λ — простое отношение $\lambda = (A'B', M')$. На прямой l существует единственная точка M, для которой $(AB, M) = \lambda$. В силу свойств аффинного преобразования образ $f(M)$ лежит на прямой $A'B'$, которая совпадает с l', и $(AB, f(M)) = \lambda$. Поэтому $f(M) = M'$. Утверждение доказано.

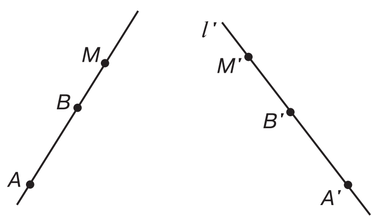


Рис. 156

Свойство 4. *При аффинном преобразовании параллельные прямые преобразуются в параллельные прямые.*

Доказательство. Рассмотрим параллельные прямые m и n. Обозначим через m' и n' их образы при аффинном преобразовании f. Предположим, что m' и n' пересекаются в точке P'. Тогда прообраз P этой точки принадлежит как прямой m, так и прямой n. Таким образом, m и n пересекаются в точке P, что противоречит условию. Свойство доказано.

Свойство 5. *При аффинном преобразовании отрезок переходит в отрезок, луч в луч, угол в угол.*

Доказательство. Пусть f — аффинное преобразование. Рассмотрим отрезок AB. Пусть $A' = f(A)$, $B' = f(B)$. Точка C тогда и только тогда принадлежит этому отрезку, когда $(AB, C) > 0$. Если $C' = f(C)$, то из определения аффинного преобразования следует, что C' принадлежит прямой $A'B'$ и $(AB, C) = (A'B', C')$. Следовательно, $(A'B', C') > 0$. Поэтому точка C' лежит на отрезке $A'B'$ и $f([AB]) \subset [A'B']$.

Пускай теперь M' — точка отрезка $A'B'$, а M — ее прообраз. Согласно свойству 3 точка M лежит на прямой AB. Кроме того, $(AB, M) = (A'B', M') > 0$. Поэтому точка M лежит на отрезке AB. Таким образом, $f([AB]) = [A'B']$.

Аналогично показывается, что образом луча при аффинном преобразовании служит луч. Доказательство проведите самостоятельно. Два луча, имеющие общее начало и не лежащие на одной прямой, образуют угол. Из доказанных свойств вытекает, что угол при аффинном преобразовании переходит в угол. Свойство доказано.

Проверим групповое свойство аффинных преобразований.

Теорема 1. *Множество аффинных преобразований плоскости образует группу.*

Доказательство. Необходимо проверить, что произведение аффинных преобразований плоскости и обратное к аффинному преобразованию являются также аффинными преобразованиями.

Пусть f и g — аффинные преобразования, A, B и C — коллинеарные точки. Тогда точки $g(A)$, $g(B)$, $g(C)$ также лежат на одной прямой. Отсюда следует, что точки $f(g(A))$, $f(g(B))$, $f(g(C))$ — коллинеарные. Мы проверили, что произведение аффинных преобразований сохраняет коллинеарность точек. В силу того что и f, и g не меняют простого отношения точек, получим $(AB, C) = (g(A),$ $g(B), g(C)) = (f(g(A)), f(g(B)), f(g(C)))$. Отсюда следует, что преобразование $f \circ g$ сохраняет простое отношение точек.

Пусть f — произвольное аффинное преобразование, A, B и C — коллинеарные точки. Введем обозначения для их прообразов: $A_1 = f^{-1}(A)$, $B_1 = f^{-1}(B)$ и $C_1 = f^{-1}(C)$. Предположим, что точки A_1, B_1, C_1 не лежат на одной прямой. Но $A = f(A_1)$, $B = f(B_1)$, $C = f(C_1)$. Отсюда и из свойства 1 следует, что точки A, B и C также не коллинеарные. Мы получили противоречие, которое доказывает коллинеарность точек A_1, B_1и C_1. Рассмотрим их простое отношение. Из определения аффинного преобразования следует, что $(A_1B_1, C_1) = (f(A)f(B), f(C))$. Поэтому $(A_1B_1, C_1) = (AB, C)$. Обратное преобразование f^{-1} также является аффинным. Теорема доказана.

Как ранее отмечалось, движения и подобия являются частными случаями аффинных преобразований. Очевидно следующее утверждение.

Следствие. *Движения и подобия составляют подгруппы в группе аффинных преобразований.*

Группа аффинных преобразований, как будет вытекать из следующего утверждения, гораздо шире группы подобий. Она содержит подгруппы, отличные от подобий.

Докажем основную теорему аффинных преобразований.

Теорема 2 (основное свойство аффинных преобразований). *Пусть даны два аффинных репера $R_1 = (O_1, O_2, O_3)$ и $R_2 = (O_1', O_2', O_3')$. Существует единственное аффинное преобразование, переводящее репер R_1 в R_2.*

Доказательство. Установим существование такого преобразования. Пусть M — произвольная точка плоскости. Обозначим ее координаты относительно репера R_1 через x и y: $M(x;\ y)_1$. Поставим ей в соответствие точку $M' = f(M)$, координаты которой относительно репера R_2 также равны x и y: $M'(x;\ y)_2$. Очевидно, что такое соответствие задает преобразование f плоскости. Рассмотрим коллинеарные точки A, B и C, введем обозначения для их координат относительно репера R_1: $A(x_1;\ y_1)_1$, $B(x_2;\ y_2)_1$, $C(x_3;\ y_3)_1$. Пусть $\lambda = (AB, C)$, тогда $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$. Поэтому координаты векторов $\overrightarrow{AC}\{x_3 - x_1; y_3 - y_1\}_1$, $\overrightarrow{CB}\{x_2 - x_3; y_2 - y_3\}_1$ в репере R_1 пропорциональны с коэффициентом λ. Пусть $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$. Запишем координаты этих точек относительно репера R_2: $A'(x_1;\ y_1)_2$, $B'(x_2;\ y_2)_2$, $C'(x_3;\ y_3)_2$. Тогда $\overrightarrow{A'C'}\{x_3 - x_1; y_3 - y_1\}_2$, $\overrightarrow{C'B'}\{x_2 - x_3; y_2 - y_3\}_2$. Координаты этих векторов пропорциональны с тем же коэффициентом λ. Следовательно, $\overrightarrow{A'C'} = \lambda\overrightarrow{C'B'}$. Таким образом, точки A', B', C' лежат на одной прямой и $(A'B', C') = \lambda$. Мы доказали, что f — аффинное преобразование.

Проверим единственность. Пусть существуют два аффинных преобразования g_1 и g_2, удовлетворяющих условиям

$$g_1(O_1) = g_2(O_1) = O_1', \quad g_1(O_2) = g_2(O_2) = O_2', \quad g_1(O_3) = g_2(O_3) = O_3'. \tag{34.1}$$

Рассмотрим произвольную точку M плоскости и проведем через нее прямую, пересекающую прямые O_1O_2 и O_1O_3 соответственно в точках P и Q (рис. 157). Преобразования g_1 и g_2 — аффинные. В силу равенств (34.1) точки $g_1(P)$ и $g_2(P)$ принадлежат прямой $O_1'O_2'$. Обозначим (O_1O_2, P) через λ. Тогда $(O_1'O_2', g_1(P)) = (O_1'O_2', g_2(P)) = \lambda$. Так как на прямой $O_1'O_2'$ существует единственная точка, удовлетворяющая полученным равенствам, то $g_1(P) = g_2(P) = P'$. Аналогично доказывается, что $g_1(Q) = g_2(Q) = Q'$. Обозначим простое отношение (PQ, M) через μ. Точки $g_1(M)$ и $g_2(M)$ лежат на прямой $P'Q'$, поэтому $(P'Q', g_1(M)) =$

$= (P'Q', g_2(M)) = \mu$. Таким образом, как точка $g_1(M)$, так и точка $g_2(M)$ делят отрезок $P'Q'$ в одном и том же отношении μ. Следовательно, для произвольной точки M выполнено $g_1(M) = g_2(M)$. Преобразования g_1 и g_2 совпадают друг с другом. Теорема доказана.

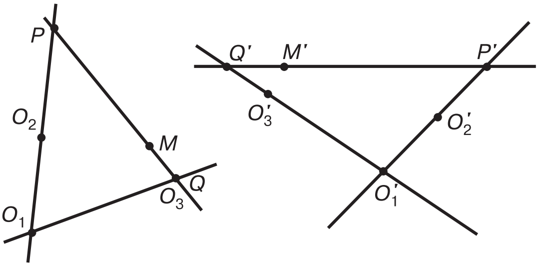


Рис. 157

Следствие 1. *Если аффинное преобразование g отображает репер R_1 в репер R_2, то каждой точке M с координатами x и y относительно репера R_1 ставится в соответствие точка $g(M)$ с теми же координатами относительно репера R_2.*

Действительно, при доказательстве теоремы 2 мы построили преобразование f, удовлетворяющее указанному свойству. В силу условия единственности $f = g$.

Следствие 2. *Если аффинное преобразование f имеет три неподвижные точки, не принадлежащие одной прямой, то оно совпадает с тождественным преобразованием.*

В самом деле, если A, B и C — инвариантные точки аффинного преобразования f, не лежащие на одной прямой, то они образуют некоторый репер R. Поэтому $f(R) = R$. В то же время, если e — тождественное преобразование, то $e(R) = R$. Поэтому $f = e$.

Теорема 2 позволяет определить любое аффинное преобразование плоскости. Для этого достаточно задать два соответствующих друг другу аффинных репера.

Теорема 3. *Даны реперы R_1 и R_2, R_1' и R_2' — их образы при некотором аффинном преобразовании f. Тогда ориентации реперов R_1 и R_1' совпадают в том и только в том случае, когда совпадают ориентации реперов R_2 и R_2'.*

Доказательство этой теоремы дословно совпадает с доказательством соответствующего утверждения § 30, поэтому мы его опускаем. Теорема 3 обосновывает корректность следующего определения.

Определение 2. *Аффинное преобразование f называется аффинным преобразованием первого рода, если ориентация любого репера R совпадает с ориентацией его образа, репера $R' = f(R)$. Оно называется аффинным преобразованием второго рода, если ориентации реперов R и R' различны.*

Выведем формулы аффинного преобразования. Пусть такое преобразование f переводит репер $R_1 = (O_1, O_2, O_3)$ в репер $R_2 = (O_1', O_2', O_3')$. Известны координаты точки O_1' в репере R_1 и векторов $\vec{e}_1{}' = \overrightarrow{O_1'O_2'}$ и $\vec{e}_2{}' = \overrightarrow{O_1'O_3'}$ в базисе $\vec{e}_1 = \overrightarrow{O_1O_2}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{O_1O_3}$: $O_1'(a; b)_1$, $\vec{e}_1{}'\{a_1; a_2\}_1$, $\vec{e}_2{}'\{b_1; b_2\}_1$. Напомним формулы перехода от одной аффинной системы координат к другой, полученные нами в § 9. Если точка P имеет координаты $(u_1; u_2)$ относительно репера R_1 и $(v_1; v_2)$ относительно репера R_2, то числа u_i, v_i, a_i, b_i $(i = 1, 2)$, a и b связаны между собой равенствами $\begin{cases} u_1 = a_1v_1 + b_1v_2 + a, \\ u_2 = a_2v_1 + b_2v_2 + b. \end{cases}$ При этом матрица $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ невырожденна, а ее определитель больше нуля в том случае, когда ориентации реперов R_1 и R_2 одинаковы, и меньше нуля, если их ориентации различны. Выберем произвольную точку M плоскости и обозначим через M' ее образ при преобразовании f: $M' = f(M)$. Пусть координаты точки M относительно репера R_1 равны $(x; y)_1$, а ее образ M' имеет в R_1 координаты $(x'; y')_1$. Тогда из следствия теоремы 2 вытекает, что координаты точки M' относительно репера R_2 равны $(x; y)_2$. Применим формулы перехода от одной аффинной системы координат к другой для точки M'. При этом в указанных формулах u_1 и u_2 следует заменить на x' и y', а v_1 и v_2 — на x и y:

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + a, \\ y' = a_2x + b_2y + b, \end{cases} \tag{34.2}$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{34.3}$$

Здесь $\Delta > 0$, если f — аффинное преобразование первого рода и $\Delta < 0$, если f имеет второй род. Соотношения (34.2) служат аналитическим выражением аффинного преобразования. Легко видеть, что аналитические выражения движений и подобий представляют собой частные случаи формул (34.2).

Рассмотрим свойства одного частного вида аффинных преобразований, крайне важного для приложений.

Определение 3. *Аффинное преобразование называется перспективно-аффинным или родством, если оно отлично от тождественного и имеет по крайней мере две инвариантные точки.*

Приведем доказательство следующей теоремы.

Теорема 4. *Если f — перспективно-аффинное преобразование, A и B — его инвариантные точки, то все точки прямой AB неподвижны, а любая инвариантная точка преобразования f принадлежит прямой AB.*

Доказательство. Пусть M — произвольная точка прямой AB. Из определения аффинного преобразования и его свойств, доказанных выше, вытекает, что $f(M)$ принадлежит прямой, проходящей через точки $f(A)$ и $f(B)$, причем $(AB, M) = (f(A)f(B), f(M))$. По условию теоремы $f(A) = A$, $f(B) = B$. Поэтому точка $f(M)$ принадлежит прямой AB и $(AB, M) = (AB, f(M))$. Но на прямой AB существует единственная точка, делящая отрезок AB в данном отношении. Отсюда следует, что $f(M) = M$. Прямая AB целиком состоит из инвариантных точек.

Предположим, что существует такая точка C, которая не принадлежит прямой AB и для которой $f(C) = C$. Тогда из следствия 2 теоремы 2 вытекает, что преобразование f совпадает с тождественным. Мы получили противоречие определению 1. Теорема доказана.

Определение 4. *Прямая инвариантных точек перспективно-аффинного преобразования называется его осью.*

Пример 1. *Даны аналитические выражения аффинного преобразования f:*

$$\begin{cases} x' = 3x + 6y + 2, \\ y' = x + 4y + 1. \end{cases}$$

Выяснить, является ли оно перспективно-аффинным. Если да, то определить уравнение его оси.

Решение. Найдем неподвижные точки данного преобразования. Их координаты совпадают с решениями системы уравнений $\begin{cases} x = 3x + 6y + 2, \\ y = x + 4y + 1. \end{cases}$ Преобразуем ее к виду $\begin{cases} 2x + 6y + 2 = 0, \\ x + 3y + 1 = 0. \end{cases}$ Мы получили систему, которая имеет бесконечно много решений. Точки, координаты которых удовлетворяют ее уравнениям, принадлежат прямой $x + 3y + 1 = 0$. Таким образом, данное преобразование — перспективно-аффинное, а прямая $x + 3y + 1 = 0$ служит его осью.

Выведем формулы перспективно-аффинного преобразования. Пусть f — родство с осью l. Выберем аффинный репер $R_1 = (O_1, O_2, O_3)$ так, чтобы точки O_1 и O_2 принадлежали оси l. Аналитические выражения аффинного преобразования f имеют вид $\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + a, \\ y' = a_2x + b_2y + b. \end{cases}$ По условию, $f(O_1) = O_1$, $f(O_2) = O_2$. Подставив координаты точек $O_1(0; 0)$, $O_2(1; 0)$ в аналитические выражения преобразования f, получим $a = b = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$. Таким образом, аналитическое выражение перспективно-аффинного преобразования в выбранном репере имеет вид

$$\begin{cases} x' = x + b_1y, \\ y' = b_2y. \end{cases} \tag{34.4}$$

Полученные формулы используем для доказательства следующей леммы.

Лемма. *Пусть f — перспективно-аффинное преобразование. Тогда существует некоторый постоянный вектор $\vec{p}$ такой, что для произвольной точки M плоскости вектор $\overrightarrow{MM'}$, где $M' = f(M)$, ему коллинеарен.*

Доказательство. Выберем аффинную систему координат так, чтобы ее ось абсцисс совпадала с осью данного преобразования. Тогда формулы преобразования f имеют вид (34.4). Рассмотрим произвольную точку M с координатами x и y. Из (34.4) следует, что ее образ $M' = f(M)$ имеет следующие координаты: $x' = x + b_1y$, $y' = b_2y$. Отсюда координаты вектора $\overrightarrow{MM'}$ равны $\{b_1y; (b_2 - 1)y\}$. При любых x и y он коллинеарен вектору $\vec{p}\{b_1; b_2 - 1\}$. Лемма доказана.

Лемма позволяет обосновать следующие свойства перспективно-аффинного преобразования.

Свойство 1. *Соответствующие друг другу точки при перспективно-аффинном преобразовании лежат на параллельных прямых.*

Доказательство непосредственно вытекает из леммы. Действительно, если M' и N' — образы точек M и N при данном родстве, то векторы $\overrightarrow{MM'}$ и $\overrightarrow{NN'}$ коллинеарны.

Свойство 2. *Если f — перспективно-аффинное преобразование, M — произвольная точка плоскости, не принадлежащая его оси, M' — ее образ при этом преобразовании, то прямая MM' инвариантна при преобразовании f.*

Доказательство. Возьмем произвольную точку N прямой MM'. Пусть $N' = f(N)$. Согласно лемме, векторы $\overrightarrow{MM'}$ и $\overrightarrow{NN'}$ параллельны между собой. Поэтому точка N' принадлежит прямой MM'. Точки прямой MM' преобразуются в точки этой же прямой. Она инвариантна относительно f.

Свойство 3. *Если прямая пересекает ось перспективно-аффинного преобразования в некоторой точке M, то образ этой прямой также проходит через M. Если прямая параллельна оси, то образ также параллелен оси этого преобразования.*

Доказательство. Пусть прямая m пересекает ось l перспективно-аффинного преобразования в некоторой точке M. Тогда прямая $m' = f(m)$ содержит точку $M' = f(M)$. Но, согласно теореме 1, $f(M) = M$. Отсюда следует, что m' содержит точку M.

Пусть теперь прямая m параллельна оси l. Тогда, как было доказано выше, прямая $m' = f(m)$ параллельна прямой $f(l) = l$. Свойство доказано.

Приведенные утверждения позволяют решить следующую задачу.

Пример 2. *Дана ось l перспективно-аффинного преобразования f и пара соответствующих точек M и $M' = f(M)$. Построить образ произвольной точки N при этом преобразовании.*

Решение. Построим прямые MM' и MN. Обозначим их соответственно через m и n (рис. 158). Предположим, что n пересекает ось l в точке K. Тогда, согласно доказанным свойствам, прямая $n' = f(n)$ также проходит через точку K, прямые $m = (MM')$ и $q = (NN')$, где $N' = f(N)$, параллельны между собой. Отсюда вытекает способ построения точки N'.

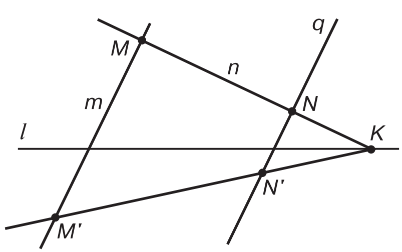


Рис. 158

1. Проводим прямую $m = (MM')$.
2. Проводим прямую $n = (MN)$.
3. Отмечаем точку K пересечения прямых l и n.
4. Проводим прямую q, проходящую через N и параллельную m.
5. Проводим прямую $n' = (KM')$.
6. Точка N', лежащая на пересечении прямых q и n', — искомая.

Случай, когда точка N лежит на прямой, проходящей через M и параллельной l, разберите самостоятельно.

Проведем классификацию перспективно-аффинных преобразований. Из свойства 2 следует, что прямые, соединяющие соответствующие точки перспективно-аффинного преобразования, являются инвариантными. Возможны два случая: 1) эти прямые не параллельны оси преобразования, 2) они ей параллельны.

Определение 3. *Если прямые, соединяющие соответствующие точки перспективно-аффинного преобразования, не параллельны его оси, то оно называется косым сжатием плоскости, а направление таких прямых — направлением сжатия. Если эти прямые параллельны оси перспективно-аффинного преобразования, то оно носит название сдвига плоскости.*

Пусть дано косое сжатие f. Выберем аффинный репер $R_1 = (O_1, O_2, O_3)$ так, чтобы точки O_1 и O_2 лежали на его оси l, а образ O_3' точки O_3 принадлежал прямой O_1O_3. Тогда координаты точки O_3' имеют вид $(0; k)$, где $k \neq 1$ (самостоятельно объясните справедливость этого неравенства). В силу выбора репера аналитическое выражение данного косого сжатия определяется соотношениями (34.4). Подставляя в них координаты точек O_3 и O_3', получим

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = ky. \end{cases} \tag{34.5}$$

Полученные формулы представляют собой аналитическое выражение косого сжатия. Число $k \neq 1$ носит название *коэффициента сжатия*. Если направление косого сжатия перпендикулярно оси, а коэффициент положителен, то оно называется *сжатием к оси*.

Рассмотрим сдвиг f плоскости. Выберем аффинный репер $R_1 = (O_1, O_2, O_3)$ следующим образом. В качестве точки O_1 возьмем произвольную точку оси l данного перспективно-аффинного преобразования. В качестве точки O_3 — произвольную точку пло-

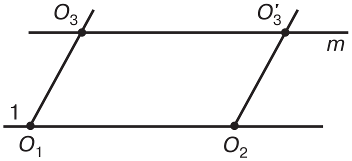


Рис. 159

скости, не принадлежащую оси l. Тогда прямая O_3O_3', где $O_3' = f(O_3)$, параллельна оси l. Проведем через точку O_3' прямую m, параллельную O_1O_3. Примем за базисную точку O_2 точку пересечения прямых m и l (рис. 159). Точка O_2 также принадлежит оси l. Поэтому аналитическое выражение сдвига имеет вид (34.4). Координаты точек O_3 и O_3' соответственно равны (0; 1) и (1; 1). Подставляя их в (34.4), получим $b_1 = b_2 = 1$. Формулы сдвига имеют вид

$$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = y. \end{cases}$$

Пример 3. *Доказать, что образом окружности при сжатии к оси, проходящей через ее центр, является эллипс.*

Решение. Выберем ортонормированный репер $R_1 = (O_1, O_2, O_3)$ так, чтобы его базисные точки O_1 и O_2 принадлежали оси l сжатия (рис 160). В этом репере уравнение окружности ω имеет вид $x^2 + y^2 = r^2$. Формулы сжатия к оси l имеют вид (34.5). Определим уравнение образа окружности. Получим $x^2 + \dfrac{y^2}{k^2} = r^2$, или $\dfrac{x^2}{r^2} + \dfrac{y^2}{(rk)^2} = 1$. Таким образом, уравнение образа является каноническим уравнением эллипса. Утверждение доказано.

Определение аффинных преобразований пространства дословно совпадает с определением этого преобразования для плоскости: преобразование пространства называется аффинным, если оно коллинеарные точки переводит в коллинеарные и сохраняет простое отношение точек. Свойства аффинных преобразований пространства аналогичны свойствам аффинных преобразований плоскости. Они переводят прямую в прямую, луч — в луч, отрезок — в отрезок, неколлинеарные точки — в неколлинеарные, угол — в угол, репер пространства — в репер. Плоскость аффинным преобразованием пространства переводится в плоскость. Существует единствен-

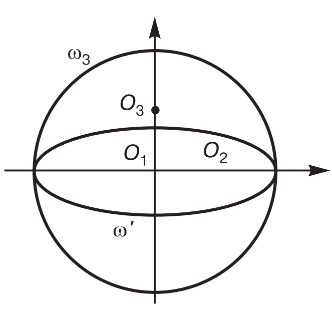


Рис. 160

ное аффинное преобразование пространства, которое один аффинный репер переводит в другой. Множество аффинных преобразований пространства образует группу. Доказательства этих свойств мы опускаем, так как они аналогичны доказательствам соответствующих утверждений этого параграфа.

§ 35. АФФИННО ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ФИГУРЫ. ПРИЛОЖЕНИЯ АФФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Определение 1. *Две фигуры F и F' называются аффинно эквивалентными, если существует аффинное преобразование f, при котором $f(F) = F'$.*

Из основного свойства аффинных преобразований (§ 34) следует, что любые два треугольника аффинно эквивалентны. Действительно, пусть даны треугольники ABC и $A'B'C'$. Согласно указанному свойству, существует единственное аффинное преобразование, которое репер $R = (A, B, C)$ переводит в репер $R' = (A', B', C')$. При этом, очевидно, треугольник ABC преобразуется в треугольник $A'B'C'$. Аналогично можно показать, что два отрезка, два луча или две прямые аффинно эквивалентны между собой. Установим критерий аффинной эквивалентности двух четырехугольников.

Теорема 1. *Даны два четырехугольника $ABCD$ и $A'B'C'D'$, O и O' — соответственно точки пересечения их диагоналей AC и BD, $A'C'$ и $B'D'$. Тогда эти четырехугольники аффинно эквивалентны в том и только в том случае, когда совпадают следующие простые отношения*:

$$(AC, O) = (A'C', O'), \quad (BD, O) = (B'D', O'). \qquad (35.1)$$

Доказательство. *Необходимость*. Предположим, что данные четырехугольники аффинно эквивалентны друг другу. Тогда существует аффинное преобразование f, переводящее первый четырехугольник во второй: $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$, $f(D) = D'$. Диагонали AC и BD преобразуются соответственно в диагонали $A'C'$ и $B'D'$. Поэтому их точки пересечения соответствуют друг другу: $f(O) = O'$. Так как при аффинном преобразовании сохраняются простые отношения, то равенства (35.1) истинные.

Достаточность. Предположим, что для двух четырехугольников выполнены соотношения (35.1). Докажем существование аффинного преобразования f, переводящего первый четырехугольник во второй. Рассмотрим реперы $R = (A, B, C)$ и $R' = (A', B', C')$ (рис. 161). Согласно основному свойству аффинных преобразований (§ 34), существует единственное аффинное преобразование f, переводящее первый репер во второй: $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$. Тогда при этом преобразовании прямая AC переходит в прямую $A'C'$. Так как точка O принадлежит прямой AC, то $f(O)$ — точка прямой $A'C'$. При аффинном преобразовании сохраняется простое отношение точек, поэтому $(AC, O) = (A'C', f(O))$. Отсюда и из соотношения (35.1) вытекает, что $(A'C', f(O)) = (A'C', O')$, следовательно, $f(O) = O'$. Вершина D четырехугольника $ABCD$ принадлежит диагонали BO. Поэтому $f(D)$ — точка прямой $B'O'$. В силу свойств аффинных преобразований $(BD, O) = (B'f(D), O')$. Используя равенства (35.1), получим: $(B'f(D), O') = (B'D', O')$. Поэтому $f(D) = D'$. Теорема доказана.

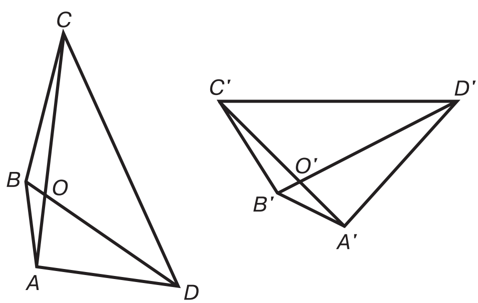


Рис. 161

Точка пересечения диагоналей любого параллелограмма делит их пополам. Поэтому для любых двух параллелограммов справедливы соотношения (35.1).

Следствие. *Любые два параллелограмма аффинно эквивалентны.*

Таким образом, параллелограмм, ромб, прямоугольник и квадрат аффинно эквивалентны.

В § 21 была проведена классификация кривых второго порядка. Было показано, что эти кривые подразделяются на три типа: эллиптический, гиперболический и параболический, а также на девять классов (они перечислены в таблице, приведенной в § 21). В предыдущем параграфе мы доказали, что любой эллипс аффинно эквивалентен окружности. Так как любые две окружности подобны между собой, то любые два эллипса аффинно эквивалентны друг другу. Можно показать, что любые две кривые второго порядка, принадлежащие одному классу, аффинно эквивалентны между собой, а кривые различных классов друг другу аффинно не эквивалентны.

В § 20, изучая свойства кривых второго порядка, мы установили следующий замечательный факт: середины всех параллельных между собой хорд кривой второго порядка лежат на одной прямой. Такая прямая образует диаметр кривой. Кроме того, если для кривой непараболического типа рассмотреть хорды, параллельные этому диаметру, то их середины лежат на втором диаметре, параллельном хордам, определяющим первый. Такие диаметры называются сопряженными. На рис. 162 изображен эллипс, d_1 и d_2 — его сопряженные диаметры, M_1, M_2 и N_1, N_2 — середины соответствующих хорд. При аффинном преобразовании параллельные отрезки преобразуются в параллельные отрезки, их середины — в середины, поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *При аффинном преобразовании диаметры кривой второго порядка преобразуются в диаметры, а сопряженные диаметры — в сопряженные диаметры ее образа.*

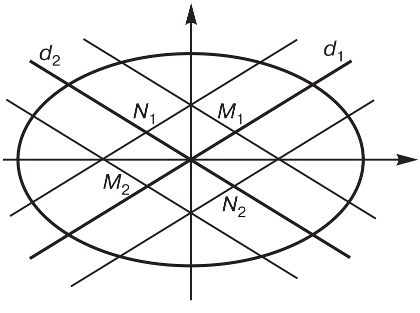


Рис. 162

Диаметры окружности тогда и только тогда сопряжены между собой, когда они перпендикулярны друг другу. Отсюда вытекает следствие теоремы 2.

Следствие. *Взаимно перпендикулярные диаметры окружности при аффинном преобразовании переходят в сопряженные диаметры эллипса.*

Теорема 2 устанавливает свойства кривых второго порядка, которые не меняются при аффинных преобразованиях или, как говорят, являются *инвариантными* относительно группы аффинных преобразований. Укажем на еще одно такое свойство, присущее треугольникам: при аффинном преобразовании медианы треугольника преобразуются в медианы образа, точка пересечения медиан переходит в точку пересечения медиан и сохраняется отношение, в котором она делит каждую медиану.

В 1872 году, вступая в должность профессора Эрлангенского университета, выдающийся немецкий математик Феликс Клейн прочитал вступительную лекцию «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований», известную под названием «Эрлангенской программы». В этой работе был сформулирован общий подход к построению геометрических теорий и истолковано значение геометрических преобразований. Согласно этому исследованию, геометрия изучает инварианты группы преобразований соответствующего многообразия. Так, в евклидовой геометрии рассматриваются свойства фигур, инвариантных относительно группы подобия, аффинная геометрия изучает их свойства, инвариантные при аффинных преобразованиях. Этот принцип, сформулированный Ф. Клейном, оказал большое влияние на развитие геометрии.

Рассмотрим примеры задач элементарной геометрии, при решении которых удобно использовать аффинные преобразования. Прежде всего, рассмотрим утверждение, которое часто используется при решении задач.

Пример 1. *Доказать, что при аффинном преобразовании сохраняется отношение площадей треугольников.*

Решение. Воспользуемся свойствами смешанного произведения векторов, которые были доказаны в § 7. Пусть даны некомпланарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Тогда объем V параллелепипеда, построенного на этих векторах, равен модулю их смешанного произведения: $V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$. Рассмотрим треугольник ABC и введем следующие обозначения: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. Пусть $\vec{k}$ — единичный вектор, перпендикулярный к плоскости треугольника. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, совпадает с объемом параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{k}$. Площадь S треугольника ABC равна половине площади этого параллелограмма, поэтому

$$S = \frac{1}{2}|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{k})|. \qquad (35.2)$$

Пусть f — аффинное преобразование плоскости треугольника ABC, $O, \vec{e}_1, \vec{e}_2$ — аффинная система координат, $O', \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'$ — ее образ при преобразовании f. Введем обозначения для координат вершин треугольника ABC в первой системе координат: $A(x_1; y_1)_1$, $B(x_2; y_2)_1$, $C(x_3; y_3)_1$. Как вытекает из следствия основного свойства аффинных преобразований (34), точки $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$ имеют те же координаты относительно второй системы координат: $A'(x_1; y_1)_2$, $B'(x_2; y_2)_2$, $C'(x_3; y_3)_2$. Разложим векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ по базисным векторам первой системы координат:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{e}_1 + (y_2 - y_1)\vec{e}_2, \quad \overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1)\vec{e}_1 + (y_3 - y_1)\vec{e}_2 .$$

Подставив эти выражения в формулы (35.2) и используя свойства смешанного произведения векторов, упростим полученное выражение:

$$S = \frac{1}{2}\left|\left((x_2 - x_1)\vec{e}_1 + (y_2 - y_1)\vec{e}_2, (x_3 - x_1)\vec{e}_1 + (y_3 - y_1)\vec{e}_2, \vec{k}\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_3 - y_1)\right| \cdot \left|(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{k})\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \cdot \left|(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{k})\right|.$$

Аналогично рассуждая, получаем, что площадь S' треугольника $A'B'C'$ равна $S' = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \cdot \left|(\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{k})\right|$. Отсюда $\frac{S}{S'} = \frac{\left|(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{k})\right|}{\left|(\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{k})\right|}$. Пусть даны треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, $A_1'B_1'C_1'$ и $A_2'B_2'C_2'$ — их образы при преобразовании f, S_1 и S_2 — площади треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, S_1' и S_2' — соответственно площади их образов, тогда $\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_1'}{S_2'}$. Утверждение доказано.

Пример 2. *Дан параллелограмм $ABCD$, точка M принадлежит его диагонали AC. Через M проведена прямая, параллельная AD, которая пересекает сторону DC в точке P. Доказать, что площади треугольников ABM и APD равны между собой.*

Решение. При аффинном преобразовании параллелограмм преобразуется в параллелограмм, параллельные прямые — в параллельные прямые, коллинеарные точки — в коллинеарные точки, а отношение площадей треугольников не меняется (пример 1). Поэтому данная задача носит аффинный характер, ее условие не меняется при аффинном преобразовании. В таком случае обычно доказательство осуществляют для фигуры, аффинно эквивалентной данной, но для которой рассуждения проводятся проще.

Пусть дан параллелограмм $ABCD$ (рис. 163, *а*). Как было показано выше, параллелограмм аффинно эквивалентен квадрату. Поэтому для решения задачи достаточно доказать требуемое утверждение для некоторого квадрата. Рассмотрим квадрат $A'B'C'D'$ (рис. 163, *б*). Прямая l' параллельна стороне $A'D'$ и пересекает стороны $A'B'$ и $C'D'$ в точках Q' и P'. Обозначим длины отрезков $A'D'$ и $D'P'$ соответственно через a и b. Так как прямая l' перпендикулярна стороне $C'D'$, а $A'C'$ — диагональ квадрата, то треугольник $A'B'Q'$ — равнобедренный прямоугольный. Поэтому длина отрезка $M'Q'$ равна b. Треугольник $A'P'D'$ — прямоугольный, его площадь равна $\frac{1}{2}ab.$ В то же время, отрезок $Q'M'$ служит высотой треугольника $A'B'M'$. Отсюда следует, что его площадь также равна $\frac{1}{2}ab.$ Утверждение доказано.

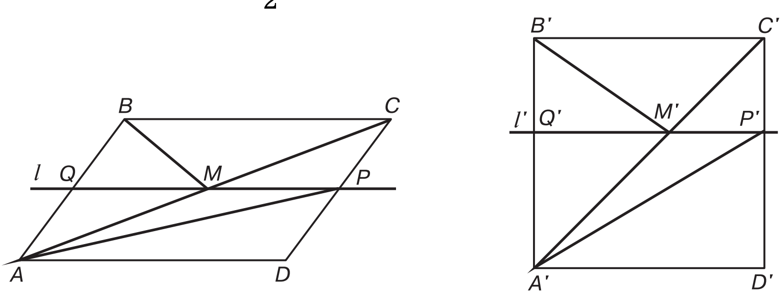


Рис. 163

§ 36. ИНВЕРСИЯ ПЛОСКОСТИ

В настоящем параграфе мы познакомимся с преобразованием плоскости, имеющим широкое приложение к задачам элементарной геометрии, но свойства которого существенно отличаются от свойств аффинного преобразования.

Определение 1. *Пусть дана окружность* ω *с центром в точке* O *и радиусом* r. *Под инверсией точек плоскости относитель-*

но окружности ω *будем понимать такое отображение, которое каждой точке A, отличной от центра O, ставит в соответствие точку A′, удовлетворяющую таким условиям*:

1) *векторы* $\overrightarrow{OA}$ *и* $\overrightarrow{OA'}$ *сонаправлены*;

2) $\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OA'} = r^2$. (36.1)

Окружность ω называется *окружностью инверсии* или *базисной*, ее радиус r — *радиусом инверсии*, а центр O — *центром инверсии*. Инверсия, как следует из определения, является преобразованием всех точек плоскости, за исключением центра O. Из определения следует, что инверсия является инволютивным преобразованием, т. е. если точка A преобразуется в A', то точка A' при той же инверсии переходит в A. Очевидно также, что точки, принадлежащие окружности инверсии, неподвижны; если точка A лежит внутри окружности инверсии, то точка A' находится вне ее, и наоборот, если точка лежит вне базисной окружности, то образ находится внутри.

Рассмотрим способ построения инверсных точек циркулем и линейкой. Пусть дана окружность инверсии ω, O — ее центр. Возьмем произвольную точку A, лежащую внутри окружности инверсии (рис. 164). Проведем прямую l через точки O и A. Обозначим через M точку пересечения перпендикуляра, восставленного в точке A к прямой l, с окружностью ω. Построим касательную m к окружности ω в точке M и покажем, что точка A' пересечения l и m является инверсной к A относительно окружности ω. Действительно, из построения следует, что векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OA'}$ сонаправлены. Треугольник OAM по построению прямоугольный. Так как OM — радиус ω, проведенный в точку касания, то треугольник OMA' также прямоугольный. Эти треугольники подобны между собой, так как имеют общий острый угол MOA.

Отсюда следует, что $\dfrac{|OA|}{|OM|} = \dfrac{|OM|}{|OA'|}$. Таким образом, $|OA||OA'| = |OM|^2$. Точки A и A' подчиняются условию (36.1), утверждение доказано.

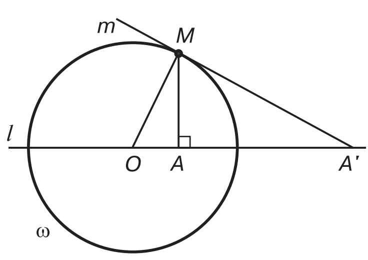


Рис. 164

Если точка принадлежит окружности инверсии, то, как уже отмечалось, она преобразуется сама в себя. Если же A' лежит вне базисной окружности, то построение следует провести в обратном порядке: соединить A' и O, из точки A' провести касательную к ω (см. рис. 164), а затем из точки M касания опустить перпендикуляр MA на OA'. Точка A служит образом точки A' при инверсии.

Выведем аналитическое выражение инверсии. Рассмотрим инверсию с центром в точке O и радиусом r. Введем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы ее начало совпадало с центром инверсии. Обозначим координаты точки A через x и y, а координаты ее образа A' — через x' и y'. Тогда в выбранной системе координаты радиус-векторов этих точек равны $\{x;\ y\}$ и $\{x';\ y'\}$. Векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OA'}$ сонаправлены, поэтому $\overrightarrow{OA'} = \lambda\overrightarrow{OA}$, где $\lambda > 0$. Запишем соотношение (36.1) в координатном виде: $xx' + yy' = r^2$. Отсюда следует, что $\lambda x^2 + \lambda y^2 = r^2$, т. е. $\lambda = \dfrac{r^2}{x^2+y^2}$. Таким образом,

$$\begin{cases} x' = \dfrac{r^2}{x^2+y^2}x, \\ y' = \dfrac{r^2}{x^2+y^2}y. \end{cases} \tag{36.2}$$

Соотношения (36.2) — искомое аналитическое выражение инверсии.

Нетрудно вывести формулы, выражающие x и y через x' и y'. Возведем равенства (36.2) в квадрат и сложим полученные выражения: $x'^2 + y'^2 = \dfrac{r^4}{x^2+y^2}$. Осуществив в (36.2) замену суммы $x^2 + y^2$ по этой формуле, после преобразований получим

$$\begin{cases} x = \dfrac{r^2}{(x')^2+(y')^2}x', \\ y = \dfrac{r^2}{(x')^2+(y')^2}y'. \end{cases} \tag{36.3}$$

Сравнивая выведенные формулы с (36.2), легко видеть, что одни следуют из других заменой x и y на x' и y'. Этот результат полностью согласуется с инволютивным свойством инверсии. Обратное преобразование к инверсии совпадает с ней самой.

Сделаем замечание, необходимое для исследования свойств образов прямых и окружностей при инверсии. Как известно, уравнение окружности с центром в точке $O(x_0; y_0)$ имеет вид $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$, где r — радиус окружности. Если раскроем скобки и приведем подобные члены, то получим уравнение вида

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0. \qquad (36.4)$$

Легко проверить обратное. Пусть дана кривая, уравнение которой имеет вид (36.4). Преобразуем его, выделив в левой части полные квадраты: $\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}-C$. Если $\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}-C>0$, то полученное уравнение представляет собой уравнение окружности, центр которой находится в точке $Q\left(-\frac{A}{2};-\frac{B}{2}\right)$, а радиус равен $\sqrt{\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}-C}$.

Теорема 1. *При инверсии прямая, проходящая через ее центр, преобразуется сама в себя, а прямая, не содержащая центр инверсии, преобразуется в окружность, которая проходит через этот центр.*

Доказательство. Пусть на плоскости дана инверсия с центром в точке O и радиуса r. Выберем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы ее начало совпадало с центром инверсии. Рассмотрим прямую l, уравнение которой в выбранной системе координат имеет вид $Ax + By + C = 0$. Для определения уравнения ее образа l', заменим в этом уравнении x и y на x' и y' по формулам (36.3). Получим

$$A\frac{r^2x'}{(x')^2+(y')^2}+B\frac{r^2y'}{(x')^2+(y')^2}+C=0.$$

Отсюда

$$C(x')^2 + C(y')^2 + Ar^2x' + Br^2y' = 0. \qquad (36.5)$$

Если прямая проходит через центр инверсии, то $C = 0$. Поэтому, как вытекает из (36.5), уравнение ее образа l' примет вид $Ax + By = 0$ (здесь текущие координаты точек образа l' мы обозначили через x и y). Таким образом, прямые l и l' совпадают. Этот вывод можно было получить непосредственно из определения инверсии.

Предположим, что l не проходит через центр инверсии. Тогда $C \neq 0$, поэтому уравнение образа l' имеет вид (36.4), т. е представляет собой уравнение окружности. Координаты $O(0;\ 0)$ начала системы координат удовлетворяют уравнению (36.5), поэтому окружность l' проходит через центр инверсии. Теорема доказана.

Укажем способ построения циркулем и линейкой образа прямой, не проходящей через центр инверсии. Координаты центра Q окружности l', как следует из (36.5), равны $\left(-\dfrac{Ar^2}{2C}; -\dfrac{Br^2}{2C}\right)$. Поэтому вектор $\overrightarrow{OQ}$ коллинеарен вектору $\vec{n}\{A; B\}$. Вектор $\vec{n}$ перпендикулярен прямой l. Следовательно, центр Q окружности l' принадлежит прямой, проходящей через центр инверсии и перпендикулярной l. Таким образом, для построения окружности l' следует из центра инверсии O опустить перпендикуляр на прямую l, найти точку M его пересечения с l, построить точку M', инверсную M (рис. 165). Искомая окружность l' построена на отрезке OM' как на диаметре.

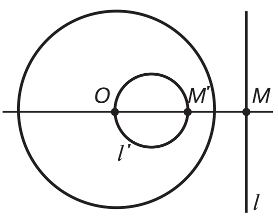


Рис. 165

Теорема 2. *При преобразовании инверсии образом окружности, проходящей через центр инверсии, является прямая, которая через этот центр не проходит. Если окружность не содержит центр инверсии, то ее образом служит окружность, также не содержащая центр инверсии.*

Доказательство. Будем считать, что на плоскости выбрана прямоугольная декартова система координат, начало которой совпадает с центром инверсии. Пусть дана окружность α, уравнение которой имеет вид (36.4): $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. Начало координат в том и только в том случае принадлежит этой окружности, когда $C = 0$. Для определения уравнения образа α' следует в (36.4) заменить x и y на их выражения через x' и y' по формулам (36.3). Получим

$$\frac{r^4(x')^2}{((x')^2+(y')^2)^2}+\frac{r^4(y')^2}{((x')^2+(y')^2)^2}+A\frac{r^2x'}{(x')^2+(y')^2}+B\frac{r^2y'}{(x')^2+(y')^2}+C=0.$$

Упростим это уравнение и заменим x' и y' на x и y. Получим уравнение α':

$$Cx^2 + Cy^2 + Ar^2x + Br^2y + r^4 = 0. \qquad (36.6)$$

Если окружность α проходит через центр инверсии, то, как ранее отмечалось, $C = 0$, поэтому образ α' имеет уравнение

$$Ax + By + r^2 = 0. \tag{36.7}$$

В этом случае α' представляет собой прямую, не проходящую через начало координат. Этот факт полностью согласуется с теоремой 1.

Если α не содержит центр инверсии, то $C \neq 0$. Из (36.6) получим

$$x^2 + y^2 + \frac{A}{C}r^2x + \frac{B}{C}r^2y + r^4 = 0. \tag{36.8}$$

Поэтому α' — окружность, не проходящая через центр инверсии. Теорема доказана.

Укажем способ построения образа α' циркулем и линейкой. Мы предполагаем, что окружность α задана уравнением вида (36.4). Поэтому ее центр Q имеет координаты $Q(-\frac{A}{2}; -\frac{B}{2})$. Если α содержит центр инверсии, то α' представляет собой прямую линию, уравнение которой имеет вид (36.7). Вектор $\vec{n}\{A; B\}$ перпендикулярен прямой α', и, как следует из пропорциональности координат векторов $\vec{n}$ и $\overrightarrow{OQ}$, коллинеарен $\overrightarrow{OQ}$. Для построения α' необходимо осуществить в обратном порядке те же действия, что и при построении образа l' прямой l, не проходящей через центр инверсии (рис. 165): провести прямую OQ и определить точку M' пересечения этой прямой с окружностью α, построить точку M, инверсную M', и провести через M прямую α', перпендикулярную OQ.

Рассмотрим случай, когда окружность α не содержит центр инверсии O. Образом α является окружность α', уравнение которой имеет вид (36.8). Центр P этой окружности имеет координаты $\left(-\frac{A}{2C}; -\frac{B}{2C}\right)$. Координаты векторов $\overrightarrow{OQ}$ и $\overrightarrow{OP}$ равны $\left\{-\frac{A}{2}; -\frac{B}{2}\right\}$ и $\left\{-\frac{A}{2C}; -\frac{B}{2C}\right\}$, следовательно, точки O, P и Q коллинеарны. Для построения α' следует провести прямую OQ, найти точки M и N ее пересечения с окружностью α, определить образы M' и N' этих точек при инверсии и построить α' на $M'N'$ как на диаметре (рис. 166).

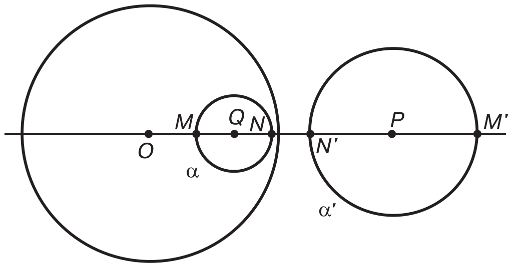


Рис. 166

Как мы видим, свойства инверсии существенно отличаются от свойств аффинных преобразований. Докажем утверждения, которые необходимы для применения инверсии к решению задач элементарной геометрии.

Теорема 3. *Если окружности касаются друг друга в центре инверсии, то они преобразуются в параллельные прямые. И наоборот, если параллельные прямые не содержат центр инверсии, то они преобразуются в окружности, которые касаются друг друга в этом центре.*

Доказательство. Как было показано в теореме 2, окружность, проходящая через центр инверсии, преобразуется в прямую, которая центр инверсии не содержит и, в свою очередь, перпендикулярна прямой, соединяющей центры инверсии и окружности. Если окружности α и β касаются друг друга в центре O инверсии, то их центры вместе с точкой O лежат на одной прямой (рис. 167). Поэтому образы α' и β' этих окружностей являются прямыми, перпендикулярными прямой центров, т. е. параллельными между собой.

Пусть теперь параллельные прямые l и m не содержат центр O инверсии. Обозначим через n прямую, которая проходит через O и перпендикулярна l и m. При инверсии эти прямые преобразуются в окружности l' и m', содержащие O, центры которых принадлежат той же прямой n. Поэтому l' и m' касаются друг друга. Теорема доказана.

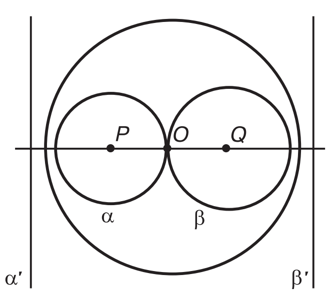


Рис. 167

Можно доказать, что *если окружность α касается прямой m*

в центре инверсии, то эта окружность преобразуется в прямую α', параллельную m.

Теорема 4. *При инверсии касающиеся окружности, которые не проходят через центр инверсии, преобразуются в окружности, также касающиеся друг друга.*

Доказательство. Пусть α и β — окружности, удовлетворяющие условиям теоремы. Тогда при инверсии они преобразуются в окружности α' и β'. По условию, α и β имеют единственную общую точку. Отсюда следует, что их образы α' и β' также обладают единственной общей точкой, т. е. касаются друг друга. Теорема доказана.

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Теорема 5. *Если окружность α касается прямой l', причем точка касания не совпадает с центром инверсии, то их образы при инверсии также касаются друг друга.*

Доказательство проведите самостоятельно.

Теоремы 3—5 представляют собой частные случаи более общего утверждения. Как известно, под углом между двумя кривыми понимается угол между их касательными в точке пересечения.

Теорема 6 (основное свойство инверсии). *При инверсии сохраняются углы между кривыми линиями.*

Доказательство этой теоремы мы опускаем. Преобразования, обладающие этим свойством, носят название *конформных*. Из ранее изученных преобразований конформными являются движения и подобия.

Глава VI

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Задачи на построение занимают особое место в элементарной геометрии. Можно утверждать, что именно они лежали у истоков геометрического знания. В настоящей главе мы рассмотрим способы и общие подходы к решению задач на построение циркулем и линейкой. Прямая линия и окружность представляют собой простейшие линии на плоскости, а линейка и циркуль — простейшие инструменты, позволяющие построить эти линии. Но, оказывается, существуют задачи, весьма просто формулируемые, которые не поддаются решению этими инструментами. Поэтому мы рассмотрим также проблему разрешимости задач на построение, а также затронем вопросы, связанные с построениями одной линейкой, одним циркулем и другими инструментами.

§ 37. ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ, ОСНОВНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ

Понятие построения циркулем и линейкой на плоскости знакомо читателю из школьного курса геометрии. Процесс построения предполагает последовательное выполнение определенных действий, в результате которых из имеющихся на плоскости геометрических фигур получаются новые фигуры. Уточним, что понимается под построением фигуры циркулем и линейкой. Прежде всего выясним, какие же действия допускаются при построениях. Линейка позволяет провести прямую на плоскости через две имеющиеся, т. е. данные или ранее построенные точки. Циркуль — построить окружность с центром в определенной точке и радиусом, равным расстоянию между двумя имеющимися точками. Кроме того, при построении разрешается выбирать произвольные точки[1], принадлежащие имеющейся фигуре, находить точки пересечения имеющихся фигур и выбирать из найденных конечных множеств точек отдельные точки. Эти действия мы будем называть элементарными построениями. Никакие другие действия при построениях не допускаются.

[1] Точки, не обладающие никакими другими дополнительными свойствами, кроме тех, которые следуют из их принадлежности имеющейся фигуре.

Определение 1. *Пусть на плоскости имеется конечное число фигур. Следующие действия, позволяющие получать из имеющихся фигур новые, назовем элементарными построениями*:

1) *получение пересечения двух имеющихся фигур*;
2) *выбор любого конечного числа произвольных точек, принадлежащих одной из имеющихся фигур*;
3) *получение любой из одноточечных*[1] *фигур*: $\{A_1\}$, $\{A_2\}$, ..., $\{A_n\}$, *если имеется фигура* $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$, *состоящая из конечного числа точек*;
4) *получение прямой, проходящей через две имеющиеся точки*;
5) *получение окружности с центром в точке A и радиусом BC, где A, B, C — имеющиеся точки.*

Под построением фигуры будем понимать последовательное выполнение ряда элементарных построений. При формулировке этого определения удобнее говорить не о действиях над фигурами, а о фигурах, получающихся в результате выполнения этих действий.

Определение 2. *Пусть на евклидовой плоскости дано конечное множество фигур. Конечную последовательность фигур f_1, f_2, ..., f_n назовем построением при заданном исходном множестве фигур, если для каждого i, $1 \le i \le n$, фигура f_i или является одной из данных фигур, или получена из каких-либо предшествующих ей фигур* (*т.* е. *из фигур* f_1, f_2, ..., f_{i-1}) *с помощью одного из элементарных построений* 1—5.

Обратим внимание на особенность элементарного построения 2. Его результат, в отличие от других элементарных построений, не определен однозначно, поскольку предполагает произвольный выбор точек геометрической фигуры, содержащей, вообще говоря, бесконечное множество точек. Эта особенность элементарного построения 2 мотивирует следующее определение.

Определение 3. *Будем говорить, что задача на построение разрешима данными инструментами*[2], *если существует построение f_1, f_2, ..., f_n такое, что последовательность f_1, f_2, ..., f_n содержит фигуры, удовлетворяющие поставленным в задаче*

[1] Далее мы для краткости не будем различать точку A и одноточечную фигуру $\{A\}$, т. е. множество, состоящее из этой единственной точки.

[2] В данном случае циркулем и линейкой. Это определение сохраняет смысл и для построения другими инструментами.

условиям независимо от произвольно выбранных точек при выполнении каждого из элементарных построений 2, входящих в последовательность построения. Если же такого построения не существует, то будем говорить, что данная задача на построение неразрешима указанными инструментами.

Приведем пример решения задачи на построение.

Пример 1. Дана точка A и прямая m, которая ее содержит. Построить прямую, перпендикулярную к прямой m, проходящую через точку A.

Обозначим искомую прямую через n. На рисунке 168 изображены данные прямая m и точка A. Построим искомый перпендикуляр n.

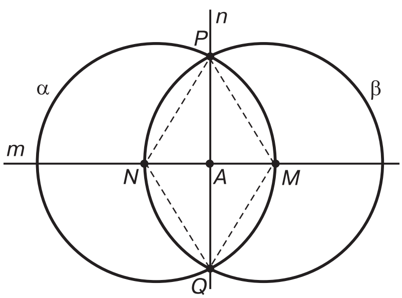


Рис. 168

1. Выберем на прямой m произвольную точку M, отличную от A, $f_1 = M$ (элементарное построение 2).
2. f_2 — окружность с центром в точке A и радиусом AM (элементарное построение 5, на рис. 168 эта окружность не изображена).
3. f_3 — точка N пересечения фигуры f_2 и прямой m, отличная от M (элементарные построения 1 и 2).
4. f_4 — окружность α с центром в точке N и радиусом, равным NM (элементарное построение 5).
5. f_5 — окружность β с центром в точке M и радиусом, равным NM (элементарное построение 5).
6. $f_6 = \{P; Q\}$ — пересечение фигур f_4 и f_5 (элементарное построение 1).
7. $f_7 = \{P\}$, $f_8 = \{Q\}$ — одноточечные подмножества фигуры f_6 (элементарное построение 3).
8. f_9 — прямая PQ (элементарное построение 1).

Прямая $n = PQ$ является искомой, так как в силу известных теорем элементарной геометрии четырехугольник $NPMQ$ —

ромб, его диагонали перпендикулярны между собой. Ясно, что построение прямой n не зависит от выбора точки M в п. 2 построения, поэтому оно является решением поставленной задачи.

Заметим, что построение может начинаться только с одной из данных фигур. Таким образом, любое построение выполняется на некоторой плоскости, которую мы будем предполагать наперед заданной, а в условии задачи должно быть оговорено множество данных фигур.

Напомним традиционный порядок решения задач на построение. Он включает в себя следующие этапы.

1. *Анализ*. На этом этапе предполагают, что задача решена, т. е. требуемое построение выполнено. На одном рисунке чертят все данные и искомые фигуры и, анализируя связи между этими фигурами, возможно, выполняя для этого необходимые дополнительные построения, ищут характеристики элементов искомых фигур, позволяющие построить сами фигуры. Отметим необходимость этого этапа при решении сколько-нибудь сложных задач. Типичная ошибка учащихся состоит в том, что они пытаются, начертив только данные, но не искомые фигуры, сразу выполнить построение. Но проанализировать связи между данными и искомыми фигурами на «пустом» (не содержащем искомых фигур) чертеже весьма затруднительно. Цель анализа — найти план построения.

2. *Построение*. На этом этапе, опираясь на результаты анализа задачи, выполняют и записывают построение. Поскольку запись последовательности элементарных построений весьма громоздка, последние собирают в блоки. В следующем параграфе мы рассмотрим этот вопрос подробнее.

3. *Доказательство*. Этот этап состоит в доказательстве того, что построенная фигура удовлетворяет требуемым в условии задачи свойствам. Доказательство должно опираться на сделанное построение, свойства данных фигур и геометрические теоремы.

4. *Исследование*. На этом этапе исследуется вопрос о том, сколько решений имеет задача в зависимости от размеров, взаимного расположения данных фигур и т. п., то есть в зависимости от не определенных в условии задачи значений параметров.

Под *решением* задачи на построение понимается как процесс построения, так и его конечный результат, т. е. *фигура, полученная в результате элементарных построений, удовлетворяющая условию задачи*. В учебной литературе число решений задачи на построение принято подсчитывать, исходя из следующих соображений. Если положение искомых фигур относительно данных не определено условием задачи, то решение считается определенным с точностью до равенства фигур, т. е. равные фигуры соответствуют одному решению, а не равные — различным. В противном случае, когда положение искомых фигур относительно данных определено условием задачи, любые не совпадающие фигуры соответствуют различным решениям.

Например, в задаче требуется построить треугольник, стороны которого соответственно равны трем данным отрезкам. Положение искомого треугольника относительно данных отрезков в условии задачи не определено. В силу соответствующего признака равенства треугольников все удовлетворяющие условию задачи треугольники равны между собой. Задача имеет единственное решение в случае, когда сумма двух любых данных отрезков больше третьего, и ни одного в противном случае. Если же в условии предыдущей задачи, кроме того, указано, что одна из вершин искомого треугольника совпадает с некоторой данной точкой, то такая задача имеет бесконечно много решений, соответствующих равным, но не совпадающим треугольникам.

Как видно из приведенного примера, запись последовательности элементарных построений даже в простейших случаях довольно громоздка. Поэтому разумно иметь набор наиболее употребительных на практике построений. Эти построения назовем основными. Приведем их список, снабжая построения, выполнение которых может вызвать затруднения, краткими решениями.

Основное построение 1. Построение отрезка, равного данному.

Основное построение 2. Построение прямой, перпендикулярной данной и проходящей через данную точку.

Основное построение 3. Построение прямой, параллельной данной и проходящей через данную точку.

Основное построение 4. Построение угла, равного данному.

Основное построение 5. Построение биссектрисы данного угла.

Основное построение 6. Деление данного отрезка на n равных частей для любого натурального $n > 1$.

Решение. Искомое построение основано на теореме Фалеса. Приведем его для случая $n = 3$. Для других значений n построение проводится аналогично.

Пусть AB — данный отрезок (рис. 169).

1. Через точку A проведем произвольную прямую a, отличную от AB.

2. От точки A на прямой a последовательно отложим n равных отрезков произвольной длины. На рисунке 169 это отрезки AK, KL, LC.
3. Проведем прямую BC.
4. Через точки K и L проведем прямые, параллельные BC.
5. В силу теоремы Фалеса точки пересечения M и N этих прямых с прямой AB и являются искомыми точками, делящими данный отрезок на три равные части. Задача решена.

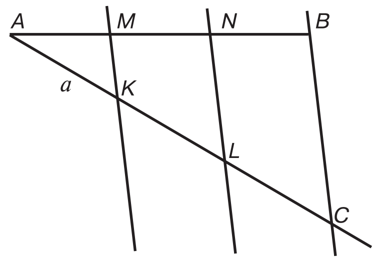


Рис. 169

Основное построение 7. Построение треугольника по двум его сторонам и углу между ними; по стороне и двум прилежащим к ней углам; по трем его сторонам.

Основное построение 8. Построение суммы и разности двух данных отрезков.

Основное построение 9. Построение среднего пропорционального двух данных отрезков a и b, т. е. отрезка c, для которого $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$ (или, иначе, $c = \sqrt{ab}$).

Решение. Это построение можно выполнить, основываясь на свойствах проекций катетов на гипотенузу прямоугольного треугольника так, как показано на рис. 170. Не ограничивая общности, можно считать, что $a < b$.

1. Строим отрезки $CB = b$, $AC = a$ так, чтобы точка C лежала на прямой AB.
2. Строим середину отрезка AB — точку O.
3. Строим окружность f с центром в точке O радиусом OA.
4. Через точку C проводим прямую m, перпендикулярную AB.
5. Строим D точку пересечения прямой m с окружностью f.

Отрезок $c = CD$ — искомый.

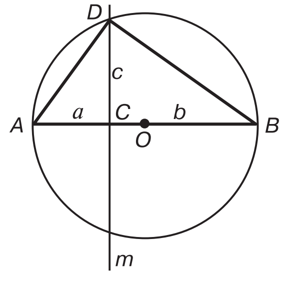


Рис. 170

Действительно, треугольник ADB прямоугольный, т. к. угол D вписанный и опирается на диаметр. По построению AC — проекция катета AD на гипотенузу и поэтому $\frac{a}{c}=\frac{c}{b}$ в силу свойства проекции катета на гипотенузу прямоугольного треугольника. Задача решена.

Основное построение 10. Построение четвертого пропорционального к трем данным отрезкам a, b, c, т. е. отрезка d такого, что $\frac{a}{c}=\frac{d}{b}$ (или $d=\frac{ab}{c}$).

Решение. Это построение основано на теореме Фалеса. Приведем один из возможных его вариантов.

1. Строим отрезки $AM = c$, $MB = a$ (рис. 171).
2. Через точку A проводим произвольную прямую m, отличную от AB.
3. На прямой m от точки A откладываем отрезок $AK = b$.
4. Проводим прямую MK.
5. Через точку B проводим прямую n, параллельную MK.
6. Точка C — точка пересечения прямых m и n.

Отрезок $d = KC$ искомый, т. к. в силу теоремы Фалеса $\frac{a}{c}=\frac{d}{b}$.

Основное построение 11. Построение отрезка $c=\sqrt{a^2 \pm b^2}$, где a и b — данные отрезки и $a > b$.

Соответствующие построения сводятся к построению прямоугольного треугольника по данным двум его катетам или гипотенузе и катету.

Основное построение 12. Построение образа данной точки при параллельном переносе на заданный вектор.

В силу определения параллельного переноса построение сводится к построению прямой, параллельной данной, проходящей через данную точку, и откладыванию на ней отрезка, равного данному.

Основное построение 13. Построение образа данной точки при центральной симметрии с заданным центром.

Основное построение 14. Построение образа данной точки при вращении вокруг заданного центра на заданный угол.

Это построение сводится к построению угла, равного данному, и откладыванию на его стороне отрезка, равного данному.

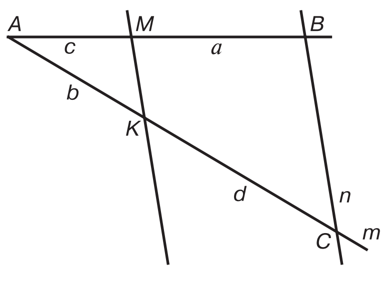


Рис. 171

Основное построение 15. Построение образа данной точки при симметрии относительно заданной оси.

В силу определения симметрии это построение сводится к построению прямой, перпендикулярной данной и проходящей через данную точку, а затем откладыванию на ней отрезка, равному данному.

Основное построение 16. Построение образа данной точки при гомотетии с заданным центром и коэффициентом k, равным отношению двух данных отрезков m и n, $\left(k=\dfrac{m}{n}\right)$.

Построение сводится к рассмотренному выше основному построению 10. Обозначим через O центр данной гомотетии, через X — данную точку, а через X' — ее образ при гомотетии. Тогда, в силу определения гомотетии, $OX'=\dfrac{m}{n}OX$, причем вектор $\overrightarrow{OX'}$ сонаправлен с вектором $\overrightarrow{OX}$, в случае если $k > 0$, и противоположно направлен, в противном случае.

Основное построение 17. Построение точки, инверсной данной, т. е. построение образа данной точки при инверсии относительно заданной окружности.

Решение. Приведем еще раз построение точки, инверсной данной, разобранное в §36. Пусть дана окружность инверсии ω, O — ее центр. Возьмем произвольную точку A, лежащую внутри окружности инверсии (рис. 172). Проведем луч l с началом в точке O, содержащий точку A. Обозначим через M точку пересечения перпендикуляра, восставленного в точке A к лучу l, с окружностью ω. Построим касательную m к окружности ω в точке M и покажем, что точка A' пересечения прямых l и m является инверсной к A относительно окружности ω. Действительно, из построения следует, что векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OA'}$ сонаправлены. Треугольник OAM по построению прямоугольный. Так как OM — радиус окружности ω, проведенный в точку касания, то треугольник OMA' также прямоугольный. Эти треугольники подобны между собой, так как имеют общий острый угол MOA. Отсюда следует, что $\dfrac{|OA|}{|OM|}=\dfrac{|OM|}{|OA'|}$. Таким образом,

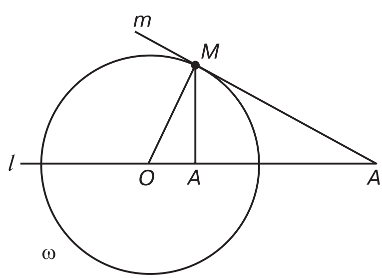


Рис. 172

$|OA|\cdot|OA'| = |OM|^2$. Точки A и A' — инверсные. Если точка принадлежит окружности инверсии, то она преобразуется сама в себя. Если же задана точка A' вне базисной окружности, то построение следует провести в обратном порядке: соединить A' и O, из точки A' провести касательную к ω, а затем из точки M касания опустить перпендикуляр MA на OA'. Точка A — искомая.

При решении задач может понадобиться построить образ прямой или окружности при том или ином геометрическом преобразовании. Поскольку прямая или окружность полностью определяются двумя или тремя своими точками соответственно, построение образов этих фигур при движениях, гомотетии или инверсии сводится к построению образов точек, определяющих эти фигуры, с помощью основных построений 12—17. Используя свойства образов прямых и окружностей при инверсии (§ 36), их построения можно упростить. Разберите эти способы построения самостоятельно.

§ 38. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ

Решение каждой задачи на построение требует своего анализа, особого подхода к ее решению. Но при этом сами задачи можно объединить в отдельные группы, для которых существуют общие рекомендации по отысканию решений, или, как принято называть их в учебной литературе, общие методы решения. Мы их рассмотрим в настоящем параграфе.

Метод пересечения множеств

Первый из рассматриваемых методов, метод пересечения множеств, проиллюстрируем на хорошо известном из школьного курса геометрии примере.

Пример 1. *Дан треугольник, описать около него окружность.*

Решение. Проанализируем требования, предъявляемые к искомой фигуре. Центр искомой окружности должен быть равноудален от всех вершин A, B, и C данного треугольника. Это требование разобьем на два более простых условия: искомый центр равноудален от вершин A и B; он же равноудален от вершин B и C. Множество точек, удовлетворяющих первому условию, представляет собой прямую, перпендикулярную к отрезку AB и проходящую через его середину. Точно так же множество точек, удовлетворяющих второму условию, — серединный перпендикуляр отрезка BC. Точка пересечения этих перпендикуляров служит, как нетрудно видеть, центром искомой окружности, поскольку она равноудалена от всех трех вершин треугольника. Построив центр, легко построить искомую окружность.

Сформулируем кратко характерные для метода пересечения множеств этапы решения этой задачи в общем виде. Вначале анализируются требования, предъявляемые к искомой фигуре, они разделяются на две независимые друг от друга части, т. е. формулируются в виде сложного условия, состоящего из двух простых, соединенных союзом «и» условий. Затем строятся две фигуры, одна из которых удовлетворяет первому, а другая — второму из полученных простых условий. Искомая фигура находится как пересечение этих двух фигур.

Как видно из приведенного примера, применение метода пересечения предполагает умение строить множества точек, удовлетворяющие тем или иным условиям, относящимся к данным фигурам. В рассмотренном примере — серединные перпендикуляры к данным отрезкам. Приведем список множеств, использующихся при решении встречающихся в учебной литературе задач на построение, сопровождая его необходимыми пояснениями.

1. Множество всех точек плоскости, удаленных на заданное расстояние от данной точки, — окружность с центром в данной точке и радиусом, равным заданному расстоянию.

2. Множество всех точек плоскости, удаленных на заданное расстояние от данной прямой, — пара прямых, параллельных данной, точки которых удалены от данной прямой на заданное расстояние.

3. Множество всех точек плоскости, равноудаленных от двух данных параллельных прямых, — прямая, параллельная данным и делящая пополам всякий отрезок с концами на этих прямых.

4. Множество всех точек плоскости, равноудаленных от концов данного отрезка, — прямая, перпендикулярная к данному отрезку и проходящая через его середину.

5. Множество всех точек плоскости, равноудаленных от двух данных пересекающихся прямых, — пара взаимно перпендикулярных прямых, делящих пополам углы, образованные при пересечении данных прямых.

6. Множество всех точек плоскости, из которых данный отрезок виден под заданным углом.

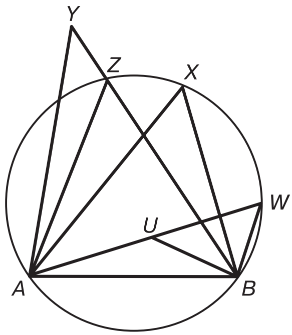


Рис. 173

Поясним приведенную формулировку. Пусть заданы отрезок AB и угол $\alpha < 2\pi$. Требуется построить множество, состоящее из всех точек X плоскости, таких что $\angle AXB = \alpha$ (рис. 173).

Решение. Пусть X — такая точка, что $\angle AXB = \alpha$. Рассмотрим окружность, описанную около треугольника AXB, и обозначим ее центр через O. В силу свойства вписанного угла имеем $\angle AZB = \alpha$ для любой точки Z, лежащей на дуге AXB. Ясно, что таким же свойством обладают и все точки дуги, симметричной дуге AXB относительно прямой AB (на рис. 173 эта дуга не изображена).

Других точек, из которых отрезок AB виден под углом α, нет, поскольку для произвольной точки Y, лежащей во внешней относительно названных дуг окружностей области $\angle AYB < \alpha$. Действительно, $\angle AZB$ — внешний угол треугольника AYZ (рис. 173) и поэтому $\angle AYB < \angle AZB = \alpha$. Аналогично, если точка U лежит во внутренней относительно построенных дуг области, то $\angle AUB > \alpha$, так как он является внешним углом треугольника AWB, а, в свою очередь, $\angle AWB = \alpha$.

Для того чтобы построить окружности, содержащие указанные выше дуги, остается отыскать их центры. Построение центра O нетрудно выполнить, опираясь на свойства вписанного угла. Через конец отрезка AB, точку A, проведем прямую a так, чтобы она образовывала с прямой AB угол α (рис. 174). Затем через точку A проведем прямую b, перпендикулярную прямой a. Прямая b образует с отрезком AB угол $\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$. Проведем серединный перпендикуляр c к отрезку AB и обозначим через O его точку пересечения с прямой b. Тогда точка O — центр искомой дуги. Действительно, имеем $\angle OAM = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$, тогда $\angle AOB = 2\angle AOM = 2\alpha$. Но угол $\angle AOB$ — центральный, и, следовательно, вписанный

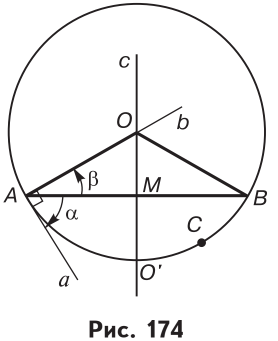


Рис. 174

в окружность угол, опирающийся на дугу ACB, равен α. Центр второй дуги, точка O', симметричен O относительно прямой AB.

7. Окружность Аполлония.

Такое название имеет множество всех точек плоскости, отношение расстояний от каждой из которых до двух данных точек равно заданному положительному числу k, отличному от 1. Ясно, что случай, для которого $k = 1$, рассматривать не нужно, так как при этом искомое множество представляет собой серединный перпендикуляр к отрезку AB. В примере 2, § 11, мы рассмотрели такую же задачу и показали, что искомое множество представляет собой окружность, центр которой принадлежит прямой, проходящей через данные точки. Рассмотрим способ построения этой окружности циркулем и линейкой.

Уточним формулировку задачи. Имеются точки A и B и два неравных отрезка m и n, отношение которых равно числу[1] $k = \frac{m}{n}$. Требуется построить множество всех точек плоскости X, для которых справедливо равенство

$$\frac{AX}{BX} = k. \qquad (38.1)$$

Решение. Для построения окружности Аполлония достаточно построить точки M и N ее пересечения с прямой AB. Окружность, построенная на MN как на диаметре, будет искомой. Построение точек M и N несложно провести, опираясь на теорему Фалеса, поскольку точки M и N удовлетворяют условию (38.1). Это построение показано на рис. 175.

Пусть l — произвольная прямая, проходящая через точку A, отличная от AB. Отложим на этой прямой отрезки $AK = m$, $KL = KC = n$. Через точку K проведем прямые KM и KN, параллельные соответственно прямым CB и LB. Тогда $\frac{AM}{MB} = \frac{AK}{KB} = \frac{m}{n}$, $\frac{AN}{BN} = \frac{AK}{KB} = \frac{m}{n}$. Точки M и N построены.

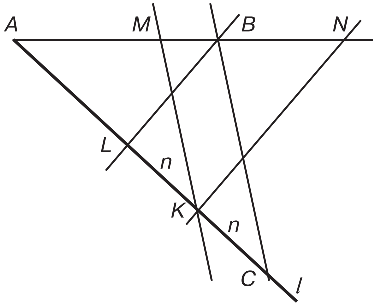


Рис. 175

[1] В задачах на построение число задается отношением двух данных отрезков.

Приведем пример решения задачи на построение, в котором используются окружность Аполлония и множество точек, из которых данный отрезок виден под заданным углом.

Пример 2. *Построить треугольник ABC по стороне $BC = a$, противолежащему ей углу $\alpha < 2\pi$ и отношению двух других сторон $\dfrac{AC}{AB} = k$, где число k задано как отношение двух данных отрезков*[1] *m и n: $k = \dfrac{m}{n}$.*

Анализ. Нам даны отрезок a, равный стороне BC, угол α, совпадающий с углом CAB, и два отрезка m и n, определяющие число k. Отложим отрезок $a = BC$ на плоскости. Тогда вершина A искомого треугольника удовлетворяет двум условиям: угол BAC, под которым отрезок BC виден из точки A, равен данному углу α, и отношение $\dfrac{AC}{AB}$ равно k.

Множество точек плоскости, удовлетворяющих первому условию, представляет собой пару дуг γ и γ', рассмотренных в п. 6. Множество точек плоскости, удовлетворяющих второму условию, совпадает с окружностью Аполлония β, рассмотренной в п. 7. Искомая точка A принадлежит пересечению двух этих множеств (рис. 176).

Построение. Построим отрезок $BC = a$. Построим пару дуг γ и γ', из точек которых отрезок BC виден под углом α. Построим окружность Аполлония β по имеющимся точкам B, C и числу k. Определяя точки пересечения построенных множеств, получим искомую точку A.

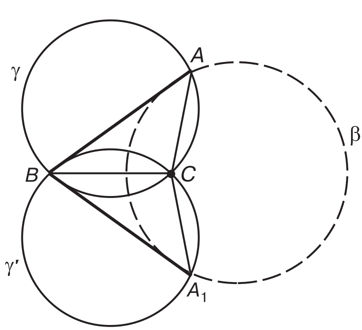


Рис. 176

Доказательство. В полученном треугольнике ABC в силу построения $BC = a$. Угол BAC равен α, поскольку точка A принадлежит множествам γ и γ'. Отношение $\dfrac{AC}{AB}$ равно k, т. к. точка A принадлежит окружности Аполлония β. Таким образом, построенный треугольник удовлетворяет всем требованием задачи.

[1] Сами стороны b и c, вообще говоря, не равны данным отрезкам m и n, равны лишь их отношения.

Исследование. При любом способе построения, как следует из анализа, вершина A принадлежит пересечению множеств γ и β. Поэтому нам достаточно провести исследование задачи для указанного способа построения искомого треугольника. Поскольку положение искомого треугольника относительно данных фигур условием задачи не определено, в силу принятого в §37 соглашения различными решениями считаются *неравные* треугольники, удовлетворяющие условию задачи. Нетрудно видеть, что пара дуг окружностей, из которых отрезок BC виден под углом α, и окружность Аполлония имеют 2 общие точки A и A_1 (рис. 176). Однако получающиеся при этом треугольники симметричны и, следовательно, равны между собой. Задача имеет единственное решение.

Другие методы решения задач на построение основаны на геометрических преобразованиях.

Метод движения

Вначале приведем примеры построений для каждого вида движения, а затем дадим общую характеристику этого метода.

Пример 3 (центральная симметрия). *Даны две пересекающиеся окружности. Построить проходящую через их точку пересечения общую секущую так, чтобы данные окружности высекали на ней равные хорды.*

Анализ. Пусть α и β — данные окружности (рис. 177), A — одна из точек их пересечения. Если MN — искомая секущая, то точки M и N симметричны относительно центра A. Следовательно, точка M лежит на окружности α', симметричной α относительно центра A, и на данной окружности β. Поэтому для построения точки M достаточно построить окружность α', симметричную α относительно центра A, и найти точку M ее пересечения с окружностью β, отличную от точки A. Тогда прямая MA, пересекающая окружность α в точке N, и является искомой, т. к. в силу построения точки M и N симметричны относительно центра A и поэтому $MA = NA$.

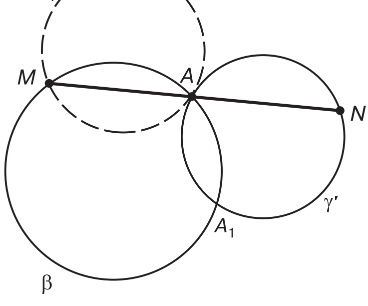


Рис. 177

Остальные этапы решения (построение, доказательство и исследование) проведите самостоятельно.

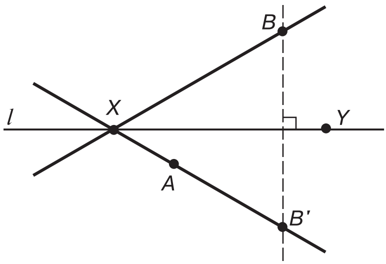


Рис. 178

Пример 4 (осевая симметрия). *Дана прямая l и две точки A и B, лежащие по разные стороны от данной прямой. На прямой l построить точку X такую, что l делит угол AXB пополам.*

Анализ. Пусть X — искомая точка (рис. 178). Рассмотрим точку B', симметричную точке B относительно оси l. Из равенства углов AXY и BXY вытекает, что B' лежит на прямой AX. Отсюда легко понять, как построить точку X. Действительно, построив точку B', симметричную точке B относительно оси l, и найдя пересечение прямой AB' с прямой l, получим искомую точку X.

Остальные этапы решения проведите самостоятельно.

Пример 5 (параллельный перенос). *Построить трапецию по ее основаниям a и b и боковым сторонам c и d.*

Анализ. Предположим, что трапеция $ABCD$ — искомая, т. е. ее основания AD и BC равны данным отрезкам a и b (считая при этом, что $a > b$), а боковые стороны AB и CD равны c и d (рис. 179). Тогда вершина B принадлежит окружности α с центром в точке A и радиусом c, а вершина C лежит на окружности β, центр которой совпадает с точкой D, а радиус равен отрезку d. Так как искомый четырехугольник — трапеция, то отрезок CB, равный по длине данному отрезку b, параллелен стороне AD. Таким образом, точка B получается из точки C параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{CB}$. Легко видеть, что вектор параллельного переноса определен на плоскости при условии, что построено основание AD, так как в этом случае длина вектора равна длине отрезка b, а направление параллельно AD. В то же время, точка B принадлежит окружности α с центром в точке A и радиусом c, а точка C — окружности β с центром в точке D и радиусом d. Так как точка B служит образом точки C при указанном параллельном переносе, то она принадлежит также окружности β', полученной из окружности β параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{CB}$ (на рис. 179 она изображена пунктиром). Поэтому для решения задачи достаточно построить отрезок AD, отложить от его конца D отрезок c (при этом мы построим точку D', центр окружности β') и найти точку B как пересечение окружностей α и β'.

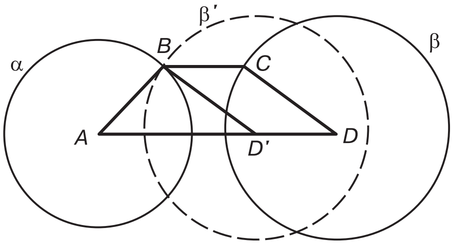


Рис. 179

Остальные этапы решения проведите самостоятельно.

Пример 6 (вращение). *Построить равносторонний треугольник, одна из вершин которого находится в данной точке, а две другие лежат на двух данных прямых.*

Анализ. Пусть равносторонний треугольник ABC построен, A — данная точка, а данные прямые b и c содержат соответственно вершины B и C (рис. 180). Тогда вершина C служит образом точки B при вращении вокруг точки A на угол 60° по часовой стрелке. Но вершина B принадлежит прямой b, поэтому ее образ при указанном вращении лежит на прямой b' — образе прямой b при вращении вокруг точки A на указанный угол. Таким образом, вершина C определяется как точка пересечения прямых b и b'. Для построения прямой b' следует воспользоваться основным построением 14 (§ 37), затем определить точку C и построить ее образ при вращении на угол 60°, но уже против часовой стрелки, получится точка B.

Построение, доказательство и исследование проведите самостоятельно.

Приведенные примеры показывают многообразие возможных вариантов применения различных видов движения при решении задач на построение. Обобщая, можно сказать, что суть рассматриваемого метода состоит в отыскании подходящего движения данных фигур или их элементов, позволяющего построить вспомогательную фигуру, в частности точку, определяющую искомую фигуру. Выполнение построения предполагает умение строить образы точек, прямых и окружностей при различных движениях плоскости,

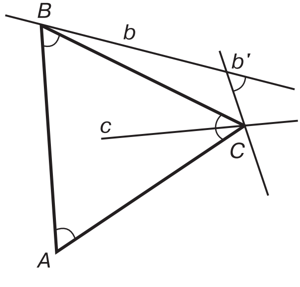


Рис. 180

что не вызывает принципиальных затруднений (основные построения 12—17 перечислены в § 37).

Метод гомотетии и подобия

Способы применения преобразований подобия и гомотетии при решении задач на построение аналогичны разобранным выше способам решения задач с применением движения. Преобразования подобия и гомотетии можно использовать для построения образов либо данных фигур, либо их элементов для отыскания закономерностей, позволяющих решить задачу. Но в большинстве случаев использование этих преобразований связано со следующим соображением. Условие задачи разбивается на две части. Первая часть определяет искомую фигуру с точностью до гомотетии или подобия, вторая же часть позволяет из множества гомотетичных или подобных между собой фигур выбрать искомую.

Пример 7. *Вписать в данный угол окружность, проходящую через данную внутри угла точку.*

Анализ. Пусть имеются угол с вершиной в точке O и точка A внутри него (рис. 181). Отбросим в условии задачи требование, состоящее в том, чтобы искомая окружность проходила через точку A. Тогда все окружности, вписанные в угол, гомотетичны между собой и их центры принадлежат биссектрисе угла (докажите самостоятельно). Рассмотрим произвольную окружность α', вписанную в данный угол (на рисунке она изображена пунктиром). Искомая окружность является ее образом при некоторой гомотетии. Для определения ее коэффициента проведем прямую OA и отметим точку A' ее пересечения с окружностью α' Ясно, что коэффициент k гомотетии равен $k = \dfrac{OA'}{OA}$.

Проведенный анализ позволяет построить окружность α, удовлетворяющую условию задачи. Для этого следует построить произвольную окружность α', вписанную в данный угол, и найти точку A' пересечения окружности α' с прямой OA. А затем, пользуясь основным построением 16, построить образ α окружности α' при гомотетии с центром O и указанным выше коэффициентом k. Построение, доказательство и исследование проведите самостоятельно.

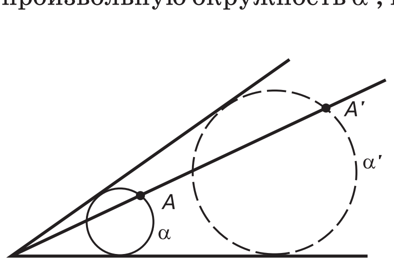


Рис. 181

Пример 8. *Построить треугольник по двум данным его углам и периметру.*

Решение. Пусть α и β — два данных угла, а отрезок p равен периметру искомого треугольника. Отбросим в условии задачи требование, состоящее в том, что периметр искомого треугольника равен p. Тогда два данных угла определяют треугольник с точностью до подобия, т. к. все треугольники с соответственно равными углами подобны между собой. Рассмотрим произвольный треугольник, два угла которого соответственно равны углам α и β. Обозначим его периметр через q. Нетрудно видеть, что искомый треугольник подобен построенному с коэффициентом подобия $k = \frac{p}{q}$.

Для построения искомого треугольника построим вначале произвольный треугольник с углами, равными данным углам α и β. Затем построим отрезок q, равный сумме его сторон. И наконец, используя основное построение 16, — треугольник, подобный построенному с указанным выше коэффициентом подобия k.

Остальные этапы решения задачи проведите самостоятельно.

Метод инверсии

В § 36 были установлены образы прямых и окружностей при инверсии. Инверсия — инволютивное преобразование, совпадающее со своим обратным. Кроме того, инверсия является конформным, т. е. сохраняющим углы между фигурами преобразованием. Поэтому если в задаче требуется построить окружность или прямую, касающуюся или пересекающую данные прямые или окружности под определенным углом, то, выбрав окружность инверсии так, чтобы образом искомой или данной окружности служила прямая линия, и осуществив инверсию, мы получим новую задачу на построение, более простую, чем исходная. Решив ее и проведя инверсию второй раз, мы придем к конфигурации, соответствующей исходной задаче. Инверсия, как правило, используется при решении задач, которые являются частным случаем общей задачи Аполлония: даны три окружности, требуется построить четвертую окружность, которая касается трех данных. Если считать, что точка и прямая — это окружности соответственно нулевого и бесконечного радиусов, то, заменяя одну или две окружности в общей задаче на точки или прямые, получим частные случаи задачи Аполлония. Решение общей задачи Аполлония приведено в пособиях [8] и [12].

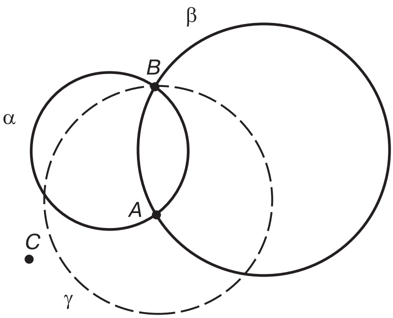


Рис. 182

Пример 9. *Построить окружность, проходящую через данную точку и касающуюся двух данных пересекающихся окружностей.*

Решение. Пусть данные окружности α и β пересекаются в точках A и B (рис. 182), а C — данная точка. Рассмотрим инверсию плоскости относительно окружности γ с центром в точке A и радиусом, равным AB (она изображена пунктиром). Используя основное построение 17 (§ 37), построим точку C', инверсную точке C, и прямые α' и β', инверсные окружностям α и β. Прямые α' и β' пересекаются в точке B, т. к. эта точка является неподвижной точкой инверсии. Искомая окружность ω преобразуется в окружность ω', которая в силу отмеченных свойств инверсии будет касаться прямых α' и β'. Задача свелась к построению окружности, касающейся двух пересекающихся прямых и проходящей через точку C', которое разобрано нами в примере 7. Построив окружность ω', применив ту же инверсию, получим искомую окружность ω.

§ 39. АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД. РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ ЦИРКУЛЕМ И ЛИНЕЙКОЙ

Прежде чем перейти непосредственно к алгебраическому методу решения задач на построение, рассмотрим вопрос о реализации алгебраических операций над отрезками с помощью построений циркулем и линейкой. Пусть имеются два отрезка длин a и b и число c, полученное в результате алгебраических действий над числами a и b. *Покажем, что для всех четырех арифметических действий — сложения, вычитания, умножения, деления, — а также для извлечения квадратного корня можно указать соответствующие построения отрезка длины c.*

Поскольку речь идет о длинах отрезков, будем считать заданным отрезок единичной длины, обозначив его через e. Условимся также для обозначения отрезков и их длин пользоваться одними и теми же буквами. Из контекста, как правило, бывает ясно, идет речь об отрезке или о его длине.

Теорема 1. *Если на плоскости задан некоторый конечный набор отрезков, содержащий единичный отрезок, то циркулем и линейкой можно построить любой отрезок, длина которого выражается через длины данных отрезков с помощью конечного числа алгебраических действий: сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня из неотрицательного числа.*

Доказательство. Пусть имеются произвольные отрезки a и b. Построение их суммы и разности $c = a + b$ и $c = a - b$ является основным построением 8 (§ 37).

Построение отрезка, длина которого равна произведению $c = ab$ длин двух имеющихся отрезков, сводится к основному построению 10. Действительно, последнее равенство можно записать в виде $c=\frac{ab}{e}$, где e — единичный отрезок. Это же основное построение можно применить при построении отрезка, длина которого равна частному $c=\frac{a}{b}$ длин двух имеющихся отрезков, так как $c=\frac{ae}{b}$.

Наконец, построение отрезка, длины $c=\sqrt{a}$ для данного отрезка a сводится к основному построению 9, т. к. $\sqrt{a}=\sqrt{ae}$.

Таким образом, если длина отрезка выражена через длины данных отрезков с помощью *конечного* числа названных в условии теоремы действий, то, последовательно выполняя рассмотренные выше построения, соответствующие этим действиям, получаем требуемый отрезок. Теорема доказана.

Приведем пример построения отрезка, длина которого выражается через длины данных отрезков с соблюдением условий теоремы 1.

Пример 1. *Построить отрезок, длина которого выражается через длины данных отрезков a, b, c, и d по формуле* $y=\frac{\sqrt{a^3b+c^2}}{\sqrt[4]{b^4-d^4}}$, *при условии что задан единичный отрезок e.*

Решение. Последовательно выполняем построения, соответствующие указанным в формуле действиям. Строим отрезки, длины которых равны:

1) $f=\frac{aa}{e}$, 2) $g=\frac{fa}{e}$, 3) $h=\frac{gb}{e}$, 4) $k=\sqrt{he}$, 5) $l=\frac{cc}{e}$, 6) $m=k+l$, 7) $n=\frac{bb}{e}$, 8) $p=\frac{nn}{e}$, 9) $q=\frac{dd}{e}$, 10) $r=\frac{qq}{e}$, 11) $s=p-q$, 12) $t=\sqrt{se}$, 13) $u=\sqrt{te}$, 14) $w=\frac{me}{u}$. Отрезок w — искомый.

Замечание. В формулировке теоремы 1 мы не наложили ограничения на операцию вычитания отрезков, хотя при вычитании может получаться отрицательное число, а длина отрезка — число положительное. В этом случае следует построить отрезок, длина которого равна модулю соответствующей разности, а при дальнейшем построении учитывать знак построенной разности.

Обратим теперь внимание на следующее обстоятельство. Построение суммы или разности двух отрезков не зависит от выбора единичного отрезка. Кроме того, при выборе различных единичных отрезков e или e' в результате построения отрезка $\sqrt{ab}$ получатся *равные* между собой отрезки, хотя их длины, измеренные с помощью единичных отрезков e и e', между собой равны не будут. Этот факт следует из того, что в процессе построения единичный отрезок вообще не используется, чего нельзя сказать о построениях произведения, частного и корня из заданного отрезка. При выполнении таких построений используется единичный отрезок, и их результаты будут различными при выборе различных единиц измерения. Уместно ответить на вопрос, в каком случае для построения отрезка необходимо использовать единицу измерения, а в каком случае она не нужна.

Пусть на плоскости даны n отрезков a_1, a_2, ..., a_n, единичный отрезок e и числовая функция

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \tag{39.1}$$

зависящая от n переменных x_1, x_2, ..., x_n и принимающая положительные значения для положительных значений аргументов. Построим отрезок y, длина которого в выбранной единице измерения равна значению данной функции для длин отрезков a_1, a_2, ..., a_n: $y = f(a_1, a_2, ..., a_n)$. Ясно, что если мы выбрали две единицы измерения e и e', то значения длин отрезков a_1, a_2, ..., a_n и, вообще говоря, функции (39.1) для этих длин будут различны. Требуется установить, при каком условии, наложенном на данную функцию, построенный отрезок y не будет зависеть от выбора единичного отрезка e. Функции, удовлетворяющие этому условию, имеют несложную алгебраическую характеристику.

Определение 1. *Числовая функция $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ от n переменных x_1, x_2, ..., x_n называется положительно однородной первой степени, если для любого положительного значения t и любых положительных значений переменных x_1, x_2, ..., x_n выполнено равенство*

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = tf(x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (39.2)$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Отрезок y, длина которого задана числовой функцией $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ от n действительных переменных x_1, x_2, ..., x_n, которые, в свою очередь, являются длинами отрезков a_1, a_2, ..., a_n, не зависит от выбора единичного отрезка тогда и только тогда, когда функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ является положительно однородной первого порядка.*

Доказательство. Пусть имеются два отрезка e и e' такие, что длина отрезка e при выборе в качестве единицы длины отрезка e' равна t, $t > 0$, что мы будем кратко записывать в виде $e = te'$. Если длина некоторого отрезка равна z при выборе отрезка e в качестве единичного, и длина этого же отрезка равна z' при выборе единицы измерения e', то, как нетрудно видеть, $z' = tz$. Очевидно и обратное: длины z и z' задают равные между собой отрезки при выборе соответственно отрезков e или e' в качестве единичных, если $z' = tz$. Таким образом, равенство длин $z' = tz$ является необходимым и достаточным условием равенства соответствующих этим длинам отрезков.

Пусть теперь при выборе отрезка e в качестве единичного, данные отрезки a_1, a_2, ..., a_n имеют длины x_1, x_2, ..., x_n, и эти же отрезки при выборе отрезка e' в качестве единичного имеют соответственно длины $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$. Таким образом,

$$x'_1 = tx_1, \quad x'_2 = tx_2, \quad \ldots, \quad x'_n = tx_n. \qquad (39.3)$$

Точно так же длины $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y' = f(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ определяют равные отрезки при выборе отрезков e и e' в качестве единичных тогда и только тогда, когда

$$y = ty'. \qquad (39.4)$$

Но одновременная справедливость равенств (39.3) и (39.4) при любом $t > 0$ и означает выполнение равенства (39.2), т. е. положительную однородность первой степени функции $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Теорема доказана.

Сформулируем общий принцип использования алгебраического метода для решения задачи на построение. В анализе задачи ее решение сводят к построению одного или нескольких отрезков. Отыскав аналитические соотношения между длинами данных и искомых отрезков и выполнив их построения, строят искомую фигуру. Ясно, что решение задачи на построение не должно зависеть от единицы измерения. Поэтому полученные формулы должны удовлетворять условию теоремы 2. Ниже мы покажем, что для построения отрезков эти формулы должны также подчиняться условиям теоремы 1.

Поскольку конфигурации, состоящие из конечного множества фигур, составленных из точек, прямых или окружностей или их частей, можно с точностью до положения на плоскости определить с помощью конечного числа отрезков, задачи на построение, включающие только такие конфигурации, всегда можно решить алгебраическим методом или показать, что такого построения не существует. В этом смысле этот метод является универсальным. Но отсюда не следует, что алгебраический метод всегда удобен, зачастую он приводит к громоздким вычислениям.

Приведем пример применения алгебраического метода.

Пример 2. *Построить равнобедренный треугольник по основанию c и биссектрисе угла при основании l_a.*

Решение. Пусть ABC — равнобедренный треугольник, в котором биссектриса $AD = l_a$, $AB = c$ — основание, а AC и BC — боковые стороны (рис. 183). Выразим косинус угла DAB через данные отрезки. Введем обозначение $\angle DAB = \varphi$. Тогда из условия задачи следует, что $\angle CBA = 2\varphi$. Рассмотрим треугольник ADB, в котором $\angle ADB = \pi - 3\varphi$. Так как $\sin(\pi - 3\varphi) = \sin 3\varphi$, то из теоремы синусов следует $\dfrac{c}{\sin 3\varphi} = \dfrac{l_a}{\sin 2\varphi}$. Так как $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$, а $\sin 3\varphi = 3\sin\varphi\cos^2\varphi - \sin^3\varphi = (4\cos^2\varphi - 1)\sin\varphi$ (последние равенства проверьте самостоятельно, используя формулы сложения и основное тригонометрическое тождество), то $\dfrac{c}{4\cos^2\varphi - 1} = \dfrac{l_a}{2\cos\varphi}$.

Отсюда следует, что $\cos\varphi$ служит корнем квадратного уравнения $4l_a x^2 - 2cx - l_a = 0$. Корни полученного уравнения имеют вид $x_{1,2} = \dfrac{2c \pm \sqrt{4c^2 + 16l_a^2}}{8l_a} = \dfrac{c \pm \sqrt{c^2 + (2l_a)^2}}{4l_a}$. Один из корней положителен, а второй — отрицателен. Ясно, что косинус искомого угла является положительным числом, т. е.

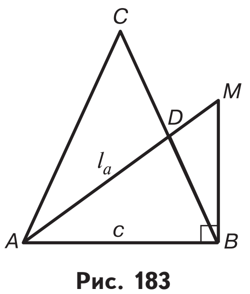


Рис. 183

$$\cos\varphi = \frac{c + \sqrt{c^2 + (2l_a)^2}}{4l_a}. \qquad (39.5)$$

Найденное выражение для cosφ позволяет построить искомый треугольник. В начале построим отрезок $AB = c$. Затем построим прямоугольный треугольник ABM (рис. 183), косинус угла MAB которого определяется по формуле (39.5). Для этого следует построить его гипотенузу AM, длина которой определяется по формуле

$$m = \frac{4cl_a}{c + \sqrt{c^2 + (2l_a)^2}}. \qquad (39.6)$$

Как мы видим, правая часть выражения (39.6) удовлетворяет условиям теорем 1 и 2, поэтому отрезок m строится циркулем и линейкой независимо от выбранной единицы измерения. Построив треугольник ABM по катету и гипотенузе и отложив от точки A биссектрису l_a, получим точку D. Затем треугольник ABD достраивается до искомого треугольника ABC. Построение, доказательство и исследование проведите самостоятельно.

Отметим, что в силу универсальности алгебраического метода исследование задачи, решенной этим методом, существенно упрощается. Ответ на вопрос, зависит ли решение задачи от метода построения, очевиден. При любом методе построения искомые отрезки выражаются через данные по найденным в анализе формулам. Поэтому исследование сводится к выяснению, всегда ли можно построить искомые отрезки по найденным формулам и сколько таких отрезков можно построить.

Приведенная выше теорема 1 устанавливает достаточное условие, при котором возможно построить отрезок циркулем и линейкой, в случае когда на плоскости задано конечное множество отрезков. Оно же является также и необходимым при некотором естественном ограничении на взаимное расположение данных отрезков. Для сокращения формулировок примем следующие определения.

Определение 2. *Пусть имеется конечный набор положительных действительных чисел:* $a_1 = 1, a_2, ..., a_n$, *содержащий* 1. *Действительное число* x *будем называть пифагоровым относительно набора* $a_1 = 1, a_2, ..., a_n$, *если* x *выражается через числа* $a_1, a_2, ..., a_n$ *с помощью конечной последовательности действий: сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения арифметического квадратного корня из неотрицательного числа.*

В этом случае говорят, что число x выражено через числа $a_1 = 1, a_2, ..., a_n$ в *квадратных радикалах*. Если на плоскости выбрана прямоугольная декартова система координат, то точку, координаты которой являются пифагоровыми числами, будем называть пифагоровой. Из теоремы 1 следует, что любая пифагорова точка может быть построена циркулем и линейкой, если заданы отрезки a_1, a_2, ..., a_n, относительно длин которых эта точка является пифагоровой. Действительно, построив отрезки, у которых длины являются модулями координат этой пифагоровой точки, и, отложив эти координаты в положительном или отрицательном направлении на соответствующих осях, искомую точку получим на пересечении перпендикуляров, проведенных к осям координат в концах отложенных отрезков. При естественном дополнительном ограничении на расположение данных отрезков справедливо также и следующее обратное утверждение.

Теорема 3. *Пусть на плоскости имеется луч OX и на нем от точки O отложены отрезки a_1, a_2, ..., a_n, причем отрезок a_1 имеет единичную длину. Тогда если отрезок x можно построить циркулем и линейкой, то его длина — пифагорово число относительно длин отрезков a_1, a_2, ..., a_n.*

Теорему 3 примем без доказательства. Оно изложено в пособиях [10] и [13]. Теоремы 1 и 3 позволяют сформулировать критерий возможности построения отрезка циркулем и линейкой: *отрезок можно построить циркулем и линейкой в том и только том случае, когда его длина выражается через длины данных отрезков в квадратных радикалах.*

§ 40. ЗАДАЧИ, НЕРАЗРЕШИМЫЕ ЦИРКУЛЕМ И ЛИНЕЙКОЙ. ПОСТРОЕНИЕ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Установленный в предыдущем параграфе критерий позволяет доказать неразрешимость циркулем и линейкой ряда задач на построение. Три самые знаменитые из них были сформулированы еще античными математиками: задачи об удвоении куба, квадратуре круга и трисекции угла. Эти задачи не поддавались решению циркулем и линейкой, пока в XIX веке не было доказано, что они вообще неразрешимы указанными инструментами. Мы покажем их неразрешимость, но для этого нам придется воспользоваться утверждениями, доказываемыми в курсе алгебры. Сформулируем их.

Под алгебраическим уравнением понимается уравнение вида $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$, *левая часть которого представляет собой многочлен с действительными коэффициентами. Алгебраическое уравнение третьего порядка с целыми коэффи-*

циентами $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ *имеет корень в квадратных радикалах в том и только в том случае, когда оно имеет также рациональный корень. Если приведенное алгебраическое уравнение третьего порядка с целыми коэффициентами имеет рациональный корень, то он является целым числом, делителем свободного члена.*

Задача 1 (задача об удвоении куба). *Дан куб. Требуется построить куб, имеющий объем, вдвое больший объема данного куба.*

Поскольку речь идет о построении на плоскости, приведенную формулировку задачи следует понимать так, что дано ребро куба, а требуется построить ребро куба, имеющего объем, который вдвое больше объема данного куба.

Решение. Обозначим данное ребро через a и выберем этот отрезок в качестве единицы длины. Таким образом, имеется «набор», состоящий из одного отрезка $a = 1$. Ребро искомого куба обозначим через x. По условию имеем $x^3 = 2a^3$ или $x^3 - 2 = 0$, поскольку $a = 1$. Если задача разрешима циркулем и линейкой, то число x, как следует из критерия возможности построения отрезка указанными инструментами, является числом, которое выражено в квадратных радикалах. Но, как легко проверить, целые делители ± 1, ± 2 свободного члена полученного приведенного алгебраического уравнения с целыми коэффициентами не являются его корнями. Поэтому уравнение не имеет корней в квадратных радикалах, и задача об удвоении куба не разрешима циркулем и линейкой.

Задача 2 (задача о квадратуре круга). *Построить квадрат, площадь которого равна площади данного круга.*

Поскольку данный круг определяется радиусом r с точностью до движения, а единица длины может быть выбрана произвольно, можно считать, что радиус данного круга равен 1. Тогда его площадь равна $\pi^2 r = \pi$, и, следовательно, искомая сторона квадрата равна $\sqrt{\pi}$. Решение задачи свелось к построению циркулем и линейкой отрезка длины $\sqrt{\pi}$ при данном отрезке единичной длины. Как показал немецкий математик Линдеманн в 1882 году, число π (а, значит, и $\sqrt{\pi}$), является числом трансцендентным, т. е. не является корнем никакого алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами[1] и, стало быть,

[1] Доказательство этого утверждения довольно сложное, оно имеется, например, в книге [11].

не выражается в квадратных радикалах через рациональные числа. Таким образом, поставленная задача неразрешима циркулем и линейкой.

Задача 3 (задача о трисекции угла). *Данный угол разделить на три равные части.*

В отличие от предыдущих задач эта задача для некоторых углов может быть решена циркулем и линейкой. В частности, нетрудно построить циркулем и линейкой угол в 30°, который служит одной третьей частью прямого угла. Покажем, однако, что если данный угол равен 60°, то требуемое построение невозможно.

Пусть дан прямоугольный треугольник AOB, угол ABO которого прямой, а $\angle AOB = 60^\circ$ (рис. 184). Выберем отрезок OB в качестве единицы длины. Тогда длина отрезка OA равна 2. Пусть лучи OC и OD делят угол AOB на три равные части. Если эти лучи можно построить циркулем и линейкой, то тогда этими же инструментами можно построить и отрезок OC. Следовательно, в этом случае длина отрезка OC представляет собой число в квадратных радикалах. Обозначим $\angle COB = \alpha$, тогда $\angle AOB = 3\alpha$. Выразим $\cos 3\alpha$ через $\cos\alpha$: $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ (проверьте это равенство самостоятельно, воспользуйтесь формулами двойного угла для синуса и косинуса и основным тригонометрическим тождеством). Но $3\alpha = 60^\circ$, а $\cos 3\alpha = \frac{1}{2}$, поэтому $4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = \frac{1}{2}$. Преобразуем полученное равенство, умножив его на $\frac{2}{\cos^3\alpha}$, получим $\frac{1}{\cos^3\alpha} + \frac{6}{\cos^2\alpha} - 8 = 0$. Так как $OC = \frac{OB}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}$, то обозначим $x = OC = \frac{1}{\cos\alpha}$. Тогда длина отрезка OC служит корнем приведенного кубического уравнения с целыми коэффициентами $x^3 + 6x^2 - 8 = 0$. Рациональные корни полученного уравнения должны быть целыми делителями его свободного члена, т. е. совпадать с одним из чисел ± 1, ± 2, ± 4, ± 8. Проверив эти значения и убедившись, что ни одно из них уравнению не удовлетворяет, заключаем, что корни уравнения, и, следовательно, длина отрезка OC не является числом в квадратных

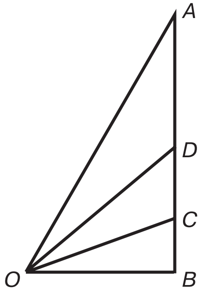


Рис. 184

радикалах. Мы получили противоречие, которое показывает, что задача о трисекции угла в 60° неразрешима циркулем и линейкой.

Перейдем к задаче на построение циркулем и линейкой правильного n-угольника. Напомним, что многоугольник называется правильным, если равны между собой все его стороны и углы. Свойства правильного многоугольника рассматривались в школьном курсе геометрии. Как известно, существуют окружности, вписанные в любой правильный многоугольник и описанные вокруг него. Вообще, как нетрудно видеть, задача на построение правильного n-угольника равносильна задаче на деление окружности на n равных частей. Из школьного курса математики известны способы построения таких правильных многоугольников: четырехугольника (квадрата), треугольника, шестиугольника. Легко видеть также, что если окружность разделена на n частей, то ее можно разделить на $2n$ частей. Для этого достаточно каждую хорду, составляющую n-ю часть окружности, разделить пополам. Поэтому, если построен правильный n-угольник, то можно построить правильный $2n$-угольник, причем процедуру удваивания сторон можно продолжать бесконечно. Поэтому циркулем и линейкой строятся, например, правильные 8-, 16-, 32-, 12-, 24-угольники. Разберем способ построения правильного десятиугольника. Ясно, что, построив правильный десятиугольник, соединив его вершины через одну, мы получим правильный пятиугольник.

Рассмотрим окружность радиуса r, пусть O — центр данной окружности, $AB = x$ — сторона вписанного в нее правильного десятиугольника (рис. 185, на рисунке окружность не изображена). Обозначим угол AOB через φ. Так как $\angle AOB$ — центральный угол, опирающийся на сторону данного десятиугольника, то $\varphi = 36^\circ$. Треугольник AOB равнобедренный, поэтому величины его углов при основании равны $\angle OAB = \angle OBA = 72^\circ = 2\varphi$. Проведем биссектрису AL угла OAB, тогда $\angle OAL = \angle LAB = 36^\circ = \varphi$. Рассмотрим треугольник ALB. В этом треугольнике $\angle LAB = 36^\circ = \varphi$, $\angle LBA = \angle OBA = 72^\circ = 2\varphi$. Отсюда следует, что треугольник ALB равнобедренный, причем он подобен треугольнику AOB. Треугольник OAL также равнобедренный, так как $\angle OAL = \angle AOL = 36^\circ = \varphi$. Если мы обозначим длину стороны AB через x, то $AB = AL = OL = x$, а $LB = r - x$. Из подобия треугольников AOB и BAL следует, что $\dfrac{OA}{AB} = \dfrac{AB}{LB}$ или $\dfrac{r}{x} = \dfrac{x}{r-x}$. Преобразовав полученное вы-

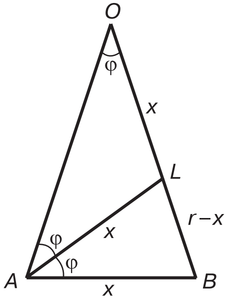


Рис. 185

ражение, мы приходим к квадратному уравнению, корнем которого служит длина x стороны искомого десятиугольника: $x^2 + rx - r^2 = 0$. Решениями этого уравнения являются числа $x_1 = \frac{-r+\sqrt{5}r}{2}$, $x_2 = \frac{-r-\sqrt{5}r}{2}$. Корень x_2 отрицателен, поэтому длина стороны правильного десятиугольника, вписанного в окружность радиуса r, равна $\frac{-r+\sqrt{5}r}{2}$. Мы получили выражение в квадратных радикалах, поэтому отрезок длины x строится циркулем и линейкой. Построение, доказательство и исследование проведите самостоятельно.

Пусть построены правильные p- и q-угольники, причем числа p и q взаимно просты, их наибольшим общим делителем служит единица. Как доказывается в курсе алгебры, если число d является наибольшим общим делителем чисел a и b, то существуют такие целые числа α и β, для которых $\alpha a + \beta b = d$. Применяя это утверждение к данным числам p и q, получим $\alpha p + \beta q = 1$. Отсюда следует, что

$$\frac{\alpha}{q} + \frac{\beta}{p} = \frac{1}{pq}. \tag{40.1}$$

Мы получили соотношение, которое позволят строить стороны правильного pq-угольника. Действительно, одно из чисел α или β положительно, а другое отрицательно. Пусть $\alpha > 0$, а $\beta < 0$. Тогда, выбрав на окружности некоторую точку A и отложив от нее α раз в одном направлении последовательно хорды, равные стороне вписанного в нее правильного p-угольника, а в противоположном направлении последовательно β раз стороны правильного q-угольника, мы получим точку B. Как следует из соотношения (40.1) хорда AB является стороной правильного pq-угольника, вписанного в эту окружность.

Воспользуемся этим методом для построения правильного 15-угольника. Число 15 является произведением двух взаимно простых чисел 3 и 5. Легко видеть, что $2 \times 3 - 5 = 1$, поэтому $\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$. Для решения задачи нам следует отложить от некоторой точки A

окружности в одном направлении стороны AB и BC вписанного в нее правильного пятиугольника (рис. 186), а в другом направлении один раз сторону CD правильного треугольника получим сторону AD правильного пятнадцатиугольника.

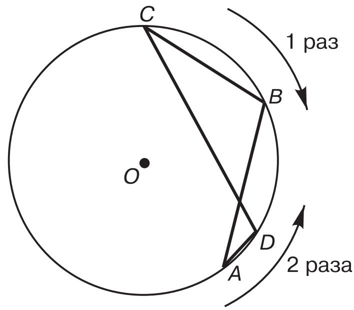


Рис. 186

Задача построения правильного n-угольника, как нетрудно понять, сводится к случаю, при котором n — простое число. Она была полностью решена великим немецким математиком Карлом Гауссом. Справедлива следующая теорема, ее мы приводим без доказательства.

Теорема 1. *Для того чтобы было возможно построить правильный n-угольник, необходимо и достаточно, чтобы число n имело вид* $n = 2^r p_1 p_2, \dots p_n$, *где* $r = 0, 1, 2, s$ *— целые неотрицательные числа,* $p_1, p_2, \dots, p_n$ *— различные простые числа Ферма, т.* е. *простые числа вида*

$$p_k = 2^{2^k} + 1 \tag{40.2}$$

(*k — натуральное число*)[1].

При $k = 0$ число вида (40.2) равно 3, при $k = 1$ имеем $p_1 = 5$, и $p_2 = 17$ при $k = 2$. Способ построения правильного треугольника известен из школьного курса геометрии, построение правильного пятиугольника разобрано нами выше. Способ построения правильного семнадцатиугольника был получен Гауссом в 1796 году. Интересно отметить, что это юношеское открытие имело для него такое большое значение, что он завещал изобразить правильный семнадцатиугольник на своей надгробной плите. Таким образом, в силу теоремы 1 нельзя построить циркулем и линейкой правильные семи-, одиннадцати- и тринадцатиугольники. Эти числа не являются простыми числами Ферма. Нельзя также построить правильный девятиугольник, так как число 9 равно произведению двух одинаковых простых чисел. При $k = 3$ число вида (40.2) равно 257. Оно является простым, поэтому циркулем и линейкой можно построить правильный 257-угольник. При $k = 4$ мы получим число, равное 65537,

[1] Доказательство этого утверждения также имеется в пособии [10].

которое также является простым, а при $k = 5, 6, 7$ числа $p_k = 2^{2^k} + 1$ составные.

Как мы видели, циркуль и линейка не позволяют решить любую задачу на построение. Поэтому еще с античных времен математики использовали различные инструменты, отличные от циркуля и линейки, для решения задач конструктивной геометрии. Интереснейший материал, посвященный этому вопросу, приведен в пособии [10]. Мы покажем, как, слегка изменив систему элементарных построений для циркуля и линейки, приведенную в § 37, добавив еще одно элементарное построение, весьма естественное, можно решить задачу трисекции угла. Напомним, что в определении 1, § 37, были сформулированы пять элементарных построений, которые лежат в основе нашего исследования задач конструктивной геометрии. Еще раз приведем формулировку этого определения.

Пусть на плоскости имеется конечное число фигур. Следующие действия, позволяющие получать из имеющихся фигур новые, назовем элементарными построениями:

1) *получение пересечения двух имеющихся фигур*;
2) *выбор любого конечного числа произвольных точек, принадлежащих одной из имеющихся фигур*;
3) *имеется фигура* $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$, *состоящая из конечного числа точек*;
4) *получение прямой, проходящей через две имеющиеся точки*;
5) *получение окружности с центром в точке* A *и радиусом* BC, *где* A, B, C — *имеющиеся точки*.

Добавим к этим построениям еще одно, которое описывает свойства линейки с отмеченным на ней отрезком:

6) *если на плоскости построены точка и две фигуры, то можно построить прямую, проходящую через эту точку, так чтобы отрезок, заключенный между точками пересечения с данными фигурами, был равен данному фиксированному отрезку, если такая прямая существует*.

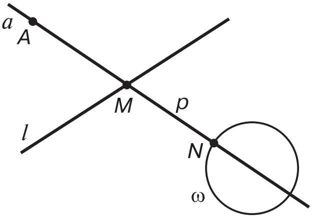


Рис. 187

Иллюстрация элементарного построения 6 приведена на рис. 187. Пусть A — данная точка, прямая l и окружность ω — данные фигуры, прямая a — искомая, а отрезок MN равен данному фиксированному отрезку p. В построении 6 постулируется следующий простой чертежный прием: на линейке отмечается данный отрезок, затем она «прикладывается» к точке A и «передвигается» таким образом, чтобы концы отложенного отрезка принадлежали данным фигурам.

Линейка с отмеченным отрезком позволяет сделать все построения, выполняемые обыкновенной линейкой. Поэтому любая задача, разрешимая циркулем и линейкой, может быть также решена также циркулем и линейкой с отмеченным на ней отрезком. Но элементарное построение 6 существенно расширяет круг задач, решаемых указанными инструментами. Покажем, как с помощью циркуля и линейки с отмеченным отрезком можно осуществить трисекцию угла.

Пусть дан произвольный угол AOB, меньший прямого угла. Ясно, что если мы сможем построить одну треть этого угла, то тем самым будет решена задача трисекции любого угла, меньшего развернутого, так как прямой угол делится на три части циркулем и линейкой. Построим окружность с центром в вершине угла, точке O, радиус которой равен отрезку p, отмеченному на линейке (рис. 188). Воспользуемся элементарным построением 6 и проведем прямую, проходящую через точку A так, чтобы ее отрезок CD, заключенный между окружностью и прямой, был равен отмеченному отрезку p. Тогда треугольник OCD — равнобедренный, $OC = CD = p$. Из свойств равнобедренного треугольника следует, что $\angle COD = \angle CDO = \alpha$. Угол OCA является внешним углом для рассматриваемого треугольника, поэтому $\angle OCA = \angle COD + \angle CDO = 2\alpha$. Рассмотрим теперь треугольник OAC. Он равнобедренный, так как отрезки OA и OC являются радиусами окружности, поэтому $\angle OAC = \angle ACO = 2\alpha$. Рассмотрим, наконец, треугольник OAD. Угол AOB по отношению к этому треугольнику является внешним. Поэтому $\angle AOB = \angle ADO + \angle OAD = 3\alpha$. Таким образом, трисекция угла AOB проведена, построена его одна треть — угол ADO.

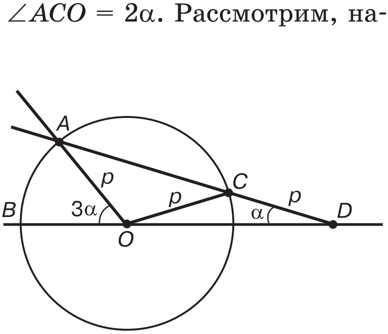


Рис. 188

Интересный результат был доказан в 1833 году немецким математиком Якобом Штейнером: *если на плоскости дана окружность и дан ее центр,* *то любая задача на построение, разрешимая циркулем и линейкой, может быть решена одной линейкой*[1]. Поскольку линейкой нельзя построить окружность, в тех задачах, где она используется, следует считать, что окружность построена, если построен ее центр и отрезок, равный радиусу.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 4. *Дана окружность, прямая, проходящая через центр, и точка, не принадлежащая данным окружности и прямой. Построить прямую, проходящую через данную точку перпендикулярно данной прямой.*

Решение. Пусть a — данная прямая, M — данная точка (рис. 189). Обозначим точки пересечения прямой a с окружностью через A и B. Через точку M проведем прямые MA и MB. Обозначим точки их пересечения с окружностью соответственно через C и D. Рассмотрим треугольник ABM. Проведем прямые BC и AD, точку их пересечения обозначим через N. Так как углы ACB и ADB опираются на диаметр, то они являются прямыми углами. Поэтому прямые CB и AD содержат высоты треугольника ABM, а точка N совпадает с точкой пересечения его высот. Отсюда следует, что прямая MN содержит третью высоту треугольника, поэтому она перпендикулярна прямой a.

С построениями одной линейкой при тех или иных заданных на плоскости фигурах вы познакомитесь при изучении курса проективной геометрии.

Задачи, для решения которых требуется один циркуль, рассматривал в конце XVIII века итальянский математик Маскерони. Из его исследований вытекало, что если из числа элементарных построений исключить построение 1, для выполнения которого требуется линейка (§ 38), и считать, что прямая построена, если построены две ее точки, то *любое построение, осуществляемое циркулем и линейкой, можно провести одним циркулем*. Впоследствии выяснилось, что за сто лет до Маскерони к такому же результату пришел шотландский математик

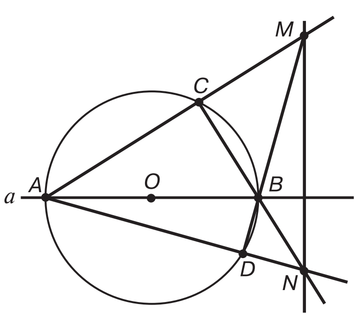


Рис. 189

[1] Ранее это утверждение было высказано без доказательства Ж. Понселе, поэтому его часто называют теоремой Понселе—Штейнера.

Мор. Поэтому сформулированное утверждение носит название теоремы Мора—Маскерони. Построения одним циркулем в ряде случаев осуществлять гораздо точнее и удобнее, чем с помощью циркуля и линейки. Не случайно этими построениями интересовался в то время еще молодой главнокомандующий французской армией в Италии генерал Наполеон Бонапарт. Он был весьма одаренным человеком, считал необходимым общаться со всеми, кто может расширить его кругозор и дать ему полезные практические познания. Известно, что он с увлечением обсуждал с Маскерони проблемы построений одним циркулем в перерывах между своими знаменитыми военными операциями. Приведем пример построения одним циркулем.

Задача 5. *Прямая a задана своими двумя точками A и B. Дана третья точка C, не принадлежащая прямой AB. Построить прямую, проходящую через C, параллельную AB.*

В силу нашего замечания построение искомой прямой сводится к построению еще одной точки этой прямой. Для этого построим окружность α с центром в точке B и радиусом AC (рис. 190), затем окружность β с центром в точке C и радиусом AB. Точка их пересечения D — искомая, она принадлежит прямой, проходящей через точку C и параллельной AB, так как построенный четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм (докажите самостоятельно).

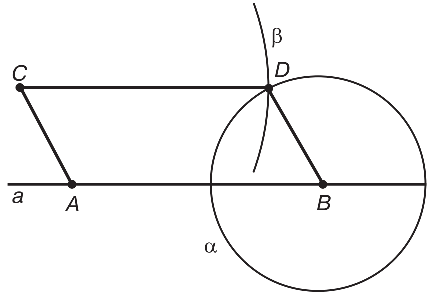


Рис. 190

Мы не будем доказывать теоремы Штейнера и Мора-Маскерони, с ними можно познакомиться в пособии [10]. В заключение этого параграфа коснемся вопроса о построениях средствами, отличными от циркуля и линейки. Не перечисляя всего набора инструментов, рассматривавшихся в литературе по геометрическим построениям, назовем лишь построения двусторонней линейкой и прямым углом. Двусторонняя линейка позволяет проводить параллельные прямые, находящиеся друг от друга на фиксированном расстоянии, через две имеющиеся точки. Подробные свойства построений этим инструментом рассмотрены в пособии [10], где показано, что *двусторонней линейкой можно сделать все построения, выполнимые циркулем и линейкой*, при существенном дополнительном предположении, что множество данных фигур содержит только точки, прямые или окружности.

С помощью прямого угла можно осуществить все построения, выполняемые линейкой, проводить прямые, перпендикулярные данной через любую данную точку, а также определять точку, принадлежащую построенной фигуре, из которой данный отрезок виден под прямым углом, если она существует. Для прямого угла справедливо утверждение, аналогичное сформулированному выше для двусторонней линейки: *прямым углом можно выполнить все построения, осуществляемые циркулем и линейкой*. Это утверждение также доказано в пособии [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Атанасян Л. С., Базылев В. Т.* Геометрия. Ч. 1. — М.: Просвещение, 1986.
2. *Атанасян С. Л.* Геометрия 1. — М.: Мысль и жизнь, 2001.
3. *Атанасян С. Л.* Сборник задач по геометрии. Ч. 1. — М.: Мысль и жизнь, 2000.
4. *Атанасян Л. С., Атанасян В. А.* Сборник задач по геометрии. Ч. 1. — М.: Просвещение, 1973.
5. *Атанасян С. Л., Глизбург В. И.* Сборник задач по геометрии. Ч. I. — М.: Exmo Education Эксмо, 2008.
6. *Атанасян С. Л., Цаленко М. М.* Задачник-практикум по геометрии. — М.: Просвещение, 1994.
7. *Костовский Ф. Н.* Геометрические построения одним циркулем. — М.: Наука, 1984.
8. *Аргунов Б. И., Балк М. Б.* Геометрические построения на плоскости. — М.: Учпедгиз, 1957.
9. *Александров И. И.* Сборник геометрических задач на построение. — М.: Учпедгиз, 1954.
10. *Адлер А.* Теория геометрических построений. — Л.: Учпедгиз, 1940.
11. *Постников М. М.* Теория Галуа. — М.: Физматгиз, 1963.
12. *Чистяков В. Д.* Три знаменитые задачи древности. — М.: Учпедгиз, 1963.
13. *Покровский В. Г.* Геометрические построения на плоскости. — М.: Жизнь и мысль, 2002.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Минимальные системные требования определяются соответствующими требованиями программы Adobe Reader версии не ниже 11-й для операционных систем Windows, Mac OS, Android, iOS, Windows Phone и BlackBerry, экран 10"

Учебное электронное издание

Атанасян Сергей Левонович
Покровский Владимир Григорьевич

ГЕОМЕТРИЯ 1

Учебное пособие для вузов

Ведущий редактор *Н. А. Шихова*
Художник *Н. А. Новак*
Технический редактор *Е. В. Денюкова*
Корректор *Е. Н. Клитина*
Компьютерная верстка: *В. И. Савельев*

Подписано к использованию 09.09.14.

Издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний»
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: binom@Lbz.ru, http://www.Lbz.ru

Сергей Левонович Атанасян – профессор и заведующий кафедрой алгебры, геометрии и методики их преподавания Института математики и информатики Московского городского педагогического университета, доктор педагогических наук. Автор более 80 научных и научно-методических работ. Область научных интересов – геометрия пространств с вырожденными проективными метриками, информатизация образования и методика преподавания математики в высшей школе.

Владимир Григорьевич Покровский – доцент кафедры алгебры, геометрии и методики их преподавания Института математики и информатики Московского городского педагогического университета, кандидат физико-математических наук. Автор более 40 научных работ. Область научных интересов – комбинаторная геометрия.