Геометрия в негеометрических задачах

А. Д. Блинков

Школьные
Математические
Кружки

А. Д. Блинков

Геометрия в негеометрических задачах

Издательство МЦНМО
Москва, 2016

УДК 51(07)
ББК 22.1
Б69

Книга издана при поддержке
Благотворительного фонда «Дар»

Блинков А. Д.

Б69 Геометрия в негеометрических задачах. — М.: МЦНМО, 2016. — 160 с.: ил.

ISBN 978-5-4439-1031-4

Пятнадцатая книжка серии «Школьные математические кружки» посвящена геометрическим методам решения различных задач и предназначена для занятий со школьниками 6—11 классов. В неё вошли разработки девяти занятий математического кружка с подробно разобранными примерами различной сложности, задачами для самостоятельного решения и методическими указаниями для учителя.

В конце книги приведены дополнительные задачи и их решения, обширный список использованной литературы, а также список источников, содержащих более сложный материал.

Для удобства использования заключительная часть книжки, как всегда, сделана в виде раздаточных материалов. Книжка адресована школьным учителям математики и руководителям математических кружков. Надеемся, что она будет интересна школьникам и их родителям, студентам педагогических вузов, а также всем любителям математики.

ISBN 978-5-4439-1031-4

Предисловие

Обратиться к заявленной теме автора побудила не только любовь к школьной геометрии и наличие давно собираемой большой коллекции задач, допускающих геометрические методы решения (часть из которых были известны автору еще до того, как они были опубликованы в тех или иных книгах для учителя). Исходя из многолетнего опыта работы со школьниками, следует отметить, что многие школьники воспринимают школьные курсы алгебры и геометрии (а впоследствии и раздел тригонометрии) как совершенно независимые, в то время как они (и не только они) являются частью одной науки — математики. Вместе с тем наиболее красивые, а часто и наиболее рациональные решения многих задач возникают, если привлекать методы из других разделов математики. В частности, очень мощным является «геометрический подход» к решению некоторых задач, условие которых сформулировано на языке арифметики, алгебры, комбинаторики, тригонометрии или математического анализа. Это объясняется прежде всего тем, что геометрия — наиболее наглядный раздел математики. Использование геометрических способов решения задач в каком-то смысле «возвращает» нас к математикам древности, которые большинство математических объектов и операций воспринимали с точки зрения геометрии.

В этой книжке серии «Школьные математические кружки», посвященной геометрическому решению негеометрических задач, сделана попытка продемонстрировать, каким образом можно перевести условие задачи на язык геометрии, после чего показать красоту и эффективность геометрического метода ее решения. Книжка содержит девять занятий математического кружка. В материалы каждого занятия входят: вступительный и поясняющий текст учителя, включающий в себя несколько подробно разобранных типовых задач по теме; упражнения и задачи, которые могут быть предложены учащимся для самостоятельного решения (как на занятии, так и дома); подробные решения этих задач; методические комментарии для учителя, отмеченные чертой на полях. Многие из предлагаемых задач имеют и другие, не геометрические решения, которые сознательно оставлены за рамками этого издания.

В конце книги приведены дополнительные задачи различного уровня трудности, часть из которых в какой-то степени дублирует задачи, предложенные для занятий, а часть дополняет их новыми идеями (наиболее сложные задачи отмечены знаком *). Эти задачи можно использовать на усмотрение преподавателя (или обучающегося). Для них также, как правило, приведены подробные решения (в наиболее простых случаях — ответы и указания). Для удобства в конце каждого занятия приведен список задач из этого раздела, которые имеет смысл использовать для закрепления материала, контроля его освоения и более глубокого изучения. Следует учесть, что есть задачи, которые отнесены к нескольким занятиям (поскольку допускают различные подходы). Несколько задач (Д61—Д63 и в какой-то мере Д59 и Д60) трудно отнести к какому-то из занятий, но их решение позволяет расширить область применения геометрических методов.

Разбиение материала на занятия носит в какой-то степени условный характер: в одних случаях тема занятия соответствует тому или иному разделу математики, а в других случаях отражает тот или иной «подход» к решению задач.

Отметим, что за рамками книжки остались задачи на геометрическое суммирование, а также геометрический подход к задачам на переливание, так как эти темы многократно и достаточно полно излагаются в других источниках. Кроме того, в нее не включен раздел, связанный с геометрическими иллюстрациями к доказательству ряда простых алгебраических соотношений и к реализации некоторых числовых алгоритмов.

Читатели, которых заинтересует этот и сопутствующий ему материал, могут найти его в источниках, указанных во второй части списка литературы (раздел «Дополнительная литература»).

Приведем краткое содержание занятий.

Занятие 1. Расстояния на прямой и не только. Занятие доступно учащимся 6—7 классов. Посвящено геометрическому подходу к алгебраическим и комбинаторным задачам, связанным с модулем числа.

Занятие 2. Расстояния на координатной плоскости. Занятие ориентировано на учащихся 8—9 классов. Посвящено использованию декартовой системы координат для решения некоторых уравнений, систем уравнений, задач на наибольшее и наименьшее значения. Идейно продолжает линию, намеченную в занятии 1.

Занятие 3. Задачи на движение. Занятие ориентировано на учащихся 8—9 классов. Посвящено графическим и геометрическим методам решения текстовых задач, связанных, как правило, с равномерным движением нескольких объектов.

Занятие 4. Используем метрические теоремы геометрии. Занятие ориентировано на учащихся 9 классов. Посвящено решению уравнений, систем уравнений и задач на наибольшее и наименьшее значения с помощью теоремы Пифагора, теорем синусов и косинусов, формул для вычисления площадей.

Занятие 5. Тригонометрия. Занятие ориентировано на учащихся 9—10 классов. Рассматриваются тригонометрические формулы, тождества и неравенства, которые можно доказать геометрическими методами. С помощью геометрии вычисляются значения ряда тригонометрических выражений.

Занятие 6. Используем векторы. Занятие ориентировано на учащихся 9—10 классов. Посвящено применению векторов на плоскости к решению ряда задач, которые традиционно относят к алгебраическим или тригонометрическим.

Занятие 7. Обратные тригонометрические функции. Занятие ориентировано на учащихся 10 классов. Рассматриваются геометрические методы вычислений значения выражений, доказательства тождеств и решения уравнений, связанных с обратными тригонометрическими функциями.

Занятие 8. Расстояния и векторы в пространстве. Занятие ориентировано на учащихся 10—11 классов. Посвящено различным задачам, условие которых можно интерпретировать с помощью расстояний в декартовой системе координат в пространстве, а также задачам, решение которых эффективно использует векторы в пространстве. Продолжает линии, намеченные в занятиях 2 и 6.

Занятие 9. Геометрический смысл интеграла. Занятие ориентировано на учащихся 11 классов. Рассматриваются геометрические методы вычисления определенных интегралов, геометрические интерпретации некоторых свойств определенных интегралов и другие задачи, связанные с интегралами и допускающие геометрический подход.

Понятно, что преподаватель математического кружка (или учитель на уроках и факультативных занятиях) может по своему усмотрению использовать только часть предложенных занятий, использовать эти занятия для более старших школьников, поменять порядок их изучения и т. д.

Выражаю благодарность всем авторам книг и статей, указанных в списке использованной литературы, а также авторам всех использованных в книжке задач (многих из которых установить, к сожалению, не удалось). Отдельно хочется отметить книги [6] и [12], в которых есть большие подборки задач по данной тематике.

Автор благодарен А. В. Шаповалову, который оказал существенное влияние на концепцию книги и помог улучшить ее текст, Е. О. Акилбаевой, Е. В. Бакаеву, Д. В. Прокопенко и Г. Б. Филипповскому, которые пополнили имеющуюся коллекцию задач и предложили некоторые оригинальные решения, Ю. А. Блинкову, Е. С. Горской и А. И. Сгибневу, с которыми текст книги неоднократно обсуждался, а также всем школьникам, на занятиях с которыми этот материал был апробирован и «протестирован».

Занятие 1
Расстояния на прямой и не только

Разберем несколько несложных задач с геометрическим содержанием, которые дают «ключ» к решению ряда задач, связанных с понятием модуля числа.

Прежде всего напомним следующее.

1. *Модулем числа* x называется расстояние на координатной прямой от точки с координатой x до нуля.

2. Пусть на координатной прямой отмечены точки $A(a)$ и $B(b)$. Тогда расстояние между этими точками вычисляется по формуле $AB = |a - b|$, а середина C отрезка AB имеет координату $c = \dfrac{a+b}{2}$ (см. рис. 1.1).

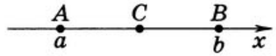


Рис. 1.1

Первую из этих формул можно доказать, рассмотрев различные случаи расположения точек A и B по отношению друг к другу и к точке $O(0)$, а вторая формула следует из первой, если записать равенство $AC = BC$, используя координаты этих точек.

Начнем с очень простого практического вопроса: где надо вырыть колодец, чтобы расстояние до него от двух домов было одинаковым? Естественный ответ: в середине отрезка, соединяющего эти дома.

Формально этот ответ не совсем точен. Для школьников, уже изучавших геометрию, можно напомнить, что *геометрическим местом точек на плоскости, равноудаленных от двух данных точек, является серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему эти точки.*

Но с точки зрения здравого смысла из всех таких точек разумно выбрать ту, для которой требуемые расстояния не только равны, но и являются наименьшими из возможных. Действительно, если C — середина отрезка AB, а K — произвольная точка серединного перпендикуляра к этому отрезку, отличная от C, то $KA > CA$, так как в прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета (см. рис. 1.2).

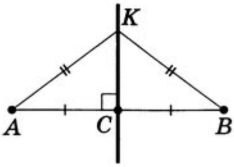


Рис. 1.2

Пример 1.1. Решите уравнение

$$|x-2| = |x-4|.$$

Решение. Рассмотрим координатную прямую. Условие задачи означает, что на ней надо найти точку, которая равноудалена от точек $A(2)$ и $B(4)$. Понятно, что это середина отрезка AB, то есть $C(3)$. Следовательно, решением уравнения является $x = 3$ (см. рис. 1.3*а*).

Рис. 1.3

Ответ: 3.

Более того, с той же легкостью можно решать и некоторые неравенства, например $|x+1| \geqslant |7-x|$.

Действительно, из определения модуля следует, что *модули противоположных чисел равны*, а чтобы мы могли использовать формулу расстояния между точками, под знаком модуля должна стоять разность координат. Поэтому данное неравенство удобно переписать в таком виде: $|x-(-1)| \geqslant |x-7|$.

Тогда его решением будут все точки координатной прямой, для которых расстояние до точки $A(-1)$ не меньше, чем расстояние до точки $B(7)$. Понятно, что этим свойством обладает точка $C(3)$ — середина отрезка AB, а также все точки, лежащие правее точки C (см. рис. 1.3*б*). Таким образом, решением неравенства являются все числа, большие или равные трем, то есть $x \geqslant 3$.

Обычно этот результат записывают в виде промежутка $[3; +\infty)$, но можно ограничиться словесной формой или записью соответствующего простейшего неравенства.

Переформулируем исходную задачу. Пусть колодец требуется вырыть так, чтобы сумма расстояний от него до двух домов была наименьшей. Интуиция подсказывает, что колодец надо строить на отрезке, соединяющем эти дома, но в какой точке?

Оказывается, в любой точке этого отрезка! Действительно, *какую бы точку M на отрезке AB мы ни выбрали, сумма расстояний от нее до концов отрезка одна и та же, и она равна длине отрезка AB.*

Если же выбрать произвольную точку N на прямой AB вне отрезка, то сумма расстояний от нее до точек A и B, очевидно, будет больше, чем длина отрезка AB. Аналогично если точка K не лежит на прямой AB, то $KA + KB > AB$ по неравенству треугольника (см. рис. 1.4).

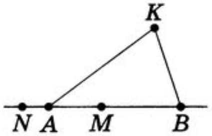


Рис. 1.4

Полученный факт позволяет решать простейшие задачи о сумме двух модулей.

Пример 1.2. Найдите наименьшее значение выражения

$$|x + 4| + |x - 2|.$$

Решение. Рассмотрим на координатной прямой точки $A(-4)$ и $B(2)$. Условие задачи означает, что надо найти такие точки на координатной прямой, для которых сумма расстояний до точек A и B будет наименьшей. Эти точки, как было доказано, лежат на отрезке AB, а искомая сумма равна длине отрезка AB, то есть равна 6 (см. рис. 1.5*а*).

Ответ: 6.

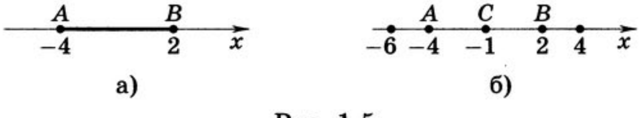


Рис. 1.5

Пример 1.3. Решите уравнение $|x + 4| + |x - 2| = 10$.

Решение. Условие задачи означает, что на координатной прямой надо искать точки, сумма расстояний от которых до точек $A(-4)$ и $B(2)$ равна 10. Понятно, что на отрезке AB они лежать не могут, иначе эта сумма была бы равна 6, значит, они лежат вне этого отрезка. Искать их можно, например, так: заметим, что для любой точки N, лежащей на координатной прямой вне отрезка, $NA + NB = 2NC$, где $C(-1)$ — середина отрезка AB (подумайте почему).

Таким образом, искомые точки удалены от точки $C(-1)$ на расстояние 5. Получим, что решением уравнения являются два числа: 4 и -6 (см. рис. 1.5*б*).

Ответ: -6; 4.

Аналогично можно решать и неравенства, в частности, из предыдущих рассуждений следует, что решением неравенства $|x + 4| + |x - 2| > 10$ является объединение двух промежутков: $(-\infty; -6) \cup (4; +\infty)$.

Усложним задачу. Пусть теперь вдоль прямой дороги стоят семь домов, причем расстояния между соседними домами не обязательно одинаковы. В какой точке дороги надо вырыть колодец, чтобы сумма расстояний от него до всех домов была наименьшей?

Обозначим дома по порядку точками A_1, A_2, ..., A_6, A_7 на прямой (см. рис. 1.6), и пусть X — искомая точка. Для

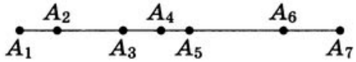


Рис. 1.6

того чтобы сумма $XA_1 + XA_7$ была наименьшей, точка X должна находиться на отрезке A_1A_7. Сумма $XA_2 + XA_6$ наименьшая, если точка X лежит на отрезке A_2A_6, а сумма $XA_3 + XA_5$ наименьшая, если X лежит на отрезке A_3A_5. Следовательно, сумма $XA_1 + XA_2 + XA_3 + XA_5 + XA_6 + XA_7$ наименьшая, если точка X принадлежит всем трем отрезкам, то есть лежит на отрезке A_3A_5. Осталось сделать наименьшим расстояние от X до A_4. Понятно, что это произойдет в том случае, если X совпадает с A_4. Таким образом, колодец надо строить около четвертого дома, причем полученный результат никак не зависит от расстояний между соседними домами!

Пример 1.4. Найдите наименьшее значение суммы

$$|x - 1| + |x - 2| + ... + |x - 11|.$$

Решение. Условие задачи означает, что на координатной прямой надо найти точку, сумма расстояний от которой до точек $A_1(1)$, $A_2(2)$, ..., $A_{11}(11)$ будет наименьшей. По аналогии с только что рассмотренной задачей получим, что это точка $A_6(6)$. Остается подсчитать сумму расстояний от этой точки до остальных: $(1+2+3+4+5)\cdot 2 = 30$.

Ответ: 30.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1.1. Решите уравнение или неравенство: а) $|x| = |x-3|$; б) $|5+x| \leqslant |5-x|$.

1.2. Найдите наименьшее значение выражения $|a-100| + |100+a|$.

1.3. Решите уравнения или неравенства: а) $|x-1| + |x-2| = 3$; б) $|x-1| + |x-2| < 3$; в) $|x| + |1+x| = 1$; г) $|x| + |1+x| \geqslant 1$; д) $|6+x| + |6-x| = 8$.

1.4. а) На одной стороне улицы стоят подряд десять домов (расстояния между соседними домами не обязательно одинаковые). В каком месте надо построить газетный киоск, чтобы сумма расстояний от него до всех домов была наименьшей?

б) Найдите наименьшее значение суммы

$$|a| + |a+1| + |a+2| + \ldots + |a+100|.$$

1.5. а) Расстояние между деревнями A и B равно 3 км. В деревне A живут 300 школьников, а в деревне B — 200 школьников. В каком месте надо построить школу, чтобы сумма всех расстояний, пройденных школьниками по дороге в школу, была наименьшей?

б) Найдите наименьшее значение каждого из выражений:

1) $3|x-2| + 2|x-5|$; 2) $|8x+40| + |5x+40|$.

1.6. В Нью-Йорке шахматных мастеров больше, чем на всей остальной территории США. Планируется провести шахматный турнир с участием всех мастеров. Решено, что турнир будет проведен в таком месте, чтобы сумма расстояний всех переездов была наименьшей. Нью-Йоркские мастера считают, что этому критерию удовлетворяет их город, а мастера с Западного побережья настаивают на том, что турнир надо проводить в городе, который является «центром тяжести» всей совокупности мест, в которых живут шахматисты. Кто из них прав?

1.7. Три гнома живут в разных домах на плоскости и ходят со скоростями 1 км/ч, 2 км/ч и 3 км/ч соответственно. Какое место для ежедневных встреч им надо выбрать, чтобы сумма времён, необходимых каждому из гномов на путь от своего дома до этого места (по прямой), была наименьшей?

Ответы и решения

1.1. Ответ: а) 1,5; б) $(-\infty; 0]$.

Решение аналогично рассмотренному в примере 1.1.

1.2. Ответ: 200.

Решение аналогично рассмотренному в примере 1.2.

1.3. Ответ: а) 0; 3; б) (0; 3); в) $[-1; 0]$; г) $(-\infty; -1] \cup \cup [0; +\infty)$; д) решений нет.

Решение аналогично рассмотренному в примере 1.3.

1.4. Ответ: а) в любой точке отрезка, соединяющего пятый и шестой дом: б) 2550.

Решение аналогично рассмотренным: а) в задаче о семи домах и колодце; б) в примере 1.4.

1.5. Ответ: а) В деревне A; б) 1) 6; 2) 15.

Решение. а) Пусть школа построена в какой-то точке C отрезка AB. Независимо от расположения точки C, сумма расстояний AC и BC равна AB, то есть 3 км. Поэтому для каждой пары школьников, живущих в разных деревнях, сумма пройденных расстояний до школы равна 3 км. Таких пар школьников — 200, значит, искомая сумма расстояний будет наименьшей, если для остальных ста школьников, живущих в деревне A, сумма расстояний до школы будет наименьшей. Следовательно, точка C должна совпасть с точкой A. Вне отрезка AB строить школу смысла не имеет, так как в этом случае сумма всех пройденных расстояний увеличится: сумма расстояний для каждой из 200 пар станет больше AB, а для каждого из остальных 100 школьников — больше 0.

Это решение можно оформить алгебраически. Пусть x км — расстояние от школы до деревни A, тогда $(3-x)$ км — расстояние от школы до B. Искомая сумма $S = 300x + 200(3-x) = 100x + 600$ будет наименьшей, если $x = 0$.

б) 1. Рассмотрим на координатной прямой точки $A(2)$, $B(5)$ и $C(x)$. Преобразуем выражение:

$$3|x-2| + 2|x-5| = 2(|x-2| + |x-5|) + |x-2|.$$

Выражение в скобках принимает наименьшее значение, если точка $C(x)$ лежит на отрезке AB (см. пункт а), а слагаемое $|x-2|$ минимально при $x = 2$. Поэтому и значение суммы будет наименьшим при $x = 2$.

2. Задача практически сводится к предыдущей после следующего преобразования: $|8x + 40| + |5x + 40| = 8|x + 5| + 5|x + 8|$.

1.6. Ответ: правы мастера из Нью-Йорка.

Решение. Рассмотрим всех мастеров, живущих не в Нью-Йорке, и каждому из них дадим в пару какого-то из шахматистов Нью-Йорка. Для каждой такой пары сумма переездов будет наименьшей, если турнир проводить в городе, лежащем в любой точке отрезка MN, где M — место жительства выбранного шахматиста, а N — Нью-Йорк. Значит, искомая сумма расстояний не меньше, чем сумма длин всех таких отрезков. Эти отрезки имеют единственное пересечение — точку N, поэтому для всех уже рассмотренных шахматистов искомая сумма наименьшая, если турнир проводить в N. Остались не рассмотренными только те мастера из Нью-Йорка, которым не хватило пары, но для них проведение турнира в Нью-Йорке также оптимально.

1.7. Ответ: в доме первого гнома.

Решение. Заметим, что на любой путь S по прямой один гном, идущий со скоростью V км/ч, затратит столько же времени, сколько в сумме затратят n гномов, идущих со скоростями в n раз больше (так как $t = \frac{S}{V} = n \cdot \frac{S}{nV}$).

Поэтому можно переформулировать задачу следующим образом: пусть скорости всех гномов одинаковы и равны 6 км/ч, но в первом доме живут 6 гномов, во втором — 3, а в третьем — 2. При постоянной скорости пройденное расстояние пропорционально затраченному времени, поэтому ответ в задаче не изменится, если искать точку, для которой *сумма расстояний*, пройденных всеми гномами, *будет наименьшей*. Тогда, так как $6 > 3 + 2$, то задача становится аналогичной задаче 1.6, и мы получим, что встречаться надо в доме первого гнома!

Можно также использовать задачи Д1—Д3.

Занятие 2
Расстояния на координатной плоскости

В занятии 1 было, в частности, показано, что ряд алгебраических выражений с одной переменной можно эффективно интерпретировать в виде расстояний на координатной прямой. Аналогично при решении многих алгебраических задач, в которых фигурируют выражения с двумя переменными, удобно использовать координатную плоскость.

Напомним, что расстояние между точками $A(x_A; y_A)$ и $B(x_B; y_B)$ на координатной плоскости вычисляется по формуле

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Напомним также, что линейное уравнение с двумя переменными задает на координатной плоскости прямую, а уравнение вида $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ задает окружность с центром $C(a; b)$ и радиусом $R \geqslant 0$. Геометрической основой решения многих задач этого занятия служит неравенство треугольника: *для любых точек A, B и C плоскости выполняется неравенство $|AC - BC| \leqslant AB \leqslant AC + BC$, причем равенство может достигаться только в случае, когда точки лежат на одной прямой.*

Рассмотрим примеры.

Пример 2.1. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2}.$$

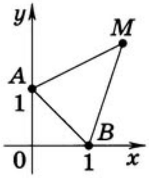


Рис. 2.1

Решение. Рассмотрим точки $A(0; 1)$ и $B(1; 0)$ в декартовой системе координат (см. рис. 2.1). Пусть $M(x; y)$, тогда $MA = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$; $MB = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$. По неравенству треугольника $MA + MB \geqslant AB$, поэтому данное выражение принимает наименьшее значение в том случае, когда достигается равенство, то есть если точка M лежит на отрезке AB.

В этом случае $MA + MB = AB = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$.
Ответ: $\sqrt{2}$.

Пример 2.2. При каких значениях a разность корней квадратного уравнения

$$x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0$$

принимает наибольшее значение?

В данном случае речь идет об уравнении с одной переменной и параметром, но заданное равенство можно также рассматривать и как уравнение с двумя переменными.

Решение. Так как

$$x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = (x^2 - 6x + 9) + (a^2 - 4a + 4) - 1 = \\ = (x-3)^2 + (a-2)^2 - 1,$$

то исходное уравнение равносильно уравнению $(x-3)^2 + (a-2)^2 = 1$. Графиком этого уравнения в системе координат $(x; a)$ является окружность с центром в точке $(3; 2)$ и радиусом 1 (см. рис. 2.2).

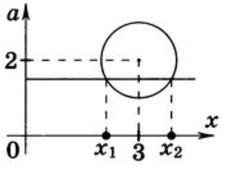


Рис. 2.2

Рассмотрим произвольную прямую, параллельную оси x и пересекающую окружность в двух точках. Абсциссы x_1 и x_2 этих точек являются корнями уравнения, а разность $x_2 - x_1$, где $x_2 > x_1$, равна длине хорды окружности. Эта разность будет наибольшей в случае, если рассматриваемая хорда является диаметром. Следовательно, искомое значение a равно 2.

Ответ: при $a = 2$.

Пример 2.3. Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения $y - x^2$, если $|x| + |y| \leqslant 13$.

Решение. Графиком уравнения $|x| + |y| = 13$ является контур квадрата с центром в начале координат, поэтому данному неравенству удовлетворяют координаты всех точек, принадлежащих этому квадрату (см. рис. 2.3).

Пусть $y - x^2 = t$, тогда решение задачи сводится к тому, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения переменной t, для которых график функции $y = x^2 + t$ имеет общие точки с найденным множеством.

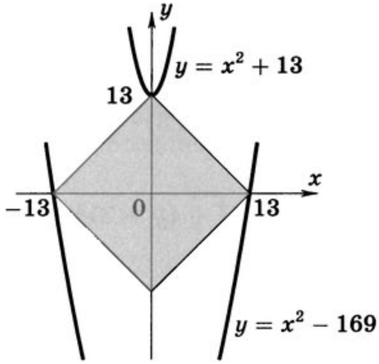


Рис. 2.3

График указанной функции получается из параболы $y = x^2$ параллельным переносом вдоль оси y, поэтому: 1) наибольшее значение t достигается, если вершиной параболы $y = x^2 + t$ является точка $(0; 13)$, то есть при $t = 13$; 2) наименьшее значение t достигается, если парабола $y = x^2 + t$ проходит через точки $(13; 0)$ и $(-13; 0)$, то есть при $t = -169$.

Ответ: наибольшее значение равно 13, а наименьшее значение равно -169.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

2.1. Сколько решений имеет уравнение

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y+2)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 5?$$

2.2. Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения $(a-c)^2 + (b-d)^2$, если $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 4$.

2.3. Найдите наибольшее значение выражения $x^2 + y^2$, если $|x - y| \leqslant 2$ и $|3x + y| \leqslant 6$.

2.4. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{(x-9)^2 + 4} + \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(y-3)^2 + 9}.$$

2.5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + \sqrt{1 - y^2} = 1, \\ y + \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{3}. \end{cases}$$

2.6. Найдите наименьшее значение дроби $\frac{x}{y}$, если $\sqrt{x-1}+$ $+\sqrt{y-1}=1$.

2.7. Найдите наименьшее значение выражения

$$|x-y|+\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}.$$

2.8. Решите уравнение

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x+5)^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}=8.$$

Ответы и решения

2.1. Ответ: бесконечно много.

Решение. Пусть $M(x;y)$, $A(-3;-2)$, $B(1;1)$. Тогда $AM=$ $=\sqrt{(x+3)^2+(y+2)^2}$; $BM=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$. Так как $AB=\sqrt{(1+3)^2+(1+2)^2}=5$, то условие задачи равносильно тому, что $AM+$ $+BM=AB$ (см. рис. 2.4).

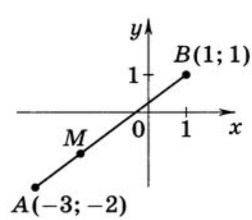


Рис. 2.4

Таким образом, точка M удовлетворяет условию тогда и только тогда, когда она принадлежит отрезку AB. Так как координаты любой точки этого отрезка являются решением данного уравнения, то этих решений бесконечно много.

Отметим, что если заменить число 5 в правой части уравнения на меньшее число, то полученное уравнение не будет иметь решений, а если заменить знак «=» на знак «$\geqslant$», то решениями будут координаты всех точек плоскости.

2.2. Ответ: наименьшее значение равно 1, а наибольшее равно 9.

Решение. Рассмотрим две окружности на координатной плоскости: $x^2+y^2=1$ и $x^2+y^2=4$, их радиусы равны 1 и 2 соответственно, а $O(0;0)$ — общий центр. По условию точка $M(a;b)$ принадлежит первой окружности, а точка $N(c;d)$ — второй. Так как $(a-c)^2+(b-d)^2=MN^2$, то задача сводится к тому, чтобы найти наибольшее и наименьшее расстояние между точками этих окружностей.

По неравенству треугольника $MN\leqslant MO+ON=1+2=3$ и $MN\geqslant NO-OM=2-1=1$, причем эти значения достигаются в случаях, когда точки O, M и N лежат на одной прямой (треугольник — «вырожденный»). Например, при $a = 1$, $b = 0$, $c = 2$, $d = 0$ значение выражения равно 1, а при $a = 1$, $b = 0$, $c = -2$, $d = 0$ оно равно 9.

Таким образом, наибольшее значение MN^2 равно 9, а наименьшее равно 1.

2.3. Ответ: 10.

Решение. Так как

$$\begin{cases} |x - y| \leqslant 2, \\ |3x + y| \leqslant 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \leqslant y \leqslant x + 2, \\ -3x - 6 \leqslant y \leqslant -3x + 6, \end{cases}$$

то множество точек, удовлетворяющих данной системе неравенств, образовано пересечением двух полос, поэтому представляет собой границу и внутреннюю часть параллелограмма $ABCD$. Координаты его вершин определяются попарным пересечением границ этих полос, значит, $A(1; 3)$, $B(2; 0)$, $C(-1; -3)$, $D(-2; 0)$ (см. рис. 2.5). Так как вершины параллелограмма попарно симметричны относительно начала координат, то точка $O(0; 0)$ — центр симметрии параллелограмма $ABCD$.

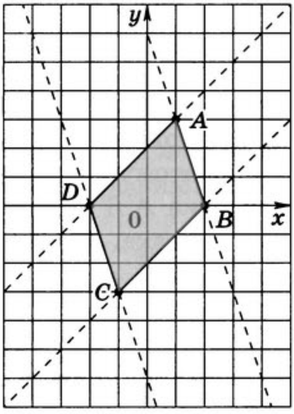


Рис. 2.5

Заметим, что $x^2 + y^2$ — это квадрат расстояния от точки $M(x; y)$ до $O(0; 0)$, значит, для решения задачи достаточно найти координаты точки, принадлежащей $ABCD$ и наиболее удаленной от начала координат. Так как $AC > BD$, то таких точек две: A и C, следовательно, искомое значение равно $OC^2 = OA^2 = (1-0)^2 + (3-0)^2 = 10$.

2.4. Ответ: 13.

Решение. Пусть $A(9;\,2)$; $B(3;\,3)$; $C(0;\,y)$; $D(x;\,0)$, тогда

$$\sqrt{(x-9)^2+4}+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(y-3)^2+9}=AD+DC+CB$$

(см. рис. 2.6). Таким образом, данное выражение принимает наименьшее значение тогда и только тогда, когда длина ломаной $ADCB$, концы которой фиксированы, а точки C и D находятся на указанных осях координат, будет наименьшей.

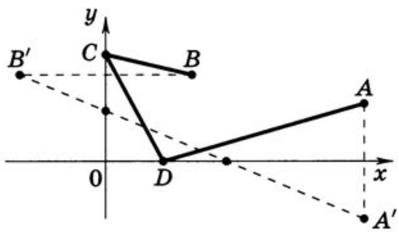


Рис. 2.6

Рассмотрим точку $A'(9;\,-2)$, симметричную точке A относительно оси абсцисс, и точку $B'(-3;\,3)$, симметричную точке B относительно оси ординат. Получим, что $AD + DC + {}$ $+ CB = A'D + DC + CB'$, поэтому наименьшее значение такой суммы равно длине отрезка $A'B'$ и достигается, если точки C и D лежат на этом отрезке. Вычислим длину отрезка: $A'B' = \sqrt{(-9-3)^2+(-2-3)^2} = 13$.

Отметим, что можно было вместо точек A и B сразу рассматривать точки A' и B' и интерпретировать значение данного выражения как длину ломаной $A'DCB'$.

2.5. Ответ: $\left(\frac{1}{2};\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Решение. Построим в одной системе координат графики данных уравнений. Так как

$$x+\sqrt{1-y^2}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-y^2=(1-x)^2, \\ x\leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+y^2=1, \\ x\leqslant 1, \end{cases}$$

то графиком первого уравнения является полуокружность радиуса 1 с центром $A(1; 0)$ (см. рис. 2.7). Выполнив аналогичные преобразования, получим, что график второго уравнения — полуокружность радиуса 1 с центром $B(0; \sqrt{3})$.

Так как $AB = \sqrt{(1-0)^2 + (0-\sqrt{3})^2} = 2$, то сумма радиусов полуокружностей равна расстоянию между их центрами. Следовательно, графики имеют ровно одну общую точку, координаты которой и являются решениями системы. Эта точка — середина отрезка AB, поэтому ее координаты: $x = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$; $y = \frac{0+\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

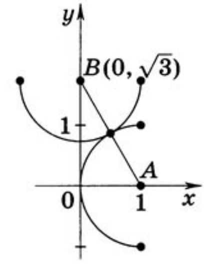


Рис. 2.7

Отметим, что предложенное решение ни в коем случае не является «графическим способом решения системы». Графики уравнений служат только иллюстрацией для доказательства того факта, что полуокружности имеют ровно одну общую точку, откуда следует, что данная система имеет единственное решение.

2.6. Ответ: 0,5.

Решение. Выражение в левой части равенства имеет смысл, если $x \geqslant 1$ и $y \geqslant 1$. Кроме того, значение каждого из корней не превосходит 1, то есть $x \leqslant 2$ и $y \leqslant 2$. Таким образом, $1 \leqslant x \leqslant 2$ и $1 \leqslant y \leqslant 2$. Следовательно, график заданного уравнения целиком лежит в квадрате $ABCD$ (см. рис. 2.8).

Выражение $\frac{x}{y}$ принимает наименьшее значение, если значение x наименьшее из возможных, а значение y — наибольшее. Из всех точек квадрата $ABCD$ этим условиям удовлетворяет точка $B(1; 2)$. График заданного уравнения содержит точку B, так как при подстановке ее координат в это уравнение получим верное числовое равенство.

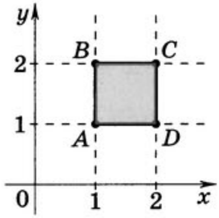


Рис. 2.8

Рассуждая аналогично, можно получить, что наибольшее значение данной дроби равно 2 (оно достигается в точке D).

2.7. Ответ: $2\sqrt{2}$.

Решение. Рассмотрим на координатной плоскости точку $A(3; -1)$ и прямую $y = x$ (см. рис. 2.9). Пусть $M(x; y)$, тогда $\sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2} = MA$.

Заметим, что если точка M' симметрична точке M относительно прямой $y = x$, то $M'(y; x)$. Таким образом, для этих двух точек значение выражения $|x - y|$ одно и то же. Поэтому меньшее расстояние от точки A будет у той из них, которая лежит с точкой A в одной полуплоскости относительно прямой $y = x$. Таким образом, искомая точка M лежит ниже этой прямой, и тогда $|x - y| = MN$, где N — точка пересечения $y = x$ с горизонтальной прямой, проходящей через точку M. По неравенству треугольника $MA + MN \geqslant AN$, значит, точка M должна лежать на отрезке AN, а наименьшее значение длины AN достигается, если N — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую $y = x$.

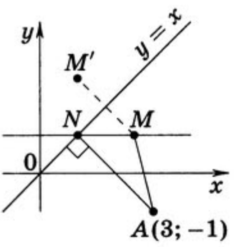


Рис. 2.9

Координаты такой точки N в данном случае можно найти либо из наглядных соображений («по клеточкам»), либо, например, так: угловой коэффициент прямой $y = x$ равен 1, поэтому угловой коэффициент прямой AN, ей перпендикулярной, равен -1, то есть ее уравнение имеет вид $y = -x + b$. Эта прямая проходит через точку $A(3; -1)$, поэтому $b = 2$. Решением системы уравнений $\begin{cases} y = x, \\ y = -x + 2 \end{cases}$ является $\begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \end{cases}$ значит, прямые $y = x$ и $y = -x + 2$ пересекаются в точке $N(1; 1)$. Тогда $AN = \sqrt{(1-3)^2 + (1+1)^2} = 2\sqrt{2}$.

Отметим, что в заключительной части решения можно также использовать формулу для вычисления расстояния от точки $(x_0; y_0)$ до прямой $ax + by + c = 0$: $R = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

2.8. Ответ: $(-1; 0)$.

Решение. Рассмотрим на координатной плоскости точки $A(-1; 0)$; $B(-5; 3)$ и $C(2; 0)$ (см. рис. 2.10). Для произвольной точки $M(x; y)$ имеем

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}=MA, \quad \sqrt{(x+5)^2+(y-3)^2}=MB,$$
$$\sqrt{(x-2)^2+y^2}=MC.$$

Таким образом, требуется найти точку M (возможно, не единственную), для которой $MA+MB+MC=8$.

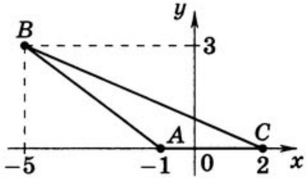


Рис. 2.10

Заметим, что $AB=5$, $AC=3$, то есть равенство выполняется, если точка M совпадает с точкой A. Докажем, что других таких точек нет. Действительно, по теореме косинусов для треугольника ABC имеем

$$\cos\angle BAC=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{25+9-58}{2\cdot5\cdot3}=-\frac{4}{5}<-\frac{1}{2},$$

значит, $\angle BAC>120^\circ$. Для такого треугольника точка плоскости, сумма расстояний от которой до его вершин минимальна (*точка Ферма—Торричелли*), совпадает с вершиной тупого угла, то есть с точкой A. Следовательно, для остальных точек M плоскости выполняется неравенство $MA+MB+MC>8$.

Можно также использовать задачи Д4—Д12, Д19, Д49, Д60.

Занятие 3
Задачи на движение

Весьма эффективным является использование координатной плоскости для решения некоторых текстовых задач, связанных с движением. Геометрический метод их решения основан на том, что при равномерном движении зависимость пройденного расстояния от времени является линейной функцией, поэтому графиком этого движения в соответствующей системе координат является прямая.

Начнем с классической задачи, которая может быть решена разными способами, но мы остановимся на геометрическом методе.

Пример 3.1. Много лет подряд каждый день в полдень из Гавра в Нью-Йорк отправлялся почтовый пароход и в это же самое время из Нью-Йорка отходил пароход той же компании, идущий в Гавр. Каждый из этих пароходов находился в пути ровно 7 суток, шли они по одному и тому же маршруту, а после прибытия в порт сутки там стояли. Сколько пароходов своей компании встречал на своём пути пароход, идущий из Гавра в Нью-Йорк?

Решение. Рассмотрим на плоскости систему координат: ось t — время (в сутках), ось S — расстояние (см. рис. 3.1). Точки N и G на оси S обозначают города Нью-Йорк и Гавр соответственно. Построим график движения парохода, идущего из Гавра, считая, что он движется равномерно. Далее построим график движения парохода, вышедшего одновременно из Нью-Йорка, а затем графики движения пароходов, вышедших из Нью-Йорка через сутки после него и за сутки до него (также считая, что они движутся равномерно). Затем построим графики движения пароходов, вышедших из Нью-Йорка через двое суток и за двое суток до него, и так далее, пока построенные графики будут пересекать график движения парохода, вышедшего из Гавра

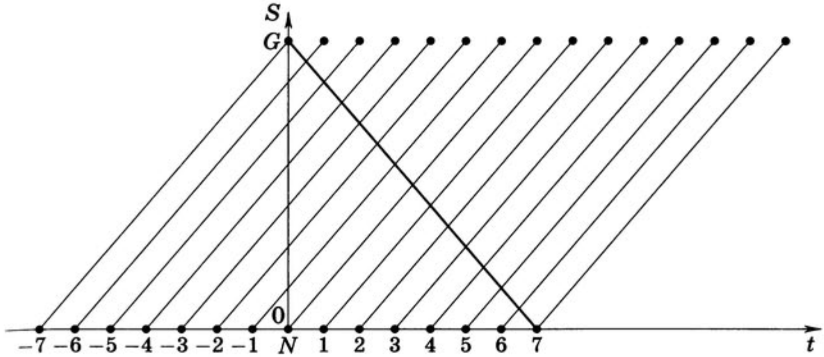


Рис. 3.1

(точка пересечения графиков и показывает встречу пароходов).

Так как каждый пароход плывет ровно 7 суток, то последними такими графиками будут отрезки, выходящие из точек 7 и -7 на оси t. Таким образом, количество встретившихся пароходов равно количеству целых чисел на отрезке $[-7; 7]$.

Отметим, что если движение пароходов не равномерное, то графики движения будут ломаными или кривыми линиями, но количество точек пересечения от этого не изменится в силу непрерывности траектории движения каждого парохода.

Ответ: 15 (считая те два парохода, которые он встречал в портах).

Также весьма эффективным является применение геометрических соображений в задачах с числовыми данными, особенно если движущихся объектов более двух. При решении таких задач наиболее часто используется подобие треугольников.

Пример 3.2. Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда пешеход и велосипедист находились в одной точке, мотоциклист был в 6 км позади них. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3 км. На сколько километров велосипедист обгонял пешехода в тот момент, когда пешехода догнал мотоциклист?

Решение. Изобразим графики зависимости перемещения S от времени t для всех участников процесса в одной системе координат (см. рис. 3.2, начало координат O — точка, в которой пешеход и велосипедист находились одновременно, лучи OA, OC и MA — графики движения велосипедиста, пешехода и мотоциклиста соответственно). Из условия задачи следует, что $OM = 6$; $AC = 3$.

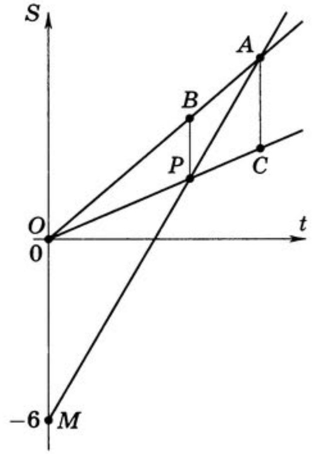


Рис. 3.2

Для того чтобы найти искомое расстояние BP, рассмотрим две пары подобных треугольников: $\Delta ABP \sim \Delta AOM$, $\Delta OBP \sim \Delta OAC$. Из первого подобия следует, что $\frac{BP}{OM} = \frac{AB}{AO}$, а из второго — что $\frac{BP}{AC} = \frac{BO}{AO}$. Следовательно,

$$\frac{BP}{OM} + \frac{BP}{AC} = \frac{AB + BO}{AO} = \frac{AO}{AO} = 1.$$

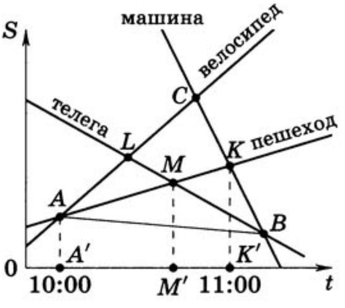
Тогда $BP = \dfrac{OM \cdot AC}{OM + AC} = 2.$

Ответ: 2 км.

Наряду с подобием треугольников, в некоторых задачах могут использоваться иные геометрические соображения, а также привлекаться идея изменения системы отсчета, которая весьма популярна в курсе физики.

Пример 3.3. По шоссе в одну сторону движутся пешеход и велосипедист, в другую сторону — телега и машина. Все участники движутся с постоянными скоростями (каждый со своей). Велосипедист сначала обогнал пешехода, потом через некоторое время встретил телегу, а потом еще через такое же время встретил машину. Машина сначала встретила велосипедиста, потом через некоторое время встретила пешехода и потом еще через такое же время обогнала телегу. Велосипедист обогнал пешехода в 10 часов, а пешеход встретил машину в 11 часов. Когда пешеход встретил телегу?

Решение. Первый способ. Изобразим графики движения и отметим их точки пересечения. Пусть обгонам и встречам велосипедиста соответствуют точки A, L и C, машины — точки C, K и B, а встрече телеги с пешеходом — точка M (см. рис. 3.3*а*).



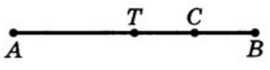


Рис. 3.3

Из условия задачи следует, что L и K — середины сторон AC и BC треугольника ABC соответственно, следовательно, M — точка пересечения его медиан. Точка M делит медиану AK в отношении $2:1$, поэтому и ее проекция M' делит отрезок $A'K'$ (от 10 до 11 часов) в том же отношении. Значит, встреча произошла в 10 часов 40 минут.

Второй способ. Перейдем в систему отсчета, связанную с телегой. Будем считать, что она стоит на месте в точке T, слева из точки A к ней приближаются пешеход и велосипедист, а справа — машина. Пусть машину велосипедист встречает в точке B, а пешеход — в точке C. По условию велосипедист проезжает отрезки AT и TB за одно и то же время, поэтому T — середина отрезка AB. Машина проезжает отрезки BC и CT за одно и то же время, поэтому C — середина отрезка TB (см. рис. 3.3*б*). Пешеход проходит отрезок AC за час, следовательно, отрезок $AT = \frac{2}{3}AC$ он проходит за 40 минут.

Ответ: в 10 часов 40 минут.

Отметим, что иногда графики можно эффективно использовать и для случая неравномерного движения (см. задачу 3.6). Отметим также, что для ряда задач, рассматриваемых в этом занятии, существуют и другие, не геометрические способы решения, но они, как правило, являются более громоздкими.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

3.1. Из Цветочного города в Солнечный ведёт шоссе длиной 12 км. На расстоянии 2 км от Цветочного города на этом шоссе расположен железнодорожный переезд, который попеременно три минуты закрыт и три минуты открыт, а на расстояниях 4 км и 6 км от Цветочного города расположены светофоры, на каждом из которых две минуты горит красный свет, затем три минуты — зелёный, затем опять две минуты — красный и так далее. Незнайка выезжает из Цветочного города в Солнечный в тот момент, когда переезд только что закрылся, а оба светофора только что переключились на красный. За какое наименьшее время (в минутах) он сможет доехать до Солнечного города, не нарушая правил, если его электромобиль едет по шоссе с постоянной скоростью? (Незнайка не умеет ни тормозить, ни увеличивать скорость.)

3.2. Из пункта A в пункт B в 7:00 вышел пешеход, а через некоторое время из B в A выехал всадник. Пешеход пришел в пункт B через 12 часов после выезда оттуда всадника. Всадник приехал в пункт A в 16:00 того же дня. Скорости пешехода и всадника постоянны. Какую долю пути из A в B прошел пешеход до его встречи со всадником?

3.3. На берегах большого круглого водоема последовательно расположены пристани A, B, C и D. Катер и лодка одновременно направились из A в B и из D в C (по кратчайшему пути, каждый — с постоянной скоростью) и прибыли в конечный пункт одновременно. На каком расстоянии друг от друга прошли бы катер и лодка, если бы они поменялись пунктами назначения?

3.4. Из города в одном направлении выехало три автомобиля: второй — через 10 минут после первого, третий — через 20 минут после второго. Через 30 минут после своего выезда третий автомобиль догнал второй, а еще через 10 минут — первый. Через сколько минут после своего выезда из города второй автомобиль догнал первый?

3.5. По шоссе мимо наблюдателя проехали «Москвич», «Запорожец» и двигавшаяся им навстречу «Нива». Известно, что когда с наблюдателем поравнялся «Москвич», то он был равноудален от «Запорожца» и «Нивы», а когда с наблюдателем поравнялась «Нива», то она была равноудалена от «Москвича» и «Запорожца». Докажите, что «Запорожец» в момент проезда мимо наблюдателя был равноудален от «Нивы» и «Москвича». (Скорости автомашин считаем постоянными. В рассматриваемые моменты равноудаленные машины находились по разные стороны от наблюдателя.)

3.6. Равноускоренно движущийся автомобиль увеличивает свою скорость на некотором прямолинейном участке дороги с v_1 до v_2. Найдите скорость автомобиля в середине этого участка.

3.7. Два пловца, стартовав из разных точек с одного берега озера, стремятся доплыть до буйка, двигаясь прямолинейно по направлению к нему с постоянными скоростями. В 10 часов 35 минут расстояние между пловцами было 300 метров, в 10 ч 36 мин оно сократилось до 200 метров,

а в 10 ч 37 мин стало равным 100 метров. Верно ли, что пловцы приплывут к буйку одновременно?

Ответы и решения

3.1. Ответ: за 24 минуты.

Решение. Рассмотрим систему координат на плоскости: ось абсцисс — время t (в минутах), ось ординат — расстояние S от Цветочного города (в километрах).

Так как скорость электромобиля постоянна, а выехал Незнайка из Цветочного города, то график его движения — прямая, проходящая через начало координат. При этом Незнайка не сможет проехать переезд, пока не истекут три минуты, следующие три минуты он сможет проехать, потом опять не сможет и так далее.

Изобразим эти промежутки в виде отрезков прямой $S = 2$ длины 3 (см. рис. 3.4). Графически это означает, что искомая прямая не может пересекать эти отрезки во внутренних точках. Аналогично изобразим отрезки длины 2, которые график движения Незнайки не может пересечь во внутренних точках из-за светофоров.

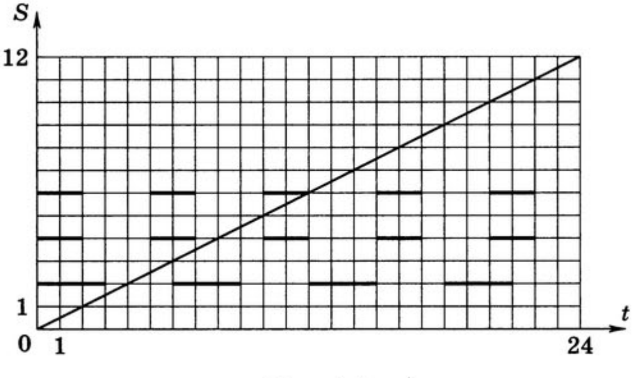


Рис. 3.4

Теперь найдем прямую, проходящую через начало координат и не пересекающую ни один из отрезков указанным образом. Таких прямых много, но нас интересует та, которая пересечет прямую $S = 12$ как можно раньше. Очевидно, что такая прямая пройдет через точку (12; 6) и пересечет прямую $S = 12$ при $t = 24$.

3.2. Ответ: $\frac{3}{7}$.

Решение. Изобразим графики движения пешехода и всадника в одной системе координат (начало отсчета расстояния S — от пункта A, а времени t — 7:00, см. рис. 3.5). Введем обозначения, показанные на рисунке, тогда из условия задачи следует, что $AK = 9$, $MN = 12$ (в одних и тех же единицах).

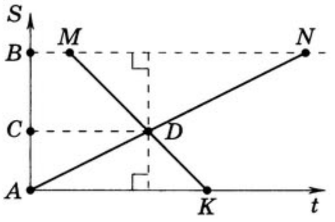


Рис. 3.5

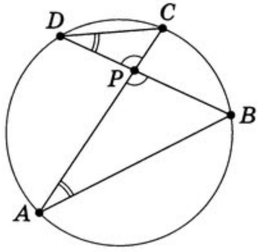


Рис. 3.6

Искомая величина выражается отношением $\frac{AC}{AB}$. Заметим, что длина AC равна длине высоты треугольника ADK, а длина BC равна длине высоты треугольника NDM. Так как эти треугольники подобны, получаем, что $\frac{AC}{BC} = \frac{AK}{NM} = \frac{3}{4}$. Значит, $\frac{AC}{AB} = \frac{3}{7}$.

3.3. Ответ: на нулевом, то есть они бы столкнулись.

Решение. Рассмотрим окружность, на которой последовательно расположены точки A, B, C и D (см. рис. 3.6). Проведем хорды AB и DC (изначальные маршруты), а также хорды AC и DB (предполагаемые маршруты). Пусть отрезки AC и BD пересекаются в точке P, тогда из подобия треугольников APB и DPC ($\angle APB = \angle DPC$ и равны вписанные углы A и D) следует, что $\frac{AP}{DP} = \frac{AB}{DC}$. Так как катер и лодка проходили отрезки AB и DC соответственно за одинаковое время, то $\frac{AB}{DC}$ показывает отношение их скоростей. Следовательно, отрезки AP и DP катер и лодка пройдут за одно и то же время. Значит, выйдя на измененные маршруты одновременно, они неизбежно столкнутся.

3.4. Ответ: через 200 минут.

Решение. Схематически изобразим графики движения автомобилей в одной системе координат в соответствии с условием задачи. Пусть T — время, прошедшее от начала движения до встречи первого и второго автомобилей, и пусть a, b и c соответственно — расстояния от города до точек попарных встреч автомобилей (см. рис. 3.7). Из подобия трех пар прямоугольных треугольников получим $\frac{T}{70} = \frac{c}{b}$; $\frac{T-10}{50} = \frac{c}{a}$; $\frac{b}{a} = \frac{40}{30} = \frac{4}{3}$.

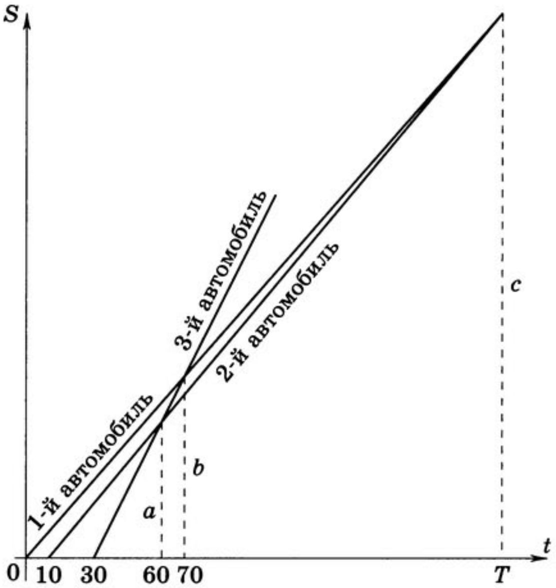


Рис. 3.7

Почленно разделим второе уравнение на первое:

$$\frac{70(T-10)}{50T} = \frac{b}{a}.$$

Следовательно, $\frac{7(T-10)}{5T} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 21T - 210 = 20T \Leftrightarrow T = 210.$ Значит, искомое время — 200 минут.

3.5. Решение. Схематично изобразим графики движения машин начиная с момента, когда «Москвич» поравнялся с наблюдателем. Пусть наблюдатель находится в точке O (начале координат), а «Запорожец» и «Нива» в момент своего проезда мимо наблюдателя находятся в точках Z и N соответственно (см. рис. 3.8). В следующие два рассмотренных момента «Москвич» находится в точках M_1 и M_2, «Запорожец» — в точках Z_1 и Z_2, а «Нива» — в точках N_1 и N_2 соответственно.

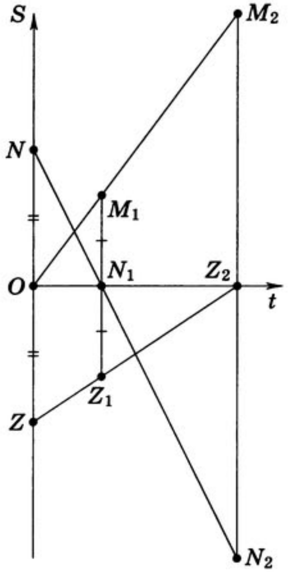


Рис. 3.8

Из подобия треугольников OM_2Z_2 и OM_1N_1 следует, что $M_2Z_2 = \dfrac{OZ_2}{ON_1} \cdot M_1N_1$, а из подобия треугольников $N_1N_2Z_2$ и N_1NO следует, что $N_2Z_2 = \dfrac{Z_2N_1}{ON_1} \cdot ON$. Следовательно, $\dfrac{M_2Z_2}{N_2Z_2} = \dfrac{OZ_2}{Z_2N_1} \cdot \dfrac{M_1N_1}{ON}$.

Из подобия треугольников Z_2ZO и $Z_2Z_1N_1$ и условия задачи получим $\dfrac{OZ_2}{Z_2N_1} = \dfrac{OZ}{N_1Z_1} = \dfrac{ON}{M_1N_1}$. Значит, $\dfrac{M_2Z_2}{N_2Z_2} = 1$, то есть $M_2Z_2 = N_2Z_2$, что и требовалось.

3.6. Ответ: $\sqrt{\dfrac{v_1^2 + v_2^2}{2}}$.

Решение. Рассмотрим график зависимости скорости автомобиля от времени на заданном участке, считая, что v_1 — начальная скорость автомобиля, v — искомая скорость автомобиля в середине участка, t — время, за которое автомобиль преодолел половину пути, T — время, за которое он проделал весь путь (см. рис. 3.9).

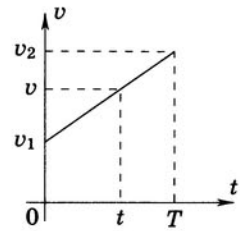


Рис. 3.9

Тогда путь, пройденный автомобилем в каждый момент времени, равен площади трапеции, ограниченной построенным графиком, осями координат и вертикальной прямой, соответствующей выбранному моменту времени.

Путь, пройденный за время t, в два раза меньше пути, пройденного за время T, то есть искомая скорость равна длине отрезка, параллельного основаниям трапеции и делящего ее площадь пополам. Его длина равна среднему квадратичному длин оснований трапеции, то есть $v = \sqrt{\dfrac{v_1^2 + v_2^2}{2}}$.

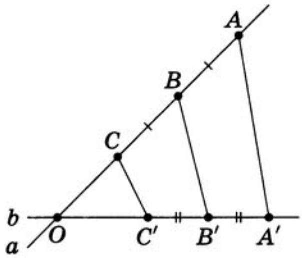
3.7. Ответ: да, верно.

Решение. Первый способ. Пусть буек располагается в точке O, а пловцы движутся по прямым a и b, проходящим через эту точку. Рассмотрим три положения A, B и C одного из пловцов на прямой a, указанные в условии задачи, и соответствующие им положения A', B' и C' другого пловца на прямой b (см. рис. 3.10a). Из приведенных числовых данных следует, что точка B является серединой отрезка AC, а точка B' — серединой отрезка $A'C'$. Кроме того, $BB' = \dfrac{AA' + CC'}{2}$.

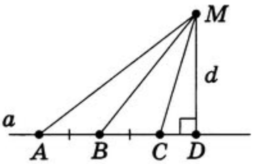
Так как $\overline{BB'} = \dfrac{1}{2}(\overline{AA'} + \overline{CC'})$, получаем, что

$$|\overline{BB'}| \leqslant \frac{1}{2}(|\overline{AA'}| + |\overline{CC'}|),$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $\overline{AA'} \upuparrows \overline{CC'}$. Следовательно, в нашем случае прямые AA', BB'



а)



б)

Рис. 3.10

и CC' параллельны, поэтому $\dfrac{OC}{OA} = \dfrac{OC'}{OA'}$. Это означает, что пловцы достигнут точки O одновременно.

Второй способ. Перейдем в систему отсчета, связанную с одним из пловцов. В этой системе отсчета один пловец неподвижен, а другой движется относительно него равномерно и прямолинейно.

Пусть M — положение первого пловца, три положения второго пловца, указанные в условии задачи, соответствуют точкам A, B и C на прямой a, а перпендикуляр MD к прямой a длины d соответствует наименьшему возможному расстоянию между пловцами (см. рис. 3.10*б*). Из приведенных числовых данных следует, что точка B является серединой отрезка AC.

Далее можно действовать по-разному.

1) Можно выразить по теореме Пифагора расстояния DA, DB и DC и составить уравнение:

$$2\sqrt{BM^2 - d^2} = \sqrt{AM^2 - d^2} + \sqrt{CM^2 - d^2},$$

где $AM = 100$; $BM = 200$; $CM = 300$. Решив это уравнение, получим, что $d = 0$.

2) Можно использовать тот факт, что BM — медиана треугольника AMC, поэтому $BM \leqslant \dfrac{AM + CM}{2}$. С другой стороны, из условия задачи следует, что $BM = \dfrac{AM + CM}{2}$. Значит, треугольника AMC не существует, и точка M лежит на прямой a, то есть $d = 0$.

Наименьшее возможное расстояние между пловцами равно нулю, то есть найдется точка, в которой пловцы окажутся одновременно. Из условия задачи следует, что именно в этой точке расположен буек.

Отметим, что возможно и более алгебраическое решение, в котором с помощью теоремы косинусов доказывается, что зависимость квадрата расстояния между пловцами от времени является квадратичной функцией. Найдя ее коэффициенты, несложно показать, что ее наименьшее значение равно нулю, что и будет означать встречу пловцов.

Можно также использовать задачи Д13—Д17.

Занятие 4. Используем метрические теоремы геометрии

Рассмотрим алгебраические задачи, которые можно решить, переведя их условия на язык геометрии, а затем использовать метрические теоремы геометрии (теорему Пифагора, теоремы синусов и косинусов, формулы для вычисления площадей и пр.). Наряду с ними, как и в задачах занятия 2, часто используется неравенство треугольника.

Пример 4.1. Найдите положительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x+y+z+t=6, \\ \sqrt{1-x^2}+\sqrt{4-y^2}+\sqrt{9-z^2}+\sqrt{16-t^2}=8. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим прямоугольные треугольники с гипотенузами $BM=1$, $MK=2$, $KP=3$ и $PA=4$ и катетами x, y, z и t соответственно, сумма длин которых равна 6. Тогда длины других катетов этих треугольников равны соответственно $\sqrt{1-x^2}$; $\sqrt{4-y^2}$; $\sqrt{9-z^2}$ и $\sqrt{16-t^2}$, а их сумма равна 8 (по условию).

Расположим эти треугольники на чертеже в виде «цепочки»: гипотенузы образуют ломаную $APKMB$, а соответствующие катеты параллельны (см. рис. 4.1). Проведя дополни-

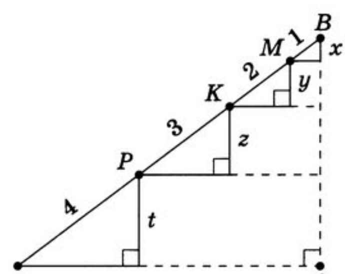


Рис. 4.1

тельные построения, получим треугольник ABC с прямым углом C, в котором $AC = 8$; $BC = 6$, тогда $AB = 10 = 4 + 3 + 2 + 1$, то есть ломаная $APKMB$ является отрезком.

Проведем через точки M, K и P прямые, параллельные AC. По теореме о пропорциональных отрезках сторона BC разделится в отношении $1 : 2 : 3 : 4$. Следовательно, $x = 0{,}6$; $y = 1{,}2$; $z = 1{,}8$; $t = 2{,}4$.

Ответ: $(0{,}6; 1{,}2; 1{,}8; 2{,}4)$.

Отметим, что идея геометрического решения с помощью теоремы Пифагора возникает исходя из вида выражений, стоящих под знаками квадратных корней.

Другой вид выражений под знаками квадратных корней подсказывает идею использования теоремы косинусов.

Пример 4.2. Решите уравнение

$$\sqrt{15 - 12\cos x} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}\sin x} = 4,$$

где $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Решение. Преобразуем данное уравнение:

$$\sqrt{\left(\sqrt{12}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{3} \cdot \cos x} + \sqrt{2^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = 4.$$

Рассмотрим на плоскости два треугольника с общей стороной $CD = \sqrt{3}$: треугольник ACD, в котором $AC = \sqrt{12}$, $\angle ACD = x$, и треугольник BCD, в котором $BC = 2$, $\angle BCD = \frac{\pi}{2} - x$ (точки A и B лежат в разных полуплоскостях относительно CD, см. рис. 4.2). Тогда левая часть уравнения представляет собой сумму $AD + BD$. Так как в прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AB равна $\sqrt{AC^2 + BC^2} = 4$, то точка D должна лежать на отрезке AB. Кроме того, заметим, что $CD = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \sqrt{3}$, значит, CD — высота треугольника ABC. Следовательно, $\cos x = \frac{CD}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \frac{1}{2}$, то есть $x = \frac{\pi}{3}$.

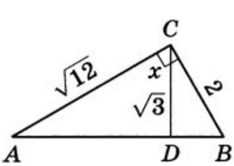


Рис. 4.2

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

Обе указанные геометрические теоремы, а также формулы для вычисления площади треугольника используются при решении следующей задачи (подсказка для использования площади — вид искомого выражения).

Пример 4.3. Положительные числа x, y и z удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x^2 + xy + \frac{1}{3}y^2 = 25, \\ \frac{1}{3}y^2 + z^2 = 9, \\ z^2 + zx + x^2 = 16. \end{cases}$$

Найдите значение выражения $xy + 2yz + 3zx$.

Решение. Пусть $t = \dfrac{y}{\sqrt{3}}$, тогда система примет вид

$$\begin{cases} x^2 + xt\sqrt{3} + t^2 = 25, \\ t^2 + z^2 = 9, \\ z^2 + zx + x^2 = 16 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 2xt\cos 150^\circ + t^2 = 5^2, \\ t^2 + z^2 = 9, \\ z^2 - 2zx\cos 120^\circ + x^2 = 4^2. \end{cases}$$

Выберем точку O на плоскости и последовательно отложим отрезки $OA = x$, $OB = t$ и $OC = z$ так, чтобы выполнялось условие $\angle BOC = 90^\circ$, $\angle AOC = 120^\circ$, $\angle AOB = 150^\circ$ (см. рис. 4.3). Это возможно, так как $90^\circ + 120^\circ + 150^\circ = 360^\circ$.

Тогда из второго уравнения системы следует, что $BC = 3$ (теорема Пифагора), а из третьего и первого уравнений — что $AC = 4$, а $AB = 5$ (теорема косинусов). Следовательно, треугольник ABC прямоугольный (египетский).

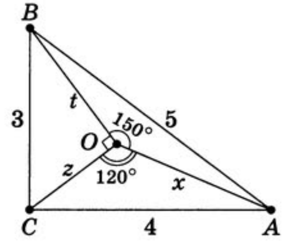


Рис. 4.3

Искомое выражение имеет вид

$$xy + 2yz + 3zx = xt\sqrt{3} + 2tz\sqrt{3} + 3zx =$$
$$= 4\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}xt \cdot \sin 150^\circ + \frac{1}{2}tz + \frac{1}{2}zx \cdot \sin 120^\circ\right) =$$
$$= 4\sqrt{3}(S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle COA}) = 4\sqrt{3} \cdot S_{\triangle ABC} =$$
$$= 2\sqrt{3} \cdot AC \cdot BC = 24\sqrt{3}.$$

Ответ: $24\sqrt{3}$.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

4.1. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{x^2 - 2x + 4} + \sqrt{x^2 - x\sqrt{3} + 1}.$$

4.2. Положительные числа a, b и c таковы, что $a^2 + b^2 - ab = c^2$. Докажите, что $(a - c)(b - c) \leqslant 0$.

4.3. Положительные числа a, b, c, x, y, z таковы, что $x^2 + xy + y^2 = a^2$; $y^2 + yz + z^2 = b^2$; $x^2 + xz + z^2 = c^2$. Выразите величину $P = xy + yz + xz$ через a, b и c.

4.4. Решите уравнение

$$\sqrt{2 - 2\cos x} + \sqrt{10 - 6\cos x} = \sqrt{10 - 6\cos 2x},$$

где $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

4.5. Числа x, y, z и t лежат в интервале $(0; 1)$. Докажите, что

$$\sqrt{x^2+(1-t)^2}+\sqrt{y^2+(1-x)^2}+\sqrt{z^2+(1-y)^2}+\sqrt{t^2+(1-z)^2}<4.$$

4.6. Найдите все неотрицательные решения системы уравнений $\begin{cases} 2\sqrt{3}\cdot\sin x = 2\sin y = \sqrt{3}\cdot\sin z, \\ x + y + z = \pi. \end{cases}$

4.7. Рассматриваются все параболы $y = x^2 + px + q$, пересекающие оси координат в трех различных точках. Для каждой параболы через эти три точки проводится окружность. Докажите, что на координатной плоскости существует точка, принадлежащая всем проведенным окружностям.

4.8. Найдите наибольшее значение выражения

$$x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}.$$

Ответы и решения

4.1. Ответ: $\sqrt{5}$.

Решение. Заметим, что если $x > 0$, то $y(-x) > y(x)$, поэтому достаточно рассмотреть положительные значения x. Преобразуем выражение в правой части:

$$y = \sqrt{x^2 - 2\cdot x\cdot 2\cdot\cos 60^\circ + 2^2} + \sqrt{x^2 - 2\cdot x\cdot 1\cdot\cos 30^\circ + 1^2}.$$

Рассмотрим на плоскости два треугольника с общей стороной $CD = x$: треугольник ACD, в котором $AC = 2$, $\angle ACD = 60^\circ$, и треугольник BCD, в котором $BC = 1$, $\angle BCD = 30^\circ$ (точки A и B лежат в разных полуплоскостях относительно CD, см. рис. 4.4). Тогда по теореме косинусов $y = AD + BD$.

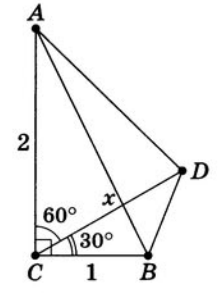


Рис. 4.4

Так как $\angle ACB = 90^\circ$, получаем, что $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{5}$. Из неравенства $AD + BD \geqslant AB$ следует, что значение y будет наименьшим, если точка D лежит на отрезке AB. Из геометрических соображений понятно, что такая ситуация возможна (вычислить соответствующее значение x возможно, но довольно громоздко). Тогда искомое значение равно длине этого отрезка.

4.2. Решение. Отложим на сторонах угла 60° с вершиной O отрезки $OB = a$ и $OA = b$. В силу равенства $a^2 + b^2 - ab = c^2$ длина отрезка AB равна c (см. рис. 4.5). В треугольнике OAB угол при вершине O средний по величине, поэтому либо $\angle A \leqslant \angle O \leqslant \angle B$, либо $\angle B \leqslant \angle O \leqslant \angle A$. В первом случае выполняется неравенство $a \leqslant c \leqslant b$, а во втором — неравенство $b \leqslant c \leqslant a$. В обоих случаях числа $a - c$ и $b - c$ имеют разные знаки (либо оба равны нулю), поэтому $(a - c)(b - c) \leqslant 0$.

4.3. Ответ: $\sqrt{\dfrac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{3}}$.

Решение. Из произвольной точки T плоскости проведем три луча так, чтобы углы между соседними лучами были равны 120°. На этих лучах отложим отрезки $TA = z$, $TB = x$ и $TC = y$ (см. рис. 4.6). Тогда заданные равенства — это

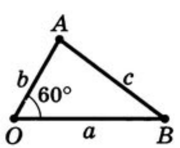


Рис. 4.5

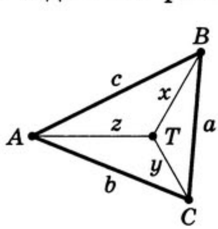


Рис. 4.6

запись теоремы косинусов для треугольников BTC, CTA и ATB соответственно.

Заметим, что сумма площадей этих треугольников равна площади треугольника ABC. Следовательно,

$$P = \frac{2S_{\triangle ABC}}{\sin 120^\circ} = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$
$$= \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{3}}.$$

Отметим, что T является точкой Ферма—Торричелли для треугольника ABC (точкой плоскости, для которой сумма расстояний до вершин $TA + TB + TC$ принимает наименьшее значение).

4.4. Ответ: $\arccos \frac{2}{3}$.

Решение. Преобразуем данное уравнение:

$$\sqrt{1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos x} + \sqrt{3^2 + 1^2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \cos x} =$$
$$= \sqrt{3^2 + 1^2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \cos 2x}.$$

Рассмотрим на плоскости два треугольника с общей стороной $CD = 1$: треугольник ACD, в котором $AC = 1$, $\angle ACD = x$, и треугольник BCD, в котором $BC = 3$, $\angle BCD = x$ (точки A и B лежат в разных полуплоскостях относительно CD, см. рис. 4.7). Тогда левая часть уравнения представляет собой сумму $AD + BD$, а правая часть равна AB (теорема косинусов в треугольнике ABC).

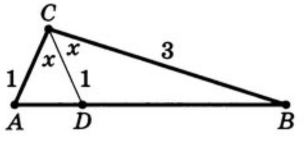


Рис. 4.7

Из того, что $AD + BD = AB$, следует, что точка D лежит на отрезке AB. Тогда $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD}$, то есть

$$\frac{3}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}\sin x + \frac{3}{2}\sin x \quad \Leftrightarrow \quad 3\sin x \cos x = 2\sin x.$$

Из условия задачи следует, что $\sin x \neq 0$, значит, $\cos x = \frac{2}{3}$.

В заключительной части решения можно обойтись и без формулы синуса удвоенного аргумента. Так как CD — биссектриса треугольника ABC, получаем, что $\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{3}$. Следовательно, $\frac{2-2\cos x}{10-6\cos x} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \cos x = \frac{2}{3}$.

4.5. Решение. Рассмотрим квадрат $ABCD$ со стороной 1. На его сторонах AB, BC, CD и DA отложим отрезки $AK = x$, $BL = y$, $CM = z$ и $DN = t$ соответственно (см. рис. 4.8).

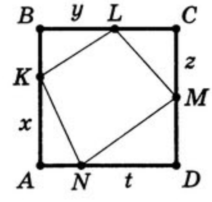


Рис. 4.8

Тогда требуемое неравенство примет вид $NK + KL + LM + MN < 4$. По неравенству треугольника $NK < AK + AN$; $KL < BK + BL$; $LM < CL + CM$ и $MN < DM + DN$. Сложив эти неравенства почленно, получим, что $NK + KL + LM + MN < AB + BC + CD + DA = 4$.

4.6. Ответ: $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$; $(0; 0; \pi)$; $(0; \pi; 0)$; $(\pi; 0; 0)$.

Решение. Первое уравнение равносильно уравнению

$$\frac{\sin x}{1} = \frac{\sin y}{\sqrt{3}} = \frac{\sin z}{2}.$$

Заметим, что если одна из переменных принимает значение 0, то значения двух других — это 0 и π.

Пусть $x > 0$, $y > 0$ и $z > 0$. Рассмотрим прямоугольный треугольник с углами x, y, z и противолежащими сторонами 1, b и c соответственно. По теореме синусов $\frac{\sin x}{1} = \frac{\sin y}{b} = \frac{\sin z}{c}$. Тогда из равенства $\frac{\sin x}{1} = \frac{\sin y}{\sqrt{3}} = \frac{\sin z}{2}$ следует, что $b = \sqrt{3}$, $c = 2$. Но прямоугольный треугольник с такими сторонами — это «половина равностороннего треугольника», и его углы известны: $z = \frac{\pi}{2}$; $y = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{6}$.

4.7. Решение. Докажем, что все проведенные окружности содержат точку $D(0; 1)$.

Пусть некоторая парабола, ветви которой направлены вверх, пересекает ось абсцисс в точках A и B, а ось ординат — в точке C (см. рис. 4.9). Тогда $A(x_1; 0)$, $B(x_2; 0)$, $C(0; q)$, где x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена, задающего эту параболу.

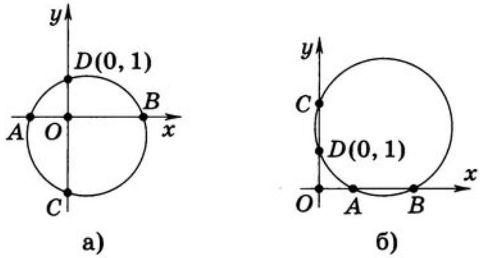


Рис. 4.9

Рассмотрим окружность, описанную около треугольника ABC. Пусть D — вторая точка пересечения окружности с осью ординат. По свойству хорд (секущих), проведенных в окружности через одну точку, получим, что $OA \cdot OB = OC \cdot OD$. Так как $OC = |q|$ и $OA \cdot OB = |x_1| \cdot |x_2| = |x_1 x_2| = |q|$, имеем $OD = 1$. Очевидно, что точка D имеет положительную ординату, поэтому $D(0; 1)$, что и требовалось.

4.8. Ответ: 1.

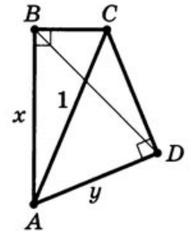
Решение. Указанное значение достигается, например, при $x = 1$, $y = 0$, поэтому достаточно доказать неравенство

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \leqslant 1.$$

Кроме того, $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \leqslant |x|\sqrt{1-|y|^2} + |y|\sqrt{1-|x|^2}$, поэтому неравенство достаточно доказать для случая, когда $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$. Теперь заметим, что при $x = 0$ или $y = 0$ доказываемое неравенство, очевидно, выполняется. Аналогично неравенство верно, если $x = 1$ или $y = 1$. Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда $0 < x < 1$ и $0 < y < 1$. Для решения можно использовать две различные геометрические конфигурации.

Первый способ. Рассмотрим прямоугольные треугольники ABC и ADC с общей гипотенузой $AC = 1$ (точки B и D лежат в разных полуплоскостях относительно AC, см. рис. 4.10*а*). Тогда четырехугольник $ABCD$ является вписанным в окружность диаметра 1. Пусть $AB = x$, $AD = y$, тогда $BC = \sqrt{1-x^2}$, $CD = \sqrt{1-y^2}$. По теореме Птолемея

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD \leqslant 1,$$



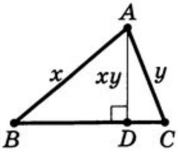


Рис. 4.10

так как каждая из диагоналей четырехугольника не больше, чем диаметр описанной окружности.

Второй способ. Рассмотрим два прямоугольных треугольника ABD и ACD с гипотенузами $AB = x$ и $AC = y$ соответственно и общим катетом $AD = xy$ (точки B и C лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AD, см. рис. 4.10*б*). Такие треугольники существуют, так как при $0 < x < 1$ и $0 < y < 1$ выполняются неравенства $x > xy$ и $y > xy$.

Тогда $BD = \sqrt{x^2 - (xy)^2} = x\sqrt{1 - y^2}$; $CD = \sqrt{y^2 - (xy)^2} = y\sqrt{1 - x^2}$. Вычислим двумя способами площадь треугольника ABC:

$$S = \frac{1}{2}BC \cdot AD = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}\right)xy$$

и

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2}xy \sin \angle BAC.$$

Следовательно, $x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2} = \sin \angle BAC \leqslant 1$, что и требовалось.

Отметим, что эта задача легко решается и с помощью тригонометрической замены.

Можно также использовать задачи Д18—Д31, Д42, Д48, Д50, Д57, Д58.

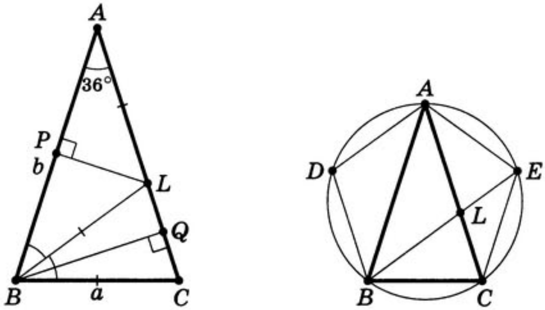
Занятие 5
Тригонометрия

Напомним, что изначально тригонометрические функции появляются в курсе геометрии, а значения тригонометрических функций для углов 30°, 45° и 60° вычисляются исходя из соотношений в прямоугольном треугольнике. Появление в дальнейшем большого набора тригонометрических формул позволяет преобразовывать ряд тригонометрических выражений, доказывать равенства и неравенства и вычислять значения тригонометрических функций некоторых других углов. Но чисто «алгебраический» подход имеет некоторый недостаток: при его применении часто теряется смысл полученных результатов и они воспринимаются формально. Восполнить этот пробел помогает использование геометрических методов решения. Эти методы не являются, как правило, более рациональными, но зато они помогают понять, где может встретиться угол, тригонометрическую функцию которого мы вычисляем, или почему величины, участвующие в доказываемом соотношении, связаны так, а не иначе. Кроме того, хорошо подобранная геометрическая конфигурация позволяет решить несколько, казалось бы, разных задач на одном и том же чертеже.

Для геометрических интерпретаций тригонометрических выражений наиболее часто используются равнобедренные треугольники, в которых величина угла при вершине выбирается исходя из условия задачи, или правильные многоугольники с подходящим количеством сторон.

Пример 5.1. а) Докажите, что $\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$. б) Вычислите $\sin 18^\circ$ и $\cos 36^\circ$.

Решение. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с основанием BC и углом $\frac{\pi}{5} = 36^\circ$ при вершине A (см. рис. 5.1*а*). Его биссектриса BL разбивает треугольник на два равнобедренных: ALB и CBL. Действительно, $\angle ABL = 36^\circ = \angle BAL$, значит, $AL = BL$. Кроме того, $\angle BLC = 72^\circ = \angle BCL$, значит, $BL = BC$.



а) б)

Рис. 5.1

а) Проведем перпендикуляры LP и BQ к AB и AC соответственно. Пусть $BC = BL = AL = a$, тогда, используя прямоугольные треугольники BLP и BCQ, получим $AB = 2a\cos 36^\circ$, $CL = 2a\cos 72^\circ$. Так как $AB - CL = AL$, имеем $2a\cos 36^\circ - 2a\cos 72^\circ = a$. Разделив почленно это равенство на $2a$, получим требуемое равенство.

б) Пусть $AB = b$, тогда из подобия треугольников BLC и ABC получим $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{CL}{BC}$, то есть

$$\frac{a}{b} = \frac{b-a}{a} \Leftrightarrow a^2 + ba - b^2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-b \pm b\sqrt{5}}{2}.$$

Учитывая, что $BC = a = 2b\sin 18^\circ > 0$, получим $\sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$. Из треугольника APL находим $\cos 36^\circ = \dfrac{AP}{AL} = \dfrac{b}{2a} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$.

Ответ: $\sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$; $\cos 36^\circ = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$.

Существуют и другие способы решения. В частности, можно использовать тот факт, что рассмотренный треугольник ABC является частью правильного пятиугольника $ADBCE$, у которого диагонали AC и BE являются биссектрисами углов BAE и ABC соответственно, а диагональ AB параллельна стороне CE (см. рис. 5.1*б*).

Также обратим внимание на тот факт, что $\frac{AC}{AL} = \frac{b}{a} = \frac{AL}{LC}$, то есть точка L делит отрезок BC в «золотом сечении».

Пример 5.2. Вычислите: а) $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}$;

б) $\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}$.

Решение. а) Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с основанием BC и углом $\frac{\pi}{7}$ при вершине A (см. рис. 5.2). Тогда $\angle ABC = \angle ACB = \frac{3\pi}{7}$. На стороне AC отметим такую точку D, что $BD = BC$, тогда $\angle BDC = \frac{3\pi}{7}$, $\angle CBD = \frac{\pi}{7}$. На стороне AB отметим такую точку E, что $AE = DE$, тогда $\angle EDA = \angle EAD = \frac{\pi}{7}$. Угол BED внешний для треугольника AED, поэтому $\angle BED = \frac{2\pi}{7} = \angle DBE$, то есть треугольник BDE также равнобедренный.

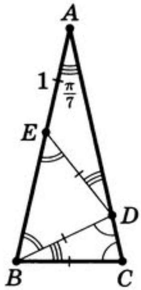


Рис. 5.2

Пусть $AE = 1$, тогда, последовательно рассматривая треугольники AED, BDE и CBD, получим $AD = 2\cos\frac{\pi}{7}$; $BE = 2\cos\frac{2\pi}{7}$; $CD = 2\cos\frac{3\pi}{7}$. Следовательно,

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{AD - BE + CD}{2} = \frac{1}{2}.$$

б) Последовательно применяя для тех же треугольников теорему синусов, получим

$$\frac{BC}{\sin\frac{3\pi}{7}} = \frac{CD}{\sin\frac{\pi}{7}}; \quad \frac{BD}{\sin\frac{2\pi}{7}} = \frac{BE}{\sin\frac{3\pi}{7}}; \quad \frac{DE}{\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{AD}{\sin\frac{5\pi}{7}}.$$

Учитывая, что $BC = BD = DE = 1$ и $\sin\frac{5\pi}{7} = \sin\frac{2\pi}{7}$, получим $CD = \frac{\sin\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{3\pi}{7}}$; $BE = \frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}}$; $AD = \frac{\sin\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}$. Кроме того, $\cos\frac{4\pi}{7} = -\cos\frac{3\pi}{7}$ и $\cos\frac{6\pi}{7} = -\cos\frac{\pi}{7}$ (симметрия относительно оси y).

Таким образом,

$$\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} = \cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}AD\cdot\frac{1}{2}BE\cdot\frac{1}{2}CD = \frac{1}{8}.$$

Ответ: а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{8}$.

Геометрические соображения позволяют работать не только с конкретными углами. Используя геометрические конфигурации, можно, например, выводить тригонометрические формулы, но такие рассуждения применимы только при некоторых ограничениях на рассматриваемые углы.

Пример 5.3. Докажите геометрически формулу синуса суммы.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC и описанную около него окружность с центром O и радиусом R (см. рис. 5.3). Проведем диаметр AD, тогда $\angle ABD = \angle ACD = 90^\circ$.

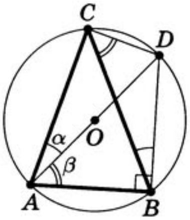


Рис. 5.3

Пусть $\angle DAC = \alpha$, $\angle DAB = \beta$, тогда $AD = 2R$; $AB = 2R\cos\beta$; $BD = 2R\sin\beta$; $AC = 2R\cos\alpha$; $CD = 2R\sin\alpha$. По следствию из теоремы синусов $BC = 2R\sin(\alpha+\beta)$.

По теореме Птолемея для вписанного четырехугольника $ABDC$ получим $AD\cdot BC = AB\cdot CD + AC\cdot BD$, то есть

$$4R^2\sin(\alpha+\beta) = 4R^2\cos\beta\sin\alpha + 4R^2\cos\alpha\sin\beta.$$

Разделим обе части равенства на $4R^2$ и получим требуемую формулу: $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$.

Понятно, что приведенное доказательство учитывает только случай положительных α и β, причем $\alpha+\beta < 180^\circ$.

Условимся, что во всех задачах этого занятия будут применяться только геометрические методы решения.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

5.1. а) Докажите, что $\operatorname{ctg} 30^\circ + \operatorname{ctg} 75^\circ = 2$. б) Вычислите $\operatorname{tg} 15^\circ$.

5.2. Докажите формулы ($0 < \alpha < 180^\circ$):

а) $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$; б) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$; в) $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$.

5.3. Докажите, что $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin\frac{3\pi}{7}}$.

5.4. Докажите, что: а) если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ ($\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$), то $\sin\alpha+\sin\beta>\sin\gamma$;

б) если $x+y+z=\frac{\pi}{2}$ ($x>0$, $y>0$, $z>0$), то $\cos x+\cos y>$ $>\cos z$.

5.5. Вычислите: а) $\operatorname{ctg}10^\circ-4\cos10^\circ$; б) $\frac{1}{\sin10^\circ}-4\cos20^\circ$; в) $\frac{1}{\sin10^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{\cos10^\circ}$.

5.6. Докажите, что если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ ($\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$), то $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=1$.

Ответы и решения

5.1. Ответ: б) $2-\sqrt{3}$.

Решение. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB=AC=2$ и $\angle BAC=30^\circ$ (см. рис. 5.4). Углы при основании этого треугольника равны по 75°. Проведем высоту BD, тогда в треугольнике ABD имеем $BD=1$; $AD=\operatorname{ctg}30^\circ$, а в треугольнике CBD имеем $DC=\operatorname{ctg}75^\circ$.

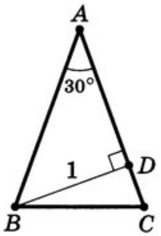


Рис. 5.4

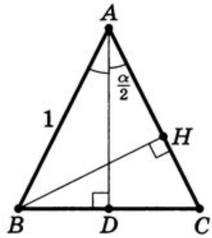


Рис. 5.5

Таким образом, а) $\operatorname{ctg}30^\circ+\operatorname{ctg}75^\circ=AD+DC=AC=AB=$ $=2$; б) в треугольнике ABD имеем $AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{3}$, значит, $\operatorname{tg}15^\circ=\operatorname{tg}\angle DBC=CD=AC-AD=2-\sqrt{3}$.

5.2. Решение. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB=AC=1$ и угол при вершине A равен α (см. рис. 5.5). Проведем его высоту и биссектрису AD.

а) Выразим площадь треугольника двумя способами:

1) $2S_{\triangle ABC}=AB\cdot AC\cdot\sin\alpha=\sin\alpha$;

2) $2S_{\triangle ABC}=BC\cdot AD=2AB\cos\frac{\alpha}{2}\cdot AB\sin\frac{\alpha}{2}=2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$.

Следовательно, $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$.

б) Проведем высоту BH, тогда в треугольнике ABH имеет $AH = \sin\alpha$; $BH = \cos\alpha$. Кроме того, $\angle CBH = \angle CAD = \frac{\alpha}{2}$. Следовательно, рассматривая треугольник CBH, получаем

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{CH}{BH} = \frac{1 - AH}{BH} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

в) Имеем $\cos\angle ACB = \frac{DC}{AC} = \frac{HC}{BC}$, то есть

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{1} = \frac{1-\cos\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \Leftrightarrow \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}.$$

В пункте в) возможен и другой способ: $BC^2 = (2BD)^2 = 4\sin^2\frac{\alpha}{2}$; с другой стороны, по теореме косинусов

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cdot\cos\alpha = 2 - 2\cos\alpha.$$

Приравняв и разделив обе части равенства на 4, получим требуемое.

5.3. Решение. Первый способ. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с основанием BC и углом при вершине A, равным $\frac{\pi}{7}$ (см. рис. 5.6*а*). Углы при его основании равны по $\frac{3\pi}{7}$. На стороне AC отметим точку D так, что $\angle ABD = \angle BAD = \frac{\pi}{7}$, тогда $AD = BD$ и $\angle CBD = \angle CDB = \frac{2\pi}{7}$, поэтому $CD = BC$. Пусть высота BH треугольника ABC равна 1, тогда $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}} = AB$, $\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}} = BD$, $\frac{1}{\sin\frac{3\pi}{7}} = BC$. А равенство $AB = BD + BC$ равносильно верному равенству $AC = AD + CD$.

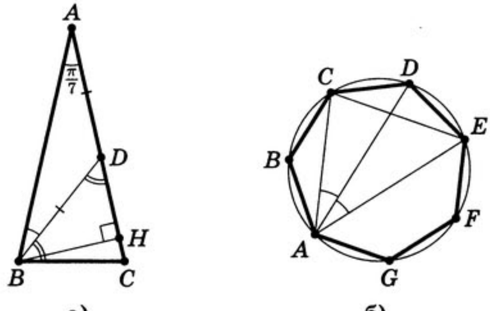


Рис. 5.6

Второй способ. Рассмотрим правильный семиугольник $ABCDEFG$, вписанный в окружность диаметра 1 (см. рис. 5.6*б*). Проведем его диагонали AC, AD, AE и CE. По следствию из теоремы синусов

$$CD = DE = 2R\sin\frac{\pi}{7} = \sin\frac{\pi}{7},$$
$$AC = CE = 2R\sin\frac{2\pi}{7} = \sin\frac{2\pi}{7},$$
$$AD = AE = 2R\sin\frac{3\pi}{7} = \sin\frac{3\pi}{7}.$$

По теореме Птолемея для четырехугольника $ACDE$ получим $AD\cdot CE = AC\cdot DE + AE\cdot CD$, то есть

$$\sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7} = \sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}.$$

Разделив обе части этого равенства на произведение $\sin\frac{\pi}{7}\times$ $\times\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}$, получим требуемое равенство.

5.4. Решение. а) Рассмотрим треугольник с углами α, β и γ. Пусть его стороны, противолежащие этим углам, равны a, b и c соответственно, а радиус описанной около него окружности равен R. Используя неравенство треугольника и следствие из теоремы синусов, получим

$$a + b > c \quad\Leftrightarrow\quad 2R\sin\alpha + 2R\sin\beta > 2R\sin\gamma \quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad \sin\alpha + \sin\beta > \sin\gamma.$$

б) Так как $\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \left(\frac{\pi}{2} - y\right) + \left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \pi$ и каждое слагаемое положительно, то существует треугольник с углами $\frac{\pi}{2} - x$, $\frac{\pi}{2} - y$ и $\frac{\pi}{2} - z$, для которого

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) > \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) \Leftrightarrow \cos x + \cos y > \cos z.$$

Отметим, что в этой задаче геометрическое решение гораздо проще алгебраического.

5.5. Ответ: а) $\sqrt{3}$; б) 2; в) 4.

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, в котором $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 10^\circ$, $BC = 1$. На стороне AC отметим точку E так, что $\angle ABE = 20^\circ$, после чего проведем серединный перпендикуляр к отрезку AE, пересекающий гипотенузу AB в точке D (см. рис. 5.7). Тогда

$AD = DE$; $\angle DBE = \angle BDE = 20°$, значит, $DE = BE$. Так как $\angle BEC = 30°$, получаем, что $BE = 2$.

а) Заметим, что $\operatorname{ctg} 10° = \frac{AC}{BC} = AC$. Рассматривая треугольник ADE, получаем, что $AE = 4\cos 10°$. Значит,

$$\operatorname{ctg} 10° - 4\cos 10° = AC - AE = CE = \sqrt{3}.$$

б) Заметим, что $\sin 10° = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{AB}$. Рассматривая треугольник BED, получаем, что $BD = 4\cos 20°$. Тогда

$$\frac{1}{\sin 10°} - 4\cos 20° = AB - BD = AD = 2.$$

в) Из точки E проведем прямую, параллельную BC, которая пересечет AB в точке F. В получившейся прямоугольной трапеции $BFEC$ проведем высоту FH, тогда $FH = CE = \sqrt{3}$, $\angle BFH = 10°$, значит, $BF = \frac{FH}{\cos 10°}$. Таким образом,

$$\frac{1}{\sin 10°} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10°} = AB - BF = AF = 4.$$

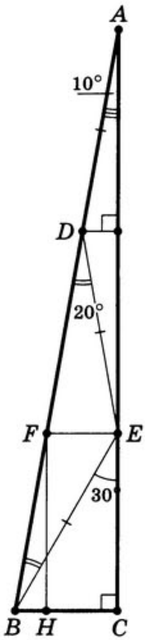


Рис. 5.7

В этой задаче одно из преимуществ геометрического метода — возможность найти значения трех разных выражений на одном чертеже.

5.6. Решение. Рассмотрим треугольник ABC с углами α, β и γ. Пусть длины его противолежащих сторон равны a, b и c соответственно; p, S и r — полупериметр, площадь и радиус вписанной окружности этого треугольника. Тогда $r = (p - a)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = (p - b)\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = (p - c)\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ (см. рис. 5.8).

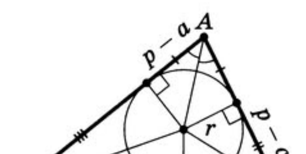


Рис. 5.8

Следовательно,

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=$$
$$=r^2\left(\frac{1}{p-a}\cdot\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-b}\cdot\frac{1}{p-c}+\frac{1}{p-c}\cdot\frac{1}{p-a}\right)=$$
$$=\frac{r^2\cdot p}{(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{p^2r^2}{S^2}=1.$$

Можно также использовать задачи Д32—Д38.

Занятие 6
Используем векторы

Рассмотрим алгебраические задачи и тригонометрические соотношения, для решения (доказательства) которых уместно использовать векторы. В этом занятии мы ограничимся векторами на плоскости (в дальнейшем некоторые приемы будут обобщены для трехмерного и не только трехмерного пространства).

Во многих задачах, связанных с доказательством неравенств или поиском экстремальных значений, эффективно применяется следствие из определения скалярного произведения векторов: $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos \angle(\overline{a}; \overline{b})$ *и* $\cos \angle(\overline{a}; \overline{b}) \leqslant 1$, *следовательно,* $\overline{a} \cdot \overline{b} \leqslant |\overline{a}| \cdot |\overline{b}|$. Полезно также вспомнить, что в декартовой системе координат

1) если $\overline{c}(x; y)$, то $|\overline{c}| = \sqrt{x^2 + y^2}$;

2) если $\overline{a}(x_1; y_1)$, $\overline{b}(x_2; y_2)$, то $\overline{a} \cdot \overline{b} = x_1x_2 + y_1y_2$.

Пример 6.1. Известно, что $a^2 + b^2 = 1$ и $c^2 + d^2 = 1$. Докажите, что $ac + bd \leqslant 1$.

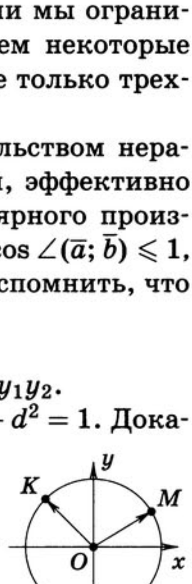


Рис. 6.1

Решение. Рассмотрим окружность с центром $(0; 0)$ и радиусом 1 в декартовой системе координат (см. рис. 6.1). Ее уравнение: $x^2 + y^2 = 1$.

Пусть $M(a; b)$, $K(c; d)$, тогда из условия задачи следует, что точки M и K лежат на этой окружности. Следовательно, $\overline{OM}(a; b)$, $\overline{OK}(c; d)$, причем оба этих вектора единичные. Так как $\overline{OM} \cdot \overline{OK} \leqslant |\overline{OM}| \cdot |\overline{OK}| = 1$, имеем $\overline{OM} \cdot \overline{OK} = ac + bd \leqslant 1$.

Можно также не рассматривать точки на окружности, а просто задать единичные векторы $\overline{m}(a; b)$ и $\overline{k}(c; d)$ и рассмотреть их скалярное произведение.

Возможные способы применения векторов для доказательства тригонометрических соотношений часто сочетаются с геометрическими соображениями.

Пример 6.2. Докажите, что если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ ($\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$), то $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma \geqslant -1{,}5$.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC с углами α, β и γ и окружность с центром O и радиусом R, описанную около него. Если этот треугольник остроугольный, то $\angle BOC = 2\alpha$; $\angle COA = 2\beta$, $\angle AOB = 2\gamma$. Если же один из углов, например угол C, не острый, то $\angle AOB = 360^\circ - 2\gamma$ (см. рис. 6.2). При этом $\cos(360^\circ - 2\gamma) = \cos 2\gamma$.

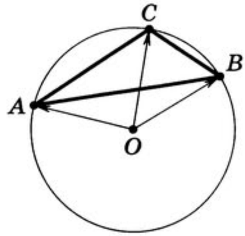


Рис. 6.2

Рассмотрим теперь квадрат суммы трех векторов $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$:

$$(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})^2 \geqslant 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + 2\overline{OA}\cdot\overline{OB} + 2\overline{OB}\cdot\overline{OC} + 2\overline{OA}\cdot\overline{OC} \geqslant 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 3R^2 + 2(R^2\cos\angle AOB + R^2\cos\angle BOC + R^2\cos\angle COA) \geqslant 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 3 + 2(\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma) \geqslant 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma \geqslant -1{,}5,$$

что и требовалось доказать.

Для доказательства ряда тригонометрических тождеств бывает полезен следующий факт: *пусть O — центр правильного n-угольника $A_1A_2...A_n$, тогда* $\overline{OA_1} + \overline{OA_2} + ... + \overline{OA_n} = \overline{0}$.

Действительно, при повороте на угол $\dfrac{360^\circ}{n}$ с центром O этот n-угольник переходит в себя, значит, рассматриваемая сумма векторов не изменяется. Но если эта сумма отлична от нулевого вектора, то при таком повороте его образом будет вектор, ему не равный. Это противоречие показывает, что искомая сумма равна $\overline{0}$.

Пример 6.3. Докажите, что для любого натурального n выполняются следующие равенства:

а) $\sin\dfrac{2\pi}{n} + \sin\dfrac{4\pi}{n} + ... + \sin\dfrac{2(n-1)\pi}{n} = 0$;

б) $\cos\dfrac{2\pi}{n} + \cos\dfrac{4\pi}{n} + ... + \cos\dfrac{2(n-1)\pi}{n} = -1$.

Решение. В декартовой системе координат рассмотрим единичную окружность. Отметим на ней точку $P_0(1; 0)$ и точки $P_{\frac{2\pi}{n}}$, $P_{\frac{4\pi}{n}}$, ..., $P_{\frac{2(n-1)\pi}{n}}$, являющиеся ее образами при повороте вокруг начала координат против часовой стрелки на соответствующий угол. Эти точки являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность. По доказанному выше $\overline{OP_0} + \overline{OP_{\frac{2\pi}{n}}} + \overline{OP_{\frac{2(n-1)\pi}{n}}} = \overline{0}$. Следовательно, проекции этой суммы на оси абсцисс и ординат равны 0.

Проекция на ось ординат равна

$$\sin 0 + \sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{4\pi}{n} + ... + \sin \frac{2(n-1)\pi}{n} = 0,$$

а проекция на ось абсцисс равна

$$\cos 0 + \cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{4\pi}{n} + ... + \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} = 0.$$

Учитывая, что $\sin 0 = 0$, а $\cos 0 = 1$, получим требуемые равенства.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

6.1. Числа a, b, x и y удовлетворяют равенствам $(a+b) \times \times (x+y) = 1$ и $(a^2+b^2)(x^2+y^2) = 1$. Докажите, что $ax+by \geqslant 0$.

6.2. Найдите $\sin 9^\circ + \sin 49^\circ + \sin 89^\circ + ... + \sin 329^\circ$.

6.3. Найдите наибольшее значение выражения

$$A = \sin x \cdot \cos y \cdot \cos z + \cos x \cdot \sin y \cdot \sin z.$$

6.4. Дано восемь действительных чисел: a, b, c, d, e, f, g, h. Докажите, что хотя бы одно из шести чисел $ac + bd$, $ae + bf$, $ag + bh$, $ce + df$, $cg + dh$, $eg + fh$ неотрицательно.

6.5. Решите уравнение $2\sqrt{x-1} + 5x = \sqrt{(x^2+4)(x+24)}$.

6.6. Каждое из чисел a, b, c и d лежит на отрезке $[2; 4]$. Докажите, что выполняется неравенство

$$25(ab + cd)^2 \geqslant 16(a^2 + d^2)(b^2 + c^2).$$

6.7. Докажите, что если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ ($\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$), то $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant 1{,}5$.

6.8. Для углов α, β и γ справедливо неравенство $\sin\alpha + + \sin\beta + \sin\gamma \geqslant 2$. Докажите, что $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant \sqrt{5}$.

6.1. Решение. Из первого равенства в условии следует, что $ax + by = 1 - (bx + ay)$, поэтому достаточно доказать, что $bx + ay \leqslant 1$.

Пусть в декартовой системе координат $\overline{c}(b; a)$, $\overline{d}(x; y)$. Тогда $|\overline{c}| = \sqrt{b^2 + a^2}$, $|\overline{d}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Из второго равенства в условии получим, что $|\overline{c}| \cdot |\overline{d}| = 1$. Следовательно, $bx + ay = \overline{c} \cdot \overline{d} \leqslant |\overline{c}| \cdot |\overline{d}| = 1$, что и требовалось.

6.2. Ответ: 0.

Решение. В декартовой системе координат рассмотрим единичную окружность и точки P_{9°, P_{49°, ..., P_{329° на ней (P_α — образ точки $P_0(0; 1)$ при повороте с центром в начале координат на угол α против часовой стрелки). Они являются вершинами правильного девятиугольника, поэтому $\overline{OP_{9^\circ}} + \overline{OP_{49^\circ}} + ... + \overline{OP_{329^\circ}} = \overline{0}$. Искомая сумма синусов является суммой проекций этих векторов на ось ординат, значит, она равна нулю (сравните с решением примера 6.3*а*).

Аналогично доказывается, что сумма косинусов этих же углов равна нулю. Кроме того, эти равенства можно обобщить:

$$\sin\alpha + \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{4\pi}{n}\right) + ... + \sin\left(\alpha + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) = 0$$

и

$$\cos\alpha + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{n}\right) + ... + \cos\left(\alpha + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) = 0.$$

6.3. Ответ: 1.

Решение. В декартовой системе координат рассмотрим векторы $\overline{m}(\sin x; \cos x)$ и $\overline{n}(\cos y \cos z; \sin y \sin z)$. Тогда

$$A = \overline{m} \cdot \overline{n} \leqslant |\overline{m}| \cdot |\overline{n}| = \sqrt{\cos^2 y \cdot \cos^2 z + \sin^2 y \cdot \sin^2 z} \leqslant \sqrt{\cos^2 z + \sin^2 z} = 1.$$

Значение 1 данное выражение может принимать, например, при $x = 0$, $y = z = \frac{\pi}{2}$.

6.4. Решение. Рассмотрим в декартовой системе координат четыре вектора $\overline{x}(a; b)$, $\overline{y}(c; d)$, $\overline{z}(e; f)$, $\overline{t}(g; h)$ и отложим их от произвольной точки (см. рис. 6.3). Тогда $ac + bd = \overline{x} \cdot \overline{y}$; $ae + bf = \overline{x} \cdot \overline{z}$; $ag + bh = \overline{x} \cdot \overline{t}$; $ce + df = \overline{y} \cdot \overline{z}$; $cg + dh = \overline{y} \cdot \overline{t}$; $eg + fh = \overline{z} \cdot \overline{t}$.

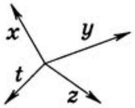


Рис. 6.3

Таким образом, среди данных шести чисел встречаются всевозможные попарные скалярные произведения рассмотренных векторов. Но эти четыре вектора разобьют полный угол 360° на четыре угла. Величина наименьшего из этих углов не превосходит $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$. Значит, косинус угла между соответствующими векторами неотрицателен, так же как и их скалярное произведение.

6.5. Ответ: 5.

Решение. В декартовой системе координат рассмотрим векторы $\overline{m}(2; x)$ и $\overline{n}(\sqrt{x-1}; 5)$, тогда

$$\overline{m} \cdot \overline{n} = 2\sqrt{x-1} + 5x \leqslant |\overline{m}| \cdot |\overline{n}| = \sqrt{x^2+4} \cdot \sqrt{x+24} = \\ = \sqrt{(x^2+4)(x+24)}.$$

Равенство возможно тогда и только тогда, когда $\overline{m} \uparrow\uparrow \overline{n}$, то есть $\frac{\sqrt{x-1}}{2} = \frac{5}{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1, \\ \frac{x-1}{4} = \frac{25}{x^2}. \end{cases}$

Далее полученное уравнение приводится к виду

$$x^3 - x^2 - 100 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x^3 - 125) - (x^2 - 25) = 0 \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad (x-5)(x^2 + 5x + 25) - (x-5)(x+5) = 0 \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad (x-5)(x^2 + 4x + 20) \quad \Leftrightarrow \quad x = 5.$$

Можно рассуждать и по-другому: подбором убеждаемся, что $x = 5$ является решением полученной системы. Других решений нет, так как на промежутке $[1; +\infty)$ функция $f(x) = \frac{x-1}{4}$ возрастает, а функция $g(x) = \frac{25}{x^2}$ убывает.

6.6. Решение. Заметим, что доказываемое неравенство равносильно неравенству

$$\frac{|ab + cd|}{\sqrt{a^2+d^2} \cdot \sqrt{b^2+c^2}} \geqslant \frac{4}{5}.$$

Рассмотрим два вектора в декартовой системе координат: $\overline{OA}(a; d)$ и $\overline{OB}(b; c)$. Тогда $|\overline{OA} \cdot \overline{OB}| = |ab + cd|$; $|\overline{OA}| = \sqrt{a^2 + d^2}$; $|\overline{OB}| = \sqrt{b^2 + c^2}$, то есть доказываемое неравенство имеет вид $\cos \angle AOB \geqslant \frac{4}{5}$.

Пусть числа a, b, c и d принадлежат отрезку [2; 4]. Тогда точки A и B принадлежат закрашенному квадрату (см. рис. 6.4). Наименьшее значение косинуса угла AOB достигается при наибольшем возможном значении этого угла, то есть в случае, когда точки A и B имеют координаты (2; 4) и (4; 2) соответственно. Тогда $\cos \angle AOB = \frac{|2 \cdot 4 + 4 \cdot 2|}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{20}} = \frac{4}{5}$. В остальных случаях $\cos \angle AOB > \frac{4}{5}$, что и требовалось.

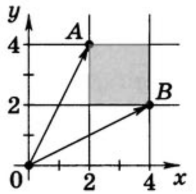


Рис. 6.4

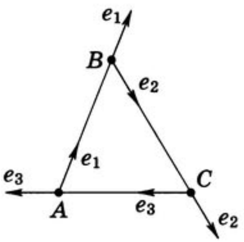


Рис. 6.5

6.7. Решение. Рассмотрим треугольник ABC, углы которого равны α, β и γ. Пусть векторы $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$ и $\overline{e_3}$ таковы, что $\overline{e_1} \uparrow\uparrow \overline{AB}$; $\overline{e_2} \uparrow\uparrow \overline{BC}$; $\overline{e_3} \uparrow\uparrow \overline{CA}$ и $|\overline{e_1}| = |\overline{e_2}| = |\overline{e_3}| = 1$. Тогда

$$\angle(\overline{e_1}; \overline{e_2}) = 180^\circ - \angle B = 180^\circ - \beta;$$
$$\angle(\overline{e_2}; \overline{e_3}) = 180^\circ - \angle C = 180^\circ - \gamma;$$
$$\angle(\overline{e_1}; \overline{e_3}) = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - \alpha$$

(см. рис. 6.5). Очевидно, что $(\overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{e_3})^2 \geqslant 0$.

Но

$$(\overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{e_3})^2 = \overline{e_1}^2 + \overline{e_2}^2 + \overline{e_3}^2 + 2\overline{e_1} \cdot \overline{e_2} + 2\overline{e_2} \cdot \overline{e_3} + 2\overline{e_1} \cdot \overline{e_3} =$$
$$= 1 + 1 + 1 + 2\cos(180^\circ - \beta) + 2\cos(180^\circ - \alpha) + 2\cos(180^\circ - \gamma) =$$
$$= 3 - 2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma).$$

Получим, что

$$3 - 2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant 1{,}5.$$

Существует и чисто геометрический способ доказательства, основанный на том, что для углов треугольника ABC выполняется равенство $\cos\angle A + \cos\angle B + \cos\angle C = 1 + \frac{r}{R}$, где r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей соответственно. Тогда доказываемое неравенство следует из того, что в любом треугольнике $R \geqslant 2r$.

6.8. Решение. Рассмотрим три вектора $\overline{a}(\cos\alpha; \sin\alpha)$, $\overline{b}(\cos\beta; \sin\beta)$ и $\overline{c}(\cos\gamma; \sin\gamma)$, длины которых равны по 1. Тогда

$$|\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}| = \sqrt{(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2+(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2} \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt{(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2+4}.$$

С другой стороны, $|\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}| \leqslant |\overline{a}|+|\overline{b}|+|\overline{c}| = 3$.

Следовательно,

$$\sqrt{(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2+4} \leqslant 3 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; (\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2 \leqslant 5 \;\Rightarrow\; \cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma \leqslant \sqrt{5},$$

что и требовалось.

Применение неравенства между модулем суммы векторов и суммой их модулей будет более подробно рассмотрено в занятии 8.

Можно также использовать задачи Д39—Д42.

Занятие 7
Обратные тригонометрические функции

Использование геометрических методов позволяет во многих случаях эффективно работать со значениями обратных тригонометрических функций: находить значения выражений, доказывать тождества, решать уравнения. Такие методы не всегда рациональнее алгебраических, но их преимущество состоит в том, что выражения, содержащие обратные тригонометрические функции, воспринимаются не формально, а полученные результаты наглядны.

Для решения задачи иногда бывает достаточно сделать «правильный» чертеж на клетчатой плоскости, то есть подобрать прямоугольные треугольники с подходящими катетами и разумно их расположить.

Пример 7.1. Докажите, что $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 = \pi$.

Решение. На сетке из «единичных» квадратов построим прямоугольные треугольники ADC и AEB так, как показано на рис. 7.1. Проведем также отрезок BC. Тогда $\angle DAC = \alpha = \operatorname{arctg} 2$, $\angle BAE = \gamma = \operatorname{arctg} 3$. Так как $AC = BC$ и $AC \perp BC$ (это следует из равенства прямоугольных треугольников с катетами 1 и 2), то $\angle BAC = \beta = \operatorname{arctg} 1$. Таким образом, доказываемое равенство следует из того, что $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

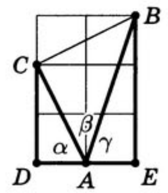


Рис. 7.1

Используя тот же чертеж, можно получить еще несколько соотношений. Например,

1) $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \angle ACD + \angle ABE = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \pi - (\alpha + \gamma) = \beta = \frac{\pi}{4}$;

2) $\arcsin \frac{2}{\sqrt{5}} + \arccos \frac{1}{\sqrt{10}} = \alpha + \gamma = \pi - \beta = \frac{3\pi}{4}$ (по теореме Пифагора $AB = \sqrt{10}$, $AC = \sqrt{5}$) и т. п.

В других случаях чертеж не обязательно делать «по клеточкам». Тогда кроме тригонометрических соотношений в прямоугольных треугольниках потребуется использовать какие-то факты из курса геометрии.

Пример 7.2. Найдите $\cos(2 \operatorname{arctg} 2)$.

Выражения такого вида особенно трудно воспринимаются школьниками, а алгебраическое решение воспринимается подчас как некоторый «фокус». Поэтому представляется важным продемонстрировать и геометрический способ решения.

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 1$ и $BC = 2$, тогда $\angle BAC = \alpha = \operatorname{arctg} 2$ и $AB = \sqrt{5}$. Отметив точку D, симметричную точке B относительно C, построим равнобедренный треугольник BAD, в котором $\angle BAD = 2\alpha$ (см. рис. 7.2).

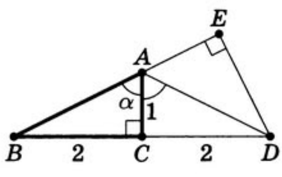


Рис. 7.2

Дальнейшее вычисление $\cos 2\alpha$ возможно различными способами.

Первый способ. По теореме косинусов для треугольника BAD имеем

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos 2\alpha.$$

Подставив числовые значения, получим $\cos 2\alpha = -0{,}6$.

Второй способ. Проведем высоту DE треугольника BAD. Она лежит вне этого треугольника ($BC > AC$, поэтому $\alpha > \frac{\pi}{4}$, то есть угол BAD тупой). Из подобия треугольников BAC и BDE следует, что $\frac{DE}{AC} = \frac{DB}{AB}$, то есть $DE = \frac{4}{\sqrt{5}}$. В треугольнике ADE имеем $AE = \sqrt{AD^2 - DE^2} = \frac{3}{\sqrt{5}}$. Рассматривая треугольник ADE, получим

$$\cos \angle DAE = \cos(\pi - 2\alpha) = \frac{AE}{AD} = \frac{3}{5}.$$

Следовательно, $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$.

Ответ: $-\frac{3}{5}$.

Для вычисления высоты DE можно также использовать площадь треугольника BAD.

Пример 7.3. Решите уравнение $\arcsin 2t + \arcsin t = \frac{\pi}{3}$.

И у этой задачи алгебраическое решение простым не будет...

Решение. Заметим, что $t > 0$ (иначе значение левой части не будет положительным). Рассмотрим два прямоугольных треугольника ABC и ABD с общей гипотенузой AB длины 1 (точки C и D — в разных полуплоскостях относительно AB, см. рис. 7.3). Пусть $BD = t$, $BC = 2t$, тогда $\angle BAD = \arcsin t$, а $\angle BAC = \arcsin 2t$.

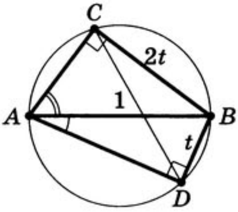


Рис. 7.3

Так как $\angle ACB = \angle ADB = \frac{\pi}{2}$, то около четырехугольника $ACBD$ можно описать окружность с диаметром AB. По условию $\angle CAD = \angle BAD + \angle BAC = \frac{\pi}{3}$, значит, $\angle CBD = \frac{2\pi}{3}$. Проведем отрезок CD, тогда по следствию из теоремы синусов для треугольника ACD получаем $CD = AB \cdot \sin \angle CAD = \frac{\sqrt{3}}{2}$. По теореме косинусов для треугольника BCD имеем

$$CD^2 = BC^2 + BD^2 - 2BC \cdot BD \cdot \cos \angle CBD,$$

то есть $\frac{3}{4} = 5t^2 - 4t^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$. Следовательно, $t = \frac{\sqrt{21}}{14}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{21}}{14}$.

Условимся, что во всех задачах этого занятия будут применяться только геометрические методы решения.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

7.1. Докажите, что при $x > 0$ выполняются равенства

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

7.2. Вычислите $\operatorname{arctg} 0{,}75 + \arccos 0{,}6$.

7.3. Вычислите $\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \operatorname{arcctg} 5$.

7.4. Решите уравнение $\operatorname{arctg} 3x + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$.

7.5. Вычислите $\sin\left(2 \arccos \frac{15}{17}\right)$.

7.6. Вычислите $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{5}{13}\right)$.

7.7. Докажите, что $\operatorname{arctg}\frac{5}{12} = 2\operatorname{arcctg} 5$.

7.8. Используя один и тот же чертеж, покажите справедливость трех равенств:

а) $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; б) $\operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \operatorname{arctg}\frac{1}{13} = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$; в) $\operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

Ответы и решения

7.1. Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 1$ и $BC = x$ (см. рис. 7.4). Значит, $AB = \sqrt{1+x^2}$. Пусть $\angle BAC = \alpha$, тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC} = x$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{x}$; $\cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; $\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

По определению обратных тригонометрических функций получим требуемые равенства.

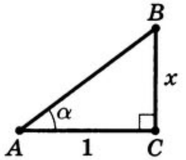


Рис. 7.4

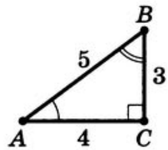


Рис. 7.5

7.2. Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

Решение. Запишем аргументы в виде обыкновенных дробей: $\operatorname{arctg} 0{,}75 + \arccos 0{,}6 = \operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \arccos\frac{3}{5}$, тогда станет понятно, что для решения удобно использовать египетский треугольник.

Рассмотрим такой треугольник ABC (см. рис. 7.5). Тогда $\operatorname{arctg}\frac{3}{4} = \angle BAC$; $\arccos\frac{3}{5} = \angle ABC$; $\angle BAC + \angle ABC = \frac{\pi}{2}$.

7.3. Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

Решение. На сетке из «единичных» квадратов построим прямоугольные треугольники ADB и AEC так, как показано на рис. 7.6. Проведем также отрезок BC. Тогда $\angle ABD = \operatorname{arcctg} 5$, $\angle ACE = \operatorname{arctg}\frac{2}{3}$. Так как $AC = BC$ и $AC \perp BC$, получаем, что $\angle BAC = \frac{\pi}{4}$.

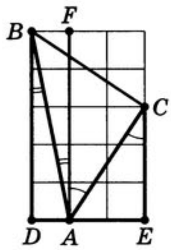


Рис. 7.6

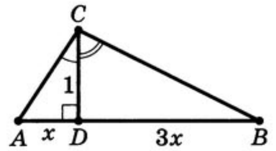


Рис. 7.7

Далее по аналогии с комментарием к примеру 7.1 можно перейти к углам BAD и CAE, но можно действовать и по-другому.

Проведем AF параллельно BD и CE, тогда

$$\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \operatorname{arcctg} 5 = \angle ACE + \angle ABD = \\ = \angle FAC + \angle FAB = \angle BAC = \frac{\pi}{4}.$$

7.4. Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Решение. Заметим, что $x > 0$ (иначе значение левой части не будет положительным). Рассмотрим прямоугольные треугольники ACD и BCD с общим катетом $CD = 1$, $AD = x$, $BD = 3x$ (см. рис. 7.7). Тогда $\operatorname{arctg} x = \angle ACD$, $\operatorname{arctg} 3x = \angle BCD$.

Из условия следует, что $\angle ACB = \angle ACD + \angle BCD = \frac{\pi}{2}$, поэтому CD — высота прямоугольного треугольника ABC, проведенная к гипотенузе. Следовательно, $CD^2 = AD \cdot BD$, то есть $3x^2 = 1$. Отсюда $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

7.5. Ответ: $\frac{240}{289}$.

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $AB = 17$ и катетом $AC = 15$, тогда $\angle BAC = \alpha = \arccos\frac{15}{17}$ и $BC = 8$. Отметив точку D, симметричную точке B относительно C, построим равнобедренный треугольник BAD, в котором $\angle BAD = 2\alpha$ (см. рис. 7.8). Пусть DE — высота этого треугольника, тогда $AB \cdot DE = BD \cdot AC$ (удвоенная площадь треугольника BAD, выраженная двумя способами). Отсюда $DE = \dfrac{16 \cdot 15}{17} = \dfrac{240}{17}$.

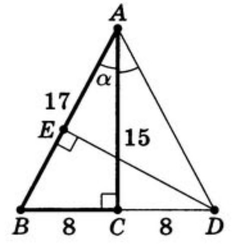


Рис. 7.8

Следовательно, $\sin 2\alpha = \dfrac{DE}{AD} = \dfrac{240}{289}$.

7.6. Ответ: 1,5.

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C и катетами $BC = 5$, $AC = 12$ (см. рис. 7.9). По теореме Пифагора $AB = 13$, тогда $\angle ABC = \arccos \dfrac{5}{13}$.

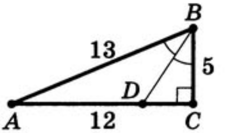


Рис. 7.9

Проведем биссектрису BD этого треугольника. Используя свойство биссектрисы, получим $\dfrac{AD}{CD} = \dfrac{13}{5}$. Так как $AD + CD = 12$, имеем $CD = \dfrac{10}{3}$. Следовательно,

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2} \arccos \frac{5}{13}\right) = \operatorname{ctg} \angle CBD = \frac{BC}{CD} = 1{,}5.$$

7.7. Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 12$ и $BC = 5$, тогда $\angle BAC = \alpha = \operatorname{arctg} \dfrac{5}{12}$ и $AB = 13$.

На луче AC отложим точки D и E так, что $CD = CE = 1$ (см. рис. 7.10). Тогда $\angle CBD = \angle CBE = \beta = \operatorname{arcctg} 5$ и треугольник DBE равнобедренный.

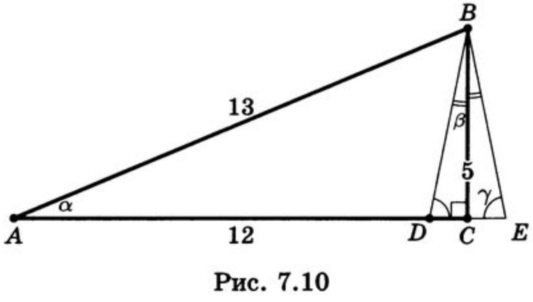


Рис. 7.10

Заметим, что $AE = 13 = AB$, поэтому $\angle ABE = \angle AEB = \gamma$. Рассматривая треугольник ABE, получаем $\alpha + 2\gamma = \pi$, а из треугольника DBE имеем $2\beta + 2\gamma = \pi$. Таким образом, $\alpha = 2\beta$, что и требовалось.

7.8. Решение. На сетке из «единичных» квадратов построим прямоугольный треугольник ABC (с прямым углом C) так, как показано на рис. 7.11. Разделив катет AC на 5 равных частей отметим часть точек деления: D, E и F. Эти точки соединим с вершиной B. Кроме того, отметим узлы сетки G, K, M (на одной вертикали с точкой C) и H, L, N (на одной вертикали с точкой B) и проведем вертикали CM и HN и горизонтали DH, EL и AN.

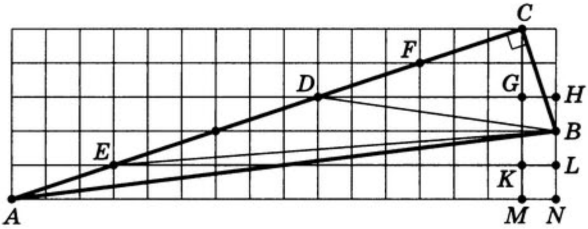


Рис. 7.11

Тогда

$$\operatorname{tg} \angle CDB = \frac{CB}{CD} = \frac{1}{2}; \quad \operatorname{tg} \angle CEB = \frac{CB}{CE} = \frac{1}{4}; \quad \operatorname{tg} \angle CAB = \frac{CB}{CA} = \frac{1}{5}.$$

Кроме того,

$$\operatorname{tg} \angle CDG = \frac{CG}{DG} = \frac{1}{3}; \ \operatorname{tg} \angle CEK = \frac{CK}{EK} = \frac{1}{3}; \ \operatorname{tg} \angle CAM = \frac{CM}{AM} = \frac{1}{3}$$

и

$$\operatorname{tg} \angle BDH = \frac{BH}{DH} = \frac{1}{7}; \ \operatorname{tg} \angle LEB = \frac{BL}{EL} = \frac{1}{13}; \ \operatorname{tg} \angle NAB = \frac{BN}{AN} = \frac{1}{8}.$$

Таким образом,

а) $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} = \angle CDB = \angle CDG + \angle BDH = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7}$;

б) $\operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \angle CEK = \angle CEB + \angle LEB = \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \operatorname{arctg} \frac{1}{13}$;

в) $\operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \angle CAM = \angle CAB + \angle NAB = \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8}$.

Можно также использовать задачи Д43—Д46.

Занятие 8
Расстояния и векторы в пространстве

При решении некоторых стереометрических задач эффективно применяется координатный метод. Но бывает и так, что для решения алгебраических задач удобно применить «обратный координатный метод». Такие задачи и будут рассмотрены в этом занятии. Чаще всего в условиях задач будут фигурировать выражения с тремя переменными. Продолжая линию, намеченную в занятиях 1 и 2, такие выражения удобно интерпретировать в трехмерной декартовой системе координат.

Напомним, что расстояние между точками в трехмерном пространстве вычисляется по формуле

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Сфера с центром $D(a; b; c)$ и радиусом $R \geqslant 0$ задается уравнением $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$, а уравнение плоскости α имеет вид $Ax + By + Cz + D = 0$, где $\overline{n}(A; B; C)$ — ее *вектор нормали* (вектор, перпендикулярный α). Кроме того, если $M(x_0; y_0; z_0)$, то расстояние от точки M до плоскости α вычисляется по формуле

$$|M; \alpha| = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Пример 8.1. Сколько решений имеет система уравнений

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = x^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = \\ = (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 1?$$

Решение. Уравнение $(x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$ задает сферу с центром $D_1(-1; 1; 0)$ и радиусом 1, уравнение $x^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 1$ — сферу с центром $D_2(0; -1; 1)$ и радиусом 1, а уравнение $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 1$ — сферу с центром $D_3(1; 0; -1)$ и радиусом 1.

Заметим, что $D_1D_2 = D_2D_3 = D_3D_1 = \sqrt{6}$, а сумма радиусов любых двух сфер равна 2. Так как $\sqrt{6} > 2$, то никакие две сферы не пересекаются, поэтому система решений не имеет.

Ответ: 0.

Учитывая, что соотношения, приведенные выше, выводятся с помощью векторов, естественно предположить, что наряду с рассмотрением пространственных фигур удобно также использовать векторы. При решении задач наиболее часто (как и в задачах занятия 6) используется неравенство $\overline{a} \cdot \overline{b} \leqslant |\overline{a} \cdot \overline{b}| \leqslant |\overline{a}| \cdot |\overline{b}|$, которое справедливо в декартовой системе координат любой размерности. Помимо этого используется тот факт, что *модуль суммы n векторов не превосходит суммы их модулей, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда все векторы одинаково направлены.*

В качестве характерного примера рассмотрим три геометрических способа решения одной и той же задачи.

Пример 8.2. Докажите, что если $|a+b+c| = 1$, то $a^2+b^2+c^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

Решение. Первый способ. Заменим данные переменные на x, y и z. Уравнение $|x+y+z| = 1 \Leftrightarrow x+y+z = \pm 1$ задает в трехмерной декартовой системе координат две плоскости, симметричные относительно начала координат $O(0;0;0)$. Расстояния от O до этих плоскостей равны. Найдем, например, расстояние d от O до плоскости α, заданной уравнением $x+y+z=1$:

$$d = |O;\alpha| = \frac{|1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 - 1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Расстояние от начала координат до точки $M(x;y;z)$, принадлежащей рассматриваемым плоскостям, не меньше чем d, поэтому $\sqrt{x^2+y^2+z^2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$, то есть $x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

Второй способ. Рассмотрим векторы $\overline{x}(a;b;c)$ и $\overline{y}(1;1;1)$ в декартовой системе координат. Тогда $|\overline{x}\cdot\overline{y}| = |a+b+c| = 1$; $|\overline{x}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$; $|\overline{y}| = \sqrt{3}$. Так как $|\overline{x}\cdot\overline{y}| \leqslant |\overline{x}|\cdot|\overline{y}|$, получаем, что $\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{3} \geqslant 1$, следовательно, $a^2+b^2+c^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

Третий способ. Рассмотрим векторы $\overline{x}(a; b; c)$, $\overline{y}(b; c; a)$ и $\overline{z}(c; a; b)$ в декартовой системе координат. Тогда $\overline{x} + \overline{y} + \overline{z} = \overline{(1; 1; 1)}$ или $\overline{x} + \overline{y} + \overline{z} = \overline{(-1; -1; -1)}$, а $|\overline{x}| = |\overline{y}| = |\overline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Поскольку модуль суммы векторов не превосходит суммы их модулей, то $\sqrt{3} \leqslant 3\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Следовательно, $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

8.1. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3. \end{cases}$

8.2. Известно, что $x + 2y + 3z = 1$. Какое наименьшее значение может принимать выражение $x^2 + y^2 + z^2$?

8.3. Докажите, что

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k^2 + b_k^2 + c_k^2} \geqslant \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} c_k\right)^2}.$$

8.4. Докажите, что при $n \geqslant 2$ выполняется неравенство $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} y_k^2$.

8.5. Сколько решений имеет система уравнений

$$(x - a)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y - a)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z - a)^2 = 1$$

в зависимости от значений параметра a?

8.6. Известно, что $9x^2 + 16y^2 + 144z^2 = 169$. Найдите наибольшее возможное значение выражения $6x - 4y + 24z$.

8.7. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $\sqrt{4a + 1} + \sqrt{4b + 1} + \sqrt{4c + 1}$, если $a + b + c = 1$.

8.8. Положительные числа A, B, C и D таковы, что система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = A, \\ |x| + |y| = B \end{cases}$ имеет m решений, а система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = C, \\ |x| + |y| + |z| = D \end{cases}$ имеет n решений.

Известно, что $m > n > 1$. Найдите m и n.

8.1. Ответ: (1; 1; 1).

Решение. Заметим, что $x = y = z = 1$ является решением данной системы. Докажем, что других решений нет. Действительно, в декартовой системе координат уравнение $x + y + z = 3$ задает плоскость, а уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ задает сферу с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{3}$. Расстояние от начала координат до этой плоскости равно $\dfrac{|1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \sqrt{3}$, значит, плоскость касается сферы, поэтому данная система не может иметь более одного решения.

8.2. Ответ: $\dfrac{1}{14}$.

Решение. В декартовой системе координат уравнение $x + 2y + 3z = 1$ задает плоскость α. Выражение $x^2 + y^2 + z^2$ равно квадрату расстояния от начала координат до точки $M(x, y, z)$. Расстояние от начала координат до точки $M(x, y, z)$, лежащей в плоскости α, не превосходит расстояния от начала координат до плоскости α. Поэтому наименьшее значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$ при заданном условии $x + 2y + 3z = 1$ достигается тогда, когда точка $M(x, y, z)$ является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость α. Оно равно квадрату расстояния от начала координат до плоскости α, то есть равно $\left(\dfrac{|1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}}\right)^2 = \dfrac{1}{14}$.

Проводя аналогию с задачей 8.1, получим, что радиус сферы с центром в начале координат, которая касается заданной плоскости, равен $\dfrac{1}{\sqrt{14}}$.

8.3. Решение. В декартовой системе координат рассмотрим векторы $\overline{d_1}, \overline{d_2}, \ldots, \overline{d_n}$. Пусть для каждого натурального k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ $\overline{d_k}(a_k; b_k; c_k)$, тогда в правой части доказываемого неравенства стоит модуль суммы этих векторов, а в левой части — сумма их модулей. Но для любого натурального n выполняется неравенство $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} \overline{d_k}\right| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \left|\overline{d_k}\right|$, откуда и следует доказываемое неравенство.

8.4. Решение. По аналогии с трехмерным пространством рассмотрим *арифметическое n-мерное* пространство, состоящее из числовых строк длины n (назовем их *векторами*, а числа в строке — координатами вектора). Определим *скалярное произведение векторов* как сумму произведений соответствующих координат, а *длину вектора* — как корень из его скалярного квадрата.

Рассмотрим векторы $\overline{x}(x_1; x_2; ...; x_n)$ и $\overline{y}(y_1; y_2; ...; y_n)$. В левой части доказываемого неравенства стоит квадрат скалярного произведения этих векторов, а в правой части — произведение квадратов их модулей. Фактически нам надо доказать, что и в арифметическом пространстве выполнено неравенство $(\overline{x} \cdot \overline{y})^2 \leqslant |\overline{x}|^2 \cdot |\overline{y}|^2$, равносильное неравенству $|\overline{x} \cdot \overline{y}| \leqslant |\overline{x}| \cdot |\overline{y}|$.

На векторы $\overline{x}$ и $\overline{y}$ натянуто *двумерное подпространство*. Можно строго показать, что в нем есть базис из двух векторов длины 1, скалярное произведение которых равно 0. Но тогда скалярное произведение в этом базисе выражается такой же формулой, как на плоскости, и обладает всеми свойствами обычного скалярного произведения. В частности, $\overline{x} \cdot \overline{y} \leqslant |\overline{x}| \cdot |\overline{y}|$, что и требовалось доказать.

Доказанное неравенство называется *неравенством Коши—Буняковского*. Отметим, что равенство в нем достигается, если $\overline{x} \uparrow\uparrow \overline{y}$, то есть когда координаты этих векторов пропорциональны: $\dfrac{x_k}{y_k} = \lambda$ для любого значения k.

Отметим также, что второй способ решения примера 8.2 фактически является применением неравенства Коши—Буняковского.

8.5. Ответ: при $a = 0$ бесконечно много решений; при $0 < |a| < \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ два решения; при $|a| = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ одно решение; при $|a| > \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ решений нет.

Решение. Рассмотрим точки $D_1(a;\ 0;\ 0)$, $D_2(0; a; 0)$ и $D_3(0; 0; a)$ в декартовой системе координат (см. рис. 8.1). Заданная в условии система уравнений определяет геометрическое место точек пространства, находящихся на расстоянии 1 от каждой из точек D_1, D_2 и D_3.

Геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от вершин треугольника, — это центр его описанной окружности, а в пространстве это прямая, проходящая через этот центр и перпендикулярная плоскости треугольника. Каждая сторона треугольника $D_1D_2D_3$ равна $a\sqrt{2}$, значит, его центр M удален от вершин на расстояние $\frac{a\sqrt{6}}{3}$, и это ближайшая к вершинам точка указанной прямой. Следовательно, если $\frac{a\sqrt{6}}{3} > 1 \Leftrightarrow a > \frac{\sqrt{6}}{2}$, то решений нет; если $\frac{a\sqrt{6}}{3} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{6}}{2}$, то решением являются только координаты точки M; если $0 < \frac{a\sqrt{6}}{3} < 1 \Leftrightarrow 0 < a < \frac{\sqrt{6}}{2}$, то на расстоянии 1 от вершин треугольника лежат две точки прямой (симметричные относительно плоскости треугольника); если $a = 0$, то точки D_1, D_2 и D_3 совпадают с началом координат, поэтому решений бесконечно много.

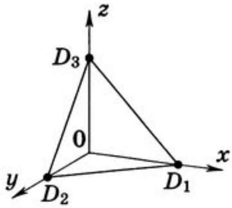


Рис. 8.1

Случай $a < 0$ полностью симметричен уже разобранному.

Можно провести и другое рассуждение, которое для некоторых школьников окажется более наглядным. Уравнение $(x-a)^2 + y^2 + z^2 = 1$ задает сферу с центром $D_1(a; 0; 0)$ и радиусом 1, уравнение $x^2 + (y-a)^2 + z^2 = 1$ — сферу с центром $D_2(0; a; 0)$ и радиусом 1, а уравнение $x^2 + y^2 + (z-a)^2 = 1$ — сферу с центром $D_3(0; 0; a)$ и радиусом 1.

Пусть $a > 0$, тогда изобразим центры сфер в декартовой системе координат (см. рис. 8.1). Треугольник $D_1D_2D_3$ правильный со стороной $a\sqrt{2}$. Для того чтобы заданная система имела единственное решение, все три сферы должны иметь ровно одну общую точку. Так как радиусы сфер равны, то эта точка — центр треугольника $D_1D_2D_3$, расстояние от которой до центра каждой сферы должно быть равно 1. Таким образом, $\frac{a\sqrt{6}}{3} = 1$, то есть $a = \frac{\sqrt{6}}{2}$. При $a > \frac{\sqrt{6}}{2}$ сферы, очевидно, не имеют общих точек, а при $0 < a < \frac{\sqrt{6}}{2}$ две сферы пересекаются по окружности, которая пересекает третью сферу в двух точках. При $a = 0$ сферы совпадают, поэтому решений бесконечно много.

8.6. Ответ: 39.

Решение. Рассмотрим векторы $\overline{m}(3x; 4y; 12z)$, $\overline{n}(2; -1; 2)$. Тогда $\overline{m} \cdot \overline{n} = 6x - 4y + 24z$, $|\bar{m}| = \sqrt{9x^2 + 16y^2 + 144z^2} = 13$, $|\bar{n}| = 3$. Так как $\bar{m} \cdot \bar{n} \leqslant |\bar{m}| \cdot |\bar{n}|$, получаем, что $6x - 4y + 24z \leqslant \leqslant 39$.

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $\overline{m} \upuparrows \overline{n}$, то есть

$$\frac{3x}{2} = \frac{4y}{-1} = \frac{12z}{2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4z, \\ y = -\dfrac{3}{2}z, \\ z > 0. \end{cases}$$

Подставив выражения для x и y в равенство, заданное в условии, получим, что найденное значение достигается, если $x = \dfrac{26}{9}$; $y = -\dfrac{13}{12}$; $z = \dfrac{13}{18}$.

Полученный результат можно интерпретировать следующим образом. Данное уравнение задает в декартовой системе координат эллипсоид с центром $O(0; 0; 0)$. Из всех плоскостей вида $6x - 4y + 24z = d$, где $d > 0$, ищется та плоскость, которая имеет с эллипсоидом общие точки и наиболее удалена от начала координат. Это будет одна из плоскостей, касательных к эллипсоиду.

8.7. Ответ: $\sqrt{7}$ — наименьшее значение; $\sqrt{21}$ — наибольшее.

Решение. Пусть

$$\sqrt{4a+1} = x \geqslant 0; \quad \sqrt{4b+1} = y \geqslant 0; \quad \sqrt{4c+1} = z \geqslant 0.$$

Тогда по условию $x^2 + y^2 + z^2 = 4(a + b + c) + 3 = 7$. Найдем наименьшее и наибольшее значения суммы $S = x + y + z$ при неотрицательных значениях переменных x, y и z.

Уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 7$ в декартовой системе координат задает сферу с центром в точке $O(0; 0; 0)$ и радиусом, равным $\sqrt{7}$. Среди точек этой сферы, имеющих неотрицательные координаты, найдем те, для которых сумма координат S: 1) наименьшая; 2) наибольшая. Для этого рассмотрим произвольную точку $P(x; y; z)$, принадлежащую указанной части сферы.

1. Разложим $\overline{OP}$ на три вектора, коллинеарных «базисным» векторам, то есть $\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$, где $\overline{OP}(x; y; z)$, $\overline{OA}(x; 0; 0)$, $\overline{OB}(0; y; 0)$, $\overline{OC}(0; 0; z)$.

Имеем $|\overline{OP}| = |\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}| \leqslant |\overline{OA}| + |\overline{OB}| + |\overline{OC}|$, то есть $x + y + z \geqslant \sqrt{7}$. Так как векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$ не могут быть одинаково направлены, то равенство достигается тогда и только тогда, когда два из них нулевые.

Следовательно, наименьшее значение S достигается в точках пересечения сферы с положительными полуосями координат и равно $\sqrt{7}$. Наименьшее значение исходного выражения, равное $\sqrt{7}$, достигается, например, при $a = b = -\frac{1}{4}$, $c = \frac{3}{2}$.

2) Рассмотрим два вектора $\overline{OP}(x; y; z)$ и $\overline{e}(1; 1; 1)$. Искомое значение S равно скалярному произведению векторов $\overline{OP}$ и $\overline{e}$ при условии, что $|\overline{OP}| = \sqrt{7}$, а $|\overline{e}| = \sqrt{3}$.

Так как $S = \overline{OP} \cdot \overline{e} = |\overline{OP}| \cdot |\overline{e}| \cdot \cos\angle(\overline{OP}; \overline{e}) \leqslant |\overline{OP}| \cdot |\overline{e}| = \sqrt{21}$, то искомое значение не превосходит $\sqrt{21}$. Равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы $\overline{OP}$ и $\overline{e}$ одинаково направлены, то есть когда $x = y = z$.

Следовательно, наибольшее значение S достигается в точке сферы, имеющей одинаковые координаты, и равно $\sqrt{21}$. Значение $\sqrt{21}$ является наибольшим для исходного выражения (оно достигается при $a = b = c = \frac{1}{3}$).

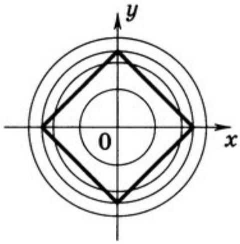
Отметим, что утверждение, доказанное в процессе решения задачи, можно интерпретировать еще и так: из всех прямоугольных параллелепипедов с данной длиной диагонали наименьшую сумму измерений имеет «вырожденный» параллелепипед, а наибольшую — куб.

8.8. Ответ: $m = 8$, $n = 6$.

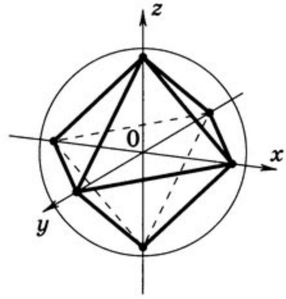
Решение. Рассмотрим геометрическую интерпретацию заданных систем уравнений в декартовой системе координат (для первой системы — на плоскости, а для второй — в пространстве).

1. В первой системе первое уравнение задает окружность с центром в начале координат, а второе — контур квадрата с центром в начале координат и диагоналями, принадлежащими осям координат (см. рис. 8.2*а*). Обе фигуры симмет-

ричны относительно осей и начала координат, поэтому первая система уравнений в зависимости от A и B либо не имеет решений (окружность лежит внутри квадрата или квадрат расположен внутри окружности), либо имеет четыре решения (окружность вписана в квадрат или описана около него), либо имеет восемь решений (окружность дважды пересекает каждую сторону квадрата). Таким образом, m может равняться либо 0, либо 4, либо 8.



а)



б)

Рис. 8.2

2. Во второй системе первое уравнение задает сферу с центром в начале координат, а второе — поверхность октаэдра с центром в начале координат и с вершинами, лежащими на осях координат на равных расстояниях от центра (см. рис. 8.2*б*). Эта система в зависимости от C и D либо не имеет решений (сфера целиком лежит внутри октаэдра или октаэдр — внутри сферы), либо имеет 6 решений (октаэдр вписан в сферу), либо имеет 8 решений (сфера вписана в октаэдр), либо имеет бесконечное количество решений (сфера пересекает грани октаэдра по окружностям или нескольким дугам окружностей). Таким образом, n может равняться либо 0, либо 6, либо 8.

Условию $m > n > 1$ удовлетворяет только пара $m = 8$, $n = 6$.

Можно также использовать задачи Д47—Д51.

Занятие 9
Геометрический смысл интеграла

Рассмотрим задачи, которые решаются исходя из *геометрического смысла определенного интеграла: если $a \leqslant b$ и все значения интегрируемой функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ неотрицательны, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком $f(x)$, осью x и прямыми $x = a$, $x = b$.*

Отметим, что если $f(x) \leqslant 0$ на отрезке $[a; b]$, то фигура, построенная аналогичным образом, имеет такую же площадь $S \geqslant 0$, поэтому

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b (-(-f(x)))\,dx = -\int\limits_a^b (-f(x))\,dx = -S \leqslant 0.$$

Указанные геометрические соображения касаются и тех случаев, когда другие способы вычисления интеграла технически трудны, и, тем более, тех случаев, когда это сделать невозможно. Рассмотрим два соответствующих примера.

Пример 9.1. Вычислите $\int\limits_{\sqrt{3}}^{2} \sqrt{4 - x^2}\,dx$.

Решение. Обозначим подынтегральную функцию через y. Тогда

$$y = \sqrt{4 - x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y \geqslant 0, \end{cases}$$

то есть график подынтегральной функции представляет собой «верхнюю» полуокружность с центром в начале координат и радиусом 2. Искомое значение интеграла равно площади криволинейной трапеции, ограниченной этим графиком, осью x и прямыми $x = \sqrt{3}$, $x = 2$ (см. рис. 9.1).

Площадь S этой фигуры равна половине площади сегмента, отсекаемого от круга хордой AB.

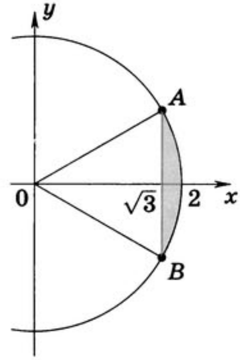


Рис. 9.1

Косинус угла между радиусом OA и осью x равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$, значит, этот угол равен $\frac{\pi}{6}$, тогда $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$. Таким образом,

$$S = 0{,}5(S_{\text{сект. } AOB} - S_{\triangle AOB}) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример 9.2. Докажите, что если функция $f(t)$ интегрируема на отрезке $[0; 1]$, то $\int\limits_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx$.

Решение. На отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ функции $\sin x$ и $\cos x$ принимают значения от 0 до 1. Кроме того, $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, то есть графики функций $\sin x$ и $\cos x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ симметричны относительно прямой $x = \frac{\pi}{4}$. Значит, тем же свойством будут обладать и графики функций $f(\sin x)$ и $f(\cos x)$. Следовательно, площади соответствующих криволинейных трапеций (или фигур, им симметричных относительно оси x) будут равны, то есть выполняется доказываемое равенство.

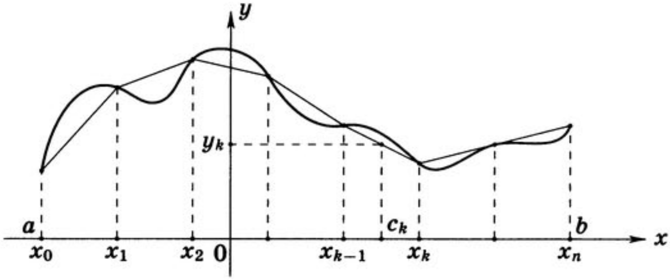
Более детальный подход к понятию интеграла (в фундаментальном курсе математического анализа он является определением интеграла) позволяет вычислять некоторые бесконечные суммы и, наоборот, вычислять значения интеграла, найдя соответствующую бесконечную сумму.

Пусть задана криволинейная трапеция, ограниченная графиком функции $y = f(x)$, осью x и прямыми $x = a$, $x = b$ ($a < b$, см. рис. 9.2а). Разобьем отрезок $[a; b]$ на n равных отрезков точками $x_0 = a$; x_1; x_2; ...; $x_n = b$. Тогда для каждого k, $1 \leqslant k \leqslant n$, имеем $\Delta x = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$. Рассмотрим на графике множество точек вида $M(x_k; f(x_k))$, последовательно соединим их ломаной и опустим из этих точек перпендикуляры на ось x. Тогда $S_{\text{кр. тр.}} \approx \sum_{k=1}^{n} S_k$, где S_k — площади соответствующих трапеций или прямоугольников. Следовательно,

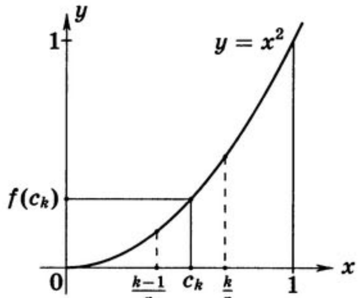
$$S_k = \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot \Delta x \cong f(c_k) \cdot \Delta x = y_k \cdot \Delta x,$$

где c_k — середина соответствующего отрезка. Пусть $n \to \infty$, тогда $\Delta x \to 0$. Таким образом,

$$\int_a^b f(x)\,dx = S_{\text{кр. тр.}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(c_k).$$



а)



б)

Рис. 9.2

Отметим, что, перейдя к серединам отрезков, мы заменили площадь обычной трапеции и каждой части криволинейной трапеции на близкую им обеим площадь прямоугольника.

Пример 9.3. Не используя формулу Ньютона—Лейбница, докажите, что $\int\limits_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$.

Решение. Построим график функции $y = x^2$ на отрезке $[0; 1]$ и произведем разбиение этого отрезка указанным выше образом (см. рис. 9.2*б*). Тогда $c_k = \frac{1}{2}\left(\frac{k-1}{n} + \frac{k}{n}\right) = \frac{2k-1}{2n}$. Следовательно,

$$\int\limits_0^1 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2k-1}{2n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4n^3} \cdot \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2\right).$$

Для вычисления суммы квадратов первых n нечетных чисел можно использовать известную формулу

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ее можно вывести и геометрически (см. задачу Д61).

Следовательно,

$$\begin{aligned}1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 &= \\ &= (1^2 + 2^2 + \ldots + (2n)^2) - (2^2 + 4^2 + \ldots + (2n)^2) = \\ &= (1^2 + 2^2 + \ldots + (2n)^2) - 4(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) = \\ &= \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} = \\ &= \frac{n(2n+1)(4n+1-2n-2)}{3} = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int\limits_0^1 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4n^3} \cdot \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{4}\right) = \frac{1}{3},$$

что и требовалось.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

9.1. Вычислите: а) $\int\limits_{-6}^{-3} \sqrt{-x^2 - 6x}\, dx$; б) $\int\limits_{0}^{6} \sqrt{x^2 + 9 - 6x}\, dx$.

9.2. Вычислите: а) $\int\limits_{0}^{3} (|x - 1| - |x - 2|)\, dx$;

б) $\int\limits_{-2}^{0} \arcsin(x + 1)\, dx + \int\limits_{-2}^{0} \arccos(x + 1)\, dx$.

9.3. Докажите, что: а) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\sin^2 x + \sin^4 x)\, \mathrm{tg}\, x\, dx = 0$;

б) $\int\limits_{-2015\pi}^{2015\pi} \cos x\, dx = 0$.

9.4. Вычислите: а) $\int\limits_{0}^{4} \sqrt{x^2 + 9}\, dx + \int\limits_{3}^{5} \sqrt{x^2 - 9}\, dx$;

б) $\int\limits_{-1}^{1} \arccos x\, dx$.

9.5. Докажите, что $\int\limits_{0}^{\pi} |\sin kx|\, dx$ не зависит от значения k, где k — натуральное число.

9.6. Докажите неравенство

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2} < \frac{99}{100}.$$

9.7. Вычислите $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} \right)$.

Ответы и решения

9.1. Ответ: а) $2{,}25\pi$; б) 9.

Решение. а) Пусть

$$y = \sqrt{-x^2 - 6x} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 3)^2 + y^2 = 9, \\ y \geqslant 0, \end{cases}$$

то есть график подынтегральной функции представляет собой «верхнюю» полуокружность с центром в точке $(-3; 0)$ и радиусом 3. Искомое значение интеграла равно площади криволинейной трапеции, ограниченной этим графиком,

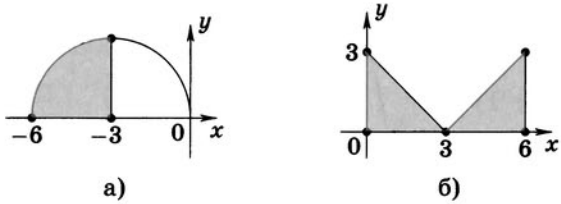


Рис. 9.3

осью x и прямыми $x = -6$, $x = -3$ (см. рис. 9.3*а*). Площадь этой фигуры равна четверти площади круга, то есть равна $\frac{9\pi}{4}$.

б) Так как $\sqrt{x^2 + 9 - 6x} = |x - 3|$, то искомое значение интеграла равно площади криволинейной трапеции, ограниченной этим графиком, осью x и прямыми $x = 0$, $x = 6$ (см. рис. 9.3*б*). Площадь получившейся фигуры равна сумме площадей двух образовавшихся прямоугольных треугольников, то есть равна 9.

9.2. Ответ: а) 0; б) π.

Решение. Воспользуемся тем, что

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

(что соответствует свойству аддитивности для площадей фигур).

а) Имеем

$$\int_0^3 (|x-1| - |x-2|)\,dx = \int_0^3 |x-1|\,dx - \int_0^3 |x-2|\,dx = 0,$$

так как площадь каждой из двух криволинейных трапеций, соответствующих этим интегралам, равна 2,5 (вычисления аналогичны приведенным в задаче 9.1, б).

б) Имеем

$$\int_{-2}^{0} \arcsin(x+1)\,dx + \int_{-2}^{0} \arccos(x+1)\,dx =$$

$$= \int_{-2}^{0} (\arcsin(x+1) + \arccos(x+1))\,dx = \int_{-2}^{0} \frac{\pi}{2}\,dx,$$

так как обе функции интегрируемы на отрезке $[-2; 0]$ и $\arcsin t + \arccos t = \frac{\pi}{2}$. Полученная подынтегральная функция постоянная, поэтому искомый интеграл равен площади прямоугольника со сторонами 2 и $\frac{\pi}{2}$, то есть равен π.

9.3. Решение. а) Функция $f(x) = (\sin^2 x + \sin^4 x)\,\mathrm{tg}\,x$ интегрируема на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ и является нечетной. Значит, фигура, соответствующая искомому интегралу, симметрична относительно начала координат. Следовательно, площади ее частей, расположенных по обе стороны от оси x, равны. При вычислении интеграла получится сумма противоположных чисел, которая равна нулю.

б) Функция $\cos x$ периодична с периодом 2π, поэтому достаточно вычислить интеграл на любом отрезке длиной 2π (соответствующие фигуры получаются друг из друга параллельным переносом вдоль оси x на 2π, поэтому их площади равны). Кроме того, эта функция четная, поэтому площади фигур, симметричных относительно оси y, также равны. Следовательно,

$$\int_{-2015\pi}^{2015\pi} \cos x\,dx = 2015 \int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,dx = 4030 \int_{0}^{\pi} \cos x\,dx = 0.$$

Последнее равенство следует из того, что график функции $\cos x$ на отрезке $[0; \pi]$ симметричен относительно точки $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

В пункте а) мы практически обосновали и использовали следующий факт: *если $f(x)$ — нечетная функция, интегрируемая на отрезке $[-a; a]$, то* $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$. В пункте б) обоснованы и использованы такие факты: 1) *если* $f(x)$ — *четная функция, интегрируемая на отрезке* $[-a; a]$, *то* $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx$; 2) *если* $f(x)$ — *интегрируемая периодическая функция с периодом* T, *то* $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \int\limits_{a+T}^{b+T} f(x)\,dx$.

9.4. Ответ: а) 20; б) π.

Решение. а) Значение первого интеграла — площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = \sqrt{x^2+9}$, осями x и y и прямой $x = 4$. Так как

$$\begin{cases} y = \sqrt{x^2+9}, \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \sqrt{y^2-9}, \\ y \geqslant 3, \end{cases}$$

то подынтегральные функции являются взаимно обратными, значит, их графики симметричны относительно прямой $y = x$ (см. рис. 9.4*а*). Значение второго интеграла — пло-

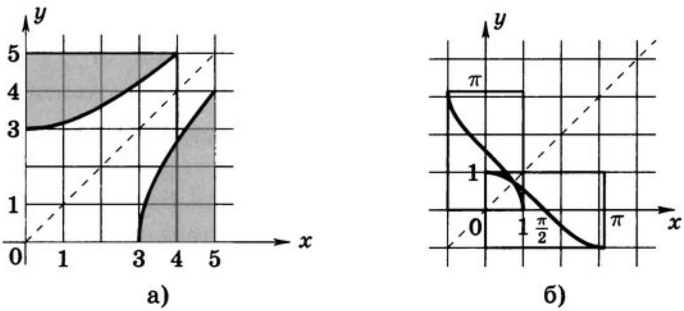


Рис. 9.4

щадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = \sqrt{x^2-9}$, осью x и прямыми $x = 3$, $x = 5$. В силу указанной симметрии эта фигура равна фигуре, ограниченной графиком функции $y = \sqrt{x^2+9}$, осью y и прямыми $y = 3$, $y = 5$, значит, площади этих фигур равны. Таким образом, искомая сумма равна площади прямоугольника со сторонами 4 и 5, то есть равна 20.

б) Искомое значение интеграла равно площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = \arccos x$, осью x и прямыми $x = -1$, $x = 1$. Функция $y = \arccos x$ является обратной к функции $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$, поэтому их графики симметричны относительно прямой $y = x$ (см. рис. 9.4*б*). Используя этот факт, можно предложить два способа решения: рассуждение, аналогичное приведенному в пункте а), которое потребует применения формулы Ньютона—Лейбница для более простого интеграла, и «чисто геометрическое» рассуждение.

Первый способ. В силу указанной симметрии искомое значение интеграла равно площади фигуры, ограниченной графиком функции $y = \cos x$, осью y и прямыми $y = -1$, $x = \pi$. Площадь такой фигуры не изменится в результате параллельного переноса на 1 вверх, значит,

$$\int_{-1}^{1} \arccos x\, dx = \int_{0}^{\pi} (\cos x + 1)\, dx = (\sin x + x)\Big|_0^{\pi} = \pi.$$

Второй способ. Так как график функции $\cos x$ на отрезке $[0; \pi]$ симметричен относительно точки $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$, то график функции $\arccos x$ симметричен относительно точки $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Эта же точка является центром симметрии прямоугольника, ограниченного прямыми $y = 0$, $y = \pi$, $x = -1$, $x = 1$. Следовательно, график функции $\arccos x$ разбивает этот прямоугольник на две равные фигуры. Площадь прямоугольника равна 2π, поэтому искомая площадь равна π.

9.5. Решение. Докажем, что при любом значении k, отличном от нуля, значение данного интеграла равно значению $\int_0^{\pi} |\sin x|\, dx$, то есть площади S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = |\sin x|$, осью x и прямыми $x = 0$, $x = \pi$.

Заметим, что в силу нечетности функции $\sin x$ и четности функции $|t|$ достаточно рассмотреть значения $k > 0$. Функция $y = |\sin x|$ периодическая, ее период равен π, поэтому период подынтегральной функции равен $\frac{\pi}{k}$. Ее график получается из графика функции $y = |\sin x|$ путем его сжатия к оси y (растяжения от оси y) в k раз. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = |\sin kx|$, осью x и прямыми $x = 0$, $x = \frac{\pi}{k}$, равна $\frac{S}{k}$ (по *принципу Кавальери* при указанном преобразовании высота фигуры не изменяется, а каждый горизонтальный отрезок изменяется в k раз). На отрезке $[0; \pi]$ уложится ровно k новых периодов, поэтому искомая площадь равна $\frac{S}{k} \cdot k = S$.

Используя формулу Ньютона—Лейбница, несложно подсчитать, что $\int\limits_0^{\pi} |\sin x|\, dx = 2$.

Отметим также, что полученный результат можно обобщить: если функция $f(x)$ интегрируема и имеет период T, то $\int\limits_0^{T} f(kx)\, dx$ не зависит от значения k $(k \in \mathbb{N})$.

9.6. Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{x^2}$ на отрезке $[1; 100]$. Тогда

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2} = \sum_{k=2}^{100} f(k) = \sum_{k=2}^{100} (k - (k-1)) \cdot f(k).$$

Полученная сумма представляет собой площадь «ступенчатой» фигуры, расположенной под графиком функции $y = f(x)$ (см. рис. 9.5). Рассматриваемая функция интегрируема и убывает на отрезке $[1; 100]$, поэтому площадь полученной фигуры меньше, чем площадь S соответствую-

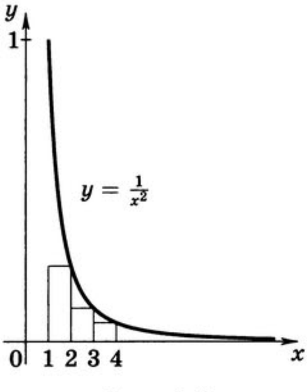


Рис. 9.5

щей ей криволинейной трапеции. Учитывая, что

$$S = \int\limits_1^{100} f(x)\,dx = \int\limits_1^{100} x^{-2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^{100} = -\frac{1}{100} + 1 = \frac{99}{100},$$

получим требуемое неравенство.

9.7. Ответ: $\frac{2}{\pi}$.

Решение. Рассмотрим график функции $y = \sin x$ на отрезке $[0; \pi]$. Разобьем этот отрезок на n равных частей, рассмотрим значения $\sin x$ в точках разбиения и построим «ступенчатую» фигуру, расположенную под графиком функции $y = \sin x$ (см. рис. 9.6). Площадь этой фигуры является суммой площадей прямоугольников «шириной» $\frac{\pi}{n}$ и «длинами» $\sin\frac{\pi}{n}$, $\sin\frac{2\pi}{n}$, ... Следовательно,

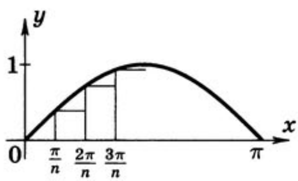


Рис. 9.6

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin x\,dx = -\frac{1}{\pi}\cos x\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

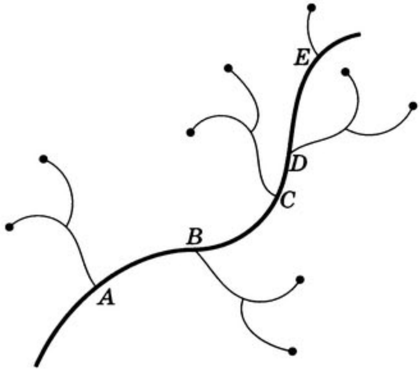
Можно также использовать задачи Д52—Д57, Д59.

Дополнительные задачи

Д1. Решите уравнения или неравенства:

а) $|x| - |x-4| = 1$; б) $|x| - |x-4| > 4$; в) $|x+1| - |x+3| = 2$; г) $|x+1| - |x+3| < 2$.

Д2. На плане изображено шоссе, от которого отходят несколько дорог к сёлам (см. рисунок). В какой точке шоссе нужно расположить автобусную остановку, чтобы суммарное расстояние от неё до всех сёл (по дорогам и шоссе) было наименьшим?



Д3. а) Три сталкера дошли до Каменной аномалии. Оттуда к кладу ведет прямая тропа длиной 100 метров. Сталкеры знают, что первый пошедший по тропе окаменеет в произвольном месте и такая же участь ждет второго. Они оба оживут в тот момент, когда по тропе будет идти третий и суммарное расстояние от него до двух окаменевших спутников будет в точности равно 100 м. Смогут ли все сталкеры добраться до клада без риска окаменеть навсегда?

б)* Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — некоторые числа, принадлежащие отрезку $[0; 1]$. Докажите, что на этом отрезке найдется такое число x, что $\frac{1}{n}(|x-x_1| + |x-x_2| + \ldots + |x-x_n|) = \frac{1}{2}$.

Д4. Докажите неравенство

$$\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}+\sqrt{(a-e)^2+(b-f)^2}\geqslant\sqrt{(c-e)^2+(d-f)^2}.$$

Д5. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{x^2+y^2+x+y+0{,}5}+\sqrt{x^2+y^2-2x+4y+5}.$$

Д6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y-8)^2}=5,\\ 3xy-10y=3.\end{cases}$$

Д7. Найдите наименьшее значение выражения x^2+y^2, если $x^2-y^2+6x+4y+5=0$.

Д8. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y+3)^2},$$

если $2|x|+|y|=2$.

Д9. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2},$$

если $x-y-3=0$.

Д10. Найдите наименьшее значение выражения $\frac{y}{x}$, если известно, что $x^2-10x+y^2-2y+1=0$.

Д11. Среди всех решений неравенства $y-x\geqslant x^2+1$ найдите те, для которых выражение $y-2x$ принимает наименьшее значение.

Д12. Решите уравнение $(x-y)^2+(e^x-y)^2=0{,}5$.

Д13*. Семь лыжников с номерами $1, 2, ..., 7$ ушли со старта по очереди и прошли дистанцию — каждый со своей постоянной скоростью. Оказалось, что каждый лыжник ровно дважды участвовал в обгонах. (В каждом обгоне участвуют ровно два лыжника — тот, кто обгоняет, и тот, кого обгоняют.) По окончании забега должен быть составлен протокол, состоящий из номеров лыжников в порядке финиширования. Докажите, что в забеге с описанными свойствами может получиться ровно два различных протокола.

Д14. В полдень из Аннино и Ванино вышли навстречу друг другу Аня и Ваня, которые встретились через два часа. В 14:00 из Аннино вышел Петя, который догнал Аню через час, и в этот же момент в Аннино пришел Ваня. На самом деле Петя планировал выйти в полдень и встретится с Ваней. В какое время произошла бы эта встреча?

Д15. По двум пересекающимся дорогам с равными постоянными скоростями движутся автомобили «Ауди» и «БМВ». Оказалось, что как в 17:00, так и в 18:00 «БМВ» находился в два раза дальше от перекрёстка, чем «Ауди». В какое время «Ауди» мог проехать перекрёсток?

Д16*. По четырем попарно пересекающимся дорогам издалека с постоянными скоростями идут 4 человека. Известно, что первый встретится со вторым, с третьим и с четвертым; второй встретится с третьим и с четвертым, причем «тройных» встреч не будет. Встретятся ли третий и четвертый?

Д17*. Три спортсмена стартовали одновременно из точки A и бежали по прямой в точку B каждый со своей постоянной скоростью. Добежав до точки B, каждый из них мгновенно повернул обратно и бежал с другой постоянной скоростью к финишу в точке A. Их тренер бежал рядом так, чтобы в каждый момент времени находиться в точке, сумма расстояний от которой до участников забега наименьшая. Известно, что расстояние от A до B равно 60 метров и все спортсмены финишировали одновременно. Мог ли тренер пробежать меньше чем 100 метров?

Д18. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2},$$

если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ и $a+b=1$.

Д19. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x)=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{(b-x)^2+c^2},$$

если a, b и c — положительные числа.

Д20. Для положительных чисел a, b и c докажите, что

$$\sqrt{a^2-c^2}+\sqrt{b^2-c^2} \leqslant \frac{ab}{c}.$$

Д21. Для положительных чисел $a < b < c$ и $x < y < z$ выполняются равенства $a^2 + b^2 = c^2$, $x^2 + y^2 = z^2$, $(a + x)^2 + (b + y)^2 = (c + z)^2$. Докажите, что $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

Д22. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}.$$

Д23. Докажите, что для любых значений x выполняется неравенство $\sqrt{9 + x^2 - 3x\sqrt{2}} + \sqrt{16 + x^2 - 4x\sqrt{2}} \geqslant 5$.

Д24. Докажите, что для положительных чисел a, b и c выполняется неравенство

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geqslant \sqrt{a^2 + ac + c^2},$$

и укажите соотношение между a, b и c, при котором оно превращается в равенство.

Д25. Имеет ли система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4, \\ x^2 + xz + z^2 = 9, \\ y^2 + yz + z^2 = 36 \end{cases}$$

положительные решения?

Д26. Решите уравнение

$$\sqrt{5 - 4\cos x} + \sqrt{13 - 12\sin x} = \sqrt{10},$$

где $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Д27. Числа x_1, x_2, x_3 и x_4 лежат на отрезке $[0; 1]$. Докажите, что $x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_3) + x_3(1 - x_4) + x_4(1 - x_1) \leqslant 2$.

Д28*. Неотрицательные числа a, b, c, x, y, z таковы, что $a + x = b + y = c + z = s$. Докажите, что $ay + bz + cx \leqslant s^2$.

Д29. Положительные числа x, y и z удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ y^2 + z^2 = 48, \\ y^2 = xz. \end{cases}$$

Найдите $S = xy + yz$.

Д30. Пусть a, b и c — неотрицательные числа. Докажите, что $abc \geqslant (a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)$.

Д31*. Найдите наименьшее значение выражения

$$(x+y)(x+z),$$

где x, y и z — положительные числа и $xyz(x+y+z)=1$.

Д32. Докажите, что если $0<t<\frac{\pi}{2}$, то $\sin t<t<\operatorname{tg} t$.

Д33. Докажите, что $\operatorname{ctg} 56^\circ + \operatorname{tg} 28^\circ = \frac{1}{\cos 34^\circ}$.

Д34. Докажите, что $\sin\alpha + \sin(60^\circ - \alpha) = \sin(60^\circ + \alpha)$.

Д35. Докажите, что если $\alpha+\beta+\gamma+\phi=\pi$ ($\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$, $\phi>0$), то $\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)=\sin\alpha\sin\gamma+\sin\beta\sin\phi$.

Д36*. Докажите, что если α, β и γ — острые углы, сумма которых равна π, то

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma \geqslant \sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma.$$

Д37*. Докажите, что если α, β и γ — острые углы и $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma>2$.

Д38*. Докажите, что $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\beta=\frac{1}{\sin\beta}$ $(45^\circ<\beta<90^\circ)$.

Д39. Известно, что $m^2+n^2=1$, $k^2+p^2=1$ и $mk+np=0$. Найдите $mn+kp$.

Д40. Найдите наибольшее значение выражения

$$|x|\sqrt{16-y^2}+|y|\sqrt{4-x^2}.$$

Д41. Решите уравнение $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$.

Д42. Вычислите: а) $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$; б) $\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}$.

Д43. Докажите, что при $0<x<1$ выполняется равенство $\sin(\arccos x)=\cos(\arcsin x)$.

Д44. Вычислите $\cos\left(2\arccos\frac{1}{3}\right)$.

Д45. Докажите, что: а) $\arccos\frac{15}{17}=2\operatorname{arcctg} 4$;

б) $\arcsin\frac{4}{\sqrt{17}}+\operatorname{arctg} 4+\arcsin\frac{8}{17}=\pi$.

Д46*. Найдите все натуральные решения уравнения

$$\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y+\operatorname{arctg} z=\pi.$$

Д47. Докажите, что при $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$ выполняются неравенства:

а) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ac}}$;

б) $(a^3 + b^3 + c^3)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant (a + b + c)^2$.

Д48. Докажите, что если $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ и $0 < z < 1$, то $x(1 - y) + y(1 - z) + z(1 - x) < 1$.

Д49*. Докажите, что $x^2 + (y - 1)^2 + (x + y)^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

Д50. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{x^2 + a^2 + 1} + \sqrt{y^2 + b^2 + 9} + \sqrt{z^2 + c^2 + 25},$$

если $x + y + z = 2$, $a + b + c = 6$ (все переменные принимают только неотрицательные значения).

Д51*. Тройку действительных чисел (a, b, c) назовем *хорошей*, если она удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 2, \\ a + b + c = 2 \end{cases}$$

и какие-то два из этих чисел отличаются не менее, чем на 1. Докажите, что хороших троек бесконечно много.

Д52. Вычислите $\int\limits_0^k \underbrace{f(f(\ldots f}_{k \text{ раз}}(x)\ldots))\,dx$, где $f(x) = |x - 1|$.

Д53. На графике функции $y = \frac{1}{x}$, где $x > 0$, выбраны точки A и B, абсциссы которых равны a и b соответственно. Докажите, что площадь фигуры, заключенной между дугой AB и отрезками OA и OB (O — начало координат), равна $\left|\ln \frac{b}{a}\right|$.

Д54. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^p}{n^{p+1}}$, где $p \in \mathbb{R}$, $p \neq -1$.

Д55. Докажите, что $\int\limits_0^1 x^{10}\,dx + \int\limits_0^2 \sqrt[10]{x}\,dx > 2$.

Д56*. Пусть $a > 0$, $b > 0$, $p > 1$, $q > 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Докажите, что $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geqslant ab$.

Д57. Докажите неравенство

$$\sqrt{99 \cdot 101} + \sqrt{98 \cdot 102} + \ldots + \sqrt{2 \cdot 198} + \sqrt{1 \cdot 199} < \frac{100^2\pi}{4}.$$

Д58*. Докажите, что если $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant a_4 \geqslant a_5 > 0$, то

$$a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + a_5^2 \geqslant (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5)^2.$$

Д59. Используя геометрический подход, найдите сумму квадратов первых n натуральных чисел.

Д60. При каком наименьшем натуральном значении n уравнение $x^2 + y^2 = n^2$ имеет: а) 12; б) 20 целочисленных решений?

Д61. В группе 12 учеников, которые сидят по двое за партой. Каждый день учитель рассаживает их так, чтобы за каждой партой сидели два ученика, которые никогда не сидели рядом до этого. Какое наибольшее количество дней учитель сможет это делать?

Д62*. В некотором городе разрешаются только парные обмены квартир (если две семьи обмениваются квартирами, то в тот же день они не имеют права участвовать в другом обмене). Докажите, что любой сложный обмен квартирами (т. е. обмен, в котором участвуют больше двух семей) можно осуществить за два дня. (Предполагается, что при любых обменах каждая семья как до, так и после обмена занимает одну квартиру и что семьи при этом сохраняются.)

Д63*. В ряде стран парламентские выборы проводятся по системе пропорционального представительства. Пусть в некотором округе требуется выбрать пять членов парламента. В выборах участвуют три партии A, B и C, которые получают мандаты пропорционально количеству голосов, поданных за их списки. Проблема состоит в том, что при пересчете количество мандатов оказывается, как правило, не целым. Предложите геометрическую интерпретацию способа определения количества мандатов для каждой партии в зависимости от количества поданных за нее голосов.

Ответы, решения, указания к дополнительным задачам

Д1. Ответ: а) 2,5; б) не имеет решений; в) $(-\infty; -3]$; г) $[-3; +\infty)$.

Ищутся точки координатной прямой, для которых разность расстояний до двух фиксированных точек равна заданному числу (пункты а, в), больше (пункт б) или меньше (пункт г) заданного числа. В остальном рассуждения аналогичны рассмотренным в примере 1.3.

Д2. Ответ: в точке C.

Суммарный путь по дорогам не зависит от расположения остановки, поэтому дальнейшее рассуждение аналогично тому, что приведено в задаче о рытье колодца.

Д3. Ответ: а) да, смогут.

Решение. а) Рассмотрим середину C отрезка тропы между двумя окаменевшими сталкерами A и B. Независимо от расположения точки C, на отрезке $[0; 100]$ найдется такая точка M, что $CM = 50$ (м). Так как $CA = CB \leqslant 50$ (м), то точка M лежит вне или на границе отрезка AB. Тогда $MA + MB = 100$ (м). Следовательно, сталкеры A и B оживут в тот момент, когда третий окажется в точке M.

б) Рассмотрим отрезок $[0; 1]$ на координатной прямой. Для любой точки M_k с координатой x_k из данного набора сумма расстояний от неё до точек $A(0)$ и $B(1)$ равна 1. Следовательно, сумма всех расстояний от точек M_1, M_2, ..., M_n до точек A и B равна n.

Если сумма расстояний от этих точек до точки A равна $\frac{n}{2}$, то и сумма расстояний от них до точки B также равна $\frac{n}{2}$. В этом случае доказываемое равенство выполняется как при $x = 0$, так и при $x = 1$. Если же сумма расстояний от точек M_1, M_2, ..., M_n до одного из концов отрезка $[0; 1]$ меньше чем $\frac{n}{2}$, то сумма расстояний от них до другого конца отрезка больше чем $\frac{n}{2}$. В этом случае рассмотрим произвольную точку $M(x)$ на отрезке $[0; 1]$, сумма расстояний от которой до заданных точек равна $S(x)$. При движении точки $M(x)$ по отрезку $[0; 1]$ значение $S(x)$ изменяется непрерывно. Значит, по теореме о промежуточном значении найдется значение x, для которого $S(x) = \frac{n}{2}$, то есть $|x - x_1| + |x - x_2| + ... + |x - x_n| = \frac{n}{2}$. Тогда $\frac{1}{n}(|x - x_1| + |x - x_2| + ... + |x - x_n|) = \frac{1}{2}$, что и требовалось.

Д4. Решение. На координатной плоскости рассмотрим точки $M(a; b)$, $N(c; d)$ и $K(e; f)$. Тогда доказываемое неравенство равносильно неравенству треугольника: $MN + MK \geqslant$ $\geqslant NK$.

Д5. Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Преобразуем данное выражение:

$$\sqrt{x^2 + y^2 + x + y + 0{,}5} + \sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5} =$$
$$= \sqrt{(x + 0{,}5)^2 + (y + 0{,}5)^2} + \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 2)^2}.$$

Дальнейший ход решения аналогичен рассмотренному в примере 2.1.

Д6. Ответ: (3,5; 6).

Решение. Рассмотрим точки $A(2; 4)$ и $B(5; 8)$ в декартовой системе координат, тогда $AB = 5$. Для точки $M(x; y)$ имеем

$$MA = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 4)^2}, \quad MB = \sqrt{(x - 5)^2 + (y - 8)^2}.$$

Из первого уравнения получим, что $MA + MB = 5$, следовательно, точка M лежит на отрезке AB.

Составим уравнение прямой AB: $\overline{AB} = (3; 4)$; $\frac{x - 2}{3} =$ $= \frac{y - 4}{4} \Leftrightarrow 4x - 3y + 4 = 0$. Таким образом, решения исходной системы следует искать среди решений системы

$$\begin{cases} \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 4)^2} + \sqrt{(x - 5)^2 + (y - 8)^2} = 5, \\ 3xy - 10y = 3, \end{cases}$$

которыми являются две пары: $\left(-\frac{7}{6}; -\frac{2}{9}\right)$ и (3,5; 6). Для того чтобы точка M оказалась именно на отрезке AB, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $x \in [2; 5]$, поэтому нам подходит вторая точка.

Д7. Ответ: 0,5.

Решение. Преобразуем исходное равенство:

$$x^2 - y^2 + 6x + 4y + 5 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 6x + 9) - (y^2 - 4y + 4) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+3)^2 - (y-2)^2 = 0 \Leftrightarrow (x + y + 1)(x - y + 5) = 0.$$

Рассмотрим график полученного уравнения и найдем на нем точку, для которой выражение $x^2 + y^2$ принимает наименьшее значение. Так как полученное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} y = -x - 1, \\ y = x + 5, \end{array}\right.$$

то его графиком является объединение двух прямых, которые пересекают ось y в точках $(0; -1)$ и $(0; 5)$ (см. рис. 1). Искомое выражение $x^2 + y^2$ выражает квадрат расстояния от точки $M(x; y)$ до начала координат, поэтому его значение будет наименьшим, если M — основание перпендикуляра, опущенного из точки $O(0; 0)$ на ближайшую к этой точке прямую. Учитывая, что обе прямые отсекают от осей координат равнобедренные прямоугольные треугольники с катетами 1 и 5, получим, что ближе к точке $O(0; 0)$ находится прямая $y = -x - 1$, тогда $OM^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0{,}5$.

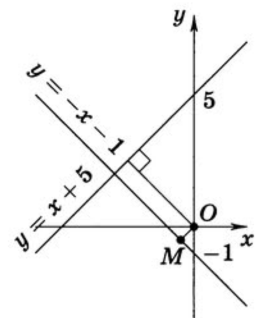


Рис. 1

Отметим, что найденное значение можно трактовать и по-другому: это квадрат наименьшего радиуса окружности с центром в начале координат, которая имеет хотя бы одну общую точку с графиком исходного уравнения.

Д8. Ответ: наименьшее значение 3; наибольшее значение 7.

Решение. Графиком уравнения $2|x| + |y| = 2$ в декартовой системе координат является ромб $ABCD$ (см. рис. 2). Пусть точка $M(x; y)$ лежит на границе ромба, тогда $\sqrt{x^2 + y^2} = OM$, где $O(0; 0)$; $\sqrt{x^2 + (y+3)^2} = KM$, где $K(0; -3)$. Так как $OM + KM \geqslant OK$, то данная сумма принимает наименьшее значение в случае равенства, то есть если точка M лежит на отрезке OK. Тогда M совпадает с вершиной C, а $OC = 3$.

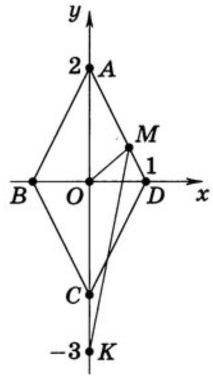


Рис. 2

Так как $OM \leqslant OA$ и $KM \leqslant KA$, то данная сумма принимает наибольшее значение, если точка M совпадает с точкой A; $OA + KA = 7$.

Д9. Ответ: $\sqrt{37}$.

Решение. Рассмотрим на координатной плоскости точку $M(x; y)$ и точку $A(4; 3)$ (см. рис. 3). Так как

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} = MO + MA,$$

то на прямой $y = x - 3$ требуется найти такое положение точки M, при котором эта сумма будет наименьшей.

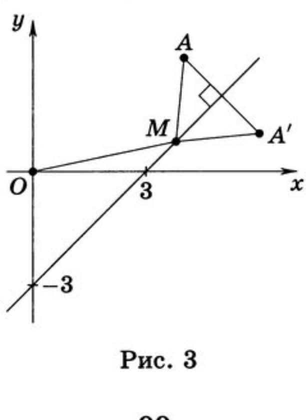


Рис. 3

Для этого отразим точку A относительно указанной прямой и найдем координаты точки A', ей симметричной. Используя любой из способов, показанных в задаче 2.7, получим, что $A'(6; 1)$. Тогда искомое положение точки M — пересечение данной прямой и прямой OA'. Для любой точки M, лежащей на прямой $y = x - 3$, имеем $MO + MA = MO + MA' \geqslant OA' = \sqrt{37}$.

При желании можно проверить, что искомое наименьшее значение достигается в точке $M(3{,}6; 0{,}6)$.

Д10. Ответ: $-2\frac{2}{5}$.

Решение. Так как

$$x^2 - 10x + y^2 - 2y + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-5)^2 + (y-1)^2 = 5^2,$$

то данное уравнение задает на координатной плоскости окружность с центром $C(5; 1)$ и радиусом 5. Эта окружность лежит в правой полуплоскости и касается оси y в точке $(0; 1)$ (см. рис. 4).

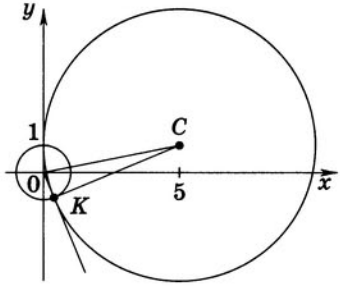


Рис. 4

Для любой точки K этой полуплоскости отношение $\frac{y}{x}$ задает тангенс угла α между положительным направлением оси абсцисс и лучом OK, причем если точка K лежит в I координатной четверти, то $\operatorname{tg}\alpha > 0$, а если K лежит в IV координатной четверти, то $\operatorname{tg}\alpha < 0$. Точка K должна лежать на окружности, а тангенс соответствующего ей угла должен быть наименьшим. Следовательно, OK — касательная к окружности, лежащая в IV четверти.

Найдем координаты точки K. Заметим, что из равенства отрезков двух касательных к окружности, проведенных из начала координат, следует, что $OK = 1$. (Этот же результат можно получить иначе: $OK^2 = OC^2 - CK^2 = (1^2 + 5^2) - 5^2 = 1$, поэтому точка $K(x; y)$ лежит также на окружности с центром $O(0; 0)$ и радиусом 1.) Таким образом, достаточно найти координаты точек пересечения двух окружностей:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^2 - 10x + y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 10x + 2y - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = 1 - 5x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{5}{13}, \\ y = -\dfrac{12}{13}. \end{cases} \end{array} \right.$$

Так как $K\left(\frac{5}{13}; -\frac{12}{13}\right)$, то искомое отношение $\frac{y}{x} = -\frac{12}{5}$.

Д11. Ответ: $x = 0{,}5$; $y = 1{,}75$.

Решение. Данное неравенство задает на координатной плоскости множество точек, лежащих внутри или на границе параболы $y = x^2 + x + 1$ (см. рис. 5). Рассмотрим прямую $y = 2x + a$, где a — некоторое действительное число. Она пересекает ось y в точке с координатами $(0, a)$. Для произвольной точки $M(x; y)$, лежащей на такой прямой, выполняется условие $y - 2x = a$. При различных значениях a прямые вида $y = 2x + a$ параллельны друг другу. Нас будут интересовать только те из них, которые имеют общие точки с указанным выше множеством точек.

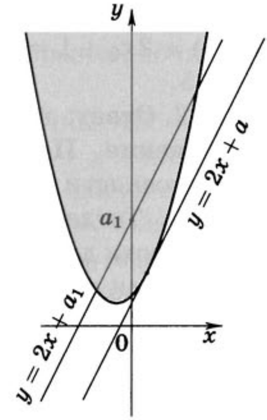


Рис. 5

Заметим, что если прямая $y = 2x + a_1$ не является касательной к параболе, то среди рассматриваемого множества прямых можно указать такую прямую $y = 2x + a_2$, которая также имеет общие точки с указанным множеством, но при этом $a_2 < a_1$. Это можно сделать, например, проведя прямую, параллельную прямой $y = 2x + a_1$, через любую точку указанного множества, лежащую ниже этой прямой. Таким образом, выражение $y - 2x$ принимает наименьшее значение, если прямая $y = 2x + a$ является касательной к параболе $y = x^2 + x + 1$.

Найдем координаты точки касания. Воспользуемся тем, что касательная к параболе имеет с ней ровно одну общую точку. Тогда система уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 + x + 1, \\ y = 2x + a \end{cases}$$

должна иметь единственное решение. Это равносильно тому, что уравнение $x^2 + x + 1 = 2x + a \Leftrightarrow x^2 - x + (1 - a) = 0$ должно иметь единственный корень, следовательно, $D = (-1)^2 - 4(1 - a) = 4a - 3 = 0$, то есть $a = 0{,}75$. При найденном значении a уравнение имеет решение $x = 0{,}5$. Тогда $y = (0{,}5)^2 + 0{,}5 + 1 = 1{,}75$.

Тот, кто уже знаком с понятием производной, может найти координаты точки касания другим способом. Производная функции в точке x_0 равна тангенсу угла наклона касательной к ее графику к оси x в этой точке. У всех рассматриваемых прямых этот тангенс равен 2, значит, $y'(x_0) = 2x_0 + 1 = 2$, то есть $x_0 = 0{,}5$. Тогда $y_0 = x_0^2 + x_0 + 1 = 1{,}75$.

Д12. Ответ: $x = 0$, $y = 0{,}5$.

Решение. Первый способ. Рассмотрим на координатной плоскости графики двух функций: $y = e^x$ и $y = x$ (см. рис. 6). Тогда выражение $(x - y)^2 + (e^x - y)^2$, стоящее в левой части данного уравнения, представляет собой квадрат расстояния между двумя произвольными точками $A(x; e^x)$ и $B(y; y)$ этих графиков.

Составим уравнение касательной к первому графику в точке $Z(0; 1)$. Это уравнение имеет вид $y = x + 1$, то есть такая касательная параллельна графику функции $y = x$. Заметим, что расстояние между этими прямыми равно $\frac{\sqrt{2}}{2}$, то есть его квадрат равен $0{,}5$.

Кроме того, график функции $y = e^x$ расположен выпуклостью вниз, значит, все его точки (кроме точки касания) лежат выше касательной $y = x + 1$. Таким образом, наименьшее значение выражения в левой части уравнения равно 0,5. Это значение достигается при $x = 0$, $y = 0{,}5$.

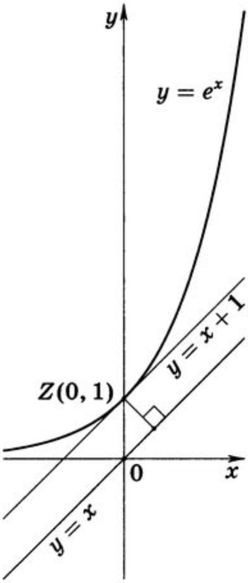


Рис. 6

Второй способ. Рассмотрим точки $A(x; x)$, $B(x; e^x)$ и $C(x; y)$. Тогда $AC^2 + BC^2 = (x - y)^2 + (e^x - y)^2$. Кроме того, так как абсциссы трех выбранных точек одинаковы, то точка C лежит на прямой AB. Найдем наименьшее значение выражения $AC^2 + BC^2$.

1. Докажем, что оно достигается, если C — середина отрезка AB. Зафиксируем точки A и B. Тогда если точка C лежит на отрезке AB, то по неравенству о средних

$$\sqrt{\frac{AC^2 + BC^2}{2}} \geqslant \frac{AC + BC}{2} = \frac{AB}{2},$$

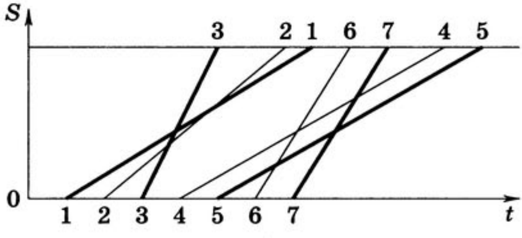
причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $AC = BC$. Если же точка C лежит вне отрезка AB, то значение $AC^2 + BC^2$ заведомо больше. Таким образом, точка C — середина отрезка AB.

2. Найдем наименьшее значение величины $AB = e^x - x$. Проведя исследование функции $f(x) = e^x - x$ с помощью производной, получим, что её наименьшее значение равно 1 и оно достигается при $x = 0$. Таким образом, наименьшее значение длины отрезка AB равно 1, значит, наименьшее значение величины $AC^2 + BC^2$ (левой части исходного уравнения) равно 0,5 и достигается при $x = 0$, $y = 0{,}5$.

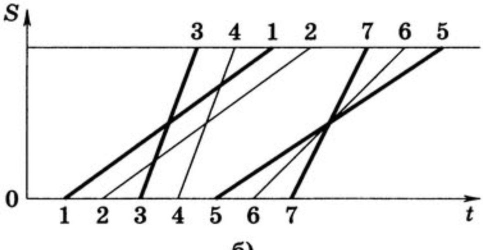
Д13. Решение. Так как скорости лыжников постоянны, то каждые два из них встречались не более одного раза. Будем обозначать лыжников их стартовыми номерами. Того, кто финишировал первым, никто обогнать не мог, значит, он сам обогнал двоих. Поэтому он третий, и он обогнал лыжников 1 и 2. Аналогично финишировавший последним не мог никого обогнать, поэтому его обогнали двое, значит, он пятый, а его обогнали лыжники 6 и 7. Далее, лыжник 1 не мог никого обогнать, то есть он финишировал третьим (и его, кроме третьего, обогнал лыжник, финишировавший вторым), а лыжника 7 никто не мог обогнать, и он финишировал пятым (обогнав пятого и лыжника, финишировавшего шестым).

Полученные результаты лыжников с нечетными номерами удобно изобразить в виде графиков (см. рис. 7*а*, *б*, графики выделены жирно). Тогда останется выяснить, как финишировали лыжники с чётными номерами.

Вторым финишировать мог либо лыжник 2, либо лыжник 4. Если лыжник 2 пришел вторым, то он обогнал лыжника 1 и в группе лидеров (1, 2, 3) больше обгонов не происходило. Значит, лыжника 4 могли только обгонять, он на финише шестой, а лыжник 6 — четвёртый (см. рис. 7*а*).



а)



б)

Рис. 7

Если же вторым пришел лыжник 4, то лыжник 2 мог прийти к финишу только четвёртым (значит, четвертый обогнал лыжников 2 и 1), а шестым пришел лыжник 6 (обогнав лыжника 5 и уступив лыжнику 7, см. рис. 7*б*).

Таким образом, возможны только два протокола: 3, 2, 1, 6, 7, 4, 5 и 3, 4, 1, 2, 7, 6, 5. Графики показывают, что оба этих случая возможны.

Д14. Ответ: в 13 часов 12 минут.

Решение. Изобразим графики движения Ани, Вани и Пети в виде лучей AD, BN и PD соответственно (см. рис. 8). Кроме того, график AE планируемого движения Пети параллелен PD. Пусть K — проекция точки E на ось t.

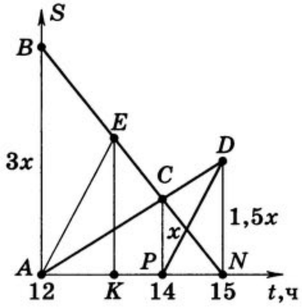


Рис. 8

Пусть $CP = x$, тогда из подобия треугольников ACP и ADN следует, что $DN = 1{,}5x$, а из подобия треугольников ABN и PCN получим, что $AB = 3x$.

Пусть k — коэффициент подобия треугольников AEK и PDN, тогда $AK = k$, $EK = 1{,}5kx$. Из подобия треугольников BAN и EKN следует, что $\dfrac{1{,}5kx}{3x} = \dfrac{3-k}{3}$. Решением этого уравнения является $k = 1{,}2$. Значит, время планируемой встречи — 13 часов 12 минут.

Д15. Ответ: в 17:15 или в 17:45.

Решение. Обозначим перекресток через P, положение автомобилей «Ауди» и «БМВ» в 17:00 через A и B, а в 18:00 — через A' и B' соответственно (см. рис. 9*а*).

Предположим, что за рассматриваемый час ни одна из машин не проехала перекресток или обе его проехали, тогда $\angle APB = \angle AP'B'$. Кроме того, $PB : PA = PB' : PA' = 2$.

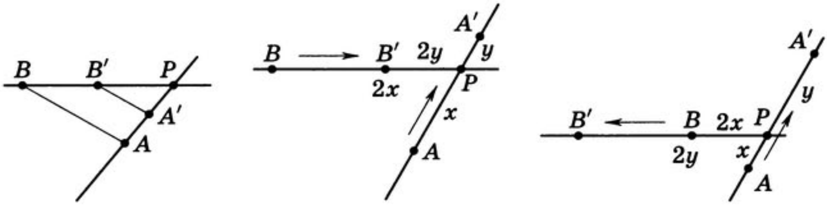


Рис. 9

Следовательно, треугольники PAB и $PA'B'$ подобны с коэффициентом 2, значит, $BB' = 2AA' \neq AA'$, что противоречит равенству скоростей.

Таким образом, одна из машин пересекла перекресток, а другая — нет. Так как «Ауди» находилась к перекрестку ближе, чем «БМВ», то она его пересекла, в то время как «БМВ» либо приближался к перекрестку, либо удалялся от него.

Пусть в 17:00 «Ауди» находилась от перекрестка на расстоянии x, а в 18:00 — на расстоянии y, тогда соответствующие расстояния от перекрестка до «БМВ» равны $2x$ и $2y$. За рассматриваемый час «Ауди» проехала $x + y$, а «БМВ» проехала либо $2x - 2y$ (если она двигалась к перекрестку, см. рис. 9*б*), либо $2y - 2x$ (если она удалялась от перекрестка, см. рис. 9*в*). Так как за этот час машины проехали одинаковое расстояние, получаем, что $x + y = 2x - 2y$ или $x + y = 2y - 2x$. В первом случае $x = 3y$, то есть до перекрестка «Ауди» ехала $\frac{3}{4}$ часа, а во втором случае $x = \frac{1}{3}y$, то есть до перекрестка «Ауди» ехала $\frac{1}{4}$ часа.

Д16. Ответ: да, встретятся.

Решение. Первый способ. Рассмотрим плоскость, в которой лежат все дороги. Проведем прямую, перпендикулярную этой плоскости, которую будем считать осью времени. В этой системе координат рассмотрим графики движения пешеходов. Эти графики — прямые линии, причем как первый, так и второй график пересекают остальные. Рассмотрим плоскость, определяемую первыми двумя графиками (пересекающимися прямыми). Тогда третий и четвертый графики либо проходят через точку пересечения первых двух, либо лежат в этой плоскости.

В первом случае утверждение доказано, а во втором случае если третий и четвертый графики не пересекаются, то они параллельны. Тогда и их проекции на плоскость, в которой расположены дорожки, параллельны, что противоречит условию задачи.

Таким образом, третий и четвертый пешеходы обязательно встретятся.

Второй способ. Перейдем в систему отсчета, связанную с первым пешеходом. В такой системе координат скорости остальных пешеходов относительно первого по-прежнему постоянны, значит, графики их движения — прямые линии. Первый пешеход неподвижен, значит, графики движения остальных пешеходов проходят через точку, в которой он стоит. Так как второй пешеход встречается и с третьим, и с четвертым, а различные прямые не могут иметь более одной общей точки, то все пешеходы движутся по одной прямой. Это означает, что третий пешеход обязательно встретится с четвертым.

Отметим, что утверждение задачи можно обобщить: если по n дорожкам, которые попарно пересекаются, движутся с постоянными скоростями n пешеходов, причем как первый, так и второй пешеходы встречаются с каждым из остальных, то: а) каждый пешеход встретится с каждым; б) в любой момент времени все пешеходы располагаются на одной прямой.

Д17. Ответ: нет, не мог.

Решение. Присвоим номера спортсменам в порядке убывания их скоростей на старте. Изобразим графики их движения, откладывая время по оси t, а расстояние до точки A — по оси s. Пусть O — начало координат, S — такая точка на положительной части оси s, что $OS = 60$ (м), K, L и M — точки на графиках движения спортсменов, соответствующие моменту достижения ими точки B из условия, T — точка на положительной части оси t, соответствующая моменту финиша, P, Q и R — точки, соответствующие моментам встречи между пунктами A и B первого и второго, второго и третьего, третьего и первого спортсменов соответственно, P_0, Q_0 и R_0 — их проекции на ось s соответственно (см. рис. 10).

Заметим, что для любых трех заданных точек на прямой существует единственная точка, сумма расстояний от которой до них будет минимальной. Этим свойством обладает средняя из трех точек (см. пример 1.2). Следовательно, тренер всегда будет находиться рядом со спортсменом, который бежит между двумя другими. Тогда график дви-

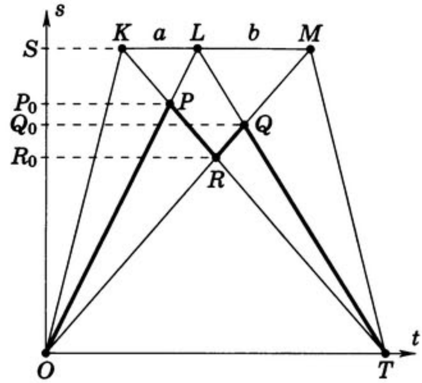


Рис. 10

жения тренера описывается ломаной $OPRQT$, а длина L его пути равна сумме длин отрезков OP_0, P_0R_0, R_0Q_0, Q_0O. Обозначим длины отрезков KL, LM и OT через a, b и c соответственно. Так как $KL \parallel OT$, то треугольники KPL и TPO подобны, следовательно, $\frac{KP}{PT} = \frac{KL}{OT} = \frac{a}{c}$. Аналогично из того, что $\Delta LQM \sim \Delta TQO$ и $\Delta KRM \sim \Delta TRO$, получим, что $\frac{LQ}{QT} = \frac{ML}{OT} = \frac{b}{c}$ и $\frac{KR}{RT} = \frac{MK}{OT} = \frac{a+b}{c}$.

По теореме о пропорциональных отрезках $\frac{SP_0}{P_0O} = \frac{KP}{PT} = \frac{a}{c}$. Учитывая, что $SP_0 = 60 - OP_0$, получим $OP_0 = \frac{60c}{a+c}$. Аналогично $OQ_0 = \frac{60c}{b+c}$ и $OR_0 = \frac{60c}{a+b+c}$.

Тогда

$$L = OP_0 + P_0R_0 + R_0Q_0 + Q_0O =$$
$$= OP_0 + (OP_0 - OR_0) + (OQ_0 - OR_0) + OQ_0 =$$
$$= 2(OP_0 + OQ_0 - OR_0) = 120c\left(\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} - \frac{1}{a+b+c}\right).$$

Оценим полученное выражение, учитывая, что $a + b < c$. Заметим, что

$$\frac{1}{b+c} - \frac{1}{a+b+c} = \frac{a}{(b+c)(a+b+c)} > \frac{a}{(2c-a)(2c)}.$$

Тогда

$$L > 120c\left(\frac{1}{a+c} + \frac{1}{2c-a} - \frac{1}{2c}\right) = 120c\left(\frac{3c}{(a+c)(2c-a)} - \frac{1}{2c}\right).$$

Рассмотрим квадратный трехчлен $f(a) = (a + c)(2c - a)$. Его первый коэффициент отрицателен и $f(a) = 0$ при $a = -c$ или $a = 2c$, поэтому его наибольшее значение $f\left(\frac{c}{2}\right) = \frac{9c^2}{4}$. Значит, $L > 120c\left(\frac{4}{3c} - \frac{1}{2c}\right) = 100$ (м).

Д18. Ответ: $\sqrt{5}$.

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с катетами $BC = 1$ и $AC = b$ и прямоугольный треугольник AED с катетами $AD = 1$ и $DE = a$, расположив их так, как показано на рис. 11. Тогда $AE = \sqrt{1 + a^2}$, $AB = \sqrt{1 + b^2}$. Сумма длин этих отрезков наименьшая, если точка A лежит на отрезке BE, тогда искомое значение равно $\sqrt{EF^2 + BF^2} = \sqrt{5}$.

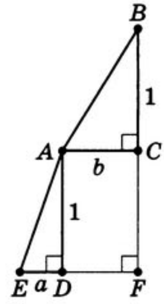


Рис. 11

Отметим, что если точка A лежит на отрезке BE, то треугольники AED и BAC подобны, поэтому $\frac{ED}{AC} = \frac{AD}{BC}$. Следовательно, найденное наименьшее значение достигается при $a = b = \frac{1}{2}$.

Д19. Ответ: $\sqrt{(a + c)^2 + b^2}$.

Решение. Рассмотрим отрезок DE длины b. Восставим перпендикуляры к этому отрезку в его концах: $DA = a$, $EB = c$ (точки A и B лежат в разных полуплоскостях относительно DE, см. рис. 12). Заметим, что если $x < 0$, то $f(x) > f(-x)$, поэтому можно рассматривать только $x \geqslant 0$. Пусть точка C лежит на прямой DE и $DC = x$, тогда $EC = |b - x|$. Рассматривая прямоугольные треугольники ACD и BCE, получим $AC = \sqrt{a^2 + x^2}$; $BC = \sqrt{(b - x)^2 + c^2}$.

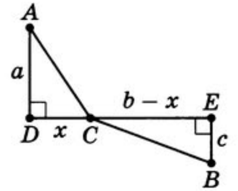


Рис. 12

Так как $AC + BC \geqslant AB$, то наименьшее значение данной функции равно $AB = \sqrt{(a + c)^2 + b^2}$ (оно достигается, если точка C лежит на отрезке AB).

Это же решение можно оформить иначе, введя на плоскости декартову систему координат, в которой лучи DA и

DE — положительные полуоси y и x соответственно. Тогда $A(0; a)$, $B(b; -c)$, $C(x; 0)$.

При желании можно найти значение аргумента, при котором достигается искомое значение функции. Так как треугольники ACD и BCE подобны, имеем

$$\frac{b-x}{x} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow x = \frac{ab}{a+c}.$$

Д20. Решение. Заметим, что при $c = a$ или $c = b$ доказываемое неравенство, очевидно, выполняется. Остается рассмотреть случай, когда $c < a$ и $c < b$.

Рассмотрим два прямоугольных треугольника ABD и ACD с гипотенузами $AB = a$ и $AC = b$ соответственно и общим катетом $AD = c$ (точки B и C лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AD, см. рис. 13). Тогда

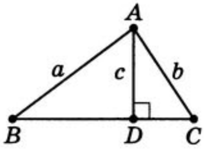


Рис. 13

$$\sqrt{a^2-c^2}+\sqrt{b^2-c^2}=BD+CD=BC=\frac{2S_{\triangle ABC}}{AD}=\frac{ab\sin\angle BAC}{c}\leqslant\frac{ab}{c},$$

что и требовалось.

Д21. Решение. Рассмотрим два прямоугольных треугольника: ABC со сторонами a, b, c и BDE со сторонами x, y, z, — расположив их так, как показано на рис. 14.

Тогда треугольник AOD также прямоугольный. Так как $DO = a + x$ и $AO = b + y$, то из условия задачи следует, что $AD = c + z$.

Это возможно тогда и только тогда, когда точка B лежит на отрезке AD. В этом случае треугольники ABC и BDE подобны, из чего и следует требуемое равенство.

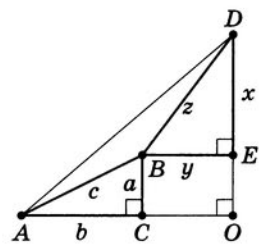


Рис. 14

Д22. Ответ: 2.

Решение. Заметим, что функция $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}$ определена на множестве всех действительных чисел и $f(-x) = f(x)$, то есть она четная. Следовательно, достаточно рассмотреть только $x \geqslant 0$. Заметим также, что $f(0) = 2$, и докажем, что $f(x) > 2$ при $x > 0$.

Построим на плоскости два таких треугольника ABD и ACD, что $AD = x$, $BD = CD = 1$, $\angle ADB = 60°$, $\angle ADC = 120°$ (см. рис. 15). Тогда $AB = \sqrt{x^2 - x + 1}$; $AC = \sqrt{x^2 + x + 1}$. Кроме того, $\angle ADB + \angle ADC = 180°$, значит, точка D лежит на отрезке BC.

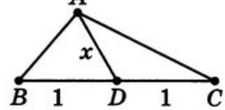


Рис. 15

При $x > 0$ выполняется неравенство $AB + AC > BC$, то есть $f(x) > 2$. Следовательно, наименьшее значение данного выражения равно 2.

Д23. Решение. При $x = 0$ данное неравенство, очевидно, выполняется. Заметим, что значение левой части неравенства при любом отрицательном значении x больше, чем при противоположном положительном значении x, поэтому достаточно доказать, что неравенство выполняется при $x > 0$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C и катетами $AC = 3$; $BC = 4$ (см. рис. 16). На биссектрисе угла C отметим такую точку D, что $CD = x$. Применяя теорему косинусов для треугольников ADC и BDC, соответственно получим

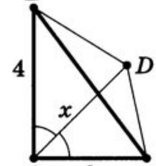


Рис. 16

$$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2 - 2AC \cdot CD \cdot \cos\angle ACD} = \sqrt{9 + x^2 - 2 \cdot 3x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

и

$$BD = \sqrt{BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos\angle BCD} = \sqrt{16 + x^2 - 2 \cdot 4x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

Согласно неравенству треугольника $AD + BD \geqslant AB$, то есть $\sqrt{9 + x^2 - 3x\sqrt{2}} + \sqrt{16 + x^2 - 4x\sqrt{2}} \geqslant 5$, что и требовалось доказать.

Д24. Ответ: при $b = \dfrac{ac}{a + c}$.

Решение. Построим на плоскости такие отрезки OA, OB и OC, что $OA = a$; $OB = b$; $OC = c$; $\angle AOB = \angle BOC = 60°$

(см. рис. 17). Тогда по теореме косинусов для треугольников AOB, BOC и AOC соответственно получим $AB = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$; $BC = \sqrt{b^2 - bc + c^2}$; $AC = \sqrt{a^2 + ac + c^2}$.

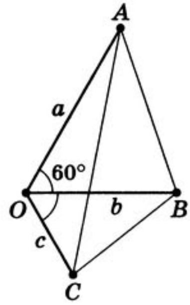


Рис. 17

Так как $AC \leqslant AB + BC$, то доказываемое неравенство выполняется.

Равенство выполняется тогда и только тогда, когда точка B лежит на отрезке AC. В этом случае OB — биссектриса треугольника AOC. Тогда $OB = \dfrac{2ac}{a+c}\cos 60^\circ$, то есть $b = \dfrac{ac}{a+c}$.

Д25. Ответ: нет, не имеет.

Решение. Пусть $(x; y; z)$ — решение данной системы ($x > 0$, $y > 0$, $z > 0$). Выберем на плоскости произвольную точку O и построим такие треугольники AOB, BOC и AOC, что $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120^\circ$; $OA = x$; $OB = y$; $OC = z$ (см. рис. 18). По теореме косинусов $AB = \sqrt{x^2 + xy + y^2} = 2$; $BC = \sqrt{y^2 + yz + z^2} = 6$; $AC = \sqrt{x^2 + xz + z^2} = 3$. Тогда для треугольника ABC получим, что $BC > AB + AC$, — противоречие, поэтому данная система не имеет положительных решений.

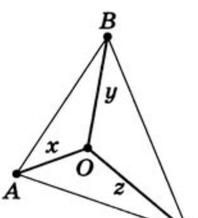


Рис. 18

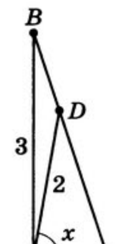


Рис. 19

Д26. Ответ: $2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{2+\sqrt{31}}{9}$.

Решение. Преобразуем данное уравнение:

$$\sqrt{2^2 + 1^2 - 2\cdot 2\cdot 1\cdot \cos x} + \sqrt{3^2 + 2^2 - 2\cdot 3\cdot 2\cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \sqrt{10}.$$

Рассмотрим на плоскости два треугольника с общей стороной $CD = 2$: треугольник ACD, в котором $AC = 1$, $\angle ACD = x$, и треугольника BCD, в котором $BC = 3$, $\angle BCD = 90^\circ - x$ (точки A и B лежат в разных полуплоскостях относительно CD, см. рис. 19). Тогда левая часть уравнения представляет собой сумму $AD + BD$, а правая часть равна AB, так как треугольник ACB прямоугольный.

Из того, что $AD + BD = AB$, следует, что точка D лежит на отрезке AB. Тогда $2S_{\Delta ACD} + 2S_{\Delta BCD} = 2S_{\Delta ABC}$, то есть $2\sin x + 6\cos x = 3$. Используя формулы синуса и косинуса удвоенного аргумента, получим

$$9\sin^2\frac{x}{2} - 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 3\cos^2\frac{x}{2} = 0.$$

Из условия задачи следует, что $\cos\frac{x}{2} \neq 0$, значит,

$$9\,\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} - 4\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 3 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{tg}\frac{x}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{31}}{9}.$$

Учитывая, что $0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4}$, получим $x = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{2+\sqrt{31}}{9}$.

Д27. Решение. Рассмотрим квадрат со стороной 1. Отложим на его сторонах отрезки, длины которых равны x_1, x_2, x_3 и x_4, так, как показано на рис. 20. Последовательно соединив точки деления, получим разбиение квадрата на четыре прямоугольных треугольника и четырехугольник (возможно, вырождающийся в треугольник или отрезок, если какие-то точки деления совпали с вершинами).

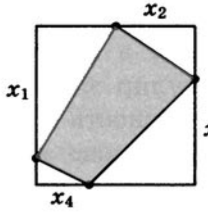


Рис. 20

Сумма площадей треугольников равна

$$\frac{1}{2}x_1(1 - x_2) + \frac{1}{2}x_2(1 - x_3) + \frac{1}{2}x_3(1 - x_4) + \frac{1}{2}x_4(1 - x_1).$$

Эта сумма не превосходит площади квадрата, которая равна 1. Записав неравенство

$$\frac{1}{2}x_1(1 - x_2) + \frac{1}{2}x_2(1 - x_3) + \frac{1}{2}x_3(1 - x_4) + \frac{1}{2}x_4(1 - x_1) \leqslant 1$$

и умножив обе его части на 2, получим требуемое неравенство.

Д28. Решение. Рассмотрим правильный треугольник ABC со стороной s. Каждую его сторону можно разбить на два отрезка исходя из условия задачи (см. рис. 21). Соединив попарно точки деления на сторонах, получим, что треугольник разбился на четыре треугольника (какие-то из них могут быть вырожденными).

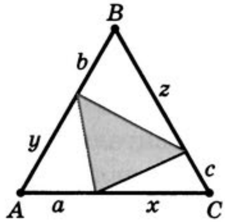


Рис. 21

Сумма площадей трех треугольников с вершинами A, B и C равна

$$\frac{1}{2}ay\sin 60^\circ + \frac{1}{2}bz\sin 60^\circ + \frac{1}{2}cx\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}(ay + bz + cx).$$

Эта сумма не превосходит площади треугольника ABC, которая равна $\frac{s^2\sqrt{3}}{4}$. Записав неравенство $\frac{\sqrt{3}}{4}(ay + bz + cx) \leqslant \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$ и разделив обе его части на $\frac{\sqrt{3}}{4}$, получим требуемое неравенство.

Д29. Ответ: $16\sqrt{3}$.

Решение. Рассмотрим отрезок AB, который точкой D разбивается на два отрезка $AD = x$ и $BD = z$. На отрезке AB как на диаметре построим полуокружность, а из точки D восставим перпендикуляр к AB, который пересечет полуокружность в точке C (см. рис. 22).

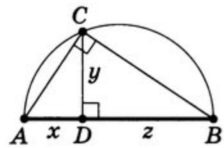


Рис. 22

Так как вписанный угол ACD опирается на диаметр, то этот угол прямой, значит, CD — высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе. Тогда, учитывая третье уравнение системы, получим $CD = \sqrt{AD \cdot BD} = = \sqrt{xz} = y$. Из первого и третьего уравнений следует, что $AC = \sqrt{x^2 + y^2} = 4$ и $BC = \sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.

Таким образом,

$$S = xy + yz = 2S_{\triangle ACD} + 2S_{\triangle BCD} = 2S_{\triangle ACB} = AC \cdot BC = 16\sqrt{3}.$$

Д30. Без ограничения общности можно считать, что $a \geqslant b \geqslant c \geqslant 0$. Тогда первые два сомножителя в правой части доказываемого неравенства неотрицательны.

Если $b+c \leqslant a$, то правая часть принимает неположительные значения. В этом случае неравенство заведомо выполняется.

Если $b+c > a$, то существует треугольник со сторонами a, b и c. Пусть p — его полупериметр, S — площадь, R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей соответственно. Тогда $abc = 4RS$, $a+b-c = 2(p-c)$, $a+c-b = 2(p-b)$, $b+c-a = 2(p-a)$. После соответствующих замен доказываемое неравенство примет вид $4RS \geqslant 8(p-a)(p-b)(p-c)$. Умножив обе его части на $\frac{p}{4}$ и используя формулу Герона, получим равносильное неравенство $RSp \geqslant 2S^2$. Учитывая, что $S = pr$, получим, что оно, в свою очередь, равносильно верному неравенству $R \geqslant 2r$.

Таким образом, выполняется и исходное неравенство.

Д31. Ответ: 2.

Решение. Пусть

$$\begin{cases} x+y=a>0, \\ y+z=b>0, \\ z+x=c>0, \end{cases}$$

тогда $x+y+z = \frac{a+b+c}{2} > 0$. Равенство, заданное в условии задачи, примет вид

$$\frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a+b+c}{2} = 1.$$

Докажем, что все сомножители в его левой части — положительные числа. Так как произведение и четвертый множитель положительны, то отрицательными могут быть только ровно два из первых трех множителей. Пусть, например, $\frac{a+c-b}{2} < 0$ и $\frac{a+b-c}{2} < 0$. Сложив эти неравенства почленно, получим, что $a < 0$, — противоречие. Аналогичный результат получится, если рассмотреть любую другую пару сомножителей.

Следовательно, существует треугольник со сторонами a, b и c. Найдем его площадь по формуле Герона:

$$S = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{c+a-b}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}} = 1.$$

С другой стороны,

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\angle C \leqslant \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}(x+y)(y+z).$$

Следовательно, $(x+y)(x+z) \geqslant 2$.

Равенство достигается, например, при $y = z = 1$, $x = \sqrt{2} - 1$, которые удовлетворяют условию задачи.

Д32. Решение. На координатной плоскости рассмотрим окружность с центром в начале координат радиуса 1. Отметим на ней точку $C(1; 0)$ и точку B так, что $\angle BOC = t$ (см. рис. 23). Пусть точка B' симметрична B относительно оси x, тогда $\angle BOB' = 2t$. Пусть прямая, проходящая через точку C параллельно оси y, пересекает лучи OB и OB' в точках D и D' соответственно, а отрезок BB' пересекает ось x в точке A.

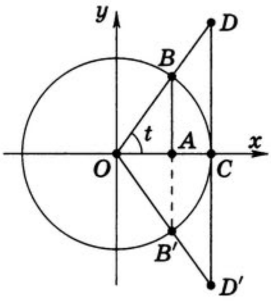


Рис. 23

Заметим, что $\sin t = AB$; $t = L_{\smile BC}$ (где $L_{\smile BC}$ — длина дуги BC). Так как $BB' = 2AB < L_{\smile BB'} = 2L_{\smile BC}$, имеем $\sin t < t$. Кроме того, $S_{\triangle DOD'} = \frac{1}{2}DD' \cdot OC = CD = \operatorname{tg} t$, $S_{\text{сектора } BOB'} = \frac{OB^2 \cdot 2t}{2} = t$. Так как $S_{\triangle DOD'} > S_{\text{сектора } BOB'}$, получаем, что $\operatorname{tg} t > t$.

Д33. Решение. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с основанием BC и углом 56° при вершине A (см. рис. 24). Углы при основании этого треугольника равны по 62° . Проведем его высоту BD. Пусть ее длина равна 1, тогда, рассматривая треугольник ABD, получаем

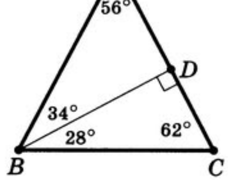


Рис. 24

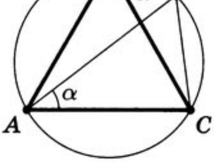


Рис. 25

$\operatorname{ctg} \angle BAD = \operatorname{ctg} 56° = AD$ и $\cos \angle ABD = \cos 34° = \frac{1}{AB}$, а для треугольника BCD имеем $\operatorname{tg} \angle CBD = \operatorname{tg} 28° = CD$.

Учитывая, что $AD + CD = AC = AB$, получим требуемое равенство.

Д34. Решение. Рассмотрим равносторонний треугольник ABC, вписанный в окружность радиуса R (см. рис. 25). Пусть точка D лежит на дуге BC, не содержащей точки A, $\angle DAC = \angle DBC = \alpha$. Тогда $\angle DAB = 60° - \alpha$, $\angle DBA = 60° + \alpha$.

По теореме Помпею (о вписанном равностороннем треугольнике) выполняется равенство $BD + CD = AD$.

По следствию из теоремы синусов имеем

$$BD = 2R \sin \angle DAB = 2R \sin(60° - \alpha);$$

$$CD = 2R \sin \angle DAC = 2R \sin \alpha;$$

$$AD = 2R \sin \angle DBA = 2R \sin(60° + \alpha).$$

Подставив эти выражения в имеющееся равенство и разделив обе части на $2R$, получим требуемое равенство.

Д35. Решение. Рассмотрим четырехугольник $ABCD$, вписанный в окружность радиуса R (см. рис. 26). Проведя диагонали AC и BD, введем обозначения: $\angle CAD = \alpha$, $\angle CAB = \beta$, $\angle ACB = \gamma$, $\angle ACD = \phi$. По теореме Птолемея $BD \cdot AC = CD \cdot AB + BC \cdot AD$.

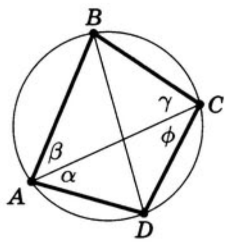


Рис. 26

По следствию из теоремы синусов имеем

$$AB = 2R \sin \gamma, \quad BC = 2R \sin \beta;$$

$$CD = 2R \sin \alpha; \quad AD = 2R \sin \phi; \quad BD = 2R \sin(\alpha + \beta);$$

$$AC = 2R \sin(180° - (\beta + \gamma)) = 2R \sin(\beta + \gamma).$$

Подставив эти выражения в имеющееся равенство и разделив обе части на $4R^2$, получим требуемое равенство.

Д36. Рассмотрим остроугольный треугольник ABC, в котором углы A, B и C соответственно равны α, β и γ. Пусть R — радиус его описанной окружности, тогда по следствию из теоремы синусов

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = \frac{BC}{2R} + \frac{AC}{2R} + \frac{AB}{2R} = \frac{P_{ABC}}{2R}.$$

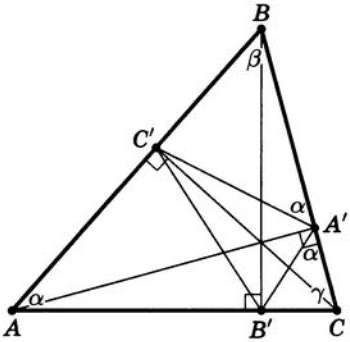


Рис. 27

Пусть треугольник $A'B'C'$ образован основаниями высот треугольника ABC (см. рис. 27). Так как $\angle AC'C = \angle AA'C = 90°$, то четырехугольник $AC'A'C$ вписанный. Следовательно, $\angle C'A'B = \angle BAC = \alpha$. Аналогично из того, что вписанным является четырехугольник $AB'A'B$, получим, что $\angle B'A'C = \angle CAB = \alpha$. Значит, $\angle B'A'C' = 180° - 2\alpha$. Аналогично: два других угла треугольника $A'B'C'$ равны $180° - 2\beta$ и $180° - 2\gamma$.

Воспользуемся тем, что $\sin(180° - x) = \sin x$, а радиус окружности, описанной около треугольника $A'B'C'$, равен $\frac{1}{2}R$, так как эта окружность является *окружностью девяти точек* треугольника ABC. Тогда, использовав следствие из теоремы синусов для треугольника $A'B'C'$, получим $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = \frac{B'C'}{R} + \frac{A'C'}{R} + \frac{A'B'}{R} = \frac{P_{A'B'C'}}{R}$.

Заметим, что треугольник $A'B'C'$ имеет наименьший периметр среди всех треугольников, вершины которого лежат на сторонах данного треугольника (*задача Фаньяно*). Поэтому его периметр не больше, чем периметр треугольника, образованного средними линиями треугольника ABC, который равен $\frac{1}{2}P_{ABC}$. Следовательно, $\frac{P_{A'B'C'}}{R} \leqslant \frac{P_{ABC}}{2R}$, откуда и следует утверждение задачи.

Отметим, что равенство достигается только в случае, если ABC — равносторонний треугольник, то есть когда $\alpha = \beta = \gamma = 60°$.

Д37. Решение. Рассмотрим треугольник ABC, в котором углы A, B и C соответственно равны α, β и γ. Пусть a, b и c — длины его сторон, R — радиус его описанной окружности. Умножив обе части доказываемого неравенства на $2R$ и используя следствие из теоремы синусов, получим равносильное неравенство: $a + b + c > 4R$.

Пусть m_a, m_b и m_c — длины медиан AA', BB' и CC' треугольника ABC, тогда $a + b + c > m_a + m_b + m_c$. Действительно, продолжив, например, медиану AA' на ее длину, из треугольника ABD получим, что $b + c > 2m_a$ (см. рис. 28). Аналогично $a + c > 2m_b$ и $a + b > 2m_c$. Сложив почленно три полученных неравенства и разделив на 2, получим требуемое неравенство.

Отметим, что доказанное неравенство справедливо для любого треугольника.

Докажем теперь, что в остроугольном треугольнике $m_a + m_b + m_c \geqslant 4R$. Пусть M — точка пересечения медиан, а O — центр описанной окружности остроугольного тре-

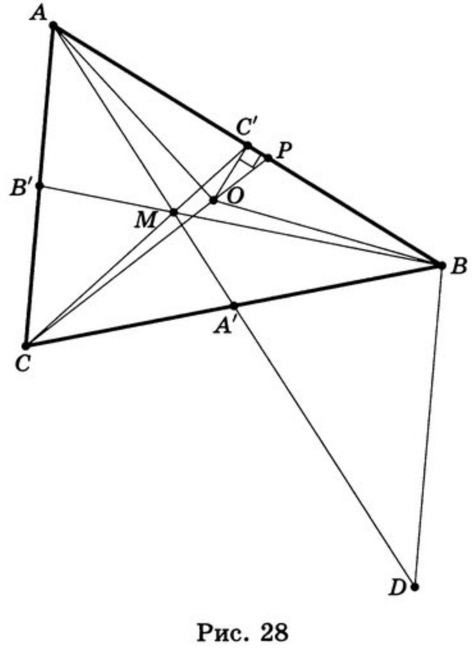


Рис. 28

угольника ABC (см. рис. 28). Так как точка O расположена внутри треугольника ABC, то она принадлежит одному из трех треугольников AMB, BMC или CMA. Без ограничения общности можно считать, что это треугольник AMB, тогда $AM + BM \geqslant AO + BO$, то есть $\frac{2}{3}m_b + \frac{2}{3}m_b \geqslant 2R \Leftrightarrow m_a + m_b \geqslant 3R$.

Продолжим отрезок CO до пересечения с AB в точке P. Угол $OC'P$ прямой, значит, угол $C'OP$ острый, поэтому угол COC' тупой. Следовательно, $CC' \geqslant CO$, то есть $m_c \geqslant R$.

Таким образом, $a + b + c > m_a + m_b + m_c \geqslant 4R$, что и требовалось.

Д38. Решение. Пусть $\frac{\beta}{2} = \alpha$, тогда доказываемое равенство примет вид

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1}{\sin 2\alpha}, \qquad (*)$$

где $22{,}5^\circ < \alpha < 45^\circ$.

Рассмотрим квадрат $ABCD$ со стороной 1. На стороне BC отметим такую точку M, что $\angle MAB = \alpha$, после чего построим луч, симметричный лучу AB относительно AM (см. рис. 29). Так как $45^\circ < 2\alpha < 90^\circ$, то этот луч пересечет сторону CD в некоторой точке N.

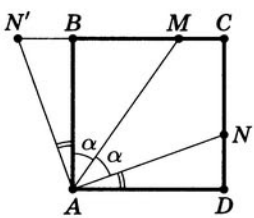


Рис. 29

Рассматривая треугольник ABM, получим $\operatorname{tg}\alpha = \frac{BM}{AB}$. Так как $\angle AND = 90^\circ - \angle NAD = 2\alpha$, то в треугольнике ADN имеем $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{DN}{AD}$, $\sin 2\alpha = \frac{AD}{AN}$. Подставив полученные результаты в равенство (*) и учитывая, что $AB = AD = 1$, получим

$$BM + DN = AN. \qquad (**)$$

Рассмотрим поворот с центром A на угол 90° против часовой стрелки. Образом вершины D является вершина B, а образом прямой DC — прямая, ей перпендикулярная и проходящая через точку B, то есть прямая BC. Следовательно, точка N' (образ точки N) лежит на прямой BC.

В треугольнике $AN'M$ имеем

$$\angle N'AM = \angle N'AB + \alpha = \angle NAD + \alpha = (90^\circ - 2\alpha) + \alpha = \\ = 90^\circ - \alpha = \angle N'MA.$$

Значит, этот треугольник равнобедренный. Следовательно, $AN = AN' = MN' = BM + BN' = BM + DN$.

Тем самым доказано равенство (**), а значит, доказано и исходное равенство.

Д39. Ответ: 0.

Решение. Рассмотрим в декартовой системе координат векторы $\overline{a}(m; n)$ и $\overline{b}(k; p)$. Из условия задачи следует, что $|\overline{a}| = \sqrt{m^2 + n^2} = 1$, $|\overline{b}| = \sqrt{k^2 + p^2} = 1$, $\overline{a} \cdot \overline{b} = mk + np = 0$, то есть $\overline{a} \perp \overline{b}$. Отложим единичные векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ от начала координат: $\overline{OA} = \overline{a}$ и $\overline{OB} = \overline{b}$, тогда точка B является образом точки A при повороте с центром O на 90° (в одном из двух возможных направлений). Если этот поворот против часовой стрелки (см. рис. 30), то из координатных формул поворота на 90° (либо из равенства треугольников) получим, что

$$\begin{cases} k = -n, \\ p = m. \end{cases}$$

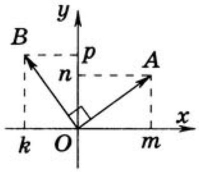


Рис. 30

Аналогично в случае поворота по часовой стрелки получим, что

$$\begin{cases} k = n, \\ p = -m. \end{cases}$$

В обоих случаях $mn + kp = 0$.

Д40. Ответ: 8.

Решение. Рассмотрим пару векторов $\overline{a}\left(|x|; \sqrt{4 - x^2}\right)$ и $\overline{b}\left(\sqrt{16 - y^2}; |y|\right)$ в декартовой системе координат. В этом случае $|\overline{a}| = 2$; $|\overline{b}| = 4$. Получим, что

$$|x|\sqrt{16 - y^2} + |y|\sqrt{4 - x^2} = \overline{a} \cdot \overline{b} \leqslant |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| = 8.$$

Полученное значение достигается тогда и только тогда, когда $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$, то есть когда соответствующие координаты этих векторов пропорциональны. Это возможно, например, при $x = 2$; $y = 0$.

Возможны также геометрические способы решения, аналогичные разобранным в задаче 4.8.

Д41. Ответ: 3.

Решение. Рассмотрим векторы $\overline{m}(1;\,1)$ и $\overline{n}(\sqrt{x-2};\,\sqrt{4-x})$ в декартовой системе координат, тогда

$$\overline{m}\cdot\overline{n}=1\cdot\sqrt{x-2}+1\cdot\sqrt{4-x}\leqslant|\overline{m}|\cdot|\overline{n}|=$$
$$=\sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{x-2+4-x}=2.$$

Кроме того, $x^2-6x+11=(x-3)^2+2\geqslant 2$. Следовательно, обе части уравнения должны быть равны 2. Так как $(x-3)^2+2=2\Leftrightarrow x=3$ и при $x=3$ значение левой части также равно 2, получаем, что $x=3$ — корень уравнения.

Д42. Ответ: а) $-0{,}5$; б) $0{,}5$.

Решение. а) Используя равенство, доказанное в п. б) примера 6.3, для $n=7$, получим

$$\cos 0+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{10\pi}{7}+\cos\frac{12\pi}{7}=0.$$

Так как $\cos\frac{12\pi}{7}=\cos\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{10\pi}{7}=\cos\frac{4\pi}{7}$, $\cos\frac{8\pi}{7}=\cos\frac{6\pi}{7}$ (симметрия относительно оси x) и $\cos 0=1$, получаем, что

$$1+2\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}.$$

б) Из симметрии относительно оси y следует, что

$$\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=-\cos\frac{6\pi}{7}-\cos\frac{4\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}=\frac{1}{2}.$$

Д43. Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $AB=1$ и катетом $BC=x$ (см. рис. 31). Тогда $\angle ABC=\arccos x$, $\angle BAC=\arcsin x$. Следовательно, $\sin(\arccos x)=\sin\angle ABC=\dfrac{AC}{AB}=\cos\angle BAC=\cos(\arcsin x)$.

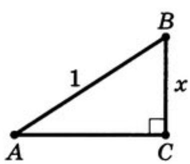


Рис. 31

Д44. Ответ: $-\dfrac{7}{9}$.

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $AB=3$ и катетом $AC=1$, тогда $\angle BAC=\alpha=\arccos\dfrac{1}{3}$ и $BC=2\sqrt{2}$.Отметив точку D, симметричную точке B относительно C, построим равнобедренный треугольник BAD, в котором $\angle BAD = 2\alpha$ (см. рис. 32). Дальнейшие способы вычисления $\cos 2\alpha$ аналогичны рассмотренным в примере 7.2.

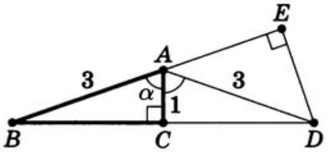


Рис. 32

Д45. Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 15$ и $BC = 8$, тогда $AB = 17$ и $\angle BAC = \alpha = \arccos \dfrac{15}{17}$.

На луче AC отложим точки D и E так, чтобы $CD = CE = 2$ (см. рис. 33). Тогда $\angle CBD = \angle CBE = \beta = \operatorname{arcctg} 4$ и треугольник DBE равнобедренный.

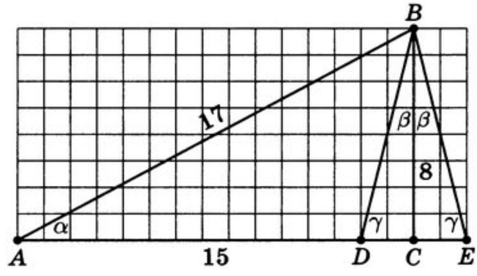


Рис. 33

Заметим, что $AE = 17 = AB$, поэтому $\angle ABE = \angle AEB = \gamma$ и $\alpha + 2\gamma = \pi$ (сумма углов треугольника ABE).

а) Рассматривая треугольник DBE, получаем $2\beta + 2\gamma = \pi$. Таким образом, $\alpha = 2\beta$, что и требовалось (эта часть решения аналогична решению задачи 7.7).

б) Рассматривая треугольник ABC, получаем $\alpha = \arccos \dfrac{15}{17}$, а из рассмотрения треугольника BEC видим, что $\gamma = \operatorname{arctg} 4$. Кроме того, $BE = \sqrt{BC^2 + CE^2} = 2\sqrt{17}$, значит, $\gamma = \arcsin \dfrac{4}{\sqrt{17}}$.

Используя равенство $\alpha + 2\gamma = \pi$, получим требуемое равенство.

Д46. Ответ: (1; 2; 3); (1; 3; 2); (2; 1; 3); (2; 3; 1); (3; 1; 2); (3; 2; 1).

Решение. Из равенства, доказанного в примере 7.1, следует, что набор чисел 1, 2 и 3, взятых в любом порядке, является решением. Докажем, что других решений нет.

На сетке из «единичных» квадратов рассмотрим прямоугольные треугольники ABE и CBE с общим катетом BE, $BE = 6$, $AE = 2$, $CE = 3$ (см. рис. 34). Тогда в треугольнике ABC имеем $\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{BE}{AE} = 3$, $\operatorname{tg}\angle BCA = \frac{BE}{CE} = 2$. Следовательно,

$$\angle ABC = \pi - (\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

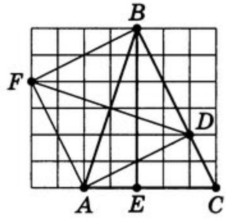


Рис. 34

Вычислить угол ABC можно и по-другому, не используя уже доказанное равенство. Действительно, проведем высоту AD треугольника ABC и отметим точку F так, как показано на рис. 34. Заметим, что $AD = DB = BF = FA$ (из равенства прямоугольных треугольников с катетами 2 и 4), значит $ADBF$ — ромб. Так как у него есть прямой угол, то это квадрат, поэтому BA — биссектриса прямого угла CBF, то есть $\angle ABC = \frac{\pi}{4}$. Тем самым получен еще один способ доказательства равенства, рассмотренного в примере 7.1.

Пусть у данного уравнения есть другие натуральные решения, тогда должен существовать треугольник с соответствующими углами. Так как функция $\operatorname{arctg} t$ возрастает, а сумма углов треугольника постоянна, то увеличив какой-то угол в уже рассмотренном треугольнике, мы обязаны уменьшить хотя бы один из двух других. Поскольку 1 — наименьшее натуральное число, то угол, равный $\operatorname{arctg} 1$, мы уменьшить не можем. Если мы уменьшим угол, равный $\operatorname{arctg} 2$, то в искомом треугольнике два угла окажутся равны $\frac{\pi}{4}$, тогда третий угол будет равен $\frac{\pi}{2}$, но у угла $\frac{\pi}{2}$ тангенс не определен, значит, и этот случай невозможен. А уменьшение угла, равного $\operatorname{arctg} 3$, очевидно, приводит к уже рассмотренным решениям. Таким образом, других решений нет.

Д47. Решение. а) В декартовой системе координат рассмотрим векторы $\overline{x}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}; \frac{1}{\sqrt{b}}; \frac{1}{\sqrt{c}}\right)$ и $\overline{y}\left(\frac{1}{\sqrt{b}}; \frac{1}{\sqrt{c}}; \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$. Тогда $\overline{x} \cdot \overline{y} = \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ac}}$, $|\overline{x}| = |\overline{y}| = \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$. Из неравенства $\overline{x} \cdot \overline{y} \leqslant |\overline{x}| \cdot |\overline{y}|$ следует доказываемое неравенство.

б) Рассмотрим векторы $\overline{x}(a\sqrt{a}; b\sqrt{b}; c\sqrt{c})$ и $\overline{y}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}; \frac{1}{\sqrt{b}}; \frac{1}{\sqrt{c}}\right)$. Тогда $\overline{x} \cdot \overline{y} = a + b + c$, $|\overline{x}| = \sqrt{a^3 + b^3 + c^3}$, $|\overline{y}| = \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$. Из неравенства $(\overline{x} \cdot \overline{y})^2 \leqslant |\overline{x}|^2 \cdot |\overline{y}|^2$ следует доказываемое неравенство.

В обоих пунктах для доказательства можно было также использовать уже доказанное неравенство Коши—Буняковского (см. задачу 8.4).

Д48. Решение. Рассмотрим куб с ребром 1. Выберем три ребра, выходящие из одной вершины, и отложим на них отрезки с длинами x, y и z (см. рис. 35).

Построим три прямоугольных параллелепипеда с размерами $x \times (1 - y) \times 1$, $y \times (1 - z) \times 1$ и $z \times (1 - x) \times 1$. Так как эти параллелепипеды не имеют общих внутренних точек, то сумма их объемов меньше, чем объем куба, равный 1.

Эту же идею можно реализовать, рассмотрев единичный куб в декартовой системе координат.

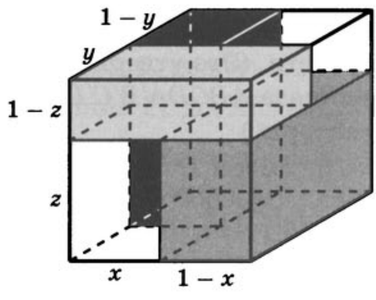


Рис. 35

Д49. Решение. Рассмотрим куб $ABCDA'B'C'D'$ с ребром 1. Выберем декартову систему координат с началом в точке A

так, чтобы положительные направления осей x, y и z задавались лучами AB, AD и AA' соответственно (см. рис. 36).

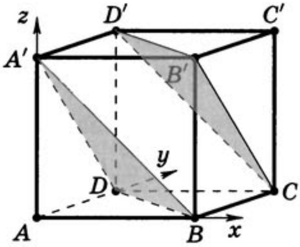


Рис. 36

Рассмотрим точку $D'(0; 1; 1)$ и плоскость BDA', которая в этой системе координат задается уравнением $x + y + z = 1$. Значит, координаты произвольной точки этой плоскости могут быть записаны так: $M(x; y; 1 - x - y)$. Тогда $D'M^2 = x^2 + (y-1)^2 + (x+y)^2$.

Заметим, что плоскости $B'D'C$ и BDA' параллельны, поэтому расстояние между точками D' и M не меньше, чем расстояние между этими плоскостями. Указанные плоскости имеют уравнения $x + y + z = 2$ и $x + y + z = 1$ соответственно. Параллельно им через концы диагонали AC' проходят плоскости $x + y + z = 0$ и $x + y + z = 3$. Так как в уравнениях соседних плоскостей разности свободных членов одинаковы, то расстояния между соседними плоскостями тоже одинаковы, поэтому плоскости $B'D'C$ и BDA' делят AC' на три равные части. (Это утверждение справедливо для любого параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$, что несложно доказать, используя векторы.)

Так как $AC' = \sqrt{3}$, имеем $D'M \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$, следовательно,

$$x^2 + (y-1)^2 + (x+y)^2 \geqslant \frac{1}{3}.$$

Д50. Ответ: 11.

Решение. Рассмотрим три прямоугольных параллелепипеда с размерами $x \times a \times 1$; $y \times b \times 3$ и $z \times c \times 5$ (какие-то из параллелепипедов могут оказаться «вырожденными»). Заметим, что слагаемые в данной сумме радикалов соответственно равны длинам диагоналей этих параллелепипедов. Расположим параллелепипеды в виде «цепочки» так, как показано на рис. 37 (соответствующие ребра параллельны), тогда их диагонали образуют ломаную $ABCD$.

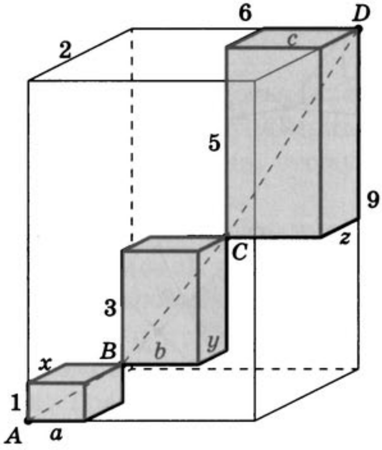


Рис. 37

Построим теперь параллелепипед с диагональю AD, грани которого соответственно параллельны граням ранее построенных параллелепипедов. Его размеры $2 \times 6 \times 9$, следовательно, $AD = \sqrt{2^2 + 6^2 + 9^2} = 11$. Длина ломаной $ABCD$ не меньше, чем длина AD, причем равенство достигается, если точки B и C принадлежат этой диагонали. Для этого соответствующие значения переменных должны быть пропорциональны числам 1, 3 и 5, то есть $x : y : z = a : b : c = 1 : 3 : 5$. Таким образом, значение 11 достигается, если $x = \frac{2}{9}$, $y = \frac{6}{9}$; $z = \frac{10}{9}$, $a = \frac{2}{3}$, $b = 2$, $c = \frac{10}{3}$.

Отметим, что эта задача обобщает для пространства идеи задач, рассмотренных в занятии 4 (см. пример 4.1, а также задачи Д18, Д19 и Д21).

Д51. Решение. Рассмотрим декартову систему координат в пространстве с осями a, b и c. Первое уравнение системы задает сферу с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{2}$, а второе уравнение — плоскость ABC (см. рис. 38a).

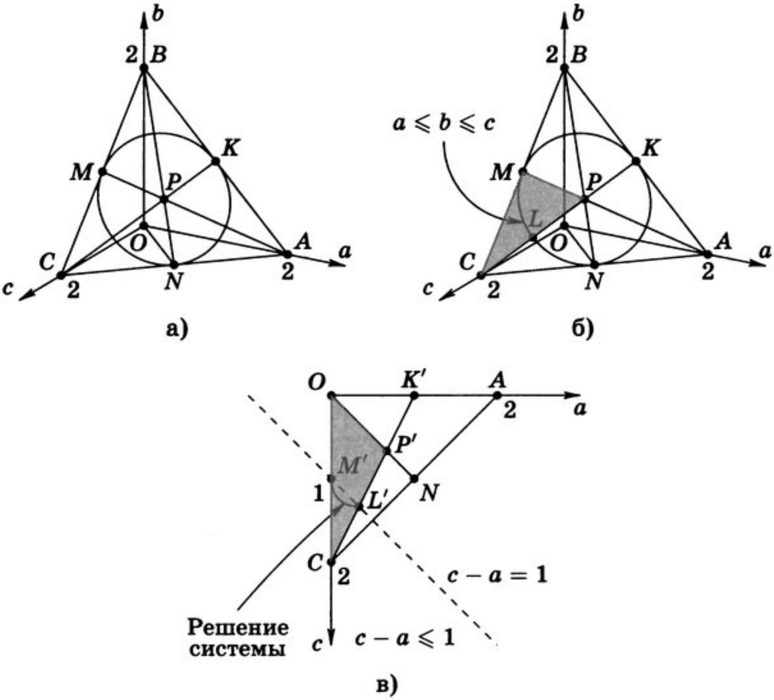


Рис. 38

Множество точек, удовлетворяющих данной системе, — окружность пересечения сферы и плоскости. Эта окружность проходит через точки M, N и K — середины сторон BC, AC и AB правильного треугольника ABC, так как две координаты каждой из середин равны по 1, а третья — 0.

Пусть $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c$. Найдем области треугольника ABC, удовлетворяющие каждому из неравенств $a \leqslant b$ и $b \leqslant c$ по отдельности.

Неравенство $a \leqslant b$ выполняется для всех точек треугольника BCK. Действительно, проекцией этого треугольника на плоскость (a, b) является треугольник OBK. Прямая OK на этой плоскости задается уравнением $b = a$, значит, для всех точек треугольника OBK выполняется неравенство $a \leqslant b$. Следовательно, оно выполняется и для всех точек треугольника BCK.

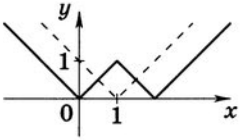
Рассуждая аналогично, получим, что неравенство $b \leqslant c$ выполняется для всех точек треугольника ACM. Таким образом, условие $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c$ выполняется для пересечения этих треугольников, то есть для всех точек треугольника CPM, где P — центр треугольника ABC. Тогда этому условию удовлетворяют все точки дуги ML окружности MNK (см. рис. 38*б*).

Проекцией этой дуги на плоскость (a, c) является кривая $M'L'$ (см. рис. 38*в*). Все точки этой кривой удовлетворяют условию $c - a \geqslant 1$. Следовательно, этому же условию удовлетворяют и все точки дуги ML.

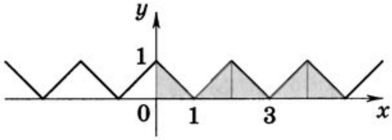
Таким образом, среди решений данной системы есть бесконечно много пар чисел (a, c), отличающихся не менее чем на 1. Следовательно, и хороших троек бесконечно много.

Д52. Ответ: $0{,}5k$.

Решение. Разберемся, как выглядит график подынтегральной функции. График функции $f(x) = |x - 1|$ показан на рис. 39*а* пунктиром. График функции $f(f(x)) = {}$ $= ||x - 1| - 1|$ получается из него параллельным переносом на 1 вниз и отражением относительно оси абсцисс той части графика, которая оказалась ниже этой оси (он показан на рис. 39*а* сплошной линией). Действуя аналогично, получим ломаную линию, напоминающую «забор» (см. рис. 39*б* для $k = 5$). Искомое значение интеграла равно площади фигуры, состоящей из k прямоугольных равнобедренных треугольников с катетом 1, поэтому эта площадь равна $0{,}5k$.



а)



б)

Рис. 39

Д53. Решение. Пусть $a < b$, тогда рассмотрим криволинейную трапецию $CABD$, ограниченную данным графиком, осью x и прямыми $x = a$, $x = b$, которые пересекают ось x

в точках C и D соответственно (см. рис. 40). Ее площадь равна $\int\limits_a^b \frac{dx}{x} =$
$= \ln x\Big|_a^b = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}$.

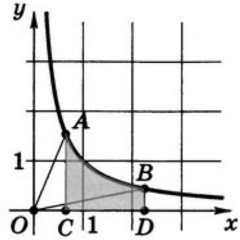


Рис. 40

Заметим, что $S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2}OC \cdot AC =$
$= \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$ и $S_{\triangle BOD} = \frac{1}{2}OD \cdot BD =$
$= \frac{1}{2}b \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$.

Следовательно, если из площади фигуры $OABD$ вычесть площадь треугольника OAC, то получится площадь криволинейной трапеции $CABD$, а если из нее же вычесть площадь треугольника OBD, то получится площадь криволинейного треугольника AOB. Значит, $S_{AOB} = S_{CABD} = \ln \frac{b}{a}$.

В случае, когда $b < a$, аналогично доказывается, что площадь заданной фигуры равна $\ln \frac{a}{b} = -\ln \frac{b}{a}$.

Д54. Ответ: $\frac{1}{p+1}$.

Решение. Рассмотрим график функции $y = x^p$ и и проведем рассуждение, аналогичное решению задачи 9.7. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^p}{n^{p+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^p}{n} = \int\limits_0^1 x^p\, dx = \frac{1}{p+1}.$$

Д55. Решение. Функции $f(x) = x^{10}$, где $x > 0$, и $g(x) = \sqrt[10]{x}$ взаимно обратные, значит, их графики симметричны относительно прямой $y = x$ (см. рис. 41) и $S_{OFDA} = S_{OGDE}$. Тогда

$$\int\limits_0^1 x^{10}\, dx + \int\limits_0^2 \sqrt[10]{x}\, dx = S_{OFDA} + S_{OGDCB} =$$
$$= S_{OGDE} + (S_{OGDA} + S_{ADCB}) = (S_{OEDG} + S_{OGDA}) + S_{ADCB} =$$
$$= S_{OEDA} + S_{ADCB} > 1 + 1 = 2.$$

Аналогичным образом доказывается и более общий факт: *пусть f и g — взаимно обратные возрастающие функции, определенные на промежутке* $[0; +\infty)$, *интегрируемые на*

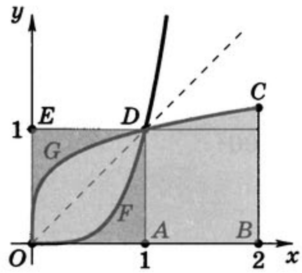


Рис. 41

любом отрезке вида $[0; c]$ *и такие, что* $f(0) = g(0) = 0$. *Тогда для любых* $a > 0$ *и* $b > 0$ *выполняется неравенство*

$$\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b g(x)\,dx \geqslant ab.$$

Отметим, что равенство достигается только в случае, когда $f(a) = b$.

Д56. Решение. Заметим, что $\dfrac{a^p}{p} = \int\limits_0^a x^{p-1}\,dx$; $\dfrac{b^q}{q} = \int\limits_0^b x^{q-1}\,dx$. Кроме того, при заданных p и q имеем

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad p + q - pq = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (p-1)(q-1) = 1.$$

Следовательно, функции $f(x) = x^{p-1}$ и $g(x) = x^{q-1}$ взаимно обратные. Используя результат, сформулированный в комментарии к предыдущей задаче, получим требуемое неравенство.

Д57. Решение. Рассмотрим четверть круга единичного радиуса. Впишем в него «ступенчатую» фигуру, состоящую из 99 прямоугольников одинаковой ширины 0,01 (см. рис. 42).

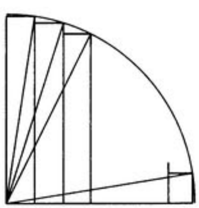


Рис. 42

Найдем площади этих прямоугольников (их высоты вычисляются по теореме Пифагора): $S_1 = 0{,}01 \cdot \sqrt{1 - 0{,}01^2} = \dfrac{\sqrt{99 \cdot 101}}{100^2}$; $S_2 = 0{,}01 \cdot \sqrt{1 - 0{,}02^2} = \dfrac{\sqrt{98 \cdot 102}}{100^2}$; ...;

$S_{99} = 0{,}01 \cdot \sqrt{1 - 0{,}99^2} = \dfrac{\sqrt{1 \cdot 199}}{100^2}$. Сумма площадей всех прямоугольников равна

$$\frac{\sqrt{99 \cdot 101} + \sqrt{98 \cdot 102} + \ldots + \sqrt{2 \cdot 198} + \sqrt{1 \cdot 199}}{100^2} < \frac{1}{4} S_{\text{кр.}} = \frac{\pi}{4},$$

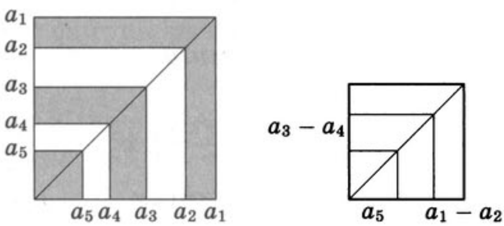
следовательно

$$\sqrt{99 \cdot 101} + \sqrt{98 \cdot 102} + \ldots + \sqrt{2 \cdot 198} + \sqrt{1 \cdot 199} < \frac{100^2 \pi}{4},$$

что и требовалось.

Сравните с решением задачи 9.6.

Д58. Решение. Левая часть неравенства — это сумма площадей закрашенных фигур (см. рис. 43*а*). Правая часть неравенства — площадь квадрата, сторона которого равна $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5$.



а) б)

Рис. 43

Каждая из площадей является суммой площади квадрата со стороной a_5 и площадей четырех прямоугольных трапеций.

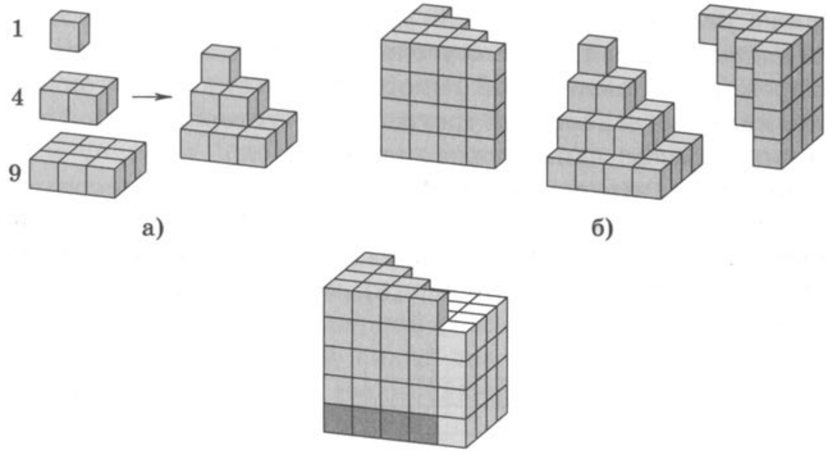
Сравним площади соответствующих трапеций.

Их высоты равны, а средняя линия трапеции на рис. 43*а* заведомо больше средней линии соответствующей трапеции на рис. 43*б* (для каждой пары трапеций можно записать соответствующие выражения и сравнить их). Таким образом, суммарная площадь фигур на рис. 43*а* больше, чем площадь квадрата на рис. 43*б*, откуда и следует справедливость неравенства (равенство достигается, если $a_2 = a_3$ и $a_4 = a_5$).

Отметим, что доказанное неравенство можно обобщить для любого нечетного количества слагаемых.

Д59. Ответ: $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Решение. Искомая сумма представляет собой количество кубиков «угловой лестницы», которая из них сложена и имеет n^2 кубиков в основании (см. рис. 44*а*).



а) б)

в)

Рис. 44

Возьмем три такие одинаковые «лестницы», расположим их так, как показано на рис. 44*б*, и сложим из них фигуру, показанную на рис. 44*в*. Из двух одинаковых полученных фигур легко сложить прямоугольный параллелепипед размером $n \times (n+1) \times (2n+1)$.

Следовательно,

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Д60. Ответ: а) при $n = 5$; **б)** при $n = 25$.

Решение. а) Данное уравнение задает в декартовой системе координат окружность с центром $O(0; 0)$ и радиусом n. Так как пары $(\pm n; 0)$ и $(0; \pm n)$ являются решениями уравнения, то эта окружность пересекает оси координат в целочисленных точках. Таким образом, остается найти наименьший радиус окружности, которая пройдет еще через 8 точек с целыми координатами. Поскольку начало координат является центром симметрии окружности, а оси координат — ее осями симметрии, то это равносильно тому, что в каждой координатной четверти найдутся ровно две такие точки.

Рассмотрим (для удобства) первую четверть, в которой $x > 0$ и $y > 0$. Так как заданная окружность симметрична также относительно прямой $y = x$, то для решения задачи достаточно найти прямоугольный треугольник с целыми сторонами и наименьшей гипотенузой. Таким треугольником является египетский треугольник со сторонами 3, 4 и 5. Таким образом, наименьшее значение $n = 5$.

Отметим, что полученный результат широко используется на практике. Для проведения на клетчатой бумаге окружности без помощи циркуля чаще всего используют именно эти 12 точек (см. рис. 45).

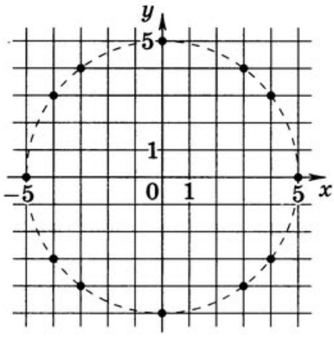


Рис. 45

б) Продолжим рассуждения из пункта а). Учитывая все указанные симметрии окружности, получим, что вместе с каждым целочисленным и не содержащим нулей решением заданного уравнения можно указать еще 7 целочисленных решений. Значит, для того чтобы решений было 20, достаточно найти два неравных прямоугольных треугольника с одной и той же целой гипотенузой и целыми катетами так, чтобы гипотенуза была наименьшей из возможных. Будем последовательно перебирать «пифагоровы тройки» в порядке возрастания гипотенуз: (3; 4; 5), (6; 8; 10), (5; 12; 13), (9; 12; 15), (8; 15; 17), (12; 16; 20),

$(7; 24; 25)$, $(15; 20; 25)$. Последние две тройки — искомые ($25^2 = 7^2 + 24^2 = 15^2 + 20^2$). Следовательно, $n = 25$.

Д61. Ответ: 11 дней.

Решение. Так как каждый ученик может сидеть рядом не больше чем с одиннадцатью учениками, то дольше чем 11 дней процесс продолжаться не может.

Покажем, используя геометрический подход, каким образом можно составить требуемое расписание рассадки для 11 дней. Занумеруем учеников числами от 1 до 12, расставим числа от 1 до 11 на окружности через равные промежутки (в вершинах правильного одиннадцатиугольника), а число 12 разместим в центре окружности.

Соединим отрезком числа 1 и 12. Остальные точки соединим попарно отрезками, перпендикулярными первому (см. рис. 46). Эта схема попарной рассадки учеников в первый день (за одной партой сидят два ученика, номера которых соединены отрезком).

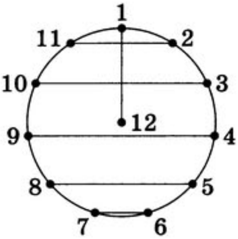


Рис. 46

Для получения схемы рассадки учеников во второй день соединим отрезком числа 2 и 12, а остальные точки опять соединим отрезками, перпендикулярными первому.

Аналогично в схеме рассадки третьего дня начнем с отрезка, соединяющего точки 3 и 12, и так далее. Поскольку никакие два из одиннадцати отрезков, являющихся радиусами окружности, не лежат на одной прямой (количество точек на окружности нечетно), то перпендикуляры к ним каждый раз образуют новую пару чисел.

Описанная процедура является геометрической интерпретацией разбиения чисел от 1 до 12 на всевозможные пары с использованием всех остатков от деления на 11. Проводимые хорды окружности соединяют две точки так, чтобы сумма их номеров имела одинаковый остаток от деления на 11. В первый день этот остаток равен 2, во второй день он равен 4, далее 6, 8, 10, 1, 3, 5, 7, 9 и 0. Точка, соединяемая изначально с центром окружности, особая:

для ее номера нет числа, в сумме с которым получается тот же остаток от деления на 11.

Очень похожая процедура позволяет составить расписание по турам для кругового турнира при любом количестве участников. Если участников $2n$, то турнир можно провести за $2n - 1$ дней, а если их $2n + 1$, то требуется $2n + 1$ дней (ежедневно у одного участника нет пары и он вынужден отдыхать).

Д62. Решение. Пусть в сложном обмене участвуют n квартир. Тогда его можно представить как циклическую перестановку из n элементов. Изобразим ее в виде правильного n-угольника, пронумеровав его вершины, например, по часовой стрелке так, чтобы в результате сложного обмена жители квартиры с номером k должны были переехать в квартиру с номером $k + 1$ (жители квартиры с номером n должны переехать в квартиру 1, см. рис. 47). Тогда сложный обмен представляется в виде поворота этого n-угольника вокруг его центра O на угол $\frac{360°}{n}$ (по часовой стрелке). Но такой поворот является композицией двух осевых симметрий с осями, проходящими через точку O, угол между которыми равен $\frac{180°}{n}$.

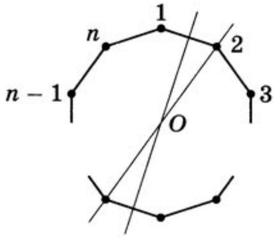


Рис. 47

Каждая из этих осевых симметрий задает несколько парных обменов. Любой из них можно осуществить за один день, поэтому сложный обмен можно осуществить за два дня.

Д63. Решение. Рассмотрим равносторонний треугольник. Используем тот факт, что сумма расстояний от любой его внутренней точки до сторон одинакова и равна его высоте. Тогда, если длина высоты соответствует общему количеству проголосовавших, то расстояния от каждой внутренней точки треугольника до его сторон будут пропорциональны количеству поданных за партию голосов.

Осталось показать на этой модели «правила округления». Для этого выпишем все возможные распределения мандатов (с точностью до порядка): (5; 0; 0), (4; 1; 0), (3; 2; 0), (3; 1; 1) и (2; 2; 1). Так как геометрическим местом точек, равноудаленных от сторон угла, является биссектриса этого угла, то множество точек, соответствующих каждому из возможных распределений, образует правильный шестиугольник, стороны которого параллельны биссектрисам треугольника (в случаях, когда одна или две партии не получают мандатов, — часть такого шестиугольника).

Геометрическая интерпретация распределения мандатов приведена на рис. 48.

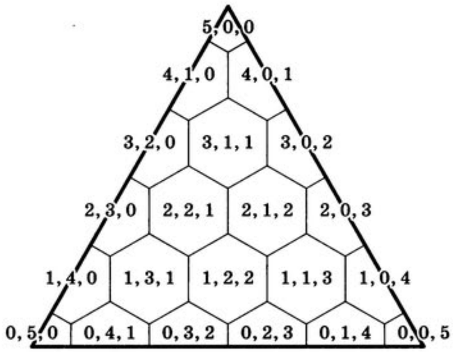


Рис. 48

Отметим, что идеальной картины такая модель (как и любая другая) дать не может, так как возможна ситуация, когда точка, соответствующая исходу голосования, попадает на общую границу двух или трех областей. В реальности такая ситуация означает проведение еще одного тура голосования.

Раздаточный материал

Занятие 1

1.1. Решите уравнение или неравенство:
а) $|x| = |x - 3|$;
б) $|5 + x| \leqslant |5 - x|$.

1.2. Найдите наименьшее значение выражения

$$|a - 100| + |100 + a|.$$

1.3. Решите уравнения или неравенства:
а) $|x - 1| + |x - 2| = 3$;
б) $|x - 1| + |x - 2| < 3$;
в) $|x| + |1 + x| = 1$;
г) $|x| + |1 + x| \geqslant 1$;
д) $|6 + x| + |6 - x| = 8$.

1.4. а) На одной стороне улицы стоят подряд десять домов (расстояния между соседними домами не обязательно одинаковые). В каком месте надо построить газетный киоск, чтобы сумма расстояний от него до всех домов была наименьшей?

б) Найдите наименьшее значение суммы

$$|a| + |a + 1| + |a + 2| + \ldots + |a + 100|.$$

1.5. а) Расстояние между деревнями A и B равно 3 км. В деревне A живут 300 школьников, а в деревне B — 200 школьников. В каком месте надо построить школу, чтобы сумма всех расстояний, пройденных школьниками по дороге в школу, была наименьшей?

б) Найдите наименьшее значение каждого из выражений:
1) $3|x - 2| + 2|x - 5|$; 2) $|8x + 40| + |5x + 40|$.

1.6. В Нью-Йорке шахматных мастеров больше, чем на всей остальной территории США. Планируется провести шахматный турнир с участием всех мастеров. Решено, что турнир будет проведен в таком месте, чтобы сумма расстояний всех переездов была наименьшей. Нью-Йоркские мастера считают, что этому критерию удовлетворяет их город, а мастера с Западного побережья настаивают на том, что турнир надо проводить в городе, который является «центром тяжести» всей совокупности мест, в которых живут шахматисты. Кто из них прав?

1.7. Три гнома живут в разных домах на плоскости и ходят со скоростями 1 км/ч, 2 км/ч и 3 км/ч соответственно. Какое место для ежедневных встреч им надо выбрать, чтобы сумма времён, необходимых каждому из гномов на путь от своего дома до этого места (по прямой), была наименьшей?

Занятие 2

2.1. Сколько решений имеет уравнение

$$\sqrt{(x+3)^2+(y+2)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=5?$$

2.2. Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения $(a-c)^2+(b-d)^2$, если $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=4$.

2.3. Найдите наибольшее значение выражения x^2+y^2, если $|x-y|\leqslant 2$ и $|3x+y|\leqslant 6$.

2.4. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{(x-9)^2+4}+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(y-3)^2+9}.$$

2.5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+\sqrt{1-y^2}=1, \\ y+\sqrt{1-x^2}=\sqrt{3}. \end{cases}$$

2.6. Найдите наименьшее значение дроби $\frac{x}{y}$, если $\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}=1$.

2.7. Найдите наименьшее значение выражения

$$|x-y|+\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}$$

2.8. Решите уравнение

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x+5)^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}=8.$$

Занятие 3

3.1. Из Цветочного города в Солнечный ведёт шоссе длиной 12 км. На расстоянии 2 км от Цветочного города на этом шоссе расположен железнодорожный переезд, который попеременно три минуты закрыт и три минуты открыт, а на расстояниях 4 км и 6 км от Цветочного города расположены светофоры, на каждом из которых две минуты горит красный свет, затем три минуты — зелёный, затем опять две минуты — красный и так далее. Незнайка выезжает из Цветочного города в Солнечный в тот момент, когда переезд только что закрылся, а оба светофора только что переключились на красный. За какое наименьшее время (в минутах) он сможет доехать до Солнечного города, не нарушая правил, если его электромобиль едет по шоссе с постоянной скоростью? (Незнайка не умеет ни тормозить, ни увеличивать скорость.)

3.2. Из пункта A в пункт B в 7:00 вышел пешеход, а через некоторое время из B в A выехал всадник. Пешеход пришел в пункт B через 12 часов после выезда оттуда всадника. Всадник приехал в пункт A в 16.00 того же дня. Скорости пешехода и всадника постоянны. Какую долю пути из A в B прошел пешеход до его встречи со всадником?

3.3. На берегах большого круглого водоема последовательно расположены пристани A, B, C и D. Катер и лодка одновременно направились из A в B и из D в C (по кратчайшему пути, каждый — с постоянной скоростью) и прибыли в конечный пункт одновременно. На каком расстоянии друг от друга прошли бы катер и лодка, если бы они поменялись пунктами назначения?

3.4. Из города в одном направлении выехало три автомобиля: второй — через 10 минут после первого, третий — через 20 минут после второго. Через 30 минут после своего выезда третий автомобиль догнал второй, а еще через 10 минут — первый. Через сколько минут после своего выезда из города второй автомобиль догнал первый?

3.5. По шоссе мимо наблюдателя проехали «Москвич», «Запорожец» и двигавшаяся им навстречу «Нива». Известно, что когда с наблюдателем поравнялся «Москвич», то он был равноудален от «Запорожца» и «Нивы», а когда с наблюдателем поравнялась «Нива», то она была равноудалена от «Москвича» и «Запорожца». Докажите, что «Запорожец» в момент проезда мимо наблюдателя был равноудален от «Нивы» и «Москвича». (Скорости автомашин считаем постоянными. В рассматриваемые моменты равноудаленные машины находились по разные стороны от наблюдателя.)

3.6. Равноускоренно движущийся автомобиль увеличивает свою скорость на некотором прямолинейном участке дороги с v_1 до v_2. Найдите скорость автомобиля в середине этого участка.

3.7. Два пловца, стартовав из разных точек с одного берега озера, стремятся доплыть до буйка, двигаясь прямолинейно по направлению к нему с постоянными скоростями. В 10 часов 35 минут расстояние между пловцами было 300 метров, в 10 ч 36 мин оно сократилось до 200 метров, а в 10 ч 37 мин стало равным 100 метров. Верно ли, что пловцы приплывут к буйку одновременно?

Занятие 4

4.1. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{x^2 - 2x + 4} + \sqrt{x^2 - x\sqrt{3} + 1}.$$

4.2. Положительные числа a, b и c таковы, что $a^2 + b^2 - ab = c^2$. Докажите, что $(a - c)(b - c) \leqslant 0$.

4.3. Положительные числа a, b, c, x, y, z таковы, что $x^2 + xy + y^2 = a^2$; $y^2 + yz + z^2 = b^2$; $x^2 + xz + z^2 = c^2$. Выразите величину $P = xy + yz + xz$ через a, b и c.

4.4. Решите уравнение

$$\sqrt{2 - 2\cos x} + \sqrt{10 - 6\cos x} = \sqrt{10 - 6\cos 2x},$$

где $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

4.5. Числа x, y, z и t лежат в интервале $(0; 1)$. Докажите, что

$$\sqrt{x^2 + (1-t)^2} + \sqrt{y^2 + (1-x)^2} + \sqrt{z^2 + (1-y)^2} + \sqrt{t^2 + (1-z)^2} < 4.$$

4.6. Найдите все неотрицательные решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2\sqrt{3} \cdot \sin x = 2\sin y = \sqrt{3} \cdot \sin z, \\ x + y + z = \pi. \end{cases}$$

4.7. Рассматриваются все параболы $y = x^2 + px + q$, пересекающие оси координат в трех различных точках. Для каждой параболы через эти три точки проводится окружность. Докажите, что на координатной плоскости существует точка, принадлежащая всем проведенным окружностям.

4.8. Найдите наибольшее значение выражения

$$x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}.$$

Занятие 5

5.1. а) Докажите, что $\operatorname{ctg} 30^\circ + \operatorname{ctg} 75^\circ = 2$.

б) Вычислите $\operatorname{tg} 15^\circ$.

5.2. Докажите формулы ($0 < \alpha < 180^\circ$):

а) $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$;

б) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

в) $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$.

5.3. Докажите, что $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin\frac{3\pi}{7}}$.

5.4. Докажите, что:

а) если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ ($\alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0$), то $\sin\alpha+\sin\beta>\sin\gamma$;

б) если $x+y+z=\frac{\pi}{2}$ ($x>0,\ y>0,\ z>0$), то $\cos x+\cos y>\cos z$.

5.5. Вычислите:

а) $\operatorname{ctg} 10^\circ - 4\cos 10^\circ$;

б) $\frac{1}{\sin 10^\circ} - 4\cos 20^\circ$;

в) $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$.

5.6. Докажите, что если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ ($\alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0$), то $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 1$.

Занятие 6

6.1. Числа a, b, x и y удовлетворяют равенствам $(a+b)(x+y)=1$ и $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=1$. Докажите, что $ax+by \geqslant 0$.

6.2. Найдите $\sin 9^\circ + \sin 49^\circ + \sin 89^\circ + \ldots + \sin 329^\circ$.

6.3. Найдите наибольшее значение выражения

$$A = \sin x \cdot \cos y \cdot \cos z + \cos x \cdot \sin y \cdot \sin z.$$

6.4. Дано восемь действительных чисел: a, b, c, d, e, f, g, h. Докажите, что хотя бы одно из шести чисел $ac+bd$, $ae+bf$, $ag+bh$, $ce+df$, $cg+dh$, $eg+fh$ неотрицательно.

6.5. Решите уравнение $2\sqrt{x-1}+5x=\sqrt{(x^2+4)(x+24)}$.

6.6. Каждое из чисел a, b, c и d лежит на отрезке $[2; 4]$. Докажите, что выполняется неравенство

$$25(ab+cd)^2 \geqslant 16(a^2+d^2)(b^2+c^2).$$

6.7. Докажите, что если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ ($\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$), то $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma \leqslant 1{,}5$.

6.8. Для углов α, β и γ справедливо неравенство $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma \geqslant 2$. Докажите, что $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma \leqslant \sqrt{5}$.

Занятие 7

7.1. Докажите, что при $x > 0$ выполняются равенства

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

7.2. Вычислите $\operatorname{arctg} 0{,}75 + \arccos 0{,}6$.

7.3. Вычислите $\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \operatorname{arcctg} 5$.

7.4. Решите уравнение $\operatorname{arctg} 3x + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$.

7.5. Вычислите $\sin\left(2 \arccos \frac{15}{17}\right)$.

7.6. Вычислите $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2} \arccos \frac{5}{13}\right)$.

7.7. Докажите, что $\operatorname{arctg} \frac{5}{12} = 2 \operatorname{arcctg} 5$.

7.8. Используя один и тот же чертеж, покажите справедливость трех равенств:

а) $\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$;

б) $\operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \operatorname{arctg} \frac{1}{13} = \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$;

в) $\operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8} = \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$.

Занятие 8

8.1. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y+z=3, \\ x^2+y^2+z^2=3. \end{cases}$

8.2. Известно, что $x+2y+3z=1$. Какое наименьшее значение может принимать выражение $x^2+y^2+z^2$?

8.3. Докажите, что

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k^2+b_k^2+c_k^2} \geqslant \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} c_k\right)^2}.$$

8.4. Докажите, что при $n \geqslant 2$ выполняется неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} y_k^2.$$

8.5. Сколько решений имеет система уравнений

$$(x-a)^2+y^2+z^2 = x^2+(y-a)^2+z^2 = x^2+y^2+(z-a)^2 = 1$$

в зависимости от значений параметра a?

8.6. Известно, что $9x^2+16y^2+144z^2=169$. Найдите наибольшее возможное значение выражения $6x-4y+24z$.

8.7. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}$, если $a+b+c=1$.

8.8. Положительные числа A, B, C и D таковы, что система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=A, \\ |x|+|y|=B \end{cases}$ имеет m решений, а система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=C, \\ |x|+|y|+|z|=D \end{cases}$ имеет n решений.

Известно, что $m>n>1$. Найдите m и n.

Занятие 9

9.1. Вычислите: а) $\int\limits_{-6}^{-3} \sqrt{-x^2-6x}\,dx$; б) $\int\limits_{0}^{6} \sqrt{x^2+9-6x}\,dx$.

9.2. Вычислите: а) $\int\limits_{0}^{3} (|x-1|-|x-2|)\,dx$;

б) $\int\limits_{-2}^{0} \arcsin(x+1)\,dx + \int\limits_{-2}^{0} \arccos(x+1)\,dx$.

9.3. Докажите, что: а) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\sin^2 x + \sin^4 x)\,\mathrm{tg}\,x\,dx = 0$;

б) $\int\limits_{-2015\pi}^{2015\pi} \cos x\,dx = 0$.

9.4. Вычислите: а) $\int\limits_{0}^{4} \sqrt{x^2+9}\,dx + \int\limits_{3}^{5} \sqrt{x^2-9}\,dx$;

б) $\int\limits_{-1}^{1} \arccos x\,dx$.

9.5. Докажите, что $\int\limits_{0}^{\pi} |\sin kx|\,dx$ не зависит от значения k, где k — натуральное число.

9.6. Докажите неравенство

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{99^2}+\frac{1}{100^2}<\frac{99}{100}.$$

9.7. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)$.

Авторы задач

Большинство использованных в книжке задач давно и заслуженно стали математическим фольклором или восходят к нему. Эти задачи вошли в некоторые многие учебные пособия, книжки и статьи (см. список использованной литературы), поэтому их часто публикуют без указания авторов. Это, однако, не повод умалчивать об авторах в тех случаях, когда они известны (в случаях, когда автор не один, его соавторы указаны в скобках).

А. Анджанс: Д2
Р. Анно: Д53 (Д. Кириченко)
Е. Бакаев: Д21
Б. Беднов: Д17 (О. Косухин)
А. Блинков: Д3, а) (И. Раскина), Д50, Д52
В. Бугаенко: 4.2 (А. Егоров)
С. Волченков: Д13
А. Галочкин: 6.8
Г. Гальперин: 8.8
С. Дворянинов: 4.5
А. Егоров: 4.2 (В. Бугаенко)
А. Заславский: Д46
Д. Кириченко: Д53 (Р. Анно)
Н. Константинов: Д62 (А. Шнирельман)
О. Косухин: Д17 (Б. Беднов)
И. Кушнир: Д12
М. Мурашкин: Д51
И. Раскина: Д3, а) (А. Блинков)
Л. Смирнова: Д14
С. Токарев: 3.5
Р. Хонсбергер: 1.6, Д3, б)
И. Шарыгин: 4.7

А. Шень: пример 3.3
А. Шнирельман: Д62 (Н. Константинов)
И. Ященко: 3.1

Выражаю благодарность всем упомянутым авторам, а также тем неизвестным, кто сочинил остальные задачи. Прошу извинить за те случаи, когда исходя из целей этого издания задачи были использованы не в исходной формулировке.

Список использованной литературы и веб-ресурсов

1. *Н. Х. Агаханов и др.* Всероссийские олимпиады школьников по математике. 1993—2006. Окружной и финальный этапы. М.: МЦНМО, 2014.

2. *Н. Б. Алфутова, А. В. Устинов.* Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. М.: МЦНМО, 2009.

3. *А. Д. Блинков.* Расстояния на прямой и не только // Квант. 2012. № 3.

4. *В. О. Бугаенко.* Турниры им. Ломоносова. Конкурсы по математике. М.: МЦНМО—ЧеРо. 1998.

5. *Г. А. Гальперин, А. К. Толпыго.* Московские математические олимпиады. М.: «Просвещение», 1986.

6. *Г. З. Генкин.* Геометрические решения негеометрических задач: книга для учителя. М.: Просвещение, 2007.

7. *Р. К. Гордин.* Геометрия. Планиметрия. 7—9 классы. М.: МЦНМО, 2014.

8. *А. В. Жуков, П. И. Самовол, М. В. Аппельбаум.* Элегантная математика. М.: URSS, 2005.

9. *А. П. Карп.* Сборник задач по алгебре и началам анализа. Учебное пособие. М.: Просвещение, 1995.

10. *И. А. Кушнир.* Геометрия на баррикадах 2. Киев: «Знания Украины», 2011.

11. Материалы Всероссийских олимпиад школьников по математике 2009/10 уч. года.

12. *А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир.* Неожиданный шаг, или Сто тринадцать красивых задач. Киев: Агрофирма «Александрия», 1993.

13. Московские математические регаты. Часть 1 / Сост. А. Д. Блинков, Е. С. Горская, В. М. Гуровиц. М.: МЦНМО, 2014.

14. LXXVI Московская математическая олимпиада. Задачи и решения / Коллектив авторов. М.: МЦНМО, 2013.

15. *Л. Ф. Пичурин*. За страницами учебника алгебры. Книга для учащихся 7—9 классов средней школы. М.: «Просвещение», 1992.

16. *В. В. Прасолов*. Задачи по планиметрии. Учебное пособие. М.: МЦНМО, 2007.

17. *А. И. Сгибнев*. Геометрия помогает алгебре. Приложение «Математика» к газете «Первое сентября», № 20. 2008.

18. *И. Н. Сергеев, С. Н. Олехник, С. Б. Гашков*. Примени математику. М.: «Наука», 1989.

19. *А. Б. Скопенков*. Геометрическая интерпретация // Математика в задачах. М.: МЦНМО, 2009.

20. *Л. Б. Слуцкий*. Алгебра и геометрия «в одной тарелке» // Научно-методический сборник «Архимед», вып. 3. М.: ИЛКиРЛ, 2007.

21. Творческие конкурсы учителей математики / Сост. А. Д. Блинков, Е. С. Горская, И. В. Ященко. М.: МЦНМО, 2008.

22. *В. В. Ткачук*. Математика — абитуриенту. М.: МЦНМО, 2011.

23. *В. А. Уфнаровский*. Математический аквариум. М.: МЦНМО, 2016.

24. *Г. Б. Филипповский*. Авторская школьная геометрия. Киев, 2013. («Библиотека Русановского лицея».)

25. *Р. Хонсбергер*. Математические изюминки. М.: «Наука», 1992. (Библиотечка «Квант»; Вып. 83).

26. *А. В. Шаповалов, Л. Э. Медников*. XVII турнир математических боев имени А. П. Савина. М.: МЦНМО, 2012.

27. *И. Ф. Шарыгин*. Задачи по геометрии. Планиметрия. М.: «Наука», 1982.

28. *И. Ф. Шарыгин*. Математический винегрет. М.: «Мир», 2002.

29. *Г. Штейнгауз*. Математический калейдоскоп. М.: «Наука», 1981. (Библиотечка «Квант»; Вып. 8).

30. *Э. Я. Ясиновый*. Геометрия помогает решать уравнения // Квант. 1984. № 12.

31. http://www.mccme.ru/oluch — Творческие конкурсы учителей математики.

32. http://olympiads.mccme.ru/regata — Математические регаты.

33. http://www.problems.ru — База задач по математике.

Дополнительная литература

1. *И. В. Артамкин, А. Л. Городенцев, А. Г. Кулаков, М. А. Прохоров, С. М. Хорошкин, А. В. Хохлов.* Числа и суммы // Журнал «Математическое образование». № 2—3 (9—10), апрель—сентябрь 1999.

2. *А. Д. Бендукидзе.* Фигурные числа // Квант. 1974. № 6.

3. *А. Д. Блинков.* Вычисление некоторых конечных сумм // Научно-практический журнал «Математика для школьников». 2008. № 4.

4. *А. Д. Блинков.* Классические средние в арифметике и геометрии. М.: МЦНМО, 2016. («Школьные математические кружки»).

5. *А. Д. Блинков.* Геометрические идеи в решениях негеометрических задач // «Математика» (методический журнал для учителей математики). 2014. № 9—11.

6. *Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахер, Ж. М. Раббот, А. Л. Тоом.* Заочные математические олимпиады. М.: МЦНМО, 2012.

7. *Г. А. Гальперин, Н. А. Земляков.* Математические бильярды. Бильярдные траектории и смежные вопросы математики и механики. М.: «Наука», 1990. (Библиотечка «Квант»; Вып. 77).

8. *И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, А. А. Кириллов.* Метод координат. М.: МЦНМО, 2009.

9. *И. М. Гельфанд, А. Шень.* Алгебра. М.: МЦНМО, 2014.

10. *Диофант Александрийский.* Арифметика и книга о многоугольных числах. М.: «Наука», 1974.

11. *Д. В. Клименченко.* Задачи по математике для любознательных. Книга для учащихся 5—6 классов средней школы. М.: «Просвещение», 1992.

12. *Г. А. Мерзон, И. В. Ященко*. Длина, площадь, объем. М.: МЦНМО, 2015. («Школьные математические кружки»).

13. *Г. Радемахер, О. Теплиц*. Числа и фигуры. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.

14. http://mmmf.msu.ru/archive — Архив кружков малого мехмата МГУ.

Оглавление

Учебно-методическое издание

Александр Давидович Блинков

Геометрия в негеометрических задачах

Серия «Школьные математические кружки»

Подписано в печать 21.03.2016 г. Формат $60 \times 88\ ^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Объем 10 печ. л. Тираж 3000 экз. Заказ 408.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-08-04.

Отпечатано в ППП «Типография «Наука»
121099, Москва, Шубинский пер., д. 6.