

Б. В. КУТУЗОВ

ГЕОМЕТРИЯ
ЛОБАЧЕВСКОГО
И
ЭЛЕМЕНТЫ ОСНОВАНИЙ
ГЕОМЕТРИИ

*Пособие для учителей
средней школы*

*Утверждено
Министерством просвещения РСФСР*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

МОСКВА * 1950

В первой части книги кратко, но систематично изложена геометрия Лобачевского, освещены основные идеи этой геометрии и их огромное влияние на развитие науки.

Во второй части изложены основные положения „Начал“ Евклида и элементы оснований геометрии.

Книга будет служить полезным пособием для учителей математики средней школы, а также для учащихся старших классов.

ПРЕДИСЛОВИЕ

23 февраля 1951 года исполняется 125 лет с того знаменательного дня, когда гениальный русский учёный Николай Иванович Лобачевский доложил физико-математическому отделению Казанского университета результаты своих исследований, создавших новую науку, названную впоследствии неевклидовой геометрией Лобачевского.

Преподаватель математики в средней школе обязан полностью овладеть основными понятиями и фактами геометрии Лобачевского, так как только в свете геометрии неевклидовой выясняется логическая структура евклидовой геометрии, изучаемой в средней школе. Ученик старших классов средней школы также может с интересом и с пользой овладеть основным содержанием геометрии Лобачевского.

Справедливо сказал П. С. Александров: „Алгебраическое мышление начинается с теории групп, и без знания элементов этой теории нельзя быть математиком не только образованным, но и просто грамотным“^[3].

Геометрическое мышление начинается с неевклидовых геометрий.

Пользуюсь случаем поблагодарить свою слушательницу Н. Е. Горбатенко за предоставленные записи моих лекций, читанных в Абаканском учительском институте в 1942—1943 гг. Эти записи значительно облегчили труд написания настоящей книги.

Глубокую благодарность считаю долгом выразить А. П. Нордену и Г. Б. Гуревичу, прочитавших рукопись и давших ряд ценных советов. С. И. Новосёлову я признателен за отдельные редакционные замечания.

Б. К у т у з о в.

ВВЕДЕНИЕ

Как знание одного только родного языка не даёт возможности усмотреть его особенности, выяснить и отчётливо понять его структуру без сравнения с языками другими, так знание одной только геометрии Евклида не позволяет полностью уяснить особенности строения геометрической науки. До современных воззрений на геометрию можно возвыситься лишь после изучения геометрии неевклидовой, созданной Н. И. Лобачевским. Знакомство с этой геометрией есть первая ступень при изучении оснований геометрий.

„Основания геометрии“—это та часть математики, в которой устанавливаются и исследуются основные понятия и аксиомы геометрии, роль и место каждой аксиомы в построении геометрической науки, а также возможность замены одних аксиом другими и следствия такой замены.

Основное значение в постановке вопросов, которые составляют предмет оснований геометрии и оснований математики вообще, имеет создание в 1826 г. гениальным русским математиком Николаем Ивановичем Лобачевским (1792—1856) новой геометрии, названной впоследствии *неевклидовой геометрией Лобачевского*.

Отсюда вытекает чрезвычайная важность изучения учителем геометрии Лобачевского и оснований геометрии.

Знание этих дисциплин даст возможность лучше понять структуру геометрической науки в целом, позволит хорошо ориентироваться в многообразном геометрическом материале и предохранит от опасности излагать геометрию в школе как простое собрание теорем, нанизываемых в определённом, раз установленном порядке.

Первым систематическим изложением геометрии, дошедшим до нашего времени, являются «Начала» ^[10] — сочинение александрийского математика Евклида (около 300 л. до н. э.). Подробный обзор евклидовых «Начал» даётся в V главе настоящего пособия, там же рассмотрены достоинства, недостатки и историческое значение этой знаменитой книги *). Желательно, чтобы каждый преподающий геометрию ознакомился с этим трудом Евклида, выдержавшим более чем 2000-летнее испытание временем. Евклидом написаны и

*) См. также «Труды семинара МГУ по истории математики». Историко-математические исследования, вып. I, Гостехиздат, 1948.

другие сочинения по геометрии, но большинство его трудов безвозвратно потеряно.

Необходимо подчеркнуть, что к эпохе Лобачевского геометрическая наука была продвинута достаточно далеко. Но тот материал, с которым геометрия имела дело, как бы он сложен ни был, те основные положения и аксиомы, на которых воздвигалось здание геометрии, — оставались *евклидовыми*. До Лобачевского имели дело с далеко развитой, но евклидовой геометрией. Например, „начертательная геометрия“ является лишь методом, а не новой геометрией. „Аналитическая геометрия“ есть лишь координатный метод. Создателем совершенно новой геометрии, коренным образом отличающейся от геометрии старой, евклидовой, и был Николай Иванович Лобачевский. Лобачевский построил свою неевклидову геометрию, один пройдя весь тот путь, который к его времени прошла геометрия Евклида. В настоящей книге изложена лишь элементарная часть неевклидовой геометрии Лобачевского, включая элементы его тригонометрии. Лобачевский созданием своей геометрии совершил громадный революционный скачок первостепенной важности в развитии геометрической науки и математики вообще. Разъяснению идей Лобачевского, а также идей, возникших под влиянием работ Лобачевского, и посвящена эта книга.

Великое создание Лобачевского основано на его исследованиях по теории параллельных линий. Эти исследования начинаются с выяснения значения аксиомы Евклида о параллельных. Комментаторы евклидовых „Начал“ много внимания уделяли именно теории параллельных и пятому постулату Евклида, гласящему: *если две прямые пересекаются с третьей так, что сумма углов, лежащих по одну сторону от секущей, меньше двух прямых, то эти прямые при достаточном продолжении встретятся по ту сторону от секущей, с которой сумма внутренних углов меньше двух прямых*“. В некоторых списках этот постулат предложен под именем „одиннадцатой аксиомы“.

В то время как другие аксиомы считались совершенно очевидными, очевидность пятого постулата оспаривалась. Его стремились доказать на основании других аксиом. На пути подобных попыток перевести пятый постулат в разряд теорем геометры встретили непреодолимые трудности. Пытались обойти постулат, заменяя его другим, почему-либо казавшимся более очевидным. На этом пути было сформулировано много положений, могущих заменить постулат Евклида.

Обычно при каком-либо ложном доказательстве постулата скрытым образом опирались на предложение, равносильное самому постулату. В главе I настоящей книги подробно изучается целый ряд таких предложений, принадлежащих разным геометрам. Следует с особым вниманием отнестись к этим предложениям, так как их роль крайне существенна при дальнейшем изложении геометрии Лобачевского, принятом в этой книге. Эти предложения интересны сами по себе, и изучение их может служить прекрасной темой для кружковой работы с учащимися. Некоторые простейшие пред-

ложения могут быть изучены и в классе, при условии тщательного разъяснения постановки вопроса.

Особое положение в истории попыток доказательства пятого постулата занимают исследования математика Саккери (1667—1733), изложенные им в сочинении: *„Евклид, очищенный от всех пятен; опыт установления самых первых начал всей геометрии“* (Милан, 1733). Саккери рассматривает четырёхугольник с прямыми углами при основании и равными боковыми сторонами. Два другие угла, между собой равные, могут быть прямыми, тупыми или острыми. Не предпрешая заранее, какой из этих трёх случаев имеет место, Саккери последовательно, после далеко идущих следствий, приводит к противоречию *„гипотезу тупого угла“*, а затем, как думал Саккери, и *„гипотезу острого угла“*. Остаётся, по мнению Саккери, справедливой лишь *„гипотеза прямого угла“*. Из гипотезы же прямого угла логически следует пятый постулат.

В главе I настоящего пособия излагаются, между прочим, и основные результаты, полученные Саккери. В частности, выясняется и ошибочность заключений Саккери.

Способ рассуждений от противного, которым пользуется Саккери, он характеризует следующими словами: *„Даже допуская предположительно ложность предположения, которое мы желали бы доказать, мы всё же можем прийти к выводу, что оно верно“*.

Последователем Саккери в попытках доказательства пятого постулата был Ламберт (1728—1777). В своей *„Теории параллельных линий“* Ламберт исходит из четырёхугольника с тремя прямыми углами. О четвёртом угле он делает гипотезы, аналогичные гипотезам Саккери. Как и его предшественник, Ламберт правильно сводит к противоречию *„гипотезу тупого угла“*. Относительно *„гипотезы острого угла“* Ламберт, не впадая в ошибку Саккери, после ещё более далеко идущих следствий, не мог прийти к какому-либо определённому выводу. Однако на работы Саккери и Ламберта было обращено внимание лишь после признания работ Лобачевского; до этого же они были почти неизвестны.

Широкой популярностью в начале прошлого века пользовались сочинения Лежандра (1752—1833). Исследования Лежандра по теории параллельных и её связи с суммой углов треугольника публиковались в его учебнике *„Элементы геометрии“*, начиная с 1794 года.

Лобачевский в своём рукописном труде 1823 г. *„Геометрия“* также занимается теоремами о сумме углов треугольника^[16]. Содержание этого труда изложено в I главе настоящего пособия. При жизни Лобачевского это его сочинение напечатано не было. Теоремы Лежандра-Саккери о сумме углов треугольника вполне могут быть отнесены к школьной геометрии.

Все более чем 2000-летние попытки доказательства постулата Евклида о параллельных оказались несостоятельными. Многие математики, среди них такие, как Лаплас, Лагранж и Гаусс, из русских математиков Остроградский, Буняковский и другие, занимались теорией параллельных, но отступили перед трудностями этой теории.

Так, например, Лагранж, начав свой доклад о теории параллельных линий в Парижской академии, прервал чтение доклада и со словами: „мне ещё нужно подумать“ покинул заседание.

Лобачевский созданием своей геометрии разрешил эту труднейшую проблему, и тем самым перед геометрией и всей математической наукой открылись новые пути [15], [16].

Создатель новой геометрии, наша слава и гордость, Николай Иванович Лобачевский родился 20 ноября ст. ст. 1792 г. *) в Нижнем Новгороде, ныне городе Горьком.

Отец Лобачевского — Иван Максимович — умер рано, и одна мать — Прасковья Александровна — заботилась о воспитании своих трёх сыновей. Прасковья Александровна привозит детей в Казань для определения их в гимназию. Сохранился протокол заседания совета Казанской гимназии от 5 ноября 1802 г. о приёме братьев Лобачевских на казённое содержание.

Кончив „ученической“ и „университетской“ курсы, Лобачевский становится преподавателем, а затем и профессором Казанского университета, с которым связана вся его жизнь. 14 июля 1817 года „Относительно членов Университета последовали следующие перемены. В звании профессоров утверждены по физико-математическому отделению Иван Симонов и Николай Лобачевский“. Профессор Лобачевский читает в университете начала чистой математики, высшей математики, механику, физику, астрономию и др.

6 февраля 1826 г. Лобачевский представил в физико-математическое отделение Казанского университета работу на французском языке: „Сжатое изложение начал геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных линиях“. Этот день считается датой рождения новой геометрии. 5 июля 1828 г. Лобачевский утверждается ректором Казанского университета и на этот пост он избирается каждое трёхлетие, до 1846 года. В 1829 г. появляется первое печатное изложение новой геометрии — „О началах геометрии“ Лобачевского в „Казанском вестнике“. С тех пор Лобачевский публикует большое количество работ по развитию своей геометрии, по математическому анализу и по высшей алгебре. Перед самой смертью, ослепший, Лобачевский публикует свою последнюю работу „Пангеометрия“. 12 февраля ст. ст. 1856 г. великий геометр скончался. Геометрические идеи Лобачевского при его жизни не были поняты и оценены.

Элементы геометрии Лобачевского излагаются в главах II, III и IV настоящей книги. Эти главы могут быть использованы в школе, наряду с теоремами Лежандра-Саккери, при кружковой работе. В главе IV излагается учение о площадях в геометрии Лобачевского. Сопоставление с учением о площадях в геометрии Евклида поможет лучше уяснить сущность теории измерения площадей. Гла-

*) Материалы для биографии Н. И. Лобачевского собрал и редактировал Л. Б. Модзалевский. Труды Комиссии по истории Академии наук СССР. Под общей редакцией академика С. И. Вавилова. Издательство АН СССР, 1948.

вы VI, VII и VIII книги относятся к элементам оснований геометрии, идее интерпретации геометрической системы и дальнейшему изложению геометрии Лобачевского, но уже на моделях. В главе VI освещается один из основных вопросов геометрии, вопрос о неопределимых понятиях и аксиомах. На двух простых примерах поясняется основная идея аксиоматического метода. Преподающий геометрию должен отчетливо уяснить основные положения аксиоматического метода. Идея этого метода, пояснённая лишь на примере аксиом первой группы, вполне доступна для наиболее сильных учащихся. При наличии достаточного времени для кружковой работы сущность аксиоматического метода можно довести до сознания почти всех учащихся. Благодарным материалом для теории геометрических построений служат интерпретации геометрии Лобачевского, особенно интерпретация Пуанкаре геометрии Лобачевского на плоскости. Здесь все построения можно вести в терминах евклидовой геометрии, разъяснить на образах этой интерпретации значение и смысл основных понятий и основных отношений между ними, а затем сразу перейти к содержанию геометрии Лобачевского, пользуясь моделью. Но прежде всего, конечно, сам учитель должен безукоризненно овладеть предметом.

§ 1. Обзор основных теорем до введения параллельных.

Предложения, относящиеся к разделу „до теории параллельных“, в обычных учебниках геометрии идут в следующем плане: после разъяснения того, что такое геометрическая фигура, линия, точка, плоскость, отрезок, луч, окружность, дуга окружности, хорда и т. д., рассматривается сложение отрезков и дуг. Затем, в главе о прямой линии, вводится понятие угла, рассматривается сложение и вычитание углов, вводится понятие о биссектрисе, смежных углах, вертикальных углах. Доказывается важная теорема, что *из всякой точки, лежащей вне прямой, можно опустить на прямую перпендикуляр и притом только один*, что *вертикальные углы равны между собой*. Вводится понятие ломаной, многоугольника, треугольника, выпуклого многоугольника. Изучаются основы симметрии относительно оси, свойства равнобедренного треугольника и признаки равенства треугольников. Доказывается имеющая для наших целей особое значение теорема о том, что *всякий внешний угол треугольника более каждого внутреннего с ним не смежного*. Нужно обратить особое внимание на то, что эта теорема доказывается без теории параллельных.

Далее следует довольно подробное изучение соотношений между сторонами треугольника: *во всяком треугольнике против равных сторон лежат равные углы; против большей стороны лежит больший угол*, и обратные теоремы.

Доказывается утверждение, что длина отрезка прямой, соединяющего две какие-нибудь точки, меньше всякой ломаной, соединяющей эти же точки. Сюда же входит теорема о двух треугольниках с двумя неравными углами между равными соответственно сторонами.

Именно: в том треугольнике третья сторона больше, в котором указанный угол больше, и обратная теорема.

Далее идут предложения о сравнении длины перпендикуляра и наклонных и вводятся признаки равенства прямоугольных треугольников, вводится понятие геометрического места и разбираются простейшие из них: перпендикуляр к отрезку в его середине как геометрическое место точек, равноудалённых от концов этого отрезка; биссектриса как геометрическое место точек, равноудалённых от сторон угла. Заканчивается отдел „до параллельных линий“ основными задачами на построение: деление отрезка и угла пополам, опускание перпендикуляра и некоторые другие задачи. Вот весь тот материал, который обычно помещается в учебнике до теории параллельных линий.

На этот материал мы и будем опираться при изложении начал геометрии Лобачевского, исследования которого лежат в основе геометрии нового времени. Предмет „Оснований геометрии“ стал возможен только после работ Лобачевского.

Заметим, что глубокое различие геометрии Евклида и геометрии Лобачевского состоит в том, что „теория параллелей“ у них *разная*.

Чтобы дать представление о богатстве геометрических фактов, установление которых возможно без использования, прямого или косвенного, аксиомы о параллельных линиях, рассмотрим сочинение Лобачевского „Геометрия“. Это сочинение не было напечатано при жизни великого геометра. Рукопись, написанная рукой Лобачевского и датированная 1823 г., найдена в архивах в 1898 г., а напечатана в 1909 г.^[4] Рукопись является собственно конспектом лекций, читанных Лобачевским начинающим студентам, знакомым с геометрией, и в ней нет того, что мы именуем геометрией Лобачевского. Это своё великое открытие Лобачевский сообщил в 1826 г. и опубликовал в 1829 г. Тем более замечательно, что в рассматриваемом сочинении 1823 г. Лобачевский собрал материал, независимый от теории параллелей, а аксиому параллелей ввёл лишь в шестом разделе „Геометрии“.

Лобачевский в этом сочинении делит геометрию „... на три части: о измерении линий (лонгиметрия), о измерении поверхностей (планиметрия) и о измерении тел (штереометрия)“.

В первом разделе — „Измерение линий“ — говорится о прямой, об окружности и дугах и указывается на предельный переход от длины вписанной ломаной при нахождении длины кривой.

Во втором разделе — „Об углах“ — Лобачевский рассматривает линейный угол, угол между плоскостями, угол прямой с плоскостью, говорит о сфере, классифицирует треугольники и многоугольники и упоминает о многогранниках.

В третьем разделе — „О перпендикулах“ — изучаются не только перпендикулярные прямые, но и перпендикулярные плоскости, а также прямые, перпендикулярные к плоскости.

Четвёртый раздел — „Измерение телесных углов. О правильных многоугольниках и телах“ — заканчивается установлением существова-

ния и классификацией правильных многогранников. Лобачевский приводит здесь доказательства очень своеобразные, часто сложнее общепринятых, что, без сомнения, связано со стремлением обойтись без теории параллелей.

В пятом разделе — „Об одинаковости треугольников“ — исследуются случаи равенства треугольников.

Шестой раздел — „О измерении прямоугольников“ — начинается словами: „Измерение плоскостей *) основывается на том, что две линии сходятся, когда они стоят на третьей по одну сторону и когда одна — перпендикул, а другая наклонена под острым углом, образующим к перпендикулу...“

...Строгого доказательства сей истины до сих пор не могли сыскать. Какие были даны, могут назваться только пояснениями, но не заслуживают быть почтены в полном смысле Математическими доказательствами“.

В этой книге Лобачевский дал богатый материал, независимый от теории параллельных. Изложение и порядок известного материала были настолько необычны, что рукопись получила резко отрицательный отзыв академика Фусса и напечатана не была. Только теперь мы видим, что это, по существу, было гениальной подготовкой к открытию неевклидовой геометрии, получившей имя Лобачевского.

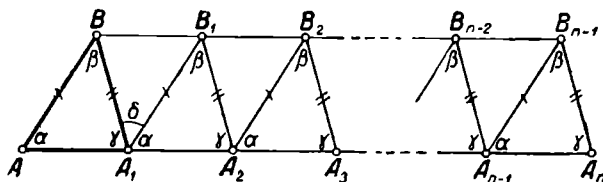
Дальнейшие разделы книги „Геометрия“ используют теорию параллельных.

Нам потребуются ещё некоторые предложения, доказательство которых также возможно провести без теории параллельных.

§ 2. Теоремы Лежандра-Саккери о сумме углов треугольника.

Первая теорема Лежандра-Саккери. *Сумма углов любого треугольника не может быть больше $2d$.*

Доказательство. Возьмём треугольник ABA_1 и продолжим его сторону AA_1 (черт. 1). Отложим на полученном продолжении



Черт. 1.

отрезок AA_1 n раз так, что $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_{n-1}A_n$, и построим на каждом из этих отрезков по треугольнику, равному треугольнику ABA_1 , и по ту же сторону от прямой AA_n , что и данный. Эти треугольники обозначим $A_1B_1A_2, A_2B_2A_3, \dots, A_{n-1}B_{n-1}A_n$.

*) Т. е. площадей плоских фигур.

Соединим вершины $B, B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$. Полученные отрезки $BB_1; B_1B_2; \dots; B_{n-2}B_{n-1}$ равны между собою, так как в треугольниках A_1BB_1 и $A_2B_1B_2$ сторона $A_1B = A_2B_1$ и $A_1B_1 = A_2B_2$ по построению и углы, заключённые между ними, также равны между собою. Именно: $\angle B_1A_1B = 2d - \alpha - \gamma$ и $\angle B_2A_2B_1 = 2d - \alpha - \gamma$. Следовательно, треугольник A_1BB_1 равен треугольнику $A_2B_1B_2$ по одному из признаков равенства треугольников, а так как в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны, то $BB_1 = B_1B_2$. Точно так же устанавливается, что любой отрезок $B_{i-1}B_i$ номера i равен отрезку B_1B . Таким образом, мы получили, что $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = \dots = B_{n-2}B_{n-1}$ *). Равенство этих последних отрезков установлено совершенно независимо от того, какой бы могла оказаться сумма углов треугольника ABA_1 .

Докажем, что сумма углов α, β, γ треугольника ABA_1 не может быть больше двух прямых. Доказательство поведём от противного. Пусть $\alpha + \beta + \gamma > 2d$ (это и приведёт к противоречию). Но $\alpha + \delta + \gamma = 2d$, откуда следует $\beta > \delta$. Таким образом, в треугольниках ABA_1 и BA_1B_1 имеется по две соответственно равные стороны $AB = A_1B_1$ и $BA_1 = BA_1$, ибо последняя сторона общая, углы β и δ между этими сторонами неравны, а против большего угла в таких треугольниках лежит большая сторона. Следовательно, $AA_1 > BB_1$. Далее, в силу того, что отрезок прямой между двумя точками короче ломаной, соединяющей те же точки, имеем:

$$AA_n < AB + BB_1 + B_1B_2 + \dots + B_{n-2}B_{n-1} + B_{n-1}A_n,$$

или

$$n \cdot AA_1 < AB + (n-1)BB_1 + BA_1 \quad (\text{так как } B_{n-1}A_n = BA_1).$$

Из этого неравенства выводим:

$$n(AA_1 - BB_1) < AB + BA_1 - BB_1$$

и так как $AA_1 > BB_1$, и, кроме того, $AB + BA_1 > AA_1 > BB_1$ (сумма двух сторон треугольника больше третьей стороны), то, положив: $AA_1 - BB_1 = a$ и отрезок $AB + BA_1 - BB_1 = b$, полученное неравенство запишем в виде: $n \cdot a < b$. Но число n (целое положительное) мы можем взять как угодно большим и, следовательно, повторив отрезок a слагаемым n раз, превзойдём данный отрезок b . Между тем неравенство $n \cdot a < b$, выведенное при любом n , говорит, что сколько ни повторять отрезок a слагаемым, никогда нельзя получить отрезок $n \cdot a$, превосходящий или даже равный отрезку b . Полученное противоречие показывает, что наше предположение о том, что сумма углов треугольника больше двух прямых, неверно. Теорема доказана.

Примечание. Предложение о том, что как бы ни был мал отрезок a , всегда его можно повторить слагаемым подходящее число n раз, так что сумма na будет отрезком, большим другого наперёд

*) Следует остерегаться считать $BB_1B_2 \dots B_{n-1}$ прямолинейным отрезком, см. § 10, 17.

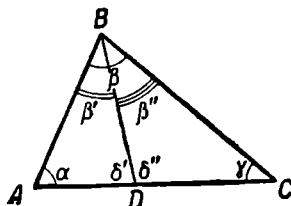
заданного отрезка b (т. е. $na > b$), носит название *аксиомы Архимеда-Эвдокса*.

Таким образом, предложение о том, что сумма углов треугольника больше двух прямых, ведёт к противоречию с аксиомой Архимеда-Эвдокса.

Вторая теорема Лежандра-Саккери. Если в данном треугольнике сумма углов равна $2d$, то и во всяком треугольнике сумма углов равна $2d$.

Доказательство этой теоремы расчленим на четыре части.

1°. Если в треугольнике ABC , в котором сумма углов равна $2d$, любую из вершин соединить с какой-либо точкой D основания, лежащей между двумя другими вершинами, то $\triangle ABC$ разобьётся на два треугольника ABD и BDC с суммой углов каждого равной $2d$.



Черт. 2.

Доказательство. $\alpha + \beta + \gamma = 2d$ в силу условия теоремы. Обозначим сумму углов треугольника ABD через x , а треугольника BDC через y (черт. 2); имеем:

$$\beta' + \beta'' = \beta, \quad \delta' + \delta'' = 2d;$$

$$\alpha + \beta' + \delta' = x, \quad \delta'' + \beta'' + \gamma = y,$$

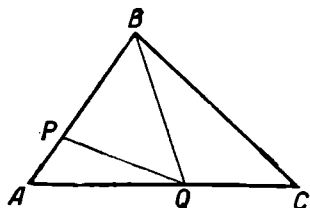
откуда:

$$x + y = \alpha + \beta' + \delta' + \delta'' + \beta'' + \gamma =$$

$$= [\alpha + (\beta' + \beta'') + \gamma] + (\delta' + \delta'') = 2d + 2d = 4d.$$

x как сумма углов треугольника по первой теореме Лежандра-Саккери не может быть больше $2d$, но x не может быть меньше $2d$, так как тогда y , равный сумме углов треугольника BDC , был бы больше двух прямых, а этого быть не может в силу той же теоремы. Следовательно, $x = y = 2d$, ч. т. д.

В частности, если из вершины большего угла треугольника ABC опустить высоту, то она пересечёт основание между двумя другими вершинами, и треугольник ABC разобьётся на два прямоугольных треугольника, в каждом из которых сумма углов равна $2d$.



Черт. 3.

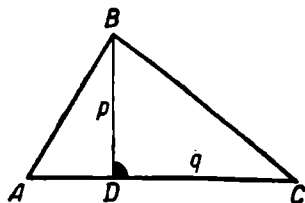
2°. Если в треугольнике ABC , в котором сумма углов равна $2d$, взять на двух сторонах по точке P и Q между вершинами и соединить их между собой, то от треугольника ABC отсечётся новый треугольник APQ , сумма углов которого равна $2d$.

Доказательство. Соединим точку B с Q (черт. 3). Так как сумма углов треугольника ABC равна $2d$, то по п. 1° сумма углов треугольника ABQ также равна $2d$. Но $\triangle ABQ$ отрезком PQ разбит на два треугольника APQ и PQB , в каждом из которых сумма углов

равна $2d$ (так как разбиение удовлетворяет теореме п. 1°). Следовательно, треугольник APQ имеет сумму углов, равную $2d$, ч. т. д.

3°. Во всяком прямоугольном треугольнике сумма углов равна $2d$, если в каком-либо одном треугольнике сумма углов равна $2d$.

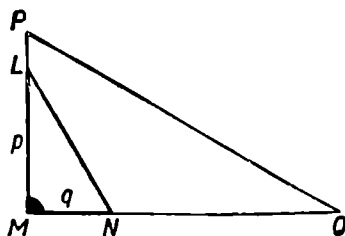
Доказательство. Пусть в треугольнике ABC (черт. 4) сумма углов равна $2d$. Требуется доказать, что в любом прямоугольном треугольнике LMN (черт. 5) сумма углов также равна $2d$. Из вершины большего угла B треугольника ABC опустим перпендикуляр на основание AC . В полученном прямоугольном треугольнике BDC , по предыдущему, сумма углов равна $2d$. Обозначим $BD = p$, $DC = q$ и подберём целые положительные числа m и n так, чтобы было: $pm > ML$ и $nq > MN$. Такие числа m и n подобрать можно на осно-



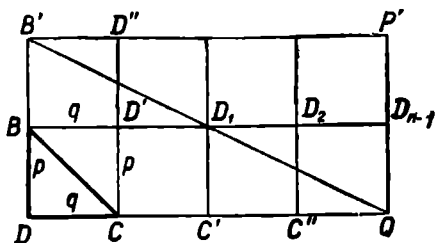
Черт. 4.

вании аксиомы Архимеда-Эвдокса. Построим, далее, прямоугольный треугольник MQP , катеты которого $MP = mp$, а $MQ = nq$ (черт. 5), и докажем, что сумма углов треугольника MPQ равна $2d$.

Для доказательства к треугольнику BDC построим равный ему треугольник $CD'B$ так, чтобы их гипотенузы BC и $C'B$ совпали, а вершины D и D' находились по разные стороны от BC (черт. 6). Так как сумма углов треугольника BDC равна $2d$, то полученный четырёхугольник $BDCD'$ будет иметь четыре прямых угла. Повторяя отрезок BD , равный p , m раз, построим отрезок DB' , равный mp , и на каждой его части, равной p , строим прямоугольник, конгруэнтный прямоугольнику $CDBD'$. Легко видеть, что вершины C , D' , D'' лежат на одной прямой. Точно так же поступаем со сторо-



Черт. 5.



Черт. 6.

ной DC , равной q , повторяя её n раз и строя прямоугольники, конгруэнтные $CDBD'$. Точки B , D' , D_1 , D_2 , ..., D_{n-1} будут лежать на одной прямой. В этом случае мы построим четырёхугольник $DQD_{n-1}B$ с четырьмя прямыми углами, стороны которого суть: $BD = p$ и $DQ = nq$. Строим далее прямоугольник $BB'P'D_{n-1}$, перенесём основание DQ в положение BD_{n-1} и т. д., получим

четырёхугольник $B'DQP'$ с четырьмя прямыми углами, стороны которого $DB' = mp$ и $DQ = nq$ (на чертеже $p = 2$; $q = 4$). Разбивая этот четырёхугольник диагональю $B'Q$ на два прямоугольных треугольника,

видим, что сумма углов каждого из треугольников QDB' и $QB'P'$ равна $2d$, так как, например, $\triangle QDB'$ не может иметь сумму меньшей $2d$, ибо тогда $\triangle QB'P'$ имел бы сумму углов, большую $2d$, а это невозможно по первой теореме Лежандра-Саккери. Таким образом, оказалось, что треугольник QDB' , конгруэнтный треугольнику QMP , имеет сумму углов $2d$, а следовательно, и треугольник LMN также обладает суммой углов $2d$ на основании п. 2° настоящего доказательства. Сформулируем ещё раз установленный в этом пункте результат. *Если в одном из треугольников сумма углов равна $2d$, то в любом прямоугольном треугольнике сумма углов также равна $2d$.*

4°. Теперь мы можем доказать вторую теорему Лежандра-Саккери во всей её общности.

Пусть в треугольнике ABC (черт. 7) сумма углов равна $2d$. Требуется доказать, что тогда она и в любом треугольнике PQR равна $2d$. Из вершины P большего угла треугольника PQR опустим перпендикуляр PS на основание.

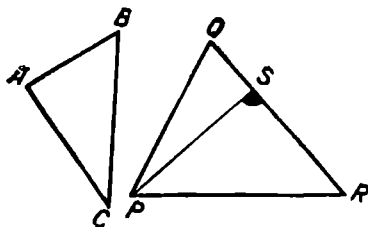
Полученные прямоугольные треугольники PSQ и PSR имеют (согласно п. 3°) каждый сумму углов $2d$.

Если теперь сложить углы каждого из прямоугольных треугольников и отнять $2d$ (углы при точке S), то получим сумму углов треугольника PQR , равную $2d$, ч. т. д.

Доказанные теоремы Лежандра-Саккери являются фундаментальными в учении о сумме углов треугольника. Факты, которые ими установлены, получены без помощи теории параллельных линий. Мы теперь твёрдо знаем, что сумма углов треугольника не может быть больше $2d$, и хотя ещё не можем без помощи теории параллельных линий найти, чему именно равна сумма углов любого треугольника, но вторая теорема Лежандра-Саккери нам говорит, что если бы сумма углов одного треугольника оказалась равной $2d$, то таковой же она была бы и в любом треугольнике. Если бы, далее, сумма углов в каком-либо треугольнике оказалась меньше $2d$, то она была бы меньше $2d$ и во всяком другом. Последний факт непосредственно вытекает из второй теоремы Лежандра-Саккери и часто именуется третьей теоремой тех же учёных.

Третья теорема Лежандра-Саккери. *Если сумма углов в каком-либо одном треугольнике меньше двух прямых, то она меньше двух прямых в любом треугольнике.*

Теорема легко доказывается от противного. Пусть в треугольнике ABC (черт. 7) сумма углов меньше $2d$. Допустим, что в каком-либо треугольнике PQR сумма углов оказалась равной $2d$. Отсюда следовало бы (по второй теореме Лежандра-Саккери), что и в треугольнике ABC сумма углов была бы равна $2d$. Но этого нет, и теорема доказана, так как больше двух прямых сумма углов треугольника быть не может по первой теореме Лежандра-Саккери.

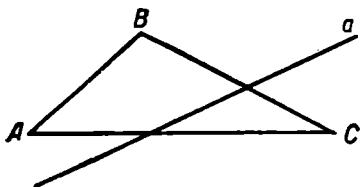


Черт. 7.

§ 3. Постулат Паша.

В учебниках элементарной геометрии обычно об этом постулате не упоминают, хотя и пользуются им неявно, как предложением чисто интуитивным. Содержание его состоит в следующем:

Если дан треугольник ABC и прямая a , не проходящая через его вершины и пересекающая одну из сторон треугольника между двумя вершинами, то прямая a непременно пересечёт одну из двух других сторон треугольника также между вершинами (черт. 8). Этой необходимой аксиомой мы будем часто пользоваться. На важность её указал Паш в конце XIX столетия. Слово *постулат* для нас будет означать то же, что и *аксиома*.



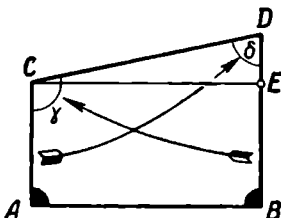
Черт. 8.

§ 4. Четырёхугольник с двумя прямыми углами и его свойства.

Для дальнейших исследований нам понадобятся свойства четырёхугольников специального вида с двумя прямыми углами. Такие четырёхугольники часто называют *двупрямоугольными*. Таков четырёхугольник $ABDC$, где углы A и B — прямые (черт. 9). Установим следующие свойства таких четырёхугольников.

1°. Если в двупрямоугольном четырёхугольнике $BD > AC$, то $\gamma > \delta$. Мы часто будем говорить, имея в виду эту теорему, что «против большей стороны лежит больший угол».

Доказательство. На стороне BD возьмём точку E так, чтобы $BE = AC$. Точка E упадёт между D и B . Соединив C с E , получим четырёхугольник $ABEC$, у которого углы A и B прямые, а боковые стороны AC и BE равны. Такой четырёхугольник ($ABEC$) называется *четырёхугольником Саккери*. Как увидим далее, в четырёхугольнике Саккери углы при верхнем основании равны. Опираясь на это предположение, найдём: $\gamma > \angle ACE = \angle BEC > \delta$ (угол ACE меньше угла γ потому, что CE идёт внутри угла γ ; угол BEC больше δ по теореме о внешнем угле для треугольника CED).



Черт. 9.

Четырёхугольник Саккери. При доказательстве предыдущей теоремы мы опирались на одно свойство четырёхугольника Саккери. Сейчас мы это свойство докажем, выведя попутно ещё несколько важных свойств четырёхугольника Саккери.

Пусть имеем четырёхугольник $ABDC$ Саккери, т. е. такой четырёхугольник, у которого углы A и B при основании прямые, а боковые стороны AC и BD равны. Докажем, что углы C и D при верхнем основании равны (черт. 10).

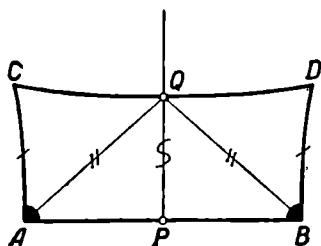
Доказательство. Разделим AB пополам точкой P и восставим в точке P перпендикуляр к AB . Этот перпендикуляр пересечёт сторону CD между точками C и D . Как ни очевиден этот последний факт, его необходимо доказать. Это легко сделать, пользуясь постулатом Паша. Проведём диагональ AD и применим постулат Паша к треугольнику ABD и перпендикуляру p . Прямая p пересекает сторону AB между A и B в точке P . Следовательно, она должна пересечь либо сторону AD , либо сторону BD .

Но BD она пересечь не может, так как два перпендикуляра к одной прямой не пересекаются. Таким образом, p не пересекает BD и, конечно, не проходит через вершину D . Следовательно, согласно постулату Паша, p пересекает AD в точке E между A и D . Точно так же p , не пересекая сторону AC треугольника ACD , пересечёт сторону CD в точке Q между C и D . Соединим Q с A и B ; треугольник APQ конгруентен треугольнику BPQ , так как они имеют по два равных катета (черт. 11).

Следовательно, $AQ = BQ$, откуда следует, что треугольники CAQ и DBQ конгруентны по двум соответственно равным сторонам и углу между ними, и, следовательно, угол C равен углу D , т. е. в четырёхугольнике Саккери углы при верхнем основании равны, ч. т. д.

Попутно мы установили следующее:

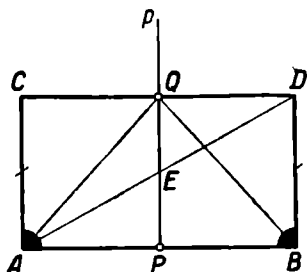
2°. Перпендикуляр PQ пересекает и верхнее основание под прямым углом, а точка Q пересечения делит верхнее основание пополам.



Черт. 11.

Примечание. При выводе свойств четырёхугольника Саккери мы опирались на тот факт, что два перпендикуляра к одной и той же прямой не пересекаются. Этот факт легко установить, пользуясь теоремой о внешнем угле треугольника, так как если бы перпендикуляры пересекались, то внешний угол треугольника был бы равен внутреннему с ним не смежному, что невозможно. Таким образом, не пользуясь аксиомой о параллелях, мы установили, что углы при верхнем основании четырёхугольника Саккери равны. Однако будут ли они оба прямыми или оба острые, мы без помощи аксиомы о параллелях установить не можем; это нам станет ясно впоследствии. Что эти углы не могут быть тупыми, можно доказать без теории параллелей. В самом деле, если углы C и D тупые, то в одном из треугольников ACD или BAD сумма углов будет больше $2d$, так как сумма всех углов этих треугольников больше $4d$. Но в треугольнике сумма углов не может быть больше $2d$, следовательно, равные углы C и D не могут быть тупыми.

На этом мы заканчиваем обзор нужных нам предложений, которые устанавливаются без постулата о параллельных линиях.

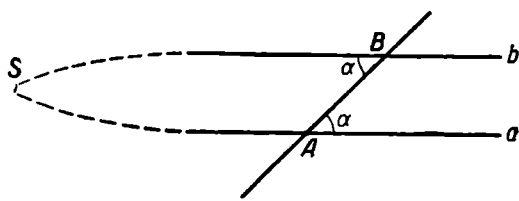


Черт. 10.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ПРЕДЛОЖЕНИЯ, ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПОСТУЛАТУ ЕВКЛИДА

После упомянутых во введении предложений, которые мы дополнили теоремами Лежандра-Саккери и свойствами двупрямоугольных четырёхугольников, в учебниках геометрии вводится глава, посвящённая теории параллельных линий. Обычно даётся определение *параллельных линий как таких прямых, которые, находясь в одной плоскости, не пересекаются, т. е. не имеют ни одной общей*



Черт. 12.

точки. Что такие прямые существуют, доказать очень просто и притом *независимо от аксиомы о параллелях*. В самом деле, если прямую a пересечь произвольной прямой AB , проходящей через точку A (черт. 12), то, проведя через точку B прямой AB прямую b так, чтобы накрестлежащие углы были равны, мы и получим такие прямые, которые не пересекаются, т. е. параллельные. В самом деле, если бы прямые a и b пересекались в точке S , то в треугольнике ABS внешний угол при вершине A был бы равен внутреннему углу B , с ним не смежному, что невозможно. Следовательно, a и b пересекаться не могут. Точно так же мы знаем, что два перпендикуляра к одной и той же прямой не могут иметь общей точки. Этот последний факт является частным случаем предыдущего, когда накрестлежащие углы прямые.

Таким образом, установлено, что через каждую точку A , вне прямой a , в данной плоскости можно провести *по крайней мере одну* такую прямую b , которая не пересечёт прямую a . Причём этот последний факт устанавливается без введения какой-либо новой аксиомы. Возникает вопрос: проходит ли через точку A *одна* такая прямая b , которая не встречает прямую a , или таких прямых существует *больше одной*? Решить этот вопрос без введения новой аксиомы, как мы увидим из дальнейшего, нельзя. Мы *вынуждены* ввести новую аксиому и здесь мы стоим перед двумя возможностями: 1) такую прямую можно

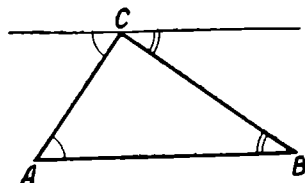
провести *только одну*; 2) таких прямых можно провести *больше одной*. Евклид выбрал первую возможность.

Аксиома Евклида о параллелях. *Через точку A вне данной прямой a , в плоскости, определяемой точкой A и прямой a , нельзя провести двух прямых, параллельных a *).*

Отсюда вытекает, что можно провести *только одну* прямую, параллельную a , так как мы знаем, что по крайней мере одна такая прямая существует.

После введения аксиомы о параллелях в геометрии изучаются свойства параллелей, например, такие: если прямая a параллельна прямой b , а b параллельна прямой c , то прямые a и c параллельны, и т. п.

Далее изучаются углы, образованные двумя параллельными прямыми и секущей, и, наконец, как следствие, получают, что *сумма углов треугольника равна двум прямым*. Доказывают этот последний факт обычно так: через вершину C треугольника ABC проводят прямую, параллельную основанию AB (черт. 13), и, пользуясь равенством внутренних накрестлежащих углов, легко устанавливают, что сумма углов A, B, C равна $2d$. Нужно хорошо понять, что это предложение о сумме углов треугольника *основано на аксиоме о параллельных*. Это станет более ясным, если последнее предложение сформулировать так: *если через точку A , вне данной прямой a , нельзя провести двух параллелей, то сумма углов треугольника равна двум прямым*. Оказывается, что справедлива и обратная теорема.



Черт. 13.

§ 5. Сумма углов треугольника равна $2d$ — предложение, эквивалентное постулату Евклида.

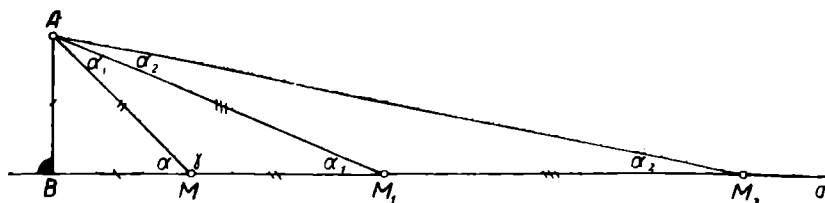
Можно доказать аксиому о параллелях, если только принять без доказательства, что сумма углов какого-либо треугольника равна двум прямым.

Для доказательства этого предложения рассмотрим предварительно одну лемму, которую можно было отнести в список предложений, находящихся во введении, так как её доказательство не опирается на аксиому о параллелях.

Лемма. *Если даны прямая a и прямая AM (где A — точка вне a , а M — точка на прямой a), то, оставляя точку A неподвижной, можно точку M передвинуть так далеко по прямой a , что угол α (черт. 14) будет меньше наперёд заданного угла $\varepsilon > 0$; или, что то же, при удалении точки M неограниченно, например, вправо, угол $\alpha \rightarrow 0$.*

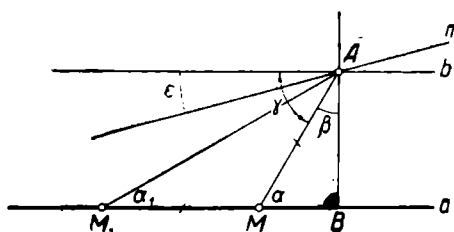
*) Эта аксиома (или постулат) Евклидом сформулирована иначе, но мы будем именовать это утверждение так, как указано в тексте.

Доказательство. Из A опустим перпендикуляр AB на прямую a и отложим $MM_1 = AM$. Рассмотрим треугольник AMM_1 . Сумма его углов не может быть больше двух прямых, т. е. $2\alpha_1 + \gamma \leq 2d$. При этом знак равенства будет в том случае, если сумма углов треугольника равна $2d$, а знак неравенства, — если сумма углов меньше $2d$. А так как мы желаем обойтись без теории параллельных, то выбрать один какой-либо из этих знаков мы не можем. Итак, $2\alpha_1 + \gamma \leq 2d$.



Черт. 14.

Но $\alpha + \gamma = 2d$; откуда вытекает: $2\alpha_1 \leq \alpha$, или $\alpha_1 \leq \frac{\alpha}{2}$. Откладывая далее $M_1M_2 = AM_1$, найдём аналогично, что $\alpha_2 \leq \frac{\alpha_1}{2} \leq \frac{\alpha}{2^2}$. Если отложить $M_2M_3 = AM_2$, то точно так же будет $\alpha_3 \leq \frac{\alpha_2}{2} \leq \frac{\alpha}{2^3}$, и т. д. Наконец, после n -го шага, откладывая $M_{n-1}M_n = AM_{n-1}$, получим $\alpha_n \leq \frac{\alpha}{2^n}$, и при достаточно большом n угла α_n может быть сделан меньше наперёд заданного угла $\epsilon > 0$. Другими словами, при $n \rightarrow \infty$ $\alpha_n \rightarrow 0$, а это мы и хотели доказать. Ещё раз отметим, что при доказательстве мы не пользовались даже понятием о параллелях, а опирались только на материал, изложенный во введении. Мы использовали предложе-



Черт. 15.

ния: 1) сумма углов треугольника не может быть больше $2d$; 2) углы равнобедренного треугольника при основании равны; 3) внешний угол треугольника больше каждого внутреннего с ним не смежного; 4) отрезок прямой может быть продолжен неограниченно.

Теорема. Если сумма углов какого-либо одного треугольника равна двум прямым, то через точку A вне данной прямой a к a нельзя провести двух параллелей.

Доказательство. Опустим перпендикуляр из A на a (черт. 15) и проведём b перпендикулярно AB . Прямые a и b не пересекаются как два перпендикуляра к одной и той же прямой AB . Покажем, что всякая прямая m , проходящая через A и отличная от прямой b ,

пересечёт прямую a , какой бы угол ϵ она ни составляла с b . На прямой a возьмём точку M с той стороны от AB , с которой прямая m входит в полосу между a и b , и соединим A с M . Имеем: $\alpha + \beta = d$, так как (по второй теореме Лежандра-Саккери) сумма углов треугольника ABM равна $2d$. Но $\gamma + \beta = d$, ибо угол $bAB = d$, поэтому $\alpha = \gamma$. При достаточном удалении точки M от точки B (на чертеже — влево) угол α , а значит и равный ему угол γ , будет меньше любого наперёд заданного угла, а следовательно, и меньше ϵ , и прямая Am , войдя внутрь треугольника ABM_n через его вершину A , пересечёт основание BM_n треугольника, т. е. прямую a , ч. т. д.

Примечание. Что прямая m , входящая внутрь треугольника через его вершину, непременно пересечёт основание треугольника, можно установить при помощи постулата Паша. Ограничимся этим замечанием, не проводя самого доказательства.

Обратим внимание ещё раз на то, что мы доказали. Если справедлива аксиома Евклида о параллельных, то сумма углов треугольника равна $2d$, и обратно: если принять за аксиому, что сумма углов какого-либо треугольника равна $2d$, то можно доказать, что через точку вне данной прямой нельзя провести к этой прямой двух параллелей. Это положение выражают словами: *предложение о том, что сумма углов одного треугольника равна $2d$, и аксиома параллелей — эквивалентны*. Всё равно, какой из этих фактов принять за аксиому, т. е. без доказательства. Можно было бы излагать геометрию так: весь материал до аксиомы о параллелях оставить неприкосновенным, а вместо аксиомы параллелей формулировать такую: *сумма углов по крайней мере в одном треугольнике равна $2d$* . Отсюда, как мы видели, будет вытекать теорема, ранее сформулированная как аксиома о параллелях. В дальнейшем построение геометрии идёт обычным путём.

Предложения, которые могут заменить аксиому о параллельных без разрушения всей совокупности фактов геометрии *), будем называть *предложениями, эквивалентными постулату Евклида*. Мы видим, что предложение: *сумма углов треугольника равна $2d$ — эквивалентно постулату Евклида*. Если из геометрии выкинуть аксиому Евклида о параллелях, то вместе с ней придётся отбросить и предложение о том, что сумма углов треугольника равна $2d$.

§ 6. Сумма углов в каждом треугольнике одна и та же — предложение, эквивалентное постулату Евклида.

Аксиому о параллелях Евклида может заменить такое предложение: *во всех треугольниках сумма углов одна и та же*. Если принять этот факт за аксиому, то отсюда будет вытекать постулат

*) Имеются в виду геометрические факты, изложенные в евклидовых „Началах“.

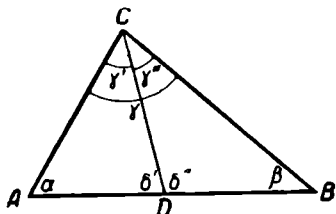
Евклида как теорема. Докажем это. Обозначим сумму углов треугольника через x , тогда (черт. 16):

1. $\alpha + \beta + \gamma = x$,
2. $\alpha + \gamma' + \delta' = x$,
3. $\beta + \gamma'' + \delta'' = x$,
4. $\delta' + \delta'' = 2d$.

Складывая равенства 2 и 3, получим:

$$\alpha + \gamma' + \delta' + \beta + \gamma'' + \delta'' = 2x, \text{ или} \\ x + 2d = 2x; \quad x = 2d.$$

Таким образом, в треугольнике ABC сумма углов равна двум прямым, а отсюда по предыдущему вытекает постулат Евклида. Но так как, обратно, из постулата следует, что сумма углов треугольника равна $2d$, то *предложение о постоянстве суммы углов во всех треугольниках эквивалентно постулату Евклида.*



Черт. 16.

Примечание. Можно было бы не требовать одной и той же суммы во всех треугольниках. Достаточно предположить, что какой-либо треугольник ABC можно разбить прямой CD (черт. 16) на два таких треугольника ACD и DCB , сумма углов которых та же, что и в треугольнике ABC .

Уже отсюда, как мы видим, следует, что в этом треугольнике сумма углов равна $2d$, а следовательно (по второй теореме Лежандра-Саккери), она будет равна двум прямым во всяком треугольнике. А отсюда, как это сделано в § 5, легко вывести постулат Евклида. Подобно предыдущему можно аксиому о параллелях заменить следующей: *сумма углов треугольника одна и та же для всех треугольников.* А предложение, что через точку вне прямой нельзя к этой прямой провести двух параллелей, можно доказать как теорему, и построение системы геометрии в дальнейшем пойдёт обычным путём.

Многовековые попытки геометров доказать постулат Евклида выявили множество предложений, эквивалентных постулату Евклида. Каждое из них может заменить аксиому о параллелях, а сама аксиома займёт тогда место теоремы. Сам Евклид применил свой постулат, только начиная с доказательства 29-го предложения своих „Начал“. Первые 28 теорем, составляющих приблизительно тот материал, который мы изложили во введении, он доказал, не пользуясь теорией параллельных. Многим геометрам казалось это странным, да и сама аксиома о параллелях им представлялась недостаточно очевидной. Возникли попытки перевести эту аксиому в разряд теорем, т. е. доказать.

Некоторые математики, доказывая предложение о параллелях, молчаливо, нигде этого явно не оговаривая, считали, что сумма углов всякого треугольника одна и та же, а после этого легко „доказывали“ постулат. Иногда одним из молчаливо допускаемых авторами предложений (эквивалентных евклидову постулату) служило какое-либо глубоко скрытое предложение, которое не мог заметить ни сам автор доказательства, ни многие из его критиков. Одним из таких глубоко скрытых предложений, не заметив этого сам, воспользовался Лежандр. Именно он „доказал“, что сумма углов треугольника не может быть меньше $2d$. Если бы это „доказательство“ не содержало ошибки, то отсюда бы следовало, что сумма углов треугольника равнялась $2d$, так как больше $2d$ она, по первой теореме того же Лежандра, быть не может. Меньше $2d$ она также быть не может, как предполагал доказанным Лежандр, а отсюда уже непосредственно вытекало бы доказательство постулата Евклида. Впоследствии сам же Лежандр нашёл ошибку в этом своём „доказательстве“. Изложим это ошибочное доказательство Лежандра.

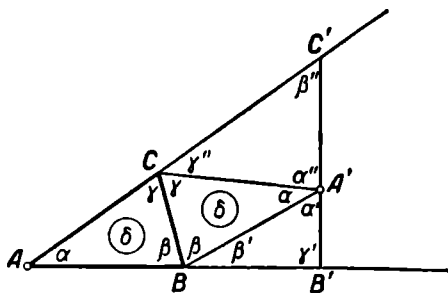
§ 7. Ошибочное доказательство Лежандра теоремы: „Сумма углов треугольника не может быть меньше $2d$ “.

Доказательство поведём от противного. Предположим, что сумма углов треугольника ABC (черт. 17) меньше двух прямых, т. е. $\alpha + \beta + \gamma = 2d - \delta$, где $\delta > 0$. Построим точку A' , симметричную A относительно BC (взяв $\triangle ABC$ остроугольным, найдём, что A' лежит внутри угла BAC ; этого можно достигнуть и для любого треугольника ABC , обозначив через A его наибольший угол). Треугольник $A'BC$, как симметричный треугольнику ABC , равен ему, следовательно, он имеет те же самые углы и тот же дефект δ (δ — разность между $2d$ и суммой углов треугольника). Продолжим стороны AB и AC (черт. 17) и через точку A' проведём секущую, пересекающую стороны угла в точках B' и C' . Покажем, что дефект δ_1 треугольника $AB'C'$ превосходит удвоенный дефект треугольника ABC , т. е. имеет место неравенство $\delta_1 > 2\delta$.

Обозначим углы треугольников $BB'A'$ и $CC'A'$, как указано на чертеже. Тогда их дефекты будут соответственно равны:

$$\delta' = 2d - (\alpha' + \beta' + \gamma'),$$

$$\delta'' = 2d - (\alpha'' + \beta'' + \gamma'').$$



Черт. 17.

Кроме того, имеем следующие равенства:

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' = 2d,$$

$$2\beta + \beta' = 2d,$$

$$2\gamma + \gamma'' = 2d.$$

Пользуясь этими равенствами, найдём дефект треугольника $AB'C'$. Углы этого треугольника у нас обозначены α , β'' , γ' . Следовательно, $\delta_1 = 2d - (\alpha + \beta'' + \gamma')$, или:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= [2d - (\alpha + \beta + \gamma)] + [2d - (\alpha + \beta + \gamma)] + \\ &+ [2d - (\alpha' + \beta' + \gamma')] + [2d - (\alpha'' + \beta'' + \gamma'')], \end{aligned} \quad (A)$$

что легко проверить с помощью установленных нами равенств. В самом деле, обозначив для краткости правую часть равенства (A) через σ , найдём:

$$\begin{aligned} \sigma &= 8d - 2(\alpha + \beta + \gamma) - (\alpha' + \beta' + \gamma') - (\alpha'' + \beta'' + \gamma'') = \\ &= 8d - (\alpha + \alpha' + \alpha'') - (2\beta + \beta') - (2\gamma + \gamma'') - (\alpha + \gamma' + \beta'') = \\ &= 2d - (\alpha + \gamma' + \beta''). \end{aligned}$$

Но в равенстве (A) каждая квадратная скобка есть дефект соответствующего треугольника, так что мы получаем:

$$\delta_1 = \delta + \delta' + \delta'', \text{ или } \delta_1 = 2\delta + \delta' + \delta''.$$

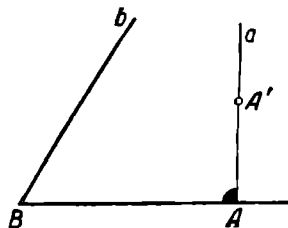
Так как δ' и δ'' — числа положительные, то $\delta_1 > 2\delta$, ч. т. д.

Словами полученный результат можно высказать так: если сумма углов треугольника ABC меньше $2d$ и его дефект равен δ , то всегда можно построить такой треугольник $AB'C'$, дефект которого δ_1 больше удвоенного дефекта δ . (Не забудем, что доказательство оказалось ошибочным и эту ошибку мы вскрыем позднее.) Теперь закончим „доказательство“ того, что сумма углов треугольника не может быть меньше $2d$. Именно: если в треугольнике ABC дефект равен δ , то мы по предыдущему строим треугольник, дефект которого $\delta_1 > 2\delta$; для этого последнего треугольника, опять по предыдущему, строим такой треугольник, дефект которого $\delta_2 > 2\delta_1 > 2^2\delta$. В свою очередь, для этого треугольника аналогично построим треугольник, дефект которого $\delta_3 > 2\delta_2 > 2^3\delta$. Продолжая так же далее, построим, наконец, такой треугольник, дефект которого $\delta_n > 2^n\delta$. Выбирая число n таких построений достаточно большим, находим, что существует треугольник, дефект которого как угодно велик. Но этого быть не может, так как разность между суммой углов любого треугольника и $2d$, $2d - (\alpha + \beta + \gamma) = \delta$ (т. е. дефект) не превосходит $2d$. Полученное противоречие, как думал Лежандр, и доказывает, что сумма углов треугольника не может быть меньше двух прямых. Но *доказательство Лежандра содержит ошибку*. Эта ошибка скрыта очень глубоко и не является грубым промахом. Пусть читатель сам попробует вскрыть этот промах, и он убедится, что сделать это нелегко,

Дело в том, что при проведении этого рассуждения неявно было принято, без доказательства, одно очень тонкое предложение, эквивалентное постулату Евклида. Вспомним построение треугольника $AB'C'$ (черт. 17). Через точку A' , взятую внутри угла BAC , мы провели секущую $B'A'$ и приняли без доказательства, что эта секущая пересечёт обе стороны, AB и AC , угла BAC . Другими словами, без доказательства принято такое предложение: *какую бы точку A' внутри угла BAC ни взять, всегда через неё можно провести прямую так, чтобы она пересекала обе стороны угла*. Это предложение, как мы докажем в параграфе 8, эквивалентно постулату Евклида. А опираться на предложение, эквивалентное постулату, значит опираться и на самый постулат. Дело обстоит, следовательно, так, что, доказывая аксиому о параллелях, мы, сами того не замечая, уже пользуемся ею в ходе наших рассуждений как верной, но пользуемся в оболочке эквивалентного предложения. Выходит, что мы доказывали „то же самое при помощи того же самого“. Такие ошибки в доказательстве носят название „порочного круга“.

§ 8. Через любую точку внутри угла можно провести секущую, пересекающую обе стороны угла, — предложение, эквивалентное постулату Евклида.

Предположим, что справедлив постулат Евклида, который можно сформулировать ещё и так: *перпендикуляр a и наклонная b к прямой AB всегда пересекаются* (черт. 18), в противном случае через точку B , помимо перпендикуляра к AB , можно было бы провести вторую прямую, параллельную прямой a , а это невозможно, если предположить справедливым постулат Евклида. После этого становится ясным, что через любую точку A' можно провести секущую a , пересекающую обе стороны угла B , стоит только через A' провести прямую, перпендикулярную AB . Покажем, что и обратно, *если через любую точку A' внутри угла A можно провести секущую, которая пересекает обе стороны угла, то отсюда вытекает постулат Евклида*. Доказательство этого положения мы, в сущности, уже имеем, надо только строго установить, что при указанном условии, сумма углов треугольника не может быть меньше $2d$, а это легко сделать, если дать предложению такую формулировку: *если через любую точку A' угла A можно всегда провести секущую, пересекающую обе стороны угла, то сумма углов треугольника не может быть меньше двух прямых*. При доказательстве этого условного предложения можно повторить дословно рассуждения Лежандра (см. § 7); в такой форме никакой ошибки оно содержать не будет. Следовательно, доказана эквивалентность постулату Евклида предложения, ускользнувшего первоначально от внимания Лежандра. При



Черт. 18.

построении системы геометрии, как легко понять, можно вместо аксиомы о параллелях принять предложение, о котором идёт речь. Тогда сам постулат о параллелях займёт место теоремы.

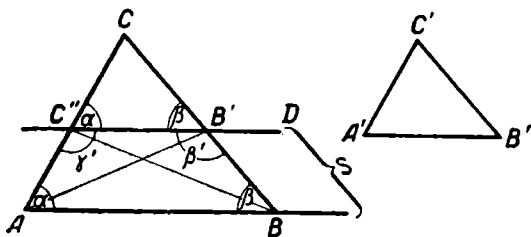
§ 9. Существует два подобных, но не равных треугольника — предложение, эквивалентное постулату Евклида.

Это предложение было высказано и доказано английским математиком Валлисом. В отличие от многих авторов, занимающихся теорией параллелей, Валлис вполне сознательно утверждал, что допущение о существовании подобных фигур вполне может заменить Евклидов постулат. Докажем это предложение, но в более узкой формулировке, данной в заголовке этого параграфа. Необходимо доказать теоремы.

I. Прямая теорема. Если принять постулат Евклида, то отсюда вытекает, что существует два не равных и подобных треугольника.

Как мы знаем из курса элементарной геометрии, в котором принята аксиома о параллелях, такие треугольники существуют.

II. Обратная теорема (теорема Валлиса). Если существуют два неравных треугольника, имеющих соответственно равные углы, то через точку вне данной прямой нельзя провести двух прямых, параллельных данной.



Черт. 19.

Доказательство.

Пусть треугольники ABC и $A'B'C'$ не равны, но имеют соответственно равные углы (черт. 19). Сторона AC не может быть равна стороне $A'C'$, так как если бы $AC =$

$= A'C'$, то треугольники оказались бы равными, ибо имели бы по равной стороне и соответственно равным углам, прилежащим к этой стороне. Предположим для определённости, что $AC > A'C'$. Возьмём на стороне CA точку C'' так, что $CC'' = C'A'$ и через C'' проведём прямую $C''D$ так, что $\angle CC''D = \angle C'A'B'$, а следовательно, и $\angle CC''D = \angle A$. Прямая $C''D$ пересечёт сторону BC между точками B и C . В самом деле, $C''D$ не может пересекать прямую AB , так как эти прямые с секущей AC'' образуют равные соответственные углы, а такие прямые, как мы знаем, не пересекаются.

Итак, прямая, не проходящая ни через одну из вершин треугольника и пересекающая сторону CA в точке C'' , не пересекая стороны AB , должна согласно постулату Паша, пересечь сторону BC в точке B'' между B и C . Полученный треугольник $CC''B''$ равен треугольнику $C'A'B'$, так как $CC'' = C'A'$, и прилежащие к этим сторонам углы соответственно равны. Но в таком случае в четырёхуголь-

нике $ABB''C''$ сумма всех углов равна $4d$, так как $\alpha + \gamma' = 2d$ и $\beta + \beta' = 2d$ (см. чертёж). Разбивая четырёхугольник $ABB''C''$ диагональю AB'' на два треугольника ABB'' и $AC''B''$, найдём, что сумма углов каждого треугольника равна $2d$, так как если бы сумма одного из них была меньше $2d$, то сумма углов второго была бы больше $2d$, ибо эти суммы, вместе взятые, должны составлять сумму углов четырёхугольника $ABB''C''$, которая равна $4d$. Но сумма углов треугольника больше $2d$ быть не может по первой теореме Лежандра-Саккери. Таким образом, мы установили, что *из предположения существования двух неравных подобных треугольников следует существование треугольников с суммой углов, равной $2d$* , а отсюда вытекает постулат Евклида.

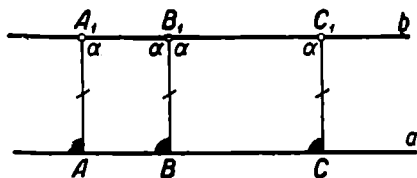
Итак, установлена эквивалентность указанного в заголовке параграфа предложения аксиоме Евклида о параллельных. Можно, следовательно, аксиому о параллельных заменить такой: *существуют два неравных треугольника с соответственно равными углами*. Сама аксиома о параллельных займёт место теоремы. Вся система геометрии останется прежней. Если вспомнить, какую громадную роль в геометрии Евклида играет учение о подобии фигур (а, как мы только что доказали, это учение о подобии целиком опирается на учение о параллелях), то становится ясной колоссальная роль постулата Евклида для построения всей системы геометрии. Без постулата о параллелях не могло бы существовать учения о подобии фигур вместе со всеми вытекающими из него следствиями.

§ 10. Одно мнимое доказательство постулата Евклида, принадлежащее Клавью.

Изложим сначала это доказательство, а затем укажем на предположение, которое, будучи эквивалентным аксиоме о параллелях, осталось в этом доказательстве незамеченным.

Имеем прямую a . В трёх точках A, B, C этой прямой восставим перпендикуляры равной длины: AA_1, BB_1, CC_1 (черт. 20). Обозначим прямую $A_1B_1C_1$ через b и рассмотрим четырёхугольники $ABB_1A_1, BCC_1B_1, ACC_1A_1$. Эти четырёхугольники будут саккериальными.

Следовательно, угол A_1 равен углу B_1 в первом четырёхугольнике. Обозначим их α . Точно так же в третьем четырёхугольнике угол A_1 равен углу C_1 , а во втором четырёхугольнике угол B_1 равен углу C_1 . При точке B_1 прямой b мы получили два равных смежных угла, следовательно, каждый из них равен прямому, т. е. $\alpha = d$, а это значит, что любой из рассматриваемых четырёхугольников имеет четыре прямых угла. Разбивая эти четырёхугольники диагоналями на два треугольника, найдём, что сумма углов каждого из



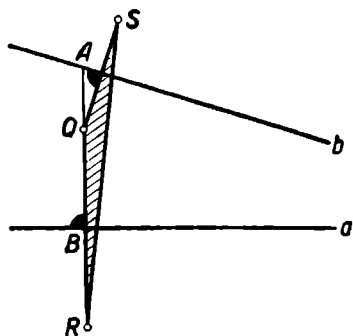
Черт. 20.

этих треугольников равна $2d$, а отсюда, как нам известно, следует постулат Евклида.

При проведении этого рассуждения, как уже указывалось, мы воспользовались неявно предложением, эквивалентным самому постулату. Взяв три точки A_1, B_1, C_1 по одну сторону от a и на одинаковом от неё расстоянии, мы считали лежащими их на одной прямой b , а это допущение эквивалентно аксиоме о параллельных. Эта эквивалентность следует из наших рассуждений, так как если принять постулат Евклида, то, как это указывается в учебниках элементарной геометрии, построенные три точки лежат на одной прямой. Мы доказали обратное, что если такие три точки лежат на одной прямой, то справедлив постулат Евклида.

Предположение, что *три точки A, B, C , лежащие по одну сторону прямой a и на одинаковом расстоянии от неё, лежат на одной прямой*, может заменить собой аксиому о параллелях при построении системы геометрии Евклида. Система геометрии лишь слегка будет изменена в структуре её первых глав. Все предложения системы останутся незыблемыми, только аксиома о параллелях перейдёт в разряд теорем, а место аксиомы займёт рассматриваемое предложение.

Мы несколько ослабили требования Клавия. Самим Клавием высказано предложение более сильное. Именно: *геометрическое место точек, находящихся по одну сторону прямой и на данном расстоянии от этой прямой, есть прямая линия.*



Черт. 21.

§ 11. Теорема В. Болиан.

Теорема В. Болиан. *Если через любые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность, то отсюда вытекает постулат Евклида о параллельных.*

Доказательство. Условие теоремы утверждает существование такой точки O (центр описанной окружности), которая находится на одинаковом расстоянии от трёх данных точек A, B, C ,

не лежащих на одной прямой. Для доказательства постулата Евклида достаточно показать, что перпендикуляр и наклонная к одной и той же прямой всегда пересекутся. Пусть a перпендикулярна к прямой BA , а b — наклонная к той же прямой (черт. 21). На отрезке AB берём произвольную точку Q и строим точки R и S , симметричные точке Q по отношению к прямым a и b соответственно. Точки Q, R, S не лежат на одной прямой, так как QS перпендикулярна к прямой b , а QR наклонна к b . Но по условию существует такая точка O , которая равноудалена от точек Q, R, S . Прямая a как геометрическое место точек, равноудалённых от точек Q и R , проходит через точку O . Прямая b как геометрическое место точек, равноудалённых от точек Q

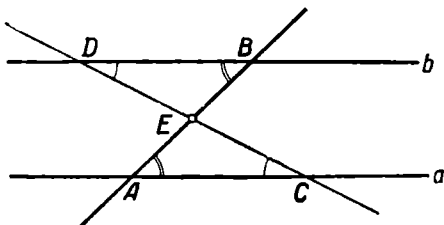
и S , также проходит через точку O . Итак, прямые a и b пересекаются в точке O — центре окружности, описанной около треугольника QRS . Наклонная b и перпендикуляр a к прямой BA всегда пересекаются. Отсюда следует, что через точку A к прямой a нельзя провести двух параллелей.

Отметим в заключение этого параграфа, что В. Болиани вполне сознательно утверждал, что *если предположить существование окружности, описанной около любого треугольника, тогда нетрудно доказать постулат Евклида*.

§ 12. Ещё одно предложение, эквивалентное постулату о параллелях.

На плоскости существуют непересекающиеся прямые. Доказательство существования прямых без общей точки не требует постулата о параллельных. Предложение, которое мы сейчас докажем, гласит: *если при пересечении двух прямых, не имеющих общей точки, любой прямой внутренние накрестлежащие углы окажутся равными, то отсюда вытекает постулат Евклида о параллелях*.

Доказательство. Пусть a и b — прямые без общей точки, c — секущая, проходящая через точки A и B , лежащие соответственно на прямых a и b (черт. 22).



Черт. 22.

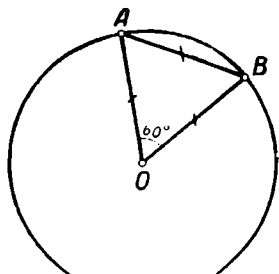
Взяв точку C на прямой a и точку D на прямой b по разные стороны от прямой AB и так, что $AC \neq BD$, проведём прямую DC , которая пересечёт AB в точке E между A и B . Но тогда треугольники AEC и BED будут иметь углы соответственно равные, т. е. будут треугольниками подобными. Углы, отмеченные на чертеже, равны по условию как накрестлежащие при секущих. Углы же при вершине E равны как вертикальные. Рассматриваемые треугольники в то же время не будут равными, так как по построению $AC \neq BD$, а отсюда, по теореме Валлиса, следует постулат Евклида.

Обратная теорема. *Если принять постулат Евклида, то при пересечении двух прямых без общей точки третьей прямой внутренние накрестлежащие углы равны*, — встречается в любом учебнике геометрии. Вместе со справедливостью прямой и обратной теорем и устанавливается эквивалентность предложения этого параграфа постулату Евклида о параллельных.

§ 13. Сторона правильного вписанного шестиугольника равна радиусу — предложение, эквивалентное постулату Евклида.

Отметим ещё одно, и последнее в нашем списке, предложение, эквивалентное постулату Евклида. Из элементарной геометрии известно, что сторона вписанного в круг правильного шестиугольника равна

радиусу этого круга. Эта теорема доказывается со ссылкой на то, что сумма углов треугольника равна $2d$. Но такая ссылка, как мы уже знаем, есть использование аксиомы о параллельных. И это не случайно, так как предложение о том, что сторона правильного вписанного шестиугольника равна радиусу, — эквивалентно постулату Евклида о параллельных.



Черт. 23.

Теорема. Если сторона правильного вписанного в круг шестиугольника равна радиусу круга, то отсюда следует постулат Евклида о параллельных.

В самом деле, центральный угол, опирающийся на дугу AB , равную $\frac{1}{6}$ части окружности, равен 60° , но по предположению $AB = OB$, и, следовательно, углы при основании OA треугольника OAB равны (черт. 23).

Угол A равен углу B на том же основании, так как $OA = OB$. Следовательно, сумма углов треугольника равна $2d$; отсюда вытекает постулат Евклида *).

Пользуясь этой теоремой, мы можем, казалось бы, экспериментально проверить справедливость постулата Евклида о параллельных. Начертив на хорошо выверенной материальной плоскости окружность и „путешествуя“ измерителем по окружности, после шести шагов должны вернуться в исходное положение. Но как ни убедительно это экспериментальное „доказательство“, всё же подобного рода эксперименты выходят за рамки геометрии.

Физика, в лице теории относительности, утверждает, что поведение твёрдых тел и масштабов не следует законам евклидовой геометрии. Для описания этих законов поведения твёрдых тел нужна геометрия, отличная от евклидовой.

Вопросами, относящимися к экспериментам, устанавливающим природу пространства, интересовались ещё Лобачевский и Гаусс. Так, Гаусс, руководя геодезическими работами в Ганновере, с особой тщательностью измерял сумму углов треугольника, стороны которого были свыше 10 км, но расхождения с двумя прямыми, в пределах точности инструментов, не получил. Лобачевский измерил сумму углов космического треугольника, одна из сторон которого была в несколько световых лет, и, в пределах точности инструмента, получил сумму, равную $2d$.

Мы закончили перечень предложений, эквивалентных постулату Евклида. Его можно было бы продолжить и далее. Все многовековые попытки доказать постулат Евклида содержали порочный круг. Доказывая постулат, т. е. стараясь перевести аксиому в разряд теорем,

*) В книге академика Буныковского [3] собран большой материал о предложениях, эквивалентных постулату Евклида. Буныковский даёт излишне громоздкие доказательства многих предложений, ввиду отсутствия понимания неевклидовой геометрии. Книга Буныковского может служить начальной главой геометрии Лобачевского, если только предложения, эквивалентные постулату Евклида, прочитать в „утвердительном — для геометрии Лобачевского — смысле“, как это сделано в главе II настоящей книги.

все авторы пользовались каким-либо предложением, эквивалентным самому постулату.

Постепенно среди наиболее крупных геометров XVIII и начала XIX столетий начало создаваться убеждение, что постулат Евклида о параллельных вообще доказать невозможно. Наиболее революционно поступил наш великий соотечественник Николай Иванович Лобачевский. Он построил новую геометрию, откинув постулат Евклида и заменив его другим, прямо противоположным по смыслу. Эта новая геометрия носит название неевклидовой геометрии Лобачевского. Геометрия Лобачевского получила большое применение как в самой математике, так и в смежных дисциплинах. Теория относительности, например, не могла бы появиться без развития геометрических идей Лобачевского.

ГЛАВА ВТОРАЯ

О НЕКОТОРЫХ ФАКТАХ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Рассмотрим вместе с Лобачевским все те возможности, которые могут встретиться при изучении расположения двух прямых на плоскости. При этом изучении мы будем опираться на весь геометрический материал „до теории параллельных“. Имеются три возможности в расположении двух прямых на плоскости: 1) *Всякие две прямые пересекаются*. Эта возможность отпадает, так как два перпендикуляра к одной прямой общей точки не имеют. 2) *Через точку A вне данной прямой a плоскости (Aa) проходит только одна прямая, не имеющая общей точки с a* . Эта возможность осуществляется, если только будет принят постулат Евклида. 3) *Через точку A вне данной прямой a плоскости (Aa) проходит больше одной прямой, не имеющей общей точки с a* . Эта возможность будет иметь место в том случае, если постулат Евклида о параллельных места не имеет.

Условимся в дальнейшем плоскость, на которой принят постулат Евклида, называть *плоскостью Евклида*. Плоскость, на которой прямые не подчиняются постулату Евклида, назовём *плоскостью Лобачевского*. В ней имеет место постулат Лобачевского. Предложения, эквивалентные постулату Евклида, рассмотренные нами в главе I, уже сейчас позволят нам установить некоторые свойства геометрических фигур на плоскости Лобачевского. Более подробно со свойствами фигур этой плоскости мы познакомимся в дальнейшем.

§ 14. Постулат Лобачевского.

Через точку A вне прямой a в плоскости, определяемой точкой A и прямой a , проходят по крайней мере две прямые s и b , не имеющие общей точки с прямой a .

Отсюда следует, что через точку A проходит бесконечное множество прямых плоскости (Aa), не пересекающих прямую a . Такими прямыми будут, например, все прямые пучка с центром A и лежащие в углу bAc и вертикальном к нему (черт. 24).

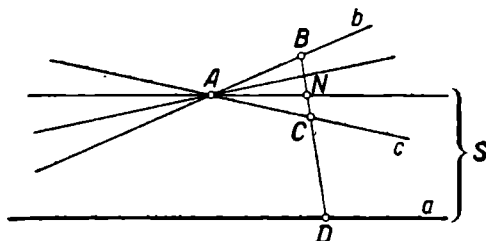
Докажем это. Возьмём на прямой b точку B так, чтобы точка B и прямая a лежали по разные стороны от прямой c . Соединим B с какой-либо точкой D прямой a . Отрезок BD пересечёт прямую c в некоторой точке C . Пусть N —произвольная точки отрезка BC .

Прямая AN не пересекает прямую a . В самом деле, если бы AN пересекла a в точке S , лежащей в направлении от A к N , то, применяя постулат Паша к треугольнику NDS и прямой c , мы нашли бы, что прямая c пересекает DS между D и S , но это противоречит свойству прямой c не пересекать прямую a . Предположение, что прямая NA пересечёт прямую a в точке S' , лежащей в направлении от N к A , также ведёт к противоречию; стоит лишь применить постулат Паша к прямой b и треугольнику NDS' .

Постулат Лобачевского можно сформулировать значительно уже.

Именно: можно утверждение постулата считать выполненным для *одной* фиксированной прямой a и *одной* фиксированной точки A . После этого легко доказать справедливость утверждения для любой точки A_1 и любой прямой a_1 , не проходящей через точку A_1 .

В самом деле, пусть для точки A и прямой a имеет место постулат Лобачевского. Предположив, что для какой-либо точки A_1 и прямой a_1 постулат Лобачевского не выполнен, мы необходимо имеем для A_1 и a_1 постулат Евклида. Справедливость же постулата Евклида для одной точки A_1 и одной прямой a_1 влечёт за собой его справедливость для всякой прямой b и всякой точки B , не принадлежащей прямой b . А это противоречит принятому нами постулату Лобачевского для фиксированных точки A и прямой a .



Черт. 24.

§ 15. Сумма углов треугольника на плоскости Лобачевского.

Рассмотрим теперь, какова сумма углов треугольника, расположенного в плоскости Лобачевского. Легко понять, что эта сумма *меньше двух прямых*. В самом деле, если бы эта сумма равнялась $2d$, то отсюда вытекал бы постулат Евклида о параллельных, но мы имеем дело с плоскостью Лобачевского, и предположение, что сумма углов треугольника равна $2d$, ведёт к противоречию. А так как на плоскости Лобачевского, так же как и на плоскости Евклида, сумма углов треугольника больше двух прямых быть не может, то, следовательно, она меньше $2d$. Кроме того, из предыдущего (§ 6) легко вывести, что *сумма углов треугольника на плоскости Лобачевского в разных треугольниках, вообще говоря, разная*. Другими словами, эта сумма при переходе от треугольника к треугольнику меняется, так как, если бы эта сумма была одинаковой во всех треугольниках, то отсюда вытекало бы наличие постулата Евклида. Из предыдущего следует далее, что на плоскости Лобачевского имеет место такая теорема: *если три угла одного треугольника равны*

соответственно трём углам другого, то такие треугольники равны.

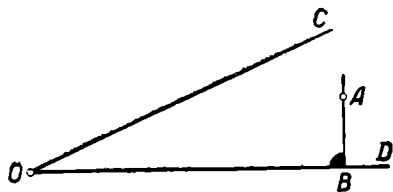
Если бы такие треугольники не были равными, то они были бы подобными, но по теореме Валлиса отсюда следовал бы постулат Евклида, а на плоскости Лобачевского постулат Евклида несправедлив. Полученное противоречие и доказывает теорему. Мы видим, что в геометрии Лобачевского появляется ещё один признак равенства треугольников, которого нет на плоскости Евклида. Из теоремы Валлиса также следует, что на плоскости Лобачевского нет подобных фигур. Отметим ещё одно интересное предложение геометрии Лобачевского. Оно относится к связи между отрезком и углом.

Каждый отрезок в геометрии Лобачевского однозначно определяет угол.

В этом легко убедиться, построив равносторонний треугольник, стороны которого равны данному отрезку; такой треугольник будет также и равноугольным. Угол такого треугольника и будет вполне определённым и единственным углом, который определяет данный отрезок. Если взять другой отрезок, не равный первому, и точно так же построить равносторонний треугольник, то угол этого последнего треугольника не может равняться углу первого треугольника, так как это противоречило бы только что установленному новому признаку равенства треугольников. *Каждый равносторонний треугольник имеет свою собственную величину угла.* Два неравных равносторонних треугольника имеют неравные углы. В геометрии Лобачевского нет учения о подобии, но взамен получаем интересную зависимость между отрезками и углами. Этой зависимости геометрия Евклида не имеет.

§ 16. Теорема о перпендикуляре к одной стороне угла, не пересекающем другую.

Используя ложное доказательство постулата Евклида, принадлежащее Лежандру, получим следующее предложение геометрии Лобачевского: *каждый угол BOC содержит внутри себя такие точки A , через*



Черт. 25.

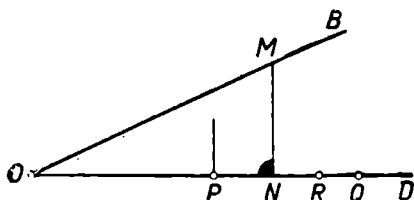
которые нельзя провести прямых, пересекающих обе стороны OB и OC угла (черт. 25). Другими словами, если прямая, проходящая через такую точку A , пересечёт одну сторону угла, например OC , то эта прямая нигде не пересекает другую сторону OB угла BOC . В самом деле, если допустить, что какова

бы ни была точка A внутри угла BOC , всегда можно провести прямую через A , пересекающую обе стороны угла, то отсюда следует, по Лежандру, постулат Евклида, а на плоскости Лобачевского постулат Евклида справедлив быть не может. Это предложе-

ние можно изменить, придавая ему более интересную форму. В геометрии Лобачевского имеет силу такая важная теорема: *каков бы острый угол $\angle BOC$ ни был, всегда существует такой перпендикуляр к одной стороне этого угла, который не пересекает другую сторону*. Этот факт установить нетрудно (черт. 25).

Пусть A — точка внутри острого угла $\angle BOC$ такая, что через неё нельзя провести ни одной прямой так, чтобы последняя пересекала обе стороны угла. Опустив из точки A перпендикуляр AB на сторону OD , получим перпендикуляр, о котором идёт речь в теореме.

Нужно твёрдо помнить, что если мы приняли постулат Лобачевского, то должны принять и все вытекающие из него следствия, какими бы странными они на первый взгляд ни казались. Приведём слова Лобачевского: „На первый взгляд может показаться, что теоремы геометрии, названной мною воображаемой геометрией, вообще противоречивы, однако, замечу, что хотя они и противоречат нашему представлению и привычке, но, однако, совершенно безупречны со стороны логической“.

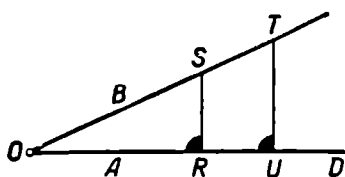


Черт. 26.

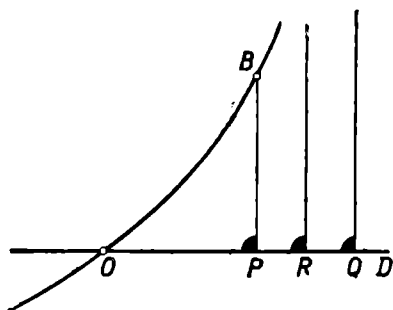
Отметим также, что за всю свою жизнь Лобачевский не встретил понимания своих идей и умер, не добившись признания своей системы геометрии. В те времена даже выдающиеся математики это противоречие наглядному представлению считали решающим для того, чтобы утверждать „нелепость“, как они говорили, геометрии Лобачевского. Работы Лобачевского так и остались непонятыми почти всеми математиками того времени. Читатель должен быть готов, подчиняясь лишь логической необходимости, принять все выводы из постулата Лобачевского, как бы они ни противоречили наглядному представлению. Чертежи при изучении геометрии играют очень условную роль; решающего значения при изучении геометрии, всё равно Лобачевского или Евклида, чертежи не имеют.

Возвратимся к перпендикулярам к стороне OD угла $\angle BOD$. Мы установили, что на OD есть такие точки, например A_n , перпендикуляр в которых к стороне OD не пересекает OB , и это установлено для любого острого угла $\angle BOD$ (черт. 26). С другой стороны, на OD безусловно существуют и такие точки, перпендикуляр в которых пересекает сторону OB . Эти пересекающие OB перпендикуляры легко получить так: возьмём любую точку M на прямой OB и опустим из неё перпендикуляр на OD . Подошва N этого перпендикуляра принадлежит к тем точкам, через которые проходят перпендикуляры к OD , пересекающие сторону OB . Влево от точки N , т. е. между точками O и N , все точки принадлежат к такому классу, перпендикуляры к OD из которых пересекают сторону OB . В самом деле, перпендикуляр в точке P к прямой OD пересекает сторону ON

треугольника ONM между вершинами O и N , и в то же время этот перпендикуляр не пересекает сторону NM , так как два перпендикуляра к одной и той же прямой не встречаются. Следовательно, по постулату Паша, этот перпендикуляр пересечёт сторону OM между вершинами O и M , а это и нужно было установить. Итак, все точки Q , перпендикуляр в которых к прямой OD не пересекает OB , лежат по одну сторону от всякой точки N , перпендикуляр из которой пересекает OB , и именно по ту сторону от N , которая не содержит точки O . Таким образом, все точки луча OD разбиты на два класса. К первому классу отнесём такие точки P этого луча, перпендикуляр в которых к OD пересекает сторону OB . Ко второму же классу отнесём все такие точки Q , перпендикуляр в которых к стороне OD не пересекает сторону OB . Мы доказали, что, во-первых, существуют точки как первого, так и второго класса, и каждая из



Черт. 27.



Черт. 28.

точек луча OD принадлежит к одному из этих классов, и, во-вторых, что каждая точка первого класса лежит по одну сторону от всех точек второго класса. Такое разбиение точек луча OD на два класса производит единственная точка R этого луча, и все точки P 1-го класса лежат по одну сторону точки R (на чертеже по левую), а все точки Q 2-го класса — по другую сторону от точки R (на чертеже по правую). Сама точка R может принадлежать как первому классу, так и второму. Какому классу принадлежит точка R , устанавливается дополнительным исследованием *).

Покажем, что точка R принадлежит ко 2-му классу, т. е., что перпендикуляр в R к OD не пересекает стороны OB . В самом деле, если бы этот перпендикуляр пересекал OB в точке S , то, взяв точку T по ту сторону от S , по которую не лежит точка O , и опустив из точки T перпендикуляр на OD , мы получили бы такую точку U , которая, принадлежа первому классу, была бы справа от точки R , но все точки первого класса лежат по левую сторону от точки R (черт. 27). Следовательно, предположение, что перпендикуляр в R

*) Существование и единственность точки R , разбивающей луч на два куска, составляет содержание аксиомы Дедекинда, о которой будет идти речь ниже.

пересечёт OB , ведёт к противоречию. Итак, точка R принадлежит второму классу. Другими словами, перпендикуляр в R (в точке, разбивающей луч на два класса) к прямой OD не пересекает сторону угла OB . Среди всех перпендикуляров в точках первого класса нет последнего, а среди перпендикуляров второго класса есть первый, который проходит через точку R .

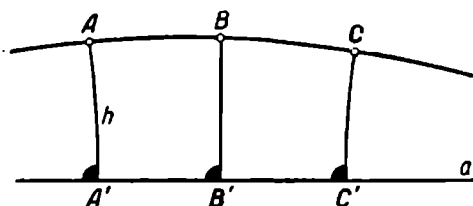
Доказанная теорема о первом перпендикуляре к одной стороне любого острого угла, не пересекающем вторую сторону угла, есть одна из важнейших теорем геометрии Лобачевского.

Наглядно такое поведение прямых представить себе затруднительно. Аналогичный факт имеет место в евклидовой плоскости, если рассмотреть гиперболу и её асимптоту (черт. 28). Если OB — гипербола; OD — пересекающая её прямая, а перпендикуляр к OD в точке R — асимптота гиперболы, то все точки P слева от R принадлежат к 1-му классу, а все точки Q справа от R — ко 2-му классу.

§ 17. Эквидистанта.

В § 6 мы установили, что если геометрическое место точек, находящихся на данном расстоянии от прямой a и лежащих по одну сторону этой прямой, есть прямая линия, то справедлив постулат Евклида. В системе же геометрии Лобачевского этот постулат несправедлив, следовательно, неверны все предложения, эквивалентные постулату Евклида.

Верна будет такая теорема: геометрическое место точек, находящихся на данном расстоянии от данной прямой и лежащих по одну сторону этой прямой, есть кривая



Черт. 29.

линия, никакие три точки

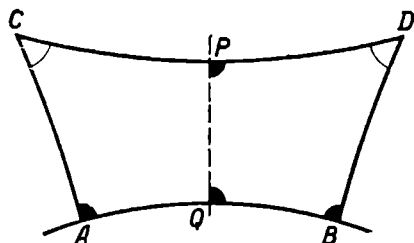
которой не лежат на одной прямой. В самом деле, если бы три точки A, B, C этого геометрического места лежали на одной прямой, то, как мы знаем, четырёхугольник Саккери $ACC'A'$ имел бы четыре прямых угла, а на плоскости Лобачевского этого быть не может (черт. 29). Полученная кривая названа Лобачевским *эквидистантой*.

Эквидистанта обладает некоторыми свойствами, общими с прямой и окружностью. Так, прямую линию можно „двигать по самой себе“, т. е. если прямую передвинуть так, что какие-либо две её точки A и B совпали с двумя точками A' и B' той же прямой, то прямая во втором положении совпадёт с первоначальной прямой. Так же обстоит дело и с окружностью, которую можно вращать вокруг её центра, и она будет „скользить сама по себе“. Кривые, обладающие таким свойством, называются *кривыми постоянной*

кривизны. В геометрии Евклида к таким кривым относятся только прямые и окружности. В геометрии Лобачевского, помимо прямых и окружностей, к кривым постоянной кривизны принадлежат и эквидистанты. Если основание A' перпендикуляра AA' вместе с этим перпендикуляром передвигать по прямой a , то конец A перпендикуляра опишет эквидистанту, и если вообразить, что эквидистанта ABC жёстко связана с перпендикуляром AA' , то при упомянутом движении она будет скользить сама по себе, а это и значит, что эквидистанта имеет постоянную кривизну. Любой участок AB этой кривой может быть „положен“ своими концами на эту же кривую, и тогда все точки этого куска совместятся с эквидистантой. Расстояние h точек эквидистанты от её основания a называется *высотой эквидистанты*. Можно показать, что эквидистанты с различной высотой h совмещены быть не могут ни одним своим куском, так же как окружности различного радиуса.

§ 18. Ещё некоторые теоремы геометрии Лобачевского.

Остановимся на некоторых предложениях геометрии Лобачевского, используя результаты первой главы. Так, если пересечь две непересекающиеся прямые секущей, то внутренние накрестлежащие углы, вообще говоря, не будут равными, так как из равенства этих углов для *всякой* секущей, как мы знаем (§ 12), вытекает постулат



Черт. 30.

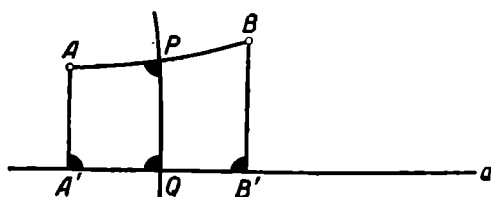
Евклида, а в геометрии Лобачевского он силы не имеет. Частный случай неравенства внутренних накрестлежащих углов можно получить, рассматривая четырёхугольник Саккери, углы при верхнем основании которого в геометрии Лобачевского острые. И, следовательно, две непересекающиеся прямые AB и CD (как перпендикуляры к оси симметрии PQ) в пересечении

с прямой BD не образуют равных накрестлежащих углов. Рассматривая этот же четырёхугольник Саккери, видим, что расстояние DB точки D прямой CD от прямой AB больше расстояния PQ , так как в четырёхугольнике $PQBD$ „против большего угла P (угол P прямой, D — острый) лежит и большая сторона“. Следовательно, *общий перпендикуляр PQ двух прямых AB и CD есть кратчайшее расстояние между этими прямыми* (черт. 30). Кроме того, верхнее основание CD четырёхугольника Саккери больше нижнего AB , что видно из того же трипрямоугольного четырёхугольника $PQBD$. Если PQ принять за основание этого четырёхугольника, то против угла B , как прямого, лежит и большая сторона PD . Но $AB = 2QB$, а $CD = 2PD$. Следовательно, $CD > AB$.

§ 19. О треугольниках, около которых нельзя описать окружность.

Из теоремы В. Болиаи мы можем заключить, что в геометрии Лобачевского существуют треугольники, около которых нельзя описать окружность, так как если около каждого треугольника можно было бы описать окружность, то, по теореме В. Болиаи, был бы справедлив постулат Евклида. Очень легко получить конкретные примеры таких треугольников.

Рассмотрим прямую a и три точки A, B, C , лежащие по одну сторону прямой a и на одинаковом расстоянии от неё (черт. 29). Точки A, B, C не могут лежать на одной прямой, так как они принадлежат эквидистанте. Треугольник ABC оказывается вписанным в эквидистанту. Покажем, что около всякого треугольника, вписан-



Черт. 31.

ного в эквидистанту, окружности описать нельзя. В самом деле, четырёхугольник $ABB'A'$ есть четырёхугольник Саккери, и его ось симметрии PQ перпендикулярна как верхнему основанию AB , которое является хордой эквидистанты, так и прямой a , основанию эквидистанты (черт. 31). Итак, мы показали, что перпендикуляр к хорде эквидистанты, проведённый через её середину и являющийся геометрическим местом точек, равноудалённых от двух точек A и B эквидистанты, есть прямая линия, перпендикулярная к основанию a этой эквидистанты.

Центр описанной около треугольника ABC окружности, если бы таковой существовал, служил бы точкой пересечения трёх геометрических мест: 1) геометрического места точек, равноудалённых от точек A и B ; 2) геометрического места точек, равноудалённых от точек B и C ; 3) геометрического места точек, равноудалённых от A и C . Но по только что доказанному все эти геометрические места суть перпендикуляры к одной и той же прямой a , основанию эквидистанты, а такие перпендикуляры общей точки не имеют. Следовательно, отсутствует и точка, равноудалённая от вершин треугольника ABC . Около этого треугольника нельзя описать окружность. Отметим без доказательства, что *треугольники, вписанные в эквидистанты, не исчерпывают всех треугольников, около которых нельзя описать окружность*. В геометрии Евклида эквидистанты вырождаются в прямые, а рассматриваемые треугольники — в отрезки,

**§ 20. Сторона правильного вписанного в круг
шестиугольника больше радиуса этого круга.**

Что сторона вписанного в круг шестиугольника не равна радиусу этого круга, мы уже знаем, так как если бы эта сторона равнялась радиусу, то отсюда следовал бы постулат Евклида. Что сторона этого шестиугольника больше радиуса, устанавливаем, построив чертёж, аналогичный чертежу 23, и рассматривая треугольник ABO . Угол AOB равен 60° . Каждый из равных углов A и B в равнобедренном треугольнике AOB меньше 60° , так как сумма углов треугольника меньше $2d$. Таким образом, угол O этого треугольника — наибольший. Следовательно, $AB > OA = R$.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

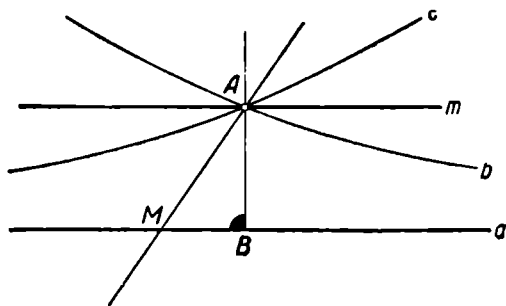
Рассмотрим подробно и систематически вопрос о взаимном расположении прямых на плоскости Лобачевского. *Теорема о первом перпендикуляре* к одной стороне острого угла, не пересекающем вторую сторону этого угла, показывает, какое глубокое различие существует во взаимном расположении прямых в геометриях Евклида и Лобачевского.

В геометрии Лобачевского прямые или пересекаются или не пересекаются, но непересекающиеся прямые не обладают такими простыми свойствами, как в евклидовой геометрии. Здесь дело обстоит значительно сложнее.

§ 21. Параллельные и сверхпараллельные прямые.

Остановимся на постулате Лобачевского. Через точку A вне прямой a плоскости (a, A) можно провести по крайней мере две прямые b и c , которые не пересекают прямую a , а следовательно, и бесконечное множество таких прямых (черт. 32). К таким прямым, не пересекающим a , принадлежат и все прямые угла bAc .

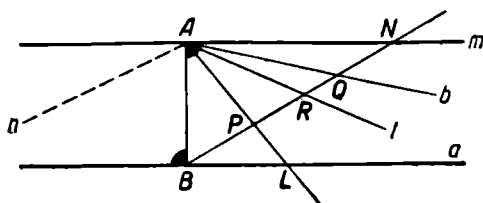
Следовательно, все прямые пучка с центром A разбиваются на два класса. К 1-му классу отнесём все прямые пучка, пересекающие прямую a ,



Черт. 32.

разбиваются на два класса. К 1-му классу отнесём все прямые пучка, пересекающие прямую a , ко 2-му классу — все остальные прямые пучка. Каждый из классов содержит бесконечное множество прямых. Например, соединяя точки M прямой a с точкой A , получим прямые 1-го класса, прямые же b и c , а также все прямые угла bAc принадлежат ко 2-му классу, среди которых находится и прямая Am , перпендикулярная к AB .

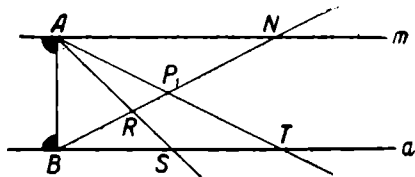
где AB перпендикулярна к a . Все прямые прямого угла BAm разбиваются также на два класса (черт. 33). К 1-му классу отнесём все прямые, которые пересекают a , ко 2-му классу — все прямые, которые не пересекают прямой a . Взяв точку N на луче Am и построив отрезок BN , видим, что все прямые угла BAm этот отрезок пересекают. Это следует из рассмотрения треугольника ABN . Будем считать, что прямые 1-го класса, например AL , пересекают BN в точках P 1-



Черт. 33.

класса, а прямые 2-го класса, например b , пересекают отрезок BN в точках Q 2-го класса. Таким образом, все точки отрезка BN разбиты на два класса. Каждый класс содержит бесконечное множество точек, и все точки P 1-го класса лежат по одну сторону от точки Q

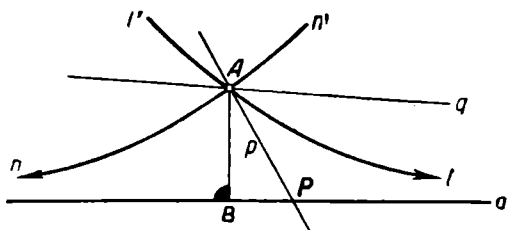
2-го класса. Применяя аксиому непрерывности Дедекинда, находим, что на отрезке BN существует единственная точка R , которая разбивает этот отрезок на два куска. Один кусок состоит из точек P 1-го класса, другой кусок из точек Q 2-го класса. Граница R между этими кусками принадлежит 2-му классу. Первый класс последней точки не имеет. Это значит, что луч AR не пересекает прямую a . В самом деле, допустим, что луч AR пересекает прямую a в точке S (черт. 34) и возьмём точку T на прямой a за точкою S в направлении BS и соединим A с T . Луч AT пересечёт отрезок BN в точке P_1 . Таким образом, точка P_1 есть точка 1-го класса, но этого быть не может, так как все точки отрезка RN суть точки 2-го класса. Допущение, что луч AR пересекает прямую a , привело нас к противоречию, следовательно, *луч AR не пересекает прямой a* . Наглядно это положение можно пояснить так: если луч AL 1-го класса



Черт. 34.

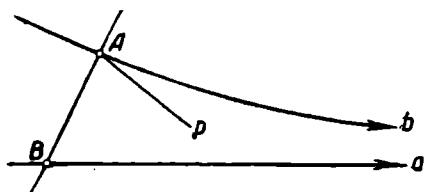
вращать вокруг точки A (для нашего чертежа против часовой стрелки), то этот переменный луч пересекает прямую a в точке L , которая по мере вращения луча удаляется по прямой a всё дальше и дальше, и, наконец, наступает такой момент, когда вращающийся луч „оторвётся“ от прямой a . Этот момент наступит тогда, когда вращающийся луч займёт положение AR , т. е. перейдёт из лучей 1-го класса в лучи 2-го класса. Дальнейшее вращение, вплоть до луча Am , пересечения с прямой a не даёт. Вот эту-то „границную“ прямую $AR \equiv l$ (черт. 33) Лобачевский и назвал *линией, параллельной a для точки A по направлению BL* . Если взять прямую n , симметричную l по отношению к оси симметрии AB , то получим вто-

рую параллельную к a в смысле Лобачевского, но в направлении LB , противоположном предыдущему. Итак, для каждой прямой a и каждой точки A существуют две прямые, l и n , параллельные в смысле Лобачевского прямой a ; одна в одном направлении, другая—в противоположном. Все прямые p угла lAn , как мы выяснили, пересекают прямую a . Все прямые q угла $n'Al'$ не пересекают прямой a . Прямые q назовём *сверхпараллельными* к прямой a (черт. 35). К сверхпараллельным к a прямым принадлежит и прямая t , перпендикулярная к BA (черт. 32). Если на прямой a выбрать определённое направление, указанное стрелкой, то через каждую точку A , вне прямой a , проходит единственная прямая b , параллельная прямой a в данном направлении.



Черт. 35.

Можно определить параллельную к прямой a , проходящую через данную точку A по данному направлению, так: любую точку B прямой a соединяем с A



Черт. 36.

(черт. 36). Прямая AB разбивает плоскость на две полуплоскости. Двигаясь в заданном на прямой a направлении, мы переходим с одной полуплоскости на другую. Угол bAB принадлежит второй полуплоскости. Прямую b называют *параллельной* a в указанном направлении, если она удовлетворяет двум условиям: 1) b не пересекает прямой a ; 2) любая прямая p угла bAB пересекает прямую a . Очевидно, что это определение эквивалентно определению параллельных, данному Лобачевским.

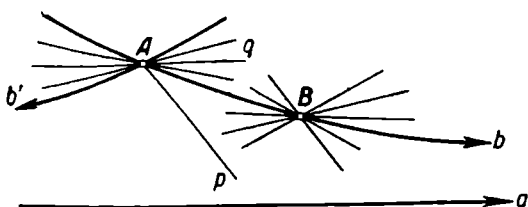
§ 22. Свойства параллельных прямых.

В определении параллельных прямых, в смысле Лобачевского, особую роль играла точка A . Сам параллелизм устанавливался, во-первых, в данном направлении и, во-вторых, для данной точки A . Оказывается, точка A прямой b , параллельной по данному направлению прямой a , не играет исключительной роли.

Теорема. Если прямая b параллельна прямой a по данному направлению и для точки A , то прямая b параллельна прямой a в том же направлении для любой своей точки B (черт. 37).

Прежде чем доказывать теорему, остановимся на самой постановке вопроса. Если прямая b параллельна прямой a для точки A

по данному на a направлению, то это значит, что прямая b не пересекает прямой a и является *границей* для всех прямых, не пересекающих прямой a . Второй границей не пересекающих a прямых служит прямая b' , параллельная a в противоположном направлении. Всякая прямая p угла bAb' и ему вертикального пересекает прямую a .



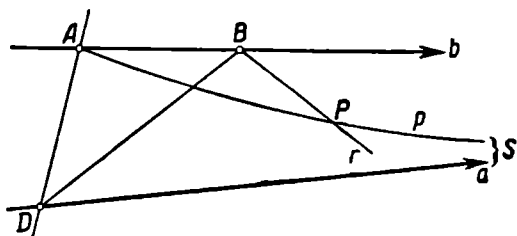
Черт. 37.

Всякая же прямая q другой пары вертикальных углов прямой a не пересекает.

Если взять точку B на прямой b , то среди пучка прямых, проходящих через точку B , также существуют прямые как пересекающие прямую a , так и не пересекающие её.

Среди прямых, не пересекающих a , находится и прямая b . Но является ли прямая b *границей* между прямыми пересекающими и не пересекающими прямую a , мы еще не знаем. Не может ли прямая b оказаться *сверхпараллельной* прямой a для точки B ? Теорема утверждает, что этого последнего случая быть не может. Для доказательства того, что прямая b параллельна a и для точки B по данному направлению, необходимо установить два факта: *во-первых*, что прямая b не пересекает прямой a (но это уже установлено, так как прямая b является параллельной прямой a для точки A), *во-вторых*, что всякая прямая r угла bBD (черт. 38) пересекает прямую a . Разобьём доказательство на две части.

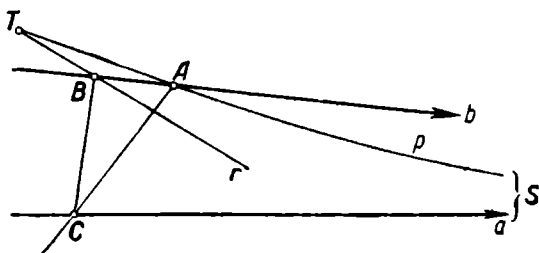
1) Точка B прямой b находится от точки A в сторону параллельности (черт. 38). Нужно доказать, что любая прямая r угла bBD пересекает прямую a . На прямой r между прямыми b и a возьмём точку P и



Черт. 38.

и соединим A с P прямою p . Так как прямая p входит внутрь угла bAD и так как b параллельна прямой a для точки A , то p пересекает a в точке S . Применим постулат Паша к треугольнику ADS и прямой r . Прямая r пересекает сторону AS треугольника в точке P между вершинами A и S и не пересекает сторону AD , так как r принадлежит углу bBD , который не содержит точек отрезка AD . Откуда и следует, что r не может пересечь сторону AD между точками A и D . Следовательно, прямая r , не проходя ни через одну из вершин треугольника ADS , *пересечёт сторону DS этого треугольника между точками D и S , т. е. прямую a .*

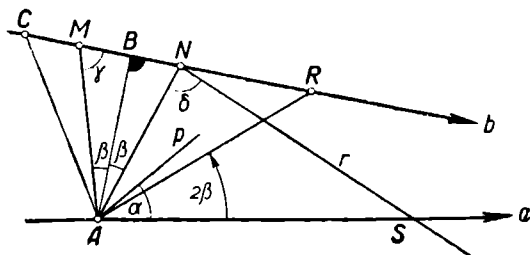
2) Точка B прямой b находится от точки A в сторону, противоположную направлению параллелизма. Нужно доказать, что любая прямая r угла bBC пересечёт прямую a . Для доказательства возьмём точку T на прямой r , принадлежащую углу, вертикальному для угла bBC , и соединим T с A прямой p (черт. 39). Прямая p , входя внутрь угла bAC , пересекает прямую a в точке S , так как прямая b параллельна прямой a для точки A . Рассмотрим треугольник ACS и прямую r . Прямая r пересекает сторону AC между точками A и C , так как r принадлежит углу ABC и не пересекает стороны AS между точками A и S , так как r с прямой $p \equiv AS$ уже имеет общую точку T вне отрезка AS . Применяя постулат Паша



Черт. 39.

к треугольнику ACS и прямой r , которая не проходит через вершины треугольника, найдём, что r пересекает сторону CS между вершинами C и S , т. е. *прямая r пересекает прямую a* . Теорема доказана полностью. Отныне мы имеем право говорить о прямой b , параллельной прямой a , не выделяя на b специальной точки, так как b параллельна a по данному направлению для всех своих точек.

Теорема. Если прямая b параллельна прямой a по данному направлению, то и прямая a , в свою очередь, параллельна прямой b по тому же направлению (черт. 40).



Черт. 40.

Чтобы это доказать, необходимо установить:

- 1) что прямая a не пересекает прямой b ; 2) что всякая прямая p угла aAC , составляющая с a произвольный угол α , пересекает прямую b (C — произвольная точка на b).

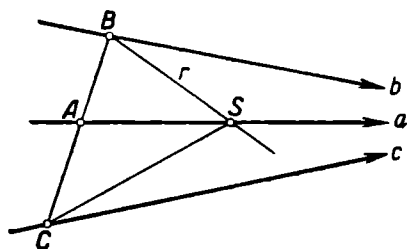
Первое имеет место, так

как b параллельна a , и, следовательно, a не имеет общей точки с b . Остаётся доказать второе. Опустим перпендикуляр AB на прямую b и возьмём на прямой b точки M и N по разные стороны от точки B так, чтобы $\angle NAB = \angle BAM = \beta < \frac{\alpha}{2}$. Обозначим $\angle AMB$ через γ ;

γ меньше $\angle bNA$, так как $\angle bNA$ — внешний угол треугольника ANM .

Построим прямую r под углом δ к прямой AN ; $\delta = \angle AMB = \gamma$. Так как $\angle bNA > \gamma = \delta$, то r будет принадлежать углу bNA и, следовательно, пересечёт прямую a в точке S . Это следует из того,

что b параллельна прямой a . Отложим, далее, от точки M на прямой b в сторону параллельности отрезок $MR = NS$ и рассмотрим $\triangle AMR$. Этот треугольник равен треугольнику NAS , так как $AM = AN$ в силу построения, $MR = NS$ также в силу построения, и углы, заключённые между ними, δ и γ , равны. Если $\triangle ANS$ повернуть против часовой стрелки на угол 2β вокруг точки A , то он совпадёт с треугольником AMR . Сторона AS , в частности, после поворота совпадёт с AR , следовательно, $\angle RAS = 2\beta$, а так как $\beta < \frac{\alpha}{2}$, или $2\beta < \alpha$, то прямая r войдёт внутрь угла A треугольника MAR и, следовательно, пересечёт сторону MR этого треугольника. Таким образом, прямая r пересечёт b . Но r — произвольная прямая угла BAa . Итак, доказано, что прямая a параллельна прямой b для точки A , а значит и для любой своей точки, как это следует из



Черт. 41.

предыдущей теоремы. Справедливость только что доказанной теоремы позволяет нам говорить, что прямые a и b взаимно параллельны в данном направлении. Установим теперь транзитивность параллелизма.

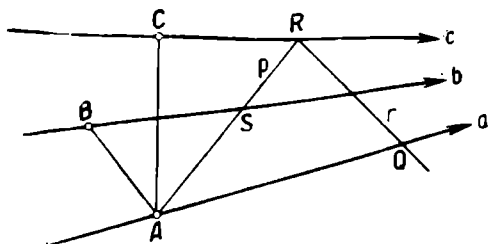
Теорема. Две прямые b и c , параллельные третьей прямой a в одном и том же направлении, параллельны между собой в том же направлении.

Доказательство разобьём на два пункта.

1) Прямые b и c лежат по разные стороны от прямой a (черт. 41). Возьмём точку B на прямой b и точку C на прямой c . Отрезок BC , имея концы по разные стороны от прямой a , пересекает эту последнюю в точке A . Так как по условию b параллельна a , то любая прямая r угла bBC пересекает прямую a в точке S и, входя внутрь угла aSC , пересечёт и прямую c . Кроме того, сами прямые b и c не пересекаются, ибо лежат по разные стороны прямой a . Итак, прямая b параллельна прямой c . И в силу того, что полупрямая r проводилась в полуплоскости SBC , b параллельна c в том же направлении, в котором были параллельны b и c к прямой a .

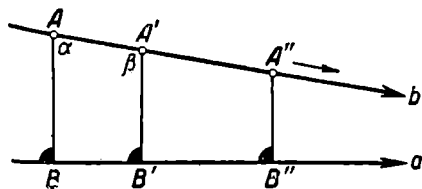
2) Прямые b и c параллельны a в одном и том же направлении и лежат по одну сторону от прямой a (черт. 42). Возьмём три точки: A на прямой a , B на прямой b и C на прямой c . Точки B и C соединим с A , и пусть для определённости прямая b лежит между a и c . Установим, что c не пересекает прямую b . В самом деле, если бы c пересекала b , то c входила бы в полосу между параллельными b и a в направлении параллельности и, следовательно, пересекала бы прямую a . Но так как c параллельна a в этом направлении, то этого быть не может. Возьмём, далее, любую прямую r , принадлежащую общей части углов BAa и CAa (см. чертёж), r пере-

сечёт как прямую c в точке R , так и прямую b в точке S , так как a параллельна b и a параллельна c . Проведём любую прямую r угла cRA . r пересекает прямую a в точке Q , так как c параллельна a . Следовательно, прямая r пересекает и прямую b , в чём можно убедиться, применяя постулат Паша к треугольнику ARQ и прямой b . Таким образом, доказана и вторая часть теоремы.



Черт. 42.

Исследуем теперь, как изменяется расстояние точки A одной параллельной до другой, если точка A перемещается по первой прямой как в сторону параллелизма, так и в противоположном направлении. Легко установить, что при перемещении точки A в сторону параллелизма это расстояние AB монотонно убывает. При перемещении же A в противоположном направлении AB монотонно возрастает (черт. 43). В самом деле, $A'B'$ меньше AB потому, что угол α — острый, а β — тупой, а „против большего угла четырёхугольника лежит и большая сторона“. Точно так же покажем, что $A''B'' < A'B'$. Итак, мы установили, что при движении точки A в сторону параллелизма расстояние AB монотонно убывает. Точно так же убеждаемся, что в противоположном направлении оно монотонно возрастает. Но величина может монотонно возрастать и всё же

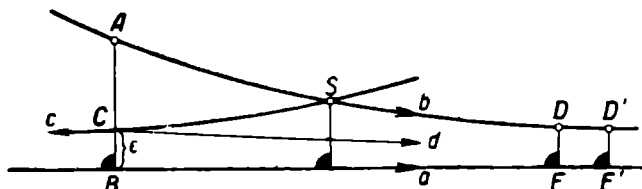


Черт. 43.

оставаться меньше некоторой постоянной величины (например, периметр вписанного правильного многоугольника при неограниченном удвоении числа сторон возрастает, но остаётся меньше периметра описанного многоугольника). И точно так же, если расстояние AB в сторону параллелизма монотонно убывает, то отсюда ещё нельзя заключить, что это расстояние не будет больше некоторой определённой длины (например, периметр описанного правильного многоугольника монотонно убывает при неограниченном удвоении числа сторон, а между тем он никогда не сделается меньше периметра любого вписанного многоугольника). В рассматриваемом же случае имеет место такая теорема: *расстояния точек одной параллельной до другой параллельной при перемещении точки в сторону параллелизма неограниченно убывают, а при перемещении точки в противоположную сторону неограниченно возрастают.*

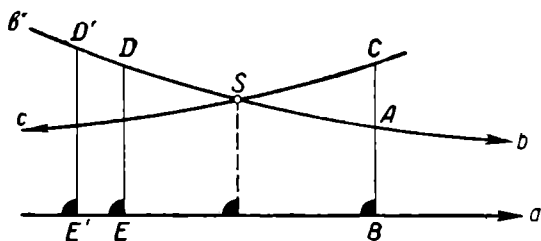
Покажем, во-первых, что какой бы произвольный отрезок ϵ ни взять, всегда можно указать такое положение точки D' на прямой b в направлении параллелизма, что её расстояние от прямой a будет

меньше ϵ . Для доказательства отложим отрезок $\epsilon = BC$ (черт. 44) на перпендикуляре AB так, чтобы C упала в полосу между параллельными, и через C проведём прямую c , параллельную a в направлении, противоположном данному. Докажем, что c пересечёт прямую b . Для доказательства проведём через C прямую d , параллельную a в прежнем направлении. d будет параллельна также и b . Прямая c принадлежит углу dCA и, следовательно, пересекает прямую b в точке S



Черт. 44.

(вспомним, что d параллельна b). На прямой b —в сторону параллелизма—от точки S возьмём точку D так, что $SD = CS$. Длина перпендикуляра DE на прямую a равна ϵ , что следует из того, что точки C и D , так же как и B и E , симметричны относительно перпендикуляра к a через точку S и $CB = DE = \epsilon$. Если точку D сдвинуть дальше в сторону параллелизма, например, в точку D' , то её расстояние до прямой a будет меньше ϵ ; $D'E' < DE = \epsilon$. Короче этот факт выражают словами: *параллельные линии в сторону параллелизма асимптотически приближаются друг к другу*.



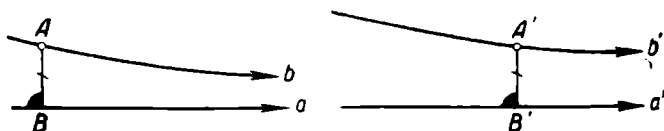
Черт. 45.

Некоторые авторы вместо термина „параллельные прямые“ употребляют термин *асимптотические прямые*. Сам Лобачевский назвал такие прямые *сводными*.

Покажем теперь, что в сторону, противоположную направлению параллелизма, расстояние между точками параллельных

прямых неограниченно возрастает. Это значит, что каким бы отрезком n большим ни взять, можно указать такое положение точки D' на b , что её расстояние от прямой a будет больше n . На перпендикуляре BA возьмём $BC = n$ и через точку C проведём прямую c , параллельную прямой a в направлении, противоположном данному (черт. 45). Эта прямая c пересечёт прямую b в точке S , так как точки прямой b , принадлежащие лучу Ab' , отстоят от прямой a дальше, чем точка A от точки B , а точки прямой c , в направлении её параллелизма к a , неограниченно приближаются к a . Отложим, далее, $SD = SC$ и опустим из D перпендикуляр DE на a . Точно так же, как и в пре-

дыдущем случае, убедимся, что $DE = CB = n$, и, взяв точку D' , отстоящую от S далее, чем точка D , найдём, что $D'E' > n$. Теорема доказана полностью. В сторону, противоположную параллелизму, асимптотические прямые неограниченно расходятся. Часть плоскости, расположенную между параллельными прямыми, назовём *полосой* между параллельными.



Черт. 46.

Теорема. Все полосы между параллельными конгруэнтны между собой, т. е. могут быть наложены друг на друга всеми своими точками.

Рассмотрим две произвольные полосы a, b и a', b' (черт. 46). Возьмём на прямой b точку A и опустим перпендикуляр AB на a . Так как расстояния точек A' до прямой a' принимают все значения между нулём и бесконечностью, то найдётся такая точка A' , что $A'B' = AB$ и, наложив $A'B'$ на AB , мы и осуществим наложение полос.

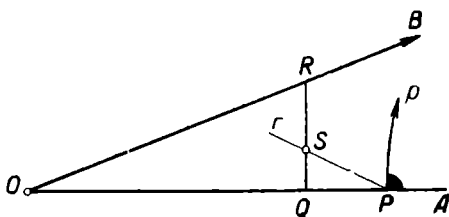
Возвратимся в заключение к первому перпендикуляру p к стороне OA угла AOB , который не пересекает сторону OB (черт. 47).

Теорема. Первый перпендикуляр p к стороне OA , не пересекающий сторону OB произвольного острого угла AOB , параллелен стороне OB .

Доказательство. 1) OB и p не пересекаются. 2) любая прямая r угла OPp пересечёт OB .

В самом деле, взяв на луче r точку S и проведя SQ перпендикулярно OA , найдём, по предыдущему, что этот перпендикуляр пересечёт OB в точке R . Применяя к треугольнику OQR и прямой r постулат Паша, найдём, что r пересечёт сторону OR между вершинами O и R .

После выяснения этого факта теорема о первом перпендикуляре может быть сформулирована так: каков бы острый угол ни был, всегда существует перпендикуляр к одной стороне его, параллельный другой стороне.



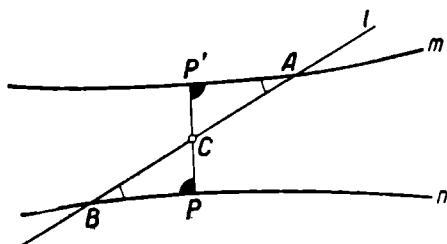
Черт. 47.

§ 23. Угол параллельности.

Докажем одно вспомогательное предложение, относящееся к сверхпараллельным прямым.

Если две прямые m и n в пересечении с третьей прямой l образуют внутренние накрестлежющие углы равные, то прямые m

n и h — *сверхпараллельны*. Пусть C — середина отрезка AB секущей (черт. 48). Опустим из C перпендикуляр CP на прямую n и перпендикуляр CP' на прямую m . Эти два перпендикуляра *составляют продолжение один другого*. В самом деле, треугольник CPB равен треугольнику $CP'A$, ибо в этих прямоугольных треугольниках гипотенузы и острые углы B и A равны, а, следовательно, углы C также равны (которые в этом случае будут вертикальными), и линия PCP' оказывается *прямой*. Прямые m и n как перпендикулярные к прямой PP' — *сверхпараллельны*. Вспомогательное предложение доказано.

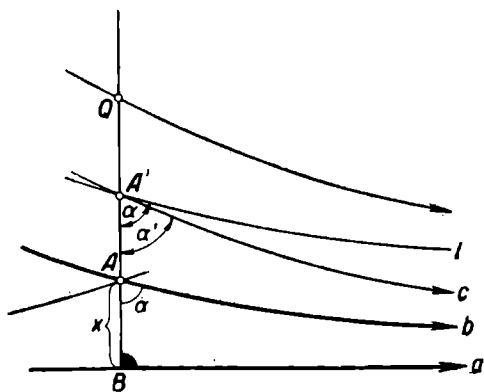


Черт. 48.

Если к прямой a через точку A , взятую вне a , провести параллельную b , то угол $\alpha = \angle bAB$ (черт. 49)

называется *углом параллельности для точки A и прямой a* . Легко понять, что каждому расстоянию x точки A до прямой a отвечает свой вполне определённый угол параллельности α , так как через точку A на расстоянии x от прямой a можно провести единственную параллельную b в данном направлении к прямой a и, следовательно, под определённым углом α к перпендикуляру AB . Параллель через точку A в противоположном направлении симметрична прямой b относительно перпендикуляра AB и образует с AB тот же угол α . Итак, *каждому отрезку x соответствует свой вполне определённый угол α* . Следовательно, α есть функция x . Лобачевский ввёл обозначение $\alpha = \Pi(x)$. Займёмся качественным изучением этой функции.

1) $\Pi(x)$ — *функция монотонно убывающая*. Это значит, что с возрастанием аргумента x $\Pi(x)$ убывает. В этом убедиться нетрудно. Возьмём на перпендикуляре AB точку A' так, что $A'B = x' > x$, и проведём через A' параллель c к a , в данном направлении. Тогда угол параллельности $\alpha' = \Pi(x')$. А если через A' провести прямую l под углом α к $A'B$, то l будет *сверхпараллельной* для прямой b , так как l и b с секущей $A'A$ образуют соответственные углы, равные α , следовательно, будут равны углы накрестлежащие, а такие прямые, как мы знаем, *сверхпараллельны*. Отсюда следует, что пря-



Черт. 49.

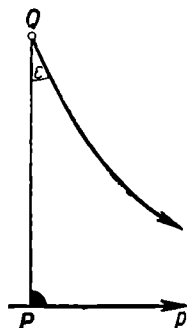
мая l не принадлежит углу $CA'A$, а это и означает, что $\alpha' < \alpha$, т. е. $\Pi(x') < \Pi(x)$ при $x' > x$.

2) При неограниченном возрастании x угол $\alpha = \Pi(x)$ убывает неограниченно, т. е. сделается меньше любого сколь угодно малого произвольно заданного угла $\epsilon > 0$. В самом деле, построив угол ϵ , найдём такую точку P на одной из его сторон (черт. 50), что перпендикуляр p в P к этой стороне будет параллелен другой стороне, что по „теореме о первом перпендикуляре“ возможно. Совместим теперь прямую p с прямой a так, чтобы точка P упала на точку B (черт. 49). Перпендикуляр PQ пойдёт по направлению BA , и вершина Q угла ϵ упадёт на точку Q' . Параллель в Q' к прямой a имеет угол параллельности ϵ . Дальнейшее удаление точки Q' по перпендикуляру PA даст углы параллельности, меньшие ϵ . Доказанное положение можно записать так: $\lim_{x \rightarrow \infty} \Pi(x) = 0$. Легко также понять, что при

$x \rightarrow 0$ угол $\Pi(x) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ *). Лобачевский нашёл явное выражение для функции $\Pi(x)$.

Приведём, пока без доказательства, эту формулу Лобачевского:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(x) = e^{-\frac{x}{k}}$$



Черт. 50.

Здесь e — неперово число, а k — совершенно произвольная положительная постоянная. Наличие во всех формулах Лобачевского произвольной положительной постоянной k есть особенность геометрии Лобачевского. Постоянную k можно связать с другой постоянной c , имеющей наглядный характер.

Постоянная c есть не что иное, как расстояние, которому соответствует угол параллельности $\frac{\pi}{4}$, т. е. $\Pi(c) = \frac{\pi}{4}$. Подставив в формулу Лобачевского

вместо x значение c , найдём: $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(c) = e^{-\frac{c}{k}}$, или, приняв во внимание

значение $\Pi(c)$, получим: $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = e^{-\frac{c}{k}}$, откуда: $-\frac{c}{k} = \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$, т. е. c пропорционально k . Именно:

$k = -\frac{c}{\ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}$ **); из последней формулы видно, что задать постоянную c

произвольно всё равно, что задать постоянную Лобачевского произвольно.

*) Причём единица меры для углов выбрана так, чтобы прямому углу соответствовало число $\frac{\pi}{2}$, и π определено вне всякой связи с геометрией, например, рядом Лейбница:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

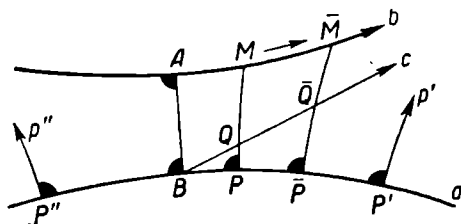
**) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} < 1$; $\ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} < 0$.

При $c \rightarrow \infty$ и $k \rightarrow \infty$. Чему равна величина c , т. е. расстояние, соответствующее углу $\frac{\pi}{4}$? Геометрия Лобачевского утверждает, что *постоянная c может быть выбрана совершенно произвольно*. Этот отрезок c часто принимают за единицу масштаба. Любопытно, что в геометрии Лобачевского существует вполне определённый отрезок, который может быть принят за единицу масштаба. В геометрии Лобачевского, так же как и у Евклида, существует „естественная мера углов“. Именно: прямой угол может быть принят за единицу. В геометрии Лобачевского существует также „естественная“ мера отрезков. Отрезок c может быть принят за единицу. Интересно отметить: чем больше по величине отрезок c , тем ближе геометрия Лобачевского к такому c подходит к геометрии Евклида. При $c \rightarrow \infty$ и, значит, при $k \rightarrow \infty$ мы получаем геометрию Евклида как предельный случай геометрии Лобачевского. Так, перейдя к пределу при $k \rightarrow \infty$ в формуле Лобачевского, найдём: $\Pi(x) = \frac{\pi}{2}$ при любом x , а это характеризует геометрию Евклида.

Из формулы Лобачевского можно сделать такой вывод: при каждом данном k можно рассматривать столь малый кусок плоскости, что все „самые большие расстояния“ x будут столь малы, что $e^{-\frac{x}{k}}$ будет „очень близко“ к единице, а следовательно, $\Pi(x)$ „очень близко к $\frac{\pi}{2}$ “. Отсюда такой вывод: *в достаточно малых кусках плоскости Лобачевского без ощутительной погрешности можно пользоваться геометрией Евклида.*

§ 24. Свойства сверхпараллелей Лобачевского.

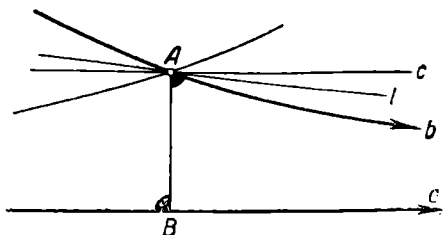
Мы знаем, что два перпендикуляра к одной и той же прямой — сверхпараллельны. Из рассмотрения четырёхугольника Саккери мы также знаем, что перпендикуляр к двум сверхпараллельным прямым



Черт. 51.

есть кратчайшее расстояние между точками этих прямых. Мы видели также, что, передвигаясь по одной из сверхпараллельных в ту или другую сторону от их общего перпендикуляра, получаем всё большие и большие расстояния точек этой сверхпараллельной до другой. Оказывается, что *расстояния MP точек M одной из сверхпараллельных до другой неограниченно возрастают по мере удаления точки M от основания их общего перпендикуляра AB* . В этом можно убедиться, например, так: через точку B проведём прямую c , параллельную прямой b в одном из направлений (черт. 51). Эта прямая принадлежит углу aBA . Перпендикуляр PQ в точке P к прямой a при возрастании расстояния BP возрастает; $QP \rightarrow \infty$. Точка P может занять такое положение P' , при котором этот перпендикуляр будет параллелен прямой c , а следовательно, и прямой b (две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой в одном и том же направлении),

но расстояние MP точки M прямой b от прямой a больше QP ($MP > QP$), так как M и P лежат по разные стороны прямой c . Расстояние же PQ , а следовательно, и MP можно сделать больше всякого сколь угодно большого произвольно заданного отрезка. В самом деле, пусть точка $\bar{Q}$ на прямой c выбрана так, что перпендикуляр $\bar{Q}\bar{P}$ больше любого, наперёд заданного отрезка N . Прямая $\bar{P}\bar{Q}$ пересечёт b в точке $\bar{M}$, так как c параллельна b в направлении AM . Следовательно, $\bar{P}\bar{M} > \bar{P}\bar{Q} > N$. В силу симметрии прямые a и b неограниченно расходятся и по другую сторону их общего перпендикуляра AB . Из приведенных рассуждений вытекает еще одна интересная теорема.

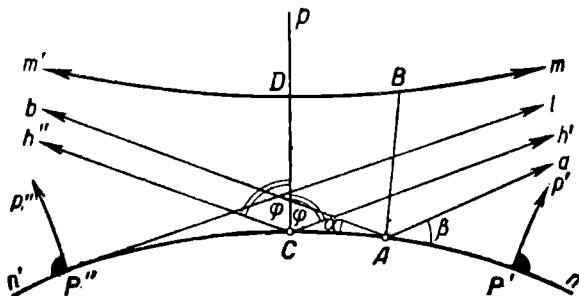


Черт. 52.

Теорема. Если две сверхпараллельные прямые a и b имеют общий перпендикуляр AB , то на каждой из них, например a , существуют точки $P'P''$ (симметричные относительно общего перпендикуляра AB), такие, что перпендикуляры p' и p'' в этих точках к прямой a параллельны — каждый в своём направлении — прямой b .

Всё доказанное относится к сверхпараллельным прямым, имеющим общий перпендикуляр. Но всякие ли две сверхпараллельные прямые имеют общий перпендикуляр? Например, a и l сверхпараллельны, но l не перпендикулярна к AB (черт. 52). Существует ли у прямых a и l общий перпендикуляр?

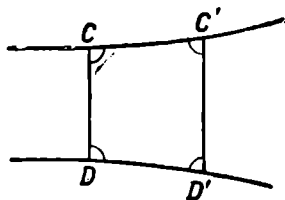
Теорема. Всякие две сверхпараллельные прямые m и n имеют общий перпендикуляр и притом только один.



Черт. 53.

Пусть m и n — сверхпараллельные прямые (черт. 53). Взяв произвольную точку A на прямой n , проведём через неё прямые a и b , параллельные прямой m в каждом из направлений. Прямая a принадлежит углу nAB , а прямая b углу $n'AB$, где B — некоторая точка на m . По крайней мере один из углов, $\angle aAn = \beta$ и $\angle bAn' = \alpha$, —

острый. Пусть α — острый. По теореме о первом перпендикуляре существует такая точка P'' на стороне n' , что перпендикуляр p'' к n' параллелен стороне b и, следовательно, прямой m' . Из точки P'' проведём прямую l , параллельную m в указанном направлении. На стороне n угла $n''l$ отметим точку P' такую, что перпендикуляр $p'P'$ к n будет параллелен прямой l (на чертеже P' лежит далее точки A от точки P'' , чего могло и не быть, если угол β — тупой). p' параллельна l , а l параллельна m в том же направлении. Следовательно, p' параллельна m . Разделив расстояние $P'P''$ точкою C пополам и проведя прямую p , перпендикулярную к n в этой середине C , получим общий перпендикуляр p сверхпараллельных прямых m и n . В самом деле, в силу симметрии, прямые h' и h'' , проведённые из точки C параллельно прямым p' и p'' соответственно, а следовательно, параллельные m и m' , образуют равные углы φ с прямой p . Откуда следует, что p перпендикулярна к mm' *).



Черт. 54.

Двух общих перпендикуляров сверхпараллельные прямые иметь не могут.

Так как если бы существовали два перпендикуляра CD и $C'D'$ (черт. 54), то мы имели бы четырёхугольник $CDD'C'$ с четырьмя прямыми углами, а этого в геометрии Лобачевского быть не может. Теорема доказана полностью.

Таким образом, *всякие две* сверхпараллельные прямые m и n неограниченно расходятся от их общего перпендикуляра. Лобачевский назвал сверхпараллельные прямые „разводными“.

§ 25. Некоторые частные случаи взаимного расположения прямых на плоскости Лобачевского.

В заключение этой главы рассмотрим некоторые частные случаи расположения прямых на плоскости Лобачевского. Воспользовавшись известным нам материалом, изучим некоторые фигуры, составленные из прямых, существование которых в евклидовой геометрии не имеет места. Рассмотрим биссектрису b прямого угла xOy (черт. 55).

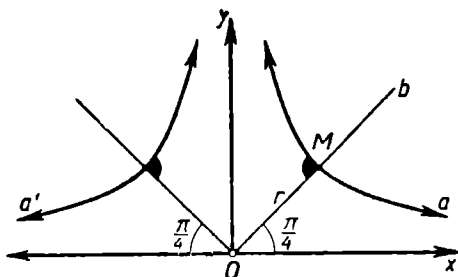
Отложим на ней отрезок $r = OM$ такой, что $\Pi(r) = \frac{\pi}{4}$, и восставим к b перпендикуляр a в конце M отрезка OM . Этот перпендикуляр будет параллелен как прямой Ox в одном своём направлении, так и прямой Oy — в другом. Мы получим „треугольник“, стороны которого Ox , Oy и a . Угол между сторонами Ox и Oy — прямой, а остальные углы — равны нулю. Если взять биссектрису смежного угла xOy и выполнить то же построение, то получим прямую a' , параллельную y в прежнем направлении и параллельную x — в про-

*) Это доказательство было доложено автором кафедры математики пединститута им. Либкнехта в 1942 г.

тивоположном. Получим „треугольник“, составленный из трёх прямых x , a и a' , стороны которого — *полные прямые и углы равны нулю*. Назовём его *треугольником с нулевыми углами*. Что углы между параллельными прямыми естественно считать равными нулю, следует из предельного перехода от секущей к параллели. При удалении точки M по прямой a в сторону параллельности неограниченно (черт. 56) угол α стремится к нулю (§ 1); в то же время из определения параллелей следует, что при $BM \rightarrow \infty$ предельное положение секущей AM есть прямая b , параллельная a .

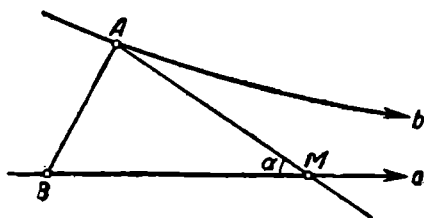
Таким образом, *естественно считать угол между параллельными равным нулю*. Заметим здесь же, что *двум*

сверхпараллельным прямым нельзя приписать никакого действительного значения угла. Попутно отметим такой интересный факт. К двум параллельным прямым a и x в одном направлении суще-



Черт. 55.

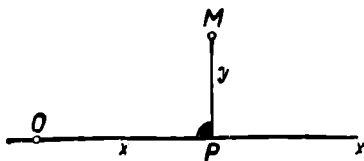
ствует прямая a' , параллельная им в противоположных направлениях. Это прямо следует из рассмотрения треугольника с нулевыми углами (черт. 55). Из рассмотрения прямого угла xOy и прямой a , параллельной обеим сторонам этого угла, следует, что к одной из двух параллельных прямых x и a существует такой перпенди-



Черт. 56.

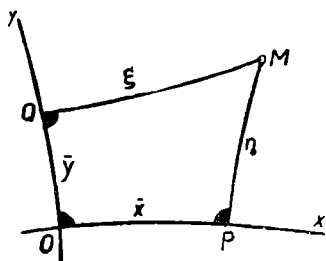
куляра Oy , который параллелен другой параллельной, но в противоположном направлении.

Остановимся в заключение на установлении системы координат на плоскости Лобачевского. Вполне аналогично случаю евклидовой геометрии можно определить систему декартовых координат в форме, указанной на чертеже 57. Именно: на прямой Ox от точки O откладывают положительные и отрицательные абсциссы $OP = x$, а ординаты $PM = y$ откладывают по перпендикуляру к оси Ox в точке P . Ординаты — положительные по одну сторону оси Ox , отрицательны — по другую. На самой оси Ox ординаты равны нулю. При этом несущественно, проводится ли ось ординат в точке O или нет. Из этого определения координат следует, что каждой упорядоченной паре чисел x, y отвечает единственная точка M плоскости и, обратно, каждой точке M плоскости отвечает упорядоченная пара чисел, так как

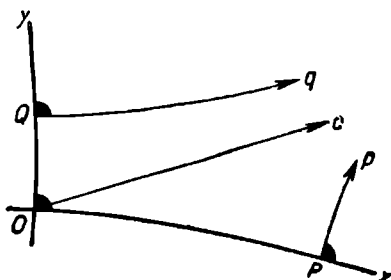


Черт. 57.

из каждой точки M в плоскости можно провести перпендикуляр к Ox и притом только один. Совсем другая картина получится, если абсциссы откладывать, как мы только что делали, а ординаты откладывать на оси Oy . В этом случае каждой точке M отвечает упорядоченная пара чисел, которые будут координатами этой точки, так как через каждую точку M можно провести перпендикуляры MP и MQ к осям координат (черт. 58). За координаты точки M можно принять $OP = \bar{x}$ и $OQ = \bar{y}$. Если же за ординату взять PM , а за абсциссу $MQ = \xi$, то получим систему координат, отличную от первой, так как $\xi \neq x$. Именно, легко видеть, что $\xi > x$, так как перпендикуляр OP есть *кратчайшее* расстояние между двумя сверхпараллельными прямыми PM и OQ . В этих трёх различных системах координат точке M соответствуют различные пары чисел (x, y) ; $(\bar{x}, \bar{y})$; (ξ, η) . Декартовой системой координат называется первая (черт. 57), и если в декартовой системе координат соответ-



Черт. 58.



Черт. 59.

ствие между точками плоскости и упорядоченными парами чисел взаимно однозначно, то в последних двух случаях этого не будет. Например, если каждой точке M плоскости отвечает единственная пара чисел $(\bar{x}, \bar{y})$, то обратное неверно. Можно указать такие числа $\bar{x}, \bar{y}$, которым не соответствует ни одна точка плоскости. В этом можно убедиться, например, так: проведём через начало координат любую прямую s и прямые p и q , перпендикулярные к осям координат и параллельные прямой s (черт. 59). Числа $\bar{x} = OP$, $\bar{y} = OQ$ не определяют положения точки. Также $\bar{x}$ и $\bar{y}$ нельзя взять соответственно и одновременно больше OP и OQ . Соответствие между точками и парами чисел не взаимно однозначно. Лобачевский в своей аналитической геометрии пользовался всеми указанными системами координат.

ГЛАВА ЧЕТВЁРТАЯ

УЧЕНИЕ О ПЛОЩАДЯХ В ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Установить понятие площади *простого* плоского многоугольника *), в частности треугольника, это значит найти способ поставить в соответствие каждому такому многоугольнику *положительное число* так, чтобы удовлетворялись требования:

1°. *Конгруэнтным или равным многоугольникам были поставлены в соответствие равные числа.*

2°. *Число, поставленное в соответствие многоугольнику, составленному из двух смежных многоугольников, равно сумме чисел, поставленных в соответствие каждому из этих смежных многоугольников (свойство аддитивности).*

Два простых многоугольника называются *смежными*, если они имеют одну или несколько общих сторон или частей сторон, но не имеют ни одной общей внутренней точки.

При выполнении указанных требований *числа*, поставленные в соответствие каждому простому многоугольнику, называются *площадями* соответствующих многоугольников.

Изложенное в этой главе имеет целью показать, что в геометрии Лобачевского достаточно *каждому треугольнику поставить в соответствие число, пропорциональное дефекту этого треугольника*, чтобы установить систему измерения площадей. [Дефект δ треугольника есть разность между π и суммой углов треугольника, т. е. $\delta = \pi - (A + B + C)$.] Площадь любого простого многоугольника будет определена в соответствии со свойством аддитивности как сумма площадей треугольников, на которые можно разбить многоугольник; причём имеет место независимость площади от способа разбиения многоугольника на треугольники **).

§ 26. Конгруэнтность четырёхугольников Саккери.

В геометрии Лобачевского, так же как и в геометрии Евклида, площади криволинейных фигур определяются как пределы площадей вписанных и описанных многоугольников, так что всё дело сводится

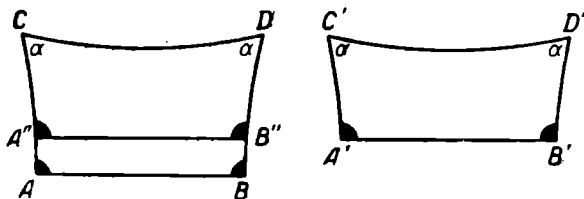
*) Определение простого многоугольника дано в § 37, стр. 78.

**) Ср. с изложением у Адамара [1]. Прибавление Д. О понятии площади. Приведённая здесь теория площадей принадлежит Лобачевскому [17]. Обработку доказательств Лобачевского см. [13].

к вычислению площадей многоугольников. Разбивая последние диагоналями, если многоугольник выпуклый, на треугольники, мы приходим к задаче *определения площади треугольника*, решением которой мы и будем заниматься на протяжении этой главы. Докажем сначала одно вспомогательное предложение.

Четырёхугольники Саккери с равными верхними основаниями и равными соответственно острыми углами при них конгруентны.

Доказательство. Пусть в четырёхугольниках Саккери $ABDC$ и $A'B'D'C'$: $CD = C'D'$ и острые углы при CD и $C'D'$ равны (черт. 60). Эти углы мы обозначим через α . Наложим четырёхугольник $A'B'D'C'$ на четырёхугольник $ABDC$ так, что $C'D'$ совпадёт с CD ; прямая $C'A'$ пойдёт по CA , вследствие равенства углов. По той же причине



Черт. 60.

прямая $D'B'$ пойдёт по DB , и вопрос заключается в том, упадёт ли точка A' в точку A , а точка B' в точку B ? Допустим, что A' займёт положение A'' , а B' — положение B'' и точки A'' , B'' будут лежать по одну сторону от прямой AB (на нашем чертеже выше AB). Так как два перпендикуляра AB и $A''B''$ к одной и той же прямой AC сверхпараллельны, то в таком случае две сверхпараллельные прямые AB и $A''B''$ будут иметь два общих перпендикуляра AC и CD , но этого быть не может. Следовательно, при указанном наложении должны совпасть и нижние основания $A'B'$ и AB четырёхугольников Саккери. Итак, четырёхугольники конгруентны. Предложение доказано.

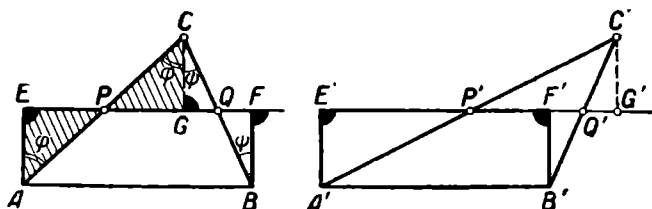
§ 27. Дефект треугольника и площадь треугольника.

Теорема. *Два треугольника, имеющие равные дефекты и по равной стороне, равновелики.*

Доказательство. Пусть треугольники ABC и $A'B'C'$ (черт. 61) имеют равные стороны AB и $A'B'$ и одинаковые дефекты $\delta = \pi - (A + B + C)$, $\delta' = \pi - (A' + B' + C')$, $\delta = \delta'$.

Для каждого треугольника выполним следующие построения. Середины P и Q сторон AC и CB треугольника ABC соединим прямой и из точек A и B опустим перпендикуляры AE и BF на эту прямую. Из точки C также опустим перпендикуляр CG на эту прямую. Такое же построение выполним для треугольника $A'B'C'$. Прямоугольные треугольники PGC и AEP равны, так как имеют равные гипотенузы и равные острые углы при P как вертикальные. Анало-

гично заключаем о равенстве треугольников CGQ и QFB . Отсюда легко понять, что четырёхугольник $AEFB$ равновелик треугольнику ABC . Точно так же четырёхугольник $A'E'F'B'$ равновелик треугольнику $A'B'C'$. Но четырёхугольники $EFBA$ и $E'F'B'A'$ суть четырёхугольники Саккери, так как $EA=CG=FB$, $A'E'=C'G'=B'F'$ и углы E, F, E' и F' — прямые. Сумма углов A и B при „верхнем“ основании AB первого четырёхугольника равна сумме углов треугольника ABC ; это следует из того, что угол C построением разбит на два

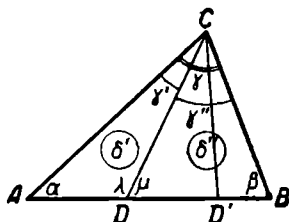


Черт. 61.

угла φ и ψ и каждый из них прибавлен к углам A и B . Точно так же видим, что четырёхугольник $E'F'B'A'$ имеет сумму углов при „верхнем“ основании, равную сумме углов треугольника $A'B'C'$. Но так как по условию дефекты треугольников равны, а следовательно, равны и суммы их углов, то отсюда заключаем, что четырёхугольники $EFBA$ и $E'F'B'A'$ — конгруентны, как имеющие *равные „верхние“ основания* $AB=A'B'$ и *равные углы при верхних основаниях*, ибо на долю каждого угла падает полусумма углов треугольника. Следовательно, треугольники ABC и $A'B'C'$ равновелики, и теорема доказана.

Установим ещё одно вспомогательное предложение.

Если треугольник ABC разбить трансверсалью CD на два треугольника ADC и DBC , то сумма дефектов δ' и δ'' этих последних треугольников равна дефекту δ треугольника ABC (черт. 62).



Черт. 62.

В самом деле, имеем $\delta' = \pi - (\alpha + \lambda + \gamma')$, $\delta'' = \pi - (\mu + \beta + \gamma'')$, складывая, получим: $\delta' + \delta'' = 2\pi - (\alpha + \beta + \gamma' + \gamma'') - (\lambda + \mu)$. Но так как $\gamma' + \gamma'' = \gamma$; $\lambda + \mu = \pi$, то $\delta' + \delta'' = \pi - (\alpha + \beta + \gamma) = \delta$.

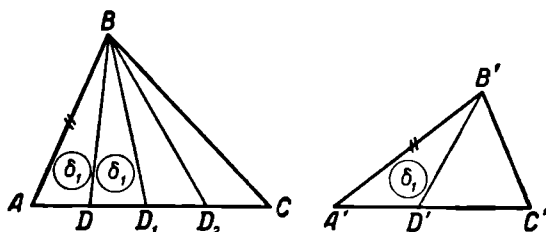
Кроме того, если точка D будет перемещаться по AB от A до B , то дефект δ' будет изменяться от 0 до δ , принимая любое значение между 0 и δ . Если точка D стремится совпасть с точкой A , то $\gamma' \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow \alpha$, а следовательно,

$$\lambda \rightarrow \pi - \alpha \text{ и } \delta' = \pi - (\alpha + \gamma' + \lambda) \rightarrow \pi - \pi = 0.$$

Если теперь точка D начинает своё перемещение от точки A , то дефект δ' треугольника ADC начинает своё изменение со значения 0.

И если точка D займёт положение D' , то дефект треугольника $AD'C$ будет больше дефекта треугольника ADC на величину дефекта треугольника $DD'C$. Отсюда мы видим, что при перемещении точки D от A до B дефект δ' треугольника ADC возрастает от 0 до δ , где δ — дефект треугольника ABC . Причём возрастание происходит непрерывно, а это означает, что какое бы число δ_1 между 0 и δ мы ни взяли ($0 < \delta_1 < \delta$), всегда существует такое положение точки D на отрезке AB , что дефект треугольника ADC равен δ_1 . Это важное предложение нам и понадобится в дальнейшем.

Теорема. Площади двух треугольников, имеющих по равной стороне, относятся, как их дефекты.



Черт. 63.

Пусть в треугольниках ABC и $A'B'C'$ (черт. 63) $AB = A'B'$, δ и δ' — дефекты этих треугольников, а Δ и Δ' — их площади.

Требуется установить, что $\frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{\delta}{\delta'}$.

1°. Пусть дефекты δ и δ' — соизмеримы. Это значит, что они имеют общую меру δ_1 , которая в дефекте δ укладывается m раз, а в дефекте δ' n раз, т. е. $\delta = m\delta_1$, а $\delta' = n\delta_1$, где m и n натуральные числа, и $0 < \delta_1 \leq \delta$ и $0 < \delta_1 \leq \delta'$. Тогда, по предыдущему, как на AC , так и на $A'C'$ существуют такие точки D и D' , что дефекты треугольников ADB и $A'D'B'$ равны δ_1 . Но в таком случае треугольники ADB и $A'D'B'$ равновелики, так как они имеют равные дефекты и по равной стороне ($AB = A'B'$). Далее, от треугольника DBC трансверсалью BD_1 „отрежем“ $\triangle DD_1B$, дефект которого также δ_1 ; затем от треугольника D_1BC „отрежем“ $\triangle D_1D_2B$, дефект которого также равен δ_1 , и т. д. В результате $\triangle ABC$ трансверсальями из B разобьётся на m треугольников с дефектами, равными δ_1 . Точно так же $\triangle A'B'C'$ трансверсальями из B' разобьётся на n треугольников с дефектами δ_1 . Но $\triangle DBD_1$ равновелик треугольнику ABD , так как сторона BD у них общая, а дефекты равны. По той же причине $\triangle D_1D_2B$ равновелик треугольнику DD_1B и т. д. Следовательно, все m треугольников, на которые разбился $\triangle ABC$, равновелики. По той же причине n треугольников, на которые разбился треугольник $A'B'C'$, также равновелики как между собой, так и с каждой частью треугольника ABC , так как равновелики треугольники ADB и $A'D'B'$. Значит, одна и та же

площадь в первом треугольнике укладывается m раз, а во втором n раз. Отсюда следует, что:

$$\frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{m}{n} = \frac{m\delta_1}{n\delta_1} = \frac{\delta}{\delta'}, \text{ ч. т. д.}$$

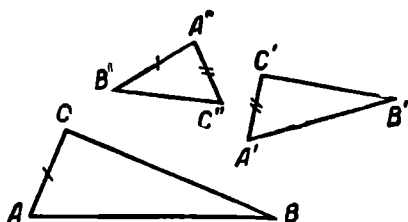
2°. Случай, когда дефекты δ и δ' несоизмеримы, рассматривается обычным в этом вопросе методом. Именно: используя первую часть доказательства для случая соизмеримых дефектов, показывают, что площади треугольников относятся как их дефекты с точностью до одной N , где N —любое целое число. При переходе к пределу при $N \rightarrow \infty$ и устанавливается справедливость теоремы в несоизмеримом случае. Теперь докажем теорему в общем случае.

Теорема. *Площади любых треугольников относятся как их дефекты.*

Доказательство. Пусть ABC и $A'B'C'$ — два произвольных треугольника, дефекты которых соответственно равны δ и δ' . Построим третий треугольник так, что $A''B'' = AC$ и $A''C'' = A'C'$ (черт. 64). Дефект последнего треугольника пусть будет δ'' . Таким образом, треугольники ABC и $A''B''C''$ имеют по равной стороне. Следовательно, по предыдущей теореме их площади относятся как их дефекты: 1) $\frac{\Delta}{\Delta''} = \frac{\delta}{\delta''}$. В свою очередь $A''B''C''$ и $A'B'C'$ также имеют по равной стороне и, следовательно: 2) $\frac{\Delta''}{\Delta'} = \frac{\delta''}{\delta'}$, где Δ , Δ' и Δ'' — площади рассматриваемых треугольников. Перемножая почленно равенства 1) и 2), найдём окончательно: $\frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{\delta}{\delta'}$, что доказывает теорему.

Отсюда вытекает, что *отношение площади треугольника к его дефекту есть величина постоянная, от треугольника не зависящая* (одна и та же для всех треугольников). В самом деле, перепишем равенство $\frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{\delta}{\delta'}$ в виде $\frac{\Delta}{\delta} = \frac{\Delta'}{\delta'}$. И если считать треугольник ABC данным, а $A'B'C'$ — произвольным, то полученное равенство показывает, что отношение площади *произвольного* треугольника к его дефекту равно отношению тех же величин для данного треугольника. Как обозначить это постоянное отношение, зависит от единицы меры площади. Обычно выбирают эту постоянную равной k^2 , где k — та самая постоянная Лобачевского, которая входит в формулу Лобачевского для угла параллельности. При таком выборе величины постоянного отношения площади к дефекту получаем $\frac{\Delta}{\delta} = k^2$, откуда $\Delta = k^2\delta$, или, приняв во внимание, что

$$\delta = \pi - (A + B + C),$$



Черт. 64.

формулу для площади треугольника можно написать так:

$$\Delta = k^2 [\pi - (A + B + C)].$$

Примечание. Если формально алгебраически положить $k = iR$, где $i = \sqrt{-1}$, и это значение подставить в формулу площади треугольника, то получим:

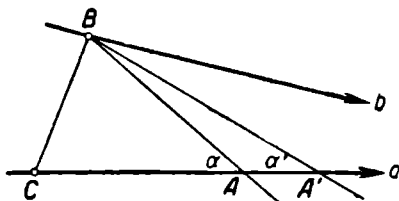
$$\Delta = -R [\pi - (A + B + C)] = R [(A + B + C) - \pi],$$

а это есть *формула для площади треугольника на сфере*, стороны которого суть дуги больших кругов, а углы — A, B, C [2]. Оказывается, что и все формулы геометрии Лобачевского при замене k значением iR переходят в формулы геометрии на сфере.

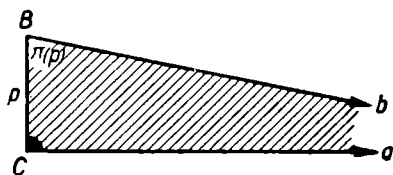
Лобачевский подробно обосновал этот факт связи между своей геометрией и сферической геометрией.

§ 28. Предельные случаи треугольников.

Остановимся теперь на некоторых следствиях, вытекающих из формулы $\Delta = k^2 [\pi - (A + B + C)]$. Ясно, что *чем меньше сумма $A + B + C$ углов треугольника, тем больше его площадь*. Наоборот, *чем меньше треугольник по своим размерам, т. е. чем меньше его площадь, тем ближе сумма его углов к π* . Рассмотрим такой пре-



Черт. 65.



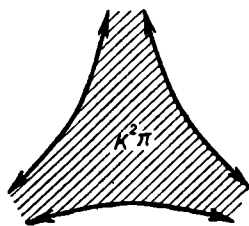
Черт. 66.

дельный случай треугольника. Взяв $\triangle ABC$ (черт. 65) и оставив неподвижными вершины B и C , будем вершину A перемещать вдоль основания неограниченно, например, вправо, тогда, как известно, угол $\alpha = \angle A$ будет стремиться к нулю, а сторона BA займёт предельное положение b , причём b параллельна a , и треугольник ABC в пределе превратится в *полосу между параллельными a и b , ограниченную прямой BC* .

Естественно считать ограниченную полосу „треугольником“ с одним углом, равным 0, и такому треугольнику приписать площадь $\Delta = k^2 [\pi - (B + C)]$. В качестве примера найдём площадь треугольника, у которого один угол равен нулю и один прямой, тогда третий угол будет равен $\Pi(p)$ (черт. 66), где p — длина стороны BC . Площадь такого „треугольника“:

$$\Delta = k^2 \left\{ \pi - \left[\Pi(p) + \frac{\pi}{2} \right] \right\}, \quad \text{или} \quad \Delta = k^2 \left[\frac{\pi}{2} - \Pi(p) \right].$$

В качестве второго примера рассмотрим „треугольник с нулевыми углами“, условное изображение которого имеем на чертеже 67. Все три угла этого треугольника равны нулю. Сумма $A + B + C$ его углов равна 0. Следовательно, этому треугольнику можно приписать площадь: $\Delta = k^2\pi$. Ни один треугольник не может иметь площадь, большую или равную площади $k^2\pi$ нулевого „треугольника“. „Треугольник“ с нулевыми углами имеет самую малую сумму углов и, следовательно, самую большую площадь.



Черт. 67.

§ 29. Предложение о существовании треугольника, площадь которого как угодно велика, эквивалентно постулату Евклида.

Если допустить, что существуют треугольники, площади которых как угодно велики, то из этого допущения следует справедливость постулата Евклида.

Это значит, что *предложение о том, что площадь треугольника может неограниченно возрастать, эквивалентно постулату Евклида*, так как при указанном предположении неограниченности площади треугольника мы приходим к противоречию со следствиями из постулата Лобачевского, а следовательно, и с самим постулатом. Этим мы и закончим начала теории площадей в геометрии Лобачевского. Лобачевский подробно развивает всё учение о площадях; находит площадь треугольника по трём его сторонам; разыскивает площади многоугольников; разыскивает площадь круга и его частей и, при помощи интегрального исчисления, может записать площадь любой фигуры, для которой имеет смысл говорить о площади.

§ 30. Обзор вклада, сделанного Лобачевским в математику.

В заключение заметим, что Лобачевский с исчерпывающей полнотой развил почти все разделы своей неевклидовой геометрии: планиметрию, стереометрию и тригонометрию. Помимо этой элементарной части неевклидовой геометрии, Лобачевский построил неевклидову *аналитическую геометрию* на плоскости и в пространстве и *дифференциальную геометрию*. Заметим, что полная перестройка оснований геометрической науки, связанная с величайшим открытием Лобачевского, отодвинула несколько в сторону другие открытия гениального русского геометра.

Перечислим лишь некоторые из его достижений. Лобачевский отчётливо различал классы функций непрерывных и функций дифференцируемых; дал способ (носящий имя Лобачевского) численного нахождения корней уравнений; пользовался понятием непрерывности, в точной формулировке предложений, сюда относящихся, задолго до появления аксиомы Дедекинда.

В связи с последним фактом необходимо отметить, что содержание аксиомы Дедекинда совпадает с употребляемым Лобачевским положением о существовании единственной параллельной к данной прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении.

Причём Лобачевский говорит „о разбиении лучей на два класса“ и о существовании единственного луча, производящего, как теперь говорят, „сечение“.

Таким образом, во многих трудных и тонких вопросах математики Лобачевский опередил свое время на десятилетия, а созданием своей геометрии утвердил за собой славу величайшего геометра.

„...создание геометрии Лобачевского явилось поворотным пунктом, определившим в значительной мере весь стиль математического мышления девятнадцатого века, столь противоположный стилю мышления математиков предыдущего восемнадцатого века“, пишет выдающийся советский математик академик А. Н. Колмогоров [4].

Создание неевклидовой геометрии поставило в частности вопрос о непротиворечивости геометрической системы. Где уверенность в том, что, развивая достаточно далеко геометрическую систему, мы не придём к противоречию. Но если вопрос о *непротиворечивости* стоит перед системой геометрии Лобачевского, то уместно поставить его и по отношению к геометрии Евклида. Если последняя при том количестве теорем, которые она содержит, не привела к противоречию, то где доказательство того, что она никогда не придёт к противоречию, как бы мы ни шли далеко по цепи её предложений. Вопрос о *непротиворечивости* одинаково стоит как для геометрии Лобачевского, так и для геометрии Евклида. Что геометрия Евклида оправдывается на практике, всем хорошо известно. Но, как мы выяснили, геометрия Евклида есть предельный случай геометрии Лобачевского, и при достаточно большой постоянной k , которая входит в формулы геометрии Лобачевского, эксперимент может не заметить разницы между выводами из обеих систем.

В настоящее время показано, что если встречается формальное противоречие в геометрии Евклида, то сейчас же можно указать противоречие в арифметике. Более того, показано, что *всякое формальное противоречие в геометрии Лобачевского непременно ведёт к противоречию в геометрии Евклида и к формальной противоречивости в арифметике*.

Геометрией Лобачевского открывается новая эра не только в геометрической науке, но и во всей математике. С появлением неевклидовой геометрии Лобачевского связана глубокая перестройка математики, начиная с её основ. Возникает учение об основаниях геометрии и математических наук вообще — *аксиоматика*. В частности, ставятся вопросы о полном списке аксиом и их непротиворечивости. Чтобы дать понятие о доказательстве такой непротиворечивости и о самой постановке вопроса в учении об основаниях геометрии, мы познакомимся, во-первых, с сочинением Евклида „Начала“, и, во-вторых, с аксиомами геометрии и аксиоматическим методом.

ГЛАВА ПЯТАЯ

ОБЗОР ЕВКЛИДОВЫХ „НАЧАЛ“

Об Евклиде мы знаем очень мало. Известно только, что расцвет его деятельности происходил в Александрии около 300 лет до нашей эры. Евклид написал много сочинений по математике и по геометрической оптике. Однако от большинства его сочинений сохранились лишь названия. До нас дошло полностью его великое творение „Начала“, где он собрал воедино многое из того, что было известно грекам его времени, добавил много своего, а главное привёл всё в такую систему, которая долго считалась образцом ясности и строгости. Книга Евклида „Начала“ выдержала больше изданий, чем какое-либо другое сочинение. По этой книге учили геометрию Коперник, Галилей, Декарт, Паскаль, Ньютон, Ломоносов, Лейбниц, Лобачевский и, можно сказать, все великие деятели точного естествознания. Школьники всего мира изучают евклидовы „Начала“, но только в изложении других авторов. С содержанием этого труда мы и ознакомимся [10].

§ 31. Содержание „Начал“ Евклида.

„Начала“ Евклида состоят из 13 книг (глав). Книги 7, 8, 9-я посвящены арифметике в геометрическом изложении. 10-я книга содержит теорию иррациональных величин. Эти книги (7—10-я) мало известны. В них Евклид ставит и разрешает очень тонкие вопросы и мастерски справляется с поставленными задачами большого теоретического значения. Достаточно сказать, что возникшая в XIX в. теория иррациональных величин, воспринятая математическим миром как новость, оказалась уже разработанной в трудах Эвдокса и Евклида. Это ещё раз подчёркивает большое значение этих тонких в теоретическом отношении книг Евклида. Мы останавливаться на этих книгах также не будем, а обратимся к книгам геометрического содержания.

Книга 1-я содержит условия равенства треугольников, соотношение между углами и сторонами треугольника, теорию параллельных, свойства параллелограмов, условия равновеликости треугольников и многоугольников и заканчивается задачей превращения многоугольника в равновеликий ему треугольник.

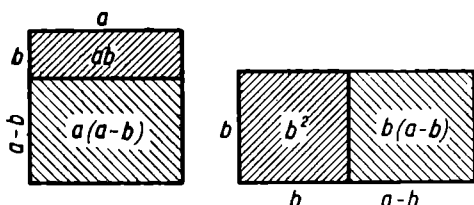
Книга 2-я доводит тот же вопрос до превращения всякого многоугольника в равновеликий ему квадрат. Попутно в геометрической форме доказываются некоторые тождества. В нашей записи:

$$ab + (a - b)a = a^2 \text{ (теорема 2).}$$

$$ab = b(a - b) + b^2 \text{ (теорема 3).}$$

Евклид эти тождества выводит, рассматривая прямоугольники, изображённые на чертеже 68. Конечно, Евклид не обозначает отрезки одной буквой, а площадь в виде произведения. Всё это сделано в громоздкой манере, какую мы нередко встречаем в школьных учебниках.

Книга 3-я посвящена окружности. Здесь рассматриваются главные свойства окружности. Относительное расположение двух окружностей, а также окружности



Черт. 68.

и прямой, соотношение между центральными и вписанными углами.

Книга 4-я трактует о вписанных и описанных многоугольниках.

Книга 5-я содержит теорию пропорций. Эта книга интересна и с современной точки зрения.

Она содержит, по существу, теорию иррациональных величин, почти в точности совпадающую с теорией сечений Дедекинда. Теория иррациональности нужна была Евклиду потому, что греки не знали иррациональных чисел и резко ограничивали арифметику от учения о величинах. В этой же книге содержится постулат Архимеда-Эвдокса. Некоторые историки математики приписывают эту книгу Эвдоксу.

Книга 6-я содержит учение о подобии многоугольников и, в связи с этим, теорию площадей прямолинейных фигур. Евклид не даёт „формул“ для площадей в нашем смысле, а устанавливает обычно *равновеликость одних фигур с другими* или устанавливает равенство отношений площадей фигур.

О книгах 7—10 мы уже говорили.

11—12-я книги содержат начала стереометрии, теорию объёмов, многогранников и основных тел вращения. В них Евклид пользуется *методом исчерпывания*, заменяющим ему теорию пределов.

Книга 13-я содержит учение о правильных многогранниках.

Необходимо отметить, что „Начала“ не содержат всего геометрического материала, которым греки в то время владели. Грекам, например, в то время была известна *теория конических сечений*, доведённая Апполонием до высокой степени совершенства. Греки также знали многие *высшие кривые*.

§ 32. Способ изложения „Начал“.

Каждая книга начинается определением всех тех понятий, которые в ней встречаются. Первая книга начинается 23 определениями. За ними следуют постулаты и аксиомы. Далее следуют одно за другим, без всяких связующих рассуждений, предложения. Каждое предложение формулируется, затем указывается, что дано и что требуется доказать. Далее следует доказательство со всеми ссылками на предыдущие предложения, постулаты, аксиомы. Каждое доказательство заканчивается словами „что и требовалось доказать“. Для Евклида нет мелочей, все детали доказательств, необходимость которых он может усмотреть, даже наиболее лёгкие, он излагает с тем же спокойствием, с которым он относится к наиболее трудным вопросам. С невозмутимым терпением он всякий раз разбирает все случаи, которые могут встретиться при доказательстве той или иной теоремы. Он старается предупредить каждый вопрос, каждое сомнение, которое может возникнуть у читателя. Тот идеал строгости, который поставил перед собой Евклид, им достигнут не был, как мы увидим в дальнейшем. Тем не менее изложение Евклида многие столетия служило недостижимым образцом точности, безукоризненности, строгости. Например, в XVII в. философ Спиноза пишет книгу „Философия Декарта, изложенная геометрическим методом“. Слова „геометрическим методом“ означали, что начинают изложение с определений, постулатов и аксиом и из них выводят предложения.

§ 33. Основные положения „Начал“.

Первые восемь *определений* формулированы следующим образом:

Определение I. Точка есть то, что не имеет частей.

Определение II. Линия есть длина без ширины.

Определение III. Границы линий называются точками.

Определение IV. Прямой называется такая линия, которая одинаково расположена ко всем своим точкам.

Определение V. Поверхность есть то, что имеет длину и ширину.

Определение VI. Границы же поверхности суть линии.

Определение VII. Плоскостью называется поверхность, которая одинаково расположена ко всем прямым, на ней лежащим.

Определение VIII. Плоским же углом называется наклонение друг к другу двух встречающихся линий, расположенных в одной плоскости, но не лежащих на одной прямой.

Далее следуют *постулаты* и *аксиомы*.

Постулаты.

I. Нужно потребовать, чтобы из каждой точки ко всякой другой точке можно было провести прямую,

II. и чтобы каждую ограниченную прямую можно было продолжить неопределённо,

III. и чтобы из любого центра можно было описать окружность любым радиусом,

IV. и чтобы все прямые углы были равны,

V. и чтобы всякий раз, как прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше $2d$, эти прямые пересекались с той стороны, в которой эта сумма меньше $2d$.

Этот последний постулат и есть знаменитый 5-й постулат о параллелях. Пользуясь им, можно установить, что и делает Евклид, существование только одной параллельной к какой-либо прямой, проходящей через точку вне этой последней. В некоторых списках „Начал“ Евклида этот постулат фигурирует под именем 11-й аксиомы. Таким образом, мы видим, что постулаты у Евклида носят чисто геометрический характер. Совсем другое содержание имеют аксиомы.

Аксиомы.

I. Равные порознь третьему равны между собой,

II. и если к равным прибавить равные, то получим равные,

III. и если от равных отнимем равные, то получим равные,

IV. и если к неравным прибавим равные, то получим неравные,

V. и если удвоим равные, то получим равные,

VI. и половины равных равны между собою,

VII. и совмещающиеся (величины, образы) равны,

VIII. и целое больше части,

IX. и две прямые не могут заключать пространства.

Как мы видим, аксиомы у Евклида носят более широкий характер, чем постулаты. Аксиомы формулируют общие свойства величин и только в частности геометрических величин.

В кратких чертах мы ознакомились с содержанием, способом изложения и основными положениями „Начал“ Евклида. Перейдём теперь к столь же краткому обсуждению этого сочинения.

§ 34. О некоторых недостатках, достоинствах и историческом значении „Начал“.

Составляя „Начала“, Евклид, без сомнения, хотел осуществить идеал строгой логической системы, в которой всё вытекало бы из определений, постулатов и аксиом. Каждое предложение, не являющееся аксиомой или постулатом, должно быть доказано, каким бы очевидным оно ни казалось. Каждый вновь встречающийся термин, понятие должно быть определено с помощью основных определений. Такова, несомненно, цель, которую ставил перед собой Евклид, но, как мы увидим, он этой цели не достиг. Одно из главных исторических значений „Начал“ в том и состоит, что они донесли до нас эту идею строгого логического построения геометрии. Но только в самое последнее время (на пороге XX столетия) был осуществлён тот идеал строгости, последовательности и безупречности, который имел в виду Евклид.

В чём же главные недостатки евклидовых „Начал“?

Основные *определения*, данные Евклидом и выписанные в § 33, представляют самое слабое место книги. Некоторые из них ничего не определяют, и поэтому Евклид нигде не может ими воспользоваться. Например, Евклид нигде не пользуется в своих логических выводах тем фактом, что „точка есть то, что не имеет частей“, или, что „линия есть длина без ширины“.

Определяя линию как „длину без ширины“, Евклид уже предполагает известным, что такое „длина“ и что такое „ширина“.

Определения должны обладать по крайней мере одним „хорошим“ свойством, т. е. чтобы ими можно было пользоваться при логических выводах. Этим свойством многие определения Евклида не обладают. Да и нельзя решительно всё определять, надо с чего-нибудь и начинать. „Мы не в состоянии дать определения некоторых вещей: каковы точки, прямые, плоскости, — а должны допустить их как знакомые всякому человеку. Основные понятия и должны только высказать те основные их свойства, которые мы желаем использовать“ (Клейн). Например, считая понятия: точка, прямая — знакомыми, мы чётко высказываем свойства прямой *определяться однозначно двумя различными точками* и этим свойством прямой постоянно пользуемся. Геометрия, как и всякая наука, необходимо должна начинаться с так называемых *основных неопределяемых понятий*. В противном случае мы будем „определять“ до бесконечности.

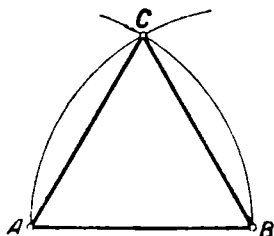
В своей книге Евклид широко пользуется понятиями, которых в его списке определений нет. Например: „точка лежит на прямой“; понятие „*лежит на*“ Евклид считает хорошо известным и нигде не определяет. Пользуясь предложением: „точки *A* и *B* лежат по одну сторону прямой“, он не определяет, что значит „по одну сторону“, считая это известным. Ставя себе задачу развития логической системы геометрии, т. е. доказать всякое предложение, которое не является аксиомой (как бы очевидным оно ни было) и определить всякое понятие через основные, Евклид, как мы видим, этой задачи не выполнил.

Евклид даёт много лишних определений, которые у него „логически не работают“. Далее, он пользуется чисто геометрическими понятиями, нигде их не определяя и не выписывая в качестве основных.

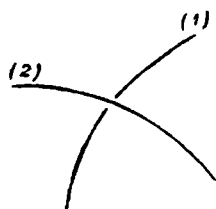
Укажем на такой существенный недостаток Евклида, как на *отсутствие аксиомы непрерывности*, хотя непрерывностью, например линий, Евклид всюду пользуется. В качестве примера применения нигде не высказанной Евклидом аксиомы непрерывности рассмотрим 1-е предложение „Начал“.

Построить равносторонний треугольник на отрезке AB. У Евклида это построение описывается так: „Из точки *A* радиусом *AB* опишем окружность“ (черт. 69), и тут же даётся ссылка на постулат III, гласящий, что из „любого центра любым радиусом можно описать окружность“. „Далее, из точки *B* радиусом *BA* пишем круг“, что также возможно по постулату III, как указывает Евклид.

Точку пересечения двух окружностей Евклид обозначает через C и затем на основании определения окружности доказывает, что $\triangle ABC$ будет равносторонним. Здесь допущенный пробел состоит в следующем: Евклид, *пользуясь наглядностью*, предполагает, что описанные окружности с центрами в A и B *пересекаются* в точке C . Спрашивается: *предложение о пересечении этих окружностей есть тео-*



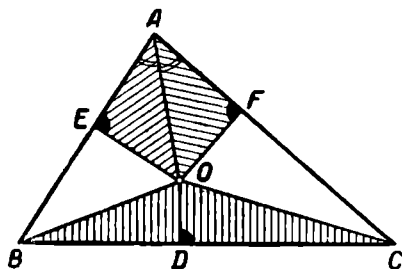
Черт. 69.



Черт. 70.

рема или аксиома? Теоремой это предложение быть не может, так как построение равностороннего треугольника есть *первое* предложение „Начал“. Это предложение не содержится также и среди аксиом. Налицо явный логический пробел. Законно предположить, что первая окружность как раз в точке C имеет разрыв непрерывности и вторая окружность, пройдя эту „щель“, не будет иметь общей точки с первой (черт. 70). Для правильного описания факта пересечения гео-

метрия нуждается в *аксиоме непрерывности*. Только имея её, можно действительно доказать, что указанные окружности пересекаются. Все вопросы, касающиеся непрерывности, принимаются Евклидом как очевидные, и он ими пользуется, нигде явно не сформулировав.



Черт. 71.

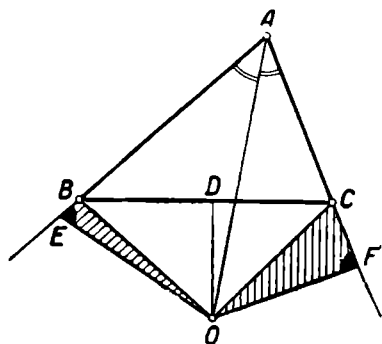
У Евклида совершенно нет аксиом, связанных с такими понятиями, как „*между*“, „*по одну сторону*“, „*внутри*“, „*вне*“ и т. д.

Все эти понятия играют большую роль при логическом построении геометрии, что можно показать, рассмотрев геометрический софизм: *всякий треугольник — равнобедренный*. В самом деле, в треугольнике ABC (черт. 71) проведём биссектрису угла A и из середины D стороны BC проведём к ней перпендикуляр. Если бы биссектриса и этот перпендикуляр были параллельны, то биссектриса была бы высотой треугольника и $\triangle ABC$ был бы равнобедренным, т. е. в этом случае теорема справедлива. Если упомянутый перпендикуляр пересекается с биссектрисой угла в точке D , то так как D — середина BC ,

то биссектриса была бы медианой и, следовательно, треугольник в этом случае был бы равнобедренным.

Остаётся рассмотреть случай, когда биссектриса и перпендикуляр пересекаются в точке O и точка O отлична от точки D . Но точка O может находиться или *внутри* треугольника или *вне*. Пусть точка O будет *внутри* треугольника. Опустим из неё перпендикуляры на стороны AB и AC . Тогда треугольники, заштрихованные не вертикально, равны, так как они прямоугольные, имеют общую гипотенузу и по равному острому углу, следовательно, $AE = AF$ (1). Треугольники, заштрихованные вертикально, также равны, так как они прямоугольные, имеют общий катет OD и $BD = DC$. Незаштрихованные треугольники также равны как имеющие равные катеты и равные гипотенузы. Следовательно, $BE = FC$ (2). Складывая почленно равенства (1) и (2), найдём: $AE + BE = AF + FC$, или $AB = AC$, т. е. $\triangle ABC$ — равнобедренный.

Пусть точка O будет *вне* треугольника. Опустим из неё перпендикуляры на AB и AC (черт. 72); треугольники OEA и OFA равны между собою как прямоугольные, имеющие общую гипотенузу и по равному острому углу. Точно так же треугольники ODB и ODC равны как прямоугольные при D и имеющие равные катеты. Следовательно, из двух треугольников выводим: $AE = AF$ (1); $OB = OC$; $OE = OF$. Таким образом, заштрихованные треугольники оказываются равными как прямоугольные при E и F , у которых равны гипотенузы, $OB = OC$, и катеты $OE = OF$. Следовательно, $BE = FC$ (2). Вычитая из равенства (1) равенство (2), найдём: $AE - EB = AF - FC$, но $AE - EB = AB$ и $FA - FC = AC$, т. е. $AB = AC$, и мы „доказали“, что любой треугольник — равнобедренный.



Черт. 72.

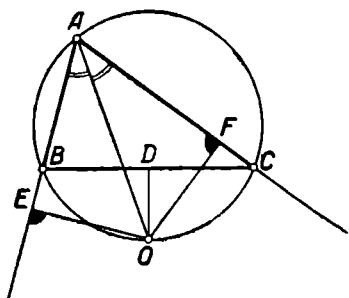
Где же допущена ошибка? Оказывается, что все проведённые рассуждения — безукоризненны, неверно только заключение. В конечном счёте, неверен лишь чертёж. Чертёж должен быть таким, из которого было бы видно, что, во-первых, точка O не может лежать *внутри* треугольника ABC и, во-вторых, точки F и E не могут одновременно ни лежать между A , B и A , C , ни находиться *вне* отрезков AB и AC (одна находится *между*, а другая *вне*, черт. 73). Все эти рассуждения мы вели, глядя на чертёж, минуя логику рассуждений. Евклид при своих доказательствах часто опирается не на аксиомы и предыдущие теоремы, а лишь на наглядность, так что его некоторые теоремы остаются *логически не доказанными*. К чему может повести такая апелляция к чертежу, показывает рассмотренный пример.

Чтобы довести все рассуждения до логического конца, необходимо строго доказать, во-первых, что если, например, точка F лежит между точками A и C , то точка E непременно *лежит вне* отрезка AB . И, во-вторых, что точка O не может лежать *внутри* треугольника ABC .

Из вышеизложенного видно, что перечисленных аксиом и постулатов Евклиду недостаточно для строгого развития геометрии. Кроме того, многие из его определений, как, например, „точка есть то, что не имеет частей“, и др., явно бессодержательны.

Рассматривая эту критику „Начал“, необходимо иметь в виду, что большинство недостатков этого сочинения было замечено лишь

в XIX столетии. В начале XIX столетия даже наиболее передовые умы считали как основные положения „Начал“, так и остальные их книги окончательно завершёнными. Например, Гегель в своих „Лекциях по истории философии“ пишет: „Что касается содержания такой науки, как математика, то тут на долю истории выпало преимущественно приятное занятие рассказывать о завоеваниях, служащих к обогащению прежнего содержания, а элементарную геометрию, например, в том объёме, в котором её оставил нам



Черт. 73.

Евклид, можно уже рассматривать, как нечто законченное и неспособное иметь больше историю*).

Последние слова надо понимать так: элементарная геометрия в своих основаниях есть наука законченная в своём развитии. Однако уже само появление *неевклидовой геометрии Лобачевского* из недр геометрии Евклида показывает неверность суждений Гегеля о математике вообще и о геометрии в частности.

Наконец, геометрия Лобачевского заставила пересмотреть „те тёмные понятия, с которых, повторяя Евклида, начинаем мы геометрию“ (Лобачевский).

Ф. Клейн высказал такие суждения о „Началах“ Евклида: „1) Великое значение „Начал“ Евклида состоит в том, что они передали последующим временам идеал вполне (без пробелов) логической обработки геометрии. 2) Что касается выполнения, то проделано многое очень тонко, но многое другое оказывается принципиально отсталым с точки зрения современных взглядов.

3) Многочисленные важные детали — в том числе в начале первой книги — вследствие ненадёжности текста остаются сомнительными.

4) Всё изложение кажется излишне тяжеловесным, так как Евклид не имел в своём распоряжении готовой арифметики.

*) Гегель, Сочинения, т. IX, стр. 17. Партиздат, 1932.

5) Вообще одностороннее подчёркивание логического затрудняет всё понимание в целом и его внутренних связей“.

С этим заключением нельзя не согласиться. Необходимо только добавить, что великое историческое значение „Начал“ не исчерпывается тем, что они „передали идеал вполне логической обработки геометрии“, а значительно шире. Евклидовы „Начала“ являются основой системы мира Коперника, механики, электродинамики, а вместе со всем этим являются частью фундамента современной техники. Очень важно, чтобы каждый учитель, преподающий геометрию, познакомился с „Началами“ Евклида ^[10].

В заключение заметим, что и Лобачевский при развитии своей геометрии широко пользуется интуицией и невысказанными постулатами, аксиомами и предложениями. Задача безукоризненного формулирования всех аксиом, а также основных понятий очень сложна, — всегда есть риск что-нибудь пропустить. К решению этой задачи одним из первых приступил Паш, который в своих „Лекциях по новой геометрии“ (1882) ввёл так называемые аксиомы расположения, относящиеся к понятиям „между“, „внутри“, „вне“. С одной из его аксиом — постулатом Паша — мы уже знакомы.

В 1899 г. вышла первым изданием работа Д. Гильберта „Основания геометрии“. В 1903 г. второе издание этого сочинения, — вместе с многочисленными приложениями, относящимися к основаниям математики, — было представлено Казанскому физико-математическому обществу на соискание премии имени Николая Ивановича Лобачевского. Рецензентом работы был французский математик А. Пуанкаре, закончивший свой „Отчёт о работах Д. Гильберта, представленных в 1903 г. Казанскому физико-математическому обществу для соискания международной премии имени Н. И. Лобачевского“ словами: „Его (Гильберта) работы знаменуют эпоху, и он кажется вполне достоин премии имени Лобачевского“ ^[6].

В том же 1903 г. премия имени Н. И. Лобачевского была присуждена Гильберту.

В 1905 г. вышел в свет первый том обширного сочинения русского учёного В. Ф. Кагана, посвящённый обоснованию геометрии на весьма оригинальных началах ^[12].

Наибольшее распространение получили, ставшие классическими, „Основания геометрии“ Д. Гильберта.

В следующей главе мы и перейдём к основным понятиям и аксиомам Гильберта ^[7]. „Гильберту удалось сконструировать, — пишет П. К. Рашевский, — аксиоматику геометрии, расчлennную настолько естественным образом, что логическая структура геометрии становится совершенно прозрачной. Это расчленение аксиоматики позволяет, во-первых, формулировать аксиомы наиболее простым и кратким образом и, во-вторых, исследовать, как далеко можно развивать геометрию, если класть в её основу не всю аксиоматику, а те или иные группы аксиом, на которые естественным образом расчленяется аксиоматика“.

ГЛАВА ШЕСТАЯ

ОСНОВНЫЕ ОБЪЕКТЫ, ОСНОВНЫЕ ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭТИМИ ОБЪЕКТАМИ И АКСИОМЫ ГЕОМЕТРИИ

§ 35. Аксиоматическое построение геометрии. Основные понятия.

Аксиоматическое построение геометрии (как и всякой математической теории) должно начинаться с перечисления, во-первых, *категорий основных объектов*, во-вторых, *основных отношений между этими объектами*, в-третьих, *аксиом*. Все дальнейшие рассматриваемые объекты в геометрии и отношения между объектами должны определяться через основные, а все теоремы должны доказываться на основании аксиом.

Основные объекты, основные вещи, с которыми имеет дело геометрия, суть: „*точки*“, „*прямые*“, „*плоскости*“. Эти понятия не определяются, не поясняются, не описываются.

Основные соотношения между основными объектами: „*принадлежать*“, „*между*“, „*быть конгруэнтными*“. Эти основные отношения не определяются, не поясняются, не описываются. Необходимо твердо уяснить себе, что нельзя всё без конца определять через другое, а другое через третье и т. д. Необходимо *иметь начало* в этой цепи. Геометрия и начинается с *основных объектов* и *основных отношений* между ними.

В начале освоения аксиоматики можно считать, что неопределяемые основные понятия и неопределяемые основные отношения известны, знакомы. Сущность же дела состоит в том, что от *основных объектов* и *основных отношений* требуется лишь, чтобы они *подчинялись аксиомам*, а в остальном оставались *совершенно произвольными*.

Необходимо иметь в виду, что существуют различные системы аксиом с различными категориями основных объектов и отношений, но эквивалентные между собою в том смысле, что основанная на них геометрия одна и та же.

§ 36. Первая группа аксиом: аксиомы соединения (принадлежности).

Основное отношение „*принадлежать*“.

1. Для любых двух точек A, B существует прямая a , принадлежащая каждой из этих двух точек A, B .

I₂. Для двух точек A, B существует не более одной прямой, принадлежащей каждой из точек A, B .

Под двумя, тремя и т. д. точками (прямыми, плоскостями) всегда подразумеваются *различные* точки (прямые, плоскости).

Здесь Гильберт делает чрезвычайно существенное для правильного понимания дальнейшего замечание:

„Вместо термина „*принадлежать*“ мы будем пользоваться также и другими формулировками. Например, вместо *прямая a принадлежит каждой из точек A и B* мы будем говорить: *прямая a проходит через точки A и B* или *прямая a соединяет точку A с точкой B* . Вместо: *A принадлежит a* мы будем говорить: *A лежит на a* или *A является точкой a* и т. п. Если точка A лежит на прямой a и, кроме того, на прямой b , то мы будем также говорить: *прямые a и b пересекаются в точке A , имеют общую точку A* и т. п.“

Не следует думать, что здесь поясняется термин „*принадлежат*“. Просто вместо этого неопределяемого термина будут произносимы лишь другие слова: „*лежат на*“, „*проходит через*“ и т. п. Причём с этими словами, — и в этом существе дела, — не следует связывать никаких наглядных представлений, равно как и с равносильным термином *принадлежит*.

Можно было бы обойтись совсем без этих слов, обозначая указанные термины просто буквами. Например, *для любых двух точек A, B всегда существует прямая a , находящаяся с каждой из этих двух точек A, B в отношении Σ* .

Или ещё лучше: *для любых двух объектов A, B первой категории всегда существует объект a второй категории, находящийся к ним в отношении Σ* .

Или, наконец: *для любых двух A, B всегда существует такое a , что $(A, B) \Sigma a$* .

Чтобы выявить, возможно отчётливее чисто логическую структуру какого-либо математического рассуждения, часто пользуются приёмами *математической логики*, где всё рассуждение проводится лишь в *знаках* — без использования слов, исключительно на языке *логических формул* [9].

Как в алгебре *буквы и знаки действий* могут иметь различный конкретный смысл, так обстоит дело и в отвлечённой геометрии с *основными объектами и основными отношениями* между ними.

Единственное требование, предъявляемое здесь, — подчинение известным правилам или удовлетворение аксиомам.

I₃. На прямой существуют по крайней мере две точки. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.

I₄. Для любых трёх точек A, B, C , не лежащих на одной и той же прямой, существует плоскость α , принадлежащая каждой из трёх точек A, B, C . Для любой плоскости всегда существует принадлежащая ей точка.

I₅. Для любых трёх точек A, B, C , не лежащих на одной и той же прямой, существует не более одной плоскости, принадлежащей этим точкам.

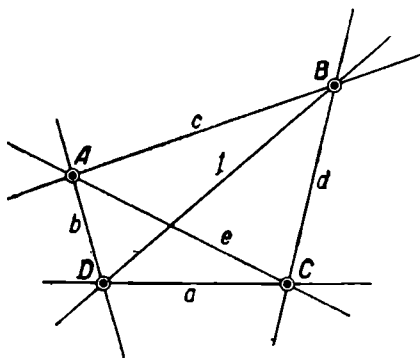
I_6 . Если две точки A, B прямой a лежат в плоскости α , то всякая точка прямой a лежит в плоскости α .

I_7 . Если две плоскости α и β имеют общую точку A , то они имеют по крайней мере ещё одну общую точку B .

I_8 . Существуют по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости.

Этим заканчивается список аксиом первой группы. Аксиомы I_{1-3} называются *плоскостными аксиомами группы I*; I_{4-8} — *пространственными аксиомами группы I*.

Чтобы частично пояснить точку зрения Гильберта и понять сущность постановки вопроса об *основных понятиях*, обратимся к примеру. Так как „точки“, „прямые“ и „плоскости“ могут означа-



Черт. 74.

ть предметы любой природы, лишь бы удовлетворялись аксиомы, то пусть четыре „точки“ A, B, C, D будут обычные точки евклидовой плоскости и пусть никакие три из них не лежат на одной прямой. Причём смысл слов „не лежат на одной прямой“, а равно как и объект „прямая“ будет такой, к какому мы привыкли со школьной скамьи.

Проведём шесть прямых, соединяющих точки A, B, C, D (черт. 74), причём эти прямые принимаем в обычном смысле слова. Назовём их a, b, c, d, e, f .

Подготовив такую модель, мы, во-первых, под *основными объектами первой категории* — „точками“ — будем разумеать только 4 точки A, B, C, D и никакие другие вещи „точками“ считать не будем. Другими словами, A, B, C, D — вещи 1-й категории. Шесть прямых a, b, c, d, e, f будем считать *основными объектами 2-й категории* (вещи 2-й категории), „прямыми“. Никакие другие вещи „прямыми“ не считаем. Ограничимся только плоскостными аксиомами первой группы — I_{1-3} — и поэтому основные объекты 3-й категории — „плоскости“ — вводить не будем. Итак, имеем 4 объекта первой категории — 4 „точки“ и 6 объектов второй категории — 6 „прямых“.

Далее, так как основное отношение „лежит на“ в аксиоматике Гильберта может означать всё что угодно, лишь бы удовлетворялись аксиомы, то мы этим словам придаём такой смысл: пусть „прямым“ A и B соответствует „прямая“ a , что запишем так: $A, B \rightarrow a$; и далее: $B, C \rightarrow b$; $D, C \rightarrow c$; $D, A \rightarrow d$; $A, C \rightarrow e$; $B, D \rightarrow f$. Условимся теперь, что каждые две „точки“ „определяют“ ту прямую, которая им поставлена в соответствие. Тогда аксиома I_1 при наших соглашениях будет справедливой: „две различные точки всегда опре-

деляют прямую". Так, например, точки B и D определяют прямую e . Согласно разъяснениям Гильберта, вместо того чтобы говорить, что B, D „определяют“ „прямую“ e , будем говорить, что точки B и D „лежат на“ „прямой“ e . Обратно, если скажем, что две различные точки B и C „лежат на“ „прямой“ b , то это означает, что и „прямая“ b определяется „точками“ B и C . И это всё, что требуется от основного отношения „лежит на“. Наглядное представление этого отношения может и не совпадать с общепринятым. Будем говорить также, что „прямая“ b „проходит через“ „точки“ B и C . Словам „проходит через“ нужно придавать смысл, равносильный содержанию 1-й аксиомы, и т. д.

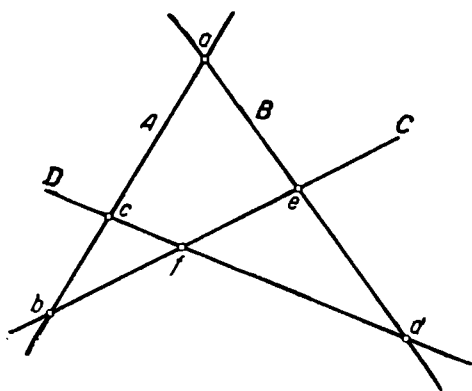
Легко видеть, что на нашей модели имеет силу аксиома I_2 . Прямая вообще „содержит“ лишь две „точки“. Так, прямая a „содержит“ „точки“ A и B . Согласно разъяснению Гильберта, если A есть точка, которая вместе с другой точкой определяет прямую a , то будем говорить: A „лежит на“ a , A „есть точка“ a . Так, в нашей модели A „есть точка“ „прямой“ a , потому что A вместе с B „определяют“ a . Точно так же A „есть точка“ „прямой“ d . Далее Гильберт говорит: „Если A „лежит на“ прямой a и сверх того на другой прямой b , то мы говорим: „прямые“ a и b „имеют общую точку“ A “. Так, в нашей модели „прямые“ a и d „имеют общую точку“ A . Можно также говорить, что прямые a и d „пересекаются“ в точке A .

На нашей модели выполнена также аксиома I_3 : „на прямой по меньшей мере существуют две точки; в каждой плоскости существуют по меньшей мере три точки, не лежащие на одной прямой“. Так, среди объектов нашей модели „на каждой прямой существует по крайней мере две точки“. Например, на прямой f существуют точки A и C . Все „точки“ и „прямые“ нашей модели можно считать принадлежащими одной „плоскости“ α . Тогда вторая часть аксиомы I_3 выполняется: точки A, B, C не „лежат на“ одной прямой.

Покончив с нашей моделью, на которой справедливы все плоскостные аксиомы группы I , обратимся для уяснения существа дела к следующей аналогии из алгебры. Если в алгебре написана формула $a + b = b + a$, то вместо букв можно подставлять любые числа, и формула остаётся справедливой. Также и в аксиоматике Гильберта; вместо основных понятий „точка“, „прямая“, „плоскость“ можно подставить объекты любой природы, лишь бы аксиомы оставались справедливыми. Если в указанном равенстве $a + b = b + a$ под отношениями „+“, „=“ понимать то, что принято в векторной алгебре, а под a и b — векторы, то формула остаётся справедливой. Точно так же в аксиоматике Гильберта не только под основными объектами, но и под основными отношениями между ними можно понимать вещи и отношения любой природы, лишь бы удовлетворялись аксиомы. Так, в нашей модели мы имеем 4 обычные точки и 6 обычных прямых, но отношение „лежат на“ имело совсем необычный смысл.

Рассмотрим ещё одну модель, в которой основные объекты, и основные отношения между ними будут иметь несколько необычный

характер (черт. 75). Начертим 4 прямые, попарно пересекающиеся, и отметим 6 обычных точек их обычного пересечения. Четыре прямые обозначим A, B, C, D , а 6 точек обозначим a, b, c, d, e, f . Теперь условимся в названиях: A, B, C, D будем считать *основными объектами 1-й категории* и называть „точками“; a, b, c, d, e, f будем считать *основными объектами 2-й категории* и называть „прямыми“. Всю фигуру будем считать *объектом 3-й категории* и называть „плоскостью“. Поставим теперь в соответствие каждой паре „точек“ (в только что введённом смысле слова) „прямую“ (опять в новом смысле слова). Именно $A, B \rightarrow f$ (т. е., оставаясь при обычном словопотреблении, двум прямым A, B ставится в соответствие та



Черт. 75.

точка f , которая им не принадлежит в обычном смысле слова).

$B, C \rightarrow c$; $C, D \rightarrow a$; $D, A \rightarrow e$; $A, C \rightarrow d$; $D, B \rightarrow b$. Установив это соответствие, будем считать, что в плоскостных аксиомах 1-й группы термин „определяют“ равносильен термину „соответствуют“ в только что указанном смысле. Таким образом, „точки“ A и B определяют „прямую“ f ; A, D определяют „прямую“ e .

В согласии с Гильбертом

мы должны сказать: „точки“ A, B „лежат на“ „прямой“ f ; „прямая“ f „проходит через точки“ A, B ; A и B „суть точки“ „прямой“ f и т. д.

Так как „прямые“ a и c нашей модели обе „содержат“ „точку“ C , т. е. „точка“ C „лежит на“ „прямых“ a и c , то можно сказать, что „прямые“ a и c „пересекаются“ в „точке“ C . На этой модели удовлетворяются все плоскостные аксиомы первой группы.

Заметим, что рассмотренные модели подчиняются лишь аксиомам I_{1-8} , остальные аксиомы I_{4-8} для этих моделей силы не имеют. Также не будут выполняться аксиомы и остальных групп, быть может за некоторым исключением.

§ 37. Вторая группа аксиом: аксиома порядка.

Основное понятие „между“.

Гильберт начинает со следующего замечания: „Аксиомы этой группы определяют понятие „между“ и делают возможным на основании этого понятия установить *порядок* точек на прямой, плоскости и в пространстве“.

II₁. Если точка B (черт. 76) лежит между точками A и C , то A , B , C суть три различные точки прямой, и B лежит также между C и A .

II₂. Для любых двух точек A и C (черт. 77) на прямой AC существует по крайней мере одна точка B такая, что точка C лежит между A и B .

II₃. Среди любых трёх точек прямой существует не более одной точки, лежащей между двумя другими.



Черт. 76.

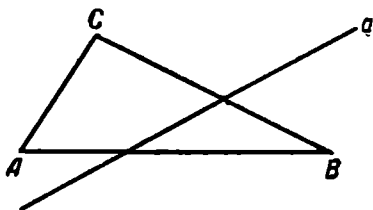


Черт. 77.

Определение. Рассматриваем на прямой a две точки A и B . Называем систему двух точек A и B *отрезком* AB или BA ; точки, лежащие между A и B , — точками отрезка AB или точками, *лежащими внутри отрезка* AB ; точки A и B — *концами* отрезка AB . Все прочие точки прямой a называем лежащими *вне* отрезка AB .

Аксиомы II₁₋₃ называются *линейными* аксиомами группы II. Следующая аксиома, II₄, относится к аксиомам *порядка на плоскости*.

II₄ (Постулат Паша). Пусть A , B , C — три точки, не лежащие на одной прямой, и a — прямая в плоскости ABC , не проходящая ни через одну из точек A , B , C (черт. 78); если при этом прямая a проходит через одну из точек отрезка AB , то она должна пройти через одну из точек отрезка AC или через одну из точек отрезка BC .



Черт. 78.

Выражаясь наглядно, говорят: если прямая входит во *внутрь* треугольника, то она также *выходит из* треугольника. Тот факт, что прямая a не может при этом пересечь оба отрезка AC и BC , может быть доказан *).

Перед формулировкой аксиомы II₄ Гильберту необходимо пояснение, в котором он определяет понятия: „отрезок“, „лежать внутри отрезка“, „лежать вне отрезка“. Необходимо помнить, что *все понятия должны быть определены через основные*. В самой формулировке постулата Паша уже содержатся понятия „отрезок“, „внутри отрезка“. Относительно основного понятия, „лежать между“ остаются в силе все те замечания, которые мы сделали относительно отношения „лежать на“, т. е. основное отношение „лежать между“ может иметь любую природу, лишь бы удовлетворялись аксиомы. Гильберт

*) Доказательство содержится в примечаниях П. К. Рашевского к новому переводу „Оснований“ Гильберта (см. [7]).

далее рассматривает некоторые следствия из аксиом порядка. Мы пока остановимся только на его определениях некоторых понятий, следствиями же займёмся позднее.

Определения. Система отрезков $AB, BC, CD, \dots, KL$ называется *ломаной*, соединяющей точки A и L . Эта ломаная обозначается короче так: $ABCD\dots KL$. Внутренние точки отрезков $AB, BC, CD, \dots, KL$ равно, как и точки $A, B, C, D, \dots, K, L$, называются *точками ломаной*. Если при этом точка L совпадает с точкой A и все точки находятся в одной плоскости, то ломаная называется *многоугольником*. Отрезки $AB, BC, CD, \dots, KL$ называются *сторонами многоугольника*, а точки $A, B, C, \dots, K$ — *вершинами*. Многоугольники с тремя, четырьмя, $\dots$, n вершинами называются соответственно *треугольниками, четырёхугольниками, n-угольниками*. Если все вершины многоугольника различны, ни одна из вершин не лежит на его стороне и никакая пара его сторон не имеет общей внутренней точки, то многоугольник называется *простым*.

Чтобы познакомиться с доказательствами теорем, основанными лишь на аксиомах, — без использования наглядности в ходе самого доказательства, — приведём несколько теорем из сочинения Гильберта.

Предварительно отдадим себе отчёт в том, что как бы „очевидно“ — в системе обычных представлений основных понятий — предложение ни было, его всегда необходимо доказать (если, конечно, оно не содержится в списке аксиом).

Нелегко бывает уяснить, что одно „очевидное“ предложение является далеко не очевидным логическим следствием других „очевидных“ предложений. Об этом могут свидетельствовать различные издания гильбертовых „Оснований геометрии“. В первых изданиях Гильберт считал аксиомами некоторые утверждения, которые в последующих изданиях пришлось перевести в разряд теорем, так как они были доказаны (различными учёными) на основании остальных аксиом.

Теорема. *Для любых двух точек A и C на прямой AC существует по крайней мере одна точка D , лежащая между A и C .*

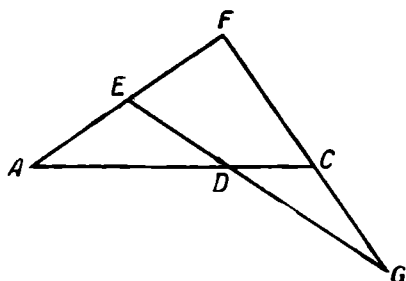
Доказательство. Согласно аксиоме I_1 вне прямой AC существует некоторая точка E , а в силу аксиомы II_2 существует такая точка F , что E есть точка отрезка AF . В силу той же аксиомы и аксиомы II_3 , на прямой FC существует точка G , не лежащая на отрезке FC . Таким образом, на основании аксиомы II_4 прямая EG должна пересечь отрезок AC в некоторой точке D .

Доказательство, конечно, не требует никакого чертежа, но Гильберт для пояснения всё же его приводит (черт. 79). Приведём ещё одну интересную теорему.

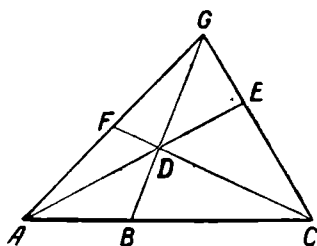
Теорема. *Среди трёх точек A, B, C на одной и той же прямой всегда существует одна, лежащая между двумя другими.*

Доказательство. Пусть A не лежит между B и C , и C не лежит между A и B . Проведём через точку D , не лежащую на прямой AC , и точку B прямую и выберем (что можно сделать в силу аксиомы II_2) на этой прямой точку G так, чтобы точка D лежала между B и G . Применив аксиому II_4 к треугольнику BCG и пря-

мой AD , получим, что прямые AD и CG пересекаются в некоторой точке E , лежащей между C и G . Таким же образом получается, что прямые CD и AG пересекаются в точке F , лежащей между A и G . Если применить теперь аксиому Π_4 к треугольнику AEG и прямой CF , то окажется, что D лежит между A и E , а применив ту же аксиому к треугольнику AEC и прямой BG , мы убедимся в том, что точка B лежит между A и C (черт. 80).



Черт. 79.



Черт. 80.

Приведём содержание такой теоремы: *любые четыре точки на прямой можно обозначить буквами A, B, C, D так, чтобы точка, обозначенная буквой B , лежала как между точками A и C , так и между A и D , а точка, обозначенная буквой C , лежала как между точками A и D , так и между B и D .*

Это предложение Гильберт отнёс к аксиомам в первом издании своего сочинения, но затем ему было указано, что это — теорема.

Далее Гильберт точно определяет понятия „внутри“ и „вне“ многоугольника и указывает на теорему о том, что всякий простой многоугольник разбивает точки плоскости, не принадлежащие многоугольнику, на две области — внутреннюю и внешнюю. Фактическое проведение строгого доказательства не может считаться лёгким. В примечании пятнадцатом к книге Гильберта П. К. Рашевский привёл доказательство, занимающее десять страниц убогистого шрифта [7].



Черт. 81.

В этой же главе Гильберт вводит понятие „луча“.

Пусть A, A', O, B — четыре точки одной прямой a такие, что O лежит между A и B , но не между A и A' . Мы говорим тогда, что точки A и A' лежат на прямой a от точки O с одной и той же стороны, а точки A, B лежат на прямой a по разные стороны от точки O . Множество всех точек прямой a , лежащих по одну и ту же сторону от точки O , называется *лучом*, исходящим из точки O . Таким образом, точка делит прямую a на два луча (черт. 81).

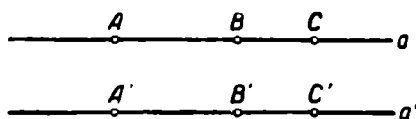
§ 38. Третья группа аксиом: аксиомы конгруентности и движения.

Основное понятие „конгруентный“ или „равный“.

III₁. Если A, B суть две точки на прямой a , и A' — точка на той же прямой или на другой прямой a' , то всегда можно найти точку B' , лежащую по данную от точки A' сторону прямой a' и притом такую, что отрезок AB конгруентен, иначе говоря, равен отрезку $A'B'$.

Эта аксиома даёт возможность откладывать отрезки. Обозначается конгруентность отрезков так: $AB \equiv A'B'$.

III₂. Если отрезок $A'B'$ и отрезок $A''B''$ конгруентны одному и тому же отрезку AB , то отрезок $A'B'$ конгруентен также и отрезку $A''B''$; короче говоря, если два отрезка конгруентны третьему, то они конгруентны также друг другу.



Черт. 82.

Что любой отрезок конгруентен самому себе, вытекает как теорема из первых двух аксиом III₁ и III₂.

III₃. Пусть AB и BC суть два отрезка прямой a , не имеющие ни одной общей точки, и пусть, далее, $A'B'$ и $B'C'$ суть два отрезка той же прямой или другой прямой a' , также не имеющие общей точки (черт. 82); если при этом $AB \equiv A'B'$ и $BC \equiv B'C'$, то и $AC \equiv A'C'$.

Эта аксиома выражает требование возможности складывать отрезки.

Далее Гильберт формулирует аксиому, относящуюся к конгруентности углов, но для этого ему нужно определить предварительно термин *угол*.

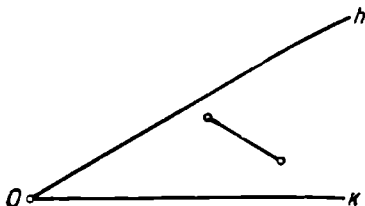
Определение. Пусть α — произвольная плоскость, а h, k — какие-либо два различных луча, исходящих из одной точки в плоскости α и принадлежащих различным прямым. Систему таких двух лучей h, k мы называем *углом* и обозначаем $\angle(h, k)$ или $\angle(k, h)$. Лучи h, k называются *сторонами* угла, а точка O — его *вершиной*. Развёрнутые и сверхтупые углы этим определением исключаются. Из аксиом II₁₋₄ вытекает, что лучи h, k , взятые вместе с точкою O , делят все прочие точки плоскости на две области. Одна из этих областей отличается тем, что каждый отрезок, соединяющий какие-либо две точки этой области, лежит в этой области целиком. Эту область мы назовём *внутренней областью* угла hOk , другую область — *внешней* (черт. 83).

III₄. Пусть даны $\angle(h, k)$ в плоскости α и прямая a' в плоскости α' , а также определённая относительно a' сторона плоскости α' . Пусть h' обозначает луч прямой a' , исходящей из точки O' . Тогда в плоскости α' существует один и только один луч k' такой, что угол (h, k) конгруентен или равен углу (h', k') и вместе

с тем все внутренние точки угла (h', k') лежат по данную сторону от a' . Это отношение между углами обозначается так: $\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$.

Каждый угол конгруентен самому себе, т. е. всегда $\angle(h, k) \equiv \angle(h, k)$; $\angle(h, k) \equiv \angle(k, h)$. Мы говорим то же короче: каждый угол может быть однозначно определённым образом отложен в данной плоскости, по данную сторону, при данном луче.

III_б. Если для двух треугольников ABC и $A'B'C'$ (черт. 84) имеют место конгруентности $AB \equiv A'B'$; $AC \equiv A'C'$; $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$, то имеет место также и конгруентность $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$. Переименовав обозначения, найдём, что и $\angle ACB \equiv \angle A'C'B'$.

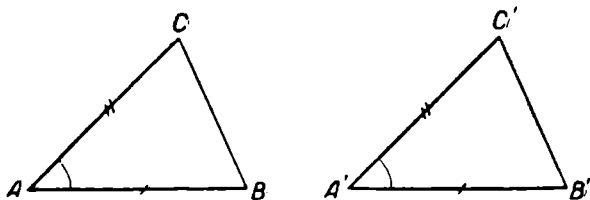


Черт. 83.

Аксиомы конгруентности позволяют строго доказать теоремы о равенстве треугольников, теоремы о смежных углах, теоремы о равнобедренных треугольниках и т. п.

Существенно, что при доказательстве указанных теорем совсем неиспользовано понятие „движения“.

Школьный курс геометрии пользуется, вместе с Евклидом, движением как первоначальным и ясным понятием и притом без всякого аксиоматического обоснования; совмещающиеся фигуры считаются равными или конгруентными. В системе Гильберта, напротив, понятие геометрического „движения“ определяется через конгруентность.



Черт. 84.

Поясним, как это делается для плоскости.

Пусть между точками плоскости α установлено взаимно однозначное соответствие. Это значит, что всякой точке A , по какому-либо правилу или закону, поставлена в соответствие *единственная* точка A' (образ точки A) и, обратно, эта точка A' есть образ *единственной* точки A . Например, если повернём всю плоскость α вокруг какой-либо её точки O на какой-либо угол φ , то каждая точка A плоскости α перейдёт в точку A' ; точка O перейдёт сама в себя. Можно указать на гомотегию с центром в какой-либо точке, как на второй пример „отображения“ плоскости α на себя и притом „отображе-

ния взаимно однозначного". После указанных пояснительных примеров перейдём к определению движения.

Определение. Движением называется каждое взаимно однозначное отображение множества всех точек плоскости на себя, при котором образом всякого отрезка AB является отрезок $A'B'$, конгруэнтный отрезку AB .

Таким образом, „движение“ определено через конгруэнтность и в системе Гильберта „движение“ является понятием производным. После этого нетрудно доказать, пользуясь аксиомами конгруэнтности, целый ряд теорем, раскрывающих свойства „движений“. Приведём некоторые из этих теорем.

1°. Движение переводит всякую прямую в прямую.

2°. Пересекающиеся прямые движением переводит в пересекающиеся; параллельные — в параллельные.

3°. Полупрямые при движении переходят в полупрямые.

4°. Внутренность угла — во внутренность.

Далее можно определить различные виды движений. Движение называется вращением вокруг точки O , если точка O совпадает со своим образом O' ; т. е. остаётся на месте. Движение, при котором все точки остаются на месте, есть также вращение.

Движение называется параллельным перенесением, переносом или сдвигом, если: 1) каждая точка A некоторой прямой a переходит в точку A' той же прямой a ; 2) каждая точка плоскости α остаётся по прежнюю сторону от прямой a . Движение, при котором все точки остаются на месте, причисляют к сдвигам по любой прямой, равно как и к вращениям вокруг любой точки.

Движение называется симметрией, или зеркальным отражением, если: 1) каждая точка A некоторой прямой a остаётся на месте; 2) каждая точка плоскости α переходит на другую сторону от прямой a .

Если произвести два движения, одно вслед за другим, то тот же результат, такого двойного преобразования плоскости в себя, может быть получен одним движением. Если M — произвольная точка плоскости α , то первое движение переводит точку M в M' ; второе движение переведёт точку M' в точку M'' . В результате возникает преобразование всех точек плоскости α , при котором произвольная точка M переходит в точку M'' . Это последнее преобразование есть, очевидно, движение. Полученное движение называется произведением двух первых движений.

Таким образом, имеем важную теорему: произведение двух движений есть движение.

Порядок, в котором идут преобразования — сомножители, играет существенную роль.

Легко показать, что всякое движение может быть получено перемножением не более чем одного сдвига и двух симметрий. На доказательстве этого предложения мы не останавливаемся.

Как мы уже знаем, отображение, которое оставляет все точки плоскости α на месте, есть движение. Такое движение называется тождественным; оно играет роль „единицы“ при умножении движений.

Если движение переводит произвольную точку M в точку M' , то возникает отображение, которое все точки M' возвращает обратно на свои места M . Очевидно, это последнее отображение есть *движение*, так как оно взаимно однозначно и любой отрезок переводит в конгруэнтный ему отрезок. Последнее движение называется *обратным* по отношению к первоначальному. Произведение первоначального и обратного ему движений равно тождественному движению и не зависит от порядка сомножителей; такие движения *взаимно обратны*.

Подведём итог найденным свойствам движений плоскости по себе.

1°. Множество всех движений замкнуто в том смысле, что произведение двух движений есть снова движение.

2°. Среди множества всех движений существует тождественное движение.

3°. Для каждого движения существует обратное движение.

Всякое множество взаимно однозначных отображений какой-либо совокупности элементов (в нашем случае точек плоскости α) на себя, удовлетворяющее указанным трём свойствам, образует *группу* *). Например, множество всех гомотетичных преобразований плоскости α с данным центром O образует группу, так как:

1°. Множество всех гомотетий с данным центром O замкнуто в том смысле, что произведение двух гомотетий с центром O есть снова гомотетия с тем же центром.

2°. Тождественное отображение плоскости α на себя есть гомотетия (с коэффициентом подобия, равным единице) с центром O .

3°. Для всякой гомотетии с центром O существует обратная гомотетия с тем же центром.

Множество всех гомотетий с данным центром хотя и есть *группа* отображений, но эти отображения не суть *движения*.

Движение мы определили через *конгруэнтность*, но можно поступить иначе, *конгруэнтность* определить через *движение*. Последний путь и принят Евклидом, а за ним и средней школой; без какой-либо аксиоматической обработки. Пользуясь уже изученными свойствами движений, покажем, как можно вместо гильбертовых аксиом конгруэнтности ввести аксиомы движения.

Третья группа аксиом: аксиомы движения.

Основное понятие: *движение*.

III₁'. Движения образуют группу отображений плоскости на себя.

III₂'. При всяком движении образом отрезка является отрезок.

III₃'. Пусть даны произвольно: две точки O и O' , два луча OA и

*) Каждый учитель средней школы обязан овладеть понятием группы. Общие определения и основные свойства группы можно найти в книге П. С. Александрова [3]. Необходимо отметить, что на стр. 67—68 её содержится неверное утверждение о числе собственных подгрупп группы вращений тетраэдра.

$O'A'$ и по одной полуплоскости β и β' из каждой пары полуплоскостей, на которые прямые OA и $O'A'$ разбивают соответственно плоскость α . Существует единственное движение, переводящее одновременно точку O в точку O' , подпрямую OA в подпрямую $O'A'$ и полуплоскость β в полуплоскость β' .

Эти аксиомы позволяют доказать что: 1) всякое движение прямую переводит в прямую, 2) угол в угол, 3) треугольник в треугольник и т. п. Далее можно определить конгруэнтность.

Определение. Два отрезка, два угла, два треугольника, вообще две какие-либо фигуры на плоскости α называются конгруэнтными, если существует движение, переводящее одну из этих фигур в другую.

После этого определения конгруэнтности с помощью аксиом III'_{1-3} могут быть доказаны аксиомы III группы Гильберта, которые в этой новой аксиоматике будут, следовательно, являться теоремами ^[4].

Мы здесь имеем ещё один пример взаимозаменяемости аксиом и теорем; вместе с тем этот пример указывает на эквивалентные системы аксиом, с различными основными понятиями.

§ 39. Четвёртая группа аксиом: аксиома о параллельных.

На основании предыдущих аксиом доказывается теорема о внешнем угле треугольника, а вместе с тем и существование на плоскости непересекающихся прямых. Вопрос о числе прямых, не пересекающих данную прямую и принадлежащих пучку, решает аксиома о параллельных.

IV (аксиома Евклида). Пусть a — произвольная прямая и A — точка, лежащая вне её; тогда в плоскости, определяемой точкой A и прямой a , существует не более одной прямой, проходящей через точку A и не пересекающей прямую a .

Определение. Согласно предыдущему и на основании аксиомы Евклида мы узнаем, что в плоскости, определённой прямой a и точкой A , существует одна и только одна прямая, которая проходит через A и не пересекает a . Мы назовём её прямой, параллельной a и проходящей через точку A .

§ 40. Пятая группа аксиом: аксиомы непрерывности.

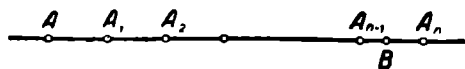
V_1 (аксиома измерения, или аксиома Архимеда). Пусть AB и CD — два произвольных отрезка; тогда на прямой AB существует конечное число точек $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ таких, что отрезки $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ конгруэнтны отрезку CD и точка B лежит между A и A_n (черт. 85).

Эта аксиома Архимеда-Эвдокса, которой мы пользовались при доказательстве первой теоремы Лежандра.

Сделаем такое „наглядное“ пояснение: если отрезок CD , конгруэнтный отрезку AA_1 , „уложится“ целое число раз на AB , то можно сделать ещё один, два и более „шагов“ для удовлетворения аксиомы.

V_2 (аксиома линейной полноты). Точки прямой образуют систему, которая при сохранении линейного порядка (теорема 6),

первой аксиомы о конгруентности и аксиомы Архимеда (т. е. аксиом I_{1-2} , II, III₁, V₁), не допускает никакого расширения, т. е. к этой системе точек невозможно прибавить ещё точки так, чтобы в системе, образованной первоначальными и добавленными точками, выполнялись все приведённые аксиомы.



Черт. 85.

Это очень хороший пример аксиомы, в которой, по первоначально, очень мало понятного, даже если все понятия связать с вещами, знакомыми со школьной скамьи, т. е. „точки“, „прямые“ и т. д. считать обычными. Аксиома V₂ чрезмерно сложна и обширна. В формулировке этой аксиомы участвуют почти все предыдущие аксиомы, но и не только аксиомы, а и „теорема 6“, гласящая: *Как бы ни было расположено конечное число точек на прямой, их можно обозначить буквами A, B, C, D, E, ..., K так, чтобы точка, обозначенная буквой B, лежала между точкой A с одной стороны и точками C, D, E, ..., K с другой, далее, C между A и B с одной стороны и D, E, ..., K с другой, D между A, B, C с одной стороны и E, ..., K с другой, и т. д. Кроме этого обозначения, существует ещё только обратный способ обозначения K, ..., E, D, C, B, A, обладающий тем же свойством.*

Эта теорема, входящая в состав аксиомы V₂, проста по сравнению с самой аксиомой.

Остановимся вкратце на происхождении аксиомы V₂. В списке первого издания „Оснований геометрии“ Гильберта этой аксиомы не было. Пятая группа аксиом была представлена лишь аксиомой Архимеда V₁.

А. Пуанкаре в рецензии на первое издание гильбертовых „Оснований“ указывает на пробел в аксиоматике Гильберта, которая оказывается в некотором смысле „не полной“. Чтобы уяснить себе, в чём именно заключается эта „неполнота“ аксиом групп I, II, III, IV и аксиомы V₁, выполним наглядным образом следующую конструкцию.

Предположим, что мы прямую постепенно заполняем точками. Выбрав единицу масштаба, „положим“ на прямую точку 1. На прямой существует для нас только эта точка „единица“; никаких других точек пока нет. Исходя из этой точки „единицы“, мы помещаем на прямую все такие точки абсциссы которых получаются из 1 путём применения *конечного числа* четырёх арифметических действий: сложения, вычитания, умножения и деления. Короче говоря, помещаем на прямую лишь „рациональные точки“, т. е. точки с рациональными абсциссами. Пока для нас других точек не существует. Например, если отложить от точки O отрезок OA, равный диагонали квадрата со стороной, равной 1, то его конец укажет на „пустое место“, так как абсцисса точки A равна иррациональному числу $\sqrt{2}$.

Таких „пустот“, „пробелов“ окажется бесконечное множество. В самом деле, если мысленно всей нашей прямой дать перемещение $\vec{OA}$ вправо, то каждая рациональная точка a попадёт на „пустое место“ $a + \sqrt{2}$. И это несмотря на то, что все рациональные точки заполняют прямую всюду *плотно*, т. е. между любыми двумя, хотя бы и как угодно близкими, рациональными точками x_1, x_2 существует бесконечное множество

рациональных точек, например середина x отрезка $\overline{x_1 x_2}$, $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$

и т. п.

Теперь, помимо четырёх арифметических действий, допустим вместе с Гильбертом пятую операцию:

$$|\sqrt{1+\omega^2}|.$$

ω обозначает число, ранее полученное при помощи пяти указанных операций. Например, при $\omega = 1$ получим $\sqrt{2}$; прибавляя к $\sqrt{2}$ любое рациональное число a , получим точки вида $a + \sqrt{2}$. Если положить $\omega = 1 + \sqrt{2}$, то при помощи пятой операции получим $\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$, и т. д. „Положив“ все таким образом полученные числа, образующие поле Ω , на числовую прямую и считая несуществующими остальные, мы не заполним прямой полностью. Прямая с „точками поля Ω “ ещё очень „пориста“. Например $\sqrt[3]{2}$ укажет на

„пустое место“. Произведя сдвиг на $\sqrt[3]{2}$ вправо, мы все „точки поля Ω “ уложим на „пустые места“, т. е. на точки, полю Ω не принадлежащие. Даже если мы добавим к полю Ω все остальные действительные алгебраические числа, то сдвиг, например, на π или e , всё это множество алгебраических чисел уложит на „пустые места“. Таким образом, при наличии на прямой только точек поля Ω , прямая ещё „достаточно пориста“.

Предположим далее, что три оси Ox , Oy , Oz декартовой системы координат — именно такие „пористые“ прямые, т. е. что на них существуют точки только поля Ω . Назовём „пористое“ пространство, состоящее лишь из точек, координаты которых принадлежат полю Ω , „омега скелетом“.

После выполнения конструкции „омега скелета“ можно разъяснить, в чём состояла „неполнота“ системы аксиом Гильберта с одной лишь аксиомой непрерывности V_1 .

Если разуместь под объектами первой категории, „точками“, точки Ω -скелета; под объектами второй категории, „прямыми“, — обычные прямые, но лишь заполненные точками Ω -скелета, под „плоскостями“ — пористые плоскости из Ω -точек; и „принадлежать“, „между“, „быть равным“ понимать в обычном смысле, то все аксиомы Гильберта, кроме аксиомы V_2 , будут удовлетворены. Это и показывает Гильберт во втором и последующих изданиях своей книги.

„В пространстве Гильберта, — замечает Пуанкаре, — нет всех точек*), которые имеются в нашем, но есть только те, которые можно, исходя из двух данных точек**), построить с помощью циркуля и линейки“.

„Омега скелет“ можно известным способом пополнять точками, в частности, за основу можно взять поле действительных алгебраических чисел, и все аксиомы, кроме V_2 , будут удовлетворены. Пространство осталось бы разрывным всюду.

Можно, наконец, пополнить „омега скелет“ до нашего непрерывного пространства и опять будут удовлетворены те же аксиомы. Мы имеем, таким образом, целое бесконечное множество геометрий с аксиомами групп I, II, III, IV и аксиомой Архимеда V_1 .

Чтобы выйти из затруднительного положения, Гильберт и формулировал свою искусственную аксиому полноты.

Аксиома полноты V_2 ранних изданий не была аксиомой линейной полноты; она была сформулирована для всего пространства в целом.

Действительно, аксиома полноты запрещала пространства в виде „омега скелета“ и подобные образования (к этому „скелету“ можно ещё добавить сколь угодно много новых точек).

Аксиома полноты „заполняла пустоты“, если таковые могли оказаться в построенном пространстве. Впоследствии было указано, что такое „заполнение пустот“ достаточно произвести лишь на прямых; так возникла аксиома линейной полноты.

*) Лучше сказать: может и не быть всех точек,

**) 0 и 1.

Мы полагаем, что выполнения аксиомы полноты можно потребовать лишь для *трёх прямых, не принадлежащих одной плоскости*.

Чтобы ещё раз подчеркнуть трудность создания системы аксиом и постепенный переход, усилиями многих, от „хорошего к лучшему“, замечу, что П. К. Рашевский в своих примечаниях к новому переводу Гильберта указал на неточность формулировки аксиомы V_2 и притом настолько существенную, что вся система аксиом Гильберта может привести к противоречию. П. К. Рашевский уточняет формулировку аксиомы V_2 .

Укажем, наконец, что так как центр тяжести исследований Гильберта лежит в том, чтобы изучить ту часть геометрии, которая не требует аксиом непрерывности V_{1-2} , то аксиома полноты остаётся во всём сочинении „*не работающим придатком*“.

С помощью аксиом непрерывности Гильберта и остальных, но без аксиомы IV Евклида, доказывается аксиома непрерывности Дедекинда, которой мы уже пользовались ранее, и, обратно, с помощью аксиомы Дедекинда и остальных, но не пользуясь аксиомой IV, можно доказать аксиомы V_{1-2} .

Точный текст аксиомы Дедекинда таков:

Если все точки прямой распределены на два класса так, что при этом:

1) *каждая точка относится к одному и только к одному классу, и каждый класс содержит точки;*

2) *каждая точка первого класса предшествует каждой точке второго,*

то либо в первом классе существует точка, которой предшествуют все остальные точки первого класса, либо во втором классе существует точка, которая предшествует всем остальным точкам второго класса.

Точка, о существовании которой говорится в аксиоме, определяет *дедекиндово сечение* прямой. Термин „*предшествовать*“ определяется с помощью аксиом порядка II.

Одна аксиома Дедекинда вполне заменяет обе аксиомы непрерывности V_{1-2} Гильберта. Покажем, как из аксиомы Дедекинда следует аксиома Архимеда. Предположим противное, т. е., что при наличии аксиомы Дедекинда аксиома Архимеда неверна для некоторого отрезка AB . Это означает, что существует *бесконечная* последовательность конгруэнтных отрезков $AA_1 \equiv A_1A_2 \equiv \dots \equiv A_nA_{n+1} \equiv \dots$, расположенных *внутри* отрезка AB ; причём точка A_n предшествует точке A_{n+1} при любом значении номера n и что A предшествует B и всем A_n , что может быть достигнуто выбором направления на прямой от A к B . Разобьём точки всей прямой AB на два класса. К первому классу отнесём такие точки прямой AB , которые предшествуют хотя бы одной из точек A_i ; к этому классу будет принадлежать, например, точка A , все точки, которые предшествуют точке A , и все точки A_i . Ко второму классу отнесём точки прямой AB , не попавшие в первый класс. Второй класс будет содержать, например, точку B и все точки, которым B предшествует. Условия аксиомы Дедекинда выполнены: 1) каждая точка относится к одному и только к одному классу, и каждый класс содержит точки; 2) каждая точка первого класса предшествует каждой точке второго. Следовательно, суще-

ствует точка C , производящая *сечение*. В первом классе нет последней точки, так как любая точка первого класса предшествует какой-либо точке A_i , которая сама есть точка первого класса. Таким образом, C — первая точка второго класса, предшествующая всем остальным точкам этого класса. По аксиоме III_1 существует такая точка D , предшествующая C , что $CD \equiv AA_1$, а значит $CD \equiv A_n A_{n+1}$ при любом n . Точка D предшествует *первой* точке C второго класса и, следовательно, D принадлежит первому классу. А это значит, что D предшествует некоторой точке A_n . Следовательно, точка A_n и все точки A_i при $i > n$ суть внутренние точки отрезка DC . Таким образом, отрезок $A_n A_{n+1} \equiv DC$ и одновременно $A_n A_{n+1}$ лежит внутри отрезка DC . Последнее заключение противоречит аксиомам конгруэнтности. Полученное противоречие доказывает аксиому Архимеда.

Если группа аксиом непрерывности состоит из одной аксиомы Дедекинда, то не только V_1 , но и V_2 будут *теоремами*. Это заключение мы оставим без доказательства. На этом закончим обзор аксиом Гильберта. С иной системой аксиом непрерывности, а также с теорией измерения, основанной на аксиомах непрерывности, можно познакомиться по превосходной книге Н. В. Ефимова [11].

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

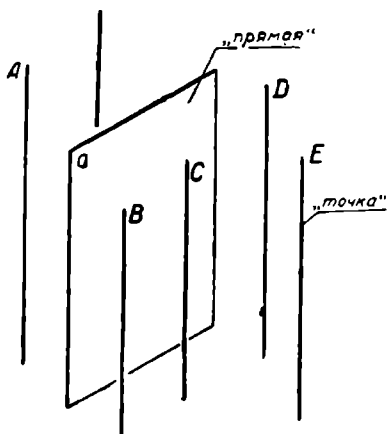
ИДЕЯ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Согласно пониманию Гильберта *категории основных объектов* (точки, прямые и плоскости), а также *основные отношения* между ними могут быть самой различной природы *лишь бы удовлетворялись аксиомы*. Отсюда вытекает возможность истолкования (*интерпретации*) одной и той же геометрической системы, исходя из различных *конкретных* значений категорий основных объектов и отношений между ними.

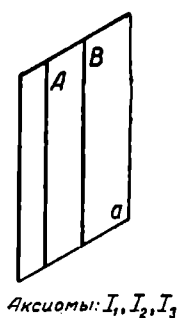
§ 41. Пример интерпретации плоской геометрии Евклида.

Предполагая известной геометрию Евклида в её обычном толковании, подготовим такую модель.

Рассмотрим множество всех прямых в пространстве, параллельных между собою (*связку параллельных*), и множество всех плоскостей, параллельных хотя бы одной прямой связки. Теперь дадим такой конкретный смысл *категор*-

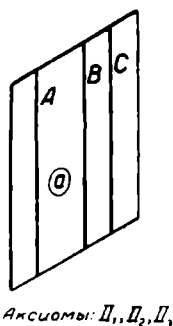


Черт. 86.



Аксиомы: I_1, I_2, I_3

Черт. 87.



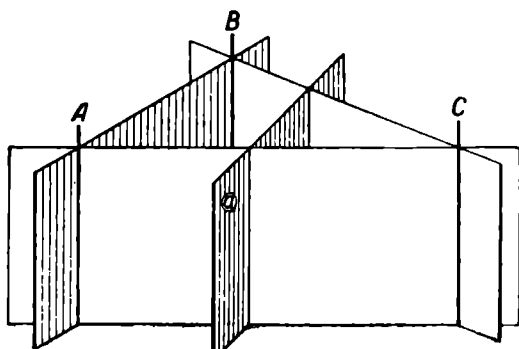
Аксиомы: II_1, II_2, II_3

Черт. 88.

риям основных объектов: 1) прямые связки назовём „точками“; 2) упомянутые плоскости — „прямыми“; 3) всё множество указанных прямых и плоскостей назовём „плоскостью“ (черт. 86). Основным

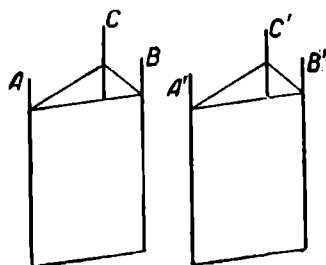
отношениям между объектами придадим такой смысл: „*лежать на*“ пусть означает принадлежность объекта первой категории объекту второй — в обычном смысле (т. е. прямая всеми своими точками принадлежит плоскости). „*Лежать между*“ пусть означает, что три прямые связки лежат в одной плоскости (в обычном смысле слова) и две из этих прямых лежат по разные стороны третьей прямой, которую будем считать „*лежащей между*“ двумя первыми.

Значение основного отношения „*быть конгруэнтным*“ есть *совпадение при наложении* в обычном смысле. Легко проверить, что все



Постулат Паши

Черт. 89.



Аксиома III,

Черт. 90.

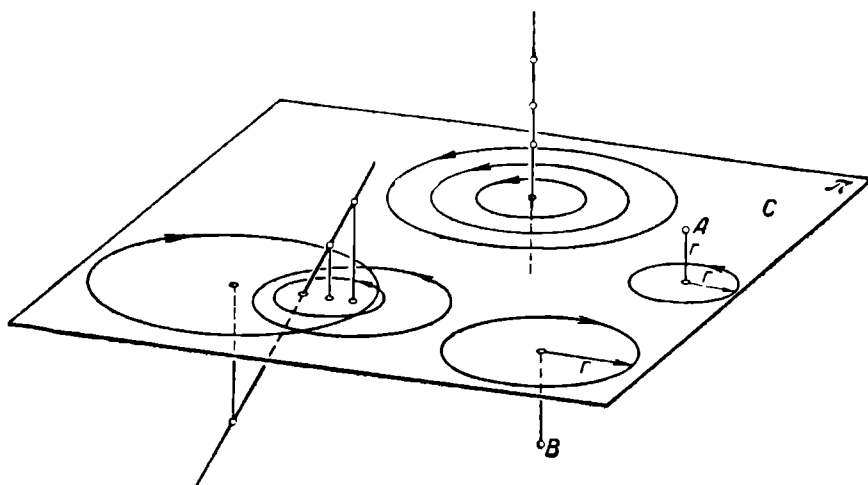
плоскостные аксиомы системы Гильберта удовлетворяются в этой модели. „*Быть конгруэнтным отрезкам*“ значит, что полоса между параллельными может быть совмещена с другой полосой.

На чертежах 87 — 90 усматривается справедливость некоторых аксиом.

§ 42. Интерпретация Фёдорова.

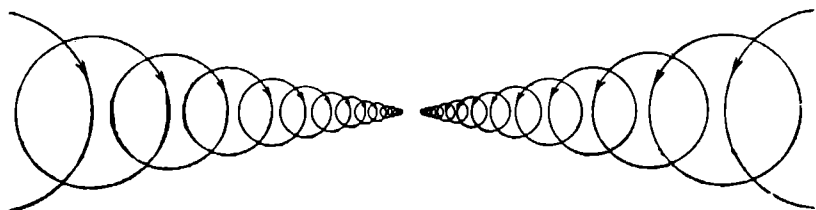
Рассмотрим ещё одну интерпретацию геометрической системы Евклида, принадлежащую знаменитому русскому кристаллографу и геометру академику Евграфу Степановичу Фёдорову (1853—1919). Подготовим такую модель. Возьмём любую точку A пространства и из неё опустим перпендикуляр на данную плоскость π . Опишем окружность в плоскости π , приняв основание этого перпендикуляра за центр; радиус окружности пусть равен расстоянию точки A до плоскости π . Ориентацию окружности выберем так, что если смотреть из точки A , то вращение, указанное стрелкой, будет против часовой стрелки. Точка A' , симметричная A относительно плоскости π , будет изображаться окружностью того же радиуса, но *обратной* ориентации. Таким образом, по выражению Е. С. Фёдорова, ориентированная — *векториальная* — окружность на плоскости π будет изображать точку пространства, находящуюся на расстоянии радиуса (последний равен нулю для точек самой плоскости π) и по соответствующую сторону от плоскости. Прямой, перпендикулярной к плоскости, соответ-

ствуется система концентрических окружностей на плоскости π (черт. 91). Прямая, пересекающая нашу плоскость, изобразится пересекающимися окружностями различной ориентации, у которых центр подобия — точка пересечения прямой с плоскостью (черт. 92). Прямая, параллельная плоскости π , изобразится равными окружностями (черт. 93). Прямая,



Черт. 91.

лежащая в плоскости π , изобразится обычной прямой. Плоскость, перпендикулярная нашей плоскости, изобразится окружностями, центры которых лежат на линии пересечения плоскости π с перпендикулярной плоскостью. Эти окружности любого радиуса и различной ориентации. Плоскость, параллельная π , изобразится равными окружностями одной

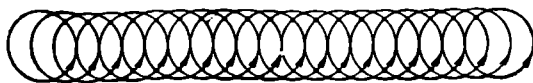


Черт. 92.

ориентации. Плоскость, пересекающая нашу плоскость под углом в 45° , изобразится в виде окружностей, которые касаются линии пересечения, и т. п.

Построив это отображение трёхмерного пространства на плоскость при помощи *ориентированных окружностей*, условимся понимать категории основных объектов так:

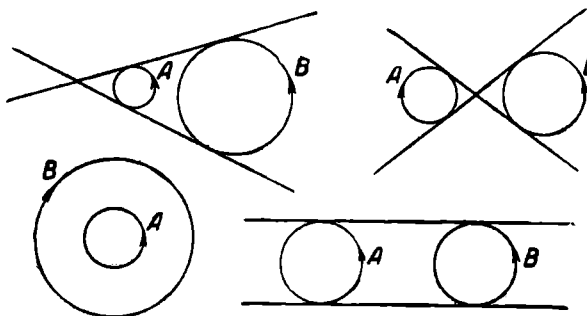
„Точки“ — ориентированные окружности в основной плоскости
 „Прямая“ — множество гомотетичных окружностей с различными ориентациями по разные стороны от центра гомотетии — окружности нулевого радиуса



Черт. 93.

„Плоскости“ — системы окружностей, указанные в предыдущих построениях.

Основное отношение „лежать на“ означает *быть элементом* этого образа. „Лежать между“ означает, что при обратном отображении этой системы окружностей получим точки пространства такие, что образ *„лежит между“*. Также устанавливаем понятие *„быть конгруэнтным“*.

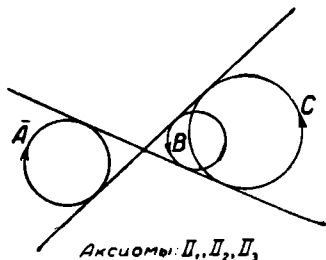


Аксиомы I_1, I_2, I_3

Черт. 94.

Теперь займёмся проверкой некоторых аксиом. Их выполнимость наглядно усматривается на чертежах 94, 95 и им аналогичных. Оказываются справедливыми аксиомы всех пяти групп, для проверки необходимо только провести обратное отображение образов Фёдорова на пространство. Эта интерпретация позволяет изобразить всё трёхмерное пространство на плоскости. Начертательная геометрия позволяет изобразить трёхмерное пространство на плоскости, но полной интерпретацией геометрии это изображение служить не может ввиду наличия исключений и отсутствия взаимной однозначности.

Интерпретация Фёдорова в этом отношении безупречна и позволила ему с большим успехом применить её для изучения кристаллов.

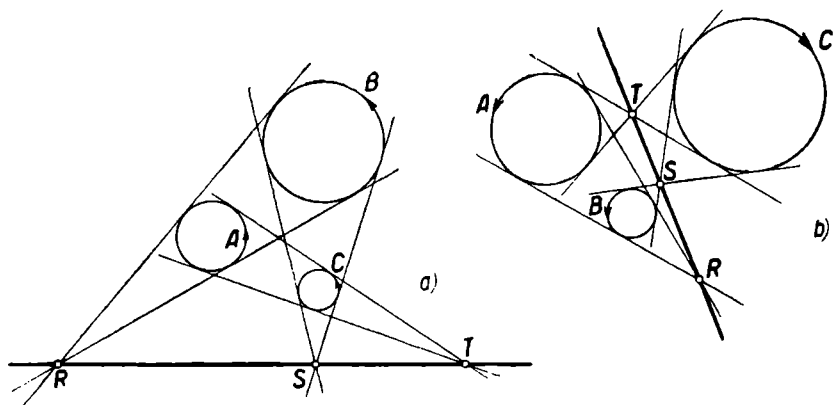


Аксиомы II_1, II_2, II_3

Черт. 95.

Применяя идею интерпретации, Фёдоров говорил: *„Дайте нам новую теорему, и мы выведем из неё безграничное множество других“*. Поясним эту мысль на следующем примере. Из аксиом соединения следует, что *три, не лежащие на одной прямой, точки A, B, C определяют единственную плоскость α , принадлежащую этим точкам*. На чертеже 96 этот факт переведён на язык интерпретации Фёдорова. „Прямая“ a есть *след* плоскости α , определяемой „точками“ A, B, C . „Точки“ R, S, T будут „точками“ пересечения „прямых“ AB, BC, CA с „прямой“ a . Все „прямые“ AB, BC, CA и a „принадлежат“ одной „плоскости“ α .

Отсюда, при обратном переводе на обычный язык, следует *„новая“ теорема: внешние центры R, S, T подобия трёх окружно-*



Черт. 96.

стей лежат на одной прямой (черт. 96a); два внутренних центра S, T и один внешний R лежат на одной прямой (черт. 96 b).

Помимо указанного приёма получения „новых“ теорем, можно использовать *различные интерпретации*.

§ 43. Аналитическая интерпретация геометрии Евклида.

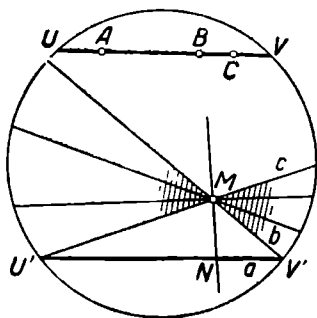
„Точками“ пусть будут упорядоченные пары действительных чисел (x, y) . „Прямыми“ — отношения трёх упорядоченных действительных чисел $(u:v:w)$, из которых все три одновременно нулю не равны. Все эти объекты считаем принадлежащими одной „плоскости“. Основное отношение „*лежать на*“ пусть имеет такой смысл: точка (x, y) лежит на прямой $(u:v:w)$, если $ux + vy + w = 0$. Легко проверить, что все аксиомы группы I удовлетворяются в этой системе объектов, связанных отношением принадлежности. Легко понять, как нужно интерпретировать понятия „*между*“, „*конгруэнтный*“ и как проверить выполнимость всех плоскостных аксиом этой *аналитической модели*.

Здесь мы имеем обыкновенную аналитическую геометрию на плоскости, на которую необходимо смотреть, как на одну из возможных интерпретаций планиметрии.

Введя упорядоченные тройки чисел (x, y, z) как „точки“ и т. д. легко получить аналитическую модель пространственной геометрии. Упомянутая ранее глубокая связь геометрии с арифметикой и осуществляется через указанные аналитические модели.

§ 44. Интерпретация Бельтрами-Клейна геометрии Лобачевского.

Если все двадцать аксиом Гильберта оставить неизменными, за исключением группы IV, а заменить аксиому группы IV *постулатом Лобачевского*, то получится пять групп аксиом геометрии Лобачевского. Оказывается, можно найти системы основных объектов и основные отношения между ними, в которых будут выполнены все аксиомы нового списка и, следовательно, будут справедливы и все теоремы, из них вытекающие. Рассмотрим одну из таких интерпретаций, предложенную Бельтрами и Клейном. Подготовим модель. Будем строить её из вещей обычной евклидовой геометрии, предполагая при этом, что все теоремы, методы и приёмы геометрии Евклида находятся в нашем распоряжении. Начертим окружность любого радиуса с любым центром и введём следующие категории основных объектов *плоской геометрии Лобачевского*.



Черт. 97.

„Точки“—обычные евклидовы точки *внутри* круга. Точки на основной окружности и вне этой окружности мы не причисляем к вещам первой категории. „Прямые“—хорды нашей окружности. Термины „принадлежать“ и „между“ понимаем в их обычном смысле. Находясь *внутри* основного круга, мы, следовательно, находимся в тех же условиях, что и в евклидовой геометрии. Это означает, что *плоскостные* аксиомы групп I и II, т. е. аксиомы I_{1-3} , II_{1-4} , и все следствия из них —

верны. Если вместо окружности взять за основу *сферу с внутренними точками*, то будут верными аксиомы групп I и II *целиком*.

Чтобы подготовить для конструируемой модели значение термина „конгруэнтный“, поступаем так: смотря на нашу конструкцию и имея в виду её евклидов смысл, отметим концы U и V хорды UV (черт. 97). Находим отношения, в которых *конец B и начало A* отрезка AB делят хорду UV: $\frac{UB}{BV}$ — первое отношение; $\frac{UA}{AV}$ — второе отношение.

Составим отношение этих отношений: $\frac{UB}{BV} : \frac{UA}{AV}$, которое всегда положительно, так как точки A и B делят отрезок UV внутренним образом. Логарифм этого отношения при любом, но фиксированном основании мы будем считать „расстоянием“ между точками A и B . Чтобы сохранить произвольность „единицы масштаба“, вводим ещё множитель k . Часто называют это „расстояние“ „неевклидовым расстоянием“:

$$\delta_{AB} = k \cdot \ln \left(\frac{UB}{BV} : \frac{UA}{AV} \right).$$

Знак его определяет направление „отрезка“ AB на „прямой“ UV . Модуль этого „расстояния“ будем называть „длиной“ отрезка или его „неевклидовой длиной“ *).

Условимся считать два отрезка AB и CD „конгруэнтными“, если их „длины“ равны:

$$AB \equiv CD, \text{ если } |\delta_{AB}| = |\delta_{CD}|.$$

Удачно ли выбран конкретный смысл термина „быть конгруэнтными“ отрезкам в нашей модели, покажет проверка аксиом конгруэнтности.

Проверяем аксиому III_1 : необходимо найти в указанном направлении (от U к V , черт. 98) на прямой $U'V'$ такую „точку“ B' , чтобы было $AB \equiv A'B'$; δ_{AB} — дано.

Из уравнения

$$\delta_{AB} = k \cdot \ln \left(\frac{U'B'}{B'V'} : \frac{U'A'}{A'V'} \right)$$

найдем неизвестное отношение $\frac{U'B'}{B'V'}$, а следо-

вательно, и искомое положение точки B' на прямой $U'V'$. Возможность откладывать отрезки установлена.

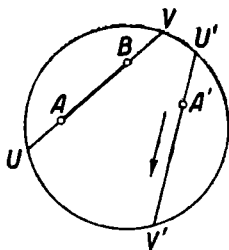
Справедливость аксиомы III_2 очевидна, так как если в нашей модели $A'B' \equiv AB$ и $A''B'' \equiv AB$, то это значит $|\delta_{A'B'}| = |\delta_{AB}|$ и $|\delta_{A''B''}| = |\delta_{AB}|$, а следовательно, $|\delta_{A'B'}| = |\delta_{A''B''}|$, т. е. $A'B' \equiv A''B''$.

Чтобы установить выполнимость аксиомы III_3 , докажем, что „расстояние“ двух точек обладает свойством „аддитивности“, т. е. если $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ (черт. 97), то $\delta_{AB} + \delta_{BC} = \delta_{AC}$.

$$\delta_{AB} = k \cdot \ln \left(\frac{UB}{BV} : \frac{UA}{AV} \right); \delta_{BC} = k \cdot \ln \left(\frac{UC}{CV} : \frac{UB}{BV} \right)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \delta_{AB} + \delta_{BC} &= k \cdot \ln \left(\frac{UB}{BV} : \frac{UA}{AV} \right) + k \cdot \ln \left(\frac{UC}{CV} : \frac{UB}{BV} \right) = \\ &= k \cdot \ln \left[\left(\frac{UB}{BV} : \frac{UA}{AV} \right) \cdot \left(\frac{UC}{CV} : \frac{UB}{BV} \right) \right] = k \cdot \ln \left(\frac{UC}{CV} : \frac{UA}{AV} \right) = \\ &= \delta_{AC}. \end{aligned}$$



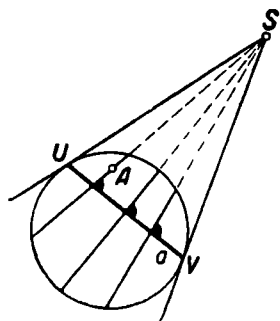
Черт. 98.

*) Следует заметить, что аксиомы конгруэнтности не предполагают измерения отрезков и углов.

Доказанное свойство справедливо для любых направленных отрезков.

Из свойства $\delta_{AB} + \delta_{BC} = \delta_{AC}$ немедленно следует выполнимость аксиомы Π_3 .

Обратим внимание на то, что „шагая“ из точки A в направлении AV „неевклидово равными“ шагами, мы никогда не дойдем до точки V , так как „неевклидово расстояние“ AV — бесконечно велико. В самом деле, для точки B , стремящейся к V , отношение $\frac{UB}{BV}$ стремится к ∞ , а отношение $\frac{UA}{AV}$ неизменно, следовательно, $\delta_{BA} \rightarrow \infty$.



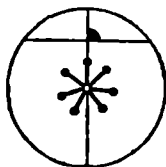
Черт. 99.

Отмеченное обстоятельство позволяет udovлетворить и аксиоме V_1 Архимеда. При удалении от A к V „неевклидово равные“ шаги будут „евклидово уменьшаться“, подобно тому, как удаляющийся к горизонту поезд кажется уменьшающимся. Истинная длина поезда неизменна, а кажущаяся — уменьшается.

Установить на нашей модели „конгруэнтность углов“ значительно сложнее; на этом понятии мы вкратце остановимся впоследствии. Отметим только правило для проведения перпендикуляров. Чтобы из „точки“ A провести „неевклидов перпендикуляр“ к „прямой“ a , употребляются следующее евклидово построение (черт. 99): точку S пересечения касательных к окружности в концах U и V хорды соединяют с A . Все хорды пучка S и будут „неевклидовыми перпендикулярами“ к прямой UV .

Плоская геометрия Лобачевского, изображённая на рассматриваемой модели, называется *картой Бельтрами*.

На карте Бельтрами длины и углы искажаются, если иметь в виду евклидов смысл чертежа. При этом надо отметить следующие исключения. Очевидно, что, в силу центральной симметрии карты Бельтрами, равные на карте углы между лучами, исходящими из центра, изображают равные углы в натуре, а углы в натуре равны углам изображения. Равные на карте отрезки с началами в центре изображают равные отрезки в натуре. Прямые на карте углы между диаметром и хордой изображают прямые же углы в натуре, что следует из осевой симметрии карты относительно диаметра (черт. 100). Этим частичным сохранением углов при изображении плоскости Лобачевского на карте Бельтрами мы воспользуемся ниже при выводе формулы Лобачевского для угла параллельности.



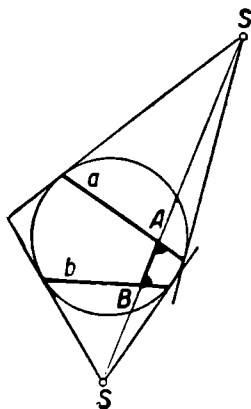
Черт. 100.

Обратимся к аксиоме параллельности. На карте Бельтрами из „точки“ M к „прямой“ $U'V'$ (черт. 97) можно провести: 1) „прямые“, (например, MN), которые пересекают $U'V'$; 2) „прямые“ (MU' и MV'), изображающие параллели Лобачевского, и 3) „прямые“ заштрихован-

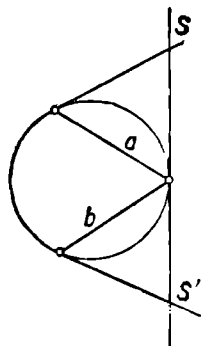
ных углов — *сверхпараллели Лобачевского*. Как „параллели“, так и „сверхпараллели“ не имеют ни одной общей „точки“ (неевклидовой!) с данной „прямой“ $U'V'$. На рассматриваемой модели осуществляется *постулат Лобачевского*. В бельтрамиевом круге, или в бельтрамиевой сфере (для пространственной геометрии), *осуществлена геометрия Лобачевского*.

Аксиомы непрерывности V_1 и V_2 или эквивалентная им аксиома Дедекинда здесь выполняются; на доказательстве останавливаться не будем.

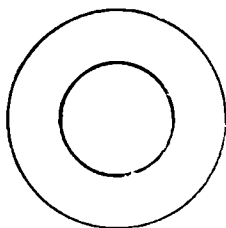
Рассмотрим вкратце некоторые факты геометрии Лобачевского. На чертеже 101 мы имеем общий перпендикуляр AB к двум сверхпараллельным прямым a и b . На чертеже 102 показано, что *две параллельные прямые общего перпендикуляра не имеют*. На чертеже 99 мы видим, что *перпендикуляры к одной и той же прямой — сверхпараллельны*. Легко понять в силу симметрии, что *евклидовы равные отрезки, имеющие начало в центре бельтрамиева круга, равны между собою и в смысле Лобачевского*, о чём уже упоминалось. На чертеже 103



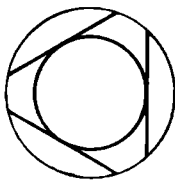
Черт. 101.



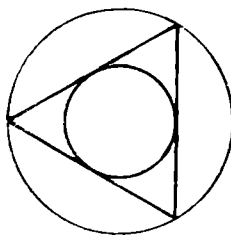
Черт. 102.



Черт. 103.



Черт. 104.

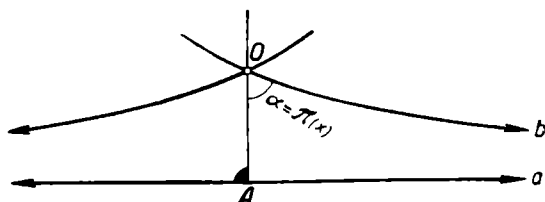


Черт. 105.

изображена „окружность“. В другом месте карты Бельтрами образ „окружности“ будет искажён. Чертежи 104 и 105 показывают, что в геометрии Лобачевского существуют „окружности“, около которых нельзя описать треугольника. На чертеже 105 изображён „треугольник с нулевыми углами“. Нетрудно рассмотреть на карте ранее указанные случаи взаимного расположения прямых.

В качестве примера „ориентировки по карте“ дадим вывод формулы Лобачевского.

Пусть отрезку OA длины x отвечает угол параллельности $\alpha = \Pi(x)$ (черт. 106). На карте Бельтрами (черт. 107) параллельные a и b изображаются хордами a и b ; прямой угол A (черт. 106) изображится прямым углом A (черт. 107). Угол $\alpha = \Pi(x)$ (черт. 106) изобразится в натуральную величину (черт. 107). Пусть, далее, R и y — евклидовы



Черт. 106.

длины радиуса карты и отрезка OA на карте. Неевклидова длина x отрезка OA будет:

$$x = \delta_{AB} = k \cdot \ln \left(\frac{UA}{AV} : \frac{UO}{OV} \right) = k \cdot \ln \frac{R+y}{R-y},$$

так как $\frac{UO}{OV} = \frac{R}{R} = 1$ и $UA = R+y$; $AV = R-y$.

Кроме того, между евклидовыми длинами и углами на карте имеет место соотношение $y = R \cos \alpha$ и, следовательно,

$$\frac{R+y}{R-y} = \frac{R+R \cos \alpha}{R-R \cos \alpha} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Таким образом,

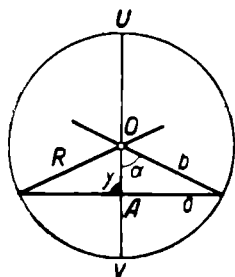
$$x = k \cdot \ln \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2},$$

или

$$\ln \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -\frac{x}{k},$$

откуда

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(x) = e^{-\frac{x}{k}}.$$



Черт. 107.

Это и есть знаменитая формула Лобачевского *).

Существуют сочинения, в которых геометрия Лобачевского рассматривается средствами геометрии Евклида на основе интерпретации Бельтрами-Клейна.

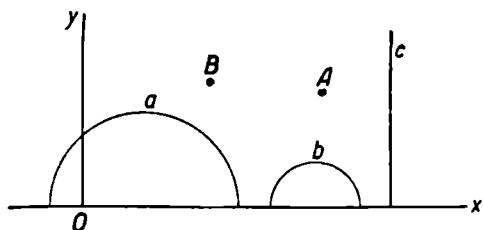
*) При пользовании тригонометрическими функциями следует помнить, что они могут быть введены чисто аналитически, без всякой связи с евклидовой (или какой-либо другой) геометрией. Например, при помощи рядов

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

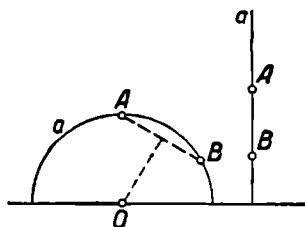
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

§ 45. Интерпретация Пуанкаре геометрии Лобачевского на плоскости.

Интерпретация Пуанкаре геометрии Лобачевского осуществляется на евклидовой плоскости средствами евклидовой геометрии. Подготовим модель. Проводим прямую Ox на обыкновенной плоскости. Категории основных объ-



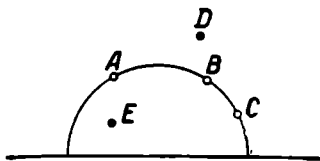
Черт. 108.



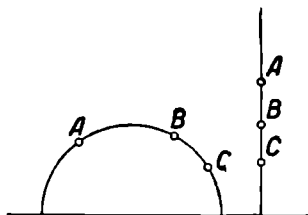
Черт. 109.

ектов пусть будут: „точки“ — обыкновенные точки в *верхней полуплоскости*; точки самой прямой Ox и точки в нижней полуплоскости в состав категории основных объектов не входят; „прямые“ — полуокружности с центрами на прямой Ox и обыкновенные полупрямые, перпендикулярные основной прямой Ox (черт. 108). „Плоскость“ — верхняя полуплоскость. „Принадлежать“ и „между“ понимаем в обычном смысле.

Чертежи 109, 110 иллюстрируют верность плоскостных аксиом первой группы I_{1-3} . Чертежи 111, 112, 113 — выполнимость аксиом второй группы II_{1-4} .



Черт. 110.



Черт. 111.

Для введения понятия „конгруэнтности“ отрезков введём сначала „расстояние“ между двумя точками A и B . Именно, каждой паре „точек“ A, B ставим в соответствие число

$$\delta_{AB} = k \cdot \ln \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}} \right),$$

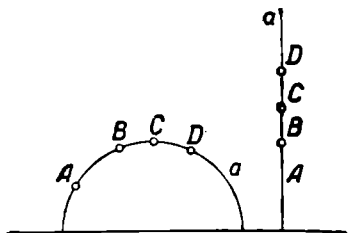
или как решения дифференциального уравнения $\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$, удовлетворяющие „начальным условиям“ при $x = x_0 = 0$; $y = y_0 = 0$; $y' = y'_0 = 1$ — для синуса и при $x = x_0 = 0$; $y = y_0 = 1$; $y' = y'_0 = 0$ — для косинуса.

если точки лежат на „прямой“, изображённой на карте Пуанкаре *полу-окружностью*, и число

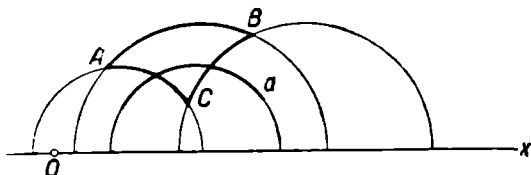
$$\delta_{AB} = k \cdot \ln \frac{y_2}{y_1},$$

если точки лежат на „прямой“, изображённой на карте *полупрямой* (черт. 114). Здесь углы φ_1, φ_2 и ординаты y_1 и y_2 имеют обычный *евклидов* смысл, ясный из чертежа; ($0 < \varphi < \pi$) и ($y > 0$).

Знак „расстояния“ связан с направлением „отрезка“ на „прямой“. Множитель k позволяет выбирать произвольно „единицу“ масштаба.



Черт. 112.



Черт. 113.

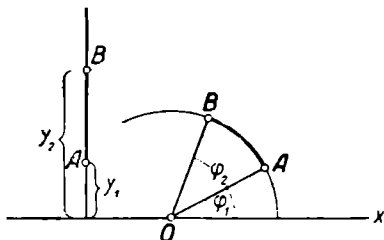
Объявляем теперь „отрезки“ „конгруэнтными“, если модули их „расстояний“ равны:

$$AB \equiv CD, \text{ если } |\delta_{AB}| = |\delta_{CD}|.$$

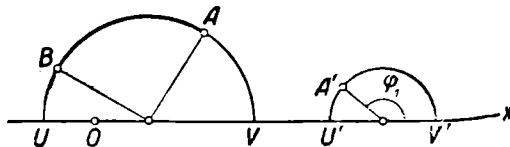
Проверяем аксиому III₁: необходимо найти в указанном направлении (от U' к V') (черт. 115) на „прямой“ $U'V'$ такую „точку“ B' , чтобы было $A'B' \equiv AB$; δ_{AB} — дано.

Из уравнения $\delta_{AB} = k \cdot \ln \frac{\lg \frac{\varphi_2}{2}}{\lg \frac{\varphi_1}{2}}$ (или $\delta_{AB} = k \cdot \ln \frac{y_2}{y_1}$) найдём неизвест-

ное $\lg \frac{\varphi_2}{2}$ (или y_2), а следовательно, и „точку“ B' , определяемую углом φ_2 (или ординатой y_2). Аксиома III₁ — удовлетворена.



Черт. 114.



Черт. 115.

Из того, что при $A'B' \equiv AB$ и $A''B'' \equiv AB$, следует $|\delta_{A'B'}| = |\delta_{AB}|$ и $|\delta_{A''B''}| = |\delta_{AB}|$, т. е. $|\delta_{A'B'}| = |\delta_{A''B''}|$ а это значит, что $A'B' \equiv A''B''$. Этим установлена справедливость в модели Пуанкаре аксиомы III₂. Покажем

далее, что из $\overline{AB} + \overline{EC} = \overline{AC}$ следует $\delta_{AB} + \delta_{BC} = \delta_{AC}$.

$$\text{Имеем: } \delta_{AB} = k \cdot \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}}; \quad \delta_{BC} = k \cdot \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_3}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2}} \text{ и, следовательно,}$$

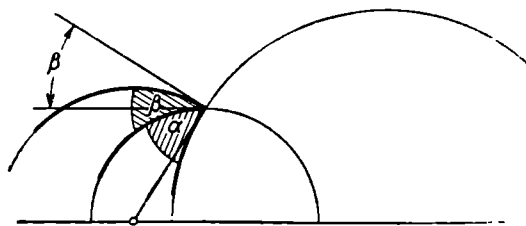
$$\delta_{AB} + \delta_{BC} = k \cdot \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}} + k \cdot \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_3}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2}} = k \cdot \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_3}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}} = \delta_{AC}$$

(черт. 116). Полученное свойство *аддитивности* справедливо для „отрезков“ любого направления. Аналогичное доказательство проводится и для „отрезков“, изображённых на карте отрезками *полупрямой*.

Из свойства аддитивности следует выполнимость аксиомы III₃. Если „точка“ A стремится к точке U ($\varphi_1 \rightarrow 0$), то „расстояние“ $AB \rightarrow \infty$; точно так же при $B \rightarrow V$ ($\varphi_2 \rightarrow \pi$) имеем $\delta_{AB} \rightarrow \infty$. Вся „прямая“ UV имеет неограниченную „длину“. Кроме того, как и для карты Бельтрами, установлена аксиома V_1 Архимеда.

Дадим конкретный смысл понятию „конгруэнтный“ для углов. Здесь дело обстоит чрезвычайно просто. Углы неевклидово конгруэнтны, если они конгруэнтны в обычном евклидовом смысле. Карта Пуанкаре даёт конформное отображение плоскости Лобачевского на евклидову полуплоскость ($y > 0$). (Конформное — значит с сохранением углов.) Проверим выполнимость аксиом конгруэнтности для углов.

Каждый угол может быть отложен одним единственным способом, при заданном луче по заданную его сторону, это следует из евклидова смысла углов на карте. Пример построения суммы углов на карте дан на чертеже 117.

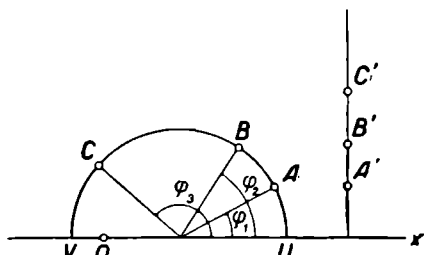


Черт. 117.

Аксиома III₄ выполнена. Труднее проверить справедливость аксиомы III₅, в которой необходимо согласовать „конгруэнтность“ отрезков с „конгруэнтностью“ углов. Однако на довольно длинном пути проверки аксиомы III₅ мы познакомимся с „работой при помощи карты“ и с целым рядом новых фактов геометрии Лобачевского, в частности с элементами тригонометрии Лобачевского.

Покажем, что две „стороны“ „треугольника“ и „угла“, заключённый между ними, вполне определяют остальные элементы треугольника.

Сделаем это сначала для прямоугольного треугольника, который изображим на карте Пуанкаре в виде треугольника A, B, C с прямым углом A (черт. 118). Причём пусть катет AB изобразится отрезком прямой линии, а



Черт. 116.

Аксиома III₄ выполнена. Труднее проверить справедливость аксиомы III₅, в которой необходимо согласовать „конгруэнтность“ отрезков с „конгруэнтностью“ углов. Однако на довольно длинном пути проверки аксиомы III₅ мы познакомимся с „работой при помощи карты“ и с целым рядом новых фактов геометрии Лобачевского, в частности с элементами тригонометрии Лобачевского.

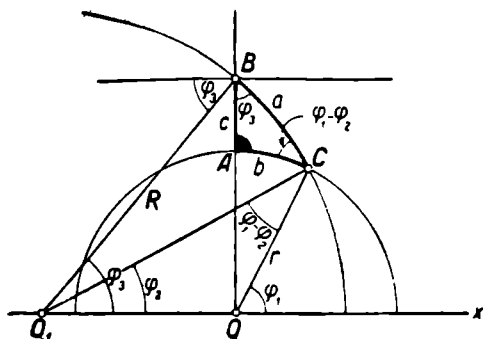
гипотенуза CB и катет AC — дугами окружностей с центрами O_1 и O и евклидовыми радиусами R и r соответственно.

$$\angle B = \varphi_3; \quad \angle C = \varphi_1 - \varphi_2,$$

где

$$\varphi_3 = \angle BO_1O; \quad \varphi_1 = \angle AOC; \quad \varphi_2 = \angle CO_1O; \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \angle OCO_1.$$

Для неевклидовых длин $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ имеем:



$$c = k \cdot \ln \frac{OB}{r} \quad (\alpha)$$

$$\begin{aligned} b &= k \cdot \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}} = \\ &= -k \cdot \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} \quad (\beta) \end{aligned}$$

$$a = k \cdot \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_3}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2}}. \quad (\gamma)$$

Черт. 118.

Найдём зависимость между a , b и c , т. е. между катетами b и c и гипотенузой a („неевклидова теорема Пифагора“).

Из (β) вытекает

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} = e^{-\frac{b}{k}}; \quad \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}} = e^{\frac{b}{k}}$$

$$\frac{e^{\frac{b}{k}} + e^{-\frac{b}{k}}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}} + \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} \right) = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi_1}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}} = \frac{1}{\sin \varphi_1}.$$

Комбинация $\frac{e^{\frac{b}{k}} + e^{-\frac{b}{k}}}{2}$ показательных функций $e^{\frac{b}{k}}$ и $e^{-\frac{b}{k}}$ называется гиперболическим косинусом аргумента $\frac{b}{k}$ и обозначается так:

$$\frac{e^{\frac{b}{k}} + e^{-\frac{b}{k}}}{2} = \operatorname{ch} \frac{b}{k}.$$

Из разложения показательной функции в ряд имеем в частности:

$$\operatorname{ch} \frac{b}{k} = 1 + \frac{\left(\frac{b}{k}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{b}{k}\right)^4}{4!} + \frac{\left(\frac{b}{k}\right)^6}{6!} + \dots \quad (\varepsilon)$$

Окончательно для катета b получаем

$$\operatorname{ch} \frac{b}{k} = \frac{1}{\sin \varphi_1}. \quad (\beta')$$

Обратимся к катету c . Из (а) имеем:

$$\frac{OB}{r} = e^{\frac{c}{k}}; \quad \frac{r}{OB} = e^{-\frac{c}{k}}; \quad \frac{e^{\frac{c}{k}} + e^{-\frac{c}{k}}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{OB}{r} + \frac{r}{OB} \right),$$

или $\text{ch } \frac{c}{k} = \frac{OB^2 + r^2}{2 \cdot OB \cdot r}$. Но из треугольника O_1OB на карте имеем по евклидовой теореме Пифагора:

$$OB^2 = R^2 - OO_1^2 = R^2 - [R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\varphi_1 - \varphi_2)],$$

где OO_1^2 вычислено по евклидовой теореме косинусов из треугольника O_1CO (черт. 118).

$$OB^2 = -r^2 + 2Rr \cos(\varphi_1 - \varphi_2); \text{ откуда } OB^2 + r^2 = 2Rr \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Таким образом:

$$\text{ch } \frac{c}{k} = \frac{2Rr \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{2 \cdot OB \cdot r} = \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{\left(\frac{OB}{R}\right)},$$

но так как из треугольника O_1OB находим $\frac{OB}{R} = \sin \varphi_3$, то окончательно для катета неевклидовой длины c имеем:

$$\text{ch } \frac{c}{k} = \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin \varphi_3}. \quad (\text{а}')$$

Преобразуем, наконец, выражение для неевклидовой длины a гипотенузы BC .

Из (γ) имеем последовательно:

$$\frac{\text{tg } \frac{\varphi_3}{2}}{\text{tg } \frac{\varphi_2}{2}} = e^{\frac{a}{k}}; \quad \frac{\text{tg } \frac{\varphi_2}{2}}{\text{tg } \frac{\varphi_3}{2}} = e^{-\frac{a}{k}}; \quad \frac{e^{\frac{a}{k}} + e^{-\frac{a}{k}}}{2} = \frac{\text{tg}^2 \frac{\varphi_2}{2} + \text{tg}^2 \frac{\varphi_3}{2}}{2 \text{tg } \frac{\varphi_2}{2} \cdot \text{tg } \frac{\varphi_3}{2}},$$

или

$$\text{ch } \frac{a}{k} = \frac{\left(\frac{1}{\cos^2 \frac{\varphi_2}{2}} - 1\right) + \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{\varphi_3}{2}} - 1\right)}{2 \text{tg } \frac{\varphi_2}{2} \cdot \text{tg } \frac{\varphi_3}{2}} = \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{\varphi_2}{2}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{\varphi_3}{2}} - 2}{2 \text{tg } \frac{\varphi_2}{2} \cdot \text{tg } \frac{\varphi_3}{2}}.$$

Умножая числитель и знаменатель правой части на произведение $\cos^2 \frac{\varphi_2}{2} \cdot \cos^2 \frac{\varphi_3}{2}$, получим

$$\text{ch } \frac{a}{k} = 2 \cdot \frac{\cos^2 \frac{\varphi_3}{2} + \cos^2 \frac{\varphi_2}{2} - 2 \cos^2 \frac{\varphi_2}{2} \cdot \cos^2 \frac{\varphi_3}{2}}{\sin \varphi_2 \cdot \sin \varphi_3},$$

или

$$\text{ch } \frac{a}{k} = 2 \cdot \frac{\frac{1 + \cos \varphi_3}{2} + \frac{1 + \cos \varphi_2}{2} - 2 \frac{1 + \cos \varphi_2}{2} \cdot \frac{1 + \cos \varphi_3}{2}}{\sin \varphi_2 \cdot \sin \varphi_3}$$

и после упрощения окончательно найдём для гипотенузы

$$\text{ch } \frac{a}{k} = \frac{1 - \cos \varphi_2 \cdot \cos \varphi_3}{\sin \varphi_2 \cdot \sin \varphi_3}. \quad (\gamma')$$

Неевклидовы длины a, b, c прямоугольного треугольника BAC мы выразили в виде функций от углов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ на карте. Найдём теперь зависимость между этими углами и, посредством последней, — зависимость между неевклидовыми длинами a, b, c .

Из треугольника O_1CO (черт. 118) по евклидовой теореме синусов имеем:

$$\frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin \varphi_1} = \frac{O_1O}{O_1C} = \frac{O_1O}{R}.$$

Но из треугольника O_1OB следует $\frac{O_1O}{R} = \cos \varphi_3$, так что

$$\cos \varphi_3 = \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin \varphi_1}. \quad (\lambda)$$

Подставляя найденное значение $\cos \varphi_3$ в (γ') , найдём:

$$\operatorname{ch} \frac{a}{k} = \frac{1 - \cos \varphi_2 \cdot \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin \varphi_1}}{\sin \varphi_2 \cdot \sin \varphi_3} = \frac{\sin \varphi_1 - \cos \varphi_2 \cdot (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)}{\sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \cdot \sin \varphi_3},$$

$$\operatorname{ch} \frac{a}{k} = \frac{\sin \varphi_1 - \sin \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_2}{\sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \cdot \sin \varphi_3},$$

$$\operatorname{ch} \frac{a}{k} = \frac{\sin \varphi_1 \cdot \sin^2 \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_2}{\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3},$$

что после сокращения на $\sin \varphi_2$ примет вид:

$$\operatorname{ch} \frac{a}{k} = \frac{1}{\sin \varphi_1} \cdot \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin \varphi_3}.$$

Приняв во внимание выражения (β') и (α') , находим окончательно неевклидову теорему Пифагора*:

$$\operatorname{ch} \frac{a}{k} = \operatorname{ch} \frac{b}{k} \cdot \operatorname{ch} \frac{c}{k}. \quad (I)$$

Часто полагают $k = 1$, чем фиксируют определённую единицу длины, и выражают теорему словесно:

Гиперболический косинус гипотенузы равен произведению гиперболических косинусов катетов.

Покажем здесь же, что евклидова теорема Пифагора получится из неевклидовой как предельный случай при $k \rightarrow \infty$.

Разложим гиперболические косинусы в ряд по формуле (ε); тогда формула (I) примет вид:

$$1 + \frac{\left(\frac{a}{k}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{a}{k}\right)^4}{4!} + \dots = \left(1 + \frac{\left(\frac{b}{k}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{b}{k}\right)^4}{4!} + \dots\right) \cdot \left(1 + \frac{\left(\frac{c}{k}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{c}{k}\right)^4}{4!} + \dots\right).$$

Раскрывая скобки и умножая на $2k^2$, получим:

$$a^2 + \frac{a^4}{12k^2} + \dots = b^2 + c^2 + \frac{b^4 + c^4 + 2b^2c^2}{12k^2} + \dots,$$

где невыписанные члены содержат делителем степени k^2 . При $k \rightarrow \infty$ получим в пределе обычную теорему Пифагора:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Можно с тем же результатом, фиксируя k , уменьшать стороны треугольника, что приводит к предположению: для бесконечно малого прямоугольного треугольника на плоскости Лобачевского применима теорема Пифагора (в смысле пренебрежения бесконечно малыми высших порядков).

Теорема Пифагора ($a^2 = b^2 + c^2$), как теперь легко понять, эквивалентна постулату Евклида.

Приняв во внимание формулу (λ) и заметив, что $\varphi_3 = \angle B$; $\varphi_1 - \varphi_2 = \angle C$, а $\frac{1}{\sin \varphi_1} = \operatorname{ch} \frac{b}{k}$ по формуле (β'), найдём:

$$\cos B = \operatorname{ch} \frac{b}{k} \cdot \sin C,$$

и по аналогии

$$\cos C = \operatorname{ch} \frac{c}{k} \cdot \sin B.$$

Зависимости между двумя углами и катетом прямоугольного треугольника на плоскости Лобачевского показывают, что *прямоугольный треугольник вполне определяется двумя острыми углами* ($B + C < \frac{\pi}{2}$); это говорит об *отсутствии подобия*, что нам известно из теоремы Валлиса.

Отсутствие подобия показывает, что мы имеем дело с моделью геометрии Лобачевского и что в интерпретации Пуанкаре имеет силу постулат Лобачевского.

Покажем теперь, что *гипотенуза a и острый угол B прямоугольного треугольника вполне определяют треугольник* в модели Пуанкаре.

Находим последовательно, как и ранее,

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} = e^{-\frac{b}{k}}, \quad \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}} = e^{\frac{b}{k}}; \quad \frac{e^{\frac{b}{k}} - e^{-\frac{b}{k}}}{2} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi_1}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}},$$

или

$$\operatorname{sh} \frac{b}{k} = \frac{\cos \varphi_1}{\sin \varphi_1}, \quad (\mu)$$

где комбинация $\frac{e^{\frac{b}{k}} - e^{-\frac{b}{k}}}{2}$ называется *гиперболическим синусом*:

$$\frac{e^{\frac{b}{k}} - e^{-\frac{b}{k}}}{2} = \operatorname{sh} \frac{b}{k}.$$

Точно так же из (γ) имеем:

$$e^{\frac{a}{k}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_3}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2}}; \quad e^{-\frac{a}{k}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_3}{2}}; \quad \frac{e^{\frac{a}{k}} - e^{-\frac{a}{k}}}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_3}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2}} - \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_3}{2}} \right].$$

Проводя выкладки по аналогии с предыдущим, найдём:

$$\operatorname{sh} \frac{a}{k} = \frac{\cos \varphi_2 - \cos \varphi_3}{\sin \varphi_2 \cdot \sin \varphi_3}.$$

Приняв во внимание (λ), находим:

$$\operatorname{sh} \frac{a}{k} = \frac{\cos \varphi_2 - \frac{\sin (\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin \varphi_1}}{\sin \varphi_2 \cdot \sin \varphi_3} = \frac{\sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2}{\sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \cdot \sin \varphi_3},$$

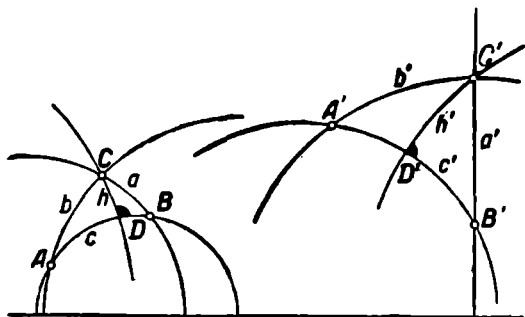
$$\operatorname{sh} \frac{a}{k} = \frac{\cos \varphi_1}{\sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_3} = \frac{\cos \varphi_1}{\sin \varphi_1} \cdot \frac{1}{\sin \varphi_3}.$$

А так как $\varphi_3 = \angle B$ и имеет место (μ), то

$$\operatorname{sh} \frac{a}{k} = \operatorname{sh} \frac{b}{k} \cdot \frac{1}{\sin B}.$$

Окончательно получаем:

$$\operatorname{sh} \frac{b}{k} = \operatorname{sh} \frac{a}{k} \cdot \sin B. \quad (\text{II})$$



Черт. 119.

Эта зависимость позволяет по гипотенузе a и острому углу B определить противолежащий катет b .

Формула (I) затем позволит определить другой катет, а применяя снова (II), можно найти и другой острый угол C .

Теперь всё подготовлено для проверки аксиомы III₆:

„Если для двух треугольников ABC и $A'B'C'$ имеют место конгруэнтности $AB \equiv A'B'$; $AC \equiv A'C'$; $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$,

то имеет место также и конгруэнтность:

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C'.$$

В самом деле, пусть на модели Пуанкаре для двух треугольников ABC и $A'B'C'$ (черт. 119) имеет место конгруэнтность $AB \equiv A'B'$; $AC \equiv A'C'$; $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$. В силу наших соглашений о „конгруэнтности“ „отрезков“ и „углов“, это значит, что

$$\rho_{AB} = \rho_{A'B'}; \rho_{AC} = \rho_{A'C'},$$

где

$$\rho_{AB} = c; \rho_{A'B'} = c'; \rho_{AC} = b; \rho_{A'C'} = b'$$

в указанном выше смысле, и $\angle BAC = \angle B'A'C'$ в обычном смысле равенства углов.

Проводя высоты треугольников CD и $C'D'$, из прямоугольных треугольников ACD и $A'C'D'$ найдём:

$$\operatorname{sh} \frac{h}{k} = \operatorname{sh} \frac{b}{k} \cdot \sin A \text{ и } \operatorname{sh} \frac{h'}{k} = \operatorname{sh} \frac{b'}{k} \cdot \sin A',$$

но так как $b = b'$; ($\rho_{AC} = \rho_{A'C'}$) и $\angle A = \angle A'$, то и $h = h'$. Это означает, что $\rho_{CD} = \rho_{C'D'}$, т. е. „конгруэнтность“ $CD \equiv C'D'$.

По формуле (I) находим из треугольников ADC и $A'D'C'$:

$$\operatorname{ch} \frac{\rho_{AD}}{k} = \frac{\operatorname{ch} \frac{b}{k}}{\operatorname{ch} \frac{h}{k}}; \operatorname{ch} \frac{\rho_{A'D'}}{k} = \frac{\operatorname{ch} \frac{b'}{k}}{\operatorname{ch} \frac{h'}{k}},$$

что, в силу равенства правых частей, даёт:

$$\operatorname{ch} \frac{\rho_{AD}}{k} = \operatorname{ch} \frac{\rho_{A'D'}}{k}.$$

Отсюда $\rho_{AD} = \rho_{A'D'}$, или $AD \equiv A'D'$.

Далее, в силу аддитивности для „длин“ имеем:

$$\rho_{AB} = \rho_{AD} + \rho_{DB} \text{ и } \rho_{A'B'} = \rho_{A'D'} + \rho_{D'B'},$$

и, так как $\rho_{AB} = \rho_{A'B'}$, $\rho_{AD} = \rho_{A'D'}$, то $\rho_{DB} = \rho_{D'B'}$, что означает „конгруентность“ $DB \equiv D'B'$. Таким образом, в прямоугольных треугольниках CDB и $C'D'B'$ „длины“ катетов равны, откуда по (I) следует, что и „длины“ a и a' гипотенуз CB и $C'B'$ равны, а следовательно, имеет место „конгруентность“ $CB \equiv C'B'$. Вместе с тем из (II) следует для треугольников CDB и $C'D'B'$

$$\operatorname{sh} \frac{h}{k} = \operatorname{sh} \frac{a}{k} \cdot \sin B \text{ и } \operatorname{sh} \frac{h'}{k} = \operatorname{sh} \frac{a'}{k} \cdot \sin B',$$

а так как $h = h'$, $a = a'$, то отсюда следует, что $B = B'$, или „конгруентность“ $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$.

Аксиома III₆ проверена.

Попутно мы получили „тригонометрию прямоугольного треугольника“ на плоскости Лобачевского и косвенное доказательство выполнимости на модели Пуанкаре постулата Лобачевского.

Последний факт усматривается и непосредственно (черт. 120), „Прямые“ b и c будут „параллельны“ „прямой“ a в смысле Лобачевского. Все „прямые“, попадающие внутрь заштрихованного угла, будут сверхпараллельны к „прямой“ a . Здесь справедлива аксиома IV Лобачевского:

IV_д. В плоскости, определяемой прямой a и точкой A , через точку A проходит более одной прямой, не пересекающей прямую a .

Аксиомы пятой группы также остаются справедливыми, так как здесь непрерывность можно понимать в обычном евклидовом смысле; аксиома Архимеда нами уже проверена непосредственно.

На этом мы и закончим проверку аксиом в модели Пуанкаре плоской геометрии Лобачевского.

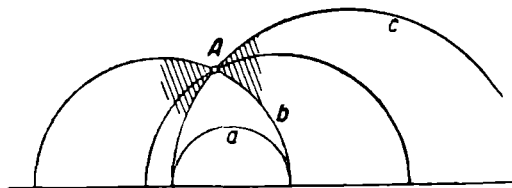
Рассмотрим теперь интерпретацию некоторых теорем планиметрии Лобачевского, не вдаваясь в подробности.

Начнём с простейших теорем, справедливых и до введения параллельных, т. е. равно верных в геометрии Евклида и в геометрии Лобачевского.

1. Из „точки“ A к „прямой“ a можно провести только один перпендикуляр p .

Если посмотреть на модель „глазами обычными“, а не глазами моделируемой геометрии, то мы увидим, что:

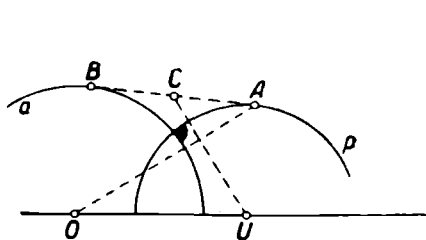
1'. Через точку A в верхней полуплоскости ($y > 0$) к верхней полуокружности с центром на прямой Ox или к верхней полупрямой, перпендикулярной к Ox , можно провести только одну полуокружность с центром на Ox (или прямую, перпендикулярную Ox).



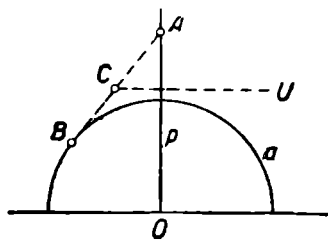
Черт. 120.

Получилась „новая“ теорема евклидовой геометрии, справедливость которой следует из того, что все аксиомы, с помощью которых доказывается теорема 1, в этой модели имеют место. Отдельного доказательства теорема 1' не требует, хотя его можно и провести обычным путём. Дадим построения на карте. Строим, имея в виду общий случай, *радикальную ось окружности a и точки A* как геометрическое место центров окружностей, проходящих через точку A и секущих ортогонально окружность a . Пересечение этой радикальной оси с прямой Ox и даст центр U искомой окружности (черт. 121).

Для построения радикальной оси поступаем, например, так: из A проводим к окружности a касательную AB ; из середины C отрезка AB проводим



Черт. 121.

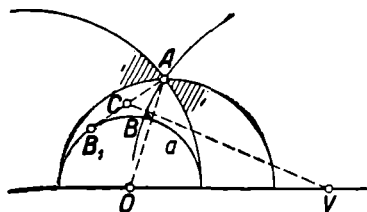


Черт. 122.

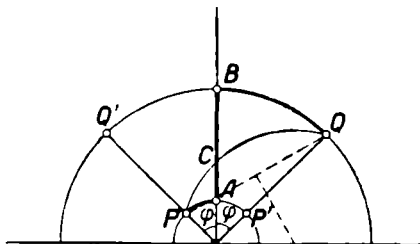
перпендикуляр CU к „линии центров“ AO . Окружность с центром U и радиусом UA — искомая (черт. 121). На чертеже 122 показан частный случай. Рассмотрим остальные частные случаи полезно в виде упражнения.

На чертеже 123, иллюстрирующем постулат Лобачевского, AB — перпендикуляр к a .

2. Чтобы разделить отрезок AB „пополам“, можно поступить так: восстановить в концах отрезка перпендикуляры AP и BQ , взять на них точки P



Черт. 123.



Черт. 124.

и Q по разные стороны от AB так, чтобы $AP \equiv BQ$. Прямая PQ пересекает AB в искомой середине C .

На чертеже 124 показано построение на карте для специального случая. Для доказательства конгруэнтности $AP \equiv BQ$ заметим, во-первых, что $BQ \equiv AP'$, так как

$$\delta_{BQ} = k \cdot \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = k \cdot \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right),$$

что равно, очевидно, δ_{AP} . Далее, $AP \equiv P'A$ в силу симметрии; в этом можно убедиться и расчётом длин.

Рассмотрим несколько предложений собственно геометрии Лобачевского.

3. Сумма углов треугольника меньше двух прямых. Этот факт иллюстрируется чертежом 125 и даёт „новую“ теорему, относящуюся к окружностям с центрами на одной прямой.

4. Две сверхпараллельные прямые a и b имеют общий перпендикуляр и притом только один.

Это значит, что существует лишь одна окружность, пересекающая ортогонально две данные окружности без общих точек и имеющая центр на их линии центров (черт. 126).

Построение введём, например, так: проводим общую касательную AB к окружностям a и b , делим её пополам в точке C и опускаем перпендикуляр на Ox , т. е. строим радикальную ось двух данных окружностей. Проводим окружность с центром O' радиусом r , равным длине касательной из O' к двум данным окружностям. Окружность с центром O' и есть изображение на карте общего перпендикуляра к двум сверхпараллельным прямым.

5. Каков бы острый угол α ни был, всегда существует перпендикуляр p к одной его стороне a , параллельный другой стороне b .

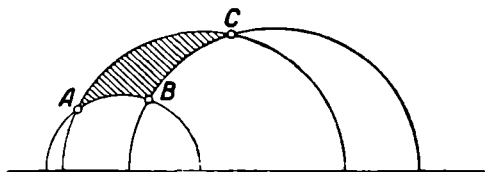
Построение на карте: проводим окружность p с центром O' и радиусом $O'U$, где O' — точка радикальной оси CO' окружности a и точки U (черт. 127).

6. Никакие три точки эквидистанты не лежат на одной прямой (черт. 128).

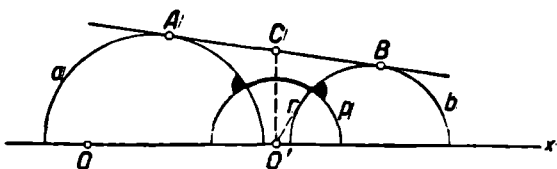
На карте эквидистанта с основанием $OABCD \dots$ изображается прямой $OA'B'C'D' \dots$, так как имеют место конгруэнтности „прямолинейных“ отрезков:

$$AA' \equiv BB' \equiv CC' \equiv DD' \equiv \dots$$

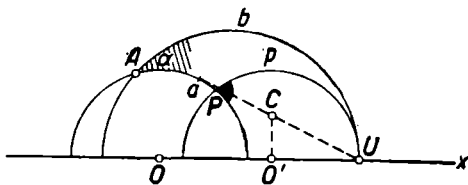
Вообще все наклонные полупрямые O_1G изображают эквидистанты, для которых прямые O_1S изображают основания. Никакие три точки A', B', C'



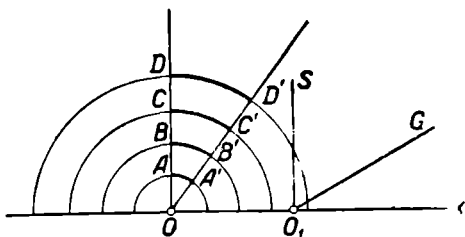
Черт. 125.



Черт. 126.

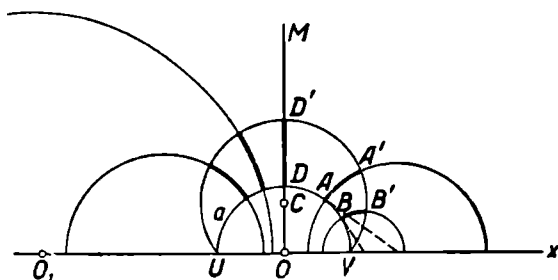


Черт. 127.



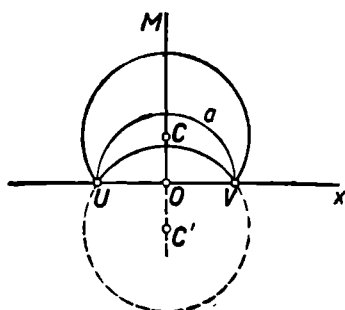
не лежат ни на окружности с центром на Ox , ни на прямой, перпендикулярной Ox .

7. Эквидистанта пересекает ортогонально все перпендикуляры (AA' , BB' , CC' , ...) к её основанию (черт. 128).



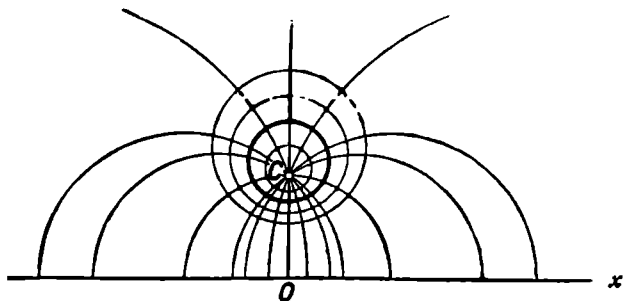
Черт. 129.

Воспользуемся этой теоремой для построения эквидистанты с любым основанием. Строим пучок окружностей, секущих ортогонально окружность a . Все центры окружностей лежат на прямой Ox (черт. 129). Все окружности пучка имеют общую радикальную ось OM , которая сама есть выродившаяся окружность пучка. Для построения эквидистанты с основанием a необходимо найти линию, которая пересекала бы все окружности пучка ортогонально. Из теории пучков и связок окружностей известно, что такой линией будет окружность с центром на радикальной оси OM пучка, проходящая через точки U и V , так называемые *предельные точки пучка*.



Черт. 130.

Из любой точки C (или C') (черт. 130) радикальной оси OM проводим верхнюю дугу окружности радиусом $R = CU = CV$. Получаем изображение эквидистанты с основанием a . Легко строить обе ветви эквидистанты по одну и по другую сторону от основания a . Итак, *окружности и прямые, пересекающие прямую*



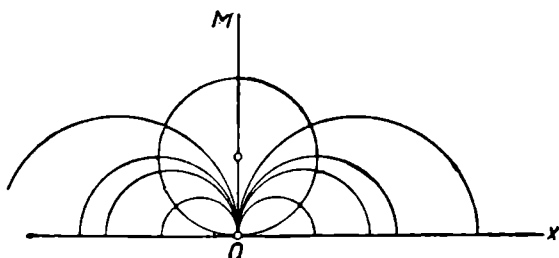
Черт. 131.

Ox не под прямым углом, изображают на карте Пуанкаре эквидистанты. „Отрезки“ AA' , BB' , DD' и т. д. „конгруэнтны“ (черт. 129).

Интересно увидеть на карте образы окружностей. Для этого воспользуемся следующим характеристическим свойством окружности:

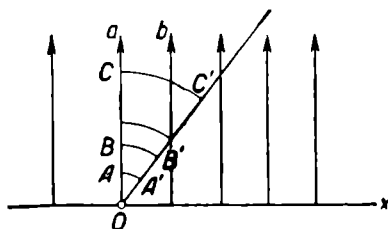
8. Окружность пересекает ортогонально все прямые, проходящие через её центр.

Для карты это свойство формулируется так: образ „окружности“ пересекает окружности пучка с центрами на Ox , „проходящие через S ,



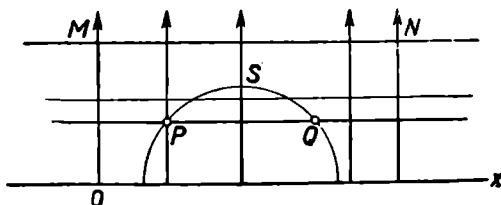
Черт. 132.

ортогонально. Как известно, такой линией будет окружность пучка, „ортогонального к исходному пучку“. На чертеже 131 изображены „концентрические окружности“ с „центром“ C .



Черт. 133.

Итак, окружности верхней полуплоскости, не пересекающие Ox , изображают „окружности“ Лобачевского. Вместе с построением „окружности“ мы получаем возможность откладывать „конгруэнтные отрезки“ из

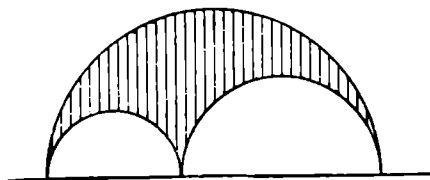


Черт. 134.

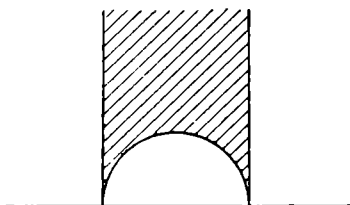
любой „точки“ по любому направлению. Следует заметить, что образ „центра“ не есть центр образа.

В заключение заметим, что линия, пересекающая ортогонально все параллели одного направления, — пучка параллелей в смысле Лобачевского, — названа Лобачевским предельной линией. На чертеже 132 изобра-

жена предельная линия в виде окружности, касающейся Ox в точке O . Пересекающиеся в O полуокружности изображают пучок параллелей. Название *предельная* станет понятным, если проследить за образом „окружности“ (черт. 131) при перемещении „центра“ к прямой Ox , т. е. при „перемещении“ в *бесконечность*. „Прямые“, изображаемые перпендикулярами к Ox , также принадлежат параллельному пучку как имеющие между собой угол, равный нулю. То же самое можно усмотреть и из того, что „расстояние“ „точек“ „прямой“ b от „прямой“ a неограниченно убывает, так как $AA' \equiv BB' \equiv CC' \equiv \dots$, и т. д. (черт. 133). Прямые MN , перпендикулярные



Черт. 135.

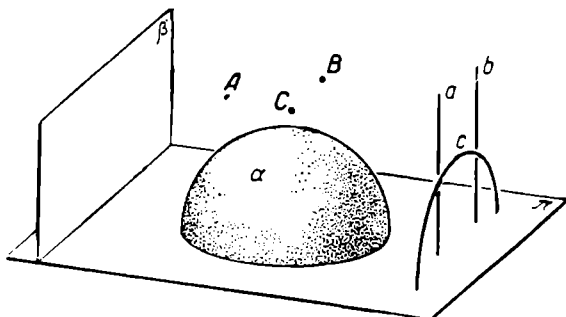


Черт. 136.

к „прямым“ a , b , изображают также предельные линии (черт. 134). Например PSQ изображает „хорду“ предельной линии, вогнутой кверху. Чертежи 135 и 136 изображают „треугольники с нулевыми углами“.

§ 46. Интерпретация Пуанкаре геометрии Лобачевского в пространстве.

Строим модель. Рассмотрим обыкновенное евклидово пространство и плоскость, которую мы назовём основной плоскостью. Все обыкновенные евклидовы точки *над* плоскостью назовём „точками“. Полуокружности, имеющие центр на основной плоскости, плоскости которых перпендикулярны основной плоскости, назовём „прямыми“. „Прямыми“ тоже будут служить обыкновенные прямые, перпендикулярные основной плоскости. „Плоскостями“

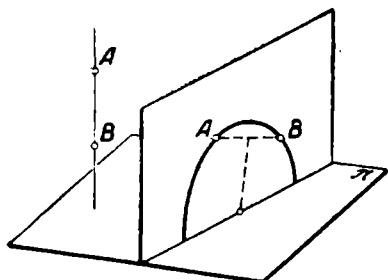


Черт. 137.

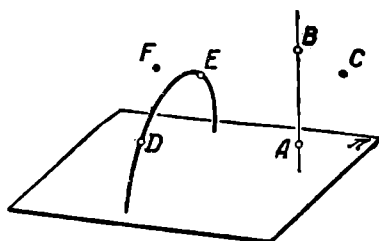
пусть будут верхние полусферы с центрами на основной плоскости, а также полуплоскости, перпендикулярные основной плоскости (черт. 137).

Основные отношения между объектами пусть имеют обычный наглядный смысл. *Конгруэнтность углов в этой интерпретации совпадает с евклидовой конгруэнтностью*. Займёмся проверкой поворкой аксиом. Аксиомы Гильберта будут все удовлетворяться, кроме одной — постулата Евклида; он заменится постулатом Лобачевского.

Через A, B проводим перпендикулярную плоскость к нашей плоскости π , соединяем A, B прямой, делим AB пополам и проводим перпендикуляр до основной плоскости π и из точки пересечения его с плоскостью π как из

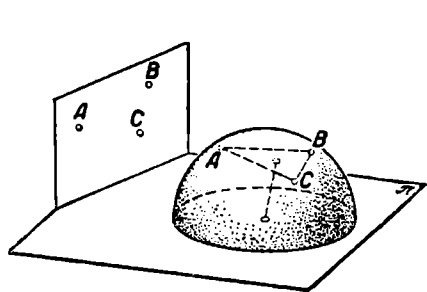


Черт. 138.

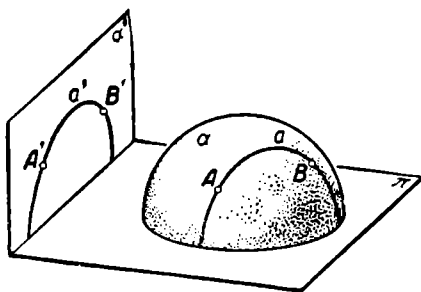


Черт. 139.

центра проводим полуокружность. Это и будет „прямая“, которая определяется двумя „точками“ A и B . Здесь видно, что удовлетворяется и аксиома I_2 (черт. 138). Аксиома I_3 — удовлетворена (черт. 139).

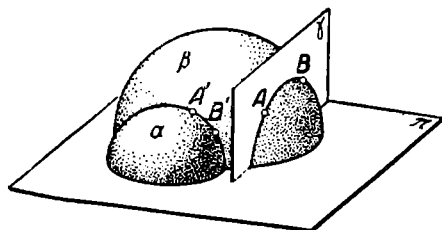


Черт. 140.

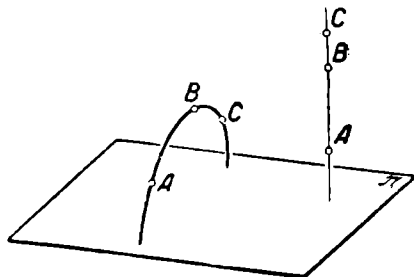


Черт. 141.

Три „точки“, не лежащие на одной „прямой“, всегда определяют „плоскость“ — сферу, проходящую через три точки A, B, C и с центром на основной плоскости. Следовательно, удовлетворяется и аксиома I_4 ; аксиомы I_5 и



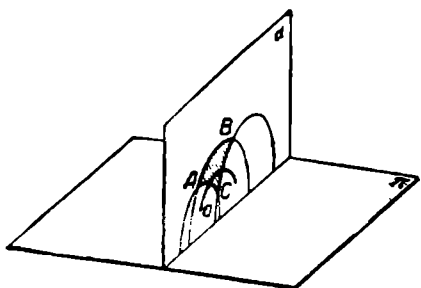
Черт. 142.



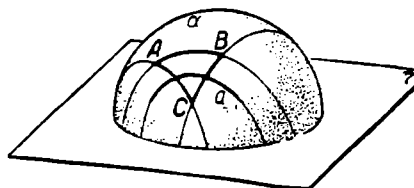
Черт. 143.

I_6 — очевидны (черт. 140, 141); I_7 — если две плоскости имеют общую точку, то они имеют по крайней мере ещё одну общую точку (черт. 142). I_8 — очевидна (черт. 137). Π_{1-3} удовлетворяются, — всё это мы видим наглядно (черт. 143).

Рассмотрим *постулат Паша*. Если плоскость такова, что она изображается плоскостью, перпендикулярной основной плоскости π , то в ней имеет место интерпретация Пуанкаре на плоскости, рассмотренная нами ранее



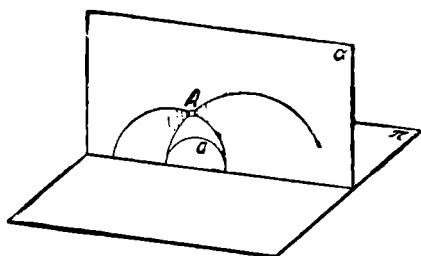
Черт. 144.



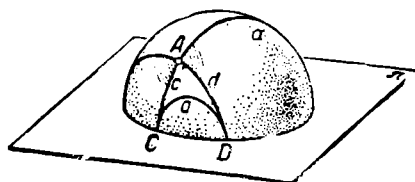
Черт. 145.

(черт. 144). Чертёж 145 показывает случай изображения „плоскости“ полу-сферой.

Группа аксиом III_{1-6} также остаётся справедливой, но мы на ней останавливаться не будем, так же как не останавливались на конкретном смысле



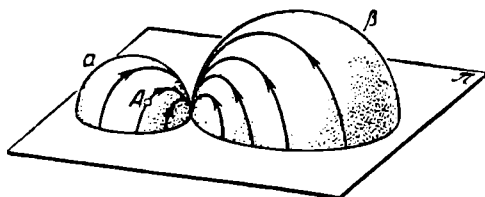
Черт. 146.



Черт. 147.

понятия „быть конгруэнтным отрезкам“. На основании предыдущего читатель это выполнит сам. Группа аксиом V_{1-2} непрерывности здесь также выполнена.

Аксиома параллельности IV_n . Здесь имеет место постулат Лобачевского. Если наша „плоскость“ перпендикулярна основной плоскости π , то имеет

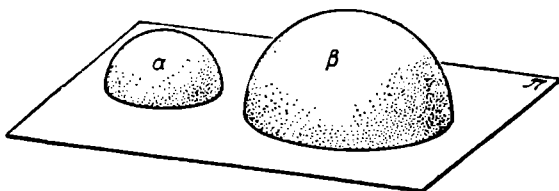


Черт. 148.

место постулат Лобачевского, что подробно рассмотрено в § 45 (черт. 146). В случае изображения „плоскости“ полусферой (черт. 147) через точки A

и C проводим плоскость, перпендикулярную к основной плоскости; она высечет „прямую“ c . Так же проводим плоскость через точки A, D ; она высечет „прямую“ d . Таким образом, на указанной модели осуществляется *пространственная геометрия Лобачевского*.

З а м е ч а н и е. В последнем случае на „плоскости“ α (полусфере α) осуществляется полностью геометрия Лобачевского, если за „точки“ считать точки полусферы, а за „прямые“ — полуокружности, принадлежащие полусфере, плоскости которых перпендикулярны плоскости экватора. Мы имеем

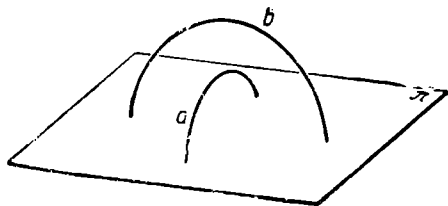


Черт. 149.

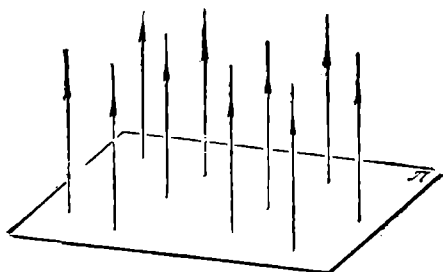
новую интерпретацию плоской геометрии Лобачевского, осуществлённую на полусфере.

Рассмотрим, как выглядят некоторые теоремы Лобачевского в пространственной интерпретации Пуанкаре, и, в частности, пользуясь ею, найдём новые теоремы.

Две „плоскости“ имеют следующее расположение относительно друг друга: „Плоскости“ *пересекаются* (черт. 142). „Плоскости“ *параллельны* (черт. 148); на этих двух „плоскостях“ имеется по одному пучку таких „параллельных“ „прямых“, что два пучка будут параллельны друг другу. Через каждую „точку“ A „плоскости“ α можно провести одну „прямую“,



Черт. 150.



Черт. 151.

которая будет „параллельна“ „плоскости“ β . Наконец, „плоскости“ — *сверхпараллельны* (черт. 149).

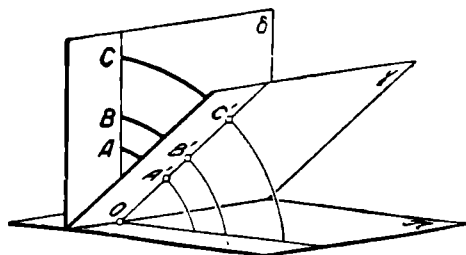
Существуют скрещивающиеся „прямые“ (черт. 150) и „параллельные“ связи „прямых“ (черт. 148). Особо важный для нас случай *параллельной* связи „прямых“ изображён на чертеже 151. Этот случай вполне аналогичен случаю чертежей 133 и 134 предыдущего параграфа.

§ 47. Эквидистантные поверхности, предельные поверхности и сферы.

Эквидистантная поверхность есть геометрическое место точек, равноудалённых от данной плоскости.

Легко понять, пользуясь исследованиями § 45, что полуплоскости γ , секущие основную плоскость π не ортогонально, будут изображать эквидистантные

ные поверхности (черт. 152). Этот факт устанавливается так же, как и в аналогичном случае на плоскости для эквидистант (черт. 128). Отсюда, как и на плоскости, заключаем, что *эквидистантные поверхности пересекают ортогонально все перпендикуляры к основанию δ* . Таким же путём, как в § 45, получаем изображения эквидистантных поверхностей в виде сферических сегментов над основной плоскостью с центрами вне последней (черт. 153). „Плоскости“, перпендикулярные к π , пересекают эквидистантные поверх-

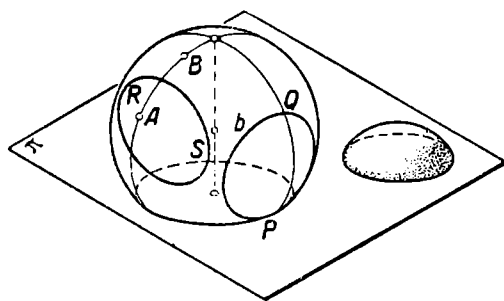


Черт. 152.

ности по *эквидистантам AB*, по *предельным линиям P δ Q* и по „*окружностям*“ *RS*. Они могут так же касаться или совсем не пересекать эквидистантную поверхность.

Изображения „сфер“ мы получим, вращая чертёж 131 вокруг *CO*. „Сферы“ будут изображаться обычными сферами, пересекающими ортогонально все „прямые“ связки, проходящие через „центр“ „сферы“ (черт. 154). „*Предельные поверхности*“ изображаются *сферами*, касающимися основной плоскости π , с вынутой точкой касания *O* (черт. 155), а также *плоскостями*, параллельными основной плоскости π (черт. 156).

Всё это вполне аналогично случаям в планиметрии. Вращая чертежи 132 и 134 вокруг оси *OM*, получим изображения на чертежах 155 и 156. Здесь



Черт. 153.

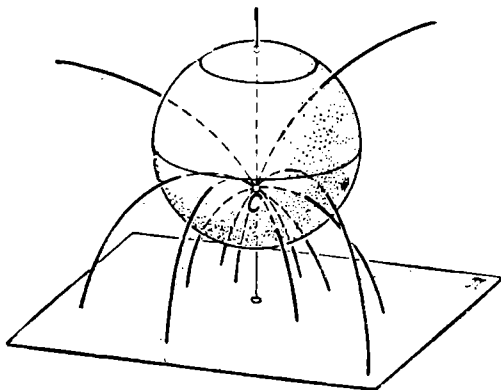
вращение произведено обычным, и притом наглядным приёмом. После получения чертежа, например 156, нетрудно убедиться, что *предельная поверхность сечёт ортогонально связку „параллелей“* в смысле Лобачевского. Это свойство предельной поверхности может служить её определением.

Теперь всё готово для того, чтобы уяснить смысл одной весьма важной и интересной теоремы, положенной Лобачевским в основу его исследований по геометрии, носящей его имя ^[15], ^[16].

Теорема. *Предельная поверхность несёт на себе геометрию Евклида.*

Для доказательства, а также и для уяснения смысла теоремы введём, следуя Лобачёвскому, такую терминологию:

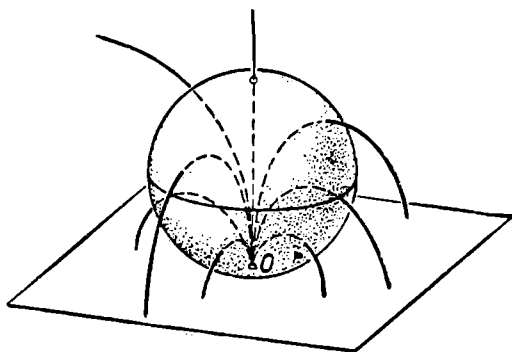
Осью предельной поверхности назовём всякую прямую пучка параллелей, который ортогонально пересекает предельная поверхность. На модели



Черт. 154.

(черт. 156) „прямые“ изображены лучами a, b, c и т. д., перпендикулярными основной плоскости π . Стрелки указывают направление параллелизма. Предельная поверхность Σ вогнута кверху (ср. черт. 134).

Главной плоскостью назовём каждую плоскость, проведённую через ось предельной поверхности. На чертеже 156 главные плоскости изображаются полуплоскостями α , перпендикулярными к плоскости π . *Главная плоскость*

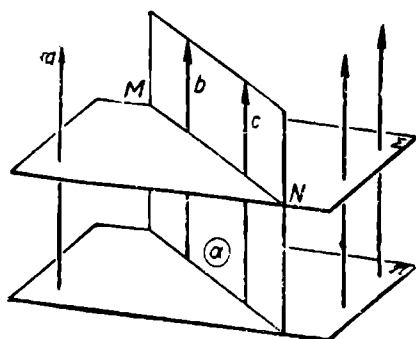


Черт. 155.

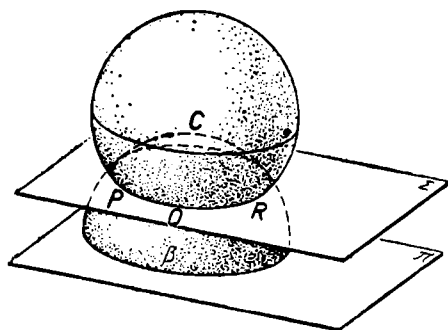
сечёт предельную поверхность по предельной линии, между тем как при другом положении секущей плоскости это пересечение есть окружность. На чертеже 156 это сечение главной „плоскостью“ α есть „предельная линия“ MN , а сечение не главной „плоскостью“ β (черт. 157) есть „окружность“ PQR . Что PQR — „окружность“, следует из того, что эту линию можно получить как пересечение „сферы“ (s) с „плоскостью“ β .

Три главные плоскости, пересекающие друг друга, образуют друг с другом углы, сумма которых равна π . Эти „плоскости“ изображаются на

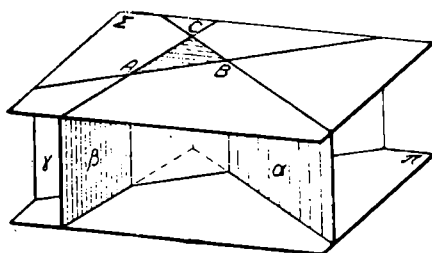
модели плоскостями α , β и γ , перпендикулярными к основной плоскости π (черт. 158). Сумма внутренних двугранных углов между этими плоскостями



Черт. 153.



Черт. 157.



Черт. 158.

равна $2d$, как это следует из сохранения величины углов на модели Пуанкаре. Необходимо только заметить, что линии AB , BC и CA пересечения „главных плоскостей“ α , β и γ с предельной поверхностью Σ суть предельные линии. Следовательно, $\triangle ABC$ — „криволинейный“, и для построения линейного угла двугранного нужно провести прямолинейные касательные к „кривым“ AC , AB и т. д., но это не меняет углов. Эти углы мы будем рассматривать как углы в предельном треугольнике, сторонами которых служат дуги предельных линий, образуемых пересечением предельной поверхности тремя главными плоскостями [16].

Таким образом, если, как предлагает Лобачевский, под „точками“ понимать точки предельной поверхности Σ , под „прямыми“ — предельные линии на той же предельной поверхности, то — в силу равенства суммы углов „треугольника“ ABC (черт. 158) двум прямым — мы имеем дело с евклидовой геометрией. Этим и закончено доказательство и разъяснение смысла теоремы: *Предельная поверхность несёт на себе геометрию Евклида.*

Приведём заключительные слова Лобачевского: „В предельных треугольниках стороны и углы связаны поэтому теми же зависимостями, которые устанавливаются в обыкновенной геометрии для прямолинейных треугольников“.

Таким образом, Лобачевский вновь получает геометрию Евклида, но на предельной поверхности, хотя евклидова геометрия и была изгнана им со своей плоскости, которую мы называем теперь *плоскостью Лобачевского*.

Лобачевский с большим мастерством использует весь аппарат евклидовой геометрии на предельной поверхности для исследования своего пространства — *пространства Лобачевского*.

Заметим в заключение, что симметричные относительно оси фигуры на предельной поверхности будут конгруэнтными в смысле Гильберта, хотя предельную поверхность и нельзя положить на себя другой стороной, но можно заставить скользить по себе.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

СОВМЕСТИНОСТЬ И НЕЗАВИСИМОСТЬ АКСИОМ. ИЗОМОРФИЗМ

§ 48. Совместность системы аксиом.

Одним из основных вопросов, которые ставят по отношению к аксиоматике, служит такой: *не приведёт ли эта система аксиом к противоречивому выводу в своих следствиях, хотя, быть может, и весьма отдалённых?*

Под противоречием мы понимаем такой вывод, такое следствие, вытекающее из системы аксиом, что и его отрицание также является следствием той же системы аксиом. Например, если бы оказалась справедливой теорема Пифагора ($a^2 + b^2 = c^2$) и одновременно из аксиом следовало бы её отрицание (например, в такой форме: $a^2 + b^2 > c^2$), то наличие таких двух „теорем“ указывало бы на противоречивость системы аксиом.

В настоящее время систему аксиом считают непротиворечивой, если существует интерпретация, модель, в которой выполнены все аксиомы, и если эту модель считают верной. Обычно за такую правильную модель принимают модель числовую — аналитическую. Например, аналитическая геометрия является не чем иным, как одной из интерпретаций геометрии. В аналитической геометрии (на плоскости) под „точкой“ разумеют упорядоченную пару чисел (x, y) , под „прямой“ — отношение тройки чисел $(u : v : w)$, из коих все три одновременно не могут быть нулями. Точка „лежит на“ „прямой“, если верно равенство $ux + vy + wz = 0$, и т. д. Здесь, как мы знаем, удовлетворяются все аксиомы плоскости евклидовой геометрии. Аналитическая геометрия в пространстве является интерпретацией пространственной геометрии. Таким образом, найдена аналитическая интерпретация системы аксиом. И, следовательно, если где-нибудь окажется противоречие в геометрии Евклида, построенной аксиоматически, то это противоречие тотчас же обнаружится через аналитическую интерпретацию и в арифметике. Если арифметику считать верной, никогда не ведущей к противоречию, то в той же самой мере надо признать непротиворечивой систему пяти групп аксиом I_{1-3} , II_{1-4} , III_{1-5} , IV , V_{1-2} .

Таким же приёмом доказывается непротиворечивость всей рассматриваемой нами системы аксиом, за исключением группы IV ,

в которой аксиома Евклида заменена аксиомой Лобачевского. Но здесь вопрос свелся к построению модели (интерпретации) геометрии Лобачевского на образах геометрии Евклида. Такой моделью может служить, например, интерпретация Пуанкаре плоской или пространственной геометрии Лобачевского. Если бы где-либо обнаружилось противоречие в геометрической системе Лобачевского, то это противоречие через указанную интерпретацию Пуанкаре немедленно обнаружилось бы и в геометрии Евклида, а тем самым и в арифметике.

Таким образом, существование интерпретации какой-либо системы геометрии в системе, *непротиворечивость которой или доказана, или принята*, доказывает непротиворечивость исходной системы. Геометрия Евклида, как и геометрия Лобачевского, одинаково непротиворечивы, каждая в себе. Указанные соображения о непротиворечивости системы имеют силу и для аксиоматики любой математической теории, а не только геометрии. Вместо того, чтобы говорить: *система непротиворечива*, — говорят, что она *совместна*.

§ 49. Независимость аксиом.

Имея двадцать аксиом (I_{1-8} , II_{1-4} , III_{1-5} , IV , V_{1-2}), можно спросить себя: *не является ли какая-либо аксиома следствием остальных девятнадцати*, т. е. нельзя ли её доказать при помощи этих остальных? Если бы такое доказательство было возможно, то рассматриваемая аксиома попала бы в разряд теорем, следовательно, *не была бы независимой* от остальных девятнадцати аксиом. Независимость какой-либо аксиомы от других аксиом системы устанавливается приёмом, который мы поясним на примере, рассмотрев независимость аксиомы Евклида от остальных девятнадцати аксиом. Сохранив эти девятнадцать аксиом неизменными, заменим аксиому Евклида её противоречивой, а именно: вместо неё введём *аксиому Лобачевского*. Таким образом, вместо системы аксиом 1) *девятнадцать плюс аксиома Евклида* мы рассмотрим такую: 2) *девятнадцать плюс аксиома Лобачевского*. Если окажется, что обе эти системы будут совместными, — каждая в себе, — то этим будет доказана независимость аксиомы IV от остальных, так как если бы аксиома IV Евклида вытекала из остальных аксиом, то её противоречие (аксиома Лобачевского) не было бы совместно с остальными аксиомами. Но нами уже доказана совместность как системы аксиом геометрии Евклида, так и системы аксиом геометрии Лобачевского. Говоря образно, с аксиомами групп I , II , III , V одинаково хорошо „уживается“ и аксиома Евклида, и аксиома Лобачевского, но так как обе вместе справедливы быть не могут (в одной и той же геометрической системе), то отсюда и вытекает независимость IV группы от остальных. Другими словами, *аксиома Евклида недоказуема при помощи остальных девятнадцати аксиом*.

Переходя от примера к общему определению понятия о независимости аксиом, мы скажем, что *если дана система A , состоящая из n аксиом $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n$* [что мы будем обозначать

символом $A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n)$] и аксиома α_i независима от остальных $n-1$ аксиом, то это означает, что система аксиом $A_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n)$, где α_i есть аксиома, отрицающая утверждение аксиомы α_i , будет совместной, так же как и система аксиом $A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n)$ была гильбертовой системой геометрических аксиом, так что $n=20$, α_i — была аксиомой Евклида. В системе же аксиом $A_1(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n)$ вместо аксиомы Евклида α_i была принята аксиома Лобачевского α_i .

Это определение независимости аксиомы α_i от всех остальных аксиом системы распространяется не только на аксиоматику геометрии, но и вообще на аксиоматику любой дисциплины. Если бы аксиома α_i вытекала как следствие из остальных $n-1$ аксиом, то тогда система A_1 была бы противоречивой (несовместной), так как в этой системе имелись бы два противоположных утверждения α_i и $\bar{\alpha}_i$, совместное существование которых невозможно.

Указанным приёмом доказывается независимость некоторых аксиом от всех остальных или от части остальных. Однако ставить вопрос о независимости каждой аксиомы от всех или части остальных не имеет смысла по той причине, что в формулировке аксиомы могут встретиться положения, не имеющие смысла без выполнимости каких-либо из предыдущих аксиом.

§ 50. Эквивалентность двух систем аксиом.

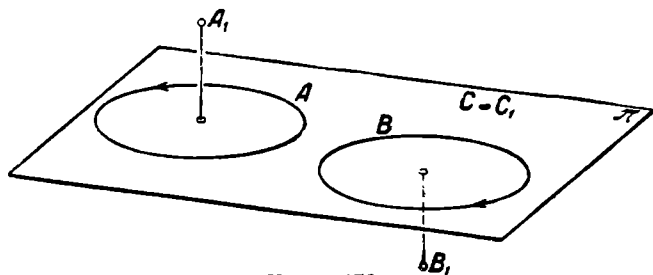
Для выяснения понятия *эквивалентности*, или *равносильности*, двух систем аксиом предварительно остановимся на примере. Мы знаем, что из системы двадцати аксиом евклидовой геометрии вытекает предложение: *сумма углов треугольника равна $2d$* . Обратно, если аксиому IV Евклида заменить предложением, что *сумма углов треугольника равна $2d$* , то при наличии всех остальных аксиом, кроме IV, вытекает аксиома о параллельных. Следовательно, если заменить аксиому IV указанным предложением о сумме углов треугольника, то получим новую систему аксиом, в которой аксиома IV будет выглядеть так: *существует по крайней мере один треугольник, сумма углов которого равна двум прямым*. Все остальные аксиомы остаются прежними. Эта новая система аксиом будет *равносильна* первоначальной потому, что все предложения первой системы будут верными и во второй системе, и обратно. В нашем примере основные отношения: „принадлежать“, „лежать между“, „быть конгруэнтным“ — не претерпевают никаких изменений; но возможен случай, когда вместо одних основных понятий: „точек“, „прямых“, „плоскостей“ и одних основных отношений: „принадлежать“, „лежать между“, „быть конгруэнтным“ — вводят *другие основные понятия*, или основные объекты, и *другие отношения между ними*, и тем не менее системы аксиом могут быть эквивалентными в том смысле, что все предложения, относящиеся как к первой системе аксиом, так и ко второй, будут одними и теми же в своей совокупности в каждой системе. Только быть

может некоторые теоремы первой системы станут аксиомами во второй, некоторые определяемые понятия второй будут основными в первой.

Дадим более общий пример эквивалентности двух систем аксиом. Пусть из системы аксиом $A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n)$ следует предложение m , что мы запишем кратко так: $A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) \rightarrow m$. Возьмём ту же систему аксиом и подставим вместо α_i предложение m . Получим новую систему аксиом $A_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, m, \dots, \alpha_n)$. Если $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, m, \dots, \alpha_n) \rightarrow \alpha_i$, то говорят, что две системы A и A_1 — эквивалентны. Здесь подразумевается, что основные категории объектов и основные отношения между ними остаются теми же самыми как по числу, так и по названию. Эквивалентность в более широком смысле рассматривать не будем.

§ 51. О понятии изоморфизма.

Выяснение этого понятия начнём также с примера. Вспомним интерпретацию геометрии Евклида по Фёдорову. Легко установить, что между двумя интерпретациями отвлечённой геометрической системы: а) на обычных образах, с обычными отношениями и б) интерпретацией Фёдорова — можно установить такое соответствие, что, во-первых, каждой обычной точке поставить в соответствие „точку“ Фёдорова и, обратно, каждой „точке“ Фёдорова поставить в соответствие обычную точку или, точнее: *установить взаимно*

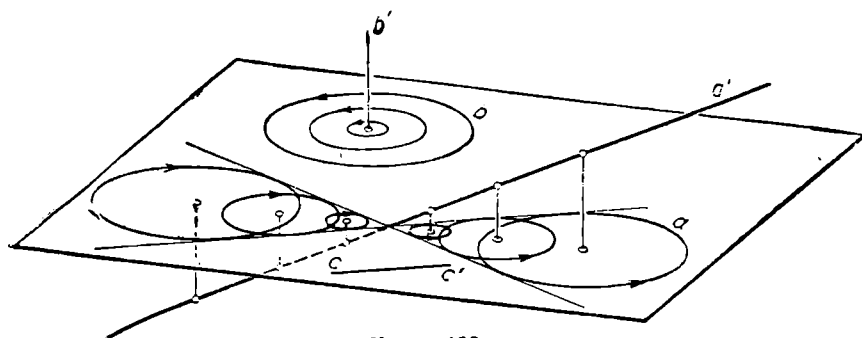


Черт. 159.

однозначное соответствие между элементами первой категории основных понятий (черт. 159). Во-вторых, каждой обычной прямой можно поставить в соответствие „прямую“ Фёдорова и, обратно, т. е. *установить взаимно однозначное соответствие между элементами второй категории основных объектов* (черт. 160). В-третьих, *между элементами третьей категории основных объектов „плоскостями“ также устанавливается взаимно однозначное соответствие*. В последующем пункты эти будем объединять в один, говоря, что *между основными объектами первой и второй интерпретаций установлено взаимно однозначное соответствие*. Далее, в-четвёртых, *установлено взаимно однозначное соответствие между отношениями „лежать на“, „лежать между“, „быть конгруэнтными“ в первой интерпретации, — с теми же понятиями во второй*

интерпретации. Это соответствие устанавливается простой одинаковостью наименований. Короче, мы будем пункты первый — четвёртый выражать так: *две интерпретации поставлены во взаимно однозначное соответствие.*

После такого установления соответствия *между категориями основных объектов и между основными отношениями* рассматриваемых двух интерпретаций мы отмечаем следующий важный пункт



Черт. 160.

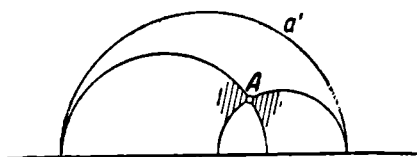
этого соответствия. Если обыкновенная точка первой интерпретации «лежит на» «прямой» этой же интерпретации и если точке A поставлена в соответствие «точка» A' Фёдорова, прямой a — «прямая» a' Фёдорова, то и A' «лежит на» a' . Этот факт мы коротко будем отмечать словами: *соответствие сохраняет отношение „принадлежать“*. Аналогично, если из трёх обыкновенных точек A, B, C точка B лежит между A и C , то среди соответствующих «точек» A', B', C' Фёдорова точка B' «лежит между» A', C' . Этот второй факт мы короче будем выражать словами: *соответствие сохраняет основное отношение „лежать между“*. Точно так же, если, например, обыкновенные треугольники ABC и PQR — конгруентны, то соответствующие им «треугольники» Фёдорова также будут «конгруентными в смысле интерпретации Фёдорова», и этот факт мы коротко будем выражать словами: *соответствие сохраняет основное отношение „быть конгруентными“*. И вообще по поводу всякого взаимно однозначного соответствия между элементами категорий двух основных объектов, обладающего указанными свойствами «сохраняемости» — двух каких-либо интерпретаций, — мы будем коротко говорить, что *соответствие сохраняет основные отношения между основными объектами*.

Всякие две интерпретации одной и той же системы аксиом называются *изоморфными*, если между элементами категорий основных объектов можно установить взаимно однозначное соответствие с сохранением основных отношений, а само соответствие в этом случае называется *изоморфизмом*.

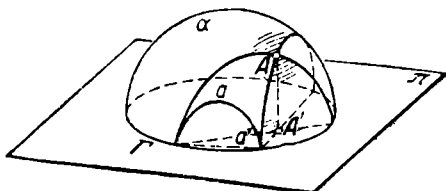
После введения этого нового понятия мы можем уже совсем коротко сказать, что рассматриваемые нами в качестве примера две интерпретации евклидовой геометрии *изоморфны*.

В качестве второго примера рассмотрим две интерпретации геометрии Лобачевского. Именно, интерпретацию плоской геометрии Клейна-Бельтрами (черт. 97) и интерпретацию Пуанкаре (черт. 161) и покажем, что эти интерпретации *изоморфны*.

Для этого рассмотрим пространственную интерпретацию Пуанкаре геометрии Лобачевского. Возьмём в этой интерпретации „плоскость“ α (черт. 162). Эта „плоскость“ представлена полусферой с центром на



Черт. 161.



Черт. 162.

основной полуплоскости π (точки этой полуплоскости не входят в интерпретацию Пуанкаре). „Прямыми“ „плоскости“ α будут служить окружности, высекаемые плоскостями, перпендикулярными плоскости π , из нашей полусферы α . „Точками“ A „плоскости“ α будут служить обыкновенные точки „плоскости“ α . Если теперь всю полусферу спроектировать ортогонально на плоскость π , то „точки“ A перейдут в „точки“ A' , а полуокружности a „плоскости“ α перейдут в „прямые“ a' (хорды круга Γ на плоскости π) *). При помощи проектирования мы получили интерпретацию Клейна. Легко видеть, что интерпретация геометрии Лобачевского на полусфере α *изоморфна* интерпретации той же геометрии в круге Γ . На сохранении отношения „быть конгруэнтным“ мы не останавливаемся, но оно имеет место.

Прежде чем установить изоморфизм между интерпретацией Клейна геометрии Лобачевского и интерпретацией Пуанкаре на плоскости, мы остановимся на свойствах так называемой *стереографической проекции*.

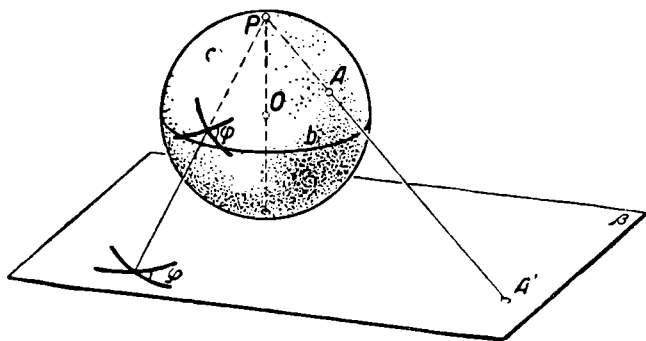
Если из какой-либо точки P сферы спроектировать точки A той же сферы на плоскость β , перпендикулярную радиусу OP , т. е. любую точку A сферы перенести по лучу PA на точку A' плоскости β , то такое проектирование точек сферы на плоскость называется *стереографической проекцией* (черт. 163). В частности, плоскость β может пересекать сферу и по экватору b . Стереографическая проекция имеет важное применение в математике и играет большую роль при черчении карт. Отметим следующие важные свойства этой проекции.

1. Если из сферы вынуть точку P , то оставшаяся часть сферы отображается взаимно однозначно на плоскость β при помощи стереографической проекции, т. е. каждой точке A сферы (кроме точки P) отвечает единственная точка A' плоскости β и обратно.

*) Все точки полусферы „упадут“ на плоскость π .

2. Углы между линиями на сфере и между двумя изображениями их на плоскости β равны между собой. Этот факт выражают словами: *стереографическая проекция сохраняет углы*, т. е. стереографическая проекция есть преобразование *конформное*. Эти свойства мы отмечаем без доказательства^[9].

3. Каждая окружность на сфере проектируется на плоскость β , или в окружность же, или в прямую. При этом в прямые проектируются окружности, проходящие через точку P . Это третье свойство мы оставляем также без доказательства^[9]. Опираясь на свойства стереографической проекции, мы без труда установим изоморфизм интерпретации Клейна с интерпретацией Пуанкаре плоской геометрии Лобачевского. Возвратимся к чертежу 162.



Черт. 163.

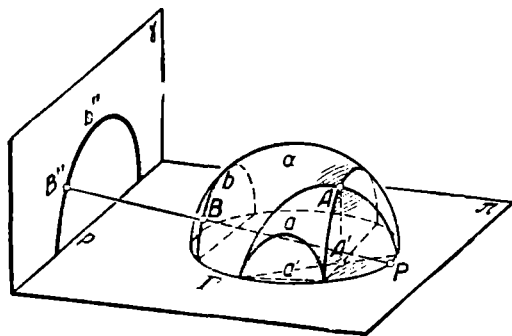
При помощи ортогонального проектирования плоскости π на „плоскость“ α мы изоморфно отобразим „точки“ A' и „прямые“ a' — интерпретации в круге — на „точки“ A и „прямые“ a „плоскости“ α . Затем полусферу α отобразим стереографически на плоскость γ , перпендикулярную плоскости π , взяв центр P проекции на окружности Γ (черт. 164). Окружность Γ отобразится в прямую p . Каждая „точка“ B полусферы α — в точку B'' „плоскости“ γ , а каждая „прямая“ b „плоскости“ α в полуокружность b'' плоскости γ , которая служит „прямой“ в интерпретации Пуанкаре. Что окружность перейдет в окружность, основано на третьем свойстве стереографической проекции. „Прямые“ „плоскости“ α , проходящие через точку P , спроектируются в перпендикуляры к p на плоскости γ , т. е. в „прямые“ „плоскости“ γ . Установленное соответствие как „точек“, так и „прямых“ будет взаимно однозначным. Итак, отобразив внутренность круга Γ на полусферу α , а эту последнюю на плоскость γ , мы и получаем взаимно однозначное соответствие между элементами категорий основных объектов интерпретаций Клейна и Пуанкаре.

„Конгруэнтность“ углов на карте Бельтрами необходимо понимать „в согласии с установленным соответствием карт“. Именно: углы „конгруэнтны“ на карте в круге Γ , если им соответствующие углы „конгруэнтны“ на карте плоскости γ (черт. 164). „Конгруэнтность“ углов

на карте γ совпадает с обычной конгруентностью. На проверке сохранности отношения „*быть конгруэнтным отрезкам*“ останавливаться не будем. Рассматриваемое соответствие двух интерпретаций будет „*соответствием с сохранением основных отношений*“.

Интерпретация Клейна геометрии Лобачевского изоморфна интерпретации Пуанкаре той же геометрии. Пользуясь этим изоморфизмом, можно перевести с одной карты на другую образы любых геометрических фигур. Легко перевести, например, с карты γ на карту Γ известные нам образы *окружностей, эквидистант и предельных линий*.

Укажем ещё на изоморфизм двух интерпретаций евклидовой геометрии. Если рассмотреть, с одной стороны, обычную интерпретацию евклидовой геометрии, хотя бы на плоскости, и аналитическую геометрию на плоскости — с



Черт. 164.

другой, то, как легко понять, эти интерпретации *изоморфны*. Например, два отрезка „*конгруэнтны*“, если их „*длины*“, вычисляемые по обычным правилам аналитической геометрии, равны. *На обычную аналитическую геометрию нужно смотреть как на одну из возможных интерпретаций евклидовой геометрии*. Здесь

под аналитической геометрией разумею геометрию, *связанную с системой Евклида*.

Каждая геометрия, в том числе и Лобачевского, имеет свою аналитическую интерпретацию. Изучение той или иной геометрии с помощью этой интерпретации и называется *координатным методом в геометрии*. Изучение аналитической геометрии имеет целью приучить быстро переходить с языка аналитической интерпретации на язык другой интерпретации. Мы знаем также, что аналитическая геометрия есть одна из наиболее удачных интерпретаций геометрической системы, являющейся могущественным методом изучения геометрических образов, и именно в силу указанного изоморфизма, изучая аналитическую геометрию, мы тем самым изучаем и „*общеупотребительную*“ геометрию. Наличие различных интерпретаций делает практические применения геометрий более гибкими.

§ 52. Заключение.

Введя систему аксиом, предъявляют к ней следующие требования.

1. Система должна быть совместной, или непротиворечивой.
2. Система аксиом должна быть такой, чтобы каждая отдельная

аксиома, каждая отдельная группа аксиом была, по возможности, *независимой* от остальных аксиом и групп.

3. Относительно системы аксиом должен быть решён вопрос: обладает ли она *свойством полноты* или нет. Система аксиом обладает свойством полноты, если любые её две интерпретации изоморфны. Если она свойством полноты не обладает, то это значит, что существуют по крайней мере такие две интерпретации, которые не будут изоморфными. Рассмотренные нами аксиоматика геометрии Евклида и аксиоматика геометрии Лобачевского свойством полноты обладают. Аксиоматика, например, теории групп свойством полноты не обладает [8].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Адамар, Элементарная геометрия, ч. I, Учпедгиз, 1948.
- [2] Адамар, Элементарная геометрия, ч. II, Учпедгиз, 1938.
- [3] П. С. Александров, Введение в теорию групп, Учпедгиз, 1939.
- [4] П. С. Александров, Что такое неевклидова геометрия. Статья в сборнике «Н. И. Лобачевский» (1793—1943), Гостехиздат, 1943.
- [5] В. Буняковский, Параллельные линии, Известия Российской Академии наук, СПб 1853.
- [6] Д. Гильберт, Основания геометрии, Петроград, 1923.
- [7] Д. Гильберт, Основания геометрии. Перевод с 7-го немецкого издания И. С. Градштейна, под редакцией и с вступительной статьёй П. К. Рашевского. М., Гостехиздат, 1948.
- [8] Д. Гильберт и В. Аккерман, Основы теоретической логики. Перевод под редакцией С. А. Яновской, М., ГИИЛ, 1947.
- [9] Д. Гильберт и Кон-Фоссен, Наглядная геометрия, М., ОНТИ, 1936.
- [10] Евклид, Начала, книги I—VI. Перевод с греческого и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского, М., Гостехиздат, 1949.
- [11] Н. В. Ефимов, Высшая геометрия, М., Гостехиздат, 1949.
- [12] В. Ф. Каган, Основания геометрии. Опыт обоснования евклидовой геометрии, Одесса 1905.
- [13] В. И. Костин, Основания геометрии, Учпедгиз, 1948.
- [14] Н. И. Лобачевский, Геометрия, Казань 1909.
- [15] Н. И. Лобачевский, О началах геометрии, «Казанский вестник», 1829.
- [16] Н. И. Лобачевский, Геометрические исследования по теории параллельных линий. Перевод, комментарии, вступительные статьи и примечания В. Ф. Кагана. Изд-во АН СССР, 1945.
- [17] Н. И. Лобачевский, Полное собрание сочинений, т. I, М., Гостехиздат, 1946.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . .	2
Введение	3
§ 1. Обзор основных теорем до введения параллельных (7). § 2. Теоремы Лежандра-Саккери о сумме углов треугольника (9). § 3. Постулат Паша (14). § 4. Четырёхугольник с двумя прямыми углами и его свойства (14).	
Глава I. Предложения, эквивалентные постулату Евклида	16
§ 5. Сумма углов треугольника равна $2d$ — предложение, эквивалентное постулату Евклида (17). § 6. Сумма углов в каждом треугольнике одна и та же — предложение, эквивалентное постулату Евклида (19). § 7. Ошибочное доказательство Лежандра теоремы: «Сумма углов треугольника не может быть меньше $2d$ » (21). § 8. Через любую точку внутри угла можно провести секущую, пересекающую обе стороны угла, — предложение, эквивалентное постулату Евклида (23). § 9. Существуют два подобных, но не равных треугольника — предложение, эквивалентное постулату Евклида (24). § 10. Одно мнимое доказательство постулата Евклида, принадлежащее Клавью (25). § 11. Теорема В. Болляна (26). § 12. Ещё одно предложение, эквивалентное постулату о параллелях (27). § 13. Сторона правильного вписанного шестиугольника равна радиусу — предложение, эквивалентное постулату Евклида (27).	
Глава II. О некоторых фактах геометрии Лобачевского	30
§ 14. Постулат Лобачевского (30). § 15. Сумма углов треугольника на плоскости Лобачевского (31). § 16. Теорема о перпендикуляре к одной стороне угла, не пересекающем другую (32). § 17. Эквидистанта (35). § 18. Ещё некоторые теоремы геометрии Лобачевского (36). § 19. О треугольниках, около которых нельзя описать окружность (37). § 20. Сторона правильного вписанного в круг шестиугольника больше радиуса этого круга (38).	
Глава III. Взаимное расположение прямых на плоскости Лобачевского	39
§ 21. Параллельные и сверхпараллельные прямые (39). § 22. Свойства параллельных прямых (41). § 23. Угол параллельности (47). § 24. Свойства сверхпараллелей Лобачевского (50). § 25. Некоторые частные случаи взаимного расположения прямых на плоскости Лобачевского (52).	
Глава IV. Учение о площадях в геометрии Лобачевского . . .	55
§ 26. Конгруентность четырёхугольников Саккери (55). § 27. Дефект треугольника и площадь треугольника (56). § 28. Предельные случаи треугольников (60). § 29. Предложение о существовании треугольника, площадь которого как угодно мала, эквивалентно постулату Евклида (61). § 30. Обзор вклада, сделанного Лобачевским в математику (61).	
Глава V. Обзор евклидовых «Начал»	63
§ 31. Содержание «Начал» Евклида (63). § 32. Способ изложения «Начал» (65). § 33. Основные положения «Начал» (65). § 34. О некоторых недостатках, достоинствах и историческом значении «Начал» (66).	
Глава VI. Основные объекты, основные отношения между этими объектами и аксиомы геометрии . . .	72
§ 35. Аксиоматическое построение геометрии. Основные понятия (72). § 36. Первая группа аксиом: аксиомы соединения (принадлежности) (72). § 37. Вторая группа аксиом: аксиомы порядка (76). § 38. Третья группа аксиом: аксиомы конгруэнтности и движения (80). § 39. Четвёртая группа аксиом: аксиома о параллельных (84). § 40. Пятая группа аксиом: аксиомы непрерывности (84).	
Глава VII. Идея интерпретации геометрической системы	89
§ 41. Пример интерпретации плоской геометрии Евклида (89). § 42. Интерпретация Фёдорова (90). § 43. Аналитическая интерпретация геометрии Евклида (93). § 44. Интерпретация Бельтрами-Клейна геометрии Лобачевского (94). § 45. Интерпретация Пуанкаре геометрии Лобачевского на плоскости (99). § 46. Интерпретация Пуанкаре геометрии Лобачевского в пространстве (112). § 47. Эквидистантные поверхности, предельные поверхности и сферы (115).	
Глава VIII. Совместимость и независимость аксиом. Изоморфизм .	119
§ 48. Совместимость системы аксиом (119). § 49. Независимость аксиом (120). § 50. Эквивалентность двух систем аксиом (121). § 51. О понятии изоморфизма (122). § 52. Заключение (126).	
Литература	127
Редактор В. С. Капустина.	Техн. редактор М. И. Натанов.

Подписано к печати 27/II 1950 г.
Учётно-изд. л. 9,03 + вклейка 0,04 л.
Переплет № 7 — 1 р. 40 к.

А-00320.

Тираж 25 тыс. экз.

Печ. листов 8 + 1/2 вклейка.

Цена 2 р. 75 к.

Заказ № 5572.



Н. И. Лобачевский