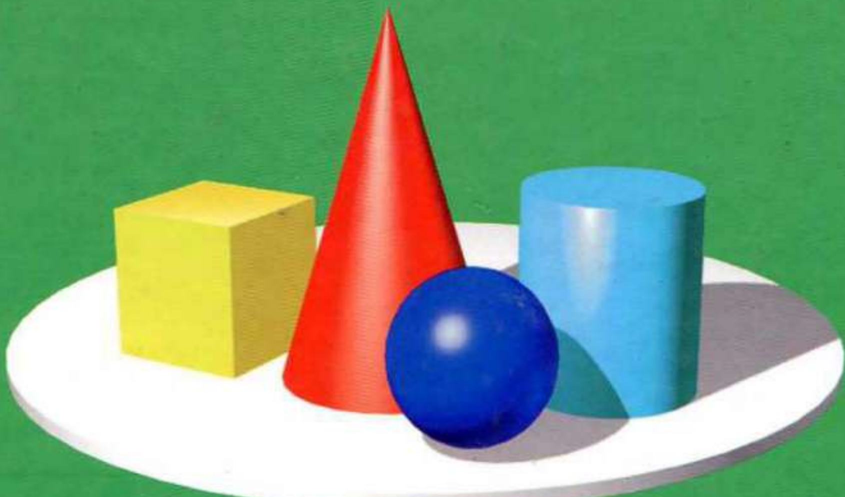
Е.П. Нелин, В.А. Лазарев

ГЕОМЕТРИЯ

МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ



10 класс

ИЛЕКСА

Е.П. Нелин, В.А. Лазарев

МАТЕМАТИКА:
алгебра и начала математического анализа,
геометрия

ГЕОМЕТРИЯ

10 класс

Базовый и углубленный уровни

Москва
ИЛЕКСА
2015

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72
Н49

Нелин Е.П., Лазарев В.А.

Н49 Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия (базовый и углубленный уровни). 10 класс: учеб. пособие для общеобразоват. учреждений / Е.П. Нелин, В.А. Лазарев. — М.: Илекса, 2015.— 304 с. : ил.

ISBN 978-5-89237-409-5

Содержание книги соответствует требованиям нового федерального Государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования и включает в себя материал как базового, так и углубленного (профильного) уровня. По ней можно работать независимо от того, по каким учебникам учились школьники в предыдущие годы.

Ориентировано на подготовку учащихся к успешной сдаче Единого государственного экзамена, включая решение самых сложных задач группы С, и вступительных экзаменов в ВУЗы.

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72

ISBN 978-5-89237-409-5

Предисловие для учащихся

Дорогие друзья!

Цель данного учебника — помочь вам освоить раздел геометрии, который называют стереометрией. В предыдущих классах вы изучали в основном свойства плоских фигур, теперь приступаете к изучению пространственных объектов. В процессе усвоения стереометрии вы будете совершенствовать свои навыки логического мышления, развивать пространственные представления, умения мысленно моделировать новые геометрические фигуры и строить их графические изображения.

При изучении стереометрии вы ознакомитесь с новыми геометрическими понятиями и закономерностями, многие из которых на протяжении столетий люди применяют в производственной деятельности, используют в архитектуре и живописи. Полученные знания помогут вам понять, почему геометрические свойства вызывают неизменный интерес творцов прекрасного. Например, теоретик искусства Раннего Возрождения итальянский ученый Леон Баттиста Альберти (1404–1472) подчеркивал значение геометрии в живописи, а гениальный французский архитектор XX ст. Ле Корбюзье (1887–1965) отмечал, что окружающий мир является миром геометрии и своими художественными впечатлениями человек обязан именно ей. Произведения художников эпохи Высокого Возрождения Леонардо да Винчи (1452–1519) и Альбрехта Дюрера (1471–1528), величественные сооружения архитекторов древности и современности убедительно свидетельствуют о том, что геометрия была и остается законодательницей моды в вопросах гармонии и красоты.

Желаем, чтобы изучение этого предмета принесло вам удовлетворение и убедило в правоте выдающегося французского математика и философа Блеза Паскаля (1623–1662), который утверждал, что «того, кто владеет геометрией, эта наука продвигает настолько далеко, что он оказывается вооруженным абсолютно новой силой».

Несколько замечаний о том, как пользоваться учебником.

Учебный материал каждой темы структурирован согласно двум уровням.

Основной материал приведен в параграфах, номера которых в содержании напечатаны на белом фоне. Дополнительный материал (номера параграфов в содержании напечатаны на синем фоне, а в тексте учебника номера таких параграфов и пунктов помещены в овальную синюю рамку) предназначен для овладения темой на более глубоком уровне (например, для выполнения более сложных заданий по геометрии единого государственного экзамена по математике). Он может быть освоен учеником самостоятельно или под руководством учителя при изучении геометрии на базовом уровне, а также может использоваться для систематического изучения геометрии на углубленном уровне.

В начале многих параграфов приведены справочные таблицы, в которых содержатся основные определения, признаки и свойства рассматриваемых понятий темы. Для ознакомления с основными идеями решения задач приведены примеры, содержащие решение и комментарий, с помощью которого можно составить план решения аналогичного задания.

С целью закрепления, контроля и самоконтроля усвоения учебного материала после каждого параграфа предложены вопросы, упражнения и задачи. Ответы на вопросы и примеры решения аналогичных упражнений и задач можно найти в тексте параграфа. Упражнения и задачи к основному материалу дифференцированы по уровням сложности. Задачи среднего уровня отмечены символом «°», несколько более сложные задачи даны без отметок, а задачи высокого уровня сложности обозначены символом «*». В тексте параграфов предложены специальные ориентиры, которые позволят овладеть методами решения многих задач углубленного уровня. Ответы и указания к большинству упражнений даны в соответствующем разделе.

О некоторых интересных фактах, связанных с историей развития геометрии, вы узнаете, прочитав «Сведения из истории».

В приложении, помещенном в конце учебника, приведен справочный материал из школьного курса планиметрии.

Предисловие для учителя

Предлагаемый учебник направлен на реализацию основных положений концепции профильного обучения в старшей школе, на организацию личностно ориентированного обучения математике. Учебник подготовлен в соответствии с требованиями нового федерального Государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования.

Как известно, при обучении учебник выполняет две основные функции: 1) является источником учебной информации, которая раскрывает предусмотренное образовательными стандартами содержание в доступной для учащихся форме; 2) является средством обучения, с помощью которого осуществляется организация учебного процесса, в том числе и самообразование учащихся.

Отметим основные отличия предлагаемого учебника по реализации этих функций от других учебников геометрии.

Это двухуровневый учебник, поскольку в каждом разделе наряду с параграфами, которые предназначены для овладения учениками стандартом математического образования на базовом уровне, содержится систематический материал для организации индивидуальной или коллективной работы с учащимися, которые интересуются математикой. Предложенный дополнительный материал может использоваться и для организации изучения геометрии на углубленном уровне.

Основной материал, который должны усвоить учащиеся, структурирован в форме справочных таблиц, приведенных в начале параграфа. В первую очередь ученики должны усвоить материал, который содержится в таблицах, поэтому во время объяснения нового материала целесообразно использовать работу с учебником по соответствующим таблицам и рисункам. Все нужные объяснения и обоснования тоже приведены в учебнике, но каждый ученик может выбирать собственный уровень ознакомления с этими обоснованиями.

Подчеркнем, что любой учебник по геометрии должен обеспечить не только ознакомление учащихся с основными геометрическими понятиями и их свойствами (то есть дать возможность формировать у учеников знания по геометрии), но и формирование способов действий с этими понятиями (то есть дать возможность выработать у учеников соответствующие умения). Систему условий, на которую реально опирается ученик, выполняя действия, психологи называют ориентировочной основой действия. Если ученикам предлагают достаточно общие ориентировочные основы по решению соответствующих заданий в виде специальных правил и алгоритмов, то говорят, что им предлагаются ориентировочные основы второго и третьего типов. Обычно в учебниках по геометрии для 10-го класса ученикам предлагают только образцы решения заданий. Учащиеся приступают к самостоятельной деятельности, ориентируясь на эти образцы (то есть им предлагают ориентировочные основы первого типа). Такое обучение предусматривает, что ученик самостоятельно выполнит систематизацию и обобщение способов действий, ориентируясь на предложенные образцы, и выделит для себя ориентировочную основу решения рассмотренных заданий. Как правило, в таком случае ориентировочная основа, создаваемая у ученика, является неполной и, кроме того, часто им не осознанной: ученик не может объяснить, почему, решая задание, он выполнял именно такие дополнительные построения или вычисления, а не другие.

По этой причине одним из принципов построения нашего учебника стало выделение для учащихся ориентировочных основ соответствующей деятельности по решению геометрических заданий непосредственно в учебнике. Поэтому важной составляющей работы с предлагаемым учебником является обсуждение выбора ориентиров и планов решения заданий. Объяснение методов решения проводят по такой схеме:

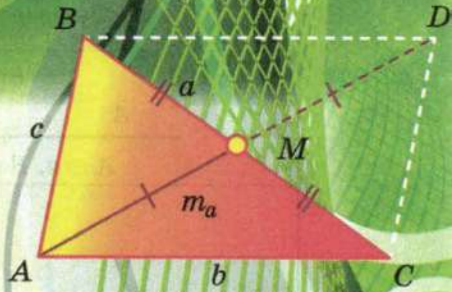
Решение	*Комментарий*
Как можно записать решение задачи	Как можно рассуждать при решении задачи

При таком изложении учебного материала комментарий, в котором объясняется решение, не мешает восприятию основной идеи и плана решения заданий определенного типа. Это позволяет ученику, уже усвоившему способ решения, с помощью приведенного примера вспомнить, как решать задание, а ученику, которому требуется помощь при решении, — получить детальную консультацию, которая содержится в комментарии.

За счет выделения в этом курсе определенных ориентиров работы с практическими заданиями удалось часть «нестандартных» (с точки зрения традиционных учебников) заданий перевести в разряд «стандартных» (например, задачи на нахождение расстояний между скрещивающимися прямыми). Это позволяет, в частности, ознакомить учащихся с методами решения геометрических заданий, которые предлагаются в группе с ЕГЭ по математике, и с оформлением их решения.

Раздел 1

СИСТЕМАТИЗАЦИЯ И ОБОБЩЕНИЕ ФАКТОВ И МЕТОДОВ ПЛАНИМЕТРИИ



§ 1. Логическое построение школьного курса планиметрии. Методы решения геометрических задач

§ 2. Примеры применения координат и векторов для решения геометрических задач

Усвоив предложенный материал, вы:

ознакомитесь с логическим построением школьного курса планиметрии;

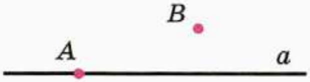
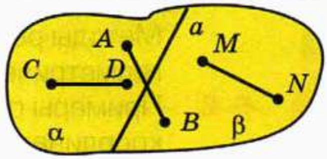
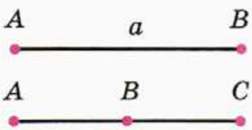
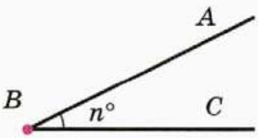
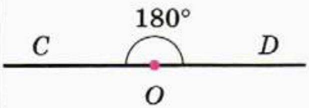
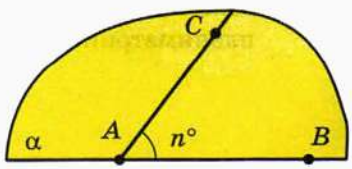
сможете систематизировать и обобщить методы решения планиметрических задач;

вспомните основные понятия и аксиомы планиметрии.

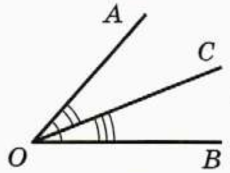
§ 1 ЛОГИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ШКОЛЬНОГО КУРСА ПЛАНИМЕТРИИ. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

1.1. Логическое построение школьного курса планиметрии

Таблица 1

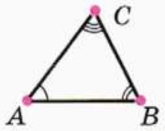
1. АКСИОМЫ ПЛАНИМЕТРИИ	
I. Аксиомы принадлежности	II. Аксиомы взаимного расположения точек на прямой и плоскости
 $A \in a$, $B \notin a$	 Точка B лежит между точками A и C.
 Через точки C и D проходит единственная прямая b.	 Прямая a разбивает плоскость на две полуплоскости α и β. Точки A и B лежат в разных полуплоскостях; точки C и D (или M и N) лежат в одной полуплоскости.
III. Аксиомы измерения и откладывания отрезков и углов	
 $AB = a > 0$ $AC = AB + BC$	 Отрезок $OA = m$ — единственный.
 $\angle ABC = n° > 0°$  $\angle COD = 180°$	 $\angle CAB = n°$ — единственный $(0° < n < 180°)$.

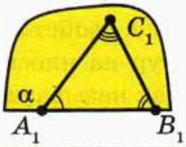
Окончание табл. 1



$\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$

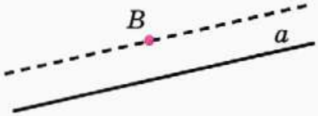
IV. Аксиома существования треугольника, равного данному





$\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC$

V. Аксиома о параллельных прямых



$B \notin a$. Через точку B можно провести на плоскости не больше чем одну прямую, параллельную данной.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ПРИЗНАКИ И СВОЙСТВА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР И ОТНОШЕНИЙ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ
содержит характеристические свойства фигуры

ПРИЗНАК
позволяет доказать, что рассматриваемые фигуры являются требуемыми или связанными необходимым соотношением (равенство, подобие и т. п.)

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ ИЛИ ОТНОШЕНИЯ
(равенство, подобие, параллельность, перпендикулярность и др.)

СВОЙСТВА

Объяснение и обоснование

1. Логическое построение школьного курса планиметрии. Аксиомы планиметрии. Школьный курс геометрии дает представление о логическом (дедуктивном) методе построения научной теории. Логически строгий курс геометрии строится следующим образом: перечисляются основные геометрические понятия, которые вводятся без определений, но их свойства выражаются в аксиомах; с помощью основных понятий и аксиом даются определения новых понятий, формулируются и доказываются теоремы и таким образом рассматриваются свойства геометрических фигур. Основные определения и свойства фигур на плоскости, которые вы изучали в курсе геометрии 7–9-х классов (в так называемом курсе планиметрии), даны в таблицах 1–16 приложения.

В школьных учебниках в начале курса вводят, как правило без определения, три основных понятия планиметрии: «точка», «прямая», «расстояние». При дальнейшем изучении планиметрии большинству рассматриваемых понятий («окружность», «круг», «отрезок», «луч» и т. п.) даются определения. Однако часто в учебниках приводятся не все аксиомы, необходимые для построения планиметрии, — для упрощения изложения некоторые аксиомы не формулируются, хотя авторы их и используют.

Приведем одну из возможных систем аксиом планиметрии, предложенную для школьного курса геометрии академиком А. В. Погореловым.

Предложенные аксиомы[1] можно разбить на пять групп (см. также пункт 1 табл. 1).

I. *Аксиомы принадлежности*

I_1. Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей (рис. 1.1).

I_2. Через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну (рис. 1.2).

II. *Аксиомы взаимного расположения точек на прямой и плоскости* (аксиомы порядка)

II_1. Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими (рис. 1.3).

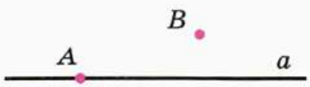


Рис. 1.1

Рис. 1.2

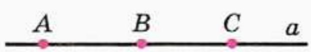


Рис. 1.3

[1] Приведенные аксиомы не предназначены для запоминания. Учащимся достаточно понимать их смысл. Более полная система аксиом приведена на с. 60.

Выражение «Точка B лежит между точками A и C» означает то же, что и выражение «Точки A и C лежат по разные стороны от точки B» или «Точки B и C лежат по одну сторону от точки A». С помощью предлога «между» для точек прямой вводятся понятия «отрезок прямой» и «полупрямая (луч)».

Напомним, что *отрезком AB* называют часть прямой, лежащей между точками A и B (которые называют *концами отрезка*). Полупрямой, или лучом, называют часть прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих по одну сторону от данной ее точки. Эту точку называют *начальной точкой* полупрямой. Различные полупрямые одной и той же прямой с общей начальной точкой называют *дополнительными*.

II$_2$. Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости.

Это разбиение имеет следующие свойства. Если концы какого-нибудь отрезка принадлежат одной полуплоскости, то отрезок не пересекает прямую — границу полуплоскостей. Если концы отрезка принадлежат разным полуплоскостям (и не принадлежат прямой — границе полуплоскостей, входящей и в одну полуплоскость, и в другую), то отрезок пересекает прямую (рис. 1.4).

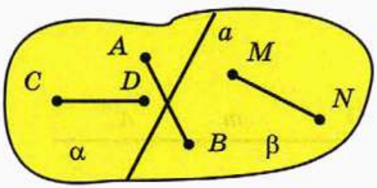


Рис. 1.4

Алексей Васильевич Погорелов — выдающийся математик, ученый с мировым именем, академик Российской академии наук, академик Национальной академии наук Украины.

А. В. Погорелов родился в поселке Короча Белгородской области. Окончил Харьковский государственный университет в 1941 г. и Военно-воздушную академию им. Н. Е. Жуковского (Москва) в 1945 г., учился в аспирантуре при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова, работал в крупнейших научных центрах Советского Союза.

Редкостное сочетание математического и инженерного талантов определило круг научных интересов А. В. Погорелова. Его труды относятся к геометрии «в целом», основаниям геометрии, теории дифференциальных уравнений в частных производных, теории стойкости упругих оболочек, вопросам криогенного машиностроения.

Погорелов — автор учебников по всем основным разделам геометрии для высших учебных заведений. Много и успешно он работал над усовершенствованием школьного математического образования. Созданный им учебник геометрии направлен на развитие логического мышления и способностей учащихся.

Алексей Васильевич Погорелов (1919–2002)

III. *Аксиомы измерения и откладывания отрезков и углов*

III_1. Каждый отрезок имеет определенную длину, бо́льшую нуля (рис. 1.5, *а*). **Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его внутренней точкой** (рис. 1.5, *б*).

$AB = a > 0$

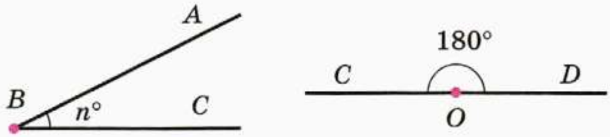
а

$AC = AB + BC$

б

Рис. 1.5

III_2. На любой полупрямой от ее начальной точки можно отложить отрезок заданной длины, и притом только один (рис. 1.6).



$\angle ABC = n° > 0°$

а

$\angle COD = 180°$

б

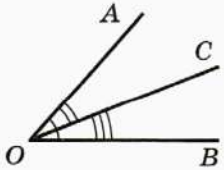
Рис. 1.6

Рис. 1.7

III_3. Каждый угол имеет определенную градусную меру, бо́льшую нуля (рис. 1.7, *а*). **Развернутый угол равен 180°** (рис. 1.7, *б*). **Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проведенным между его сторонами** (рис. 1.8).

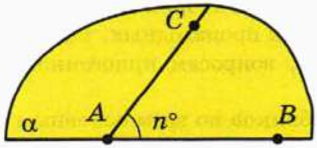
III_4. От любой прямой в заданную полуплоскость можно отложить угол с заданной градусной мерой, меньшей 180°, и только один (рис. 1.9).

Аксиомы III_1 и III_2 позволяют ввести понятие координаты точки на прямой, то есть каждой точке прямой поставить в соответствие действительное число так, что если x_A и x_B — координаты точек A и B, то длина отрезка AB равна $|x_B - x_A|$ (рис. 1.10).



$\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$

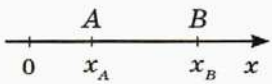
Рис. 1.8



$\angle CAB = n°$ — единственный

$(0 < n < 180)$

Рис. 1.9

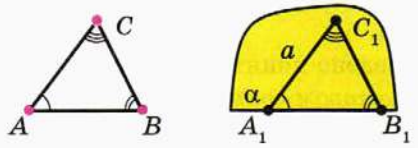


$AB = |x_B - x_A|$

Рис. 1.10

IV. *Аксиома существования треугольника, равного данному*

IV_1. Каков бы ни был треугольник, существует равный ему треугольник в заданном расположении относительно данной полупрямой (рис. 1.11).



$\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC$

Рис. 1.11

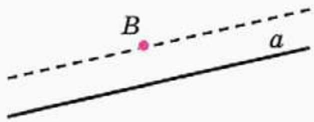


Рис. 1.12

V. *Аксиома параллельных прямых*

V_1. Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной данной (рис. 1.12).

Отметим, что для построения геометрии можно использовать различные системы аксиом. Например, вместо аксиомы о параллельных прямых можно взять в качестве аксиомы утверждение «Сумма углов треугольника равна 180°». Тогда утверждение «Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной данной» можно доказать как теорему.

Во многих учебниках планиметрии при доказательстве первых признаков равенства треугольников используется не аксиома существования треугольника, равного данному, а наложение одного заданного треугольника на другой. Иначе говоря, как одно из основных понятий используется понятие «наложение» и фигуры считаются равными, если их можно совместить наложением. Чтобы такое доказательство было корректным, нужно зафиксировать в специальных аксиомах свойства наложения. Это можно сделать, если, например, понимать наложение фигур как определенное соответствие[1] между точками двух фигур. При этом не только точкам заданной фигуры, но и любой точке плоскости ставится в соответствие определенная точка этой плоскости, удовлетворяющая следующим аксиомам:

1. Если при наложении совмещаются концы двух отрезков, то совмещаются и сами отрезки.
2. Произвольный угол со сторонами a и b можно наложить на равный ему угол со сторонами a_1 и b_1 двумя способами: 1) так, что луч a совпадет с лучом a_1, а луч b — с лучом b_1; 2) так, что луч a совпадет с лучом b_1, а луч b — с лучом a_1.
3. Любая фигура равна самой себе.

---

[1] Напоминаем, что соответствие между двумя фигурами устанавливается, если каждой точке одной фигуры соответствует единственная точка другой фигуры.

4. Если фигура F равна фигуре F_1, то фигура F_1 равна фигуре F.
5. Если фигура F_1 равна фигуре F_2, а фигура F_2 равна фигуре F_3, то фигура F_1 равна фигуре F_3.

Как видим, эти аксиомы отвечают нашим наглядным представлениям о наложении и равенстве фигур.

Напомним, что после того как было введено понятие *движения как преобразование одной фигуры в другую, при котором сохраняются расстояния между соответствующими точками*, дается общее определение равенства фигур, используемое в последующем курсе планиметрии (см. табл. 5 приложения).

Две фигуры называют равными, если они переводятся движением одна в другую. Другими словами, две фигуры называют равными, если существует соответствие между их точками, при котором расстояния между парами соответствующих точек фигур равны.

2. Определение, признаки и свойства геометрических фигур и отношений. В пункте 2 табл. 1 приведены связи между понятиями «определение», «признак», «свойство» в виде схемы (стрелками показаны возможные направления использования соответствующих утверждений).

Рассмотрим, например, определение, признак и свойство параллелограмма (см. табл. 7 приложения).

Определение	Параллелограмм — это четырехугольник, у которого противолежащие стороны попарно параллельны
Признак	Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм
Свойство	У параллелограмма диагонали точкой пересечения делятся пополам

Учитывая содержание понятий «определение», «признак» и «свойство» и связи между ними, получаем следующее. Если нам известно, например, что данный четырехугольник — параллелограмм, мы имеем право воспользоваться его свойствами, зафиксированными в определении (противолежащие стороны параллельны) или в специальных теоремах (диагонали в точке пересечения делятся пополам) и др. Если же требуется доказать, что данный четырехугольник является параллелограммом, то пользоваться его свойствами мы не имеем права. В этом случае мы должны обратиться или к определению (доказать, что у рассматриваемого четырехугольника противолежащие стороны попарно параллельны), или к признаку (например, доказать, что у данного четырехугольника диагонали в точке пересечения делятся пополам).

3. Теоремы и их виды. Как уже отмечалось ранее, после введения основных понятий планиметрии и фиксирующих их свойства аксиом свойства других фигур устанавливались доказательством соответствующих теорем. Доказательства проводились строго логическим путем на основании аксиом и ранее доказанных теорем. Таким образом была получена геометрическая система утверждений, связанных рядом логических зависимостей. Основные из этих сведений, необходимые для решения задач, приведены в приложении «Система опорных фактов курса планиметрии».

Практически каждую теорему курса планиметрии можно сформулировать в виде условного утверждения «Если A, то B», где буквой A обозначено *условие теоремы*, а B — ее *заключение*. Например, если в прямоугольном треугольнике обозначить длину гипотенузы через c, а длины катетов — через a и b, то *теорему Пифагора* можно сформулировать следующим образом: «Если треугольник ABC прямоугольный с прямым углом C, то $c^2 = a^2 + b^2$». Условие A этой теоремы — «треугольник ABC прямоугольный с прямым углом C», заключение B — «$c^2 = a^2 + b^2$» (квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов).

Если поменять местами условие и заключение теоремы, то есть рассмотреть утверждение «Если B, то A», и это утверждение будет верным, то получим так называемую *обратную теорему*. Например, для теоремы Пифагора обратное утверждение «Если в треугольнике ABC со сторонами a, b, c $c^2 = a^2 + b^2$, то этот треугольник прямоугольный с прямым углом C» также верно. Поэтому последнее утверждение является формулировкой теоремы, обратной теореме Пифагора. Напоминаем, что не каждая теорема имеет обратную. Например, для теоремы о смежных углах: «*Если два угла смежные, то их сумма равна* $180°$» (условие A — «два угла смежные», заключение B — «их сумма равна $180°$») сформулируем обратное утверждение («Если B, то A»): «*Если сумма двух углов равна* $180°$, *то эти углы смежные*». Это утверждение неверно, потому что, например, сумма двух вертикальных прямых углов равна $180°$, но эти углы не смежные. Следовательно, для теоремы о смежных углах не существует обратной теоремы.

4. Необходимое и достаточное условия[1]. Некоторые математические утверждения иногда формулируются с использованием понятий «необходимое условие» и «достаточное условие». Поясним эти термины.

В случае, когда условное утверждение «Если A, то B» верно, условие A называют достаточным для условия B, а условие B — необходимым для условия A (см. схему на с. 16).

[1] Этот материал обязателен только для классов, обучающихся на углубленном уровне.

«Если A, **то** B» — верное утверждение

A — достаточное условие для B	B — необходимое условие для A

Например, свойство смежных углов можно сформулировать так: «Для того чтобы углы были смежными (*утверждение A*), ***необходимо***, чтобы их сумма равнялась 180° (*утверждение B*)» — или так: «Для того чтобы сумма двух углов равнялась 180° (*утверждение B*), ***достаточно***, чтобы эти углы были смежными (*утверждение A*)».

Когда верно и прямое утверждение «Если A, то B», и обратное «Если B, то A», каждое из условий A и B называют необходимым и достаточным для другого. Например, прямую теорему Пифагора и обратную ей можно сформулировать в виде одного утверждения: «Для того чтобы треугольник был прямоугольным, необходимо и достаточно, чтобы квадрат одной стороны равнялся сумме квадратов двух других сторон». Иногда вместо термина «необходимо и достаточно» используется также термин «тогда и только тогда». В этом случае последнее утверждение будет сформулировано следующим образом: «Треугольник будет прямоугольным тогда и только тогда, когда квадрат одной стороны равен сумме квадратов двух других сторон». Следовательно, наличие в формулировке теоремы (или задачи) словосочетания «тогда и только тогда» требует доказательства как прямой, так и обратной теорем.

1.2. Методы решения планиметрических задач

Таблица 2

1. Методы решения геометрических задач

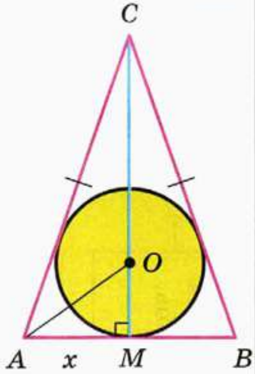
- Геометрические методы
  - Использование «ключевого» треугольника, равенства и подобия треугольников, свойств геометрических фигур
  - Метод геометрических преобразований (симметрия относительно оси и точки, параллельный перенос, поворот, подобие фигур)
- Аналитические методы
  - Введение неизвестных отрезков и углов и использование уравнений и их систем или свойств функций
  - Метод площадей
  - Координатный метод
  - Векторный метод

2. Введение неизвестных при решении геометрических задач на вычисление

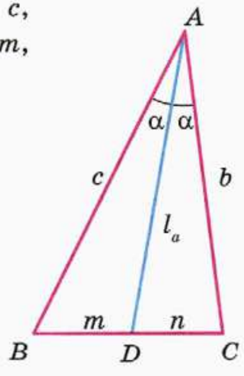
Ориентир

Если в условии геометрической задачи на вычисление вообще не заданы отрезки или заданные отрезки и углы невозможно объединить в удобный для решения треугольник, то обычно вводится неизвестный отрезок (или неизвестный угол, или несколько неизвестных).

Продолжение табл. 2

Пример	
В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, равна 25 см. Вычислите площадь этого треугольника, если радиус вписанной в него окружности равен 10 см.	
План	*Решение и комментарий*
1. *Обозначаем какой-нибудь буквой, например x, неизвестный отрезок* или угол (или вводим несколько неизвестных).	Пусть в равнобедренном треугольнике ABC ($AC = CB$) медиана $CM = 25$ см (она же биссектриса и высота) и радиус вписанной окружности $OM = 10$ см. Эти отрезки не являются сторонами одного треугольника, поэтому для решения задачи выбираем какой-нибудь отрезок как неизвестный. Необходимо, чтобы выбранный отрезок вместе с данными образовывал удобные для решения треугольники.  Пусть $AM = x$, где $x > 0$. Этот отрезок можно объединить в прямоугольные треугольники и с медианой CM, и с радиусом OM.
2. *Составляем уравнение* (или систему уравнений) *с введенным неизвестным.*	Из $\Delta\, AMC$: $AC = \sqrt{AM^2 + CM^2} = \sqrt{x^2 + 25^2} = \sqrt{x^2 + 625}$. Чтобы составить уравнение, воспользуемся тем, что центр вписанной окружности лежит в точке пересечения биссектрис: AO — биссектриса угла BAC. Тогда AO — биссектриса также и $\Delta\, AMC$. По свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника (пункт 3 табл. 2) $\frac{AC}{AM} = \frac{CO}{OM}$, то есть $\frac{\sqrt{x^2 + 625}}{x} = \frac{15}{10}$.
3. *Решаем полученное уравнение* (или систему уравнений) либо преобразуем его (ее) так, чтобы получить ответ на вопрос задачи. *Из полученных решений выбираем те, которые удовлетворяют условию геометрической задачи.*	Возводя обе части последнего равенства в квадрат и решая уравнение, получаем: $x^2 = 500$. Отсюда $x = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}$. (Поскольку $x > 0$, то второй корень полученного уравнения $x = -\sqrt{500} = -10\sqrt{5}$ не удовлетворяет условию задачи, и его в решение не записывают.)

Окончание табл. 2

<table>
<tr><td>4. Пользуясь найденной величиной, даем ответ на вопрос задачи.</td><td>Тогда $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CM = AM \cdot CM = 25x = 250\sqrt{5}$ (см²).
Ответ. $250\sqrt{5}$ см².</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Применение метода площадей при решении геометрических задач</td></tr>
<tr><td colspan="2">Содержание некоторых вариантов метода площадей</td></tr>
<tr><td colspan="2">Разбить данный многоугольник на части, записать отдельно площадь всего многоугольника и отдельно сумму площадей его частей и приравнять полученные величины.
Для того чтобы найти отношение отрезков, расположенных на одной прямой, иногда вместо него полезно найти отношение площадей треугольников с общей вершиной, основания которых — рассматриваемые отрезки.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Пример</td></tr>
<tr><td colspan="2">Докажите, что биссектриса внутреннего угла треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, длины которых пропорциональны длинам прилегающих сторон треугольника.</td></tr>
<tr><td>План</td><td>Решение</td></tr>
<tr><td>Чтобы найти отношение отрезков BD и DC, находим отношение площадей треугольников ABD и ACD с общей вершиной A, основаниями которых являются данные отрезки (тогда и высота этих треугольников, проведенная из вершины A, будет общей).</td><td>Пусть $AD = l_a$ — биссектриса треугольника ABC со сторонами $AB = c$, $AC = b$ и $\angle BAD = \angle CAD = \alpha$, $BD = m$, $DC = n$. Тогда, с одной стороны:


$S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} c l_a \sin\alpha$, $S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} b l_a \sin\alpha$,
и $\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}} = \frac{\frac{1}{2} c l_a \sin\alpha}{\frac{1}{2} b l_a \sin\alpha} = \frac{c}{b}$. (1)
С другой стороны:
$S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} m h_a$, $S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} n h_a$
и $\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}} = \frac{\frac{1}{2} m h_a}{\frac{1}{2} n h_a} = \frac{m}{n}$. (2)
Приравнивая правые части выражений (1) и (2), получаем $\frac{m}{n} = \frac{c}{b}$, что и требовалось доказать.</td></tr>
</table>

Объяснение и обоснование

В курсе планиметрии 7–9-х классов вы рассмотрели значительное количество геометрических задач и их решений разными методами. Попробуем дать краткий обзор рассмотренных типов задач и методов их решения.

В зависимости от требований геометрических задач их можно разделить на следующие типы: на доказательство, на вычисление, на построение, на исследование. Задачи каждого из этих типов решаются разными методами, которые условно можно поделить на геометрические и аналитические (пункт 1 табл. 2).

Напоминаем, что значительная часть теорем, рассмотренных в курсе планиметрии, касалась геометрии треугольника. Это не случайно, поскольку решение многих задач сводится к рассмотрению одного или нескольких треугольников. Поэтому, рассматривая геометрические методы решения планиметрических задач, можно условно выделить метод «ключевого» треугольника. По этому методу в данной фигуре нужно найти треугольник (или несколько треугольников), к исследованию которого (которых) сводится решение задачи. Иногда для этого следует сначала выполнить некоторое дополнительное построение, например в четырехугольнике провести диагональ.

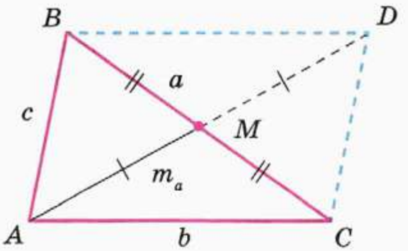


Рис. 1.13

Некоторые из часто используемых дополнительных построений полезно запомнить. В частности, *если в условии задачи фигурирует медиана треугольника, то удобно продолжить эту медиану за сторону на такое же расстояние и дополнить рисунок до параллелограмма.* Например, в треугольнике ABC со сторонами $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ продолжим медиану AM за сторону BC на такое же расстояние ($MD = AM = m_a$) и соединим отрезками точку D с точками B и C (рис. 1.13). Тогда получим параллелограмм $ABDC$, так как его диагонали в точке пересечения делятся пополам (табл. 7 приложения). Но *сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон*:

$$AD^2 + BC^2 = 2\,(AC^2 + AB^2) \text{ или } (2m_a)^2 + a^2 = 2\,(b^2 + c^2).$$

Отсюда $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

Иногда дополнительные построения выполняют, используя определенные геометрические преобразования (табл. 5 приложения). Например, *при решении задач, связанных с трапецией, удобно использовать параллельный перенос ее боковой стороны или диагонали* (см. в табл. 8 приложения второе и третье дополнительные построения).

Решая геометрические задачи на доказательство, следует помнить, что утверждения некоторых из них доказываются *методом от противного*. Напомним его содержание.

1. *Предполагаем противоположное тому, что требуется доказать.*

2. *Опираясь на аксиомы и теоремы, получаем из предположения следствие, противоречащее условию или известному свойству.*

3. *Делаем вывод, что наше предположение неверно, а верно то утверждение, которое требовалось доказать.*

При использовании метода доказательства от противного, как правило, рисунок выполняется к геометрической ситуации, вытекающей из предположения. Например, решение задачи «Докажите, что на плоскости *прямая, пересекающая одну из двух параллельных прямых, пересекает и другую прямую*» может быть следующим.

1) Пусть прямые a и b параллельны. Допустим, что прямая c, пересекающая прямую a в точке A, не пересекает прямую b (рис. 1.14).

2) Значит, прямая c параллельна прямой b. Но тогда через точку A проходят две прямые a и c, параллельные прямой b, что противоречит аксиоме о параллельных.

3) Следовательно, наше предположение неверно, и прямая c обязательно пересечет и прямую b.

Рис. 1.14

Приступая к решению задачи, нужно учитывать, что почти каждая геометрическая задача требует индивидуального подхода к ее решению, изобретательности и интуиции. Тем не менее можно дать некоторые общие рекомендации, полезные при решении многих задач.

Решение практически любой геометрической задачи начинается с рисунка. Он должен быть достаточно лаконичным. *Следует изображать лишь «функционирующие» части геометрических фигур.* Если, например, в задаче рассматривается радиус описанной окружности, то можно изобразить только ее центр и радиус. Но если в условии задачи говорится о точке окружности, то изображение окружности может быть полезно для решения задачи.

Кроме того, *необходимо избегать чрезмерного усложнения рисунка.* Для этого можно, например, выполнить выносные рисунки, изображающие фрагменты заданной конфигурации. В то же время полезно непосредственно на рисунке указывать числовые или буквенные значения линейных или угловых величин. Надо учитывать, что есть задачи, в процессе решения которых приходится уточнять особенности рассматриваемой конфигурации и переделывать начальный рисунок, в результате он приобретает окончательный вид лишь одновременно с окончанием решения.

При решении геометрической задачи не следует опираться только на рисунок. Он может «подсказать», что какие-то точки лежат на одной прямой или одной окружности. Однако в процессе решения эти особенности расположения точек должны быть обоснованы без ссылок на рисунок. Иногда рисунок может стать причиной неполного решения задачи, поскольку соотношения, которые выполняются на нем и кажутся очевидными, в действительности требуют специального обоснования. Поэтому всегда пытайтесь изобразить все возможные конфигурации (см., например, задачу 3 на с. 24), а затем с помощью рассуждений отбросить лишние (если эти лишние действительно имеются). Напоминаем, что дополнительные построения на начальном рисунке, которые вводят новые отрезки и углы, иногда облегчают решение задачи.

В задачах на вычисление имеет смысл сначала, не проводя вычислений, определить, какие вообще отрезки и углы можно найти, исходя из заданных величин. И как только в этот перечень попадет нужный отрезок или угол, можно легко составить цепочку последовательных вычислений, которая приведет к определению нужной величины. Иногда такой «прямой поиск» полезно дополнить поиском плана решения задачи «от искомого», то есть исходя из требования задачи (например, «чтобы найти площадь вписанного круга, достаточно найти его радиус»).

Однако указанные способы не всегда удается применить. В таких случаях очень часто помогает алгебраический метод решения геометрических задач на вычисление, связанный с введением неизвестных и составлением уравнения или системы уравнений. В пункте 2 табл. 2 приведен ориентир, позволяющий распознавать ситуации, когда надо вводить неизвестные отрезки и углы, а также пример соответствующего решения. При использовании этого метода *для составления уравнения к задаче наряду с выражением заданных элементов через неизвестные бывает удобно величину какого-нибудь элемента из рассматриваемой конфигурации выразить дважды через введенные неизвестные.* Кроме того, *не всегда целесообразно составленные уравнения или системы уравнений стремиться решить полностью. Из полученного уравнения или системы, в первую очередь, следует найти неизвестные (или их комбинацию), позволяющие дать ответ на вопрос задачи* (см. решение задачи 2 на с. 23).

Возможность применения метода площадей для решения планиметрических задач показана в табл. 2 (пункт 3), а координатного и векторного методов — в § 2.

Примеры решения задач

Задача 1. В равнобедренной трапеции высота равна 8 см, основания равны 21 см и 9 см. Найдите радиус описанной около трапеции окружности.

Решение	*Комментарий*
▶ Пусть в трапеции $ABCD$ (рис. 1.15) $AB = CD$, $AD = 21$ см, $BC = 9$ см, $BK = 8$ см ($BK \perp AD$). Если окружность проходит через четыре точки A, B, C, D, то она проходит через	Попробуем выделить «ключевой» треугольник для решения этой задачи. Для этого проведем диагональ BD трапеции и вспомним, что окружность, проходящая через вершины

любые три из этих точек и поэтому совпадает с окружностью, описанной около треугольника ABD.

Найдем радиус окружности, описанной около треугольника ABD. Если CM — вторая высота данной равнобедренной трапеции, то, учитывая равенство прямоугольных треугольников ABK и DCM и то, что $AD \parallel BC$ и $BCMK$ — прямоугольник, получаем:

$$AK = MD = \frac{21-9}{2} = 6 \text{ (см)}.$$

Тогда из $\triangle ABK$:

$$AB = \sqrt{AK^2 + BK^2} = 10 \text{ (см)}.$$

Из прямоугольного треугольника BKD: $BD = \sqrt{BK^2 + KD^2} = 17$ (см). Следовательно, радиус окружности, описанной около треугольника ABD (а значит, и около трапеции $ABCD$), равен

$$R = \frac{AB \cdot BD \cdot AD}{4S_{\triangle ABD}} = \frac{AB \cdot BD \cdot AD}{4 \cdot \frac{1}{2} AD \cdot BK} = 10{,}625 \text{ (см)}.$$

Ответ: 10,625 см. ◁

треугольника ABD, описана около этого треугольника. Вычислить ее радиус можно по нескольким формулам (табл. 11 приложения), в частности:

$$R = \frac{a}{2\sin A} \text{ и } R = \frac{abc}{4S_{\Delta}}.$$

Из этих формул выбираем ту, для которой легко находятся все величины, входящие в ее запись: $R = \frac{abc}{4S_{\Delta}}$.

(Одна сторона треугольника ABD задана условием, а две другие легко находятся из соответствующих прямоугольных треугольников.)

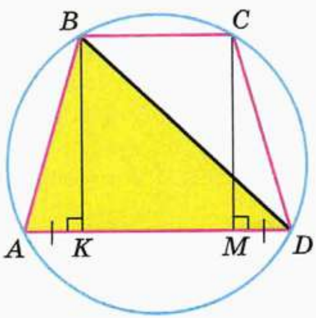


Рис. 1.15

Задача 2. Периметр прямоугольного треугольника равен 24 см, а его площадь равна 24 см^2. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.

Решение

▶ Пусть в прямоугольном треугольнике ABC (рис. 1.16): $\angle C = 90°$, $P = 24$ см, $S = 24$ см^2.

Обозначим $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ ($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$). Записывая данные периметр и площадь и теорему Пифагора, получаем систему

$$\begin{cases} a+b+c=24, \\ \frac{1}{2}ab=24, \\ a^2+b^2=c^2. \end{cases}$$

Комментарий

Так как *в условии этой геометрической задачи на вычисление не задан ни один отрезок, то для ее решения придется ввести неизвестный отрезок* (или несколько неизвестных отрезков). Чтобы записать периметр треугольника, удобно иметь все его стороны, поэтому введем как неизвестные все стороны треугольника: a, b, c. Для составления уравнений используем теорему Пифагора и заданные периметр и площадь (записав

Из первого уравнения имеем:

$$a + b = 24 - c.$$

Тогда

$$(a + b)^2 = (24 - c)^2$$

или

$$a^2 + b^2 + 2ab = 24^2 - 48c + c^2.$$

Подставляя в это равенство из второго уравнения $ab = 48$ и из третьего уравнения $a^2 + b^2 = c^2$, получаем

$$c^2 + 96 = 576 - 48c + c^2,$$

откуда $c = 10$ (см). Поскольку радиус описанной окружности прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то $R = 5$ см.

Ответ: 5 см. ◁

их через неизвестные). Поскольку в прямоугольном треугольнике радиус описанной окружности равен половине гипотенузы (табл. 11 приложения), то для получения ответа достаточно найти из этой системы только гипотенузу c. Для этого надо из первого уравнения найти сумму $a + b$, возвести ее в квадрат и использовать второе и третье уравнения.

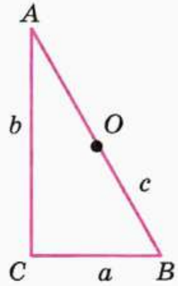


Рис. 1.16

Задача 3*. Дан равнобедренный треугольник с боковой стороной, равной 4, и углом 120°. Внутрь треугольника вписаны две равные окружности таким образом, что окружности касаются друг друга и каждая окружность касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

Решение

▶ Пусть в равнобедренном треугольнике ABC стороны: $AB = BC = 4$, $\angle ABC = 120°$ (рис. 1.17). Проведем высоту (медиану, биссектрису и ось симметрии) BH. Тогда $\angle A = \angle C = 30°$, $\angle ABH = 60°$, $BH = 2$, $AH = 2\sqrt{3}$. Обозначим радиус заданных равных окружностей через r. Условию задачи удовлетворяют два случая расположения этих окружностей: обе заданные окружности касаются либо основания AC (рис. 1.17, *а*), либо боковой стороны, например AB (рис. 1.17, *б*).

Комментарий

Из условия следует, что обе окружности касаются одной из сторон равнобедренного треугольника — либо основания (рис. 1.17, *а*), либо боковой стороны (рис. 1.17, *б*). Поэтому для полного решения задачи нужно рассмотреть оба случая. В каждом из этих случаев элементы заданного треугольника одинаковы, поэтому их удобно определить до того, как рассматривать отдельные случаи. Для первого случая радиус заданной окружности r определим как радиус окружности, *I случай.* Из симметрии получившейся конфигурации относительно прямой BH следует, что заданные окружности вписаны в прямоугольные треугольники ABH и CBH. Используя формулу для вычисления радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ABH (с. 284), получаем

$$r = \frac{AH + BH - AB}{2} = \frac{2\sqrt{3} + 2 - 4}{2} = \sqrt{3} - 1.$$

II случай. Так как центры O_1 и O_2 окружностей, вписанных в угол A и в угол B, лежат на биссектрисах этих углов, а соответствующие радиусы O_1K и O_2L, проведенные в точки касания, перпендикулярны стороне AB, то $\angle KAO_1 = 15°$, $\angle LBO_2 = 60°$, KLO_2O_1 — прямоугольник и $KL = O_1O_2 = 2r$. Из прямоугольных треугольников BLO_2 и AKO_1 имеем: $BL = r\operatorname{ctg} 60° = \frac{r\sqrt{3}}{3}$; $AK = r \operatorname{ctg} 15°$. Учитывая, что $\operatorname{ctg} 15° = \frac{1 + \cos 30°}{\sin 30°} = 2 + \sqrt{3}$, получаем $AK = r(2 + \sqrt{3})$. Тогда $AB = AK + KL + LB$, то есть

$$4 = r(2 + \sqrt{3}) + 2r + \frac{r\sqrt{3}}{3}.$$

Отсюда $r = \frac{3}{3 + \sqrt{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\sqrt{3} - 1$ или $\frac{3 - \sqrt{3}}{2}$. ◁

вписанной в прямоугольный треугольник ABH. Для второго случая введем неизвестный отрезок r, а для составления уравнения выразим известный отрезок AB через r (используя, что $AB = AK + KL + LB$ и отрезки в правой части равенства легко выражаются через r).

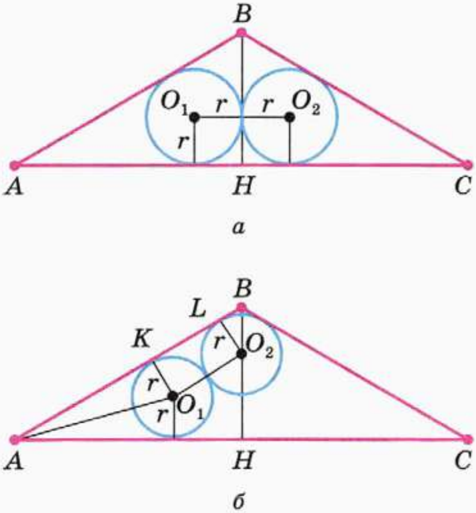


Рис. 1.17

Вопросы для контроля

1. Назовите основные понятия планиметрии.
2. Сколько прямых можно провести через две различные точки плоскости? Приведите соответствующую аксиому.
3. Всегда ли через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости прямую, параллельную данной? Сколько таких прямых можно провести? Приведите соответствующую аксиому.

4. Объясните смысл понятия «обратная теорема» и приведите примеры прямой и обратной теорем. Приведите пример теоремы, не имеющей обратной, и объясните, почему ее нет.

5*. На примере утверждения «*Если диагонали четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм*» объясните смысл понятий «необходимое условие» и «достаточное условие». Сформулируйте данное утверждение, употребляя термины: 1) «необходимо»; 2) «достаточно». Можно ли соединить условие и вывод приведенного утверждения термином «необходимо и достаточно»? Если можно, то объясните почему.

6. В каких случаях для решения геометрической задачи на вычисление удобно вводить неизвестные? Объясните это на примере.

7. Объясните, как можно использовать метод площадей для решения геометрической задачи. Приведите пример.

Упражнения

1.1°. В таблице 4 приложения (с. 268) символично зафиксированы следствия из теоремы косинусов. Сформулируйте эти следствия словесно.

1.2°. Определите вид (по углам) треугольника со сторонами 6 см, 8 см и 11 см.

1.3°. Даны два равнобедренных треугольника с общим основанием. Докажите, что их медианы, проведенные к основанию, лежат на одной прямой.

1.4. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 12, а угол, противолежащий основанию, равен 120°. Найдите высоты треугольника.

1.5°. В равнобедренном треугольнике основание и высота, проведенная к основанию, равны 4 см. Найдите площадь круга, описанного около этого треугольника.

1.6. В прямоугольном треугольнике высота, проведенная из вершины прямого угла, делит гипотенузу на отрезки 9 и 16. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

1.7. В треугольнике ABC со сторонами 4 и 6 и углом между ними 120° найдите длину медианы, проведенной из вершины тупого угла.

1.8. В треугольнике ABC со сторонами a и b медианы, проведенные к этим сторонам, взаимно перпендикулярны. Найдите длину третьей стороны треугольника.

1.9°. Одна из диагоналей ромба длиной 10 см равна его стороне. Найдите другую диагональ и углы ромба.

1.10. В параллелограмме $ABCD$ проведена биссектриса угла A, пересекающая сторону BC в точке K. Найдите длину отрезка BK, если $DC = 10$ см.

1.11. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки 5 см и 12 см. Найдите катеты треугольника.

1.12. В трапеции параллельные стороны равны 25 см и 4 см, а боковые стороны — 20 см и 13 см. Найдите площадь трапеции.

1.13. Около круга описана равнобедренная трапеция, у которой боковая сторона делится точкой касания на отрезки 4 см и 9 см. Найдите площадь трапеции.

1.14. В равнобедренную трапецию с боковой стороной 17 см вписана окружность диаметра 15 см. Найдите основания трапеции.

1.15*. В трапеции, основания которой равны a и b, через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. Найдите длину отрезка этой прямой, который отсекают боковые стороны трапеции.

1.16. Три окружности попарно касаются внешним образом. Найдите радиусы окружностей, если расстояния между центрами равны 5 см, 7 см и 8 см.

1.17. В треугольнике ABC со сторонами $AC = 10$ см, $CB = 20$ см и углом ACB, равным $135°$, проведена медиана CD. Найдите площадь треугольника ACD.

1.18. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что площади треугольников ABO и COD равны (то есть эти треугольники равновеликие).

1.19. Найдите площадь равнобедренной трапеции, высота которой равна 10 см, а диагонали взаимно перпендикулярны.

1.20*. Докажите, что сумма расстояний от точки, взятой внутри правильного треугольника, до его сторон равна высоте этого треугольника.

1.21. В треугольнике ABC угол A прямой, угол B равен $30°$. В треугольник вписана окружность, радиус которого равен $\sqrt{3}$. Найдите расстояние от вершины C до точки N касания этой окружности с катетом AB.

1.22. Средняя линия трапеции равна 10 и делит площадь трапеции в отношении $3 : 5$. Найдите длину основания этой трапеции.

1.23. В равнобедренной трапеции основания равны 42 и 18, а высота — 16. Найдите длину описанной около трапеции окружности.

1.24. В трапеции $ABCD$ с основами AB и CD диагонали пересекаются в точке E. Найдите площадь треугольника BCE, если $AB = 30$, $DC = 24$, $AD = 3$ и $\angle DAB = 60°$.

1.25. В трапецию $ABCD$ с основами AD и BC вписана окружность с центром O. Найдите площадь трапеции, если $\angle DAB = 90°$, $OC = 2$ и $OD = 4$.

1.26. Одна из диагоналей параллелограмма разбивает его на два равносторонних треугольника со стороной a. Найдите длину второй диагонали.

1.27. Найдите площадь параллелограмма, если его диагонали равны 3 и 5, а острый угол параллелограмма равен $60°$.

1.28. Высота ромба равна 12, а одна из его диагоналей — 15. Найдите площадь ромба.

1.29. На плоскости размещен квадрат $ABCD$ и точка O. Известно, что $OB = OD = 13$, $OC = 5\sqrt{2}$ и площадь квадрата больше, чем 225. Найдите сторону квадрата и выясните, где расположена точка O — внутри квадрата или вне его.

1.30. Квадрат со стороной 3 см срезали по углам так, что образовался правильный восьмиугольник. Найдите сторону восьмиугольника.

1.31*. На прямой, содержащей медиану AD прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C, взята точка E, удаленная от вершины A на расстояние, равное 4. Найдите площадь треугольника BCE, если $BC = 6$, $AC = 4$.

1.32*. Окружности радиусов 3 и 5 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а бо́льшую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если угол $ABO_1 = 15°$.

1.33*. Окружности радиусов 1 и 4 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются внешним образом в точке C. Радиусы этих окружностей AO_1 и BO_2 — параллельны, причем угол AO_1O_2 равен 60°. Найдите AB.

1.34*. В окружности проведены хорды PQ и CD, причем $PQ = PD = CD = 12$, $CQ = 4$. Найдите CP.

1.35*. Радиусы окружностей с центрами O_1 и O_2 равны соответственно 2 и 9. Найдите радиус третьей окружности, которая касается двух данных и прямой O_1O_2, если $O_1O_2 = 21$.

1.36*. Угол C треугольника ABC равен 30°, D — отличная от A точка пересечения окружностей, построенных на сторонах AB и AC как на диаметрах. Известно, что $BD : DC = 1 : 6$. Найдите синус угла A.

1.37*. Боковые стороны KL и MN трапеции $KLMN$ равны 8 и 17 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 7,5, средняя линия трапеции равна 17,5. Прямые KL и MN пересекаются в точке A. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ALM.

1.38*. В треугольнике ABC известны стороны $AB = 7$, $BC = 8$, $AC = 9$. Окружность, проходящая через точки A и C, пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и L, отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдите длину отрезка KL.

1.39*. Точка O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной $14\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, касающейся окружностей, описанных около треугольников AOB, COD и EOF.

1.40*. Продолжение биссектрисы CD неравнобедренного треугольника ABC пересекает окружность, описанную около этого треугольника, в точке E. Окружность, описанная около треугольника ADE, пересекает прямую AC в точке F, отличной от A. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $AC = 8$, $AF = 3$, угол BAC равен 45°.

1.41*. Через вершину B правильного шестиугольника $ABCDEF$ проведена прямая, пересекающая диагональ CF в точке K. Известно, что эта прямая разбивает шестиугольник на части, площади которых относятся как $2 : 3$. Найдите отношение $CK : KF$.

§ 2 ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ КООРДИНАТ И ВЕКТОРОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Таблица 3

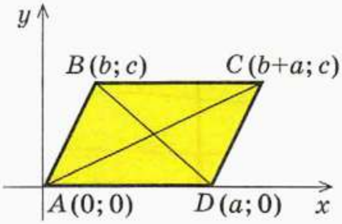
ПРИМЕНЕНИЕ КООРДИНАТ И ВЕКТОРОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

1. Применение координат при решении геометрических задач

Пример 1. Докажите, что в параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех его сторон.

Решение

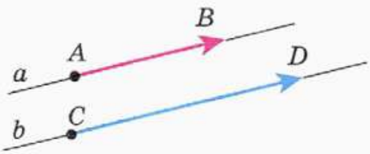
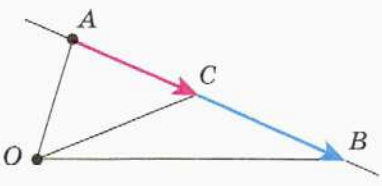
Введем систему координат так, как она изображена на рисунке. Точка A имеет координаты (0; 0). Если координаты точки B обозначить $(b;\ c)$, а координаты точки D — $(a;\ 0)$, то координаты точки C будут $(b + a;\ c)$ (объясните почему). Запишем в координатах сумму квадратов длин диагоналей и сумму квадратов длин всех сторон:



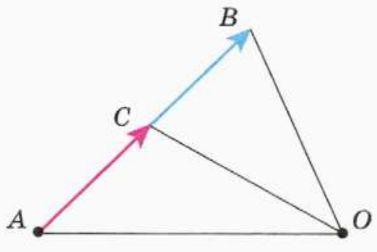
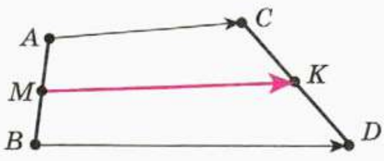
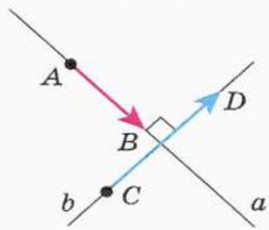
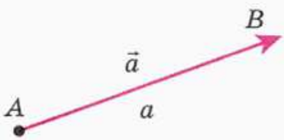
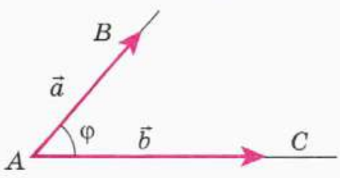
$$AC^2 + BD^2 = (b + a)^2 + c^2 + (b - a)^2 + c^2 = 2b^2 + 2a^2 + 2c^2;$$
$$2AB^2 + 2AD^2 = 2\,(b^2 + c^2) + 2a^2 = 2b^2 + 2c^2 + 2a^2.$$

Как видим, $AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2$, что и требовалось доказать.

2. Перевод геометрических фактов на векторный язык и векторных соотношений на геометрический язык

№ п/п	Рисунок	Утверждение на геометрическом языке	Утверждение на векторном языке
1		Прямые параллельны $a \parallel b$ (прямые a и b не совпадают)	Векторы коллинеарны $\overline{AB} = \lambda\overline{CD}$ $\left(\frac{CD}{AB} = \lambda\right)$
2		$C \in AB$ $\left(\frac{AB}{AC} = \lambda\right)$	Векторы коллинеарны $\overline{AB} = \lambda\overline{AC}$ или $\overline{OC} = p\overline{OA} + (1 - p) \cdot \overline{OB}$

Продолжение табл. 3

№ п/п	Рисунок	Утверждение на геометрическом языке	Утверждение на векторном языке
3		$\frac{AC}{CB}=\frac{m}{n}$	а) $\overrightarrow{AC}=\frac{m}{n}\overrightarrow{CB}$
		Точка C — середина AB $\left(\frac{AC}{CB}=1\right)$	б) $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$
4		Точка M — середина AB, точка K — середина CD	$\overrightarrow{MK}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$
5		$a \perp b$	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ $\left(\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}, \overrightarrow{CD}\neq\vec{0}\right)$
6		$AB = a$	$\vec{a}^2=\lvert\vec{a}\rvert^2$, где $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\lvert\vec{a}\rvert=a$. В координатах: $\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{x_a^2+y_a^2}$, $\vec{a}=\overrightarrow{(x_a; y_a)}$
7		$\angle BAC = \varphi$	$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert}$, где $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, φ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$

Окончание табл. 3

3. Схема решения геометрических задач векторным методом

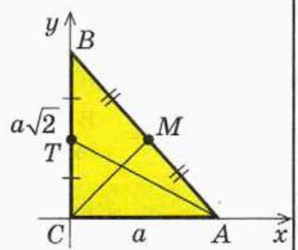
1. **Перевести требование задачи на векторный язык** (для этого можно воспользоваться соотношениями из пункта 2 этой таблицы).
2. **Ввести прямоугольную систему координат** или *выбрать два неколлинеарных вектора на плоскости как основные* (базисные).
3. **Найти координаты векторов, выделенных в пункте 1,** или *выразить эти векторы через основные.*
4. **Доказать или найти выделенное в пункте 1 соотношение и перевести результат на геометрический язык** (для перевода снова воспользуемся соотношениями пункта 2 этой таблицы).

4. Применение векторов (в координатной форме) при решении геометрических задач

Пример 2. В прямоугольном треугольнике ABC $(\angle C = 90°)$ $AC = a$, $BC = a\sqrt{2}$. Докажите, что медианы, проведенные из вершин A и C, взаимно перпендикулярны.

Решение

1. Если AT и CM — медианы данного прямоугольного треугольника, то *для доказательства их перпендикулярности достаточно доказать, что скалярное произведение соответствующих векторов равно нулю:* $\overrightarrow{AT} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$.



2. *Введем систему координат* таким образом, как показано на рисунке. Тогда точки A, C, B, T, M (T — середина CB, M — середина AB) имеют координаты: $A\,(a;\,0)$, $C\,(0;\,0)$, $B\left(0;\,a\sqrt{2}\right)$, $T\left(0;\,\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$, $M\left(\frac{a}{2};\,\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$.
3. *Запишем координаты векторов, выделенных в пункте 1:*
$$\overrightarrow{AT}\left(-a;\,\frac{a\sqrt{2}}{2}\right),\ \overrightarrow{CM}\left(\frac{a}{2};\,\frac{a\sqrt{2}}{2}\right).$$
4. *Найдем скалярное произведение этих векторов:*
$$\overrightarrow{AT} \cdot \overrightarrow{CM} = -a \cdot \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0.$$

Это равенство и означает, что векторы $\overrightarrow{AT}$ и $\overrightarrow{CM}$ перпендикулярны, то есть медианы AT и CM взаимно перпендикулярны.

Объяснение и обоснование

Введение координат и векторов при решении геометрических задач позволяет составить аналитическую модель заданной задачи и использовать мощный потенциал курса алгебры для исследования этой модели. Как правило, это позволяет избежать специфических дополнительных построений, часто применяемых при решении задач геометрическими методами.

Для решения геометрической задачи координатным методом:

1) вводим прямоугольную систему координат;
2) записываем координаты заданных точек;
3) записываем в координатах заданные и искомые соотношения, связанные с условием и требованием задачи, и анализируем их с целью получения ответа на вопрос задачи.

Пример применения координат для решения геометрической задачи приведен в пункте 1 табл. 3.

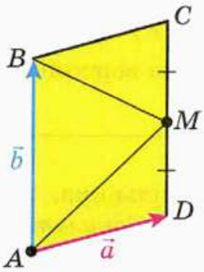


Рис. 2.1

Следует учитывать, что координатный или векторный методы удобно использовать тогда, когда после введения системы координат или основных векторов (так называемых *базисных векторов*, через которые выражаются все остальные векторы) легко записываются все геометрические соотношения, заданные условием и требованием задачи. Часть таких соотношений в координатной и векторной формах приведена в табл. 13 приложения, а часть — в пункте 2 табл. 3. В пункте 3 этой таблицы приведена схема решения геометрических задач векторным (или векторно-координатным) методом, а в пункте 4 — применение этой схемы.

Примеры решения задач

Задача. В параллелограмме $ABCD$ (рис. 2.1) $AB = 2BC$ и M — середина стороны CD. Докажите, что отрезки AM и BM перпендикулярны.

Решение	*Комментарий*
▶ Чтобы доказать, что отрезки AM и BM перпендикулярны, достаточно доказать, что скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BM}$ равно нулю. Выберем основные векторы: $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$. Выразим векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BM}$ через основные. Так как точка M — середина DC, то $\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$ и $\overrightarrow{BM}=\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$.	Чтобы решить эту задачу векторным методом (не вводя при этом систему координат), воспользуемся схемой решения, приведенной в пункте 3 табл. 3: 1) *перевести требование задачи на векторный язык* (для этого с учетом соотношения 5, приведенного в пункте 2 табл. 3, достаточно доказать, что $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$);

Найдем скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BM}$.

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = \left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right) = \vec{a}^2 - \frac{1}{4}\vec{b}^2.$

Но $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, $\vec{b}^2 = |\vec{b}|^2$. Учитывая, что по условию $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$, получаем: $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$, следовательно, отрезки AM и BM перпендикулярны. ◁

2) *выбрать на плоскости два неколлинеарных вектора как основные* (чаще всего исходящие из одной точки);
3) *выразить векторы, выделенные в пункте* 1, *через основные;*
4) *доказать или найти выделенное в пункте* 1 *соотношение и перевести результат на геометрический язык* (для этого воспользуемся соотношениями пункта 2 табл. 3).

Вопросы для контроля

1. Укажите основные этапы решения геометрической задачи координатным и векторным методами.
2. Приведите примеры решения геометрической задачи координатным и векторным методами.

Упражнения

2.1°. На рисунке 2.2 изображен прямоугольный треугольник с катетами a и b ($a > b$). Выберите систему координат таким образом, чтобы начало координат находилось в вершине прямого угла, а две другие вершины — на осях координат. Запишите координаты всех вершин треугольника. Запишите координаты середин его сторон.

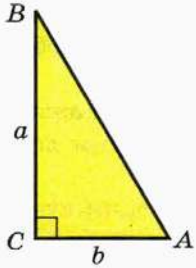


Рис. 2.2

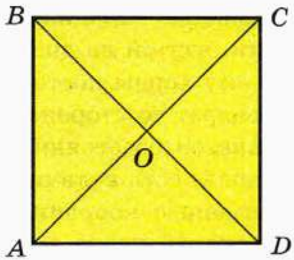


Рис. 2.3

2.2. На рисунке 2.3 изображен квадрат со стороной a. Выберите систему координат таким образом, чтобы: 1°) три вершины квадрата находились на осях координат; 2) все вершины квадрата находились на осях координат. Запишите координаты вершин квадрата и точки пересечения его диагоналей.

2.3. На рисунке 2.4 изображен равнобедренный треугольник с основанием $2a$ и высотой b. Выберите систему координат таким образом, чтобы все его вершины находились на осях координат. Запишите координаты вершин треугольника и середин его сторон.

2.4. На рисунке 2.5 изображен прямоугольник со сторонами a и b. Выберите систему координат таким образом, чтобы три его вершины находились на осях координат. Запишите координаты вершин прямоугольника и точки пересечения его диагоналей.

2.5. На рисунке 2.6 изображен ромб с диагоналями $2a$ и $2b$. Выберите систему координат таким образом, чтобы начало координат находилось в точке пересечения диагоналей, а все вершины — на осях координат. Запишите координаты вершин ромба.

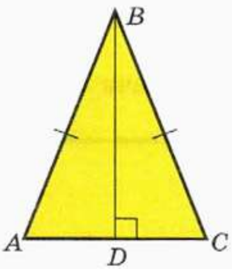


Рис. 2.4

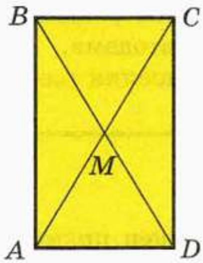


Рис. 2.5

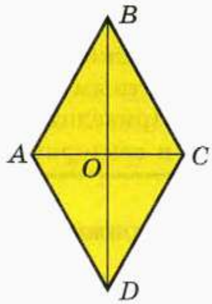


Рис. 2.6

2.6. С помощью координат докажите, что середина гипотенузы прямоугольного треугольника равноудалена от всех его вершин.

2.7. С помощью координат докажите, что сумма квадратов расстояний от точки, взятой на диаметре окружности, до концов любой параллельной ему хорды постоянна.

2.8. В квадрат со стороной 2 вписана окружность. Докажите, что сумма квадратов расстояний от любой точки окружности до всех вершин квадрата есть величина постоянная.

2.9*. С помощью координат докажите, что в трапеции сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов боковых сторон плюс удвоенное произведение оснований (рис. 2.7).

2.10*. (*Теорема Эйлера.*) С помощью координат докажите, что сумма квадратов длин сторон четырехугольника равна сумме квадратов его диагоналей плюс учетверенный квадрат расстояния между серединами диагоналей.

2.11*. Обоснуйте справедливость соотношений, приведенных в пункте 2 табл. 3.

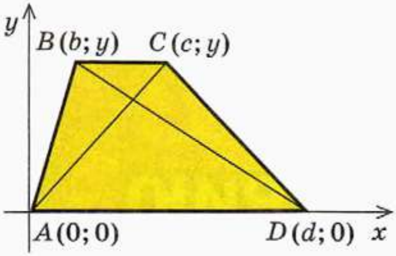


Рис. 2.7

2.12. С помощью векторов докажите теорему о средней линии треугольника.

2.13*. С помощью векторов докажите теорему о средней линии трапеции.

2.14. С помощью векторов докажите, что диагонали ромба перпендикулярны.

2.15. В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AD = BC = 4$ и $AB = CD = 5$ на сторонах AD и BC выбраны точки K и M так, что $AK = 1$ и $BM = 3$. С помощью векторов докажите, что прямые BK и MD параллельны.

2.16. С помощью векторов найдите угол между гипотенузой прямоугольного треугольника и его медианой, проведенной к большему катету, если длины катетов равны 6 см и 4 см.

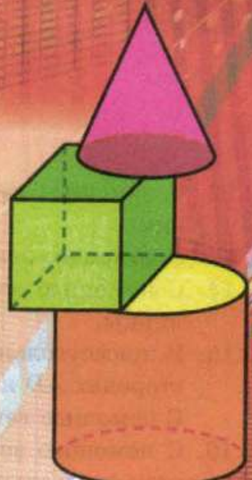
2.17. С помощью векторов докажите, что середины оснований трапеции лежат на одной прямой с точкой пересечения продолжений боковых сторон.

2.18*. В квадрате $ABCD$ на диагонали BD взяли такую точку M, что $\frac{BM}{BD} = \frac{2}{3}$, а на стороне BC — такую точку K, что $\frac{BK}{BC} = \frac{1}{3}$. Докажите, что угол AMK равен $90°$.

2.19*. В треугольнике со сторонами a, b, c длины сторон связаны соотношением $a^2 + b^2 = 5c^2$. Докажите, что медианы, проведенные к сторонам a и b, перпендикулярны.

Раздел 2

ВВЕДЕНИЕ В СТЕРЕОМЕТРИЮ



В *основной части* раздела вы:

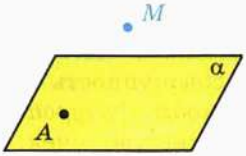
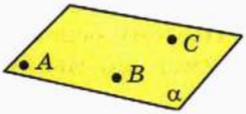
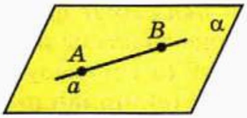
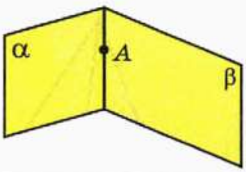
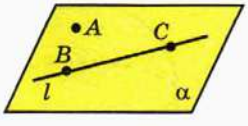
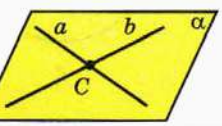
ознакомитесь с основными понятиями и аксиомами стереометрии и следствиями из них;

научитесь, применяя их, решать простейшие задачи на построение сечений куба, прямоугольного параллелепипеда и пирамиды.

В *дополнительной части* раздела вы сможете подробнее ознакомиться с применением в геометрии аксиоматического метода — одного из методов построения научной теории.

§ 3 АКСИОМЫ СТЕРЕОМЕТРИИ И ИХ ПРОСТЕЙШИЕ СЛЕДСТВИЯ

Таблица 4

АКСИОМЫ СТЕРЕОМЕТРИИ	
Иллюстрация	**Формулировка**
	**Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей.** $A \in \alpha$; $M \notin \alpha$.
	**Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.**
	**Если две различные точки прямой лежат в плоскости, то и вся прямая лежит в этой плоскости.** Если $A \in \alpha$ и $B \in \alpha$, то $AB \subset \alpha$.
	**Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.**
	Расстояние между любыми двумя точками пространства одно и то же на всех плоскостях, содержащих эти точки.
Следствия из аксиом	
	**Через прямую и точку, не лежащую на ней, можно провести плоскость, и притом только одну.**
	**Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость, и притом только одну.**

Объяснение и обоснование

1. Понятие о стереометрии. Курс геометрии включает планиметрию и стереометрию. На уроках геометрии в 7–9-х классах вы изучали в основном планиметрию, то есть геометрию на плоскости. Все фигуры, которые рассматривают в планиметрии, например треугольник, параллелограмм, окружность, лежат в одной плоскости. Все точки каждой из этих фигур принадлежат плоскости, поэтому такие фигуры называют *плоскими*.

В этом году мы будем изучать геометрию в пространстве — стереометрию (греческое слово «стерео» означает пространственный). Таким образом, *стереометрией* называют часть геометрии, которая изучает пространственные фигуры и их свойства. Пространственные фигуры могут быть неплоскими (например, куб или сфера) или плоскими. Всю совокупность точек, рассматриваемых в стереометрии, называют *пространством*. *Фигурой* (или фигурой в пространстве) будем называть произвольное множество точек, расположенных в пространстве. В частности, это все фигуры, расположенные в какой-либо плоскости, в том числе и сама эта плоскость. Следовательно, плоские фигуры — также пространственные фигуры. Поэтому основными свойствами плоских фигур, известными из курса планиметрии, мы будем пользоваться и в стереометрии.

Однако в стереометрии важнейшими являются пространственные фигуры, не лежащие полностью ни в одной плоскости, — *неплоские* фигуры.

С некоторыми простыми неплоскими фигурами вы уже знакомы из курса геометрии 9-го класса. К ним относятся (рис. 3.1): куб (*а*); прямоугольный параллелепипед (*б*); призма (*в*); пирамида (*г–д*); конус (*е*); цилиндр (*ж*); шар (*з*).

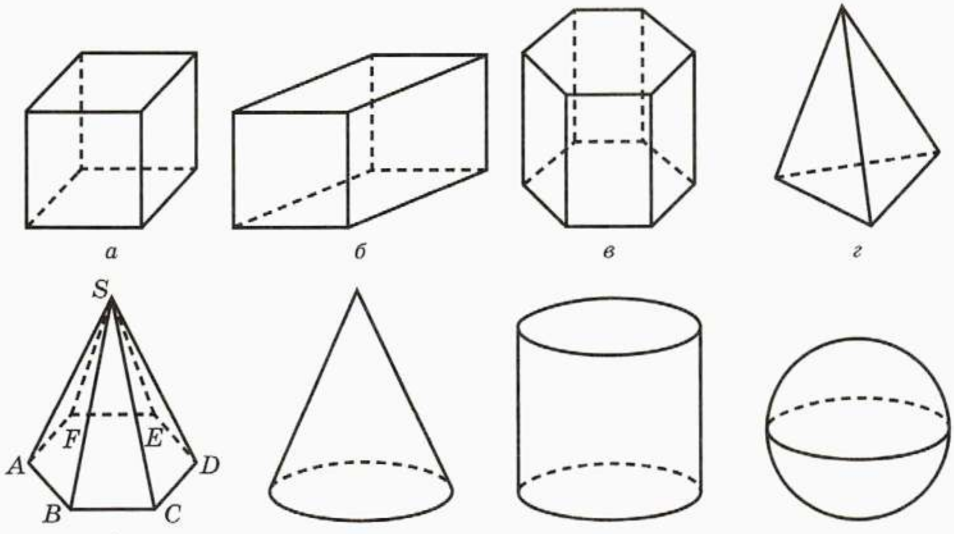


Рис. 3.1

Некоторые фигуры в пространстве еще называют *телами*[1]. Наглядно геометрическое тело можно представить себе как часть пространства, занимаемого физическим телом и ограниченного некоторой поверхностью. Например, поверхность шара — сфера состоит из всех точек пространства, удаленных от одной точки — центра на расстояние, *равное радиусу*. Эта поверхность ограничивает шар, состоящий из всех точек пространства, удаленных от одной точки — центра на расстояние, *не превышающее радиуса*.

Куб, параллелепипед, призма и пирамида — многогранники. Строгое определение многогранника будет дано в 11-м классе. Однако поскольку с некоторыми видами многогранников мы начинаем работать в 10-м классе, то напомним известные из курса геометрии 9-го класса определения, опирающиеся на наглядно-интуитивные представления.

Многогранником будем называть тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников. Каждый из этих многоугольников называют *гранью многогранника* (рис. 3.2). Стороны граней называют *ребрами многогранника*. *Вершинами многогранника* называют вершины его граней. Отрезок, соединяющий вершины многогранника, не принадлежащие одной грани, называют *диагональю многогранника*.

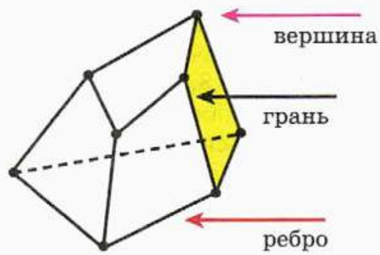


Рис. 3.2

Напоминаем, что все грани куба — квадраты, а все грани прямоугольного параллелепипеда — прямоугольники.

Многогранник, две грани которого — равные n-угольники, а остальные n граней — параллелограммы, называют *n-угольной призмой*. Ее равные n-угольники называют *основаниями призмы*, а параллелограммы — *боковыми гранями*. Куб и прямоугольный параллелепипед — частные случаи четырехугольной призмы.

Пирамидой называют многогранник, одна из граней которого — плоский многоугольник, а остальные грани — треугольники, имеющие общую вершину (рис. 3.1, *г–д*). Треугольные грани называют *боковыми гранями пирамиды*, общую вершину боковых граней — *вершиной пирамиды*, а многоугольник — основанием пирамиды. Отрезки, соединяющие вершину пирамиды с вершинами ее основания, называют *боковыми ребрами пирамиды*. Пирамиду называют *n-угольной*, если ее основание — n-угольник. Пирамиду называют *правильной*, если ее основание — правильный многоугольник, а все боковые ребра равны. Например, если в пирамиде $SABCDEF$ (рис. 3.1, *д*) $ABCDEF$ — *правильный шестиугольник* и $SA = SB = SC = SD = SE = SF$, то это правильная шестиугольная пирамида.

Треугольную пирамиду иногда называют *тетраэдром* (рис. 3.1, *г*). Тетраэдр, все грани которого — правильные треугольники, называют *правильным*.

---

[1] Строгое определение тела и его поверхности будет дано в курсе геометрии 11-го класса.

2. Основные понятия стереометрии. Основными фигурами в пространстве являются точка, прямая и плоскость. Как и в курсе планиметрии, точки в пространстве будем обозначать прописными латинскими буквами A, B, C, D, ..., а прямые — строчными латинскими буквами — a, b, c, ... (или двумя точками, лежащими на прямой). Плоскости будем обозначать строчными греческими буквами α, β, γ, ..., а изображать в виде параллелограммов или произвольных замкнутых областей (рис. 3.3). Такие способы изображения отвечают наглядному представлению о плоскости как о гладкой поверхности стола, озера (рис. 3.4[1]) и т. п. При этом плоскость представляют неограниченной во все стороны, идеально ровной, не имеющей никакой толщины.

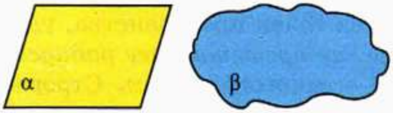


Рис. 3.3

Если A — точка плоскости α, то говорят, что *точка A лежит в плоскости* α, а *плоскость* α *проходит через точку A*. Это можно записывать так: $A \in \alpha$. Если точка M не принадлежит плоскости α, то это записывают так: $M \notin \alpha$ (рис. 3.5).

Рис. 3.4

Если каждая точка прямой a принадлежит плоскости α, то говорят, *что прямая a лежит в плоскости* α, а *плоскость* α *проходит через прямую a* (рис. 3.6). Это можно обозначать так: $a \subset \alpha$. Если прямая b не принадлежит плоскости α, то это можно обозначать так: $b \not\subset \alpha$.

Если прямая a и плоскость α имеют только одну общую точку A, то говорят, что они пересекаются в точке A. Это можно записать так[2]: $a \cap \alpha = A$. На соответствующем рисунке часть прямой, «закрытая» изображением плоскости, считается невидимой и изображается штриховой линией (рис. 3.7).

3. Аксиомы стереометрии. В стереометрии, как и в планиметрии, свойства геометрических фигур устанавливаются путем доказательства соответствующих теорем. Но в начале курса, когда нам еще не известно ни одно свойство фигур в пространстве, приходится некоторые свойства основных фигур принимать без доказательств. Как и в планиметрии, свойства основных

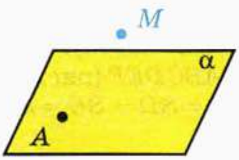


Рис. 3.5

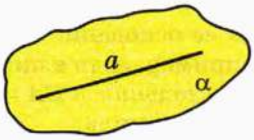


Рис. 3.6

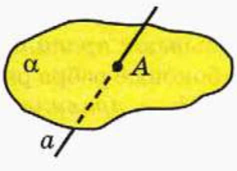


Рис. 3.7

[1] Озеро Байкал.

[2] В приведенной записи буквой A обозначена геометрическая фигура — множество точек, состоящее из одной точки.

геометрических фигур, принимаемые без доказательств, называют *аксиомами*. Напоминаем, что основными фигурами в пространстве являются точка, прямая и плоскость. Аксиомы выражают интуитивно понятные свойства плоскостей и их связь с другими основными фигурами — точками и прямыми.

***Аксиома* 1. Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей.**

***Аксиома* 2. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.**

***Аксиома* 3. Если две различные точки прямой лежат в плоскости, то и вся прямая лежит в этой плоскости.**

***Аксиома* 4. Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку** (рис. 3.8).

***Аксиома* 5. Расстояние между любыми двумя точками пространства одно и то же на всех плоскостях, содержащих эти точки.**

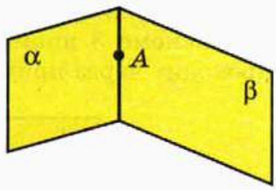


Рис. 3.8

В курсе стереометрии мы будем считать также, что *для любой плоскости в пространстве справедливы все основные определения, теоремы и аксиомы планиметрии*.

В частности, на каждой плоскости между двумя выбранными точками существует определенное расстояние — длина соединяющего их отрезка. Хотя две точки могут принадлежать одновременно различным плоскостям, но по аксиоме 5 расстояния между ними на каждой из этих плоскостей будут одинаковы. Если выбран единичный отрезок, то длину любого отрезка можно выразить положительным числом. К этому числу приписывают название единичного отрезка: 2 см, 1,5 км и т. п. Если единичный отрезок не имеет названия, а длина отрезка AB равна, например, 5 единицам длины, то пишем: $AB = 5$. Это сокращенная запись выражения $AB = 5$ единиц.

Аксиома о расстоянии позволяет сравнивать фигуры, расположенные в различных плоскостях, в частности применять теоремы о равенстве и подобии треугольников.

Пользуясь понятием расстояния, можно дать определение равенства и подобия фигур в пространстве так, как это было сделано в планиметрии. В частности,

две фигуры называют *равными*, если существует взаимно однозначное соответствие[1] между их точками, при котором расстояния между парами соответствующих точек равны[2].

[1] Напоминаем, что для установления соответствия между двумя фигурами каждой точке одной фигуры ставится в соответствие единственная точка другой фигуры.

[2] Как и на плоскости, соответствие между двумя фигурами, при котором сохраняются расстояния между соответствующими точками этих фигур, называют *перемещением*, или *движением*. Подробнее движение будет рассмотрено в разделе 5.

Так же как и на плоскости,

две фигуры называют *подобными*, если существует взаимно однозначное соответствие между их точками, при котором расстояния между их точками изменяются в одно и то же число раз.

Иначе говоря, для двух произвольных точек X и Y одной фигуры и соответствующих точек X' и Y' другой фигуры справедливо равенство $X'Y' = k \cdot XY$.

В дальнейшем аксиому 5, в отличие от остальных аксиом, будем применять, не ссылаясь на нее.

4. Следствия из аксиом стереометрии. Используя аксиомы стереометрии, с помощью логических рассуждений устанавливается справедливость других свойств. Рассмотрим некоторые из них.

***Теорема* 3.1. Через прямую и точку, не лежащую на ней, можно провести плоскость, и притом только одну.**

Доказательство. Пусть точка A не лежит на прямой l. Выберем на прямой l произвольные точки B и C (рис. 3.9). Через точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, по аксиоме 2 проходит единственная плоскость α. По аксиоме 3 прямая l лежит в плоскости α. Следовательно, плоскость α проходит через прямую l и точку A.

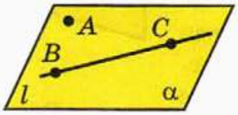


Рис. 3.9

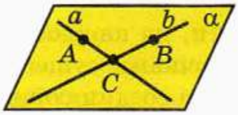


Рис. 3.10

Покажем, что эта плоскость единственная. Действительно, любая другая плоскость, проходящая через прямую l и точку A, будет проходить также через точки A, B, C. По аксиоме 2 она должна совпадать с плоскостью α.

***Теорема* 3.2. Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость, и притом только одну.**

Доказательство. Пусть прямые a и b пересекаются в точке C (рис. 3.10). Выберем на прямой a произвольную точку A, а на прямой b — точку B, отличные от точки C. Через точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, по аксиоме 2 проходит единственная плоскость α. По аксиоме 3 прямая a лежит в плоскости α и прямая b лежит в плоскости α. Следовательно, плоскость α проходит через прямые a и b.

Покажем, что эта плоскость единственная. Действительно, любая другая плоскость, проходящая через прямые a и b, будет проходить также через точки A, B, C. По аксиоме 2 она должна совпадать с плоскостью α.

Замечание. Поскольку три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, однозначно определяют некоторую плоскость, то иногда плоскость, проходящую через эти точки, обозначают так: (ABC).

Выражение «плоскость ABC» будем записывать также сокращенно «пл. ABC». Чтобы подчеркнуть, что рассматриваемые четыре и более точек лежат в одной плоскости, будем использовать сокращенные записи «плоскость $ABCD$» или «пл. $ABCD$», означающие, что плоскость проходит через точки A, B, C, D.

Из аксиомы 2 и доказанных теорем следует, что *плоскость можно задать*:

1) *тремя точками, не лежащими на одной прямой*;
2) *прямой и точкой, не лежащей на ней*;
3) *двумя пересекающимися прямыми.*

Ранее мы договорились, что для любой плоскости в пространстве справедливы все основные определения, теоремы и аксиомы планиметрии. Поэтому в нашем изложении система аксиом стереометрии фактически состоит из группы аксиом 1–5 стереометрии и группы аксиом планиметрии (одна из аксиоматик школьного курса планиметрии приведена в § 1). Но в планиметрии мы имели одну плоскость, на которой располагались все рассматриваемые фигуры, в стереометрии, наоборот, рассматривается бесконечно много плоскостей. Вследствие этого понимание некоторых аксиом планиметрии как аксиом стереометрии требует уточнения.

Например, в любом учебнике планиметрии применяется аксиома I_1: *какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей.* Другими словами, существуют точки вне данной прямой на плоскости, на которой лежит прямая (и все рассматриваемые фигуры). Именно на таком понимании построена геометрия на плоскости.

В стереометрии эта аксиома приобретает иной смысл. Она утверждает вообще существование точек, не лежащих на данной прямой. Из нее не следует, что существуют точки вне данной прямой на другой плоскости, на которой лежит прямая. Это требует отдельного доказательства (доказательство и уточненные формулировки других аксиом планиметрии см. в § 5).

Примеры решения задач

Задача 1. Даны четыре точки, не лежащие в одной плоскости. Могут ли три из них лежать на одной прямой?

Решение	*Комментарий*
Пусть даны четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости. Допустим, что три из данных точек, например A, B, C, лежат на одной прямой a (а четвертая точка D не лежит на этой прямой). Тогда через три точки A, B, D, не лежащие на одной прямой, по аксиоме 2 можно провести плоскость α (рис. 3.11). Но по аксиоме 3, если две различные точки A и B прямой a	На вопрос «Может ли выполняться данное утверждение?» можно дать ответ: *«Да»*, и тогда *достаточно привести хотя бы один пример, когда это утверждение выполняется;* *«Нет»*, и тогда *нужно доказать, что это утверждение не выполняется никогда* (чаще всего это доказывается методом от противного).

лежат в плоскости α, то и вся прямая лежит в этой плоскости, а значит, точка C также лежит в плоскости α. Следовательно, все четыре данные точки лежат в одной плоскости α, что противоречит условию.

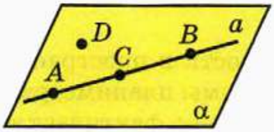


Рис. 3.11

Таким образом, наше предположение неверно, и если четыре точки не лежат в одной плоскости, то никакие три из них не лежат на одной прямой. ◁

При использовании метода от противного нужно:

1) выдвинуть предположение, противоположное тому, которое мы хотим доказать;
2) опираясь на аксиомы и уже доказанные теоремы, получить противоречие с условием или известным свойством;
3) сделать вывод, что наше предположение неверно, а верно то, которое требовалось доказать.

Задача 2*. Докажите, что **через любые две точки пространства можно провести прямую, и притом только одну.**

Решение

▶Пусть A и B — любые две точки пространства. Выберем точку C, не лежащую на одной прямой с точками A и B (в соответствии с аксиомой планиметрии).

Через точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, по аксиоме 2 проведем плоскость α. По соответствующей аксиоме планиметрии в плоскости α через точки A и B можно провести прямую a.

Допустим, что в пространстве через точки A и B можно провести еще одну прямую a_1, отличную от прямой a. По аксиоме 3 прямая a_1 лежит в плоскости α (поскольку две ее точки A и B лежат в плоскости α). Тогда в плоскости α через две различные точки A и B проведены две различные прямые a и a_1, что противоречит соответствующей аксиоме планиметрии. Следовательно, через две различные точки в пространстве можно провести только одну прямую.◁

Комментарий

В планиметрии утверждение «Через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну» — аксиома (см. § 1). Но в стереометрии эта аксиома утверждает только то, что *в рассматриваемой плоскости через две различные точки можно провести прямую, и притом только одну*.

То, что данный факт имеет место в пространстве, требует доказательства. Для этого надо применить дополнительно следующую аксиому планиметрии: «*Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей*».

Эта аксиома и в пространстве гарантирует существование точек, не принадлежащих данной прямой.

Задача 3. Даны прямая и точка, не лежащая на ней. Докажите, что **все прямые, пересекающие данную прямую и проходящие через данную точку, лежат в одной плоскости.**

Решение	*Комментарий*
▶ Пусть даны прямая a в пространстве и точка B, не лежащая на ней. Через прямую a и точку B проведем плоскость α (по теореме 3.1 эта плоскость единственная). Пусть произвольная прямая b проходит через точку B и пересекает прямую a в точке A (рис. 3.12). Тогда точки A и B прямой b принадлежат плоскости α, следовательно, по аксиоме 3 вся прямая b лежит в плоскости α. Таким образом, все прямые, пересекающие данную прямую a и проходящие через не лежащую на ней точку B, лежат в одной плоскости α. ◁	Сначала строим плоскость, проходящую через данные прямую и точку. Далее доказываем, что все прямые, которые пересекают данную прямую и проходят через данную точку, лежат в этой плоскости. Для корректности доказательства следует удостовериться, что построенная плоскость единственная.

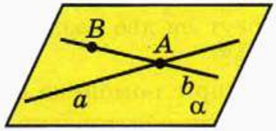


Рис. 3.12

Вопросы для контроля

1. Приведите примеры пространственных фигур; плоских фигур; неплоских фигур. Какое минимальное число точек может содержать неплоская фигура?
2. Перечислите основные понятия стереометрии. Сформулируйте аксиомы стереометрии и простейшие следствия из них.
3*. Дайте определение равенства и подобия фигур в пространстве.
4*. Докажите, что через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну.
5*. Докажите, что через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость, и притом только одну.

Упражнения

3.1°. Объясните, почему стол, имеющий три ножки, обязательно будет устойчивым, а о столе с четырьмя ножками этого утверждать нельзя.

3.2°. (*Шутка.*) Три мухи одновременно взлетели с крышки стола. Могут ли они снова оказаться в одной плоскости?

3.3°. Как можно проверить качество изготовления линейки, если имеется хорошо обработанная плоская плита? На какой теоретический факт опирается эта проверка?

3.4°. Можно ли провести плоскость через три точки, лежащие на одной прямой? Объясните ответ, опираясь на соответствующие аксиомы или следствия из них.

3.5°. Сколько плоскостей может проходить через три заданные точки?

3.6. Докажите, что плоскость и не лежащая на ней прямая не пересекаются или пересекаются в одной точке.

3.7. Докажите существование прямой, пересекающей данную плоскость.

3.8. Точка M принадлежит плоскости α, а точка N не принадлежит ей. Принадлежит ли плоскости α середина отрезка MN? Объясните ответ, опираясь на соответствующие аксиомы или следствия из них.

3.9. Верно ли, что можно провести плоскость через любые: 1) две точки; 2) три точки; 3) четыре точки? Объясните ответ, опираясь на соответствующие аксиомы или следствия из них.

3.10°. Сколько плоскостей можно провести через одну прямую? Обоснуйте свой ответ.

3.11°. Могут ли две плоскости иметь: 1) только одну общую точку; 2) только две общие точки?

3.12°. Могут ли две различные плоскости иметь две различные общие прямые?

3.13°. Столяр с помощью двух нитей проверяет, будет ли устойчиво стоять на полу изготовленный стол с четырьмя ножками. Как нужно натянуть эти нити?

3.14. Как расположены две плоскости, если в каждой из них лежит один и тот же треугольник?

3.15. Докажите, что существует плоскость, пересекающая заданную плоскость.

3.16. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Докажите, что прямые AC и BD не пересекаются.

3.17. Даны плоскость α и квадрат $ABCD$. Может ли плоскости α принадлежать: 1) только одна вершина квадрата; 2) только две его вершины; 3) только три вершины?

3.18*. Две вершины треугольника принадлежат плоскости α. Принадлежит ли этой плоскости третья вершина, если известно, что данной плоскости принадлежат: 1) точка пересечения медиан треугольника; 2) центр вписанной в треугольник окружности?

3.19*. Принадлежит ли плоскости каждая точка окружности, если известно, что этой плоскости принадлежат: 1) две точки окружности; 2) три точки окружности?

3.20*. Верно ли, что через три попарно пересекающиеся прямые проходит единственная плоскость?

3.21. Из прямых и плоскостей, проходящих через вершины куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 3.13), назовите:

1) пары пересекающихся прямых;

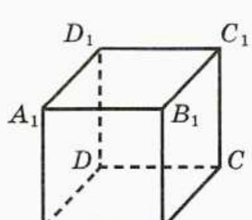


Рис. 3.13

2) три прямые, пересекающиеся в одной точке;
3) пары пересекающихся плоскостей;
4) три плоскости, пересекающиеся в одной точке.

3.22*. Даны две пересекающиеся прямые. Докажите, что все прямые, пересекающие обе данные прямые и не проходящие через точку их пересечения, лежат в одной плоскости.

3.23*. Три плоскости имеют общую точку. Верно ли утверждение, что эти плоскости имеют общую прямую? Сколько прямых можно получить при попарном пересечении этих плоскостей?

3.24*. Даны три различные попарно пересекающиеся плоскости. Докажите, что если две из прямых пересечения этих плоскостей пересекаются, то третья прямая проходит через точку их пересечения.

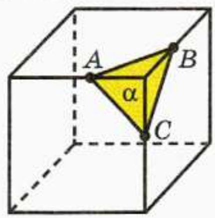
3.25. Даны четыре точки. Известно, что прямая, проходящая через любые две из этих точек, не пересекается с прямой, проходящей через другие две точки. Докажите, что данные четыре точки не лежат в одной плоскости.

3.26. Лежат ли в одной плоскости прямые a, b и c, если любые две из них пересекаются, но не существует точки, принадлежащей всем трем прямым? Сделайте рисунок.

3.27. Прямые a, b и c, лежащие в одной плоскости, пересекаются в точке O. Докажите, что существует плоскость, которая не проходит через точку O и не пересекает данные прямые a, b и c.

§ 4 ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ СЕЧЕНИЙ МНОГОГРАННИКОВ

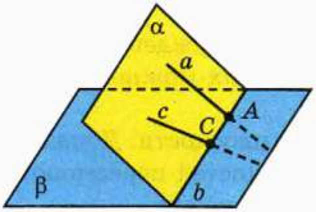
Таблица 5

СЕЧЕНИЕ МНОГОГРАННИКА ПЛОСКОСТЬЮ	
Определение и содержание построения	Пример
Сечением многогранника плоскостью называют многоугольник — общую часть многогранника и данной плоскости. **Для построения сечения достаточно построить отрезки, по которым секущая плоскость пересекает соответствующие грани многогранника.** Для этого надо построить точки пересечения секущей плоскости с соответствующими ребрами многогранника (или с их продолжениями).	 Сечением куба плоскостью α, проходящей через точки A, B, C на ребрах куба, исходящих из одной вершины, является треугольник ABC.

Окончание табл. 5

ПОСТРОЕНИЕ СЕЧЕНИЙ МЕТОДОМ СЛЕДОВ

Основные понятия

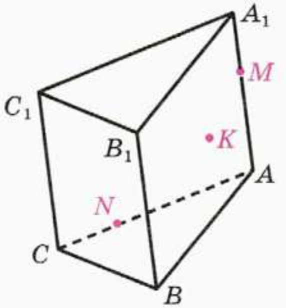


Если плоскость α пересекает плоскость β по прямой b, то прямую b называют следом плоскости α на плоскости β.

Для того чтобы получить след плоскости α на плоскости β (прямую b), достаточно найти точки пересечения двух прямых плоскости α с плоскостью β.

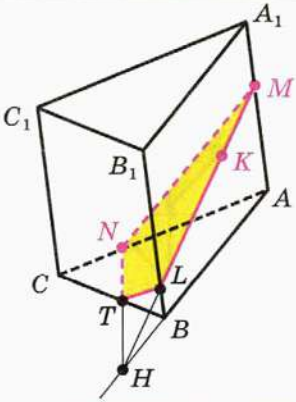
Пример

Постройте сечение призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через точки K, M, N, где $M \in AA_1$, $N \in AC$ и точка K лежит на грани AA_1B_1B.



Решение

1. Рассмотрим вспомогательную плоскость AA_1B_1B. След этой плоскости на плоскости основания — прямая AB.
2. Во вспомогательной плоскости рассмотрим прямую MK, лежащую в плоскости сечения. Точка пересечения ее с плоскостью ABC лежит на прямой AB — это точка H (а точка пересечения с ребром BB_1 — точка L).



3. Тогда точка H лежит и в плоскости сечения, и в плоскости ABC. По условию точка N также лежит и в плоскости сечения, и в плоскости ABC. Следовательно, плоскость сечения пересекает плоскость основания по прямой HN (след секущей плоскости на плоскости ABC), пересекающейся с прямой BC в точке T.
4. Соединяя отрезками точки пересечения секущей плоскости с ребрами призмы, получаем четырехугольник $MNTL$ — искомое сечение. ◁

Объяснение и обоснование

1. Смысл задач на построение в стереометрии. В планиметрии задачи на построение чаще всего решались с использованием циркуля и линейки. С их помощью можно строить соответствующие фигуры плоскости (прямые, окружности, треугольники и др.). Однако не существует чертежных инструментов, позволяющих строить в пространстве неплоские фигуры. Вследствие этого задачи на построение в стереометрии по своему смыслу существенно отличаются от конструктивных задач планиметрии. Стереометрические построения выполняются, в первую очередь, мысленно. Они в большей степени являются задачами на доказательство существования фигуры, удовлетворяющей заданным условиям. Доказательство должно опираться на соответствующие аксиомы и свойства стереометрических фигур.

Задачи на построение в стереометрии можно условно разделить на две группы: задачи на воображаемые построения (типа: провести плоскость через прямую и точку вне ее) и задачи на изображениях пространственных тел (так называемые задачи на проекционном рисунке). Решение стереометрических задач на построение обычно сопровождается рисунками, которые могут быть двух принципиально разных типов. Первый тип — это рисунки к задачам на воображаемые построения. Как правило, рисунок первого типа — это эскизный рисунок, иллюстрирующий основные этапы построения. При его выполнении допускается некоторая произвольность, если она не приводит к противоречиям с условием задачи (рис. 3.3, 3.5–3.12). Второй тип — плоское изображение на проекционном рисунке, выполненное с использованием свойств параллельного проектирования[1]. Построения на проекционном рисунке **однозначно** отвечают пространственным построениям изображаемой фигуры в оригинале.

2. Задачи на построение сечений многогранников. Метод следов. При решении некоторых стереометрических задач, связанных с многогранниками, приходится строить фигуру, которая получается в результате пересечения многогранника плоскостью. Если полученная фигура — многоугольник, то его называют сечением[2] многогранника. Другими словами,
сечением многогранника плоскостью называют многоугольник, являющийся общей частью многогранника и плоскости.

Эту плоскость называют еще *секущей плоскостью.* В таких задачах обычно дан многогранник (изображение многогранника) и нужно построить сечение (изображение сечения) плоскостью, заданной определенным образом, чаще всего тремя точками. Для построения сечения достаточно построить отрезки пересечения секущей плоскости с соответствующими гранями многогранника. Для этого надо построить точки пересечения секущей плоскости с соответствующими ребрами многогранника (или с их продолжениями).

---

[1] Свойства параллельного проектирования рассматриваются в § 9.

[2] Подробнее о построении сечений многогранников см. в § 12.

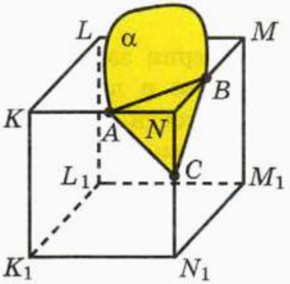


Рис. 4.1

Например, дано изображение куба и три точки — A, B, C, принадлежащие ребрам, исходящим из одной вершины (рис. 4.1). Чтобы построить сечение куба плоскостью α, проходящей через эти точки, достаточно соединить их отрезками.

Действительно, плоскость α имеет с плоскостью KNN_1K_1 передней грани куба две общие точки A и C. Следовательно, AC — прямая пересечения этих плоскостей, а значит, плоскость α пересекает переднюю грань — квадрат KNN_1K_1 по отрезку AC. Аналогично данная плоскость α пересекает верхнюю грань по отрезку AB, а боковую грань — по отрезку BC. Таким образом, треугольник ABC — искомое изображение сечения куба.

В более сложных случаях, для того чтобы построить сечение многогранника, удобно *сначала построить прямую пересечения секущей плоскости с плоскостью какой-либо грани* (так называемый *след секущей плоскости на этой грани*), а затем найти точки пересечения секущей плоскости с соответствующими ребрами многогранника (или с их продолжениями). Иногда приходится рассматривать вспомогательные плоскости, для которых также строится след секущей плоскости (или след вспомогательной плоскости на плоскости какой-либо грани). Этот метод построения сечений часто называют *методом следов*.

Для того чтобы получить след (прямую b) *плоскости* α *на плоскости* β (рис. 4.2), *достаточно найти точки пересечения двух прямых плоскости* α *с плоскостью* β (две точки, например A и C, однозначно определяющие прямую b). Заметим также, что *точка пересечения любой прямой a плоскости α с плоскостью β всегда принадлежит следу плоскости α на плоскости β* (прямой b).

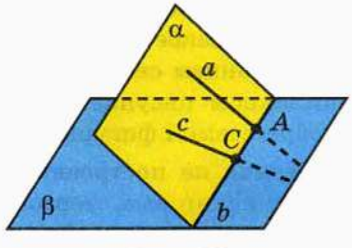


Рис. 4.2

Пример применения метода следов для построения сечения призмы приведен в табл. 5, а метода следов и вспомогательных плоскостей для построения сечения пирамиды — в следующей задаче.

Пример решения задач

Задача*. Постройте сечение пирамиды $ABCD$ плоскостью, проходящей через точки K, L, M (рис. 4.3, a), где $L \in AC$, а точки K и M лежат соответственно на гранях ABD и BCD.

Решение[1]

▶ Сразу построить след плоскости сечения на какой-либо из граней невозможно. Рассмотрим вспомогательную плоскость DKM. Сначала найдем след этой плоскости на плоскости основания ABC. Для этого найдем

[1] Комментарий включен в решение.

точки пересечения с плоскостью основания двух прямых DK и DM из вспомогательной плоскости. Поскольку точка K лежит в плоскости ABD, то прямая DK пересекает прямую AB (а значит, и плоскость ABC) в некоторой точке E (рис. 4.3, *б*). Аналогично точка F пересечения прямой DM с прямой BC является и точкой пересечения прямой DM с плоскостью основания. Таким образом, след вспомогательной плоскости на плоскости основания — это прямая EF.

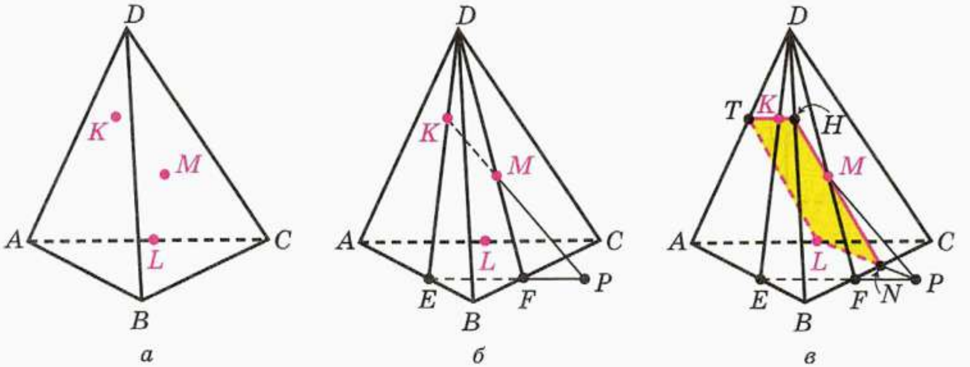


Рис. 4.3

Теперь рассмотрим во вспомогательной плоскости DKM прямую KM. Поскольку точка пересечения прямой KM с плоскостью основания лежит на прямой EF (на следе вспомогательной плоскости), то находим точку P пересечения прямых KM и EF. Она и будет точкой пересечения прямой KM с плоскостью основания ABC.

Точка P лежит в плоскости сечения и в плоскости ABC. Но в этой же плоскости лежит и точка L. Следовательно, плоскость сечения пересекает плоскость основания по прямой LP (рис. 4.3, *в*), которая пересекается с прямой BC в точке N. Теперь можем последовательно найти точки пересечения плоскости сечения с другими ребрами пирамиды. Точки N и M лежат в плоскости сечения и на грани BCD. Тогда прямая NM пересекает ребро BD в точке H — она и будет следующей вершиной многоугольного сечения. Аналогично, в плоскости ABD проводим прямую HK, пересекающую ребро AD в точке T, и соединяем отрезком точки T и L. Четырехугольник $LNHT$ — искомое сечение. ◁

Вопросы для контроля

1. Объясните, что называют сечением многогранника плоскостью. Какой фигурой является сечение многогранника?
2. Объясните, что называют следом плоскости α на плоскости β. Как можно получить этот след, имея несколько прямых в плоскости α?
3. Объясните на примере, как можно построить сечение многогранника методом следов.

Упражнения

4.1°. Пользуясь изображением куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, приведенным на рисунке 4.4, назовите: 1) точку пересечения прямой MC ($M \in AA_1$) с плоскостью B_1BC_1; 2) линию пересечения плоскостей MC_1C и BCB_1.

4.2°. По изображению пирамиды, приведенному на рисунке 4.5, назовите: 1) точку пересечения прямой MD ($M \in BD$) и плоскости ABC; 2) линию пересечения плоскостей MAD и EBC ($E \in AC$).

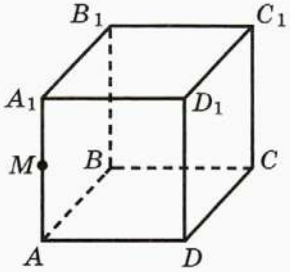


Рис. 4.4

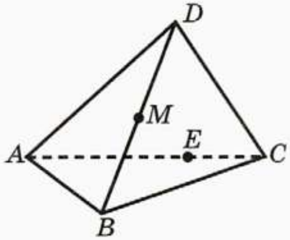


Рис. 4.5

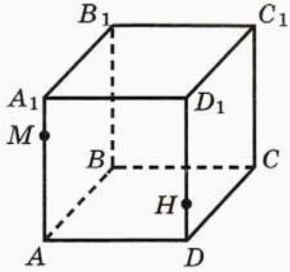


Рис. 4.6

4.3°. Нарисуйте в тетради изображение куба, приведенное на рисунке 4.6, и постройте: 1) точку пересечения прямой MH с плоскостью ABC; 2) линию пересечения плоскостей MHC и ADC.

4.4°. Нарисуйте в тетради изображение пирамиды, приведенное на рисунке 4.7, и постройте: 1) точку пересечения прямой MH с плоскостью ABC; 2) линию пересечения плоскостей MHB и ABC.

4.5°. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через: 1) точки A_1, B и C_1; 2) точки B, D и середину ребра CC_1.

4.6°. Постройте сечение пирамиды $ABCD$ плоскостью, проходящей через: 1) точки C и D и середину ребра AB; 2) точку C и середины ребер AD и BD.

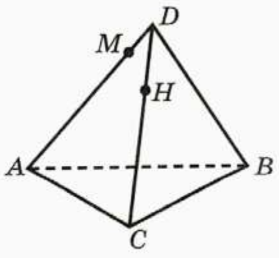


Рис. 4.7

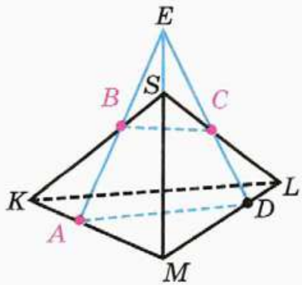


Рис. 4.8

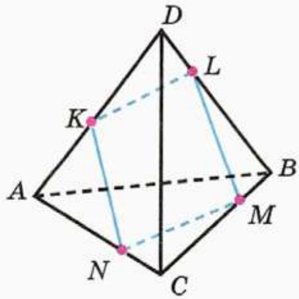


Рис. 4.9

4.7°. Пользуясь рисунком 4.8, опишите построение сечения треугольной пирамиды $SKLM$ плоскостью, проходящей через точки A, B, C ($A \in KM$, $B \in SK$, $C \in SL$), и объясните правильность его выполнения, опираясь на соответствующие аксиомы и теоремы.

4.8. Может ли в сечении тетраэдра $ABCD$ плоскостью быть четырехугольник $KLMN$, изображенный на рисунке 4.9?

4.9. Нарисуйте в тетради изображение прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 4.10) и постройте: 1) точку пересечения прямой D_1M с плоскостью основания $ABCD$ ($M \in CC_1$ и $CM = \frac{1}{4}CC_1$); 2) точку пересечения прямой D_1K с плоскостью основания $ABCD$ ($K \in AA_1$ и $AK = \frac{1}{5}AA_1$); 3) след плоскости D_1KM на плоскости основания $ABCD$; 4) сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки D_1, K и M.

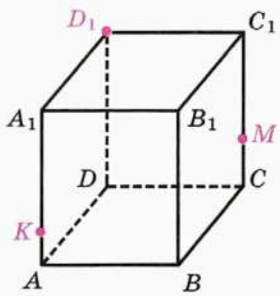


Рис. 4.10

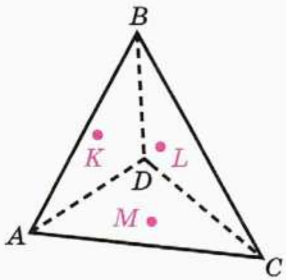


Рис. 4.11

4.10*. Нарисуйте в тетради изображение пирамиды $ABCD$ (см. рис. 4.11) и постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки K, L и M, расположенные на гранях ABD, BCD и ACD соответственно.

4.11. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a точка K — середина ребра DC, O — точка пересечения диагоналей грани $A_1B_1C_1D_1$, точка M лежит на луче BB_1, $B_1M = 2a$. Постройте сечение куба плоскостью OKM.

4.12. Постройте сечение пирамиды $ABCD$ плоскостью, проходящей через точки K, M, N, где K и M — середины ребер DC и BC, а N — точка ребра AB такая, что $AN = \frac{1}{3}AB$.

4.13. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через середины M, N, K его ребер AD, DC, BB_1.

4.14. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через середины K, L, M его ребер AA_1, CC_1, DC.

4.15. На рисунках 4.12–4.23 показаны точки M, P и R, лежащие или на ребрах, или на гранях куба. Постройте сечение куба плоскостью MPR для каждого расположения точек.

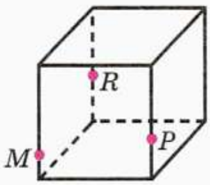


Рис. 4.12

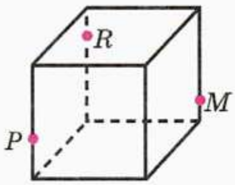


Рис. 4.13

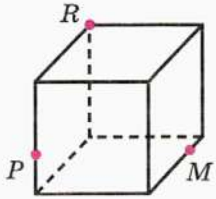


Рис. 4.14

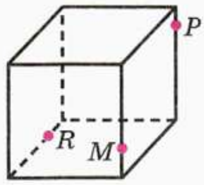


Рис. 4.15

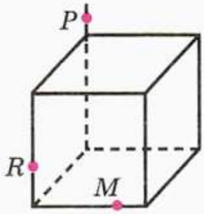


Рис. 4.16

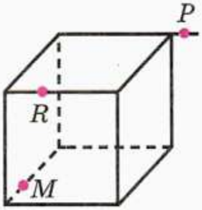


Рис. 4.17

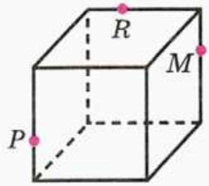


Рис. 4.18

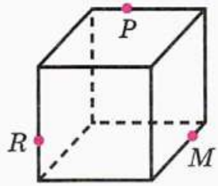


Рис. 4.19

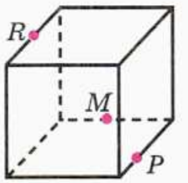
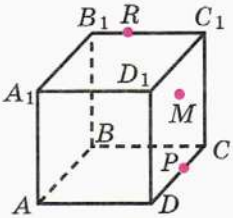
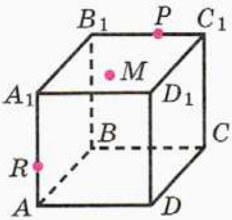


Рис. 4.20



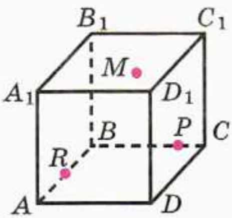
$M \in$ пл. BB_1C_1

Рис. 4.21



$M \in$ пл. $A_1B_1C_1$

Рис. 4.22



$M \in$ пл. $A_1B_1C_1$

Рис. 4.23

§ 5 ПОНЯТИЕ ОБ АКСИОМАТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ В ГЕОМЕТРИИ

Аксиоматическое построение геометрии. Курс планиметрии, который вы изучали в 7–9-х классах, и предложенный курс стереометрии в значительной мере опираются на определенные наглядные представления о геометрических фигурах. Вместе с тем геометрия как научная теория о свойствах фигур, расположенных в пространстве, может быть построена логическим (дедуктивным) методом на основе системы аксиом.

Поясним суть аксиоматического метода построения геометрии. Вводятся основные (неопределяемые) понятия — «фигуры» и формулируются основные положения (аксиомы), в которых выражаются основные соотношения между основными понятиями[1]. Далее, используя основные понятия и основные соотношения между ними, даются определения новых понятий — «фигур», формулируются и доказываются новые утверждения — теоремы о свойствах введенных понятий. При этом доказательства теорем проводятся строго логическим путем на основе аксиом и ранее доказанных теорем. Таким образом, получается геометрическая система утверждений, связанных рядом логических зависимостей.

К системе аксиом предъявляются следующие требования. Она должна быть:

1) ***непротиворечивой,*** то есть такой, чтобы из этой системы аксиом невозможно было получить логическим путем два утверждения, противоречащих друг другу, — некоторое утверждение и его отрицание;

2) ***независимой,*** то есть такой, чтобы ни одна из аксиом данной системы не была логическим следствием других ее аксиом;

3) ***полной,*** то есть такой, чтобы с помощью аксиом только этой системы, не вводя новые аксиомы, можно было доказать (или опровергнуть) строго логическим путем любое утверждение о свойствах фигур данной геометрии.

В школьных курсах геометрии чаще всего реализуется только первое требование — непротиворечивость системы аксиом. Вследствие стремления достичь большей наглядности и простоты доказательств применяемая система аксиом не является независимой и, как правило, полной[2]. Поэтому для более строгого изложения материала необходимо дополнить предложенную систему аксиом и обосновать некоторые свойства, необходимые для рассмотрения дальнейшего материала курса стереометрии.

Дадим уточненные формулировки[3] некоторых аксиом планиметрии, которые приведены в § 1, для использования их в стереометрии.

- Прямая, *принадлежащая плоскости*, разбивает эту плоскость на две полуплоскости.
- От полупрямой *на содержащей ее плоскости* в заданную полуплоскость можно отложить угол с заданной градусной мерой, меньшей 180°, и притом только один.
- *На плоскости* через данную точку, не лежащую на данной прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной данной.

---

[1] Кроме чисто геометрических в планиметрии и стереометрии используются некоторые основные (неопределяемые) понятия, общие и для других разделов математики, например понятие «множество».

[2] Полная система аксиом евклидовой геометрии приведена на с. 60–62.

[3] В приводимых формулировках уточнения выделены курсивом.

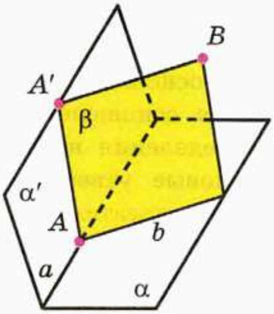


Рис. 5.1

Как отмечалось в § 1, аксиома планиметрии I_1: *какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей*, утверждает существование точек на плоскости вне данной прямой, лежащей на этой плоскости. В стереометрии же утверждается вообще существование точек, не лежащих на данной прямой. Так как отсюда не следует существование точки вне прямой, лежащей на другой плоскости, это требует доказательства.

Пусть даны плоскость α и прямая a, лежащая в этой плоскости (рис. 5.1). Докажем существование точек в плоскости α, не лежащих на прямой a.

Обозначим точку A на прямой a и точку A' вне плоскости α. Через прямую a и точку A' проведем плоскость α'. Возьмем точку B вне плоскости α' и проведем через прямую AA' и точку B плоскость β. Плоскости α и β пересекаются по прямой b, проходящей через точку A и отличной от прямой a. Точки этой прямой, отличные от точки A, лежат в плоскости α вне прямой a, что и требовалось доказать.

Для рассмотрения некоторых стереометрических понятий следует ввести также понятие «разбиение пространства на части каждой из плоскостей».

Напоминаем, что любая прямая на плоскости разбивает ее на две полуплоскости (рис. 5.2), обладающие следующими свойствами:

1) полуплоскость, ограниченная прямой a, содержит эту прямую, но не совпадает с ней;
2) если концы A и B отрезка AB лежат в одной полуплоскости (но не принадлежат прямой a), то отрезок AB не пересекает прямую a (рис. 5.2, *а*);
3) если концы A и B отрезка AB принадлежат разным полуплоскостям (но не принадлежат прямой a), то отрезок AB пересекает прямую a (рис. 5.2, *б*).

Аналогично дается определение и части пространства, ограниченного данной плоскостью, — *полупространства*.

Плоскость, ограничивающую полупространство, называют его *границей*.

Рис. 5.2

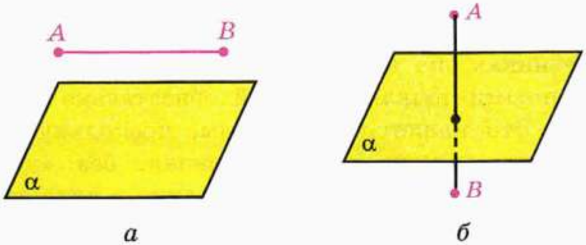


Рис. 5.3

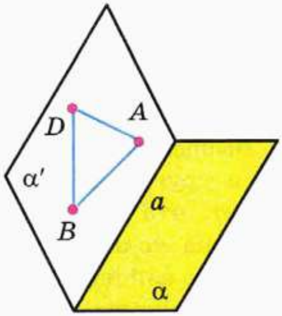


Рис. 5.4

***Теорема* 5.1. Плоскость разбивает пространство на два полупространства. Если точки *A* и *B* принадлежат одному полупространству, то отрезок *AB* не пересекает плоскость** (рис. 5.3, *а*). **Если же точки *A* и *B* принадлежат разным полупространствам, то отрезок *AB* пересекает плоскость** (рис. 5.3, *б*).

Доказательство. Пусть α — данная плоскость. Обозначим точку D, не лежащую на плоскости α. Такая точка существует по аксиоме 1 стереометрии. Разобьем все точки пространства, не лежащие на плоскости α, на два полупространства следующим образом. Точку A отнесем к одному полупространству, если отрезок AD не пересекает плоскость α, и к другому полупространству, если отрезок AD пересекает плоскость α. Покажем, что такое разбиение пространства обладает свойствами, указанными в теореме.

Пусть точки A и B принадлежат одному полупространству. Проведем через точки A, B и D плоскость α'. Если плоскость α' не пересекает плоскость α, то отрезок AB также не пересекает эту плоскость. Допустим, что плоскость α' пересекает плоскость α (рис. 5.4). Так как плоскости различны, то они пересекаются по некоторой прямой a. Прямая a разбивает плоскость α' на две полуплоскости. Точки A и B принадлежат одной полуплоскости — той, в которой лежит точка D, поэтому отрезок AB не пересекает прямую a, а следовательно, и плоскость α.

Если точки A и B принадлежат другому полупространству, то плоскость α' пересекает плоскость α, так как отрезок AD пересекает плоскость α. Точки A и B принадлежат одной полуплоскости разбиения плоскости α' прямой a. Отсюда следует, что отрезок AB не пересекает прямую a, а значит, и плоскость α.

Если, наконец, точка A принадлежит одному полупространству, а точка B — другому, то плоскость α' пересекает плоскость α, а точки A и B лежат в различных полуплоскостях плоскости α' относительно прямой a. Поэтому отрезок AB пересекает прямую a, а значит, и плоскость α.

Необходимо отметить, что в стереометрии существует несколько равносильных систем аксиом. Мы выбрали одну из них. При выборе другой системы некоторые из аксиом, рассмотренных в параграфах 1 и 3, превратились бы в теоремы, а некоторые теоремы стали бы аксиомами.

Выбранная нами система аксиом, так же как и системы, приведенные в других школьных учебниках, не полная. В частности, из нее не следует, что между двумя данными точками прямой обязательно лежит еще одна точка этой прямой. Это кажется очевидным, поскольку прямая, по нашим представлениям, сплошная, непрерывная, без «дыр». Но такое представление должно получить точное определение в виде свойства прямой. Аксиомы, задающие это свойство, — это аксиомы непрерывности[1]. Мы не приводим их, поскольку это усложнило бы изложение. Таким образом, приходится частично поступиться строгостью ради наглядности и простоты.

На исключительное значение свойства разбиения плоскостью пространства на два полупространства едва ли не первым обратил внимание всемирно известный русский математик Михаил Васильевич Остроградский. Он написал учебник по элементарной геометрии, который оказал огромное влияние на изложение геометрии в течение всего XIX века.

Родился М. В. Остроградский в деревне Пашенная на Полтавщине в семье мелкого помещика. Остроградские принадлежали к казацкой старшине, а их род, по преданию, происходил от знаменитых волынских государственных деятелей и просветителей князей Острожских; отсюда и фамилия — Остроградские. Михаил Остроградский учился сначала в Полтавской гимназии, а затем — в недавно открытом тогда Харьковском университете. По окончании университета Остроградский в 1822 г. едет в Париж, где слушает лекции таких корифеев математической науки, как Лаплас, Пуассон, Ампер, Фурье, Штурм, Коши и др. В 1826 г. Огюстен Коши в одном из своих трудов очень одобрительно отозвался об успехах молодого Остроградского, и эта оценка значила намного больше любого диплома. Вскоре Остроградский переехал в Петербург, к этому моменту за ним уже закрепилась слава первого математика России. Дальнейшими своими работами он неоднократно подтверждал этот почетный статус.

Михаил Васильевич Остроградский (1801–1862)

М. В. Остроградский создал большую научную школу, традиции которой до сих пор отражаются в проблематике математических исследований отечественных ученых. Он был избран академиком многих академий, почетным членом университетов и научных обществ.

[1] Формулировку аксиом непрерывности см. на с. 62.

Вопросы для контроля

1. Объясните суть аксиоматического метода построения геометрии.
2. Какие требования предъявляются к системе аксиом? Объясните суть каждого из требований.
3. Объясните, что называют полупространством, определяемым данной плоскостью α.
4. Сформулируйте аксиому о разбиении пространства плоскостью. Объясните ее смысл.

5*. Докажите теорему о разбиении пространства плоскостью.

Упражнения

5.1. На какое наибольшее число частей могут разбивать пространство: 1) две плоскости; 2) три плоскости; 3) четыре плоскости?

5.2. Объясните, почему все пространство не может быть полупространством, которое определяется некоторой плоскостью α.

5.3. Может ли плоскость, пересекающая плоскость α, быть полностью расположена в одном из полупространств, которые определяет плоскость α?

5.4. Что можно сказать о взаимном расположении двух полупространств и их границ α и β, если: 1) пересечением[1] этих полупространств является плоскость α; 2) пересечение этих полупространств совпадает с их объединением?

5.5. В результате пересечения скольких полупространств можно получить: 1) куб; 2) треугольную пирамиду?

5.6. Концы ломаной, состоящей из двух звеньев, лежат по разные стороны от плоскости α. Докажите, что ломаная пересекает плоскость α.

5.7. Объясните, из чего следует, что в каждом полупространстве лежит бесконечное множество: 1) точек; 2) прямых.

5.8. Дано $n > 4$ точек, каждые четыре из которых лежат в одной плоскости. Докажите, что все эти n точек лежат в одной плоскости.

5.9. Дано $n > 3$ прямых, каждые две из которых пересекаются. Докажите, что все n прямых лежат в одной плоскости или все проходят через одну точку.

5.10. Сколько разных плоскостей могут быть определены пятью точками? Дайте все возможные ответы. Приведите соответствующие рисунки.

5.11. Плоскости α и β пересекаются по прямой a. Через точку A прямой a проведена плоскость, не содержащая прямую a. Докажите, что плоскость γ пересекает плоскости α и β по двум разным прямым.

---

[1] Под пересечением полупространств понимается фигура, состоящая из всех общих точек этих полупространств.

5.12. Даны плоскость α и три прямые AB, BC и AC, пересекающие ее соответственно в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 принадлежат одной прямой.

5.13*. Ребро правильного тетраэдра $MABC$ равно 18. Точки P и K — середины ребер AM и BM, а точка T делит ребро MC в отношении $MT : TC = 4 : 1$. Найдите расстояние от вершины C до прямой пересечения плоскостей TPK и ABC.

5.14*. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D$ длина ребра равна 4. Точка M принадлежит ребру AA_1, $AM = 3$, точка P принадлежит ребру CC_1, $PC_1 = 1$, точка K делит ребро DD_1 в отношении $1 : 3$, начиная от точки D. Найдите расстояние от вершины B до прямой пересечения плоскостей KMP и ADC.

Сведения из истории

Идея дедуктивного метода построения геометрии была выдвинута еще древнегреческим философом Платоном (422–347 гг. до н. э.) — учеником Сократа (469–399 гг. до н. э.). Однако действительным родоначальником научной теории логического вывода считают ученика Платона, древнегреческого мыслителя Аристотеля (384–322 гг. до н. э.).

Идеи Аристотеля относительно геометрии развил древнегреческий математик Евклид (III в. до н. э.) в трактате по геометрии «Начала». В течение 2000 лет этот труд Евклида оставался единственным руководством, по которому учили геометрии; из него вышли и все идеи последующего, более совершенного обоснования геометрии. Система сформулированных Евклидом аксиом (постулатов) нуждалась в усовершенствовании, поскольку была неполной, а потому доказательства нередко «грешили» обращением к наглядности.

Кропотливый труд многих поколений ученых позволил создать научный аксиоматический метод построения геометрии. Большая роль в этом принадлежит известным немецким математикам Феликсу Клейну (1849–1925) и Давиду Гильберту (1862–1943). В 1899 г. появился трактат «Основания геометрии» Гильберта, в котором аксиоматика была построена таким образом, что логическая структура геометрии стала абсолютно прозрачной.

Аксиоматика евклидовой геометрии. Современная система аксиом (аксиоматика) евклидовой геометрии состоит из пяти групп и опирается на шесть основных (неопределяемых) понятий. Это объекты трех видов: точки, прямые и плоскости — и три вида отношений между ними, которые выражаются словами «принадлежат», «лежит между», «движение».

I. *Аксиомы принадлежности*

I_1. Через каждые две точки можно провести прямую, и притом только одну.

I_2. На каждой прямой лежат по крайней мере две точки. Существуют хотя бы три точки, не лежащие на одной прямой.

I_3. Через каждые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.

I_4. На каждой плоскости лежат по крайней мере три точки и существуют хотя бы четыре точки, не лежащие в одной плоскости.

I_5. Если две точки данной прямой лежат на данной плоскости, то и сама прямая лежит на этой плоскости.

I_6. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют еще одну общую точку (а следовательно, и общую прямую).

II. *Аксиомы порядка*

II_1. Если точка B лежит между точками A и C, то все три точки лежат на одной прямой.

II_2. Для любых точек A и B существует такая точка C, что B лежит между A и C.

II_3. Из трех точек прямой только одна лежит между двумя другими.

II_4. (*Аксиома Паша.*) Если прямая l пересекает одну сторону треугольника (рис. 5.5), то она пересекает и другую его сторону или проходит через его вершину (отрезок AB определяется как множество точек, лежащих между A и B; соответственно определяются и стороны треугольника).

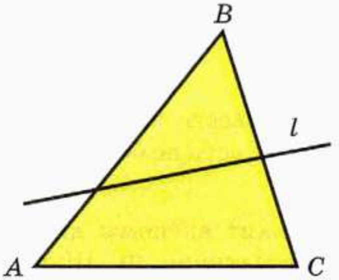


Рис. 5.5

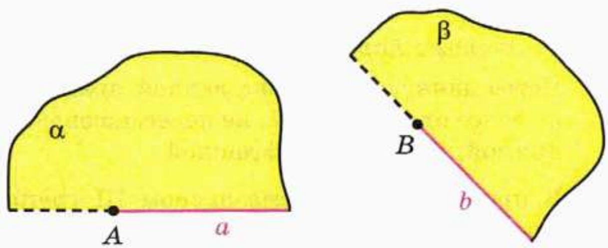


Рис. 5.6

III. *Аксиомы движения*

III_1. Движение ставит в соответствие точкам точки, прямым — прямые, плоскостям — плоскости, сохраняя принадлежность точек прямым и плоскостям.

III_2. Два последовательных движения дают снова движение, и для всякого движения есть обратное движение.

III_3. Если даны точки A, B и полуплоскости α и β, ограниченные продленными полупрямыми a, b, исходящими из точек A, B (рис. 5.6), то существует движение, и притом единственное, переводящее точку A, полупрямую a, полуплоскость α соответственно в точку B, прямую b, полуплоскость β (полупрямая и полуплоскость легко определяются на основании понятий принадлежности и порядка).

IV. *Аксиомы непрерывности*

IV$_1$. (*Аксиома Архимеда.*) Всякий отрезок AB можно покрыть меньшим отрезком AA_1, откладывая его на AB достаточное число раз: $AA_1 = A_1A_2 = ... = A_nA_{n+1}$ (рис. 5.7); откладывание отрезка осуществляется движением.

Рис. 5.7

IV$_2$. (*Аксиома Кантора.*) Для последовательности вложенных отрезков A_nB_n (рис. 5.8), длины которых стремятся к нулю, существует, и притом единственная, точка C, принадлежащая всем отрезкам A_nB_n.

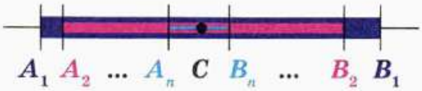


Рис. 5.8

V. *Аксиома параллельных*

V$_1$. Через данную точку вне данной прямой можно провести на плоскости не более одной прямой, не пересекающей данную, то есть не более одной прямой, параллельной данной.

В приведенной системе аксиом III группа содержит аксиомы движения, предложенные в начале XX в. немецким математиком Ф. Шуром. У Д. Гильберта вместо движения в число основных понятий входило понятие «конгруэнтность». Соответственно в системе аксиом Гильберта III группа содержит пять аксиом конгруэнтности, описывающих отношение «конгруэнтный».

С помощью основных определяются остальные понятия евклидовой геометрии. Все утверждения о свойствах геометрических фигур, не содержащиеся в аксиомах, должны быть доказаны чисто логическим выведением из этих аксиом. Приведенная система аксиом евклидовой геометрии обладает свойствами полноты и непротиворечивости.

Если в аксиоматике евклидовой геометрии заменить аксиому параллельных (*через точку вне данной прямой можно провести на плоскости не более одной прямой, не пересекающей данную,* то есть *параллельной данной*) на утверждение «*через точку, не лежащую на данной прямой, проходят хотя бы две прямые, лежащие с данной в одной плоскости и не пересекающие ее*», то получится другая система аксиом. Это система аксиом геометрии Лобачевского, также непротиворечивая. В ней аксиома параллельных не зависит от остальных аксиом евклидовой геометрии.

Казалось бы, новая аксиома противоречит обычным представлениям. Однако при надлежащем понимании как аксиома, так и вся геометрия Лобачевского имеют реальный смысл. Сообщение об этой теории, созданной русским ученым Н. И. Лобачевским, впервые появилось в 1826 г. Несколько позже независимо от Н.И. Лобачевского аналогичная теория была разработана венгерским ученым Я. Бойяи, поэтому ее иногда называют геометрией Лобачевского—Бойяи. Эту геометрию называют также неевклидовой, хотя обычно термин «неевклидова геометрия» имеет более широкое понимание, включая и другие теории, возникшие вслед за геометрией Лобачевского и также основанные на изменении аксиом евклидовой геометрии.

Геометрия Лобачевского представляет собой богатую по содержанию теорию, применяющуюся как в математике, так и в физике. Историческое значение ее заключается в том, что Лобачевский показал возможность существования геометрии, отличной от евклидовой. Это ознаменовало новую эпоху в развитии геометрии и математики в целом.

Как уже отмечалось, в связи с аксиоматическим построением геометрии естественно возникают три вопроса:

1. Не противоречива ли принятая нами система аксиом, то есть не могут ли быть выведены из нее путем логических рассуждений два следствия, противоречащие друг другу?
2. Является ли система аксиом полной, то есть нельзя ли ее дополнить новыми аксиомами, которые не противоречили бы уже принятым и не вытекали из них?
3. Независимы ли принятые аксиомы, то есть не вытекают ли некоторые аксиомы из других?

Решение этих вопросов тесно связано с **построением реализаций** системы аксиом. Реализация заключается в указании объектов трех видов произвольной природы, которые условно называют точками, прямыми и плоскостями. Отношения между ними описывают такими словами, как «принадлежат», «лежит между», «движение», для которых в силу их конкретного содержания выполняются аксиомы.

Дело в том, что основные понятия геометрии не имеют определений, и все, что нам о них известно, выражается аксиомами. Поэтому наши выводы относятся к объектам произвольной природы, лишь бы для них и отношений между ними выполнялись аксиомы.

Доказательство непротиворечивости системы аксиом сводится к доказательству существования хотя бы одной ее реализации. Доказательство независимости данной аксиомы сводится к указанию такой реализации, в которой выполняются все аксиомы, за исключением данной. Наконец, доказательство полноты системы аксиом сводится к доказательству того, что для всех реализаций можно установить такое взаимно однозначное соответствие между точками, прямыми и плоскостями, при котором соответствующие элементы находятся в одинаковых отношениях.

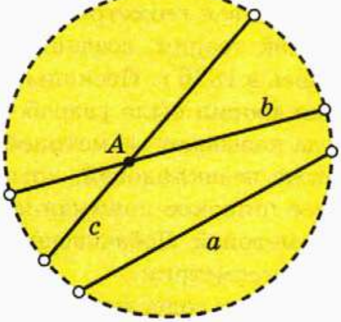


Рис. 5.9

Например, для геометрии Лобачевского на плоскости может быть предложена следующая реализация внутри круга на обычной (евклидовой) плоскости.

Внутреннюю часть какого-либо круга (за исключением ограничивающей его окружности) назовем плоскостью. Точкой плоскости будет точка внутри круга (рис. 5.9).

Прямой назовем любую хорду с изъятыми концами (поскольку окружность круга изъята из плоскости); движением — любое преобразование круга в себя, переводящее хорды в хорды.

Равными назовем фигуры внутри круга, переводящиеся одна в другую такими преобразованиями.

Тогда любой геометрический факт, описанный на таком языке, представляет теорему или аксиому геометрии Лобачевского.

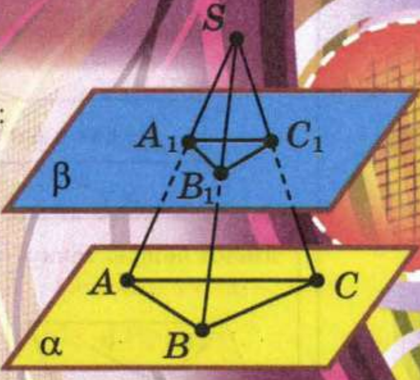
Другими словами, всякое утверждение геометрии Лобачевского на плоскости есть не что иное, как утверждение евклидовой геометрии, относящееся к фигурам внутри круга, только переформулированное в указанных терминах. Евклидова аксиома о параллельных здесь явно не выполняется, поскольку через точку A, не лежащую на данной хорде a, проходит сколько угодно не пересекающих ее хорд (прямых).

Аналогично реализацией геометрии Лобачевского в пространстве может быть геометрия внутри шара, выраженная в соответствующих терминах («прямые» — хорды, «плоскости» — плоские сечения внутренней части шара, «равные» фигуры — это фигуры, которые переводятся одна в другую преобразованиями, переводящими шар в себя и хорды в хорды).

Таким образом, геометрия Лобачевского имеет абсолютно реальный смысл и так же непротиворечива, как и геометрия Евклида.

Раздел 3

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ



ОСНОВНОЙ МАТЕРИАЛ

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ

В *основной части* раздела вы:

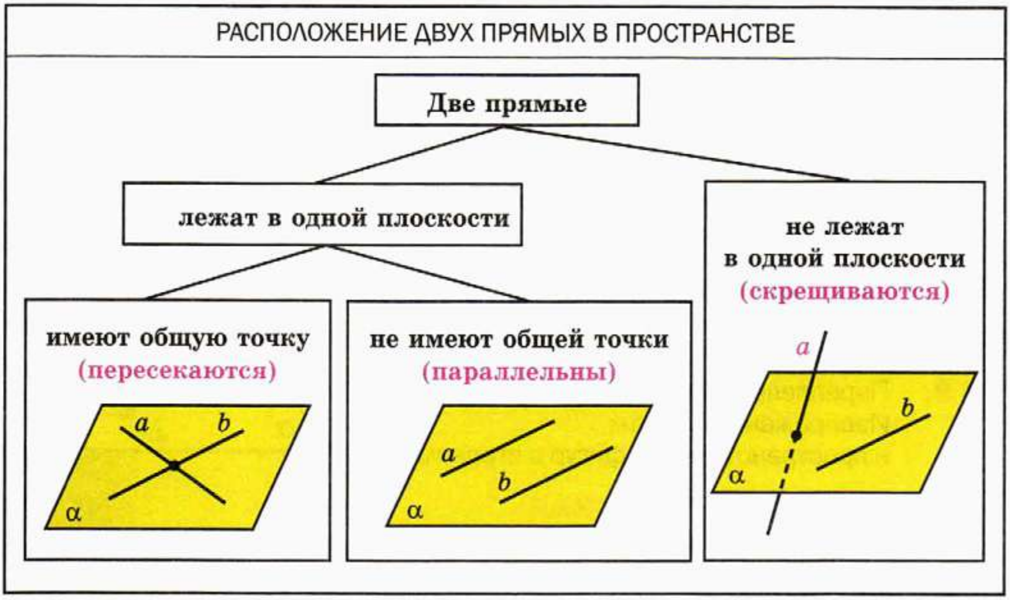
ознакомитесь с параллельностью прямых и плоскостей в пространстве, понятием и свойствами параллельного проектирования;

научитесь применять свойства параллельности прямых и плоскостей для решения задач и строить изображения пространственных фигур на плоскости с помощью параллельного проектирования.

В *дополнительной части* раздела вы сможете ознакомиться с центральным проектированием и его свойствами, научитесь решать более сложные задачи на построение сечений призмы и пирамиды.

§ 6 РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПРЯМЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ: ПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫЕ, ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ, СКРЕЩИВАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫЕ

Таблица 6



Объяснение и обоснование

1. Скрещивающиеся прямые. Если две прямые лежат в одной плоскости, то, как известно из курса планиметрии, они пересекаются или параллельны (см. соответствующие рисунки в табл. 6). В стереометрии возможен еще один случай — прямые не лежат в одной плоскости и не пересекаются (рис. 6.1).

Определение. **Две прямые в пространстве называют *скрещивающимися*, если они не лежат в одной плоскости.**

Будем называть также два отрезка скрещивающимися, если они лежат на скрещивающихся прямых. Например, в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 6.2) ребра DD_1 и B_1C_1 скрещивающиеся.

Следующую теорему называют признаком скрещивающихся прямых, поскольку она определяет достаточные условия для того, чтобы прямые были скрещивающимися.

***Теорема* 6.1. Если одна прямая лежит в данной плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся.**

Доказательство. Пусть прямая b лежит в плоскости α, а прямая a пересекает плоскость α в точке A, не принадлежащей прямой b (рис. 6.1). Если предположить, что прямые a и b лежат в одной плоскости, то в этой плоскости лежит и точка A (принадлежащая прямой a). Но через прямую b и точку A проходит единственная плоскость, поэтому рассмотренной плоскостью будет плоскость α. Тогда прямая a должна лежать в плоскости α, что противоречит условию. Следовательно, прямые a и b не лежат в одной плоскости, то есть они скрещивающиеся.

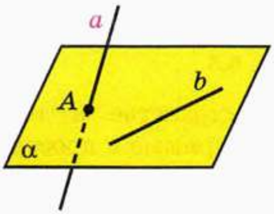


Рис. 6.1

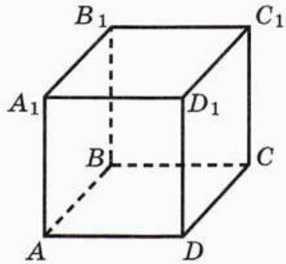


Рис. 6.2

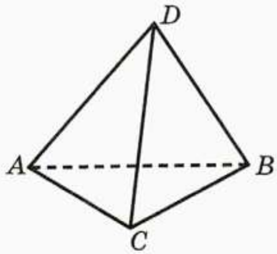


Рис. 6.3

Например, в пирамиде $ABCD$ (рис. 6.3) ребра AD и BC скрещивающиеся, поскольку прямая BC лежит в плоскости ABC, а прямая AD пересекает эту плоскость в точке A, не принадлежащей прямой BC.

2. Параллельные прямые в пространстве. Напомним, что две прямые на плоскости называют параллельными, если они не пересекаются. Для параллельности прямых в пространстве нужно, чтобы они не только не пересекались, но еще и лежали в одной плоскости.

Определение. **Две прямые в пространстве называют *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.**

Как и на плоскости, будем называть два отрезка параллельными, если они лежат на параллельных прямых. Например, в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребра AD и A_1D_1 параллельны (рис. 6.2).

Как известно, на плоскости через точку вне данной прямой можно провести единственную прямую, параллельную этой прямой (аксиома параллельных). Аналогичное утверждение имеет место и в пространстве, только здесь его уже требуется доказывать.

***Теорема* 6.2. Через точку в пространстве, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную данной, и к тому же только одну.**

Доказательство. Пусть точка B не принадлежит прямой a. Проведем через эту прямую и точку B плоскость α (рис. 6.4). Эта плоскость — единственная. В плоскости α через точку B проходит единственная прямая, назовем ее b, параллельная прямой a. Она и будет единственной искомой прямой, параллельной данной.

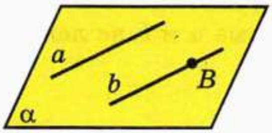


Рис. 6.4

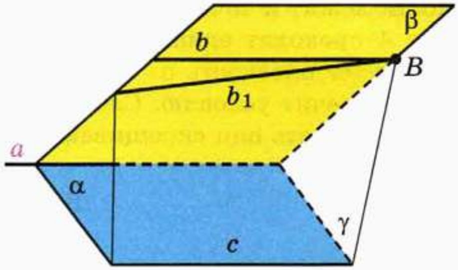


Рис. 6.5

Из определения параллельности прямых в пространстве и теоремы 6.2 следует, что через две различные параллельные прямые в пространстве можно провести плоскость, и к тому же только одну. Следовательно, к известным из § 1 способам задания плоскости можно отнести еще один: плоскость можно задать двумя параллельными прямыми.

Как и на плоскости, имеет место так называемое свойство транзитивности[1] параллельности прямых, выражающее также признак параллельности прямых.

***Теорема* 6.3. Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны.**

Доказательство. Пусть прямые b и c параллельны прямой a. Докажем, что прямые b и c параллельны.

Случай, когда прямые a, b, c лежат в одной плоскости, был рассмотрен в планиметрии. Поэтому предположим, что наши прямые не лежат в одной плоскости. Пусть параллельные прямые a и c лежат в плоскости α, а параллельные прямые a и b — в плоскости β. Плоскости α и β различны (рис. 6.5).

Возьмем на прямой b произвольную точку B и проведем плоскость γ через прямую c и точку B. Она пересечет плоскость β по некоторой прямой b_1. Прямая b_1 не пересекает плоскость α (а значит, и прямую c). Действительно, если предположить, что прямая b_1 пересекает плоскость α,

[1] Транзитивность (от лат. *transitivus* — переходный) — одно из свойств логического отношения величин. Для параллельности прямых транзитивность означает: «Если прямая a параллельна прямой b, а прямая b параллельна прямой c, то прямая a параллельна прямой c».

то точка пересечения должна принадлежать прямой a, поскольку прямая b_1 лежит в плоскости β. В то же время она должна лежать на прямой c, так как прямая b_1 лежит в плоскости γ. Но прямые a и c параллельны и не пересекаются. Тогда прямая b_1 лежит в плоскости β и не пересекает прямую a, поэтому она параллельна прямой a, а значит, совпадает с прямой b по аксиоме параллельных. Таким образом, прямая b, совпадающая с прямой b_1, лежит в одной плоскости с прямой c (в плоскости γ) и не пересекает ее. Следовательно, прямые b и c параллельны. ○

Например, в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 6.6) ребра AB и D_1C_1 параллельны, поскольку каждое из них параллельно ребру DC.

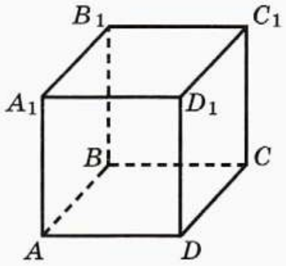


Рис. 6.6

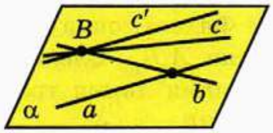


Рис. 6.7

Примеры решения задач

Задача 1. Прямые a и b пересекаются. Докажите, что все прямые, параллельные прямой a и пересекающие прямую b, лежат в одной плоскости.

Решение	*Комментарий*
▶ Поскольку прямые a и b пересекаются, через них можно провести единственную плоскость α. Пусть некоторая прямая c параллельна прямой a и пересекает прямую b в точке B (рис. 6.7). Проведем в плоскости α через точку B прямую $c' \parallel a$. Но по теореме 6.2 через точку B проходит единственная прямая, параллельная прямой a. Следовательно, прямая c совпадает с прямой c', то есть прямая c лежит в плоскости α. ◁	Сначала, пользуясь свойством, что через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость, и к тому же только одну, построим плоскость, проходящую через данные прямые. Затем докажем, что любая прямая, пересекающая одну прямую и параллельная другой, лежит в этой плоскости.

Замечание. Полученный результат можно кратко сформулировать следующим образом: **все параллельные прямые, пересекающие данную прямую, лежат в одной плоскости.**

Задача 2. Через концы отрезка AB и его середину M проведены параллельные прямые, пересекающие некоторую плоскость в точках A_1, B_1 и M_1 соответственно. Найдите длину отрезка MM_1, если отрезок AB не пересекает плоскость, $AA_1 = 8$ см, $BB_1 = 6$ см.

Решение

► Поскольку параллельные прямые AA_1, BB_1, MM_1, пересекающие прямую AB, лежат в одной плоскости, то точки A_1, M_1 и B_1 лежат на одной прямой (рис. 6.8, *б*). Мы получили плоский четырехугольник ABB_1A_1, являющийся трапецией ($AA_1 \parallel BB_1$). По условию точка M — середина отрезка AB и $MM_1 \parallel AA_1$. Тогда согласно теореме Фалеса точка M_1 — середина отрезка A_1B_1. Следовательно, MM_1 — средняя линия трапеции и

$$MM_1 = \frac{AA_1 + BB_1}{2} = \frac{8+6}{2} = 7 \text{ (см)}.$$

Ответ: 7 см. ◁

Комментарий

Для построения рисунка нужно использовать результат задачи 1. Поскольку прямая AA_1 пересекает прямую AB, а прямые MM_1 и BB_1 параллельны прямой AA_1, то все они лежат в одной плоскости β (рис. 6.8, *а*). Тогда плоскость β пересекает данную плоскость α по прямой A_1B_1, на которой лежат все общие точки этих плоскостей, в частности точка M_1. Следовательно, на рисунке точки A_1, M_1 и B_1 должны лежать на одной прямой (рис. 6.8, *б*). Фактически после построения правильного рисунка получаем планиметрическую задачу в плоскости β.

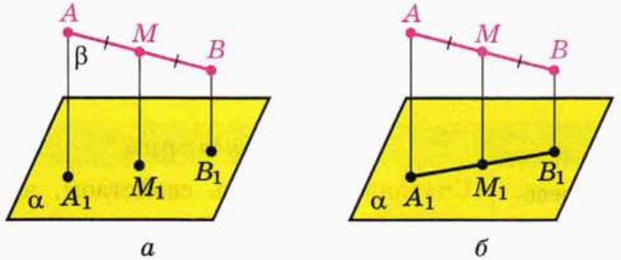


Рис. 6.8

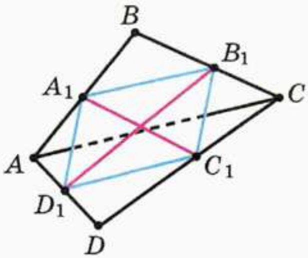


Рис. 6.9

Задача 3*. Докажите, что отрезки, соединяющие середины скрещивающихся сторон пространственного четырехугольника, пересекаются и точкой пересечения делятся пополам (вершины пространственного четырехугольника не лежат в одной плоскости).

Решение

► Пусть $ABCD$ — данный пространственный четырехугольник, а точки A_1, B_1, C_1, D_1 — середины его сторон (рис. 6.9). Тогда A_1B_1 — средняя линия треугольника ABC, следова-

Комментарий

Для того чтобы составить план решения, достаточно вспомнить, что когда два отрезка пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то их концы являются вершинами тельно, $A_1B_1 \parallel AC$ и $A_1B_1 = \frac{1}{2}AC$. Аналогично C_1D_1 — средняя линия треугольника ACD, следовательно, $C_1D_1 \parallel AC$ и $C_1D_1 = \frac{1}{2}AC$. Тогда по теореме 6.3 $A_1B_1 \parallel C_1D_1$ (и поэтому A_1B_1 и C_1D_1 лежат в одной плоскости), кроме того, $A_1B_1 = C_1D_1$.

Таким образом, четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ лежит в одной плоскости и две его противолежащие стороны параллельны и равны. Следовательно, это параллелограмм, а значит, его диагонали A_1C_1 и B_1D_1 пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. ◁

параллелограмма (для которого эти отрезки — диагонали).

Поэтому для доказательства утверждения задачи достаточно доказать, что концы данного отрезка — вершины параллелограмма (диагонали которого всегда пересекаются и точкой пересечения делятся пополам).

Вопросы для контроля

1. Какие прямые в пространстве называют параллельными?
2. Какие прямые называют скрещивающимися?
3. Объясните, какие две прямые в пространстве будут непараллельными.
4. Сформулируйте признак скрещивающихся прямых.
5*. Докажите признак скрещивающихся прямых.
6. Докажите, что через точку вне данной прямой в пространстве можно провести прямую, параллельную этой прямой, и притом только одну.
7*. Докажите признак параллельности прямых.

Упражнения

6.1°. Запишите пары скрещивающихся ребер: 1) в прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$; 2) в призме $ABCA_1B_1C_1$; 3) в пирамиде $SABCD$.

6.2°. Даны две пересекающиеся плоскости. В каждой из них лежит прямая, пересекающая линию пересечения плоскостей. Как могут быть расположены эти прямые относительно друг друга?

6.3°. Верно ли, что две прямые, лежащие в разных плоскостях, всегда скрещивающиеся?

6.4. Прямая a — скрещивающаяся с прямой b, а прямая b — с прямой c. Следует ли отсюда, что прямые a и c всегда скрещивающиеся?

6.5. Точка A не принадлежит прямой a. Проведите через точку A прямую b так, чтобы прямые a и b были скрещивающимися.

6.6. Докажите, что если прямые AC и BD — скрещивающиеся, то прямые AB и CD также скрещивающиеся.

6.7. Докажите, что плоскость, проходящая через одну из двух скрещивающихся прямых и точку на другой прямой, пересекает вторую прямую.

6.8. Через данную точку пространства проведите прямую, пересекающую каждую из двух данных скрещивающихся прямых. Всегда ли это возможно?

6.9. Сколько пар скрещивающихся прямых определяется разными парами из: 1) четырех точек; 2) пяти точек; 3*) n точек, никакие четыре из которых не принадлежат одной плоскости?

6.10°. Запишите пары параллельных ребер: 1) в прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$; 2) в призме $ABCA_1B_1C_1$; 3) в правильной пирамиде $SABCD$.

6.11. Докажите, что через две параллельные прямые проходит единственная плоскость.

6.12. Докажите, что все прямые, пересекающие две данные параллельные прямые, лежат в одной плоскости.

6.13. Известно, что в плоскости прямая, пересекающая одну из двух параллельных прямых, пересекает и другую. Верно ли это утверждение и для пространства?

6.14. Докажите, что если плоскость пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую прямую.

6.15°. Прямые a и b не лежат в одной плоскости. Можно ли провести прямую c, параллельную прямой a и прямой b?

6.16. Параллелограммы $ABCD$ и ABC_1D_1 лежат в разных плоскостях. Докажите, что четырехугольник CDD_1C_1 — также параллелограмм.

6.17. Через концы отрезка CD и его середину N проведены параллельные прямые, пересекающие некоторую плоскость в точках C_1, D_1 и N_1 соответственно. Найдите длину отрезка NN_1, если отрезок CD не пересекает плоскость и: 1) $CC_1 = 3$ м, $DD_1 = 5$ м; 2) $CC_1 = 2{,}5$ дм, $DD_1 = 3{,}5$ дм; 3) $CC_1 = a$, $DD_1 = b$.

6.18*. Решите задачу 6.17 при условии, что отрезок CD пересекает плоскость.

6.19. Через конец A отрезка AB проведена плоскость α. Через конец B и точку C этого отрезка проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках B_1 и C_1. Найдите длину отрезка BB_1, если $AC = 6$ см, $BC = 4$ см, $CC_1 = 3$ см.

6.20. Докажите, что середины сторон пространственного четырехугольника являются вершинами параллелограмма (вершины пространственного четырехугольника не лежат в одной плоскости).

6.21. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка O — центр грани $ABCD$, а точка O_1 — центр грани $A_1B_1C_1D_1$. Докажите, что прямая OO_1 параллельна прямой AA_1.

6.22*. Даны параллелограмм $ABCD$ и плоскость, не пересекающая его, O — точка пересечения диагоналей этого параллелограмма. Через вершины параллелограмма и точку O проведены параллельные прямые, пересекающие данную плоскость в точках A_1, B_1, C_1, D_1, O_1. Докажите, что $AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1 = 4OO_1$.

6.23*. Три плоскости попарно пересекаются. Докажите, что линии их пересечения пересекаются в одной точке или параллельны.

§ 7 ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

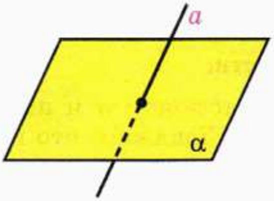
Таблица 7

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

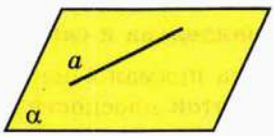
Прямая и плоскость

имеют общие точки

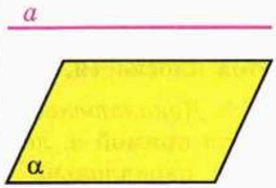
имеют только одну общую точку **(пересекаются)**



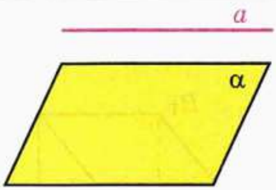
имеют более чем одну общую точку **(прямая лежит в плоскости)**



не имеют общих точек (параллельны)

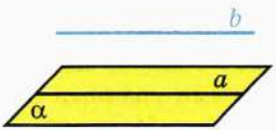
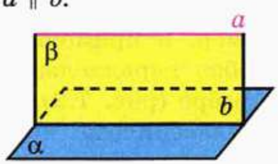


ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ



$a \parallel \alpha$

Прямую и плоскость называют параллельными, если они не имеют ни одной общей точки.

Признак	Свойство
Если $b \parallel a$ (a лежит в плоскости α), **то** $b \parallel \alpha$. 	**Если** $a \parallel \alpha$, β проходит через a, β пересекает α по b, **то** $a \parallel b$. 

Объяснение и обоснование

Вспомним, как могут располагаться прямая и плоскость относительно друг друга.

Прямая может лежать в плоскости, то есть все точки прямой принадлежат плоскости. Прямая может пересекать плоскость, то есть иметь с плоскостью только одну общую точку. Наконец, прямая может не пересекать плоскость, то есть не иметь с плоскостью ни одной общей точки (см. схему в табл. 7).

Определение. **Прямую и плоскость называют *параллельными*, если они не имеют ни одной общей точки.**

Будем полагать также, что отрезок параллелен плоскости, если он лежит на прямой, параллельной плоскости.

Следующая теорема связывает понятие параллельности прямой и плоскости с понятием параллельности двух прямых и определяет достаточное условие параллельности прямой и плоскости.

***Теорема* 7.1** (признак параллельности прямой и плоскости).
Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна какой-либо прямой этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.

Доказательство. Пусть прямая b не лежит в плоскости α и параллельна прямой a, лежащей в этой плоскости (рис. 7.1). Докажем, что прямая b параллельна плоскости α. Допустим противоположное: прямая b пересекает плоскость α в некоторой точке M. Рассмотрим плоскость β, проходящую через параллельные прямые a и b ($a \parallel b$ по условию). Точка M лежит как в плоскости α, так и в плоскости β, поэтому принадлежит линии их пересечения — прямой a, то есть прямые a и b пересекаются, что противоречит условию. Следовательно, наше предположение неверно и прямая b параллельна плоскости α.

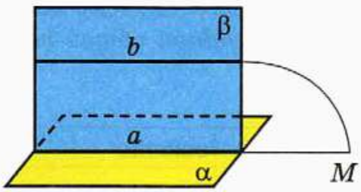


Рис. 7.1

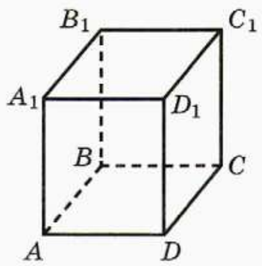


Рис. 7.2

Например, в прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ каждое боковое ребро параллельно плоскостям боковых граней, не проходящим через это ребро (рис. 7.2). Действительно, боковыми гранями прямоугольного параллелепипеда являются прямоугольники. Поэтому, например, боковое ребро AA_1 параллельно прямой DD_1 боковой грани DD_1C_1C, а значит, по признаку параллельности прямой и плоскости ребро AA_1 параллельно плоскости DD_1C_1C. Аналогично ребро AA_1 параллельно плоскости BB_1C_1C.

Замечание. Ребро многогранника параллельно его грани, если оно лежит на прямой, параллельной плоскости этой грани.

Следующая теорема дает еще один признак параллельности двух прямых в пространстве.

***Теорема* 7.2** (признак параллельности двух прямых).
Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то прямая их пересечения параллельна данной прямой.

Доказательство. Пусть плоскость β проходит через прямую b, параллельную плоскости α, и прямая a — линия пересечения этих плоскостей (рис. 7.3). Докажем, что прямые a и b параллельны.

Действительно, они лежат в одной плоскости β. Кроме того, прямая a лежит в плоскости α, а прямая b не пересекается с этой плоскостью. Следовательно, прямая b не может пересекаться с прямой a. Таким образом, прямые a и b лежат в одной плоскости и не пересекаются. Значит, они параллельны.

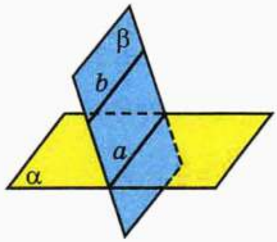


Рис. 7.3

Отметим, что из доказательства теоремы 7.2 следует также свойство: если прямая b параллельна плоскости α, то в плоскости всегда найдется прямая a, параллельная этой прямой b.

Примеры решения задач

Задача 1. Верно ли утверждение: «Прямая, параллельная плоскости, параллельна любой прямой, лежащей в этой плоскости»?

Решение	*Комментарий*
Утверждение неверно, поскольку, например, в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 7.4) прямая DC параллельна плоскости AA_1B_1B, но не параллельна прямой AA_1, лежащей в этой плоскости (прямые DC и AA_1 — скрещивающиеся).	Если какое-либо утверждение не выполняется, то для того, чтобы его опровергнуть, достаточно привести хотя бы один пример, когда условие утверждения выполняется, а вывод — нет (так называемый «контрпример»). Для такого примера можно использовать известные геометрические фигуры, в частности многогранники.

Задача 2. Дан треугольник ABC. Плоскость, параллельная прямой AB, пересекает сторону AC этого треугольника в точке A_1, а сторону BC — в точке B_1. Найдите длину отрезка A_1B_1, если $AB = 10$ см, $AA_1 : A_1C = 2 : 3$.

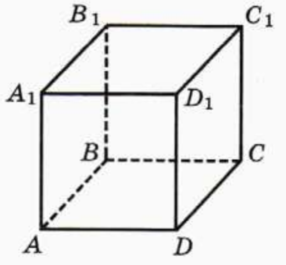


Рис. 7.4

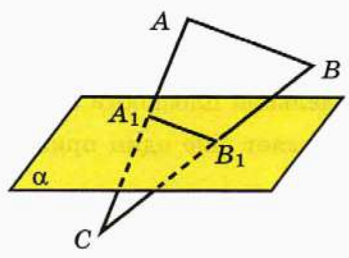


Рис. 7.5

Рис. 7.6

Решение

▶ Обозначим данную плоскость через α (рис. 7.5). Поскольку $AB \parallel \alpha$ и плоскость ABC пересекает α по A_1B_1, то $A_1B_1 \parallel AB$. Тогда $\Delta A_1B_1C \backsim \Delta ABC$. Следовательно, $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C}{AC}$, то есть $\frac{A_1B_1}{10} = \frac{3}{5}$.

Таким образом, $A_1B_1 = 6$ (см).

Ответ: 6 см. ◁

Комментарий

Чтобы составить план решения, сначала следует учесть утверждение теоремы 7.2: *если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то прямая их пересечения параллельна данной прямой*, и обосновать, что прямая A_1B_1 параллельна прямой AB. Далее можно использовать известный из планиметрии опорный факт: *прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает треугольник, подобный данному.*

Задача 3. Даны две скрещивающиеся прямые (рис. 7.6). Проведите через одну из них плоскость, параллельную другой.

Решение

▶ Пусть даны две скрещивающиеся прямые a и b.

1. Выберем на прямой b произвольную точку B (рис. 7.7) и проведем через нее прямую a', параллельную прямой a (это всегда можно сделать по теореме 6.2).

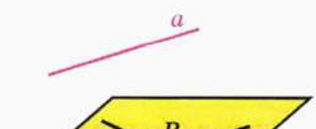


Рис. 7.7

Комментарий

Предложенная задача является задачей на воображаемое построение, и потому главное при ее решении — доказать существование фигуры, удовлетворяющей данным условиям (см. с. 49).

Доказательство должно опираться на соответствующие свойства стереометрических фигур. В частности, для того чтобы получить плоскость, параллельную данной прямой, достаточно использовать признак параллельности прямой и плоскости и обеспечить наличие в построенной плоскости прямой, параллельной данной.

2. Через пересекающиеся прямые a' и b проведем плоскость α. Это и есть искомая плоскость.

Действительно, поскольку по построению $a \parallel a'$, где прямая a' лежит в плоскости α, то по признаку параллельности прямой и плоскости $a \parallel \alpha$ (и плоскость α проведена через прямую b). ◁

Это позволяет составить *план построения*: провести через произвольную точку одной из прямых прямую, параллельную другой, а затем через две пересекающиеся прямые — плоскость. Также следует доказать, что в результате построения действительно получили искомую фигуру.

Вопросы для контроля

1. Укажите все случаи взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве.
2. Дайте определение параллельности прямой и плоскости.
3. Сформулируйте признак параллельности прямой и плоскости.
4*. Докажите признак параллельности прямой и плоскости.
5. Сформулируйте свойство параллельных прямой и плоскости (признак параллельности прямых в пространстве).
6*. Докажите признак параллельности прямых в пространстве.

Упражнения

7.1°. Определите, каким граням в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллельно указанное ребро: 1) AB; 2) A_1D_1; 3) CC_1. Обоснуйте правильность ответа.

7.2. Основание AB трапеции $ABCD$ лежит в плоскости α, не совпадающей с плоскостью трапеции. Как расположены остальные стороны трапеции относительно плоскости α? Ответ объясните.

7.3. Дан параллелограмм $ABCD$. Через сторону AD проведена плоскость α, не совпадающая с плоскостью параллелограмма. Докажите, что $BC \parallel \alpha$.

7.4. Верно ли утверждение, что две прямые, параллельные одной и той же плоскости, параллельны?

7.5. Одна из двух параллельных прямых параллельна плоскости. Верно ли утверждение, что и другая прямая параллельна этой плоскости?

7.6. Плоскость проходит через середины двух сторон треугольника и не совпадает с плоскостью этого треугольника. Докажите, что данная плоскость параллельна третьей стороне треугольника.

7.7. Дана прямая, параллельная некоторой плоскости. Докажите, что в этой плоскости через любую ее точку проходит прямая, параллельная данной прямой.

7.8. Докажите, что через точку, не принадлежащую данной плоскости, проходит прямая, параллельная этой плоскости. Сколько таких прямых можно провести?

7.9. Докажите, что если две прямые параллельны, то через одну из них проходит плоскость, параллельная другой. Сколько существует таких плоскостей?

7.10. Докажите, что через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит единственная плоскость, параллельная другой прямой.

7.11. Докажите, что ребра одного основания призмы параллельны другому основанию этой призмы.

7.12. Через данную точку проведите прямую, параллельную каждой из двух данных пересекающихся плоскостей.

7.13. Дан треугольник BCD. Плоскость, параллельная прямой BC, пересекает сторону BD этого треугольника в точке B_1, а сторону CD — в точке C_1. Найдите длину отрезка B_1C_1, если: 1) $BC = 20$ см, $BB_1 : BD = 2 : 5$; 2) $BC = 14$ см, $CC_1 : C_1D = 5 : 2$; 3) $B_1D = 6$ см, $BC : BD = 2 : 3$.

7.14. Докажите, что сечение треугольной пирамиды $ABCD$ плоскостью, параллельной двум скрещивающимся ребрам AC и BD, — всегда параллелограмм (рис. 7.8).

7.15*. Докажите, что прямая, параллельная каждой из двух пересекающихся плоскостей, параллельна и прямой их пересечения.

7.16*. Докажите, что если две плоскости, пересекающиеся по прямой a, пересекают плоскость α по параллельным прямым, то прямая a параллельна плоскости α.

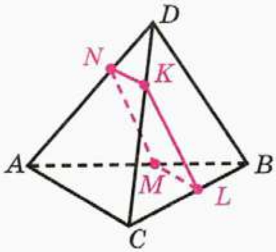


Рис. 7.8

7.17. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что прямая BD параллельна плоскости AB_1D_1.

7.18. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$; O — центр грани $ABCD$. Докажите, что прямая OC_1 параллельна плоскости AB_1D_1.

7.19. Плоскости α, β и γ попарно пересекаются, но не имеют общих точек для трех плоскостей. Существуют ли в пространстве прямые, параллельные всем трем плоскостям?

7.20*. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$; точки P и Q — середины ребер AB и BC соответственно. Постройте сечение этого куба плоскостью, проходящей через точки P и Q параллельно диагонали BD_1 куба.

7.21*. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$; точка P — середина ребра AA_1. Постройте сечение этого куба плоскостью, проходящей через точки P и D_1 и параллельной диагонали AC грани $ABCD$ куба.

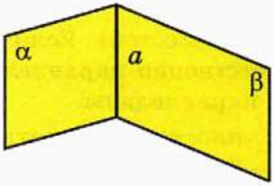
§ 8 ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ

Таблица 8

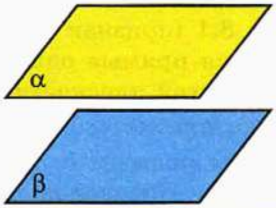
РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

Две плоскости

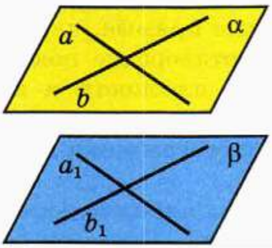
имеют общую точку (пересекаются по прямой)



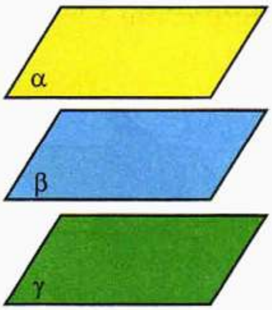
не имеют общих точек (параллельны, то есть **не пересекаются)**



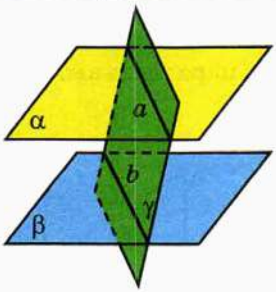
ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ

Определение	Признак
Две плоскости называют параллельными, если они не пересекаются.	 **Если** $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$ (a и b лежат в α и пересекаются, a_1 и b_1 лежат в β), **то** $\alpha \parallel \beta$.

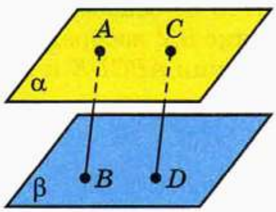
Свойства параллельных плоскостей



Если $\beta \parallel \alpha$ и $\gamma \parallel \alpha$, **то** $\beta \parallel \gamma$.



Если $\alpha \parallel \beta$ и γ пересекает α по a, γ пересекает β по b, **то** $a \parallel b$.



Если $AB \parallel CD$ и $\alpha \parallel \beta$ ($A \in \alpha$, $C \in \alpha$, $B \in \beta$, $D \in \beta$), **то** $AB = CD$.

Объяснение и обоснование

Рассмотрим вопрос о взаимном расположении двух плоскостей. Как известно, если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку. Отсюда следует, что две плоскости или пересекаются по прямой, или не пересекаются, то есть не имеют ни одной общей точки (см. схему в табл. 8).

Определение. **Две плоскости называют *параллельными*, если они не пересекаются.**

Следующая теорема связывает понятие параллельности двух плоскостей с понятием параллельности прямых и определяет достаточное условие параллельности плоскостей.

***Теорема* 8.1** (признак параллельности двух плоскостей). **Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.**

Доказательство. Пусть прямые a_1 и a_2 плоскости α соответственно параллельны прямым b_1 и b_2 плоскости β. Докажем, что плоскости α и β параллельны. Предположим противоположное: плоскости α и β пересекаются, и c — прямая их пересечения (рис. 8.1). По признаку параллельности прямой и плоскости прямая a_1 параллельна плоскости β, а по свойству параллельности прямой и плоскости она параллельна прямой c. Аналогично прямая a_2 также параллельна прямой c. Таким образом, в плоскости α мы имеем две различные прямые, параллельные одной прямой c, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что наше предположение неверно, следовательно, плоскости α и β не пересекаются, они параллельны.

Будем называть две грани многогранника параллельными, если они лежат в параллельных плоскостях.

Например, ***основания призмы параллельны***. Действительно, боковые грани призмы — параллелограммы. Поэтому два смежных ребра одного основания призмы соответственно параллельны двум смежным ребрам другого ее основания. Следовательно, основания призмы параллельны. На рисунке 8.2 изображена пятиугольная призма $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$, у которой основания $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ параллельны.

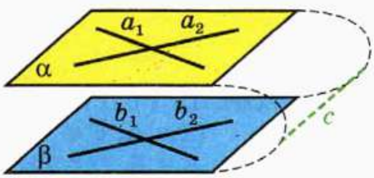


Рис. 8.1

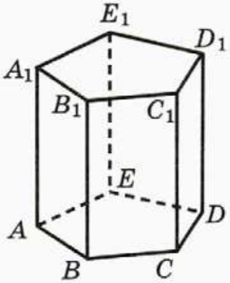


Рис. 8.2

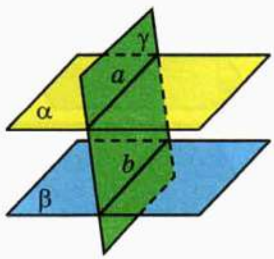


Рис. 8.3

Следующая теорема связывает понятие параллельности двух плоскостей с понятием параллельности двух прямых.

***Теорема* 8.2. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то прямые пересечения параллельны.**

Доказательство. Пусть плоскость γ пересекает параллельные плоскости α и β по прямым a и b соответственно (рис. 8.3). Докажем, что прямые a и b параллельны. Действительно, они лежат в одной плоскости — плоскости γ. Кроме того, они лежат в непересекающихся плоскостях α и β, следовательно, прямые a и b не пересекаются. Значит, они параллельны.

Рассматривая определение и признак параллельности плоскостей и свойство параллельных плоскостей, мы предполагали существование таких плоскостей. Докажем это.

***Теорема* 8.3. Через точку вне данной плоскости можно провести плоскость, параллельную данной, и к тому же только одну.**

Доказательство. Проведем в данной плоскости α какие-либо две пересекающиеся прямые a и b (рис. 8.4). Через данную точку A проведем параллельные им прямые a_1 и b_1. Плоскость β, проходящая через a_1 и b_1, по признаку параллельности плоскостей параллельна плоскости α. Докажем, что такая плоскость единственная. Допустим, что через точку A проходит другая плоскость β_1, также параллельная плоскости α (рис. 8.5). Проведем плоскость γ через прямую a плоскости α и данную точку A, не лежащую на этой прямой. Плоскость γ пересечет плоскость α по прямой a, а плоскости β и β_1 соответственно по прямым a_1 и a_2. Поскольку плоскости β и β_1 параллельны плоскости α, то по теореме 8.2 $a_1 \parallel a$ и $a_2 \parallel a$. Но в плоскости γ через точку A можно провести только одну прямую, параллельную прямой a. Полученное противоречие означает, что наше предположение неверно и плоскость β — единственная.

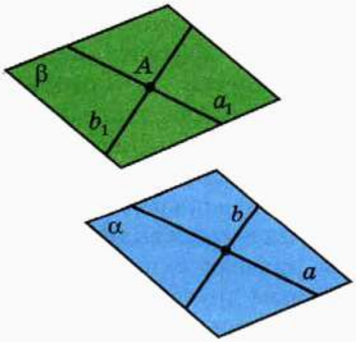


Рис. 8.4

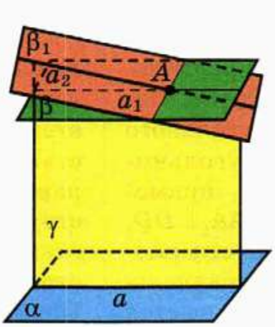


Рис. 8.5

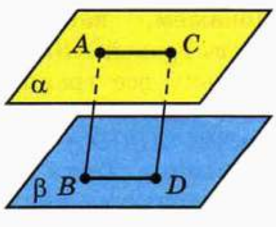


Рис. 8.6

Рассмотрим еще одно свойство параллельных плоскостей, связанное с параллельными прямыми.

***Теорема* 8.4. Отрезки параллельных прямых, заключенные между двумя параллельными плоскостями, равны.**

Доказательство. Пусть α и β — параллельные плоскости, AB и CD — пересекающие их параллельные прямые, A, C, B, D — точки пересечения прямых с плоскостями α и β соответственно (см. рис. 8.6). Докажем, что отрезки AB и CD равны.

Проведем через данные параллельные прямые плоскость, пересекающую плоскости α и β по параллельным прямым AC и BD. Тогда четырехугольник $ACDB$ — параллелограмм, поскольку у него противолежащие стороны параллельны. У параллелограмма противолежащие стороны равны. Следовательно, $AB = CD$.

***Теорема* 8.5. Если две различные плоскости параллельны третьей, то они параллельны друг другу.**

Доказательство. Пусть плоскости α и β параллельны плоскости γ (см. рисунок в пункте «Свойства» табл. 8). Плоскости α и β не могут пересекаться. Если бы плоскости α и β имели общую точку, то через эту точку проходили бы две плоскости (α и β), параллельные плоскости γ. Это противоречит теореме 8.3. Следовательно, плоскости α и β не имеют общих точек, то есть они параллельны.

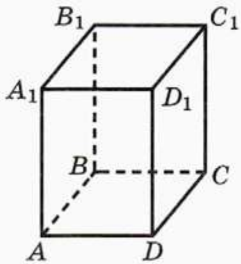


Рис. 8.7

Примеры решения задач

Задача 1. Докажите, что **в прямоугольном параллелепипеде противолежащие грани попарно параллельны.**

Решение	*Комментарий*
Пусть дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 8.7). Докажем, например, параллельность граней ABB_1A_1 и DCC_1D_1. Поскольку все грани прямоугольного параллелепипеда — прямоугольники, то $ABCD$ и ADD_1A_1 — прямоугольники. Тогда $AB \parallel DC$, $AA_1 \parallel DD_1$ и по признаку параллельности плоскости ABB_1A_1 и DCC_1D_1 параллельны. Аналогично обосновывается параллельность и других противолежащих граней.	Для доказательства параллельности граней достаточно доказать параллельность плоскостей, в которых лежат эти грани. А для доказательства параллельности плоскостей достаточно использовать признак их параллельности и доказать соответствующую параллельность двух пересекающихся прямых одной плоскости двум прямым другой плоскости. Напомним, что все грани прямоугольного параллелепипеда — прямоугольники (а в прямоугольнике противолежащие стороны попарно параллельны).

Задача 2. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки K, M, N, где $M \in AA_1$, $N \in BB_1$ и точка K лежит на грани DCC_1D_1 (рис. 8.8, *а*).

Решение	*Комментарий*
1. Точки M и N лежат и в секущей плоскости, и на грани ABB_1A_1, поэтому секущая плоскость пересекает эту грань по отрезку MN (рис. 8.8, *б*). 2. Поскольку $DCC_1D_1 \parallel ABB_1A_1$, то секущая плоскость пересекает грань DCC_1D_1 по прямой, проходящей через точку K и параллельной прямой MN. Проводим через точку K отрезок $TE \parallel MN$ ($T \in DD_1$, $E \in CC_1$). 3. Соединяя отрезками точки пересечения секущей плоскости с ребрами призмы, получаем четырехугольник $MNET$ — искомое сечение. ◁	Для того чтобы составить *план построения*, достаточно вспомнить, что в прямоугольном параллелепипеде противолежащие грани попарно параллельны, следовательно, $ABB_1A_1 \parallel DCC_1D_1$. Секущая плоскость, заданная тремя точками K, M, N, пересекает плоскость ABB_1A_1 по прямой MN. Поэтому параллельную ей плоскость DCC_1D_1 она будет пересекать по прямой, параллельной прямой MN и проходящей через точку K. Чтобы выполнить построение, следует также учесть, что прямая MN параллельна плоскости DCC_1D_1 и в этой плоскости через точку K проходит прямая, параллельная данной прямой.

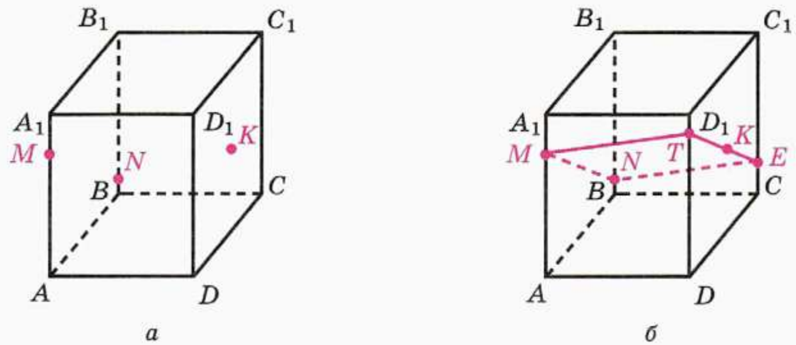


Рис. 8.8

Замечание. Из параллельности противолежащих граней параллелепипеда получаем, что в построенном сечении противолежащие стороны попарно параллельны, следовательно, $MNET$ — параллелограмм. Этот факт иногда приходится применять при решении задач, связанных с аналогичным сечением прямоугольного параллелепипеда.

Задача 3. В пирамиде $ABCD$ через данную точку M на ребре AD (рис. 8.9, *а*) проведите плоскость, параллельную плоскости грани DBC.

Решение

1. *Анализ.* Допустим, что задача решена и соответствующее сечение MKT (рис. 8.9, *б*) построено. Поскольку пл. $MKT \parallel$ пл. DBC, то грани ADC и ADB пересекают параллельные плоскости по параллельным прямым. Следовательно, $MK \parallel DB$ и $MT \parallel DC$. Это позволяет выполнить построение.

2. *Построение.* Проведем через точку M в плоскости ADC прямую $MT \parallel DC$ ($T \in AC$), а в плоскости ADB прямую $MK \parallel DB$ ($K \in AB$) и соединим отрезками точки T и K. Тогда MKT — искомое сечение.

3. *Доказательство.* По построению $MT \parallel DC$ и $MK \parallel DB$, тогда пл. $MKT \parallel$ пл. DBC (по признаку параллельности плоскостей).

4. *Исследование.* Задача всегда имеет единственное решение (поскольку каждый шаг решения можно выполнить однозначно).

Комментарий

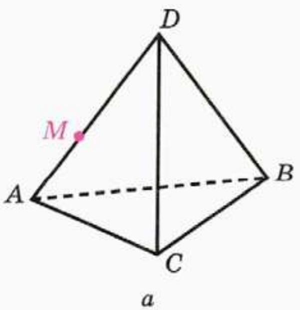
В задачах на построение в стереометрии иногда удобно использовать схему решения задач на построение, известную из курса планиметрии: 1) *анализ*; 2) *построение*; 3) *доказательство*; 4) *исследование*.

Как и в планиметрии, на этапе анализа предполагаем, что задача уже решена, выполняем соответствующий рисунок и, опираясь на известные свойства прямых и плоскостей, составляем план построения.

На этапе построения по плану описываем построение, детализируя его до элементарных построений в изображенных плоскостях.

На этапе доказательства обосновываем, что в результате построения действительно получили фигуру с заданными свойствами.

На этапе исследования рассматриваем каждый шаг построения и отвечаем на два вопроса: 1) всегда ли можно выполнить этот шаг; 2) сколько фигур получим в результате?



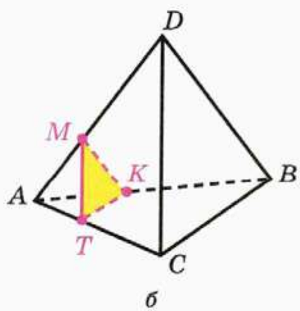


Рис. 8.9

Задача 4*. Докажите, что **через две скрещивающиеся прямые проходит единственная пара параллельных плоскостей.**

Решение	*Комментарий*
▶ Пусть даны две скрещивающиеся прямые a и b. Выберем на прямых a и b произвольные точки A и B соответственно (рис. 8.10) и проведем через точку B прямую a_1, параллельную прямой a, а через точку A — прямую b_1, параллельную прямой b. Через пересекающиеся прямые a и b_1 проведем плоскость α, а через пересекающиеся прямые a_1 и b — плоскость β. По признаку параллельности плоскостей $\alpha \parallel \beta$.	Для доказательства существования фигур достаточно построить эти фигуры, поэтому проведем через данные прямые параллельные плоскости. Для этого достаточно по признаку параллельности плоскостей получить соответствующую параллельность двух пересекающихся прямых одной плоскости двум прямым другой плоскости (напоминаем, что две пересекающиеся прямые однозначно задают плоскость).
Допустим, что через прямые a и b проходит еще одна пара параллельных плоскостей α' и β' (рис. 8.11). Проведем через прямую a и не лежащую на ней точку B ($B \in b$) плоскость γ. Эта плоскость пересекает параллельные плоскости α и β по параллельным прямым a и a_1, а параллельные плоскости α' и β' — по параллельным прямым a и a_2. Получаем, что через точку B в плоскости γ проведены две различные прямые a_1 и a_2, параллельные прямой a, что невозможно. Следовательно, пара параллельных плоскостей, проходящих через данные скрещивающиеся прямые, — единственная. ◁	Единственность построенных плоскостей докажем методом от противного. Чтобы получить противоречие, построим дополнительную плоскость, пересекающую построенные параллельные плоскости (по теореме 8.2 эта плоскость пересекает параллельные плоскости по параллельным прямым).

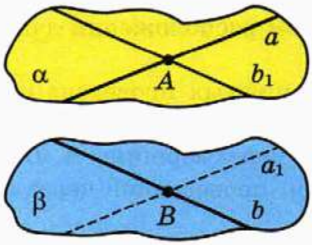


Рис. 8.10

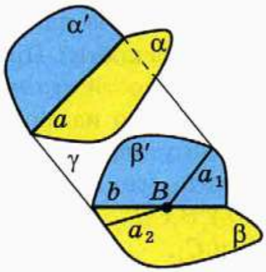


Рис. 8.11

Вопросы для контроля

1. Назовите возможные случаи взаимного расположения двух плоскостей.
2. Дайте определение параллельности плоскостей.
3. Сформулируйте признак параллельности плоскостей.

4*. Докажите признак параллельности плоскостей.

5*. Докажите, что через точку вне данной плоскости можно провести плоскость, параллельную данной, и к тому же только одну.

6. Сформулируйте свойства прямых и плоскостей, связанные с параллельными плоскостями.

7*. Докажите, что если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны.

8*. Докажите, что отрезки параллельных прямых, заключенные между двумя параллельными плоскостями, равны.

9*. Докажите, что если две различные плоскости параллельны третьей, то они параллельны друг другу.

Упражнения

8.1°. Укажите параллельные грани: 1) параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$; 2) призмы $ABCA_1B_1C_1$.

8.2°. Имеет ли параллельные грани (если имеет, то сколько пар): 1) тетраэдр; 2) куб?

8.3°. Верно ли утверждение: «Если прямая, лежащая в одной плоскости, параллельна прямой, лежащей в другой плоскости, то эти плоскости параллельны»?

8.4°. Верно ли утверждение: «Если две прямые, лежащие в одной плоскости, параллельны двум прямым, лежащим в другой плоскости, то эти плоскости параллельны»?

8.5°. Могут ли быть параллельными две плоскости, проходящие через непараллельные прямые?

8.6°. Могут ли пересекаться плоскости, параллельные одной и той же прямой?

8.7°. Можно ли через любую прямую провести плоскость, параллельную данной плоскости? При каком взаимном расположении данных прямой и плоскости это можно сделать?

8.8°. Через каждую из двух параллельных прямых проведена плоскость. Верно ли утверждение, что эти плоскости параллельны?

8.9. Докажите, что плоскость, проведенная через вершины A, D и A_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, параллельна плоскости, проведенной через вершины C, B_1 и C_1.

8.10. Через данную точку проведите плоскость, параллельную каждой из двух пересекающихся прямых. Всегда ли это возможно?

8.11. Докажите, что прямая, лежащая в одной из двух параллельных плоскостей, параллельна другой плоскости.

8.12. Для того чтобы проверить горизонтальность установки лимба угломерных инструментов, пользуются двумя уровнями, расположенными в одной плоскости (рис. 8.12). Почему уровни располагают на диаметрах?

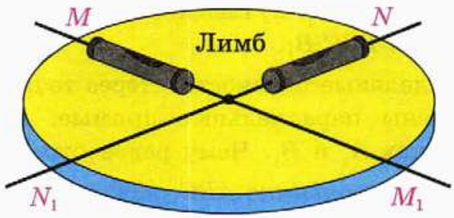


Рис. 8.12

8.13. Докажите, что все прямые, проходящие через данную точку параллельно данной плоскости, лежат в одной плоскости.

8.14. Докажите, что если прямая пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую.

8.15. Какие возможны случаи взаимного расположения трех плоскостей в пространстве, если две из них параллельны?

8.16. Докажите, что если плоскость пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую.

8.17. Какие возможны случаи взаимного расположения трех плоскостей в пространстве, если они попарно пересекаются?

8.18. Две плоскости α и β пересекаются. Докажите, что любая третья плоскость γ пересекает хотя бы одну из плоскостей α или β.

8.19. Перерисуйте изображение пирамиды, приведенное на рисунке 8.13, в тетрадь и постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку M и параллельной грани ABC.

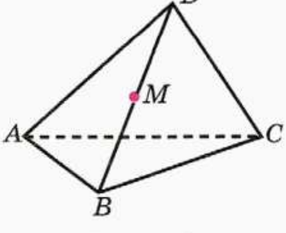


Рис. 8.13

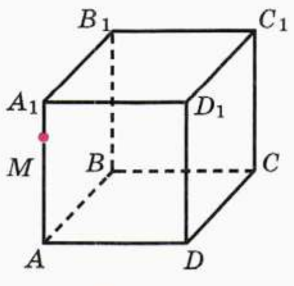


Рис. 8.14

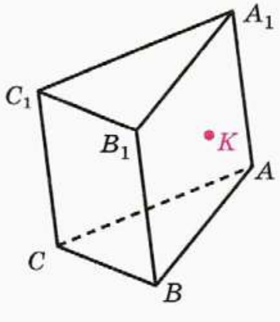


Рис. 8.15

8.20*. Перерисуйте изображение куба, приведенное на рисунке 8.14, в тетрадь и постройте сечение куба: 1) плоскостью, проходящей через точки M, B, C; 2) плоскостью, проходящей через точки M, B_1, C.

8.21*. Перерисуйте изображение треугольной призмы, приведенное на рисунке 8.15, в тетрадь (точка K лежит на грани ABB_1A_1) и постройте сечение призмы: 1) плоскостью, проходящей через точку K параллельно основанию $A_1B_1C_1$; 2) плоскостью, проходящей через точку K параллельно грани BCC_1B_1.

8.22. Даны две параллельные плоскости. Через точки A и B одной из плоскостей проведены параллельные прямые, пересекающие другую плоскость в точках A_1 и B_1. Чему равен отрезок A_1B_1, если $AB = a$?

8.23. Через вершины треугольника ABC, лежащие в одной из двух параллельных плоскостей, проведены параллельные прямые, пересекающие другую плоскость в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

8.24*. Три прямые, проходящие через точку S, пересекают данную плоскость α в точках A, B, C, а параллельную ей плоскость β — в точках A_1, B_1, C_1 (рис. 8.16). Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны.

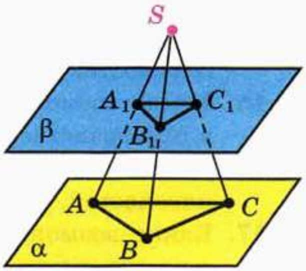


Рис. 8.16

8.25. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что плоскость BDC_1 параллельна плоскости AB_1D_1.

8.26*. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведены плоскости BDC_1 и AB_1D_1. Докажите, что они делят диагональ A_1C на равные части.

8.27*. Прямые a и b пересекают три данные параллельные плоскости в точках A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3 соответственно (точка A_2 лежит между точками A_1 и A_3, а точка B_2 — между точками B_1 и B_3). Известно, что $A_1A_2 = 12$ см, $B_2B_3 = 27$ см и $A_2A_3 = B_1B_2$. Найдите длины отрезков A_1A_3 и B_1B_3.

8.28*. Три параллельные плоскости пересекают две скрещивающиеся прямые в точках A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3 соответственно (точка A_2 лежит между точками A_1 и A_3, а точка B_2 — между точками B_1 и B_3). Известно, что $A_2A_3 = 8$ см, $B_1B_2 = 18$ см и $A_1A_2 + B_2B_3 = 24$ см. Найдите длины отрезков A_1A_3 и B_1B_3.

8.29. На рисунках 8.17–8.31 показаны точки M, P и R, лежащие на ребрах или на гранях куба. Используя свойства параллельных прямых и плоскостей, постройте сечение куба плоскостью MRP для каждого из данных расположений точек.

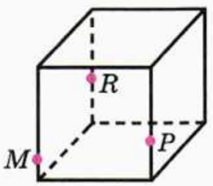


Рис. 8.17

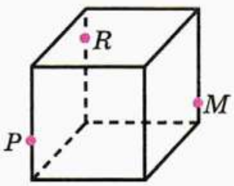


Рис. 8.18

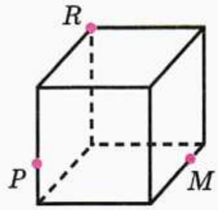


Рис. 8.19

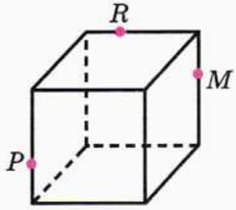


Рис. 8.20

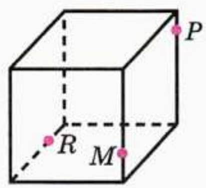


Рис. 8.21

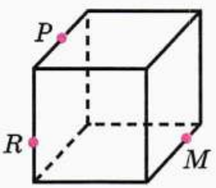


Рис. 8.22

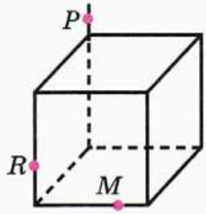


Рис. 8.23

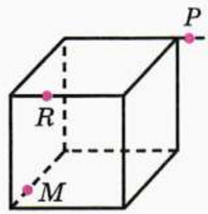


Рис. 8.24

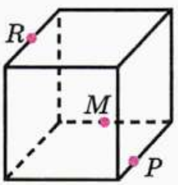
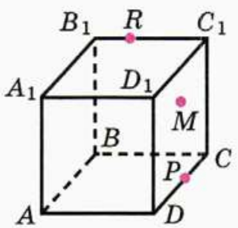
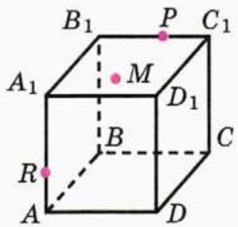


Рис. 8.25



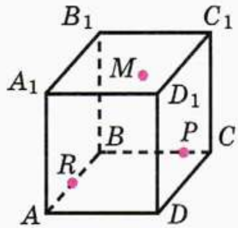
$M \in$ пл. BB_1C_1

Рис. 8.26



$M \in$ пл. $A_1B_1C_1$

Рис. 8.27



$M \in$ пл. $A_1B_1C_1$

Рис. 8.28

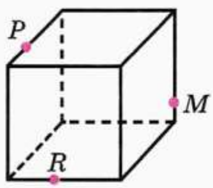
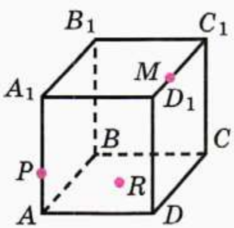
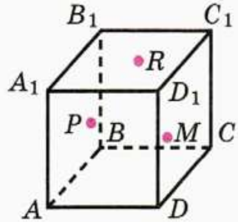


Рис. 8.29



$R \in$ пл. ABC

Рис. 8.30



$P \in$ пл. AA_1B_1
$R \in$ пл. $A_1B_1C_1$
$M \in$ пл. DD_1C_1

Рис. 8.31

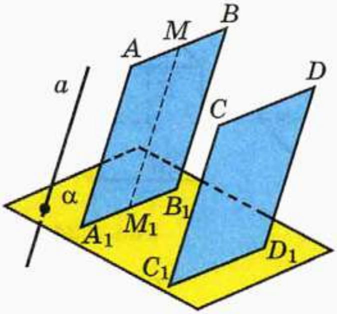
§ 9 ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ. ИЗОБРАЖЕНИЕ ПЛОСКИХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР В СТЕРЕОМЕТРИИ

Таблица 9

ИЗОБРАЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР НА ПЛОСКОСТИ

Для изображения пространственных фигур на плоскости, как правило, используют *параллельное проектирование.*

Возьмем произвольную прямую a, пересекающую плоскость α. Через произвольную точку A данной фигуры проводим прямую AA_1, пересекающую плоскость α в точке A_1.



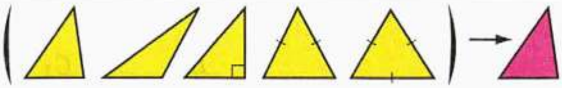
Точка A проектируется в точку A_1 на плоскости α: $A \to A_1$.
Аналогично $B \to B_1$, $AB \to A_1B_1$ ($BB_1 \parallel AA_1 \parallel a$).

1. **Отрезок проектируется в отрезок,** прямая проектируется в прямую (или в точку).
2. **Если** $AB \parallel CD$ ($AB \to A_1B_1$, $CD \to C_1D_1$), **то** $A_1B_1 \parallel C_1D_1$ (или совпадают).
3. $\boxed{\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{A_1M_1}{M_1B_1}}$

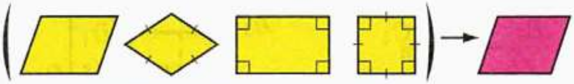
Следствие. **Если** точка M — середина AB, $AB \to A_1B_1$, $M \to M_1$, **то** точка M_1 — середина A_1B_1.

4. Если плоская фигура F лежит в плоскости, параллельной плоскости проектирования, то ее проекция F' на эту плоскость равна фигуре F.

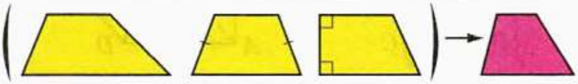
ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ НЕКОТОРЫХ ПЛОСКИХ ФИГУР[1]



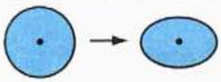
Проекция треугольника — ***треугольник*** любой формы.



Проекция параллелограмма — ***параллелограмм*** любой формы.



Проекция трапеции — ***трапеция*** любой формы.



Проекция окружности — ***эллипс.***

[1] Плоскость фигуры не параллельна направлению проектирования.

Объяснение и обоснование

1. Понятие и свойства параллельного проектирования. Для изображения пространственных фигур на плоскости, как правило, используют параллельное проектирование. Рассмотрим этот способ изображения фигур.

Пусть дана плоскость α и пересекающая ее прямая a. Возьмем в пространстве произвольную точку A. В том случае, когда точка A не лежит на прямой a, через точку A проводим прямую $a' \parallel a$ (рис. 9.1). Прямая a' пересекает плоскость α в некоторой точке A'. Эту точку называют ***проекцией***[1] ***точки A*** (на плоскость[2] α) ***при проектировании параллельно прямой a***, или *параллельной проекцией точки A на плоскость* α. Если же точка A лежит на прямой a, то ее параллельной проекцией A' называют точку, в которой прямая a пересекает плоскость α. О прямой a говорят, что она задает направление проектирования. Если прямую a заменить любой другой прямой l, параллельной прямой a, то результат проектирования останется тем же, независимо от того, как проводят прямые — параллельно прямой a или прямой l.

Если таким образом построить проекцию каждой точки фигуры, то получится проекция самой фигуры. Параллельная проекция реальной фигуры — ее тень, падающая на плоскую поверхность при солнечном освещении, поскольку солнечные лучи можно считать параллельными (рис. 9.2). Так, глядя на тень, отбрасываемую вашим телом на поверхность Земли, вы видите свою параллельную проекцию.

Рассмотрим некоторые свойства параллельного проектирования, вытекающие из описанного способа построения проекций.

Свойство 1. **Если прямая параллельна или совпадает с прямой a, то ее проекция в направлении этой прямой — точка. Если прямая не параллельна и не совпадает с прямой a, то ее проекцией является прямая.**

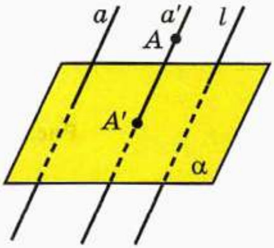


Рис. 9.1

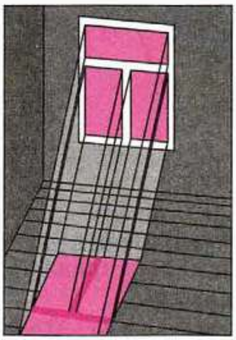


Рис. 9.2

[1] Иногда тот факт, что точка A' — проекция точки A (то есть точка A проектируется в точку A'), удобно записывать так: $A \to A'$ (знак «$\to$» в приведенной записи означает: «проектируется в»; см., например, записи в табл. 9).

[2] Плоскость α часто называют плоскостью проекции.

Доказательство. Пусть прямая b не параллельна и не совпадает с прямой a (рис. 9.3). Тогда все прямые, которые проектируют точки прямой b на плоскость α, лежат в одной плоскости β, пересекающей плоскость α по прямой b'. Произвольная точка B прямой b изображается точкой B' прямой b'. Следовательно, прямая b' — проекция прямой b на плоскость α.

Свойство 2. **Проекцией отрезка при параллельном проектировании является точка или отрезок** в зависимости от того, на какой прямой он лежит — на параллельной прямой a (или совпадающей с ней) или нет. **Отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой, сохраняется при параллельном проектировании.** В частности, **середина отрезка при параллельном проектировании переходит в середину соответствующего отрезка.**

Доказательство. Рассмотрим отрезок AC, не параллельный направлению проектирования (не параллельный прямой a и не лежащий на ней), и точку B, принадлежащую отрезку AC (рис. 9.4). Пусть прямая $A'C'$ — проекция прямой AC на плоскость α, а точки A', B', C' — соответственно проекции точек A, B, C. Поскольку $AA' \parallel BB' \parallel CC'$, то прямые AA', BB' и CC' лежат в одной плоскости β и по обобщенной теореме Фалеса из планиметрии получаем: $AB : BC = A'B' : B'C'$. В частности, если точка B — середина отрезка AC, то точка B' — середина отрезка $A'C'$.

Заметим, что *при параллельном проектировании сохраняется не только отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой, но и отношение длин отрезков, лежащих на параллельных прямых* (обоснуйте самостоятельно).

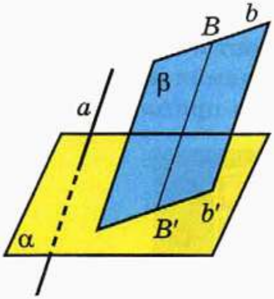


Рис. 9.3

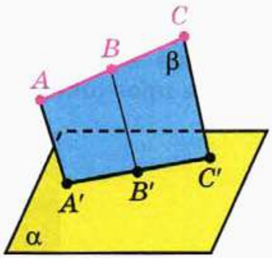


Рис. 9.4

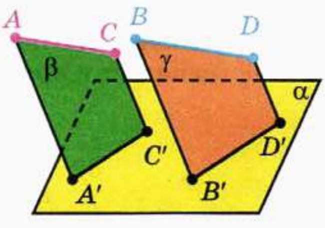


Рис. 9.5

Свойство 3. **Если две прямые параллельны** и не параллельны прямой a, **то их проекции в** направлении a **также будут параллельными прямыми (или одной прямой).**

Доказательство. Пусть прямые AC и BD параллельны (и не параллельны направлению проектирования). Аналогично доказательству свойства 1 рассмотрим проекции $A'C'$ и $B'D'$ данных прямых как прямые пересечения плоскости α с плоскостями β и γ соответственно (рис. 9.5).

Если плоскости β и γ совпадают, то проекции прямых AC и BD также совпадают. Если же эти плоскости различны, то они параллельны по признаку параллельности двух плоскостей (прямая AC параллельна прямой BD, прямая AA' параллельна прямой BB'). Тогда по свойству параллельных плоскостей линии пересечения этих плоскостей с плоскостью α параллельны. Следовательно, $A'C' \parallel B'D'$.

Свойство 4. **Если плоская фигура F лежит в плоскости, параллельной плоскости проекции, то ее проекция F' на эту плоскость равна фигуре F.**

Доказательство. Зададим соответствие между фигурой F и фигурой F'. Для этого поставим в соответствие каждой точке фигуры F ее проекцию. Тогда если A и B — точки фигуры F, а точки A' и B' — их проекции, то $ABB'A'$ — параллелограмм (рис. 9.6). Следовательно, $A'B' = AB$. Таким образом, это соответствие сохраняет расстояние между точками, а значит, фигуры F и F' равны.

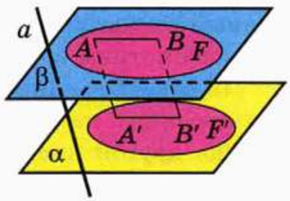


Рис. 9.6

Заметим, что из приведенного доказательства свойства 4 следует еще одно свойство параллельного проектирования: *если прямая параллельна плоскости проекции, то она проектируется в прямую, параллельную данной* ($AB \parallel \alpha$, $A'B'$ — проекция AB, тогда $A'B' \parallel AB$).

2. Параллельные проекции некоторых плоских фигур[1]. Если фигура F лежит в плоскости, не параллельной плоскости проектирования α, то ее проекция F', вообще говоря, не равна фигуре F.

Из свойств параллельного проектирования следует, что параллельной проекцией многоугольника является многоугольник с тем же числом сторон или отрезок (если плоскость многоугольника параллельна направлению проектирования). Причем если в многоугольнике какие-либо две стороны параллельны, то их проекции также будут параллельны (если они не лежат на одной прямой). Но поскольку при параллельном проектировании длины отрезков и углы, как правило, не сохраняются, то проекцией, например, равностороннего или прямоугольного треугольника может быть треугольник любой формы. Аналогично, хотя проекция параллелограмма — параллелограмм, проекцией прямоугольника может быть не прямоугольник, проекцией ромба — не обязательно ромб, а проекцией правильного многоугольника — неправильный многоугольник.

Самый простой многоугольник — треугольник. Как следует из свойств параллельного проектирования, параллельной проекцией треугольника является треугольник или отрезок. При этом, если плоскость треугольника параллельна плоскости проекции, то, как мы выяснили, его проекцией будет треугольник, равный данному.

Покажем, что *в общем случае треугольник любой формы может служить параллельной проекцией равностороннего треугольника.*

[1] Подробнее параллельные проекции плоских фигур и связанные с ними задачи рассмотрены в § 10.

Действительно, пусть дан произвольный треугольник ABC в плоскости α (рис. 9.7). Построим на одной из его сторон, например на стороне AC, равносторонний треугольник AB_1C так, чтобы точка B_1 не принадлежала плоскости α. Обозначим через a прямую, проходящую через точки B_1 и B. Тогда треугольник ABC — параллельная проекция треугольника AB_1C на плоскость α в направлении прямой a.

Выясним, *какая фигура является параллельной проекцией окружности*.

Пусть фигура F — окружность в пространстве, фигура F' — ее проекция на плоскость α в направлении прямой a. Если прямая a параллельна плоскости окружности или лежит в ней, то проекция окружности — отрезок, равный ее диаметру.

Рассмотрим случай, когда прямая a пересекает плоскость окружности.

Пусть AB — диаметр окружности, параллельный плоскости α, и $A'B'$ — его проекция на эту плоскость (рис. 9.8). Тогда $AB = A'B'$. Возьмем какой-нибудь другой диаметр CD, и пусть $C'D'$ будет его проекцией. Обозначим отношение $C'D' : CD$ через k. Поскольку при параллельном проектировании сохраняются параллельность и отношение длин параллельных отрезков, то для произвольной хорды C_1D_1, параллельной диаметру CD, ее проекция $C_1'D_1'$ будет параллельна $C'D'$ и отношение $C_1'D_1' : C_1D_1$ будет равно k (если $CD : C_1D_1 = C'D' : C'_1D'_1$, то $C'_1D'_1 : C_1D_1 = C'D' : CD = k$).

Таким образом, проекция окружности получается сжатием или растягиванием ее в направлении какого-либо диаметра в одно и то же число раз. Такую фигуру на плоскости называют *эллипсом*.

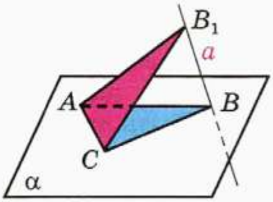


Рис. 9.7

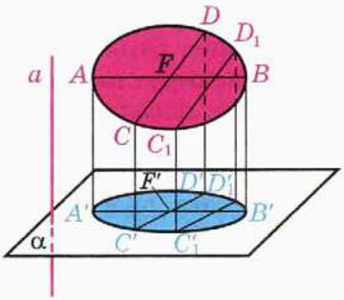


Рис. 9.8

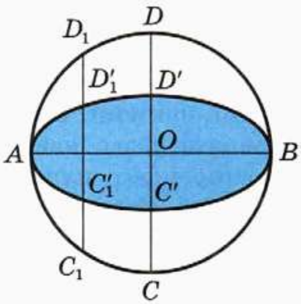


Рис. 9.9

Например, на рисунке 9.9 изображен эллипс, полученный сжатием окружности в направлении диаметра CD в два раза.

3. Изображение некоторых пространственных фигур на плоскости. Как мы уже отмечали, для изображения пространственных фигур обычно используют параллельное проектирование. Все рисунки пространственных фигур, рассмотренные нами раньше, были выполнены в параллельной проекции. Плоскость, на которую проектируется фигура, называют *плоскостью изображений*, а проекцию фигуры — *изображением*. Изображением данной фигуры называют также любую фигуру, подобную проекции данной фигуры.

Рассмотрим примеры изображений пространственных фигур — многогранников. Изображение многогранника состоит из изображения его ребер, полученных с помощью параллельного проектирования. При этом все ребра делятся на два типа: видимые и невидимые. (Представьте, что параллельно направлению проектирования идут лучи света. В результате поверхность многогранника разбивается на две части: освещенную и неосвещенную. Ребра, расположенные на освещенной части поверхности, будут видимыми.) Видимые ребра изображают сплошными линиями, а невидимые — штриховыми.

При изображении куба обычно выбирают плоскость изображений, параллельную одной из его граней. В этом случае две грани куба (передняя и задняя), параллельные плоскости проекций, изображаются равными квадратами, остальные грани — параллелограммами (рис. 9.10). Аналогичным способом изображают прямоугольный параллелепипед (рис. 9.11).

Если не придерживаться правила, что плоскость изображений должна быть параллельна одной из граней, то в полученном изображении будут сохраняться только параллельность и равенство противолежащих сторон квадрата или прямоугольника, то есть все грани будут параллелограммами. Тогда изображение куба или прямоугольного параллелепипеда может иметь вид, приведенный на рисунке 9.12. Однако такое изображение куба или прямоугольного параллелепипеда недостаточно наглядно и может затруднить решение задач, связанных с этими телами. Поэтому мы не будем использовать подобные изображения (но еще раз подчеркнем, что такие изображения правильны).

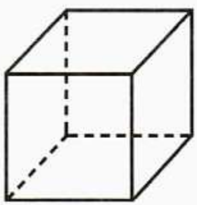


Рис. 9.10

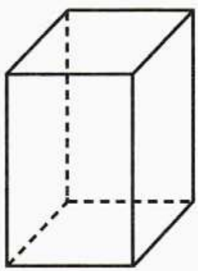


Рис. 9.11

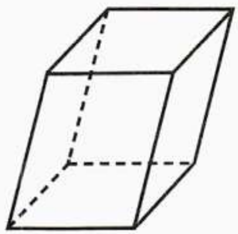


Рис. 9.12

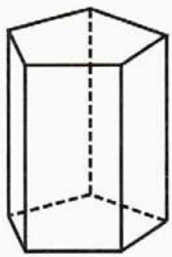


Рис. 9.13

Для построения изображения призмы достаточно построить многоугольник, изображающий его основание. Потом следует провести из вершин многоугольника прямые, параллельные некоторой фиксированной прямой, и отложить на них равные отрезки. Соединив концы этих отрезков, получим многоугольник — изображение другого основания призмы (рис. 9.13).

Чтобы построить изображение пирамиды, достаточно построить многоугольник, изображающий его основание. Затем надо выбрать какую-нибудь точку, которая будет изображать вершину пирамиды, и соединить ее отрезками с вершинами многоугольника (рис. 9.14). Полученные отрезки будут изображать боковые ребра пирамиды.

Заметим, что, например, рисунок 9.14 является изображением пирамиды только в том случае, когда из текста, сопровождающего рисунок, мы знаем, что рассматривается пирамида. Если же такого текста нет, то можно предположить также, что на рисунке 9.14 изображена плоская фигура — четырехугольник $SABC$ с диагональю SB, внутри которого взята точка D, соединенная штриховыми линиями с точками S, A и C.

Обращаем внимание на тот факт, что плоское изображение, подчиняясь определенным законам, способно передать представление о трехмерном предмете. Однако при этом могут возникать иллюзии. Например, на рисунке 9.15 изображена фигура, которую невозможно составить из деревянных прямолинейных карандашей (объясните почему).

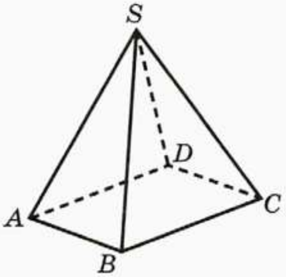


Рис. 9.14

Рис. 9.15

В живописи существует направление, называемое «импосибилизм» (от английского слова *impossibility* — невозможность) — изображение невозможных фигур, парадоксов. Известный голландский художник М. Эшер на гравюрах «Бельведер» (рис. 9.16), «Поднимаясь и опускаясь» (рис. 9.17), «Водопад» (рис. 9.18) и других изобразил невозможные объекты.

Рис. 9.16

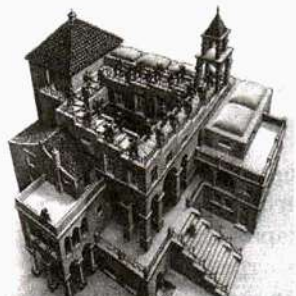


Рис. 9.17

Рис. 9.18

Современный шведский архитектор О. Рутерсвард посвятил невозможным объектам серию своих художественных работ. Некоторые из них приведены на рисунках 9.19–9.21.

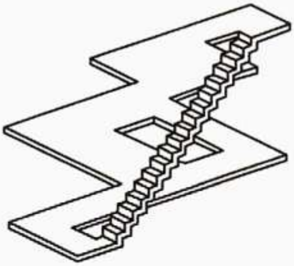


Рис. 9.19

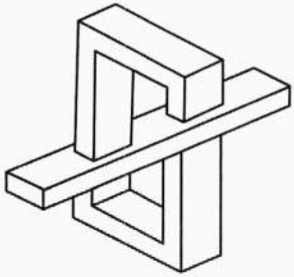


Рис. 9.20

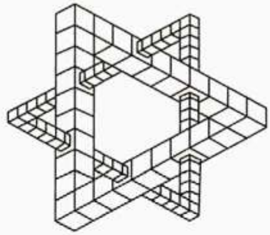


Рис. 9.21

Примеры решения задач

Задача 1. Может ли параллельной проекцией трапеции быть параллелограмм?

Решение	*Комментарий*
▶ Не может. Поскольку в трапеции прямые, на которых лежат боковые стороны, пересекаются, то точка пересечения этих прямых должна проектироваться в точку пересечения их проекций, то есть в точку пересечения прямых, на которых лежат противолежащие стороны параллелограмма-проекции. Но это невозможно, поскольку противолежащие стороны параллелограмма принадлежат непересекающимся параллельным прямым. ◁	Для опровержения данного утверждения используем метод доказательства от противного. Допустим, что параллельная проекция трапеции — параллелограмм, и, опираясь на свойства параллельного проектирования, свойства трапеции и параллелограмма, получим противоречие с каким-нибудь из этих свойств.

Задача 2*. На изображении $A_1B_1C_1$ (рис. 9.22, *а*) равнобедренного прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) постройте изображение квадрата, лежащего в плоскости треугольника, если стороной квадрата служит гипотенуза треугольника (вершина прямого угла находится внутри квадрата).

Решение	*Комментарий*
▶ Пусть на гипотенузе AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC построен квадрат $ABDE$ так, что вершина C находится внутри	На этапе анализа задачи рассматриваем фигуры-оригиналы и те их свойства, которые сохраняются при параллельном проектировании

квадрата (рис. 9.22, *б*). Тогда C — точка пересечения его диагоналей (поскольку диагонали квадрата, а также катеты AC и BC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC образуют углы по 45° со стороной AB). Следовательно, точка C — середина диагоналей BE и AD. Однако при проектировании середина отрезка проектируется в середину отрезка проекции. Поэтому продолжим стороны A_1C_1 и B_1C_1 за точку C_1 и отложим $C_1D_1 = A_1C_1$ и $C_1E_1 = C_1B_1$. Последовательно соединяя точки A_1, E_1, D_1, B_1 отрезками, получаем $A_1B_1D_1E_1$ (рис. 9.22, *в*) — искомое изображение данного квадрата $ABDE$. ◁

(параллельность прямых и отношения отрезков одной или параллельных прямых). Исходя из этого составляем план решения.

В частности, после того как выяснили, что в квадрате $ABDE$ (рис. 9.22, *б*) точка C — середина отрезков BE и AD, составляем *план построения*: продолжить стороны A_1C_1 и B_1C_1 за точку C_1 и отложить отрезки, равные соответствующим сторонам данного треугольника (чтобы точка C_1 была серединой диагоналей A_1D_1 и B_1E_1 построенного четырехугольника $A_1B_1D_1E_1$).

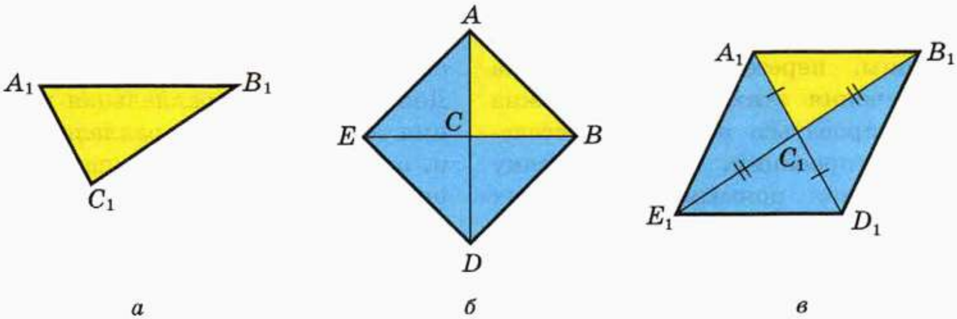


Рис. 9.22

Вопросы для контроля

1. Объясните, что называют параллельной проекцией точки и фигуры на данную плоскость.
2. Сформулируйте свойства параллельного проектирования.
3*. Докажите свойства параллельного проектирования.
4. Какой фигурой может быть параллельная проекция треугольника, параллелограмма, трапеции, окружности, если плоскость фигуры не параллельна направлению проектирования?
5. На примере изображения прямоугольного параллелепипеда объясните, как выполняют изображение многогранника.

Упражнения

9.1°. Какие фигуры могут служить параллельными проекциями треугольника?

9.2°. Может ли параллельной проекцией правильного треугольника быть: 1) прямоугольный треугольник; 2) равнобедренный треугольник; 3) разносторонний треугольник?

9.3°. Какой фигурой может быть параллельная проекция: 1) прямоугольника; 2) параллелограмма; 3) трапеции?

9.4°. Может ли параллельной проекцией прямоугольника быть: 1) квадрат; 2) параллелограмм; 3) ромб; 4) трапеция?

9.5°. Верно ли, что проекцией ромба, если он не проектируется в отрезок, всегда будет ромб? Когда это утверждение выполняется?

9.6°. Верно ли, что при параллельном проектировании треугольника всегда: 1) медианы проектируются в медианы; 2) высоты проектируются в высоты; 3) биссектрисы проектируются в биссектрисы?

9.7°. Дана параллельная проекция треугольника. Как построить проекции медиан этого треугольника?

9.8°. Дана параллельная проекция треугольника. Как построить проекции средних линий этого треугольника?

9.9. Может ли проекцией трапеции с основаниями 4 см и 8 см быть трапеция с основаниями 2 см и 6 см? Ответ объясните.

9.10. Может ли параллельной проекцией двух непараллельных прямых быть пара параллельных прямых? Если может, то приведите пример таких прямых.

9.11. Постройте произвольный параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ и, приняв его за параллельную проекцию квадрата $ABCD$, постройте проекцию: 1) центра окружности, описанной около квадрата $ABCD$; 2) перпендикуляра OM, опущенного из центра O квадрата $ABCD$ на сторону AD.

9.12. Постройте произвольный треугольник $A_1B_1C_1$ и, приняв его за параллельную проекцию треугольника ABC со сторонами $AB = 2$ см, $BC = 6$ см, $AC = 5$ см, постройте изображение биссектрисы треугольника, проведенной из вершины B.

9.13. На изображении равнобедренного прямоугольного треугольника постройте изображение квадрата, лежащего в плоскости треугольника, если стороной квадрата служит катет данного треугольника.

9.14*. Нарисуйте эллипсы, полученные из данной окружности: 1) сжатием к диаметру в 3 раза; 2) растяжением от диаметра в 3 раза.

9.15*. Треугольник $A_1B_1C_1$ — параллельная проекция треугольника ABC. Расстояния между соответствующими вершинами этих треугольников равны: 1) 4 см, 6 см, 8 см; 2) a, b, c. Найдите расстояние между точками пересечения медиан этих треугольников.

9.16. Можно ли параллелограмм $ABCD$ перегнуть по диагонали AC так, чтобы проекцией треугольника ABC на плоскость ADC был треугольник ADC?

9.17. Точки A, B и C лежат на одной прямой и проектируются на плоскость α в точки A_1, B_1, C_1 соответственно. Найдите A_1B_1, если $AB = 7$, $AC = 3$, а $B_1C_1 = 5$.

9.18. Докажите, что параллельная проекция центрально-симметричной фигуры есть также центрально-симметричная фигура.

9.19. Даны скрещивающиеся прямые a и b. Проведите плоскость α так, чтобы в случае произвольного выбора проектирующей прямой параллельные проекции прямых a и b на плоскость α пересекались.

9.20. Даны скрещивающиеся прямые a и b и плоскость проекции α. Проведите проектирующую прямую l так, чтобы параллельные проекции прямых a и b на плоскость α были параллельны. Всегда ли имеет решение эта задача?

§ 10 СВОЙСТВА ИЗОБРАЖЕНИЙ НЕКОТОРЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ В ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ

Как отмечалось, для изображения пространственных фигур на плоскости часто используют параллельное проектирование.

Изображением фигуры называют параллельную проекцию фигуры или любую фигуру, подобную проекции данной фигуры.

В § 9 было показано, что из свойств параллельного проектирования следует, что параллельной проекцией многоугольника является многоугольник с тем же самым числом сторон или отрезок. Причем если в многоугольнике какие-либо две стороны параллельны, то их проекции также будут параллельны (если они не лежат на одной прямой).

Рассмотрим более подробно изображение треугольника, параллелограмма, трапеции и правильного шестиугольника. Если плоскость многоугольника параллельна плоскости проекции, то его проекцией будет многоугольник, равный данному. Поэтому рассмотрим случаи, когда плоскость многоугольника не параллельна плоскости проекции (и не параллельна направлению проектирования).

1. Треугольник. Поскольку при параллельном проектировании длины отрезков и углы, вообще говоря, не сохраняются, то параллельной проекцией, например, равностороннего треугольника может служить треугольник любой формы. Поэтому изображением данного треугольника может быть произвольный треугольник.

Пусть даны треугольник ABC (будем считать его оригиналом) и произвольный треугольник $A_0B_0C_0$. Покажем, что треугольник $A_0B_0C_0$ можно считать изображением треугольника ABC при некотором параллельном проектировании. Рассмотрим плоскость α, не совпадающую с плоскостью треугольника ABC и проходящую через его сторону AC (рис. 10.1). Построим в плоскости α треугольник AB_1C, подобный треугольнику $A_0B_0C_0$ (с коэффициентом подобия $k = \frac{AC}{A_0C_0}$). Обозначим через a прямую, проходящую через точки B и B_1. Тогда треугольник AB_1C — параллельная проекция треугольника ABC на плоскость α в направлении прямой a, следовательно, подобный ему треугольник $A_0B_0C_0$ — изображение треугольника ABC.

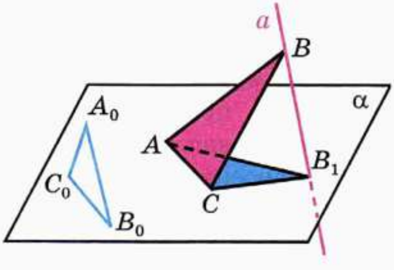


Рис. 10.1

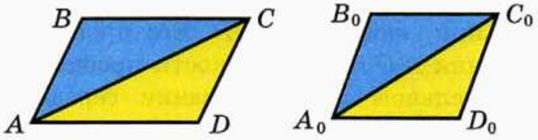


Рис. 10.2

2. Параллелограмм. Изображением любого параллелограмма (в частности, прямоугольника, ромба, квадрата) **может быть произвольный параллелограмм.**

Действительно, пусть $ABCD$ и $A_0B_0C_0D_0$ — два произвольных параллелограмма (рис. 10.2). Проведем в этих параллелограммах диагонали AC и A_0C_0 соответственно. По предыдущему свойству треугольник $A_0B_0C_0$ можно считать изображением треугольника ABC. Так как при параллельном проектировании параллельность прямых сохраняется, изображением параллелограмма $ABCD$ (оригинала) будет параллелограмм $A_0B_0C_0D_0$.

3. Трапеция. Изображением любой трапеции может быть произвольная трапеция, у которой отношение оснований равно отношению соответствующих оснований оригинала.

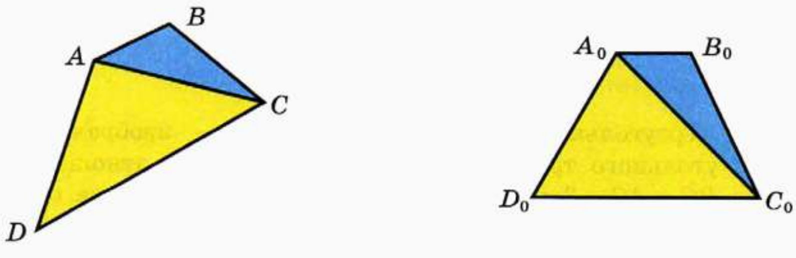


Рис. 10.3

Действительно, пусть $ABCD$ и $A_0B_0C_0D_0$ — две произвольные трапеции, у которых $\frac{CD}{AB} = \frac{C_0D_0}{A_0B_0}$ (рис. 10.3). Проведем в этих трапециях диагонали AC и A_0C_0 соответственно. Треугольник $A_0B_0C_0$ можно считать изображением треугольника ABC. Поскольку при параллельном проектировании параллельность прямых сохраняется, изображением прямой CD, параллельной прямой AB, будет прямая C_0D_0, параллельная прямой A_0B_0. Кроме того, при параллельном проектировании сохраняется и отношение длин отрезков, лежащих на параллельных прямых. Следовательно, изображением трапеции $ABCD$ (оригинала) будет трапеция $A_0B_0C_0D_0$. ○

4. Правильный шестиугольник. Рассмотрим теперь параллельную проекцию правильного шестиугольника $ABCDEF$ с центром в точке O (рис. 10.4, *а*).

● Проведем через точку O диагонали. Выберем какой-нибудь треугольник, например AOB. Его проекцией может быть произвольный треугольник $A_0O'B_0$ на плоскости проекции. Принимая во внимание, что при параллельном проектировании середина отрезка проектируется в середину отрезка-проекции, отложим $O'D_0 = A_0O'$ и $O'E_0 = B_0O'$. Учитывая, что при параллельном проектировании сохраняется параллельность прямых, проведем через точки A_0 и D_0 прямые, параллельные прямой B_0O', а через точки B_0 и E_0 — прямые, параллельные прямой A_0O'. Точки пересечения соответствующих прямых обозначим F_0 и C_0. Шестиугольник $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$ (рис. 10.4, *б*) и будет искомой проекцией правильного шестиугольника $ABCDEF$. ○

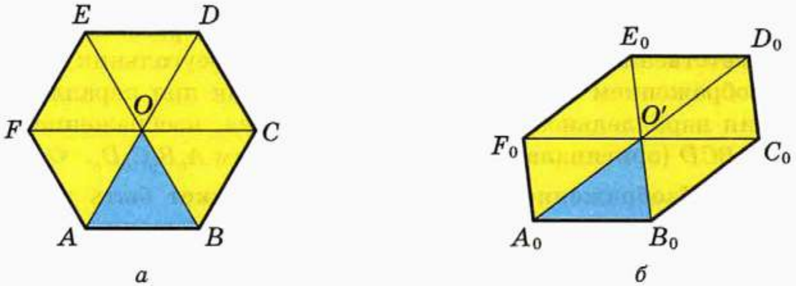


Рис. 10.4

Примеры решения задач

Задача 1. Треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 10.5, *а*) — изображение прямоугольного треугольника ABC, у которого отношение катетов $BC : AC = 3 : 4$. Постройте изображение центра окружности, вписанной в треугольник ABC.

Решение	*Комментарий*
► Рассмотрим треугольник-оригинал ABC (рис. 10.5, *б*). По условию катеты треугольника пропорциональны числам 3 и 4. Если обозначить коэффициент пропорциональности	На этапе анализа условия задачи рассматриваем фигуру-оригинал и ее свойства, сохраняющиеся при параллельном проектировании (параллельность прямых и отношения

через k, то $BC = 3k$, $AC = 4k$. Тогда по теореме Пифагора $AB = 5k$.

Центр O вписанной окружности — точка пересечения биссектрис CE и AD треугольника ABC. По свойству биссектрисы треугольника имеем:
$$\frac{BE}{AE} = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{4}, \quad \frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{5}.$$
При параллельном проектировании сохраняется отношение отрезков одной прямой. Поэтому если E_1 и D_1 — проекции точек E и D соответственно, то $\frac{B_1E_1}{A_1E_1} = \frac{BE}{AE} = \frac{3}{4}$ и $\frac{C_1D_1}{B_1D_1} = \frac{CD}{BD} = \frac{4}{5}$. Тогда строим точки E_1 и D_1, которые делят данные отрезки A_1B_1 и B_1C_1 в указанных отношениях (рис. 10.5, *в*). Соединив точки C_1 и E_1 отрезками, получаем изображение C_1E_1 и A_1D_1 биссектрис треугольника ABC и точку O_1 их пересечения — искомое изображение центра окружности, вписанной в треугольник ABC. ◁

отрезков одной прямой или параллельных прямых).

Центр вписанной окружности находится в точке пересечения биссектрис, а биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилегающим сторонам. Поэтому для построения биссектрис достаточно найти отношение соответствующих сторон данного прямоугольного треугольника. Исходя из этого составляем *план решения*:

найти отношение катета и гипотенузы (кроме данного отношения катетов) и построить биссектрисы, учитывая, что отношение отрезков одной прямой при параллельном проектировании сохраняется.

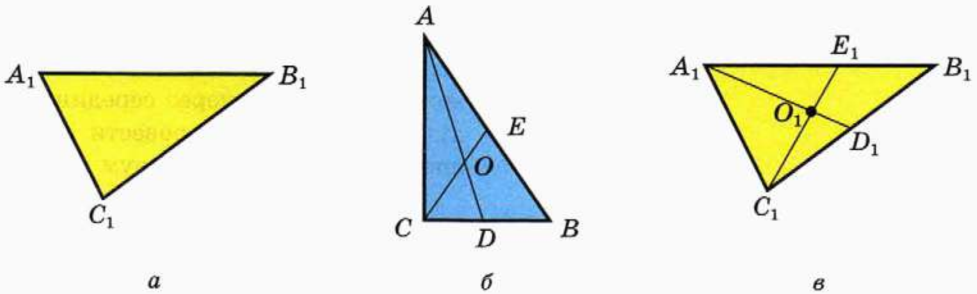


Рис. 10.5

Задача 2. На изображении окружности (рис. 10.6, *а*) постройте изображение перпендикулярных диаметров этой окружности.

Решение

▶ Пусть в данной окружности (рис. 10.6, *б*) диаметры AB и CD перпендикулярны (пересекаются

Комментарий

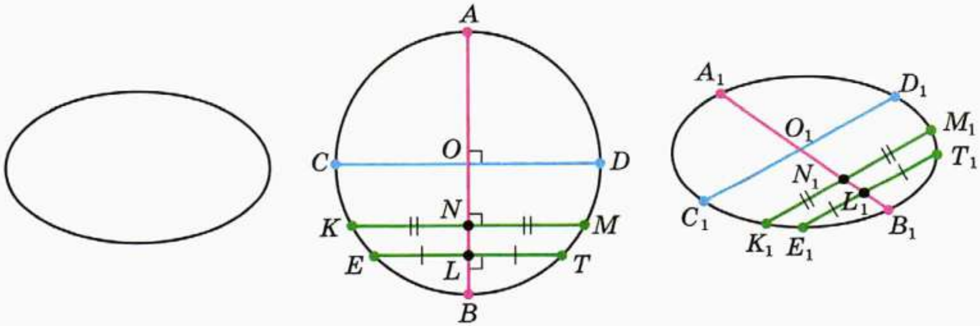
На этапе анализа условия задачи рассматриваем фигуру-оригинал и те ее свойства, которые сохраняются в центре O — середине каждого из них). Проведем две хорды KM и ET перпендикулярно диаметру AB (тогда $ET \parallel KM \parallel CD$). Учитывая, что диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам, получаем, что точки L и N — середины хорд ET и KM соответственно. Поскольку при проектировании сохраняется параллельность прямых и проекция середины отрезка — точка, делящая отрезок проекции пополам, получаем следующее построение.

1. На изображении окружности проводим две произвольные параллельные хорды E_1T_1 и K_1M_1 (рис. 10.6, *в*).
2. Через середины L_1 и N_1 этих хорд проводим хорду A_1B_1 — изображение диаметра AB окружности. Через середину O_1 хорды A_1B_1 проводим хорду C_1D_1, которая и есть искомое изображение диаметра CD, перпендикулярного диаметру AB. ◁

при параллельном проектировании (параллельность прямых и отношения отрезков одной прямой или параллельных прямых). На этом основан план решения (для составления которого иногда приходится на оригинале выполнять дополнительные построения).

Поскольку на рисунке 10.6, *а* нет даже изображения центра окружности, то для его получения достаточно построить изображение произвольного диаметра (серединой которого и будет изображение искомого центра).

Рассматривая окружность-оригинал (рис. 10.6, *б*), припоминаем свойства диаметра, которые можно использовать при проектировании, в частности такое: диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее (а значит, и параллельную ей хорду) пополам. Составляем *план построения*: на изображении окружности провести произвольные параллельные хорды; через их середины провести изображение диаметра; через середину полученного отрезка провести хорду, параллельную первым двум хордам.



а *б* *в*

Рис. 10.6

Вопросы для контроля

1. Какой фигурой может быть параллельная проекция треугольника, параллелограмма, трапеции, окружности, если плоскость фигуры не параллельна направлению проектирования?
2. Докажите, что изображением данного треугольника может быть произвольный треугольник.
3. Докажите, что изображением любого параллелограмма может быть произвольный параллелограмм.
4. Докажите, что изображением любой трапеции может быть произвольная трапеция, у которой отношение оснований равно отношению соответствующих оснований оригинала.
5. Объясните, как можно построить проекцию правильного шестиугольника.

Упражнения

10.1. Какие из свойств ромба останутся верными для изображения этого ромба? Какие могут не сохраниться?

10.2. Какие свойства прямоугольника остаются верными для его проекции?

10.3. Дано изображение равнобедренной трапеции, в которую можно вписать окружность. Постройте изображение центра этой окружности.

10.4. Дано изображение равнобедренного треугольника в виде разностороннего треугольника. На этом изображении постройте: 1) изображение биссектрисы угла, противолежащего основанию; 2) изображение перпендикуляра к основанию, проведенного через середину боковой стороны.

10.5. Дан треугольник $A_1B_1C_1$ — изображение треугольника ABC, у которого $AB : BC = 2 : 3$. Постройте изображение биссектрисы угла B.

10.6. Даны изображения треугольника и двух его высот. Постройте изображение центра окружности, описанной около треугольника-оригинала.

10.7. Треугольник $A_1B_1C_1$ — изображение прямоугольного треугольника ABC, у которого отношение катета к гипотенузе $BC : AB = 5 : 12$. Постройте изображение центра окружности, вписанной в треугольник ABC.

10.8. На изображении правильного шестиугольника постройте изображение: 1) биссектрисы одного из его внешних углов; 2) перпендикуляра, опущенного из центра на одну из меньших диагоналей.

10.9. Постройте на изображении ромба изображение его высоты, если острый угол ромба равен 45°.

10.10. Используя изображение окружности в параллельной проекции, постройте изображение вписанного в нее квадрата.

10.11. Постройте изображение прямоугольного треугольника, вписанного в окружность, если задано изображение окружности.

10.12. Используя изображение окружности в параллельной проекции, постройте изображение касательной: 1) параллельной данной хорде; 2) проходящей через данную точку на изображении окружности.

10.13. Изобразите параллельную проекцию квадрата: 1) с вписанной в него окружностью; 2) с описанной около него окружностью.

10.14. Дано изображение окружности. Постройте изображение правильного треугольника: 1) вписанного в данную окружность; 2) описанного около окружности.

10.15. Дано изображение $A_1B_1C_1D_1$ равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD, углы при основании которой равны 45°. Постройте изображение центра окружности, описанной около трапеции.

10.16*. Зная, что в трапецию $ABCD$ с основаниями AB и CD можно вписать окружность, а углы при ее основании равны 90° и 60°, постройте изображение центра вписанной окружности на изображении $A_1B_1C_1D_1$ данной трапеции.

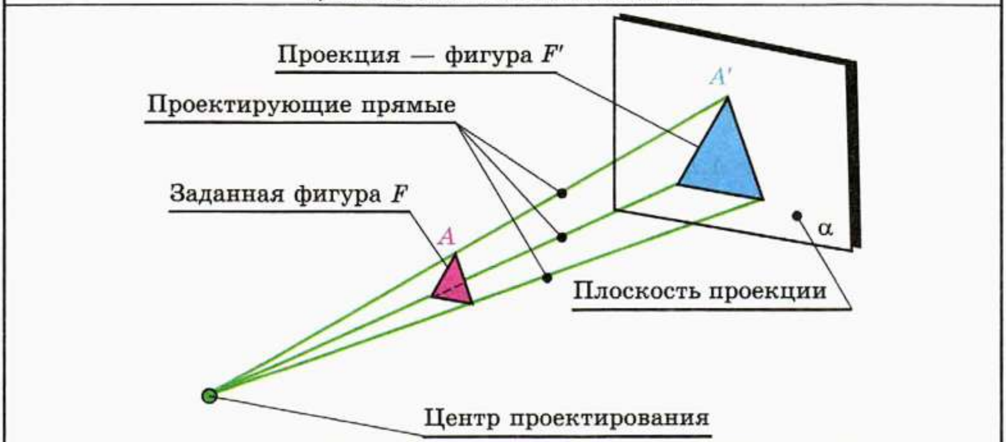
10.17. Дано изображение ромба, у которого одна из диагоналей равна стороне. Изобразите проекции высот ромба, проходящих через точку пересечения диагоналей.

10.18*. Дано изображение равнобедренной трапеции, в которую можно вписать окружность. Обозначьте точки касания этой окружности со сторонами трапеции.

§ 11 ЦЕНТРАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ. ИЗОБРАЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ

Таблица 10

ЦЕНТРАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ



Свойство

Если плоская фигура F расположена в плоскости φ, параллельной плоскости проекций α, то ее центральной проекцией будет фигура F', подобная фигуре F.

Объяснение и обоснование

1. Центральное проектирование. Вместе с параллельным проектированием, которое используют в геометрии для изображения пространственных фигур, большое значение имеет так называемое центральное проектирование, применяющееся в живописи, фотографии и т. п. Восприятие человеком окружающих предметов с помощью зрения осуществляется по законам центрального проектирования.

Пусть α — некоторая плоскость, а не принадлежащая ей точка S — центр проектирования (рис. 11.1). Для точки A пространства проведем прямую a через точки S и A. Точку пересечения этой прямой с плоскостью α называют *центральной проекцией точки* A на плоскость α. Обозначим ее A'.

Соответствие, при котором точкам A пространства ставятся в соответствие их центральные проекции A', называют *центральным проектированием*[1].

Отметим, что центральная проекция не определяется для точек, лежащих в плоскости, проходящей через центр проектирования и параллельной плоскости проектирования (поскольку в этом случае проектирующая прямая SA параллельна плоскости α).

Если F — фигура в пространстве, то центральные проекции всех ее точек на плоскость α образуют фигуру F', которую называют центральной проекцией фигуры F на плоскость α.

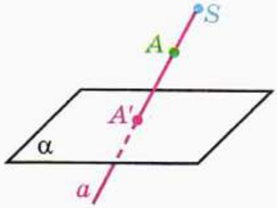


Рис. 11.1

На рисунке 11.2 показано центральное проектирование в случае, когда плоскость проектирования α расположена между фигурой F и центром проектирования S. Если центр проектирования представлять себе как глаз наблюдателя, то восприятие изображения будет таким же, как и от самой фигуры F. Поэтому центральное проектирование дает наиболее наглядное изображение пространственных фигур.

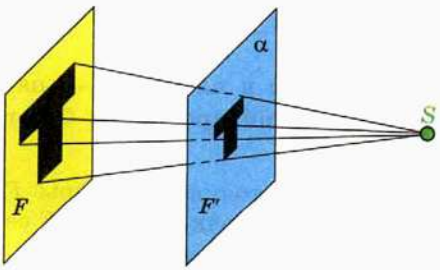


Рис. 11.2

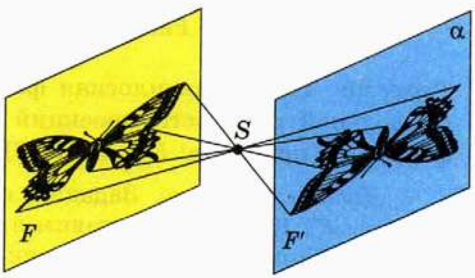


Рис. 11.3

На рисунке 11.3 показано центральное проектирование в случае, когда центр проектирования расположен между фигурой F и плоскостью

[1] Центральное проектирование часто еще называют перспективой.

проекций α. Такое перевернутое изображение получается на пленке фотоаппарата, объектив которого помещен в центр проектирования (рис. 11.4).

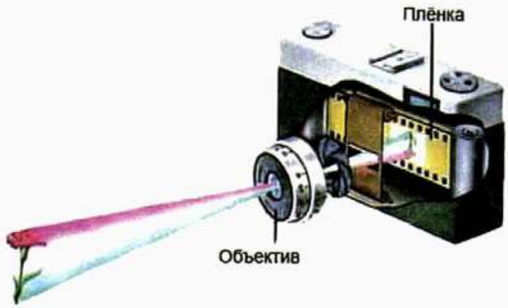


Рис. 11.4

На рисунке 11.5 показано центральное проектирование в случае, когда фигура расположена между плоскостью проектирования и центром проектирования. Примерами таких проекций служат тени предметов от близко расположенного точечного источника света. Они получаются на экране при демонстрации кинофильмов, диафильмов и т. п.

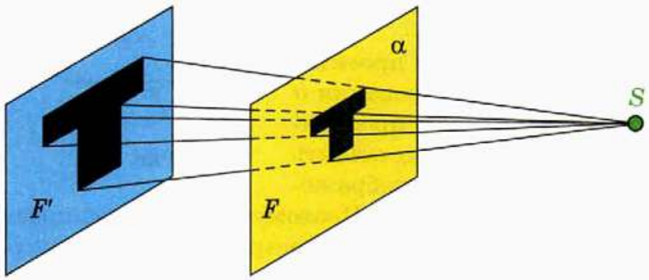


Рис. 11.5

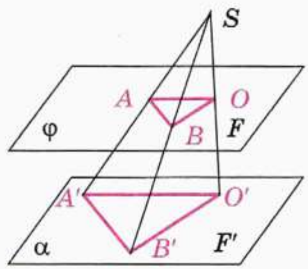


Рис. 11.6

***Теорема* 11.1. Если плоская фигура F расположена в плоскости φ, параллельной плоскости проекций α, то ее центральной проекцией будет фигура F', подобная[1] F** (рис. 11.6).

Доказательство. Зададим соответствие между точками фигуры F и фигуры F'. Для этого поставим в соответствие каждой точке фигуры F ее центральную проекцию. Для точек A, B и O фигуры F на плоскости φ рассмотрим их центральные проекции A', B' и O'. Поскольку плоскости α и φ параллельны, то плоскости SAB и SAO пересекают их по параллельным прямым ($AB \parallel A'B'$, $AO \parallel A'O'$). Тогда треугольники SAB и $SA'B'$ (а также

[1] После того как введено понятие «расстояние от точки до плоскости», можно легко обосновать, что коэффициент подобия фигуры и ее проекции равен отношению расстояний от центра S до плоскостей α и φ.

SAO и $SA'O$) подобны с общим коэффициентом подобия $k=\frac{SA'}{SA}$. Таким образом, данное соответствие между точками фигур F и F' изменяет расстояние между ними в одно и то же число раз. Следовательно, фигуры F и F' подобны с коэффициентом $k=\frac{SA'}{SA}=\frac{SO'}{SO}$.

2. Изображение пространственных фигур в центральной проекции. Выясним, в какую фигуру при центральном проектировании переходит прямая.

Пусть прямая a пересекает плоскость проектирования α и центр проектирования S не принадлежит прямой a. Найдем проекцию этой прямой на плоскость α. Для этого через прямую a и центр проектирования S проведем плоскость β и прямую ее пересечения с плоскостью α обозначим a' (рис. 11.7). В плоскости β через точку S проведем прямую, параллельную прямой a, и точку ее пересечения с прямой a' обозначим S'. Легко видеть, что **прямая a' без точки S' и есть искомая проекция прямой a на плоскость α.**

Как известно, при параллельном проектировании параллельные прямые проектируются в параллельные прямые, или в одну прямую, или в две точки, в зависимости от расположения этих прямых. При центральном проектировании параллельные прямые также могут проектироваться и в параллельные прямые, и в одну прямую (приведите примеры). Однако, в отличие от параллельного, при центральном проектировании параллельные прямые могут проектироваться и в пересекающиеся прямые. Покажем это.

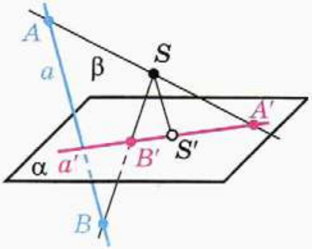


Рис. 11.7

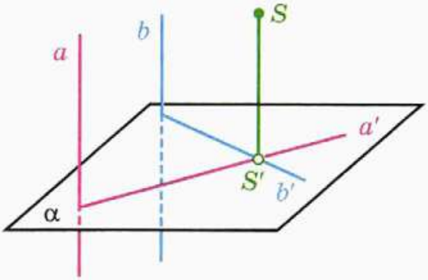


Рис. 11.8

Пусть прямые a и b параллельны и пересекают плоскость α, а центр проектирования S не принадлежит плоскости этих прямых (рис. 11.8). Тогда, выполняя предыдущие построения для прямых a и b, получим, что их проекциями будут прямые a' и b' (пересекающиеся), за исключением их общей точки S'.

Впечатление, что параллельные прямые пересекаются, возникает, когда мы смотрим на дорогу, идущую вдаль, на железнодорожные рельсы и т. п.

Приведем примеры изображения куба в центральной проекции.

На рисунке 11.9 изображен куб в центральной проекции на плоскость, параллельную грани ABB_1A_1. (Объясните, почему в этом случае изображения AD, BC, B_1C_1, A_1D_1 параллельных прямых пересекаются в одной точке.)

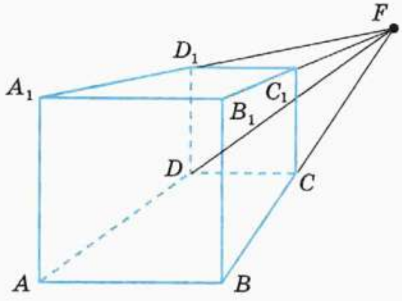


Рис. 11.9

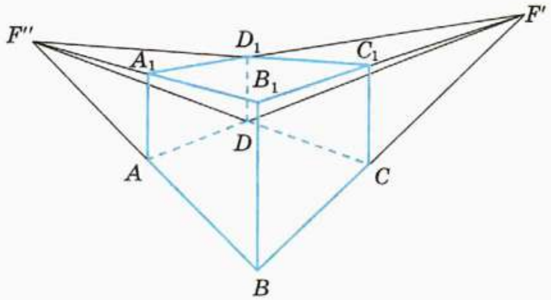


Рис. 11.10

На рисунке 11.10 изображен куб в центральной проекции на плоскость, параллельную ребру BB_1, но не параллельную его граням.

Вопросы для контроля

1. Объясните, что называют центральной проекцией точки и фигуры на данную плоскость.
2. Сформулируйте свойства центрального проектирования.
3*. Докажите свойства центрального проектирования.
4. Какой фигурой может быть центральная проекция прямой?
5. Покажите, что при центральном проектировании параллельные прямые могут проектироваться в пересекающиеся прямые.
6. Приведите пример изображения куба в центральной проекции на плоскость, параллельную одной из граней куба, и объясните его построение.

Упражнения

11.1. Для всех ли точек пространства существует центральная проекция? Если нет, то для каких точек она не существует?

11.2. Могут ли при центральном проектировании параллельные прямые перейти в пересекающиеся прямые?

11.3. В каком случае центральной проекцией двух прямых будут две параллельные прямые?

11.4. Какое изображение фигуры получается при центральном проектировании, если плоскость проектирования расположена между фигурой и центром проектирования?

11.5. Какое изображение фигуры получается при центральном проектировании, если центр проектирования расположен между фигурой и плоскостью проектирования? Где используется такое изображение?

11.6. Какое изображение фигуры получается при центральном проектировании, если фигура расположена между плоскостью проектирования и центром проектирования? Где используется такое изображение?

11.7. Что можно сказать о центральной проекции плоской фигуры, расположенной в плоскости, параллельной плоскости проектирования?

11.8. Сделайте рисунки, аналогичные рисункам 11.2, 11.3, 11.5, для центральных проекций фигуры, изображенной на рисунке 11.11.

Рис. 11.11

11.9. Пусть прямая пересекает плоскость проектирования и не проходит через центр проектирования. Определите, куда при центральном проектировании переходит часть этой прямой, расположенная: а) выше плоскости проектирования; б) ниже плоскости проектирования.

11.10*. Постройте центральную проекцию куба, аналогичную изображенной на рисунке 11.9, так, чтобы точка F лежала внутри изображения грани ABB_1A_1.

11.11*. Постройте центральную проекцию правильной четырехугольной пирамиды на плоскость, не параллельную ее основанию.

§ 12 МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ СЕЧЕНИЙ МНОГОГРАННИКОВ

1. Использование свойств параллельных прямых и плоскостей. Если данный многогранник содержит параллельные грани, которые пересекает секущая плоскость, то по теореме 6.2 прямые пересечения секущей плоскости с этими гранями будут параллельны.

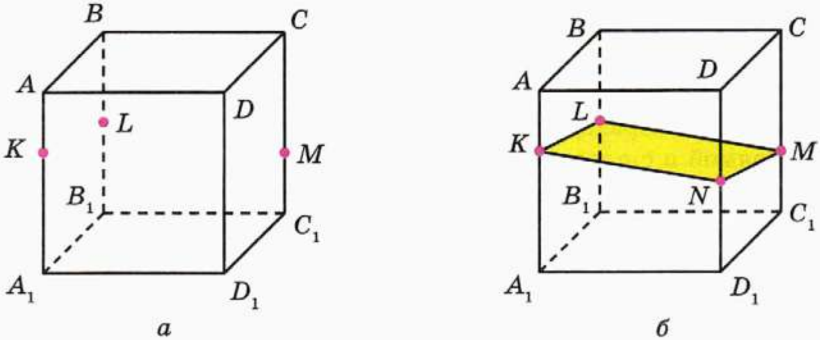


Рис. 12.1

Построим сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 12.1, *а*) плоскостью, проходящей через точки K, L, M на его ребрах ($K \in AA_1$, $L \in BB_1$, $M \in CC_1$). Соединяем отрезками пары точек, лежащих в одной грани: по отрезкам KL и LM (рис. 12.1, *б*) секущая плоскость пересекает грани ABB_1A_1 и BCC_1B_1 соответственно. Противолежащие грани параллелепипеда попарно параллельны, например пл. $AA_1D_1D \parallel$ пл. BCC_1B_1.

Следовательно, секущая плоскость пересекает грань AA_1D_1D по прямой KN, параллельной LM (проводим $KN \parallel LM$, $N \in D_1D$ и соединяем отрезками точки N и M). Четырехугольник $KLMN$ — искомое сечение.

Иногда использование свойств параллельных прямых и плоскостей сочетают с другими методами построения сечения многогранников.

2. Метод следов. Как отмечалось в § 4, для построения более сложных сечений многогранников часто удобно применять метод следов. При его использовании сначала строят прямую пересечения секущей плоскости с плоскостью какой-либо грани (*след* секущей плоскости на этой грани), а затем уже находят точки пересечения секущей плоскости с соответствующими ребрами многогранника (или с их продолжениями). Иногда необходимо рассматривать вспомогательные плоскости, для которых также строится след секущей плоскости (или след этой вспомогательной плоскости на плоскости какой-либо грани). Напоминаем, что *для получения следа* (прямой b) *плоскости* β *на плоскости* α (рис. 12.2) *достаточно найти точки пересечения двух прямых плоскости* α *с плоскостью* β (поскольку две точки, например A и C, однозначно определяют прямую b). *Точка пересечения любой прямой а плоскости* β *с плоскостью* α *всегда лежит на следе плоскости* β *на плоскости* α (на прямой b).

После рассмотрения параллельного и центрального проектирования можно уточнить содержание метода следов, связанного с использованием соответствующих проекций. Если рассматривать след секущей плоскости на плоскости проекции, то вместе с каждой точкой можно рассматривать и ее проекцию на эту плоскость. Тогда для построения соответствующего следа секущей плоскости приходится дважды находить точки пересечения прямой и плоскости по двум заданным точкам этой прямой и их проекциям на плоскость.

Пусть, например, прямая a проходит через точки A и B и известны параллельные (рис. 12.3, *а*) или центральные (рис. 12.3, *б*) проекции A', B' этих точек на плоскость α. Тогда точка M пересечения прямой a с ее проекцией — прямой a' (проходящей через точки A' и B') и будет искомым пересечением прямой a с плоскостью α. Следовательно,

чтобы найти точку пересечения прямой с плоскостью проекций, достаточно найти точку пересечения прямой с ее проекцией на эту плоскость.

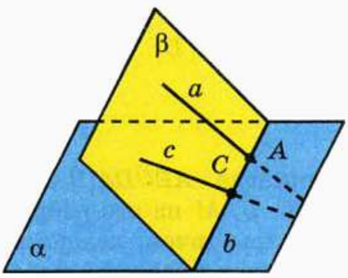
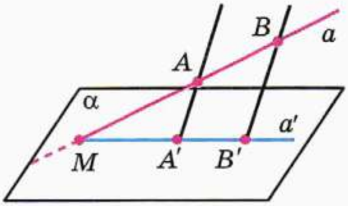
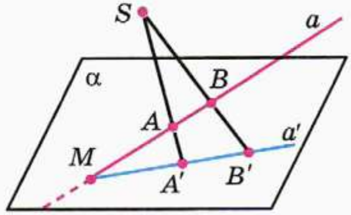


Рис. 12.2

Таким образом, для построения сечений многогранников методом следов мы можем использовать параллельное проектирование (в задачах, связанных с призмами) или центральное проектирование (в задачах, связанных с пирамидой). Часто в качестве плоскости проекции выбирают плоскость основания многогранника (как центр проектирования — вершину пирамиды, противолежащую основанию).



а



б

Рис. 12.3

С помощью метода следов построим сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через три точки K, L, M, лежащие на попарно скрещивающихся ребрах куба (рис. 12.4).

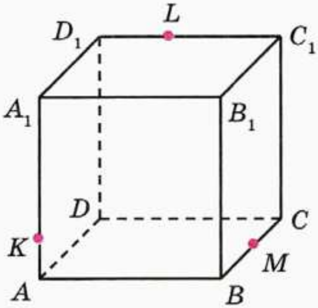


Рис. 12.4

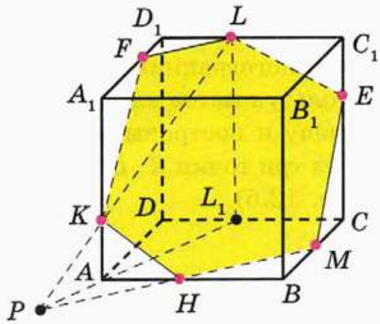


Рис. 12.5

Рассмотрим параллельное проектирование заданных точек на плоскость основания $ABCD$ в направлении бокового ребра куба. Тогда проекциями точек K, M, L будут соответственно точки A, M, L_1, где $LL_1 \parallel D_1D$ (рис. 12.5).

Найдем точку пересечения прямой LK, лежащей в секущей плоскости, с плоскостью основания куба. Пересечение прямой LK с ее проекцией L_1A и есть искомая точка P, принадлежащая секущей плоскости и плоскости основания куба. Следовательно, секущая плоскость пересекает основание куба по прямой MP (это и есть след секущей плоскости на плоскости основания куба). Точка H пересечения этой прямой с ребром AB дает еще одну точку сечения куба. Соединяем точки K и H, H и M отрезками.

Далее используем параллельность противолежащих граней куба, которые секущая плоскость пересекает по параллельным прямым. Через точку L проведем прямую, параллельную KH, и точку ее пересечения с ребром CC_1 куба обозначим E. Соединим точки E и M отрезком. Через точку L также проведем прямую, параллельную HM, и точку ее пересечения с ребром A_1D_1 куба обозначим F. Соединим точки L и F, K и F отрезками. Шестиугольник $KHMELF$ и будет искомым сечением куба заданной плоскостью.

Метод следов достаточно сложно применить на практике, если точка пересечения прямой, лежащей в секущей плоскости, и ее проекции находятся вне пределов листа бумаги, на котором выполняется построение сечения. В этом случае используют другой метод, позволяющий выполнять все необходимые построения в пределах изображения данного многогранника.

3. Метод внутреннего проектирования. Суть его заключается в следующем. Имея три точки, задающие секущую плоскость, находят их проекции на некоторую плоскость (чаще всего на плоскость основания многогранника). Также находят проекцию некоторой, еще не построенной, точки сечения. (Эту неизвестную точку, как правило, выбирают на боковом ребре многогранника таким образом, чтобы какие-нибудь два отрезка, соединяющие четыре точки-проекции, пересекались во внутренней точке этих отрезков.) По трем данным точкам и четырем проекциям находят четвертую точку, принадлежащую секущей плоскости. Если нужно, таким же образом получают пятую, шестую и последующие точки, принадлежащие секущей плоскости и ребрам многогранника, то есть получают сечение.

Используя метод внутреннего проектирования, еще раз решим предыдущую задачу и построим сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через три точки K, L, M, лежащие на попарно скрещивающихся ребрах куба (рис. 12.6).

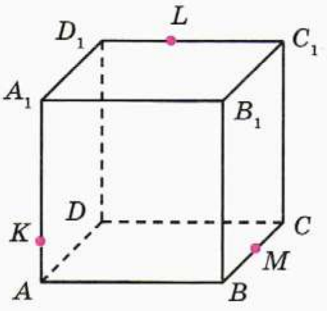


Рис. 12.6

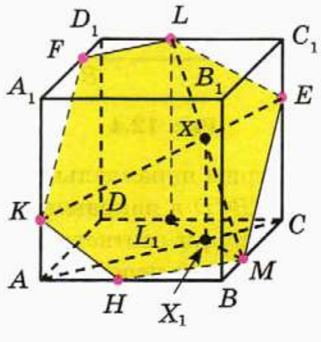


Рис. 12.7

Рассмотрим параллельное проектирование данных точек на плоскость основания $ABCD$ в направлении бокового ребра куба. Тогда проекциями точек K, M, L будут соответственно точки A, M, L_1, где $LL_1 \parallel D_1D$ (рис. 12.7). Найдем точку E пересечения секущей плоскости с ребром CC_1. Проекцией точки E на плоскость основания является точка C. Соединяем четыре полученные точки-проекции двумя отрезками AC и L_1M, пересекающимися в точке X_1. Точка X_1 — проекция некоторой точки X секущей плоскости, в которой прямая LM пересекается с пока еще не полностью найденной прямой KE. Проведя через точку X_1 прямую, параллельную направлению проектирования ($X_1X \parallel L_1L$), получаем в пересечении ее с прямой LM точку X. Теперь проводим прямую KX до пересечения ее с ребром CC_1 в точке E. Соединяя отрезками полученную точку E с заданными точками L и M, получаем две стороны искомого сечения.

Последующие построения, как и при первом способе решения, опираются на параллельность противолежащих граней куба, которые секущая плоскость пересекает по параллельным прямым. Через точку K проведем прямую, параллельную LE, и точку ее пересечения с ребром AB обозначим H. Соединяем отрезком точки H и M. Затем через точку K проведем прямую, параллельную ME, точку ее пересечения с ребром A_1D_1 обозначим F и соединим отрезком точки L и F. Шестиугольник $KHMELF$ — искомое сечение куба заданной плоскостью.

Вопросы для контроля

1. Приведите пример использования свойств параллельных прямых и плоскостей для построения сечения многогранника.
2. Объясните, как можно найти след прямой на плоскости, используя проекцию прямой на эту плоскость.
3. Объясните суть метода внутреннего проектирования для построения сечений многогранников.

Упражнения

12.1. Можно ли в сечении куба плоскостью получить: 1) треугольник; 2) правильный треугольник; 3) равнобедренный треугольник; 4) прямоугольный треугольник; 5) тупоугольный треугольник? Если можно, проиллюстрируйте, как это сделать; если — нет, то обоснуйте почему.

12.2. Можно ли в сечении куба плоскостью получить: 1) квадрат; 2) ромб; 3) прямоугольник; 4) трапецию; 5) параллелограмм; 6) прямоугольную трапецию?

12.3. Можно ли в сечении куба плоскостью получить: 1) пятиугольник; 2) правильный пятиугольник?

12.4. Можно ли в сечении куба плоскостью получить: 1) шестиугольник; 2) правильный шестиугольник; в) многоугольник с числом сторон, большим шести?

12.5. Какой фигурой является сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершины A_1, C и точку K — середину ребра DD_1?

12.6. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки M, N, K — середины соответственно ребер A_1D_1, C_1D_1, AB. Определите форму сечения.

12.7. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки K, L, M, расположенные так, как показано на рисунке 12.8. Определите форму сечения.

12.8. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершины B, D и точку M, взятую на ребре C_1D_1. Определите форму сечения.

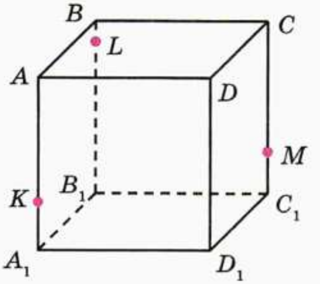


Рис. 12.8

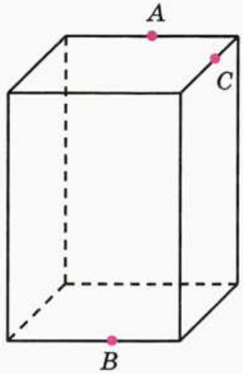


Рис. 12.9

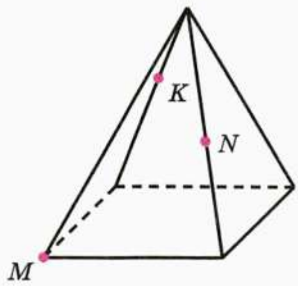


Рис. 12.10

12.9. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда плоскостью, проходящей через три точки, расположенные так, как показано на рисунке 12.9.

12.10. Постройте сечение правильной четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через точки, указанные на рисунке 12.10.

12.11. Постройте сечение правильной четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через середину бокового ребра параллельно боковой грани.

12.12. Какие многоугольники можно получить в сечении четырехугольной пирамиды плоскостью?

12.13*. Можно ли в сечении правильного тетраэдра плоскостью получить квадрат?

12.14. Постройте сечение правильной шестиугольной призмы плоскостью, проходящей через точки, изображенные на рисунке 12.11.

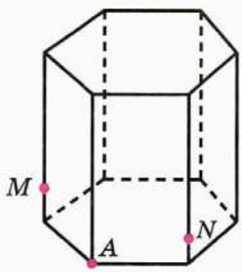


Рис. 12.11

12.15. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ постройте сечение плоскостью, проходящей через вершины C и D_1 и точку K отрезка B_1C_1.

12.16. В тетраэдре $ABCD$ постройте сечение плоскостью, проходящей через середину ребра DC и вершину B и параллельной прямой AC.

12.17. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ постройте сечение плоскостью, проходящей через середину ребра A_1D_1 и вершины D и C_1.

12.18. В тетраэдре $DABC$ постройте сечение плоскостью, проходящей через вершину A и точку M ребра DB и параллельной прямой BC.

12.19. В тетраэдре $DABC$ точки E, P, M принадлежат соответственно ребрам AD, DB, BC, причем прямые EP и AB не параллельны. Постройте сечение тетраэдра плоскостью EPM.

12.20. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка E принадлежит ребру CD. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через эту точку и параллельной плоскости BC_1D.

12.21. В тетраэдре $DABC$ точки E, K, P принадлежат ребрам AB, DB и DC соответственно, причем PK не параллельна BC. Постройте сечение тетраэдра плоскостью EKP.

12.22. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка H принадлежит ребру CD. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через эту точку и параллельной плоскости ACD_1.

12.23. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Постройте сечение куба плоскостью и найдите площадь сечения, если плоскость сечения проходит через: 1) вершины A и D_1 и середину ребра BB_1; 2) вершину A параллельно плоскости DBC_1; 3) середины ребер BB_1 и B_1C_1 и середину отрезка AB_1.

СВЕДЕНИЯ ИЗ ИСТОРИИ

Центральное проектирование, или перспективу, как способ изображения пространственных тел использовали еще древние греки. Первые упоминания о перспективе встречаются в работах Эсхила (525–456 гг. до н. э.). Значительное место изображению пространственных фигур с использованием перспективы уделил в трактате «О геометрии» известный мыслитель и ученый Демокрит (ок. 460–370 гг. до н. э.).

Следующее упоминание о перспективе находим в работах Евклида. Кроме своих знаменитых «Начал», он написал много других произведений. В частности, в работе «Оптика» Евклид с позиций геометрии дал подробное описание природы человеческого зрения, изложил, как получается изображение разных предметов на сетчатке глаза. Евклид писал, что мы ощущаем предметы, когда прямолинейные лучи, идущие от них, сходятся в нашем глазу. Поэтому всю систему лучей зрения можно представить себе в виде пирамиды, вершина которой находится в глазу, а основой ее служит рассматриваемый нами предмет. Евклид ввел также постулат о том, что видимые размеры предмета зависят от угла, под которым его рассматривают.

Самыми выдающимися работами по перспективе времен античности считаются произведения римского архитектора и инженера Марка Витрувия Поллиона (точные даты его жизни не установлены, полагают, что он жил ок. 25 г. до н. э.). Способы построения изображений в перспективе ученый изложил в труде «Об архитектуре», состоящей из десяти книг.

Следующим важным этапом в развитии теории перспективы стала эпоха Возрождения. Здесь теоретиком перспективы считают итальянского архитектора Филиппо Брунеллески (1377–1446). На практике теоретические достижения воплотили в своих полотнах великие художники Леонардо да Винчи (1452–1519), Альбрехт Дюрер (1471–1528) и многие другие.

А. Дюрер предложил в своих книгах несколько устройств, позволяющих получать перспективу, некоторые из них он изобразил на гравюрах. Например, на одной из них (рис. 12.12) показано, что для получения перспективного изображения предмета между глазом наблюдателя и этим предметом помещается рамка, разделенная сеткой на небольшие квадраты. С помощью натянутой нити сначала копируют контуры модели, а затем полученное изображение переносят на бумагу.

Леонардо да Винчи в своем произведении «Трактат о живописи» делит перспективу на три основных вида:

1) линейную перспективу, которая изучает законы построения уменьшения фигур по мере удаления их от наблюдателя;
2) воздушную и цветовую перспективу, трактующую изменение цвета предметов в зависимости от их расстояния до наблюдателя и влияние слоя воздуха на насыщенность и локальность цвета;
3) перспективу четкости контура предмета, определяющую степень выразительности границ фигур и контраста света и тени на них по мере удаления их в глубину пространства, изображаемого на картине.

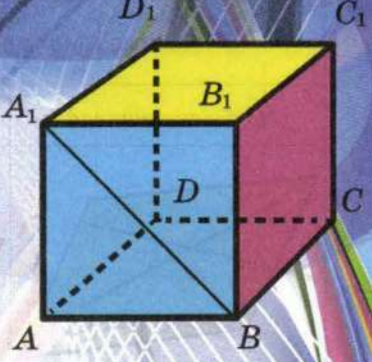
Два последних вида из-за своей сложности не получили последующего теоретического развития. Исследования линейной перспективы заложили основы инженерной науки — начертательной геометрии.

Основателем этого раздела геометрии считают французского ученого, геометра, инженера и активного общественного деятеля Великой французской революции Гаспара Монжа (1746–1818). Его книга «Начертательная геометрия», изданная в 1795 г., была первым систематическим изложением методов изображения пространственных фигур на плоскости.

Рис. 12.12

Раздел 4

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ



ОСНОВНОЙ МАТЕРИАЛ

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ

В *основной части* раздела вы:

ознакомитесь с основными понятиями и свойствами перпендикулярности прямых и плоскостей в пространстве, углами в пространстве;

научитесь применять эти понятия и свойства для решения геометрических задач на доказательство и вычисление расстояний и углов в пространстве.

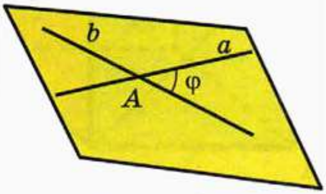
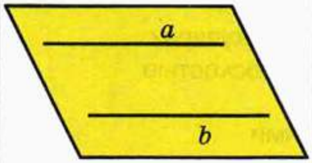
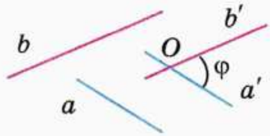
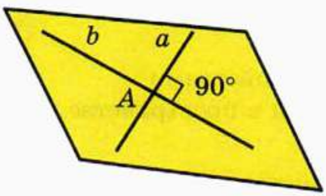
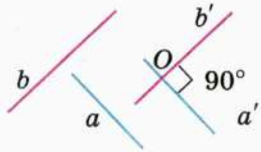
В *дополнительной части* раздела вы:

ознакомитесь с обобщением понятий расстояния в геометрии и геометрического места точек;

научитесь решать более сложные задачи, связанные с перпендикулярностью прямых и плоскостей в пространстве.

§ 13 УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ В ПРОСТРАНСТВЕ. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ

Таблица 11

<table>
<tr><td colspan="3">УГЛЫ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ В ПРОСТРАНСТВЕ</td></tr>
<tr><td colspan="2">Прямые лежат в одной плоскости</td><td>Прямые не лежат в одной плоскости</td></tr>
<tr><td>пересекающиеся</td><td>параллельные</td><td>скрещивающиеся</td></tr>
<tr><td>
φ — меньший[1] из образованных углов
$\angle(a; b) = \varphi$
$0^\circ < \varphi \leqslant 90^\circ$</td><td>
$\angle(a; b) = 0^\circ$
$\varphi = 0^\circ$</td><td>
$a' \parallel a,$
$b' \parallel b$
$\angle(a; b) = \angle(a'; b') = \varphi$
$0^\circ < \varphi \leqslant 90^\circ$</td></tr>
<tr><td colspan="3">ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ ($a \perp b$)</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">$\angle(a; b) = 90^\circ$</td><td>$\angle(a; b) = 90^\circ$</td></tr>
</table>

[1] Если при пересечении прямых все образованные углы оказались равными (по 90°), то за угол между прямыми принимают любой из них.

Объяснение и обоснование

Как уже отмечалось в разделе 2, две прямые в пространстве могут лежать в одной плоскости (когда они пересекаются или параллельны) или не лежать в одной плоскости (тогда они скрещивающиеся). Дадим определение угла между прямыми в пространстве в каждом из этих случаев.

Две пересекающиеся прямые образуют смежные и вертикальные углы. Вертикальные углы равны, а смежные углы дополняют друг друга до 180°.

Определение. ***Углом между двумя пересекающимися прямыми*** **называют наименьший из углов, образованных лучами этих прямых с вершиной в точке их пересечения.**

Как и на плоскости, **две пересекающиеся прямые в пространстве называются *перпендикулярными*, если они пересекаются под прямым углом. Угол между двумя параллельными (или совпадающими) прямыми считают равным нулю.**

Также будем полагать, что два отрезка перпендикулярны, если они лежат на перпендикулярных прямых.

Если обозначить угол между прямыми, лежащими в одной плоскости, через φ, то из определения следует, что $0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$.

Например, в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 13.1) пересекающиеся ребра перпендикулярны, диагональ A_1B грани куба образует с ее ребрами углы по 45°.

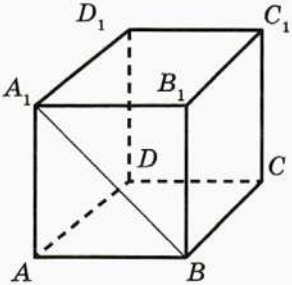


Рис. 13.1

Используя свойства параллельного проектирования, докажем следующую теорему.

***Теорема* 13.1. Угол между пересекающимися прямыми равен углу между пересекающимися прямыми, параллельными данным прямым.**

Доказательство. Случай, когда прямые лежат в одной плоскости, рассматривался в планиметрии. Пусть прямые a и b пересекаются в точке O и лежат в плоскости α, а соответственно параллельные им прямые a_1 и b_1 ($a_1 \parallel a$ и $b_1 \parallel b$) пересекаются в точке O_1 и лежат в плоскости β (рис. 13.2). По признаку параллельности плоскости α и β параллельны.

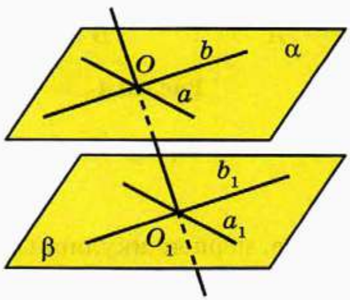


Рис. 13.2

Рассмотрим параллельное проектирование в направлении прямой OO_1 на плоскость β. Поскольку плоскость, проходящая через прямые a и OO_1, пересекает плоскость β по прямой a_1, а плоскость, проходящая через прямые b и OO_1, — по прямой b_1, то проекциями

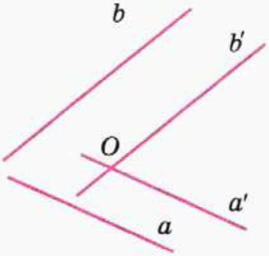


Рис. 13.3

прямых a и b на плоскость β являются прямые a_1 и b_1 соответственно. Из свойств параллельного проектирования следует, что если плоская фигура F (например, меньший из углов, образованных лучами прямых a и b, с вершиной в точке O) лежит в плоскости α, параллельной плоскости проектирования β, то ее проекция на плоскость β равна фигуре F.

Следовательно, угол между прямыми a и b равен углу между прямыми a_1 и b_1. ○

Введем теперь понятие «угол между скрещивающимися прямыми».

Пусть a и b — скрещивающиеся прямые (рис. 13.3). Рассмотрим какую-нибудь точку O в пространстве и проведем через нее прямые a' и b', параллельные прямым a и b соответственно. Угол между прямыми a' и b' принимается за угол между прямыми a и b.

Определение. ***Углом между скрещивающимися прямыми называют*** **угол между пересекающимися прямыми, которые параллельны данным скрещивающимся прямым.**

Поскольку по теореме 13.1 углы, образованные прямыми с соответственно параллельными сторонами, равны, то это определение не зависит от выбора точки O. В частности, точка O может принадлежать также прямой a или b. В этом случае за прямую a' или b' следует принять соответственно прямую a или b.

Если обозначить угол между скрещивающимися прямыми через φ, то из приведенного определения следует, что $0° < \varphi \leqslant 90°$.

Две скрещивающиеся прямые называют *перпендикулярными*, если угол между ними прямой.

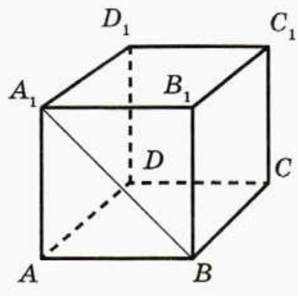


Рис. 13.4

Например, в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 13.4) скрещивающиеся ребра AA_1 и BC перпендикулярны, поскольку $BB_1 \parallel AA_1$ (ABB_1A_1 — квадрат). Следовательно, $\angle (AA_1; BC) = \angle (BB_1; BC) = \angle B_1BC = 90°$, то есть $AA_1 \perp BC$.

Примеры решения задач

Задача 1. Из планиметрии известно, что две прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны. Верно ли это утверждение для стереометрии?

Решение

▶ Это утверждение неверно, если все три прямые не лежат в одной плоскости.

Например, в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 13.4) прямые AA_1 и BC перпендикулярны прямой AB, но не параллельны (они скрещивающиеся, так как не лежат в одной плоскости). Также, например, пересекающиеся прямые AA_1 и AD перпендикулярны прямой AB, но не параллельны. ◁

Комментарий

На вопрос «Верно ли утверждение?» может быть ответ «Да», и тогда нужно доказать это утверждение для всех возможных случаев. Если ответ «Нет», то достаточно привести хотя бы один пример, когда утверждение не выполняется (так называемый контрпример). Этот пример можно сконструировать самому или найти его среди элементов известных фигур.

Задача 2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 13.5) найдите угол между прямыми A_1C_1 и B_1C.

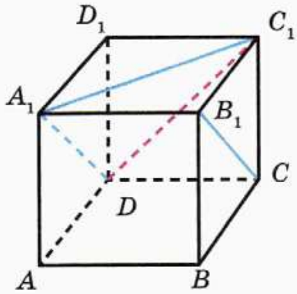


Рис. 13.5

Решение

▶ Рассмотрим плоскость, проходящую через параллельные ребра куба A_1B_1 и DC и пересекающую параллельные грани куба AA_1D_1D и BB_1C_1C по параллельным прямым A_1D и B_1C ($A_1D \parallel B_1C$). Но тогда угол между скрещивающимися прямыми A_1C_1 и B_1C равен углу между прямыми A_1C_1 и A_1D.

Соединяя точки D и C_1 отрезком, получаем равносторонний треугольник A_1C_1D (его стороны равны как диагонали равных квадратов). Отсюда $\angle C_1A_1D = 60°$.

Следовательно, $\angle (A_1C_1; B_1C) = 60°$.

Ответ: 60°. ◁

Комментарий

Прямые A_1C_1 и B_1C скрещивающиеся. Чтобы найти угол между ними, можно провести через произвольную точку пространства параллельные им прямые или через точку одной прямой — прямую, параллельную другой прямой.

Можно построить соответствующую параллельную прямую в пространстве (объединив каким-либо образом с элементами куба) или получить как элемент данного многогранника. Для этого достаточно вспомнить, что произвольная плоскость пересекает параллельные грани куба по параллельным прямым.

Вопросы для контроля

1. Дайте определение углов между прямыми в пространстве (между пересекающимися прямыми; между параллельными прямыми; между скрещивающимися прямыми).
2. Сформулируйте свойство углов, образованных соответственно параллельными прямыми.
3*. Докажите свойство углов, образованных соответственно параллельными прямыми.
4. Какие прямые в пространстве называют перпендикулярными? Приведите примеры таких прямых, пользуясь моделью прямоугольного параллелепипеда.

Упражнения

13.1°. Чему равен угол между пересекающимися ребрами: 1) куба; 2) правильного тетраэдра?

13.2°. Найдите угол между диагональю грани куба и пересекающим ее ребром.

13.3°. Найдите угол между пересекающимися диагоналями двух различных граней куба.

13.4°. Даны прямая в пространстве и точка на ней. Сколько можно построить прямых, проходящих через эту точку и перпендикулярных данной прямой? Ответ проиллюстрируйте на модели.

13.5°. Даны прямая и точка вне ее. Сколько можно построить прямых, проходящих через эту точку и перпендикулярных данной прямой?

13.6°. Даны плоскость и параллельная ей прямая. Сколько прямых, перпендикулярных этой прямой, можно провести в данной плоскости?

13.7. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ докажите перпендикулярность прямых: 1) BC и C_1D_1; 2) BD и A_1C_1; 3) BD и AA_1.

13.8. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите углы, образованные прямыми: 1) AA_1 и B_1C_1; 2) AA_1 и CC_1; 3) BB_1 и CD.

13.9. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите углы между скрещивающимися прямыми: 1) AB и B_1D_1; 2) AB_1 и BC_1.

13.10. В правильной четырехугольной пирамиде со стороной основания, равной боковому ребру, найдите угол между скрещивающимися стороной основания и боковым ребром.

13.11. A, B, C — точки на попарно перпендикулярных лучах OA, OB, OC, не лежащие в одной плоскости. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что $OA = OB = OC$.

13.12. Прямые AB, AC и AD попарно перпендикулярны (рис. 13.6). Найдите отрезок CD, если: 1) $AB = 3$ см, $BC = 7$ см, $AD = 1{,}5$ см; 2) $BD = 9$ см, $BC = 16$ см, $AD = 5$ см; 3) $AB = b$, $BC = a$, $AD = d$.

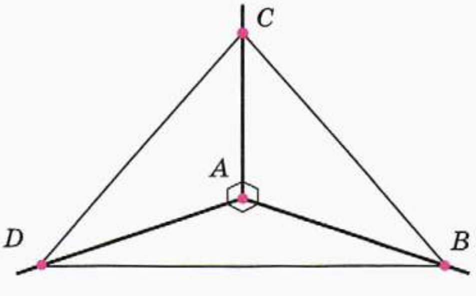


Рис. 13.6

13.13*. Диагональ прямоугольного параллелепипеда, в основании которого лежит квадрат, вдвое больше стороны основания. Найдите углы между диагоналями параллелепипеда.

13.14. Прямые a и b параллельны. Прямые a и c пересекаются под прямым углом. Укажите взаимное расположение прямых b и c и угол между ними.

13.15. Прямые a и b параллельны. Прямые a и c пересекаются под углом 30°. Укажите взаимное расположение прямых b и c и угол между ними.

13.16. Докажите, что если две пересекающиеся прямые параллельны соответственно двум перпендикулярным прямым, то они также перпендикулярны.

13.17*. В пространственном четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны. Докажите, что прямые AB и CD образуют равные углы с прямой, проходящей через середины отрезков BC и AD.

13.18*. Все грани четырехугольной призмы — ромбы с углом 60°. Найдите угол между скрещивающимися меньшими диагоналями двух смежных граней призмы.

13.19. Докажите, что если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой прямой.

13.20. Точки K и M — середины ребер AB и DC треугольной пирамиды $DABC$, каждое ребро которой равно a. Докажите, что $KM \perp AB$. Найдите длину отрезка KM.

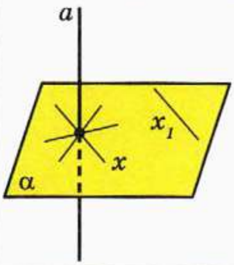
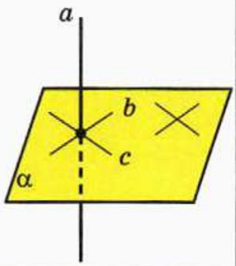
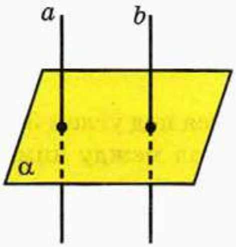
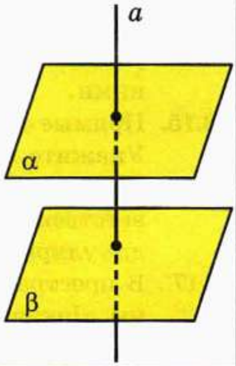
13.21*. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что прямая BD перпендикулярна прямой BB_1.

13.22. Найдите длину диагонали AC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если его ребро равно a.

13.23*. Найдите угол между скрещивающимися диагональю грани куба и диагональю куба.

§ 14 ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Таблица 12

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ	
Определение	Признак
 $\boxed{a \perp \alpha} \Leftrightarrow \boxed{a \perp x}$ x — любая прямая плоскости α $\boxed{a \perp x_1}$	**Если** $a \perp b$ и $a \perp c$ (b и c лежат в плоскости α и пересекаются), **то** $a \perp \alpha$. 
ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬЮ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬЮ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ	
 **Если** $a \parallel b$ и $a \perp \alpha$, **то** $\alpha \perp b$. **Если** $a \perp \alpha$ и $b \perp \alpha$, **то** $a \parallel b$.	**Если** $\alpha \parallel \beta$ и $a \perp \alpha$, **то** $a \perp \beta$. **Если** $\alpha \perp a$ и $\beta \perp a$, **то** $\alpha \parallel \beta$. 

Объяснение и обоснование

1. Перпендикулярность прямой и плоскости. В § 13 мы рассмотрели перпендикулярность прямых в пространстве.

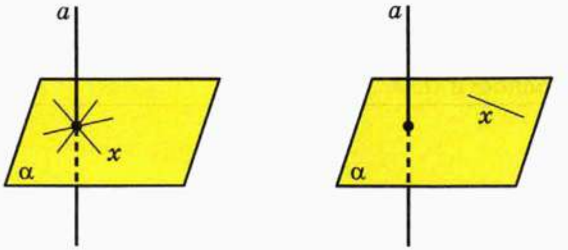
Определение. **Прямую называют *перпендикулярной плоскости*, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.**

Отрезок будем называть перпендикулярным плоскости, если он лежит на прямой, перпендикулярной этой плоскости.

Обозначают перпендикулярность прямой a и плоскости α таким образом: $a \perp \alpha$ или $\alpha \perp a$. Следовательно, по определению, если $a \perp \alpha$ и произвольная прямая x лежит в плоскости α, то $a \perp x$ (рис. 14.1, *а*, *б*).

Отметим, что прямая, перпендикулярная плоскости, обязательно пересекает эту плоскость. Действительно, если бы прямая лежала в плоскости или была ей параллельна, то в этой плоскости нашлась бы прямая, параллельная данной, а значит, данная прямая не перпендикулярна данной плоскости.

***Теорема* 14.1** (признак перпендикулярности прямой и плоскости). **Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.**



а *б*

Рис. 14.1

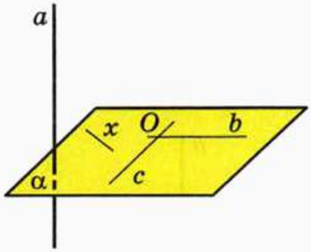


Рис. 14.2

Доказательство. Пусть прямая a перпендикулярна прямым b и c плоскости α, пересекающимся в точке O (рис. 14.2). Рассмотрим произвольную прямую x плоскости α. Докажем, что прямая a перпендикулярна прямой x.

Поскольку дальнейшие рассуждения связаны с дополнительными построениями и рассмотрением пяти пар равных треугольников, приведем дальнейшее доказательство вместе с его планом.

План	*Продолжение доказательства*
I. Выполнить дополнительные построения, для того чтобы: 1) получить углы между данными прямыми, если они скрещивающиеся (как показано на рисунке); 2) объединить данные и полученные элементы в треугольники.	Проведем через точку O прямые a' и x', параллельные соответственно прямым a и x (рис. 14.3). Для доказательства перпендикулярности прямых a и x достаточно доказать перпендикулярность прямых a' и x'. Для этого в плоскости α проведем прямую, не проходящую через точку O и пересекающую прямые b, x', c в точках B, X, C соответственно. Отложим на прямой a' от точки O равные отрезки $OA = OD$ и соединим точки A и D с точками B, X, C отрезками.
II. Последовательно обосновать равенство треугольников: 1) $\triangle AOC = \triangle DOC$; 2) $\triangle AOB = \triangle DOB$; 3) $\triangle ABC = \triangle DBC$;	Прямоугольные треугольники AOC и DOC равны (по двум катетам). Следовательно, $AC = DC$. Аналогично из равенства прямоугольных треугольников AOB и DOB получаем $AB = BD$. Тогда треугольники ABC и DBC равны (по трем сторонам). Следовательно, $\angle ABC = \angle DBC$.

Окончание таблицы

4) $\triangle ABX = \triangle DBX$; 5) $\triangle AOX = \triangle DOX$.	Треугольники ABX и DBX равны (по двум сторонам и углу между ними). Тогда получаем $AX=DX$. Треугольники AOX и DOX равны (по трем сторонам), следовательно, $\angle AOX = \angle DOX = 90°$.
III. Сделать вывод о перпендикулярности прямых a' и x', a и x, прямой a и плоскости α.	Таким образом, прямые a' и x' перпендикулярны. Но тогда перпендикулярны и прямые a и x, а это значит, что прямая a перпендикулярна плоскости α. ○

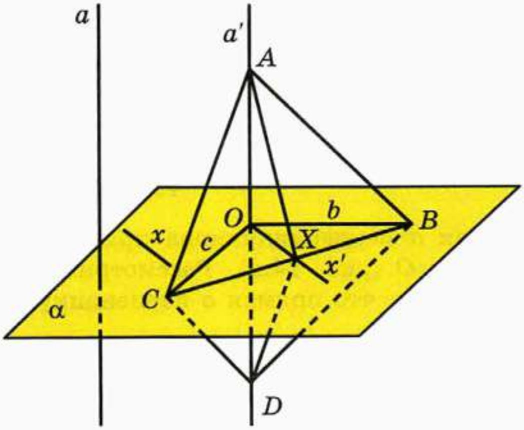


Рис. 14.3

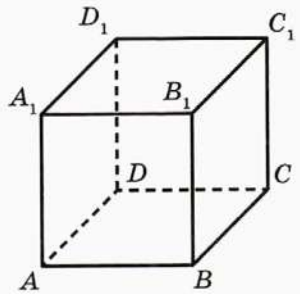


Рис. 14.4

Например, в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 14.4) боковое ребро AA_1 перпендикулярно прямым AB и AD плоскости основания $ABCD$. Следовательно, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости это боковое ребро перпендикулярно плоскости основания $ABCD$.

2. Зависимость между параллельностью и перпендикулярностью прямых и плоскостей.

Теорема **14.2. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости.**

● *Доказательство.* Пусть прямые a и m параллельны ($m \parallel a$) и прямая a перпендикулярна плоскости α (рис. 14.5). Докажем, что $m \perp \alpha$.

Выберем в плоскости α две произвольные пересекающиеся прямые b и c. Поскольку $a \perp \alpha$, то по определению перпендикулярности прямой и плоскости $a \perp b$ и $a \perp c$. Если $m \parallel a$, то $m \perp b$ и $m \perp c$ (так как по определению угла между скрещивающимися прямыми $\angle (a; b) = \angle (m; b)$ и $\angle(a; c) = \angle(m; c)$). Тогда по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $m \perp \alpha$. ○

***Теорема* 14.3. Две прямые, перпендикулярные одной плоскости, параллельны.**

● *Доказательство.* Пусть прямые a и b перпендикулярны плоскости α (рис. 14.6). Докажем, что $a \parallel b$, методом от противного. Допустим, что прямые a и b не параллельны. Выберем на прямой b какую-либо точку M и проведем через нее прямую b_1, параллельную a. Поскольку $a \perp \alpha$, то $b_1 \perp \alpha$ по теореме 14.2. Если точки B и C — соответственно точки пересечения прямых b и b_1 с плоскостью α, то в треугольнике MBC получаем два прямых угла, что невозможно. Следовательно, наше предположение неверно и прямые a и b параллельны. ○

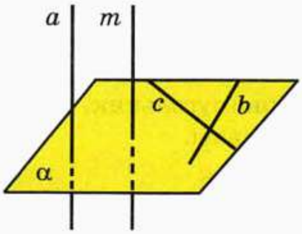


Рис. 14.5

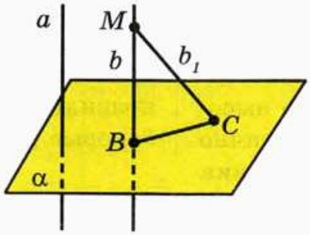


Рис. 14.6

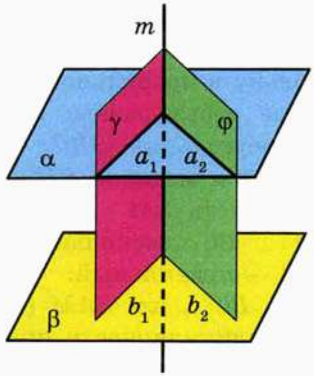


Рис. 14.7

***Теорема* 14.4. Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой плоскости.**

● *Доказательство.* Пусть плоскости α и β параллельны ($\alpha \parallel \beta$) и прямая m перпендикулярна плоскости α ($m \perp \alpha$) (рис. 14.7). Докажем, что $m \perp \beta$.

Проведем через прямую m две различные плоскости γ и φ, пересекающие плоскость α по прямым a_1 и a_2, а плоскость β — по прямым b_1 и b_2 соответственно. Поскольку $\alpha \parallel \beta$, то $a_1 \parallel b_1$ и $a_2 \parallel b_2$. По условию $m \perp \alpha$, тогда $m \perp a_1$ и $m \perp a_2$. В каждой из плоскостей γ и φ прямая m перпендикулярна одной из параллельных прямых, а следовательно, перпендикулярна и другой, то есть $m \perp b_1$ и $m \perp b_2$. Но тогда $m \perp \beta$. ○

***Теорема* 14.5** (признак параллельности плоскостей). **Две различные плоскости, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны.**

● *Доказательство.* Пусть плоскости α и β перпендикулярны прямой m (рис. 14.7). Докажем, что $\alpha \parallel \beta$. Проведем через прямую m две различные плоскости γ и φ, пересекающие плоскость α по прямым a_1 и a_2, а плоскость β — по прямым b_1 и b_2 соответственно. Поскольку по условию $m \perp \alpha$, то $m \perp a_1$ и $m \perp a_2$. Также по условию $m \perp \beta$, тогда $m \perp b_1$ и $m \perp b_2$. В каждой из плоскостей γ и φ получаем по две прямые, перпендикулярные одной прямой m. Следовательно, $a_1 \parallel b_1$ и $a_2 \parallel b_2$, то есть две пересекающиеся прямые плоскости α параллельны соответственно двум прямым плоскости β. Таким образом, $\alpha \parallel \beta$. ○

Примеры решения задач

Задача 1. Докажите, что **в правильной треугольной пирамиде скрещивающиеся ребра перпендикулярны.**

Решение	*Комментарий*
▶ Пусть $SABC$ — правильная пирамида (рис. 14.8). Возьмем точку M — середину BC и соединим ее отрезками с точками S и A. Поскольку в правильной пирамиде боковые ребра равны: $SA = SB = SC$, то треугольник SBC — равнобедренный и медиана SM — его высота, то есть $SM \perp BC$. Аналогично $AM \perp BC$, поскольку треугольник ABC — правильный. Тогда $BC \perp$ пл. SAM (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости). Следовательно, $BC \perp SA$ (по определению перпендикулярности прямой и плоскости). ◁	Для доказательства перпендикулярности двух скрещивающихся прямых SA и BC можно доказать перпендикулярность одной из прямых плоскости, в которой лежит другая прямая. Напомним, что пирамиду называют правильной, если ее основание — правильный многоугольник, а все боковые ребра равны.

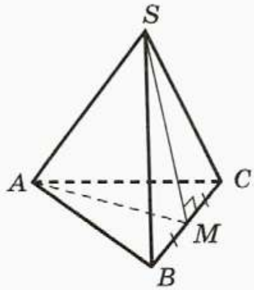


Рис. 14.8

Задача 2. Докажите, что через данную точку прямой можно провести одну и только одну перпендикулярную ей плоскость.

Решение	*Комментарий*
▶ Пусть даны прямая a и точка A на ней (рис. 14.9). Проведем через прямую две плоскости, а в них через точку A — прямые b и c, перпендикулярные прямой a. Плоскость α, проходящая через прямые b и c, перпендикулярна прямой a по признаку перпендикулярности прямой и плоскости (теорема 14.1). Докажем, что эта плоскость единственная. Допустим, что, кроме плос-	Чтобы провести плоскость, перпендикулярную данной прямой, можно использовать признак перпендикулярности прямой и плоскости и построить две пересекающиеся прямые, перпендикулярные данной прямой. Перпендикулярные прямые удобно строить в плоскости. Поэтому целесообразно сначала построить две различные плоскости, проходящие

кости α, существует другая плоскость α', проходящая через точку A и перпендикулярная прямой a (рис. 14.10).

Пусть B — точка плоскости α', не лежащая в плоскости α. Проведем через точку B и прямую a плоскость γ. Она пересечет плоскости α и α' соответственно по прямым b и b', перпендикулярным прямой a. Мы пришли к противоречию, поскольку в плоскости γ через данную точку прямой проходит только одна перпендикулярная ей прямая. Следовательно, плоскость, проходящая через точку A и перпендикулярная прямой a, — единственная. ◁

через данную прямую, а затем в каждой из них провести прямую, перпендикулярную данной прямой.

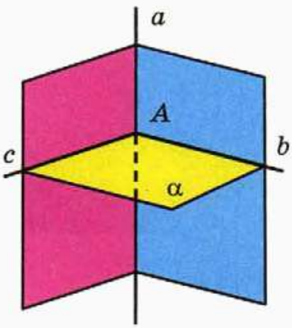


Рис. 14.9

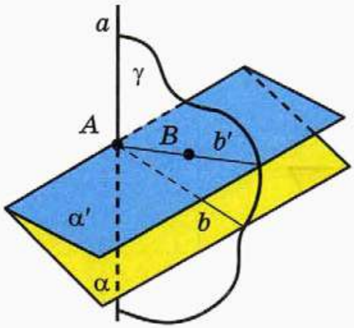


Рис. 14.10

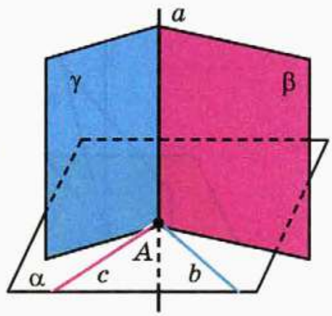


Рис. 14.11

Задача 3. Докажите, что **через данную точку плоскости можно провести одну и только одну перпендикулярную ей прямую.**

Решение

▶ Пусть α — данная плоскость и A — точка на ней (рис. 14.11). Проведем в плоскости α через точку A две прямые b и c, а через точку A — перпендикулярные им плоскости ($\gamma \perp b$ и $\beta \perp c$). Плоскости пересекутся по некоторой прямой a, перпендикулярной прямым b и с. Следовательно, прямая a перпендикулярна плоскости α по признаку

Комментарий

Для требуемого построения можно воспользоваться результатом задачи 2 и получить искомую прямую как пересечение двух плоскостей, каждая из которых перпендикулярна какой-либо прямой данной плоскости. Поэтому удобно сначала провести в плоскости две прямые, пересекающиеся в данной точке, а затем выполнить указанные построения.

перпендикулярности прямой и плоскости.

Докажем, что эта прямая единственная. Допустим, что, кроме прямой a, существует другая прямая a', проходящая через точку A и перпендикулярная плоскости α (рис. 14.12). Проведем через прямые a и a' плоскость φ. Она пересечет плоскость α по некоторой прямой b, перпендикулярной прямым a и a', а это невозможно.

Следовательно, прямая, проходящая через данную точку плоскости и перпендикулярная этой плоскости, единственная. ◁

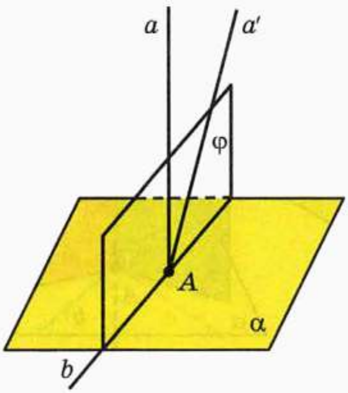


Рис. 14.12

Для того чтобы обосновать перпендикулярность прямой (a) пересечения построенных плоскостей и проведенных прямых (b и c), нужно использовать определение перпендикулярности прямой и плоскости ($b \perp \gamma$, следовательно, $b \perp a$ и $c \perp \beta$, значит, $c \perp a$).

Единственность полученной прямой доказывается методом от противного. Сначала предполагаем существование еще одной прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной плоскости, затем рассматриваем еще одну плоскость, для которой получаем противоречие с известным фактом планиметрии.

Задача 4. Через точки A и B проведены прямые, перпендикулярные плоскости α и пересекающие ее в точках C и D соответственно. Найдите расстояние между точками A и B, если $AC = 3$ м, $BD = 2$ м, $CD = 2{,}4$ м и отрезок AB не пересекает плоскость α.

Решение

▶ Поскольку две прямые, перпендикулярные плоскости α, параллельны, то $AC \parallel BD$, следовательно, $ABDC$ — трапеция (рис. 14.13, *а*). По условию $AC \perp \alpha$, тогда $AC \perp CD$, то есть трапеция $ABDC$ — прямоугольная.

Комментарий

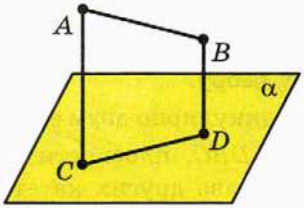
По изображению пространственной конфигурации (рис. 14.13) мы не можем определить, лежит ли четырехугольник $ABDC$ в одной плоскости (а значит, не знаем, можно ли к его элементам применять известные

Проведем в трапеции $ABDC$ из точки B перпендикуляр BK к стороне AC (рис. 14.13, *б*). Получили $BKCD$ — прямоугольник (поскольку у него все углы прямые), следовательно, $CK = BD = 2$ м и $KB = CD = 2{,}4$ м. Тогда $AK = AC - CK = 3 - 2 = 1$ (м). Из прямоугольного треугольника AKB:

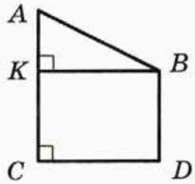
$$AB = \sqrt{AK^2 + BK^2} = \sqrt{1^2 + 2{,}4^2} = \sqrt{6{,}76} = 2{,}6 \text{ (м)}.$$

Ответ: 2,6 м. ◁

из планиметрии соотношения). Поскольку параллельные прямые лежат в одной плоскости, то для того чтобы обосновать, что этот четырехугольник плоский, достаточно доказать параллельность двух его сторон. Следует учесть, что для решения многих стереометрических задач целесообразно выполнять выносные рисунки рассматриваемых плоских фигур (рис. 14.13, *б*), на которых удобно производить некоторые построения, вычисления и обоснования.



а



б

Рис. 14.13

Вопросы для контроля

1. Какую прямую называют перпендикулярной плоскости?
2. Сформулируйте признак перпендикулярности прямой и плоскости. Используя модель прямоугольного параллелепипеда, приведите пример ее использования.
3*. Докажите признак перпендикулярности прямой и плоскости.
4. Сформулируйте свойства прямых и плоскостей, выражающих зависимость между их параллельностью и перпендикулярностью.
5*. Докажите свойства прямых и плоскостей, выражающих зависимость между их параллельностью и перпендикулярностью.

Упражнения

14.1°. Верно ли, что если прямая перпендикулярна каким-либо двум прямым плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости?

14.2°. При каком взаимном расположении двух прямых через одну из них можно провести плоскость, перпендикулярную другой?

14.3°. Как расположена относительно плоскости треугольника прямая, перпендикулярная двум его сторонам?

14.4°. Верно ли, что прямая, пересекающая окружность в центре и перпендикулярная: 1) его диаметру; 2) двум его диаметрам — перпендикулярна и плоскости окружности?

14.5°. Прямая MN пересекает плоскость α. В плоскости α расположен треугольник ABC; MN перпендикулярна AB и BC. Каково взаимное расположение прямых MN и AC?

14.6°. Чтобы распил деревянного бруска (рис. 14.14) был перпендикулярен его ребру, через точку A ребра проводят перпендикулярно ребрам прямые AB и AC. Потом пилят так, чтобы распил шел по этим прямым. Верно ли это?

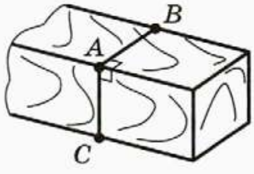


Рис. 14.14

14.7°. Прямая параллельна плоскости. Может ли она быть перпендикулярна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости?

14.8. Докажите, что в прямоугольном параллелепипеде боковое ребро перпендикулярно плоскости основания.

14.9. Докажите, что в прямоугольном параллелепипеде диагональ основания перпендикулярна каждому боковому ребру.

14.10. Докажите, что в кубе каждое ребро перпендикулярно двум его граням.

14.11. Два прямоугольных треугольника ABC и DBC, плоскости которых не совпадают, имеют общий катет, а через два других катета — AC и CD — проведена плоскость α. Докажите, что общий катет перпендикулярен любой прямой c в плоскости α.

14.12. На изображении правильного тетраэдра $ABCD$ (рис. 14.15) проведите плоскость, перпендикулярную его ребру AD.

14.13. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ докажите перпендикулярность прямых BD_1 и AC.

14.14*. Докажите, что через любую точку пространства можно провести единственную прямую, перпендикулярную данной плоскости.

14.15*. Докажите, что через любую точку пространства можно провести единственную плоскость, перпендикулярную данной прямой.

14.16*. Через точку A прямой a проведены перпендикулярные ей плоскость α и прямая b. Докажите, что прямая b лежит в плоскости α.

14.17. Через вершину квадрата $ABCD$ проведена прямая BM, перпендикулярная его плоскости. Докажите, что: 1) прямая AD перпендикулярна плоскости прямых AB и BM; 2) прямая CD перпендикулярна плоскости прямых BC и BM.

14.18. Через точки M и N проведены прямые, перпендикулярные плоскости β, пересекающие ее в точках T и E соответственно. Найдите расстояние между точками M и N, если $MT = 2$ м, $NE = 5$ м, $TE = 4$ м и отрезок MN не пересекает плоскость β.

14.19. Верхние концы двух вертикальных столбов, находящиеся на расстоянии 6,8 м друг от друга, соединены перекладиной. Высота одного столба 11,6 м, а другого — 7,8 м. Найдите длину перекладины.

14.20. Телефонный провод длиной 15 м протянут от телефонного столба, на котором он закреплен на высоте 8 м от поверхности Земли, к дому, где его закрепили на высоте 20 м. Найдите расстояние между домом и столбом, считая, что провод не провисает.

14.21*. Из вершины квадрата проведен перпендикуляр к его плоскости. Расстояния от конца этого перпендикуляра до остальных вершин квадрата равны a и b ($a < b$). Найдите длину перпендикуляра и сторону квадрата (рис. 14.16).

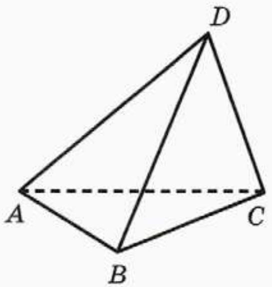


Рис. 14.15

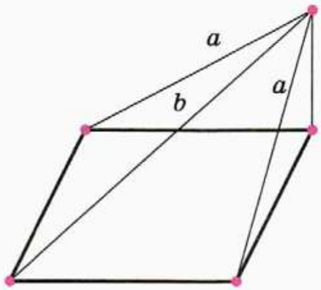


Рис. 14.16

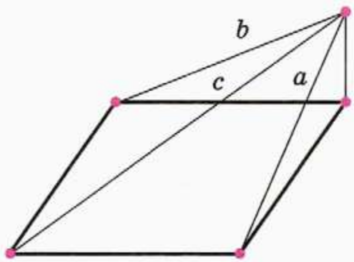


Рис. 14.17

14.22*. Из вершины прямоугольника проведен перпендикуляр к его плоскости. Расстояния от конца этого перпендикуляра до остальных вершин прямоугольника равны a, b, c ($a < c$, $b < c$). Найдите длину перпендикуляра и стороны прямоугольника (рис. 14.17).

14.23. Ребро куба равно a. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей одной из граней до вершин противоположной грани.

14.24. Диагональ BD_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a, диагональ AD_1 — b. Найдите AB.

14.25. Прямая CD перпендикулярна плоскости правильного треугольника ABC. Через центр O этого треугольника проведена прямая OK, параллельная прямой CD. Известно, что $AB = 16\sqrt{3}$ см, $OK = 12$ см, $CD = 16$ см. Найдите расстояние от точек D и K до вершин A и B треугольника.

14.26. $ABCD$ — прямоугольник, O — точка пересечения его диагоналей, точка M одинаково удалена от всех вершин прямоугольника. Докажите, что прямая MO перпендикулярна плоскости прямоугольника.

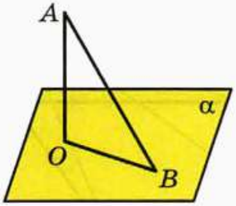
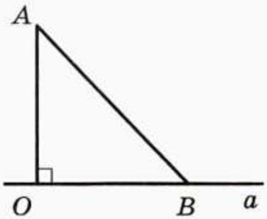
14.27. Докажите, что суммы расстояний от противоположных вершин параллелограмма до непересекающей его плоскости равны.

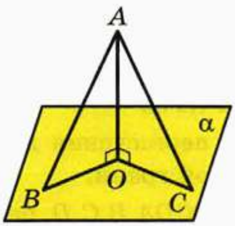
14.28*. Расстояния вершин A, B, C параллелограмма $ABCD$ до некоторой плоскости равны 11 см, 29 см и 13 см соответственно. Найдите расстояние от этой плоскости до четвертой вершины.

§ 15 ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ. ТЕОРЕМА О ТРЕХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ

Таблица 13

ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ

В пространстве	На плоскости
AO — перпендикуляр	
 AO — расстояние от точки A до плоскости α	AO — расстояние от точки A до прямой a 
$AO \perp \alpha$ $O \in \alpha$	$AO \perp a$ $O \in a$
OB — проекция наклонной AB на плоскость α	OB — проекция наклонной AB на прямую a



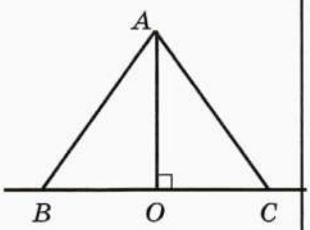
AB — наклонная

$AO < AB$

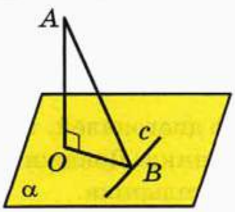
(перпендикуляр короче, чем наклонная)

$\boxed{AB = AC} \Leftrightarrow \boxed{BO = OC}$

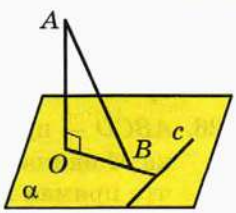
$\boxed{AB > AC} \Leftrightarrow \boxed{BO > OC}$



ТЕОРЕМА О ТРЕХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ



OB — проекция AB на плоскость α; c — прямая на плоскости α, $OB \perp c$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{AB \perp c}$



Объяснение и обоснование

Понятие перпендикуляра и наклонной в пространстве вводится аналогично соответствующим понятиям на плоскости (табл. 13).

Пусть дана плоскость α и точка A, не принадлежащая плоскости. Проведем прямую a, проходящую через эту точку и перпендикулярную плоскости α. Точку пересечения прямой a с плоскостью α обозначим через O (рис. 15.1). Отрезок AO называют *перпендикуляром*, опущенным из точки A на плоскость α, точку O — *основанием перпендикуляра*.

Определение. ***Расстоянием от точки до плоскости*** **называют длину перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.**

Наклонной к плоскости называют прямую, пересекающую плоскость и не перпендикулярную ей. ***Наклонной*** называют также отрезок, который соединяет точку, не принадлежащую плоскости, с точкой плоскости и не является перпендикуляром к плоскости. Конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называют *основанием наклонной*. Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной точки, называют ***проекцией***[1] ***наклонной***.

На рисунке 15.2 из точки A проведены к плоскости α перпендикуляр AO и наклонная AB. Точка O — основание перпендикуляра, точка B — основание наклонной, OB — проекция наклонной AB на плоскость α.

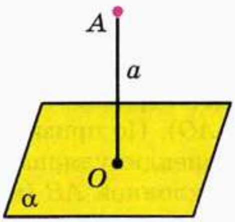


Рис. 15.1

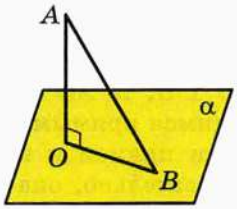


Рис. 15.2

Свойства перпендикуляра и наклонной в пространстве аналогичны соответствующим свойствам на плоскости.

Теорема **15.1. Если из одной точки, взятой вне плоскости, проведены к этой плоскости перпендикуляр и несколько наклонных, то:**

1) перпендикуляр короче любой наклонной, проведенной из этой точки к плоскости;
2) равные наклонные имеют равные проекции, и наоборот, наклонные, имеющие равные проекции, равны;
3) бо́льшая (по длине) наклонная имеет бо́льшую проекцию, и наоборот, из двух наклонных больше та, у которой проекция больше.

[1] Точнее этот отрезок называют ортогональной, или прямоугольной, проекцией наклонной (когда все проектирующие прямые перпендикулярны плоскости проекции). Далее, говоря о проекциях, мы будем иметь в виду ортогональные проекции.

Доказательство. Пусть AO — перпендикуляр, опущенный на плоскость α, AB и AC — наклонные к этой плоскости, OB и OC — соответственно их проекции на плоскость α (рис. 15.3).

1) Поскольку $AO \perp \alpha$, то $AO \perp OB$. Тогда треугольник AOB — прямоугольный, AB — гипотенуза, AO — катет. Следовательно, $AO < AB$.
2) Если выполняется равенство наклонных $AB = AC$ (или соответственно их проекций $OB = OC$), то прямоугольные треугольники AOB и AOC равны по катету и гипотенузе (или по двум катетам). Следовательно, получаем требуемое равенство проекций: $OB = OC$ (или самих наклонных: $AB = AC$).

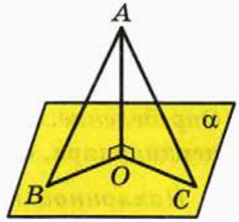


Рис. 15.3

3) Поскольку по теореме Пифагора из прямоугольных треугольников AOB и AOC: $AB^2 = AO^2 + OB^2$ и $AC^2 = AO^2 + OC^2$, то неравенство $AB > AC$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $OB > OC$.

***Теорема* 15.2** (о трех перпендикулярах). **Если прямая на плоскости перпендикулярна проекции наклонной на эту плоскость, то она перпендикулярна и наклонной, и наоборот: если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.**

Доказательство. Пусть прямая c плоскости α (рис. 15.4, *а*, *б*) перпендикулярна проекции OB наклонной AB (или самой наклонной AB). Поскольку $AO \perp \alpha$, то $AO \perp c$. Тогда прямая c будет перпендикулярна двум пересекающимся прямым — OB и AO (или AB и AO). По признаку перпендикулярности прямой и плоскости прямая c перпендикулярна плоскости AOB, а следовательно, она перпендикулярна и наклонной AB (или ее проекции OB).

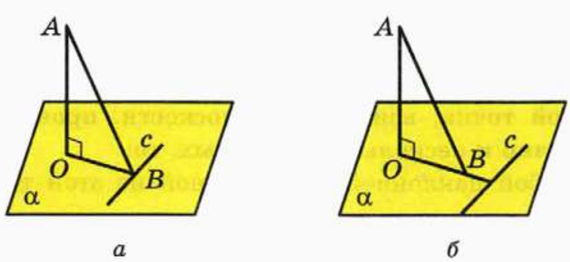


Рис. 15.4

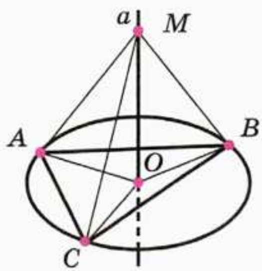


Рис. 15.5

Примеры решения задач

Задача 1. Через центр описанной около треугольника окружности проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника. Докажите, что каждая точка этой прямой равноудалена от вершин треугольника.

Решение

▶ Пусть в треугольнике ABC через центр O описанной окружности проведена прямая a, перпендикулярная плоскости ABC (рис. 15.5). Рассмотрим произвольную точку $M \in a$. Соединяем точку M с точками A, B, C отрезками. Наклонные MA, MB и MC имеют равные проекции ($AO = BO = CO$ как радиусы описанной окружности). Следовательно, эти наклонные равны: $MA = MB = MC$, а значит, точка M равноудалена от вершин треугольника. ◁

Комментарий

В данной конфигурации из точки M, выбранной на данной прямой, проведены к плоскости треугольника перпендикуляр и наклонные (рис. 15.5). Поэтому целесообразно использовать соответствующие свойства, связывающие длины наклонных, проведенных из одной точки к одной плоскости, и их проекций.

Задача 2. Расстояние от данной точки до плоскости ромба равно 8 м, а до каждой из его сторон — 10 м. Найдите радиус окружности, вписанной в этот ромб.

Решение

▶ Пусть даны ромб $ABCD$ и точка S, находящаяся вне плоскости ромба. Проведем из точки S перпендикуляр SO на плоскость $ABCD$ и перпендикуляры SK, SM, SN, SL на стороны ромба (рис. 15.6). Тогда по условию $SO = 8$ м, $SK = SM = SN = SL = 10$ м.

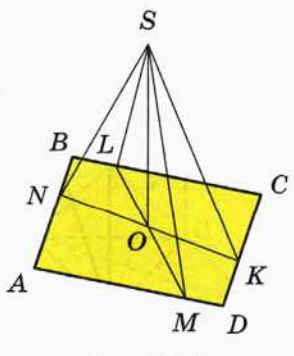


Рис. 15.6

Равные наклонные, проведенные из одной точки к одной плоскости,

Комментарий

Поскольку расстояние от точки до плоскости измеряют по перпендикуляру, то мы фактически имеем перпендикуляр и наклонные к плоскости, а значит, можем использовать соответствующие свойства, связывающие длины наклонных, проведенных из одной точки к одной плоскости, и их проекции.

Чтобы обосновать, что полученные проекции наклонных являются радиусами вписанной в ромб окружности, следует применить теорему о трех перпендикулярах.

Для обоснования того, что треугольник SOK прямоугольный, достаточно воспользоваться определением перпендикулярности прямой SO и плоскости $ABCD$ (тогда прямая SO перпендикулярна любой прямой плоскости $ABCD$, в частности прямой OK).

имеют равные проекции, поэтому $OK = OM = ON = OL$. Так как $SK \perp DC$, то $OK \perp DC$ по теореме о трех перпендикулярах. Аналогично $OM \perp AD$, $ON \perp AB$, $OL \perp BC$. Тогда точка O равноудалена от всех сторон ромба и является центром окружности, вписанной в ромб[1], а OK — радиус этой окружности. Из прямоугольного треугольника SOK ($SO \perp$ пл. $ABCD$, следовательно, $SO \perp OK$):

$$OK = \sqrt{SK^2 - SO^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6 \text{ (м)}.$$

Ответ: 6 м. ◁

Задача 3. Докажите, что *диагональ куба перпендикулярна плоскости, проходящей через концы трех ребер куба, исходящих из той же вершины, что и диагональ.*

Решение	*Комментарий*

▶ Рассмотрим в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 15.7) диагональ BD_1. Поскольку $D_1D \perp$ пл. $ABCD$, то BD — проекция наклонной BD_1 на пл. $ABCD$. Но $AC \perp DB$ (как диагонали квадрата $ABCD$), следовательно, $AC \perp BD_1$. Аналогично $D_1C_1 \perp$ пл. BB_1C_1C. Тогда BC_1 — проекция наклонной BD_1 на пл. BB_1C_1C. Но $B_1C \perp BC_1$ (как диагонали квадрата BB_1C_1C), следовательно, $B_1C \perp BD_1$. Таким образом, прямая BD_1 перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости AB_1C. Следовательно, $BD_1 \perp$ пл. AB_1C по признаку перпендикулярности прямой и плоскости. ◁

Для того чтобы доказать перпендикулярность прямой и плоскости, воспользуемся соответствующим признаком перпендикулярности: докажем, что прямая BD_1 перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости AB_1C. Для обоснования этого применим теорему о трех перпендикулярах, последовательно проектируя диагональ BD_1 на две различные грани куба.

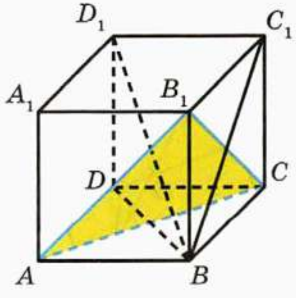


Рис. 15.7

[1] O — точка пересечения диагоналей ромба, отрезки OL и OM лежат на одной прямой, LM — высота ромба (аналогично NK — также высота ромба).

Вопросы для контроля

1. Объясните, как вводят понятие перпендикуляра и наклонной к плоскости и проекции наклонной на плоскость.
2. Сформулируйте свойства перпендикуляра и наклонной к плоскости.
3*. Докажите свойства перпендикуляра и наклонной к плоскости.
4. Сформулируйте теорему о трех перпендикулярах.
5*. Докажите теорему о трех перпендикулярах.

Упражнения

15.1°. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 15.8) найдите проекции диагонали A_1C на все грани куба.

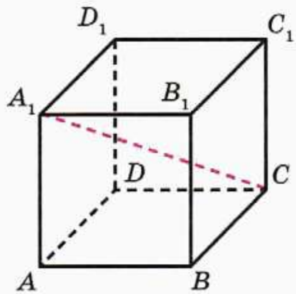


Рис. 15.8

15.2°. Основание пирамиды $SABCD$ — квадрат $ABCD$. Ребро SA перпендикулярно плоскости основания. Сравните попарно длины отрезков SA, SB, SC и SD. Обоснуйте результат.

15.3. Основание пирамиды $SABCD$ — прямоугольник $ABCD$, $AB < BC$. Ребро SD перпендикулярно плоскости основания. Из отрезков SA, SB, SC и SD укажите наименьший и наибольший. Обоснуйте свой выбор.

15.4°. Из точки A к данной плоскости проведены перпендикуляр и наклонная, основаниями которых являются соответственно точки B и C. Найдите длину проекции наклонной AC, если $AC = 50$ см, $AB = 30$ см.

15.5. Из точки A к данной плоскости проведен перпендикуляр и наклонная, пересекающие плоскость соответственно в точках B и C. Найдите отрезок AC, если $AB = 8$ см и $\angle BAC = 60°$.

15.6. Отрезки двух наклонных, проведенных из одной точки к плоскости, равны 15 см и 20 см. Проекция одного из этих отрезков равна 16 см. Найдите проекцию другого отрезка.

15.7. Отрезок BC длиной 12 см является проекцией отрезка AC на плоскость α. Точка D принадлежит отрезку AC и $AD : DC = 2 : 3$. Найдите отрезок AD и его проекцию на плоскость α, если известно, что $AB = 9$ см.

15.8. Из точки S вне плоскости α проведены к ней три равные наклонные SA, SB, SC и перпендикуляр SO. Докажите, что основание перпендикуляра O является центром окружности, описанной около треугольника ABC.

15.9. Точка A находится на расстоянии a от вершин равностороннего треугольника со стороной a. Найдите расстояние от точки A до плоскости треугольника.

15.10*. В равнобедренном треугольнике основание и высота равны по 4 м. Данная точка расположена на расстоянии 6 м от плоскости треугольника и на одинаковом расстоянии от его вершин. Найдите расстояние от данной точки до вершин треугольника.

15.11. Расстояния от точки A до вершин квадрата равны a. Найдите расстояние от точки A до плоскости квадрата, если сторона квадрата равна b.

15.12. Из точки к плоскости проведены две наклонные, равные 10 см и 17 см. Разность проекций этих наклонных составляет 9 см. Найдите проекции наклонных.

15.13. Из точки к плоскости проведены две наклонные. Найдите длины наклонных, если: 1) одна из них на 26 см больше другой, а проекции наклонных равны 12 см и 40 см; 2) наклонные относятся как 1 : 2, а проекции наклонных равны 1 см и 7 см.

15.14. Из точки к плоскости проведены две наклонные, которые равны 23 см и 33 см. Найдите расстояние от этой точки до плоскости, если проекции наклонных относятся как 2 : 3.

15.15*. На данном изображении куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведите перпендикуляр из вершины B_1 на плоскость ABD_1. Укажите проекцию отрезка AB_1 на эту плоскость.

15.16*. Дан прямоугольный треугольник ABC, катеты которого AC и BC равны соответственно 20 см и 15 см. Через вершину A проведена плоскость α, параллельная прямой BC. Проекция одного из катетов на эту плоскость равна 12 см. Найдите проекцию гипотенузы на эту плоскость.

15.17*. Сторона ромба равна 10 см, острый угол — 60°. Через одну из сторон ромба проведена плоскость. Проекция второй стороны на плоскость равна 8 см. Найдите проекции диагоналей ромба на эту плоскость.

15.18. Останется ли справедливой теорема о трех перпендикулярах, если в ее формулировке слова «прямая на плоскости» заменить словами «прямая, параллельная плоскости»? Обоснуйте ответ.

15.19. Прямая a пересекает плоскость α и не перпендикулярна этой плоскости. Существуют ли в плоскости α прямые, перпендикулярные прямой a? Если существуют, то как их можно построить?

15.20*. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ докажите перпендикулярность прямых AC_1 и BD.

15.21*. На данном изображении куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведите перпендикуляр из вершины B_1 на плоскость ACD_1. Укажите основание этого перпендикуляра.

15.22. Через вершину A прямоугольника $ABCD$ проведена прямая AK, перпендикулярная его плоскости. Найдите отрезок AK, если $BK = 6$ см, $DK = 7$ см, $CK = 9$ см.

15.23. Докажите, что если через центр окружности, описанной около многоугольника, проведена прямая, перпендикулярная плоскости многоугольника, то каждая точка этой прямой равноудалена от вершин многоугольника.

15.24. Докажите, что если некоторая точка равноудалена от вершин многоугольника, то основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на плоскость многоугольника, совпадает с центром окружности, описанной около многоугольника.

15.25*. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен $120°$, а боковые стороны — по 10 см. Вне плоскости треугольника дана точка, удаленная от каждой из вершин на 26 см. Найдите расстояние от этой точки до плоскости треугольника.

15.26*. В треугольнике ABC $\angle A = 45°$, $BC = 12$ см. Точка S находится от его плоскости на расстоянии 6 см и на одинаковом расстоянии от каждой из вершин треугольника. Найдите расстояние от точки S до вершин треугольника.

15.27*. Трапеция вписана в окружность, причем меньшее основание, равное 16 см, стягивает дугу $60°$. На расстоянии 12 см от плоскости трапеции находится точка, равноудаленная от каждой ее вершины. Найдите расстояние от этой точки до вершины трапеции.

15.28. В треугольнике ABC стороны $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см. Из вершины A проведен к его плоскости перпендикуляр AD длиной 5 см. Найдите расстояние от точки D до стороны BC.

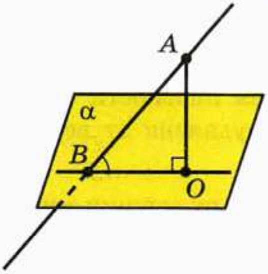
15.29*. К плоскости ромба $ABCD$, в котором $\angle A = 45°$, $AB = 8$ см, проведен перпендикуляр MC длиной 7 см. Найдите расстояние от точки M до прямых, содержащих стороны ромба.

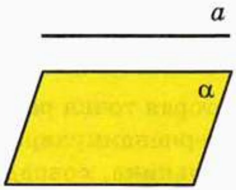
15.30. Докажите, что если через центр окружности, вписанной в многоугольник, проведен перпендикуляр к плоскости многоугольника, то каждая точка перпендикуляра равноудалена от сторон многоугольника.

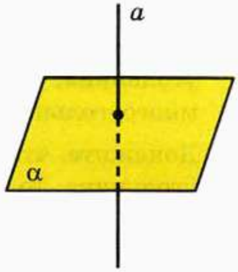
15.31*. Докажите, что если точка равноудалена от сторон многоугольника, а основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на его плоскость, лежит внутри многоугольника, то основание перпендикуляра — центр окружности, вписанной в многоугольник.

§ 16 УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

Таблица 14

<table>
<tr><th colspan="3">УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ</th></tr>
<tr><td rowspan="2">

BO — проекция AB на плоскость α, $AO \perp \alpha$; $\angle ABO$ — угол между прямой AB и плоскостью α</td><th colspan="2">ОСОБЫЕ СЛУЧАИ</th></tr>
<tr><td>

$a \parallel \alpha$
a лежит в α $\Leftrightarrow$ $\angle(a; \alpha) = 0°$</td><td>

$a \perp \alpha$ $\Leftrightarrow$ $\angle(a; \alpha) = 90°$</td></tr>
</table>

Объяснение и обоснование

Дадим определение угла между прямой и плоскостью.

Определение. ***Углом между наклонной[1] и плоскостью*** **называют угол между этой наклонной и ее проекцией на плоскость.** Если прямая перпендикулярна плоскости, то угол между нею и плоскостью считают равным 90°, если прямая параллельна плоскости или лежит в плоскости — равным 0°.

Из приведенного определения следует: если φ — угол между прямой и плоскостью, то $0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$, а если γ — угол между наклонной и плоскостью, то $0° < \gamma < 90°$.

Например, в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 16.1) проекцией диагонали A_1B боковой грани куба на плоскость его основания $ABCD$ является отрезок AB (поскольку $A_1A \perp$ пл. $ABCD$). Следовательно, углом между A_1B и плоскостью $ABCD$ является угол A_1BA, равный 45°.

***Теорема* 16.1. Угол между наклонной и плоскостью — наименьший из всех углов между этой наклонной и прямыми, лежащими в данной плоскости.**

[1] Термин «наклонная» может означать как прямую, так и отрезок. Иначе говоря, углом между отрезком и плоскостью будем считать угол между прямой, содержащей данный отрезок, и этой плоскостью.

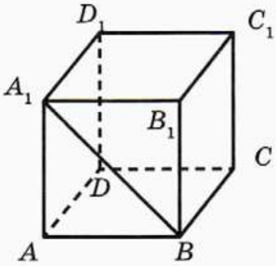


Рис. 16.1

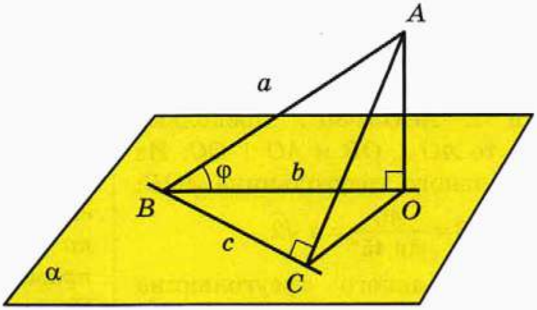


Рис. 16.2

Доказательство. Пусть a — наклонная к плоскости α, B — точка пересечения наклонной с плоскостью, b — проекция наклонной, c — прямая в плоскости α, проходящей через точку B (рис. 16.2). Нужно доказать, что угол φ между прямыми a и b меньше угла между прямыми a и c.

Если $c \perp b$, то острый угол φ меньше прямого угла между прямыми a и c.

Если прямые c и b не перпендикулярны, то возьмем на прямой a точку A, отличную от B, и ее проекцию O (тогда $AO \perp \alpha$). Проведем в плоскости α перпендикуляр OC к прямой c и соединим точки A и C отрезками. По теореме о трех перпендикулярах $AC \perp c$. Из прямоугольных треугольников ABO и ABC:

$$\sin\varphi = \frac{AO}{AB}, \quad \sin\angle ABC = \frac{AC}{AB}.$$

Поскольку $AO < AC$, то $\sin\varphi < \sin\angle ABC$. Учитывая, что эти углы острые, получаем: $\varphi < \angle ABC$.

Примеры решения задач

Задача 1. Из точки, удаленной от плоскости на расстояние a, проведены под прямым углом друг к другу две наклонные, образующие с плоскостью углы 45° и 30°. Найдите расстояние между основаниями наклонных.

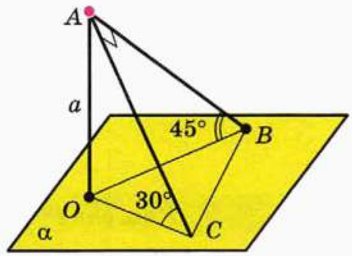


Рис. 16.3

Решение	*Комментарий*
Пусть дана точка A, из которой к плоскости α проведены две наклонные AB и AC (рис. 16.3). Опустим из точки A перпендикуляр AO на плоскость α. По условию $AO = a$. Поскольку проекциями наклонных AB и AC являются соответственно отрезки OB и OC, то $\angle ABO$ — угол между	Поскольку расстоянием от точки до плоскости является длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость, то на рисунке к задаче следует изобразить и наклонные, и перпендикуляр, проведенные из данной точки на данную плоскость (рис. 16.3).

наклонной AB и плоскостью α, а $\angle ACO$ — угол между наклонной AC и плоскостью α. По условию $\angle ABO = 45°$ и $\angle ACO = 30°$. Поскольку $AO \perp \alpha$, то $AO \perp OB$ и $AO \perp OC$. Из прямоугольного треугольника AOB:

$$AB = \frac{AO}{\sin 45°} = a\sqrt{2}.$$

Из прямоугольного треугольника AOC: $AC = \dfrac{AO}{\sin 30°} = 2a$. Из прямоугольного треугольника ABC ($AB \perp AC$ по условию):

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{2a^2 + 4a^2} = a\sqrt{6}.$$

Ответ: $a\sqrt{6}$. ◁

Прежде чем проводить вычисления, *в решении необходимо обосновать, что данное расстояние* (от точки до плоскости) *и данные углы* (между наклонными и плоскостью) *обозначены правильно. В ходе вычисления следует указывать, из какого треугольника определяем элементы, и, если он прямоугольный, объяснять почему.* План вычислительной части решения может быть следующим:

1) из прямоугольного треугольника AOB найти AB;
2) из прямоугольного треугольника ABC найти AC;
3) из прямоугольного треугольника ABC найти BC.

Задача 2*. Найдите угол[1] между ребром правильного тетраэдра и плоскостью грани, не содержащей это ребро.

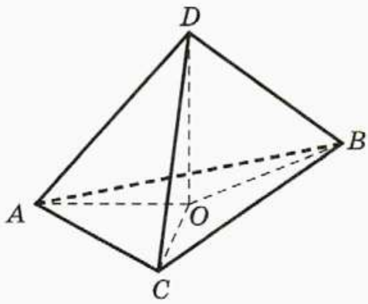


Рис. 16.4

Решение

▶ Пусть $ABCD$ — данный правильный тетраэдр. Опустим перпендикуляр DO на плоскость ABC (рис. 16.4). Тогда AO — проекция ребра AD на плоскость ABC, следовательно, $\angle DAO$ — угол между ребром AD и плоскостью ABC. Поскольку в правильном тетраэдре

Комментарий

Напомним, что в правильном тетраэдре все грани — правильные треугольники, поэтому все его ребра равны. Поскольку углом между наклонной и плоскостью называют угол между этой наклонной и ее проекцией на плоскость, то для построения угла между ребром AD

[1] Напомним, что задача на нахождение угла считается решенной, если найдена величина угла или любая его тригонометрическая функция.

все ребра равны (пусть $DA = DB = DC = AB = BC = AC = x$), то наклонные DA, DB, DC равны, а следовательно, равны и их проекции: $AO = BO = CO$. Это значит, что точка O является центром окружности, описанной около правильного треугольника ABC, а отрезок AO — его радиусом. Тогда

$$AO = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

Из прямоугольного треугольника ADO ($DO \perp AO$, поскольку $DO \perp$ пл. ABC):

$$\cos\angle DAO = \frac{AO}{AD} = \frac{\frac{x}{\sqrt{3}}}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\cos\angle DAO = \frac{1}{\sqrt{3}}$. ◁

(рис. 16.4) и плоскостью ABC достаточно построить проекцию AD на плоскость. Для этого нужно опустить перпендикуляр из точки D на плоскость ABC. В полученной конфигурации из точки D к плоскости треугольника ABC проведены перпендикуляр и наклонная. Поэтому целесообразно использовать соответствующие свойства, связывающие длины наклонных, проведенных из одной точки к одной плоскости, и их проекций.

Следует также учесть, что в этой задаче на вычисление *не дано ни одного отрезка, и поэтому для ее решения удобно ввести неизвестный отрезок.*

Замечание. Для правильного построения рисунка к этой задаче необходимо учесть, что треугольник ABC есть изображение правильного треугольника, а точка O — изображение его центра (совпадающего с центром описанной окружности). Поскольку центр правильного треугольника лежит в точке пересечения высот, биссектрис и медиан, а медианы проектируются в медианы треугольника проекции, то на рисунке точка O должна находиться в точке пересечения медиан AM и BK треугольника ABC (рис. 16.5).

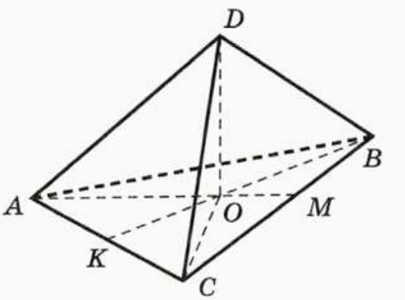


Рис. 16.5

Вопросы для контроля

1. Что называют углом между наклонной и плоскостью?
2. Чему равен угол между прямой и плоскостью, если: 1) прямая перпендикулярна плоскости; 2) прямая параллельна плоскости; 3) прямая лежит в плоскости?
3*. Докажите, что угол между наклонной и плоскостью — наименьший из всех углов между этой наклонной и прямыми, лежащими в данной плоскости.

Упражнения

16.1°. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 16.6) укажите углы между данными наклонной и плоскостью: 1) AB_1 и пл. $ABCD$; 2) AB_1 и пл. $A_1B_1C_1D_1$; 3) AB_1 и пл. AA_1D_1D; 4) AB_1 и пл. BB_1C_1C; 5) BD_1 и пл. $ABCD$; 6) BD_1 и пл. BB_1C_1C; 7) B_1C и пл. $ABCD$; 8) B_1C и пл. CDD_1C_1.

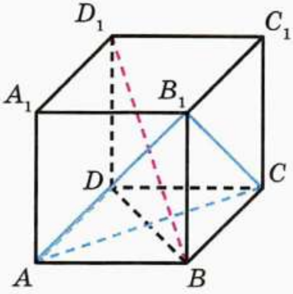


Рис. 16.6

16.2°. Наклонная равна a. Чему равна проекция этой наклонной на плоскость, если наклонная образует с плоскостью угол, равный: 1) 45°; 2) 60°; 3) 30°?

16.3°. Точка A удалена от плоскости на расстояние d. Найдите длины наклонных, проведенных из этой точки под следующими углами к плоскости: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°.

16.4. Докажите, что равные наклонные, проведенные к плоскости из точки, не принадлежащей плоскости, образуют с плоскостью равные углы.

16.5. Какую фигуру на плоскости α образуют основания всех наклонных, проведенных к плоскости α из точки, не принадлежащей плоскости, и образующих равные углы с плоскостью α?

16.6. Докажите, что проекция (ортогональная) наклонной равна произведению этой наклонной на косинус угла, который она образует с плоскостью проектирования.

16.7. Может ли катет равнобедренного прямоугольного треугольника образовывать с плоскостью, проходящей через гипотенузу, угол 60°? Каков наибольший угол между катетом и этой плоскостью?

16.8*. Докажите, что прямая, пересекающая параллельные плоскости, пересекает их под одинаковыми углами.

16.9*. Докажите, что плоскость, пересекающая параллельные прямые, пересекает их под одинаковыми углами.

16.10. Прямые a и b образуют с плоскостью α равные углы. Будут ли прямые a и b параллельны?

16.11. Две различные плоскости образуют с данной прямой равные углы. Как расположены плоскости относительно друг друга?

16.12*. Одна из двух скрещивающихся прямых пересекает плоскость под углом 60°, а другая перпендикулярна этой плоскости. Найдите угол между данными скрещивающимися прямыми.

16.13. Отрезок длиной 10 м пересекает плоскость; его концы находятся на расстояниях 2 м и 3 м от плоскости. Найдите угол между данным отрезком и плоскостью.

16.14. В кубе найдите угол между диагональю куба и плоскостью основания.

16.15. Даны треугольник ABC и точка K, не принадлежащая его плоскости. KD, KE, KF — перпендикуляры, опущенные из точки K на стороны треугольника. Эти перпендикуляры одинаково наклонены к плоскости треугольника. Докажите, что точка K проектируется в центр окружности, вписанной в треугольник.

16.16*. Через сторону квадрата проведена плоскость, образующая с диагональю квадрата угол 30°. Найдите углы, образованные этой плоскостью и сторонами квадрата, наклонными к ней.

16.17. Через катет равнобедренного прямоугольного треугольника проведена плоскость под углом 45° ко второму катету. Найдите угол между гипотенузой и плоскостью.

16.18. Из точки, удаленной от плоскости на расстояние a, проведены под углом 60° друг к другу две наклонные, образующие с плоскостью углы 45°. Найдите расстояние между концами наклонных.

16.19. Из точки, удаленной от плоскости на расстояние a, проведены две наклонные под углом 30° к плоскости, причем их проекции образуют угол 120°. Найдите расстояние между концами наклонных.

16.20*. Из вершины A квадрата $ABCD$ перпендикулярно его плоскости проведен отрезок AK, равный 3. Из точки K опущены перпендикуляры на стороны BC и CD, перпендикуляр из точки K к стороне BC равен 6. Найдите углы, образованные этими перпендикулярами с плоскостью квадрата.

16.21*. Основание равнобедренного треугольника лежит в плоскости α (плоскость треугольника не совпадает с плоскостью α). Какой из углов больше: угол наклона боковой стороны к плоскости α или угол наклона высоты, опущенной на основание треугольника, к плоскости α?

16.22*. Угол между прямой a и плоскостью α равен 45°. Через точку их пересечения в плоскости α проведена прямая b. Угол между прямыми a и b равен 60°. Докажите, что угол между прямой b и проекцией прямой a на плоскость α равен 45°.

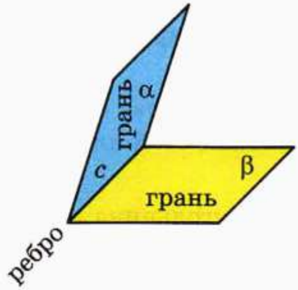
16.23*. Через сторону AC равностороннего треугольника ABC проведена плоскость α. Угол между высотой BD треугольника и этой плоскостью равен β. Найдите угол φ между прямой AB и плоскостью α.

16.24. Докажите, что если все боковые ребра пирамиды образуют с плоскостью основания равные углы, то основанием пирамиды является многоугольник, около которого можно описать окружность, и вершина пирамиды проектируется в центр этой окружности.

§ 17 ДВУГРАННЫЙ УГОЛ. УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ

Таблица 15

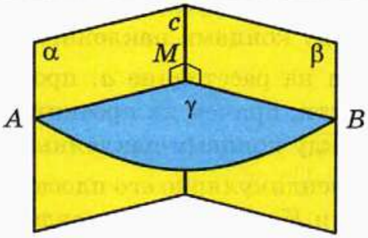
ДВУГРАННЫЙ УГОЛ



Двугранный угол **— фигура, образованная двумя полуплоскостями α и β с ограничивающей их общей прямой *c*.**

Полуплоскости α и β — *грани* двугранного угла, а прямая *c* — *ребро* двугранного угла.

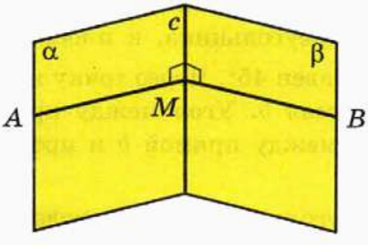
Линейный угол двугранного угла



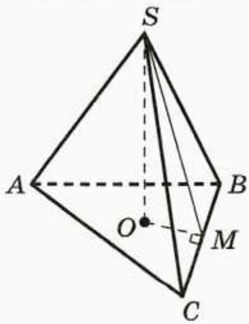
$\angle AMB$ — линейный угол
($\gamma \perp c$, γ пересекает α по лучу MA,
γ пересекает β по лучу MB)

Если φ — линейный угол, то $0^\circ \leqslant \varphi \leqslant 180^\circ$.

Практические способы построения линейного угла



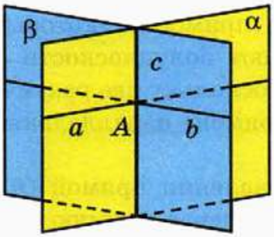
$M \in c$,
$MA \perp c$ (в грани α),
$MB \perp c$ (в грани β),
$\angle AMB$ — линейный



$SO \perp$ пл. ABC, $OM \perp BC$.
Тогда $SM \perp BC$ (по теореме о трех перпендикулярах), $\angle SMO$ — линейный угол двугранного угла при ребре BC.

Окончание табл. 15

УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ

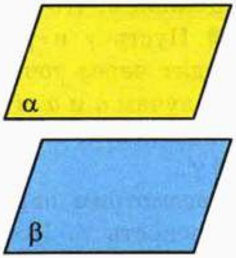


$0° \leqslant \angle(\alpha; \beta) \leqslant 90°$

Угол между плоскостями **— наименьший[1] из двугранных углов, образованных соответствующими полуплоскостями.**

Если плоскости α и β пересекаются по прямой c и через точку A на этой прямой в данных плоскостях проведены прямые $a \perp c$, $b \perp c$,

то $\angle(\alpha; \beta) = \angle(a; b)$.



$\alpha \parallel \beta$, $\alpha = \beta$ $\Leftrightarrow$ $\angle(\alpha; \beta) = 0°$

Объяснение и обоснование

1. Двугранный угол. Полуплоскость в пространстве можно считать пространственным аналогом луча. Тогда аналогом угла между лучами на плоскости будет угол между полуплоскостями.

Определение. ***Двугранным углом*** **называют фигуру, образованную двумя полуплоскостями с ограничивающей их общей прямой** (рис. 17.1).

Полуплоскости называют ***гранями*** двугранного угла, а ограничивающую их прямую — ***ребром*** двугранного угла.

Плоскость, перпендикулярная ребру двугранного угла, пересекает его грани по двум лучам. Угол, образованный этими лучами, называют ***линейным углом*** двугранного угла.

Пусть дан двугранный угол, образованный полуплоскостями α и β с общей прямой c (рис. 17.2). Плоскость γ, перпендикулярная прямой c, пересекает полуплоскости α и β по лучам a и b соответственно. Угол между лучами a и b и есть линейный угол этого двугранного угла.

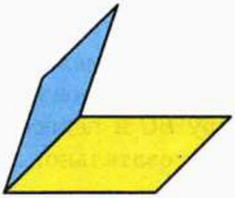


Рис. 17.1

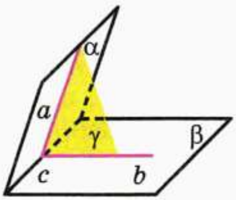


Рис. 17.2

[1] Если при пересечении плоскостей все образованные углы равны (все углы прямые), то за угол между плоскостями принимают любой из них.

За меру двугранного угла принимают меру соответствующего ему линейного угла: $\angle(\alpha; \beta) = \angle(a; b)$.

Докажем, что величина линейного угла не зависит от выбора плоскости γ.

● Пусть γ и γ' — плоскости, перпендикулярные прямой c, которые проходят через точки O и O' на прямой c и пересекают полуплоскости α и β по лучам a и a' и b и b' соответственно (рис. 17.3). Поскольку две различные плоскости, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны, то $\gamma \parallel \gamma'$.

Рассмотрим параллельное проектирование в направлении прямой OO' на плоскость γ'. Поскольку полуплоскость α проходит через прямую OO' и пересекает плоскость γ по лучу a, а плоскость γ' — по лучу a', то луч a' — проекция луча a на плоскость γ'. Аналогично луч b' является проекцией луча b на плоскость γ'. Но из свойств параллельного проектирования следует, что если плоская фигура F (например, угол между лучами a и b) лежит в плоскости γ, параллельной плоскости проектирования γ', то ее проекция на плоскость γ' равна фигуре F. Таким образом, угол между лучами a и b равен углу между лучами a' и b'. ○

Если обозначить линейный угол двугранного угла через φ, то из определения следует, что $0° \leqslant \varphi \leqslant 180°$.

Двугранный угол называют *прямым*, если его линейный угол прямой.

Углом между двумя соседними гранями многогранника будем называть двугранный угол между соответствующими полуплоскостями.

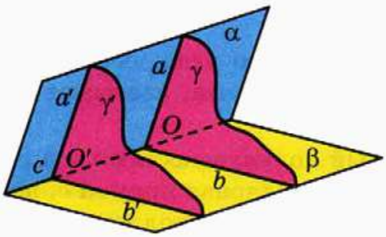


Рис. 17.3

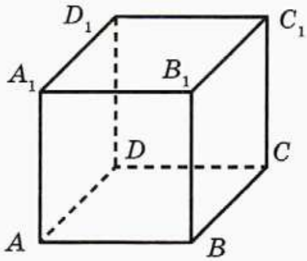


Рис. 17.4

Например, в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 17.4) угол между гранями $ABCD$ и BB_1C_1C прямой, поскольку соответствующий линейный угол ABB_1 равен 90° (плоскость ABB_1A_1 перпендикулярна ребру BC и пересекает соответствующие полуплоскости по лучам BA и BB_1, следовательно, $\angle ABB_1$ — линейный угол двугранного угла с ребром BC).

Практические способы построения линейного угла двугранного угла

В задачах, для решения которых применяются линейные углы, не всегда удобно пользоваться определением линейного угла. Поэтому полезно знать некоторые практические способы построения линейных углов.

Способ 1. **Если из точки M, взятой на ребре двугранного угла, провести в его гранях перпендикуляры MA и MB к ребру, то угол между перпендикулярами будет линейным углом двугранного угла** (рис. 17.5).

По построению $MA \perp c$ и $MB \perp c$, тогда по признаку перпендикулярности прямой и плоскости плоскость MAB перпендикулярна ребру c и пересекает грани двугранного угла по лучам MA и MB. Следовательно, по определению угол AMB — действительно линейный угол двугранного угла.

Например, чтобы в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 17.4) получить линейный угол двугранного угла с ребром BC, достаточно заметить, что в грани $ABCD$ $AB \perp BC$, а в грани BB_1C_1C $BB_1 \perp BC$, следовательно, $\angle ABB_1$ — линейный (и $\angle ABB_1 = 90°$ как угол квадрата ABB_1A_1).

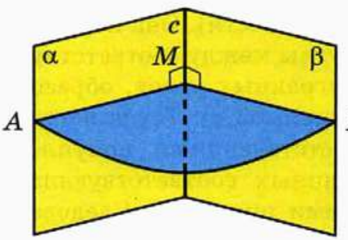


Рис. 17.5

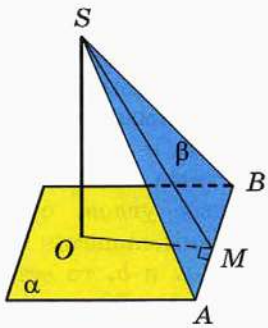


Рис. 17.6

Способ 2. **Если из точки S, лежащей на одной из граней двугранного угла, опущен перпендикуляр SO на другую его грань, то для построения соответствующего линейного угла достаточно из основания данного перпендикуляра (точки O) опустить перпендикуляр на ребро двугранного угла и соединить отрезком полученную на ребре точку с точкой S.**

Пусть дан двугранный угол с ребром AB и гранями α и β (рис. 17.6). Из точки $S \in \beta$ опущен перпендикуляр ($SO \perp \alpha$). Из точки O проведем в грани α перпендикуляр $OM \perp AB$ и соединим точки S и M отрезком. По теореме о трех перпендикулярах $SM \perp AB$. Отсюда следует, что из точки M на ребре двугранного угла проведены в его гранях два перпендикуляра к ребру и, как обосновано в способе 1, угол SMO — действительно линейный угол данного двугранного угла.

Замечание. При записи решений задач, связанных с двугранными углами, результат, обоснованный в способе 1, можно использовать как известный опорный факт. Обоснования же, приведенные в способе 2, надо повторять в решении каждой задачи, где применен этот способ построения линейного угла. (Возможный вариант записи такого обоснования приведен в табл. 15.)

2. Угол между плоскостями. Дадим определение угла между плоскостями.

Определение. ***Углом между пересекающимися плоскостями*** **называют наименьший[1] из двугранных углов, образованных соответствующими полуплоскостями[2].** Угол между параллельными или совпадающими плоскостями считается равным нулю.

Если обозначить угол между плоскостями через φ, то из приведенного определения следует, что $0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$. Покажем, что **для того чтобы найти величину угла между пересекающимися плоскостями, достаточно через произвольную точку на прямой их пересечения провести в каждой плоскости прямую, перпендикулярную прямой их пересечения. Величина угла между этими прямыми и равна величине угла между данными плоскостями.**

Действительно, пусть две плоскости α и β пересекаются по прямой c (рис. 17.7). Выберем точку A на прямой c и проведем в плоскости α прямую $a \perp c$, а в плоскости β — прямую $b \perp c$. Плоскость γ, проходящая через прямые a и b (пересекающиеся в точке A), перпендикулярна прямой c (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости). Она пересекает эти плоскости по прямым a и b. По определению углы между соответствующими лучами прямых a и b — линейные углы двугранных углов, образованных полуплоскостями плоскостей α и β (с общей прямой c). Тогда наименьший из двугранных углов, образованных соответствующими полуплоскостями, равен наименьшему из углов, образованных соответствующими лучами прямых a и b, то есть углу между этими прямыми. Следовательно, $\angle(\alpha; \beta) = \angle(a; b)$.

Например, в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 17.8) угол между плоскостями $ABCD$ и A_1BCD_1 равен углу между прямыми AB и A_1B, лежащими в рассматриваемых плоскостях и перпендикулярными прямой их пересечения BC (поскольку $BC \perp$ пл. ABB_1A_1). Следовательно, угол между плоскостями $ABCD$ и A_1BCD_1 равен 45°.

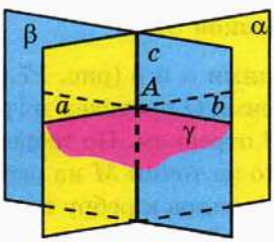


Рис. 17.7

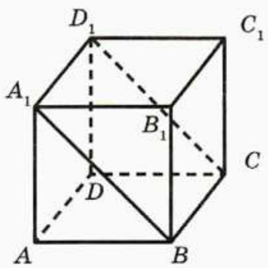


Рис. 17.8

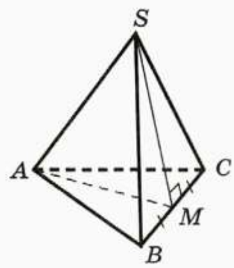


Рис. 17.9

[1] Если при пересечении плоскостей все образованные углы равны (все углы прямые), то за угол между плоскостями принимают любой из них.

[2] Имеются в виду двугранные углы, гранями каждого из которых являются одна полуплоскость плоскости α и одна полуплоскость плоскости β, а ребром — прямая пересечения данных плоскостей.

Примеры решения задач

Задача 1. Найдите угол между гранями правильного тетраэдра.

Решение

Пусть $SABC$ — правильный тетраэдр (рис. 17.9). Возьмем точку M — середину ребра BC и соединим ее отрезками с точками S и A. В правильном тетраэдре все ребра равны (пусть $SA = SB = SC = AC = BC = AB = x$). Следовательно, треугольники SBC и ABC правильные и их медианы SM и AM являются соответственно их высотами, то есть $SM \perp BC$ и $AM \perp BC$. Тогда $\angle SMA$ — линейный угол двугранного угла при ребре BC (пусть $\angle SMA = \varphi$). Поскольку $SM = AM = \frac{x\sqrt{3}}{2}$ (как высоты правильных треугольников), то по теореме косинусов из треугольника SMA:

$SA^2 = AM^2 + SM^2 - 2AM \cdot SM \cdot \cos\varphi$,

то есть $x^2 = \frac{3x^2}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{3x^2}{2} \cdot \cos\varphi$.

Отсюда $\cos\varphi = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\cos\varphi = \frac{1}{3}$. ◁

Комментарий

Напомним, что *в правильном тетраэдре все грани — правильные треугольники, поэтому все его ребра равны*. Для построения линейного угла двугранного угла при ребре BC удобно использовать первый практический способ и получить в гранях двугранного угла два перпендикуляра к ребру, проведенные из одной точки M (рис. 17.9).

Следует учесть, что, опуская перпендикуляры из точек S и A на прямую BC, нужно доказывать, что их основания находятся в одной точке. Во избежание этого удобно взять середину отрезка BC, соединить эту точку отрезками с точками S и A, а затем доказать, что действительно получили перпендикуляры к BC.

Необходимо также учесть, что *в предложенной задаче на вычисление не дано ни одного отрезка. Поэтому для ее решения удобно ввести неизвестный отрезок* (и кроме того, обозначить искомый угол через φ).

Задача 2. Через гипотенузу $AB = c$ равнобедренного прямоугольного треугольника ABC (угол C равен $90°$) проведена плоскость α, образующая с плоскостью треугольника угол $60°$. Найдите расстояние от вершины C до плоскости α.

Решение

Опустим перпендикуляр CO из точки C на плоскость α, тогда CO — расстояние от точки C до плоскости α (рис. 17.10). В плоскости α проведем $OM \perp AB$ и соединим отрезком точки C и M.

Комментарий

Для того чтобы найти расстояние от точки C до плоскости α (рис. 17.10), необходимо провести перпендикуляр к плоскости α ($CO \perp \alpha$). Поэтому угол между плоскостью треугольника и плоскостью α удобно построить

Тогда $CM \perp AB$ по теореме о трех перпендикулярах, то есть $\angle CMO$ — линейный угол двугранного угла при ребре AB, следовательно, $\angle CMO = 60°$. В равнобедренном прямоугольном треугольнике высота CM является одновременно медианой, следовательно, $AM = \frac{1}{2} AB = \frac{c}{2}$. Тогда из прямоугольного треугольника ACM имеем: $CM = \frac{c}{2}$. Из прямоугольного треугольника CMO ($CO \perp OM$, поскольку $CO \perp \alpha$):

$$CO = CM \cdot \sin 60° = \frac{c\sqrt{3}}{4}.$$

Ответ: $\frac{c\sqrt{3}}{4}$. ◁

способом 2 построения линейного угла. Этим способом всегда получается линейный угол двугранного угла как острый угол прямоугольного треугольника. Следовательно, величина полученного острого линейного угла всегда равна величине угла между плоскостями, в которых лежат грани рассматриваемого двугранного угла.

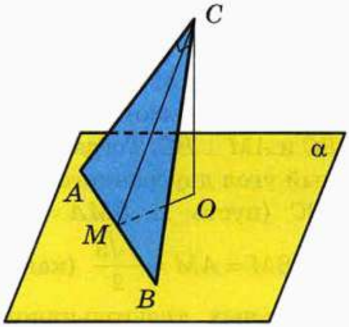


Рис. 17.10

Вопросы для контроля

1. Объясните, какую фигуру называют двугранным углом (ребром угла, гранью угла).
2. Объясните, как определяют линейный угол двугранного угла.
3. Докажите, что мера двугранного угла не зависит от выбора линейного угла.
4. Объясните, пользуясь моделью двугранного угла, как можно практически построить линейный угол двугранного угла.

5*. Докажите, что в результате использования практических способов действительно получаем линейные углы.

6. Дайте определение угла между плоскостями.

7*. Докажите, что если через произвольную точку на прямой пересечения плоскостей провести в каждой плоскости прямую, перпендикулярную прямой их пересечения, то величина угла между этими прямыми будет равна величине угла между заданными плоскостями.

Упражнения

17.1°. Какой угол образует ребро двугранного угла с любой прямой, лежащей в плоскости его линейного угла?

17.2°. На рисунке 17.11 изображен двугранный угол с ребром BC. Укажите линейный угол этого двугранного угла, если $AP \perp$ пл. ABC и в треугольнике ABC угол C равен 90°.

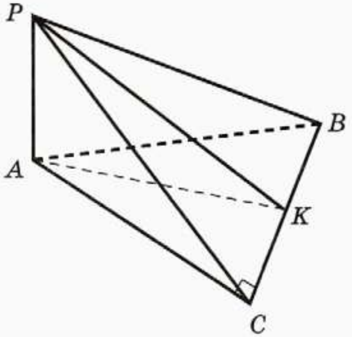


Рис. 17.11

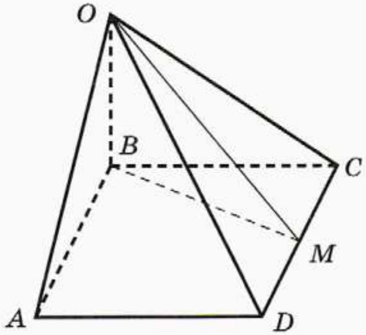


Рис. 17.12

17.3°. В основании пирамиды $OABCD$ (рис. 17.12) лежит квадрат $ABCD$. Боковое ребро OB перпендикулярно плоскости основания. Укажите линейный угол двугранного угла с ребром CD.

17.4°. Полуплоскости, в которых лежат два равнобедренных треугольника с общим основанием, образуют двугранный угол. Верно ли утверждение, что медианы, проведенные к общему основанию треугольников, образуют линейный угол двугранного угла?

17.5. Треугольник MAB и квадрат $ABCD$ расположены таким образом, что MB — перпендикуляр к плоскости квадрата. Величину какого угла можно считать углом между плоскостями AMD и ABC?

17.6. Две плоскости пересекаются под углом 30°. Точка A, лежащая в одной из этих плоскостей, удалена от другой плоскости на расстояние a. Найдите расстояние от этой точки до прямой пересечения плоскостей.

17.7. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол наклона плоскости ADC_1 к плоскости ABC.

17.8. Катеты прямоугольного треугольника равны 7 м и 24 м. Найдите расстояние от вершины прямого угла до плоскости, проходящей через гипотенузу и образующей с плоскостью треугольника угол 30°.

17.9. Через сторону AB треугольника ABC проведена плоскость α под углом 60° к плоскости треугольника. Высота CD треугольника ABC равна a. Найдите расстояние от вершины C треугольника до плоскости α.

17.10. Через катет $BC = a$ равнобедренного прямоугольного треугольника ABC (угол C равен $90°$) проведена плоскость α, образующая с плоскостью треугольника угол $30°$. Найдите расстояние от вершины A до плоскости α.

17.11*. Докажите, что плоскость, пересекающая параллельные плоскости, пересекает их под одинаковыми углами.

17.12. Найдите угол между плоскостями, если точка, лежащая на одной из них, находится от прямой пересечения плоскостей на расстоянии вдвое большем, чем от другой плоскости.

17.13. Равнобедренные треугольники ABC и ABD с общим основанием AB лежат в различных плоскостях, угол между которыми равен α. Найдите $\cos\alpha$, если: 1) $AB = 24$ см, $AC = 13$ см, $AD = 37$ см, $CD = 35$ см; 2) $AB = 32$ м, $AC = 65$ м, $AD = 20$ м, $CD = 63$ м.

17.14. Два равнобедренных треугольника имеют общее основание, а их плоскости образуют угол $60°$. Общее основание равно 16 м; боковая сторона одного треугольника — 17 м, боковые стороны другого — перпендикулярны. Найдите расстояние между вершинами треугольников.

17.15*. В квадрате $ABCD$ через вершину D параллельно диагонали AC проведена плоскость α, образующая с диагональю BD угол $60°$. Чему равен угол между плоскостью квадрата и плоскостью α?

17.16*. Из точек A и B, лежащих в различных гранях двугранного угла, опущены перпендикуляры AA_1 и BB_1 на ребро угла. Найдите: 1) отрезок AB, если $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $A_1B_1 = c$ и двугранный угол равен α; 2) двугранный угол α, если $AA_1 = 3$, $BB_1 = 4$, $A_1B_1 = 6$, $AB = 7$.

17.17*. Ребро куба равно α. Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через сторону основания, если угол между этой плоскостью и плоскостью основания равен: 1) $30°$; 2) $60°$.

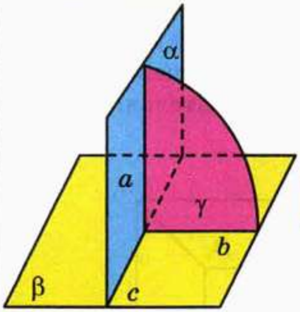
17.18. Через центр O правильного треугольника ABC проведен к его плоскости перпендикуляр MO, $AB = a\sqrt{3}$. Угол между прямой MA и плоскостью треугольника равен $45°$. Найдите угол между плоскостями: 1) AMO и BMO; 2) BMC и ABC.

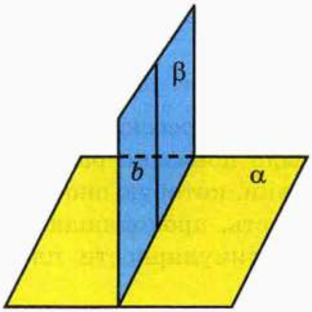
17.19*. Все ребра правильной треугольной призмы равны. Найдите угол между плоскостью основания призмы и плоскостью, проходящей через противолежащие вершины боковой грани и середину ребра, противолежащего этой грани.

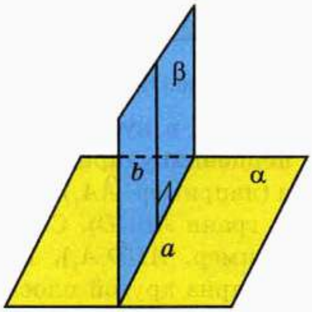
17.20*. Докажите, что если все двугранные углы при основании пирамиды равны, то основание пирамиды — многоугольник, в который можно вписать окружность, и вершина пирамиды проектируется в центр этой окружности.

§ 18 ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ

Таблица 16

<table>
<tr><td colspan="2">ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ</td></tr>
<tr><td colspan="2">Определение</td></tr>
<tr><td colspan="2">Две пересекающиеся плоскости называют перпендикулярными, если угол между ними равен 90°.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Содержание</td></tr>
<tr><td colspan="2">

$\alpha \perp \beta$ ⇔ α пересекает β по прямой c,
$\gamma \perp c$,
γ пересекает α по прямой a,
γ пересекает β по прямой b,
$a \perp b$ ⇔ $\angle(\alpha;\beta) = 90°$</td></tr>
<tr><td>Признак</td><td>Свойство</td></tr>
<tr><td>

Если $b \perp \alpha$ и β проходит через b, то $\beta \perp \alpha$.</td><td>

Если $\beta \perp \alpha$, β пересекает α по a и $b \perp a$ (b лежит в β), то $b \perp \alpha$.</td></tr>
</table>

Объяснение и обоснование

Понятие угла между плоскостями позволяет дать определение перпендикулярности плоскостей.

Определение. **Две пересекающиеся плоскости называют *перпендикулярными*, если угол между ними равен 90°.**

Теорема **18.1** (признак перпендикулярности плоскостей). **Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.**

Доказательство. Пусть α — данная плоскость, b — прямая, перпендикулярная этой плоскости ($b \perp \alpha$), β — плоскость, проходящая через прямую b, и c — прямая, по которой пересекаются плоскости α и β (рис. 18.1). Докажем, что плоскости α и β перпендикулярны.

Проведем в плоскости α через точку A пересечения прямой b с плоскостью α (а значит, и с прямой c) прямую a, перпендикулярную прямой c. Так как $b \perp \alpha$, то $b \perp c$ и $b \perp a$. Тогда, как было показано в § 17, величина угла между плоскостями равна величине угла между прямыми a и b, лежащими в этих плоскостях и перпендикулярными прямой c их пересечения. Учитывая, что $b \perp a$, получаем: $\angle(\alpha; \beta) = \angle(a; b) = 90°$. Следовательно, плоскости α и β перпендикулярны.

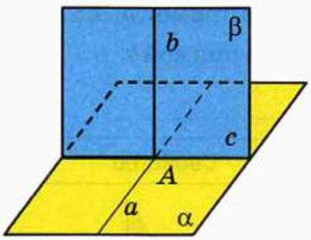


Рис. 18.1

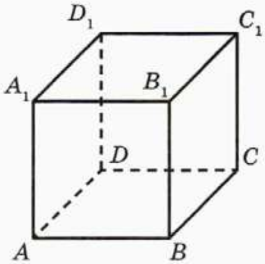


Рис. 18.2

В частности, **в кубе** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 18.2) **пересекающиеся грани попарно перпендикулярны**, поскольку, как было показано ранее, каждое ребро куба (например, AA_1) перпендикулярно грани, которую оно пересекает (например, грани $ABCD$). Следовательно, плоскость, проходящая через это ребро (например, ADD_1A_1), по признаку перпендикулярности плоскостей перпендикулярна другой плоскости (пл. $ABCD$).

Рассмотрим еще одно свойство, связывающее перпендикулярность двух плоскостей и перпендикулярность прямой и плоскости.

Теорема **18.2. Прямая, проведенная в одной из двух перпендикулярных плоскостей перпендикулярно прямой их пересечения, перпендикулярна другой плоскости.**

Доказательство. Пусть перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой c и в плоскости β проведена прямая b перпендикулярно прямой c (рис. 18.1). Докажем, что $b \perp \alpha$.

Проведем в плоскости α через точку A прямую a, перпендикулярную прямой c. Тогда величина угла между прямыми a и b равна величине угла между плоскостями α и β, то есть $90°$. Следовательно, прямая b

перпендикулярна пересекающимся прямым a и c плоскости α. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости $b \perp \alpha$. ○

Примеры решения задач

Задача 1. Даны прямая a и плоскость α. Проведите через прямую a плоскость, перпендикулярную плоскости α.

Решение	*Комментарий*
▶ Если $a \perp \alpha$, то возьмем произвольную точку B, не лежащую на прямой a, и через прямую и точку вне ее проведем плоскость γ (рис. 18.3, *а*). По признаку перпендикулярности плоскостей $\gamma \perp \alpha$. Если данная прямая не перпендикулярна плоскости α, то возьмем произвольную точку A прямой a и проведем через нее прямую b (рис. 18.3, *б*), перпендикулярную плоскости α. Через прямые a и b проведем плоскость β. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости $\beta \perp \alpha$. ◁	Эта задача на воображаемое построение фактически является задачей на доказательство существования фигуры, удовлетворяющей данным условиям. Как отмечалось в § 4, это доказательство должно опираться на соответствующие аксиомы и свойства стереометрических фигур. В частности, следует использовать результаты, рассмотренные в § 14: *через произвольную точку пространства всегда можно провести единственную прямую, перпендикулярную данной плоскости.* Для доказательства перпендикулярности данной и построенной плоскостей можно использовать признак перпендикулярности плоскостей (для этого достаточно выяснить, что построенная плоскость проходит через прямую, перпендикулярную данной плоскости).

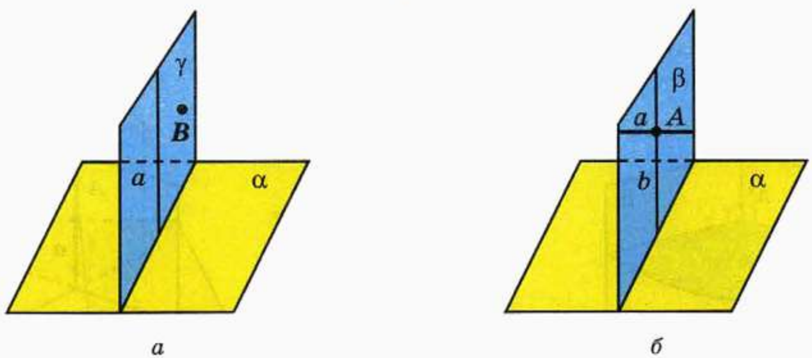


Рис. 18.3

Задача 2. Докажите, что **плоскость линейного угла перпендикулярна каждой грани двугранного угла.**

Решение	*Комментарий*
▶ По определению линейного угла его плоскость γ перпендикулярна ребру c (рис. 18.4). Но каждая грань (α и β) двугранного угла проходит через прямую c, перпендикулярную плоскости γ. Следовательно, по признаку перпендикулярности плоскостей $\gamma \perp \alpha$ и $\gamma \perp \beta$.	Для доказательства перпендикулярности двух плоскостей можно использовать признак перпендикулярности плоскостей, а для этого достаточно выяснить, что одна из плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости.

Задача 3. Докажите, что **если из точки, лежащей в одной из перпендикулярных плоскостей, опустить перпендикуляр на вторую плоскость, то этот перпендикуляр будет лежать в первой плоскости.**

Решение	*Комментарий*
▶ Пусть плоскости α и β перпендикулярны ($\beta \perp \alpha$) и пересекаются по прямой c (рис. 18.5). Опустим из некоторой точки $A \in \beta$ перпендикуляр AO на плоскость α ($AO \perp \alpha$). Допустим, что AO не лежит в плоскости β. Проведем в плоскости β через точку A перпендикуляр к прямой c ($AO_1 \perp c$). Тогда по теореме 18.2 $AO_1 \perp \alpha$. Получается, что через точку A проходят две прямые, перпендикулярные плоскости α, что невозможно. Следовательно, AO лежит в плоскости β. ◁	Для доказательства используем метод «от противного»: допустим, что перпендикуляр не лежит в первой плоскости. Используя теорему 18.2, построим еще один перпендикуляр из данной точки к плоскости. Это и приведет к противоречию с единственностью такого перпендикуляра. Следовательно, наше предположение неверно, а значит, перпендикуляр должен лежать в первой плоскости.

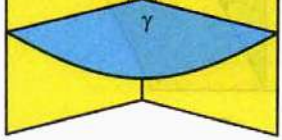


Рис. 18.4

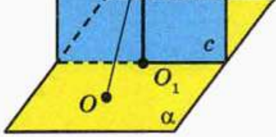


Рис. 18.5

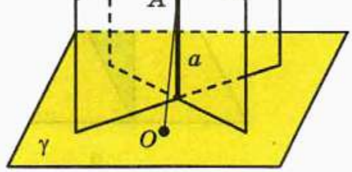


Рис. 18.6

Задача 4. Докажите, что **если две пересекающиеся плоскости перпендикулярны третьей плоскости, то прямая их пересечения перпендикулярна этой (третьей) плоскости.**

Решение	*Комментарий*
▶ Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой a и перпендикулярны плоскости γ ($\alpha \perp \gamma$ и $\beta \perp \gamma$) (рис. 18.6). Возьмем произвольную точку A на прямой a и проведем через нее прямую, перпендикулярную плоскости γ ($AO \perp \gamma$). По предыдущему свойству эта прямая лежит и в плоскости α, и в плоскости β, то есть она совпадает с прямой a. Тогда эта прямая перпендикулярна плоскости γ. ◁	Применим результат, обоснованный в задаче 2, к точке, взятой на прямой пересечения первых двух плоскостей, и учтем, что две различные плоскости могут иметь только одну общую прямую — прямую их пересечения.

Вопросы для контроля

1. Дайте определение перпендикулярности двух плоскостей.
2. Сформулируйте признак перпендикулярности двух плоскостей.
3*. Докажите признак перпендикулярности двух плоскостей.
4. Сформулируйте свойство, связывающее перпендикулярность двух плоскостей и перпендикулярность прямой и плоскости.
5*. Докажите свойство, связывающее перпендикулярность двух плоскостей и перпендикулярность прямой и плоскости.

Упражнения

18.1°. Плоскость α перпендикулярна плоскости β. Будет ли произвольная прямая плоскости α перпендикулярна плоскости β? (Проиллюстрируйте ответ на модели перпендикулярных плоскостей.)

18.2°. Две плоскости перпендикулярны. Укажите все возможные случаи расположения прямой, лежащей в одной плоскости, относительно прямой, лежащей в другой плоскости. (Проиллюстрируйте свой ответ на модели.)

18.3°. Верно ли, что плоскость, проходящая через наклонную к другой плоскости, всегда не перпендикулярна этой плоскости?

18.4°. Верно ли, что две плоскости, перпендикулярные третьей, параллельны?

18.5°. Верно ли, что прямая и плоскость, перпендикулярные другой плоскости, параллельны?

18.6°. Плоскость и прямая параллельны. Верно ли утверждение, что плоскость, перпендикулярная этой плоскости, перпендикулярна и этой прямой?

18.7. Плоскость и прямая параллельны. Верно ли утверждение, что плоскость, перпендикулярная прямой, перпендикулярна этой плоскости?

18.8. Сколько плоскостей, перпендикулярных данной плоскости, можно провести через данную прямую?

18.9. Докажите, что пересекающиеся грани прямоугольного параллелепипеда попарно перпендикулярны.

18.10. Докажите, что в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сечения AA_1C_1C и BB_1D_1D перпендикулярны. (Поскольку эти сечения проходят через диагонали граней куба, их называют *диагональными*.)

18.11. Докажите, что через любую точку пространства можно провести плоскость, перпендикулярную данной плоскости. Сколько таких плоскостей можно провести через данную точку?

18.12°. Вертикальность стены при строительстве проверяют с помощью отвеса (шнура с грузиком). Если шнур плотно прилегает к поверхности стены, то считается, что вертикальность выдержана. На чем основан такой способ проверки?

18.13. Равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$) перегнули по высоте CH таким образом, что плоскости ACH и BCH образовали прямой угол. Найдите углы: 1) AHB; 2) ACB.

18.14. Существует ли треугольная пирамида, у которой три грани попарно перпендикулярны?

18.15. Существует ли четырехугольная пирамида, у которой две противолежащие боковые грани перпендикулярны основанию?

18.16. Существует ли пирамида, у которой три боковые грани перпендикулярны основанию?

18.17*. Даны прямая a и плоскость α, не перпендикулярная прямой. Докажите, что все прямые, перпендикулярные плоскости α и пересекающие прямую a, лежат в одной плоскости, перпендикулярной плоскости α.

18.18. Из точек A и B, лежащих в двух перпендикулярных плоскостях, опущены перпендикуляры AC и BD на прямую пересечения плоскостей. Найдите длину отрезка AB, если: 1) $AC = 6$ м, $BD = 7$ м, $CD = 6$ м; 2) $AC = 3$ м, $BD = 4$ м, $CD = 12$ м; 3) $AD = 4$ м, $BC = 7$ м, $CD = 1$ м; 4) $AD = BC = 5$ м, $CD = 1$ м; 5) $AC = a$, $BD = b$, $CD = c$; 6) $AD = a$, $BC = b$, $CD = c$.

18.19. Точка находится на расстояниях a и b от двух перпендикулярных плоскостей. Найдите расстояние от этой точки до прямой пересечения плоскостей (рис. 18.7).

18.20*. Плоскости α и β перпендикулярны. В плоскости α взята точка A, расстояние от которой до прямой c (линии пересечения плоскостей) равно 0,5 м. В плоскости β проведена прямая b, параллельная прямой c и удаленная от нее на 1,2 м. Найдите расстояние от точки A до прямой b.

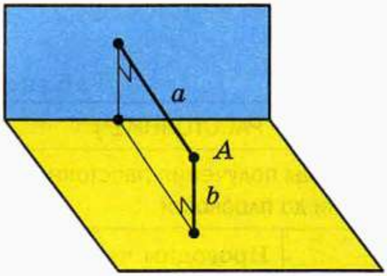


Рис. 18.7

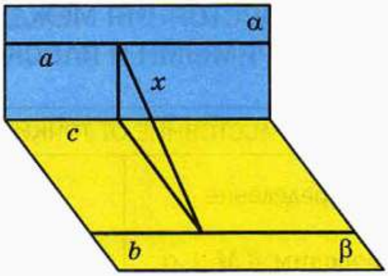


Рис. 18.8

18.21*. Перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой c. В плоскости α проведена прямая $a \parallel c$, а в плоскости β — прямая $b \parallel c$. Найдите расстояние между прямыми a и b, если расстояние между прямыми a и c равно 1,5 м, а между прямыми b и c — 0,8 м (рис. 18.8).

18.22*. Плоскости равносторонних треугольников ABC и ABD перпендикулярны. Найдите угол: 1) между прямой DC и плоскостью ABC; 2) между плоскостями ADC и BDC.

18.23*. Плоскости α и β взаимно перпендикулярны. Прямая l пересекает плоскости α и β в точках A и B соответственно, образуя при этом с каждой из плоскостей углы, равные φ. Найдите длину отрезка, концы которого — проекции точек A и B на линию пересечения данных плоскостей, если длина отрезка AB равна a.

18.24. Плоскости равнобедренного треугольника ABF и квадрата $ABCD$ перпендикулярны. Найдите расстояние: 1) от точки F до прямой CD; 2) от точки F до центра окружности, проходящей через точки A, B и центр O квадрата, если сторона квадрата равна 32 и $AF = BF = 20$.

18.25. Плоскости ABC и ABD образуют угол 45°. Известно, что $AD = 3$, $AB = 5$, $BC = \sqrt{2}$; $DA \perp AB$, $CB \perp AB$. Найдите: 1) отрезок CD; 2) угол между прямой CD и плоскостью ABC.

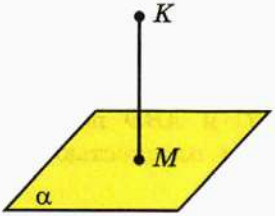
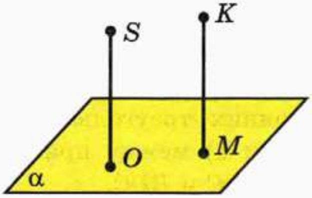
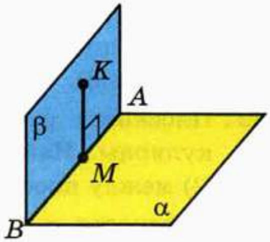
18.26. Прямоугольники $ABCD$ и $ABMK$ лежат во взаимно перпендикулярных плоскостях. Верно ли, что: 1) $AC \perp AK$; 2) $AM \perp AD$; 3) $AC \perp AM$?

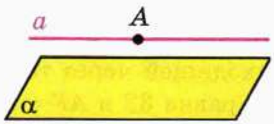
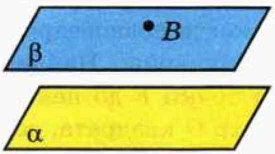
18.27*. Дан $PABC$ — правильный тетраэдр с ребром 8. Через вершину C проведена плоскость α, перпендикулярная ребру AP. Найдите периметр и площадь треугольника, вершинами которого служат точки пересечения плоскости α с ребрами данного тетраэдра.

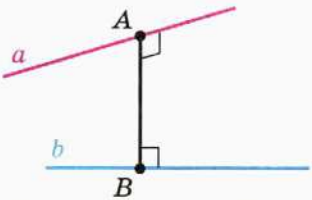
18.28*. Изобразите куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью, проходящей через: 1) ребро BB_1 перпендикулярно плоскости ACC_1; 2) ребро AB перпендикулярно плоскости AB_1C_1; 3) ребро BC перпендикулярно плоскости AB_1C_1.

§ 19 РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ТОЧКАМИ, ПРЯМЫМИ И ПЛОСКОСТЯМИ

Таблица 17

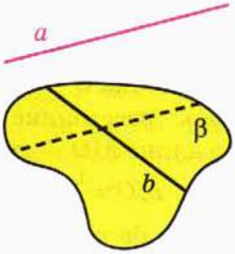
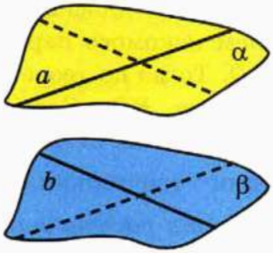
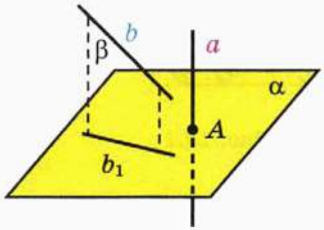
РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ (ρ — РАССТОЯНИЕ[1])		
Определение	Практические приемы получения расстояния от точки до плоскости	
Проводим $KM \perp \alpha$ ($M \in \alpha$).  $KM = \rho\ (K;\ \alpha)$	$SO \perp \alpha$. Проводим $KM \parallel SO$. Тогда $KM \perp \alpha$.  $KM = \rho\ (K;\ \alpha)$	Проводим через точку K плоскость $\beta \perp \alpha$ (β пересекает α по AB). Проводим $KM \perp AB$. Тогда $KM \perp \alpha$.  $KM = \rho\ (K;\ \alpha)$

РАССТОЯНИЕ (ρ) МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ	РАССТОЯНИЕ (ρ) МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ
 $a \parallel \alpha,\ A \in a$ $\rho\ (a;\ \alpha) = \rho\ (A;\ \alpha)$	 $\beta \parallel \alpha,\ B \in \beta$ $\rho\ (\beta;\ \alpha) = \rho\ (B;\ \alpha)$

РАССТОЯНИЕ (ρ) МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ	
	***Расстоянием между скрещивающимися прямыми*** **называют длину их общего перпендикуляра.** Прямые a и b — скрещивающиеся. $AB \perp a,\ AB \perp b$ $\rho\ (a;\ b) = AB$

[1] Обозначение расстояния между точкой A и плоскостью α (и между другими фигурами) в виде $\rho\ (A;\ \alpha)$ не является общепринятым, но иногда мы будем пользоваться им для сокращенных записей.

Окончание табл. 17

ПРИЕМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ РАССТОЯНИЯ (ρ) МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ		
Проводим через прямую b плоскость $\beta \parallel a$.	Проводим через прямые a и b параллельные плоскости $\alpha \parallel \beta$.	Проводим плоскость $\alpha \perp a$ и проектируем прямые a и b на эту плоскость: $a \to A$, $b \to b_1$
		
$\rho(a; b) = \rho(a; \beta)$	$\rho(a; b) = \rho(\alpha; \beta)$	$\rho(a; b) = \rho(A; b_1)$

Объяснение и обоснование

Напомним, что в планиметрии расстоянием между прямой и точкой, не принадлежащей ей, называют длину перпендикуляра, опущенного из точки на прямую. Расстоянием между двумя параллельными прямыми называют расстояние от любой точки одной прямой до другой (так как все расстояния от точек одной из параллельных прямых до другой одинаковы).

В пространстве прямая и точка, не принадлежащая ей, а также две параллельные прямые лежат в одной плоскости. Поэтому данные определения расстояний между точкой и прямой, а также между двумя параллельными прямыми можно использовать и для пространства. Напомним также (см. § 15) определение:

***расстоянием от точки до плоскости* называют длину перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.**

Из свойств перпендикуляра и наклонной следует, что расстояние между точкой и плоскостью — наименьшее из всех возможных расстояний от этой точки до точек плоскости.

Отметим, что в некоторых задачах важно указать на изображении пространственной фигуры основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на плоскость. Тогда можно использовать практические приемы получения расстояния от точки до плоскости, зафиксированные в табл. 17.

Прием 1. *Если в каком-либо месте данной конфигурации уже имеется перпендикуляр к данной плоскости, то достаточно через данную точку провести прямую, параллельную этому перпендикуляру, и найти точку пересечения этой прямой с данной плоскостью.*

Действительно, если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости.

Пусть в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a (рис. 19.1) нужно найти расстояние от середины диагонали куба BD_1 — точки M до плоскости основания $ABCD$. Для этого достаточно вспомнить, что все боковые ребра куба перпендикулярны плоскости основания, в частности $D_1D \perp$ пл. $ABCD$, и провести через точку M прямую $MO \parallel D_1D$. Поскольку плоскость D_1DB пересекает плоскость $ABCD$ по прямой DB, то основанием искомого перпендикуляра является точка $O \in BD$. Тогда по теореме Фалеса точка O — середина[1] отрезка BD. Следовательно, расстояние от точки M до плоскости $ABCD$ равно длине MO — средней линии треугольника D_1DB: $MO = \frac{1}{2}DD_1 = \frac{a}{2}$.

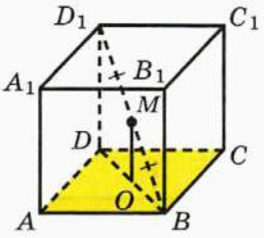


Рис. 19.1

Прием 2. *Для того чтобы найти расстояние от точки до плоскости, можно через данную точку провести плоскость, перпендикулярную данной плоскости, а затем в построенной плоскости провести перпендикуляр из данной точки на прямую пересечения рассматриваемых плоскостей.*

Действительно, по теореме 18.2 проведенный отрезок будет перпендикулярен данной плоскости, то есть он и будет расстоянием от данной точки до этой плоскости.

Например, чтобы решить предыдущую задачу: в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a (рис. 19.1) найти расстояние от середины диагонали куба BD_1 — точки M до плоскости основания $ABCD$, достаточно заметить, что плоскость BD_1D перпендикулярна плоскости $ABCD$ (поскольку она проходит через ребро $D_1D \perp$ пл. $ABCD$), и опустить из точки M перпендикуляр MO на прямую BD пересечения рассматриваемых плоскостей (если пл. $BD_1D \perp$ пл. $ABCD$ и $MO \perp BD$, то $MO \perp$ пл. $ABCD$). Это и будет расстояние от точки M до плоскости $ABCD$. Учитывая, что $MO \parallel D_1D$ (как прямые, перпендикулярные одной плоскости), последующее решение будет таким же, как и приведенное выше.

Дадим теперь определения расстояния между параллельными прямой и плоскостью, расстояния между параллельными плоскостями и расстояния между скрещивающимися прямыми.

Определение. ***Расстоянием между параллельными прямой и плоскостью*** **называют расстояние от какой-либо точки прямой до плоскости.**

Определение. ***Расстоянием между двумя параллельными плоскостями*** **называют расстояние от какой-либо точки одной плоскости до другой плоскости.**

---

[1] Строя изображение, следует учитывать, что диагонали квадрата точкой пересечения делятся пополам и при проектировании середина отрезка проектируется в середину отрезка проекции. Поэтому на изображении точка O должна быть точкой пересечения диагоналей BD и AC.

Докажем, что расстояние между параллельными прямой и плоскостью или между двумя параллельными плоскостями не зависит от выбора точки.

Пусть даны параллельные прямая a и плоскость β и точки A_1 и A_2 на прямой a (рис. 19.2) или две параллельные плоскости α и β и точки A_1 и A_2 в плоскости α (рис. 19.3).

Опустим из точек A_1 и A_2 перпендикуляры A_1B_1 и A_2B_2 на плоскость β. Тогда расстояние от точки A_1 до плоскости β равно A_1B_1, а расстояние от точки A_2 до плоскости β — A_2B_2. Четырехугольник $A_1A_2B_2B_1$ — прямоугольник (обоснуйте самостоятельно), следовательно, $A_1B_1 = A_2B_2$.

Отметим, что с понятиями расстояния от точки до плоскости и расстояния между параллельными плоскостями связаны понятия высоты пирамиды и призмы.

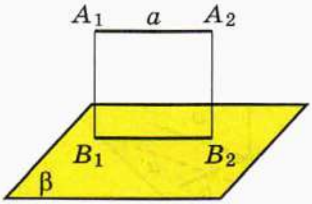


Рис. 19.2

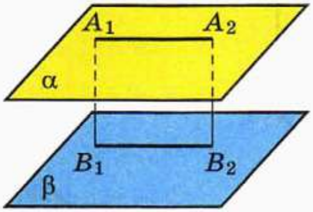


Рис. 19.3

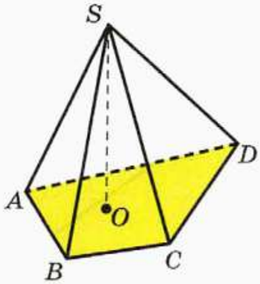


Рис. 19.4

Определение. ***Высотой пирамиды*** **называют перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость ее основания. Длину этого перпендикуляра также называют высотой пирамиды.**

Например, если в пирамиде $SABCD$ (рис. 19.4) $SO \perp$ пл. $ABCD$, то SO — высота пирамиды, то есть высотой пирамиды является расстояние от ее вершины до плоскости основания.

Определение. ***Высотой призмы*** **называют перпендикуляр, опущенный из точки одного основания призмы на плоскость другого основания. Длину этого перпендикуляра также называют высотой призмы.**

Например, если в призме $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ (рис. 19.5) $A_1M \perp$ пл. $ABCDE$, то A_1M — высота призмы. Поскольку в призме плоскости оснований параллельны, то высотой призмы является расстояние между этими плоскостями.

Призму называют *прямой*, если у нее боковые ребра перпендикулярны плоскостям оснований.

В частности, прямые призмы — куб и прямоугольный параллелепипед.

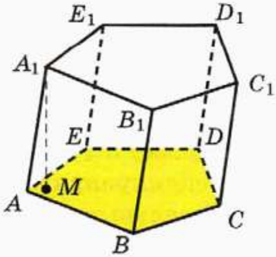


Рис. 19.5

Из определения прямой призмы следует, что **в прямой призме высотой призмы является боковое ребро.** Например, если $ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма (рис. 19.6), то ее высотой является любое боковое ребро, например AA_1 (поскольку $AA_1 \perp$ пл. ABC).

Дадим также определение расстояния между скрещивающимися прямыми.

Определение 1. ***Общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых*** **называют отрезок с концами на этих прямых, перпендикулярный каждой из них.**

Определение 2. ***Расстоянием между скрещивающимися прямыми называют длину их общего перпендикуляра.***

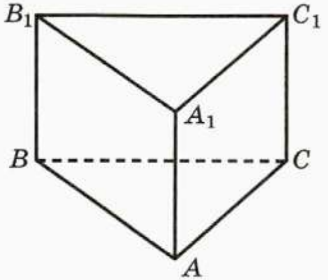


Рис. 19.6

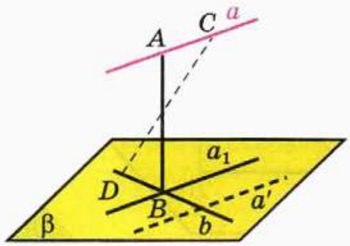


Рис. 19.7

***Теорема* 19.1. Общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых существует, и притом единственный.**

Доказательство. Пусть a и b — скрещивающиеся прямые. Через одну из них, например b, проведем плоскость β, параллельную прямой a. Это можно сделать, проведя прямую a', параллельную прямой a и пересекающую прямую b (рис. 19.7). Тогда пересекающиеся прямые a' и b будут определять плоскость β, параллельную прямой a. Рассмотрим ортогональную проекцию a_1 прямой a на плоскость β. Она будет пересекать прямую b в некоторой точке B, являющейся ортогональной проекцией некоторой точки A прямой a. Отрезок AB и будет искомым. Действительно, он перпендикулярен плоскости β, а значит, и прямым b и a'. Следовательно, $AB \perp b$ и $AB \perp a'$. Учитывая, что $a' \parallel a$, получаем $AB \perp a$, то есть отрезок AB — общий перпендикуляр прямых a и b.

Докажем, что этот общий перпендикуляр единственный. Допустим, что прямые a и b имеют еще один общий перпендикуляр CD: $CD \perp b$ и $CD \perp a$. Поскольку $a \parallel a'$, то $CD \perp a'$. Тогда $CD \perp \beta$. Получили, что прямые AB и CD перпендикулярны одной плоскости β, следовательно, они параллельны. Но параллельные прямые лежат в одной плоскости, тогда и точки A, B, C, D лежат в одной плоскости. Отсюда следует, что прямые a и b лежат в одной плоскости, а это невозможно (поскольку по условию они скрещивающиеся).

Следовательно, наше предположение неверно, и прямые a и b имеют только один общий перпендикуляр. ○

Например, в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1 (рис. 19.8) расстояние между скрещивающимися прямыми A_1B_1 и BC равно длине их общего перпендикуляра $BB_1 = 1$.

Из теоремы 19.1 следует: для того чтобы найти расстояние между скрещивающимися прямыми, через одну из данных прямых можно провести плоскость, параллельную другой прямой, и найти расстояние от прямой до параллельной ей плоскости (см. последний пункт табл. 17).

Также можно через данные скрещивающиеся прямые провести параллельные плоскости и найти расстояние между ними. (Этот способ отличается от предыдущего тем, что через каждую из данных прямых проводят плоскость, параллельную другой прямой.)

Кроме того, можно провести плоскость α, перпендикулярную одной из скрещивающихся прямых (например, на рис. 19.9 $\alpha \perp a$) и ортогонально спроектировать данные прямые на эту плоскость. Тогда расстояние между скрещивающимися прямыми будет равно расстоянию между их ортогональными проекциями на плоскость, перпендикулярную одной из них (это свойство обосновано в § 21).

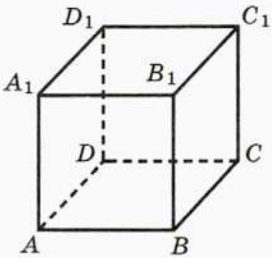


Рис. 19.8

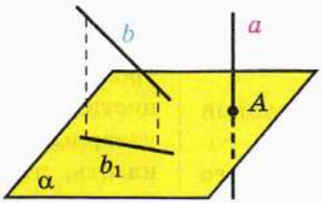


Рис. 19.9

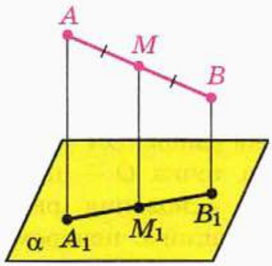


Рис. 19.10

Примеры решения задач

Задача 1. Концы данного отрезка, не пересекающего плоскость, удалены от нее на 2,7 м и 6,3 м. Как удалена от плоскости середина этого отрезка?

Решение	*Комментарий*
▶ Пусть дан отрезок AB, не пересекающий плоскость α, и точка M — его середина (рис. 19.10). Опустим из точек A, B, M перпендикуляры на плоскость α (соответственно AA_1, BB_1, MM_1). Так как прямые, перпендикулярные одной плоскости,	Еще до построения рисунка к задаче следует вспомнить, что расстояние от точки до плоскости измеряется по перпендикуляру, опущенному из данной точки на плоскость, и что прямые, перпендикулярные одной плоскости, параллельны.

параллельны, то $AA_1 \parallel BB_1 \parallel MM_1$. Тогда получаем проекцию (ортогональную) отрезка AB на плоскость α. Поскольку M — середина AB, то M_1 — середина A_1B_1. Следовательно, MM_1 — средняя линия трапеции AA_1B_1B ($AA_1 \parallel BB_1$), поэтому

$$MM_1 = \frac{AA_1 + BB_1}{2} = \frac{6,3+2,7}{2} = 4,5 \text{ (м)}.$$

Ответ: 4,5 м. ◁

Тогда, рассматривая данные точки и основания соответствующих перпендикуляров, мы фактически получим параллельную (точнее, ортогональную) проекцию данного отрезка на плоскость. А поскольку проекция отрезка есть отрезок (а проекция его середины — середина отрезка проекции), то на соответствующем рисунке (см. рис. 19.10) основания перпендикуляров будут расположены на одной прямой.

Задача 2. Докажите, что **в правильной пирамиде высота проходит через центр основания.**

Решение

▶ Пусть $SABC$ — правильная пирамида (рис. 19.11) и SO — ее высота ($SO \perp$ пл. ABC).

Так как в правильной пирамиде боковые ребра равны ($SA = SB = SC$), то их проекции на плоскость ABC также равны: $OA = OB = OC$.

Тогда точка O — центр описанной около основания окружности, совпадающий с центром правильного многоугольника. ◁

Комментарий

Напомним, что пирамиду называют правильной, если ее основанием является правильный многоугольник, а все боковые ребра равны. Центр правильного многоугольника одновременно является и центром описанной около него окружности. Поэтому для доказательства утверждения задачи достаточно показать, что основание высоты есть центр описанной окружности.

Доказательство достаточно провести для треугольной пирамиды, поскольку для n-угольной пирамиды оно аналогично.

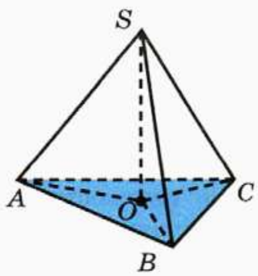


Рис. 19.11

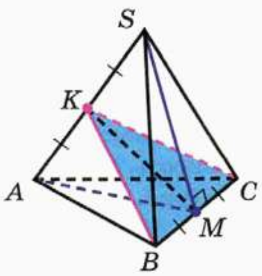


Рис. 19.12

Задача 3*. Ребро правильного тетраэдра равно a. Найдите расстояние между его скрещивающимися ребрами.

Решение	*Комментарий*
▶ Пусть $SABC$ — правильный тетраэдр (рис. 19.12). Возьмем середины M и K скрещивающихся ребер BC и SA соответственно и соединим отрезками точку M с точками S, A и K, а точку K — также с точками B и C. Поскольку в правильном тетраэдре все грани — равные правильные треугольники, то $BK = KC$ и $SM = AM$ (как медианы равных треугольников). Учитывая, что в равнобедренном треугольнике SAM медиана MK является также высотой, получаем $MK \perp SA$. Кроме того, $MK \perp BC$ (как медиана и высота равнобедренного треугольника BKC). Следовательно, MK — общий перпендикуляр к скрещивающимся ребрам SA и BC, а значит, это и есть расстояние между ними. Если ребро правильного тетраэдра равно a, то $SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (как высота правильного треугольника со стороной a). Из прямоугольного треугольника SKM $\left(SK = \frac{a}{2}\right)$: $MK = \sqrt{SM^2 - SK^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. *Ответ*: $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. ◁	Напомним, что в правильном тетраэдре все боковые грани — равные правильные треугольники (и по условию все ребра равны a). Чтобы получить расстояние между скрещивающимися прямыми SA и BC, рассмотрим плоскость SAM (где точка M — середина ребра BC). Она перпендикулярна BC (и будет проходить через другую прямую SA). Тогда, чтобы получить общий перпендикуляр двух данных прямых, достаточно в построенной плоскости SAM из точки M провести перпендикуляр к другой прямой. Учитывая, что этот перпендикуляр в равнобедренном треугольнике SAM $(SM = AM)$ будет и медианой, можно составить следующий *план дополнительных построений*: 1) соединить отрезком середины двух скрещивающихся ребер данного правильного тетраэдра; 2) используя соответствующие равнобедренные треугольники в каждой из плоскостей, проходящих через построенный отрезок и одно из ребер, доказать, что этот отрезок является общим перпендикуляром рассмотренных скрещивающихся ребер.

Вопросы для контроля

1. Дайте определение расстояния: 1) от точки до плоскости; 2) между параллельными прямой и плоскостью; 3) между параллельными плоскостями; 4) между скрещивающимися прямыми.

2. Объясните, как практически можно получить расстояние от точки до плоскости. Проиллюстрируйте эти практические способы на каркасной модели куба.
3. Дайте определение высоты: 1) пирамиды; 2) призмы. Укажите на модели высоту прямоугольного параллелепипеда.
4. Объясните, какую призму называют прямой. На модели прямой призмы укажите ее высоту.
5. Дайте определение общего перпендикуляра двух скрещивающихся прямых. Проиллюстрируйте его на модели.
6*. Докажите, что общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых существует, и притом единственный.

Упражнения

19.1°. Из точки A, не принадлежащей плоскости α, проведена наклонная к этой плоскости. Определите угол между наклонной и плоскостью α, если расстояние от точки A до плоскости α в два раза меньше самой наклонной.

19.2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a найдите расстояние между вершиной A и: 1) ребром B_1C_1; 2) диагональю B_1D_1 грани $A_1B_1C_1D_1$; 3*) диагональю куба A_1C.

19.3°. Чему равно расстояние между параллельными гранями в кубе с ребром a?

19.4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a найдите расстояние: 1°) от вершины A_1 до плоскости ABC; 2) от вершины B до плоскости AA_1C.

19.5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a найдите расстояние между вершиной C и плоскостью AB_1D_1.

19.6. Расстояние между двумя параллельными плоскостями равно a. Отрезок длиной b своими концами упирается в эти плоскости. Найдите проекцию отрезка на каждую из плоскостей.

19.7. Найдите расстояние от середины отрезка AB до плоскости, не пересекающей этот отрезок, если расстояния от точек A и B к плоскости равны: 1) 3,2 см и 5,3 см; 2) 7,4 см и 6,1 см; 3) a и b.

19.8*. Решите задачу 19.7 при условии, что отрезок AB пересекает данную плоскость.

19.9. Через середину отрезка проведена плоскость. Докажите, что концы отрезка находятся на одинаковом расстоянии от этой плоскости.

19.10. Через вершину прямого угла C прямоугольного треугольника ABC проведена плоскость, параллельная гипотенузе, на расстоянии 1 м от нее. Проекции катетов на эту плоскость равны 3 м и 5 м. Найдите гипотенузу.

19.11. Через сторону параллелограмма проведена плоскость на расстоянии a от противолежащей стороны. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей параллелограмма до этой плоскости.

19.12. Через одну сторону ромба проведена плоскость на расстоянии 4 м от противолежащей стороны. Проекции диагоналей на эту плоскость равны 8 м и 2 м. Найдите проекции сторон.

19.13. Два отрезка длиной a и b упираются концами в две параллельные плоскости. Проекция первого отрезка (длиной a) на плоскость равна c. Найдите проекцию второго отрезка.

19.14°. Дано изображение правильной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$. Постройте изображение ее высоты.

19.15. Дано изображение правильной пирамиды $SABC$ с основанием ABC. Постройте изображение ее высоты.

19.16*. Докажите, что в правильной четырехугольной пирамиде диагональ основания перпендикулярна боковому ребру, скрещивающемуся с ней.

19.17. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a найдите расстояние между скрещивающимися прямыми: 1°) AA_1 и CD; 2) A_1C и BB_1; 3) AB и B_1D_1; 4) AC и B_1D_1; 5) BD и CC_1; 6) AC_1 и BD.

19.18. В прямой четырехугольной призме, в основании которой — ромб со стороной a и острым углом α, найдите расстояние между противолежащими боковыми гранями.

19.19*. Найдите геометрическое место точек пространства, равноудаленных от двух параллельных плоскостей.

19.20°. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a, высота — h. Найдите боковое ребро пирамиды.

19.21. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, боковое ребро — b. Найдите высоту пирамиды.

19.22. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, боковое ребро — b. Найдите угол наклона бокового ребра к плоскости основания.

19.23*. Даны плоскость α и две точки A и B по одну сторону от нее. Найдите точку C на плоскости α, чтобы сумма расстояний $AC + CB$ была наименьшей.

19.24. Из данной точки к плоскости проведены две равные наклонные длиной 2 м. Найдите расстояние от точки до плоскости, если угол между наклонными равен 60°, а их проекции перпендикулярны.

19.25. Из точки, удаленной от плоскости на 1 м, проведены две равные наклонные. Найдите расстояние между основаниями наклонных, если известно, что наклонные перпендикулярны и образуют с перпендикуляром к плоскости углы, равные 60°.

19.26. Через конец A отрезка AB длиной b проведена плоскость, перпендикулярная отрезку, и в ней проведена прямая. Найдите расстояние от точки B до прямой, если расстояние от точки A до прямой равно a.

19.27. Расстояния от точки A до всех сторон квадрата равны a. Найдите расстояние от точки A до плоскости квадрата, если диагональ квадрата равна d.

19.28*. Основание высоты четырехугольной пирамиды — точка пересечения диагоналей основания пирамиды. Верно ли, что двугранные углы, образованные боковыми гранями пирамиды с плоскостью основания, равны, если основанием пирамиды являются: 1) квадрат; 2) произвольный параллелограмм; 3) ромб (отличный от квадрата); 4) равнобедренная трапеция?

19.29*. Докажите, что если основание высоты пирамиды — центр вписанной в основание окружности, то двугранные углы, образованные боковыми гранями пирамиды с плоскостью основания, равны.

19.30. Из вершин A и B равностороннего треугольника ABC проведены перпендикуляры AA_1 и BB_1 к плоскости треугольника. Найдите расстояние от вершины C до середины отрезка A_1B_1, если $AB = 2$ м, $CA_1 = 3$ м, $CB_1 = 7$ м и отрезок A_1B_1 не пересекает плоскость треугольника.

19.31. Расстояние от точки до каждой из двух параллельных плоскостей равно 5. Найдите расстояние между данными параллельными плоскостями.

19.32. Расстояния от точки до двух параллельных плоскостей равны 2 и 7. Найдите расстояние между данными параллельными плоскостями.

19.33*. Точка M находится на одинаковом расстоянии от каждой из прямых, содержащих стороны ромба $ABCD$, и равноудалена от каждой его вершины. Найдите углы ромба.

19.34. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено сечение через вершины A_1, C и B_1. Расстояние от вершины B до плоскости сечения равно 8. Найдите расстояния до плоскости сечения от вершин A, C_1, D_1.

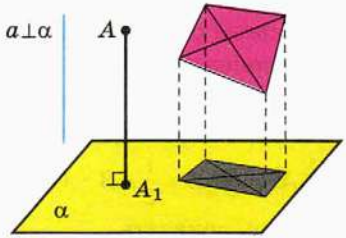
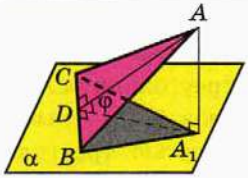
19.35*. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено сечение через вершины A_1, C_1 и B. Расстояние от вершины B_1 до плоскости сечения равно 4. Найдите расстояния до плоскости сечения от вершин A, C, D_1, D.

19.36*. Плоскости α и β параллельны. Прямая a лежит в плоскости α, а прямые KM и KT — в плоскости β. Расстояние между прямыми a и KM равно 5, а между прямыми a и KT — 8. Определите: 1) взаимное расположение прямых a и KM; 2) взаимное расположение прямых a и KT, 3) расстояние между плоскостями α и β.

19.37. Плоскости квадрата $ABEF$ и ромба $ABCD$ перпендикулярны; $CD = 6$, $\angle BCD = 60°$. Найдите расстояние между прямыми: 1) EF и CD; 2) AF и BC.

§ 20 ОРТОГОНАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ

Таблица 18

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВО ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ	
Определение	Свойство
	 $S_{\text{проекции}} = S_{\text{фигуры}} \cdot \cos\varphi$, где φ — угол между плоскостью фигуры и плоскостью проекции

Объяснение и обоснование

1. Определение и простейшие свойства ортогонального проектирования.

Определение. **Параллельное проектирование в направлении прямой, перпендикулярной плоскости проектирования, называют *ортогональным проектированием*.**

Если прямая a, задающая направление проектирования, перпендикулярна плоскости α (см. рисунок в табл. 18), то проектирующие прямые (например, $AA_1 \parallel a$) также будут перпендикулярны плоскости α. Иначе говоря, *проекцией точки* будет основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на плоскость (если точка лежит на плоскости проекции, то она совпадает со своей проекцией). Если указанным образом построить проекцию каждой точки фигуры, то получим *проекцию* самой *фигуры*. Например, если плоскость данного n-угольника и плоскость проекции не перпендикулярны, то проекцией n-угольника является n-угольник (см. примеры, приведенные в табл. 18).

Поскольку ортогональное проектирование — частный случай параллельного проектирования, то оно имеет все его свойства, обоснованные в § 9. Напомним их.

Ортогональная проекция прямой a, не перпендикулярной плоскости проекции, — это некоторая прямая a'. Если прямая a параллельна плоскости проекции, то ее проекция a' параллельна прямой a.

Проекции параллельных прямых — параллельные прямые (если прямые и плоскость данных прямых не перпендикулярны плоскости проекции).

Отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой (или на параллельных прямых), сохраняется при ортогональном проектировании.

Если плоская фигура F лежит в плоскости, параллельной плоскости проектирования, то ее проекция F' на эту плоскость равна фигуре F.

2. Площадь ортогональной проекции многоугольника.

***Теорема* 20.1. Площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна произведению его площади на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции.**

Доказательство. Рассмотрим сначала треугольник и его проекцию на плоскость, проходящую через одну из его сторон (рис. 20.1). Проекцией треугольника ABC является треугольник ABC_1 в плоскости α ($CC_1 \perp \alpha$). Проведем высоту CD треугольника ABC. По теореме о трех перпендикулярах $C_1D \perp AB$, то есть отрезок C_1D — высота треугольника ABC_1. Угол CDC_1 равен углу φ между плоскостью треугольника ABC и плоскостью проекции α. Имеем: $C_1D = CD \cdot \cos\varphi$, $\quad S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CD$, $\quad S_{\Delta ABC_1} = \frac{1}{2}AB \cdot C_1D = \frac{1}{2}AB \cdot CD \cdot \cos\varphi$.

Следовательно, $S_{\Delta ABC_1} = S_{\Delta ABC} \cdot \cos\varphi$, что и требовалось доказать.

Теорема верна также, если вместо плоскости α взять любую параллельную ей плоскость, поскольку проекцией треугольника ABC_1 на плоскость, параллельную его плоскости, является равный ему треугольник.

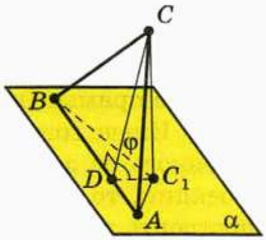


Рис. 20.1

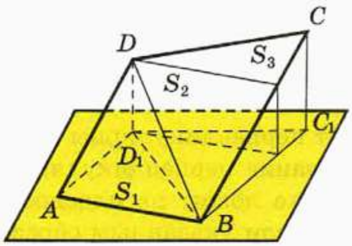


Рис. 20.2

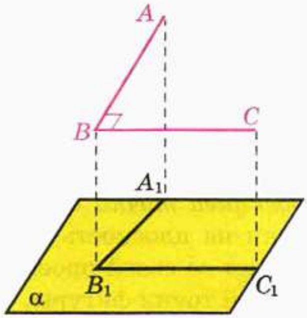


Рис. 20.3

Теперь рассмотрим общий случай. Разобьем данный многоугольник на треугольники. Каждый треугольник, не имеющий сторону, параллельную плоскости проекции, разобьем на два треугольника с общей стороной, параллельной плоскости проекции, как это показано, например, для четырехугольника $ABCD$ на рисунке 20.2.

Площадь S_k ($k = 1, 2, ..., n$) каждого треугольника нашего разбиения и площадь S'_k его проекции связаны равенством $S'_k = S_k \cdot \cos\varphi$. Иначе говоря, $S'_1 = S_1 \cdot \cos\varphi$, $S'_2 = S_2 \cdot \cos\varphi$, ..., $S'_n = S_n \cdot \cos\varphi$. Сложим почленно все эти равенства:

$$S'_1 + S'_2 + \ldots + S'_n = \left(S_1 + S_2 + \ldots + S_n\right) \cdot \cos\varphi.$$

Тогда в левой части равенства получим площадь проекции многоугольника, а в правой — площадь самого многоугольника, умноженную на $\cos\varphi$.

Следовательно, и в этом случае

$$S_{\text{проекции}} = S_{\text{фигуры}} \cdot \cos \varphi. \qquad (1)$$

Отметим, что утверждение теоремы выполняется также для произвольной плоской фигуры, площадь которой можно приблизить площадями вписанных многоугольников с любой точностью.

Теорема справедлива и тогда, *когда плоскость фигуры параллельна плоскости проекции* (или фигура лежит в плоскости проекции). В этом случае данная фигура и ее проекция равны, следовательно, они имеют равные площади. Этот же результат получаем по формуле (1), поскольку угол между двумя параллельными (или совпадающими) плоскостями равен $0°$ ($\cos 0° = 1$) и тогда

$$S_{\text{проекции}} = S_{\text{фигуры}} \cdot \cos 0° = S_{\text{фигуры}}.$$

Примеры решения задач

Задача 1. Проекция прямоугольника со сторонами 6 см и 8 см на некоторую плоскость — ромб с диагоналями 6 см и 8 см. Найдите угол между плоскостями прямоугольника и ромба.

Решение

Обозначим угол между плоскостями прямоугольника и ромба через φ. Поскольку $S_{\text{прямоугольника}} = 6 \cdot 8 = 48$ (см²), $S_{\text{ромба}} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$ (см²), то по формуле площади ортогональной проекции $S_{\text{проекции}} = S_{\text{фигуры}} \cdot \cos \varphi$ получаем: $S_{\text{ромба}} = S_{\text{прямоугольника}} \cdot \cos \varphi$, то есть $24 = 48 \cdot \cos \varphi$. Отсюда $\cos \varphi = \frac{1}{2}$, следовательно, $\varphi = 60°$.

Комментарий

Как уже отмечалось, для нахождения угла достаточно найти любую его тригонометрическую функцию, а для этого достаточно использовать соотношение между площадями фигуры и ее ортогональной проекции ($S_{\text{проекции}} = S_{\text{фигуры}} \cdot \cos \varphi$).

Для того чтобы найти площадь ромба, следует помнить, что она равна половине произведения диагоналей.

Задача 2*. Докажите, что **если одна из сторон прямого угла параллельна плоскости проекции, а другая не перпендикулярна этой плоскости, то ортогональная проекция прямого угла — также прямой угол.**

Решение

Пусть даны прямой угол ABC, расположенный так, что прямая BC параллельна плоскости проекций α, и $A_1B_1C_1$ — ортогональная проекция угла ABC на плоскость α (рис. 20.3). Если $BC \parallel \alpha$, то $B_1C_1 \parallel BC$. Тогда по определению угла между скрещи-

Комментарий

Рассматривая данный прямой угол ABC и его проекцию $A_1B_1C_1$ (рис. 20.3), следует обратить внимание на то, что для доказательства перпендикулярности прямых B_1C_1 и A_1B_1 можно обосновать перпендикулярность прямой B_1C_1 и плоскости A_1B_1B.

вающимися прямыми $\angle(B_1C_1; AB) = \angle(BC; AB) = \angle ABC = 90°$, то есть $B_1C_1 \perp AB$. Поскольку проектирование ортогонально, то $BB_1 \perp \alpha$, следовательно, $BB_1 \perp B_1C_1$.
Тогда по признаку перпендикулярности прямой и плоскости получаем:

$$B_1C_1 \perp \text{пл. } A_1B_1BA.$$

Следовательно, $B_1C_1 \perp A_1B_1$, то есть $\angle A_1B_1C_1 = 90°$, что и требовалось доказать. ◁

При этом полезно учесть свойство параллельного (а значит, и ортогонального) проектирования: *прямая, параллельная плоскости проекции, проектируется в параллельную ей прямую* (если $BC \parallel \alpha$, то $BC \parallel B_1C_1$).

Вопросы для контроля

1. Объясните, как получают ортогональную проекцию точки; фигуры.
2. Сформулируйте основные свойства ортогональной проекции.
3. Сформулируйте свойство площади ортогональной проекции многоугольника на плоскость.
   В каком случае площадь фигуры равна площади ортогональной проекции этой фигуры?
4*. Докажите свойство площади ортогональной проекции многоугольника на плоскость.

Упражнения

20.1°. Верно ли, что ортогональная проекция прямоугольного треугольника — всегда прямоугольный треугольник?

20.2°. Приведите пример фигуры в пространстве, ортогональные проекции которой на две взаимно перпендикулярные плоскости есть окружности одинакового радиуса.

20.3*. Найдите ортогональную проекцию ромба, одна из диагоналей которого перпендикулярна плоскости проекции.

20.4. Может ли площадь ортогональной проекции фигуры быть: 1) больше; 2) меньше; 3) равна площади этой фигуры?

20.5°. Найдите длину ортогональной проекции отрезка AB на плоскость α, если $AB = a$, а прямая AB наклонена к плоскости α под углом 30°.

20.6. Может ли ортогональная проекция отрезка быть: 1) меньше отрезка; 2) равна отрезку; 3) больше отрезка?

20.7°. Может ли ортогональной проекцией треугольника быть: 1) отрезок; 2) квадрат?

20.8*. Каждая из ортогональных проекций фигуры F на две взаимно перпендикулярные плоскости — квадрат. Следует ли из этого, что фигура F — куб?

20.9. Может ли ортогональная проекция угла быть: 1) меньше этого угла; 2) равна углу; 3) больше этого угла?

20.10°. Может ли ортогональная проекция квадрата быть: 1) прямоугольником; 2) параллелограммом; 3) трапецией?

20.11°. Какой фигурой является ортогональная проекция прямоугольного параллелепипеда на плоскость, параллельную его основанию?

20.12. Диагонали ромба равны 10 см и 4 см. Плоскость ромба образует с плоскостью проекции угол $60°$. Найдите площадь проекции ромба.

20.13. Найдите площадь проекции фигуры F на плоскость α, образующей с плоскостью данной фигуры угол $30°$, если фигурой F является: 1) квадрат, диагональ которого 3 см; 2) правильный треугольник со стороной a; 3) ромб, сторона которого равна a, а его угол равен $45°$.

20.14. Чему равен угол между плоскостью треугольника и плоскостью проекции, если площадь проекции этого треугольника: 1) в два раза меньше площади самого треугольника; 2) равна площади треугольника?

20.15. Проекцией квадрата со стороной a на некоторую плоскость является ромб со стороной b и острым углом α. Найдите угол между плоскостями квадрата и ромба.

20.16. Докажите, что при ортогональном проектировании равновеликие треугольники, лежащие в одной плоскости, имеют равновеликие проекции.

20.17*. S — площадь грани правильного тетраэдра, а Q — площадь ее проекции на другую грань. Найдите отношение $Q : S$.

20.18*. Докажите, что проекцией правильного тетраэдра на плоскость, параллельную двум его скрещивающимся ребрам, является квадрат. Верно ли обратное утверждение?

20.19*. Какой может быть наибольшая площадь ортогональной проекции правильного тетраэдра с ребром a?

20.20*. Какой фигурой является ортогональная проекция куба на плоскость, перпендикулярную его диагонали?

20.21*. Найдите площадь ортогональной проекции куба на плоскость, перпендикулярную его диагонали, если известно, что ребро куба равно a.

20.22*. Докажите, что площадь ортогональной проекции куба на плоскость будет наибольшей в случае, если плоскость проекции перпендикулярна одной из диагоналей куба.

20.23*. Ортогональные проекции плоского четырехугольника на две взаимно перпендикулярные плоскости — квадраты со сторонами 1. Найдите периметр четырехугольника, если известно, что одна из его сторон имеет длину 2.

20.24*. Ортогональные проекции треугольника ABC на две взаимно перпендикулярные плоскости являются правильными треугольниками со сторонами, равными 1. Медиана AD треугольника ABC равна 2. Найдите BC.

20.25. Ребро куба равно a. Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через вершину основания под углом $30°$ к этому основанию и пересекающей все боковые ребра.

20.26. Стороны прямоугольника равны 20 см и 25 см. Его проекция на плоскость подобна ему. Найдите периметр проекции прямоугольника.

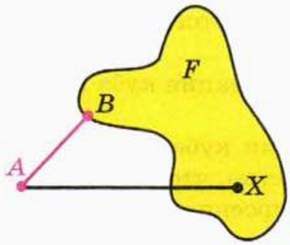
20.27. Основание прямоугольного параллелепипеда — квадрат со стороной a. Через середины двух смежных сторон основания проведена плоскость, пересекающая три боковых ребра параллелепипеда и наклоненная к плоскости основания под углом φ. Найдите площадь полученного сечения.

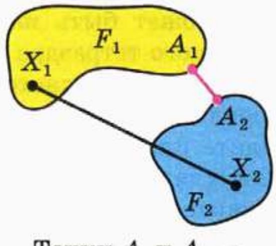
20.28*. Ортогональная проекция ромба $ABCD$ на плоскость, проходящую через вершину A ромба и параллельную его диагонали BD, — квадрат $AB_1C_1D_1$ со стороной a. Найдите периметр ромба, если его диагональ AC равна m.

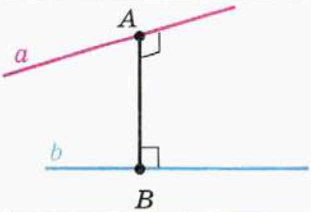
20.29*. Ортогональной проекцией плоского четырехугольника $ABCD$ является квадрат $A_1B_1C_1D_1$ со стороной 4, $AA_1 = 3$, $BB_1 = 6$, $CC_1 = 9$. Найдите длину DD_1, вид, периметр и площадь четырехугольника $ABCD$. Точки A, B, C и D лежат по одну сторону от плоскости проектирования.

§ 21 РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ФИГУРАМИ. НАХОЖДЕНИЕ РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

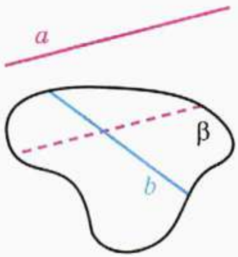
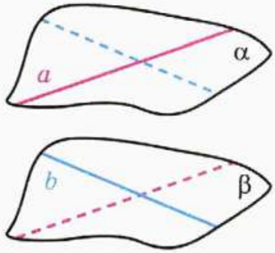
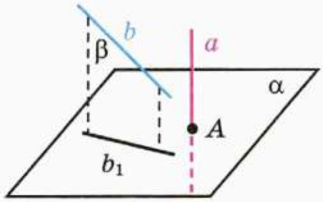
Таблица 19

<table>
<tr><th colspan="2">1. РАССТОЯНИЕ (ρ) МЕЖДУ ФИГУРАМИ</th></tr>
<tr><th>Расстояние от точки до фигуры</th><th>Расстояние между фигурами</th></tr>
<tr><td>

Точка B фигуры F — ближайшая к точке A
$\rho\ (A; F) = AB$</td><td>

Точки A_1 и A_2 — ближайшие точки фигур F_1 и F_2
$\rho\ (F_1; F_2) = A_1A_2$</td></tr>
<tr><th colspan="2">2. РАССТОЯНИЕ (ρ) МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ</th></tr>
<tr><td>
</td><td>***Расстоянием между скрещивающимися прямыми*** **называют длину их общего перпендикуляра.**
Прямые a и b — скрещивающиеся.
$AB \perp a$, $AB \perp b$
$\rho\ (a; b) = AB$</td></tr>
</table>

Окончание табл. 19

<table>
<tr><td colspan="3">ПРИЕМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ РАССТОЯНИЯ (ρ)
МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ</td></tr>
<tr><td>Проводим через прямую b плоскость $\beta \parallel a$.</td><td>Проводим через прямые a и b параллельные плоскости $\alpha \parallel \beta$.</td><td>Проводим плоскость $\alpha \perp a$ и проектируем прямые a и b на эту плоскость: $a \to A$, $b \to b_1$.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\rho\,(a;\,b) = \rho\,(a;\,\beta)$</td><td>$\rho\,(a;\,b) = \rho\,(\alpha;\,\beta)$</td><td>$\rho\,(a;\,b) = \rho\,(A;\,b_1)$</td></tr>
</table>

Объяснение и обоснование

1. Расстояние от точки до фигуры. Расстояние от точки до фигуры измеряется по кратчайшему пути. Поэтому расстоянием от точки A до фигуры F называют расстояние от этой точки до ближайшей к A точки фигуры F.

Точка фигуры F, *ближайшая* к точке A, — это такая точка $B \in F$ (рис. 21.1), что для всех точек X фигуры F выполняется неравенство $AB \leqslant AX$ (рис. 21.1).

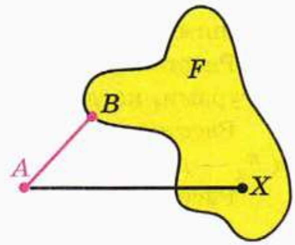


Рис. 21.1

Иначе говоря, если точка A не принадлежат фигуре F, то *отрезок AB — кратчайший* из всех отрезков AX, соединяющих точку A с точками фигуры F. (Если $A \in F$, точка A оказывается ближайшей к самой себе. В этом случае расстояние считают равным нулю. В дальнейшем будем рассматривать случаи, когда $A \notin F$.)

Расстояние от точки A до фигуры F иногда будем обозначать так: $\rho\,(A;\,F)$.

Рассмотрим несколько примеров.

1. *Расстояние от точки A до прямой a равно длине перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую a.*

2. *Расстояние от точки до плоскости равно длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость,* или расстоянию от точки до ее ортогональной проекции на плоскость.

Эти утверждения следуют из известного свойства, что перпендикуляр короче наклонной.

3. Расстояние от центра окружности до самой окружности равно радиусу. Все точки окружности находятся на одинаковом расстоянии от центра, следовательно, они все ближайшие к нему.

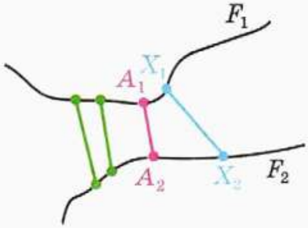


Рис. 21.2

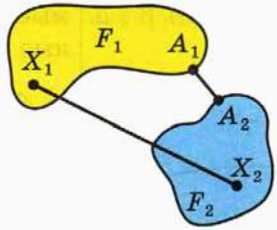


Рис. 21.3

2. Расстояние между фигурами. Мы уже определяли расстояние от точки до фигуры. Но часто нужно решить более общую задачу — найти расстояние между двумя фигурами, например определить расстояние между берегами реки (рис. 21.2), чтобы построить мост. Ясно, что необходимо отыскать ближайшие точки этих фигур, иначе говоря, кратчайший среди всех отрезков, соединяющих точки этих фигур.

Точки A_1 и A_2 фигур F_1 и F_2 (рис. 21.2, 21.3) называют их *ближайшими точками*, если для любых точек $X_1 \in F_1$ и $X_2 \in F_2$ выполняется неравенство $A_1A_2 \leqslant X_1X_2$.

Расстоянием между двумя фигурами называют расстояние между ближайшими точками этих фигур (если такие точки существуют).

Расстояние от точки до фигуры — частный случай расстояния между фигурами, когда одна из фигур — точка.

Расстояние между фигурами будем обозначать иногда $\rho\ (F_1;\ F_2)$, где F_1 и F_2 — данные фигуры.

Рассмотрим примеры.

1. *Расстояние между двумя параллельными прямыми равно длине общего перпендикуляра этих прямых* (а также расстоянию от любой точки одной прямой до другой прямой).

Это следует из утверждения, что все общие перпендикуляры AB (или XX_1) между параллельными прямыми a и b равны (рис. 21.4), а каждый отрезок XY с концами на данных прямых ($X \in a$, $Y \in b$), не являющийся их общим перпендикуляром, больше общего перпендикуляра XX_1.

2. *Расстояние между параллельными прямой и плоскостью равно длине перпендикуляра (общего), опущенного из какой-либо точки прямой на плоскость* (а также расстоянию от любой точки прямой до плоскости).

Пусть прямая a и плоскость α параллельны. Спроектируем ортогонально прямую a на плоскость α. Получим прямую a_1, параллельную a.

Каждая из проектирующих прямых XX_1 будет перпендикулярна плоскости α, а значит, перпендикулярна прямым a_1 и a (поскольку $a \parallel a_1$). Тогда все общие перпендикуляры AB (или XX_1) между параллельными прямой a и плоскостью α равны, а каждый отрезок XY (где $X \in a$, $Y \in \alpha$), не являющийся их общим перпендикуляром, больше общего перпендикуляра XX_1 (поскольку наклонная XY к плоскости α больше перпендикуляра XX_1). ○

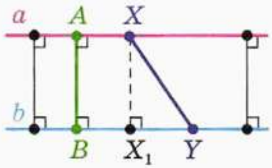


Рис. 21.4

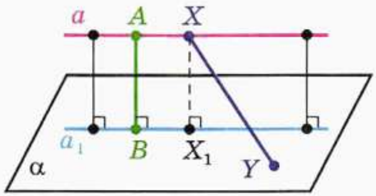


Рис. 21.5

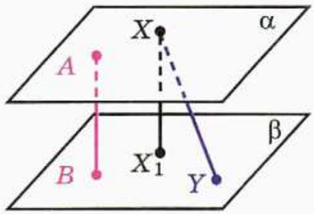


Рис. 21.6

3. *Расстояние между двумя параллельными плоскостями равно длине общего перпендикуляра к этим плоскостям* (а также расстоянию от любой точки одной плоскости до другой плоскости).

● Это следует из утверждения, что все общие перпендикуляры AB (или XX_1) между параллельными плоскостями α и β равны (рис. 21.6), а каждый отрезок XY с концами на данных плоскостях ($X \in \alpha$, $Y \in \beta$), не являющийся их общим перпендикуляром, больше общего перпендикуляра XX_1. ○

4. *Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно длине общего перпендикуляра к этим прямым.*

● Скрещивающиеся прямые a и b (рис. 21.7) лежат в параллельных плоскостях α и β (см. § 8, с. 85). Рассмотрим ортогональную проекцию a' прямой a на плоскость β. Она будет пересекать прямую b в некоторой точке B, являющейся ортогональной проекцией некоторой точки A прямой a. Отрезок AB будет общим перпендикуляром к прямым a и b, а также общим перпендикуляром к плоскостям α и β. Возьмем теперь любой другой отрезок XY (где $X \in a$, $Y \in b$). Поскольку XY не является общим перпендикуляром к плоскостям α и β, то $XY > AB$. Следовательно, общий перпендикуляр AB к двум скрещивающимся прямым a и b действительно является расстоянием между ближайшими точками этих прямых, то есть между прямыми a и b. ○

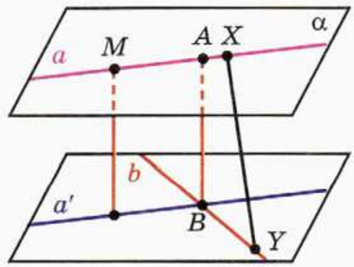


Рис. 21.7

3. Нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми. Как было показано в § 19, чтобы вычислить это расстояние, необязательно строить общий перпендикуляр скрещивающихся прямых a и b. Для этого из любой точки M прямой a (рис. 21.7) можно опустить перпендикуляр на плоскость β и найти его длину, а можно найти длину произвольного общего перпендикуляра плоскостей α и β. Таким образом, находить расстояние между скрещивающимися прямыми можно одним из четырех приемов, приведенных в табл. 19.

Прием 1. (Использование определения.) *Непосредственно находим общий перпендикуляр данных скрещивающихся прямых.*

Например, в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a (рис. 21.8) расстояние между скрещивающимися прямыми AA_1 и BC равно длине их общего перпендикуляра $AB = a$.

Прием 2. *Через одну из данных прямых проводим плоскость, параллельную другой прямой.* Для этого достаточно через точку одной прямой провести прямую, параллельную другой прямой. Поскольку расстояние между параллельными прямой и плоскостью везде одинаково, то его можно вычислить от любой точки прямой до плоскости (как было показано выше, оно равно также расстоянию между данными скрещивающимися прямыми).

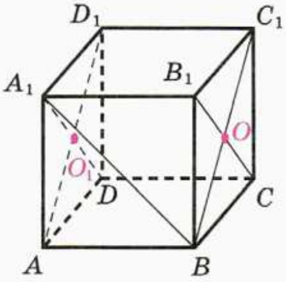


Рис. 21.8

Например, если в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 21.8) с ребром a нужно найти расстояние между скрещивающимися диагоналями боковых граней AD_1 и B_1C, то для этого в плоскости грани BB_1C_1C можно провести еще одну диагональ BC_1, параллельную AD_1 (поскольку четырехугольник ABC_1D_1 — прямоугольник). По признаку параллельности прямой и плоскости плоскость BB_1C_1C параллельна прямой AD_1. Поскольку расстояние между параллельными прямой и плоскостью везде одинаково, то его можно вычислить от любой точки прямой AD_1. Учитывая, что ребро AB перпендикулярно плоскости BB_1C_1C, получаем, что расстояние от точки A до плоскости B_1C_1C равно $AB = a$. Следовательно, расстояние между скрещивающимися прямыми AD_1 и B_1C равно a.

Прием 3. *Через данные прямые проводим параллельные плоскости.* Этот способ отличается тем, что через каждую из данных прямых проводят плоскость, параллельную другой прямой.

При использовании этого способа для определения расстояния между скрещивающимися диагоналями AD_1 и B_1C боковых граней куба (рис. 21.8) можно, кроме диагонали BC_1 грани BB_1C_1C ($BC_1 \parallel AD_1$), провести также диагональ A_1D грани AA_1D_1D. Тогда $A_1D \parallel B_1C$, значит, плоскости AA_1D_1D и BB_1C_1C параллельны (по признаку параллельности плоскостей). Следовательно, расстояние между скрещивающимися прямыми AD_1 и B_1C равно расстоянию между этими параллельными плоскостями. Его можно найти от любой произвольно выбранной точки одной из плоскостей, например от точки A плоскости AA_1D_1D. Учитывая, что $AB \perp$ пл. BB_1C_1C, снова получаем, что искомое расстояние равно a.

Замечание. С помощью приемов 2 и 3 можно находить также углы между скрещивающимися прямыми. Если провести $BC_1 \parallel AD_1$, то по определению угол между скрещивающимися прямыми AD_1 и B_1C равен углу между пересекающимися прямыми BC_1 и B_1C. В нашем случае этот угол равен 90° как угол между диагоналями квадрата.

Прием 4. *Проектируем (ортогонально) обе прямые на плоскость, перпендикулярную одной из скрещивающихся прямых.* Тогда **расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию между их ортогональными проекциями на плоскость, перпендикулярную одной из этих прямых.**

Пусть прямые a и b — скрещивающиеся и плоскость α перпендикулярна прямой a, прямая b_1 — ортогональная проекция прямой b на плоскость α (если A — точка пересечения прямой a с плоскостью α, то A — ортогональная проекция прямой a на плоскость α). Плоскость β, образованная проектирующими прямыми, проходящими через прямую b, параллельна прямой a (так как прямая a параллельна любой из проектирующих прямых). По признаку перпендикулярности плоскостей плоскости α и β перпендикулярны. Тогда перпендикуляр, проведенный из точки A к прямой b_1 в плоскости α, будет перпендикуляром и к плоскости β. Следовательно,

$$\rho\,(a;\, b) = \rho\,(a;\, \beta) = \rho\,(A;\, b_1).$$

Например, в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 21.10) с ребром a нужно определить расстояние между скрещивающимися диагоналями двух соседних граней, — пусть это будут диагонали BA_1 и B_1C. Для этого можно спроектировать данные прямые на плоскость ABC_1D_1, перпендикулярную прямой B_1C (обоснуйте эту перпендикулярность).

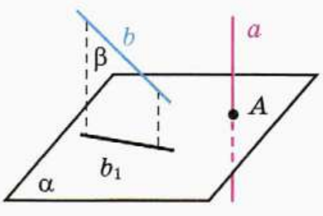


Рис. 21.9

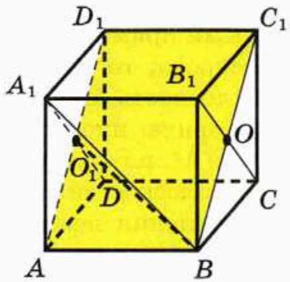


Рис. 21.10

В результате проектирования[1]: $B_1C \to O$, $B \to B$, $A_1 \to O_1$ (точки O и O_1 — центры граней BB_1C_1C и AA_1D_1D соответственно), поэтому $BA_1 \to BO_1$. Тогда $\rho\,(BA_1;\, B_1C) = \rho\,(O;\, BO_1)$.

[1] Напомним, что знак «→» в приведенных записях означает: «проектируется в» (см. § 9).

Рассмотрим выносной рисунок прямоугольника ABC_1D_1 (рис. 21.11). По условию $AB = C_1D_1 = a$. Тогда $BC_1 = AD_1 = a\sqrt{2}$ (как диагонали квадратов со стороной a). Нас интересует расстояние от точки O до прямой BO_1. Проведем $OM \perp BO_1$ и соединим отрезком точки O и O_1. Тогда OM — высота прямоугольного треугольника BOO_1, в котором $OO_1 = a$, $OB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ и $BO_1 = \sqrt{BO^2 + OO_1^2} = a\sqrt{\frac{3}{2}}$. Найдем площадь треугольника BOO_1 двумя способами: с одной стороны, $S_{\Delta BOO_1} = \frac{1}{2} BO \cdot OO_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} a^2$; с другой — $S_{\Delta BOO_1} = \frac{1}{2} BO_1 \cdot OM$.

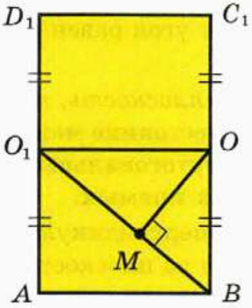


Рис. 21.11

Отсюда $OM = \frac{2S_{\Delta BOO_1}}{BO_1} = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Следовательно, $\rho(BA_1; B_1C) = \rho(O; BO_1) = OM = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Примеры решения задач

Задача. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребра AB, AD и AA_1 соответственно равны 1 см, 2 см и 3 см. Найдите расстояние между прямой BD и плоскостью AB_1D_1.

Комментарий

Для того чтобы найти расстояние между прямой и плоскостью, сначала следует выяснить их взаимное расположение. По признаку параллельности прямой и плоскости получим, что $BD \parallel AB_1D_1$. Поскольку расстояние между параллельными прямой и плоскостью можно измерять от любой точки прямой до плоскости, то нужно опустить перпендикуляр из некоторой точки прямой на плоскость AB_1D_1. Для этого сначала можно построить плоскость, перпендикулярную плоскости AB_1D_1 и пересекающую диагональ BD в некоторой точке M, из которой затем провести перпендикуляр к прямой пересечения этих плоскостей.

Для вычисления необходимых элементов удобно использовать выносные рисунки фигур в рассматриваемых плоскостях.

Решение

▶ В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 21.12) диагонали оснований BD и B_1D_1 параллельны (как прямые пересечения параллельных плоскостей плоскостью BB_1D_1D), следовательно, прямая BD и плоскость AB_1D_1 параллельны. Проведем перпендикуляр $AM \perp BD$. Поскольку $AA_1 \perp$ пл. $ABCD$, то $AA_1 \perp BD$. Тогда $BD \perp$ пл. MAA_1. Принимая во внимание, что $B_1D_1 \parallel BD$, получаем $B_1D_1 \perp$ пл. MAA_1.

Плоскость MAA_1 проходит через прямую AA_1, параллельную плоскости BB_1D_1D, следовательно, прямая MK их пересечения параллельна AA_1.

Плоскость MAA_1 пересекает также параллельные плоскости оснований по параллельным прямым: $A_1K \parallel AM$. Тогда $AMKA_1$ — прямоугольник.

Проведем из точки M перпендикуляр MT к прямой AK пересечения перпендикулярных плоскостей MAA_1 и AB_1D_1. Тогда $MT \perp$ пл. AB_1D_1, следовательно, MT — расстояние между прямой BD и плоскостью AB_1D_1.

Из прямоугольного треугольника ABD (рис. 21.13), в котором $AB = 1$ см, $AD = 2$ см, получаем: $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{5}$. Тогда

$$S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}AB \cdot AD = \frac{1}{2}BD \cdot AM, \text{ то есть } \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot AM.$$

Следовательно, $AM = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

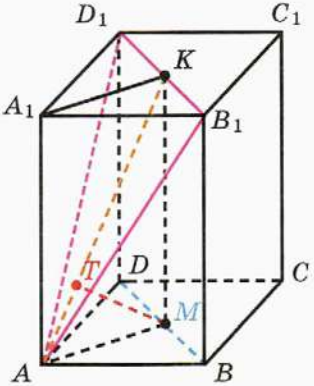


Рис. 21.12

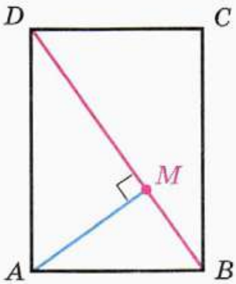


Рис. 21.13

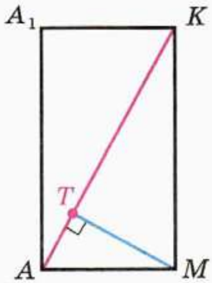


Рис. 21.14

Из прямоугольного треугольника AMK (рис. 21.14), в котором $MK = AA_1 = 3$, получаем: $AK = \sqrt{AM^2 + MK^2} = \frac{7}{\sqrt{5}}$. Тогда

$$S_{\Delta AKM} = \frac{1}{2}AM \cdot MK = \frac{1}{2}AK \cdot MT, \text{ то есть } \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{\sqrt{5}} \cdot MT.$$

Следовательно, $MT = \frac{6}{7}$.

Ответ: $\frac{6}{7}$ см. ◁

Вопросы для контроля

1. Объясните, какую точку фигуры считают ближайшей к данной точке; какие точки двух фигур считают ближайшими.
2. Дайте определение расстояния:
   1) от точки до фигуры; 2) между двумя фигурами.

3. Дайте определение расстояния: 1) от точки до прямой; 2) от точки до плоскости; 3) между параллельными прямыми; 4) между параллельными прямой и плоскостью; 5) между параллельными плоскостями; 6) между скрещивающимися прямыми. Обоснуйте, что в каждом из этих случаев за расстояние действительно принимают расстояние между ближайшими точками фигур.
4. Объясните на примерах различные способы нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми.
5. Докажите, что расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию между их ортогональными проекциями на плоскость, перпендикулярную одной из этих прямых.

Упражнения

21.1. Пользуясь определением расстояния между фигурами, а также рисунками 21.15 и 21.16, докажите, что: 1) расстояние между окружностями (рис. 21.15) равно AB; 2) расстояние между окружностью и не пересекающей ее прямой (рис. 21.16) равно AB.

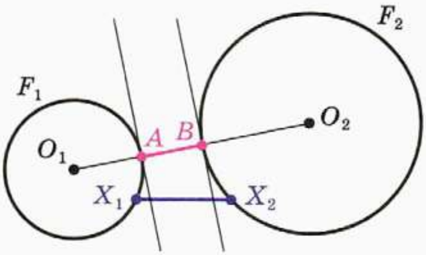


Рис. 21.15

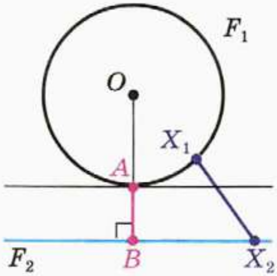


Рис. 21.16

21.2. Через диагональ параллелограмма проведена плоскость. Докажите, что концы второй диагонали находятся на одинаковом расстоянии от этой плоскости.

21.3. Концы отрезка, не пересекающего плоскость, удалены от нее на 0,3 м и 0,5 м. Как удалена от плоскости точка, которая делит данный отрезок в отношении 3 : 7?

21.4*. Решите задачу 21.3, считая, что отрезок AB пересекает плоскость.

21.5. Через основание трапеции проведена плоскость, удаленная от второго основания на расстояние a. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до этой плоскости, если основания трапеции относятся как $m : n$ (рис. 21.17).

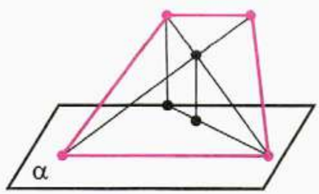


Рис. 21.17

21.6. Точка M, лежащая вне плоскости данного прямого угла, удалена от вершины угла на расстояние a, а от его сторон — на расстояние b. Найдите расстояние от точки M до плоскости угла.

21.7. Из вершин A и B острых углов прямоугольного треугольника ABC проведены перпендикуляры AA_1 и BB_1 к плоскости треугольника. Найдите расстояние от вершины C до середины отрезка A_1B_1, если $A_1C = 4$ м, $A_1A = 3$ м, $B_1C = 6$ м, $B_1B = 2$ м и отрезок A_1B_1 не пересекает плоскость треугольника.

21.8. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a найдите расстояние: 1) от точки A до плоскости BB_1D_1; 2) от прямой A_1C_1 до плоскости ABD; 3) между противоположными гранями куба; 4) между прямыми B_1C и AA_1; 5) от точки A до плоскости A_1BD; 6) между прямыми AC и B_1D_1; 7) между плоскостями A_1BC_1 и ACD_1.

21.9. В основании пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной, равной 12. Грани SBA и SBC перпендикулярны плоскости основания. Высота пирамиды равна 5. Найдите расстояние между прямыми BC и SD.

21.10*. Расстояние между скрещивающимися диагоналями двух смежных граней куба равно 2. Найдите ребро куба.

21.11. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным 1, точка M — середина CD, точка N — середина CC_1. Найдите расстояние между прямыми AN и BM.

21.12. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит правильный треугольник ABC (такую призму называют правильной). Найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC, если все ребра данной призмы равны a.

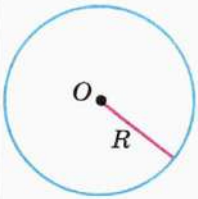
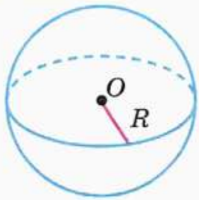
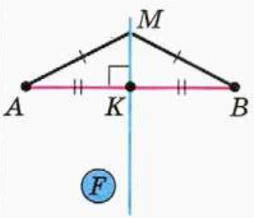
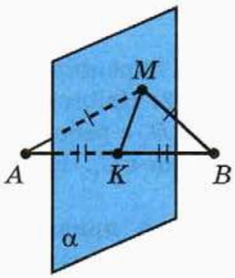
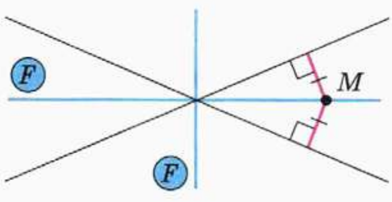
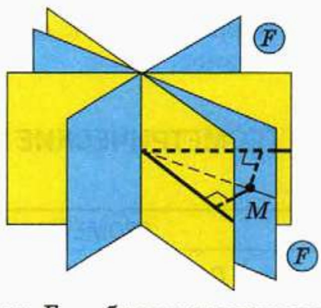
21.13*. На прямой l в пространстве расположены точки A, B и C такие, что $AB = 18$ и $BC = 14$. Найдите расстояние между прямыми l и m, если расстояния от точек A, B и C до прямой m равны 12, 15 и 20 соответственно.

§ 22 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК В ПРОСТРАНСТВЕ

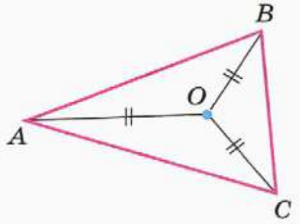
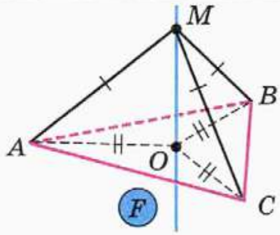
Таблица 20

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК (ГМТ)		
Определение. ***Геометрическим местом точек*** **плоскости (пространства) называют фигуру, состоящую из всех точек плоскости (пространства), имеющих определенное свойство.**		
Фигура F — ГМТ, имеющих данное свойство	$\Leftrightarrow$	1. Если точка $M \in F$, **то M имеет данное свойство.** 2. Если точка M имеет данное свойство, **то $M \in F$.**

Продолжение табл. 20

На плоскости	В пространстве
1. ГМТ, находящихся на данном расстоянии *R* от точки *O* (равноудаленные от данной точки)	
 Фигура F — окружность с центром O и радиусом R.	 Фигура F — сфера с центром O и радиусом R.
2. ГМТ, равноудаленных от концов данного отрезка *AB*	
 Фигура F — серединный перпендикуляр к отрезку AB.	 Фигура F — плоскость α, проходящая через середину отрезка AB и перпендикулярная ему.
3. ГМТ, равноудаленных от двух пересекающихся прямых	**3. ГМТ, равноудаленных от двух пересекающихся плоскостей**
 Фигура F — биссектрисы всех углов, образованных при пересечении данных прямых.	 Фигура F — биссекторные плоскости (плоскости, делящие двугранные углы пополам и проходящие через ребро двугранных углов) всех двугранных углов, образованных при пересечении данных плоскостей.

Окончание табл. 20

4. ГМТ, равноудаленных от вершин треугольника	
 Фигура F — центр описанной около треугольника окружности. $F = O$	 Фигура F — прямая, перпендикулярная плоскости треугольника и проходящая через центр окружности, описанной около треугольника.

Объяснение и обоснование

1. Понятие геометрического места точек пространства. Напомним, что в планиметрии геометрическим местом точек (ГМТ) на плоскости называют фигуру, которая состоит из всех точек плоскости, имеющих определенное свойство. Самые простые из ГМТ плоскости приведены в левом столбце табл. 20. Напомним их.

1) *Геометрическое место точек, находящихся на данном расстоянии R от данной точки O, есть окружность радиуса R с центром в точке O.*
2) *Геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек, есть прямая, перпендикулярная отрезку, соединяющему эти точки, и проходящая через его середину.*
3) *Геометрическое место точек, равноудаленных от двух пересекающихся прямых, есть пара перпендикулярных прямых, содержащих биссектрисы углов, образованных при пересечении данных прямых.*
4) *Геометрическое место точек, равноудаленных от вершин треугольника, состоит из одной точки — центра описанной около треугольника окружности.*

Аналогично понятию ГМТ на плоскости дается определение ГМТ в пространстве.

***Геометрическим местом точек* пространства называют фигуру, состоящую из всех точек пространства, имеющих определенное свойство.**

Как и в планиметрии, решение задачи на нахождение геометрического места точек состоит из этапов выдвижения гипотезы о виде искомой фигуры F и обоснования двух взаимно обратных утверждений:

1) *если точка M принадлежит фигуре F, то она имеет данное свойство*;
2) *если точка M имеет данное свойство, то она принадлежит фигуре F.*

Вместо второго утверждения можно доказывать эквивалентное ему утверждение, противоположное первому: *если точка не принадлежит фигуре F, то она не имеет данного свойства.*

2. Основные геометрические места точек пространства. Рассмотрим геометрические места точек пространства, имеющие такое же свойство, что и соответствующие ГМТ на плоскости.

Из определения сферы следует, что:

I. **Геометрическое место точек пространства, находящихся на данном расстоянии R от данной точки O, есть сфера радиуса R с центром в точке O** (рис. 22.1).

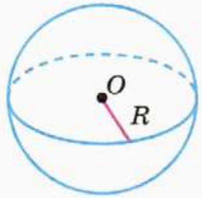


Рис. 22.1

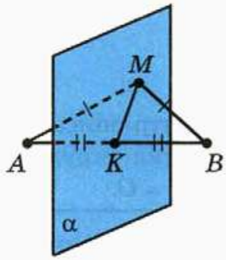


Рис. 22.2

II. **Геометрическое место точек пространства, равноудаленных от двух данных точек A и B, есть плоскость, перпендикулярная отрезку, соединяющему эти точки, и проходящая через его середину.**

Рассмотрим плоскость α, перпендикулярную отрезку AB и проходящую через его середину — точку K (рис. 22.2).

Пусть точка $M \in \alpha$. В плоскости α проведем отрезок MK. Поскольку $AB \perp \alpha$, то $AB \perp MK$. Учитывая, что $AK = BK$, получаем $AM = BM$, то есть точка M равноудалена от точек A и B.

Пусть точка M равноудалена от точек A и B, то есть $MA = MB$. Рассмотрим плоскость β, проходящую через прямую AB и точку M. В плоскости β точка M равноудалена от точек A и B, следовательно, она лежит на прямой, проходящей через середину отрезка AB — точку K перпендикулярно этому отрезку. Но все прямые, перпендикулярные прямой AB, проходящие через точку K, лежат в плоскости, перпендикулярной AB. Учитывая, что через точку K проходит только одна плоскость α, перпендикулярная AB, получаем $M \in \alpha$.

Таким образом, плоскость α действительно является искомым ГМТ.

Для рассмотрения следующего геометрического места точек введем понятие биссекторной полуплоскости двугранного угла.

Определение. ***Биссекторной полуплоскостью*** **двугранного угла называют полуплоскость, ограничивающей прямой которой является ребро двугранного угла и которая делит двугранный угол пополам.**

Поскольку за меру двугранного угла принимают меру соответствующего ему линейного угла, то *биссекторная полуплоскость проходит через ребро двугранного угла и биссектрису соответствующего линейного угла.*

III. **Геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных пересекающихся плоскостей, есть биссекторные полуплоскости всех двугранных углов, образованных соответствующими полуплоскостями.**

Рассмотрим две плоскости α и β, пересекающиеся по прямой c, и полуплоскость γ, являющуюся биссекторной полуплоскостью двугранного угла, образованного полуплоскостями плоскостей α и β (рис. 22.3).

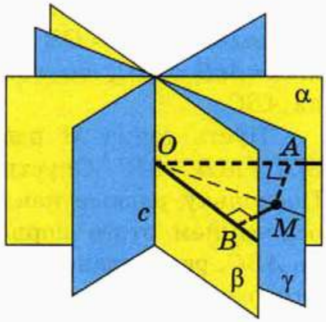


Рис. 22.3

Пусть точка $M \in \gamma$. Опустим из точки M перпендикуляры на плоскости α и β ($MA \perp \alpha$ и $MB \perp \beta$). Через прямые MA и MB проведем плоскость φ. Эта плоскость перпендикулярна прямой c (поскольку $MA \perp c$ и $MB \perp c$). Если O — точка пересечения плоскости φ с прямой c, то $\angle AOB$ — линейный угол двугранного угла с ребром c, образованного соответствующими полуплоскостями плоскостей α и β, а OM — биссектриса этого угла. Тогда по свойству биссектрисы угла (в плоскости φ) получаем, что $MA = MB$, следовательно, точка M равноудалена от плоскостей α и β.

Пусть точка M равноудалена от плоскостей α и β, то есть $MA = MB$, где $MA \perp \alpha$ и $MB \perp \beta$. Через прямые MA и MB проведем проскость φ. Эта плоскость перпендикулярна прямой c (так как $MA \perp c$ и $MB \perp c$). Если O — точка пересечения плоскости φ с прямой c, то $\angle AOB$ — линейный угол двугранного угла (с ребром c), образованного соответствующими полуплоскостями плоскостей α и β. Поскольку $MA \perp OA$, $MB \perp OB$ и $MA = MB$, то в плоскости φ точка M, лежащая внутри угла AOB, равноудалена от сторон угла. Следовательно, OM — биссектриса этого угла. Но через биссектрису линейного угла проходит биссекторная полуплоскость, то есть $M \in \gamma$. Таким образом, фигура, состоящая из четырех биссекторных полуплоскостей, действительно есть искомое ГМТ.

Замечание. Поскольку плоскость φ перпендикулярна общему ребру c всех двугранных углов, образованных при пересечении плоскостей α и β, то в пересечении ее с гранями этих углов получаем линейные углы соответствующих двугранных углов (стороны которых лежат на прямых AO и BO, пересекающихся в точке O). Учитывая, что на плоскости биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой, а биссектрисы смежных углов перпендикулярны, получаем, что искомое ГМТ, изображенное на рисунке 22.3, состоит из двух перпендикулярных плоскостей.

IV. **Геометрическое место точек пространства, равноудаленных от вершин треугольника, есть прямая, перпендикулярная плоскости треугольника и проходящая через центр окружности, описанной около треугольника.**

Рассмотрим треугольник ABC и прямую a, перпендикулярную плоскости треугольника и проходящую через точку O — центр описанной окружности (рис. 22.4).

Пусть точка $M \in a$. Тогда MO — перпендикуляр к плоскости ABC; MA, MB, MC — наклонные, OA, OB, OC — их соответствующие проекции. Поскольку $OA = OB = OC$ (как радиусы описанной окружности), то $MA = MB = MC$, то есть точка M равноудалена от вершин треугольника ABC.

Пусть точка M равноудалена от вершин треугольника ABC, то есть $MA = MB = MC$. Опустим из точки M перпендикуляр на плоскость ABC. Поскольку равные наклонные MA, MB, MC имеют равные проекции, то основанием этого перпендикуляра будет точка в плоскости треугольника ABC, равноудаленная от его вершин, то есть точка O — центр описанной около треугольника окружности. Но через точку O проходит только одна прямая a, перпендикулярная плоскости треугольника ABC, следовательно, $M \in a$. Таким образом, прямая a — действительно искомое ГМТ.

Отметим, что в приведенных примерах вид рассматриваемого ГМТ уже был задан и мы доказывали, что указанная фигура действительно является искомым ГМТ. Иногда приходится находить ГМТ пространства по данному его характеристическому свойству. Как правило, решение таких задач начинается с предположения (гипотезы) о виде искомой фигуры. Для этого часто рассматривают данное характеристическое свойство в какой-либо плоскости и известные ГМТ плоскости. Затем исследуют другие положения плоскости, при которых сохраняется данное свойство точек, и пробуют определить вид искомой фигуры. Иногда искомое ГМТ есть пересечение известных ГМТ.

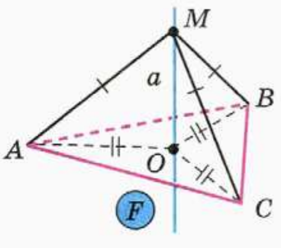


Рис. 22.4

Примеры решения задач

Задача 1. Найдите геометрическое место точек (ГМТ) пространства, равноудаленных от двух данных параллельных прямых.

Комментарий

Сначала рассмотрим плоскость α, в которой лежат данные параллельные прямые (рис. 22.5). ГМТ плоскости, равноудаленных от двух параллельных прямых a и b в этой плоскости, будет прямая m, параллельная данным, проходящая посередине между ними (делящая расстояние AB между данными прямыми пополам: $AK = BK$). Тогда ГМТ соответствующих точек пространства обязательно будет включать в себя прямую m.

Знaя, что в пространстве наклонные, имеющие равные проекции, равны, можно выдвинуть предположение, что соответствующее ГМТ пространства будет включать в себя также все перпендикуляры к плоскости α, проведенные из каждой точки прямой m. Но все такие перпендикуляры лежат в плоскости, перпендикулярной плоскости α, проходящей через прямую m. Это позволяет выдвинуть гипотезу, что искомым ГМТ и будет перпендикулярная плоскость γ.

Для доказательства этой гипотезы, как всегда, обосновываем два взаимно обратных утверждения:

1) *если точка M принадлежит фигуре F* (плоскости γ), *то она имеет данное свойство*;

2) *если точка M имеет данное свойство, то она принадлежит фигуре F* (плоскости γ).

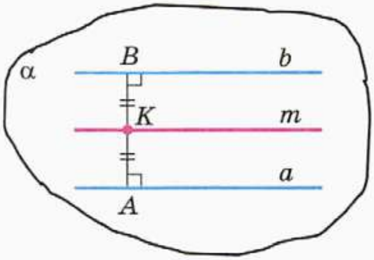


Рис. 22.5

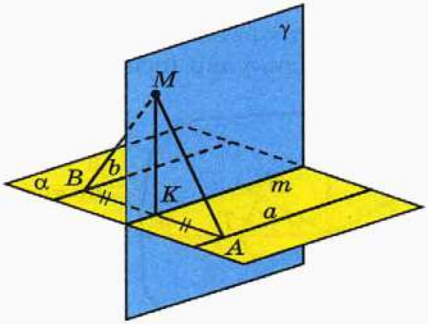


Рис. 22.6

Решение

Докажем, что ***ГМТ пространства, равноудаленных от двух данных параллельных прямых a и b, есть плоскость γ, перпендикулярная плоскости α данных прямых и делящая пополам расстояние между ними*** (плоскость γ содержит прямую m плоскости α, параллельную данным прямым, и проходит посередине между ними) (рис. 22.6).

1. Пусть точка $M \in \gamma$. В плоскости γ проведем перпендикуляр $MK \perp m$. Поскольку $\gamma \perp \alpha$, то $MK \perp \alpha$. Проведем через точку K в плоскости α прямую $AB \perp m$ ($A \in a$, $B \in b$). Поскольку $m \parallel a \parallel b$, то $AB \perp a$ и $AB \perp b$. Учитывая, что $AK = BK$, имеем равенство соответствующих наклонных: $AM = BM$. Используя теорему о трех перпендикулярах, получаем: $AM \perp a$ и $BM \perp b$, то есть точка M равноудалена от прямых a и b.

2. Пусть точка M равноудалена от прямых a и b, то есть $MA = MB$ ($MA \perp a$ и $MB \perp b$). Рассмотрим плоскость MAB, перпендикулярную прямой a ($a \perp MA$ и $a \perp MB$, так как $a \parallel b$). Следовательно $AB \perp a$, и тогда плоскость γ проходит через точку K — середину AB. Поскольку $MA = MB$, то точка M также равноудалена от концов отрезка AB. Но все точки пространства, равноудаленные от концов отрезка AB, лежат в плоскости, перпендикулярной отрезку AB и проходящей через его середину — точку K. Принимая во внимание, что через точку K проходит только одна плоскость γ, перпендикулярная AB, получаем $M \in \gamma$.

Таким образом, плоскость γ действительно является искомым ГМТ. ◁

Задача 2. Найдите геометрическое место точек пространства, равноудаленных от двух данных пересекающихся прямых.

Комментарий

Сначала рассмотрим плоскость γ, в которой лежат данные пересекающиеся прямые (рис. 22.7). *ГМТ плоскости, равноудаленных от двух пересекающихся прямых a и b в этой плоскости, есть пара перпендикулярных прямых m и n, содержащих биссектрисы углов, образованных при пересечении данных прямых.* (Если, например, $T \in m$, то $TN = TK$, где $TN \perp b$ и $TK \perp a$, и наоборот.) Тогда ГМТ соответствующих точек пространства обязательно будет включать в себя прямые m и n.

Если в пространстве взять точку M (рис. 22.8) и провести из нее к плоскости γ перпендикуляр (основание которого — точка T) и две наклонные (основания которых — точки N и K), то по теореме о трех перпендикулярах $MK \perp a$ и $MN \perp b$, то есть MK и MN — расстояния от точки M до прямых a и b соответственно.

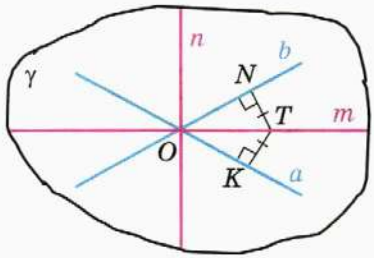


Рис. 22.7

Так как в пространстве наклонные, имеющие равные проекции, равны, можно выдвинуть предположение, что соответствующее ГМТ пространства будет включать в себя также все перпендикуляры к плоскости γ, проведенные из каждой точки прямых m и n. Но все такие перпендикуляры лежат в плоскостях α и β, перпендикулярных плоскости γ, проходящих соответственно через прямые m и n. Это позволяет выдвинуть гипотезу, что искомым ГМТ будет фигура F, состоящая из выделенных плоскостей, перпендикулярных плоскости γ.

Для доказательства этой гипотезы, как всегда, обосновываем два взаимно обратных утверждения: 1) *если точка M принадлежит фигуре F, то она имеет данное свойство*; 2) *если точка M имеет данное свойство, то она принадлежит фигуре F.*

Решение

► Докажем, что ***ГМТ пространства, равноудаленных от двух данных пересекающихся прямых a и b, есть пара взаимно перпендикулярных плоскостей α и β, перпендикулярных плоскости γ данных прямых и проходящих через биссектрисы углов, образованных данными прямыми*** (рис. 22.8).

1. Пусть точка M принадлежит какой-либо из указанных плоскостей α или β, например $M \in \alpha$. (Плоскость α проходит через прямую m, содержащую биссектрисы двух вертикальных углов, образованных при пересечении прямых a и b.) В плоскости α проведем перпендикуляр $MT \perp m$. Поскольку $\alpha \perp \gamma$, то $MT \perp \gamma$. Опустим из точки T в плоскости γ перпендикуляры: $TK \perp a$ и $TN \perp b$. По свойству биссектрисы

угла $TK = TN$. Тогда $MK = MN$ (как наклонные, имеющие равные проекции). Используя теорему о трех перпендикулярах, получаем, что $MK \perp a$ и $MN \perp b$, то есть точка M равноудалена от прямых a и b.

2. Пусть точка M равноудалена от прямых a и b, то есть $MK = MN$ ($MK \perp a$ и $MN \perp b$). Тогда проекции наклонных MK и MN на плоскость γ также будут равны, а по теореме о трех перпендикулярах еще и перпендикулярны прямым a и b соответственно. Следовательно, основание перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость γ, будет точкой в плоскости γ, равноудаленной от прямых a и b, то есть будет находиться на прямой m. Но все перпендикуляры к плоскости γ, проведенные из точек прямой m, лежат в плоскости α. Следовательно, $M \in \alpha$.

Таким образом, пара плоскостей α и β — действительно искомое ГМТ.

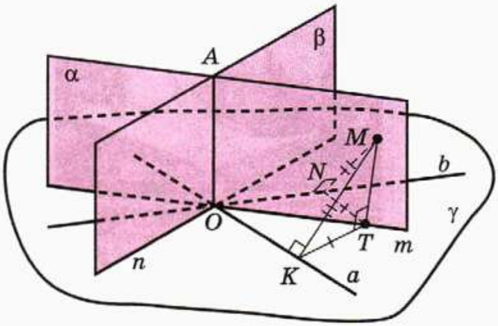


Рис. 22.8

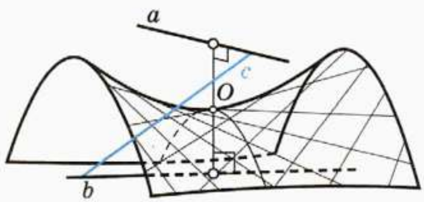


Рис. 22.9

Если плоскости α и β пересекаются по прямой OA (рис. 22.8), то, учитывая, что $\alpha \perp \gamma$ и $\beta \perp \gamma$, получаем $OA \perp \gamma$ (см. § 18, с. 163). Тогда $\angle(\alpha; \beta) = \angle(m; n) = 90°$ (поскольку биссектрисы смежных углов перпендикулярны), то есть плоскости α и β действительно перпендикулярны. ◁

Задача 3. Найдите геометрическое место точек пространства, равноудаленных от двух данных скрещивающихся прямых.

Решение

▶ Рассмотрим произвольную прямую c, пересекающую данные скрещивающиеся прямые a и b (рис. 22.9). Учитывая результат, полученный в задаче 2, получаем, что геометрическим местом точек пространства, каждая из которых равноудалена от прямых a и c, является определенная пара плоскостей α_1 и β_1. Аналогично геометрическим местом точек пространства, каждая из которых равноудалена от прямых c и b, является определенная пара плоскостей α_2 и β_2. Точки четырех прямых пересечения плоскостей α_1 и β_1 с плоскостями α_2 и β_2 принадлежат искомому ГМТ. Меняя секущую прямую c, получим таким образом бесчисленное множество прямых, каждая точка которых равноудалена от данных скрещивающихся прямых a и b. Объединение всех прямых этого множества является седлообразной поверхностью, называемой гиперболическим параболоидом. Часть его изображена на рисунке 22.9. ◁

Гиперболический параболоид изучают в высших учебных заведениях. Его поверхность можно получить перемещением прямой d (которую называют *образующей* гиперболического параболоида) по двум скрещивающимся прямым m и n, если образующая остается параллельной некоторой плоскости φ (рис. 22.10). Тогда и данные прямые также принадлежат заданному ими гиперболическому параболоиду. (Каждую прямую, принадлежащую гиперболическому параболоиду, называют его образующей, следовательно, прямые m и n — также образующие рассмотренного гиперболического параболоида.)

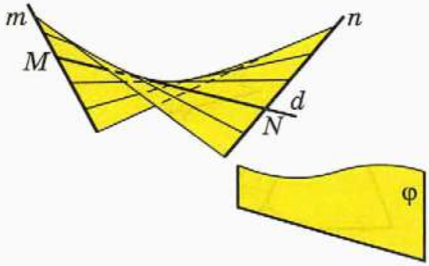


Рис. 22.10

Рис. 22.11

Гиперболический параболоид широко применяют в инженерно-строительной практике (в которой его часто называют *косой плоскостью*) для формирования поверхностей откосов, насыпей железных и автомобильных дорог, набережных, гидротехнических сооружений, кровель. На рисунке 22.11 изображен оригинальный бетонный павильон над источником минеральной воды «Харьковская», построенный по проекту российского архитектора В. С. Васильева в г. Харькове.

Вопросы для контроля

1. Дайте определение геометрического места точек пространства.
2. Объясните, как можно обосновать, что фигура F является геометрическим местом точек, имеющих определенное свойство.
3. Назовите основные ГМТ пространства, имеющие такие же свойства, как и основные ГМТ на плоскости. Докажите правильность соответствующих утверждений.

Упражнения

22.1. Найдите геометрическое место оснований наклонных данной длины, проведенных из данной точки к плоскости.

22.2. Найдите геометрическое место точек пространства, удаленных от данной плоскости α на данное расстояние h.

22.3. Найдите геометрическое место точек пространства, равноудаленных от двух данных параллельных плоскостей.

22.4. Найдите геометрическое место точек пространства, равноудаленных от сторон треугольника.

22.5*. Найдите геометрическое место точек пространства, равноудаленных от прямых, содержащих стороны треугольника.

22.6. Даны плоскость и не принадлежащая ей точка. Найдите геометрическое место точек пространства, делящих пополам все отрезки, один конец которых совпадает с данной точкой, а другой «пробегает» все точки данной плоскости.

22.7. Найдите геометрическое место точек пространства, которые лежат на прямых, перпендикулярных данной прямой, и проходят через данную на ней точку.

22.8. Найдите геометрическое место точек пространства, которые лежат на прямых, перпендикулярных данной прямой, и проходят через заданную точку, не лежащую на данной прямой.

22.9. Точка A лежит вне плоскости α, X — произвольная точка плоскости α, X' — точка отрезка AX, делящая его в отношении $m : n$. Докажите, что геометрическим местом точек X' является плоскость, параллельная плоскости α.

22.10*. Докажите, что геометрическим местом середин отрезков с концами на двух скрещивающихся прямых (рис. 22.12) является плоскость, параллельная этим прямым (ее часто называют серединной плоскостью данных скрещивающихся прямых).

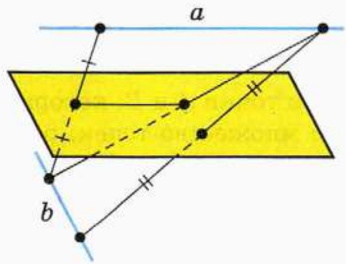


Рис. 22.12

22.11*. Докажите, что каждая точка биссектрис l и m углов между ортогональными проекциями двух скрещивающихся прямых на их серединную плоскость (см. упражнение 22.10) равноудалена от данных прямых, то есть принадлежит гиперболическому параболоиду, а сами прямые l и m являются его образующими (см. задачу 3 на с. 199).

Указание. Пусть AB — общий перпендикуляр данных скрещивающихся прямых a и b, γ — их серединная плоскость, l — одна из биссектрис углов между ортогональными проекциями a_2 и b_2 прямых a и b на плоскость γ (рис. 22.13). Проведите через прямые a и b параллельные плоскости α и β и обоснуйте, что плоскость γ параллельна им. Потом через произвольную точку $P \in l$ проведите прямую CD, перпендикулярную к этим плоскостям ($C \in \alpha$, $D \in \beta$), из точки P опустите перпендикуляры PE и PF на прямые a и b и обоснуйте равенство пар треугольников ACE, BDF и PCE, PDF.

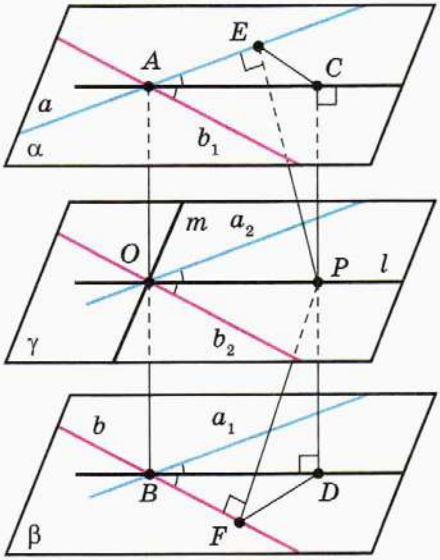


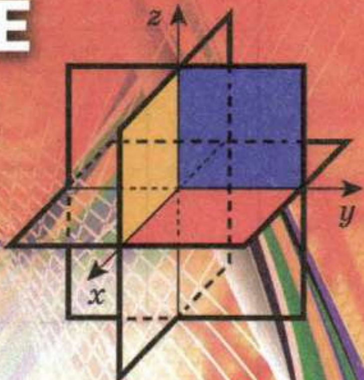
Рис. 22.13

22.12. Дана плоскость α и точки A и B, которые ей не принадлежат. На плоскости α найдите множество точек, равноудаленных от точек A и B.

22.13. Найдите геометрическое место точек пространства, равноудаленных от трех данных плоскостей, которые имеют единственную общую точку.

Раздел 5

КООРДИНАТЫ, ВЕКТОРЫ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ



ОСНОВНОЙ МАТЕРИАЛ

§ 23. Прямоугольная система координат в пространстве

§ 24. Векторы в пространстве

§ 25. Геометрические преобразования в пространстве

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ

§ 26. Уравнение плоскости

§ 27. Применение координат и векторов к решению стереометрических задач

В *основной части* раздела вы ознакомитесь с понятиями прямоугольной системы координат, векторов и движений в пространстве и с основными формулами и свойствами, связанными с этими понятиями.

В *дополнительной части* раздела вы сможете ознакомиться с уравнениями плоскости и сферы и с возможностью применения координат и векторов к решению стереометрических задач.

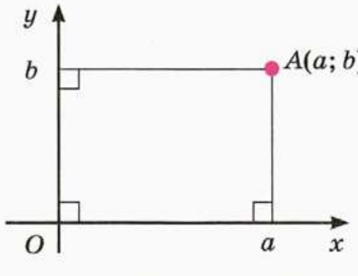
§ 23 ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

Таблица 21

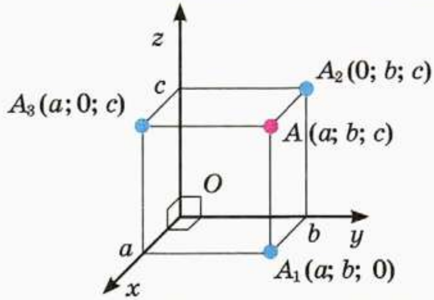
ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ

1. Прямоугольная система координат

на плоскости

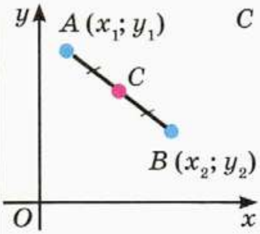


в пространстве



2. Координаты середины отрезка

на плоскости

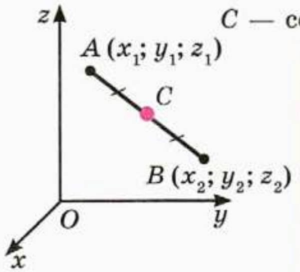


C — середина AB

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_c = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

в пространстве



C — середина AB

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_c = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$z_c = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

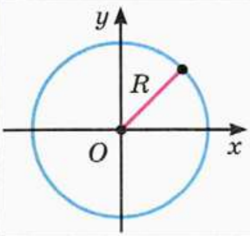
3. Расстояние между точками

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

4. Уравнение окружности и сферы

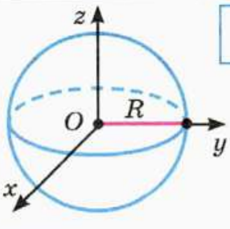
Уравнение окружности



$$x^2 + y^2 = R^2$$

Центр окружности — начало координат

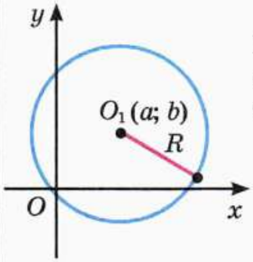
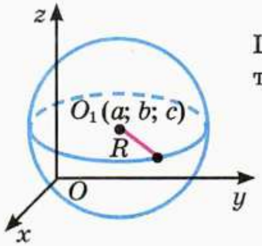
Уравнение сферы



$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Центр сферы — начало координат

Окончание табл. 21

$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=R^2}$  Центр окружности — точка O_1 $(a; b)$	$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2}$  Центр сферы — точка O_1 $(a; b; c)$

Объяснение и обоснование

1. Прямоугольная система координат в пространстве. В курсе планиметрии вы ознакомились с прямоугольной системой координат на плоскости.

Напомним, что *осью координат* называют прямую, на которой выбраны точка O (начало координат), положительное направление (обозначаемое стрелкой) и единичный отрезок (рис. 23.1). *Каждой точке на координатной оси соответствует единственное действительное число, которое называют координатой точки, и каждому действительному числу соответствует единственная точка на координатной оси.* Как известно, началу координат — точке O — ставится в соответствие число 0 ($x = 0$); точке M, которая находится на положительном луче, ставится в соответствие число x, равное длине отрезка OM ($x = OM$); точке K, которая находится на отрицательном луче, ставится в соответствие число x, равное длине отрезка OK, взятой с отрицательным знаком ($x = -OK$).

Прямоугольной системой координат на плоскости называют пару перпендикулярных координатных осей с общим началом координат. Чаще всего начало координат обозначают буквой O, а координатные прямые обозначают Ox, Oy и называют соответственно осью абсцисс и осью ординат (рис. 23.2). Плоскость, на которой задана прямоугольная система координат, называют координатной плоскостью. Каждой точке A на плоскости с заданной системой координат соответствует единственная пара чисел $(a; b)$, которые называют координатами точки на плоскости в данной системе координат,

Рис. 23.1

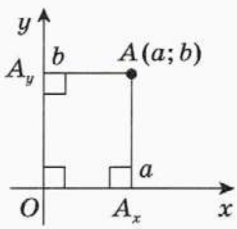


Рис. 23.2

и каждой паре действительных чисел соответствует единственная точка на плоскости с заданной системой координат. Впервые прямоугольная система координат была введена Р. Декартом (1596–1650). Поэтому такую систему координат называют также декартовой системой координат, а сами координаты — декартовыми координатами.

Чтобы получить координаты заданной точки A на плоскости, достаточно провести через эту точку прямые, перпендикулярные осям координат. Если обозначить точки пересечения этих прямых с осями Ox и Oy соответственно A_x и A_y (рис. 23.2), то координату a точки A_x на оси Ox называют абсциссой точки A, а координату b точки A_y на оси Oy — ординатой точки A.

Прямоугольные координаты в пространстве определяют аналогично.

Определение. **Прямоугольной системой координат в пространстве называют тройку попарно перпендикулярных координатных осей с общим началом координат.**

Общее начало координат чаще всего обозначают буквой O, а координатные прямые обозначают Ox, Oy, Oz и называют соответственно осью абсцисс, осью ординат и осью аппликат (рис. 23.3). Плоскости, проходящие через пары координатных прямых, называют координатными плоскостями и обозначают Oxy, Oxz и Oyz соответственно. Иногда эти плоскости обозначают короче: xy, xz и yz (рис. 23.4).

Пусть A — произвольная точка пространства, в котором выбрана прямоугольная система координат. Через точку A проведем плоскость, перпендикулярную оси Ox, и точку ее пересечения с осью Ox обозначим A_x (рис. 23.5). Координату a этой точки на оси Ox называют абсциссой точки A. Аналогично на осях Oy и Oz определяют точки A_y и A_z, координаты которых b и c называют соответственно ординатой и аппликатой точки A. Упорядоченную тройку чисел $(a; b; c)$ называют координатами точки A в пространстве. Можно доказать, что каждой точке A пространства с заданной системой координат соответствует единственная тройка чисел $(a; b; c)$ — координат точки в данной системе координат, и каждой тройке действительных чисел соответствует единственная точка пространства с заданной системой координат.

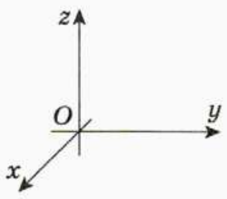


Рис. 23.3

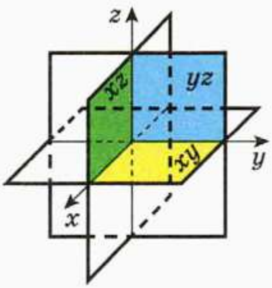


Рис. 23.4

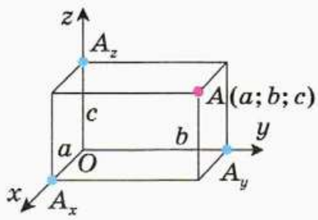


Рис. 23.5

Отметим, что в общем случае абсциссу, ординату и аппликату произвольной точки M пространства чаще всего обозначают x, y, z соответственно и записывают $M\ (x;\ y;\ z)$. Иногда точку обозначают просто ее координатами $(x;\ y;\ z)$.

2. Координаты середины отрезка. Соответствующие формулы в пространстве полностью аналогичны формулам для вычисления координат середины отрезка на плоскости (см. табл. 21). **Для точек $A_1\,(x_1; y_1; z_1)$ и в пространстве координаты x, y, z точки C — середины отрезка A_1A_2 вычисляются по формулам**

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\quad y = \frac{y_1 + y_2}{2},\quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Проведем через точки A_1, A_2 и C прямые, параллельные оси z. Они пересекут плоскость xy в точках $A_1'\,(x_1; y_1; 0)$, $A_2'\,(x_2; y_2; 0)$ и $C'\ (x;\ y;\ 0)$ (рис. 23.6). Если точка C — середина отрезка A_1A_2, то по теореме Фалеса точка C' является серединой отрезка $A_1'A_2'$. А мы знаем, что на плоскости xy координаты середины отрезка выражаются через координаты его концов по формулам $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$. Чтобы получить формулу для z, достаточно вместо плоскости xy взять плоскость xz (рис. 23.7) или yz. Тогда для z получаем аналогичную формулу: $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$.

Замечание. Если прямая A_1A_2 параллельна оси z, то абсциссы и ординаты точек A_1, A_2 равны и теорему Фалеса применить нельзя, но непосредственная подстановка показывает, что полученные формулы остаются верными и в этом случае.

3. Расстояние между точками в пространстве. В курсе планиметрии было доказано, что расстояние между точками $A_1\,(x_1; y_1)$ и $A_2\,(x_2; y_2)$ на плоскости выражается формулой $A_1A_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

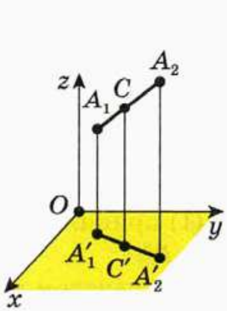


Рис. 23.6

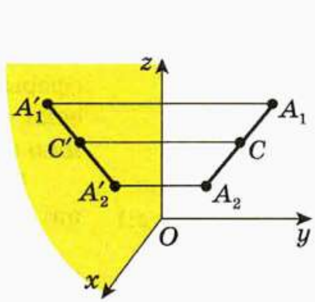


Рис. 23.7

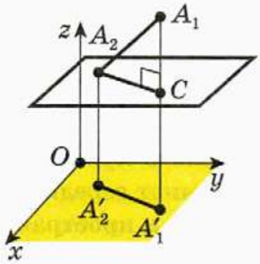


Рис. 23.8

В пространстве имеет место аналогичная формула. **Расстояние между точками $A_1(x_1; y_1; z_1)$ и $A_2(x_2; y_2; z_2)$ в пространстве вычисляется по формуле $A_1A_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$.**

Сначала рассмотрим случай, когда прямая A_1A_2 не параллельна оси z. Проведем через точки A_1 и A_2 прямые, параллельные оси z. Они пересекут плоскость y в точках A_1' и A_2' (рис. 23.8). Эти точки имеют такие же координаты x, y, что и точки A_1 и A_2 (координата z у них равна нулю). Тогда на плоскости xy точки A_1' и A_2' имеют координаты $A_1'(x_1; y_1)$ и $A_2'(x_2; y_2)$ и расстояние $A_1' A_2'$ равно $A_1'A_2' = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Проведем через точку A_2 плоскость, параллельную плоскости xy. Она пересечет прямую $A_1 A_1'$ в некоторой точке C. Тогда $A_2C \perp A_1 A_1'$ (поскольку проведенная плоскость будет перпендикулярна прямой $A_1 A_1'$) и $A_2C \parallel A_2' A_1'$ (как прямые пересечения двух параллельных плоскостей третьей). Таким образом, получаем прямоугольный треугольник A_1A_2C, у которого $A_2C = A_1'A_2' = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, $A_1C = |z_1 - z_2|$, и по теореме Пифагора получаем $A_1A_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$.

Если прямая A_1A_2 параллельна оси z, то $A_1A_2 = |z_1 - z_2|$. Такой же результат дает и полученная формула, поскольку в этом случае $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

4. Уравнение сферы. Напомним, что сфера состоит из всех точек пространства, удаленных от одной точки — центра — на расстояние, равное радиусу (см. § 3 учебника). Если центр сферы — точка O_1 $(a; b; c)$, а точка M $(x, y; z)$ принадлежит сфере (рис. 23.9), то из определения сферы получаем, что $O_1M = R$. Тогда $O_1M^2 = R^2$ или в координатах:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2. \quad (1)$$

Это уравнение называют *уравнением сферы* с центром в точке O_1 $(a; b; c)$ и радиусом R.

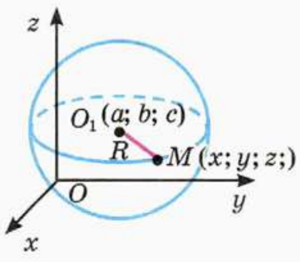


Рис. 23.9

Действительно, координаты каждой точки сферы удовлетворяют уравнению (1), и наоборот, если координаты точки M удовлетворяют уравнению (1), то $O_1M = R$ и точка M принадлежит сфере.

Если центром сферы является начало координат, то уравнение сферы (1) принимает вид:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad (2)$$

Получаем уравнение сферы с центром в начале координат и радиусом R.

Примеры решения задач

Задача 1. Для данного изображения прямоугольной системы координат в пространстве (рис. 23.10) постройте точку A с координатами (2; 3; 5).

Решение	*Комментарий*
▶ Сначала построим ортогональную проекцию заданной точки A (2; 3; 5) на плоскость xy — точку A_1 (2; 3; 0). Для этого откладываем на оси Ox отрезок $OA_x = 2$ и проводим в плоскости xy прямую $A_xA_1 \parallel Oy$. На оси Oy откладываем отрезок $OA_y = 3$ и проводим в плоскости xy прямую $A_yA_1 \parallel Ox$. При пересечении прямых A_xA_1 и A_yA_1 получаем точку A_1, соединяем ее с точкой O и проводим прямую $A_1A \parallel Oz$. После этого на оси Oz откладываем отрезок $OA_z = 5$ и проводим прямую $A_zA \parallel OA_1$. Пересечение прямых A_zA и A_1A дает изображение искомой точки A (рис. 23.11). ◁	Напомним, что по определению осей координат на каждой из них считается заданным и единичный отрезок (как на рис. 23.10). Это позволяет в любой из координатных плоскостей построить точку с заданными координатами. При этом следует учитывать, что на изображении (параллельной проекции) пространственной фигуры перпендикулярность прямых может не сохраняться, но обязательно сохраняется параллельность прямых. Поэтому, описывая построения точек по их координатам, следует использовать параллельность соответствующих прямых осям координат.

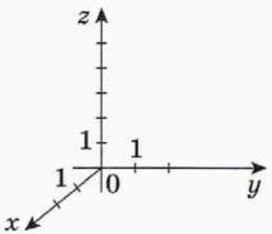


Рис. 23.10

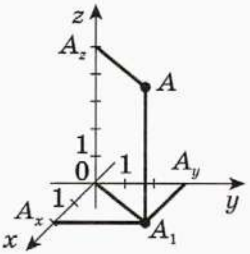


Рис. 23.11

Задача 2. Даны точки A (3; 4; 5), B (2; 3; 0), C (0; 0; 5), D (3; 0; 2), E (0; 7; 0). Какие из этих точек лежат: 1) в плоскости xy; 2) в плоскости yz; 3) на оси z; 3) на оси y?

Решение	*Комментарий*
Точки плоскости xy имеют координату z, равную нулю. Поэтому только точки B и E лежат в плоскости xy. Точки плоскости yz имеют координату x, равную нулю. Следовательно,	Следует учесть, что для точек, лежащих в координатных плоскостях, одна из координат обязательно равна нулю (см. рисунок в первой строке табл. 21), а для точек, лежащих на

точки C и E лежат в плоскости yz. Точка на оси z имеет две координаты (x и y), которые равны нулю. Поэтому только точка C лежит на оси z. Точка на оси y имеет две координаты (x и z), которые равны нулю. Поэтому только точка E лежит на оси y.

осях координат, две из координат равны нулю.

Задача 3. Даны точки A (1, 4, 7), B (2, 4, 1), C (5, 2, 3), D (4, 2, 9). Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Решение

▶ Середина диагонали AC имеет координаты $\left(\frac{1+5}{2}; \frac{4+2}{2}; \frac{7+3}{2}\right)$, то есть (3; 3; 5). Середина диагонали BD имеет координаты $\left(\frac{2+4}{2}; \frac{4+2}{2}; \frac{1+9}{2}\right)$, то есть (3; 3; 5). Как видим, диагонали AC и BD имеют общую середину, значит, они пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Следовательно, $ABCD$ — параллелограмм. ◁

Комментарий

Для решения можно воспользоваться следующим признаком параллелограмма: если диагонали четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм. В данном случае достаточно проверить, что середины диагоналей AC и BD совпадают (то есть совпадают координаты этих точек, которые можно вычислить по формулам координат середины соответствующего отрезка).

Задача 4*. В плоскости xy найдите точку D, равноудаленную от трех данных точек A (0; 2; −2), B (−2; 0; 2), C (0; −2; 0).

Решение

Пусть искомая точка D в плоскости xy имеет координаты D (x; y; 0).

$$DA^2 = (x - 0)^2 + (y - 2)^2 + (0 + 2)^2,$$
$$DB^2 = (x + 2)^2 + (y - 0)^2 + (0 - 2)^2,$$
$$DC^2 = (x - 0)^2 + (y + 2)^2 + (0 - 0)^2.$$

Поскольку $DA = DB = DC$ тогда и только тогда, когда $DA^2 = DB^2 = DC^2$, то, приравнивая правые части двух первых равенств к правой части третьего равенства, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4y + 4 + 4 = x^2 + y^2 + 4y + 4, \\ x^2 + 4x + 4 + y^2 + 4 = x^2 + y^2 + 4y + 4. \end{cases}$$

Отсюда получаем: $y = \frac{1}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$.

Искомая точка $D\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$.

Комментарий

Так как по условию точка D находится в плоскости xy, то ее третья координата равна нулю, то есть точка D будет иметь координаты (x; y; 0). Также по условию $DA = DB = DC$. Но запись этих равенств по формуле расстояния между двумя точками в координатах будет содержать квадратные корни. Чтобы не получать иррациональные уравнения, удобно воспользоваться свойством, что *неотрицательные числа будут равны тогда и только тогда, когда их квадраты будут равны*, и записывать через координаты квадраты соответствующих расстояний.

Задача 5*. Запишите уравнение сферы с центром в точке A $(-1;\ 4;\ -1)$, проходящей через точку B $(2;\ 4;\ 3)$.

Решение	*Комментарий*
▶ Радиус заданной сферы $R = AB = \sqrt{(2+1)^2+(4-4)^2+(3+1)^2} = 5.$ Тогда уравнение искомой сферы: $(x+1)^2+(y-4)^2+(z+1)^2=25.$ ◁	По определению сферы *расстояние от центра сферы до произвольной ее точки равно радиусу сферы*. Поэтому радиус сферы можно найти как расстояние между точками A и B, а затем использовать уравнение сферы с заданным центром $(a;\ b;\ c)$ и известным радиусом R: $\boldsymbol{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2}$.

Вопросы для контроля

1. Объясните, как определяют декартовы координаты точки в пространстве.
2. Запишите формулу для нахождения расстояния между двумя точками через координаты этих точек.

3*. Докажите формулу для нахождения расстояния между двумя точками через координаты этих точек.

4. Запишите формулы для нахождения координат середины отрезка через координаты его концов.

5*. Докажите формулы для нахождения координат середины отрезка через координаты его концов.

6*. Запишите и обоснуйте уравнение сферы с центром в точке O_1 $(a;\ b;\ c)$ и радиусом R.

Упражнения

23.1°. Для данного изображения прямоугольной системы координат в пространстве (рис. 23.12) постройте точки с координатами: $(1;\ 2;\ 3)$, $(2;\ -1;\ 1)$, $(-1;\ 3;\ 2)$.

23.2°. Найдите координаты ортогональных проекций точек A $(1;\ 3;\ 4)$ и B $(5;\ -6;\ 2)$ на: 1) плоскость xy; 2) плоскость yz; 3) ось Ox; 4) ось Oz.

23.3°. На каком расстоянии находится точка A $(1;\ -2;\ 3)$ от координатной плоскости: 1) xy; 2) xz; 3) yz?

23.4°. Где лежат точки пространства, для которых координаты x и y равны нулю?

23.5°. Заданы точки A $(1;\ 2;\ 3)$, B $(0;\ 1;\ 2)$, C $(0;\ 0;\ 3)$, D $(1;\ 2;\ 0)$. Какие из этих точек лежат: 1) в плоскости xy; 2) на оси Oz; 3) в плоскости yz?

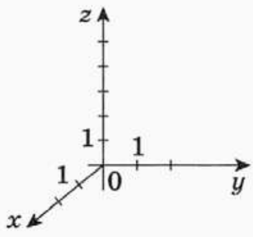


Рис. 23.12

23.6°. Задана точка A (2; 5; 7). Найдите координаты оснований перпендикуляров, опущенных из этой точки на координатные оси и координатные плоскости.

23.7. Что является геометрическим местом точек пространства, для которых: 1) первая координата равна нулю; 2) вторая координата равна нулю; 3) третья координата равна нулю; 4) первая и вторая координаты равны нулю; 5) первая и третья координаты равны нулю; 6) вторая и третья координаты равны нулю; 7) все координаты равны нулю?

23.8. Что является геометрическим местом точек пространства, для которых: 1) первая координата равна единице; 2) первая и вторая координаты равны единице?

23.9. На каком расстоянии находится точка A (1; −2; 3) от координатной прямой: 1) Ox; 2) Oy; 3) Oz?

23.10. Найдите расстояния от точки (1; 2; −3) до: 1°) координатных плоскостей; 2) осей координат; 3°) начала координат.

23.11°. Найдите расстояние между точками: 1) A_1 (1; 2; 3) и A_2 (−1; 1; 1); 2) B_1 (3; 4; 0) и B_2 (3; −1; 2).

23.12°. Какая из точек — A (2; 1; 5) или B (−2; 1; 6) — лежит ближе к началу координат?

23.13. Даны точки M (1; −2; −3), N (−2; 3; 1) и K (3; 1; −2). Найдите периметр треугольника MNK.

23.14. Определите вид треугольника ABC, если его вершины имеют координаты: A (0; 0; 2), B (0; 2; 0), C (2; 0; 0).

23.15. На оси Ox найдите точку C (x; 0; 0), равноудаленную от двух точек A (1; 2; 3) и B (−2; 1; 3).

23.16. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом, если: 1) A (0; 2; −3), B (−1; 1; 1), C (2; −2; −1), D (3; −1; −5); 2) A (2; 1; 3), B (1; 0; 7), C (−2; 1; 5), D (−1; 2; 1).

23.17. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является ромбом, если: 1) A (6; 7; 8), B (8; 2; 6), C (4; 3; 2), D (2; 8; 4); 2) A (0; 2; 0), B (1; 0; 0), C (2; 0; 2), D (1; 2; 2).

23.18. Найдите координаты середины отрезка: 1) AB, если A (1; 2; 3) и B (−1; 1; 1); 2) CD, если C (3; 4; 0) и D (3; −1; 2).

23.19. Даны координаты одного конца отрезка A (2; 3; −1) и его середины C (1; 1; 1). Найдите координаты второго конца отрезка B (x; y; z).

23.20. Найдите координаты вершины D параллелограмма $ABCD$, если координаты трех других его вершин известны: 1) A (2; 3; 2), B (0; 2; 4), C (4; 1; 0); 2) A (1; −1; 0), B (0; 1; −1), C (−1; 0; 1); 3) A (4; 2; −1), B (1; −3; 2), C (−4; 2; 1).

23.21. Докажите, что середина отрезка с концами в точках A (a; c; $-b$) и B ($-a$; d; b) лежит на оси Oy.

23.22. Докажите, что середина отрезка с концами в точках C (a; b; c) и D (p; q; $-c$) лежит в плоскости xy.

23.23*. В плоскости xy найдите точку D $(x;\ y;\ 0)$, равноудаленную от трех данных точек: A $(0;\ 1;\ -1)$, B $(-1;\ 0;\ 1)$, C $(0;\ -1;\ 0)$.

23.24*. Найдите точки, равноудаленные от точек $(0;\ 0;\ 1)$, $(0;\ 1;\ 0)$, $(1;\ 0;\ 0)$ и удаленные от плоскости yz на расстояние 2.

23.25. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 1. Начало координат находится в точке B. Положительные лучи осей координат соответственно BA, BC и BB_1. Назовите координаты всех вершин куба.

23.26. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ помещен в прямоугольную систему координат так, что началом координат является центр нижнего основания куба, ребра куба параллельны соответствующим осям координат, вершина A имеет координаты $(-3;\ 3;\ 0)$. Найдите координаты остальных вершин куба.

23.27*. Дан правильный тетраэдр $ABCD$. Вершины A и B имеют соответственно координаты $(1;\ 0;\ 0)$ и $(-1;\ 0;\ 0)$. Основание ABC тетраэдра лежит в плоскости xy. Найдите координаты остальных вершин тетраэдра. Сколько случаев возможны?

23.28. Найдите координаты центра O_1 и радиус R сферы, заданной уравнением: 1) $(x-3)^2+(y+5)^2+z^2=16$; 2) $x^2+(y-7)^2+(z+3)^2=11$.

23.29. Запишите уравнение сферы: 1) с центром в точке O $(0;\ 0;\ 0)$ и радиусом 4; 2) с центром в точке O_1 $(2;\ -3;\ 7)$ и радиусом 5.

23.30. Запишите уравнение сферы с центром в точке O_1 $(1;\ 2;\ -1)$, проходящей через точку: 1) M $(1;\ 0;\ 0)$; 2) K $(1;\ 0;\ 1)$; 3) N $(0;\ 0;\ -1)$.

23.31*. Точка A $(0;\ 0;\ 12)$ принадлежит сфере с центром O_1 $(5;\ 0;\ 0)$. Запишите уравнение этой сферы. Принадлежат ли этой сфере точки M $(5;\ 0;\ 13)$, K $(-5;\ 0;\ -13)$ и N $(0;\ 0;\ -12)$?

23.32*. Докажите, что уравнение: 1) $x^2-6x+y^2+z^2=0$; 2) $x^2-8x+y^2+6y+z^2=0$ задает сферу в пространстве. Найдите ее радиус и координаты центра.

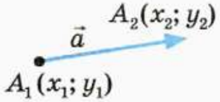
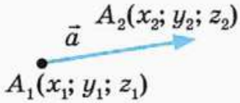
23.31*. Докажите, что уравнение $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$ при условии $A^2+B^2+C^2>4D$ задает сферу. Найдите координаты центра и радиус сферы. Какую фигуру получим, если $A^2+B^2+C^2=4D$?

§ 24 ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

Таблица 22

ВЕКТОРЫ	
 **Определение.** ***Вектором*** называют направленный отрезок. $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$	Длину этого отрезка называют ***длиной (модулем, абсолютной величиной) вектора.*** $\lvert\vec{a}\rvert=AB$

Продолжение табл. 22

Координаты вектора на плоскости	Координаты вектора в пространстве
 $\vec{a}\,(a_1; a_2)$, где $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$ $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$	 $\vec{a}\,(a_1; a_2, a_3)$, где $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$, $a_3 = z_2 - z_1$ $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Равные векторы

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \lvert\vec{a}\rvert = \lvert\vec{b}\rvert \\ \text{векторы } \vec{a} \text{ и } \vec{b} \text{ одинаково направлены.} \end{cases}$$

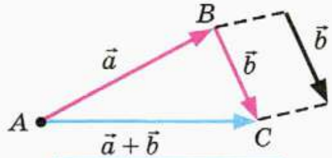
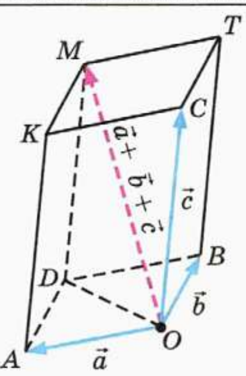
В координатах

$\vec{a}\,(a_1; a_2) = \vec{b}\,(b_1; b_2) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$	$\vec{a}\,(a_1; a_2; a_3) = \vec{b}\,(b_1; b_2; b_3) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$

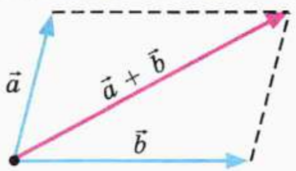
ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

Сумма векторов

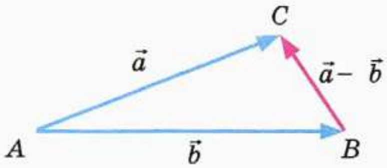
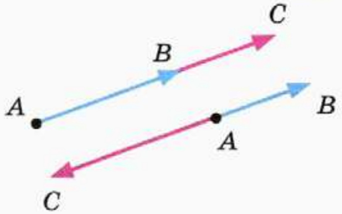
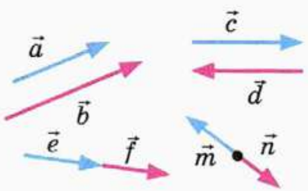
на плоскости	в пространстве
$\vec{a}\,(a_1; a_2) + \vec{b}\,(b_1; b_2) = \vec{c}\,(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$	$\vec{a}\,(a_1; a_2; a_3) + \vec{b}\,(b_1; b_2; b_3) =$ $= \vec{c}\,(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$

Правило треугольника	Правило параллелепипеда
 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$	 $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

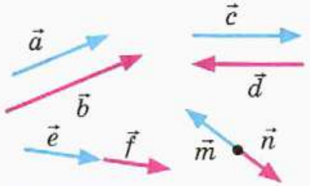
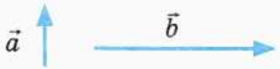
Правило параллелограмма



Продолжение табл. 22

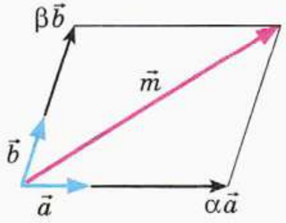
Разность векторов	
$\vec{a}\,(a_1; a_2) - \vec{b}\,(b_1; b_2) = \vec{c}\,(a_1 - b_1; a_2 - b_2)$	$\vec{a}\,(a_1; a_2; a_3) - \vec{b}\,(b_1; b_2; b_3) =$ $= \vec{c}\,(a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$
	$\boxed{\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}}$
Умножение вектора на число	
$\boxed{\lambda \cdot \overrightarrow{(a_1; a_2)} = \overrightarrow{(\lambda a_1; \lambda a_2)}}$	$\boxed{\lambda \cdot \overrightarrow{(a_1; a_2; a_3)} = \overrightarrow{(\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)}}$
 $\boxed{\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}}$	При $\lambda > 0$ вектор $\lambda\vec{a}$ и вектор $\vec{a}$ направлены одинаково. При $\lambda < 0$ вектор $\lambda\vec{a}$ и вектор $\vec{a}$ направлены противоположно. $\boxed{\lvert\lambda\vec{a}\rvert = \lvert\lambda\rvert \cdot \lvert\vec{a}\rvert}$
Коллинеарные векторы	
	**Определение.** Ненулевые векторы называют ***коллинеарными***, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. ***Коллинеарные векторы направлены либо одинаково, либо противоположно.***
$\boxed{\vec{a} \text{ и } \vec{b} \text{ коллинеарны} \Leftrightarrow \vec{b} = \lambda\vec{a} \Leftrightarrow \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3}}$	(соответствующие координаты пропорциональны)

Окончание табл. 22

<table>
<tr><td colspan="2">Скалярное произведение векторов</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">В координатах</td></tr>
<tr><td>на плоскости</td><td>в пространстве</td></tr>
<tr><td>$\vec{a}\,(a_1; a_2)$; $\vec{b}\,(b_1; b_2)$
$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2}$</td><td>$\vec{a}\,(a_1; a_2; a_3)$; $\vec{b}\,(b_1; b_2; b_3)$
$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3}$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>При $\vec{a}\uparrow 0$ и $\vec{b}\uparrow 0$ $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА</td></tr>
<tr><td>на плоскости</td><td>в пространстве</td></tr>
<tr><td>$\vec{m}$ — произвольный вектор плоскости;
$\vec{a}$ и $\vec{b}$ — неколлинеарные векторы.

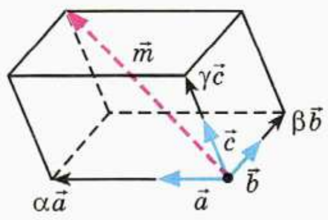
Всегда существует разложение:

$\vec{m}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$
(α и β — единственные)


</td><td>$\vec{m}$ — произвольный вектор пространства;
$\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — некомпланарные (то есть не параллельные одной плоскости) векторы.

Всегда существует разложение:

$\vec{m}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$
(α, β и γ — единственные)


</td></tr>
</table>

Объяснение и обоснование

1. Понятие вектора в пространстве и координат вектора. Понятие вектора в пространстве вводится так же, как и на плоскости.

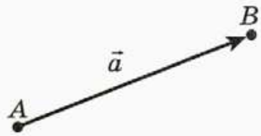


Рис. 24.1

Вектором будем называть направленный отрезок (рис. 24.1). Направление вектора определяется его началом и концом. На рисунке направление вектора обозначают стрелкой. Для обозначения векторов, как и в планиметрии, используют строчные буквы латинского алфавита: ***a*, *b*, *c*, ...** . Можно также обозначать вектор, указывая его начало и конец. При таком способе обозначения вектора на первое место ставят его начало. Иногда вместо слова «вектор» над буквенным обозначением вектора ставят стрелку или черту. Вектор, изображенный на рисунке 24.1, можно обозначить так: $\vec{a}$ или $\overrightarrow{AB}$.

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называют *одинаково направленными*, если полупрямые AB и CD направлены одинаково. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называют *противоположно направленными*, если полупрямые AB и CD направлены противоположно.

Заметим, что полупрямые (или векторы), направленные одинаково или противоположно, всегда лежат на параллельных прямых (или на одной прямой) и поэтому всегда находятся в одной плоскости, следовательно, мы можем использовать соответствующие определения, известные из курса планиметрии.

На рисунке 24.2 векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ направлены одинаково, а векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ — противоположно.

Длиной (или *модулем*, или *абсолютной величиной*) вектора называют длину отрезка, изображающего вектор. Абсолютную величину вектора $\vec{a}$ обозначают $|\vec{a}|$.

Два вектора называют *равными*, если они имеют одинаковую длину и направление.

Начало вектора может совпадать с его концом. Такой вектор называют *нулевым* вектором и обозначают $\vec{0}$. Все нулевые векторы считают равными друг другу. О направлении нулевого вектора не говорят. Считают, что длина нулевого вектора равна нулю.

Координатами вектора с началом в точке $A(x_1; y_1; z_1)$ и концом в точке $B(x_2; y_2; z_2)$ называют упорядоченный набор чисел: $x_2 - x_1$; $y_2 - y_1$; $z_2 - z_1$.

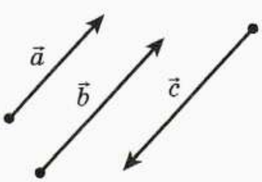


Рис. 24.2

Так же как и на плоскости, обосновывают, что *равные векторы имеют соответственно равные координаты и, наоборот, векторы с соответственно равными координатами равны*. Это дает основание для обозначения вектора его координатами: $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ или просто $\overrightarrow{(a_1; a_2; a_3)}$. Например, если A (2; −1; 3) и B (1, 4, 7), то $\overrightarrow{AB}(-1; 5; 4)$.

Заметим, что если началом вектора является точка O (0; 0; 0), а концом точка A $(a_1;\ a_2;\ a_3)$, то вектор $\overrightarrow{OA}$ будет иметь координаты $\overrightarrow{OA}(a_1; a_2; a_3)$. Следовательно, *если вектор отложен от начала координат, то его координаты совпадают с координатами конца вектора*.

Если вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$, то $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$. Из определения координат вектора следует, что нулевой вектор имеет координаты $\vec{0}(0; 0; 0)$.

2. Операции над векторами в пространстве. Так же как и на плоскости, определяют операции (действия) над векторами: сложение, умножение вектора на число и скалярное произведение векторов.

Суммой векторов $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ и $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ называют вектор $\vec{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$.

Векторное равенство $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ доказывается так же, как и на плоскости.

● *Доказательство.* Пусть $A\ (x_1; y_1; z_1)$, $B\ (x_2; y_2; z_2)$, $C\ (x_3; y_3; z_3)$ — данные точки (рис. 24.3). Вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $\overrightarrow{(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)}$, вектор $\overrightarrow{BC}$ — координаты $\overrightarrow{(x_3 - x_2; y_3 - y_2; z_3 - z_2)}$. Тогда вектор $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ имеет координаты $\overrightarrow{(x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1)}$, а это и есть координаты вектора $\overrightarrow{AC}$. Следовательно, векторы $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$ равны. ○

Напомним, что обоснованный способ получения суммы двух векторов называют «*правилом треугольника*» сложения векторов.

Сумму двух ненулевых векторов с общим началом (рис. 24.4) изображают диагональю параллелограмма, построенного на этих векторах («*правило параллелограмма*»). Действительно, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, а $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. Значит, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Сумму трех ненулевых векторов с общим началом, не лежащих в одной плоскости (рис. 24.5), изображают диагональю параллелепипеда, построенного на этих векторах («*правило параллелепипеда*»).

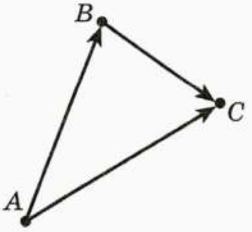


Рис. 24.3

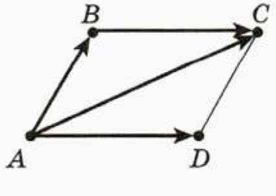


Рис. 24.4

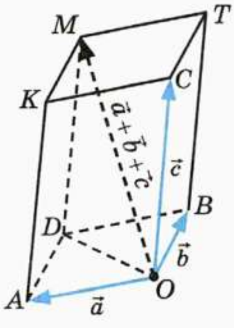


Рис. 24.5

В самом деле, если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ отложены от точки O (как на рис. 24.5), то через конец каждого вектора можно провести плоскость, параллельную плоскости, проходящей через два других вектора. Образуется четырехугольная призма (параллелепипед), все грани которой — параллелограммы. Тогда $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DM}$, а $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Следовательно, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, то есть $\overrightarrow{OM} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Разностью векторов $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ и $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ называют такой вектор $\vec{c}(c_1; c_2; c_3)$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$: $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$. Отсюда находим координаты вектора $\vec{c}$: $\vec{c}(a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$.

Противоположным ненулевому вектору $\vec{a}$ называют вектор $-\vec{a}$, абсолютная величина которого равна абсолютной величине вектора $\vec{a}$, а направление является противоположным направлению вектора $\vec{a}$. Из определения противоположного вектора следует: если вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$, то вектор $-\vec{a}$ имеет координаты $-\vec{a}(-a_1; -a_2; -a_3)$. Тогда $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ и разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно записать так: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Произведением вектора $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ на число λ называют вектор $\lambda\vec{a} = \overline{(\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)}$.

Для любых векторов $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$, $\vec{c}(c_1; c_2; c_3)$ выполняются следующие свойства, аналогичные свойствам чисел:

Сложение векторов	Умножение вектора на число
Переместительный закон	
1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$	1′) $\lambda \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \lambda$
Сочетательный закон	
2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$	2′) $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a}$
Распределительные законы	
3) $\lambda\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$; 4) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$	
5) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$	5′) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
6) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$	6′) $-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}$

Для доказательства достаточно сравнить соответствующие координаты векторов, стоящих в левой и правой частях равенств. Как видим, они равны. А векторы с соответственно равными координатами равны.

Так же как и на плоскости, можно доказать, что длина вектора $\lambda\vec{a}$ равна $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно направлению вектора $\vec{a}$, если $\lambda < 0$ (см. соответствующие рисунки в табл. 22).

Как и на плоскости, ненулевые векторы называют *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Поэтому **коллинеарные векторы направлены или одинаково, или противоположно.**

Можно обосновать, что так же, как и на плоскости, *ненулевые векторы* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *коллинеарны тогда и только тогда, когда* $\vec{b}=\lambda\vec{a}$. В частности, если $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ и $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$, то $b_1=\lambda a_1$, $b_2=\lambda a_2$, $b_3=\lambda a_3$, то есть *у коллинеарных векторов соответствующие координаты пропорциональны*. Если ни одна из этих координат не равна нулю, это можно записать так: $\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\frac{b_3}{a_3}$.

Скалярное произведение векторов пространства определяют аналогично скалярному произведению векторов плоскости.

Скалярным произведением векторов $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ и $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ называют число $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ (то есть сумму произведений одноименных координат данных векторов).

Напомним, что скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают $\vec{a}\cdot\vec{b}$. Скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{a}$ обозначают $\vec{a}^2$ и называют скалярным квадратом вектора $\vec{a}$. Очевидно, что $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$, то есть *скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины*.

Из определения скалярного произведения векторов получаем, что для любых векторов $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$, $\vec{c}(c_1; c_2; c_3)$ выполняются следующие свойства:

1. $(\vec{a})^2 \geqslant 0$, причем $(\vec{a})^2>0$, если $\vec{a}\uparrow\vec{0}$;
2. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (переместительный закон);
3. $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (сочетательный закон);
4. $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ (распределительный закон).

Действительно, левая часть последнего равенства, например, равна правой:

$$(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=(a_1+b_1)c_1+(a_2+b_2)c_2+(a_3+b_3)c_3=a_1c_1+b_1c_1+a_2c_2+b_2c_2+a_3c_3+b_3c_3=$$
$$=(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)+(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}.$$

Углом между ненулевыми векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ называют угол BAC.

Углом между любыми двумя ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют угол между равными им векторами с общим началом.

Угол между одинаково направленными векторами считают равным нулю.

Теорема 24.1. **Скалярное произведение ненулевых векторов равно произведению их длин на косинус угла между ними.**

Доказательство. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — данные векторы и φ — угол между ними. Имеем:

$$(\vec{a}+\vec{b})^2=(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{b})=(\vec{a}+\vec{b})\vec{a}+(\vec{a}+\vec{b})\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2.$$

Тогда

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2.$$

Отсюда видно, что скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$ выражается через длины векторов и поэтому не зависит от выбора системы координат, то есть скалярное произведение не изменится, если систему координат выбрать специальным образом. Возьмем систему координат $Oxyz$ так, как показано на рисунке 24.6 (ось y размещена в плоскости, которая определяется векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$). Координатами вектора $\vec{a}$ при таком выборе системы координат будут $(|\vec{a}|; 0; 0)$, а координатами вектора $\vec{b}$ будут $(|\vec{b}|\cos\varphi; |\vec{b}|\sin\varphi; 0)$.

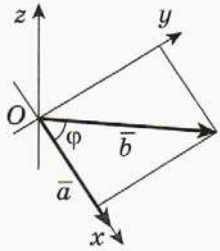


Рис. 24.6

Скалярное произведение: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi+0\cdot|\vec{b}|\sin\varphi+0\cdot 0=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$. ○

Из теоремы 24.1 следует: **если векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю. И наоборот: если скалярное произведение отличных от нуля векторов равно нулю, то векторы перпендикулярны.**

3. Разложение вектора на плоскости и в пространстве

Разложение вектора на плоскости по двум неколлинеарным векторам

***Теорема* 24.2*. Если на плоскости заданы два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то для любого вектора $\vec{m}$ этой плоскости существует единственная пара чисел α и β такая, что $\vec{m}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$.**

● *Доказательство.* Если вектор $\vec{m}$ коллинеарен одному из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$, то или $\vec{m}=\alpha\vec{a}+0\cdot\vec{b}$ (вектор $\vec{m}$ коллинеарен $\vec{a}$), или $\vec{m}=0\cdot\vec{a}+\beta\vec{b}$ (вектор $\vec{m}$ коллинеарен $\vec{b}$). Заметим также, что $\vec{0}=0\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}$.

Пусть теперь вектор $\vec{m}$ не коллинеарен ни одному из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отложим все три вектора от одной точки A (рис. 24.7) и через конец вектора $\overrightarrow{OC}=\vec{m}$ — точку C проведем прямые, соответственно параллельные векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Получим параллелограмм $ABCD$. По правилу параллелограмма $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}$.

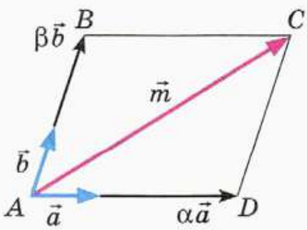


Рис. 24.7

Векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$ соответственно коллинеарны векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, поэтому существуют такие числа α и β, что $\overrightarrow{AD}=\alpha\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\beta\vec{b}$, следовательно,

$$\vec{m}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}. \quad (1)$$

Полученное равенство (1) называют *разложением вектора $\vec{m}$ плоскости по двум неколлинеарным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$*, а числа α и β — коэффициентами разложения.

Покажем, что коэффициенты α и β в разложении (1) определяются однозначно. Предположим, что существует другая пара чисел α_1 и β_1 (отличающаяся от первой хотя бы одним элементом, например, $\alpha_1 \neq \alpha$), для которой также верно равенство

$$\vec{m}=\alpha_1\vec{a}+\beta_1\vec{b}. \quad (2)$$

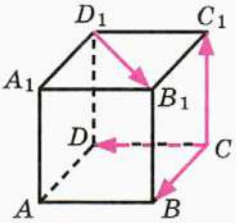


Рис. 24.8

Вычитая равенство (2) из равенства (1), имеем:

$$(\alpha-\alpha_1)\vec{a}+(\beta-\beta_1)\vec{b}=\vec{0}.$$

Поскольку $\alpha_1 \neq \alpha$, то получаем $\vec{a}=\dfrac{\beta_1-\beta}{\alpha-\alpha_1}\vec{b}$. Равенство означает, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, но это противоречит условию. Следовательно, наше предположение неверно и коэффициенты в разложении вектора $\vec{m}$ по двум неколлинеарным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяются однозначно.

Полученное равенство $\vec{m}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ показывает, что любой вектор $\vec{m}$ плоскости может быть выражен через два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ этой плоскости (в виде их линейной комбинации). Поэтому пару неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на плоскости называют *базисом* на плоскости, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — базисными векторами, равенство $\vec{m}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ — *разложением вектора* $\vec{m}$ *по базису* $\vec{a}, \vec{b}$, а числа α и β — *координатами вектора* $\vec{m}$ *в базисе* $\vec{a}, \vec{b}$.

Разложение вектора в пространстве по трем некомпланарным векторам

Три ненулевых вектора называют *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или параллельны одной плоскости. Например, если $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (рис. 24.8), то векторы $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{D_1B_1}$ компланарны, поскольку отрезок D_1B_1 параллелен плоскости BCD, а векторы $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CC_1}$ не компланарны, поскольку отрезок CC_1 не лежит в плоскости BCD и не параллелен этой плоскости. Заметим, что *если векторы не компланарны, то они попарно не коллинеарны* (объясните почему).

Теорема 24.3*. **Если заданы три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, то для любого вектора $\vec{m}$ пространства существует единственная тройка чисел α, β, γ такая, что $\vec{m}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$.**

Доказательство. Если вектор $\vec{m}$ не компланарен ни одной из пар векторов $(\vec{a};\vec{b})$, $(\vec{a};\vec{c})$, $(\vec{b};\vec{c})$, то отложим все векторы от одной точки C (рис. 24.9) и через конец вектора $\overrightarrow{CD_1}=\vec{m}$ — точку D_1 проведем плоскости, соответственно параллельные плоскостям, проходящим через пары векторов $(\vec{a};\vec{b})$, $(\vec{a};\vec{c})$, $(\vec{b};\vec{c})$. Получим четырехугольную призму (параллелепипед) $ACBDA_1C_1B_1D_1$. По правилу параллелепипеда $\overrightarrow{CD_1}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CC_1}$. Векторы $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CC_1}$ соответственно коллинеарны векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, поэтому существуют такие числа α, β, γ, что $\overrightarrow{CA}=\alpha\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\beta\vec{b}$, $\overrightarrow{CC_1}=\gamma\vec{c}$, следовательно,

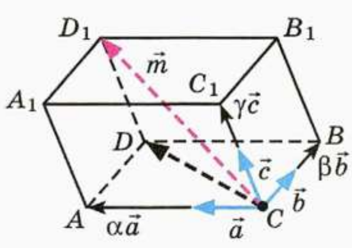


Рис. 24.9

$$\vec{m}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}. \quad (3)$$

Полученное равенство (3) называют *разложением вектора* $\vec{m}$ *по трем некомпланарным векторам* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, а числа α, β, γ — коэффициентами разложения.

Если ненулевой вектор $\vec{m}$ компланарен какой-либо паре векторов, например $(\vec{a};\vec{b})$, то, откладывая эти векторы от одной точки A, получаем, что изображенные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{m}$ находятся в одной плоскости. По теореме 24.2 $\vec{m}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$, и тогда можно записать, что $\vec{m}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+0\cdot\vec{c}$, то есть теорема справедлива и в этом случае. Заметим также, что $\vec{0}=0\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}+0\cdot\vec{c}$.

Покажем, что коэффициенты α, β, γ в разложении (3) определяются однозначно. Предположим, что существует другая тройка чисел α_1, β_1, γ_1 (отличающаяся от первой хотя бы одним элементом, например $\alpha_1 \neq \alpha$), для которой также верно равенство

$$\vec{m}=\alpha_1\vec{a}+\beta_1\vec{b}+\gamma_1\vec{c}. \tag{4}$$

Вычитая равенство (2) из равенства (1), получаем:

$$(\alpha-\alpha_1)\vec{a}+(\beta-\beta_1)\vec{b}+(\gamma-\gamma_1)\vec{c}=\vec{0}.$$

Поскольку $\alpha_1 \neq \alpha$, то из этого равенства имеем:

$$\vec{a}=\frac{\beta_1-\beta}{\alpha-\alpha_1}\vec{b}+\frac{\gamma_1-\gamma}{\alpha-\alpha_1}\vec{c}.$$

Учитывая правила сложения векторов, из последнего равенства получаем, что векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ или лежат в одной плоскости, или параллельны одной плоскости, то есть компланарны, но это противоречит условию. Следовательно, наше предположение неверно и коэффициенты в разложении вектора $\vec{m}$ по трем некомпланарным векторам $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ определяются однозначно. ○

Полученное равенство $\vec{m}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$ показывает, что любой вектор $\vec{m}$ пространства может быть выражен через три некомпланарных вектора $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ (в виде их линейной комбинации). Поэтому тройку некомпланарных векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ называют *базисом пространства*, сами векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ — базисными векторами, равенство $\vec{m}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$ — *разложением вектора* $\vec{m}$ *по базису* $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, а числа α, β и γ — *координатами вектора* $\vec{m}$ *в базисе* $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

Примеры решения задач

Задача 1. Даны четыре точки A (1; 5; −4), B (2; −1; 3), C (−3; 1; 2), D (−4; 7; −5). 1) Укажите среди векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{AD}$ равные векторы. 2) Найдите длины векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$.

Решение

Найдем координаты заданных векторов:

$\overrightarrow{AB}\,(1;-6;7)$, $\overrightarrow{BC}\,(-5;2;-1)$,

$\overrightarrow{DC}\,(1;-6;7)$, $\overrightarrow{AD}\,(-5;2;-1)$.

Тогда: 1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$;

2) $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{1^2+(-6)^2+7^2}=\sqrt{86}$,

$\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{(-5)^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{30}$. ◁

Комментарий

1) *У равных векторов соответствующие координаты равны.* Поэтому для решения задачи найдем координаты указанных векторов и выберем из них пары равных векторов (*для нахождения координат вектора нужно из координат конца вектора вычесть соответствующие координаты начала*).

2) Если $\vec{a}\,(a_1;a_2;a_3)$,

то $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$.

Задача 2. Дан вектор $\vec{a}\,(2;3;-2)$. Найдите координаты коллинеарного ему вектора с началом в точке $A\,(-1;\ 2;\ 4)$ и концом на плоскости xy.

Решение

Пусть концом искомого вектора является точка $M\ (x;\ y;\ 0)$. Тогда вектор $\overrightarrow{AM}$ имеет координаты $\overrightarrow{AM}\,(x+1;y-2;-4)$. Коллинеарные векторы имеют пропорциональные координаты, поэтому $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{-4}{-2}$.

Отсюда $x=3$, $y=8$.

Тогда искомый вектор имеет координаты $\overrightarrow{AM}\,(4;6;-4)$. ◁

Комментарий

Сначала учтем, что у точки, лежащей в плоскости xy, третья координата равна нулю, а затем — что *у коллинеарных векторов соответствующие координаты пропорциональны.*

Задача 3. Найдите координаты вершины D параллелограмма $ABCD$, если $A\ (3;\ 2;\ -1)$, $B\ (5;\ -4;\ 7)$, $C\ (-1;\ 2;\ 6)$.

Решение

Пусть точка D имеет координаты $D\ (x;\ y;\ z)$. Тогда векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ имеют координаты:

$\overrightarrow{AD}\,(x-3;\ y-2;z+1)$, $\overrightarrow{BC}\,(-6;6;-1)$.

Поскольку $ABCD$ — параллелограмм, то $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$. У равных векторов соответствующие координаты равны, поэтому $x-3=-6$, $y-2=6$, $z+1=-1$. Отсюда $x=-3$, $y=8$, $z=-2$. Тогда точка D имеет координаты $D\,(-3;8;-2)$. ◁

Комментарий

Если $ABCD$ — параллелограмм, то у него противоположные стороны (например, BC и AD) параллельны и равны, но тогда и векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ равны, а следовательно, и соответствующие координаты у этих векторов равны.

Задача 4*. С помощью векторов запишите координаты точки C, которая делит отрезок AB в заданном отношении.

Решение

Пусть данные точки имеют координаты $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x; y; z)$ и точка C делит отрезок AB в заданном отношении $\frac{AC}{CB} = \lambda$ (где $\lambda > 0$). Тогда $\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{CB}$, то есть

$$\overrightarrow{(x - x_1; y - y_1; z - z_1)} = \lambda \cdot \overrightarrow{(x_2 - x; y_2 - y; z_2 - z)}.$$

Приравнивая соответствующие координаты, получаем: $x - x_1 = \lambda(x_2 - x)$; $y - y_1 = \lambda(y_2 - y)$; $z - z_1 = \lambda(z_2 - z)$. Тогда координаты точки C равны:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$ ◁

Комментарий

Напомним, что когда точки A, B, C лежат на одной прямой, то векторы, определяемые парами этих точек, коллинеарны и, в случае одинаково направленных векторов, связаны соотношением $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$, где коэффициент λ равен отношению длин векторов $\vec{b}$ и $\vec{a}$. Записывая равенство $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$ в координатах, получим нужные соотношения между координатами заданных точек.

Задача 5. Определите углы треугольника ABC, если его вершины имеют координаты $A(1; 5; 3)$, $B(3; 3; 2)$, $C(3; 6; 5)$.

Решение

Величина угла A треугольника ABC равна величине угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Найдем координаты этих векторов: $\overrightarrow{AB}(2; -2; -1)$, $\overrightarrow{AC}(2; 1; 2)$. Тогда скалярное произведение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 0$. Но если скалярное произведение равно нулю, то векторы перпендикулярны, следовательно, $\angle A = 90°$.

Величина угла B треугольника ABC равна величине угла между векторами $\overrightarrow{BA}(-2; 2; 1)$ и $\overrightarrow{BC}(0; 3; 3)$. Тогда

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (-2) \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 3 = 9,$$

$$\left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2} = 3,$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}.$$

Поэтому $\cos B = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{9}{3 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

Комментарий

Для определения углов треугольника можно использовать то, что эти углы равны углам между соответствующими векторами. Например, угол A равен углу между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Из формулы скалярного произведения $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$ получаем, что *косинус угла между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно вычислить по формуле*

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}. \qquad (*)$$

Также полезно помнить: *если скалярное произведение отличных от нуля векторов равно нулю, то векторы перпендикулярны.*

Для вычисления по формуле (*) следует также использовать формулы нахождения скалярного произведения

Следовательно, $\angle B = 45°$, но тогда в прямоугольном треугольнике ABC и $\angle C = 45°$. ◁

векторов и длины вектора: если $\vec{a}\,(a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b}\,(b_1; b_2; b_3)$, то $\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ и $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Задача 6. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ единичной длины образуют угол 120°. Найдите длину вектора $\vec{a} + 2\vec{b}$.

Решение

▶ Пусть $\vec{m} = \vec{a} + 2\vec{b}$. Тогда

$$|\vec{m}|^2 = \vec{m}^2 = \left(\vec{a} + 2\vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 + 4\vec{a}\cdot\vec{b} + 4\vec{b}^2 =$$

$$= |\vec{a}|^2 + 4|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 120° + 4|\vec{b}|^2 =$$

$$= 1^2 + 4\cdot 1\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 4\cdot 1^2 = 3.$$

Следовательно, $|\vec{m}| = \sqrt{3}$, то есть

$$\left|\vec{a} + 2\vec{b}\right| = \sqrt{3}. \quad ◁$$

Комментарий

Для нахождения длины вектора иногда можно использовать формулу $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, записав ее справа налево: $|\vec{a}|^2 = \vec{a}^2$. Получаем следующий *план решения*:

1) обозначить заданный вектор $\vec{a} + 2\vec{b}$ через $\vec{m}$;
2) найти скалярный квадрат вектора $\vec{m}$ (который равен квадрату длины вектора $\vec{m}$);
3) найти длину вектора $\vec{m}$.

Вопросы для контроля

1. Дайте определение вектора, длины вектора, равенства векторов.
2. Дайте определение координат вектора. Запишите формулу нахождения длины вектора $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$.
3. Дайте определение суммы векторов. Сформулируйте правила треугольника, параллелограмма и параллелепипеда для нахождения суммы векторов.
4*. Обоснуйте правила треугольника, параллелограмма и параллелепипеда для нахождения суммы векторов.
5. Дайте определение произведения вектора на число.
6. Сформулируйте свойства произведения вектора на число.
7*. Обоснуйте свойства произведения вектора на число.
8. Дайте определение угла между векторами и скалярного произведения векторов.
9. Сформулируйте свойства скалярного произведения векторов.
10*. Обоснуйте свойства скалярного произведения векторов.
11. Дайте определение коллинеарных и компланарных векторов. Объясните, что называют разложением вектора на плоскости по двум неколлинеарным векторам и разложением вектора в пространстве по трем некомпланарным векторам.
12*. Обоснуйте возможность и единственность разложения вектора плоскости по двум неколлинеарным векторам и вектора пространства по трем некомпланарным векторам.

Упражнения

24.1°. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 24.10). Точки M и K — середины ребер AA_1 и CC_1 соответственно. Укажите векторы:

1) равные векторам $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{D_1B_1}$, $\overrightarrow{AM}$;

2) противоположные векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CK}$;

3) коллинеарные векторам $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{CK}$, но не равные им;

4) компланарные с векторами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{AC}$.

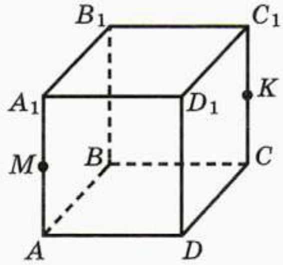


Рис. 24.10

24.2°. Даны точки A (2; 5; 7), B (3; −1; 2), C (−2; 1; 4), D (2; 3; −5), O (0; 0; 0). Найдите координаты и длину векторов: 1) $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{OB}$; 3) $\overrightarrow{CB}$; 4) $\overrightarrow{CD}$; 5) $\overrightarrow{OC}$; 6) $\overrightarrow{DO}$.

24.3. Может ли длина суммы двух векторов быть: 1) меньше длины каждого из слагаемых; 2) равной сумме длин слагаемых; 3) больше суммы длин слагаемых? Ответ обоснуйте.

24.4°. Даны три точки A (1; 1; 1), B (−2; 1; 2), C (0; 2; −3). Найдите точку D (x; y; z), если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны.

24.5°. Даны три точки A (1; 3; −1), B (−2; 4; 2), C (0; 3; −1). Найдите точку D (x; y; z), если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ противоположны.

24.6°. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 24.10) укажите вектор с началом и концом в вершинах куба, который равен: 1) $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}$; 2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$; 3) $\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{C_1D_1}$; 4) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{C_1D}$.

24.7*. Дан параллелограмм $ABCD$, O — произвольная точка пространства. Докажите, что $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.

24.8*. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, O — произвольная точка пространства. Докажите, что: 1) $OA + OC_1 = OC + OA_1$; 2) $OD + OB_1 = OB + OD_1$.

24.9. Даны векторы (2; m; 5) и (4; 2; n). При каких m и n эти векторы коллинеарны?

24.10. Дан вектор $\vec{m}\,(3; 5; -1)$. Найдите координаты коллинеарного ему вектора с началом в точке M (−2; 1; 2) и концом на плоскости xz.

24.11. Вектор $\vec{a}\,(2; -3; 4)$ отложен от точки A (3; 1; −5). Найдите координаты точки M (x; y; z) — конца вектора $\vec{a}$.

24.12. Найдите координаты вершины D параллелограмма $ABCD$, если:
1) A (2; 1; −3), B (4; −5; 6), C (−3; 4; 8);
2) A (1; −3; 2), B (3; −1; 4), C (5; − 2; 6).

24.13°. Найдите скалярное произведение векторов, если:
1) $\vec{a}\,(2; -3; 4)$, $\vec{b}\,(3; 2; 5)$; 2) $\vec{a}\,(-2; -1; 3)$, $\vec{b}\,(4; 3; 1)$; 3) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 60°$; 4) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$, $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 120°$.

24.14. Какой знак имеет скалярное произведение двух векторов, если угол между ними: 1) острый; 2) тупой?

24.15. Определите вид угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если их скалярное произведение: 1) равно нулю; 2) больше нуля; 3) меньше нуля.

24.16°. При каком значении n данные векторы перпендикулярны: 1) $\vec{a}\,(2; -3; 1)$, $\vec{b}\,(3; -2; n)$; 2) $\vec{a}\,(n; 2; n)$, $\vec{b}\,(4; -n; 5)$; 3) $\vec{a}\,(3; n; 2n)$, $\vec{b}\,(n; -n; 1)$; 4) $\vec{a}\,(1; n; -2)$, $\vec{b}\,(n; n; 1)$?

24.17. Даны три точки $A\,(1;\ 1;\ 1)$, $B\,(-2;\ 1;\ 2)$, $C\,(0;\ 2;\ -3)$. Найдите на оси z такую точку $D\,(0;\ 0;\ c)$, чтобы векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ были перпендикулярны.

24.18. Даны четыре точки $A\,(1;\ 2;\ -2)$, $B\,(1;\ -1;\ 2)$, $C\,(2;\ 1;\ 0)$, $D\,(14;\ 1;\ 5)$. Найдите косинус угла φ между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

24.19. Даны три точки $A\,(0;\ 1;\ -1)$, $B\,(1;\ -1;\ 2)$, $C\,(3;\ 1;\ 0)$. Найдите косинус угла C треугольника ABC.

24.20*. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ единичной длины. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол 60°, а вектор $\vec{c}$ им перпендикулярен. Найдите длину вектора $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

24.21*. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ единичной длины образуют попарно углы 60°. Найдите угол φ между векторами: 1) $\vec{a}$ и $\vec{b} + \vec{c}$; 2) $\vec{a}$ и $\vec{b} - \vec{c}$.

24.22. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 24.11), точка K — середина ребра CC_1, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$.

Выразите через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторы: 1) $\overrightarrow{AC_1}$; 2) $\overrightarrow{AB_1}$; 3) $\overrightarrow{DB_1}$; 4) $\overrightarrow{AK}$; 5) $\overrightarrow{A_1K}$; 6) $\overrightarrow{CA_1}$.

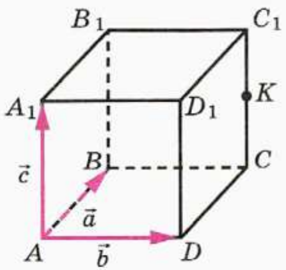


Рис. 24.11

§ 25 ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ И ИХ СВОЙСТВА

Таблица 23

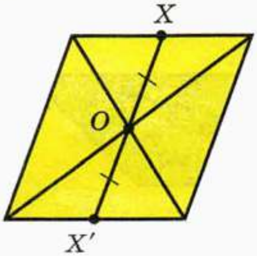
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФИГУР

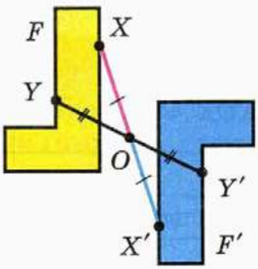
I. ДВИЖЕНИЯ

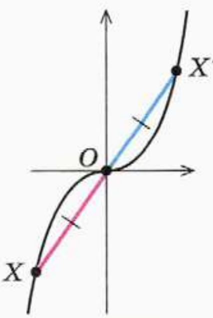
Движение — это преобразование, при котором сохраняются расстояния между точками фигуры (если X и Y — две произвольные точки фигуры, а X' и Y' — соответственные точки, полученные после преобразования движения, то $XY = X'Y'$).

1. Симметрия

относительно точки

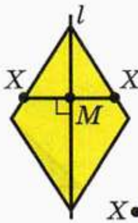


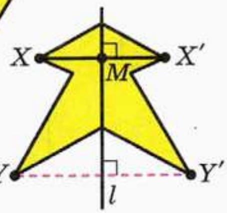


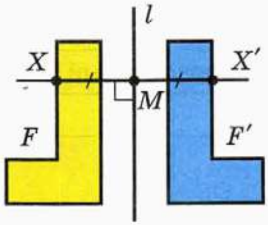


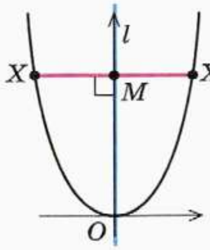
$OX' = OX$

относительно прямой



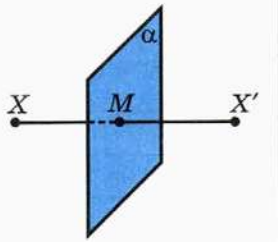






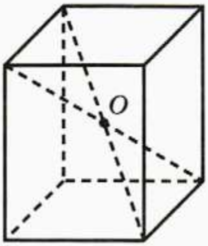
$XX' \perp l$ | $XM = MX'$

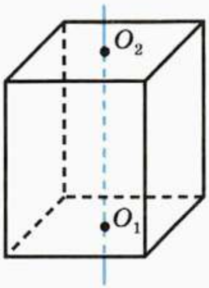
относительно плоскости

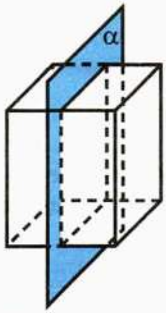


$XX' \perp \alpha$, $XM = MX'$

Продолжение табл. 23



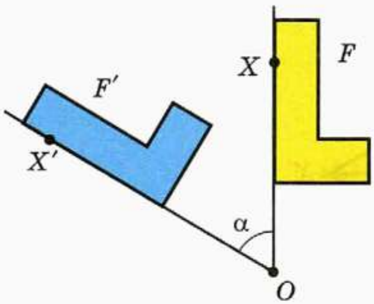




2. Поворот

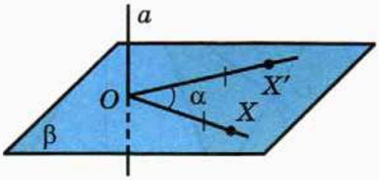
около точки на плоскости	вокруг прямой в пространстве

около точки на плоскости



$OX' = OX$	$\angle XOX' = \alpha$

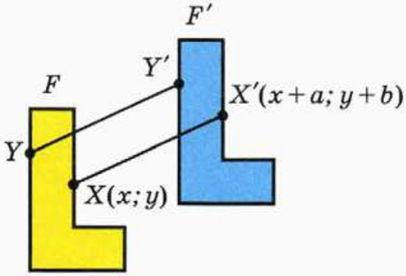
вокруг прямой в пространстве



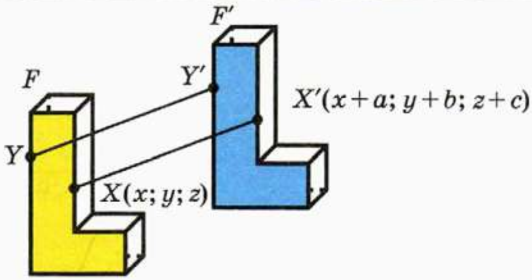
$\beta \perp a$
$OX' = OX$
$\angle XOX' = \alpha$

3. Параллельный перенос

на плоскости



в пространстве



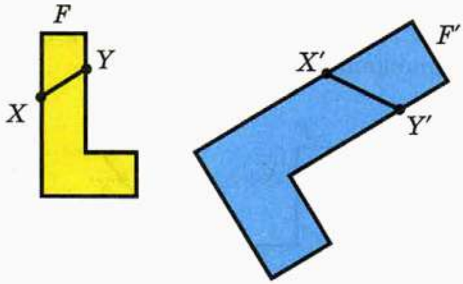
Точки перемещаются вдоль параллельных прямых (или прямых, которые совпадают) на одно и то же расстояние в одном и том же направлении.

$XX' = YY'$ (то есть $\overline{XX'} = \overline{YY'}$)

Окончание табл. 23

II. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОДОБИЯ

Преобразование, при котором расстояния между точками изменяются в одно и то же число раз, называют преобразованием подобия.

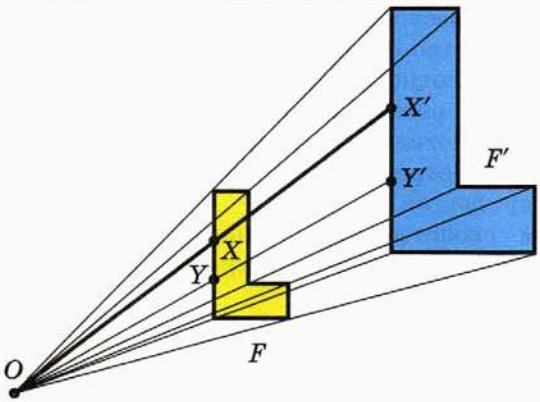


$\frac{X'Y'}{XY} = k$ — коэффициент подобия

Свойства

1. **Преобразование подобия сохраняет углы между лучами.**
2. **У подобных фигур соответствующие углы равны, а соответствующие отрезки — пропорциональны.**

Гомотетия



Если точка X отображается в точку X', то это означает:
1) точка X' лежит на луче OX;
2) $\frac{OX'}{OX} = k$.

Свойства

1. **При гомотетии отрезок отображается в параллельный ему отрезок (или в отрезок, лежащий с заданным отрезком на одной прямой)** $X'Y' \parallel XY$.
2. **При гомотетии плоскость отображается в параллельную ей плоскость** (или в эту же плоскость, если центр гомотетии лежит в заданной плоскости или если $k = 1$).

Объяснение и обоснование

1. Преобразование фигур. Движение. Напомним понятие преобразования фигур, известное вам из курса планиметрии. Если каждую точку данной фигуры переместить каким-либо образом, то мы получим новую фигуру. Говорят, что эта фигура получена *преобразованием* из данной (рис. 25.1). Заметим, что в отличие от реального преобразования, которое можно представить себе как непрерывный процесс, в геометрии для нас будут иметь значение только начальное и конечное положения фигуры[1].

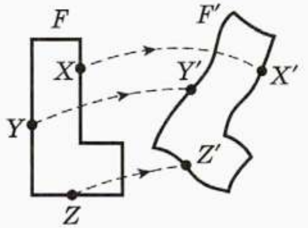


Рис. 25.1

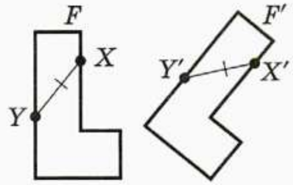


Рис. 25.2

Преобразование одной фигуры в другую называют движением, если оно сохраняет расстояния между точками, то есть переводит произвольные две точки X и Y одной фигуры в точки X' и Y' второй фигуры так, что $XY = X'Y'$ (рис. 25.2).

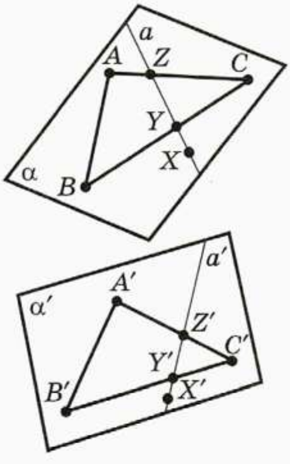


Рис. 25.3

Понятия преобразования и движения для фигур в пространстве определяются так же, как и на плоскости. Дословно так же, как и для движения на плоскости, обосновывается, что при движении в пространстве прямые переходят в прямые, лучи — в лучи, отрезки — в отрезки и сохраняются углы между лучами.

Новым свойством движения в пространстве является то, что **движение переводит плоскости в плоскости.**

Докажем это свойство. Пусть α — произвольная плоскость (рис. 25.3).

Обозначим на ней любые три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. При движении они перейдут в три точки A', B', C', которые также не лежат на одной прямой. Проведем через них плоскость α'. Докажем, что при данном движении плоскость α

[1] Фактически понятие преобразования в геометрии имеет такой же смысл, что и понятие функции в курсе алгебры и начал математического анализа, то есть для получения преобразования одной фигуры в другую нужно установить соответствие между точками этих фигур, при котором каждой точке первой фигуры ставится в соответствие единственная точка второй фигуры.

переходит в плоскость α'. Пусть X — произвольная точка плоскости α. Проведем через нее какую-нибудь прямую a в плоскости α, которая пересекает треугольник ABC в двух точках Y и Z. Прямая a перейдет при движении в некоторую прямую a'. Точки Y и Z прямой a перейдут соответственно в точки Y' и Z' плоскости α', принадлежащие треугольнику $A'B'C'$, а значит, и плоскости α'. Следовательно, прямая a' лежит в плоскости α'. Таким образом, при движении произвольная точка X плоскости α переходит в точку X' прямой a', а значит, и плоскости α', что и требовалось доказать. ○

Как и на плоскости, **две фигуры в пространстве называют равными, если они движением переводятся одна в другую** (см. определение равенства фигур на плоскости на с. 14).

Так же как и на плоскости, определяют преобразование симметрии относительно точки[1] и прямой.

Определение. **Точки X и X' пространства называют симметричными относительно точки O, называемой центром симметрии, если точка O является серединой отрезка XX'.** Точку O считают симметричной самой себе (рис. 25.4).

Фигуру F в пространстве называют *центрально-симметричной* относительно точки O, если каждая точка X фигуры F симметрична относительно точки O некоторой точке X' фигуры F.

Например, куб (рис. 25.5) центрально-симметричен относительно точки пересечения его диагоналей (обоснуйте это самостоятельно).

Определение. **Точки X и X' пространства называют симметричными относительно прямой a, называемой осью симметрии, если прямая a проходит через середину отрезка XX' и перпендикулярна этому отрезку** (рис. 25.6). Точки прямой a считают симметричными самим себе.

Фигуру F в пространстве называют *симметричной относительно оси a*, если каждая точка X фигуры F симметрична относительно этой оси некоторой точке X' фигуры F.

Например, прямоугольный параллелепипед (рис. 25.7) симметричен относительно оси, проходящей через точки пересечения диагоналей противоположных граней (обоснуйте самостоятельно).

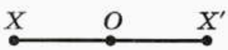


Рис. 25.4

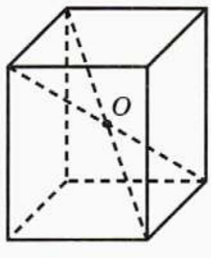


Рис. 25.5

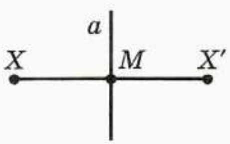


Рис. 25.6

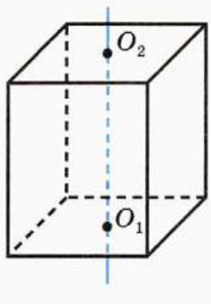


Рис. 25.7

[1] Симметрию относительно точки также называют центральной симметрией.

Кроме симметрии относительно точки и прямой в пространстве, рассматривают еще и преобразование симметрии относительно плоскости.

Определение. **Точки X и X' в пространстве называют симметричными относительно плоскости α, называемой плоскостью симметрии, если эта плоскость проходит через середину отрезка XX' и перпендикулярна ему.** Точки плоскости α считают симметричными самим себе (рис. 25.8).

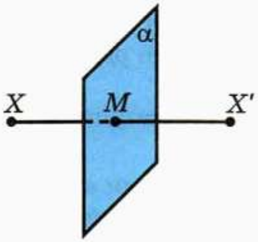


Рис. 25.8

Симметрию относительно плоскости называют также зеркальной симметрией.

Симметрия относительно плоскости является движением.

Доказательство. Пусть точки A' и B' получены симметрией относительно плоскости α точек A и B (рис. 25.9), а точки M и K — ортогональные проекции точек A и B на плоскость α. Тогда точки A, B, A', B' принадлежат одной плоскости и в этой плоскости точки A', B' симметричны точкам A, B относительно прямой MK. Из свойств симметрии на плоскости следует, что $AB = A'B'$. Таким образом, симметрия относительно плоскости сохраняет расстояния и, следовательно, является движением.

Аналогично можно доказать, что движениями являются симметрия относительно точки и симметрия относительно оси (докажите самостоятельно).

Фигуру F в пространстве называют *симметричной* (*зеркально-симметричной*) *относительно плоскости* α, если каждая точка X фигуры F симметрична относительно этой плоскости некоторой точке X' фигуры F.

Например, прямоугольный параллелепипед зеркально-симметричен относительно плоскости, проходящей через ось симметрии и параллельной одной из пар противоположных граней (рис. 25.10) (обоснуйте самостоятельно).

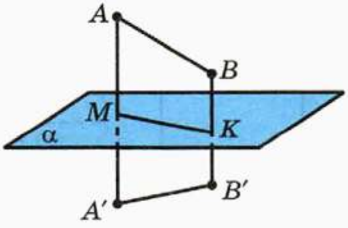


Рис. 25.9

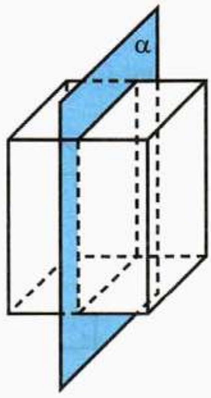


Рис. 25.10

Симметрия широко распространена в природе. Ее можно наблюдать в форме листьев и цветков растений, в расположении различных органов животных, в форме кристаллических тел (рис. 25. 11).

Рис. 25.11

Симметрию широко используют на практике, в строительстве и технике (рис. 25.12).

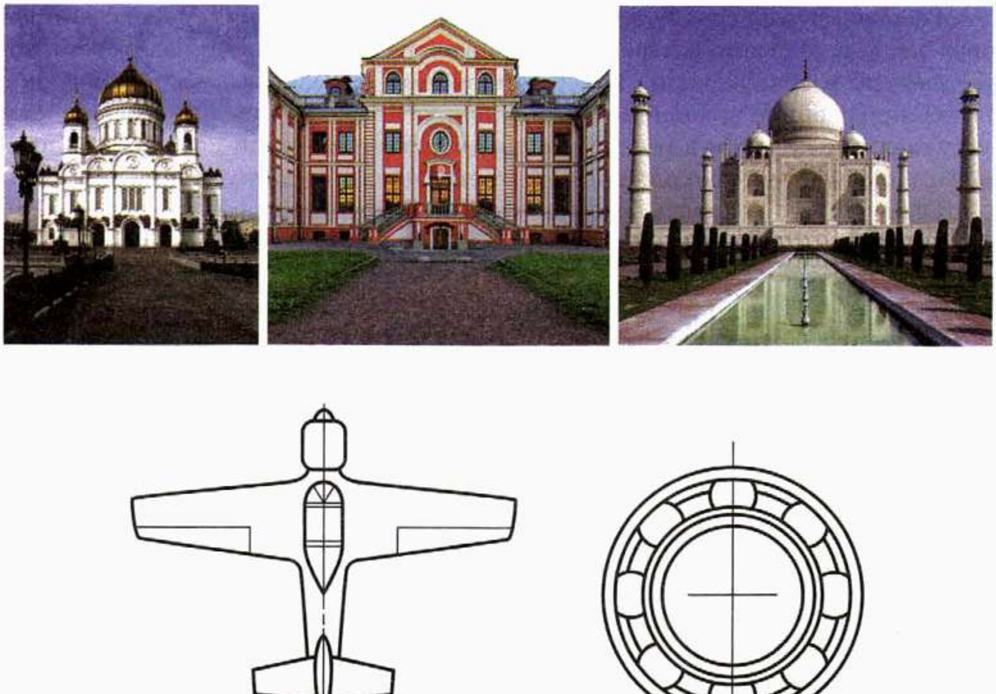


Рис. 25.12

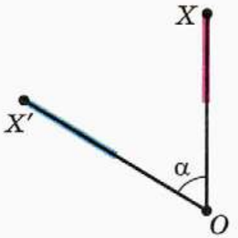


Рис. 25.13

2. Поворот. Фигуры вращения. Напомним, что точка X' на плоскости получается из точки X этой плоскости поворотом около центра O на угол α, если

$OX' = OX$ и угол XOX' равен α (рис. 25.13).

В пространстве аналогом преобразования поворота на плоскости около точки является поворот вокруг прямой.

Пусть в пространстве заданы прямая a и точка X, не принадлежащая этой прямой (рис. 25.14). Через точку X проведем плоскость β, перпендикулярную прямой a, и точку пересечения прямой a и плоскости β обозначим O. Говорят, что точка X' пространства получается из точки X поворотом вокруг прямой a на угол α, если в плоскости β точка X' получается из точки X поворотом около центра O на угол α.

Определение. **Преобразование пространства, при котором точки прямой a остаются на месте, а все остальные точки поворачиваются вокруг этой прямой (в одном и том же направлении) на угол α, называют *поворотом, или вращением.*** Прямую a при этом называют осью вращения.

Говорят, что фигура Φ в пространстве получена вращением фигуры F вокруг оси a, если все точки фигуры Φ получаются различными поворотами точек фигуры F вокруг оси a. Фигуру Φ при этом называют *фигурой вращения.*

Например, при вращении точки A вокруг прямой a (рис. 25.15) получаем окружность с центром в точке O, которая является точкой пересечения прямой a с плоскостью, проходящей через точку A и перпендикулярной прямой a.

Сферу можно получить вращением круга вокруг его диаметра (рис. 25. 16).

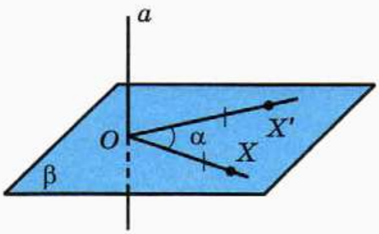


Рис. 25.14

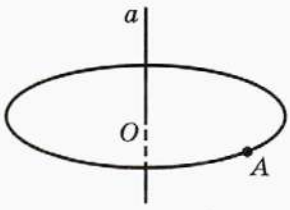


Рис. 25.15

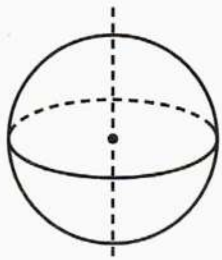


Рис. 25.16

3. Параллельный перенос в пространстве

Параллельным переносом в пространстве называют такое преобразование, при котором произвольная точка $(x;\ y;\ z)$ фигуры переходит в точку $(x + a;\ y + b;\ z + c)$, где числа a, b, c одни и те же для всех точек $(x;\ y;\ z)$. Параллельный перенос в пространстве задается формулами

$$x' = x + a,\ y' = y + b,\ z' = z + c,$$

выражающими координаты x', y', z' точки, в которую переходит точка $(x;\ y;\ z)$ при параллельном переносе.

Так же как и на плоскости, доказываются следующие свойства параллельного переноса:

1. Параллельный перенос является движением.
2. При параллельном переносе точки смещаются по параллельным (или совпадающим) прямым на одно и то же расстояние (рис. 25.17). (В этом случае часто говорят, что точки смещаются на один и тот же вектор $\overline{XX'}$.)
3. При параллельном переносе каждая прямая переходит в параллельную ей прямую (или в себя).
4. Каковы бы ни были точки A и A', существует единственный параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку A'.

Новым для параллельного переноса в пространстве является следующее свойство:

5. **При параллельном переносе в пространстве каждая плоскость переходит или в себя, или в параллельную ей плоскость.**

Действительно, пусть α — произвольная плоскость (рис. 25.18, *а*). Проведем в этой плоскости две прямые a и b, которые пересекаются. При параллельном переносе прямые a и b переходят или в себя, или в параллельные прямые a' и b' (рис. 25.18, *б*). Плоскость α переходит в некоторую плоскость α', проходящую через прямые a' и b'. Если плоскость α' не совпадает с плоскостью α, то по признаку параллельности плоскостей она параллельна α, что и требовалось доказать.

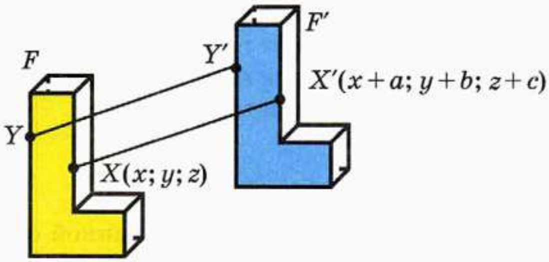


Рис. 25.17

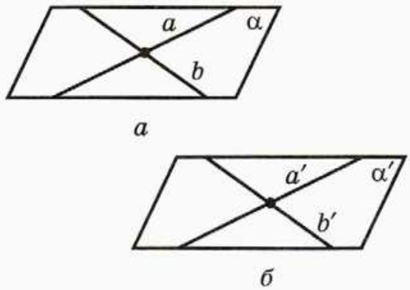


Рис. 25.18

4. Подобие пространственных фигур. Преобразование подобия в пространстве определяется так же, как и на плоскости. Преобразование фигуры F называют *преобразованием подобия*, если при этом преобразовании расстояния между точками изменяются в одно и то же число раз, то есть для любых двух точек X и Y фигуры F и точек X' и Y' фигуры F', в которые они переходят, $X'Y' = kXY$.

Так же как и на плоскости, преобразование подобия в пространстве переводит прямые в прямые, лучи в лучи, отрезки в отрезки и сохраняет углы между лучами. Такими же рассуждениями, как и для движения, доказывается, что преобразование подобия переводит плоскости в плоскости. (Выполните такое обоснование самостоятельно.)

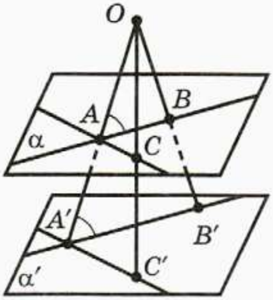


Рис. 25.19

Как и на плоскости, две фигуры называют *подобными*, если они переводятся одна в другую преобразованием подобия (см. определение подобия фигур на с. 231).

Простейшим преобразованием подобия в пространстве является гомотетия. Так же как и на плоскости, *гомотетия относительно центра* O с коэффициентом гомотетии k — это преобразование, которое переводит произвольную точку X в точку X' луча OX такую, что $OX' = kOX$.

Преобразование гомотетии в пространстве переводит любую плоскость, не проходящую через центр гомотетии, в параллельную плоскость (или в себя при $k = 1$).

Действительно, пусть O — центр гомотетии и α — любая плоскость, не проходящая через точку O (рис. 25.19). Возьмем любую прямую AB в плоскости α. Преобразование гомотетии переводит точку A в точку A' на луче OA, а точку B — в точку B' на луче OB, причем $\frac{OA'}{OA} = k$ и $\frac{OB'}{OB} = k$, где k — коэффициент гомотетии. Отсюда следует подобие треугольников AOB и $A'OB'$. Из подобия треугольников получаем равенство соответствующих углов OAB и $OA'B'$, а значит, параллельность прямых AB и $A'B'$.

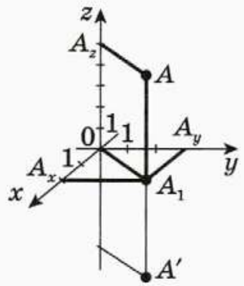
Возьмем теперь другую прямую AC в плоскости α. Она при гомотетии перейдет в параллельную прямую $A'C'$. При рассматриваемой гомотетии плоскость α перейдет в плоскость α', проходящую через прямые $A'B'$ и $A'C'$. Поскольку $A'B' \parallel AB$ и $A'C' \parallel AC$, то по признаку параллельности плоскостей плоскости α и α' параллельны, что и требовалось доказать.

Примеры решения задач

Задача 1. Дана точка (2; 3; 5). Найдите точки, симметричные данной относительно координатных плоскостей.

Решение	*Комментарий*
Точка A', симметричная точке A (2; 3; 5) относительно плоскости xy, лежит на прямой, перпендикулярной плоскости xy, поэтому имеет такие же координаты x и y: $x = 2$, $y = 3$. Симметричная точка находится на таком же расстоянии от плоскости xy, но по другую сторону от нее, поэтому ее координата z отличается только знаком, то есть	Для построения точки, симметричной заданной точке A (2; 3; 5) относительно плоскости xy, нужно провести прямую $AA' \perp$ пл. xy и от точки A_1 пересечения этой прямой с плоскостью xy отложить отрезок $A_1A' = AA_1$. Тогда точки A и A' имеют одинаковые координаты x и y, а координаты z у них отличаются только знаком (см. рисунок).

$z = -5$. Итак, точкой, симметричной точке A (2; 3; 5) относительно плоскости xy, будет точка (2; 3; −5). Аналогично точкой, симметричной точке A (2; 3; 5) относительно плоскости xz, будет точка (2; −3; 5) и точкой, симметричной точке A (2; 3; 5) относительно плоскости yz, будет точка (−2; 3; 5). ◁



Задача 2. Найдите значения a, b, c в формулах параллельного переноса $x' = x + a$, $y' = y + b$, $z' = z + c$, если при этом параллельном переносе точка A (4; 5; 3) переходит в точку A' (3; −2; 7).

Решение

▶ Подставляя в формулы параллельного переноса координаты точек A и A', то есть $x = 4$, $y = 5$, $z = 3$, $x' = 3$, $y' = -2$, $z' = 7$, получаем уравнения

$$3 = 4 + a, \quad -2 = 5 + b, \quad 7 = 3 + c.$$

Отсюда $a = -1$, $b = -7$, $c = 4$. ◁

Комментарий

Учтем координатные формулы параллельного переноса, при которых точка $(x; y; z) = (4; 5; 3)$ переходит в точку

$$(x'; y'; z') = (x + a; y + b; z + c) = (3; -2; 7).$$

Задача 3. Существует ли параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку B, а точка C — в точку D, если A (1; 3; 5), B (4; 0; 1), C (2; 4; 3), D (5; 1; −1)?

Решение

▶ Сравним координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$:

$$\overrightarrow{AB}(3; -3; -4), \quad \overrightarrow{CD}(3; -3; -4).$$

Поскольку $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$ точка A переходит в точку B, а точка C — в точку D. ◁

Комментарий

При параллельном переносе точки смещаются по параллельным (или совпадающим) прямым на одно и то же расстояние, то есть точки смещаются на один и тот же вектор $\bar{a}$. Следовательно, если при параллельном переносе точка A переходит в точку B, а точка C — в точку D, то векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ должны быть равны.

Вопросы для контроля

1. Какое преобразование фигуры называют движением?
2*. Докажите, что движение в пространстве переводит плоскость в плоскость.
3. Какие фигуры в пространстве называют равными?

4. Что такое преобразование симметрии относительно точки? Какую фигуру называют центрально-симметричной?
5. Объясните, что такое преобразование симметрии относительно плоскости. Какую фигуру называют симметричной относительно плоскости?
6. Дайте определение параллельного переноса.
7. Назовите свойства параллельного переноса.
8*. Докажите, что при параллельном переносе в пространстве каждая плоскость переходит или в себя, или в параллельную плоскость.
9. Что такое преобразование подобия? Назовите его свойства. Какие фигуры называют подобными?
10. Какое преобразование называют гомотетией?
11*. Докажите, что преобразование гомотетии в пространстве переводит любую плоскость, которая не проходит через центр гомотетии, в параллельную плоскость (или в себя).

Упражнения

25.1°. Приведите примеры центрально-симметричных и не центрально-симметричных фигур.

25.2°. Может ли центр симметрии фигуры не принадлежать ей?

25.3°. Постройте фигуру, симметричную кубу $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 25.20): 1) при симметрии с центром A; 2) при симметрии относительно плоскости BB_1C_1C.

25.4°. Существуют ли точки, прямые и плоскости, которые центральной симметрией отображаются на себя? Ответ проиллюстрируйте на рисунке.

25.5°. Найдите центр, оси и плоскости симметрии фигуры, состоящей из двух пересекающихся прямых.

25.6°. Сколько осей симметрии имеет: 1) прямоугольный параллелепипед, который не является кубом; 2) куб?

25.7°. Сколько осей симметрии имеет сфера?

25.8°. Сколько плоскостей симметрии имеет: 1) прямоугольный параллелепипед, который не является кубом; 2) куб?

25.9°. Приведите примеры пространственных фигур, в которых есть ось симметрии, но нет плоскости симметрии, и наоборот, есть плоскость симметрии, но нет оси симметрии.

25.10°. Какие виды симметрии имеет куб?

25.11. Сколько в правильной шестиугольной призме: 1) осей симметрии; 2) плоскостей симметрии?

25.12. Сколько в правильной треугольной призме: 1) осей симметрии; 2) плоскостей симметрии?

25.13. В основании прямой призмы лежит ромб. Сколько она имеет: 1) осей симметрии; 2) плоскостей симметрии?

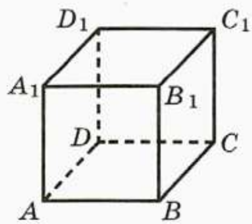


Рис. 25.20

25.14. Сколько осей и плоскостей симметрии имеет правильная пирамида, в основании которой лежит многоугольник: 1) с четным числом сторон; 2) с нечетным числом сторон?

25.15. Может ли фигура иметь ровно два центра симметрии? Ответ обоснуйте.

25.16*. Докажите, что если две пересекающиеся перпендикулярные прямые в пространстве являются осями симметрии данной фигуры F, то и прямая, проходящая через их точку пересечения и перпендикулярная этим прямым, также будет осью симметрии фигуры F.

25.17*. Докажите, что фигура в пространстве не может иметь четное (ненулевое) число осей симметрии.

25.18. Назовите движение, которое оставляет на месте только: 1) одну точку; 2) точки одной прямой; 3) точки одной плоскости.

25.19. Существуют ли движения (если существуют, то какие), переводящие данную прямую в другую заданную прямую: 1) параллельную первой; 2) пересекающую первую; 3) скрещивающуюся с первой?

25.20*. Докажите, что при движении в пространстве круг переходит в круг такого же радиуса.

25.21*. Докажите, что при движении в пространстве три точки, лежащие на прямой, переходят в три точки, которые также лежат на одной прямой.

25.22*. Докажите, что движение переводит сферу в сферу такого же радиуса.

25.23*. Докажите, что если движение оставляет на месте две: 1) пересекающиеся прямые; 2) параллельные прямые, то оно оставляет на месте и всю плоскость, в которой лежат эти прямые.

25.24*. Докажите, что если движение оставляет на месте три точки, не принадлежащие одной прямой, то оно оставляет на месте и всю плоскость, которой принадлежат эти точки.

25.25*. В правильном тетраэдре закрасили одну грань. В результате каких движений, которые оставляют на месте окрашенную грань, он самосовместится? (Под самосовмещением тетраэдра понимают, что все точки заданного тетраэдра в результате перемещения переходят в точки этого же тетраэдра.)

25.26*. В кубе закрасили одну грань. В результате каких движений, оставляющих на месте окрашенную грань, он самосовместится?

25.27*. Докажите, что движением является: 1) симметрия относительно точки; 2) осевая симметрия; 3) поворот.

25.28*. Докажите, что параллельный перенос может быть получен в результате последовательного выполнения (композиции) двух симметрий относительно плоскостей.

25.29*. Подайте симметрию относительно точки в виде композиции трех симметрий относительно плоскостей.

25.30. Докажите, что преобразование симметрии относительно координатных плоскостей задается формулами:

1) относительно плоскости xy: $x' = x$, $y' = y$, $z' = -z$;

2) относительно плоскости xz: $x' = x$, $y' = -y$, $z' = z$;

3) относительно плоскости yz: $x' = -x$, $y' = y$, $z' = z$.

25.31. Даны точки: 1) (2; −7; 3); 2) (−3; 4; 1); 3) (5; −3; 7). Найдите точки, симметричные данным относительно координатных плоскостей.

25.32. Даны точки: 1) (2; −7; 3); 2) (−3; 4; 1); 3) (5; −3; 7). Найдите точки, симметричные данным относительно начала координат.

25.33. Найдите значения a, b, c в формулах параллельного переноса $x' = x + a$, $y' = y + b$, $z' = z + c$, если при этом параллельном переносе точка A (3; 2; 0) переходит в точку A' (2; 0; 5).

25.34. При параллельном переносе точка A (1; −1; 3) переходит в точку A' (3; −5; 2). В какую точку переходит начало координат?

25.35. Существует ли параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку B, а точка C — в точку D, если:

1) A (2; 1; 0), B (1; 0; 1), C (3; −2; 1), D (2; −3; 0);

2) A (−2; 3; 5), B (1; 2; 4), C (4; −3; 6), D (7; −2; 5);

3) A (0; 1; 2), B (−1; 0; 1), C (3; −2; 2), D (2; −3; 1);

4) A (1; 1; 0), B (0; 0; 0), C (−2; 2; 1), D (1; 1; 1)?

25.36. Докажите, что при параллельном переносе параллелограмм переходит в равный ему параллелограмм.

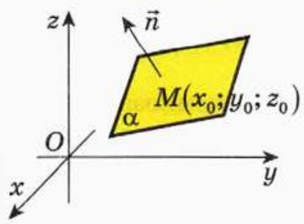
25.37. Четыре параллельные прямые пересекают параллельные плоскости в вершинах параллелограммов $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ соответственно. Докажите, что параллелограммы $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ совмещаются параллельным переносом.

25.38. Докажите, что преобразование гомотетии в пространстве является преобразованием подобия.

25.39. Три прямые, проходящие через точку S, пересекают эту плоскость в точках A, B, C, а параллельную ей плоскость — в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ гомотетичны.

§ 26 УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ

Таблица 24

УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ	
	$\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0}$ — уравнение плоскости α, $\alpha \perp \vec{n}\ (a; b; c)$. **Если плоскость α проходит через точку $M\ (x_0; y_0; z_0)$ и $\alpha \perp \vec{n}\ (a; b; c)$, то уравнение плоскости α:** $\boldsymbol{a\ (x - x_0) + b\ (y - y_0) + c\ (z - z_0) = 0.}$

Объяснение и обоснование

В курсе планиметрии было показано, что прямая на плоскости задается уравнением $ax + by + c = 0$, в котором a, b, c — действительные числа, причем a и b одновременно не равны нулю. В пространстве имеет место аналогичная теорема.

***Теорема* 26.1. Плоскость в пространстве задается уравнением $ax + by + cz + d = 0$, где a, b, c, d — действительные числа, причем a, b, c одновременно не равны нулю и являются координатами вектора, перпендикулярного этой плоскости, который называют вектором нормали.**

Доказательство. Пусть точка $M\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$ принадлежит плоскости α и $\vec{n}\ (a; b; c)$ — вектор, перпендикулярный этой плоскости (рис. 26.1). Произвольная точка $A\ (x,\ y,\ z)$ будет принадлежать этой плоскости тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{MA}\ (x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0)$ будет перпендикулярен вектору $\vec{n}$, то есть их скалярное произведение будет равно нулю: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$. Записывая скалярное произведение через координаты рассматриваемых векторов, получим уравнение

$$a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) + c\,(z - z_0) = 0, \tag{1}$$

которое задает искомую плоскость α. Раскрыв скобки и обозначив $-ax_0 - by_0 - cz_0 = d$, получим необходимое уравнение плоскости

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Рассмотрим также вопрос о взаимном расположении в пространстве плоскостей, заданных своими уравнениями.

Заметим, что две плоскости в пространстве параллельны или совпадают тогда и только тогда, когда их нормали $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ коллинеарны и, следовательно, для некоторого числа λ выполняется равенство $\vec{n}_2 = \lambda\vec{n}_1$.

Для плоскостей, заданных уравнениями

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0;\ \ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \tag{2}$$

векторы нормалей имеют координаты $\vec{n}_1\,(a_1; b_1; c_1)$ и $\vec{n}_2\,(a_2; b_2; c_2)$. Поэтому такие плоскости параллельны или совпадают, если для некоторого числа λ выполняется равенство $a_2 = \lambda a_1$, $b_2 = \lambda b_1$, $c_2 = \lambda c_1$. Если при этом $d_2 = \lambda d_1$, то уравнения (2) определяют одну и ту же плоскость. Если же $d_2 \neq \lambda d_1$, то эти уравнения определяют параллельные плоскости.

Если плоскости не параллельны и не совпадают, то они пересекаются по прямой и *угол φ между плоскостями* равен углу между прямыми, содержащими их нормали $\vec{n}_1\,(a_1; b_1; c_1)$ и $\vec{n}_2\,(a_2; b_2; c_2)$ (обоснуйте это самостоятельно). Этот угол можно вычислить по формуле

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

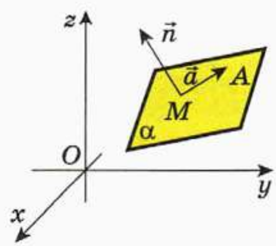


Рис. 26.1

В частности, *плоскости перпендикулярны, если скалярное произведение векторов* $\vec{n}_1$ *и* $\vec{n}_2$ *равно нулю*, то есть выполняется равенство $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

Примеры решения задач

Задача 1. Определите, какие из заданных точек A (1; 1; 2), B (1; 0; 1), C (−2; −2; 5), D (−3; 2; 1) принадлежат плоскости $3x - y + 2z - 6 = 0$.

Решение

▶ Точки A и C принадлежат заданной плоскости, поскольку их координаты удовлетворяют уравнению плоскости (действительно,

$$3 \cdot 1 - 1 + 2 \cdot 2 - 6 = 0$$

и $3 \cdot (-2) - (-2) + 2 \cdot 5 - 6 = 0$).

Точки B и D не принадлежат заданной плоскости, поскольку их координаты не удовлетворяют уравнению плоскости. ◁

Комментарий

Точка, заданная своими координатами, будет принадлежать плоскости тогда и только тогда, когда координаты точки будут удовлетворять уравнению плоскости. Поэтому для решения задачи нужно подставить координаты каждой точки в заданное уравнение плоскости и проверить, получим мы правильное равенство или нет.

Задача 2. Даны точки A (1; −1; 3) и B (3; 2; 5). Запишите уравнение плоскости α, проходящей через точку A перпендикулярно прямой AB.

Решение

▶ Поскольку $\overrightarrow{AB} \perp \alpha$, то вектор $\overrightarrow{AB}$ является вектором нормали для плоскости α. По формуле (1)

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

получаем:

$$2(x - 1) + 3(y + 1) + 2(z - 3) = 0.$$

Отсюда

$2x + 3y + 2z - 5 = 0$ — искомое уравнение плоскости. ◁

Комментарий

Если прямая AB перпендикулярна искомой плоскости α, то любой ненулевой вектор на этой прямой (например, вектор $\overrightarrow{AB}$) будет вектором нормали для плоскости α. Тогда достаточно по формуле (1) записать уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору нормали $\overrightarrow{AB}$.

Задача 3. Запишите уравнение плоскости, проходящей через точки A (0; 1; 0), B (1; 0; 0), C (1; 1; 1).

Решение

▶ Пусть уравнение искомой плоскости имеет вид $ax + by + cz + d = 0$. Если точки A, B, C принадлежат этой плоскости, то их координаты удовлетворяют уравнению плоскости.

Комментарий

Запишем уравнение плоскости в общем виде:

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Далее учтем, что плоскость проходит через точки A, B, C, следовательно, Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} a\cdot 0+b\cdot 1+c\cdot 0+d=0 \text{ (для точки } A), \\ a\cdot 1+b\cdot 0+c\cdot 0+d=0 \text{ (для точки } B), \\ a\cdot 1+b\cdot 1+c\cdot 1+d=0 \text{ (для точки } C). \end{cases}$$

Отсюда $b = -d$, $a = -d$, $c = d$. Тогда уравнение плоскости ABC имеет вид

$$-dx - dy + dz + d = 0$$

или $x + y - z - 1 = 0$

(после сокращения на $-d \neq 0$). ◁

координаты этих точек удовлетворяют уравнению плоскости.

Задача 4*. Докажите, что **расстояние от точки M $(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости α, заданной уравнением $ax + by + cz + d = 0$** (где a, b, c одновременно не равны нулю), **вычисляют по формуле**

$$\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \qquad (*)$$

Решение	*Комментарий*

▶ Для нахождения расстояния от точки M $(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости α (рис. 26.2) проведем перпендикуляр $MK \perp \alpha$ (точка K $(x; y; z)$ — основание перпендикуляра). Вектор нормали $\vec{n}(a; b; c)$ также перпендикулярен плоскости α, поэтому векторы $\overrightarrow{KM}$ и $\vec{n}$ коллинеарны, следовательно, $\overrightarrow{KM} = \lambda\vec{n}$.

Учитывая, что

$\overrightarrow{KM}(x-x_0; y-y_0; z-z_0)$,

$\lambda\vec{n} = \overrightarrow{(\lambda a; \lambda b; \lambda c)}$, получаем:

$$\begin{cases} x-x_0=\lambda a, \\ y-y_0=\lambda b, \\ z-z_0=\lambda c. \end{cases}$$

Отсюда $\begin{cases} x=x_0+\lambda a, \\ y=y_0+\lambda b, \\ z=z_0+\lambda c. \end{cases}$

Поскольку точка K принадлежит плоскости α, то координаты этой

Чтобы найти расстояние от точки M до плоскости α, проведем перпендикуляр MK к плоскости α и учтем, что вектор нормали $\vec{n}$ тоже перпендикулярен этой плоскости. Поскольку два перпендикуляра к одной плоскости α параллельны (или лежат на одной прямой), то векторы $\overrightarrow{KM}$ и $\vec{n}$ коллинеарны, следовательно, $\overrightarrow{KM} = \lambda\vec{n}$. Но у равных векторов равны соответствующие координаты, поэтому записываем координаты векторов $\overrightarrow{KM}$ и $\lambda\vec{n}$ и равенство соответствующих координат. Также учтем, что расстояние MK от точки M до плоскости α равно длине вектора $\overrightarrow{KM}$ и $|\overrightarrow{KM}| = |\lambda|\cdot|\vec{n}|$. Для нахождения значения λ воспользуемся тем, что точка K принадлежит плоскости α, следовательно, координаты этой точки удовлетворяют уравнению плоскости α.

точки удовлетворяют уравнению плоскости α, то есть
$a(x_0+\lambda a)+b(y_0+\lambda b)+c(z_0+\lambda c)+d=0$.
Тогда
$ax_0+by_0+cz_0+d=-\lambda(a^2+b^2+c^2)$.
Отсюда $\lambda=-\dfrac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}$.
Учитывая, что $\left|\overline{KM}\right|=|\lambda|\cdot|\vec{n}|$ и $|\vec{n}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, получаем:

$$KM=\left|\overline{KM}\right|=|\lambda|\cdot|\vec{n}|=$$
$$=\left|-\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}\right|\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}=$$
$$=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}=$$
$$=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Еще заметим, что по условию коэффициенты a, b, c одновременно не равны нулю, поэтому сумма $a^2+b^2+c^2\neq$ $\neq 0$ (и, следовательно, всегда положительна).

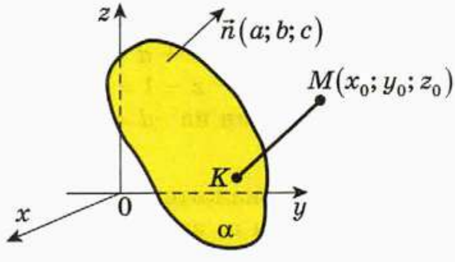


Рис. 26.2

Таким образом, *чтобы найти расстояние от точки $M(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости α, заданной уравнением $ax+by+cz+d=0$, достаточно в левую часть уравнения плоскости подставить координаты заданной точки и модуль результата разделить на корень квадратный из суммы квадратов коэффициентов при переменных.*

Задача 5. Найдите расстояние от точки $A(2;-5;1)$ до плоскости, заданной уравнением $4x-3y+12z+17=0$.

Решение

▶ Расстояние от точки A до плоскости α — $\rho(A;\alpha)$ равно:

$$\rho(A;\alpha)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=$$
$$=\frac{|4\cdot2-3\cdot(-5)+12\cdot1+17|}{\sqrt{4^2+(-3)^2+12^2}}=\frac{52}{13}=4.$$ ◁

Комментарий

Для нахождения расстояния от точки $A(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости α, заданной уравнением $ax+by+cz+d=0$, воспользуемся формулой (*)

$$\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Вопросы для контроля

1. Запишите в общем виде: 1) уравнение плоскости в пространстве; 2) уравнение плоскости, проходящей через точку $M(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(a;b;c)$.
2*. Обоснуйте уравнение плоскости в пространстве.

3. В каком случае плоскости, заданные уравнениями $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, будут параллельны?
4. В каком случае плоскости, заданные уравнениями $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, будут перпендикулярны?

Упражнения

26.1°. Определите уравнение координатных плоскостей: 1) xy; 2) xz; 3) yz.

26.2°. Даны точки A (1; 3; 4), B (−2; −1; 2), C (3; 0; 1), D (−1; 3; 1). Укажите, какие из них принадлежат плоскости $2x - 5y + 3z - 7 = 0$.

26.3°. Найдите точки пересечения плоскости $x + 3y - 5z - 6 = 0$ с осями координат.

26.4. Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку A (2; −3; 5), с вектором нормали $\vec{n}$ (4; 2; −1).

26.5. Точка M (2; −5; −3) является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Запишите уравнение этой плоскости.

26.6. Запишите уравнение плоскости, проходящей через точки: 1) A (0; 0; 1), B (1; 0; 0), C (0; 1; 0); 2) M (3; −1; 2), N (4; 1; −1), K (2; 0; 1).

26.7*. Принадлежат ли одной плоскости точки A (1; 0; −2), B (3; 4; 2), C (0; 1; 3), D (2; −1; 1)?

26.8. Запишите уравнение плоскости, которая: 1) проходит через точку M (1; −2; 4) и параллельна координатной плоскости xz; 2) проходит через точку M (0; 2; 0) и перпендикулярна оси ординат; 3) проходит через точки A (3; 0; 0), B (0; 3; 0) и параллельна оси аппликат.

26.9. Определите, какие из перечисленных ниже пар плоскостей параллельны: 1) $x + y + z - 7 = 0$, $3x + 3y + 3z + 7 = 0$; 2) $3x - 2y + 5z - 2 = 0$, $6x - 4y + 10z - 4 = 0$; 3) $2x + 6y - 4z = 0$, $-x - 3y + 2z + 1 = 0$; 4) $x - y + 2z - 2 = 0$, $3x - y + 6z - 5 = 0$.

26.10. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку M (1; 2; −1) параллельно плоскости: 1) $3x + 2y - z + 4 = 0$; 2) $x - 4y + 3z - 5 = 0$.

26.11. Определите, какие из перечисленных ниже пар плоскостей перпендикулярны: 1) $x + y + z - 1 = 0$, $5x - 3y - 2z + 3 = 0$; 2) $2x - 2y + z - 3 = 0$, $6x - 4y + 10z - 4 = 0$; 3) $2x + 6y - 4z = 0$, $-x - 3y + 2z + 1 = 0$; 4) $x - y + 2z - 2 = 0$, $3x - y + 6z - 5 = 0$.

26.12. Найдите косинус угла φ между плоскостями, заданными уравнениями: 1) $x + 3y - z - 1 = 0$, $3x - 2y + z + 3 = 0$; 2) $2x - y + z - 2 = 0$, $x - 4y + 3z - 4 = 0$; 3) $2x + y - 3z = 0$, $x - y + z + 1 = 0$; 4) $x - y + 2z - 2 = 0$, $4x - 2y + z - 5 = 0$.

26.13*. Плоскость задана уравнением $ax + by + cz + d = 0$. Запишите уравнение плоскости, симметричной данной относительно: 1) координатных плоскостей; 2) координатных прямых; 3) начала координат.

26.14. Вычислите расстояние от начала координат до плоскости: 1) $2x - 2y + z - 6 = 0$; 2) $2x + 3y - z + 12 = 0$.

26.15*. Сфера, заданная уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, пересечена плоскостью. Найдите координаты центра и радиус окружности сечения, если плоскость задана уравнением: 1) $z = 0$; 2) $y = 1$; 3) $x + y + z = 2$.

26.16. Найдите расстояние от точки M (–3; 1; 2) до плоскости, заданной уравнением $3x + 4y - 12z + 2 = 0$.

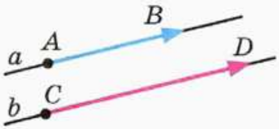
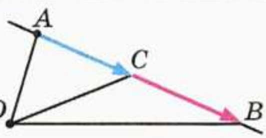
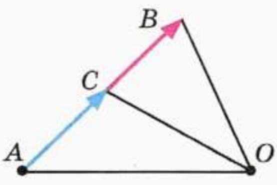
26.17. Вычислите расстояние между параллельными плоскостями, заданными уравнениями $3x + 2y + 4z + 12 = 0$ и $9x + 6y + 12z - 5 = 0$. *Указание.* Для этого достаточно выбрать любую точку первой плоскости, например M (0; 0; –3), и найти расстояние от нее до второй плоскости.

26.18*. Докажите, что в общем случае расстояние между параллельными плоскостями α и β, заданными уравнениями $ax + by + cz + d_1 = 0$ и $ax + by + cz + d_2 = 0$, вычисляют по формуле $\rho(\alpha; \beta) = \dfrac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

§ 27 ПРИМЕНЕНИЕ КООРДИНАТ И ВЕКТОРОВ К РЕШЕНИЮ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Таблица 25

ПЕРЕВОД ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФАКТОВ НА ВЕКТОРНЫЙ ЯЗЫК И ВЕКТОРНЫХ СООТНОШЕНИЙ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ЯЗЫК

№	Рисунок	Утверждение на геометрическом языке	Утверждение на векторном языке
1		Прямые параллельны $a \parallel b$ (прямые a и b не совпадают)	Векторы коллинеарны $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{CD}$
2		$C \in AB$ $\left(\dfrac{AB}{AC} = \lambda\right)$	Векторы коллинеарны $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$ или $\overrightarrow{OC} = p\overrightarrow{OA} + (1-p)\cdot\overrightarrow{OB}$
3		$\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{m}{n}$	а) $\overrightarrow{AC} = \dfrac{m}{n}\overrightarrow{CB}$; б) $\overrightarrow{OC} = \dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$.
		C — середина AB $\left(\dfrac{AC}{CB} = 1\right)$	$\overrightarrow{OC} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$

Продолжение табл. 25

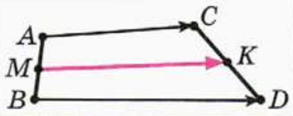
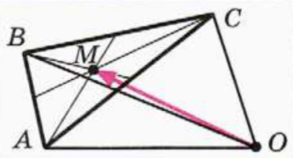
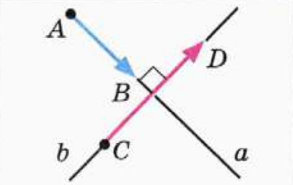
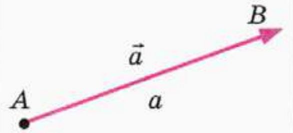
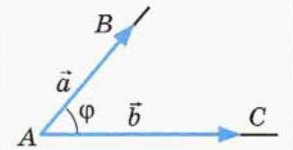
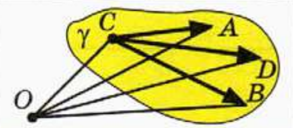
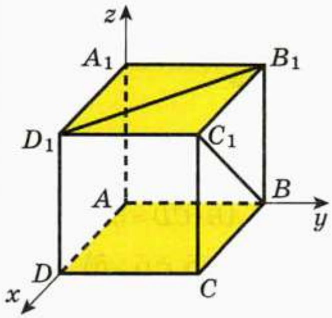
4		M — середина AB; K — середина CD	$\overline{MK}=\frac{1}{2}(\overline{AC}+\overline{BD})$
5		M — точка пересечения медиан $\Delta\ ABC$; O — произвольная точка	$\overline{OM}=\frac{1}{3}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC})$
6		$a \perp b$	$\overline{AB}\cdot\overline{CD}=0$ $(\overline{AB}\neq\vec{0}, \overline{CD}\neq\vec{0})$
7		$AB = a$	$\vec{a}^2=\|\vec{a}\|^2$, где $\vec{a}=\overline{AB}$, $\|\vec{a}\|=a$ (в координатах: $\|\vec{a}\|=\sqrt{x_a^2+y_a^2}$ — на плоскости; $\|\vec{a}\|=\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}$ — в пространстве)
8		$\angle BAC = \varphi$	$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}$, где $\overline{AB}=\vec{a}$, $\overline{AC}=\vec{b}$, φ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$
9		$D \in$ пл. ABC $C \notin$ пр. AB O — произвольная точка	а) $\overline{CD}=\alpha\overline{CA}+\beta\overline{CB}$; б) $\overline{OD}=\alpha\overline{OA}+\beta\overline{OB}+(1-\alpha-\beta)\overline{OC}$

СХЕМА РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ВЕКТОРНЫМ МЕТОДОМ

1. **Перевести требование задачи на векторный язык** (табл. 25).
2. **Ввести прямоугольную систему координат** *или выбрать два неколлинеарных вектора на плоскости (или три некомпланарных вектора в пространстве) как базисные.*
3. **Найти координаты векторов, выделенных в пункте 1,** или *выразить эти векторы через базисные.*
4. **Доказать или найти выделенное в пункте 1 соотношение и перевести результат на геометрический язык** (для перевода опять воспользоваться соотношениями табл. 25).

Окончание табл. 25

Задача. Найдите угол между непересекающимися диагоналями двух смежных граней куба.



Решение

Пусть дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Обозначим угол между непересекающимися диагоналями B_1D_1 и BC_1 двух смежных граней куба через φ ($\angle(B_1D_1; BC_1) = \varphi$).

1. *На векторном языке требование задачи выглядит так*: необходимо найти угол φ из соотношения $\cos\varphi = \dfrac{\left|\overrightarrow{B_1D_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}\right|}{\left|\overrightarrow{B_1D_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC_1}\right|}$ (табл. 25).

2. *Введем прямоугольную систему координат* так: начало координат выберем в точке A, ось Ox направим вдоль AD, Oy — вдоль AB и Oz — вдоль AA_1.

Если ребро куба принять за единицу, то координаты вершин куба будут такими:
A (0; 0; 0), D_1 (1; 0; 1), D (1; 0; 0), C_1 (1; 1; 1), B_1 (0; 1;1), B (0; 1; 0), A_1 (0; 0; 1), C (1; 1; 0).

3. *Тогда координаты векторов, выделенных в пункте 1*, будут:

$$\overrightarrow{B_1D_1}(1; -1; 0),\ \overrightarrow{BC_1}(1; 0; 1).$$

4. *Найдем угол* φ: $\cos\varphi = \dfrac{|1\cdot 1 + (-1)\cdot 0 + 0\cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}\cdot\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \dfrac{1}{2}.$

Поскольку $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}$ и угол φ — острый (как угол между прямыми), то $\varphi = 60°$.

Ответ: 60°.

Объяснение и обоснование

Заметим, что координаты для решения стереометрических задач удобно использовать в тех случаях, когда в заданной конфигурации можно ввести прямоугольную систему координат в пространстве. Также для решения некоторых геометрических задач бывает удобно сочетать координатное и векторное решение задачи (используя координаты соответствующих векторов), а на некоторых этапах решения использовать известные геометрические соотношения.

Векторное решение геометрических задач обычно включает такие этапы: перевод условия задачи на векторный язык; векторное решение задачи; перевод результата на геометрический язык. Следует учитывать, что запись условия задачи в векторной форме чаще всего не является однозначной.

Например, даже такое простое утверждение, что точка C — середина отрезка AB (рис. 27.1), может быть записано в векторной форме одним из следующих способов:

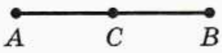


Рис. 27.1

1) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$; 2) $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{CB}$; 4) $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$;

5) $\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; 6) $\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{CB}$; 7) $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$, где O — произвольная точка. Это приводит к тому, что при записи условия геометрической задачи в векторной форме сложно сориентироваться, какое векторное соотношение придется использовать для получения требования задачи. К тому же дать какой-то определенный метод исследования векторных соотношений, получаемых при записи условия на векторном языке, практически невозможно. Поэтому целесообразно вначале записать на векторном языке только требование задачи, а затем, проанализировав условия (по чертежу), выяснить, с помощью каких векторов можно получить требуемое соотношение (в простых задачах) либо какие векторы целесообразно выбрать в качестве базисных (или как удобно ввести систему координат) для более сложных задач. Лишь затем по мере необходимости можно переводить условие на векторный язык, а на некоторых этапах пользоваться известными учащимся геометрическими соотношениями.

Следует учитывать, что векторы целесообразно применять для решения геометрических задач на доказательство параллельности, принадлежности трех и более точек одной прямой, на доказательство перпендикулярности, на вычисление длин отрезков и величин углов, поэтому желательно уметь переводить на векторный язык требования именно этих задач, а также осуществлять обратный перевод полученных векторных соотношений на геометрический язык. Соответствующие сведения приведены в таблице 25.

Уточним формулировки основных сведений, включенных в эту таблицу.

Соотношения 1 и 2

Из определения коллинеарных векторов следует, что если векторы лежат на одной прямой или на параллельных прямых, то они коллинеарны, и наоборот, если векторы коллинеарны, то они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Кроме того, ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда существует такое число λ, что $\vec{b}=\lambda\vec{a}$. Иными словами, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ненулевые и $\vec{b}=\lambda\vec{a}$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны (и лежат на параллельных прямых или на одной прямой); и наоборот, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны (лежат на параллельных прямых или на одной прямой), то существует такое число λ ($\lambda \neq 0$), что $\vec{b}=\lambda\vec{a}$. Таким образом, мы обосновали основные соотношения, приведенные в строках 1 и 2 таблицы 25. Заметим также, что в случае, когда три точки A, B, C лежат на одной прямой (см., например, рис. 27.1), векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BA}$ коллинеарны, а значит, $\overrightarrow{BC}=p\overrightarrow{BA}$, но тогда

$$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=p\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right). \quad (1)$$

Отсюда

$$\overrightarrow{OC} = p\overrightarrow{OA} + (1-p)\overrightarrow{OB}. \tag{2}$$

И наоборот, если выполняется соотношение (2), то выполняется и соотношение (1), а значит, $\overrightarrow{BC} = p\overrightarrow{BA}$, поэтому векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BA}$ коллинеарны и, следовательно, точки A, B, C лежат на одной прямой (прямые BC и BA не могут быть параллельны, так как они имеют общую точку B). Полученное соотношение можно сформулировать так: точки A, B, C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда для некоторой точки O выполняется векторное равенство $\overrightarrow{OC} = p\overrightarrow{OA} + (1-p)\overrightarrow{OB}$ (то есть в разложении вектора $\overrightarrow{OC}$ по двум неколлинеарным векторам $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ сумма коэффициентов разложения равна единице). ○

Соотношение 3

● Если точка C делит отрезок AB в отношении $m : n$ $\left(\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}\right)$, то

$$\overrightarrow{AC} = \frac{m}{n}\overrightarrow{CB}. \tag{3}$$

Тогда $n\overrightarrow{AC} = m\overrightarrow{CB}$ и поэтому $n\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\right) = m\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}\right)$. Отсюда

$$\overrightarrow{OC} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}. \tag{4}$$

И наоборот, если выполняется равенство (4), то выполняется и равенство (3), следовательно, точки A, B, C лежат на одной прямой и $\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}$, то есть точка C делит отрезок AB в отношении $m : n$. Таким образом, *точка C делит отрезок AB в отношении $m : n$* (считая от точки A) *тогда и только тогда, когда выполняются векторные равенства* (3) *или* (4).

Заметим, что *если точка C является серединой отрезка AB, то* отношение $m : n = 1 : 1$ и по формуле (4) получаем:

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right). \tag{5}$$ ○

Соотношение 4

● Пусть M — середина отрезка AB и K — середина отрезка CD (рис. 27.2). Тогда $\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{KD} = -\overrightarrow{KC}$. Запишем вектор $\overrightarrow{MK}$ двумя способами:

$$\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK}, \tag{6}$$

$$\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DK}. \tag{7}$$

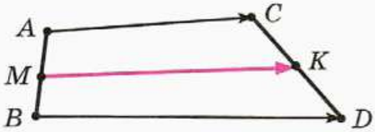


Рис. 27.2

Складывая почленно равенства (5) и (6) и учитывая, что векторы $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{MB}$, а также $\overrightarrow{CK}$ и $\overrightarrow{DK}$ — противоположны (а сумма противоположных векторов равна нулевому вектору), получаем: $2\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$, тогда $\overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right)$. ○

Соотношение 5

Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC и AK — медиана (рис. 27.3). По свойству медиан треугольника $AM : MK = 2 : 1$. Тогда для произвольной точки O по формуле (4) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OK}$, а учитывая, что точка K — середина BC, по формуле (5) $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$. Следовательно,

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right). \qquad (8)$$

Соотношение 6

Это соотношение фиксирует известное свойство: *если два ненулевых вектора перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю; и наоборот, если скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю, то эти векторы перпендикулярны.*

Соотношение 7

Для нахождения длины отрезка AB можно рассмотреть вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и воспользоваться равенством $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, то есть *для нахождения длины отрезка можно найти скалярный квадрат вектора, который изображает этот отрезок*. Если же есть возможность ввести прямоугольную систему координат в пространстве и найти координаты вектора $\overrightarrow{AB} = \vec{a}\ (x_a; y_a; z_a)$, то $AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}$.

Соотношение 8

Если требуется найти $\angle BAC = \varphi$, то можно рассмотреть ненулевые векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ (рис. 27.4) и воспользоваться формулой скалярного произведения векторов $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$. Отсюда

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}. \qquad (9)$$

Заметим, что полученный по формуле (9) угол BAC между векторами может быть как острым ($\cos\varphi > 0$), так и тупым ($\cos\varphi < 0$). Если же требуется определить угол φ между прямыми AB и AC, то он может быть только острым. В этом случае удобно пользоваться формулой

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{a}\vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}. \qquad (10)$$

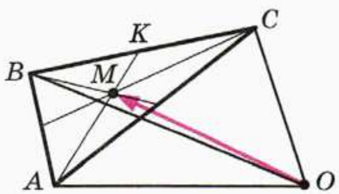


Рис. 27.3

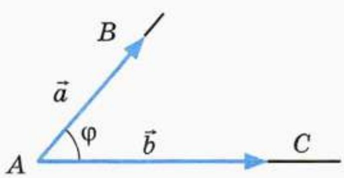


Рис. 27.4

Соотношение 9

Пусть точка D принадлежит плоскости ABC и точка C не принадлежит прямой AB (рис. 27.5). Тогда векторы $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ не коллинеарны. Поскольку вектор $\overrightarrow{CD}$ лежит в плоскости ABC (то есть компланарен к векторам $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$), то он раскладывается по двум неколлинеарным векторам $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ в таком виде:

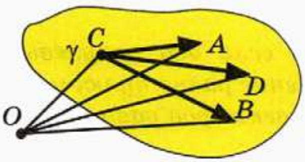


Рис. 27.5

$$\overrightarrow{CD} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}. \qquad (11)$$

И наоборот, если для ненулевых векторов $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ выполняется равенство (11), то векторы $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CD}$ лежат в одной плоскости, следовательно, точка D принадлежит плоскости ABC.

Если O — произвольная точка, то равенство (11) можно записать так:

$$\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \alpha\left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}\right) + \beta\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}\right).$$

Тогда

$$\overrightarrow{OD} = \alpha\,\overrightarrow{OA} + \beta\,\overrightarrow{OB} + (1 - \alpha - \beta)\,\overrightarrow{OC}. \qquad (12)$$

Таким образом, *точка D принадлежит плоскости ABC тогда и только тогда, когда* $\overrightarrow{CD} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$ *или* $\overrightarrow{OD} = \alpha\,\overrightarrow{OA} + \beta\,\overrightarrow{OB} + (1 - \alpha - \beta)\,\overrightarrow{OC}$.

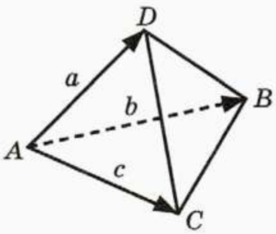
Соотношения, приведенные в таблице, позволяют переводить требование геометрической задачи на векторный язык, что дает возможность выделить некоторые ориентиры для осуществления остальных этапов векторного решения геометрической задачи. Итак, векторное решение геометрических задач можно проводить по следующей схеме.

1. **Перевести требование задачи на векторный язык** (используя соотношения из таблицы 25).
2. **Ввести прямоугольную систему координат** или *выбрать два неколлинеарных вектора на плоскости (или три некомпланарных вектора в пространстве) как базисные.*
3. **Найти координаты векторов, выделенных в пункте 1**, или *выразить эти векторы через базисные.*
4. **Доказать или найти выделенное в пункте 1 соотношение и перевести результат на геометрический язык** (для перевода снова можно воспользоваться соотношениями таблицы 25).

Пример применения этой схемы при использовании векторно-координатного метода решения стереометрической задачи приведен в таблице 25. Приведем пример применения векторного метода для решения геометрических задач.

Примеры решения задач

Задача 1. Докажите, что в пирамиде, все грани которой — правильные треугольники, любые два скрещивающихся ребра перпендикулярны.

Решение	*Комментарий*
▶ 1. Пусть в пирамиде $ABCD$ все грани — правильные треугольники, то есть все ребра равны a и все плоские углы по 60° (рис. 27.6). Чтобы доказать, например, что скрещивающиеся ребра AD и BC перпендикулярны, достаточно доказать, что скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ равно нулю.  **Рис. 27.6** 2. Выберем три некомпланарных вектора как базисные: $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ (длины этих векторов равны a и углы между каждой парой векторов по 60°). 3. Выразим векторы, которые были выделены в пункте 1, через базисные: $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}$. 4. Найдем скалярное произведение векторов: $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\vec{a}(\vec{c}-\vec{b})=\vec{a}\vec{c}-\vec{a}\vec{b}=$ $=a\cdot a\cdot\cos 60°-a\cdot a\cdot\cos 60°=0.$ Но если скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю, то векторы перпендикулярны, следовательно, $AD\perp BC$. ◁	Используем схему решения геометрических задач векторным методом. 1. *Перевести требование задачи на векторный язык* — используя таблицу 25, вспоминаем, что для доказательства перпендикулярности отрезков достаточно доказать, что скалярное произведение соответствующих векторов равно нулю. 2. *Выбрать три некомпланарных вектора как базисные* — чаще всего эти векторы выбирают выходящими из одной точки. 3. *Выразить векторы, выделенные в пункте 1, через базисные.* 4. *Доказать или найти выделенное в пункте 1 соотношение и перевести результат на геометрический язык* (для перевода удобно снова воспользоваться соотношениями табл. 25). Для нахождения полученных скалярных произведений учитываем, что *скалярное произведение векторов равно произведению их длин на косинус угла между ними.*

Задача 2*. Докажите, что плоскость, проходящая через концы трех ребер параллелепипеда, которые выходят из одной вершины, отсекает от диагонали параллелепипеда, проведенной из этой же вершины, отрезок, длина которого равна одной трети длины диагонали.

Решение

▶ Пусть диагональ AC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекает плоскость A_1BD в точке M (рис. 27.7). Поскольку вектор $\overrightarrow{AM}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{AC_1}$, то $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AC_1}$. По правилу параллелепипеда $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$. Отсюда

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AC} = \lambda(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}) =$$
$$= \lambda\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AD} + \lambda\overrightarrow{AA_1}.$$

Но $M \in$ пл. A_1BD, тогда сумма коэффициентов разложения вектора $\overrightarrow{AM}$ по некомпланарным векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$ равна единице, то есть $\lambda + \lambda + \lambda = 1$. Тогда $3\lambda = 1$ и $\lambda = \frac{1}{3}$.

Следовательно, $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AC_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$,

и поэтому $AM = \frac{1}{3}AC_1$. ◁

Комментарий

Требование задачи на векторном языке можно записать так:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}.$$

Выберем в качестве базисных векторов три некомпланарных вектора, которые изображаются ребрами куба, выходящими из одной точки, и запишем векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AC_1}$ через базисные.

Затем используем векторное условие принадлежности точки M плоскости A_1BD (сумма коэффициентов разложения вектора $\overrightarrow{AM}$ по некомпланарным векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$ равна единице).

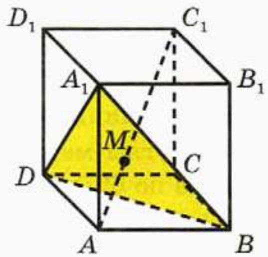


Рис. 27.6

Вопросы для контроля

1. Назовите этапы векторного решения геометрических задач.
2*. Как на векторном языке записать следующие геометрические утверждения:
   1) прямые AB и CD параллельны;
   2) точка C принадлежит прямой AB;

3) точка C делит отрезок AB в отношении $\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}$;

4) точка C — середина отрезка AB;

5) отрезок MK соединяет середины отрезков AB и CD соответственно;

6) M — точка пересечения медиан треугольника ABC;

7) прямые AB и CD перпендикулярны;

8) длина отрезка AB равна a;

9) угол BAC равен φ;

10) точка D принадлежит плоскости ABC?

3*. Обоснуйте векторные соотношения, приведенные в таблице 25.

4. Предложите схему векторного решения геометрической задачи и приведите пример ее использования.

Упражнения

27.1°. Определите вид четырехугольника $ABCD$, если:
1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; 2) $\overrightarrow{AB} = 0,2\overrightarrow{DC}$.

27.2°. Параллелограммы $ABCD$ и A_1BC_1D не лежат в одной плоскости. С помощью векторов докажите, что $AA_1 \parallel CC_1$.

27.3°. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 27.8). С помощью векторов определите угол между скрещивающимися прямыми A_1B и B_1D.

27.4°. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M — середина ребра AA_1, N— такая точка ребра CC_1, что $C_1N : NC = 1 : 2$. Найдите угол между прямой MN и диагональю D_1B.

27.5. Все грани параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — равные ромбы, $AB = a$, $\angle BAD_1 = 60°$. Найдите длины диагоналей AC_1 и BD_1.

27.6. Точки K, L, M, N — соответственно середины ребер AB, BC, CD и AD тетраэдра $ABCD$. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников AML и CNK совпадают.
Указание. Чтобы доказать, что точки E и F совпадают, достаточно доказать, что для некоторой точки O векторы $\overrightarrow{OE}$ и $\overrightarrow{OF}$ совпадают.

27.7. В тетраэдре $ABCD$ ребра AB и CD, BC и AD взаимно перпендикулярны. Докажите, что ребра AC и BD также перпендикулярны.

27.8. С помощью векторов докажите признак перпендикулярности прямой и плоскости.

27.9. С помощью векторов докажите теорему о трех перпендикулярах.

27.10. В основании тетраэдра $ABCD$ лежит прямоугольный треугольник ABC, в котором $\angle ACB = 90°$, $AC = 3$, $BC = 4$. Ребро AD перпендикулярно плоскости ABC и равно 4. Найдите угол между прямыми AC и BD.

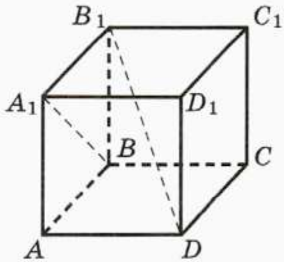


Рис. 27.8

27.11. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми EF и PQ, где E, F, P, Q — середины ребер DD_1, BC, AA_1 и B_1C_1 соответственно.

27.12. Дан тетраэдр $ABCD$ с прямыми плоскими углами при вершине D. Точки M и N — середины ребер AB и CD. Найдите угол между прямыми AN и DM, если $DA = DB = 1$ и $DC = 2$.

27.13. В тетраэдре $ABCD$ ребро AD перпендикулярно грани ABC, $AD = a$, $AB = b$, $\angle BAC = 45°$. Найдите угол между прямыми AC и BD.

27.14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все боковые грани являются квадратами. Найдите угол между прямыми: 1) AC_1 и BA_1; 2) AC_1 и CB_1; 3) BA_1 и CB_1.

27.15*. Найдите косинус угла между прямыми, которые содержат скрещивающиеся медианы двух граней правильного тетраэдра (рис. 27.9).

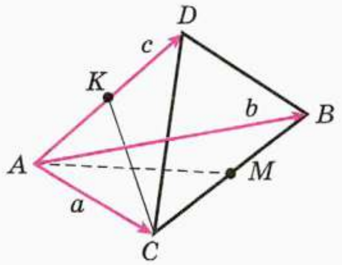


Рис. 27.9

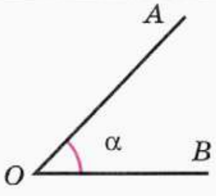
27.16*. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны, точки E, F — середины ребер соответственно SB и SC. Найдите косинус угла между прямыми AE и BF.

Система опорных фактов курса планиметрии

Таблица 1

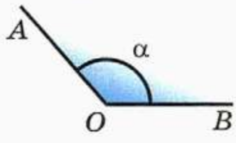
УГЛЫ

Понятие угла

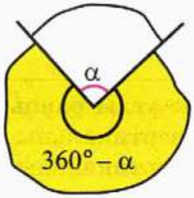


Угол — фигура, которая состоит из точки — вершины угла — и двух лучей, выходящих из этой точки, — сторон угла.

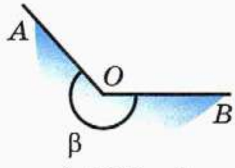
$\angle \boldsymbol{AOB} = \alpha$ ($0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$)



$\angle \boldsymbol{AOB} = \alpha$
($0° \leqslant \alpha \leqslant 360°$)

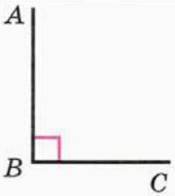
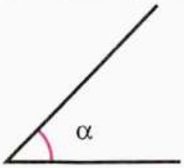
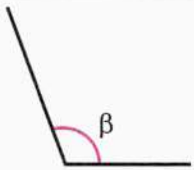


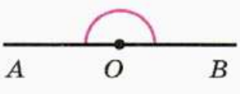
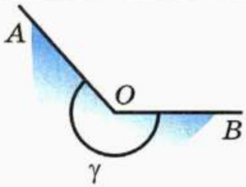
Угол (или плоский угол) — часть плоскости, ограниченная двумя лучами с общим началом.



$\angle \boldsymbol{AOB} = \beta$
($0° \leqslant \beta \leqslant 360°$)

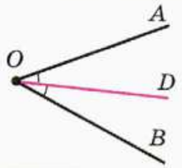
Виды углов

Прямой	Острый	Тупой
 $\angle ABC = 90°$	 $0° < \alpha < 90°$	 $90° < \beta < 180°$

Развернутый	Больше развернутого
Стороны развернутого угла — дополнительные лучи.  $\angle AOB = 180°$	 $180° < \gamma \leqslant 360°$

Окончание табл. 1

Биссектриса угла



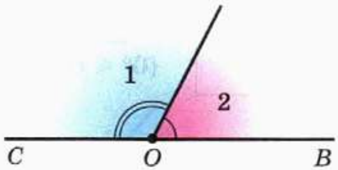
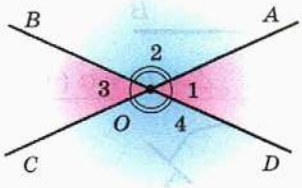
***Биссектриса угла* — это луч, который выходит из вершины угла, лежит в его внутренней области и делит угол на два равных угла.**

Луч *OD* — бисектриса $\angle AOB$, то есть

$$\angle AOD = \angle BOD$$

Смежные и вертикальные углы

(рассматриваются углы меньше развернутого угла)

Смежные углы	Вертикальные углы
	
Сумма смежных углов равна 180° **$\angle 1$ и $\angle 2$ — смежные** *(одна сторона общая, а две другие — дополнительные лучи)* $\angle 1 + \angle 2 = 180°$	**Вертикальные углы равны** $\angle 1$ и $\angle 3$ — вертикальные $\angle 2$ и $\angle 4$ — вертикальные *(стороны одного угла являются дополнительными лучами сторон второго)* $\angle 1 = \angle 3,\ \angle 2 = \angle 4$

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ

$a \parallel b$

Две прямые называют *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Через точку вне прямой можно провести единственную прямую, параллельную данной.

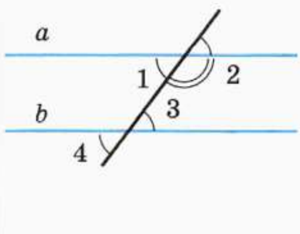
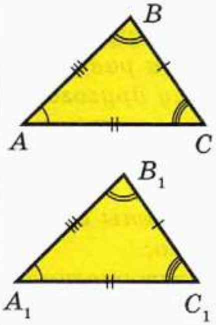
	Признаки параллельности	Свойства
	**Если $\angle 1 = \angle 3$** (внутренние разносторонние углы), **или $\angle 1 = \angle 4$** (соответственные углы), **или $\angle 2 + \angle 3 = 180°$** (сумма внутренних односторонних углов), **то $a \parallel b$.**	**Если $a \parallel b$,** **то $\angle 1 = \angle 3$,** **$\angle 1 = \angle 4$,** **$\angle 2 + \angle 3 = 180°$.**

Таблица 2

РАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКОВ



Две фигуры называют ***равными***, если они движением переводятся одна в другую.

$$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1 \Leftrightarrow \begin{array}{l|l} AB = A_1B_1 & \angle A = \angle A_1 \\ AC = A_1C_1 & \angle B = \angle B_1 \\ BC = B_1C_1 & \angle C = \angle C_1 \end{array}$$

Свойства равных треугольников

1. ***У равных треугольников все соответствующие элементы равны (стороны, углы, медианы, высоты и тому подобное).***
2. ***В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы, а против равных углов лежат равные стороны.***

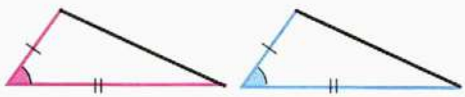
Признаки равенства треугольников

Два треугольника равны, если:

1) ***две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника;***

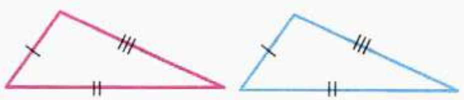
2) ***сторона и прилегающие к ней углы одного треугольника равны соответственно стороне и прилегающим к ней углам другого треугольника;***

3) ***три стороны одного треугольника равны соответственно трем сторонам другого треугольника.***



1. По двум сторонам и углу между ними.

2. По стороне и двум прилегающим к ней углам.



3. По трем сторонам.

Продолжение табл. 2

Признаки равенства прямоугольных треугольников

Два прямоугольных треугольника равны, если:

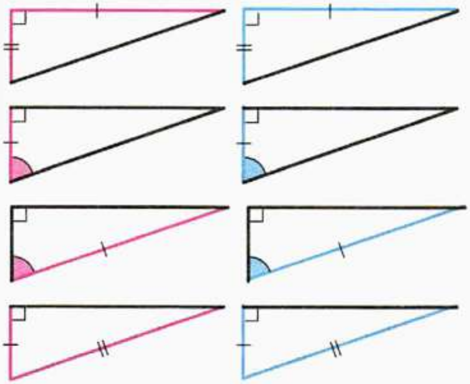
1) ***катеты одного из них равны соответственно катетам другого;***

2) ***катет и прилегающий острый угол одного треугольника равны соответственно катету и прилегающему острому углу другого;***

2′) ***катет и противолежащий острый угол одного треугольника равны соответственно катету и противолежащему острому углу другого;***

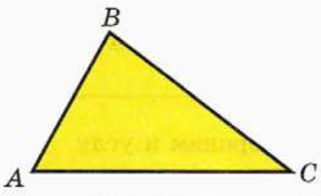
3) ***гипотенуза и прилегающий угол одного треугольника равны соответственно гипотенузе и прилегающему углу другого;***

4) ***гипотенуза и катет одного треугольника равны соответственно гипотенузе и катету другого.***



1. По двум катетам.
2. По катету и острому углу.
3. По гипотенузе и острому углу.
4. По гипотенузе и катету.

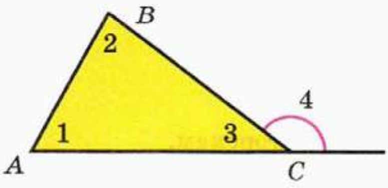
СВОЙСТВА СТОРОН И УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА



$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

Сумма углов треугольника равна 180°.

Внешний угол треугольника



Угол, смежный с внутренним углом треугольника, называют **внешним углом треугольника** при данной вершине.

$\angle 4$ — внешний (при вершине C)

Окончание табл. 2

Свойства

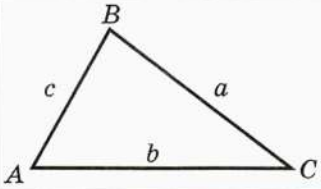
1. **Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.**

$$\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$$

2. Внешний угол треугольника больше любого внутреннего угла, не смежного с ним.

$$\angle 4 > \angle 1,\ \angle 4 > \angle 2$$

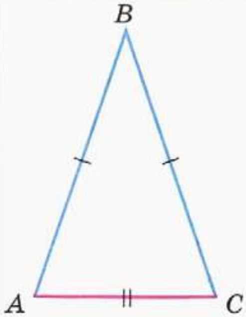
Неравенство треугольника



$$|\,b - c\,| < a < b + c$$

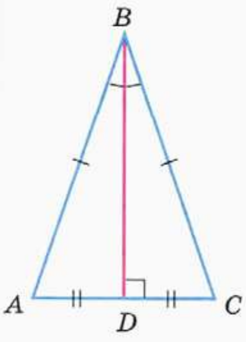
В любом треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон (и больше модуля разницы этих сторон).

Равнобедренный треугольник



Треугольник называют ***равнобедренным***, если у него две стороны равны.

$\triangle ABC$ — равнобедренный ($AB = BC$)
AC — основание, AB и BC — боковые стороны

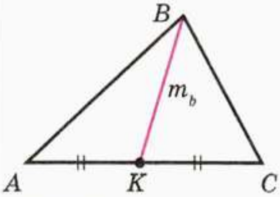


Свойства	Признаки
1. **Если** в $\triangle ABC$ $AB = BC$, **то** $\angle A = \angle C$.	1. **Если** в $\triangle ABC$ $\angle A = \angle C$, **то** $AB = BC$.
2. **Если** $\triangle ABC$ равнобедренный и BD — медиана, **то BD — высота и биссектриса.**	2. **Если** в треугольнике совпадают: а) высота и медиана, или б) высота и биссектриса, или в) медиана и биссектриса, **то треугольник равнобедренный.**
В равнобедренном треугольнике высота, медиана и биссектриса, проведенные к основанию, совпадают.	

Таблица 3

ВЫСОТА, МЕДИАНА, БИССЕКТРИСА И СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА

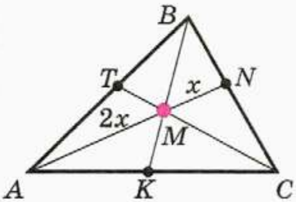
Медиана треугольника



Медиана треугольника — отрезок, который соединяет вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

BK — медиана,
K — середина AC

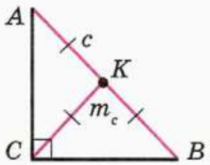
Свойства



1. ***Все три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая каждую медиану делит в отношении 2 : 1, начиная от вершины.***
M — точка пересечения медиан.

$$\frac{AM}{MN}=\frac{BM}{MK}=\frac{CM}{MT}=\frac{2}{1}$$

Точку пересечения медиан треугольника называют центроидом, или центром масс, треугольника.



2. $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$.

3. $m_c=\frac{1}{2}c$ — ***в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы.***

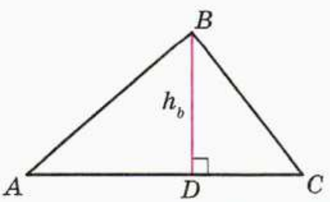
Высота треугольника

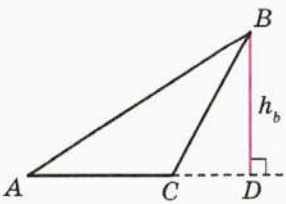
Высота треугольника — перпендикуляр, проведенный из вершины к прямой, которая содержит противоположную сторону треугольника.

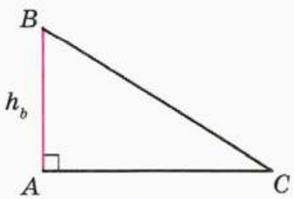
BD — высота	$BD \perp AC$

Для прямоугольного треугольника:

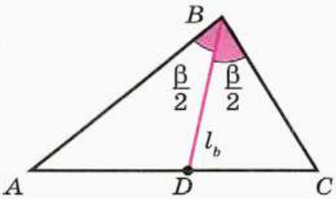
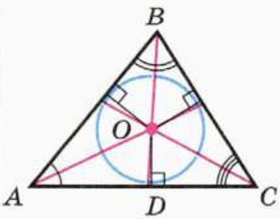
BA — высота ($\angle A = 90°$)





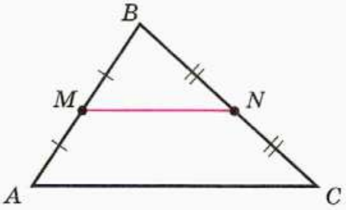


Продолжение табл. 3

Свойства
1. Прямые, которые содержат высоты треугольника, пересекаются в одной точке (*ортоцентр*).
2. $\boxed{h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}}$ *Высоты треугольника обратно пропорциональны его сторонам.* В частности, наибольшая высота треугольника проведена к его наименьшей стороне, а наименьшая сторона — к наибольшей.
Биссектриса треугольника
 ***Биссектриса треугольника*** — отрезок биссектрисы угла треугольника, который соединяет вершину треугольника с точкой на противоположной стороне.
BD — биссектриса треугольника; $\angle ABD = \angle CBD = \frac{1}{2}\angle B$
Свойства
1. $\boxed{\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}}$ ***Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилегающим сторонам треугольника.***
2. **Каждая точка биссектрисы угла** (меньше развернутого) **равноудалена от сторон угла** (то есть равноудалена от прямых, которые содержат стороны этого угла). **И наоборот, если точка лежит внутри угла** (меньше развернутого) **и равноудалена от сторон угла, то она лежит на биссектрисе этого угла.**
3. Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, равноудаленной от трех сторон треугольника, — в центре вписанной окружности (точку пересечения биссектрис треугольника еще называют *инцентром треугольника*).
 O — точка пересечения биссектрис треугольника, центр вписанной окружности
4. $\angle AOC = 90° + \frac{1}{2}\angle B$; $\angle AOB = 90° + \frac{1}{2}\angle C$; $\angle BOC = 90° + \frac{1}{2}\angle A$

Окончание табл. 3

Средняя линия треугольника



Средней линией треугольника называют отрезок, который соединяет середины двух его сторон.

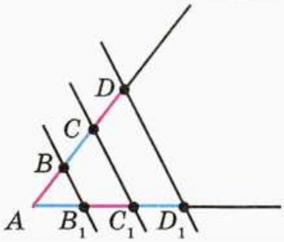
MN — средняя линия
M — середина AB
N — середина BC

Свойства

1. $MN \parallel AC$
2. $MN = \frac{1}{2}AC$

Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

Теорема Фалеса



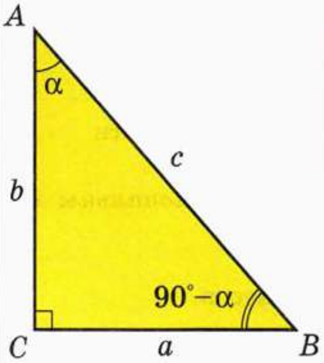
Если $AB = BC = CD$ и $BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$,
то $\boldsymbol{AB_1 = B_1C_1 = C_1D_1}$

Если параллельные прямые, которые пересекают стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на второй его стороне.

Таблица 4

СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Соотношение между элементами прямоугольного треугольника



$\angle C = 90°$; a, b — катеты, c — гипотенуза; $\angle A = \alpha$

$a^2 + b^2 = c^2$ — **теорема Пифагора**

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

$\angle B = 90° - \alpha$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c};\quad \cos\alpha = \frac{b}{c};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b};\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$$

В прямоугольном треугольнике:

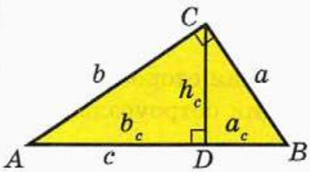
синус угла α — отношение противолежащего катета к гипотенузе;

косинус угла α — отношение прилежащего катета к гипотенузе;

тангенс угла α — отношение противолежащего катета к прилежащему;

котангенс угла α — отношение прилежащего катета к противолежащему.

$$a = c\sin\alpha$$
$$b = c\cos\alpha$$
$$a = b\operatorname{tg}\alpha$$



CD — высота

$$h_c^2 = a_c b_c$$
$$a^2 = c a_c$$
$$b^2 = c b_c$$

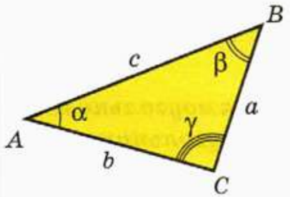
Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу.

$$\triangle ACD \sim \triangle ABC$$
$$\triangle CBD \sim \triangle ABC$$
$$\triangle ACD \sim \triangle CBD$$

Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу.

Окончание табл. 4

Соотношение между сторонами и углами в произвольном треугольнике



Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

R — радиус описанной окружности

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

Теорема косинусов

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.

Следствия из теоремы косинусов

1. **Если** $c^2 = a^2 + b^2$,
   то $\gamma = 90°$, то есть треугольник прямоугольный (теорема, обратная к теореме Пифагора).
2. **Если** $c^2 < a^2 + b^2$,
   то угол γ — острый ($\cos\gamma > 0$); если c — наибольшая сторона, то треугольник остроугольный.
3. **Если** $c^2 > a^2 + b^2$,
   то угол γ — тупой ($\cos\gamma < 0$).
4. В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, против большего угла лежит бо́льшая сторона:

$$a > b \Leftrightarrow \alpha > \beta.$$

Таблица 5

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФИГУР — ДВИЖЕНИЕ

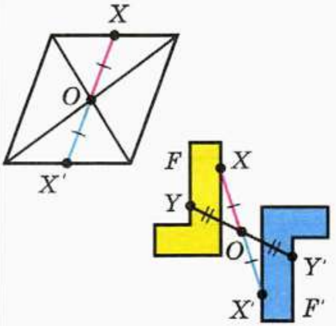
Движение — это преобразование, при котором сохраняются расстояния между точками фигуры.

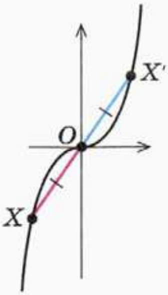
$$X'Y' = XY$$

Во время движения сохраняются углы между лучами.

Каждое из преобразований: симметрия относительно точки, симметрия относительно прямой, параллельный перенос, поворот — является движением.

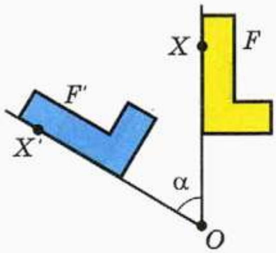
Симметрия относительно точки





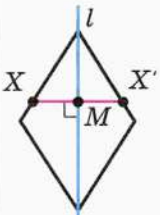
$$OX' = OX$$

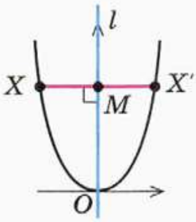
Поворот

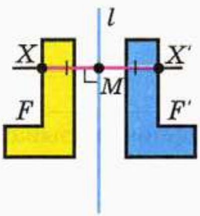


$OX' = OX$ | $\angle XOX' = \alpha$

Симметрия относительно прямой



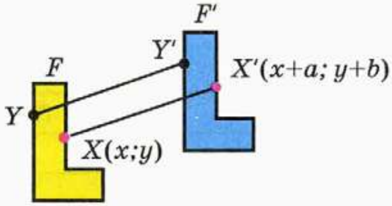




$$XX' \perp l$$

$$XM = MX'$$

Параллельный перенос



Точки смещаются по параллельным прямым (или совпадающим прямым) на одно и то же расстояние.

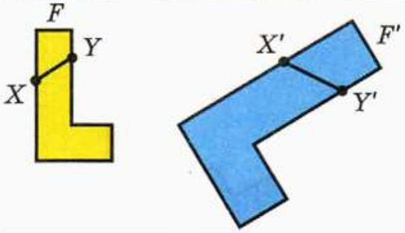
Таблица 6

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОДОБИЯ

Определение и свойства

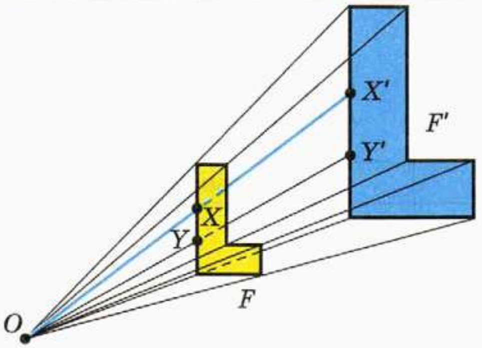
Преобразование, при котором расстояния между точками изменяются в одно и то же количество раз, называют ***преобразованием подобия***.

1. Преобразование подобия сохраняет углы между лучами.
2. У подобных фигур соответствующие углы равны, а соответствующие отрезки — пропорциональны.



$\frac{X'Y'}{XY} = k$ — коэффициент подобия

Гомотетия



Если точка X отображается в точку X', то это значит:

1) точка X' лежит на луче OX;

2) $\frac{OX'}{OX} = k$.

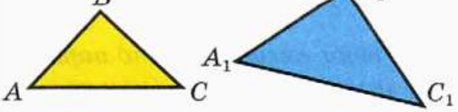
Свойство

При гомотетии отрезок отображается в параллельный ему отрезок (или в отрезок, который лежит с заданным отрезком на одной прямой).

$X'Y' \parallel XY$

Подобие треугольников

Определение



Два треугольника называют ***подобными***, если они переводятся один в другой преобразованием подобия.

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

Окончание табл. 6

Свойство

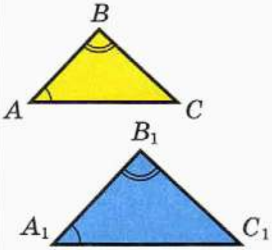
1. У подобных треугольников соответствующие углы равны, а соответствующие отрезки — пропорциональны.

$\angle A = \angle A_1;\ \angle B = \angle B_1;\ \angle C = \angle C_1$	$\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{h}{h_1} = \dfrac{R}{R_1} = \ldots = k$

2. $\dfrac{P}{P_1} = \dfrac{AB}{A_1B_1} = k$ Отношение периметров подобных треугольников равно отношению соответствующих сторон и равно коэффициенту подобия.

3. $\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = \left(\dfrac{AB}{A_1B_1}\right)^2 = k^2$ Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

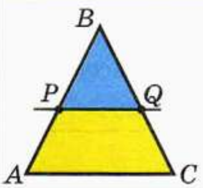
Признаки подобия треугольников



1. **Если** $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, **то** $\Delta\ ABC \sim \Delta\ A_1B_1C_1$ — по двум равным углам

2. **Если** $\angle A = \angle A_1$, $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$, **то** $\Delta\ ABC \sim \Delta\ A_1B_1C_1$ — по двум пропорциональным сторонам и углу между ними

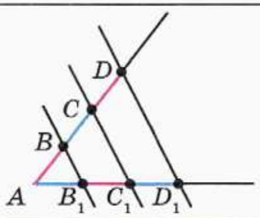
3. **Если** $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$, **то** $\Delta\ ABC \sim \Delta\ A_1B_1C_1$ — по трем пропорциональным сторонам



Если $PQ \parallel AC$, **то** $\Delta\ PBQ \sim \Delta\ ABC$

Прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает треугольник, подобный данному.

Теорема о пропорциональных отрезках

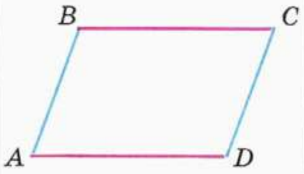


Если $BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$, **то** $AB : BC : CD = AB_1 : B_1C_1 : C_1D_1$

Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на сторонах угла пропорциональные отрезки.

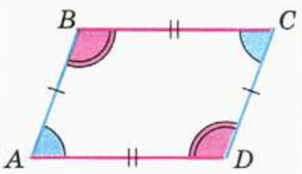
Таблица 7

ПАРАЛЛЕЛОГРАММ И ЕГО ВИДЫ



Четырехугольник, у которого противолежащие стороны попарно параллельны, называют ***параллелограммом***.

$ABCD$ — параллелограмм $\Leftrightarrow$ $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$



Свойство

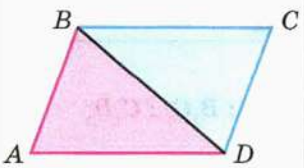
1. **Если** $ABCD$ — параллелограмм,
то $\boldsymbol{AB = DC}$; $\boldsymbol{AD = BC}$;
$\boldsymbol{\angle A = \angle C}$; $\boldsymbol{\angle B = \angle D}$.

У параллелограмма противолежащие стороны равны, противолежащие углы также равны.

Признаки

1. **Если** $ABCD$ — четырехугольник
и $BC \parallel AD$, $BC = AD$,
то $\boldsymbol{ABCD}$ **— параллелограмм.**
Если в четырехугольнике две стороны параллельны и равны, то этот четырехугольник — параллелограмм.

2. **Если** $ABCD$ — четырехугольник
и $AB = DC$, $AD = BC$,
то $\boldsymbol{ABCD}$ **— параллелограмм.**
Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырехугольник — параллелограмм.

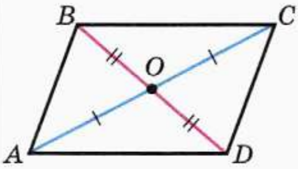


Свойство

2. **Если** $ABCD$ — параллелограмм
и BD — диагональ,
то $\boldsymbol{\triangle ABD = \triangle CDB}$.

Диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника.

Продолжение табл. 7



Свойство

3. Если $ABCD$ — параллелограмм,
AC и BD — диагонали,
то $\boldsymbol{AO = OC; BO = OD}$.

Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

Признаки

3. Если $ABCD$ — четырехугольник
и $AO = OC$, $BO = OD$,
то $\boldsymbol{ABCD}$ **— параллелограмм.**

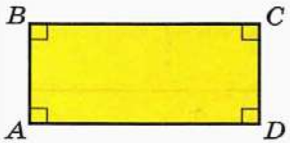
Если диагонали четырехугольника в точке пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм.

Свойство

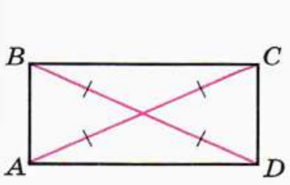
4. $\boxed{AC^2 + BD^2 = 2\,(AD^2 + AB^2)}$

Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

Прямоугольник



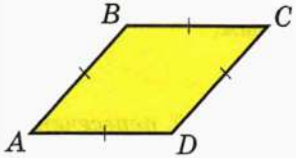
Параллелограмм, у которого все углы прямые, называют ***прямоугольником***.



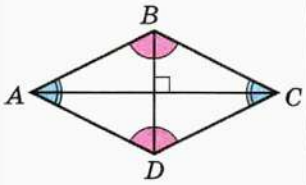
Свойства	Признаки
1. Все свойства параллелограмма.	**1. Если** $ABCD$ — параллелограмм и $\angle A = 90°$, **то** $\boldsymbol{ABCD}$ **— прямоугольник.**
2. Если $ABCD$ — прямоугольник, **то** $\boldsymbol{AC = BD}$. Диагонали прямоугольника равны.	**2. Если** $ABCD$ — параллелограмм и $AC = BD$, **то** $\boldsymbol{ABCD}$ **— прямоугольник.**

Окончание табл. 7

Ромб

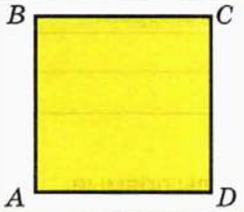


Параллелограмм, у которого все стороны равны, называют ***ромбом***.



Свойства	Признаки
1. Все свойства параллелограмма. 2. **Если** $ABCD$ — ромб, AC и BD — диагонали, **то: а)** $AC \perp BD$ — *диагонали перпендикулярны*; **б) диагонали являются биссектрисами углов ромба.**	**Если** $ABCD$ — четырехугольник и $AB = AD = BC = CD$, **то** $ABCD$ **— ромб.** *Если у четырехугольника все стороны равны, то этот четырехугольник — ромб.*

Квадрат



Прямоугольник, у которого все стороны равны, называют ***квадратом***.

Другое определение. Ромб, у которого все углы прямые, называют ***квадратом***.

Свойства

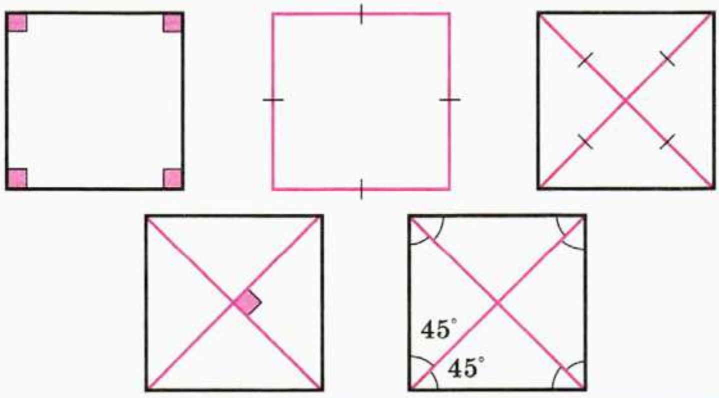
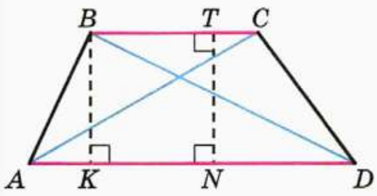


Таблица 8

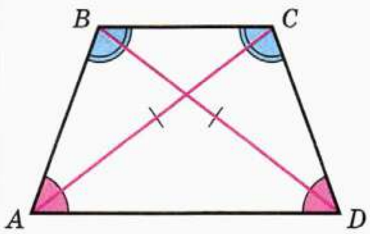
ТРАПЕЦИЯ



Четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны, называют ***трапецией***.

$ABCD$ — трапеция, AD и BC — основания, AB и CD — боковые стороны, AC и BD — диагонали, BK и TN — высоты.

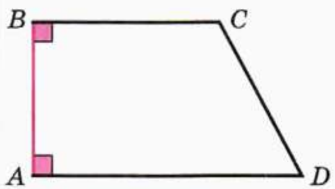
Частные случаи трапеции



Равнобедренная трапеция — трапеция с равными боковыми сторонами ($AB = CD$).

Свойство

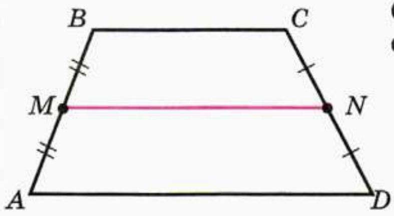
$\angle A = \angle D$	Углы при основании равны.
$AC = BD$	Диагонали равны.



Прямоугольная трапеция — трапеция, у которой одна боковая сторона перпендикулярна основаниям.

$$h_{\text{прямоуг. трапеции}} = AB$$

Средняя линия трапеции



Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называют ***средней линией трапеции***.

MN — средняя линия

Свойства

$MN \parallel AD$
$MN \parallel BC$

$$MN = \frac{AD + BC}{2}$$

Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Окончание табл. 8

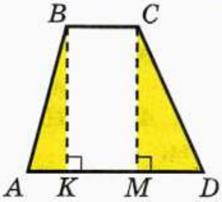
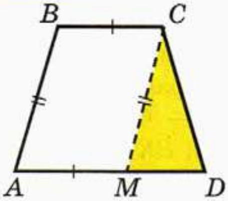
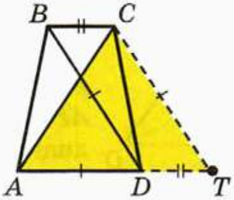
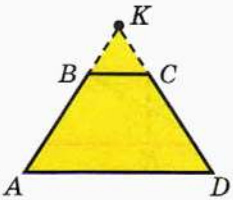
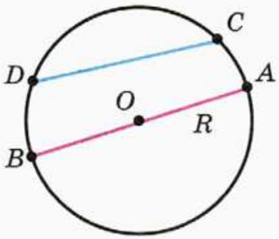
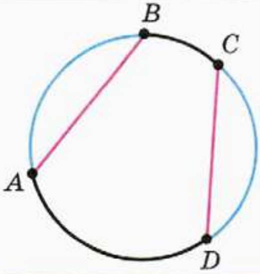
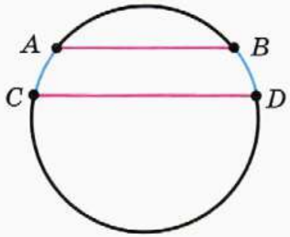
Типичные дополнительные построения для трапеции (изображены штриховыми линиями)			
 	 	 	
$BK \perp AD$ $CM \perp AD$	$CM \parallel BA$	$CT \parallel BD$ T на продолжении AD	AB и DC продолжить до пересечения

Таблица 9

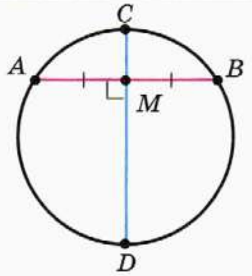
ОКРУЖНОСТЬ, ХОРДЫ, ДУГИ, КАСАТЕЛЬНЫЕ И СЕКУЩИЕ	
 	***Окружность*** — фигура, состоящая из всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки (центра). O — центр окружности; OA — радиус; AB — диаметр; CD — хорда (отрезок, соединяющий две точки окружности). Наибольшая хорда — диаметр
Свойства дуг и хорд	
 	**Если** $\cup AB = \cup CD$, **то** $AB = CD$. *Равные дуги стягивают равные хорды.*
	Если $AB = CD$, **то** $\cup AB = \cup CD$. *Равные хорды стягивают равные дуги.*

Продолжение табл. 9



Если $AB \parallel CD$,
то $\cup AC = \cup BD$.

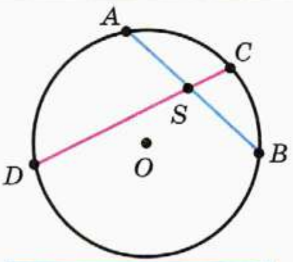
Параллельные хорды отсекают на окружности равные дуги.



Если CD — диаметр, AB — хорда, которая отличается от диаметра,

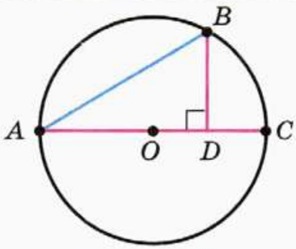
$CD \perp AB$, **то** $AM = MB$ (и $\cup AC = \cup CB$).	$AM = MB$, **то** $CD \perp AB$.

Диаметр, перпендикулярный к хорде, делит эту хорду (и дуги, которые она стягивает) пополам, и наоборот.



$\boxed{AS \cdot SB = CS \cdot SD}$,

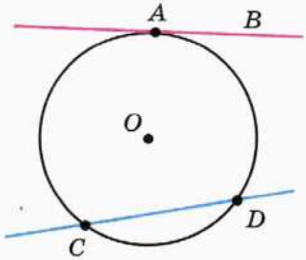
где S — точка пересечения хорд AB и CD.



Если AB — хорда, AC — диаметр, $BD \perp AC$,

то $\boxed{\begin{array}{c} AB^2 = AD \cdot AC \\ BD^2 = AD \cdot DC \end{array}}$

Свойства касательных и секущих



Прямую, имеющую с окружностью только одну общую точку, называют ***касательной к окружности***.

AB — **касательная**; A — точка касания; CD — **секущая** (прямая, имеющая с окружностью две общие точки).

Окончание табл. 9

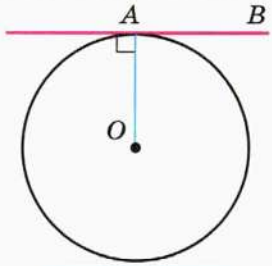
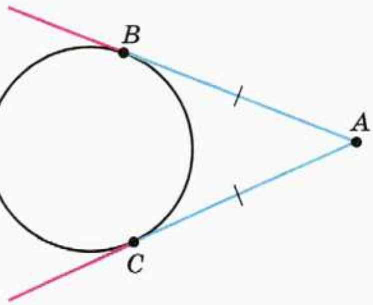
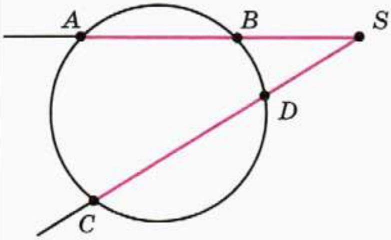
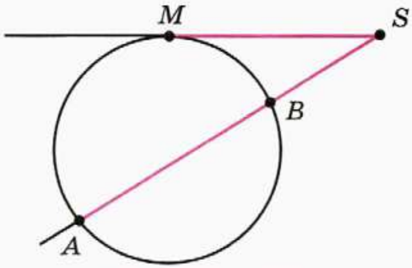
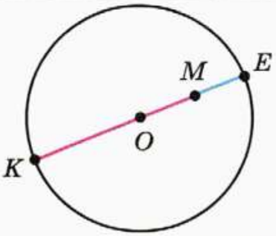
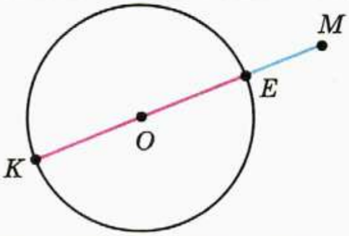
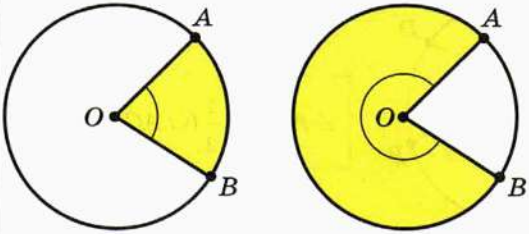
 $\boxed{OA \perp AB}$ *Касательная перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.*	$\boxed{AB = AC}$ (B и C — точки касания)  *Если из одной точки к одной окружности проведены две касательные, то отрезки касательных равны.*
 $\boxed{SA \cdot SB = SC \cdot SD}$, где SA и SC — две секущие, которые пересекают окружность соответственно в точках A, B, C, D.	 $\boxed{SA \cdot SB = SM^2}$, где SM — касательная, M — точка касания; SA — секущая, пересекающая окружность в точках A и B.
	
Наибольшее и наименьшее расстояния от заданной точки до точек окружности измеряют по прямой, которая проходит через заданную точку и центр окружности. *ME — наименьшее расстояние от точки M до точек окружности;* *MK — наибольшее расстояние от точки M до точек окружности.*	

Таблица 10

УГЛЫ В ОКРУЖНОСТИ

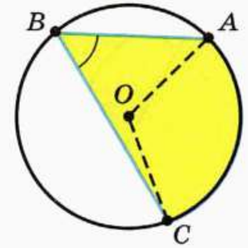


$\angle AOB$ — центральный угол

(его вершина совпадает с центром окружности)

$\angle AOB = \cup AB$

Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается.

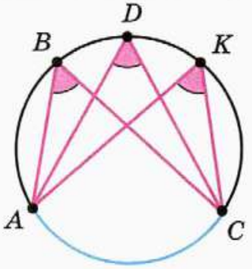


$\angle ABC$ — вписанный угол

$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC = \frac{1}{2} \angle AOC$

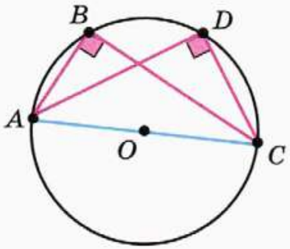
Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается, и равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.

Свойства вписанных углов



$\angle ABC = \angle ADC = \angle AKC$

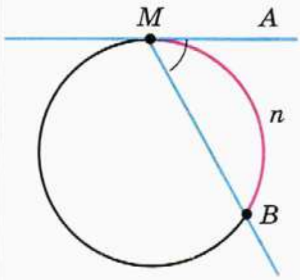
Вписанные углы, которые опираются на одну и ту же дугу, равны.



$\angle ABC = \angle ADC = 90°$

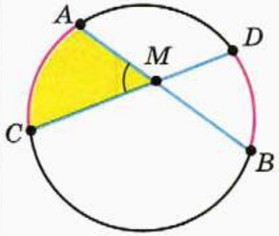
Вписанный угол, который опирается на диаметр, равен 90°.

Продолжение табл. 10



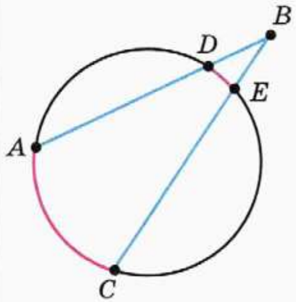
MA — *касательная*,
MB — *секущая*.

$$\angle AMB = \frac{1}{2} \cup MnB$$



AB и *CD* — *хорды*

$$\angle AMC = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup DB)$$

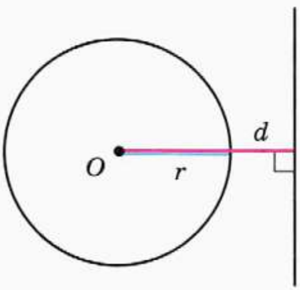


BA и *BC* — *секущие*

$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\cup AC - \cup DE)$$

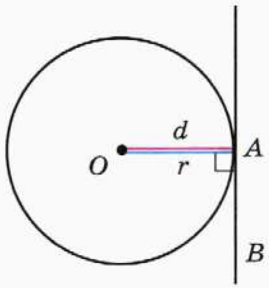
ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ

Пусть d — расстояние от центра окружности до прямой, r — радиус окружности.



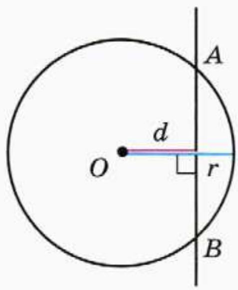
$d > r$

Общих точек нет.



$d = r$

Одна общая точка (прямая *AB* — касательная).



$d < r$

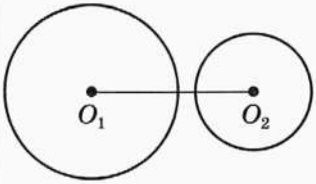
Две общие точки (прямая *AB* пересекает окружность).

Продолжение табл. 10

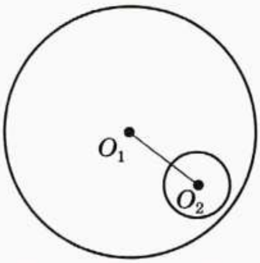
ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ОКРУЖНОСТЕЙ

Пусть $O_1O_2 = d$ — расстояние между центрами окружностей, r_1 и r_2 — радиусы окружностей ($r_1 > r_2$).

Общих точек нет

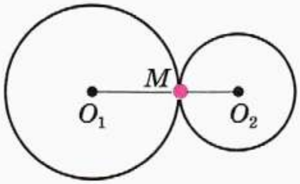


$d > r_1 + r_2$

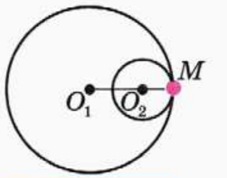


$0 < d < r_1 - r_2$

Одна общая точка (окружности касаются в этой точке)



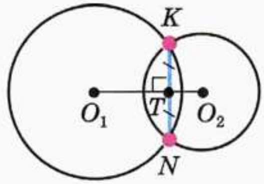
$d = r_1 + r_2$ — внешнее касание



$d = r_1 - r_2$ — внутреннее касание

$M \in O_1O_2$ — точка касания лежит на прямой, проходящей через центры окружностей.

Две общие точки (окружности пересекаются)

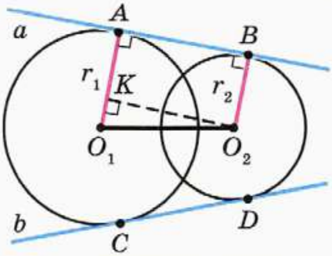


$r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$

$KN \perp O_1O_2$
$KT = TN$

ОБЩИЕ КАСАТЕЛЬНЫЕ ДВУХ ОКРУЖНОСТЕЙ

1. Окружности пересекаются ($|r_1 - r_2| < O_1O_2 < r_1 + r_2$)



Две общие касательные a и b

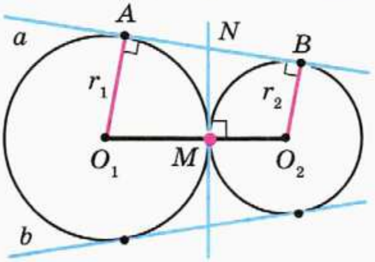
$AB = CD$

Если $r_1 = r_2$,	Если $r_1 \neq r_2$,
то $a \parallel b$.	то a и b пересекаются на прямой O_1O_2.

Дополнительное построение: $O_2K \perp O_1A$

Окончание табл. 10

2. Окружности касаются (M — точка касания)



Внешнее касание
$(O_1O_2 = r_1 + r_2)$

Три общие касательные: MN; a; b

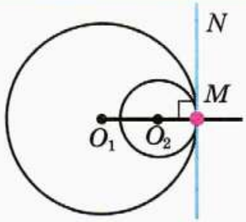
$MN \perp O_1O_2$

Если $r_1 = r_2$, то $a \parallel b$.

Если $r_1 \neq r_2$, то a и b пересекаются на прямой O_1O_2.

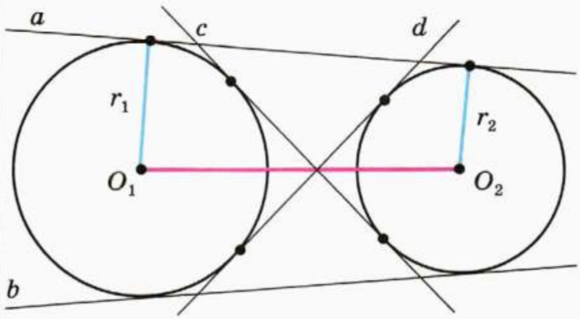
Внутреннее касание
$(O_1O_2 = |r_1 - r_2|)$

Одна общая касательная — MN



$MN \perp O_1O_2$

3. Одна окружность лежит вне другой $(O_1O_2 > r_1 + r_2)$



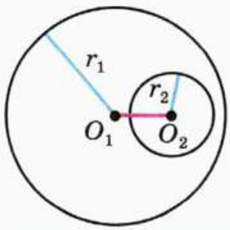
Четыре общие касательные: a; b; c; d

c и d пересекаются на отрезке O_1O_2

Если $r_1 = r_2$, то $a \parallel b$.

Если $r_1 \neq r_2$, то a и b пересекаются на прямой O_1O_2.

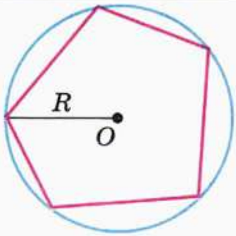
4. Одна окружность лежит внутри другой $(O_1O_2 < |r_1 - r_2|)$



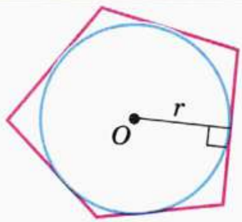
Общих касательных нет

Таблица 11

ВПИСАННЫЙ И ОПИСАННЫЙ МНОГОУГОЛЬНИКИ (ОПИСАННАЯ И ВПИСАННАЯ ОКРУЖНОСТИ)



Вписанный многоугольник — все вершины лежат на окружности (окружность описана около многоугольника).



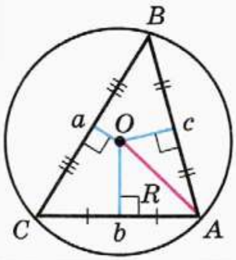
Описанный многоугольник — все стороны являются касательными к окружности (окружность вписана в многоугольник).

$$\boxed{S_{\text{опис}} = \frac{Pr}{2}},$$

где P — периметр, r — радиус вписанной окружности. Центр O — точка пересечения биссектрис внутренних углов многоугольника.

1. ОКРУЖНОСТЬ, ОПИСАННАЯ ОКОЛО ТРЕУГОЛЬНИКА, И ОКРУЖНОСТЬ, ВПИСАННАЯ В ТРЕУГОЛЬНИК

Описанная окружность



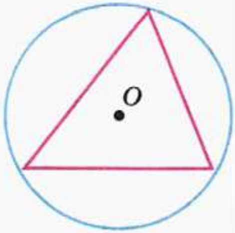
Центр O — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

$$OA = OB = OC = R$$

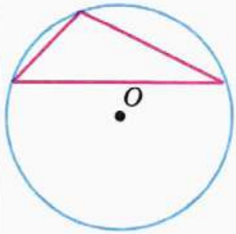
$$\boxed{R = \frac{a}{2\sin A}} \qquad \boxed{R = \frac{abc}{4S}}$$

Положение центра описанной окружности

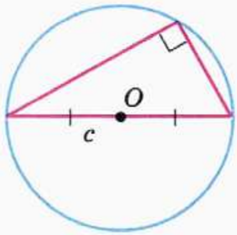
Остроугольный треугольник



Тупоугольный треугольник



Прямоугольный треугольник

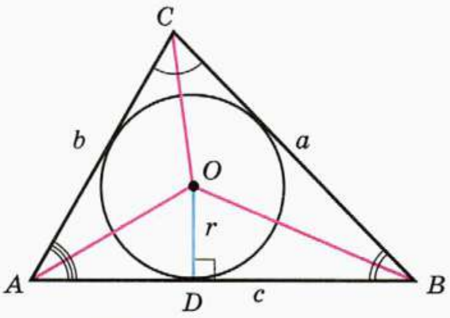


Центр O — середина гипотенузы.

$$\boxed{R = \frac{c}{2}}$$

Продолжение табл. 11

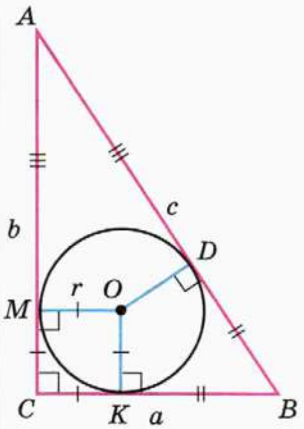
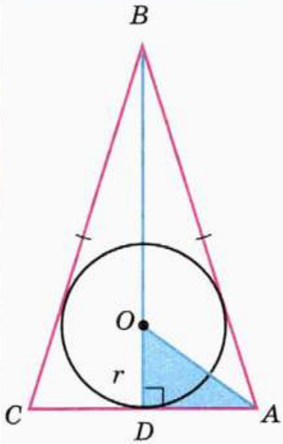
Вписанная окружность



Центр O — точка пересечения биссектрис внутренних углов треугольника.

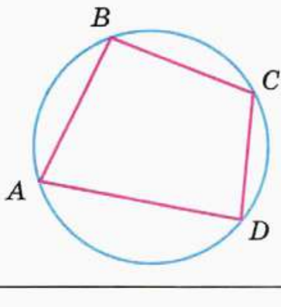
$OD = r$; $OD \perp AB$

$$\boxed{r = \frac{2S_{\Delta\,ABC}}{a+b+c}}$$

В прямоугольном треугольнике	**В равнобедренном треугольнике**
 $\boxed{r = \frac{a+b-c}{2}}$ $OK = OM =$ $= OD = r$ ($OKCM$ — квадрат)	 $AB = BC$; BD — высота, медиана и биссектриса; AO — биссектриса угла A. $\boxed{OD = r}$

2. ВПИСАННЫЙ И ОПИСАННЫЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

Вписанный четырехугольник



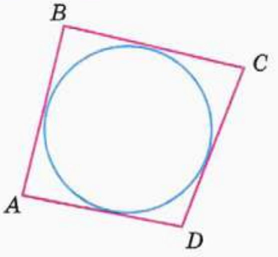
$$\boxed{\begin{gathered}\angle A + \angle C = 180^\circ,\\ \angle B + \angle D = 180^\circ\end{gathered}}$$

(сумма противоположных углов равна 180°)

И наоборот: *если у четырехугольника сумма противоположных углов равна 180°, то около него можно описать окружность.*

Окончание табл. 11

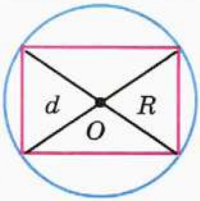
Описанный четырехугольник



$AB + CD = BC + AD$
(суммы длин противоположных сторон равны)

И наоборот: *если у выпуклого четырехугольника суммы длин противоположных сторон равны, то в него можно вписать окружность.*

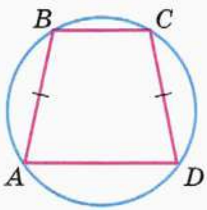
Прямоугольник



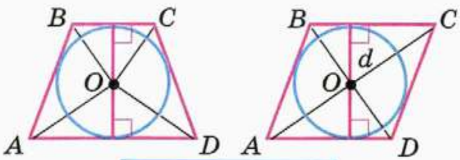
$R = \frac{1}{2}d$

1. Если параллелограмм вписан в окружность, то он — прямоугольник.
2. Центр окружности, описанной около прямоугольника, — точка пересечения его диагоналей.

Трапеция и ромб



Если $ABCD$ — вписанная трапеция, **то** $\boldsymbol{AB = CD}$.

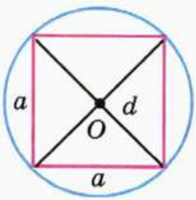


$d_{\text{впис. окруж}} = h$

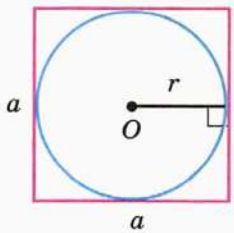
O — точка пересечения биссектрис внутренних углов.

$\angle AOB = \angle COD = 90°$

Квадрат



$R_{\text{опис}} = \frac{1}{2}d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

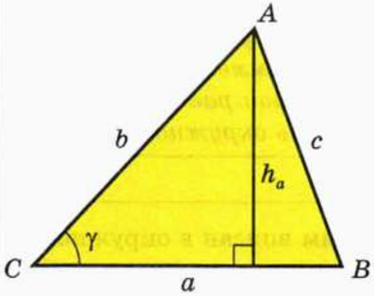


$r_{\text{впис}} = \frac{1}{2}a$

Таблица 12

ПЛОЩАДИ ФИГУР

1. ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКОВ



$$S=\frac{1}{2}ah_a$$

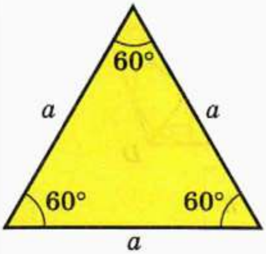
$$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ — формула Герона $\left(p=\frac{a+b+c}{2}\right)$.

$$S=\frac{abc}{4R}$$, где R — радиус описанной окружности.

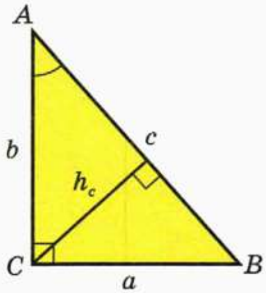
$$S=rp$$, где r — радиус вписанной окружности.

Правильный треугольник



$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Прямоугольный треугольник

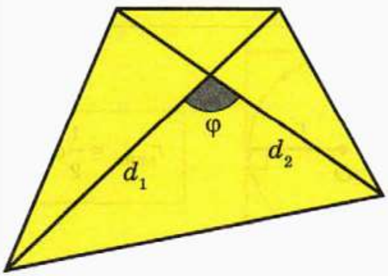


$$S=\frac{1}{2}ab$$

$$S=\frac{1}{2}ch_c$$

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A$$

2. ПЛОЩАДИ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ

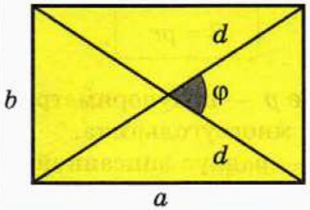


$$S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$$

Площадь четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними.

Продолжение табл. 12

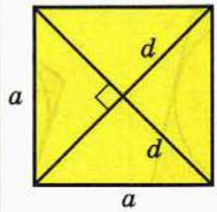
Прямоугольник



$S = ab$

$S = \frac{1}{2}d^2 \sin\varphi$

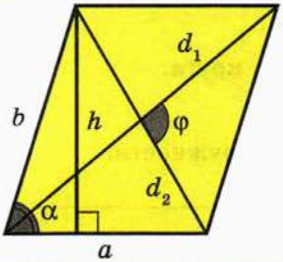
Квадрат



$S = a^2$

$S = \frac{1}{2}d^2$

Параллелограмм

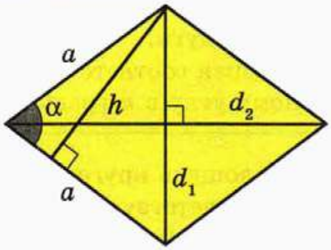


$S = ah$

$S = ab\sin\alpha$

$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$

Ромб

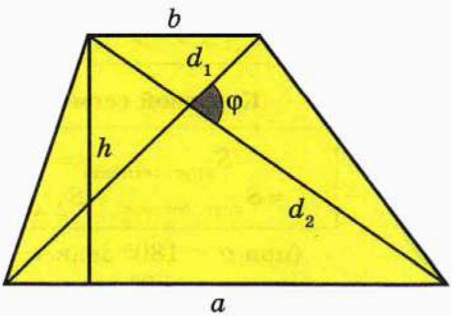


$S = ah$

$S = a^2 \sin\alpha$

$S = \frac{1}{2}d_1 d_2$

Трапеция



$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$

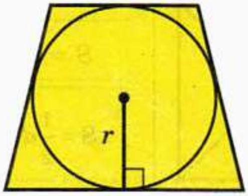
$S = mh$,

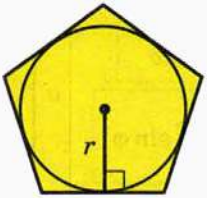
где m — длина средней линии.

$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$

Окончание табл. 12

Площадь описанного многоугольника

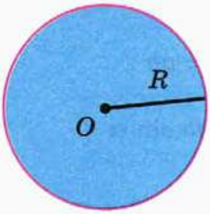




$\boxed{S = pr}$,

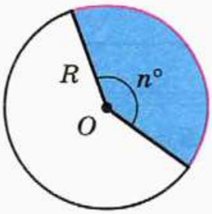
где p — полупериметр многоугольника, r — радиус вписанной окружности.

3. ПЛОЩАДЬ КРУГА И ЕГО ЧАСТЕЙ. ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ЕГО ЧАСТЕЙ



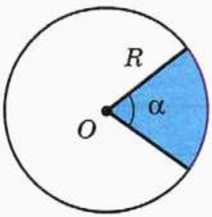
$\boxed{S = \pi R^2}$ — площадь **круга.**

$\boxed{C = 2\pi R}$ — длина **окружности.**



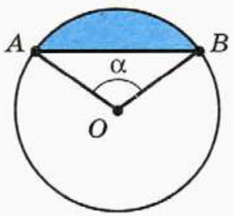
$\boxed{S = \dfrac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot n^\circ}$ — площадь **кругового сектора,** соответствующего центральному углу в n градусов.

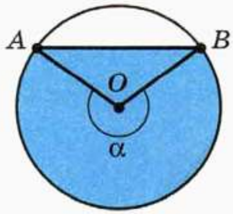
$\boxed{l = \dfrac{2\pi R}{360^\circ} \cdot n^\circ}$ — длина **дуги,** которая соответствует центральному углу в n градусов.



$\boxed{S = \dfrac{\pi R^2}{2\pi} \cdot \alpha = \dfrac{R^2 \alpha}{2}}$ — площадь **кругового сектора,** соответствующего центральному углу в α радиан.

$\boxed{l = \dfrac{2\pi R}{2\pi} \cdot \alpha = R\alpha}$ — длина **дуги,** которая соответствует центральному углу в α радиан.





Круговой сегмент

$$\boxed{S_{\text{круг. сегмента}} = S_{\text{круг. сектора}} \mp S_{\Delta AOB}}$$

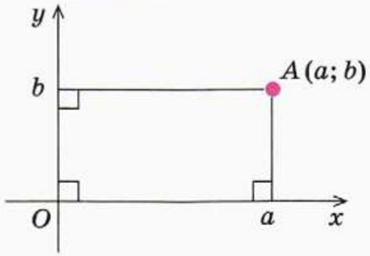
(при $\alpha < 180^\circ$ знак «−», при $\alpha > 180^\circ$ знак «+»)

Таблица 13

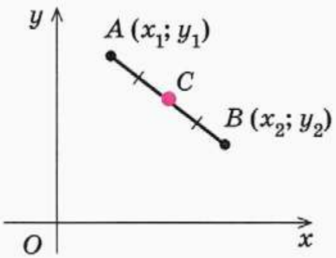
ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ

1. ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ

Понятие координат точки



Формулы



Координаты середины отрезка

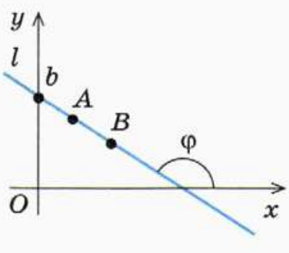
C — середина AB

$$\boxed{x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}} \quad \boxed{y_c = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$

Расстояние между точками

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Уравнение прямой



В общем виде $\boxed{ax + by + c = 0}$

С угловым коэффициентом (при $b \neq 0$)

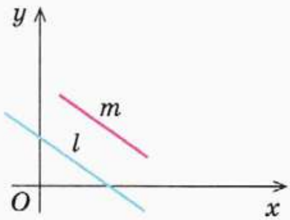
$\boxed{y = kx + b}$ — прямая l

$\boxed{k = \operatorname{tg} \varphi}$ — угловой коэффициент.

Для прямой AB: $\boxed{k_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$

Продолжение табл. 13

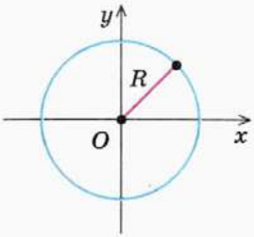
Условие параллельности прямых



$$\boxed{\begin{aligned} y &= k_1x + b_1 \\ y &= k_2x + b_2 \end{aligned}}\quad \begin{aligned} &\text{— прямая } l \\ &\text{— прямая } m \end{aligned}$$

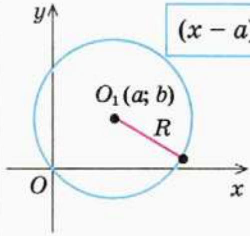
$$l \parallel m \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$$

Уравнение окружности



$$x^2 + y^2 = R^2$$

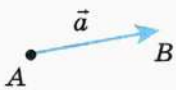
Центр окружности — начало координат.



$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Центр окружности — точка O_1 $(a;\ b)$.

2. ВЕКТОРЫ



Вектором называют направленный отрезок.

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$$

Длину этого отрезка называют длиной ***(модулем, абсолютной величиной) вектора.***

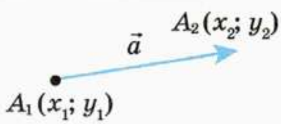
$$|\vec{a}| = AB$$

Равные векторы

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |\vec{a}| = |\vec{b}| \\ \text{векторы } \vec{a} \text{ и } \vec{b} \text{ одинаково направлены} \end{cases}$$

Координаты вектора



$$\vec{a}\,(a_1; a_2),$$

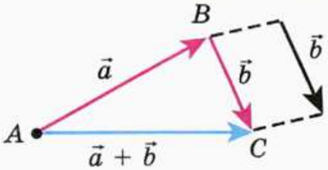
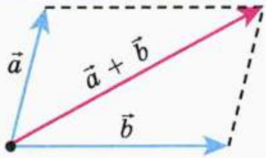
где $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Продолжение табл. 13

3. ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

Сумма векторов

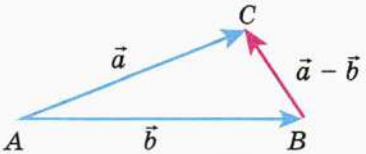
Правило треугольника	Правило параллелограмма
	

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

В координатах

$$\vec{a}\,(a_1;a_2)+\vec{b}\,(b_1;b_2)=\vec{c}\,(a_1+b_1;a_2+b_2)$$

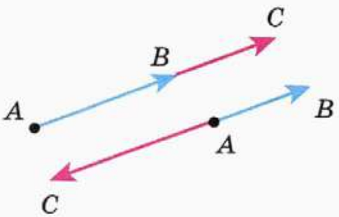
Разница векторов



В координатах

$$\vec{a}\,(a_1;a_2)-\vec{b}\,(b_1;b_2)=\vec{c}\,(a_1-b_1;a_2-b_2)$$

Умножение вектора на число



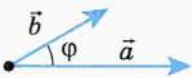
$$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$$ $$|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$$

При $\lambda>0$ вектор $\lambda\vec{a}$ и вектор $\vec{a}$ одинаково направлены $(\vec{a}\uparrow\vec{0})$.
При $\lambda<0$ вектор $\lambda\vec{a}$ и вектор $\vec{a}$ противоположно направлены $(\vec{a}\uparrow\vec{0})$.

В координатах

$$\lambda\cdot\overline{(a_1;a_2)}=\overline{(\lambda a_1;\lambda a_2)}$$

Скалярное произведение векторов



$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$$

Скалярное произведение векторов равно произведению их длин на косинус угла между ними.

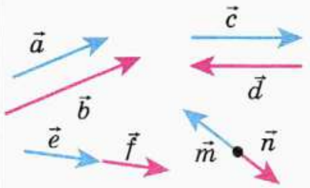
В координатах

$\vec{a}\,(a_1;a_2)$; $\vec{b}\,(b_1;b_2)$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2$$

Окончание табл. 13

4. КОЛЛИНЕАРНЫЕ ВЕКТОРЫ



Ненулевые векторы называют ***коллинеарными***, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

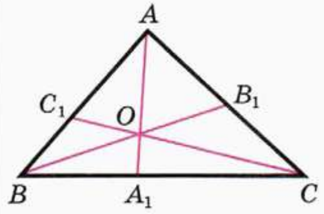
Коллинеарные векторы или одинаково направлены, или противоположно направлены.

$\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны $\Leftrightarrow$ $\vec{b} = \lambda\vec{a} \Leftrightarrow \dfrac{b_1}{a_1} = \dfrac{b_2}{a_2}$. (соответствующие координаты пропорциональны)

Таблица 14

НЕКОТОРЫЕ ВЫДАЮЩИЕСЯ ТЕОРЕМЫ

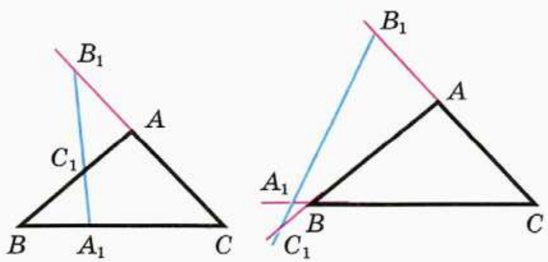
Теорема Чевы



Если на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1, то отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$$

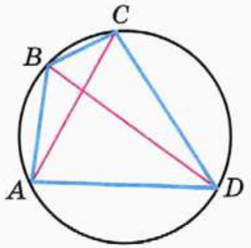
Теорема Менелая



Если на сторонах AB и CB и на продолжении стороны CA (или на продолжении сторон AB, CB и CA) треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1, то эти точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$$

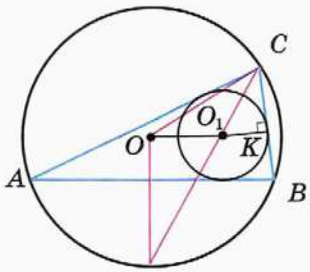
Окончание табл. 14

<table>
<tr><th colspan="2">Теорема Птолемея</th></tr>
<tr><td>


</td><td>

Произведение диагоналей вписанного в окружность четырехугольника равно сумме произведений противоположных сторон:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

</td></tr>
<tr><th colspan="2">Формула Эйлера</th></tr>
<tr><td>


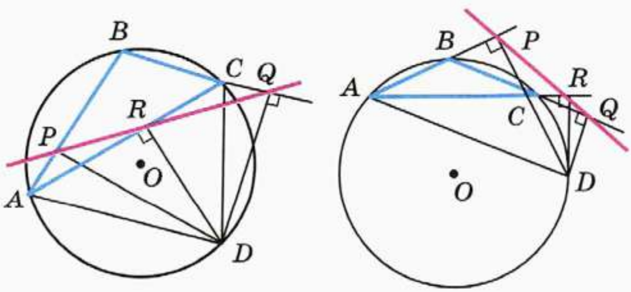
</td><td>

В треугольнике радиус R описанной окружности и радиус r вписанной окружности связаны с расстоянием d между их центрами соотношением

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

Например, если в треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности, O_1 — центр вписанной окружности, O_1K — радиус вписанной окружности, OC — радиус описанной окружности, то

$$O_1O^2 = OC^2 - 2OC \cdot O_1K$$

</td></tr>
<tr><th colspan="2">Прямая Симсона</th></tr>
<tr><td>


</td><td>

Основания перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника (или к их продолжениям) из произвольной точки описанной окружности, лежат на одной прямой.

(Эту прямую называют *прямой Симсона*.)

P, R, Q — основания перпендикуляров.

</td></tr>
</table>

Ответы к упражнениям

§ 1

1.2. Тупоугольный. **1.4.** 6; $6\sqrt{3}$; $6\sqrt{3}$. **1.5.** 4,25π см². **1.6.** 5. **1.7.** $\sqrt{7}$. **1.8.** $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{3}}$. **1.9.** $10\sqrt{3}$; 60°, 120°, 60°, 120°. **1.10.** 10 см. **1.11.** 8 см и 15 см. **1.12.** 87 см². **1.13.** 156 см². **1.14.** 9 см и 25 см. **1.15.** $\frac{2ab}{a+b}$. **1.16.** 2 см, 3 см и 5 см. **1.17.** $25\sqrt{2}$ см². **1.19.** 100 см². **1.23.** 42, 5π. **1.24.** $10\sqrt{3}$. **1.25.** 14,4. **1.26.** $a\sqrt{3}$. **1.27.** $4\sqrt{3}$. **1.28.** 150. **1.29.** 17. Точка O находится вне квадрата. **1.30.** $3\sqrt{2}-3$. **1.31.** 2,4 или 21,6. **1.32.** 2,5 или 10. **1.33.** 5 или 7. **1.34.** $4\sqrt{6}$ или $8\sqrt{3}$. **1.35.** 8 или 80. **1.36.** $\frac{5\sqrt{13}}{26}$ или $\frac{7\sqrt{13}}{26}$. **1.37.** 2 или 5. **1.38.** 2,25 или 9. **1.39.** 28 или 12. **1.40.** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ или $\frac{11\sqrt{2}}{2}$. **1.41.** $\frac{17}{23}$ или $\frac{10}{7}$.

§ 2

2.1. Координаты вершин: $(a;\ 0)$, $(0;\ b)$, $(0;\ 0)$. Координаты середин отрезков: $\left(\frac{a}{2};\ 0\right)$, $\left(0;\ \frac{b}{2}\right)$, $(0;\ 0)$. **2.2.** 1) Координаты вершин: $(a;\ 0)$, $(0;\ a)$, $(0;\ 0)$, $(a;\ a)$, координаты точки пересечения диагоналей: $\left(\frac{a}{2};\ \frac{a}{2}\right)$; 2) координаты вершин: $\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};\ 0\right)$, $\left(0;\ \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};\ 0\right)$, $\left(0;\ -\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$, координаты точки пересечения диагоналей: $(0;\ 0)$. **2.3.** Координаты вершин: $(-a;\ 0)$, $(0;\ b)$, $(a;\ 0)$, координаты середин сторон: $\left(-\frac{a}{2};\ \frac{b}{2}\right)$, $\left(\frac{a}{2};\ \frac{b}{2}\right)$, $(0;\ 0)$. **2.4.** Координаты вершин: $(a;\ 0)$, $(0;\ b)$, $(0;\ 0)$, $(a;\ b)$, координаты точки пересечения диагоналей: $\left(\frac{a}{2};\ \frac{b}{2}\right)$. **2.5.** Координаты вершин: $(-a;\ 0)$, $(0;\ b)$, $(a;\ 0)$, $(0;\ -b)$. **2.16.** $\cos\varphi = \frac{17}{5\sqrt{13}}$.

§ 3

3.2. Да. **3.4.** Да. **3.5.** Одну или бесконечное множество. **3.8.** Нет. **3.9.** 1) Да; 2) да; 3) нет. **3.10.** Бесконечное множество. **3.11.** 1) Нет; 2) нет. **3.12.** Нет. **3.13.** Совпадают. **3.16.** 1) Да; 2) да; 3) нет. **3.17.** 1) Да; 2) да. **3.18.** 1) Нет; 2) да. **3.19.** Нет. **3.20.** 1) AA_1 и AB; AB и BB_1 и т. д.; 2) AA_1, A_1D_1, A_1B_1; A_1B_1, BB_1, B_1C_1 и т. д.; 3) плоскости AA_1B_1B и $A_1B_1C_1D_1$; плоскости $ABCD$ и AA_1B_1B и т. д.; 4) плоскости ABD, ABB_1, ADD_1; плоскости ABC, ABB, BCC_1 и т. д. **3.22.** Не обязательно. Три.

§ 4

4.1. 1) Точка C; 2) прямая CC_1. **4.2.** 1) Точка B; 2) прямая BC. **4.8.** Нет.

§ 5

5.10. 1; 5; 7; 10; бесконечное множество. **5.13.** $12\sqrt{3}$. **5.14.** $5\sqrt{2}$.

§ 6

6.1. 1) AB и A_1D_1; AB и CC_1 и т. д.; 2) AB и CC_1; AB и B_1C_1 и т. д.; 3) AS и DC; SB и DC и т. д. **6.2.** Прямые могут пересекаться или быть скрещивающимися. **6.3.** Нет. **6.4.** Нет. **6.8.** Не всегда. **6.9.** 1) Три; 2) пятнадцать; 3) $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$. **6.10.** 1) AB и CD; AA_1 и BB_1 и т. д.; 2) AB и A_1B_1; AA_1 и BB_1 и т. д.; 3) AB и CD; BC и AD. **6.13.** Нет. **6.15.** Нет. **6.17.** 1) 4 м; 2) 3 дм; 3) $\frac{a+b}{2}$. **6.18.** 1) 1 м; 2) 0,5 дм; 3) $\left|\frac{a-b}{2}\right|$. **6.19.** 5 см.

§ 7

7.1. 1) DCC_1D_1, $A_1B_1C_1D_1$; 2) $ABCD$, BCC_1B_1; 3) ADD_1A_1, ABB_1A_1. **7.2.** AD и BC имеют общую точку с плоскостью α; $DC \parallel \alpha$. **7.4.** Нет. **7.5.** Нет. **7.8.** Бесконечное множество. **7.9.** Бесконечное множество. **7.13.** 1) 12 см; 2) 4 см; 3) 4 см.

§ 8

8.1. 1) $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, ABB_1A_1 и DCC_1D_1 и т. д.; 2) ABC и $A_1B_1C_1$. **8.2.** 1) Нет; 2) да, три пары. **8.3.** Нет. **8.4.** Нет. **8.5.** Да. **8.6.** Да. **8.7.** Нет. Если прямая параллельна плоскости. **8.8.** Нет. **8.10.** Не всегда. **8.15.** Третья плоскость или пересекает две данных плоскости, или параллельна им. **8.17.** Три плоскости могут иметь общую точку; или общую прямую; или пересекаться по трем различным прямым. **8.22.** a. **8.27.** 30 см, 45 см. **8.28.** 20 см, 30 см.

§ 9

9.1. Отрезок или треугольник. **9.2.** 1) Да; 2) да; 3) да. **9.3.** 1) Отрезок или параллелограмм; 2) отрезок или параллелограмм; 3) отрезок или трапеция. **9.4.** 1) Да; 2) да; 3) да; 4) нет. **9.5.** Нет. Утверждение выполняется, если плоскость проекции параллельна плоскости ромба. **9.6.** 1) Да; 2) нет; 3) нет. **9.7.** Провести медианы этого треугольника. **9.8.** Провести средние линии этого треугольника. **9.8.** Нет. **9.9.** Да. **9.15.** 1) 6 см; 2) $\frac{a+b+c}{3}$. **9.17.** 3,5 или 8,75.

§ 10

10.1. Например, параллельность противоположных сторон сохраняется; равенство соседних сторон не сохраняется. **10.2.** Например, параллельность противоположных сторон сохраняется.

§ 11

11.1. Нет. Для точек, которые лежат в плоскости, параллельной плоскости проекции и проходящей через центр проектирования.

11.2. Да. **11.3.** Если данные прямые параллельны плоскости проекции. **11.4.** Если плоскость проектирования расположена между фигурой и центром проектирования, то при центральном проектировании получим фигуру, похожую на данную, но уменьшенную. **11.5.** Если центр проектирования расположен между фигурой и плоскостью проектирования, то при центральном проектировании получим перевернутое изображение фигуры. Такое изображение используется при фотографировании. **11.6.** Если фигура расположена между плоскостью проектирования и центром проектирования, то при центральном проектировании получим фигуру, похожую на данную, но увеличенную. Такое изображение используется при показе кинофильмов. **11.7.** Фигура и ее изображение — подобные фигуры.

§ 12

12.1. 1) Да; 2) да; 3) да; 4) нет; 5) нет. **12.2.** 1) Да; 2) да; 3) да; 4) да; 5) нет; 6) нет. **12.3.** 1) Да; 2) нет. **12.4.** 1) Да; 2) да; 3) нет. **12.5.** Ромб. **12.6.** Правильный треугольник. **12.7.** Пятиугольник. **12.8.** Трапеция. **12.12.** Треугольник, четырехугольник, пятиугольник. **12.13.** Да. **12.23.** 1) $\frac{9a^2}{8}$; 2) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

§ 13

13.1. 1) 90°; 2) 60°. **13.2.** 45°. **13.3.** 60°. **13.4.** Бесконечное множество. **13.5.** Одну. **13.6.** Бесконечное множество. **13.8.** 1) 90°; 2) 0°; 3) 90°. **13.9.** 1) 45°; 2) 60°. **13.10.** 60°. **13.11.** 60°, 60°, 60°. **13.12.** 1) 6,5 см; 2) 15 см; 3) $\sqrt{a^2-b^2+d^2}$. **13.13.** 90°. **13.14.** Прямые b и c скрещиваются или пересекаются, угол между ними равен 90°. **13.15.** Прямые b и c скрещиваются или пересекаются, угол между ними равен 30°. **13.18.** 60°. **13.20.** $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. **13.22.** $\sqrt{3}a$.

§ 14

14.1. Нет. **14.2.** Если прямые перпендикулярны (пересекаются или скрещиваются). **14.3.** Прямая перпендикулярна к плоскости треугольника. **14.4.** 1) Нет; 2) да. **14.5.** Перпендикулярны. **14.6.** Да. **14.7.** Да. **14.18.** 5 м. **14.19.** ≈ 7,8 м. **14.20.** 9 м. **14.21.** Длина перпендикуляра $\sqrt{2a^2-b^2}$, длина стороны квадрата $\sqrt{b^2-a^2}$. **14.22.** Длина перпендикуляра $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$, длины сторон прямоугольника $\sqrt{c^2-b^2}$ и $\sqrt{c^2-a^2}$. **14.23.** $\frac{\sqrt{6}a}{2}$. **14.24.** $\sqrt{a^2-b^2}$. **14.25.** $KA = KB = 20$ см; $DA = DB = 32$ см. **14.28.** 5 см, 27 см, 31 см, 53 см (в зависимости от расположения вершин параллелограмма относительно плоскости).

§ 15

15.1. Проекция диагонали A_1C куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на грань $ABCD$ — AC, на грань ADD_1A_1 — A_1D, на грань AA_1B_1B — A_1B, на грань BB_1C_1C — B_1C, на грань DD_1C_1C — D_1C, на грань $A_1B_1C_1D_1$ — A_1C_1. **15.2.** $SA < SB = SD < SC$. **15.3.** Наибольший отрезок SB, наименьший — SA. **15.4.** 40 см. **15.5.** 16 см. **15.6.** 9 см. **15.7.** $AD = 6$ см, проекция AD на плоскость α равна 4,8 см. **15.9.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **15.10.** 6,5 м. **15.11.** $\frac{\sqrt{4a^2-2b^2}}{2}$. **15.12.** 6 см и 15 см. **15.13.** 1) 15 см и 41 см; 2) 4 см и 8 см. **15.14.** 9 см. **15.16.** $3\sqrt{41}$ см. **15.17.** 8 см и $2\sqrt{66}$ см. **15.18.** Да. **15.19.** Да. **15.22.** 2 см. **15.25.** 24 см. **15.26.** $6\sqrt{3}$ см. **15.27.** 20 см. **15.28.** 13 см. **15.29.** 7 см, 7 см, 9 см, 9 см.

§ 16

16.1. 1) $\angle B_1AB$; 2) $\angle AB_1A_1$; 3) $\angle D_1AB_1$; 4) $\angle AB_1B$; 5) $\angle D_1BD$; 6) $\angle D_1BB_1$; 7) $\angle B_1CB$; 8) $\angle B_1CC_1$. **16.2.** 1) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{a}{2}$; 3) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **16.3.** 1) $2d$; 2) $d\sqrt{2}$; 3) $\frac{2d}{\sqrt{3}}$. **16.5.** Окружность. **16.7.** Нет. 45°. **16.10.** Не обязательно. **16.11.** Параллельны или пересекаются. **16.12.** 30°. **16.13.** 30°. **16.14.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} = \operatorname{arcctg}\sqrt{2} = \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}} = \arccos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. **16.16.** 45°. **16.17.** 30°. **16.18.** $a\sqrt{2}$. **16.19.** a. **16.20.** 30°. **16.21.** Угол наклона высоты, опущенной на основу треугольника, к плоскости α. **16.23.** $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta$.

§ 17

Прямой. **17.2.** $\angle ACP$. **17.3.** $\angle OCB$. **17.4.** Да. **17.5.** $\angle MBC$. **17.6.** $2a$. **17.7.** 45°. **17.8.** 3,36 м. **17.9.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **17.10.** $\frac{a}{2}$. **17.12.** 30°. **17.13.** 1) $\frac{1}{14}$; 2) $\frac{2}{31}$. **17.14.** 13 м. **17.15.** 60°. **17.16.** 1) $\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha+c^2}$; 2) 60°. **17.17.** 1) $\frac{2a^2}{\sqrt{3}}$; 2) $2a^2$. **17.18.** 1) 60°; 2) $\operatorname{tg}\varphi = 2$. **17.19.** 45°.

§ 18

18.1. Нет. **18.2.** Пересекаются (в частности, перпендикулярны), параллельны, скрещивающиеся (в частности, перпендикулярны). **18.3.** Нет. **18.4.** Нет. **18.5.** Нет. **18.6.** Нет. **18.7.** Да. **18.8.** Бесконечное множество или одну. **18.11.** Бесконечное множество. **18.13.** 1) 90°; 2) 60°. **18.14.** Да. **18.15.** Да. **18.16.** Нет. **18.18.** 1) 11 м; 2) 13 м; 3) 8 м; 4) 7 м; 5) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$;

6) $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$. **18.19.** $\sqrt{a^2+b^2}$. **18.20.** 1,3 м. **18.21.** 1,7 м. **18.22.** 1) 45°; 2) cos φ = 0,2. **18.23.** $a\sqrt{\cos 2\varphi}$. **18.24.** 1) $4\sqrt{73}$; 2) 12. **18.25.** 1) $\sqrt{30}$; 2) $\sin\varphi = \frac{\sqrt{15}}{10}$. **18.26.** 1) Да; 2) да; 3) нет. **18.27.** $8(1+\sqrt{3})$ и $16\sqrt{2}$.

§ 19

19.1. 30°. **19.2.** 1) $a\sqrt{2}$; 2) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$; 3) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **19.3.** *a*. **19.4.** 1) *a*; 2) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **19.5.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **19.6.** $\sqrt{b^2-a^2}$. **19.7.** 1) 4,25 см; 2) 6,75 см; 3) $\frac{a+b}{2}$. **19.8.** 1) 1,05 см; 2) 0,65 см; 3) $\left|\frac{a+b}{2}\right|$. **19.10.** 6 м. **19.11.** $\frac{a}{2}$. **19.12.** 5 м и 3 м. **19.13.** $\sqrt{c^2+b^2-a^2}$. **19.17.** 1) *a*; 2) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 3) *a*; 4) *a*; 5) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 6) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **19.18.** $a \sin\alpha$. **19.19.** Плоскость, параллельная данным плоскостям и лежащая между ними на расстоянии, равном половине расстояния между данными плоскостями. **19.20.** $\frac{\sqrt{4h^2+2a^2}}{2}$. **19.21.** $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}$. **19.22.** $\arccos\frac{a}{\sqrt{3}b}$. **19.23.** *C* — точка пересечения отрезка AB_1, где B_1 — точка, лежащая на луче *BO* ($BO \perp \alpha$ и $O \in \alpha$), причем $BO = OB_1$. **19.24.** $\sqrt{2}$ м. **19.25.** $2\sqrt{2}$ м. **19.26.** $\sqrt{a^2+b^2}$. **19.27.** $\sqrt{a^2-\frac{d^2}{8}}$. **19.28.** 1) Да; 2) нет; 3) да; 4) нет. **19.30.** $\sqrt{23}$ м. **19.31.** 10. **19.32.** 5 или 9. **19.33.** 90°. **19.34.** 8, 8, 8. **19.35.** 4, 4, 4, 8. **19.36.** 1) Скрещивающиеся; 2) параллельные; 3) 5. **19.37.** 1) $3\sqrt{7}$; 2) $3\sqrt{3}$.

§ 20

20.1. Нет. **20.2.** Например, шар. **20.3.** Отрезок, равный второй диагонали. **20.4.** 1) Нет; 2) да; 3) да. **20.5.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **20.6.** 1) Да; 2) да; 3) нет. **20.7.** 1) Да; 2) нет. **20.8.** Нет. **20.9.** 1) Нет; 2) да; 3) да. **20.10.** 1) Да; 2) да; 3) нет. **20.11.** Прямоугольником, который равен основанию. **20.12.** 10 см². **20.13.** 1) $\frac{9\sqrt{3}}{4}$; 2) $\frac{3a^2}{8}$; 3) $\frac{a^2\sqrt{6}}{4}$. **20.14.** 1) 30°; 2) 0°. **20.15.** $\arccos\frac{b^2\sin\alpha}{a^2}$. **20.17.** $\frac{1}{3}$. **20.19.** $\frac{1}{2}a^2$. **20.20.** Правильный шестиугольник. **20.21.** $a^2\sqrt{3}$. **20.25.** $\frac{2\sqrt{3}a}{3}$. **20.26.** 72 см или 90 см. **20.27.** $\frac{7a^2}{8\cos\varphi}$. **20.28.** $2\sqrt{m^2+2a^2}$. **20.29.** Ромб; $DD_1 = 6$; $P = 20$; $S = 4\sqrt{34}$.

§ 21

21.3. 0,36 м или 0,44 м. **21.4.** 0,06 м или 0,26 м. **21.5.** $\frac{an}{m+n}$ или $\frac{am}{m+n}$. **21.6.** $\sqrt{2b^2-a^2}$. **21.7.** 4 м. **21.8.** 1) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 2) a; 3) a; 4) a; 5) $\frac{2a}{\sqrt{3}}$; 6) a; 7) $\frac{a}{\sqrt{3}}$. **21.9.** $4\frac{8}{13}$. **21.10.** $2\sqrt{3}$. **21.12.** $\frac{a\sqrt{30}}{8}$. **21.13.** 12.

§ 22

22.1. Окружность. **22.2.** Две плоскости, параллельные данной плоскости и находящиеся на расстоянии h от нее. **22.3.** Плоскость, параллельная данным плоскостям и лежащая посередине между ними. **22.4.** Прямая, перпендикулярная к плоскости треугольника и проходящая через центр окружности, вписанной в данный треугольник. **22.6.** Плоскость, параллельная данной плоскости и находящаяся от нее на расстоянии, равном половине расстояния от данной точки до данной плоскости. **22.7.** Плоскость, перпендикулярная к данной прямой и проходящая через заданную на ней точку.

§ 23

23.8. 1) Плоскость, параллельная плоскости yz и проходящая через точку (1; 0; 0); 2) прямая, параллельная оси Oz и проходящая через точку (1; 1; 0). **23.14.** Правильный. **23.15.** C (0; 0; 0). **23.19.** B (0; −1; 3). **23.23.** (−2, −2, −2), (2, 2, 2). **23.30.** 1) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=5$; 2) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=8$; 3) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=5$.

§ 24

24.2. 1) (1; −6; −5), $\sqrt{62}$; 2) (3; −1; 2), $\sqrt{14}$; 3) (5; −2; −2), $\sqrt{33}$; 4) (4; 2; −9), $\sqrt{101}$; 6) (−2; −3; 5), $\sqrt{38}$. **24.3.** 1) Да; 2) да; 3) нет. **24.4.** (−3; 2; −2). **24.5.** (3; 2; −4). **24.6.** 1) $\overrightarrow{AB_1}$; 2) $\overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{AD_1}$; 4) $\overrightarrow{AD}$. **24.9.** $m=1$, $n=10$. **24.10.** (−0,6; −1; 0,2). **24.11.** (5; −2; −1). **24.12.** 1) (−5; 10; −1); 2) (3; −4; 4). **24.13.** 1) 20; 2) −8; 3) 3; 4) −10. **24.14.** 1) Плюс; 2) минус. **24.15.** 1) Прямой; 2) острый; 3) тупой. **24.16.** 1) −12; 2) 0; 3) 0; 5; 4) −2; 1. **24.17.** (0; 0; −3). **24.18.** $\frac{4}{13}$. **24.19.** $\frac{\sqrt{30}}{15}$. **24.20.** 2. **24.21.** 1) $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\frac{\neq}{2}$. **24.22.** 1) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; 2) $\vec{a}+\vec{c}$; 3) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$; 4) $\vec{a}+\vec{b}+0{,}5\vec{c}$; 5) $\vec{a}+\vec{b}-0{,}5\vec{c}$; 6) $\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}$.

§ 25

25.2. Да. **25.4.** Да. **25.6.** 1) 3; 2) 3. **25.8.** 1) 3; 2) 9. **25.11.** 1) 4; 2) 7. **25.12.** 1) 0; 2) 4. **25.13.** 1) 1; 2) 3. **25.31.** 1) (2; −7; −3), (2; 7; 3), (−2; −7; 3); 2) (−3; 4; −1), (−3; −4; 1), (3; 4; 1); 3) (5; −3; −7), (5; 3; 7), (−5; −3; 7). **25.32.** 1) (−2; 7; −3); 2) (3; −4; −1); 3) (−5; 3; −7). **25.33.** $a = -1$, $b = -2$, $c = 5$. **25.34.** (2; −4; −1).

§ 26

26.1. 1) $z = 0$; 2) $y = 0$; 3) $x = 0$. **26.2.** B. **26.3.** (6; 0; 0); (0; 2; 0); (0; 0; −1,2). **26.4.** $4x + 2y - z + 3 = 0$. **26.5.** $2x - 5y - 3z - 38 = 0$. **26.6.** 1) $x + y + z - 1 = 0$; 2) $x + 4y + 3z - 5 = 0$. **26.7.** Нет. **26.8.** 1) $y + 2 = 0$; 2) $y - 2 = 0$; 3) $x + y - 3 = 0$. **26.9.** 1) и 3). **26.10.** 1) $3x + 2y - z - 8 = 0$; 2) $x - 4y + 3z + 10 = 0$. **26.11.** Только 1). **26.12.** 1) $\frac{2\sqrt{154}}{77}$; 2) $\frac{9\sqrt{39}}{78}$; 3) $\frac{\sqrt{42}}{21}$. **26.14.** 1) 2; 2) $\frac{6\sqrt{14}}{7}$. **26.15.** 1) (0; 0; 0), $R = 2$; 2) (0; 1; 0), $R = \sqrt{3}$; 3) $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$, $R = \frac{\sqrt{24}}{3}$. **26.16.** $2\frac{3}{13}$. **26.17.** $\frac{41}{\sqrt{261}}$.

§ 27

27.1) Параллелограмм; 2) трапеция. **27.3.** 90°. **27.4.** $\arccos\frac{1}{\sqrt{219}}$. **27.10.** $\arccos\frac{3}{\sqrt{41}}$. **27.11.** $\arccos\frac{1}{3}$. **27.12.** 60°. **27.13.** $\arccos\frac{b}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}$. **27.14.** 1) $\arccos\frac{1}{4}$; 2) $\arccos\frac{1}{4}$; 3) $\arccos\frac{1}{4}$. **27.15.** $\frac{2}{3}$. **27.16.** $\frac{1}{3}$.

Предметный указатель

СОДЕРЖАНИЕ

Нелин Евгений Петрович
Лазарев Виктор Андреевич

Математика:
алгебра и начала математического анализа, геометрия

ГЕОМЕТРИЯ
базовый и углубленный уровни

10 класс

Подписано в печать 16.09.2014. Формат 70×90/16.
Усл.-печ. л. 22,23. Тираж 3000 экз. Заказ № 1261.

ООО «Илекса», 107023, г. Москва, ул. Буженинова, д. 30, стр. 4,
сайт: www.ilexa.ru, E-mail: real@ilexa.ru,
телефон: 8(495) 964-35-67

Отпечатано в ОАО «Областная типография «Печатный двор»,
432049, г. Ульяновск, ул. Пушкарёва 27.
E-mail: ul-pd@mail.ru