В. В. Прасолов В. М. Тихомиров

ЕОМЕТ ИЯ

Издание второе, исправленное

Москва
Издательство МЦНМО
2007

УДК 514
ББК 22.151
П70

Прасолов В. В., Тихомиров В. М.
П70 Геометрия. — М.: МЦНМО, 2007. — 2-е изд., перераб. и доп. — 328 с.: ил.

ISBN 978-5-94057-267-1

В книге дается систематическое изложение различных геометрий — евклидовой, аффинной, проективной, эллиптической, гиперболической, бесконечномерной. Проблемы различных геометрий рассматриваются с единой точки зрения, и всюду прослеживаются единые корни различных явлений. Все геометрические объекты исследуются с позиций двойственности. Подробно изложена теория коник и квадрик, в том числе и теория коник для неевклидовых геометрий. В книге изложено много ярких геометрических фактов, решено множество красивых геометрических задач.

Многочисленные рисунки помогают яснее представить себе излагаемые геометрические теоремы. В конце глав приводятся задачи и упражнения, которые позволяют использовать книгу в качестве учебника.

Книга призвана способствовать развитию геометрических исследований и совершенствованию математического образования. Для школьников, студентов, учителей математики.

Первое издание книги вышло в 1997 г.

ББК 22.151

Виктор Васильевич Прасолов, Владимир Михайлович Тихомиров

Геометрия

Подписано в печать 15.11.2006 г. Формат $60 \times 90\ ^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Печ. л. 20,5. Тираж 2000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра непрерывного математического образования, 119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11.

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленных диапозитивов в ОАО «Дом печати — ВЯТКА». 610033, г. Киров, ул. Московская, 122.

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга», Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. 241 72 85. E-mail: biblio@mccme.ru

© Прасолов В. В., Тихомиров В. М., 2007
© МЦНМО, 2007.

ISBN 978-5-94057-267-1

Оглавление

Предисловие **5**
Введение **9**

Глава 1. Евклидов мир **13**
§1.1. Евклидовы прямая и плоскость 13
§1.2. Евклидово n-мерное пространство 27
§1.3. Введение в многомерный мир евклидовой геометрии 33

Глава 2. Аффинный мир **45**
§2.1. Аффинная прямая и плоскость 45
§2.2. Аффинное пространство. Линейные уравнения и неравенства . 56
§2.3. Введение в конечномерную выпуклую геометрию 59

Глава 3. Проективный мир **63**
§3.1. Проективная прямая и плоскость 63
§3.2. Проективное n-мерное пространство 75

Глава 4. Коники и квадрики **79**
§4.1. Плоские кривые второго порядка 79
§4.2. Некоторые дополнения 89
§4.3. Некоторые свойства квадрик 94

Глава 5. Мир неевклидовых геометрий **106**
§5.1. Окружность и двумерная сфера 106
§5.2. Геометрия Лобачевского 114
§5.3. Изометрии в трех геометриях 133

Глава 6. Бесконечномерный мир **156**
§6.1. Основные определения 156
§6.2. Формулировки теорем 161
§6.3. Доказательства теорем 163
§6.4. Заключительный комментарий 169

Дополнительные главы геометрии **171**
§1. Геометрия и физика 171
§2. Многогранники и многоугольники 177

§3. Дополнительные вопросы проективной геометрии 200
§4. Специальные свойства коник и квадрик 221
§5. Дополнительные вопросы неевклидовых геометрий 237

Решения, указания, ответы **270**
Предметный указатель **324**
Именной указатель **327**

Предисловие

Однажды Израиль Моисеевич Гельфанд обронил такую фразу: «Математика состоит из трех частей: анализа, геометрии и комбинаторики». «А что такое комбинаторика?» — спросили его. — «А это еще не созданная наука», — таков был ответ...

Естественно полюбопытствовать: «А что же такое геометрия?»

...В одном из своих интервью (опубликованном в журнале «Квант») И. М. Гельфанд делился своими воспоминаниями. Он провел детство в небольшом поселке недалеко от Одессы. Очень рано он стал задумываться над проблемами математики — в одиночку, потому что спросить было не у кого: в поселке не было ни знающих людей, ни книг. Ему приходилось все изобретать и выдумывать самостоятельно. Он пришел к убеждению, что существуют две математики, между которыми лежит пропасть: алгебра (а на самом деле — алгебра и анализ, просто в ту пору второе слово еще не было известно мальчику) и геометрия. Полиномы — это алгебра, а синусы — это совершенно другое, это геометрия.

Израиль Моисеевич говорил в интервью, что много раз в жизни ему очень везло. Например, он просил своих родителей купить ему книгу по математике и получал отказ — не было денег. Но (о, везение!) у мальчика случился приступ аппендицита, необходимо было ехать в город на операцию. И тогда он сказал, что никуда не поедет, если не купят книги. И книга была куплена.

Это был заурядный, провинциальный учебник по анализу, где, скажем, функции подразделялись на непрерывные, дифференцируемые и эмпирические. Но среди прочего там приводилась формула Маклорена и был выписан ряд

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$$

И в сознании мальчика произошел переворот: он понял, что математика едина!

Какое же место занимает геометрия в этой единой математике?

Примерно двадцать пять лет тому назад было сделано интересное открытие в области физиологии: профессор Калифорнийского технологического института Роджер Сперри, исследуя больных с перерезанным «мозолистым телом», соединяющим два полушария мозга, доказал, что функции этих полушарий обладают определенной несимметричностью. (За это открытие Р. Сперри был удостоен Нобелевской премии по биологии и медицине за 1981 год.)

Ныне считается доказанным, что два полушария нашего мозга имеют различные функции: левое полушарие (у обычных людей — «правшей») отвечает за логический анализ. Оно же управляет речью, письмом и другими «алгоритмическими» процедурами. Это, так сказать, «алгебро-аналитическое» полушарие. Правое же полушарие — синтетическое, оно «заведует» всем «вообразительным» — зрением, картинным восприятием, образностью... Так что можно сказать, что Мир, который заложен в правое полушарие — это мир Геометрии!

Нельзя ли считать, что Геометрия — это «художественная математика», это та часть математики, где можно, закрыв глаза, что-то вообразить, представить себе — изгибающуюся поверхность, плоское сечение многогранника, сеть линий, уходящую в бесконечность цепочку зацепленных многообразий...

И люди ведь делятся по своим склонностям на два типа — одним больше нравятся выкладки, другим — наглядность. И потому геометрия столь незаменима в преподавании, в системе образования. Она дает уникальную возможность и для развития логического мышления, и для обучения интуитивному постижению истины, основанному на наглядном усмотрении. И в последней своей ипостаси ее не с чем сравнить.

Эта книга написана двумя авторами. Один из них — В. В. Прасолов — является по преимуществу геометром, другой — В. М. Тихомиров — аналитиком. Этим определяется некоторое равновесие вообразительной и логической направленностей книги. В ней много рисунков, чертежей, построений, сечений и прочего наглядного материала, но большое внимание уделяется и логической структуре геометрии, моделям и алгебро-аналитическим подходам.

Книга рассчитана на школьников, учителей, студентов математических специальностей, а также на любителей геометрии — вне зависимости от образования и рода занятий. Этому подчинена структура книги. Она делится на главы, а в конце книги имеется дополнение. Главы посвящены различным геометриям: евклидовой, аффинной, проективной, неевклидовым, бесконечномерным обобщениям аффинной и евклидовой геометрий. Там речь идет преимущественно о линейных и выпуклых объектах. Отдельная глава посвящена кривым и поверхностям второго порядка.

Каждая глава, кроме последней, разбита на две части. В первой части речь идет о простейших, одномерных и плоских геометриях. Эти фрагменты рассчитаны на самую широкую аудиторию, включая школьников.

Остальной материал всех этих глав посвящен конечномерным геометриям. Эти разделы книги могут рассматриваться как начальный

курс геометрии в университетах и педагогических институтах[1]. В шестой главе вскрываются геометрические корни бесконечномерного анализа.

Общая направленность этого курса соответствует концепции математического образования, согласно которой его разумно строить в соответствии с принципом *стадийности*: оно должно напоминать восхождение на гору, при котором одни и те же пейзажи рассматриваются с разных позиций и разной высоты. При этом вначале студенту должна быть предоставлена возможность овладеть основами математических знаний, научиться понимать в общих чертах структуру математики в целом, освоить фундаментальные понятия, идеи, методы. На этой первой стадии ему должны быть привиты важнейшие навыки в основополагающих разделах математики — анализе, геометрии и широко понимаемой комбинаторике — науке о финитизации и практической реализуемости тех математических концепций, в которых заложено понятие бесконечности (если высказывание И. М. Гельфанда, с которого мы начинали, принять за первое приближение к истине). Так вот, вторые части основных глав этой книги мыслились как попытка сформировать нечто вроде университетского курса «Геометрия I». (При этом в нашем варианте осуществляется как бы «непрерывность» образования; мы стараемся объяснить и место школьной геометрии в истории нашей науки.)

Остальные фрагменты книги, сосредоточенные в дополнении, адресованы специалистам и любителям геометрии. Там рассказывается об отдельных сюжетах, о красивых геометрических фактах, которые связаны с творчеством великих геометров и сохранили красоту и свежесть вплоть до нашего времени. Там же даются некоторые приложения геометрии к естественным наукам.

Существенную часть книги составляет ее задачник. Задачи расположены в основном в конце глав, но иногда они встречаются и по ходу изложения. Мы старались отобрать нетривиальные и выразительные задачи, которые могут представить интерес при проработке курса и использоваться как упражнениями.

Границы материала, включенного нами в эту книгу, простираются от самых истоков — от Фалеса, Пифагора, Евклида, Архимеда и Аполлония — до середины прошлого столетия.

И еще об одном стимуле к написанию этой книги. Он связан с именем Андрея Николаевича Колмогорова, сыгравшего большую роль в жизни обоих авторов.

[1] Они соответствуют (в несколько расширенном объеме) содержанию курса геометрии, читавшегося В. М. Тихомировым и В. В. Прасоловым в Независимом московском университете в 1992—96 гг.

А. Н. Колмогорова в последние годы его жизни увлекала идея создать такую программу по геометрии для школы, в которой бы «постепенно подготавливался материал для понимания возможности разных „геометрий“ (как геометрия Лобачевского)», ему виделась концепция геометрического образования, «охватывающего евклидову геометрию в качестве частного случая (как концепцию метрического пространства)». Сходные мысли заложены в основание этой книги.

Вместе с нами курс геометрии в Независимом московском университете вели В. О. Бугаенко, М. Н. Вялый, И. В. Грибков и Р. А. Саркисян. Мы благодарны им за многочисленные обсуждения отдельных частей этой книги.

Введение

> В XIX веке развитие геометрии происходило по многим, на первый взгляд ничем не связанным между собой, направлениям. Эрлангенская программа открыла в понятии группы преобразований те узлы, которые скрепляют все разновидности геометрии и вместе с тем определяют отличительные особенности каждой из них; в этой программе вопрос «что такое геометрия» ставится и получает основополагающий ответ.
>
> *Герман Вейль*. Математическое мышление.

В своем знаменитом трактате «Архитектура математики» Николя Бурбаки задается вопросом: «La Mathématique ou les Mathématiques?» По-русски это звучит так: «Математика — это единая наука или их много?» В точности тот же вопрос можно адресовать к нашему разделу математики — геометрии: геометрия — единая наука или их — геометрий — много? Действительно, бывают проективная, аффинная, высшая, элементарная, сферическая, гиперболическая, выпуклая, евклидова, дифференциальная, интегральная, конформная, симплектическая, аналитическая, алгебраическая, банахова, компьютерная и еще множество геометрий, а есть ли у них что-нибудь общее?

В предисловии мы назвали одно — внешнее — объединяющее их свойство: «вообразимость» ее объектов и связанную с ней наглядность.

А ещё — есть что-нибудь общее у различных геометрий — евклидовой, аффинной, проективной, римановой, геометрии Лобачевского?

Оказывается, эти геометрии скреплены узами, открытыми в «Эрлангенской программе», о которых говорит Г. Вейль в словах, приведенных нами в качестве эпиграфа. И вообще, что это такое — «Эрлангенская программа»?

Эрлангенская программа — это речь, произнесенная выдающимся немецким математиком *Феликсом Клейном* (1849—1924) при вступлении его на должность профессора (и опубликованная в том же году в виде брошюры под заглавием «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований»).

«Ритуал вступления в ряды преподавателей — старая традиция немецких университетов, — пишет один из крупнейших современных математиков, профессор Боннского университета Ф. Хирцебрух. — После присуждения ученой степени доктора будущий преподаватель продолжает научную работу и через несколько лет представляет факультету более обширный текст — диссертацию для получения venia legendi — права самостоятельно обучать студентов и читать лекции. Диссертация докладывается на заседании совета факультета, где и происходит ее научное обсуждение. Через несколько недель ритуал завершается своей кульминацией — открытой вступительной лекцией. [...]

На этих лекциях серьезная и значительная тема должна быть изложена так, чтобы не только математики, но и представители других естественных наук, а также и студенты могли следить за ходом рассуждений. В лекции надо осветить историю вопроса, связь разделов математики между собой и с другими науками. Кроме того, нужно, чтобы слушатели хотя бы в небольшой степени почувствовали очарование математики и яснее поняли ее роль в духовной жизни общества». (Прекрасное напутствие и для пишущих математические книги.)

Клейн выступил со своей речью в 1872 году, было ему в ту пору 23 года. В своей лекции Клейн постарался ответить на все тот же сакраментальный вопрос: что такое геометрия?

Согласно концепции Клейна геометрия исследует *инварианты группы преобразований однородного пространства*. Однородное пространство — это совокупность точек, на которой транзитивно (т. е. так, что из любой точки можно попасть в любую) действует некоторая группа преобразований.

Евклидову плоскость можно представлять себе как плоскость школьной доски, простирающуюся неограниченно. Там вводится расстояние, и получается двумерное многообразие точек. На нем тоже можно ввести группу изометрий — взаимно однозначных отображений плоскости на себя, сохраняющих расстояние. Она состоит из параллельных переносов, поворотов относительно любой точки и скользящих симметрий (так называют симметрию относительно прямой и последующий параллельный перенос вдоль этой прямой).

Евклидова геометрия изучает фигуры «с точностью до изометрий». В ней имеется, например, довольно богатое семейство треугольников (зависящее, как мы все знаем, от трех параметров), имеется двухпараметрическое семейство эллипсов и т. п.

Евклидова плоскость (именно плоскость — это явление не обобщается на пространства большего числа измерений) допускает еще одно замечательное описание: ее можно рассматривать как *комплексную* плоскость, как совокупность комплексных чисел. Комплексная интерпретация евклидовой плоскости дает дополнительные возможности в элементарной геометрии.

Аффинная плоскость состоит из тех же точек, что и евклидова, но там допускается более широкая группа преобразований — группа *аффинных преобразований*. Она, помимо изометрий, содержит всевозможные растяжения вдоль любых направлений. Аффинную группу можно определить и по-другому: это такие взаимно однозначные преобразования плоскости, которые прямые переводят в прямые. С аффинной точки зрения все треугольники равноправны, «аффинная геометрия

треугольника» гораздо беднее евклидовой, но и в ней есть свои замечательные теоремы (Чевы и Менелая, например). Все эллипсы на аффинной плоскости также эквивалентны. Но на аффинной плоскости существует весьма и весьма содержательная «выпуклая геометрия».

Проективная плоскость содержит не только те точки, что и аффинная. Аффинная плоскость пополняется «бесконечно удаленной прямой». Проективные преобразования — это суперпозиции проектирований из точки одной плоскости на другую. С топологической точки зрения проективная прямая — это окружность, а проективная плоскость — это «неориентируемая» двумерная поверхность, получаемая из круга приклеиванием по его границе листа Мёбиуса.

С аффинной точки зрения эллипс не эквивалентен параболе или гиперболе, а с проективной точки зрения все они равноправны. Выясняется, что в проективном пространстве можно ввести исчисление расстояний. Этот факт привел ко многим замечательным открытиям. С одной стороны, он дал Кэли и Клейну путь к интерпретации неевклидовой геометрии (это мы разъясним чуть позже), а с другой — позволил чисто алгебраически описать проективную геометрию. Оказывается, любое алгебраическое тело (т. е. алгебраическая структура со сложением и умножением, где, однако, умножение может быть некоммутативным) порождает единственное соответствующее ему проективное пространство, а локально компактных непрерывных тел всего три — вещественные числа, комплексные числа и кватернионы (этот результат принадлежит Колмогорову и Понтрягину).

Переходим к неевклидовым геометриям. XIX век прошел как бы под знаком освоения неевклидовых геометрий. Драматическая история открытия и доказательства непротиворечивости геометрии Лобачевского (в которой принимали участие такие великие математики, как Гаусс, Лобачевский, Бойяи, Риман, Бельтрами, Кэли, Клейн, Пуанкаре, Гильберт и другие) привела к перевороту в осмыслении всей математики.

Нам осталось сказать лишь несколько слов о том, что такое плоскость Римана и плоскость Лобачевского. Плоскость Римана можно представлять себе как обычную сферу в трехмерном евклидовом пространстве, у которой диаметрально противоположные точки идентифицированы. Расстояние на этой плоскости — это длина кратчайшей из двух дуг больших окружностей, которые соединяют точки на сфере. Движениями являются всевозможные повороты пространства вокруг центра сферы, отражения относительно плоскостей и их композиции. Прямыми на этой плоскости называют дуги больших окружностей.

На плоскости Римана через две точки можно провести прямую, причём только одну, но параллельных прямых там нет — все прямые пересекаются.

Плоскость же Лобачевского можно представить себе как верхнюю полу гиперболоида в трехмерном пространстве, задаваемую системой $x_3^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1$, $x_3 > 0$.

Движения — это линейные преобразования $\mathbb{R}^3$, преобразующие в себя конус $x_3 \geqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Эти преобразования сыграли выдающуюся роль в истории науки, ибо оказались связанными с преобразованиями Лоренца — основными преобразованиями теории относительности. На нашем гиперболоиде можно задать инвариантное расстояние, превращающее плоскость Лобачевского в метрическое пространство. Движениями на плоскости Лобачевского являются ее изометрии.

В геометрии евклидовой плоскости, плоскости Римана и плоскости Лобачевского много общего. Например, у равнобедренных треугольников углы при основаниях равны. Но много и отличий; скажем, ни в геометрии Римана, ни в геометрии Лобачевского нет подобия, треугольники определяются своими углами, в римановой геометрии нет параллельности, все прямые пересекаются, а в геометрии Лобачевского через одну точку вне некоторой прямой можно провести множество параллельных. Но тем не менее, все названные геометрии могут быть рассмотрены с единой точки зрения.

Осознав это, Клейн и выдвинул свою Эрлангенскую программу. Ею (во многом) мы руководствовались при построении этой книги.

Глава 1

Евклидов мир

Евклидов мир наиболее привычен для каждого из нас. Образ бесконечно простирающейся во все стороны школьной доски, на которой тончайшими остриями можно обозначать точки, через них — по линейкам остро отточенными карандашами — чертить прямые; где циркулем можно проводить окружности любого радиуса, — этот образ возникает у каждого из нас почти одновременно с зарождением самого сознания и так и остается в нашем воображении навсегда. Поэтому мы и начинаем именно с евклидовой геометрии.

§ 1.1. Евклидовы прямая и плоскость

> Хотя идеи, на которых основан метод аналитической геометрии, детски просты, тем не менее этот метод настолько мощен, что, применяя его, рядовые 17-летние молодые люди могут решать задачи, которые поставили бы в тупик величайших геометров.
>
> *Э. Т. Белл*

В школе изучают евклидову геометрию на плоскости. В основе этого изучения лежит (иногда тщательно скрываемый) *дедуктивный метод*. Этот метод состоит в том, что основные понятия теории не определяются, а описываются. Основополагающие свойства основных элементов теории формулируются в виде аксиом, принимаемых без доказательств. Остальные утверждения теории логически выводятся из аксиом.

Первая дошедшая до нас попытка дедуктивного построения геометрии была осуществлена Евклидом в третьем веке до н. э. Поэтому знакомство с величайшими геометрами естественно начинать именно с него.

Евклид (ок. 356—ок. 300 до н. э.) — древнегреческий математик. Жил в Александрии во времена Птолемея I (одного из полководцев Александра Македонского, ставшего после смерти Александра царем Египта). По легенде Птолемей заинтересовался геометрией, и Евклид стал ему рассказывать начальные сведения о ней. Вскоре царь выказал признаки нетерпения: «А нельзя ли как-нибудь попроще?» На что Евклид гордо ответил, что *к геометрии нет царской дороги*.

Основное произведение Евклида — «Начала» — одно из величайших достижений научной мысли и база геометрического школьного образования на протяжении всей последующей истории культурного человечества. Ни одна из книг научной литературы не пользовалась таким успехом, как «Начала»: с момента первого печатного издания в 1482 г. она выдержала свыше 500 изданий на большинстве языков мира.

«Начала» Евклида открываются описанием основных понятий: *точка есть то, что не имеет частей*, [...] *прямая линия есть та, которая равнорасположена по отношению к точкам на ней, плоская поверхность есть та, которая равнорасположена ко всем прямым в ней* и т. д. Затем следуют аксиомы (впрочем, Евклид называет их *постулатами*). Приведем для примера три из них.

А.1. *От всякой точки до всякой точки можно провести прямую.* В современном варианте: *через любые две различные точки проходит прямая, и притом только одна.*

А.2. *Из всякого центра и всяким раствором может быть описан круг* (сейчас мы скажем — окружность).

А.3. Пятую аксиому (постулат) Евклида приведем в современной формулировке: *через точку, лежащую вне прямой, можно провести параллельную прямую, и притом только одну.*

Сформулировав геометрические аксиомы и несколько общих утверждений о свойствах величин (типа: *равные одному и тому же равны между собой* — именно они в «Началах» называются аксиомами), Евклид приступает к доказательствам. Его первая теорема формулируется так: *существует равносторонний треугольник* (в евклидовой формулировке: *на данной ограниченной прямой*[1] *можно построить равносторонний треугольник*). Но если внимательно проанализировать рассуждения Евклида (даже самые изначальные), то обнаруживаются пробелы в них — аксиоматика Евклида не обладает *полнотой*, необходимой для аксиоматического построения теории в нынешнем понимании этого слова. Например, при построении равностороннего треугольника ABC Евклид пользуется тем, что окружности радиуса $|AB|$ с центрами A и B имеют общую точку, хотя это и не следует из его аксиом.

Завершенная аксиоматика евклидовой плоскости была дана Гильбертом в 1899 г. в его знаменитой книге «Основания геометрии».

Давид Гильберт (1862—1943) — один из крупнейших математиков XX столетия. Его работы охватывали фактически всю современную ему математику. Он внес фундаментальный вклад в алгебру, геометрию, теорию чисел, классический и бесконечномерный анализ, математическую физику, логику и основания математики.

При построении аксиоматики Гильберт шел по пути Евклида. Его аксиоматика содержит пять групп аксиом. Она основывается на понятиях точки, прямой, плоскости; свойствах точек лежать на прямой и лежать между двумя точками, свойствах фигур быть конгруэнтными, т. е. совпадающими при наложении. Эти понятия и свойства не определяются, но связываются аксиомами.

[1] Так у Евклида говорится об отрезках.

После Гильберта было предложено множество других аксиоматик евклидовой плоскости. Спустя десять лет после работы Гильберта И. Шур предложил систему аксиом геометрии, основанную на понятии движения (где основными понятиями были точки, прямые, плоскость и движение). При этом он следовал идеям Клейна. А спустя еще одно десятилетие Г. Вейль создал векторную аксиоматику евклидовой плоскости и евклидова пространства, которую мы опишем в следующем параграфе. Мы расскажем и еще об одной аксиоматике, принадлежащей А. Н. Колмогорову, в которой имеются четыре исходных понятия: точка, прямая, плоскость и расстояние.

Но мы в этой книге будем касаться аксиоматического построения геометрий во вторую очередь, излагая геометрии на языке одной или нескольких ее моделей. И сейчас мы начнем с описания модели евклидовой плоскости, восходящей к Декарту и Ферма.

Декартова модель евклидовой прямой и плоскости

Моделью евклидовой прямой является совокупность вещественных чисел $\mathbb{R}$. Геометрически прямую можно представлять себе как жесткий бесконечно протяженный стержень, «не имеющий толщины». Его нельзя гнуть, растягивать или сжимать. Его можно только сдвигать по себе как твердое тело и отражать («переворачивать») относительно любой точки. Выбрав на таком стержне начальную точку O, положительное направление и масштаб, мы можем реализовать наш геометрический образ его арифметической моделью, сопоставив каждой точке X стержня число x — ее координату, равную расстоянию до начала со знаком $+$, если точка расположена на положительном луче, и со знаком $-$, если она находится на отрицательном луче. После этого мы можем не обращаться к геометрическому образу, а иметь дело лишь с числами. На числовой прямой можно ввести расстояние $d(x, y) = |x - y|$ и группу движений, т. е. совокупность взаимно однозначных преобразований числовой прямой, сохраняющих расстояния. К таким движениям относятся сдвиги $x \mapsto x + a$, отражения $x \mapsto -x$ и их суперпозиции. Читатель без труда докажет, что так описываются все движения.

Декартовой моделью евклидовой плоскости служит совокупность всех пар вещественных чисел. Геометрически ее можно мыслить себе как неограниченно простирающуюся плоскость школьной доски (тоже «без толщины»). При этом считается, что в нашем распоряжении имеются неограниченные линейки, позволяющие проводить прямые, и циркуль, позволяющий проводить окружности с любым центром любого радиуса.

Плоскость нельзя ни изгибать, ни растягивать. Ее можно только перемещать как твердое тело (параллельно самой себе или поворачивая вокруг какой-нибудь точки) или отражать относительно некоторой прямой; можно также совершать композиции этих преобразований.

Проведем на плоскости две перпендикулярные прямые, пересекающиеся в точке O (считаем для определенности, что одна из них — ось Ox_1 — горизонтальна, а другая — ось Ox_2 — вертикальна). Точку пересечения осей обозначим буквой O и назовем *началом координат*. Выберем определенный масштаб. Если теперь указать какую-то точку Z на плоскости, то ее можно спроектировать на ось Ox_1, проведя прямую, параллельную оси Ox_2, до пересечения с Ox_1. Расстояние от этой точки пересечения до начала координат обозначим z_1. Аналогично получим число z_2. Числа z_1 и z_2 называются *координатами* точки Z (см. рис. 1.1).

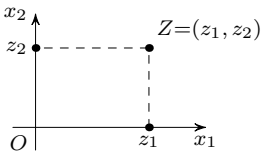


Рис. 1.1

Таким образом, в описанной модели *точка* — это упорядоченная пара вещественных чисел, а *плоскость* — это совокупность всех упорядоченных пар $X=(x_1, x_2)$, где x_i — вещественные числа. Точки условимся обозначать большими латинскими буквами X, Y, Z, ..., их координаты — соответственными малыми буквами: $X=(x_1, x_2)$, $Y=(y_1, y_2)$, $Z=(z_1, z_2)$ и т.п. Совокупность всех вещественных чисел обозначают $\mathbb{R}$, совокупность пар чисел — $\mathbb{R}^2$. Вот мы и определили, что такое точка и что такое плоскость. Осталось определить еще два основных понятия — прямую и расстояние. *Прямая* определяется как множество точек, удовлетворяющих линейному уравнению $a_1x_1 + a_2x_2 = b$, где числа a_1 и a_2 не равны нулю одновременно. При этом тройки (a_1, a_2, b) и $(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda b)$, $\lambda \neq 0$, определяют одну и ту же прямую. Прямые будем обозначать малыми латинскими буквами середины алфавита (l, m, n, ...).

В этой книге мы встретимся со множеством геометрий — с аффинной, проективной, сферической, геометриями Римана и Лобачевского. Евклидова плоскость (в отличие от аффинной и подобно плоскостям Римана и Лобачевского) является *метрическим пространством*: важнейшим ее свойством является наличие *расстояния* между двумя точками. В нашей арифметической модели расстояние $d(X, Y)$ между точками $X=(x_1, x_2)$ и $Y=(y_1, y_2)$ в соответствии с теоремой Пифагора равно $\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$ (рис. 1.2). *Движением* евклидовой плоскости называют взаимно однозначное отображение плоскости на себя, при котором сохраняются расстояния между любыми двумя точками. Движениями являются параллельные переносы

($x_1' = x_1 + a_1$, $x_2' = x_2 + a_2$), поворот вокруг начала координат на угол φ ($x_1' = x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi$, $x_2' = -x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi$), отражения относительно оси Ox_1 ($x_1' = x_1$, $x_2' = -x_2$) и их всевозможные комбинации. (Других движений нет, и это мы докажем впоследствии.)

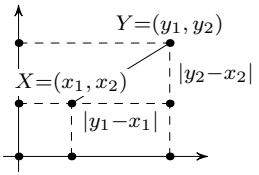


Рис. 1.2

Мы получили объект, фигурирующий в эрлангенской программе Клейна: совокупность точек $X = (x_1, x_2)$, на которых транзитивно действует описанная группа движений.

Такова арифметическая (или *декартова*) модель евклидовой плоскости. Эту реализацию евклидовой плоскости будем обозначать $\mathbb{E}^2$.

Исторический комментарий. Прямолинейные координаты и вывод уравнений прямой и кривых второго порядка появились в трактате Пьера Ферма «Ad locus planos et solidos isagoge» («Введение в теорию плоских и пространственных фигур»), написанном в 1636 г., но опубликованном лишь после смерти Ферма — в 1679 г. В 1637 г. вышла в свет знаменитая книга Рене Декарта «Геометрия», в которой также фактически была построена описанная выше модель евклидовой плоскости. Теперь эту модель называют «декартовой».

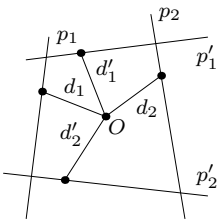


Рис. 1.3.

Любопытно отметить, что к созданию аналитической геометрии Ферма и Декарт пришли независимо, но при этом занимались они решением одной и той же задачи из «Математического собрания» Паппа Александрийского (III в. н. э.). Вот формулировка этой задачи. Пусть нам даны n прямых (на рис. 1.3 $n = 4$). Разобьем их на два множества: при $n = 2k$ рассмотрим прямые $p_1, \ldots, p_k$ и $p_1', \ldots, p_k'$, а при $n = 2k+1$ — прямые $p_1, \ldots, p_k$ и $p_1', \ldots, p_{k+1}'$. Из произвольной точки O можно провести к данным прямым отрезки под данными углами. Пусть d_i и d_i' — длины отрезков, проведенных к прямым p_i и p_i'. Требуется описать множество точек O, для которых отношение произведения длин d_i к произведению длин d_i' было бы постоянно. Папп сообщает, что Аполлоний решил задачу при $n = 3$ и 4. Ответом в обоих случаях служат конические сечения.

Рене Декарт (1596—1650) — философ, математик, физик, один из величайших ученых Франции всех времен. Соперник Ферма во многих вопросах математики и натурфилософии. Его книга «Геометрия» — великое произведение научной литературы. В нем введено понятие переменной величины и дано алгебраическое описание геометрических объектов. Именем Декарта, помимо координат, названы «лист», «овал» и другие геометрические фигуры.

Имя *Пьера Ферма* (1601—1665) известно, наверное, всем. И «виной» тому — Великая теорема Ферма. На протяжении столетий Великая теорема Ферма вызывала неслыханный ажиотаж. Она совсем недавно была доказана Э. Уайлсом.

Однако тем, кто интересуется математикой, имя Ферма говорит очень многое и независимо от его великой гипотезы. Он был, безо всякого сомнения, одним из самых проницательных умов своего времени, времени гигантов. Ему суждено было стать родоначальником теории чисел и раскрыть в ней множество поразительных тайн; одновременно с Декартом он заложил основания аналитической геометрии; он внес фундаментальный вклад и в математический анализ, и в комбинаторику.

Незадолго до смерти Ферма написал: «Быть может, потомство будет признательно мне за то, что я показал ему, что древние знали не все». Галилей, Кеплер, Декарт и Ферма заложили базу для науки Нового времени.

Теперь мы можем, как и в случае прямой, не обращаться к геометрическому образу, а иметь дело только с ее моделью (но мы будем поступать и так и этак). Однако при этом важно отметить вот что: *все утверждения евклидовой геометрии, в частности все утверждения, составляющие аксиомы, становятся в декартовой модели теоремами алгебры и арифметики.*

Приведем в качестве первой теоремы совокупность утверждений, составляющих упоминавшиеся выше евклидовы постулаты о простейших свойствах прямых и расстояний.

В формулировке теоремы участвуют два новых понятия. Несмотря на то что они, конечно, известны читателю, дадим их формальные определения.

Определение. *Окружностью* называется множество точек, равноудаленных от некоторой точки. *Прямой, параллельной данной*, называется либо сама эта прямая, либо прямая, не имеющая с данной общих точек.

Теорема 1 (о свойствах прямых и окружностей). *В декартовой модели евклидовой плоскости*

1) *через любые две различные точки проходит прямая, и притом только одна*;

2) *из всякого центра любым раствором можно описать окружность*;

3) *через точку, лежащую вне прямой, можно провести параллельную прямую, и притом только одну.*

Доказательство. 1) Пусть $Y = (y_1, y_2)$ и $Z = (z_1, z_2)$ — две различные точки. Если $y_1 = z_1$, искомой прямой будет прямая, заданная уравнением $x_1 = y_1$. А если первые координаты точек не совпадают, искомой прямой будет множество таких точек (x_1, x_2), что

$$x_2 - \frac{z_2 - y_2}{z_1 - y_1}(x_1 - y_1) = y_2.$$

2) Окружность с центром $Z = (z_1, z_2)$ радиуса $r > 0$ есть множество таких точек (x_1, x_2), что $(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 = r^2$.

3) Прямая, проходящая через точку $Z = (z_1, z_2)$ параллельно прямой l, заданной уравнением $a_1x_1 + a_2x_2 = b$, описывается уравнением $a_1x_1 + a_2x_2 = a_1z_1 + a_2z_2$.

Мы доказали *существование* искомых объектов. Читателю предоставляется доказать их единственность. □

Алгебраически — подобно тому как это было сделано выше — может быть определено любое понятие евклидовой геометрии. Понятие *инцидентности* точки и прямой (в гильбертовой аксиоматике) означает не что иное, как то, что координаты точки удовлетворяют уравнению прямой; точка X лежит между A и B, если существует такое число ϑ, $0 \leqslant \vartheta \leqslant 1$, что $\vartheta(a_1, a_2) + (1-\vartheta)(b_1, b_2) = (x_1, x_2)$; две фигуры называются *конгруэнтными*, если одна из них переводится в другую движением.

Давайте обсудим доказательства нескольких утверждений среди первых предложений «Начал» Евклида (мы приводим их в современной редакции).

Предложение 1. *Существует равносторонний треугольник со стороной любой длины.*

Для доказательства достаточно привести три точки, находящиеся на расстоянии a друг от друга, скажем, $(0, 0)$, $(0, a)$ и $(a/2, a\sqrt{3}/2)$. (Мы отмечали, что доказательство Евклида неполно.)

Предложение 5. *У равнобедренного треугольника углы при основании равны между собой.*

У Евклида нет сколько-нибудь точного определения величины угла между сторонами треугольника, и при доказательстве он использует несколько немотивированных импликаций. Мы же можем определить величину угла между сторонами BA и CA формулой $\arccos \dfrac{(b_1-a_1)(c_1-a_1)+(b_2-a_2)(c_2-a_2)}{d(A, B)\cdot d(A, C)}$, из которой предложение 5 следует очевидным образом.

Предложение 5 верно, как мы увидим, и в геометрии Римана, и в геометрии Лобачевского. Считается, что оно принадлежит Фалесу.

Фалес Милетский (ок. 625—547 до н. э.) — древнегреческий математик. Его называют первым математиком в истории науки. Ему приписывают первые доказательства в геометрии: равенства вертикальных углов, равенства углов при основании в равнобедренном треугольнике, равенства угла, опирающегося на диаметр, прямому углу и др. При этом он использовал идею движения и связанного с ним наложения. Фалес стал первым «прикладным математиком», вычислив высоту пирамиды и расстояние до корабля в море. Он предсказал солнечное затмение 28 мая 585 г. до н. э.

Отметим здесь же одну простую формулу, описывающую ситуацию, когда три точки $X = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1, y_2)$ и $Z = (z_1, z_2)$ лежат на одной прямой. Обозначим через $\det\{A, B\}$ для $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ выражение $a_1b_2 - a_2b_1$ (его называют *определителем* матрицы $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$). Точки X, Y и Z лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\det\{X, Y\} + \det\{Y, Z\} + \det\{Z, X\} = 0. \tag{1.1}$$

Действительно, $\det\{A, B\}$ — это не что иное, как (ориентированная)

площадь параллелограмма, натянутого на векторы A и B. (Читатель может доказать это самостоятельно или прочитать доказательство на с. 36.) С учетом сделанного замечания о площадях формула (1.1) приобретает естественный геометрический смысл (см. рис. 1.4): площадь треугольника OXY + + площадь треугольника OYZ + площадь треугольника OZX равна нулю.

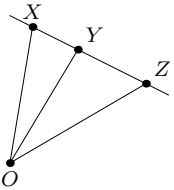


Рис. 1.4.

Подобным образом — алгебраически, как это было сделано в теореме о свойствах прямых и окружностей, — может быть доказано любое утверждение евклидовой геометрии, решена любая задача и выведена любая формула. Что же касается задач, то многие интересные задачи планиметрии будут решены уже в этом параграфе, а для того чтобы добиться в этом большего успеха, нам придется совершить еще один краткий экскурс в алгебру и описать еще одну («комплексную») модель евклидовой плоскости.

Евклидова плоскость и комплексные числа

Комплексным числом называют выражение вида $a+bi$, где a и b — вещественные числа, а i — символ, удовлетворяющий соотношению $i^2=-1$. Числа a и b называют соответственно *вещественной* и *мнимой* частью комплексного числа $z=a+bi$; обозначения: $a=\operatorname{Re} z$, $b=\operatorname{Im} z$.

Перемножают комплексные числа по обычным правилам раскрытия скобок и приведения подобных членов, заменяя каждый раз i^2 на -1, т. е. $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$. Комплексные числа можно делить (кроме, разумеется, деления на нуль):

$$(a+bi):(c+di)=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}.$$

Число $\bar z=a-bi$ называют *комплексно сопряженным* к $z=a+bi$.

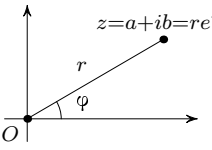


Рис. 1.5

Если выбрать декартову систему координат, то устанавливается взаимно однозначное соответствие между комплексными числами и точками плоскости: $(a,\,b)\longleftrightarrow(a+bi)$. При этом умножение на комплексное число z приобретает такую геометрическую интерпретацию. Пусть r — расстояние от z до нуля, а φ — угол, на который надо повернуть луч, содержащий положительную вещественную полуось $\{z\mid z=a+0i,\ a\geqslant 0\}$, чтобы повернутый луч прошел через z (см. рис. 1.5). Числа r и φ называются соответственно *модулем* и *аргументом* числа z (обозначения: $r=|z|$,

$\varphi = \arg z$). Геометрическую интерпретацию умножения комплексных чисел можно теперь сформулировать так: *при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.* При этом числу z можно придать такую форму: $z = re^{i\varphi}$.

Получилась еще одна модель евклидовой плоскости, где точки — это комплексные числа z, сама плоскость — это совокупность всех комплексных чисел (обозначаемая $\mathbb{C}$), прямые — множества точек, задаваемые уравнениями

$$\bar{a}z + a\bar{z} = \beta, \quad \beta = \bar{\beta}, \quad a \neq 0 \tag{1.2}$$

(таким образом, прямая задается парой (a, β), где a — комплексное, а β — вещественное число, и пары (a, β) и $(\lambda a, \lambda\beta)$ для любого отличного от нуля вещественного числа λ определяют одну и ту же прямую), наконец, расстояние между точками z и ζ определяется формулой $d(z, \zeta) = |z - \zeta|$.

Движения евклидовой плоскости в комплексной модели описываются следующим образом. Параллельный перенос: $z' = z + a$, поворот относительно начала: $z' = bz$, $|b| = 1$, отражение относительно вещественной оси: $z' = \bar{z}$.

Имеет место полный аналог теоремы 1 в этой комплексной модели. Уравнение прямой, проходящей через точки ζ и ζ' (эту прямую обозначаем $\zeta\zeta'$), можно задать уравнением $\zeta(\bar{\zeta}' - \bar{z}) - \zeta'(\bar{\zeta} - \bar{z}) + z(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}') = 0$ (его нетрудно привести к виду (1.2), домножив на i); уравнение окружности с центром в ζ и радиусом r имеет вид $(z - \zeta)(\bar{z} - \bar{\zeta}) = r^2$; уравнение прямой, параллельной прямой $\bar{a}z + a\bar{z} = \beta$ и проходящей через точку ζ, имеет вид $\bar{a}z + a\bar{z} = \bar{a}\zeta + a\bar{\zeta}$.

Если вы забыли какую-нибудь теорему или формулу элементарной геометрии, не обязательно стараться найти ее в учебнике — ее обычно легко вывести, используя комплексные числа (надо лишь воспользоваться основными формулами тригонометрии и формулой Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$). Вот примеры двух важных формул евклидовой геометрии, которые мы выведем таким способом.

Начнем с *теоремы косинусов*, которая выражает длину стороны треугольника через длины двух других сторон и угол между ними.

Для вывода соответствующей формулы разместим треугольник ABC со сторонами a, b и углом φ между ними так, что $C = 0$, $A = be^{i\varphi}$, а $B = a$. Пусть $|AB|$ — длина стороны AB. Тогда

$$|AB|^2 = c^2 = |a - be^{i\varphi}|^2 = (a - be^{i\varphi})(a - be^{-i\varphi}) = \\ = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi = |AC|^2 + |BC|^2 - 2|AC||BC|\cos\varphi.$$

Получили теорему косинусов. В частности, если $\varphi = \pi/2$, получаем *теорему Пифагора*: $c^2 = a^2 + b^2$.

Докажем теперь *теорему синусов*, которая дает возможность вычислить две стороны треугольника, зная третью сторону и два угла при этой стороне.

Для вывода формулы опишем вокруг треугольника ABC окружность (пусть ее радиус R) и поместим нуль в центр окружности. Тогда $A = Re^{i\varphi_1}$, $B = Re^{i\varphi_2}$, $C = Re^{i\varphi_3}$ и, следовательно,

$$|BC|^2 = R^2|e^{i\varphi_2} - e^{i\varphi_3}|^2 = R^2(e^{i\varphi_2} - e^{i\varphi_3})(e^{-i\varphi_2} - e^{-i\varphi_3}) =$$
$$= 2R^2(1 - \cos(\varphi_2 - \varphi_3)) = 4R^2 \sin^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{2} = 4R^2 \sin^2 A$$

(вписанный угол равен половине соответствующего центрального). Итак, $|BC| = 2R \sin A$, аналогично $|AC| = 2R \sin B$, $|AB| = 2R \sin C$, откуда и следует теорема синусов: $\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}$.

К обобщению этих теорем в сферической геометрии, геометрии Римана и геометрии Лобачевского мы еще вернемся в пятой главе, посвященной этим замечательным геометриям.

Из теоремы синусов при $a = b$ получаем *теорему Фалеса*: *в равнобедренном треугольнике углы при основании равны.*

Мы приобрели еще один «комплексный» ключ решения любой геометрической задачи. Но прежде чем продемонстрировать, как пользоваться этими ключами — декартовым и комплексным, — выпишем несколько соотношений. Доказательство их совершенно элементарно и предоставляется читателю. Но сначала два обозначения. Пусть z_1, z_2, z_3 — три комплексных числа. Выражение

$$(z_1, z_2, z_3) = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$$

называется *простым отношением* этих чисел. Если же z_1, z_2, z_3, z_4 — четверка различных комплексных чисел, то выражение

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$$

(т. е. отношение простых отношений (z_1, z_2, z_3) и (z_1, z_2, z_4)) называется *двойным отношением* этих чисел.

Имеют место следующие соотношения и формулы.

1. *Для того чтобы точки z_1, z_2 и z_3 лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы простое отношение (z_1, z_2, z_3) было вещественным.*

2. *Для того чтобы четыре точки $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ лежали на одной прямой или окружности, необходимо и достаточно, чтобы двойное отношение (z_1, z_2, z_3, z_4) было вещественным.*

3. *Если z — точка пересечения касательных в точках ζ и ζ' к единичной окружности, то*

$$z = \frac{2}{1/\zeta + 1/\zeta'} = \frac{2}{\bar\zeta + \bar\zeta'}$$

(*иначе*: *z есть среднее гармоническое ζ и ζ', которое будем обозначать* $\gamma(\zeta, \zeta')$) (рис. 1.6).

4. *Если на единичной окружности $|z|=1$ расположены четыре точки a, b, c, d, то точку e пересечения прямых ab и cd можно найти по формуле*

$$e = \frac{(\bar a + \bar b) - (\bar c + \bar d)}{\bar a\bar b - \bar c\bar d}$$

(рис. 1.7).

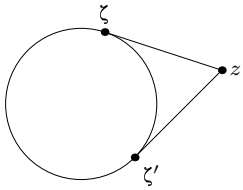


Рис. 1.6

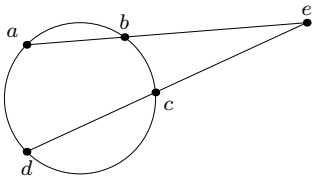


Рис. 1.7

Решение задач

Теперь решим несколько задач, а заодно познакомимся с некоторыми из величайших геометров всех времен.

Задача Ньютона. *В описанном около окружности четырехугольнике середины диагоналей коллинеарны* (*т. е. лежат на одной прямой*) *с центром окружности* (рис. 1.8).

Исаак Ньютон (1643—1727) — один из величайших гениев в истории человечества. В своей книге «Математические начала натуральной философии» (1687) он заложил основы современного естествознания, создал Систему Мира. Лагранж назвал это сочинение «величайшим из произведений человеческого ума». Наряду с *Лейбницем* Ньютон является родоначальником математического анализа. Он внес значительный вклад и в геометрию, в частности, им были расклассифицированы кривые третьего порядка.

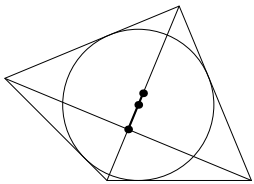


Рис. 1.8

Прямая Эйлера. *В любом треугольнике центр тяжести треугольника, его ортоцентр и центр описанного круга лежат на одной прямой* (рис. 1.9).

Леонард Эйлер (1707—1783) — математик, физик, механик, астроном — один из величайших и благороднейших тружеников в истории науки. Автор свыше 800 трактатов и научных статей, занимающих свыше 90 (!) томов. Его переписка содержит около 4000 писем сотням адресатов — такое доступно лишь людям исключительных личных достоинств. Внес огромный вклад во все области математики, в том числе и в геометрию. Вызывал восхищение современников и последователей, чему можно привести множество свидетельств. Вот одно из них: «Читайте Эйлера — он наш общий учитель» (Лаплас).

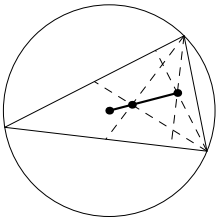


Рис. 1.9

Прямая Гаусса. *Пусть $ABCD$ — вершины произвольного четырехугольника, E — точка пересечения прямых AB и CD, F — точка пересечения прямых BC и AD, M — середина AC, N — середина BD, O — середина EF. Тогда точки M, N, O лежат на одной прямой* (рис. 1.10).

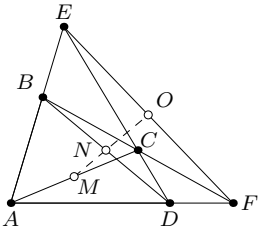


Рис. 1.10

Карл Фридрих Гаусс (1777—1855) внес огромный вклад и в алгебру, и в анализ, и в геометрию, а также в физику, астрономию и геодезию. Его многие называли «королем математиков» (Princeps Mathematicorum). Наряду с Бойяи и Лобачевским (но раньше их, хотя свои исследования он так и не опубликовал) он открыл основы неевклидовой геометрии. Одним из первых дал геометрическую интерпретацию комплексных чисел, заложил начала дифференциальной геометрии.

Теорема Паскаля. *Точки пересечения прямых, содержащих противоположные стороны вписанного шестиугольника, лежат на одной прямой* (рис. 1.11).

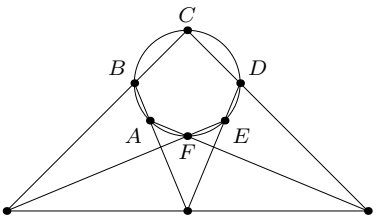


Рис. 1.11

Блез Паскаль (1623—1662) — математик, физик и философ. Паскаль (наряду с Ферма) заложил основы комбинаторики (вспомним «треугольник Паскаля») и теории вероятностей. Был среди тех, кто разрабатывал основы математического анализа. Знаменитая теорема Паскаля (сформулированная нами) — один из краеугольных камней, на которых зиждется здание проективной геометрии. Она была доказана Паскалем в возрасте 16 лет. Паскалю принадлежат слова (с которыми, впрочем, можно и не соглашаться): «Не огромность Мира вызывает восхищение, а человек, который измерил его».

Какое блистательное созвездие имен, какое великолепное собрание геометрических шедевров! Попробуйте решить эти задачи геометриче-

ски, не прибегая к алгебре. Если вам это удастся, вы получите истинное наслаждение.

Но тех знаний, которыми мы овладели в течение столь короткого времени, тех формул, которые умещаются на одной странице, оказывается достаточно, чтобы сразу понять, как решать все эти задачи, а доведение дела до конца становится предметом несложной техники.

Не верите? Смотрите!

В задаче Ньютона естественно воспользоваться формулами

$$\zeta_1 = \gamma(z_1,\, z_4), \quad \zeta_2 = \gamma(z_1,\, z_2), \quad \zeta_3 = \gamma(z_2,\, z_3), \quad \zeta_4 = \gamma(z_3,\, z_4)$$

(см. утверждение 3 на с. 23), а далее для точек $\dfrac{(\zeta_1+\zeta_3)}{2}$, 0, $\dfrac{(\zeta_2+\zeta_4)}{2}$ применить утверждение 1 на с. 22.

В задаче Эйлера разместим треугольник ABC так, чтобы его вершины заняли положение $C=(0,\,0)$, $B=(a,\,0)$, $A=(b\cos\varphi,\, b\sin\varphi)$. Без особых усилий вы найдете координаты и центра тяжести, и центра описанной окружности, и ортоцентра (а именно: центр тяжести имеет координаты $\left(\dfrac{b\cos\varphi+a}{3},\, \dfrac{b\sin\varphi}{3}\right)$, центр описанного круга — $\left(\dfrac{a}{2},\, \dfrac{b-a\cos\varphi}{2\sin\varphi}\right)$, ортоцентр — $(b\cos\varphi,\, (a-b\cos\varphi)\operatorname{ctg}\varphi)$). И останется только проверить, что все они лежат на одной прямой (воспользовавшись теоремой о свойствах прямых и окружностей или формулой (1.1) на с. 19).

В задаче Гаусса надо трижды — для точек M, N, O — воспользоваться формулой (1.1) на с. 19, а потом применить ту же формулу для четырех троек точек, лежащих на одной прямой.

Объясним это подробнее. Записав выражение (1.1) для точек M, N и O, получим

$$\begin{aligned}\det\Big\{\frac{(A+C)}{2},\, \frac{(B+D)}{2}\Big\} + \det\Big\{\frac{(B+D)}{2},\, \frac{(E+F)}{2}\Big\} + \\ + \det\Big\{\frac{(E+F)}{2},\, \frac{(A+C)}{2}\Big\} = \frac{1}{4}(\det\{A,\, B\} + \det\{C,\, D\} + \det\{A,\, D\} + \\ + \det\{C,\, B\} + \det\{B,\, E\} + \det\{D,\, E\} + \det\{B,\, F\} + \det\{D,\, F\} + \\ + \det\{E,\, A\} + \det\{F,\, A\} + \det\{E,\, C\} + \det\{F,\, C\}),\end{aligned}$$

а далее нужно применить формулу (1.1) для троек

$$\{A,\, B,\, E\}, \quad \{C,\, B,\, F\}, \quad \{A,\, D,\, F\}, \quad \{C,\, D,\, E\},$$

каждая из которых принадлежит одной прямой.

Наконец, для доказательства теоремы Паскаля воспользуемся утверждением 4 на с. 23. Согласно этому утверждению

$$\bar h = \frac{a+b-(d+e)}{ab-de}, \quad \bar k = \frac{b+c-(e+f)}{bc-ef}, \quad \bar g = \frac{c+d-(f+a)}{cd-fa}.$$

Следовательно,

$$\frac{\bar{h}-\bar{k}}{\bar{k}-\bar{g}} \in \mathbb{R},$$

так как $\bar{a} = \dfrac{1}{a}$ и т. д. Для завершения доказательства остается применить утверждение 1 на с. 22.

И ведь все наши рассуждения абсолютно естественны, не так ли? Вот оно — подтверждение мысли, высказанной в эпиграфе к этому параграфу.

В заключение приведем решения еще двух задач.

Сначала расскажем об одной «исторической» задаче.

Во всех приведенных выше случаях доказательство с помощью метода координат конкурирует с замечательными геометрическими доказательствами, которые предшествовали аналитическому решению. А в нижеследующей задаче решение было дано сразу в аналитической форме. Речь идет о теореме, принадлежащей принцессе *Елизавете* (1618—1680), ученице Декарта.

Теорема принцессы Елизаветы. *Все точки, касательные из которых к двум данным не концентрическим окружностям равны, лежат на одной прямой.* (Эту прямую называют *радикальной осью* двух окружностей.)

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно заметить, что квадрат длины касательной, проведенной из точки (x, y) к окружности радиуса R с центром в (ξ, η), равен

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 - R^2,$$

а потому координаты всех искомых точек удовлетворяют уравнению

$$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 - R_1^2 = (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 - R_2^2,$$

т. е.

$$2(x_2-x_1)x + 2(y_2-y_1)y = R_1^2 - R_2^2 + x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2. \qquad \square$$

Этот результат восхитил Декарта. Он утверждал, что не взялся бы доказать эту теорему даже за месяц! Впрочем, не исключено, что это был изысканный образец французской галантности.

И, наконец, — небольшая новелла о бабочке.

Пусть AC — хорда, B — ее середина, а точки P и Q лежат на окружности по одну сторону от AC. Пусть S и R — точки пересечения с окружностью прямых PB и QB соответственно. Проведем отрезки QS и PR, и пусть N и M — точки их пересечения с AC. Доказать, что $|MB| = |NB|$ (рис. 1.12).

Фигура $RPBSQ$ напоминает бабочку, не так ли? И потому эту задачу называют *butterfly problem* — задачей о бабочке.

Бабочка — дама весьма солидного возраста. Точная дата и место ее рождения неизвестны (она, как и положено, скрывает свой возраст), но, так или иначе, первое «метрическое свидетельство» о ее рождении появилось в 1815 г. в английском журнале Gentlmen's Diary (на с. 39—40 под № 1029). На протяжении всех последующих лет Бабочка доставляла истинное удовольствие почти каждому, кому доводилось с ней познакомиться. Любители Бабочки посвятили ей многие эссе и разного рода послания, причем поток их не иссякает. А когда проходит определенное время, пишутся даже целые обзоры. Читатель может удостовериться в этом прочитав, например, статью [B3].

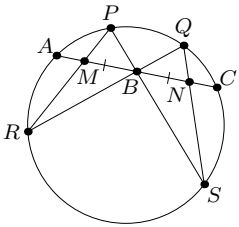


Рис. 1.12

Существует несметное число решений этой замечательной задачи. Вот одно из «простейших» геометрических решений butterfly problem.

Проведем хорду PT параллельно AC. Тогда: $|BP| = |BT|$ (1), и угол PBA равен углу TBC равен углу BPT равен углу PTB (2). Углы TPS и TQS — равные или дополнительные, поэтому вокруг четырехугольника $BTQN$ можно описать окружность, и, следовательно, угол BTN равен углу BQN равен углу MPB (3).

Из утверждений (1)—(3) вытекает, что треугольники MPB и BTN равны, а значит, $|MB| = |BN|$, что и требовалось!

Попробуйте теперь решить эту задачу аналитически! Мы еще вернемся к этому сюжету (см. с. 90).

§ 1.2. Евклидово n-мерное пространство

Векторное пространство $\mathbb{R}^n$

Арифметическую модель евклидовой плоскости, о которой речь шла в предыдущем параграфе, обобщим на n-мерный случай.

Определение. *Векторным пространством* $\mathbb{R}^n$ называют множество векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$, где x_i — вещественные числа $(x_i \in \mathbb{R})$.

Числа x_i называют *координатами* вектора x. (Векторы, в отличие от точек, будем обозначать малыми буквами.) Два вектора $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ считаются равными тогда и только тогда, когда $x_i = y_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ имеются две естественные операции: сложение векторов и умножение вектора на число. *Суммой векторов* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ называют вектор $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$. *Произведением числа* $\lambda \in \mathbb{R}$ *на вектор* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ называют вектор $\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$.

При этом, как легко проверить, выполняются следующие соотношения:

1) $x + y = y + x$;

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$;

3) имеется нулевой вектор 0 такой, что $x + 0 = x$ для любого вектора x;

4) для любого вектора x имеется противоположный ему вектор y такой, что $x + y = 0$;

5) $1\,x = x$;

6) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;

7) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;

8) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

Множество X, для которого определены операции сложения элементов и умножения элементов на вещественные числа, удовлетворяющие свойствам 1)—8), называют *векторным* или *линейным пространством*.

Вектор $0 = (0, \ldots, 0)$ играет в $\mathbb{R}^n$ роль нулевого вектора.

Примером векторного пространства является прежде всего сама вещественная прямая $\mathbb{R}$, а также $\mathbb{R}^n$.

Другими примерами векторных пространств являются пространство полиномов $\mathcal{P}_{n-1}$ степени не выше $n-1$ (почему именно $n-1$, а не n, — об этом чуть позже) и пространство $C([a, b])$ непрерывных функций на отрезке $[a, b]$.

Пусть X и Y — векторные пространства, $A\colon X \to Y$ — отображение из X в Y. Оно называется *линейным*, если $A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A(x_1) + \lambda_2 A(x_2)$ для любых $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ и $x_1, x_2 \in X$.

Линейная функция на $\mathbb{R}^n$ (т. е. линейное отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$) описывается равенством

$$f(x) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n.$$

Определение. Векторные пространства X и Y называют *изоморфными*, если существует биективное линейное отображение $\Lambda : X \to Y$. Само отображение Λ называют при этом *изоморфизмом* X на Y.

Определение. Подмножество $L \subset \mathbb{R}^n$ называют *линейным подпространством*, если для любых векторов $x, y \in L$ и любых вещественных чисел $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ вектор $\lambda x + \mu y$ лежит в L.

Иначе можно сказать так: подмножество векторов $L \subset X$, которое само является линейным пространством относительно действий, определенных на X, называется линейным подпространством. Важнейшими примерами линейных подпространств в $\mathbb{R}^n$ являются прямая и гиперплоскость (проходящие через начало координат). *Прямая* задается вектором $\bar{x} \neq 0$ и состоит из векторов вида $\lambda\bar{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. *Гиперплоскость* состоит из векторов, координаты которых удовлетворяют одному линейному уравнению $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$, где не все a_i равны нулю.

Пусть $a^1, \ldots, a^n$ — векторы в $\mathbb{R}^n$. Вектор $\lambda_1a^1 + \ldots + \lambda_na^n$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, называют *линейной комбинацией* векторов $a^1, \ldots, a^n$.

Векторы $a^1, \ldots, a^n$ называются *линейно независимыми*, если из равенства $\lambda_1a^1 + \ldots + \lambda_na^n = 0$ следует, что $\lambda^1 = \ldots = \lambda^n = 0$. Семейство линейно независимых векторов в подпространстве $L \subset \mathbb{R}^n$ называется *базисом* подпространства L, если любой вектор подпространства является линейной комбинацией векторов семейства. Число векторов в любом базисе одно и то же; оно называется *размерностью* подпространства L. Примером базиса в $\mathbb{R}^n$ может служить *канонический базис*, состоящий из n векторов $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$.

Размерность пространства $\mathcal{P}_{n-1}$ равна n (этим и вызвано то, что степень полиномов мы ограничили числом $n-1$), и базисом в этом пространстве служат одночлены $\{t^k\}_{k=0}^{n-1}$. Пространство $C([a, b])$ бесконечномерно, в нем можно найти бесконечное число линейно независимых элементов, например $x_n = t^n$, $n = 0, 1, \ldots$

Определение. *Скалярным произведением векторов* $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)$ называют число

$$(a, b) = a_1b_1 + \ldots + a_nb_n.$$

Векторное пространство $\mathbb{R}^n$ со скалярным произведением называют *евклидовым* (векторным) пространством.

Скалярное произведение порождает *расстояние*

$$d(x, y) = \sqrt{(x - y, x - y)} = ((x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2)^{1/2}.$$

По определению $d(x, y) = d(x - y, 0)$.

Введенное расстояние удовлетворяет следующим свойствам:

1) $d(x, y) \geqslant 0$ для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$, и $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

2) $d(x, y) = d(y, x)$;

3) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (*неравенство треугольника*).

Первые два свойства очевидны. Доказательство неравенства треугольника проведем сначала для $y = 0$. Оно основано на известном нера-

венстве Коши—Буняковского.

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i z_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} z_i^2\right)^{1/2}. \tag{1.3}$$

Из этого неравенства получаем

$$d^2(x,\, z) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + z_i^2) - 2\sum_{i=1}^{n} x_i z_i \overset{(1.3)}{\leqslant}$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} z_i^2\right)^{1/2} + \sum_{i=1}^{n} z_i^2 = (d(x,\, 0) + d(z,\, 0))^2.$$

А теперь получаем $d(x,\, z) = d(x - y,\, z - y) \leqslant d(x - y,\, 0) + d(z - y,\, 0) = d(x,\, y) + d(z,\, y)$, что и требовалось.

Таким образом, мы превратили $\mathbb{R}^n$ в метрическое пространство.

Число $|x| = d(x,\, 0) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$ называют *длиной* вектора x.

Векторы a и b называют *ортогональными*, если $(a,\, b) = 0$. *Углом* между ненулевыми векторами a и b называют число $\arccos \dfrac{(a,\, b)}{|a||b|}$.

Таким образом, скалярное произведение векторов a и b равно произведению длин этих векторов на косинус угла между ними (см. рис. 1.13).

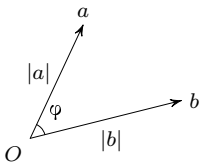


Рис. 1.13

Векторы $f_1, \ldots, f_k$ в $\mathbb{R}^n$ называют *ортонормированными*, если

$$(f_i,\, f_i) = 1, \quad (f_i,\, f_j) = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

Легко понять, что n ортонормированных векторов образуют базис в $\mathbb{R}^n$. В самом деле, пусть $\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n = 0$. Тогда $\lambda_1 (f_1,\, f_i) + \ldots + \lambda_n (f_n,\, f_i) = 0$, т. е. $\lambda_i = 0$.

Примером ортонормированного базиса является канонический базис, введенный нами ранее.

Здесь нам придется сделать одно отступление.

Аффинное пространство $\mathbb{A}^n$ и евклидово пространство $\mathbb{E}^n$

Евклидово (векторное) пространство $\mathbb{R}^n$ при $n = 2$ не является еще обобщением того объекта, с которым имеет дело школьная планиметрия. Истинное обобщение складывается из двух этапов. На первом возникают *точки* и *векторы*. Обобщением такой структуры и является понятие *аффинного пространства*. Аффинные пространства получаются из векторных, когда мы как бы забываем про начало координат и вообще про координаты. Затем в эту структуру вносится метрика, и получается n-мерное евклидово пространство, обобщающее евклидову плоскость, изучаемую в школе.

Определение. *Аффинное пространство над* $\mathbb{R}^n$ состоит из точек $A=(a_1,\ldots,a_n)$, где $a_i\in\mathbb{R}$. При этом каждой упорядоченной паре точек $A=(a_1,\ldots,a_n)$ и $B=(b_1,\ldots,b_n)$ сопоставляется вектор $\overrightarrow{AB}=$ $=(b_1-a_1,\ldots,b_n-a_n)$ с началом A и концом B. Точка $O=(0,\ldots,0)$ является здесь *началом координат*.

Таким образом, аффинное пространство над $\mathbb{R}^n$ (мы его обозначим $\mathbb{A}^n$) — это множество точек, причем каждой точке $A\in\mathbb{A}^n$ сопоставлено линейное пространство $\mathbb{R}^n$, а именно пространство векторов $\overrightarrow{AB}$, где A, B — точки из $\mathbb{A}^n$.

Аксиоматически аффинное пространство $\mathbb{A}^n$ определяется тройкой $(\mathbb{A}^n, X, +)$, где $\mathbb{A}^n$ — множество точек, X — линейное пространство, а «+» — операция добавления к точке вектора, удовлетворяющая следующим трем аксиомам:

1) для всякой точки $A\in\mathbb{A}^n$ и любых x, $x'\in X$ имеет место равенство $(A+x)+x'=A+(x+x')$;

2) для всех $A\in\mathbb{A}^n$ выполняется равенство $A+0=A$;

3) для любых A, $B\in\mathbb{A}^n$ существует единственный такой вектор $x\in X$, что $A+x=B$.

«Стандартное» n-мерное аффинное пространство $\mathbb{A}^n$ над $\mathbb{R}^n$ состоит из тройки $(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n,+)$, образованной точками $A=(a_1,\ldots,a_n)$, векторами $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ и операцией $+$ добавления к точке вектора. В нем можно, фиксировав начало координат в точке $O=(0,\ldots,0)$, отождествлять точки аффинного пространства с векторами $\mathbb{R}^n$, а именно точку $A=(a_1,\ldots,a_n)$ отождествить с вектором $a=(a_1,\ldots,a_n)=\overrightarrow{OA}$. Поэтому иногда мы будем обозначать точки и соответствующие им векторы одними и теми же буквами (хотя «правильное» обозначение таково: точки — большие латинские буквы, векторы — малые).

Здесь уместно сказать, как в аффинном пространстве описывается прямая, проходящая через две точки, и отрезок, соединяющий две точки.

Прямая, проходящая через через две точки A и B с координатами $a=(a_1,\ldots,a_n)$ и $b=(b_1,\ldots,b_n)$, — это совокупность точек с координатами $\lambda_1a+\lambda_2b$, $\lambda_1+\lambda_2=1$; отрезок $[A,B]$ — это совокупность точек $\lambda_1a+\lambda_2b$, $\lambda_i\geqslant 0$, $\lambda_1+\lambda_2=1$.

Сейчас мы ограничимся лишь приведенными сведениями и перейдем к n-мерному обобщению евклидовой плоскости. (Подробнее об аффинных пространствах будет говориться в главе 2.)

Определение. *Евклидовым n-мерным пространством* $\mathbb{E}^n$ *над* $\mathbb{R}^n$ со скалярным произведением $(x,x')=\sum\limits_{i=1}^{n}x_ix'_i$ называется такое множество точек $\mathbb{A}^n$, как в определении аффинного пространства, при-

чем между точками определено расстояние $d(A,\,A') = \Big(\sum\limits_{i=1}^{n}(a'_i - a_i)^2\Big)^{1/2}$ (здесь $A = (a_1,\,\ldots,\,a_n)$, $A' = (a'_1,\,\ldots,\,a'_n)$).

Это пространство мы обозначим $\mathbb{E}^n$.

Таким образом, евклидово пространство $\mathbb{E}^n$ — это тройка $(\mathbb{A}^n,\,(\mathbb{R}^n,\,(\cdot,\,\cdot)),\,+)$, состоящая из точек аффинного пространства $\mathbb{A}^n$, евклидова n-мерного векторного пространства и операции добавления к точке вектора. Пространство $\mathbb{E}^n$ является метрическим пространством.

Мы описали точки и расстояния между точками. Пришло время сказать несколько слов о движениях евклидова пространства. Движениями, как и в случае плоскости, называют взаимно однозначные отображения, сохраняющие расстояния.

Пусть $X \mapsto f(X)$ — движение евклидова пространства $\mathbb{E}^n$, O — начало координат и $A = f(O)$. Тогда $f(X) = A + g(\overrightarrow{OX})$, где g — такое преобразование векторного пространства, что $g(0) = 0$. При этом

$$|g(\overrightarrow{OX}) - g(\overrightarrow{OY})| = d(f(X),\,f(Y)) = d(X,\,Y) = |\overrightarrow{XY}|.$$

Таким образом, $|g(x) - g(y)|^2 = |x - y|^2$, а значит, $(g(x),\,g(y)) = (x,\,y)$.

Положим $\varepsilon_i = g^{-1}(e_i) = a_{i1}e_1 + \ldots + a_{in}e_n$, где $e_1,\,\ldots,\,e_n$ — канонический базис. Тогда $g(\varepsilon_i) = e_i$, поэтому

$$(g(x),\,e_i) = (x,\,\varepsilon_i) = x_1a_{i1} + \ldots + x_na_{in},$$

т. е. $g(x) = x'_1e_1 + \ldots + x'_ne_n$, где $x'_i = x_1a_{i1} + \ldots + x_na_{in}$. В частности, g — линейное преобразование. Для векторов $\varepsilon_1,\,\ldots,\,\varepsilon_n$ выполняется соотношение $(\varepsilon_i,\,\varepsilon_j) = (e_i,\,e_j)$, т. е. $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = 1$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = 0$ при $i \neq j$. Матрицу (a_{ij}), элементы которой удовлетворяют таким соотношениям, называют *ортогональной*, а линейное преобразование g с ортогональной матрицей (a_{ij}) называют *ортогональным*.

Итак, любое движение евклидова пространства является композицией сдвига $x \mapsto a + x$ и ортогонального преобразования. Легко проверить, что верно и обратное, т. е. как сдвиг, так и ортогональное преобразование являются движениями.

Исторический комментарий. Ферма и Декарт, создатели аналитической геометрии на плоскости, ввели соответствие между точками и парами чисел все же в несколько завуалированной форме — иначе для перехода от плоскости к трехмерному пространству потребовалось бы меньше века, а ведь основы трехмерной аналитической геометрии были заложены Клеро лишь в 1731 г.

Алексис Клод Клеро (1713—1765) — французский математик и астроном. Начал научную деятельность в возрасте 12 лет. В 18 лет опубликовал работу по аналитической и дифференциальной геометрии трехмерного пространства.

Арифметическая модель n-мерного пространства появилась еще через 100 лет. Основная заслуга в ее создании принадлежит *Уильяму Гамильтону* (1805—1865).

Гамильтон внес большой вклад в геометрию. Он первым ввел понятие «вектор» и определил понятие векторного пространства. Определил новую числовую систему — кватернионы.

§1.3. Введение в многомерный мир евклидовой геометрии

В школе мы изучаем сначала евклидову планиметрию, затем — стереометрию.

В планиметрии основным понятием является понятие прямой, в стереометрии — плоскости. Затем уже геометрический мир наполняется треугольниками, кругами, квадратами, шарами, пирамидами и другими фигурами. Сначала мы расскажем об обобщении прямой и плоскости в n-мерном евклидовом пространстве. Более подробно об этих подмножествах $\mathbb{A}^n$ рассказывается в курсах линейной алгебры.

Аффинные многообразия

Само построение n-мерного евклидова и n-мерного аффинного пространств было осуществлено по аналогии с двумерным случаем. Но для того чтобы обжиться в многомерном мире, нужно овладеть некоторыми сведениями из линейной алгебры. Здесь приводится ряд таких сведений и (где это возможно) дается их геометрическая интерпретация.

Начнем с обобщения прямых и плоскостей. Прямую в арифметической модели можно определить двояко. Во-первых, как совокупность точек $X = (x_1, x_2)$, удовлетворяющих уравнению $a_1x_1 + a_2x_2 = b$, а во-вторых, как множество точек вида $X + \lambda e$, где e — фиксированный вектор из $\mathbb{R}^2$, а X — фиксированная точка плоскости.

Второе определение годится и для многомерного случая: совокупность точек вида $X + \lambda e$, где X — точка n-мерного евклидова пространства и e — некоторый вектор из $\mathbb{R}^n$, есть прямая в $\mathbb{E}^n$. Первое определение приводит к другому важному понятию — понятию гиперплоскости. *Гиперплоскость* в декартовой модели евклидова n-мерного пространства задается уравнением

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b, \tag{1.4}$$

т. е. она является множеством уровня линейной функции. В нашем «обычном» трехмерном пространстве так задаются обычные плоскости и только они.

Прямая — одномерный объект, гиперплоскость — $(n-1)$-мерный. Что это значит? И что лежит между 1 и $n-1$? Мы хотим здесь определить k-мерные аналоги прямой и плоскости в n-мерном пространстве, называемые k-мерными аффинными многообразиями. Прямая и плоскость обладают тем свойством, что вместе с любыми двумя своими точками они содержат всю прямую, проходящую через эти точки. Множества в n-мерном пространстве с таким свойством и называются *аффинными многообразиями*.

Одномерные аффинные многообразия (прямые) — это совокупности точек $X + \lambda e$, где e — фиксированный n-мерный вектор, $\lambda \in \mathbb{R}$. Двумерные аффинные многообразия — двумерные аффинные плоскости — естественно определить по аналогии как совокупности точек $X + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$, где e_1 и e_2 — два фиксированных линейно независимых вектора из $\mathbb{R}^n$, а λ_1 и λ_2 — произвольные вещественные числа.

Аффинное k-мерное многообразие — это совокупность точек $X + \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i e_i$, где $\{e_i\}_{i=1}^k$ — фиксированные линейно независимые векторы из $\mathbb{R}^n$, а $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$ — произвольные вещественные числа. Ясно, что k-мерные аффинные многообразия — сдвиги k-мерных линейных подпространств. В линейной алгебре доказывается, что k-мерные аффинные многообразия могут описываться по-другому («двойственным» образом) как пересечения $n-k$ гиперплоскостей. Гиперплоскость имеет размерность $n-1$. Например, гиперплоскость, задаваемая уравнением $x_n = 0$, есть множество точек $O + \sum\limits_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_i$, где $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_{n-1} = (0, \ldots, 1, 0)$.

Линейная алгебра изучает теорию линейных (а затем квадратичных) функций и линейных уравнений в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Линейные функции — это функции вида

$$f(x) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n.$$

Система m уравнений с n неизвестными задается m линейными уравнениями $f_1(x) = b_1$, $\ldots$, $f_m(x) = b_m$, или, в развернутом виде,

$$\begin{gathered} a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m. \end{gathered}$$

Таким образом, с геометрической точки зрения теория линейных уравнений — это описание пересечения семейства гиперплоскостей в $\mathbb{R}^n$.

Как выяснилось сравнительно недавно, большую роль в практической жизни играют задачи с *линейными неравенствами* следующего

вида: найти минимум линейной функции

$$f_0(x) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$$

при условиях

$$f_i(x) = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \leqslant b_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Такие задачи называются задачами *линейного программирования.*

Таблица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ называется *матрицей* размера m на n (или $m \times n$).

Матрицы можно перемножать по следующему правилу: если $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$, $B = (b_{jk})_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ 1\leqslant k\leqslant s}}$, то $AB = (c_{ik})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \\ 1\leqslant k\leqslant s}}$, $c_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$.

Матрица состоит из m строк, каждую из которых можно интерпретировать как n-мерный вектор-строку, и n столбцов, каждый из которых интерпретируется как m-мерный вектор-столбец.

Особую роль среди матриц играют квадратные матрицы — матрицы размера $n \times n$.

Выписанную выше систему m уравнений с n неизвестными можно записать сокращенно в виде $Ax = b$, если векторы x и b изобразить в виде векторов-столбцов, или матриц размера $m \times 1$.

С матрицами связаны два важнейших понятия: *определитель* и *ранг*. Оба они имеют геометрическое толкование. Начнем с определителя.

Определители и объемы

Представим параллелограмм $A_0A_1A_2A_3$ на плоскости в векторном виде. Поместим начало координат в точку A_0 и обозначим $a^1 = \overrightarrow{A_0A_1}$, $a^2 = \overrightarrow{A_0A_2}$. Тогда вершинами параллелограмма являются начало координат и три точки, соответствующие векторам a^1, a^2 и $a^1 + a^2$, а сам параллелограмм состоит из точек $x = \lambda_1a^1 + \lambda_2a^2$, $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$. Аналогично, параллелепипед в трехмерном пространстве (если начало координат поместить в одну из его вершин) состоит из точек $\sum\limits_{i=1}^{3} \lambda_i a^i$, $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$. Все это очень легко обобщается на k-мерный случай. Для этого поместим снова начало координат в точку A_0 и рассмотрим векторы $a^i = \overrightarrow{A_0A_i}$. Множество «концов» векторов $\sum\limits_{i=1}^{k} t_i a^i$, $0 \leqslant t_i \leqslant 1$, называется *$n$-мерным параллелепипедом* в $\mathbb{R}^n$.

В том случае, когда векторы $\{a^i\}_{i=1}^n$ взаимно ортогональны, параллелепипед называется *прямоугольным*. Длины векторов $a^1, \ldots, a^n$ называют длинами ребер параллелепипеда. Прямоугольный параллелепипед

с равными ребрами называют *кубом*. Объем единичного n-мерного куба принимается обычно за единицу, и исходя из этого строится теория меры в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Дадим определение k-мерной грани n-мерного параллелепипеда в $\mathbb{R}^n$. Начнем с $(n-1)$-мерной грани. Гиперплоскость Π^{n-1} называют гиперплоскостью грани n-мерного параллелепипеда $M^n \subset \mathbb{R}^n$, если M^n лежит «по одну сторону» от Π^{n-1} и пересечение M^n с Π^{n-1} является $(n-1)$-мерным параллелепипедом (см. рис. 1.14).

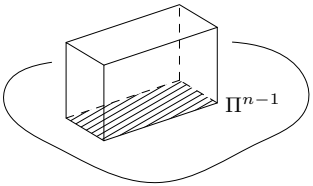


Рис. 1.14

Пересечение гиперплоскости грани с n-мерным параллелепипедом M^n называют $(n-1)$-мерной гранью параллелепипеда M^n. Для n-мерного параллелепипеда $X + \sum\limits_{i=1}^{n} t_i a^i$ грань размерности $n-1$ состоит из векторов $X + \varepsilon a^k + \sum\limits_{i \neq k} t_i a^i$, где $\varepsilon = 0$ или 1, $0 \leqslant t_i \leqslant 1$.

Таким образом, $(n-1)$-мерная грань n-мерного параллелепипеда является $(n-1)$-мерным параллелепипедом. Поэтому $(n-2)$-мерную грань можно определить как $(n-2)$-мерную грань ее $(n-1)$-мерной грани, и т. д. Нульмерные грани называют *вершинами*, а одномерные — *ребрами*.

Для n-мерного параллелепипеда $(n-k)$-мерная грань состоит из концов векторов

$$X = \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j a^{m_j} + \sum_{i \neq m_1, \ldots, m_k} t_i a^i,$$

поэтому количество $(n-k)$-мерных граней n-мерного параллелепипеда равно $2^k \binom{n}{n-k}$.

Теперь определим *объем параллелепипеда*.

Вернемся на короткое время на нашу знакомую евклидову плоскость. Выберем ортогональную декартову систему координат и рассмотрим параллелограмм $ABCO$ (см. рис. 1.15), порожденный векторами $a_1 = (a_{11}, a_{21})$ и $a_2 = (a_{12}, a_{22})$. Вычислив площадь треугольника OAC и удвоив результат, получим, что площадь параллелограмма равна

$$a_{12}a_{22} + (a_{11} - a_{12})(a_{21} + a_{22}) - a_{11}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Точнее говоря, площадь параллелограмма равна этому числу при таком расположении векторов a_1 и a_2, как на рис. 1.15. В общем случае площадь параллелограмма равна $|a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}|$.

Составим из столбцов координат векторов a_1 и a_2 матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

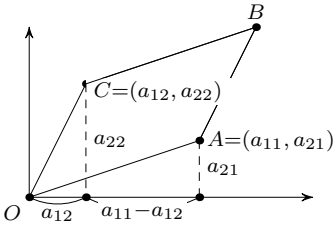


Рис. 1.15.

Определителем или *детерминантом* матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ называют число $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Это число можно назвать *ориентированной площадью параллелограмма*. Ориентация параллелограмма задается указанием направления обхода его вершин. Изменение ориентации параллелограмма приводит к изменению знака ориентированной площади (см. рис. 1.16). Определитель матрицы A обозначают $\det A$ или $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. Матрицу A называют невырожденной, если $\det A \neq 0$. Невырожденные матрицы образуют группу $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$.

Определим теперь объем трехмерного параллелепипеда, порожденного векторами $\{a_1, a_2, a_3\}$ (см. рис. 1.17). Начнем с неориентированного

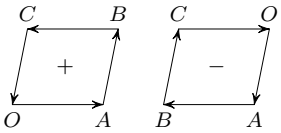


Рис. 1.16

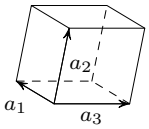


Рис. 1.17

объема. Его можно определить формулой $V = hS$, где S — площадь грани $\{a_1, a_2\}$, а h — длина проекции вектора a_3 на нормаль к плоскости этой грани. Перейдем теперь к определению ориентированного объема $V(a_1, a_2, a_3)$ параллелепипеда, порожденного векторами a_1, a_2, a_3. Это определение должно быть согласовано с формулой $|V(a_1, a_2, a_3)| = h|S(a_1, a_2)|$. Определим число $V(a_1, a_2, a_3)$ следующими четырьмя свойствами:

1) $V(\dots a_i, a_{i+1} \dots) = -V(\dots a_{i+1}, a_i \dots)$;

2) $V(\dots \lambda a_i \dots) = \lambda V(\dots a_i \dots)$;

3) $V(\dots a_i + b_i \dots) = V(\dots a_i \dots) + V(\dots b_i \dots)$;

4) $V(e_1, e_2, e_3) = 1$, где $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

Свойство 1) согласуется с определением неориентированного объема, так как

$$h_1 S_{23} = h_2 S_{13} = h_3 S_{12}.$$

Свойства 2) и 4) особых комментариев не требуют, а свойство 3) следует из того, что проекция суммы двух векторов на некоторый единичный вектор равна сумме их проекций (при этом проекции берутся с учетом знака).

Проверим сначала, что свойства 1)—4) однозначно определяют функцию $V(a_1, a_2, a_3)$. Свойства 2) и 3) показывают, что

$$V\left(\sum_i a_{i1} e_i, \sum_j a_{j2} e_j, \sum_k a_{k3} e_k\right) = \sum_{i,j,k} a_{i1} a_{j2} a_{k3} V(e_i, e_j, e_k).$$

Свойство 1) показывает, что величина $V(e_i, e_j, e_k)$ равна $\pm V(e_1, e_2, e_3)$, если числа i, j, k различны, и равна нулю, если среди чисел i, j, k есть одинаковые. При этом знак $+$ берется в том случае, когда для преобразования набора (i, j, k) в набор $(1, 2, 3)$ требуется четное число транспозиций (перестановок пар соседних элементов), а знак минус берется в том случае, когда требуется нечетное число транспозиций.

Применение свойства 4) завершает вычисление функции $V(a_1, a_2, a_3)$. В результате получаем

$$V(a_1, a_2, a_3) = \sum (-1)^\sigma a_{i1} a_{j2} a_{k3},$$

где $(-1)^\sigma$ — знак подстановки $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}$. Нетрудно убедиться, что функция $V(a_1, a_2, a_3)$, определенная этой формулой, действительно удовлетворяет свойствам 1)—4), т. е. эти свойства непротиворечивы и однозначно определяют функцию $V(a_1, a_2, a_3)$. Согласованность свойств 1)—4) с формулой $V = hS$ приводит к тому, что $|V(a_1, a_2, a_3)|$ совпадает с неориентированным объемом параллелепипеда, порожденного векторами a_1, a_2, a_3.

Определение. *Ориентированным объемом* $V(a_1, \dots, a_n)$ параллелепипеда, порожденного векторами $a_1, \dots, a_n$ в пространстве $\mathbb{R}^n$, называется число

$$V(a_1, \dots, a_n) = \sum (-1)^\sigma a_{i_1 1} \dots a_{i_n n},$$

где $(-1)^\sigma$ — знак подстановки $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix}$, a_{ij} — координаты вектора a_j.

Число $V(a_1, \ldots, a_n)$, заданное этой формулой, называют *определителем матрицы* $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ и обозначают $\det A$. Совокупность невырожденных матриц образует группу $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

Пусть $b_{ij} = a_{ji}$ и $A^T = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ — транспонированная матрица. Элементами матрицы $A^T A$ служат скалярные произведения векторов $a_i = (a_{1i}, \ldots, a_{ni})$ и $a_j = (a_{1j}, \ldots, a_{nj})$. Определитель этой матрицы называют *определителем Грама*. Он равен квадрату определителя матрицы A, т. е. квадрату объема параллелепипеда, натянутого на векторы $a_1, \ldots, a_n$.

Мы рассказали об определителях. Теперь скажем несколько слов о ранге матрицы. Сначала дадим алгебраическое определение.

Пусть $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ — матрица размера $m \times n$. Определитель матрицы, элементы которой стоят на пересечении p строк и p столбцов матрицы A, называют *минором* p-го порядка матрицы A. Максимальный порядок ненулевого минора называют *рангом* матрицы. В линейной алгебре доказывается, что ранг матрицы совпадает с максимальным числом линейно независимых столбцов и максимальным числом линейно независимых строк матрицы.

Теперь — геометрическая интерпретация. Соответствие $x \mapsto Ax$, где x — n-мерный вектор-столбец, а A — матрица размера $m \times n$, интерпретируется как линейное отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. Ранг матрицы — это размерность образа пространства $\mathbb{R}^n$ при этом отображении.

И еще одно дополнительное замечание. Мы рассказывали про вещественный евклидов мир. Но можно было бы аналогично построить комплексный мир, базирующийся на комплексном векторном пространстве $\mathbb{C}^n$ со скалярным произведением $(z, \xi) = z_1\overline{\xi}_1 + \ldots + z_n\overline{\xi}_n$. (Более того, теория строится над любым полем, однако в общем случае геометрическая интерпретация затруднительна).

Симплексы и шары

Множество C в аффинном пространстве называют *выпуклым*, если вместе с любыми двумя точками $X, Y \in C$ оно содержит и весь отрезок XY.

Выпуклой оболочкой точек $A_1, \ldots, A_N$ в аффинном пространстве называют наименьшее выпуклое множество, содержащее эти точки (т. е. пересечение всех выпуклых множеств, содержащих точки $A_1, \ldots, A_N$).

По-другому выпуклую оболочку можно определить следующим образом. Фиксируем произвольную точку O и рассмотрим множество C, состоящее из концов векторов $\lambda_1\overrightarrow{OA}_1 + \ldots + \lambda_N\overrightarrow{OA}_N$, где $\lambda_i \geqslant 0$ и $\sum \lambda_i = 1$. Легко проверить, что множество C не зависит от выбора точки O, а в

случае двух точек A_1 и A_2 оно представляет собой отрезок A_1A_2. Теперь уже несложно показать, что в общем случае C — выпуклая оболочка точек $A_1, \ldots, A_N$.

Совокупность точек X_i, $0 \leqslant i \leqslant k$, в n-мерном аффинном пространстве называют *аффинно независимой*, если векторы $\overrightarrow{X_0X_i}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, линейно независимы. Выпуклую оболочку $n+1$ аффинно независимой точки в n-мерном аффинном пространстве называют *n-мерным симплексом*. Одномерный симплекс — это отрезок, двумерный — треугольник, трехмерный — треугольная пирамида. Среди симплексов в n-мерном евклидовом пространстве особо замечательны *правильные симплексы*, у которых длины всех ребер X_iX_j равны.

Шаром радиуса r с центром в точке O в евклидовом пространстве называют множество точек, удаленных от O на расстояние не больше r, а множество точек, находящихся в точности на расстоянии r, называют *сферой* радиуса r с центром O.

Задачи к главе 1

Многомерные пространства

1.1. Докажите, что если вершины треугольника имеют рациональные координаты, то центр его описанной окружности имеет рациональные координаты.

1.2. Найдите угол между плоскостями

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4 = 0, \quad b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4 = 0$$

в пространстве $\mathbb{R}^3$.

1.3. Найдите координаты вектора в $\mathbb{R}^3$, параллельного линии пересечения плоскостей

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4 = 0, \quad b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0.$$

1.4. Укажите две двумерные плоскости в $\mathbb{R}^4$, пересекающиеся в одной точке.

1.5. Укажите две скрещивающиеся (т. е. не параллельные и не пересекающиеся) двумерные плоскости в $\mathbb{R}^4$.

1.6. Точка A расположена внутри сферы в пространстве $\mathbb{R}^3$, а само пространство $\mathbb{R}^3$ помещено в $\mathbb{R}^4$. Можно ли двигать точку A в $\mathbb{R}^4$ так, чтобы она ни в какой момент времени не пересекала сферу, а в конце пути оказалась бы снова в $\mathbb{R}^3$, но уже вне рассматриваемой сферы?

1.7. В пространстве $\mathbb{R}^3$ расположены две зацепленные окружности (см. рис. 1.18 (а)). Пространство $\mathbb{R}^3$ помещено в $\mathbb{R}^4$. Можно ли одну из

окружностей перемещать в $\mathbb{R}^4$ так, чтобы она ни в какой момент не пересекала бы вторую окружность, а в конце концов обе окружности оказались бы снова в $\mathbb{R}^3$, но уже были бы не зацеплены (см. рис. 1.18 (б))?

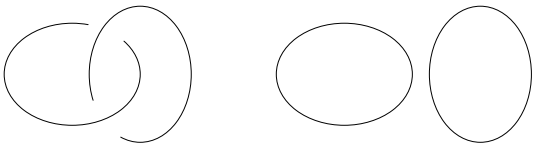


Рис. 1.18

1.8. Сумма квадратов длин проекций векторов $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ на любую прямую постоянна. Докажите, что при некотором $\lambda \in \mathbb{R}$ векторы $\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n$ образуют ортонормированный базис.

1.9. а) Можно ли расположить в кубе 9 точек так, чтобы попарные расстояния между ними были не меньше d, где d — длина ребра куба?

б) Можно ли расположить в четырехмерном кубе 17 точек так, чтобы попарные расстояния между ними были не меньше d, где d — длина ребра куба?

1.10. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис, $a_1, \ldots, a_n$ — некоторый набор векторов. Обозначим угол между векторами e_i и a_i через α_i. Докажите, что если

$$\cos\alpha_1 + \ldots + \cos\alpha_n > \sqrt{n(n-1)},$$

то векторы $a_1, \ldots, a_n$ линейно независимы.

1.11. Шары радиусов $R_1, \ldots, R_m$ с центрами $A_1, \ldots, A_m$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ имеют общую точку. Докажите, что если точки $B_1, \ldots, B_m$ таковы, что $|B_iB_j| \leqslant |A_iA_j|$, то шары радиусов $R_1, \ldots, R_m$ с центрами $B_1, \ldots, B_m$ тоже имеют общую точку.

1.12. а) В пространстве $\mathbb{R}^3$ даны векторы a_1, a_2, a_3, попарные углы между которыми не тупые. Докажите, что оси прямоугольной системы координат можно выбрать так, что координаты данных векторов будут неотрицательны.

б) В пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 5$, укажите векторы $a_1, \ldots, a_5$, попарные углы между которыми не тупые, но при этом нельзя выбрать оси прямоугольной системы координат так, чтобы координаты данных векторов были неотрицательны.

Определители

1.13. Докажите, что точки (x_1, y_1), (x_2, y_2) и (x_3, y_3) лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

1.14. Докажите, что

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}^2 \leqslant (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2).$$

1.15. Пусть a, b и c — длины векторов a_1, a_2 и a_3; α, β и γ — углы между векторами a_2 и a_3, a_1 и a_3, a_1 и a_2; V — объем параллелепипеда, порожденного векторами a_1, a_2 и a_3. Докажите, что

$$V^2 = a^2b^2c^2(1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma).$$

1.16. Пусть φ_{ij} — двугранный угол между i-й и j-й гранями тетраэдра. Докажите, что

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos\varphi_{12} & \cos\varphi_{13} & \cos\varphi_{14} \\ \cos\varphi_{21} & -1 & \cos\varphi_{23} & \cos\varphi_{24} \\ \cos\varphi_{31} & \cos\varphi_{32} & -1 & \cos\varphi_{34} \\ \cos\varphi_{41} & \cos\varphi_{42} & \cos\varphi_{43} & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

1.17. а) Докажите, что объем V_n симплекса $A_1 \dots A_{n+1}$, расположенного в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$, равен hV_{n-1}/n, где V_{n-1} — объем симплекса $A_1 \dots A_n$, h — длина высоты, опущенной из вершины A_{n+1} на грань $A_1 \dots A_n$.

б) Докажите, что объем V_n симплекса $A_1 \dots A_{n+1}$ равен

$$\frac{1}{n!}|V(a_1, \dots, a_n)|,$$

где $a_i = \overrightarrow{A_{n+1}A_i}$.

1.18. Пусть V_n — объем симплекса с вершинами A_1, …, A_{n+1}, $d_{ij} = |A_iA_j|$. Докажите, что

$$V_n^2 = \frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^2 2^n} \begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & \dots & d_{1,n+1}^2 & 1 \\ d_{21}^2 & 0 & \dots & d_{2,n+1}^2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n+1,1}^2 & d_{n+1,2}^2 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

1.19. Дан симплекс с вершинами $A_1, \ldots, A_{n+1}$. Пусть $d_{ij} = |A_iA_j|$, R — радиус описанной сферы симплекса, D — определитель из предыдущей задачи. Докажите, что

$$R^2 = -\frac{\Delta}{2D}, \quad \text{где} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & \ldots & d_{1,n+1}^2 \\ d_{21}^2 & 0 & \ldots & d_{2,n+1}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{n+1,1}^2 & d_{n+1,2}^2 & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

1.20. Докажите, что точки $A_1, \ldots, A_{n+2}$ пространства $\mathbb{R}^n$ лежат на одной $(n-1)$-мерной сфере или в одной гиперплоскости тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & \ldots & d_{1,n+2}^2 \\ d_{21}^2 & 0 & \ldots & d_{2,n+2}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{n+2,1}^2 & d_{n+2,2}^2 & \ldots & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

где $d_{ij} = |A_iA_j|$.

1.21. а) Сферы радиусов $r_1, \ldots, r_{n+1}$ в $\mathbb{R}^{n-1}$ попарно касаются друг друга внешним образом. Докажите, что

$$\Big(\frac{1}{r_1} + \ldots + \frac{1}{r_{n+1}}\Big)^2 = (n-1)\Big(\frac{1}{r_1^2} + \ldots + \frac{1}{r_{n+1}^2}\Big).$$

б) Сферы радиусов $r_1, \ldots, r_{n+1}$ в $\mathbb{R}^{n-1}$ образуют друг с другом один и тот же угол φ. Докажите, что

$$\Big(\frac{1}{r_1} + \ldots + \frac{1}{r_{n+1}}\Big)^2 = \Big(n + \frac{1}{\cos\varphi}\Big)\Big(\frac{1}{r_1^2} + \ldots + \frac{1}{r_{n+1}^2}\Big).$$

(Углом между сферами с центрами O_1 и O_2, пересекающимися в точке A, называют угол между векторами $\overrightarrow{AO}_1$ и $\overrightarrow{AO}_2$.)

1.22. Даны числа $d_{ij} > 0$, где $1 \leqslant i < j \leqslant n+1$. Докажите, что в $\mathbb{R}^n$ существует симплекс $A_1 \ldots A_{n+1}$ с длинами ребер d_{ij} тогда и только тогда, когда при всех $k = 2, \ldots, n+1$ для любого набора различных точек $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ выполняется неравенство

$$(-1)^k \begin{vmatrix} 0 & d_{i_1i_2}^2 & \ldots & d_{i_1i_k}^2 & 1 \\ d_{i_2i_1}^2 & 0 & \ldots & d_{i_2i_k}^2 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{i_ki_1}^2 & d_{i_ki_2}^2 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix} > 0.$$

(Иными словами, при вычислении объема симплекса $A_{i_1} \ldots A_{i_k}$ по формуле из задачи 1.18 получается положительное число.)

Геометрия симплекса и куба

1.23. Найдите угол между двумя $(n-1)$-мерными гранями правильного n-мерного симплекса.

1.24. В пространстве $\mathbb{R}^{2n+1}$ расположен $(2n+1)$-мерный куб так, что координаты всех его вершин — целые числа. Докажите, что длина ребра куба — целое число.

1.25. Докажите, что существует двумерная плоскость, пересекающая четырехмерный симплекс, но не пересекающая ни одного из его ребер.

1.26. Докажите, что существует сечение n-мерного куба двумерной плоскостью, являющееся правильным $2n$-угольником.

1.27. а) Докажите, что через любую внутреннюю точку трехмерного куба можно провести двумерную плоскость, пересекающую все ребра куба во внутренних точках (т. е. не в вершинах).

б) Докажите, что через любую внутреннюю точку n-мерного куба можно провести трехмерную плоскость, пересекающую все $(n-1)$-мерные грани куба во внутренних точках.

1.28. Симплекс с вершинами $A_1, \ldots, A_{n+1}$ называют *ортоцентрическим*, если его высоты пересекаются в одной точке. Докажите, что симплекс является ортоцентрическим тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий.

а) При $i \neq j$, $i, j \neq 1$ величина $(\overrightarrow{A_1A_i}, \overrightarrow{A_1A_j})$ не зависит от i и j.

б) При попарно различных i, j, k, l ребра A_iA_j и A_kA_l ортогональны.

в) Одна из $(n-1)$-мерных граней является ортоцентрическим симплексом, причем высота, опущенная на нее, попадает в ортоцентр.

г) При попарно различных i, j, k, l выполняется соотношение

$$A_iA_j^2 + A_kA_l^2 = A_iA_k^2 + A_jA_l^2 = A_iA_l^2 + A_jA_k^2. \tag{1.1}$$

д) Существуют такие числа $a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$, что $A_iA_j^2 = a_i + a_j$.

е) Существует такая точка A_0 (ортоцентр), что при попарно различных i, j, k, l выполняется соотношение (1.1). Проверьте, что в этом случае существуют такие числа $a_0, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$, что $A_iA_j^2 = a_i + a_j$; эти числа удовлетворяют соотношению

$$a_0^{-1} + \ldots + a_{n+1}^{-1} = 0.$$

1.29. Пусть $A_1 \ldots A_{n+1}$ — ортоцентрический симплекс с ортоцентром H и центром описанной сферы O. Докажите, что

$$\overrightarrow{OA}_1 + \ldots + \overrightarrow{OA}_{n+1} = (n-1)\overrightarrow{OH}.$$

Глава 2

А инный мир

Аффинное пространство состоит из тех же точек, что и евклидово, но в нем обширнее группа преобразований. Геометрия аффинного мира беднее, чем геометрия евклидова мира, но и в нем имеются важнейшие объекты: это мир линейных уравнений, линейных неравенств и выпуклости. Как и в предыдущей главе (равно как и во всех последующих), мы начнем с простейших аффинных пространств — одномерного и двумерного, т. е. аффинной прямой и аффинной плоскости.

§ 2.1. Аффинная прямая и плоскость

Арифметическая модель аффинной прямой

Моделью аффинной прямой является, как и в евклидовом случае, прямая $\mathbb{R}$. Геометрически аффинную прямую можно мыслить как неизгибаемый стержень, который, однако, можно растягивать.

Выберем на этом стержне точку, обозначим ее O, выберем положительное направление, масштаб и получим возможность каждой точке прямой X поставить в соответствие ее координату x. Пока все как в евклидовом случае. Но в аффинном случае масштаб не фиксирован, расстояния не вводятся, допускаются всевозможные гомотетии (растяжения или сжатия в любое число раз) с центром в любой точке. Это значит, что преобразования аффинной прямой имеют вид $x' = \alpha x + \beta$, $\alpha \neq 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Так описывается модель аффинной прямой. На аффинной прямой, как мы сказали, расстояние не вводится, но определено понятие *предельного перехода*: $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$, если в некоторой координатной системе $x_n \to x$ (x_n и x — координаты точек X_n и X); результат не зависит от выбора системы координат. Таким образом, аффинная прямая не имеет метрической структуры, но имеет топологическую структуру.

Арифметическая модель аффинной плоскости

Моделью аффинной плоскости служит, как и в евклидовом случае, пространство $\mathbb{R}^2$ упорядоченных пар (x_1, x_2) вещественных чисел. Это точки. А их совокупность — сама аффинная плоскость. Наряду с точками имеется второй важнейший объект — прямые. Это (как и ранее) линии уровня линейных функций или множества точек, удовлетворяющих уравнениям $a_1x_1 + a_2x_2 = b$, где $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$. Движениями аффинной

плоскости называют взаимно однозначные отображения $\mathbb{R}^2$ на себя, имеющие вид $f(x_1,\, x_2) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_1,\, a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_2)$.

Те свойства геометрических фигур, которые сохраняются при аффинных преобразованиях, называются *аффинными свойствами*. К числу аффинных свойств относятся: параллельность прямых; выпуклость фигур; отношение, в котором точка делит отрезок; свойство быть медианой треугольника; отношение длин отрезков, лежащих на параллельных прямых, и т. п.

Любой треугольник является образом правильного треугольника при некотором аффинном преобразовании. Поэтому если нужно доказать какое-то аффинное свойство треугольника, то его достаточно доказать для какого-то одного треугольника. Например, очевидно, что медианы правильного треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении $1:2$. Значит, медианы любого треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении $1:2$.

Абстрактное определение аффинного n-мерного пространства было дано в первой главе. Если специализировать это определение на двумерный случай, то как раз и получится тройка, состоящая из точек, векторов из $\mathbb{R}^2$ и операции приложения вектора к точке.

Так описывается арифметическая модель аффинной геометрии. Само же это понятие возникло после появления эрлангенской программы Клейна.

В аффинной геометрии ключевую роль играют *аффинные многообразия*. На плоскости это точки, прямые и вся плоскость. В фиксированной системе координат точки — это пары $(x_1,\, x_2)$, прямые задаются уравнением $a_1x_1 + a_2x_2 = b$, $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$, и при этом прямые, заданные этим уравнением и уравнением $\lambda a_1x_1 + \lambda a_2x_2 = \lambda b_2$, $\lambda \neq 0$, — совпадают. Отметим, что любая прямая делит аффинную плоскость $\mathbb{A}^2$ на три части — две открытые полуплоскости и саму прямую. В координатах они задаются так: $a_1x_1 + a_2x_2 > b$, $a_1x_1 + a_2x_2 < b$ и $a_1x_1 + a_2x_2 = b$. Любая точка принадлежит одному из этих трех множеств, и если X_1 принадлежит первой полуплоскости, а X_2 — второй, то отрезок X_1X_2 обязательно пересечет прямую, разделяющую обе полуплоскости.

Переходим к двум основным теориям — линейных уравнений и выпуклых множеств.

Линейные уравнения на плоскости

Наша цель — описать множество решений системы уравнений

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant N.$$

Одно такое уравнение задает прямую. Следующая и важнейшая ступень — два уравнения с двумя неизвестными:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Отбросим случай, когда все a_{ij}, b_i равны нулю (тогда любая пара (x_1, x_2) — решение). Каждое из этих двух уравнений задает прямую. Возможны три варианта: либо эти прямые совпадают, либо не имеют общих точек, либо пересекаются в одной точке.

Теорема 1 (о решении системы двух уравнений с двумя неизвестными). *Для того чтобы система* (2.1) *имела решение, необходимо и достаточно, чтобы либо тройки* $(a_{11}, a_{12}, -b_1)$ *и* $(a_{21}, a_{22}, -b_2)$ *были пропорциональны, либо определитель системы* $\det A = \det(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant 2}$ *был отличен от нуля. Во втором случае решение системы* (2.1) *единственно и задается формулами*

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A},\ x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \quad \text{где} \quad A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}$$

(формулы Крамера).

Теорему 1 можно переформулировать так: для того чтобы система (2.1) была разрешимой, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ совпадал с рангом расширенной матрицы

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & -b_1 \\ a_{21} & a_{22} & -b_2 \end{pmatrix}.$$

Если ранг матрицы A равен двум, решение единственно и задается формулами Крамера.

Доказательство. Дадим два решения — алгебраическое и геометрическое.

Алгебраическое решение. Домножим первое уравнение в (2.1) на a_{22}, второе — на a_{12} и вычтем из первого второе. Получим

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_1a_{12}.$$

Аналогично

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_2a_{21}.$$

Значит, если $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, то решения выражаются формулами Крамера. Если же $\det A = 0$, то $\dfrac{a_{11}}{a_{21}} = \dfrac{a_{12}}{a_{22}}$, и для существования решения уравнения необходимо и достаточно, чтобы это отношение равнялось отношению $\dfrac{b_1}{b_2}$, что и требовалось.

Геометрическое решение. Многие красивые и важные геометрические факты видны как бы сразу, надо только нарисовать чертеж и произнести сокровенное слово: «смотри!». Так и здесь. Вспомним: определитель матрицы есть площадь параллелограмма, построенного на векторах, задаваемых ее столбцами. Теперь формула Крамера непосредственно следует из рис. 2.1, надо только внимательно посмотреть на него и продумать приведенные под ним формулы. Итак — смотри!

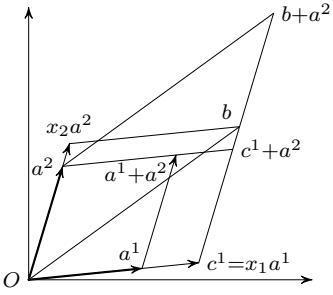


Рис. 2.1

Запишем рассматриваемую систему уравнений в виде $x_1a^1+x_2a^2=b$. Тогда

$$x_1=\frac{S_{0c^1(c^1+a^2)a^2}}{S_{0a^1(a^1+a^2)a^2}},$$

$$S_{0c^1(c^1+a^2)a^2}=S_{0b(b+a^2)a^2}=\det\begin{pmatrix}b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{pmatrix}=\det A_1,$$

$$S_{0a^1(a^1+a^2)a^2}=\det A \implies x_1=\frac{\det A_1}{\det A}. \qquad \square$$

Следствие 1. *Две различные пересекающиеся прямые пересекаются в одной точке.*

Следствие 2. *Через любую точку проходит ровно одна прямая, параллельная данной прямой.*

Следствие 1 непосредственно вытекает из теоремы 1. Докажем следствие 2. Пусть $a_1x_1+a_2x_2=b$ — прямая и $(\xi_1,\,\xi_2)$ — точка. Тогда $a_1x_1+a_2x_2=a_1\xi_1+a_2\xi_2$ — прямая, параллельная данной, и если $a'_1x_1+a'_2x_2=b'$ — некоторая другая прямая, параллельная данной, то по теореме 1 мы получаем $a'_1=\lambda a_1$, $a'_2=\lambda a_2$, т. е. $b'=\lambda a_1\xi_1+\lambda a_2\xi_2$, поэтому обе прямые совпадают.

Для завершения теории линейных уравнений осталось рассмотреть случай семейства $\{a_{i1}x_1+a_{i2}x_2=b_i,\ i\in J\}$, состоящего из более чем двух уравнений.

Возможно, все прямые, задаваемые уравнениями семейства, совпадают. Это произойдет в том и только том случае, когда $(a_{i1},\, a_{i2},\, -b_i) = \lambda_i(a_{11},\, a_{12},\, -b_1)$. Возможно, все прямые проходят через одну точку. Это будет в том и только том случае, когда величины $\dfrac{b_i a_{j2} - b_j a_{i2}}{a_{i1}a_{j2} - a_{j1}a_{i2}}$, $\dfrac{b_j a_{i1} - b_i a_{j1}}{a_{i1}a_{j2} - a_{j1}a_{i2}}$ не зависят от выбора i и j. В остальных случаях «решением» будет пустое множество.

Отметим, что мы доказали следующий результат: решением системы линейных равенств является аффинное множество (пустое множество, точка, прямая или вся плоскость).

Выпуклая геометрия на плоскости и теория линейных неравенств

Понятие выпуклости появилось в античные времена — Архимед владел понятием выпуклой поверхности. Но теория выпуклых фигур родилась лишь в XIX в. Теорию выпуклых поверхностей развили Коши, Бляшке, Г. Вейль и другие. Начала теории выпуклых фигур были разработаны в конце XIX—начале XX в. Минковским. Примерно тогда же выяснилась связь геометрии выпуклых фигур с теорией линейных неравенств. Но точная математическая теория таких неравенств была построена лишь в конце тридцатых—начале сороковых годов XX в.

Напомним: множество C в аффинном пространстве называют выпуклым, если вместе с двумя точками X и Y, ему принадлежащими, весь отрезок XY принадлежит C.

На аффинной плоскости определено понятие предельного перехода: $X_n \to X$, если в некоторой системе координат $x_{n1} \to x_1$, $x_{n2} \to x_2$, где x_{n1}, x_{n2} — координаты точки X_n, x_1, x_2 — координаты точки X. Ясно, что от системы координат предел не зависит. Это превращает аффинную плоскость в топологическое пространство, и, значит, в нем определены понятия «непрерывности», «открытых» и «замкнутых» множеств.

Множество C называется *замкнутым*, если оно содержит свои предельные точки. Иными словами, если последовательность точек $X_i \in C$ сходится к точке X, то $X \in C$.

Множества, дополнительные к замкнутым, называются *открытыми*. Вот другое определение. Множество C называется открытым, если (в некоторой координатной системе) вместе с точкой $A = (a_1,\, a_2)$ оно при некотором $r > 0$ содержит весь открытый круг $\{X \mid (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2\}$.

Выпуклым замыканием множества C называется пересечение всех выпуклых замкнутых множеств, содержащих C.

Линейными неравенствами с двумя переменными называются неравенства вида $a_1x_1 + a_2x_2 \leqslant b$ (или $\geqslant b$, или $< b$, или $> b$). Заменой знака

все можно свести к $\leqslant$ и $<$. В этом пункте будем рассматривать, как правило, нестрогие неравенства $\leqslant$.

Одна из наших целей — описать множество решений системы линейных неравенств $a_{1\alpha}x_1+a_{2\alpha}x_2\leqslant b_\alpha$, $\alpha\in\mathcal{A}$, где $\mathcal{A}$ — некоторое множество индексов. Множество $a_1x_1+a_2x_2\leqslant b$ — это замкнутая полуплоскость. Таким образом, мы хотим описать пересечение замкнутых полуплоскостей.

Теория выпуклых множеств и теория линейных неравенств опираются на следующие две теоремы отделимости.

Теорема 2 (первая теорема отделимости на плоскости). *Непустое выпуклое (не обязательно замкнутое) множество C в аффинной плоскости можно отделить от точки A, ему не принадлежащей (т. е. провести прямую так, что C лежит целиком в одной замкнутой полуплоскости, а A — либо в другой открытой, либо на самой прямой).*

Теорема 3 (вторая теорема отделимости на плоскости). *Выпуклое замкнутое (непустое) множество C в аффинной плоскости можно строго отделить от точки A, ему не принадлежащей (т. е. можно провести прямую так, что C будет лежать в одной замкнутой полуплоскости, а A — в другой открытой).*

Дадим аналитическое доказательство теоремы 3 и набросок геометрического доказательства теоремы 2.

Доказательство теоремы 3 опирается на известную теорему Вейерштрасса: *непрерывная функция на $\mathbb{R}^2$ достигает на ограниченном замкнутом подмножестве $\mathbb{R}^2$ своей нижней грани.* В нашем случае в качестве непрерывной функции возьмем расстояние до фиксированной точки.

Доказательство теоремы 3. По условию множество C непусто, поэтому в нем можно выбрать некоторую точку Y. Пусть C_1 — пересечение множества C и замкнутого шара B радиуса $|AY|$ с центром A. Множество C_1 замкнуто и ограничено, поэтому по теореме Вейерштрасса расстояние от точки A до точек множества C_1 достигает минимума в некоторой точке $O\in C_1$. При этом минимальное расстояние от точки A до точек множества C тоже равно $|AO|$. Действительно, если $Z\in C$ и $Z\notin C_1$, то Z лежит вне шара B, поэтому $|AZ|>|AY|\geqslant|AO|$.

Выберем декартову систему координат с началом в точке O. Пусть $(a_1,\,a_2)$ — координаты точки A. Покажем, что прямая $x_1a_1+x_2a_2=0$ строго отделяет точку A от множества C, т. е. $z_1a_1+z_2a_2\leqslant 0$ для любой точки $Z=(z_1,\,z_2)\in C$. Предположим, что $Z\in C$ и $z_1a_1+z_2a_2>0$. Множество C выпукло и содержит точки $Z=(z_1,\,z_2)$ и $O=(0,\,0)$, поэтому оно содержит точки $Z_t=(tz_1,\,tz_2)$ при $0\leqslant t\leqslant 1$. Кроме того,

$$|AZ_t|^2=(a_1-tz_1)^2+(a_2-tz_2)^2=a_1^2+a_2^2-2t(a_1z_1+a_2z_2)+t^2(z_1^2+z_2^2)<a_1^2+a_2^2$$

при $0 < t < 2\dfrac{a_1 z_1 + a_2 z_2}{z_1^2 + z_2^2}$. Следовательно, при малых $t > 0$ точка $Z_t \in C$ лежит ближе к точке A, чем точка O. Получено противоречие. □

Набросок доказательства теоремы 2. Если множество C лежит на прямой, то все просто: сама прямая — искомая. Если C не лежит на прямой, оно обладает «внутренними» точками (точка $X \in C$ называется внутренней, если существует открытое множество, содержащее эту точку и содержащееся в C). Это первое, что надо доказать.

Затем возьмем внутреннюю точку X множества C, рассмотрим прямую, проходящую через A и X, и начнем «вращать» эту прямую вокруг A, до тех пор пока на повернутом луче не будет «в первый раз» внутренних точек из C. (Надо определить, что это значит — «вращать» и что это значит — «в первый раз».) Найденная прямая будет искомой (и это нужно обосновать). □

Это доказательство может быть формализовано, но тогда придется вводить координаты и пользоваться теоремами математического анализа. Но оно ведь достаточно наглядно и убедительно — не так ли?

А теперь опишем решения системы линейных неравенств.

Теорема 4 (описание системы линейных неравенств на плоскости). *Решениями произвольных систем нестрогих линейных неравенств являются выпуклые замкнутые множества и только они.*

Доказательство. Было объяснено, что достаточно брать лишь неравенства $\leqslant$. Пусть

$$a_{1\alpha} x_1 + a_{2\alpha} x_2 \leqslant b_\alpha, \quad \alpha \in \mathcal{A}, \tag{2.2}$$

— некоторая система нестрогих неравенств. Пусть точки (x_1, x_2) и (x_1', x_2') удовлетворяют всем неравенствам. Тогда точка $(tx_1 + (1-t)x_1', tx_2 + (1-t)x_2')$ удовлетворяет всем неравенствам из системы (2.2). Каждое неравенство описывает замкнутую полуплоскость, а пересечение замкнутых множеств замкнуто, значит, система (2.2) описывает некоторое замкнутое выпуклое (может быть, пустое) множество.

Пусть теперь C — некоторое замкнутое выпуклое множество. Если C совпадает со всей плоскостью, то C есть решение неравенства $0x_1 + 0x_2 \leqslant 0$. Пусть C не совпадает со всей плоскостью. Тогда найдется точка $\widehat{X} \notin C$. По второй теореме отделимости существует замкнутая полуплоскость, содержащая C.

Рассмотрим теперь пересечение *всех* замкнутых полуплоскостей, содержащих C. Оно представляет собой некоторое замкнутое выпуклое множество C', содержащее C. Если допустить, что существует точка $Z \in C' \backslash C$ (т. е. $Z \in C'$ и $Z \notin C$), мы сразу же приходим к противоречию, применив снова вторую теорему отделимости и построив полуплос-

кость, содержащую C и *не* содержащую Z. Итак, C есть пересечение замкнутых полуплоскостей, а значит (в некоторой системе координат) — решение системы нестрогих линейных неравенств. □

В этом состоит двойственное описание выпуклости: выпуклое множество есть объединение своих точек и пересечение содержащих его полуплоскостей.

Исторический комментарий. Теорема о том, что каждое выпуклое множество есть пересечение полуплоскостей, и ее обобщение на n-мерный случай принадлежат Г. Минковскому.

Герман Минковский (1864—1909) — замечательный немецкий математик и физик, один из ближайших друзей Давида Гильберта. Построил начала теории выпуклых множеств (в книге «Геометрия чисел», 1896). Идеи геометризации реализовал в физике, дав геометрическую интерпретацию специальной теории относительности и введя четырехмерное пространство с гиперболической метрикой (об этом речь впереди). Преподавал в университетах Кёнигсберга, Берлина, Цюриха и Геттингена. Одним из его студентов в Цюрихе был Эйнштейн. Тот не произвел на Минковского большого впечатления, показался ему медлительным тугодумом. (Полезно иметь в виду, что не все люди, которым суждено что-то сделать в науке, блистают на семинарах и олимпиадах.)

Начала теории линейных неравенств были заложены также в XIX в. (Фурье), затем многое было сделано в начале XX в. (Валле-Пуссен, Вороной, Г. Вейль и другие). Но особенного развития эта теория достигла в сороковые годы XX в. после того как Канторовичем у нас (в 1939 г.) и Купмансом в США (в начале сороковых годов) была установлена приложимость теории к экономическим проблемам. За это им в 1975 г. была присуждена Нобелевская премия по экономическим наукам.

И еще один важный факт плоской выпуклой геометрии хотелось бы назвать: теорему Минковского о крайних точках.

Точка X, принадлежащая множеству C, называется *крайней*, если она не является внутренней точкой никакого отрезка с концами, принадлежащими множеству C.

Теорема 5 (Минковский). *Выпуклое замкнутое ограниченное плоское множество есть выпуклое замыкание своих крайних точек.*

Напомним: выпуклое замыкание — пересечение выпуклых замкнутых множеств, содержащих данное.

Доказательство. Дадим сначала геометрическое доказательство этой теоремы, а потом формализуем его. Для множеств на прямой теорема очевидна: выпуклое замкнутое ограниченное множество на прямой — это отрезок, крайние точки — его концы, а сам отрезок — их выпуклая оболочка (совпадающая с выпуклым замыканием).

Пусть множество плоское. Возьмем его внутреннюю точку, проведем через нее прямую и начнем ее двигать параллельно (в одну сторону) вплоть до того «последнего» момента, когда прямая начнет «съезжать со множества». В этот «последний» момент прямая еще будет пересекаться с C по отрезку, а само множество C будет лежать по одну

сторону от этой прямой. Нетрудно понять, что концы этого отрезка будут крайними для C, т. е. множество крайних точек непусто. Пусть C' — выпуклая оболочка множества крайних точек. Если C' не совпадает с C, возьмем точку $X \in C \setminus C'$, отделим ее от C' и будем двигать эту прямую «в сторону X» снова до «последнего» момента, в который обнаружится еще одна крайняя точка $C \setminus C'$, хотя все они содержатся по построению в C'. Противоречие доказывает теорему. □

Проведем формализацию этого рассуждения. Фиксируем $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$ и выберем точку $A = (a_1, a_2) \in C$, для которой величина $f(X) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ минимальна (такая точка A существует по теореме Вейерштрасса). Пересечение прямой $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = f(A)$ с множеством C выпукло, замкнуто и непусто: оно содержит точку A. Это означает, что пересечение — некоторый отрезок ST (или одна точка, т. е. $S = T = A$). Докажем, что T — крайняя точка множества C. Предположим, что T — середина отрезка YZ, где $Y, Z \in C$. Тогда $2f(T) = f(Y) + f(Z)$, причем $f(Y), f(Z) \geqslant f(A) = f(T)$. Поэтому $f(Y) = f(Z) = f(A)$, т. е. $Y, Z \in [S, T]$. Получено противоречие. Таким образом, множество крайних точек непусто.

Пусть C' — выпуклое замыкание множества крайних точек. Ясно, что $C' \subset C$. Предположим, что существует точка $B = (b_1, b_2) \in C \setminus C'$. Согласно второй теореме отделимости существует такая прямая $\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 = b$, что $\mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 > b$ и $\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 \leqslant b$ для любой точки $(x_1, x_2) \in C'$. Выберем точку $A \in C$, для которой величина $g(X) = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2$ максимальна. С одной стороны, $g(A) \geqslant g(B) > b$, поэтому на прямой $\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 = g(A)$ нет точек множества C'. С другой стороны, на этой прямой есть крайние точки множества C. Получено противоречие.

Основная теорема аффинной геометрии

Следующее утверждение в связи с его важностью (и нетривиальностью) часто называют *основной теоремой аффинной геометрии.*

Теорема. *Пусть взаимно однозначное отображение $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ таково, что если три точки лежат на одной прямой, то их образы тоже лежат на одной прямой. Тогда f — аффинное преобразование.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что преобразование f взаимно однозначно отображает любую прямую на некоторую прямую. Действительно, пусть A_1 и B_1 — образы двух различных точек A и B. Тогда образ любой точки прямой AB лежит на прямой A_1B_1. Остается доказать, что если C_1 — точка прямой A_1B_1, то ее прообраз C лежит на прямой AB. Предположим, что точка C не лежит на прямой AB. Тогда прямые AC и BC различны, а их образы лежат на прямой A_1B_1. Пусть X — произвольная точка плоскости. Проведем через X прямую, пересе-

кающую прямые AC и BC в различных точках A' и B'. Образы точек A' и B' лежат на прямой A_1B_1, поэтому образ точки X тоже лежит на прямой A_1B_1. Это противоречит тому, что образом отображения f служит вся плоскость.

Итак, пусть $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — взаимно однозначное отображение, переводящее любую прямую в некоторую прямую. Будем последовательно доказывать свойства этого отображения, используя каждый раз то, что было доказано на предыдущих шагах.

Ш а г 1. Отображение f переводит параллельные прямые в параллельные прямые.

В самом деле, образы двух непересекающихся прямых не могут пересекаться вследствие взаимной однозначности отображения f.

Ш а г 2. Корректно определено действие f на векторах, т. е. если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{C_1D_1}$, где A_1, B_1, C_1, D_1 — образы точек A, B, C, D.

В том случае, когда точка C не лежит на прямой AB, получаем параллелограмм $ABDC$, точнее говоря, две пары параллельных прямых. Согласно шагу 1 эти две пары параллельных прямых переходят в две пары параллельных прямых. Если же точка C лежит на прямой AB, то выберем вспомогательную пару точек X и Y так, что $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{AB}$, причем точка X не лежит на прямой AB.

В дальнейшем будем рассматривать f как отображение векторов. Требуется доказать, что f — линейное преобразование.

Ш а г 3. Отображение f переводит нулевой вектор в нулевой вектор.

Это следует из взаимной однозначности отображения f.

Ш а г 4. Справедливо равенство $f(a+b) = f(a) + f(b)$.

Можно считать, что $a = \overrightarrow{AB}$ и $b = \overrightarrow{BC}$. В таком случае $f(a+b) = f(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = f(a) + f(b)$.

Ш а г 5. Справедливо равенство $f(ka) = kf(a)$ при $k \in \mathbb{Q}$.

При натуральном n согласно шагу 4 получим $f(na) = f(a + \ldots + a) = f(a) + \ldots + f(a) = nf(a)$. Кроме того, $f(na) + f(-na) = f(na - na) = f(0) = 0$. Для $k = \dfrac{m}{n}$, где m и n — целые числа, получаем

$$nf\left(\frac{m}{n}a\right) = f(ma) = mf(a),$$

т. е. $f(ka) = \dfrac{m}{n} f(a) = kf(a)$.

Для непрерывного отображения f доказательство теоремы завершено, поскольку любое число $k \in \mathbb{R}$ можно приблизить рациональными числами. Но если не требовать непрерывности отображения f, то самая трудная часть доказательства только начинается.

Пусть $a=\overrightarrow{OA}$ и $b=\overrightarrow{OB}$ — базисные векторы. При отображении f они переходят в векторы $a_1=\overrightarrow{O_1A_1}$ и $b_1=\overrightarrow{O_1B_1}$. Возьмем на прямых OA и OB точки X и Y соответственно. Они переходят в точки X_1 и Y_1, лежащие на прямых O_1A_1 и O_1B_1 соответственно. Это означает, что $f(xa)=\varphi(x)a_1$ и $f(yb)=\psi(y)b_1$, где φ и ψ — некоторые преобразования $\mathbb{R}$.

Ш а г 6. Справедливо равенство $\varphi(t)=\psi(t)$.

В самом деле, если $\overrightarrow{OX}=t\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OY}=t\overrightarrow{OB}$, то прямые XY и AB параллельны, а значит, прямые X_1Y_1 и A_1B_1 тоже параллельны, т. е. $\varphi(t)=\psi(t)$.

Мы доказали, что $f(xa+yb)=\varphi(x)a_1+\varphi(y)b_1$. Остается доказать, что $\varphi(x)=x$ для всех $x\in\mathbb{R}$. Напомним, что $\varphi(x)=x$ при $x\in\mathbb{Q}$ согласно шагу 5. Поэтому достаточно доказать, что если $x<y$, то $\varphi(x)<\varphi(y)$.

Ш а г 7. При всех x, $y\in\mathbb{R}$ справедливо равенство $\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)$.

Рассмотрим пропорциональные векторы $xa+yb$ и $\dfrac{x}{y}a+b$. Их образы $\varphi(x)a_1+\varphi(y)b_1$ и $\varphi\Big(\dfrac{x}{y}\Big)a_1+b_1$ тоже пропорциональны, поэтому $\varphi\Big(\dfrac{x}{y}\Big)=\dfrac{\varphi(x)}{\varphi(y)}$. В частности,

$$\varphi\Big(\frac{1}{y}\Big)=\frac{\varphi(1)}{\varphi(y)}=\frac{1}{\varphi(y)}\quad\text{и}\quad\varphi\Big(\frac{x}{1/y}\Big)=\frac{\varphi(x)}{\varphi(1/y)}=\varphi(x)\varphi(y).$$

Ш а г 8. Если $x<y$, то $\varphi(x)<\varphi(y)$.

Согласно шагу 4 получаем $\varphi(y)=\varphi(y-x+x)=\varphi(y-x)+\varphi(x)$. Поэтому достаточно проверить, что если $t=y-x>0$, то $\varphi(t)>0$. Положительное число t можно представить в виде $t=s^2$, где $s\in\mathbb{R}$, поэтому $\varphi(t)=(\varphi(s))^2>0$.

Доказательство теоремы завершено. □

Следствие. *Пусть взаимно однозначное отображение $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ переводит любую окружность в некоторую окружность. Тогда f — аффинное преобразование.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Преобразование f^{-1} переводит любые три точки $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$, лежащие на одной прямой, в три точки A, B, C, лежащие на одной прямой. Действительно, если точки A, B, C не лежат на одной прямой, то они попарно различны и через них можно провести окружность. Поэтому точки $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ попарно различны и лежат на одной окружности. Следовательно, эти точки не лежат на одной прямой. Таким образом, преобразование f^{-1} аффинное, а значит, преобразование f тоже аффинное. □

Основная теорема аффинной геометрии означает, что для полного описания аффинной плоскости достаточно указать множество точек,

множество прямых и для каждой пары прямых указать точку их пересечения (если они пересекаются). Конечно, такой список необозрим и во многих отношениях менее удобен, чем арифметическая модель аффинной плоскости. Но этот список дает возможность другого подхода к геометрии — аксиоматического. А именно, нужно указать набор аксиом, который однозначно задает множество точек и прямых, а затем из этих аксиом (в которых участвуют только точки, прямые и точки пересечения прямых) можно выводить теоремы.

Аффинную плоскость можно определить не только над полем $\mathbb{R}$, но и над произвольным полем (и даже над некоммутативным телом — по этому поводу см., например, [А3]). В этом случае все доказательство основной теоремы аффинной геометрии, за исключением шага 8 (и шага 5 для полей ненулевой характеристики), остается без изменений. В частности, для аффинного пространства над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ аналогичным образом можно прийти к преобразованию $\varphi\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$, обладающему следующими свойствами: $\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)$ и $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$. Такие преобразования называют автоморфизмами поля $\mathbb{C}$. Мы убедились, что у поля $\mathbb{R}$ есть только тождественный автоморфизм. Но у поля $\mathbb{C}$ автоморфизмов много. Правда, непрерывных автоморфизмов только два (тождественный автоморфизм и сопряжение $z\mapsto\bar{z}$). Но если не требовать непрерывности, то можно построить автоморфизм $\varphi\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$, переводящий любое данное трансцендентное число в любое другое трансцендентное число; можно также построить автоморфизм, переводящий данный корень неприводимого многочлена над $\mathbb{Q}$ в любой другой корень этого многочлена. (Доказательство см. в книге: Н. Бурбаки. Алгебра. Многочлены, поля и упорядоченные группы, гл. IV, § 6, предложение 3.)

§ 2.2. Аффинное пространство. Теория линейных уравнений и линейных неравенств

Определение n-мерного аффинного пространства было дано в гл. 1. Как это ни удивительно, переход от двумерного к n-мерному случаю не требует привлечения никаких новых идей и требует лишь нескольких слов комментария. Сформулируем n-мерные аналоги теорем 1—5 предшествующих пунктов.

Теорема 1′. *Для того чтобы система уравнений с n неизвестными*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ a_{n1}x_1+\ldots+a_{nn}x_n&=b_n \end{aligned} \tag{2.3}$$

была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ *совпадал с рангом расширенной матрицы*

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}.$$

Если ранг матрицы A *равен* n*, то решение системы* (2.3) *единственно и задается формулами Крамера*

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \tag{2.4}$$

где A_i *получается из* A *заменой* i*-го столбца на столбец свободных членов.*

Первая часть теоремы вытекает из определения ранга и доказывается в курсе линейной алгебры. Вторая, которая также строго доказывается в курсе линейной алгебры, имеет по сути дела ту же геометрическую интерпретацию, что и теорема 1.

Вместо прямой на плоскости в n-мерном случае речь идет о гиперплоскости, задаваемой в координатах уравнением

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b.$$

Она выделяет в пространстве два открытых полупространства

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n < b \quad \text{и} \quad a_1x_1 + \dots + a_nx_n > b.$$

(Это — открытые множества в $\mathbb{A}^n$.)

Полупространства $a_1x_1 + \dots + a_nx_n \leqslant b$ и $a_1x_1 + \dots + a_nx_n \geqslant b$ называют замкнутыми полупространствами.

Теорема 2′ (первая теорема отделимости в n-мерном аффинном пространстве). *Непустое выпуклое (не обязательно замкнутое) множество* C *в аффинном* n*-мерном пространстве можно отделить от точки* A*, ему не принадлежащей (т.е. провести гиперплоскость так, что* C *целиком лежит в одном замкнутом полупространстве, а* A *либо в другом открытом, либо на самой гиперплоскости).*

Геометрическое доказательство проходит по индукции: в трехмерном случае надо «вращать» плоскость вокруг прямой, отделяющей плоское сечение C, проходящее через A и внутреннюю точку множества C, и т.п.

Теорема 3′ (вторая теорема отделимости в n-мерном аффинном пространстве). *Выпуклое замкнутое непустое множество* C *в*

n-мерном аффинном пространстве можно строго отделить от точки A, ему не принадлежащей (т. е. можно провести гиперплоскость так, что C будет лежать в одном замкнутом полупространстве, а A — в другом открытом).

Доказательство теоремы $3'$ почти дословно совпадает с доказательством теоремы 3.

Нужно выбрать в C произвольную точку Y и рассмотреть замкнутый шар B радиуса $|AY|$ с центром A. Затем нужно выбрать в $C_1 = C \cap B$ точку O, в которой достигается минимум функции $f(X) = d(X, A)$ на множестве C_1. Гиперплоскость, проходящая через точку O перпендикулярно прямой AO, строго отделяет точку A от множества C.

Теорема 4′ (описание решений системы линейных равенств и неравенств). а) *Решением системы линейных однородных равенств* $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i\alpha}x_i = 0$, $\alpha \in \mathcal{A}$, *является подпространство размерности* k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, *или все* $\mathbb{R}^n$.

б) *Решением системы линейных однородных неравенств* $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i\alpha}x_i \leqslant 0$, $\alpha \in \mathcal{A}$, *является выпуклый замкнутый конус в* $\mathbb{R}^n$.

в) *Решением системы линейных неоднородных равенств* $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i\alpha}x_i = b_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{A}$, *является аффинное множество размерности* k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, *все* $\mathbb{R}^n$ *или пустое множество.*

г) *Решением системы линейных неоднородных неравенств* $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i\alpha}x_i \leqslant b_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{A}$ *служит пустое множество, все* $\mathbb{R}^n$ *или выпуклое замкнутое подмножество в* $\mathbb{R}^n$.

Здесь имеется лишь одно отличие от плоского случая — описание однородных неравенств. Напомним: конусом в линейном пространстве называется множество, которое вместе со всякой точкой X содержит весь луч $\{tX \mid t > 0\}$. Выпуклый замкнутый конус — это конус, являющийся выпуклым и замкнутым множеством. На плоскости утверждение б) вырождается: там выпуклые замкнутые конусы — это просто углы.

Теорема 5′ (Минковский). *Выпуклое замкнутое ограниченное множество в n-мерном аффинном пространстве есть выпуклое замыкание своих крайних точек.*

Теоремы $4'$ и $5'$ доказываются так же, как теоремы 4 и 5. Мы еще раз вернемся к этим теоремам в гл. 6.

§2.3. Введение в конечномерную выпуклую геометрию

Леммы Каратеодори и Радона

Пусть $A_1, \ldots, A_m$ — точки в аффинном пространстве. Выберем произвольную точку O и рассмотрим вектор $\overrightarrow{OA} = \sum \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$. Точка A не зависит от выбора точки O тогда и только тогда, когда $\sum \lambda_i = 1$. Таким образом, если $\sum \lambda_i = 1$, то корректно определена линейная комбинация точек $\sum \lambda_i A_i$. В том случае, когда все числа λ_i неотрицательны, точку $A = \sum \lambda_i A_i$ называют *выпуклой линейной комбинацией* точек A_i. Точка A является выпуклой линейной комбинацией точек $A_1, \ldots, A_m$ тогда и только тогда, когда A принадлежит выпуклой оболочке этих точек.

Лемма 1 (Каратеодори). *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — непустое подмножество. Тогда любую точку A, принадлежащую выпуклой оболочке множества X, можно представить в виде выпуклой линейной комбинации не более чем $n+1$ точек множества X.*

Доказательство. По условию $A = \sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_i A_i$, где $\sum \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geqslant 0$, $A_i \in X$. При этом можно считать, что все числа λ_i положительны. Если $s \leqslant n+1$, то доказывать нечего, поэтому будем считать, что $s \geqslant n+2$. В таком случае векторы $\overrightarrow{A_1A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_1A_s}$ линейно зависимы, т. е. $\sum\limits_{i=2}^{s} \mu_i \overrightarrow{A_1A_i} = 0$, где не все числа μ_i равны нулю. Если O — произвольная точка, то $\sum\limits_{i=1}^{s} \nu_i \overrightarrow{OA_i} = 0$, где $\nu_1 = -(\mu_2 + \ldots + \mu_s)$ и $\nu_i = \mu_i$ при $i \geqslant 2$. Поэтому при любом $t \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $A = \sum\limits_{i=1}^{s} (\lambda_i + t\nu_i) A_i$, причем $\sum(\lambda_i + t\nu_i) = \sum \lambda_i = 1$, так как $\sum \nu_i = 0$.

При $t = 0$ все числа $\lambda_i + t\nu_i$ положительны, а при $t \to +\infty$ среди этих чисел появится хотя бы одно отрицательное, поскольку не все числа ν_i равны нулю. Выберем минимальное $t > 0$, для которого хотя бы одно из чисел $\lambda_i + t\nu_i$ равно нулю. Тогда в представлении $A = \sum\limits_{i=1}^{s} (\lambda_i + t\nu_i) A_i$ все числа $\lambda_i + t\nu_i$ неотрицательны, но одну из точек A_i можно исключить, так как она входит в сумму с нулевым коэффициентом.

Повторив такую операцию несколько раз, получим представление точки A в требуемом виде. □

Лемма 2 (Радон). *Пусть в $\mathbb{R}^n$ заданы точки $A_1, \ldots, A_s$, где $s \geqslant n+2$. Тогда эти точки можно разбить на два непересекающихся множества так, что выпуклые оболочки этих двух множеств будут иметь непустое пересечение.*

Доказательство. При доказательстве леммы Каратеодори было показано, что $\sum\limits_{i=1}^{s} \nu_i \overrightarrow{OA}_i = 0$, где $\sum\limits_{i=1}^{s} \nu_i = 0$ и не все числа ν_i равны нулю. Отнесем к первому множеству те точки A_i, для которых $\nu_i > 0$. Не теряя общности, можно считать, что в первое множество входят точки $A_1, \ldots, A_t$, а во второе — точки $A_{t+1}, \ldots, A_s$. Положим $a = (\nu_1 + \ldots + \nu_t)^{-1} > 0$. У выпуклых оболочек множеств $\{A_1, \ldots, A_t\}$ и $\{A_{t+1}, \ldots, A_s\}$ есть общая точка

$$a\nu_1 A_1 + \ldots + a\nu_t A_t = (-a\nu_{t+1})A_{t+1} + \ldots + (-a\nu_s)A_s. \qquad \square$$

Теорема Хелли. *Пусть $\mathcal{A}$ — произвольное семейство индексов и $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ — семейство замкнутых выпуклых множеств, из которых одно компактно. Тогда если любое подсемейство из $n+1$ множеств имеет непустое пересечение, то и все семейство имеет непустое пересечение.*

Доказательство. Докажем индукцией по s, что любое семейство из s множеств при $s \geqslant n+1$ имеет непустое пересечение. Пусть $s \geqslant n+2$ и любое семейство из $s-1$ множеств имеет непустое пересечение. Рассмотрим множества $X_1, \ldots, X_s$. По предположению если из этого набора множеств исключить X_j, то оставшиеся множества будут иметь непустое пересечение. Пусть A_j — точка из этого пересечения. По лемме Радона точки $A_1, \ldots, A_s$ можно разбить на два множества так, что выпуклые оболочки этих множеств будут иметь общую точку A.

Пусть $j_1, \ldots, j_k$ — номера точек первого множества, $j_{k+1}, \ldots, j_s$ — номера точек второго множества. По определению $A_j \in X_i$ при всех $i \neq j$. Поэтому если точка A принадлежит выпуклой оболочке точек $A_{j_1}, \ldots, A_{j_k}$, то $A \in X_i$ при $i \neq j_1, \ldots, j_k$, т. е. $A \in X_{j_{k+1}} \cap \ldots \cap X_{j_s}$. Аналогично $A \in X_{j_1} \cap \ldots \cap X_{j_k}$, а значит, $A \in X_1 \cap \ldots \cap X_s$.

Для конечного семейства выпуклых множеств теорема Хелли доказана. В случае бесконечного семейства остается воспользоваться леммой о центрированной системе, согласно которой система замкнутых подмножеств компакта, любая конечная система которых имеет непустое пересечение, содержит общую точку. $\square$

Задачи к главе 2

2.1. Опишите системой линейных неравенств

а) множество $x_2 \geqslant x_1^2$ («надграфик» параболы);

б) правильный треугольник с центром в нуле и вершиной в точке $(1, 0)$;

в) множество $\{(x_1, x_2) \mid x_1 x_2 \geqslant 1,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0\}$.

2.2. Решите с помощью аффинных преобразований следующие задачи.

а) Через каждую вершину треугольника проведены две прямые, делящие противоположную сторону на три равные части. Докажите, что диагонали, соединяющие противоположные вершины шестиугольника, образованного этими прямыми, пересекаются в одной точке.

б) На сторонах AB, BC и CD параллелограмма $ABCD$ взяты точки K, L и M соответственно, делящие эти стороны в одинаковых отношениях. Пусть b, c, d — прямые, проходящие через вершины B, C, D параллельно прямым KL, KM, ML соответственно. Докажите, что прямые b, c, d проходят через одну точку.

в) Дан треугольник ABC. Пусть O — точка пересечения его медиан, а M, N и P — точки сторон AB, BC и CA, делящие эти стороны в одинаковых отношениях. Докажите, что O — точка пересечения медиан треугольника MNP.

г) На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты точки M, N и P соответственно. Докажите, что если точки M_1, N_1 и P_1 симметричны этим точкам относительно середин соответствующих сторон, то площади треугольников MNP и $M_1N_1P_1$ равны.

2.3. Стороны выпуклого пятиугольника $ABCDE$ параллельны диагоналям ($AB\|CE$, $BC\|DA$, и т. д.). Докажите, что аффинным преобразованием этот пятиугольник можно перевести в правильный пятиугольник.

2.4. Стороны выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ параллельны противоположным сторонам. Докажите, что аффинным преобразованием этот шестиугольник можно перевести в шестиугольник с равными диагоналями AD, BC и CF.

2.5. Докажите, что любой выпуклый четырехугольник, кроме трапеции, аффинным преобразованием можно перевести в четырехугольник, у которого противоположные углы прямые.

2.6. На плоскости даны три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, причем $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$. Докажите, что эти векторы аффинным преобразованием можно перевести в векторы равной длины тогда и только тогда, когда из отрезков с длинами $|\alpha|$, $|\beta|$, $|\gamma|$ можно составить треугольник.

2.7. Докажите, что при аффинном преобразовании n-мерного пространства сохраняются отношения объемов фигур.

2.8. Докажите, что диагонали n-мерного параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся точкой пересечения пополам.

2.9. Центром масс n-мерного симплекса $A_1\ldots A_{n+1}$ называют такую точку M, что

$$\overrightarrow{MA}_1+\ldots+\overrightarrow{MA}_{n+1}=\vec{0}.$$

а) Докажите, что центр масс существует и единствен.

б) Докажите, что при аффинном преобразовании центр масс переходит в центр масс.

2.10. Пусть $(a_{ij})_1^n$ — матрица с определителем $\Delta \neq 0$. Рассмотрим в n-мерном пространстве фигуру, заданную неравенствами

$$|a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n| \leqslant b_i,$$

где $b_1, \ldots, b_n$ — положительные числа. Докажите, что объем этой фигуры равен $2^n b_1 \ldots b_n/|\Delta|$.

2.11. Пусть M_1 и M_2 — выпуклые многоугольники, λ_1 и λ_2 — положительные числа, сумма которых равна 1. Положим

$$\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \,|\, x_1 \in M_1,\, x_2 \in M_2\}.$$

а) Докажите, что $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$ — выпуклый многоугольник, число сторон которого не превосходит суммы чисел сторон многоугольников M_1 и M_2.

б) Пусть P_1 и P_2 — периметры многоугольников M_1 и M_2. Докажите, что периметр многоугольника $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$ равен $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$.

в) Пусть S_1 и S_2 — площади многоугольников M_1 и M_2. Докажите, что площадь $S(\lambda_1, \lambda_2)$ многоугольника $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$ равна

$$\lambda_1^2 S_1 + 2\lambda_1\lambda_2 S_{12} + \lambda_2^2 S_2,$$

где S_{12} зависит только от M_1 и M_2.

г) Докажите, что $S_{12} \geqslant \sqrt{S_1 S_2}$, т. е. $\sqrt{S(\lambda_1, \lambda_2)} \geqslant \lambda_1\sqrt{S_1} + \lambda_2\sqrt{S_2}$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда многоугольники M_1 и M_2 гомотетичны.

Глава 3

Проективный мир

Принцип Кэли: «Проективная геометрия — это вся геометрия».
Ф. Клейн

Сделаем еще один шаг. Вспомним, что мы начинали с линейных пространств, где основным примером было пространство $\mathbb{R}^n$, затем было построено аффинное пространство над $\mathbb{R}^n$ — пространство точек без фиксированного начала координат. Теперь нам предстоит пополнить аффинное пространство бесконечно удаленными точками и тем самым построить проективное пространство $\mathbb{RP}^n$.

§ 3.1. Проективная прямая и плоскость

Модель и некоторые факты геометрии проективной прямой

Проективную прямую можно мыслить себе как обычную прямую, пополненную бесконечно удаленной точкой, так что моделью проективной прямой является прямая $\mathbb{R}$, пополненная бесконечно удаленной точкой x_∞. Движениями этой пополненной прямой являются дробно-линейные преобразования.

К тому же самому можно прийти по-другому. Рассмотрим плоскость $\mathbb{R}^2$ с осями Ox_1 и Ox_2 и реализуем прямую $\mathbb{R}$ как совокупность точек $(x, 1)$, т. е. «поднимем» ось Ox_1 на единицу вверх — см. рис. 3.1. Тогда каждой прямой, проходящей через начало координат, за исключением самой оси Ox_1, соответствует ее «след» на нашей прямой $(x, 1)$. А оси Ox_1 поставим в соответствие «бесконечно удаленную точку» x_∞. Прямая $\mathbb{R}$, пополненная бесконечно удаленной точкой, как было уже сказано, и есть проективная прямая $\mathbb{RP}^1$. В качестве движений проективной прямой возьмем преобразования, индуцированные на множестве прямых $l(x)$ произвольным линейным преобразованием $\mathbb{R}^2$. Точнее, рассмотрим произвольную невырожденную матрицу $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (такие матрицы образуют группу $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ линейных преобразований плоскости $\mathbb{R}^2$). Точки прямой $l(x)$, соответствующие точке $(x, 1)$ проективной прямой, имеют координаты $(\lambda x, \lambda)$. Под действием рас-

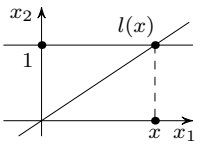


Рис. 3.1

сматриваемого линейного преобразования они перейдут в точки вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} ax+b \\ cx+d \end{pmatrix}$ а значит, если $cx + d \neq 0$, точка $(x, 1)$ перейдет в точку $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}, 1\right)$. Точка $\left(-\dfrac{d}{c}, 1\right)$ перейдет в бесконечно удаленную точку. Каждая прямая в $\mathbb{R}^2$, проходящая через начало координат, определяется парой чисел (ξ_1, ξ_2), $\xi_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, не равных одновременно нулю, причем пары (ξ_1, ξ_2) и $(\lambda\xi_1, \lambda\xi_2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, определяют одну и ту же прямую. Иначе говоря, точкой проективной прямой может служить отношение $(\xi_1 : \xi_2)$. Эти координаты точек проективной прямой называются *однородными*. Движения же в однородных координатах описываются так:

$$(\xi_1 : \xi_2) \mapsto ((a_{11}\xi_1 + a_{12}x_2) : (a_{21}\xi_1 + a_{22}x_2)), \quad a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad \det(a_{ij}) \neq 0.$$

Таким образом, и проективная прямая входит в компанию геометрий, описываемых эрлангенской программой.

На проективной прямой естественным образом определяется понятие сходимости, и она превращается в компактное топологическое пространство, гомеоморфное окружности (в нем даже вводится метрика — ее мы определим чуть дальше: см. с. 107). Но такое понятие аффинной геометрии как понятие «лежать между» в проективной геометрии отсутствует.

Может возникнуть вопрос: а откуда в названии возникло слово «проективная» (здесь — прямая)? Дело в том, что группа проективных преобразований прямой совпадает с группой композиций проецирований одной прямой на другую из некоторой точки. Опишем, что такое проецирование.

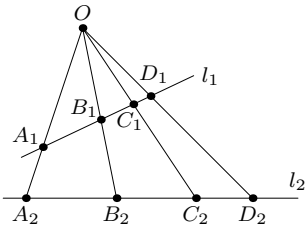


Рис. 3.2

Возьмем две прямые l_1 и l_2 на (евклидовой) плоскости и точку O вне прямых. Проекция прямой l_1 на l_2 из точки O изображена на рис. 3.2. Сразу же отметим одно важное свойство проецирования.

Лемма 1. *Пусть точки A_2, B_2, C_2 и D_2 прямой l_2 соответствуют точкам A_1, B_1, C_1 и D_1 прямой l_1 при проецировании из некоторой точки O. Тогда*

$$\frac{|C_1A_1|}{|C_1B_1|} : \frac{|D_1A_1|}{|D_1B_1|} = \frac{|C_2A_2|}{|C_2B_2|} : \frac{|D_2A_2|}{|D_2B_2|}.$$

Доказательство. Будем обозначать площадь треугольника ABC через S_{ABC}. Тогда

$$\frac{|C_1A_1|}{|C_1B_1|} = \frac{S_{OC_1A_1}}{S_{OC_1B_1}} = \frac{|OC_1|\,|OA_1|\sin A_1OC_1}{|OC_1|\,|OB_1|\sin B_1OC_1} = \frac{|OA_1|\sin A_1OC_1}{|OB_1|\sin B_1OC_1}.$$

Поэтому

$$\frac{|C_1A_1|}{|C_1B_1|} : \frac{|D_1A_1|}{|D_1B_1|} = \Big(\frac{|OA_1|\sin A_1OC_1}{|OB_1|\sin B_1OC_1}\Big) : \Big(\frac{|OA_1|\sin A_1OD_1}{|OB_1|\sin B_1OD_1}\Big).$$

После сокращения эта величина окажется выраженной через углы, причем $\sin A_1OC_1 = \sin A_2OC_2$, и т. д. □

Определение. Пусть на прямой l числа a, b, c, d являются координатами точек A, B, C, D соответственно. Величину

$$[A,\, B,\, C,\, D] := \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$$

называют *двойным отношением* четырех точек.

В дальнейшем мы часто будем отождествлять точку A на прямой l с ее координатой a.

Определение. *Двойным отношением* четырех прямых на плоскости, проходящих через одну точку, называют двойное отношение четырех точек, в которых эти прямые пересекают произвольную прямую l. (Лемма 1 показывает, что это двойное отношение не зависит от выбора прямой l.)

Из леммы 1 вытекают три следствия.

Следствие 1. *При проецировании одной прямой на другую двойное отношение четырех точек сохраняется.*

Это утверждение непосредственно следует из леммы.

Следствие 2. *Проективное преобразование прямой задается дробно-линейным отображением.*

Доказательство. Пусть a_1, b_1, c_1 — образы точек a, b и c при проективном отображении, и пусть x_1 — образ точки x при этом отображении. Тогда соотношение $[a, b, c, x] = [a_1, b_1, c_1, x_1]$ (следствие 1) можно переписать в виде

$$\frac{c-a}{c-b} : \frac{x-a}{x-b} = \frac{c_1-a_1}{c_1-b_1} : \frac{x_1-a_1}{x_1-b_1} \Longrightarrow x_1 = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}.$$ □

А отсюда сразу вытекает следующий результат.

Следствие 3. *Если проективное преобразование прямой имеет три неподвижные точки, то оно тождественно.*

Проективная геометрия возникла в XVII в., и среди ее первых творцов были люди искусства — живописцы, архитекторы, интересовавшиеся проблемами изображения, перспективой и т. п. Проективная геометрия первоначально возникла как геометрия «проецирований», отсюда и название. Подходы, связанные с дробно-линейными преобразованиями, возникли в XIX в.

А теперь мы в состоянии доказать основной результат, где воссоединяются старые и новые подходы.

Теорема 1. а) *Следующие два определения проективного преобразования прямой эквивалентны*: (1) *преобразование есть композиция проецирований*; (2) *преобразование является дробно-линейным.*

б) *Проективное преобразование прямой задается образами трех точек.*

Доказательство. Из следствия 2 леммы 1 вытекает, что композиция проецирований дробно-линейна. Далее, дробно-линейное отображение сохраняет двойное отношение. В самом деле, если

$$y_i = \frac{\alpha x_i + \beta}{\gamma x_i + \delta}, \quad \text{то} \quad y_i - y_j = \frac{(\alpha\gamma - \beta\delta)(x_i - x_j)}{(\gamma x_i + \delta)(\gamma x_j + \delta)}.$$

Следовательно, дробно-линейное отображение определяется образами трех точек. Доказательство будет завершено, если будет показано, что существует композиция проецирований, переводящая три точки A, B и C в заданные точки A', B' и C'.

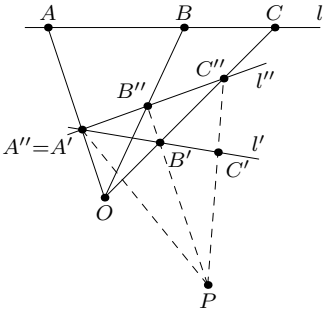


Рис. 3.3

Для доказательства последнего утверждения проведем через точку A' прямую l'', отличную от прямой AA'. На прямой AA' возьмем точку O и спроецируем из нее прямую l на l'' (см. рис. 3.3). Пусть P — точка пересечения прямых $B''B'$ и $C''C'$. Спроецировав из точки P прямую l'' на l', получим требуемое отображение. (Если $B'B'' \parallel C'C''$, нужно рассмотреть параллельное проецирование; если точка A лежит на l', но не совпадает с A', надо сделать предварительно еще одно проецирование.) □

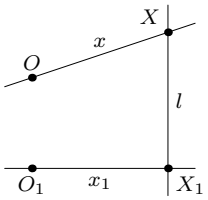


Рис. 3.4

Предположим, что каждой прямой x, проходящей через точку O, сопоставлена некоторая прямая x_1, проходящая через точку O_1. Соответствие $x \mapsto x_1$ называют *проективным*, если оно сохраняет двойное отношение любой четверки прямых. Иными словами, если l — произвольная прямая, то отображение $X \mapsto X_1$, где $X = x \cap l$, $X_1 = x_1 \cap l$ (рис. 3.4), должно быть проективным.

Теорема 2. *Пусть проективное соответствие $x \mapsto x_1$ таково, что прямой $x = OO_1$ соответствует прямая $x_1 = O_1O$. Тогда точки пересечения всех соответственных прямых лежат на одной прямой.*

Доказательство. Пусть a и a_1, b и b_1 — пары соответственных прямых, A и B — точки их пересечения (рис. 3.5). Прямая $l = AB$ пересекает прямую OO_1 в точке C. Если прямой OX соответствует прямая O_1X_1, где X и X_1 — точки прямой l, то $[A, B, C, X] = [A, B, C, X_1]$, а значит, $X = X_1$. Следовательно, все точки пересечения соответственных прямых лежат на прямой l. □

В условии теоремы 2 точки можно заменить прямыми, а прямые — точками. Точнее говоря, справедливо следующее утверждение.

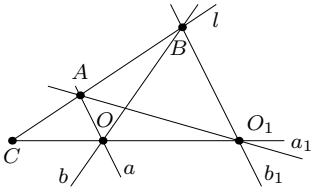


Рис. 3.5

Теорема 3. *Пусть проективное отображение $X \mapsto X_1$ прямой o в прямую o_1 таково, что точка пересечения этих прямых переходит сама в себя. Тогда все прямые, соединяющие соответственные точки, проходят через одну точку.*

Доказательство. Пусть A и A_1, B и B_1 — пары соответственных точек, a и b — проходящие через них прямые, L — точка пересечения прямых a и b, c — прямая, проходящая через точку L и точку пересечения прямых o и o_1. Если точка X прямой o соответствует точке X_1 прямой o_1, то $[a, b, c, x] = [a_1, b_1, c_1, x_1]$, где $x = XL$ и $x_1 = LX_1$. Поэтому $x = x_1$, т. е. прямая XX_1 проходит через точку L. □

Двойное отношение четырех точек зависит от порядка точек. При перестановке точек оно меняется по достаточно простым правилам. Очевидно, что $[A, B, C, D] = [B, A, C, D]^{-1} = [A, B, D, C]^{-1}$. Легко проверить также, что $[A, B, C, D] = 1 - [A, C, B, D]$ (это эквивалентно равенству $(c-a)(d-b) = (c-b)(d-a) + (b-a)(d-c)$). Рассмотренные три перестановки точек порождают все остальные перестановки. Поэтому если двойное отношение четырех точек равно λ, то, взяв их в другом порядке, можно получить следующие значения двойного отношения: λ^{-1}, $1-\lambda$, $(1-\lambda)^{-1}$, $1-\lambda^{-1}$ и $(1-\lambda^{-1})^{-1}$. В некоторых случаях среди этих шести значений могут быть совпадающие. Приравнивая λ пяти другим значениям, получаем следующие вырожденные наборы значений λ: $\{-1, 2, -1/2\}$, $\{1, 0, \infty\}$ и $\{-\varepsilon, -\varepsilon^2\}$, где $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$.

Если рассматривать неупорядоченные наборы из четырех точек, то вместо их двойного отношения удобно брать функцию $J(\lambda)$, инвариантную относительно замен λ на $1-\lambda$ и на λ^{-1}. В качестве такой функции можно использовать функцию

$$J_1(\lambda) = \lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} + (1-\lambda)^2 + \frac{1}{(1-\lambda)^2} + \left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right)^2,$$

либо функции, полученные из J_1 линейным преобразованием, например,

$$J_2(\lambda) = \frac{J_1(\lambda)+3}{2} = \frac{(\lambda^2-\lambda+1)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2},$$
$$J_3(\lambda) = J_2(\lambda) - \frac{27}{4} = \Big(\frac{(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-1/2)}{\lambda(1-\lambda)}\Big)^2.$$

Каждая из этих функций обладает тем свойством, что $J(\lambda)=J(\lambda_1)$ тогда и только тогда, когда число λ_1 получено из λ композицией преобразований вида $\lambda \mapsto 1-\lambda$ и $\lambda \mapsto \lambda^{-1}$.

Для четырех плоскостей в $\mathbb{R}^3$, имеющих общую прямую, *двойное отношение* можно определить как двойное отношение четырех прямых, полученных при пересечении данных плоскостей произвольной плоскостью. Для любой другой секущей плоскости двойное отношение будет тем же самым. Действительно, пусть две секущие плоскости пересекаются по некоторой прямой l. Тогда для обеих секущих плоскостей двойное отношение будет равно двойному отношению точек, в которых прямая l пересекает данные плоскости.

Проективная плоскость

Можно было бы сразу сделать переход от $\mathbb{RP}^1$ к $\mathbb{RP}^n$ и определить n-мерное проективное пространство. Но мы, следуя, во-первых, общему замыслу, а во-вторых, учитывая историческую роль именно проективной плоскости, посвящаем отдельный пункт двумерному случаю.

Построение проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$ осуществим весьма сходным образом по отношению к $\mathbb{RP}^1$ — проективной прямой, построенной в предыдущем пункте.

Моделью проективной плоскости может служить совокупность всех прямых в $\mathbb{R}^3$, проходящих через начало координат, где движениями являются все невырожденные линейные преобразования $\mathbb{R}^3$ в себя.

Тогда каждой прямой, проходящей через начало координат (кроме прямых, лежащих в плоскости Ox_1x_2), соответствует ее след на плоскости $x_3=1$. Прямым же, лежащим в плоскости Ox_1x_2, сопоставим по бесконечно удаленной точке, и совокупность этих бесконечно удаленных точек назовем *бесконечно удаленной прямой.*

Каждая прямая в $\mathbb{R}^3$, проходящая через начало координат, определяется тройкой чисел (ξ_1, ξ_2, ξ_3), $\xi_i \in \mathbb{R}$, $i=1, 2, 3$, не равных одновременно нулю, причем тройки (ξ_1, ξ_2, ξ_3) и $(\lambda\xi_1, \lambda\xi_2, \lambda\xi_3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, определяют одну и ту же прямую. Иначе говоря, такой прямой однозначно соответствует отношение $(\xi_1 : \xi_2 : \xi_3)$. Эти координаты точек проективной плоскости называются *однородными.* Движения же в однородных

координатах описываются так:

$$(\xi_1 : \xi_2 : \xi_3) \mapsto$$
$$\mapsto ((a_{11}\xi_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) : (a_{21}\xi_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) : (a_{31}\xi_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)),$$

где $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $\det(a_{ij}) \neq 0$.

Мы включили проективную плоскость в эрлангенскую идеологию.

С топологической точки зрения $\mathbb{RP}^2$ — это совокупность всех прямых в $\mathbb{R}^3$, проходящих через точку O. Это — неориентируемое многообразие. По-другому $\mathbb{RP}^2$ задается следующими эквивалентными способами:

сфера $\mathbb{S}^2$, у которой диаметрально противоположные точки идентифицированы;

круг, ограниченный окружностью, у которой диаметрально противоположные точки идентифицированы;

лист Мёбиуса, к которому по границе приклеен круг.

Какие же объекты изучаются в проективной геометрии? Помимо *точек* (соответствующих прямым, проходящим через начало координат), рассматриваются *прямые*, соответствующие плоскостям, проходящим через начало координат. Они описываются уравнениями вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0, \tag{3.1}$$

где хотя бы одно из чисел a_1, a_2, a_3 отлично от нуля. Плоскости $x_3 = 0$ соответствует «бесконечно удаленная» прямая. Если $a_3 \neq 0$, то прямую (3.1) можно «увидеть»: это прямая на плоскости $x_3 = 1$, задаваемая уравнением

$$\frac{a_1}{a_3}x_1 + \frac{a_2}{a_3}x_2 = -1.$$

На проективной плоскости через любые две точки проходит единственная прямая, а любые две различные прямые пересекаются (в проективном мире нет параллельности).

Соотношение (3.1) определяет двойственность между прямыми и точками проективной плоскости: прямой (3.3) соответствует точка, порожденная прямой с направляющим вектором (a_1, a_2, a_3). (Об этой и других двойственностях мы много будем говорить в дальнейшем.)

Кроме точек и прямых в проективной геометрии изучают *коники*, т. е. кривые, задаваемые уравнениями вида

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j = 0. \tag{3.2}$$

Например, прямой круговой конус $x_3^2 = x_1^2 + x_2^2$ «высекает» на плоскости $x_3 = 1$ окружность $x_1^2 + x_2^2 = 1$, конус $x_3^2 + x_2^2 = x_1^2$ высекает гиперболу $x_1^2 - x_2^2 = 1$, а конус $x_1^2 - x_2x_3 = 0$ высекает параболу $x_2 = x_1^2$.

Нам осталось сказать несколько слов о группе преобразований проективной плоскости. Подобно тому как это было сделано для прямой, рассмотрим преобразования $\mathbb{RP}^2$, индуцированные преобразованиями общей линейной группы $\mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$. Две фигуры на проективной плоскости объявляются одинаковыми, если они переводятся одна в другую с помощью некоторого преобразования из $\mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$. В частности, как легко понять, окружность, гипербола и парабола, описанные нами чуть выше, с проективной точки зрения одинаковы.

Теоремы Паппа и Дезарга

Уже несколько раз говорилось, что на проективной плоскости существует замечательное явление *двойственности между прямыми и точками*. Во всех геометриях, с которыми мы уже имели дело и будем иметь дело в дальнейшем, двойственность является одним из наиболее существенных явлений; двойственность в проективной геометрии исторически была первой. В этом пункте будет рассказано о двух наиболее известных теоремах проективной геометрии и обсуждена их двойственная природа.

Первым сформулировал принцип двойственности Понселе.

Жан Виктор Понселе (1788—1867) — французский инженер и математик. В своем «Трактате о проективных свойствах фигур» (1822) заложил начала проективной геометрии.

Еще раз взглянем на соотношение (3.1) предыдущего пункта. Из него следует, что прямая, порожденная вектором $a = (a_1, a_2, a_3)$, т. е. множество точек в $\mathbb{R}^3$, представимых в виде $\lambda(a_1, a_2, a_3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, однозначно определяет в $\mathbb{R}^3$ (перпендикулярную) плоскость $a^\perp = \Pi_a = \{x = (x_1, x_2, x_3) \mid a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0\}$. Эта плоскость Π_a есть не что иное, как прямая в проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$. Обозначим ее той же буквой a.

С другой стороны, прямая, порожденная вектором a, задает в $\mathbb{RP}^2$ точку, которую обозначим буквой A. Получилось соответствие $A \leftrightarrow a$. Будем это записывать в виде $a = DA$ (прямая a двойственна точке A) или $A = Da$ (точка A двойственна прямой a); эти соотношения эквивалентны, ибо $D^2 = \mathrm{Id}$. Условимся далее прямую, проходящую через точки A и B, обозначать (AB) (или просто AB), а точку пересечения прямых a и b обозначать (ab). При этом будем говорить, что прямая AB инцидентна точкам A и B и что точка (ab) инцидентна прямым a и b.

Легко понять, что прямая AB инцидентна точке C тогда и только тогда, когда точка (ab) инцидентна прямой c.

Сопоставление $A \leftrightarrow a$ делает очевидным следующее утверждение.

Теорема 4 (о двойственном соответствии). *Пусть справедливо некоторое утверждение, в формулировке которого участвует конфигура-*

ция точек и прямых, связанных отношением инцидентности. Тогда если в этом утверждении поменять слова «прямая» и «точка», то новое утверждение также будет верным.

Прежде чем переходить к основным теоремам, сформулируем следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 и B_1, B_2, B_3, B_4 — два набора точек общего положения в $\mathbb{RP}^2$. Тогда существует единственное такое проективное преобразование $f\colon \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2$, что $f(A_i) = B_i$, $1 \leqslant i \leqslant 4$.*

Точки $\{C_i\}_{i=1}^4$ называют *точками общего положения*, если соответствующие им векторы $\{c_i\}_{i=1}^4$ обладают тем свойством, что любые три из них образуют базис. Доказательство леммы 2 основывается на простейших фактах линейной алгебры и приводится в общем виде для n-мерного пространства в следующем параграфе (теорема 2 на с. 77).

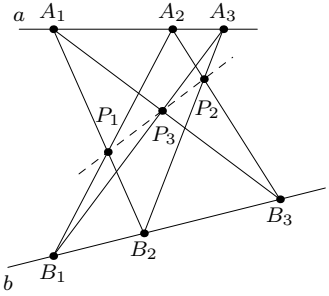


Рис. 3.6

Теорема Паппа. *Пусть даны две прямые a и b и по три точки на каждой из них: A_1, A_2, A_3 на a и B_1, B_2, B_3 на b. Пусть P_1 — точка пересечения прямых B_1A_2 и A_1B_2, P_2 — точка пересечения прямых B_2A_3 и A_2B_3, P_3 — точка пересечения прямых B_1A_3 и A_1B_3* (рис. 3.6). *Тогда точки P_1, P_2 и P_3 лежат на одной прямой.*

Папп Александрийский — древнегреческий математик III века н. э.

Как и всякий содержательный результат, теорема Паппа может быть доказана многими способами, и в этой книге будут приведены различные ее доказательства. Вот доказательство в духе тех, что мы демонстрировали в первой главе, когда рекламировали метод координат.

Первое доказательство. Используя лемму 2, отобразим точки A_1, A_2, B_1, B_2 в вершины квадрата: $A_1' = (0, 0)$, $A_2' = (1, 0)$, $B_1' = (0, 1)$, $B_2' = (1, 1)$. Пусть при этом $A_3' = (a, 0)$, а $B_3' = (1, b)$. Координаты точек P_i', $i = 1, 2, 3$, тривиально считаются, и так же тривиально обнаруживается, что все три точки лежат на одной прямой. □

Другое доказательство теоремы Паппа можно получить, воспользовавшись тем, что проективное преобразование прямой, имеющее три неподвижные точки, тождественно.

Второе доказательство. Пусть прямые P_1P_2 и A_1B_2 пересекают прямую B_1A_3 в точках P_3' и C соответственно. Требуется доказать, что $P_3 = P_3'$.

Рассмотрим композицию проекций

$$B_1A_3 \xrightarrow{A_1} b \xrightarrow{A_2} B_2A_3 \xrightarrow{P_1} B_1A_3,$$

где буква над стрелкой указывает точку, из которой производится проекция. Легко проверить, что это проективное преобразование прямой B_1A_3 оставляет точки B_1, C и A_3 неподвижными, а точку P_3 переводит в P_3'. Следовательно, это преобразование тождественное и $P_3 = P_3'$. □

А вот утверждение, двойственное теореме Паппа.

Пусть прямые a_1, a_2, a_3 имеют общую точку A, а прямые b_1, b_2, b_3 — общую точку B. Пусть прямая p_1 проходит через точки пересечения прямых (b_1a_2) и (a_1b_2), p_2 — через точки (b_1a_3) и (b_3a_1), p_3 — через точки (b_2a_3) и (b_3a_2). Тогда прямые p_1, p_2 и p_3 имеют общую точку.

Глядя на рис. 3.7, можно убедиться, что теорема Паппа и двойственная ей теорема эквивалентны. Отметим в заключение, что теорема Паппа является частным случаем теоремы Паскаля, о которой речь пойдет дальше (см. с. 91).

Теорема Дезарга. *Если прямые, проходящие через соответственные вершины треугольников A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2, пересекаются в одной точке S, то соответственные стороны этих треугольников пересекаются в трех точках, лежащих на одной прямой* (рис. 3.8).

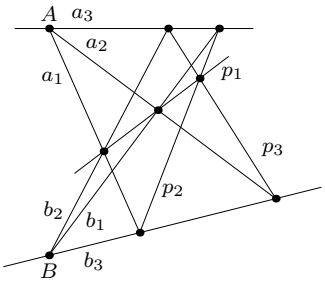


Рис. 3.7

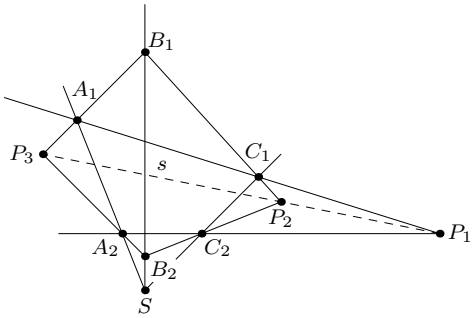


Рис. 3.8

Жирар Дезарг (1591—1661) — французский архитектор, инженер и математик, заложивший основы проективной и начертательной геометрии. Ввел понятие бесконечно удаленных элементов и полярности. Идеи Дезарга были восприняты не сразу; проективная геометрия возродилась лишь в XIX в. в трудах Понселе, Штейнера и др.

Теорема Дезарга, как и теорема Паппа, может быть доказана самыми разными способами. В первом доказательстве мы (как и в теореме Паппа) отобразим данные точки так, чтобы они заняли наиболее простое положение.

Доказательство. Отобразим проективным преобразованием точки A_1, A_2, B_1, B_2 в вершины квадрата

$$A_1' = (0, 0), \quad A_2' = (1, 0), \quad B_1' = (0, 1), \quad B_2' = (1, 1).$$

Тогда прямые $A_1'B_1'$ и $A_2'B_2'$ пересекаются в бесконечно удаленной (в направлении оси Ox_2) точке P_3', а точки C_1' и C_2' (образы точек C_1 и C_2) лежат на прямой, параллельной оси Ox_1; точка S' — бесконечно удаленная точка этой прямой. Пусть P_1', P_2' — точки пересечения прямых $C_1'A_1'$ и $C_2'A_2'$, $C_1'B_1'$ и $C_2'B_2'$. Легко проверить, что точки P_1' и P_2' лежат на одной вертикальной прямой. Поэтому точка P_3' является бесконечно удаленной точкой прямой $P_1'P_2'$, а значит, прообразы точек P_1', P_2' и P_3' лежат на одной прямой.

Другое доказательство теоремы Дезарга можно получить, воспользовавшись свойствами проективных соответствий (теорема 2 на с. 66). Рассмотрим проекцию прямой A_1B_1 на прямую A_2B_2 из точки S. Пусть при этой проекции точка X_1 переходит в X_2. Тогда соответствие $C_1X_1 \mapsto C_2X_2$ проективное, причем прямая C_1C_2 соответствует прямой C_2C_1. Следовательно, точки пересечения прямых C_1A_1 и C_2A_2, C_1B_1 и C_2B_2, C_1P_3 и C_2P_3 (здесь P_3 — точка пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2) лежат на одной прямой.

Еще одно доказательство теоремы Дезарга можно получить, воспользовавшись тем, что плоскость $\mathbb{R}^2$ расположена в пространстве $\mathbb{R}^3$. Дело в том, что в $\mathbb{R}^3$ очевидным образом справедливо следующее утверждение: *пусть плоскости* Π_1 *и* Π_2 *пересекают ребра трехгранного угла с вершиной* S *в точках* A_1, B_1, C_1 *и* A_2, B_2, C_2. *Тогда точки пересечения прямых* A_1B_1 *и* A_2B_2, B_1C_1 *и* B_2C_2, A_1C_1 *и* A_2C_2 *лежат на прямой* s *пересечения плоскостей* Π_1 *и* Π_2. Спроецировав возникающую при этом конфигурацию на некоторую плоскость, получим теорему Дезарга. □

Как и в случае теоремы Паппа, теорема Дезарга и двойственная ей теорема эквивалентны. Конфигурация Паппа состоит из 9 точек и 9 прямых, причем каждая прямая содержит три точки, а через каждую точку проходят три прямые. Конфигурация Дезарга состоит из 10 точек и 10 прямых, причем каждая прямая содержит три точки и через каждую точку проходят три прямые.

На прямой, лежащей в плоскости, можно определить алгебраическую структуру тела или поля, базируясь лишь на геометрических конструкциях в проективном пространстве. Эти конструкции тесно связаны с теоремами Дезарга и Паппа. Точнее говоря, теорема Дезарга обеспечивает корректность определения сложения и умножения, а теорема Паппа приводит к коммутативности этих операций.

Чтобы определить сложение и умножение точек прямой, фиксируем на прямой точку O (нулевой элемент) и точку E (единичный элемент). Тогда точку $C = A + B$ можно определить с помощью построения, изображенного на рис. 3.9. При этом P — произвольная точка, $PP_A \parallel OA$, $AP_A \parallel OP$ и $CP_A \parallel BP$. Независимость точки C от выбора точки P эквивалентна следующему утверждению: *на трех параллельных прямых взяты точки* $\{O, A, B, C\}$, $\{P, P_A\}$ *и* $\{Q, Q_A\}$, *причем* $OP \parallel AP_A$, $OQ \parallel AQ_A$ *и* $PB \parallel P_AC$ (рис. 3.10). *Тогда* $QB \parallel Q_AC$. Для доказательства этого утверждения нужно дважды применить теорему Дезарга. Сначала применим теорему Дезарга к треугольникам OPQ и AP_AQ_A. В результате получим $PQ \parallel P_AQ_A$. Затем применим теорему Дезарга к треугольникам PQB и P_AQ_AC и получим $QB \parallel Q_AC$.

Для умножения точек прямой нужна не только точка O, но и точка E. Произведение C точек A и B определяется с помощью построения, изображенного на рис. 3.11. При этом P — произвольная точка, $BP_B \parallel EP$ и $CP_B \parallel AP$. Независимость точки C от выбора точки P снова связана с теоремой Дезарга. В самом деле, по теореме Дезарга $QP \parallel Q_BP_B$ (рис. 3.12). Поэтому, применив еще раз теорему Дезарга, получим $QA \parallel Q_BC$, что и требовалось.

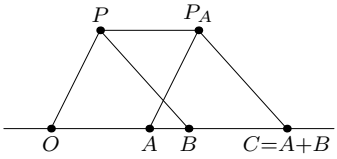


Рис. 3.9

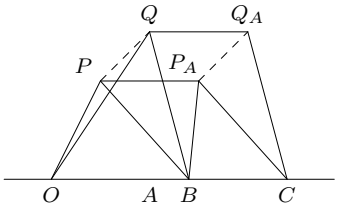


Рис. 3.10

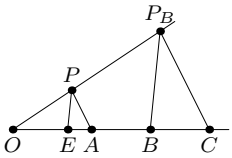


Рис. 3.11

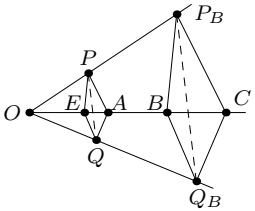


Рис. 3.12

Что же касается коммутативности сложения и коммутативности умножения, то они связаны с теоремой Паппа. Действительно, геомет-

рически точки $A+B$ и $B+A$ определяются по-разному; точки $A\cdot B$ и $B\cdot A$ тоже определяются по-разному (рис. 3.1). Но в обоих случаях по теореме Паппа из того, что $AP_A \parallel BP_B$ и $BP \parallel CP_A$, следует, что $AP \parallel P_BC$.

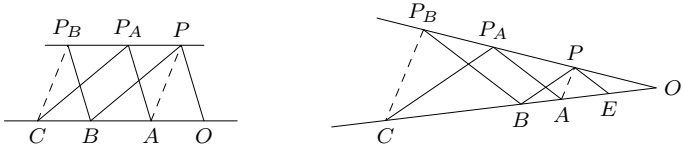


Рис. 3.13

§3.2. Проективное n-мерное пространство

Непосредственным обобщением понятий проективной прямой и проективной плоскости является понятие n-мерного *проективного пространства* $\mathbb{RP}^n$.

Проективное пространство $\mathbb{RP}^n$ имеет несколько выразительных интерпретаций. Его можно реализовать как совокупность всех прямых, содержащих 0, в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, как сферу $\mathbb{S}^n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\right\}$ с идентифицированными диаметрально противоположными точками, как пространство $\mathbb{R}^n$, пополненное бесконечно удаленной гиперплоскостью. В последнем случае можно представить себе ту же картину, что и в одномерном и двумерном случаях. А именно, можно рассмотреть гиперплоскость в $\mathbb{R}^{n+1}$, задаваемую уравнением $x_{n+1}=1$, и «следы», оставляемые на этой гиперповерхности прямыми, проходящими через начало координат. Прямые, лежащие в параллельной гиперплоскости, проходящей через начало координат, будут образовывать «бесконечно удаленную» проективную плоскость размерности $n-1$.

Дадим точные определения (иначе говоря, построим модель n-мерного проективного пространства).

Точками пространства $\mathbb{RP}^n$ называют такие наборы $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ действительных чисел, что не все числа $x_1, \ldots, x_{n+1}$ равны нулю. При этом пропорциональные наборы считаются эквивалентными. (Иными словами, точками пространства $\mathbb{RP}^n$ являются прямые в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящие через начало координат.) Числа $x_1, \ldots, x_{n+1}$ называют *однородными координатами* точки проективного пространства. При этом точки пространства $\mathbb{RP}^n$ обозначают $(x_1 : x_2 : \ldots : x_{n+1})$.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^{n+1}$ плоскость размерности $k+1$, проходящую через начало координат. Точки пространства $\mathbb{RP}^n$, соответствующие прямым, лежащим в этой плоскости, образуют *k-мерное подпространство* в $\mathbb{RP}^n$. При этом одномерные подпространства в $\mathbb{RP}^n$ называют *прямыми*, $(n-1)$-мерные — *гиперплоскостями*.

В однородных координатах k-мерные подпространства n-мерного проективного пространства задаются системой однородных линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}x_j = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-k, \quad \operatorname{rank}(a_{ij}) = n-k. \tag{3.3}$$

Уже отмечалось следующее свойство прямых на проективной плоскости: *на проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$ любые две несовпадающие прямые пересекаются ровно в одной точке.* (Действительно, двум прямым проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$ соответствуют две плоскости в $\mathbb{R}^3$, проходящие через начало координат. Эти две плоскости пересекаются по некоторой прямой, проходящей через начало координат, что и требовалось.) Естественным обобщением этого факта является следующий: *любые n гиперплоскостей в n-мерном проективном пространстве пересекаются, а если эти гиперплоскости находятся «в общем положении», т. е. если ранг системы* (3.3) *равен n, то они пересекаются в одной точке.*

Основные объекты n-мерного проективного пространства — это его подпространства различной размерности и *квадрики*, т. е. гиперповерхности, задаваемые уравнениями (в однородных координатах)

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}x_ix_j = 0. \tag{3.4}$$

Теперь пришло время сказать о группе проективных преобразований. Подобно тому как это было в случае прямой и плоскости, преобразованиями n-мерного проективного пространства являются преобразования общей линейной группы $\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{R})$, иначе говоря, *проективным преобразованием* пространства $\mathbb{RP}^n$ называют преобразование, индуцированное линейным преобразованием векторного пространства $\mathbb{R}^{n+1}$.

Теорема 1. *Проективное преобразование переводит любую прямую в некоторую прямую и при этом сохраняет двойное отношение любых четырех точек, лежащих на одной прямой.*

Доказательство. Линейное преобразование переводит двумерное подпространство в некоторое двумерное подпространство. Поэтому индуцированное им преобразование проективного пространства переводит прямую в прямую.

Рассмотрим четыре точки проективного пространства, лежащие на одной прямой. В пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ им соответствуют векторы e_1, e_2, $e_1 + \lambda e_2$, $e_1 + \mu e_2$ (рис. 3.14). При этом двойное отношение рассматриваемых точек равно $[0, \infty, \lambda, \mu]$. Линейное преобразование переводит

рассматриваемые векторы в векторы e_1, e_2, $e_1+\lambda e_2$, $e_1+\mu e_2$. Поэтому двойное отношение соответствующих им точек тоже равно $[0, \infty, \lambda, \mu]$. □

Перенесем теперь на $\mathbb{RP}^n$ теорему о том, что проективное преобразование проективной прямой $\mathbb{RP}^1$ однозначно задается образами трех попарно различных точек. Назовем точки $A_1, \ldots, A_{n+2} \in \mathbb{RP}^n$ *точками общего положения*, если соответствующие им векторы $a_1, \ldots, a_{n+2} \in \mathbb{R}^{n+1}$ обладают следующим свойством: любые $n+1$ из этих векторов образуют базис. Иными словами, векторы $a_1, \ldots, a_{n+1}$ образуют базис и $a_{n+2} = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{n+1} a_{n+1}$, где $\lambda_1 \ldots \lambda_{n+1} \neq 0$.

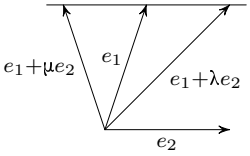


Рис. 3.14

Теорема 2. *Пусть $A_1, \ldots, A_{n+2}$ и $B_1, \ldots, B_{n+2}$ — два набора точек общего положения в $\mathbb{RP}^n$. Тогда существует единственное проективное преобразование $f\colon \mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^n$, для которого $f(A_i) = B_i$, $i = 1, \ldots, n+2$.*

Доказательство. Пусть точкам $A_1, \ldots, A_{n+2}$ соответствуют векторы $a_1, \ldots, a_{n+1}$, $a_{n+2} = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{n+1} a_{n+1}$, а точкам $B_1, \ldots, B_{n+2}$ соответствуют векторы $b_1, \ldots, b_{n+1}$, $b_{n+2} = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_{n+1} b_{n+1}$. Требуется доказать, что существует линейное преобразование A, для которого $Aa_i = x_i b_i$, $i = 1, \ldots, n+2$, причем преобразование A определено однозначно с точностью до пропорциональности. При $i \neq n+2$ положим $Aa_i = x_i b_i$, где x_i — произвольное число, не равное нулю. Числа $x_1, \ldots, x_{n+1}$ однозначно задают преобразование A. Равенство $Aa_{n+2} = x_{n+2} b_{n+2}$ выполняется тогда и только тогда, когда $x_i = \dfrac{\mu_i}{\lambda_i} x_{n+2}$, $i = 1, \ldots, n+1$. Это означает, что требуемый набор чисел $x_1, \ldots, x_{n+1}$ существует, причем он определен однозначно с точностью до пропорциональности. □

Задачи к главе 3

Двойное отношение

3.1. На прямой взяты попарно различные точки A, B, C, D и E. Докажите, что

$$[A, B, C, D] \cdot [A, B, D, E] \cdot [A, B, E, C] = 1.$$

3.2. Пусть $l(t)$ — прямая $a_1 x + b_1 y = t(a_2 x + b_2 y)$. Докажите, что $[l(a), l(b), l(c), l(d)] = [a, b, c, d]$.

3.3. Пусть каждая из четырех прямых a, b, c и d в $\mathbb{R}^3$ пересекает прямые l_1, l_2 и l_3. Докажите, что двойные отношения четверок точек пересечения, лежащих на прямых l_1, l_2 и l_3, равны.

3.4. Докажите, что двойное отношение точек пересечения плоскостей граней тетраэдра $ABCD$ с некоторой прямой l равно двойному отношению четырех плоскостей, проходящих через прямую l и вершины тетраэдра.

3.5. Пусть четыре гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$ имеют общее подпространство размерности $n-2$. Докажите, что двойное отношение точек, в которых прямая l пересекает эти гиперплоскости, не зависит от выбора прямой l.

Дробно-линейные и проективные преобразования

3.6. Докажите, что квадрат нетождественного преобразования $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ тождествен тогда и только тогда, когда $a+d=0$. (Под квадратом преобразования $f(x)$ подразумевается преобразование $f(f(x))$.)

3.7. Докажите, что любое нетождественное дробно-линейное преобразование с неподвижными точками a и b имеет вид

$$x \mapsto \frac{\lambda x - ab}{x + \lambda - a - b}.$$

3.8. Пусть дробно-линейное преобразование f таково, что $f(a) \neq a$ и $f(f(a)) = a$ для некоторого a. Докажите, что $f(f(x)) = x$ для всех x.

3.9. Докажите, что любое дробно-линейное преобразование можно представить в виде композиции не более трех дробно-линейных преобразований, квадрат каждого из которых тождествен.

3.10. В $\mathbb{R}^3$ даны попарно скрещивающиеся прямые l, l_1 и l_2. Сопоставим точке $A_1 \in l_1$ точку A_2, в которой прямая l_2 пересекает плоскость, содержащую точку A_1 и прямую l. Докажите, что отображение $A_1 \mapsto A_2$ прямой l_1 в прямую l_2 проективно.

3.11. На плоскости даны точки A_1, A_2, A_3, O и O'. Для каждой пары различных индексов i и j рассмотрим прямую, проходящую через точки пересечения пар прямых A_iO и A_jO', A_iO' и A_jO. Докажите, что полученные три прямые пересекаются в одной точке.

3.12. На плоскости даны прямые $l_1, \ldots, l_{n-1}$ и l. На прямой l взяты точки $O_1, \ldots, O_n$. Продолжения сторон n-угольника $A_1 \ldots A_n$ проходят через точки $O_1, \ldots, O_n$, а вершины $A_1, \ldots, A_{n-1}$ движутся по прямым $l_1, \ldots, l_{n-1}$. Докажите, что вершина A_n движется при этом по некоторой прямой.

Глава 4

Коники и квадрики

В предыдущих главах мы имели дело по преимуществу с линейными объектами — линиями и поверхностями уровня линейных функций. Здесь, в этой главе, будут рассмотрены линии и поверхности уровня *квадратичных функций*. Линии уровня таких функций на плоскости называются *ониками*, поверхности уровня в пространствах большего числа переменных — *квадриками*.

Теория плоских коник (которые, как будет показано, являются сечениями прямого кругового конуса, откуда и название) была построена Аполлонием (жившим примерно с 260 до 190 г. до н. э.). Сочинение Аполлония «Конические сечения»явилось одной из вершин математики Древнего мира. Для ученых Нового времени, пионеров современного естествознания (Галилея, Кеплера, Гюйгенса, Ньютона и др.), труды Аполлония и изученные им кривые — парабола, гипербола и эллипс — явились отправной точкой для исследования законов Природы.

И потому мы первый параграф этой главы посвящаем этим замечательным кривым.

§ 4.1. Плоские кривые второго порядка

Метрическая, аффинная и проективная классификация кривых второго порядка

Метрическая классификация. Пусть Ox_1x_2 — некоторая ортогональная система координат на плоскости. В этом параграфе будут исследованы (в основном метрические) свойства кривых вида

$$Q(x_1,\, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 = c \qquad (4.1)$$

(т. е. линии уровня квадратичных функций). Не ограничив себя в общности, считаем, что $a_{11} \geqslant 0$.

Теорема 1 (метрическая классификация коник). а) *Если* $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$, *то кривая* (4.1) *изометрична либо кривой* $\dfrac{x_1^2}{a_1^2} + \dfrac{x_2^2}{a_2^2} = 1$ (называемой *эллипсом*), *либо кривой* $\dfrac{x_1^2}{a_1^2} - \dfrac{x_2^2}{a_2^2} = 1$ (называемой *гиперболой*),

либо паре пересекающихся прямых $\frac{x_1^2}{a_1^2} = \frac{x_2^2}{a_2^2}$, *либо представляет собой одну точку или пустое множество.*

б) *Если* $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, *то кривая* (4.1) *изометрична либо кривой* $x_1^2 = 2px_2$ (называемой *параболой*), *либо паре параллельных прямых* $x_2^2 = c^2$, *либо паре слившихся прямых* $x_2^2 = 0$, *либо представляет собой пустое множество.*

Доказательство. а) Совершая параллельный перенос $x_1' = x_1 + a_1$, $x_2' = x_2 + a_2$, получаем

$$\begin{aligned} c = Q(x_1, x_2) = a_{11}(x_1' - a_1)^2 + 2a_{12}(x_1' - a_1)(x_2' - a_2) + a_{22}(x_2' - a_2)^2 + \\ + 2b_1(x_1' - a_1) + 2b_2(x_2' - a_2) = \\ = a_{11}x_1'^2 + 2a_{12}x_1'x_2' + a_{22}x_2'^2 + 2(-a_{11}a_1 - a_{12}a_2 + b_1)x_1' + \\ + 2(-a_{12}a_1 - a_{22}a_2 + b_2)x_2' + Q(a_1, a_2) - 2(b_1a_1 + b_2a_2). \end{aligned}$$

Решив систему $a_{11}a_1 + a_{12}a_2 = b_1$, $a_{12}a_1 + a_{22}a_2 = b_2$ и положив $c' = c - Q(a_1, a_2) + 2(b_1a_1 + b_2a_2)$, приводим прямую (4.1) к виду

$$Q(x_1', x_2') = a_{11}x_1'^2 + 2a_{12}x_1'x_2' + a_{22}x_2'^2 = c'. \tag{4.2}$$

Если $a_{12} = 0$, все уже доказано. Если же это число не равно нулю, то совершим поворот и новые переменные опять обозначим x_1, x_2 (а не x_1'', x_2''). Имеем

$$x_1' = x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi, \quad x_2' = -x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi. \tag{4.3}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} c' = Q(x_1', x_2') = Q(x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi, -x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi) \overset{\text{Id}}{=} \\ = x_1^2(a_{11}\cos^2\varphi - 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi) + \\ + 2x_1x_2(a_{11}\sin\varphi\cos\varphi + a_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) - a_{22}\cos\varphi\sin\varphi) + \\ + x_2^2(a_{11}\sin^2\varphi + 2a_{12}\sin\varphi\cos\varphi + a_{22}\cos^2\varphi) \end{aligned} \tag{4.4}$$

Решив уравнение $\frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} = -\operatorname{ctg} 2\varphi$ и произведя естественные преобразования, получим выражение вида

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} \pm \frac{x_2^2}{a_2^2} = \vartheta,$$

где $\vartheta = 0$ или 1, что и доказывает п. а).

б) По условию $a_{11}a_{22} = a_{12}^2$. Допустим, что $a_{12} \neq 0$. Тогда и a_{11}, и a_{22} положительны. Совершив поворот

$$x_1 = x_1'\cos\varphi - x_2'\sin\varphi, \quad x_2 = x_1'\sin\varphi + x_2'\cos\varphi$$

с $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\dfrac{a_{11}}{a_{22}}}$, ликвидируем коэффициент при x_1' и после простых преобразований получим, что требовалось. Если же допустить, что $a_{12} = 0$, то, не ограничив себя в общности, можно считать, что $a_{11} = 0$, значит, коэффициент при x_1 равен нулю, т. е. мы сразу приходим к цели. □

Замечание. Из теоремы 1 следует, что коники делятся на два класса: невырожденные (это эллипс, гипербола и парабола) и вырожденные, распадающиеся на пару прямых (иногда, впрочем, сливающихся). Убедимся в том, что для вырожденности коники (4.1) необходимо и достаточно, чтобы основной определитель

$$\det Q = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & -c \end{vmatrix}$$

был равен нулю. В случае а), как это сразу следует из наших выкладок, пара пересекающихся прямых получается тогда и только тогда, когда система

$$\begin{aligned} a_{11}a_1 + a_{12}a_2 &= b_1, \\ a_{21}a_1 + a_{22}a_2 &= b_2, \\ a_1b_1 + a_2b_2 &= c \end{aligned}$$

имеет ненулевое решение (что возможно если и только если $\det Q = 0$). В случае б) пара пересекающихся прямых получается тогда и только тогда, когда $b_1/\sqrt{a_{11}} = b_2/\sqrt{a_{22}}$, а это и есть условие равенства нулю основного определителя в случае, когда $a_{21} = \sqrt{a_{11}a_{22}}$.

Аффинная и проективная классификации

Пусть снова

$$Q(x_1,\, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 = c \qquad (4.5)$$

— кривая второго порядка на аффинной плоскости, где, как мы помним (см. гл. 2), движениями являются произвольные аффинные преобразования $(x_1,\, x_2) \mapsto (\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \beta_1,\, \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \beta_2)$.

Теорема 2 (аффинная классификация плоских коник). а) *Если в уравнении* (4.5) *выполняется равенство* $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$, *то кривая* (4.5) *аффинно эквивалентна либо окружности* $x_1^2 + x_2^2 = 1$, *либо равнобочной гиперболе* $x_1^2 - x_2^2 = 1$, *либо паре пересекающихся прямых* $x_1^2 - x_2^2 = 0$, *либо представляет собой одну точку или пустое множество*;

б) *Если* $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, *то кривая* (4.5) *изометрична либо кривой* $x_1^2 = x_2$ (*называемой канонической параболой*), *либо паре параллельных прямых* $x_2^2 = 1$, *либо паре слившихся прямых* $x_2^2 = 0$, *либо представляет собой пустое множество.*

Доказательство. Из эллипса $x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2 = 1$ окружность $x_1^2 + x_2^2 = 1$ получается сжатиями вдоль осей Ox_1 и Ox_2, и аналогичными

преобразованиями приходим к остальным кривым теоремы. Но надо доказать еще, что все они неэквивалентны. Это следует из топологических соображений. Окружность компактна, а аффинные отображения непрерывны, значит, она не может быть эквивалентна ничему другому. Гипербола состоит из двух кусков, а остальные кривые, кроме параллельных прямых, которые при аффинных отображениях остаются параллельными, связны; таким образом, и гипербола не эквивалентна другим кривым. Слившиеся прямые и пересекающиеся прямые остаются при аффинных преобразованиях такими же, т. е. не могут перейти друг в друга или стать параболой. □

Кривая второго порядка в однородных координатах записывается в виде

$$Q(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0. \tag{4.6}$$

Такие квадратичные формы приводятся к одному из следующих видов: $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, $x_1^2 - x_2^2 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 = 0$, $x_1^2 = 0$. Отсюда следует такой результат.

Теорема 3 (проективная классификация плоских коник). *Кривая второго порядка на проективной плоскости проективно эквивалентна либо окружности $x_1^2 + x_2^2 = 1$, либо паре пересекающихся прямых $x_1^2 - x_2^2 = 0$, либо паре слившихся прямых, либо представляет собой одну точку или пустое множество.*

Эллипс, гипербола, парабола

Кривая второго порядка, изометричная кривой $\dfrac{x_1^2}{a_1^2} + \dfrac{x_2^2}{a_2^2} = 1$, называется, как было уже сказано, *эллипсом* (считаем, что $a_1 \geqslant a_2 > 0$), изометричная кривой $\dfrac{x_1^2}{a_1^2} - \dfrac{x_2^2}{a_2^2} = 1$ — *гиперболой*, изометричная кривой $x_2^2 = 2px_1$ — *параболой*.

Написанные уравнения называются *каноническими уравнениями* эллипса, гиперболы и параболы. Точки с координатами $(\pm c, 0) = (\pm\sqrt{a_1^2 - a_2^2}, 0)$ называют *фокусами* эллипса, $(\pm c, 0) = (\pm\sqrt{a_1^2 + a_2^2}, 0)$ — *фокусами* гиперболы, точку $\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$ — *фокусом* параболы; числа $e = \sqrt{1 - \dfrac{a_2^2}{a_1^2}}$, $\sqrt{1 + \dfrac{a_2^2}{a_1^2}}$, 1 называют *эксцентриситетами* эллипса, гиперболы и параболы соответственно. Прямую $x_1 = \pm\dfrac{a_1}{e}$ называют *директрисой* эллипса или гиперболы, прямую $x_1 = -\dfrac{p}{2}$ — *директрисой* параболы. Прямую $x_2 = 0$ называют *осью параболы*.

Теорема 4. а) *Отношение расстояний от точки эллипса, гиперболы и параболы до (соответствующего) фокуса и (соответствующей) директрисы есть величина постоянная и равная e.*

б) *Сумма расстояний от точки эллипса до его фокусов есть величина постоянная; модуль разности расстояний от точки гиперболы до ее фокусов есть величина постоянная.*

в) *Множество $\{X\}$ точек евклидовой плоскости, обладающих тем свойством, что для данных точки F и прямой l отношение расстояния от X до F к расстоянию от X до l есть величина постоянная, равная числу e, есть эллипс, если $e<1$, гипербола, если $e>1$, парабола, если $e=1$.*

Доказательство. а) Начнем с эллипса. Пусть $d=\dfrac{a_1}{e}$. Тогда $de^2=\dfrac{a_1^2}{\sqrt{a_1^2-a_2^2}}\cdot\dfrac{a_1^2-a_2^2}{a_1^2}=c$, при этом величина d — расстояние от начала координат до директрисы. Проверим, что множество точек $X=(x_1,\,x_2)$, для которых отношение расстояния до фокуса $(c,\,0)$ к расстоянию до директрисы $x_1=d$ равно e, т. е. множество точек, задаваемых уравнением

$$\frac{(x_1-c)^2+x_2^2}{(x_1-d)^2}=e^2, \tag{4.7}$$

есть эллипс, заданный каноническим уравнением. Равенство (4.7) при условии, что $c=de^2$, эквивалентно равенству

$$\frac{x_1^2}{d^2e^2}+\frac{x_2^2}{d^2e^2(1-e^2)}=1,$$

совпадающему с каноническим уравнением эллипса, так как $d^2e^2=a_1^2$, $d^2e^2(1-e^2)=a_2^2$.

Аналогично утверждение а) доказывается для гиперболы и параболы.

Докажем утверждение б) снова для эллипса. Пусть F_1 и F_2 — фокусы эллипса, а H_1 и H_2 — проекции точки X, лежащей на эллипсе, на директрисы. В силу утверждения а) получаем

$$|F_1X|+|F_2X|=e(|XH_1|+|XH_2|)=e|H_1H_2|=\text{const}\,.$$

Аналогично утверждение б) доказывается для гиперболы.

Докажем утверждение в) для эллипса. Пусть прямая l задана уравнением $x_1=d$, а точка F имеет координаты $(c,\,0)$. Тогда рассматриваемому множеству принадлежат две точки с координатами $(x,\,0)$, удовлетворяющими уравнению $\dfrac{x-c}{x-d}=\pm e$. Поместим начало координат посередине между этими точками. Тогда

$$\frac{de+c}{1+e}+\frac{-de+c}{1-e}=0,$$

т. е. $c = de^2$. В таком случае уравнение (4.7) эквивалентно каноническому уравнению эллипса. □

Теорема 5. *Уравнения эллипса, гиперболы и параболы в полярных координатах имеют вид*

$$r = \frac{pe}{1 + e\cos\varphi}, \tag{4.8}$$

где e — эксцентриситет, а p — расстояние от фокуса до директрисы.

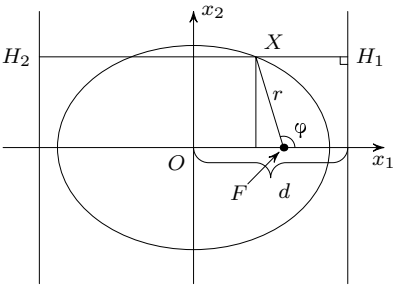


Рис. 4.1.

Доказательство. Из определений и теоремы 4 имеем (см. рис. 4.1):

$$\frac{r}{p - r\cos\varphi} = e,$$

откуда немедленно следует равенство (4.8). Случаи гиперболы и параболы аналогичны. □

Теорема 6. *Множество точек, сумма (разность) расстояний от которых до двух заданных точек F_1 и F_2 — постоянная величина, есть эллипс (гипербола).*

Доказательство. (Для эллипса.) Поместим начало координат посередине между точками F_1 и F_2, ось Ox_1 направим по отрезку F_1F_2, а ось Ox_2 — перпендикулярно оси Ox_1. Пусть точки F_1 и F_2 имеют координаты $(c, 0)$ и $(-c, 0)$ соответственно, а сумма расстояний от точки $X = (x_1, x_2)$ на эллипсе до F_1 и F_2 равна $2a_1$. Имеем

$$\begin{gathered}
\sqrt{(x_1 - c)^2 + x_2^2} = 2a_1 - \sqrt{(x_1 + c)^2 + x_2^2} \implies \\
\implies (x_1 - c)^2 + x_2^2 = 4a_1^2 - 4a_1\sqrt{(x_1 + c)^2 + x_2^2} + (x_1 + c)^2 + x_2^2 \implies \\
\implies a_1\sqrt{(x_1 + c)^2 + x_2^2} = a_1^2 + x_1 c \implies \\
\implies a_1^2(x_1^2 + 2x_1 c + c^2) + a_1^2 x_2^2 = a_1^4 + 2a_1^2 x_1 c + x_1^2 c^2 \implies \\
\implies (a_1^2 - c^2)x_1^2 + a_1^2 x_2^2 = a_1^2(a_1^2 - c^2) \implies \\
\implies (\text{обозначая } a_2^2 = a_1^2 - c^2) \implies \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1,
\end{gathered}$$

что и требовалось. Для гиперболы доказательство аналогично. □

Теорема 7. *Середины параллельных хорд эллипса, гиперболы и параболы лежат на одной прямой (в случае параболы — параллельной оси параболы).*

Доказательство. Снова проведем его для эллипса. Точки (x_1', x_2') и (x_1'', x_2'') пересечения эллипса (в канонических координатах)

и прямой $x_2 = px_1 + q$ найдем, решив квадратное уравнение

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{(px_1+q)^2}{a_2^2} = 1.$$

По теореме Виета $\dfrac{x_1' + x_1''}{2} = \dfrac{-a_1^2 pq}{a_2^2 + a_1^2 p^2}$ и, значит,

$$\frac{x_2' + x_2''}{2} = p\frac{x_1' + x_1''}{2} + q = \frac{a_2^2 q}{a_2^2 + a_1^2 p^2}.$$

Таким образом, середины хорд эллипса, параллельных прямой $x_2 = px_1$, лежат на прямой $x_2 = -\dfrac{a_2^2}{pa_1^2}x_1$.

Аналогично поступаем для гиперболы и параболы. □

Уравнения касательных к эллипсу, гиперболе и параболе (в канонических координатах), проведенных в точке $X = (\xi_1, \xi_2)$, имеют (как это известно из анализа) вид

$\dfrac{\xi_1 x_1}{a_1^2} + \dfrac{\xi_2 x_2}{a_2^2} = 1$ (для эллипса);

$\dfrac{\xi_1 x_1}{a_1^2} - \dfrac{\xi_2 x_2}{a_2^2} = 1$ (для гиперболы)

$p(x_1 - \xi_1) = \xi_2(x_2 - \xi_2)$ (для параболы).

Для эллипса уравнение касательной можно получить и без применения анализа, воспользовавшись тем, что касательная к эллипсу — это прямая, касающаяся его ровно в одной точке. Действительно, если $\dfrac{\xi_1^2}{a_1^2} + \dfrac{\xi_2^2}{a_2^2} = 1$, $\dfrac{x_1^2}{a_1^2} + \dfrac{x_2^2}{a_2^2} = 1$ и $\dfrac{\xi_1 x_1}{a_1^2} + \dfrac{\xi_2 x_2}{a_2^2} = 1$, то $\dfrac{(\xi_1 - x_1)^2}{a_1^2} + \dfrac{(\xi_2 - x_2)^2}{a_2^2} = 0$, поэтому $(\xi_1, \xi_2) = (x_1, x_2)$.

Из вида уравнения касательной к параболе следует, что вершина параболы является серединой отрезка AB, где A — проекция точки X на ось, а B — точка пересечения оси и касательной к параболе в точке X.

Теорема 8. а) *Эллиптическое зеркало обладает тем свойством, что пучок лучей света, исходящий из одного фокуса, сходится в другом.*

б) *Пучок лучей света, параллельных оси параболы, после отражения от параболы сходится в ее фокусе.*

Доказательство. а) Проведем касательную в точке X, лежащей на эллипсе, и биссектрису ко внешнему углу при вершине X треугольника F_1XF_2. Если бы биссектриса не совпала с касательной, она пересекла бы эллипс в другой точке $M \neq X$. Отразим F_2 относительно биссектрисы. Получим точку F_2'. Имеем

$$|F_1M| + |F_2M| = |F_1M| + |F_2'M| > |F_1F_2'| = |F_1X| + |F_2X|,$$

т. е. M лежит вне эллипса — противоречие. Значит, биссектриса совпадает с касательной, и следовательно, угол падения (т. е. угол между прямой F_1X и касательной) равен углу отражения (т. е. углу между прямой F_2X и касательной). Таким образом, доказано, что лучи, исходящие из точки F_1, соберутся в F_2.

б) Пусть точка X лежит на параболе и H — ее проекция на директрису. Тогда $|FX| = |XH|$ (теорема 4). Проведем биссектрису угла FXH. Если она не совпадает с касательной, то она пересекает параболу в точке $M \neq X$. Но тогда $|FM| = |MH| \neq |MH'|$, где H' — проекция M на директрису. Получено противоречие. Из него следует, что угол падения луча, параллельного оси, равен углу между касательной и FX, т. е. все лучи параллельного пучка собираются в фокусе, что и требовалось. □

Обсудим теперь одно странное свойство семейства всех эллипсов. Эллипсы на плоскости образуют 5-параметрическое семейство, поскольку для задания эллипса нужно задать длины главных полуосей a и b, координаты центра эллипса x_0 и y_0, а также угол φ между одной из главных осей и фиксированной прямой. Наложив на эти 5 параметров одно ограничение $a = b$, мы, казалось бы, должны получить 4-параметрическое свойство. Но в действительности мы получаем 3-параметрическое свойство (окружность задается координатами центра и радиусом). Как объяснить этот парадокс?

Самое поверхностное объяснение таково: при данном ограничении два из трех параметров a, b и φ становятся лишними. Чтобы получить более глубокое объяснение, запишем уравнение эллипса с параметрами a, b, x_0, y_0, φ:

$$\left(\frac{x\cos\varphi + y\sin\varphi - x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{-x\sin\varphi + y\cos\varphi - y_0}{b}\right)^2 = 1.$$

Квадратичная часть этого уравнения имеет вид $px^2 + 2qxy + ry^2$, где $p = b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi$, $r = b^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi$ и $q = 2\cos\varphi\sin\varphi(a^2 - b^2) = (a^2 - b^2)\sin 2\varphi$. Легко проверить, что $p - r = (b^2 - a^2)\cos 2\varphi$, поэтому $(p-r)^2 + q^2 = (a^2 - b^2)^2$. Таким образом, из условия $a = b$ следуют сразу два условия: $p = r$ и $q = 0$.

Одно из важных отличий гиперболы от эллипса заключается в том, что у гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ есть асимптоты $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ (асимптоты не имеют общих точек с гиперболой, но существуют сколь угодно близкие друг к другу точки гиперболы и асимптот).

Обсудим теперь некоторые свойства гипербол, связанные с асимптотами.

Теорема 9. *Пусть прямая пересекает гиперболу в точках A и B, а ее асимптоты — в точках A_1 и B_1. Тогда $|AA_1| = |BB_1|$* (рис. 4.2).

Доказательство. Рассмотрим семейство гипербол

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \lambda, \quad 0 < \lambda \leqslant 1.$$

Середины хорд этих гипербол, параллельных прямой $y = kx$, лежат на прямой $y = \dfrac{b^2 k}{a^2} x$ (см. доказательство теоремы 7). Поэтому для всех рассматриваемых гипербол середины хорд, лежащих на одной прямой, совпадают. Из этого свойства при $\lambda \to 0$ получаем, что середины отрезков AB и A_1B_1 совпадают, а значит, $|AA_1| = |BB_1|$. □

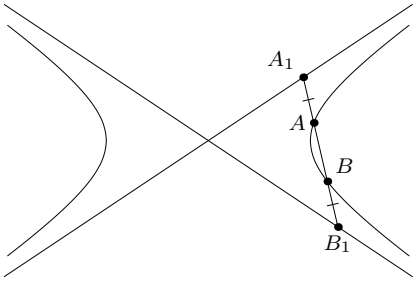


Рис. 4.2.

Следствие. *Если отрезок A_1B_1 с концами на асимптотах касается гиперболы в точке X, то X — середина отрезка A_1B_1.*

Теорема 10. *Площадь треугольника, образованного асимптотами и касательной к гиперболе, одна и та же для всех касательных.*

Доказательство. Касательная $\dfrac{x_0 x}{a^2} - \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1$ пересекает асимптоты $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ в точках с координатами $x_{1,2} = a\left(\dfrac{x_0}{a} \pm \dfrac{y_0}{b}\right)^{-1}$. Поэтому $x_1 x_2 = a^2$. Ясно также, что площадь рассматриваемого треугольника пропорциональна $x_1 x_2$. □

Эллипс, гипербола и парабола как конические сечения

Теорема 11. *Пусть прямой круговой конус $x_3^2 = x_1^2 + x_2^2$ в $\mathbb{R}^3$ пересечен плоскостью. Тогда если плоскость пересекает все образующие одной полы конуса, то получаемая кривая — эллипс, если все, кроме одной, то кривая — парабола, а если она пересекает обе полы конуса, то кривая — гипербола.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{P}$ — секущая плоскость, $\mathcal{Q}$ — плоскость, проходящая через окружность касания конуса и сферы, касающейся образующих конуса и плоскости $\mathcal{P}$, F — точка касания сферы и $\mathcal{P}$. Пересечение $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ обозначим d. Возьмем точку X на пересечении поверхности

конуса и плоскости $\mathcal{P}$, спроектируем ее на $\mathcal{Q}$, проекцию обозначим Y, затем Y спроектируем на d и проекцию обозначим Z (рис. 4.3).

Угол YZX (обозначим его β) — это угол между $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{P}$. Пусть O — вершина конуса. Тогда XO — образующая конуса и угол YXO равен углу α между образующей и осью конуса. Пусть W — точка пересечения OX и $\mathcal{Q}$.

Из треугольников XYW и XYZ получаем: $|XY|/|XW| = \cos\alpha$ и $|XY|/|XZ| = \sin\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$. Ясно, что $|XW| = |XF|$, так как это — касательные к сфере, проведенные из одной точки. В итоге получаем, что отношение расстояний от точки X на кривой до фиксированной точки F и до фиксированной прямой d есть величина постоянная. Следовательно, эта кривая — эллипс, гипербола или парабола (см. теорему 4). Остается заметить, что если плоскость пересекает все образующие одной полы конуса, то получается ограниченная кривая, если все, кроме одной, то кривая состоит из одной компоненты, а если она пересекает обе полы конуса, то кривая состоит из двух компонент. □

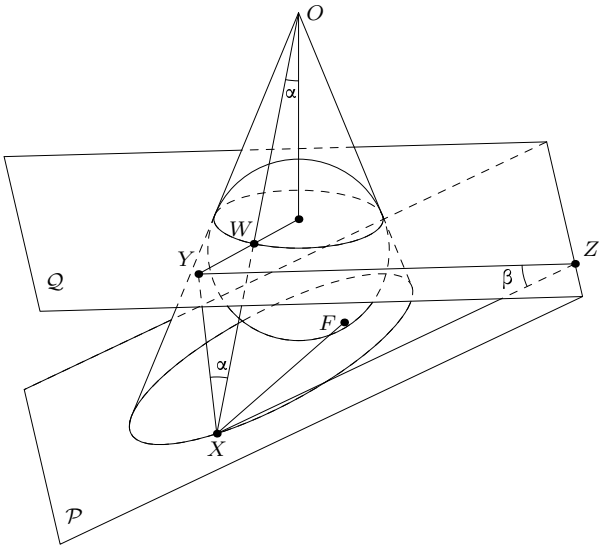


Рис. 4.3

Теорема 12. *Пусть плоскость $\mathcal{P}$ пересекает все образующие одной полы прямого кругового конуса K и F_1 и F_2 — точки, в которых вписанные в конус сферы касаются плоскости $\mathcal{P}$. Тогда сумма расстояний от точки X пересечения $\mathcal{P}$ и K до F_1 и F_2 есть величина постоянная.*

Доказательство. Соединим X с вершиной конуса O. Пусть W_1 и W_2 — точки на прямой XO, принадлежащие первой и второй сфере соответственно. Тогда $|XF_1| = |XW_1|$ (так как это две касательные из X к первой сфере) и $|XF_2| = |XW_2|$. Таким образом, $|XF_1| + |XF_2| = |W_1W_2|$, а это — величина постоянная. □

Исторический комментарий. Важнейшие геометрические свойства эллипса, гиперболы и параболы, выраженные теоремами 4, 6 и 9, были известны Аполлонию (и даже до него). Теорема 12 и доказательство теоремы 11 принадлежат бельгийским математикам Кетле и Данделену.

§4.2. Некоторые дополнения

Начнем с некоторых следствий из теоремы о метрической классификации кривых второго порядка (теорема 1 на с. 79).

Об уравнении четвертой степени

Если вы научились решать уравнение третьей степени, то с помощью замечания на с. 81 легко решите уравнение четвертой степени.

Действительно, пусть требуется решить уравнение $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Для этого достаточно найти точки пересечения двух коник $f = y - x^2 = 0$ и $g = y^2 + axy + by + cx + d = 0$. Точки пересечения не изменятся, если заменить кривую $g = 0$ кривой $\lambda f + g = 0$. В том случае, когда кривая вырожденная, т. е. ее уравнение распадается на два линейных множителя, точки пересечения легко находятся. А вырожденность коники

$$g + \lambda f = y^2 - \lambda x^2 + axy + cx + (b + \lambda)y + d = 0$$

сводится к равенству нулю основного определителя

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{q}{2} & c \\ \frac{q}{2} & 1 & b+\lambda \\ c & b+\lambda & -d \end{vmatrix},$$

который представляет собой полином по λ лишь третьей степени!

Теорема о конике, проходящей через пять точек

Докажем, что *для того, чтобы через данные пять точек на плоскости можно было провести конику и притом только одну, необходимо и достаточно, чтобы никакие четыре точки не лежали на одной прямой.*

Действительно, условие, что коника проходит через пять точек, записывается в виде системы из пяти линейных однородных уравнений с шестью неизвестными. Эта система всегда имеет ненулевое решение.

Если какие-то четыре точки лежат на одной прямой, то взяв произведение линейной функции, равной нулю в четырех точках, на любую линейную функцию, равную нулю в пятой, получим целое семейство коник, равных нулю в наших пяти точках.

Пусть никакие четыре точки не лежат на одной прямой. Докажем единственность коники. Если какие-то три точки лежат на одной прямой, то коника обязана быть вырожденной, ибо никакая невырожденная коника не может пересекаться с прямой в трех точках. Но тогда существует единственная возможность провести две прямые через данную систему точек: одну провести через три точки, а другую — через две оставшиеся.

Наконец, последний случай: никакие три точки не лежат на одной прямой. Допустим, что существуют две различные (разумеется, невырожденные) коники $f=0$ и $g=0$, проходящие через наши пять точек, и рассмотрим семейство коник $f+\lambda g=0$. Основной определитель здесь будет многочленом третьей степени по λ, т. е. он обязан иметь вещественный корень, при котором коника окажется вырожденной, что невозможно. Теорема доказана.

Теорема о пучке коник, проходящих через четыре точки

Пусть никакие три из точек A_1, A_2, A_3, A_4 не лежат на одной прямой. Тогда если $f=0$ — уравнение коники, проходящей через эти точки, то найдутся такие числа λ и μ, что $f=\lambda g+\mu h:=\lambda l_{A_1A_2}l_{A_3A_4}+\mu l_{A_2A_3}l_{A_1A_4}$, где $l_{A_iA_j}$ — многочлен первой степени, обращающийся в нуль в точках A_i и A_j.

Действительно, возьмем любую точку A_5, отличную от A_i, $i=1, 2, 3, 4$, для которой $f(A_5)=0$, и подберем λ_1 и μ_1 так, что $f(A_5)-\lambda_1 g(A_5)-\mu_1 h(A_5)=0$. В силу теоремы о единственности коники функция f пропорциональна $\lambda_1 g+\mu_1 h$.

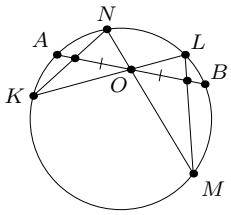


Рис. 4.4

Задача о бабочке

Пусть хорды KL и MN проходят через середину O хорды AB некоторой окружности. Тогда прямые KN и ML пересекают прямую AB и в точках, равноудаленных от точки O (рис. 4.4).

С этой задачей мы уже встречались на с. 27. Дадим еще одно ее решение.

Через точки K, L, M и N проходят следующие три коники (воспользуемся обозначениями предыдущей теоремы): окружность $f=0$, $g=l_{KL}l_{MN}=0$ и $h=l_{KN}l_{ML}=0$, а потому по предыдущей теореме $h=\lambda f+\mu g$. Это равенство верно и для

ограничений указанных функций на прямую AB. Введем на AB координату x, приняв O за начало координат. Тогда можно считать, что $f = x^2 - a$ и $g = x^2$ и потому $h = bx^2 - c$. Следовательно, корни уравнения $h = 0$ равноудалены от точки O.

Гиперболы с перпендикулярными асимптотами

Докажем следующую теорему: *Любая гипербола, проходящая через вершины треугольника ABC и точку пересечения его высот, является гиперболой с перпендикулярными асимптотами* (рис. 4.5).

Из доказательства теоремы 1 сразу следует, что коника (4.1) является гиперболой с перпендикулярными асимптотами тогда и только тогда, когда $a_{11} + a_{22} = 0$, поэтому линейная комбинация уравнений гипербол с перпендикулярными асимптотами тоже является гиперболой с перпендикулярными асимптотами. В пучке же коник, проходящих через точки A, B, C и H, есть две вырожденные коники с перпендикулярными асимптотами: $l_{AB}l_{CH}$ и $l_{BC}l_{AH}$. Следовательно, по теореме о пучке коник все коники этого пучка будут гиперболами с перпендикулярными асимптотами.

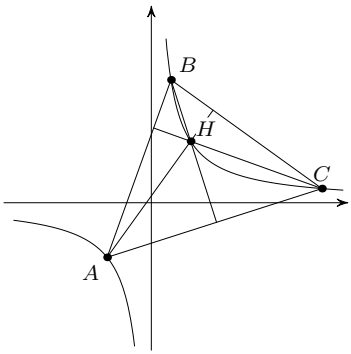


Рис. 4.5

Теорема Паскаля

Рассмотрим шестиугольник $ABCDEF$, вершины которого лежат на конике $f = 0$. Четырехугольники $ABCD$, $AFED$, $BEFC$ вписаны в эту конику, поэтому f можно представить в любом из следующих видов:

$$f = \lambda_1 l_{AB} \cdot l_{CD} + \mu_1 l_{AD} \cdot l_{BC}, \tag{4.9}$$

$$f = \lambda_2 l_{AF} \cdot l_{ED} + \mu_2 l_{AD} \cdot l_{EF}, \tag{4.10}$$

$$f = \lambda_3 l_{BE} \cdot l_{CF} + \mu_3 l_{BC} \cdot l_{EF}. \tag{4.11}$$

Приравняв выражения (4.9) и (4.10), получаем

$$\lambda_1 l_{AB} \cdot l_{CD} - \lambda_2 l_{AF} \cdot l_{ED} = (\mu_1 l_{BC} - \mu_2 l_{EF}) l_{AD}.$$

Пусть X — точка пересечения прямых AB и ED. Тогда в точке X обращается в нуль функция $\mu_1 l_{BC} - \mu_2 l_{EF}$, а функция l_{AD} в этой точке в нуль не обращается, т. е. точка X лежит на прямой $\mu_1 l_{BC} = \mu_2 l_{EF}$. Аналогично доказывается, что на прямой $\mu_1 l_{BC} = \mu_2 l_{EF}$ лежит точка пересечения прямых CD и AF. Очевидно также, что точка пересечения прямых BC и EF лежит на прямой $\mu_1 l_{BC} = \mu_2 l_{EF}$. В итоге получаем следующее утверждение[1].

Теорема Паскаля. *Если точки A, B, C, D, E и F лежат на одной конике, то точки пересечения прямых AB и DE, BC и EF, CD и FA лежат на одной прямой.*

Но продолжим рассуждения дальше. Приравнивая выражения (4.10) и (4.11), получим, что точки пересечения прямых AF и BE, ED и CF, AD и BC лежат на прямой $\mu_2 l_{AD} = \mu_3 l_{BC}$. А приравняв (4.9) и (4.11), получим, что точки пересечения прямых AB и CF, CD и BE, AD и EF лежат на прямой $\mu_1 l_{AD} = \mu_3 l_{EF}$. Легко проверить, что прямые $\mu_1 l_{BC} = \mu_2 l_{EF}$, $\mu_2 l_{AD} = \mu_3 l_{BC}$ и $\mu_1 l_{AD} = \mu_3 l_{EF}$ пересекаются в одной точке. В самом деле, если X — точка пересечения первых двух прямых, то $\mu_1\mu_2 l_{BC}(X) l_{AD}(X) = \mu_2\mu_3 l_{EF}(X) l_{BC}(X)$. Сократив на $\mu_2 l_{BC}(X)$, получим $\mu_1 l_{AD}(X) = \mu_3 l_{EF}(X)$ (мы не будем останавливаться на обсуждении вырожденного случая, когда $\mu_2 l_{BC}(X) = 0$).

Будем называть *прямой Паскаля* шестиугольника, вписанного в конику, прямую, на которой лежат точки пересечения пар его противоположных сторон. При этом шестиугольником можно считать и замкнутую самопересекающуюся ломаную. Доказанное утверждение можно сформулировать следующим образом.

Теорема Штейнера. *Пусть точки A, B, C, D, E, F лежат на одной конике. Тогда прямые Паскаля шестиугольников $ABCDEF$, $ADCFEB$ и $ADEBCF$* (рис. 4.6) *пересекаются в одной точке.*

Напомним, что при доказательстве этой теоремы исходными четырехугольниками были $ABCD$, $AFED$ и $BEFC$. Можно исходить также из четырехугольников $ABFE$, $ABDC$ и $CDFE$. Тогда получим следующее утверждение.

Теорема Киркмана. *Прямые Паскаля шестиугольников $ABFDCE$, $AEFBDC$ и $ABDFEC$* (рис. 4.7) *пересекаются в одной точке.*

[1] С прямой Паскаля мы уже встречались на с. 24.

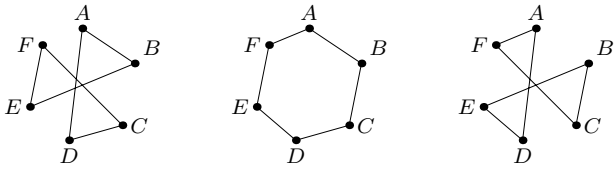


Рис. 4.6

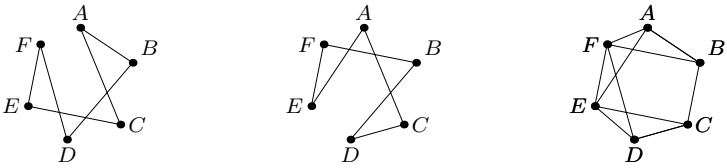


Рис. 4.7.

Нетрудно убедиться, что данным шести точкам на конике соответствуют 60 прямых Паскаля. При этом каждая прямая Паскаля входит ровно в одну тройку Штейнера и три тройки Киркмана.

Общие хорды двух коник, вписанных в одну и ту же конику

Теорему о пучке коник можно применять и в том случае, когда некоторые пары точек сливаются, т. е. коники не только проходят через данную точку, но и касаются друг друга в этой точке. Это замечание позволяет доказать следующее утверждение.

Теорема об общих хордах коник. *Пусть коники* Γ *и* Γ_1 *касаются в точках* A *и* B, *а коники* Γ *и* Γ_2 *касаются в точках* C *и* D, *причем* Γ_1 *и* Γ_2 *имеют четыре общие точки. Тогда у коник* Γ_1 *и* Γ_2 *есть пара общих хорд, проходящих через точку пересечения прямых* AB *и* CD (рис. 4.8).

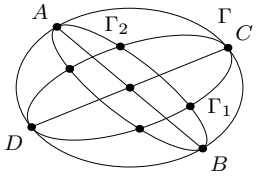


Рис. 4.8

Доказательство. Пусть $p_1 = 0$ и $p_2 = 0$ — уравнения общих касательных к коникам Γ и Γ_1 в точках A и B, $q = 0$ — уравнение прямой AB. Тогда уравнения коник Γ и Γ_1 можно представить в виде $f = \lambda p_1 p_2 + \mu q^2 = 0$ и $f_1 = \lambda_1 p_1 p_2 + \mu_1 q^2 = 0$. Домножив f_1 на λ/λ_1, можно считать, что $\lambda = \lambda_1$, а значит, $f_1 = f + \alpha q^2$. Аналогично $f_2 = f + \beta r^2$, где $r = 0$ — уравнение прямой CD. Рассмотрим уравнение $f_1 - f_2 = 0$, т. е. $\alpha q^2 - \beta r^2 = 0$. Ему удовлетворяют четыре об-

щие точки коник Γ_1 и Γ_2. С другой стороны, это уравнение разлагается в произведение линейных уравнений $\sqrt{\alpha}q + \sqrt{\beta}r = 0$ и $\sqrt{\alpha}q - \sqrt{\beta}r = 0$. Следовательно, прямые $\sqrt{\alpha}q \pm \sqrt{\beta}r = 0$ содержат общие хорды коник Γ_1 и Γ_2.

Ясно также, что точка пересечения этих прямых совпадает с точкой пересечения прямых $q = 0$ и $r = 0$. □

§ 4.3. Некоторые свойства квадрик

Квадрикой называют поверхность в $\mathbb{R}^n$, заданную уравнением $\sum a_{ij}x_ix_j + \sum b_ix_i + c = 0$. Мы не приводим метрической, аффинной и проективной классификаций квадрик (это обычно делается в курсах линейной алгебры) и рассказываем здесь о некоторых геометрических свойствах квадрик.

Квадрику в $\mathbb{R}^3$ называют *конусом*, если в некоторой прямоугольной системе координат она задается уравнением $ax^2 + by^2 = z^2$, где a, $b > 0$. В том случае, когда $a = b$, конус называют *конусом вращения* или *прямым круговым конусом*. Точку $(0, 0, 0)$ называют *вершиной* конуса, а ось Oz называют *осью* конуса.

Квадрику в $\mathbb{R}^n$ называют *эллипсоидом*, если в некоторой прямоугольной системе координат она задается уравнением $\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x_n}{a_n}\right)^2 = 1$. Гиперплоскость, пересекающую эллипсоид ровно в одной точке, называют *касательной гиперплоскостью* (разумеется, это определение совпадает с понятием касательного аффинного многообразия к эллипсоиду в смысле классического анализа).

Теорема 1. *Уравнение гиперплоскости, касающейся эллипсоида* $\sum\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 = 1$ *в точке* $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, *имеет вид*

$$\frac{\xi_1 x_1}{a_1^2} + \ldots + \frac{\xi_n x_n}{a_n^2} = 1.$$

Доказательство. Пусть точка $(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит эллипсоиду и гиперплоскости, т. е. $\sum\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 = 1$ и $\sum\left(\frac{\xi_i x_i}{a_i^2}\right) = 1$. Тогда

$$\sum\left(\frac{x_i - \xi_i}{a_i}\right)^2 = \sum\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 - 2\sum\frac{x_i\xi_i}{a_i^2} + \sum\left(\frac{\xi_i}{a_i}\right)^2 = 0,$$

а значит, $x_i = \xi_i$. □

Для квадрики $\sum a_{ij}x_ix_j = 0$ касательная плоскость в точке $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ определяется уравнением $\sum a_{ij}\xi_i x_j = 0$.

С эллипсоидом $\sum\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2=1$ и ортонормированным базисом $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ можно связать систему гиперплоскостей Π_i и систему отрезков $[OA_i]$, где O — начало координат. А именно, гиперплоскость Π_i касается эллипсоида и ортогональна вектору ε_i, а отрезок $[OA_i]$ параллелен вектору ε_i, причем точка A_i лежит на эллипсоиде.

Теорема 2. а) *Пусть d_i — расстояние от начала координат до гиперплоскости Π_i. Тогда*

$$d_1^2+\ldots+d_n^2=a_1^2+\ldots+a_n^2.$$

б) *Пусть r_i — длина отрезка $[OA_i]$. Тогда*

$$\frac{1}{r_1^2}+\ldots+\frac{1}{r_n^2}=\frac{1}{a_1^2}+\ldots+\frac{1}{a_n^2}.$$

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис, относительно которого уравнение эллипсоида имеет вид $\sum\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2=1$. Тогда $\varepsilon_j=\sum_i a_{ij}e_i$, где $A=(a_{ij})$ — ортогональная матрица.

а) Пусть ξ — точка пересечения гиперплоскостей $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$. Тогда $d_1^2+\ldots+d_n^2=(\xi, \xi)$, поэтому нужно доказать, что $\sum\xi_i^2=\sum a_i^2$.

Уравнение плоскости Π_j имеет вид $(\varepsilon_j, x)=(\varepsilon_j, \xi)$, т. е.

$$\sum_i\frac{a_{ij}x_i}{(\varepsilon_j, \xi)}=1.$$

С другой стороны, уравнение плоскости Π_j имеет вид $\sum_i\left(\frac{\eta_i^{(j)}x_i}{a_i^2}\right)=1$. Следовательно,

$$\eta_i^{(j)}=\frac{a_i^2a_{ij}}{(\varepsilon_j, \xi)},$$

причем $\sum_i\left(\frac{\eta_i^{(j)}}{a_i}\right)^2=1$, т. е. $\sum_i a_i^2a_{ij}^2=(\varepsilon_j, \xi)^2$. Следовательно, $\sum a_i^2=$ $=\sum_i\left(a_i^2\sum_j a_{ij}^2\right)=\sum(\varepsilon_j, \xi)^2=\sum\xi_i^2$.

б) Конец вектора $r_j\varepsilon_j=\sum_i a_{ij}r_je_i$ лежит на эллипсоиде $\sum\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2=1$, поэтому $\sum_i\left(\frac{a_{ij}r_j}{a_i}\right)^2=1$, т. е.

$$\frac{1}{r_j^2}=\sum_i\frac{a_{ij}^2}{a_i^2}.$$

Следовательно,

$$\sum_j\frac{1}{r_j^2}=\sum_{i,j}\frac{a_{ij}^2}{a_i^2}=\sum_i\frac{1}{a_i^2}.$$

□

Замечание. Теорема 2 а) допускает следующую формулировку: *Длина диагонали прямоугольного параллелепипеда, описанного вокруг данного эллипсоида, не зависит от положения параллелепипеда, т. е. вершины всех таких параллелепипедов лежат на одной сфере.*

Теорема 3. *Все сечения эллипсоида в $\mathbb{R}^3$ параллельными плоскостями подобны друг другу.*

Доказательство. Можно считать, что уравнения секущих плоскостей имеют вид $z = \lambda$. Тогда сечение квадрики

$$ax^2 + bxy + cy^2 + d + (a_1x + b_1y + c_1)z + a_2z^2 = 0$$

представляет собой конику

$$ax^2 + bxy + cy^2 + \lambda a_1x + \lambda b_1y + a_2\lambda^2 + c_1\lambda + d = 0.$$

В случае эллипсоида эта коника является эллипсом (если она не пуста и не вырождается в точку). Направление осей эллипса и отношение их длин полностью определяются квадратичной частью $ax^2 + bxy + cy^2$. □

Теорема 4. *Пусть $0 < a < b < c$. Сечение эллипсоида*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

представляет собой окружность тогда и только тогда, когда секущая плоскость имеет уравнение $x\sqrt{\alpha} \pm z\sqrt{\beta} = \lambda$, где $\alpha = \dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}$, $\beta = \dfrac{1}{b^2} - \dfrac{1}{c^2}$.

Доказательство. Согласно теореме 3 достаточно рассмотреть случай, когда секущая плоскость проходит через начало координат. Предположим, что такое сечение представляет собой окружность радиуса r. Тогда точки этой окружности лежат на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. А так как эти точки лежат на эллипсоиде, они лежат на поверхности

$$x^2\Big(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2}\Big) + y^2\Big(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}\Big) + z^2\Big(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{r^2}\Big) = 0. \qquad (4.12)$$

В том случае, когда коэффициенты при x^2, y^2 и z^2 ненулевые, поверхность (4.12) представляет собой конус (или одну точку). Поэтому окружность с центром в начале координат может лежать на поверхности (4.12) лишь в том случае, когда один из коэффициентов $\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{r^2}$, $\dfrac{1}{b^2} - \dfrac{1}{r^2}$ и $\dfrac{1}{c^2} - \dfrac{1}{r^2}$ равен нулю, а два других имеют различные знаки. Учитывая, что $0 < a < b < c$, находим $r = b$. □

Два семейства прямых на квадрике

Уравнение квадрики в $\mathbb{CP}^3$ можно привести к виду $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2$. После замены $y_{1,2} = x_1 \pm ix_2$, $y_{3,4} = x_3 \pm ix_4$ это уравнение примет вид $y_1y_2 = y_3y_4$.

Поверхность $y_1y_2 = y_3y_4$ содержит два семейства прямых, а именно, прямые $y_1 = \lambda y_3$, $\lambda y_2 = y_4$ и прямые $y_1 = \mu y_4$, $\mu y_2 = y_3$ (при этом мы не исключаем значения λ, $\mu = \infty$, которым соответствуют прямые $y_3 = 0$, $y_2 = 0$ и $y_4 = 0$, $y_2 = 0$). Легко проверить, что никаких других прямых эта поверхность не содержит. В самом деле, рассмотрим прямую, проходящую через точки с координатами (a_i) и (b_i). Она состоит из точек вида $sa_i + tb_i$. При этом можно считать, что $b_4 = 0$. Если рассматриваемая прямая лежит на поверхности $y_1y_2 = y_3y_4$, то для всех s и t выполняется равенство

$$(sa_1 + tb_1)(sa_2 + tb_2) = (sa_3 + tb_3)sa_4.$$

Следовательно, $b_1b_2 = 0$, т. е. $b_1 = 0$ или $b_2 = 0$. В случае $b_1 = 0$ получаем $y_1 = \mu y_4$, а в случае $b_2 = 0$ получаем $\lambda y_2 = y_4$.

Через каждую точку (a_1, a_2, a_3, a_4) поверхности $y_1y_2 = y_3y_4$ проходит ровно одна прямая каждого семейства, поскольку параметры λ и μ определены однозначно: $\lambda = a_1/a_3 = a_4/a_2$ и $\mu = a_1/a_4 = a_3/a_2$. Для поверхности в $\mathbb{R}^3$ эти прямые не обязательно вещественны. Например, эллипсоид не может содержать вещественных прямых.

Прямая $y_1 = \mu y_4$, $\mu y_2 = y_3$ пересекает прямые $y_1 = \lambda y_3$, $\lambda y_2 = y_4$ и $y_1 = \lambda' y_3$, $\lambda' y_2 = y_4$ в точках $A = (\lambda\mu,\ 1,\ \mu,\ \lambda)$ и $A' = (\lambda'\mu,\ 1,\ \mu,\ \lambda')$, соответственно. Отображение $A \mapsto A'$ прямой с параметром λ в прямую с параметром λ' является проективным отображением, так как параметр μ можно считать координатой на обеих прямых.

Через две прямые $y_1 = 0$, $y_4 = 0$ и $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ проходит целое семейство квадрик, а именно квадрики $y_1y_2 = \alpha y_3y_4$. Но если фиксировать еще одну прямую $y_1 = \lambda y_3$, $\lambda y_2 = y_4$ ($\lambda \neq 0,\ \infty$), то через эти три прямые проходит уже единственная квадрика $y_1y_2 = y_3y_4$. Дело в том, что если a, b и c — попарно скрещивающиеся прямые в $\mathbb{R}^3$, то через любую точку A прямой a проходит ровно одна прямая, пересекающая (возможно, в бесконечно удаленной точке) прямые b и c. Чтобы найти эту прямую, нужно провести плоскость, содержащую точку A и прямую b, и взять точку пересечения этой плоскости с прямой c.

Мы убедились, что через три попарно скрещивающиеся прямые проходит не более одной квадрики. Покажем, что любые три прямые в $\mathbb{R}^3$ содержатся в некоторой квадрике (возможно, вырожденной). Квадрика в $\mathbb{R}^3$ задается коэффициентами при x^2, y^2, z^2, xy, yz, xz, x, y, z и свободным членом. Поэтому условие, что квадрика проходит через N данных точек, эквивалентно системе N линейных уравнений с 10 неизвестными. При $N \leqslant 9$ эта система имеет ненулевое решение, а значит, через любые 9 точек в $\mathbb{R}^3$ проходит по крайней мере одна квадрика. Возьмем на каждой из трех данных прямых по 3 точки. Через выбранные 9 точек про-

ходит некоторая квадрика. А так как эта квадрика пересекает каждую из данных прямых в трех точках, она содержит эти прямые целиком.

Через точку (a_1, a_2, a_3, a_4) квадрики $x_1x_2 = x_3x_4$ проходят прямые $a_2x_1 = a_4x_3$, $a_1x_2 = a_3x_4$ и $a_1x_2 = a_4x_3$, $a_2x_1 = a_3x_4$, принадлежащие этой квадрике. Плоскость, содержащая эти прямые, задается уравнением $a_2x_1 + a_1x_2 = a_4x_3 + a_3x_4$. Легко проверить, что касательная плоскость к квадрике в точке (a_1, a_2, a_3, a_4) тоже задается этим уравнением. Поэтому касательная плоскость к квадрике в данной точке — это плоскость, содержащая две прямые, которые проходят через данную точку и принадлежат квадрике.

Если в $\mathbb{R}^3$ задано более трех прямых, то эти прямые не обязательно лежат на одной квадрике. Известно несколько теорем о том, что полученные определенным образом конфигурации прямых лежат на одной квадрике. К теоремам такого вида относятся, например, обобщения теорем Паскаля и Брианшона.

Определение. Шестиугольник $ABCDEF$ в $\mathbb{R}^3$ называют *шестиугольником Брианшона*, если его диагонали AD, BE и CF пересекаются в одной точке (возможно, бесконечно удаленной).

Теорема 5. *Неплоский шестиугольник $ABCDEF$ в $\mathbb{R}^3$ является шестиугольником Брианшона тогда и только тогда, когда все его стороны лежат на одной квадрике.*

Доказательство. Предположим, что диагонали неплоского шестиугольника $ABCDEF$ в $\mathbb{R}^3$ пересекаются в одной точке. Покажем, что тогда прямая AB принадлежит квадрике, содержащей BC, DE и AF. Для этого достаточно доказать, что прямая AB пересекает прямую DE (прямые BC и AF она пересекает в точках B и A соответственно). По условию прямые AD и BE пересекаются, а значит, точки A, B, D и E лежат в одной плоскости. Следовательно, прямые AB и DE пересекаются. Аналогично доказывается, что прямые CD и EF принадлежат рассматриваемой квадрике.

Предположим теперь, что прямые AB, CD и EF принадлежат квадрике, содержащей прямые BC, DE и AF. Тогда прямая AB пересекает прямую DE, поэтому прямые AD и BE пересекаются. Аналогично доказывается, что прямые AD, BE и CF попарно пересекаются. Но по условию эти прямые не лежат в одной плоскости, а значит, все они должны пересекаться в одной точке. □

Теорему Паскаля можно сформулировать следующим образом. *Рассмотрим точки, в которых коника пересекает стороны треугольника ABC* (рис. 4.9). *Тогда точки пересечения прямых A_bA_c и BC, B_aB_c и AC, C_aC_b и AB лежат на одной прямой.* Поэтому следующее утверждение можно рассматривать как обобщение теоремы Паскаля.

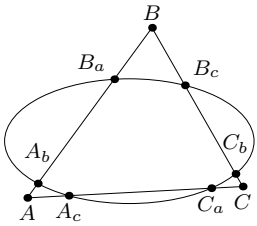


Рис. 4.9

Теорема 6. *Рассмотрим точки, в которых квадрика пересекает ребра тетраэдра $ABCD$* (рис. 4.10). *Тогда прямые a, b, c и d, по которым пересекаются плоскости $A_bA_cA_d$ и BCD, $B_aB_cB_d$ и ACD, $C_aC_bC_d$ и ABD, $D_aD_bD_c$ и ABC, принадлежат одной квадрике.*

Доказательство. Рассмотрим плоскость BCD. Согласно теореме Паскаля точки $X_b = B_cB_d \cap C_dD_c$, $X_c = C_bC_d \cap B_dD_b$ и $X_d = D_bD_c \cap C_bB_c$ лежат на одной прямой l_a (рис. 4.11). Прямая l_a пересекает прямую a, так как обе эти прямые лежат в плоскости BCD. Кроме того, прямая l_a пересекает прямые b, c и d в точках X_b, X_c и X_d соответственно. Аналогично можно построить прямые l_b, l_c и l_d, каждая из которых пересекает прямые a, b, c и d.

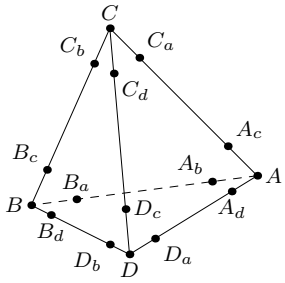


Рис. 4.10

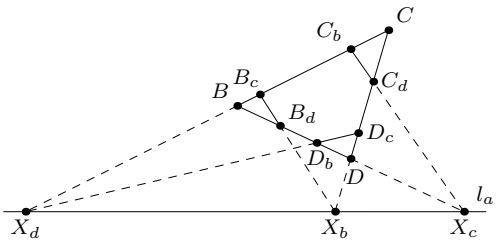


Рис. 4.11

Теперь легко доказать, что прямые a, b, c и d лежат на одной квадрике. В самом деле, рассмотрим квадрику, содержащую прямые a, b и c. Эта квадрика содержит прямые l_a, l_b, l_c и l_d. Ясно также, что квадрика, содержащая прямые l_a, l_b, l_c, содержит прямую d. □

Теорема 7. *Высоты тетраэдра $ABCD$ принадлежат одной квадрике.*

Доказательство. Плоскости, проходящие через ребра DA, DB и DC перпендикулярно граням DBC, DAC и DAB соответственно,

имеют общую прямую l_d. (Это утверждение эквивалентно тому, что высоты сферического треугольника пересекаются в одной точке; доказательство см. в решении задачи 5.12 б).) Прямая l_d пересекает высоты, проведенные из вершин A, B и C. Кроме того, она пересекает (в точке D) высоту, проведенную из вершины D. Аналогично можно построить прямые l_a, l_b и l_c, которые пересекают все высоты тетраэдра. Доказательство завершается точно так же, как и доказательство предыдущей теоремы. □

Задачи к главе 4

Пучок коник, проходящих через 4 точки

4.1. Эллипс касается сторон четырехугольника $ABCD$ в точках A_1, B_1, C_1, D_1. Докажите, что прямые AC, BD, A_1C_1 и B_1D_1 пересекаются в одной точке.

4.2. Две коники имеют 4 общих точки. Докажите, что эти точки лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда оси коник перпендикулярны.

4.3. Докажите, что в любом пучке коник, проходящих через 4 точки, не более двух парабол.

4.4. Докажите, что центры коник, проходящих через точки A, B, C и D, образуют конику Γ.

4.5. Докажите следующие свойства коники Γ из предыдущей задачи:

а) Γ проходит через 6 середин отрезков, соединяющих пары данных точек, и через 3 точки пересечения прямых, соединяющих пары данных точек;

б) центр коники Γ совпадает с центром масс точек A, B, C и D;

в) если D — точка пересечения высот треугольника ABC, то Γ — окружность девяти точек этого треугольника;

д) если четырехугольник $ABCD$ вписанный, то Γ — гипербола с перпендикулярными асимптотами; в этом случае оси всех коник пучка параллельны асимптотам Γ.

Парабола

4.6. Докажите, что с помощью гомотетии с центром $(0, 0)$ параболу $4ay = x^2$ можно перевести в параболу $y = x^2$.

4.7. Окружность пересекает параболу в четырех точках. Докажите, что центр масс этих точек лежит на оси параболы.

4.8. Две параболы, оси которых перпендикулярны, пересекаются в четырех точках. Докажите, что эти точки лежат на одной окружности.

4.9. Хорда P_1P_2 параболы проходит через фокус F. Докажите, что величина $1/|P_1F| + 1/|P_2F|$ не зависит от выбора хорды.

4.10. Докажите, что касательные к параболе $4y = x^2$ в точках $(2t_1,\, t_1^2)$ и $(2t_2,\, t_2^2)$ пересекаются в точке $(t_1 + t_2,\, t_1t_2)$.

4.11. Из точки O проведены касательные OA и OB к параболе с фокусом F. Докажите, что $\angle AFB = 2\angle AOB$, причем луч OF — биссектриса угла AFB.

4.12. Докажите, что касательные OA и OB к параболе перпендикулярны тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

а) отрезок AB проходит через фокус параболы;

б) точка O лежит на директрисе параболы.

4.13. Докажите, что преобразование $z \mapsto 2(1-z)^{-2}$ переводит единичную окружность $|z| = 1$ в параболу.

4.14. Существует ли преобразование плоскости, переводящее семейство парабол $x = a + by + y^2$ в семейство прямых?

4.15. Касательные к параболе в точках α, β, γ образуют треугольник ABC (рис. 4.12). Докажите, что

а) описанная окружность треугольника ABC проходит через фокус параболы;

б) высоты треугольника ABC пересекаются в точке, лежащей на директрисе параболы;

в) $S_{\alpha\beta\gamma} = 2S_{ABC}$;

г) $\sqrt[3]{S_{\alpha\beta C}} + \sqrt[3]{S_{\beta\gamma A}} = \sqrt[3]{S_{\alpha\gamma B}}$.

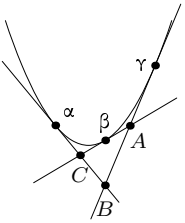


Рис. 4.12

4.16. Прямая l получена из директрисы параболы гомотетией с центром в фокусе параболы и коэффициентом 2. Из точки O прямой l проведены касательные OA и OB к параболе. Докажите, что ортоцентром треугольника AOB служит вершина параболы.

4.17. Пучок параллельных лучей света, отразившись от кривой C, сходится в точке F. Докажите, что C — парабола с фокусом F и осью, параллельной лучам света.

Эллипс

4.18. а) Докажите, что для любого параллелограмма существует эллипс, касающийся сторон параллелограмма в их серединах.

б) Докажите, что для любого треугольника существует эллипс, касающийся сторон треугольника в их серединах.

4.19. Пусть AA' и BB' — сопряженные диаметры эллипса с центром O. Докажите, что

а) площадь треугольника AOB не зависит от выбора сопряженных диаметров;

б) величина $|OA|^2 + |OB|^2$ не зависит от выбора сопряженных диаметров.

4.20. а) Докажите, что проекции фокусов эллипса на все касательные лежат на одной окружности.

б) Пусть d_1 и d_2 — расстояния от фокусов эллипса до касательной. Докажите, что величина $d_1 d_2$ не зависит от выбора касательной.

4.21. Из точки O проведены касательные OA и OB к эллипсу с фокусами F_1 и F_2. Докажите, что $\angle AOF_1 = \angle BOF_2$ и $\angle AF_1O = \angle BF_1O$.

4.22. Параллелограмм описан около эллипса. Докажите, что диагонали параллелограмма содержат сопряженные диаметры эллипса.

4.23. Пусть a и b — фиксированные комплексные числа. Докажите, что при изменении φ от 0 до 2π точки вида $ae^{i\varphi} + be^{-i\varphi}$ заметают эллипс или отрезок.

4.24. Вокруг эллипса описан прямоугольник. Докажите, что длина его диагонали не зависит от положения прямоугольника.

4.25. Хорда PQ окружности $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ с центром O касается эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Докажите, что прямые PO и QO содержат сопряженные диаметры эллипса.

4.26. а) Пусть AA' и BB' — сопряженные диаметры эллипса с центром O. Проведем через точку B перпендикуляр к прямой OA и отложим на нем отрезки BP и BQ, равные OA. Докажите, что главные оси эллипса являются биссектрисами углов между прямыми OP и OQ.

б) На плоскости нарисована пара сопряженных диаметров эллипса. С помощью циркуля и линейки постройте его главные оси.

4.27. Нормаль к эллипсу в точке A пересекает малую полуось в точке Q, P — проекция центра эллипса на нормаль. Докажите, что $AP \cdot AQ = a^2$, где a — большая полуось.

4.28. Докажите, что все вписанные в эллипс ромбы описаны вокруг одной окружности.

4.29. Окружность, центр которой лежит на эллипсе, касается двух сопряженных диаметров. Докажите, что радиус окружности не зависит от выбора сопряженных диаметров.

4.30. а) Из точки O проведены касательные OP и OQ к эллипсу с фокусами F_1 и F_2. Докажите, что

$$\angle POQ = \pi - \frac{1}{2}(\angle PF_1Q + \angle PF_2Q).$$

б) Отрезок AB виден из фокусов F_1 и F_2 под углами φ_1 и φ_2 соответственно. Докажите, что $\varphi_1 + \varphi_2 = \alpha + \beta$ (см. рис. 4.13).

4.31. К эллипсу с центром O проведены две параллельные касательные l_1 и l_2. Окружность с центром O_1 касается (внешним образом) эллипса и прямых l_1 и l_2. Докажите, что длина отрезка OO_1 равна сумме полуосей эллипса.

4.32. Окружность радиуса r с центром C, лежащим на большей полуоси эллипса, касается эллипса в двух точках; O — центр эллипса, a и b — его полуоси. Докажите, что

$$|OC|^2 = \frac{(a^2 - b^2)(b^2 - r^2)}{b^2}.$$

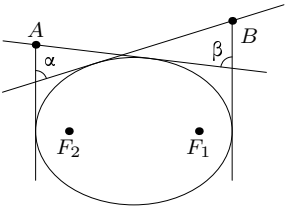


Рис. 4.13

4.33. Три окружности, центры которых лежат на большой оси эллипса, касаются эллипса. При этом окружность радиуса r_2 касается (внешним образом) окружностей радиуса r_1 и r_3. Докажите, что

$$r_1 + r_3 = \frac{2a^2(a^2 - 2b^2)}{a^4} r_2.$$

4.34. Пусть N окружностей, центры которых лежат на большой оси эллипса, касаются эллипса и при этом окружность радиуса r_i $(2 \leqslant i \leqslant N-1)$ касается окружностей радиуса r_{i-1} и r_{i+1}. Докажите, что если $3n - 2 \leqslant N$, то

$$r_{2n-1}(r_1 + r_{2n-1}) = r_n(r_n + r_{3n-2}).$$

4.35. На комплексной плоскости дан треугольник ABC. Пусть F_1 и F_2 — фокусы эллипса, касающегося сторон этого треугольника в их серединах. Докажите, что F_1 и F_2 — корни производной многочлена третьей степени с корнями A, B и C.

Гипербола

4.36. Стороны параллелограмма лежат на асимптотах, а двумя его противоположными вершинами служат точка гиперболы и точка пересечения асимптот. Докажите, что площадь такого параллелограмма одна и та же для всех точек гиперболы.

4.37. Докажите, что асимптоты гиперболы

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + cy + f = 0$$

ортогональны тогда и только тогда, когда $a + c = 0$.

4.38. Вершины треугольника лежат на гиперболе $xy = 1$. Докажите, что его ортоцентр тоже лежит на этой гиперболе.

4.39. Найдите множество точек пересечения всех пар перпендикулярных касательных к гиперболе.

4.40. Окружность радиуса $2\sqrt{x_0^2+x_0^{-2}}$ с центром $(x_0,\, x_0^{-1})$ пересекает гиперболу $xy=1$ в точке $(-x_0,\, -x_0^{-1})$ и в точках A, B, C. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

Коники как множества точек

4.41. Докажите, что множество точек, равноудаленных от данной точки и данной окружности, представляет собой эллипс, гиперболу или луч.

4.42. Докажите, что множество всех центров окружностей, проходящих через данную точку и касающихся данной окружности (или прямой), не содержащей данную точку, представляет собой эллипс или гиперболу (или параболу).

4.43. На плоскости даны точки $A_t=(1+t,\, 1+t)$ и $B_t=(-1+t,\, 1-t)$. Опишите множество, заметаемое всеми прямыми A_tB_t, $t\in\mathbb{R}$.

4.44. Даны точка O и прямая l. Точка X движется по прямой l. Опишите множество, которое заметают перпендикуляры к прямой XO, восставленные из точки X.

4.45. По прямым l и l' с постоянными скоростями $v\neq v'$ движутся точки X и X'. Какое множество заметают прямые XX'?

4.46. Через каждую точку X, лежащую внутри данной окружности S, проводится прямая l, ортогональная прямой XO, где O — данная точка, не лежащая на окружности S. Опишите множество, заметаемое всеми прямыми l.

4.47. Докажите, что центры всех правильных треугольников, вписанных в данную конику, лежат на некоторой конике.

Основные свойства квадрик

4.48. Докажите, что проекция любого сечения квадрики $z=x^2+y^2$ на плоскость $z=0$ представляет собой окружность или прямую.

4.49. Докажите, что у любого конуса в $\mathbb{R}^3$ есть сечение, являющееся окружностью.

4.50. а) Докажите, что если две квадрики в $\mathbb{R}^3$ имеют общее плоское сечение, то у них есть еще одно общее плоское сечение.

б) Докажите, что если три квадрики в $\mathbb{R}^3$ имеют общее плоское сечение, то три плоскости их других попарно общих сечений имеют общую прямую.

4.51. а) Длины главных осей эллипсоида в $\mathbb{R}^3$ попарно различны, O — центр эллипсоида. Докажите, что если точка A эллипсоида не ле-

жит на главных осях, то существует ровно одно плоское сечение, для которого OA — главная полуось.

б) Плоскость $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0$, где $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, пересекает эллипсоид $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ по эллипсу с длинами главных полуосей r_1 и r_2. Докажите, что числа r_1 и r_2 удовлетворяют уравнению

$$\frac{a^2\cos^2\alpha}{a^2 - r^2} + \frac{b^2\cos^2\beta}{b^2 - r^2} + \frac{c^2\cos^2\gamma}{c^2 - r^2} = 0.$$

4.52. Рассмотрим эллипсоид в $\mathbb{R}^3$, полученный при вращении эллипса с фокусами F_1 и F_2 вокруг прямой F_1F_2.

а) Докажите, что для сечения этого эллипсоида плоскостью, проходящей через точку F_1, эта точка служит фокусом.

б) Пусть C — плоское сечение данного эллипсоида. Докажите, что прямые F_1X, $X \in C$, образуют прямой круговой конус.

Глава 5

Мир неевклидовых геометрий

В этой главе будет рассказано о двух неевклидовых геометриях — геометрии Лобачевского (называемой еще *гиперболической геометрией*) и геометрии Римана (называемой *эллиптической геометрией*)[1]. Мы начнем с последней; она проще для понимания, ибо локально (в малом) она совпадает с геометрией сферы, а сфера расположена в обычном трехмерном пространстве, и теоремы сферической геометрии можно трактовать как обычные стереометрические.

В геометрии Лобачевского через точку, не лежащую на прямой, можно провести много прямых, не пересекающих эту прямую. В течение многих веков люди не могли свыкнуться с тем, что такое возможно. Им чудилось, что пятый постулат Евклида о параллельности (сформулированный к тому же Евклидом громоздко и неуклюже[2]) является на самом деле теоремой, что он следует из остальных аксиом. Это оказалось неверным. Основные теоремы гиперболической геометрии были доказаны Гауссом, Лобачевским и Бойяи, а затем Бельтрами, Кэли, Клейн и Пуанкаре построили ее модели, и тогда сама реальность этой неевклидовой геометрии, за которой закрепилось имя геометрии Лобачевского, стала очевидной. Обо всем этом и рассказывается в настоящей главе.

§ 5.1. Окружность и двумерная сфера. Одномерная и двумерная геометрии Римана

Окружность и сфера

Окружность, наряду с прямой, — самый привычный объект евклидовой геометрии. Мы представляем ее как обод колеса, не имеющий толщины, который может скользить сам по себе или отображаться сам в себя «переворотом», если закрепить две точки, находящиеся на концах диаметра.

[1] Эти названия были предложены Клейном в эрлангенской программе.

[2] Если две прямые образуют при пересечении с третьей прямой внутренние односторонние углы, сумма величин которых меньше двух прямых, то эти прямые пересекутся, причем с той стороны от третьей прямой, по которой расположены эти внутренние односторонние углы.

В декартовой модели евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, состоящей из точек X, представленных парами (x_1, x_2) вещественных чисел, окружность единичного радиуса с центром в начале координат есть совокупность точек X, координаты которых удовлетворяют соотношению $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Такое множество обозначают $\mathbb{S}^1$. Это множество становится метрическим пространством, если в качестве расстояния $d(X, Y)$ между точками X и Y выбрать длину кратчайшей дуги, соединяющей эти точки. Можно определить движения окружности как такие взаимно однозначные преобразования окружности в себя, при которых расстояния между точками остаются неизменными. К таким движениям относятся повороты

$$(x_1, x_2) \mapsto (x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi, -x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi),$$

отражения $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, -x_2)$ и их суперпозиции. Нетрудно доказать, что так описываются все движения окружности.

Переходим к описанию двумерной сферы как геометрического объекта. Мы представляем себе сферу как поверхность глобуса или мяча, не имеющую толщины. Она может скользить сама по себе. Эта поверхность переходит в себя при центральной симметрии и симметрии относительно любой плоскости, проходящей через центр сферы.

В декартовой модели евклидова трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$, состоящей из точек X, представленных тройками (x_1, x_2, x_3) вещественных чисел, сфера единичного радиуса с центром в начале координат есть совокупность точек X, координаты которых удовлетворяют соотношению $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Это множество обозначают $\mathbb{S}^2$.

Математическая дисциплина, изучающая геометрические образы, находящиеся на сфере, называется *сферической геометрией*.

Окружность, по которой пересекает сферу плоскость, проходящая через центр сферы, называют *окружностью большого круга* (или *большой окружностью*). Сфера $\mathbb{S}^2$ становится метрическим пространством, если определить расстояние между различными не диаметрально противоположными точками X и Y на сфере как длину наименьшей дуги, высекаемой точками X и Y на единственной окружности большого круга, проходящей через точки X и Y. Расстояние между диаметрально противоположными точками сферы $\mathbb{S}^2$ равно π.

Движения сферы $\mathbb{S}^2$ — это такие ее взаимно однозначные преобразования, при которых расстояния между точками остаются неизменными. Движениями являются повороты на некоторый угол вокруг прямой, проходящей через центр сферы, и симметрии относительно плоскостей, проходящих через центр сферы. Ниже будет показано, что любое дви-

жение сферы является суперпозицией симметрий относительно плоскостей, проходящих через центр сферы.

Сферическая геометрия во многом сходна с планиметрией, но и во многом отлична от нее. Сферической геометрии мы уделим специальный параграф.

Сферическая геометрия возникла еще в античные времена. Свойства прямоугольных сферических треугольников были известны Птолемею. До Птолемея сферической геометрией (тоже для целей астрономии) занимался Менелай. Сохранился его трактат «Сферика», в первых двух книгах которого доказываются различные теоремы о сферических треугольниках (в том числе и теоремы о признаках равенства сферических треугольников).

Птолемей Клавдий (ок. 100 г.—ок. 178 г.) — древнегреческий ученый, автор великой книги «Большое математическое построение астрономии в XIII книгах», известной под арабским названием «Альмагест». В ней были описаны движения планет. Птолемею принадлежат многие результаты по геометрии, например, знаменитая теорема Птолемея о вписанном четырехугольнике.

Одна из характеризаций прямой в евклидовом пространстве заключается в том, что любой ее отрезок с концами A и B — кратчайшая из всех кривых с концами A и B. Именно на этой характеризации прямой основано определение прямой (геодезической) в неевклидовых геометриях. Кривую с концами A и B называют *геодезической*, если ее длина меньше длины любой другой кривой с теми же концами. На незамкнутой кривой две точки определяют один отрезок кривой, а на замкнутой кривой две точки определяют два отрезка кривой. В связи с этим незамкнутую кривую называют *геодезической*, если любой ее отрезок является геодезической, а замкнутую кривую называют *геодезической* в том случае, когда среди любых двух отрезков кривой, на которые ее делят две точки, один отрезок является геодезической.

Выясним, как устроены геодезические на двумерной сфере $\mathbb{S}^2$. Прежде всего нужно сказать, что такое длина кривой на сфере $\mathbb{S}^2$. Сфера $\mathbb{S}^2$ расположена в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, поэтому кривая на сфере $\mathbb{S}^2$ является также кривой в $\mathbb{R}^3$. Назовем *длиной кривой на сфере* $\mathbb{S}^2$ длину этой кривой в $\mathbb{R}^3$ (длиной кривой в $\mathbb{R}^3$ называют точную верхнюю грань длин ломаных, вписанных в эту кривую).

В евклидовой геометрии для доказательства того, что прямая является геодезической, можно воспользоваться неравенством треугольника $|AC| \leqslant |AB| + |BC|$; если точка B не лежит на отрезке AC, то неравенство строгое. В самом деле, если $AA_1A_2 \dots A_nB$ — произвольная ломаная с концами A и B, то из неравенства треугольника следует, что $|AB| \leqslant |AA_1| + |A_1B| \leqslant |AA_1| + |A_1A_2| + |A_2B| \leqslant \dots \leqslant |AA_1| + |A_1A_2| + \dots + |A_{n-1}A_n| + |A_nB|$, причем если ломаная не совпадает с отрезком AB, то хотя бы одно из этих неравенств строгое. Таким образом, длина

любой ломаной с концами A и B больше длины отрезка AB. Кривую можно с любой точностью приблизить ломаной, поэтому длина кривой с концами A и B больше длины отрезка AB. Как мы сейчас увидим, на сфере $\mathbb{S}^2$ геодезическими будут большие окружности. Через любые две не диаметрально противоположные точки сферы проходит ровно одна большая окружность, а через две диаметрально противоположные точки сферы проходит бесконечно много больших окружностей. Чтобы большие окружности действительно были геодезическими, неравенство треугольника должно выглядеть следующим образом. Рассмотрим кратчайшие дуги больших окружностей, соединяющих точки A и B, B и C, C и A; тогда сумма длин первых двух дуг не меньше длины третьей дуги. А так как длина дуги AB равна $R\gamma$ (рис. 5.1), приходим к новой эквивалентной формулировке: сумма двух плоских углов трехгранного угла не меньше третьего плоского угла. Докажем это утверждение для невырожденного трехгранного угла.

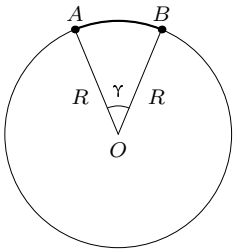


Рис. 5.1

Теорема 1. *Для любого трехгранного угла $OABC$ с вершиной O выполняется неравенство $\angle AOC < \angle AOB + \angle BOC$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда угол AOC наибольший. В этом случае внутри угла AOC можно выбрать точку B_1 так, что $\angle AOB_1 = \angle AOB$ и $|OB_1| = |OB|$. Проведем через точку B_1 отрезок с концами на лучах OA и OC; можно считать, что A и C — концы этого отрезка. Из равенства треугольников AOB и AOB_1 следует, что $|AB| = |AB_1|$. Кроме того, $|AB_1| + |B_1C| = |AC| < |AB| + |BC|$, поэтому $|B_1C| < |BC|$. Из теоремы косинусов следует, что при постоянных длинах сторон BO и OC длина стороны BC монотонно возрастает с возрастанием угла BOC. Следовательно, $\angle B_1OC < \angle BOC$, а значит,

$$\angle AOC = \angle AOB_1 + \angle B_1OC < \angle AOB + \angle BOC. \qquad \square$$

Сферическое неравенство треугольника позволяет доказать, что большие окружности — геодезические на сфере. (Это доказательство дословно повторяет приведенное выше доказательство того, что прямая в евклидовом пространстве — геодезическая.) Поэтому большие окружности мы иногда называем сферическими прямыми.

Расстояние между точками A и B сферы $\mathbb{S}^2$ определяется как длина кратчайшей дуги большой окружности, соединяющей точки A и B. Отметим, что сферическое расстояние между точками A и B является

монотонно возрастающей функцией от евклидова расстояния между ними. В частности, сферические расстояния равны тогда и только тогда, когда равны евклидовы расстояния.

Сферическая элементарная геометрия

Для сферической геометрии можно определить *полярное соответствие*, при котором каждой большой окружности S сопоставляется пара концов диаметра сферы, перпендикулярного S, а каждой паре диаметрально противоположных точек A и B сопоставляется большая окружность, лежащая в плоскости, перпендикулярной AB. Будем говорить, что большой окружности сопоставляются ее *полюсы*, а паре диаметрально противоположных точек сопоставляется их *поляра*. Легко проверить, что если большая окружность S проходит через точку A, то поляра точки A проходит через полюс большой окружности S. Таким образом, полярное соответствие переводит точки в прямые, а прямые в точки, причем утверждение «прямая l содержит точку A» переходит в утверждение «точка $l^\perp$ лежит на прямой $A^\perp$».

Сферическому треугольнику ABC можно сопоставить полярный ему треугольник $A'B'C'$ следующим образом: A' — тот из полюсов сферической прямой BC, который лежит вместе с точкой A по одну сторону от этой прямой; точки B' и C' определяются аналогично. Легко проверить следующие свойства полярного треугольника:

1) если треугольник $A'B'C'$ полярен треугольнику ABC, то треугольник ABC полярен треугольнику $A'B'C'$;

2) если α, β и γ — углы треугольника ABC, aR, bR и cR — длины его сторон (R — радиус сферы), то $\pi - a$, $\pi - b$ и $\pi - c$ — углы полярного треугольника $A'B'C'$; $(\pi - \alpha)R$, $(\pi - \beta)R$ и $(\pi - \gamma)R$ — длины его сторон.

Для доказательства свойства 1) рассмотрим центр O сферы. Так как $OA' \perp OC$ и $OB' \perp OC$, получаем $OC \perp OA'B'$.

Свойство 2) следует из того, что внутренние нормали к двугранному углу величиной α образуют между собой угол $\pi - \alpha$.

В сферической геометрии, в отличие от евклидовой, треугольники с соответственно равными углами обязательно равны. В самом деле, из равенства углов двух треугольников следует равенство сторон их полярных треугольников, а равенство треугольников по трем сторонам доказывается точно так же, как и в евклидовом случае. В частности, в сферической геометрии можно вычислить площадь треугольника, зная его углы.

Теорема 2. *Площадь сферического треугольника ABC с углами α, β и γ равна $(\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2$, где R — радиус сферы.*

Доказательство. Рассмотрим сначала *сферический двуугольник*, т. е. одну из четырех фигур, на которые разбивают сферу две сферические прямые.

Пусть $S(\alpha)$ — площадь сферического двуугольника с углом α. Ясно, величина что $S(\alpha)$ пропорциональна α и $S(\pi) = 2\pi R^2$ (площадь полусферы). Поэтому $S(\alpha) = 2\alpha R^2$.

Пары сферических прямых AB, BC и CA образуют 12 сферических двуугольников. Выберем из них 6 сферических двуугольников, содержащих либо треугольник ABC, либо симметричный ему (относительно центра сферы) треугольник $A_1B_1C_1$. Каждая точка треугольника ABC и треугольника $A_1B_1C_1$ покрыта ровно тремя такими двуугольниками, а любая другая точка сферы покрыта ровно одним двуугольником (точки сферических прямых AB, BC и CA мы не рассматриваем). Поэтому

$$4(\alpha+\beta+\gamma)R^2 = 4\pi R^2 + 2S_{ABC} + 2S_{A_1B_1C_1}.$$

А так как $S_{ABC} = S_{A_1B_1C_1}$, мы получаем $S_{ABC} = (\alpha+\beta+\gamma-\pi)R^2$. □

Следствие. *Сумма углов сферического треугольника больше* π.

Длины a, b и c сторон сферического треугольника ABC связаны соотношениями, аналогичными теоремам синусов и косинусов для треугольников в евклидовой плоскости. Для удобства будем считать, что радиус сферы равен 1. Пусть α, β и γ — углы при вершинах A, B и C соответственно.

Теорема синусов. *Справедливо равенство* $\dfrac{\sin a}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin b}{\sin\beta} = \dfrac{\sin c}{\sin\gamma}$.

Доказательство. Пусть O — центр сферы, H — проекция точки A на плоскость OBC, A_b и A_c — проекции точки A на прямые OB и OC. При этом точки A_b и A_c совпадают с проекциями точки H на прямые OB и OC. Следовательно,

$$|AH| = |A_bA|\sin\beta = \sin c\sin\beta, \qquad |AH| = |A_cA|\sin\gamma = \sin b\sin\gamma.$$

Поэтому $\sin b : \sin\beta = \sin c : \sin\gamma$. Аналогично $\sin b : \sin\beta = \sin a : \sin\alpha$. □

Если a мало, то $\sin a \approx a$. Поэтому сферическая теорема синусов при a, b, $c \to 0$ переходит в евклидову теорему синусов (см. с. 22).

Из сферической теоремы синусов следует сферическая теорема Фалеса: в равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

Первая теорема косинусов. *Справедливо равенство*

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos\alpha.$$

Доказательство. Пусть O — центр сферы, $e_a = \overrightarrow{OA}$, $e_b = \overrightarrow{OB}$ и $e_c = \overrightarrow{OC}$. Проекции векторов e_b и e_c на e_a равны $e_a\cos c$ и $e_a\cos b$ соответственно. Поэтому векторы $u = e_b - e_a\cos c$ и $v = e_c - e_a\cos b$ ортогональны

вектору e_a, их длины равны $\sin c$ и $\sin b$, а угол между ними равен α. Следовательно,

$$\cos a = (e_b,\, e_c) = (u + e_a \cos c,\, v + e_a \cos b) = (u,\, v) + \cos c \cos b = \\ = \sin b \sin c \cos \alpha + \cos b \cos c. \quad \square$$

Если a мало, то $\cos a \approx 1 - \dfrac{a^2}{2}$. Поэтому при $a,\, b,\, c \to 0$ сферическая первая теорема косинусов переходит в евклидову теорему косинусов (см. с. 21).

Вторая теорема косинусов. *Справедливо равенство*

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a.$$

Доказательство. Вторая теорема косинусов для треугольника ABC эквивалентна первой теореме косинусов для полярного ему треугольника $A'B'C'$. $\square$

При $c \to 0$ вторая теорема косинусов переходит в равенство $\cos \alpha = \\ = -\cos(\beta + \gamma)$, т. е. $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Геометрия n-мерной сферы

Для n-мерной сферы $\mathbb{S}^n$ в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ большие окружности определяются как сечения плоскостями, проходящими через центр сферы. Нетрудно убедиться, что большие окружности — геодезические. Расстояние между точками A и B сферы определяется как длина кратчайшей дуги большого круга, соединяющей эти точки. Для n-мерной сферы, так же как и для двумерной сферы, равенство сферических расстояний эквивалентно равенству евклидовых расстояний между точками.

В n-мерном евклидовом пространстве попарные расстояния между $n+2$ точками $A_1, \ldots, A_{n+2}$ связаны определенным соотношением. Дело в том, что расстояния от точки A_{n+2} до точек $A_1, \ldots, A_n$ определяют положение точки A_{n+2} с точностью до симметрии относительно плоскости $A_1 \ldots A_n$. Поэтому длина отрезка $A_{n+1}A_{n+2}$ при заданных длинах всех остальных отрезков может принимать лишь два значения. Для $n+2$ точек n-мерной сферы $\mathbb{S}^n$ тоже выполняется аналогичное соотношение.

Теорема 3. *Пусть точки $A_1, \ldots, A_{n+2}$ лежат на n-мерной сфере радиуса 1 и d_{ij} — расстояние (сферическое) между точками A_i и A_j. Тогда $\det(\cos d_{ij}) = 0$.*

Доказательство. Пусть O — центр заданной сферы, $e_i = \overrightarrow{OA_i}$. Рассмотрим параллелепипед размерности $n+2$, натянутый на векторы $e_1, \ldots, e_{n+2}$. Квадрат объема этого параллелепипеда равен $\det((e_i, e_j)) = \\ = \det(\cos d_{ij})$.

С другой стороны, векторы $e_1, \ldots, e_{n+2}$ лежат в пространстве размерности $n+1$, поэтому объем натянутого на них параллелепипеда размерности $n+2$ равен 0. □

Геометрия Римана, или эллиптическая геометрия

Риман, отправляясь от сферы, предложил рассматривать чуть измененный геометрический объект, в котором можно ввести понятие прямой, обладающей основным свойством: через каждые две точки проходит единственная прямая. Он предложил «склеить» диаметрально противоположные точки окружности $\mathbb{S}^1$ и сферы $\mathbb{S}^2$. Можно представить это так: в качестве геометрического объекта рассматриваются все прямые, проходящие через начало координат (в $\mathbb{R}^2$ и в $\mathbb{R}^3$ соответственно). Это — точки. Расстояние между ними — это величина угла между прямыми. Движения — это преобразования прямых под воздействием ортогональных преобразований в $\mathbb{R}^2$ и в $\mathbb{R}^3$. В случае $\mathbb{R}^3$ прямой в новой геометрии называют все прямые в $\mathbb{R}^3$, лежащие в одной плоскости, проходящей через начало координат. Таким образом, через две различные точки проходит одна и только одна прямая. Но в отличие от обычной планиметрии в геометрии Римана нет параллельности — любые две различные прямые пересекаются.

Все это напоминает проективные прямую и плоскость — там тоже рассматривались совокупности прямых в $\mathbb{R}^2$ и в $\mathbb{R}^3$, проходящих через начало координат. Но там эти прямые оставляли следы на евклидовой координатной прямой и плоскости, а здесь — на окружности $\mathbb{S}^1$ и сфере $\mathbb{S}^2$.

Локально эллиптическая геометрия изометрична сферической геометрии. Но глобальные свойства эллиптической геометрии существенно отличаются от свойств всех других геометрий. Основное отличие связано с тем, что на проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ есть нестягиваемые кривые и, в частности, нестягиваемые треугольники.

Одно из наиболее ярких отличий эллиптической геометрии от остальных геометрий заключается в том, что в эллиптической геометрии треугольники с соответственно равными сторонами не всегда равны. По-другому это свойство можно сформулировать следующим образом: изометрию, заданную на конечном множестве точек, не всегда можно продолжить до изометрии всего пространства.

Чтобы построить пример двух неравных треугольников с равными сторонами, рассмотрим на сфере радиуса 1 сферический треугольник со сторонами $\pi/3$, $\pi/3$ и α. Такой треугольник существует при $0 < \alpha < 2\pi/3$. Поэтому треугольники со сторонами $(\pi/3, \pi/3, \alpha)$ и $(\pi/3, \pi/3, \pi - \alpha)$ существуют при $\pi/3 < \alpha < 2\pi/3$. Если $\alpha < \pi/2$, то этим треугольникам соответствуют эллиптические треугольники со сторонами $(\pi/3, \pi/3, \alpha)$.

В том, что полученные треугольники не равны (т. е. не равны их соответственные углы), проще всего убедиться в вырожденном случае $\alpha = \pi/3$ (рис. 5.2). Ясно также, что в этом случае углы треугольников различаются слишком сильно и при малом изменении угла α они не станут равными.

Рис. 5.2 показывает, что эллиптические треугольники бывают двух типов. Они могут получаться либо из сферических треугольников, симметричных относительно центра сферы (рис. 5.2 (а)), либо из одной замкнутой 6-звенной ломаной, симметричной относительно центра сферы (рис. 5.2 (б)). Первый случай соответствует стягиваемой кривой на проективной плоскости, а второй — нестягиваемой.

Другое отличие эллиптической геометрии заключается в том, что множество точек, равноудаленных от двух данных несовпадающих точек, состоит не из одной, а из двух прямых (гиперплоскостей в случае многомерных пространств). Дело в том, что множеству точек, равноудаленных от точек $\{A, A'\}$ и $\{B, B'\}$ (на эллиптической плоскости), на сфере соответствует объединение множества точек, равноудаленных от точек A и B, и множества точек, равноудаленных от точек A и B' (рис. 5.3).

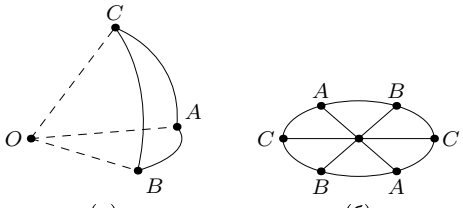


Рис. 5.2

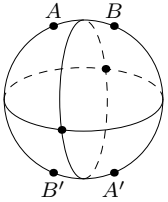


Рис. 5.3

§ 5.2. Геометрия Лобачевского

Равноправность геометрий Лобачевского и Евклида стала отчетливо ясной после исследований Кэли и Клейна 1870-х г. В 1871 г. Клейн построил проективную модель геометрии Лобачевского.

Модель Клейна геометрии Лобачевского

В модели Клейна плоскость Лобачевского реализуется как внутренность единичного круга, где точками плоскости Лобачевского являются точки этого круга, прямыми — хорды, а расстояние между точками X

и Y задается формулой

$$d(X,\,Y)=\frac{c}{2}\Big|\ln\frac{|AX|}{|BX|}:\frac{|AY|}{|BY|}\Big|,$$

где A и B — концы хорды, проходящей через точки X и Y. Движениями плоскости Лобачевского являются проективные преобразования, переводящие круг в себя (они же — группа изометрий).

Точное описание модели должно содержать следующие утверждения: введенная функция d корректно определена, удовлетворяет аксиомам расстояния, и группа движений транзитивна.

Начнем с доказательства первого утверждения, и заодно построим прямую Лобачевского.

Определим расстояние $d(a,\,b)$ между точками a и b интервала $(x,\,y)$ формулой

$$d(a,\,b)=|\ln[a,\,b,\,x,\,y]|=\Big|\ln\Big(\frac{x-a}{x-b}:\frac{y-a}{y-b}\Big)\Big|.$$

Легко проверить, что такое определение имеет смысл, т. е.

$$\frac{x-a}{x-b}:\frac{y-a}{y-b}>0.$$

В самом деле, $x-a<0$, $x-b<0$, $y-a>0$, $y-b>0$. Ясно также, что $d(a,\,a)=0$ и $d(a,\,b)\to\infty$ при $b\to x$ и при $b\to y$. Кроме того, $d(a,\,b)=d(b,\,a)$, так как

$$\frac{x-a}{x-b}:\frac{y-a}{y-b}=\Big(\frac{x-b}{x-a}:\frac{y-b}{y-a}\Big)^{-1}.$$

Отметим, что $\ln[a,\,b,\,x,\,y]=-\ln[a,\,b,\,y,\,x]$, поэтому нет необходимости различать точки x и y, т. е. задавать ориентацию интервала $(x,\,y)$.

Из тождества

$$\Big(\frac{x-a}{x-b}\cdot\frac{y-b}{y-a}\Big)\Big(\frac{x-b}{x-c}\cdot\frac{y-c}{y-b}\Big)\Big(\frac{x-c}{x-a}\cdot\frac{y-a}{y-c}\Big)=1$$

следует, что $\pm d(a,\,b)\pm d(b,\,c)\pm d(c,\,a)=0$. Более тщательная проверка показывает, что если точка c лежит между a и b, то $d(a,\,c)+d(c,\,b)=d(a,\,b)$.

Расстояние $d(a,\,b)$ не изменяется при проективных преобразованиях прямой, сохраняющих интервал $(x,\,y)$.

Интервал $(x,\,y)$ с определенным таким образом расстоянием $d(a,\,b)$ называют *прямой Лобачевского в модели Клейна*. Прямая Лобачевского мало чем отличается от прямой Евклида, так как обе эти прямые изометричны. Но некоторые различия все же есть. Приведем пример, показывающий, что группы движений прямой Лобачевского и прямой Евклида устроены по-разному, хотя и изоморфны.

Отображение $x \mapsto \dfrac{x+v}{xv+1}$ сохраняет интервал $(-1, 1)$ и переводит точку O в точку v. Это отображение можно назвать сдвигом прямой Лобачевского на вектор v. Несложно проверить, что композиция сдвигов на векторы v_1 и v_2 представляет собой сдвиг на вектор

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2}. \tag{5.1}$$

Формула (5.1) совпадает с формулой сложения скоростей в специальной теории относительности (в системе единиц, для которой скорость света c равна 1); более подробно это обсуждается на с. 174—177.

Как мы уже сказали, прямая Лобачевского изометрична прямой Евклида. Но плоскость Лобачевского не изометрична евклидовой плоскости. Сейчас мы уже готовы дать определения плоскости Лобачевского, точнее говоря, *модели Клейна* плоскости Лобачевского. Точками модели Клейна являются внутренние точки некоторого круга; граничную окружность этого круга называют *абсолютом*. Расстояние между точками a и b определяется как $d(a, b)$ для интервала (x, y), где x и y — точки пересечения прямой ab с абсолютом. Здесь необходимо сделать оговорку, смысл которой прояснится позже. Мы положили $d(a, b) = |\ln[a, b, x, y]|$. Но на самом деле нужно считать, что

$$d(a, b) = \frac{c}{2}|\ln[a, b, x, y]|.$$

Дело в том, что в геометрии Лобачевского параметр c играет такую же роль, как и радиус R сферы. Многие формулы сферической геометрии приобретают наиболее простой вид при $R = 1$. Точно так же, многие формулы геометрии Лобачевского приобретают наиболее простой вид при $c = 1$. В дальнейшем мы часто будем считать, что $c = 1$.

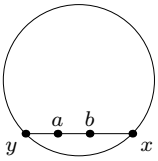


Рис. 5.4

Если точки a и b расположены в таком порядке, как на рис. 5.4, то $\ln[a, b, x, y] > 0$, поэтому знак модуля в определении расстояния можно убрать: $d(a, b) = \dfrac{1}{2}\ln[a, b, x, y]$ (здесь $c = 1$).

Теорема 1. *В модели Клейна функция d удовлетворяет аксиомам расстояния.*

Доказательство. Неотрицательность и симметричность обсуждались выше. Осталось доказать, что $d(a, c) + d(c, b) \geqslant d(a, b)$, причем если точка c не лежит на отрезке $[a, b]$, то $d(a, c) + d(c, b) > d(a, b)$. Пусть лучи ab и ba пересекают абсолют в точках x и y соответственно, лучи ac и ca — в точках x_1 и y_1, лучи cb и bc — в точках x_2 и y_2 (рис. 5.5). Тогда точка x' пересечения хорд x_1x_2 и xy лежит на отрезке xb, а точ-

ка y' пересечения хорд y_1y_2 и xy лежит на отрезке ay. Пусть p — точка пересечения прямых x_1x_2 и y_1y_2, c' — точка пересечения прямых pc и xy. Точка c' лежит на отрезке $[a, b]$.

Двойное отношение сохраняется при проекции одной прямой на другую. Поэтому $[a, c, x_1, y_1] = [a, c', x', y']$ и $[c, b, x_2, y_2] = [c', b, x', y']$ (мы рассматриваем проекции из точки p на прямую xy).

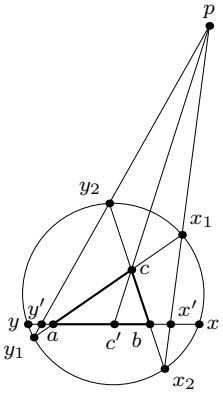


Рис. 5.5

Покажем, что $[a, c', x', y'] > [a, c', x, y]$ и $[c', b, x', y'] > [c', b, x, y]$. Иными словами, нужно доказать, что если точки a, b, x, y расположены в таком порядке, как на рис. 5.4, то увеличение отрезка xy приводит к уменьшению двойного отношения $[a, b, x, y]$. Будем считать положительным направление луча yx. Тогда для увеличения отрезка xy к координате точки x нужно добавить положительное число ε. Второй конец отрезка оставим пока на месте. Двойное отношение при этом уменьшится, так как

$$\frac{x-a}{x-b} - \frac{x+\varepsilon-a}{x+\varepsilon-b} = \frac{\varepsilon(b-a)}{(x-b)(x+\varepsilon-b)} > 0.$$

Для второго конца отрезка доказательство аналогично.

В результате получаем неравенства $[a, c, x_1, y_1] > [a, c', x, y]$ и $[c, b, x_2, y_2] > [c', b, x, y]$.

Следовательно,

$$[a, c, x_1, y_1][c, b, x_2, y_2] > [a, c', x, y][c', b, x, y] = [a, b, x, y],$$

т. е. $d(a, c) + d(c, b) > d(a, b)$. □

Геометрия Лобачевского, как и сферическая геометрия и геометрия плоскости, имеет достаточно большую группу изометрий, а именно любую точку A можно перевести в любую другую точку B и при этом перевести любую прямую, проходящую через точку A, в любую прямую, проходящую через точку B. Чтобы доказать это, достаточно проверить, что существует преобразование плоскости, которое сохраняет двойное отношение, переводит данный круг в себя и переводит центр круга в любую другую внутреннюю точку B. В самом деле, такое преобразование является изометрией. А для того чтобы перевести любую прямую в любую другую прямую, можно точку A перевести в центр O круга, а затем точку O перевести в точку B. При этом любую прямую, проходящую через точку O, можно поворотом перевести в любую другую прямую, проходящую через точку O.

Теорема 2. *Существует преобразование плоскости, которое сохраняет двойное отношение, переводит данный круг в себя и переводит его центр в произвольную внутреннюю точку, т. е. группа движений плоскости Лобачевского транзитивна.*

Доказательство. Рассмотрим прямой круговой конус с вершиной S. Сечение конуса плоскостью, перпендикулярной его оси, является окружностью с диаметром PQ и центром O. Рассмотрим также сечение конуса плоскостью, проходящей через точку O и перпендикулярной плоскости SPQ (конус мы считаем бесконечным в одну сторону). Если точка Q' принадлежит интервалу QR (рис. 5.6), то рассматриваемое сечение является эллипсом.

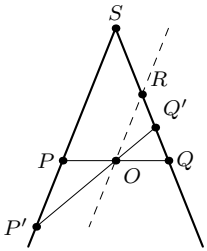


Рис. 5.6

На плоскости Π', содержащей этот эллипс, и на плоскости Π, содержащей окружность с диаметром PQ, можно ввести аффинные координаты так, что окружность и эллипс совпадут при отождествлении точек с одинаковыми координатами. При этом в качестве начала координат мы выберем соответственно центр эллипса и центр окружности, а в качестве оси Ox выберем прямые $P'Q'$ и PQ. Тогда точка O, лежащая внутри эллипса, отождествляется с такой точкой O_1 круга, что $|P'O| : |OQ'| = |PO_1| : |O_1Q|$.

При перемещении точки Q' по отрезку QR отношение $|P'O| : |OQ'|$ изменяется от 1 до ∞. Поэтому точка O_1 может быть любой точкой, лежащей внутри отрезка OQ.

Искомым преобразованием является композиция отображений $f\colon \Pi \to \Pi_1$ и $g\colon \Pi \to \Pi_1$, где f — проекция из точки S, а g — отождествление точек с одинаковыми координатами. □

Проективные преобразования плоскости, сохраняющие данный круг, являются движениями геометрии Лобачевского в модели Клейна. Это замечание позволяет выяснить, как устроены в модели Клейна перпендикуляры к данной прямой, биссектрисы угла между прямыми и т. д. Дадим сначала определение перпендикулярных прямых. Две пересекающиеся прямые делят плоскость на 4 угла. Если существуют движения, переводящие один из этих углов во все остальные, то прямые называют перпендикулярными. Семейство прямых, перпендикулярных прямой AB, устроено так, как показано на рис. 5.7. Для доказательства этого утверждения достаточно применить проективное преобразование, переводящее точку O в бесконечно

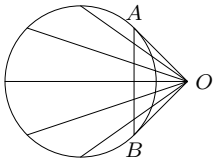


Рис. 5.7

удаленную точку. На рис. 5.8 изображен способ построения биссектрисы угла между прямыми AB и CD; для доказательства можно перевести точку O в центр круга. На рис. 5.9 изображен способ построения середины M отрезка AB; для доказательства можно перевести точку M в центр круга.

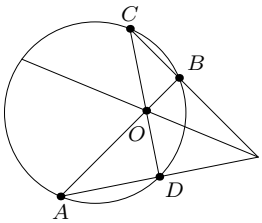


Рис. 5.8

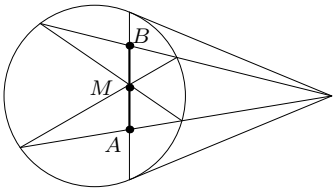


Рис. 5.9

Дробно-линейные преобразования и стереографическая проекция

Прежде чем обсудить еще две важные модели геометрии Лобачевского, нам нужно познакомиться со свойствами дробно-линейных преобразований и стереографической проекции.

Отображение $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, заданное формулой $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, где a, b, c, $d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$, называют *дробно-линейным преобразованием*. Точнее говоря, речь идет не о преобразовании множества $\mathbb{C}$, а о преобразовании множества $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, но мы обычно не будем обращать внимания на точку ∞ и ее прообраз.

Формула

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cz+d)}$$

показывает, что любое дробно-линейное преобразование можно представить в виде композиции преобразований $z \mapsto az+b$ и $z \mapsto z^{-1}$. Первое преобразование представляет собой композицию поворота, растяжения (гомотетии) и сдвига. Второе преобразование с точностью до комплексного сопряжения совпадает с инверсией относительно единичной окружности. Напомним, что *инверсией* относительно окружности радиуса R с центром O называют преобразование плоскости, переводящее точку A в точку A^*, лежащую на луче OA и удовлетворяющую соотношению $|OA| \cdot |OA^*| = R^2$. Инверсия относительно единичной окружности задается формулой $z \mapsto (\bar{z})^{-1}$. (*Единичная окружность* задается равенством $|z| = 1$, $z \in \mathbb{C}$.)

Точно так же, как для дробно-линейных преобразований вещественной прямой, доказывается, что дробно-линейное преобразование сохраняет двойное отношение четырех точек

$$[z_1,\, z_2,\, z_3,\, z_4] = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}.$$

Теорема 3. *Дробно-линейное преобразование обладает следующими свойствами*:

а) *переводит любую окружность или прямую в окружность или прямую*;

б) *сохраняет углы.*

Доказательство. а) Легко проверить, что точки $z_1,\, z_2,\, z_3 \in \mathbb{C}$ лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\dfrac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \in \mathbb{R}$. Кроме того, дробно-линейным преобразованием любые три точки можно перевести в три точки, лежащие на одной прямой. Воспользовавшись этими двумя фактами, легко доказать, что точки $z_1,\, z_2,\, z_3,\, z_4 \in \mathbb{C}$ лежат на одной окружности или на одной прямой тогда и только тогда, когда $[z_1,\, z_2,\, z_3,\, z_4] \in \mathbb{R}$. Это свойство сохраняется при дробно-линейных преобразованиях.

б) Достаточно доказать, что углы сохраняются при инверсии. При инверсии с центром O прямая l переходит в окружность, проходящую через точку O. При этом касательная к окружности в точке O параллельна прямой l. Поэтому при инверсии с центром O две прямые, пересекающиеся в точке A, переходят в две окружности, угол между которыми в точке O равен углу между данными прямыми. Но угол между окружностями в одной точке их пересечения O равен углу между ними в другой точке пересечения A^* (образе точки A при инверсии).

Итак, при инверсии угол между прямыми сохраняется. А вместо угла между окружностями можно рассматривать угол между касательными к ним в точке пересечения, поэтому угол между окружностями при инверсии тоже сохраняется. □

По аналогии с инверсией на плоскости можно определить инверсию в пространстве. Инверсией относительно сферы радиуса R с центром O называют преобразование пространства, переводящее точку A в точку A^*, лежащую на луче OA и удовлетворяющую соотношению $|OA| \cdot |OA^*| = R^2$. Свойства инверсии в пространстве во многом аналогичны свойствам инверсии на плоскости.

1. *При инверсии сфера или плоскость переходит в сферу или плоскость.* Для доказательства этого свойства достаточно рассмотреть семейство плоскостей, проходящих через центр инверсии и центр рассмат-

риваемой сферы (в случае плоскости нужно взять проекцию центра инверсии на эту плоскость).

2. *Прямая или окружность переходит в прямую или окружность.* В самом деле, прямую или окружность можно представить в виде пересечения двух сфер или плоскостей, а сфера или плоскость переходит в сферу или плоскость.

3. *Инверсия в пространстве сохраняет углы между окружностями.* Как и в случае плоскости, сначала доказываем сохранение углов между пересекающимися прямыми, а затем доказываем сохранение углов между окружностями.

4. *Инверсия в пространстве сохраняет двойное отношение четырех точек в пространстве*, которое мы определяем как отношение $\frac{|CA|}{|CB|} : \frac{|DA|}{|DB|}$. Заметим сначала, что если при инверсии с центром O точки A и B переходят в точки A^* и B^*, то треугольники OAB и OB^*A^* подобны, а значит,

$$\frac{|AB|}{|A^*B^*|} = \frac{|OB|}{|OA^*|} = \frac{|OB| \cdot |OA|}{|OA^*| \cdot |OA|} = \frac{|OA| \cdot |OB|}{R^2}.$$

Воспользовавшись этой формулой, легко доказать, что инверсия сохраняет двойное отношение.

С инверсией в пространстве тесно связано отображение сферы с выколотой точкой на плоскость, называемое стереографической проекцией. Это отображение устроено следующим образом. Рассмотрим сферу S с центром O. Пусть N — некоторая точка сферы S, Π — плоскость, проходящая через точку O перпендикулярно прямой ON (рис. 5.10). Тогда точку N можно назвать северным полюсом, а плоскость Π — экваториальной плоскостью. *Стереографической проекцией* из точки N на плоскость Π называют отображение, переводящее точку A, лежащую на сфере, в точку A', в которой луч NA пересекает плоскость Π.

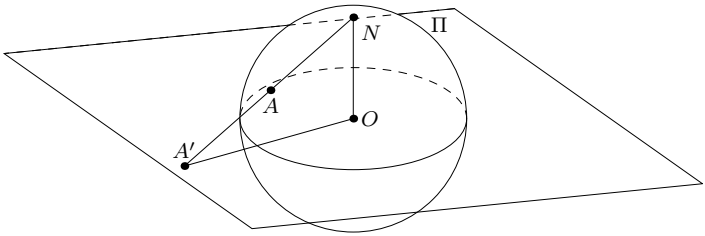


Рис. 5.10

Рассмотрим сферу S_1 с центром N и радиусом $|NO|$. Несложно проверить, что инверсия относительно сферы S_1 переводит сферу S в плоскость П, причем стереографическая проекция является ограничением этой инверсии на сферу S. Следовательно, свойства 2—4 выполняются и для стереографической проекции.

Другие модели геометрии Лобачевского

От модели Клейна можно перейти к другой важной модели геометрии Лобачевского. Новая модель получается следующим образом. Рассмотрим сферу, экватором которой служит абсолют. Пусть A — точка модели Клейна, A_1 — точка южной полусферы, проецирующаяся в точку A, A' — точка пересечения экваториальной плоскости с прямой A_1N, где N — северный полюс (рис. 5.11). Сопоставив каждой точке A точку A', получим преобразование экваториального круга. Чтобы это преобразование было изометрией, нужно определить расстояние между точками A' и B' в новой модели как расстояние между точками A и B в старой модели. Полученную таким образом модель геометрии Лобачевского называют *моделью Пуанкаре в круге*.

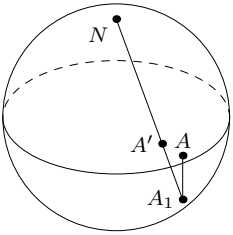


Рис. 5.11

Анри Пуанкаре (1859—1912) — один из величайших ученых в истории науки. Внес огромный вклад в большинство областей математики.

Выясним, как устроены прямые в модели Пуанкаре. Хорде AB соответствует сечение южной полусферы плоскостью, перпендикулярной экватору. Это сечение представляет собой полуокружность, перпендикулярную абсолюту (рис. 5.12). При проекции из полюса на экваториальную плоскость эта полуокружность переходит в дугу окружности, перпендикулярной абсолюту. Таким образом, для модели Пуанкаре в круге прямыми являются дуги окружностей, перпендикулярных абсолюту.

Для модели Пуанкаре данный круг удобно считать единичным кругом на комплексной плоскости.

Нетрудно убедиться, что если точки Z и W лежат на хорде AB, а Z' и W' — соответствующие точки модели Пуанкаре, то

$$|[A,\, B,\, Z,\, W]| = |[A,\, B,\, Z',\, W']|^2.$$

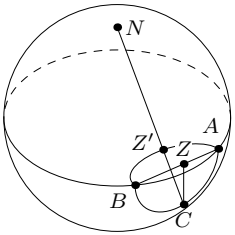


Рис. 5.12

В самом деле, стереографическая проекция является ограничением пространственной инверсии, поэтому она сохраняет двойное отношение.

Кроме того, в обозначениях рис. 5.12 выполняются равенства

$$|AZ| : |ZB| = \frac{|AC^2|}{|AB|} : \frac{|BC^2|}{|AB|} = |AC^2| : |BC^2|.$$

Таким образом, $|\ln[A,\, B,\, Z,\, W]| = 2|\ln|[A,\, B,\, Z',\, W']||$.

Напомним, что $d(Z,\, W) = |\ln[A,\, B,\, Z,\, W]|$. Поэтому

$$d(Z',\, W') = 2|\ln|[A,\, B,\, Z',\, W']||.$$

По аналогии с бесконечным семейством различных сферических геометрий (для разных радиусов R мы получаем разные геометрии) можно получить бесконечное семейство геометрий Лобачевского, положив $d(Z,\, W) = \frac{c}{2}|\ln[A,\, B,\, Z,\, W]| = c|\ln[A,\, B,\, Z',\, W']|$.

Еще одну модель геометрии Лобачевского можно получить, отобразив единичный круг на верхнюю полуплоскость $H = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ с помощью дробно-линейного отображения. Для этой цели годится, например, отображение $z \mapsto w = i\dfrac{1+z}{1-z}$. В самом деле,

$$\operatorname{Im} w = \operatorname{Re}\Big(\frac{1+z}{1-z}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1+z}{1-z} + \frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}}\Big) = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$$

Поэтому $\operatorname{Im} w > 0 \Leftrightarrow |z| < 1$.

Полученную таким образом модель геометрии Лобачевского называют *моделью Пуанкаре в верхней полуплоскости*.

Геометрию Лобачевского часто называют *гиперболической* геометрией. Поэтому прямые, окружности и другие объекты геометрии Лобачевского будем называть *гиперболическими*, чтобы отличать их от евклидовых прямых и окружностей.

Дробно-линейные преобразования переводят прямые и окружности в прямые и окружности. Кроме того, они сохраняют углы. Поэтому в верхней полуплоскости H гиперболическими прямыми являются вертикальные лучи и полуокружности, центры которых лежат на абсолюте.

Дробно-линейные отображения сохраняют двойное отношение, поэтому расстояние между точками в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости определяется следующим образом. Пусть гиперболическая прямая AB подходит к абсолюту в точках X и Y (рис. 5.13). Тогда $d(A,\, B) = c|\ln[A,\, B,\, X,\, Y]|$. (Для краткости мы опустили второй знак модуля. Дело в том, что при указанном на рис. 5.13 расположении точек он не нужен.) В том случае, когда гиперболическая прямая является евклидовым лучом, положим $Y = \infty$, т. е. $\dfrac{y-a}{y-b} = 1$. Для положительного

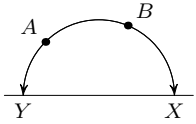


Рис. 5.13

луча мнимой оси формула для вычисления гиперболического расстояния принимает особенно простой вид: $d(ia, ib) = c|\ln(a/b)|$.

Выясним теперь, как устроены движения плоскости Лобачевского. Любое дробно-линейное преобразование, сохраняющее верхнюю полуплоскость H, является движением плоскости Лобачевского. Пусть a, b, c, $d \in \mathbb{R}$. Легко проверить, что отображения $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$, где $ad-bc>0$, и $z \mapsto \dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, где $ad-bc<0$, сохраняют верхнюю полуплоскость. В самом деле,

$$\operatorname{Im}\frac{az+b}{cz+d} = \operatorname{Im}\frac{(c\bar{z}+d)(az+b)}{|cz+d|^2} = \operatorname{Im}\frac{bc\bar{z}+adz}{|cz+d|^2} = (ad-bc)\frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2},$$
$$\operatorname{Im}\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} = (bc-ad)\frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2}.$$

Теорема 4. *Любое (гиперболическое) движение верхней полуплоскости H имеет вид*

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \quad (\textit{собственное движение}) \quad \textit{или}$$
$$z \mapsto \frac{a(-\bar{z})+b}{c(-\bar{z})+d} \quad (\textit{несобственное движение}),$$

где a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ и $ad-bc>0$.

Доказательство. Геометрия Лобачевского обладает тем свойством, что точка C лежит на отрезке AB тогда и только тогда, когда $d(A, C) + d(C, B) = d(A, B)$. Из этого свойства следует, что любая изометрия переводит гиперболическую прямую в гиперболическую прямую.

Предположим, что изометрия φ переводит положительный луч L мнимой оси в гиперболическую прямую $\varphi(L)$, подходящую к абсолюту в точках x и y. Тогда одно из двух преобразований $z \mapsto \pm\dfrac{z-x}{z-y}$ является гиперболическим движением g^{-1}, причем это движение переводит гиперболическую прямую $\varphi(L)$ в L (если $y=\infty$, то $g(z) = z - x$.) Таким образом, изометрия $g^{-1}\varphi$ переводит гиперболическую прямую L в себя. Применив, если нужно, изометрию $z \mapsto kz$ $(k>0)$, можно считать, что изометрия $g^{-1}\varphi$ оставляет точку i на месте. Следовательно, точка ia $(a \in \mathbb{R})$ переходит в такую точку ib, что $d(i, ia) = d(i, ib)$, т. е. $|\ln a| = |\ln b|$. В том случае, когда изометрия $g^{-1}\varphi$ переставляет гиперболические лучи (i, ∞) и $(i, 0)$, применим дополнительно изометрию $z \mapsto -z^{-1}$. Для полученной изометрии $g^{-1}\varphi$ вариант $b = a^{-1}$ отпадает, поэтому она оставляет неподвижными все точки гиперболической прямой L.

Для вычисления гиперболического расстояния d между точками z, $w \in H$ можно использовать формулу

$$\operatorname{ch}\left(\frac{d}{c}\right) = 1 + \frac{|z-w|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)},$$

где $\operatorname{ch} t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$ — *гиперболический косинус*. Эту формулу можно получить, вычислив координаты точек, в которых гиперболическая прямая zw подходит к абсолюту, а затем вычислив соответствующее двойное отношение. Но такой способ требует громоздких вычислений. Проверить эту формулу можно проще. Обе ее части инвариантны относительно вещественных дробно-линейных преобразований с положительным определителем (для правой части формулы достаточно проверить инвариантность относительно преобразований $z \mapsto z + a$, $a \in \mathbb{R}$, и $z \mapsto -1/z$). Преобразованием такого вида прямую zw можно перевести в положительный луч L мнимой оси, а для точек ix, $iy \in L$ легко проверить, что обе части формулы дают один и тот же результат, а именно $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$.

Для всех положительных чисел t изометрия $g^{-1}\varphi$ оставляет точку it неподвижной, поэтому для всех $z \in H$ выполняется равенство $d(it, z) = d(it, g^{-1}\varphi(z))$. Пусть $z = x + iy$, $g^{-1}\varphi(z) = u + iv$. Из формулы для вычисления расстояния следует, что

$$\frac{|it - z|^2}{t\operatorname{Im}(z)} = \frac{|it - g^{-1}\varphi(z)|^2}{t\operatorname{Im}(g^{-1}\varphi(z))},$$

т. е. $[x^2 + (t-y)^2]v = [u^2 + (t-v)^2]y$. Это равенство выполняется для всех положительных t, поэтому $y = v$ и $x^2 = u^2$, т. е. $g^{-1}\varphi(z) = z$ или $-\bar{z}$. А так как изометрия является непрерывным отображением, одно их этих равенств выполняется для всех точек одновременно. Поэтому $\varphi(z) = g(z)$ или $\varphi(z) = g(-\bar{z})$. □

Замечание. В формулировке теоремы можно считать, что $ad - bc = 1$. В самом деле, пусть $ad - bc = t > 0$. Поделим числа a, b, c и d на $\sqrt{t}$. В результате получим то же самое преобразование, но для новых коэффициентов a, b, c и d требуемое условие будет выполняться.

Сферическую геометрию и геометрию Лобачевского можно построить единым образом. Точнее говоря, речь будет идти не о сферической геометрии, а об *эллиптической* геометрии, которая получается из сферической геометрии отождествлением диаметрально противоположных точек.

Для единообразного построения эллиптической и гиперболической геометрии нам потребуется *комплексная проективная плоскость* $\mathbb{CP}^2$.

Напомним, что она определяется аналогично вещественной проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$, но вместо троек вещественных чисел берутся тройки комплексных чисел; тройки считаются эквивалентными, если они получаются друг из друга умножением на комплексное число.

Важное значение будет для нас иметь также кривая $x^2+y^2+z^2=0$ в $\mathbb{CP}^2$.

Рассмотрим точки $P_1=(x_1,\,y_1,\,z_1)$ и $P_2=(x_2,\,y_2,\,z_2)$, лежащие на сфере $x^2+y^2+z^2=R^2$. Эти точки можно также считать точками пространства $\mathbb{CP}^2$. Прямая P_1P_2 в $\mathbb{CP}^2$ пересекает кривую $x^2+y^2+z^2=0$ в точках J_1 и J_2. Покажем, что

$$e^{\pm 2i\varphi}=[P_1,\,P_2,\,J_1,\,J_2],$$

где φ — угол между радиусами OP_1 и OP_2. В самом деле, прямая P_1P_2 в $\mathbb{CP}^2$ состоит из точек вида $(x_1+\lambda x_2,\,y_1+\lambda y_2,\,z_1+\lambda z_2)$, где $\lambda\in\mathbb{C}\cup\infty$ (точке P_1 соответствует $\lambda=0$, а точке P_2 соответствует $\lambda=\infty$). Значения λ, соответствующие точкам J_1 и J_2, удовлетворяют уравнению

$$(x_1+\lambda x_2)^2+(y_1+\lambda y_2)^2+(z_1+\lambda z_2)^2=0,$$

т. е. $1+(2\cos\varphi)\lambda+\lambda^2=0$ (мы воспользовались тем, что $x_1^2+y_1^2+z_1^2=R^2$, $x_2^2+y_2^2+z_2^2=R^2$ и $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=R^2\cos\varphi$). Следовательно,

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{\cos\varphi\pm\sqrt{\cos^2\varphi-1}}{\cos\varphi\mp\sqrt{\cos^2\varphi-1}}=\frac{\cos\varphi\pm i\sin\varphi}{\cos\varphi\mp i\sin\varphi}=e^{\pm 2i\varphi}.$$

С другой стороны,

$$[P_1,\,P_2,\,J_1,\,J_2]=\frac{\lambda_1-0}{\lambda_2-0}:\frac{\lambda_1-\infty}{\lambda_2-\infty}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Таким образом, $[P_1,\,P_2,\,J_1,\,J_2]=e^{\pm 2i\varphi}$. Поэтому расстояние d между точками сферы радиуса R можно определить по формуле

$$d=R\varphi=\pm\frac{R}{2i}\ln[P_1,\,P_2,\,J_1,\,J_2],\tag{5.2}$$

где $\ln$ — функция, обратная экспоненте. Это определение требует некоторых пояснений, так как в комплексном случае функция $\ln$ многозначная. Но мы никаких пояснений давать не будем, потому что в наиболее интересном для нас случае геометрии Лобачевского аналогичная формула содержит лишь функции действительного переменного.

Напомним, как была получена формула (5.2). Мы рассмотрели точки P_1, $P_2\in\mathbb{R}^3$ как точки пространства $\mathbb{C}^3$, затем сопоставили им прямые OP_1 и OP_2, а эти прямые рассмотрели как элементы пространства $\mathbb{CP}^2$. Точки P_1 и P_2 лежат в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{C}^3$ на поверхности $x^2+y^2+z^2=R^2$. В $\mathbb{C}^3$

можно рассмотреть не только сферу действительного радиуса, но и сферу мнимого радиуса $x^2+y^2+z^2=-c^2$, $c\in\mathbb{R}$. По сути дела, радиус R мы заменяем на ic.

Как и в случае обычной сферы, для сферы мнимого радиуса удобно ограничиться вещественными точками. Положим $z_1=iz$. Тогда получим поверхность $x^2+y^2-z_1^2=-c^2$. При вещественных x, y и z_1 эта поверхность представляет собой двуполостный гиперболоид (рис. 5.14). Отметим также, что при указанном преобразовании поверхность $x^2+y^2+z^2=0$ превращается в поверхность $x^2+y^2-z_1^2=0$, которая при вещественных x, y и z_1 является конусом. Пусть P_1 и P_2 — точки верхней полости двуполостного гиперболоида $x^2+y^2-z_1^2=-c^2$. Рассмотрим их как точки $\mathbb{CP}^2$. Прямая P_1P_2 в $\mathbb{CP}^2$ пересекает кривую $x^2+y^2-z_1^2=0$ в точках J_1 и J_2. По аналогии с эллиптической геометрией определим расстояние между точками P_1 и P_2 по формуле

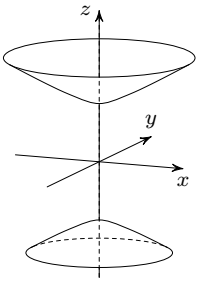


Рис. 5.14

$$d=\pm\frac{ic}{2i}\ln[P_1,\,P_2,\,J_1,\,J_2]=\pm\frac{c}{2}\ln[P_1,\,P_2,\,J_1,\,J_2].$$

Оказывается, в результате получится геометрия Лобачевского! В самом деле, рассмотрим сечение D^2 конуса $x^2+y^2-z_1^2\leqslant 0$ некоторой плоскостью, перпендикулярной оси конуса. Лучи OP_i и OJ_i пересекают D^2 в точках P_i' и J_i', причем $[P_1,\,P_2,\,J_1,\,J_2]=[P_1',\,P_2',\,J_1',\,J_2']$. Таким образом, спроецировав верхнюю полость двуполостного гиперболоида на D^2 из начала координат, получим модель Клейна геометрии Лобачевского.

Отметим, что по аналогии с формулой

$$\cos^2\left(\frac{d}{R}\right)=\frac{(u,\,v)^2}{(u,\,u)(v,\,v)},$$

где $u=\overrightarrow{OP}_1$, $v=\overrightarrow{OP}_2$, можно записать формулу

$$\cos^2\left(\frac{id}{c}\right)=\frac{[u,\,v]^2}{[u,\,u][v,\,v]},$$

где $[u,\,v]=u_1v_1+u_2v_2+(iu_3)(iv_3)=u_1v_1+u_2v_2-u_3v_3$. Из равенства $\cos t=\dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2}$, следует, что $\cos(it)=\dfrac{e^{-t}+e^{t}}{2}=\operatorname{ch}t$. Поэтому $\cos\left(\dfrac{id}{c}\right)=$ $=\operatorname{ch}\left(\dfrac{d}{c}\right)$. Формула

$$\operatorname{ch}^2\left(\frac{d}{c}\right)=\frac{[u,\,v]^2}{[u,\,u][v,\,v]}$$

действительно верна; ее можно проверить непосредственными вычислениями.

Гиперболическая элементарная геометрия

В гиперболической геометрии понятие *величины угла* можно определить следующим образом. Будем говорить, что величина угла равна $\frac{2p}{n}$, если n углов с общей вершиной, конгруэнтных данному углу, покрывают всю плоскость Лобачевского без наложений. Теперь легко определить угол величиной $\frac{2\pi m}{n}$, а затем по непрерывности можно определить величину любого угла.

Для модели Клейна и для модели Пуанкаре в круге повороты вокруг центра круга являются движениями. Поэтому в центре круга в обеих моделях величины гиперболических углов совпадают с величинами евклидовых углов. Центр круга гиперболическим движением можно перевести в любую другую точку. Для модели Пуанкаре движения сохраняют евклидовы углы, поэтому для нее понятие величины евклидова угла совпадает с понятием величины гиперболического угла. (Угол между двумя пересекающимися окружностями определяется как угол между касательными в точке пересечения.) Для модели Клейна движения не обязательно сохраняют евклидовы углы, поэтому для нее величина гиперболического угла не обязательно совпадает с величиной евклидова угла.

На евклидовой плоскости через точку A можно провести лишь одну прямую, параллельную данной прямой. На плоскости Лобачевского через точку A можно провести целое семейство прямых, не пересекающих данную прямую l. Такие прямые заполняют пару вертикальных углов (на рис. 5.15 изображены эти углы в модели Клейна). Среди образовавшихся четырех углов с вершиной A выделим тот, который содержит прямую l. Стороны этого угла назовем *лучами, параллельными прямой* l. Прямые, содержащие эти лучи, назовем *прямыми, параллельными прямой* l. В геометрии Лобачевского следует говорить именно о параллельных лучах, а не параллельных прямых, потому что два луча, на которые точка A разбивает прямую, ведут себя по-разному по отношению к параллельной ей прямой: один луч приближается, а другой удаляется. Кроме того, только для лучей выполняется свойство транзитивности: $a \parallel b$, $b \parallel c \Rightarrow a \parallel c$; для прямых это свойство не выполняется.

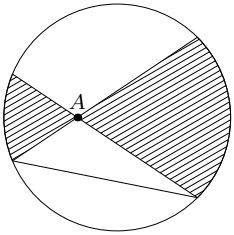


Рис. 5.15

Углом параллельности для точки A и прямой l называют половину величины угла, образованного лучами с вершиной A, параллельными прямой l. Угол параллельности α обладает следующим свойством. Опу-

стим из точки A перпендикуляр AH на прямую l. Проведем из точки A луч AB, образующий угол β с лучом AH. Луч AB пересекает прямую l тогда и только тогда, когда $\beta < \alpha$. Это свойство тоже можно взять в качестве определения угла параллельности.

Легко проверить, что угол параллельности α зависит лишь от расстояния a от точки до прямой. Выясним, как именно связаны a и α. Это несложно сделать в любой из моделей. Рассмотрим, например, модель Клейна, причем будем считать, что точка A совпадает с центром круга (рис. 5.16). По определению

$$a = \frac{c}{2}\left|\ln\left(\frac{|XH|}{|XA|}\cdot\frac{|YA|}{|YH|}\right)\right| = \frac{c}{2}\ln\left(\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\right) = c\ln(\operatorname{ctg}\tfrac{\alpha}{2}).$$

Следовательно, $e^{-a/c} = \operatorname{tg}(\alpha/2)$. При $a/c \to 0$ получаем $\alpha \to \pi/2$, т. е. при уменьшении расстояния a (или увеличении «мнимого радиуса» c) геометрия Лобачевского приближается к евклидовой геометрии.

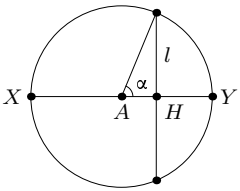


Рис. 5.16

В дальнейшем для упрощения формул будем считать, что $c = 1$.

В гиперболической геометрии сумма углов треугольника меньше π. Это утверждение легко доказать в модели Пуанкаре в круге, поместив одну из вершин треугольника в центр круга (рис. 5.17). В самом деле, угол A гиперболического треугольника ABC равен углу A евклидова треугольника, а углы при вершинах B и C у гиперболического треугольника меньше.

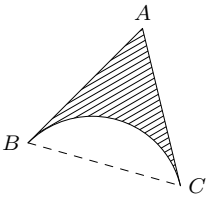


Рис. 5.17

В евклидовой геометрии стороны и углы треугольника связаны некоторыми соотношениями. В геометрии Лобачевского тоже выполняются определенные соотношения между элементами треугольника. Проще всего получить соотношения для прямоугольного треугольника, поэтому с него мы и начнем.

Величины углов треугольника ABC будем обозначать α, β и γ, а длины противолежащих им сторон будем обозначать a, b и c.

Теорема 5. *В треугольнике с прямым углом γ выполняются следующие соотношения*:

а) $\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b$; б) $\operatorname{th} a = \operatorname{sh} b \operatorname{tg}\alpha$.

Доказательство. а) Можно считать, что $A = ki$ $(k > 1)$, $B = \cos\varphi + i\sin\varphi$ и $C = i$. Тогда $\operatorname{ch} a = \dfrac{1}{\sin\varphi}$, $\operatorname{ch} b = \dfrac{1+k^2}{2k}$ и $\operatorname{ch} c = \dfrac{1+k^2}{2k\sin\varphi}$. Поэтому $\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b = \operatorname{ch} c$.

При малых a, b и c соотношение $\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b = \operatorname{ch} c$ превращается в соотношение $a^2 + b^2 = c^2$. Таким образом, соотношение $\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b = \operatorname{ch} c$ можно назвать *гиперболической теоремой Пифагора*.

б) Снова будем считать, что $A = ki$ $(k > 1)$, $B = \cos\varphi + i\sin\varphi$ и $C = i$. Пусть x_0 — центр евклидовой окружности, содержащей гиперболическую прямую AB. Тогда $x_0^2 + k^2 = (\cos\varphi - x_0)^2 + \sin^2\varphi$, т. е. $k^2 = 1 - 2x_0\cos\varphi$. Легко проверить, что $\angle Ax_0O = \alpha$. Поэтому

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{k}{|x_0|} = \frac{2k\cos\varphi}{k^2 - 1}.$$

Так как $\operatorname{sh}^2 t = \operatorname{ch}^2 t - 1$, мы получаем

$$\operatorname{sh}^2 a = \frac{1}{\sin^2\varphi} - 1 = \left(\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)^2$$

и

$$\operatorname{sh}^2 b = \left(\frac{1 + k^2}{2k}\right)^2 - 1 = \left(\frac{k^2 - 1}{2k}\right)^2.$$

Следовательно, $\cos\varphi = \operatorname{th} a$ и $\dfrac{k^2 - 1}{2k} = \operatorname{sh} b$, а значит, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{th} a}{\operatorname{sh} b}$.

При малых a и b это соотношение превращается в $\operatorname{tg}\alpha = a/b$. □

Из соотношений $\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b$ и $\operatorname{th} a = \operatorname{sh} b \operatorname{tg}\alpha$ с помощью тождеств для тригонометрических и гиперболических функций можно получить другие соотношения, например $\operatorname{sh} a = \operatorname{sh} c \sin\alpha$, $\operatorname{th} b = \operatorname{th} c \cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta = \operatorname{ch} c$, $\cos\alpha = \operatorname{ch} a \sin\beta$. При малых a, b и c эти соотношения принимают вид $a = c\sin\alpha$, $b = c\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta = 1$, $\cos\alpha = \sin\beta$.

Для произвольного треугольника в гиперболической геометрии справедливы теоремы, аналогичные теоремам синусов и косинусов в евклидовой и сферической планиметрии.

Теорема 6. *Для произвольного треугольника выполняются следующие соотношения:*

а) $\dfrac{\operatorname{sh} a}{\sin\alpha} = \dfrac{\operatorname{sh} b}{\sin\beta} = \dfrac{\operatorname{sh} c}{\sin\gamma}$ (теорема синусов);

б) $\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c \cos\alpha$ (теорема косинусов).

Доказательство. Опустим из вершины C перпендикуляр CH на прямую AB. Будем для определенности считать, что точка H лежит на отрезке AB (случай, когда точка H лежит вне отрезка AB, рассматривается аналогично). Обозначим длины отрезков CH, AH и BH через h, x и $c - x$ соответственно.

а) Запишем соотношения вида $\operatorname{sh} a = \operatorname{sh} c \sin\alpha$ для прямоугольных треугольников ACH и CBH. В результате получим $\operatorname{sh} b \sin\alpha = \operatorname{sh} h = \operatorname{sh} a \sin\beta$. Следовательно,

$$\frac{\operatorname{sh} a}{\sin\alpha} = \frac{\operatorname{sh} b}{\sin\beta}.$$

б) Запишем соотношения вида $\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b = \operatorname{ch} c$ для прямоугольных треугольников ACH и CBH. В результате получим $\operatorname{ch} b = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} h$ и $\operatorname{ch} a = \operatorname{ch}(c-x) \operatorname{ch} h$. Следовательно, $\operatorname{ch} a = (\operatorname{ch} c \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} c \operatorname{sh} x) \operatorname{ch} h = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{ch} b \operatorname{sh} c \operatorname{th} x$. Кроме того, $\operatorname{th} x = \operatorname{th} b \cos\alpha$. □

Из утверждения а) следует гиперболическая теорема Фалеса: в равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

Выясним теперь, как выглядит в модели Пуанкаре *окружность*, т. е. множество точек, равноудаленных от данной точки. Для модели Пуанкаре в верхней полуплоскости гиперболическая окружность радиуса r с центром (a, b) задается уравнением

$$\operatorname{ch} r = 1 + \frac{(a-x)^2 + (b-y)^2}{2by},$$

т. е. $(x-a)^2 + (y - b\operatorname{ch} r)^2 = b^2(\operatorname{ch}^2 r - 1)$. Таким образом, в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости гиперболическая окружность радиуса r с центром (a, b) представляет собой евклидову окружность радиуса $b\sqrt{\operatorname{ch}^2 r - 1}$ с центром $(a, b\operatorname{ch} r)$.

Для модели Пуанкаре в круге Δ гиперболическая окружность тоже представляет собой евклидову окружность, так как дробно-линейное преобразование переводит окружность в окружность или прямую. Если центр гиперболической окружности совпадает с центром круга Δ, то евклидов центр этой окружности тоже совпадает с центром круга Δ. Покажем, что в такой ситуации евклидов радиус R и гиперболический радиус r связаны соотношением

$$e^r = \frac{1+R}{1-R}, \quad \text{т. е.} \quad R = \frac{e^r - 1}{e^r + 1} = \operatorname{th}(r/2).$$

В самом деле, пусть O — центр круга Δ, X — точка рассматриваемой окружности, A и B — точки, в которых прямая OX пересекает абсолют. Тогда

$$r = \left|\ln\Big(\frac{AX}{AO} \cdot \frac{BO}{BX}\Big)\right| = \ln\Big(\frac{1+R}{1-R}\Big).$$

Обсудим теперь, как измерять длины кривых в гиперболической геометрии. Для определения длины кривой с помощью интеграла требуется *элемент длины*, т. е. расстояние между бесконечно близкими точками. Если Δs — гиперболическое расстояние между точками z и $z + \Delta z$ верхней полуплоскости, то

$$\operatorname{ch}(\Delta s) \approx 1 + \frac{|\Delta z|^2}{2(\operatorname{Im} z)^2} \quad \text{и} \quad \operatorname{ch}(\Delta s) \approx 1 + \frac{(\Delta s)^2}{2}.$$

Поэтому $\Delta s \approx \dfrac{|\Delta z|}{\operatorname{Im} z}$, т. е. $ds = \dfrac{|dz|}{\operatorname{Im} z} = \dfrac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$.

Для перехода от модели Пуанкаре в верхней полуплоскости H к модели Пуанкаре в круге Δ можно воспользоваться отображением $z \mapsto w = \dfrac{z-i}{z+i}$. Это отображение переводит верхнюю полуплоскость H в единичный круг Δ. Несложные вычисления показывают, что

$$\frac{|dz|}{\operatorname{Im} z} = \frac{2|dw|}{1-|w|^2}.$$

Таким образом, в модели Пуанкаре в круге Δ элемент гиперболической длины получается из элемента евклидовой длины умножением на $\dfrac{2}{1-|w|^2}$. Следовательно, гиперболическая длина евклидовой окружности радиуса R с центром в центре круга Δ равна $2\pi R\Big(\dfrac{2}{1-R^2}\Big)$. Напомним, что эта кривая является гиперболической окружностью радиуса r, где r и R связаны соотношением $R = \operatorname{th}(r/2)$. Поэтому длина гиперболической окружности радиуса r равна

$$\frac{4\pi \operatorname{th}(r/2)}{1-\operatorname{th}^2(r/2)} = 2\pi \operatorname{sh} r.$$

Замечание 1. Длина гиперболической окружности больше длины евклидовой окружности того же радиуса, а длина сферической окружности меньше.

Замечание 2. Теорему синусов во всех трех геометриях можно сформулировать одинаково, а именно

$$\frac{l(a)}{\sin\alpha} = \frac{l(b)}{\sin\beta} = \frac{l(c)}{\sin\gamma},$$

где $l(r)$ — длина окружности радиуса r.

Площадь сферического треугольника можно вычислить по формуле $S = R^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$. При замене R на ic получим формулу для площади треугольника в гиперболической геометрии: $S = c^2(\pi-\alpha-\beta-\gamma)$. Эти рассуждения можно превратить в настоящее полное доказательство, применив теорему о том, что две аналитические функции, совпадающие при всех вещественных значениях, должны совпадать и при всех чисто мнимых значениях.

Другой подход к понятию площади в гиперболической геометрии связан с так называемым *дефектом* $\delta = \pi - (\alpha+\beta+\gamma)$ гиперболического треугольника. Выпуклый n-угольник можно разрезать диагоналями на $n-2$ треугольника. Легко убедиться, что сумма их дефектов равна $(n-2)\pi - \sum \alpha_i$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — углы n-угольника. Назовем *дефектом* гиперболического n-угольника с углами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ величину $\delta = (n-2)\pi - \sum \alpha_i$; при этом n-угольник не обязательно выпуклый. Вместо внутренних углов α_i удобнее рассматривать внешние углы $\alpha_i' = \pi - \alpha_i$.

Дело в том, что дефект многоугольника с внешними углами α_i' равен $(\sum \alpha_i') - 2\pi$.

Легко проверить, что дефект обладает следующими свойствами:

1) дефект любого многоугольника положителен;

2) если многоугольники M_1 и M_2 равны, то $\delta(M_1) = \delta(M_2)$;

3) если многоугольник M разрезан на многоугольники M_1 и M_2, то $\delta(M) = \delta(M_1) + \delta(M_2)$.

Площадь многоугольника естественно определить как функцию на множестве многоугольников, обладающую свойствами 1)—3). Можно доказать, что свойства 1)—3) определяют функцию на многоугольниках однозначно с точностью до пропорциональности (мы это доказывать не будем). Поэтому дефект многоугольника с точностью до пропорциональности равен его площади. Для определения коэффициента пропорциональности k можно воспользоваться тем, что при малых a и b площадь прямоугольного треугольника с катетами a и b должна быть приблизительно равна $ab/2$. Для такого треугольника

$$\sin\delta = \cos(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{th} a \operatorname{th} b}{\operatorname{th}^2 c} - \frac{\operatorname{sh} a \operatorname{sh} b}{\operatorname{sh}^2 c} = \\ = \frac{\operatorname{sh} a \operatorname{sh} b}{\operatorname{sh}^2 c}(\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - 1) \approx \frac{ab}{c^2} \cdot \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{ab}{2}.$$

Поэтому $k = 1$. Напомним, что мы условились считать параметр c равным 1. Чтобы не путать этот параметр с длиной гипотенузы, временно обозначим его r. Тогда $\sin\delta = \dfrac{ab}{2r^2}$. Поэтому в общем случае $k = r^2$.

Еще один подход к определению площади фигуры в гиперболической геометрии заключается в разбиении фигуры на бесконечно малые «прямоугольники» (см. задачу 5.40).

§5.3. Изометрии в трех геометриях

С точки зрения свойств метрики евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, сферу $\mathbb{S}^n$ и пространство Лобачевского H^n объединяет то, что у них очень большая группа изометрий (движений). А именно, любую систему из n попарно ортогональных прямых, пересекающихся в одной точке, можно перевести изометрией в любую другую систему из n попарно ортогональных прямых, пересекающихся в одной точке. Это означает, что размерность группы движений равна $\dfrac{n(n+1)}{2}$. Можно доказать, что такие большие группы движений имеют только $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{S}^n/\pm I$ и H^n; здесь $\mathbb{S}^n/\pm I$ — сфера с отождествленными диаметрально противоположными точками, т. е. $\mathbb{RP}^n$.

С геометрической точки зрения требование, чтобы группа изометрий была максимально большой, вполне естественно. Оно соответствует тому, что все точки и все направления одинаковы. Это означает, что, формулируя теорему, можно не говорить, о какой именно точке и каком именно направлении идет речь. А если бы точки и направления были неодинаковы, то для каждой точки и для каждого направления приходилось бы формулировать отдельную теорему.

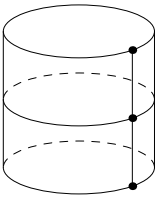


Рис. 5.18.

Несложно привести пример пространства, все точки которого одинаковы (т. е. любую точку можно перевести в любую другую изометрией), но направления неодинаковы. Примером такого пространства служит бесконечный цилиндр (рис. 5.18).

Изометрии евклидова пространства

Важнейшим примером изометрии евклидова пространства является симметрия относительно гиперплоскости. Это преобразование проще всего определить в том случае, когда система координат выбрана так, что гиперплоскость Π задается уравнением $x_1 = 0$. В таком случае симметрия относительно гиперплоскости Π переводит точку $(x_1, \ldots, x_n)$ в точку $(-x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Аналогично можно определить и симметрию относительно $(n-k)$-мерной плоскости $x_1 = 0, \ldots, x_k = 0$. Это преобразование переводит точку $(x_1, \ldots, x_n)$ в точку $(-x_1, \ldots, -x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$.

Можно дать инвариантное определение симметрии относительно k-мерной плоскости Π^k. Опустим из точки X перпендикуляр XA на Π^k и рассмотрим такую точку Y, что $|XY| = 2|XA|$ (рис. 5.19). Тогда Y — образ точки X при симметрии относительно k-мерной плоскости Π^k.

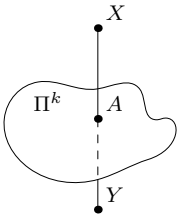


Рис. 5.19

Плоскость Π^k состоит в точности из тех точек, которые остаются неподвижными при симметрии относительно нее. Кроме того, если точки X и Y симметричны относительно Π^k, то все точки Π^k равноудалены от точек X и Y. Последнее свойство полностью описывает Π^k лишь в том случае, когда $X \neq Y$ и Π^k — гиперплоскость.

Выясним теперь, как может быть устроено множество всех неподвижных точек изометрии. Прежде всего заметим, что если A и B — несовпадающие неподвижные точки изометрии, то вся прямая AB состоит из неподвижных точек этой изометрии. В самом деле, пусть X — точка прямой AB. Тогда выполняется одно из трех равенств

$|AB|=|AX|+|BX|$, $|AB|=|AX|-|BX|$, $|AB|=|BX|-|AX|$. В каждом из этих трех случаев сферы радиусов $|AX|$ и $|BX|$ с центрами A и B имеют ровно одну общую точку X. Ясно также, что образ точки X при изометрии должен лежать на обеих этих сферах. Следовательно, X — неподвижная точка изометрии.

Предположим, что помимо точек прямой AB есть еще одна неподвижная точка C. Тогда каждая точка прямой CX, где X — точка прямой AB, неподвижна. Поэтому все точки плоскости ABC неподвижны. Аналогичные рассуждения показывают, что множество неподвижных точек изометрии n-мерного пространства либо пусто, либо состоит из одной точки, либо представляет собой k-мерную плоскость, где $1 \leqslant \leqslant k \leqslant n$. В частности, если у изометрии n-мерного пространства есть $n+1$ неподвижная точка, не лежащая в одной гиперплоскости, то все точки пространства неподвижны, т. е. изометрия представляет собой тождественное преобразование.

Теорема 1. *Любую изометрию аффинного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ можно представить в виде композиции не более $n+1$ симметрии относительно гиперплоскостей.*

Доказательство. Если изометрия оставляет все точки неподвижными, то она тождественна, а тождественное преобразование можно представить в виде композиций двух симметрий относительно одной и той же гиперплоскости. Предположим теперь, что изометрия f переводит некоторую точку A в точку $B \neq A$. Пусть s — симметрия относительно гиперплоскости П, состоящей из точек, равноудаленных от A и B. Изометрия sf, переводящая точку X в точку $s(f(X))$, обладает следующими свойствами:

1) $sf(A)=A$;

2) если $f(X)=X$, то $sf(X)=X$.

Свойство 1) очевидно, а свойство 2) можно доказать следующим образом. Если $f(X)=X$, то f переводит отрезок AX в отрезок BX. Поэтому точка X равноудалена от точек A и B, а значит, $s(X)=X$.

Для изометрии f в $\mathbb{R}^n$ выберем точки $A_1, \ldots, A_{n+1}$, не лежащие в одной гиперплоскости, и построим за $n+1$ шаг изометрию $s_k \ldots s_1 f$, для которой все выбранные точки неподвижны. Здесь $k \leqslant n+1$, так как умножение на симметрию s не нужно в том случае, когда точка A_{i+1} неподвижна для изометрии, построенной на предыдущем шаге.

Из того, что $s_k \ldots s_1 f = \mathrm{id}$ (тождественная изометрия), следует, что $f = s_1 \ldots s_k$, так как $s_i^2 = \mathrm{id}$. □

Обсудим теперь одно достаточно экзотическое свойство, относящееся к определению изометрии пространства $\mathbb{R}^n$. Дело в том, что нет необходимости требовать, чтобы преобразование сохраняло все расстоо-

яния между точками. Достаточно потребовать, чтобы оно сохраняло лишь одно какое-то расстояние a (т. е. точки на расстоянии a переводило бы в точки на расстоянии a). А из этого уже будет следовать, что оно сохраняет все расстояния. Доказательство мы проведем сначала в наиболее интересном случае $n = 2$.

Теорема 2. *Пусть отображение $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (не обязательно взаимно однозначное) сохраняет расстояние $a > 0$, т. е. если $|XY| = a$, то $|X_1Y_1| = a$, где $X_1 = f(X)$ и $Y_1 = f(Y)$. Тогда f — изометрия.*

Доказательство ([В5]). Сделав при необходимости гомотетию, можно считать, что $a = 1$. Доказательство проведем в несколько шагов. Образ точки X при отображении f будем обозначать X_1.

Шаг 1. Если $\sqrt{3} - 1 < |XY| < \sqrt{3} + 1$, то $X_1 \neq Y_1$.

Рассмотрим ромб $XACB$ со стороной 1 и диагоналями $|AB| = 1$ и $|XC| = \sqrt{3}$ (рис. 5.20). Пусть S — окружность радиуса 1 с центром C. Расстояние от точки X до точек окружности S изменяется от $\sqrt{3} - 1$ до $\sqrt{3} + 1$, поэтому можно считать, что точка Y лежит на окружности S. Предположим, что $X_1 = Y_1$. Тогда точки A_1, B_1, C_1 лежат на окружности радиуса 1 с центром $X_1 = Y_1$, причем попарные расстояния между этими точками равны 1. Получено противоречие.

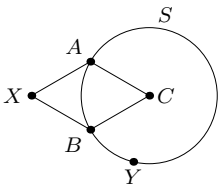


Рис. 5.20

Шаг 2. Отображение f сохраняет расстояние $\sqrt{3}$.

Пусть $|XY| = \sqrt{3}$. Рассмотрим ромб $XAYB$, составленный из двух равносторонних треугольников со стороной 1 (рис. 5.21). Точки X_1, A_1, Y_1 и B_1 либо образуют такой же ромб, либо $X_1 = Y_1$. Последний случай невозможен, так как $\sqrt{3} - 1 < |XY| < \sqrt{3} + 1$.

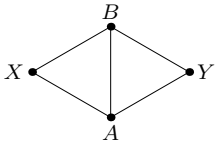
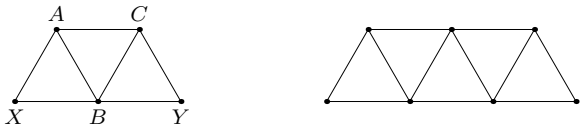


Рис. 5.21

Шаг 3. Отображение f сохраняет расстояние n, где n — любое натуральное число.

Рассмотрим ромбы $XACB$ и $ACYB$, составленные из пар равносторонних треугольников со стороной 1 (рис. 5.22 (а)). Точки X_1 и Y_1 не совпадают, поскольку $|A_1Y_1| = \sqrt{3} \neq |A_1X_1|$. Поэто-



(а) (б)

Рис. 5.22

му вершины рассматриваемых ромбов переходят в вершины таких же ромбов, а значит, $|X_1Y_1| = 2$.

Рассмотрев цепочку ромбов, изображенную на рис. 5.22 (б), получим, что расстояние 3 сохраняется, и т. д.

Шаг 4. Отображение f сохраняет расстояние $n2^{-m}$, где m и n — натуральные числа.

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC со сторонами $2n$, $2n$, n и построим окружности, диаметрами которых служат его боковые стороны (рис. 5.23). Середина M меньшей стороны BC совпадает с точкой пересечения этих окружностей, поэтому точка M_1 совпадает либо с точкой A_1, либо с серединой отрезка B_1C_1.

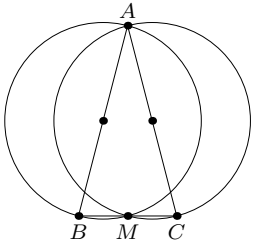


Рис. 5.23

Такие же рассуждения, как и на шаге 1, показывают, что если

$$n(\sqrt{3}-1) \leqslant |AM| \leqslant n(\sqrt{3}+1),$$

то $M_1 \neq A_1$. В нашем случае $|AM| = \dfrac{n\sqrt{15}}{2}$, поэтому $M_1 \neq A_1$. Следовательно, M_1 — середина отрезка B_1C_1. Таким образом, расстояние $n/2$ сохраняется. Аналогично получаем, что расстояние $n/2^m$ сохраняется.

Шаг 5. Расстояние между любыми двумя точками X, $Y \in \mathbb{R}^2$ сохраняется.

Для точки Y можно выбрать сходящуюся к ней последовательность точек Y^i, для которых расстояния до точки X имеют вид $n/2^m$. Тогда $|X_1Y_1^i| = |XY^i|$, а точки Y_1^i сходятся к точке Y_1. Для доказательства последнего утверждения достаточно заметить, что если $|YY^i| \leqslant 2^{-k}$, то точки Y и Y^i можно расположить на некоторой окружности радиуса 2^{-k-1}, а значит, $|Y_1Y_1^i| \leqslant 2^{-k}$. В итоге получаем, что

$$|X_1Y_1| = \lim_{i\to\infty} |X_1Y_1^i| = \lim_{i\to\infty} |XY^i| = |XY|.$$

Доказательство теоремы 2 завершено. □

Опишем вкратце доказательство аналогичной теоремы при $n > 2$. В этом случае вместо ромба, составленного из двух правильных треугольников со стороной 1, рассматриваем фигуру, составленную из двух правильных n-мерных симплексов с ребром 1. Как и в случае $n = 2$, получаем следующие утверждения.

Шаг 1. Если $\sqrt{\dfrac{2(n+1)}{n}} - 1 < |XY| < \sqrt{\dfrac{2(n+1)}{n}} + 1$, то $X_1 \neq X_2$.

Шаг 2. Отображение f сохраняет расстояние $\sqrt{\dfrac{2(n+1)}{n}}$.

Дальше уже требуются новые рассуждения.

Шаг 3. Отображение f переводит единичную окружность в единичную окружность, причем центр окружности переходит в центр окружности.

При $n=3$ единичную окружность можно представить как пересечение двух сфер радиуса $2\sqrt{6}/3$, расстояние между центрами которых равно $2\sqrt{15}/3$. Согласно шагу 2 эти сферы переходят в сферы (того же радиуса), а согласно шагу 3 образы центров этих сфер не совпадают. Поэтому единичная окружность переходит в некоторую окружность. Теперь, рассматривая правильный шестиугольник, вписанный в окружность, нетрудно установить, что единичная окружность переходит в единичную окружность, причем центр окружности переходит в центр окружности.

При $n>3$ возьмем правильный $(n-3)$-мерный симплекс с ребром s и рассмотрим пересечение $(n-1)$-мерных сфер радиуса s с центрами в вершинах этого симплекса. Несложно показать, что это пересечение представляет собой двумерную сферу радиуса $\rho = s\sqrt{\dfrac{n-1}{2(n-2)}}$. Таким образом, если отображение f сохраняет расстояние s, то оно переводит двумерную сферу радиуса ρ в двумерную сферу радиуса ρ. Но единичную окружность можно представить как пересечение двух двумерных сфер радиуса $\rho = s\sqrt{\dfrac{n-1}{2(n-2)}}$, где $s = \sqrt{\dfrac{2(n+1)}{n}}$.

Шаг 4. Плоскость переходит в плоскость.

Возьмем в данной плоскости единичную окружность $\mathbb{S}^1$ с центром O. Рассмотрим в этой плоскости единичную окружность $\mathbb{S}^1_A$ с центром $A \in \mathbb{S}^1$. Ясно, что эти две окружности переходят в две единичные окружности, лежащие в одной плоскости. Окружность $\mathbb{S}^1_A$ при перемещении точки A по S_1 заметает круг радиуса 2 с центром O. Образы всех точек этого круга лежат в одной плоскости. Проведя такое же построение для всех окружностей, лежащих в этом круге, получим круг радиуса 3, образ которого лежит в одной плоскости, и т. д.

Известны и другие достаточные условия того, что отображение является изометрией. Например, для отображений пространства размерности не менее 3 достаточно потребовать сохранения площади треугольника.

Теорема 3. а) *Если отображение $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ переводит любой треугольник площади 1 в треугольник площади 1, то f — аффинное преобразование.*

б) *Если отображение $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, где $n \geqslant 3$, переводит любой треугольник площади 1 в треугольник площади 1, то f — изометрия.*

Доказательство. а) (см. [L2]) Для фиксированных точек A и B множество точек X, для которых площадь треугольника ABX равна 1, представляет собой пару параллельных прямых. Эта пара параллельных прямых при отображении f переходит в пару параллельных прямых. Ясно также, что любую пару параллельных прямых можно представить как множество точек, для которых площадь треугольника ABX равна 1 (при некоторых фиксированных точках A и B).

Проверим теперь, что любая прямая переходит в прямую. Рассмотрим пару параллельных прямых и выберем на них отрезки P_1P_2 и Q_1Q_2 равной длины a. Пусть P и Q — середины этих отрезков. Тогда найдется 12 треугольников равной площади с вершинами в выбранных 6 точках. Подходящим образом выбрав длину a, можно добиться того, чтобы эти 12 треугольников имели площадь 1. Предположим, что образы точек P и Q лежат не на разных параллельных прямых. Тогда на этих параллельных прямых нельзя выбрать образы точек P_1, P_2, Q_1, Q_2 так, чтобы указанные выше 12 треугольников имели площадь 1. В самом деле, все эти точки должны лежать на одной прямой, и все 4 отрезка $P_i'Q_j'$ должны иметь равные длины.

Таким образом, отображение F переводит любую прямую в прямую, а значит, f — аффинное преобразование (см. с. 53).

б) (см. [L3]) Прежде всего отметим, что f переводит разные точки в разные.

Квадрат площади треугольника, сторонами которого служат векторы a и b, равен $\frac{1}{4}(|a|^2|b|^2-(a,\,b)^2)$, поэтому площадь такого треугольника равна 1 тогда и только тогда, когда

$$|a|^2|b|^2-(a,\,b)^2=4. \tag{5.3}$$

Возьмем в $\mathbb{R}^n$ трехмерное подпространство и в нем рассмотрим точки

$$\begin{array}{lll} O=(0,\,0,\,0), & A=(1,\,1,\,0), & B(1,\,-1,\,0),\\ P=(0,\,1,\,\lambda), & Q=(1,\,0,\,\lambda), & R(0,\,-1,\,\lambda). \end{array}$$

С помощью формулы (5.3) легко проверить, что площади треугольников OAP, OAQ, OAR, OBP, OBQ, OBR равны 1, если $2(1+\lambda^2)-1=4$, а площади треугольников OPQ, ORQ, APQ, ARQ, BPQ, BRQ равны 1, если $(1+\lambda^2)^2-\lambda^2=4$. Оба эти равенства выполняются при $\lambda=\sqrt{3/2}$. В таком случае конфигурация точек O, A, B, P, Q, R при отображении f должна переходить в конфигурацию точек, в которой площади указанных 12 треугольников и образа треугольника ABO равны 1.

Лемма. *Пусть точки A, B, C, D таковы, что площади треугольников ABC, ABD, ACD и BCD равны 1. Тогда либо $ABCD$ — тет-*

раэдр, противоположные ребра которого равны, либо A, B, C и D — вершины параллелограмма.

Доказательство. Предположим сначала, что данные точки лежат в одной плоскости. Пусть, например, A — вершина выпуклой оболочки этих точек, причем из A выходят ребра AB и AD. Тогда $ABCD$ — параллелограмм, так как $DC \parallel AB$ и $BC \parallel AD$.

Предположим теперь, что точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости, т. е. $ABCD$ — невырожденный тетраэдр. Проведя через каждое ребро тетраэдра плоскость, параллельную противоположному ребру, получим параллелепипед. Поэтому, изменив обозначения, можно считать, что вершины данного тетраэдра совпадают с вершинами A, B_1, C и D параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Рассмотрим проекцию этого параллелепипеда на плоскость, перпендикулярную прямой AC. Из равенства площадей треугольников ACB_1 и ACD_1 следует равенство высот этих треугольников, опущенных на сторону AC. Поэтому проекция тетраэдра представляет собой равнобедренный треугольник, причем точка A_1 проецируется в середину его основания. Следовательно, $AA_1 \perp B_1D_1$. Аналогично $DD_1 \perp A_1C_1$. Таким образом, ребро AA_1 перпендикулярно грани $ABCD$, т. е. $AA_1 \perp AB$ и $AA_1 \perp AD$. Аналогично получаем, что $AB \perp AD$.

Итак, тетраэдру с равновеликими гранями соответствует прямоугольный параллелепипед. Равенство противоположных граней тетраэдра следует из равенства диагоналей прямоугольника. □

В рассматриваемой нами конфигурации условие леммы применимо к тетраэдрам $OAPQ$ и $OBPQ$ с общей гранью OPQ и к тетраэдрам $OARQ$ и $OBRQ$ с общей гранью ORQ. Если образы одной из этих пар тетраэдров невырожденны, то либо $|O'A'| = |P'Q'| = |O'B'|$, либо $|O'A'| = |R'Q'| = |O'B'|$ (здесь $O' = f(O)$ и т. д.).

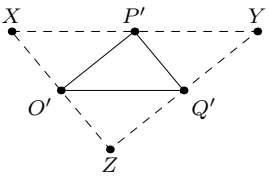


Рис. 5.24

Покажем, что равенство $|O'A'| = |O'B'|$ выполняется и в том случае, когда среди тетраэдров есть вырожденные. Достаточно рассмотреть случай, когда в каждой паре тетраэдров $O'A'P'Q'$ и $O'B'P'Q'$, $O'A'R'Q'$ и $O'B'R'Q'$ есть вырожденный тетраэдр. Предположим что оба тетраэдра $O'A'P'Q'$ и $O'B'P'Q'$ вырожденные. Согласно лемме точки A' и B' должны быть расположены в вершинах треугольника XYZ, стороны которого параллельны сторонам треугольника $O'P'Q'$ (рис. 5.24). Но тогда площадь треугольника $O'A'B'$ равна 0 или 2, а она должна быть равна 1. Полученное противоречие показывает, что в каждой паре $O'A'P'Q'$ и $O'B'P'Q'$, $O'A'R'Q$ и $O'B'R'Q'$ один тетраэдр вырожденный,

а другой невырожденный. Если тетраэдр $O'A'P'Q'$ невырожденный, а тетраэдр $O'B'P'R'$ вырожденный, то конфигурация точек O', A', B', P', Q' устроена так, как показано на рис. 5.25. При этом $\{X, Y, Z\} = \{O', P', Q'\}$. Если $X = O'$ или $Y = O'$, то $|O'A'| = |O'B'|$. Поэтому нужно рассмотреть лишь тот случай, когда $Z = O'$. Пусть Π — плоскость, перпендикулярная отрезку $A'B'$ и проходящая через его середину M, O'' — проекция точки O' на плоскость Π (рис. 5.26). Рассматривая пару тетраэдров $O'A'R'Q'$ и $O'B'R'Q'$, получим аналогичную конфигурацию из точек M, Q', O'', R'. Но в таком случае $R' = P'$, чего не может быть. В итоге получаем, $O'A' = O'B'$.

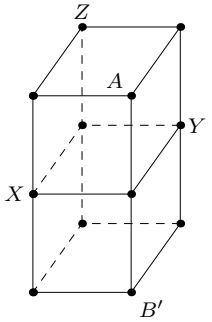


Рис. 5.25

Итак, если $|OA| = |OB| = \sqrt{2}$ и $|AB| = 2$, то $|O'A'| = |O'B'|$. Из этого следует, что если $|OA_1| = |OA_2| = \sqrt{2}$, то $|O'A'_1| = |O'A'_2|$. В самом деле, построим общий перпендикуляр к прямым OA_1 и OA_2 и отложим на нем отрезок OB длиной $\sqrt{2}$. Тогда $|O'A'_1| = |O'B'| = |O'A'_2|$. Пусть теперь AB и CD — произвольные отрезки длиной $\sqrt{2}$. Точки B и C можно соединить ломаной, все звенья которой имеют длину $\sqrt{2}$, поэтому $|A'B'| = |C'D'|$.

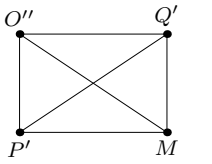


Рис. 5.26

Таким образом, отображение f переводит любой отрезок длиной $\sqrt{2}$ в отрезок длиной $\lambda\sqrt{2}$, где λ — постоянное число. Поэтому отображение $\lambda^{-1}f$ сохраняет расстояние $\sqrt{2}$, а значит, $\lambda^{-1}f$ — изометрия. Но f сохраняет единичную площадь треугольника, поэтому $\lambda = 1$, т. е. f — изометрия. □

Изометрии сферы

Напомним, что расстояние между точками A и B сферы $\mathbb{S}^2$ определяется как длина кратчайшей дуги большой окружности, соединяющей точки A и B. Отметим, что сферическое расстояние между точками A и B является монотонно возрастающей функцией от евклидова расстояния между ними. В частности, сферические расстояния равны тогда и только тогда, когда равны евклидовы расстояния.

Для n-мерной сферы, так же как и для двумерной сферы, равенство сферических расстояний эквивалентно равенству евклидовых расстояний между точками.

Теорема 4. *Изометрии сферы $\mathbb{S}^n$ находятся во взаимно однозначном соответствии с изометриями пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, оставляющими центр сферы неподвижным.*

Доказательство. Ясно, что любая изометрия пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, оставляющая центр сферы $\mathbb{S}^n$ неподвижным, переводит $\mathbb{S}^n$ в себя и сохраняет сферические расстояния. Поэтому нужно лишь показать, что любую изометрию g сферы $\mathbb{S}^n$ можно продолжить до изометрии $\tilde{g}$ пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. Будем для удобства считать, что центр сферы расположен в начале координат, а ее радиус равен 1. Любой вектор пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ можно представить в виде tv, где $t>0$ и $|v|=1$. Положим $\tilde{g}(tv)=tg(v)$. Нужно проверить, что $\tilde{g}$ — изометрия, т. е. $|\tilde{g}(su)-\tilde{g}(tv)|=|su-tv|$. Ясно, что

$$|sg(u)-tg(v)|^2-|su-tv|^2=s^2+t^2-2st(g(u),\,g(v))-$$
$$-s^2-t^2+2st(u,\,v)=2st((u,\,v)-(g(u),\,g(v)))=0,$$

так как $(u,\,v)=\cos\varphi$, где φ — угол между векторами u и v. □

Теорема 5. *Любую изометрию сферы $\mathbb{S}^n$ можно представить в виде композиции не более чем $n+1$ симметрий относительно сечений сферы гиперплоскостями, проходящими через центр сферы.*

Доказательство. Изометрии сферы $\mathbb{S}^n$ соответствует изометрия пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ с неподвижной точкой O, где O — центр сферы. Из доказательства теоремы об изометриях евклидова пространства (см. теорему 1 на с. 135) следует, что что эту изометрию можно представить в виде композиции не более чем $n+1$ симметрий относительно гиперплоскостей, причем все эти гиперплоскости будут проходить через точку O. (Так как одна неподвижная точка уже есть, необходимое количество симметрий уменьшается на 1.) □

Используя теорему 4, несложно проверить, что у сферы $\mathbb{S}^n$ большая группа изометрий, т. е. любую систему из n попарно ортогональных сферических прямых, проходящих через одну точку, можно перевести изометрией в любую другую такую систему прямых.

Несложно показать, что сфера $\mathbb{S}^2$ не изометрична плоскости $\mathbb{R}^2$, т. е. сферическая геометрия — это не евклидова геометрия. В самом деле, расстояния между точками плоскости могут быть сколь угодно большими, а расстояния между точками сферы не могут быть больше $2\pi R$, где R — радиус сферы.

Более содержателен вопрос о локальной изометричности сферы и плоскости, т. е. может ли область сферы быть изометрична некоторой области плоскости. Иными словами, можно ли нарисовать на плоскости карту некоторой области на сфере без искажений, т. е. так, чтобы расстояние между любой парой точек сферы равнялось расстоянию между соответствующими точками плоскости?

Теорема 6. *Область сферы не изометрична области плоскости.*

Доказательство. Назовем *сферической окружностью* множество точек сферы, удаленных от некоторой точки сферы (*центра* окружности) на данное расстояние r (*радиус* окружности). Если отрезок OX виден из центра сферы под углом α, то сферическая окружность с центром O, проходящая через точку X, имеет сферический радиус $R\alpha$, а евклидов радиус этой окружности равен $R\sin\alpha$. Таким образом, сферическая окружность радиуса $r = R\alpha$ имеет длину

$$2\pi R\sin\alpha = 2\pi R\sin(r/R) < 2\pi R(r/R) = 2\pi r.$$

Любая область на сфере содержит сферическую окружность достаточно малого радиуса r. Длина этой сферической окружности меньше длины евклидовой окружности радиуса r. Но при изометрии окружность радиуса r должна перейти в окружность того же радиуса, причем ее длина останется прежней. □

Замечание. Чтобы не рассматривать длину окружности, можно рассмотреть длину стороны правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса r.

Изометрия сферы $f\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ называется *переносом Клиффорда*, если расстояние между точками x и $f(x)$ постоянно. (В евклидовом пространстве аналогичным свойством обладают параллельные переносы.) Для сферы любой размерности преобразования $f(x) = x$ и $f(x) = -x$ являются переносами Клиффорда. Что же касается других, не столь тривиальных переносов Клиффорда, то они есть только на сферах нечетной размерности. Напомним, что над полем $\mathbb{C}$ заменой базиса матрицу ортогонального преобразования можно привести к виду $(\lambda_1, \bar\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \bar\lambda_k, \pm1, \ldots, \pm1)$, где $|\lambda_i| = 1$ и $\lambda_i \neq \pm1$. Над полем $\mathbb{R}$ вместо пары λ, $\bar\lambda$ нужно взять матрицу $\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$, где $\lambda = \cos\alpha + i\sin\alpha$.

Теорема 7. *Изометрия $f\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ является нетривиальным переносом Клиффорда тогда и только тогда, когда соответствующая ей изометрия пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ приводится к виду $(\lambda, \bar\lambda, \lambda, \bar\lambda, \ldots, \lambda, \bar\lambda)$, где $|\lambda| = 1$ и $\lambda \neq \pm1$.*

Доказательство. Выберем в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ ортогональную систему координат $(x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k, z_1, \ldots, z_s)$ так, что $f(x, y, z) = (x', y', z')$, где $x'_i = x_i\cos\alpha_i + y_i\sin\alpha_i$, $y'_i = -x_i\sin\alpha_i + y_i\cos\alpha_i$ и $z'_i = \pm z_i$. Легко проверить, что квадрат евклидова расстояния между точками (x, y, z) и $f(x, y, z)$ равен

$$2\left(\sum_{i=1}^{k}(x_i^2 + y_i^2)(1 - \cos\alpha_i) + \sum_{j=1}^{s}\varepsilon_j z_j^2\right),$$

где $\varepsilon_j = 0$ или 1. Квадрат евклидова расстояния должен быть постоянен при $\sum_{i=1}^{k}(x_i^2 + y_i^2) + \sum_{j=1}^{s} z_j^2 = 1$. Это возможно лишь в следующих случаях:

1) $k = 0$, $\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_s = \pm 1$;

2) $s = 0$, $\cos\alpha_1 = \ldots = \cos\alpha_k$.

Первый случай соответствует тривиальным переносам Клиффорда, а во втором случае матрица преобразования имеет указанный в условии теоремы вид. □

Сфера $\mathbb{S}^3$ локально не изометрична евклидову пространству $\mathbb{R}^3$. Но сфера $\mathbb{S}^3$ содержит двумерную поверхность, локально изометричную евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Примером такой поверхности в сфере

$$\mathbb{S}^3 = \{(z,\, w) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |z|^2 + |w|^2 = 2\}$$

служит поверхность T^2, заданная уравнением $|z| = |w|$. Эта поверхность состоит из точек $(e^{i\varphi},\, e^{i\psi})$. Покажем, что локальные координаты $(\varphi,\, \psi)$ на поверхности T^2 являются евклидовыми, т. е. на поверхности T^2 длина кратчайшей кривой, соединяющей точки $(e^{i\varphi},\, e^{i\psi})$ и $(e^{i(\varphi+\Delta\varphi)},\, e^{i(\psi+\Delta\psi)})$, равна $\sqrt{(\Delta\varphi)^2 + (\Delta\psi)^2}$; длина кривой на поверхности $T^2 \subset \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ определяется при этом как длина кривой в $\mathbb{R}^4$. Достаточно проверить, что если $z = e^{i\varphi}$ и $w = e^{i\psi}$, то $|dz|^2 + |dw|^2 = (d\varphi)^2 + (d\psi)^2$. Ясно, что $dz = ie^{i\varphi}d\varphi$ и $dw = ie^{i\psi}\,d\psi$. Поэтому $|dz|^2 + |dw|^2 = (d\varphi)^2 + (d\psi)^2$.

Три типа собственных движений плоскости Лобачевского

Для геометрии Лобачевского можно доказать следующую теорему, аналоги которой для евклидовой и сферической геометрии мы уже доказывали.

Теорема 8. *Любое движение плоскости Лобачевского можно представить в виде композиции не более чем трех симметрий относительно прямых.*

Доказательство. Напомним основную идею доказательства этой теоремы в случае евклидовой геометрии. Пусть g — некоторая изометрия, причем $g(A) = B \neq A$. Рассмотрим симметрию s относительно прямой $l = \{X \,|\, |AX| = |BX|\}$. Тогда $sg(A) = A$. Кроме того, если $g(Y) = Y$, то $Y \in l$, а значит, $sg(Y) = Y$. Поэтому изометрия sg имеет по крайней мере одну дополнительную неподвижную точку по сравнению с g. Применив такую конструкцию не более трех раз, можно построить изометрию, имеющую три неподвижные точки, не лежащие на одной прямой.

Эту схему доказательства можно применить и в случае геометрии Лобачевского. Но для этого нужно ответить на следующие вопросы.

1. Почему множество точек, равноудаленных от двух данных точек, представляет собой гиперболическую прямую?

2. Что такое «симметрия относительно прямой» в случае гиперболической геометрии?

3. Почему движение гиперболической плоскости, имеющее три неподвижные точки, не лежащие на одной прямой, тождественно?

Ответим на эти вопросы последовательно.

1. Можно считать, что данные точки имеют вид ia, ib ($a, b \in \mathbb{R}$). Тогда множество точек $(x, y) \in H$, равноудаленных от них, задается уравнением

$$\frac{x^2 + (a-y)^2}{ay} = \frac{x^2 + (b-y)^2}{by},$$

т. е. $x^2 + y^2 = ab$.

2. Назовем точки A и A^* *симметричными* (или *инверсными*) относительно окружности S, если любая окружность, проходящая через точки A и A^*, ортогональна окружности S. В том случае, когда S — прямая, это определение тоже имеет смысл; оно эквивалентно обычному определению симметрии относительно прямой.

Понятие симметричности двух точек относительно окружности сохраняется при дробно-линейных преобразованиях.

Можно проверить, что точки A и A^* симметричны относительно окружности S тогда и только тогда, когда лучи OA и OA^* совпадают и $|OA| \cdot |OA^*| = R^2$, где R — радиус окружности S.

Назовем точки A и A^* *симметричными* относительно гиперболической прямой в модели Пуанкаре, если они симметричны относительно евклидовой окружности, содержащей эту прямую. В том случае, когда гиперболическая прямая является частью евклидовой прямой, легко проверить, что точки, симметричные относительно прямой, равноудалены от нее. Кроме того, симметрия относительно гиперболической прямой является изометрией.

3. На третий вопрос мы дадим более подробный ответ, чем это требуется для наших целей. А именно, мы опишем все возможные множества неподвижных точек движений плоскости Лобачевского. Рассмотрим по отдельности несобственные и собственные движения.

а) Уравнение $z = \dfrac{a(-\bar{z}) + b}{c(-\bar{z}) + d}$ приводится к виду $-cz\bar{z} + dz + a\bar{z} - b = 0$, т. е.

$$-c(x^2 + y^2) + dx + ax - b = 0, \quad dy - ay = 0.$$

При $a \neq d$ последнее уравнение имеет единственное решение $y = 0$. В таком случае $z \notin H$. Если же $a = d$, то множеством неподвижных точек является некоторая гиперболическая прямая.

б) Уравнение $z = \dfrac{az+b}{cz+d}$ является квадратным. Оно имеет корни

$$z_{1,2} = \frac{a-d \pm \sqrt{(d-a)^2+4bc}}{2c}.$$

Можно считать, что $ad-bc=1$. В таком случае $D=(d-a)^2+4bc=$ $=(a+d)^2-4$. Поэтому

$D=0 \iff |a+d|=2$ (*параболическое* движение),
$D>0 \iff |a+d|>2$ (*гиперболическое* движение),
$D<0 \iff |a+d|<2$ (*эллиптическое* движение).

Неподвижные точки преобразования $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ в зависимости от знака D выглядят так, как показано на рис. 5.27. Отметим, что лишь в случае $D<0$ одна из неподвижных точек является неподвижной точкой движения плоскости Лобачевского. Все остальные неподвижные точки лежат вне верхней полуплоскости H.

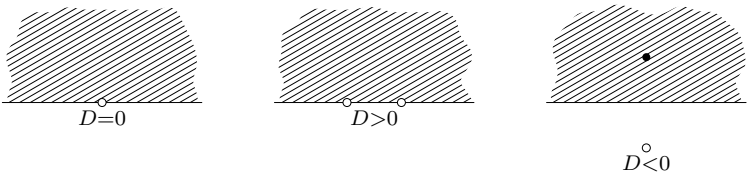


Рис. 5.27

Мы ответили на все три вопроса. Тем самым, доказательство теоремы завершено. □

Обсудим более подробно собственные движения плоскости Лобачевского. Собственное движение можно представить в виде композиции двух симметрий относительно прямых. В плоскости Лобачевского пары прямых бывают трех типов: параллельные, не пересекающиеся (и не параллельные) и пересекающиеся. Покажем, что композиции симметрий относительно таких пар прямых представляют собой соответственно параболические, гиперболические и эллиптические движения.

Прежде всего выясним, к какому простейшему виду можно привести пару прямых с помощью движения.

1. Для пары пересекающихся прямых удобно воспользоваться моделью Пуанкаре в круге. Можно считать, что центр круга является точкой пересечения прямых. Тогда рассматриваемые прямые будут диаметрами круга. Композиция симметрий относительно них — поворот вокруг центра. Это преобразование имеет вид $z \mapsto e^{i\varphi}z$.

2. Для пары параллельных прямых удобно воспользоваться моделью Пуанкаре в верхней полуплоскости. При этом можно считать, что

прямые сходятся к точке ∞, т. е. они являются лучами, параллельными оси Oy. Композиция симметрий относительно этих прямых имеет вид $z \mapsto z + h$.

3. Не пересекающиеся и не параллельные прямые будем называть *расходящимися* или *сверхпараллельными*. Покажем сначала, что расходящиеся прямые l_1 и l_2 имеют общий перпендикуляр m. Обратимся для этого к модели Пуанкаре в верхней полуплоскости. Можно считать, что прямая l_1 является лучом Oy (рис. 5.28). Проведем из точки O касательную OA к евклидовой окружности, содержащей гиперболическую прямую l_2. Легко проверить, что гиперболическая прямая m, соответствующая евклидовой окружности радиуса $|OA|$ с центром O, перпендикулярна прямым l_1 и l_2.

Прямую m можно перевести в луч Oy. Тогда прямые l_1 и l_2 перейдут в полуокружности с центром O (рис. 5.29). Композиция инверсий относительно окружностей, содержащих их, имеет вид $z \mapsto kz$, $k > 0$.

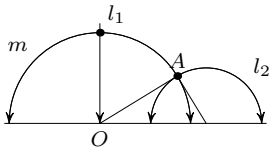


Рис. 5.28

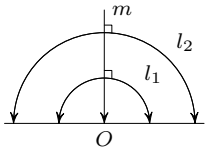


Рис. 5.29

Собственное движение можно представить в виде композиции симметрий относительно прямых l_1 и l_2 многими разными способами. Для фиксированного собственного движения рассмотрим множество всех соответствующих ему прямых l_i. Назовем это множество *пучком прямых*. В соответствии с типом движения пучок прямых назовем *эллиптическим, параболическим* или *гиперболическим*. Эллиптический пучок состоит из прямых, проходящих через фиксированную точку; параболический пучок состоит из попарно параллельных прямых (т. е. из прямых, проходящих через фиксированную бесконечно удаленную точку); гиперболический пучок состоит из прямых, ортогональных фиксированной прямой.

С каждым пучком прямых можно связать семейство кривых, ортогональных всем прямым пучка. Это семейство кривых получается следующим образом. Рассмотрим все движения g, которые являются композициями симметрий относительно пар прямых данного пучка. Возьмем произвольную точку A плоскости Лобачевского и рассмотрим множество всех точек вида $g(A)$. На рис. 5.30 изображены полученные кривые для всех трех типов пучков прямых (при этом на самих прямых пучка нарисованы стрелки). Для эллиптического пучка использована

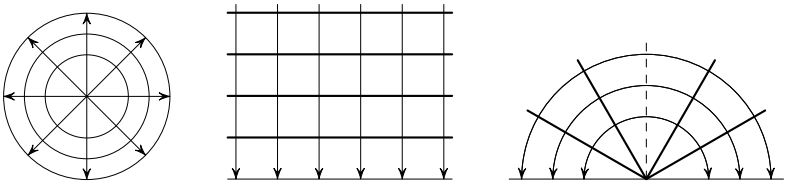


Рис. 5.30

модель Пуанкаре в круге, для двух других пучков — модель Пуанкаре в верхней полуплоскости.

В случае эллиптического пучка кривыми, ортогональными прямым пучка, являются окружности. Ортогональные кривые для параболического пучка называют *орициклами* или *предельными окружностями*. Второе из этих названий связано с тем, что эти кривые получаются при бесконечном увеличении радиуса окружности, касающейся данной прямой в данной точке. Ортогональные кривые для гиперболического пучка называют *гиперциклами* или *эквидистантами*. Второе название связано с тем, что все точки эквидистанты находятся на одном и том же расстоянии от прямой, которая ортогональна прямым данного гиперболического пучка прямых. Обычно эквидистантой (гиперциклом) называют множество точек, равноудаленных от данной прямой; эта кривая состоит из двух ветвей, симметричных относительно данной прямой.

Выясним теперь, как устроены собственные движения для модели геометрии Лобачевского на верхней полости двуполостного гиперболоида $[x, x] = -c^2$, где $[x, x] = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$. Прежде всего отметим, что любое линейное преобразование, сохраняющее псевдоскалярное произведение $[x, y]$ и не меняющее местами верхнюю и нижнюю полости гиперболоида, индуцирует движение плоскости Лобачевского.

Любую плоскость можно задать уравнением $[x, a] = p$, где a — фиксированный вектор, p — фиксированное число. Определим *симметрию* относительно плоскости $[x, a] = 0$ следующим образом. Положим $x \mapsto x' = x + \lambda a$, где число λ таково, что вектор $x + x'$ лежит в плоскости симметрии, т. е. $[x + x', a] = 0$. В результате получим отображение $x \mapsto x - 2\dfrac{[x, a]}{[a, a]}a$. Это определение имеет смысл при $[a, a] \neq 0$.

Плоскости, касательные к конусу $[x, x] = 0$, задаются уравнениями вида $[x, a] = 0$, где $[a, a] = 0$. Именно относительно этих плоскостей симметрия не определена. Все остальные плоскости, проходящие через начало координат, либо пересекают двуполостный гиперболоид

$[x, x] = -c^2$, либо не пересекают его и при этом не касаются конуса $[x, x] = 0$. Прямым плоскости Лобачевского соответствуют лишь плоскости первого типа. Симметрии относительно этих плоскостей не переставляют полости гиперболоида, так как точки пересечения плоскости и гиперболоида остаются неподвижными.

Несложные вычисления показывают, что при $[a, a] \neq 0$ симметрия относительно плоскости $[x, a] = 0$ сохраняет псевдоскалярное произведение, т. е. если $x \mapsto x'$ и $y \mapsto y'$, то $[x, y] = [x', y']$. Таким образом, симметрия относительно плоскости, пересекающей гиперболоид, соответствует симметрии относительно прямой в плоскости Лобачевского. Собственное движение плоскости Лобачевского, соответствующее композиции симметрий относительно пары плоскостей, будет эллиптическим, параболическим или гиперболическим в зависимости от расположения прямой пересечения плоскостей (соответственно прямая пересекает гиперболоид, прямая принадлежит конусу, прямая лежит вне конуса).

Пусть плоскости $[x, a_1] = 0$ и $[x, a_2] = 0$ пересекаются по прямой, содержащей вектор b, т. е. $[b, a_1] = [b, a_2] = 0$. Тогда плоскость $[x, b] = p$ переходит в себя при симметриях относительно этих плоскостей. В самом деле, при таких симметриях вектор x переходит в вектор $x' = x + \lambda a_i$, а значит, $[x', b] = [x, b]$. Следовательно, композиция симметрий относительно плоскостей $[x, a_1] = 0$ и $[x, a_2] = 0$ переводит плоскость $[x, b] = p$ в себя. Это означает, что окружность, орицикл и гиперцикл представляют собой сечение гиперболоида плоскостью $[x, b] = p$, где вектор b соответственно лежит внутри конуса, принадлежит конусу, лежит вне конуса.

Задачи к главе 5

5.1. Докажите, что симметрия относительно гиперплоскости $(x, a) = 0$ задается формулой

$$x \mapsto x - 2\frac{(x, a)}{(a, a)}a.$$

5.2. Линейное преобразование A переводит любую пару ортогональных прямых в пару ортогональных прямых. Докажите, что A — композиция гомотетии $x \mapsto kx$ и изометрии.

5.3. Докажите, что любое собственное движение пространства $\mathbb{R}^3$, имеющее неподвижную точку, можно представить в виде композиции двух симметрий относительно прямых.

5.4. Пусть изометрия f пространства $\mathbb{R}^n$ оставляет начало координат на месте. В таком случае множество неподвижных точек образует линейное подпространство некоторой размерности s. Докажите, что

изометрию f можно представить в виде композиции $n-s$ симметрии относительно гиперплоскостей, но нельзя представить в виде композиции меньшего числа симметрий.

5.5. Пусть отображение $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ многозначное, т. е. оно сопоставляет точке одну или несколько точек и известно, что если $X_1 \in f(X)$ и $Y_1 \in f(Y)$, где $|XY| = 1$, то $|X_1Y_1| = 1$ (т. е. f сохраняет расстояние 1). Докажите, что f — однозначное отображение.

5.6. Приведите пример изометрии $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ и ограниченного множества $A \subset \mathbb{R}^2$, для которых $f(A) \subset A$, но $f(A) \neq A$.

5.7. Приведите пример непустого множества A, которое можно представить в виде объединения двух непересекающихся подмножеств, изометричных A.

Сферическая геометрия

Радиус сферы R предполагается равным 1; a, b, c — длины сторон сферического треугольника, α, β, γ — углы сферического треугольника.

5.8. Докажите, что $a + b + c < 2\pi$.

5.9. Найдите углы *автополярного* треугольника, т. е. сферического треугольника, совпадающего с полярным к нему треугольником.

5.10. Существует ли отображение области сферы на область плоскости, переводящее отрезки сферических прямых в отрезки евклидовых прямых?

5.11. Докажите, что для любого сферического треугольника существуют вписанная и описанная окружности.

5.12. Докажите, что а) медианы, б) высоты сферического треугольника пересекаются в одной точке.

5.13. Докажите, что площадь сферического круга радиуса r равна $4\pi\sin^2(r/2)$.

5.14. Докажите, что

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}}, \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}},$$

где $p = (a+b+c)/2$.

5.15. Докажите, что

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\dfrac{a+b}{2}}{\cos\dfrac{c}{2}}\sin\frac{\gamma}{2}, \quad \sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\cos\dfrac{a-b}{2}}{\cos\dfrac{c}{2}}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

5.16. Пусть $S = \alpha + \beta + \gamma - \pi$. Докажите, что

а) $2\sin\dfrac{S}{2}=\dfrac{\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{\cos\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{b}{2}\cos\dfrac{c}{2}}$;

б) $\operatorname{tg}^2\dfrac{S}{4}=\operatorname{tg}\dfrac{p}{2}\operatorname{tg}\dfrac{p-a}{2}\operatorname{tg}\dfrac{p-b}{2}\operatorname{tg}\dfrac{p-c}{2}$.

5.17. Докажите, что в сферическом треугольнике с прямым углом γ выполняются соотношения $\operatorname{tg}a=\operatorname{tg}\alpha\sin b$ и $\operatorname{tg}a=\operatorname{tg}c\cos\beta$.

5.18. Пусть r — радиус вписанной окружности сферического треугольника. Докажите, что

$$\operatorname{tg}r=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}}.$$

5.19. Пусть $\bar{R}$ — радиус описанной окружности сферического треугольника. Докажите, что

$$\operatorname{ctg}\bar{R}=\sqrt{\frac{\sin(\alpha-s)\sin(\beta-s)\sin(\gamma-s)}{\sin s}},$$

где $s=(\alpha+\beta+\gamma-\pi)/2$.

5.20. а) Возьмем отрезок сферической прямой длины α и рассмотрим поляры всех сферических прямых, пересекающих данный отрезок. Докажите, что рассматриваемые точки заметают множество площади 4α.

б) Дано несколько отрезков сферических прямых, сумма длин которых меньше π. Докажите, что существует сферическая прямая, не пересекающая ни одного из данных отрезков.

Модели геометрии Лобачевского

5.21. Докажите, что точке z в модели Пуанкаре в единичном круге соответствует точка $\dfrac{2z}{|z|^2+1}$ в модели Клейна.

5.22. Докажите неравенство треугольника в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости.

5.23. Найдите минимальное гиперболическое расстояние от точки $(x,\,y)$ верхней полуплоскости до луча Oy.

5.24. Докажите, что все точки евклидовой прямой $y=kx$, лежащие в верхней полуплоскости, равноудалены от гиперболической прямой Oy.

5.25. Докажите, что все собственные движения модели Пуанкаре в единичном круге имеют вид $z\mapsto\dfrac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$, где a, b — такие комплексные числа, что $|a|^2-|b|^2=1$.

5.26. Докажите, что если все углы гиперболического многоугольника меньше π, то он выпуклый.

Гиперболическая элементарная геометрия

5.27. Докажите, что соотношение $e^{-a/c} = \operatorname{tg}(\alpha/2)$ эквивалентно соотношениям $\operatorname{ch}\left(\frac{a}{c}\right)\sin\alpha = 1$, $\operatorname{sh}\left(\frac{a}{c}\right)\operatorname{tg}\alpha = 1$ и $\operatorname{th}\left(\frac{a}{c}\right) = \cos\alpha$.

5.28. Докажите соотношение $e^{-a/c} = \operatorname{tg}(\alpha/2)$, используя одну из моделей Пуанкаре.

5.29. Докажите, что стороны и углы треугольника с прямым углом γ связаны следующими соотношениями: $\operatorname{sh} a = \operatorname{sh} c \sin\alpha$, $\operatorname{th} b = \operatorname{th} c \cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta = \operatorname{ch} c$, $\cos\alpha = \operatorname{ch} a \sin\beta$.

5.30. Докажите, что стороны и углы треугольника связаны следующими соотношениями:

а) $\operatorname{ch} a \sin\beta = \operatorname{ch} b \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma$;

б) $\operatorname{ch} a = \dfrac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$.

5.31. В модели Клейна сторона гиперболического угла проходит через центр круга Δ. Докажите, что если этот угол острый, то его величина меньше величины соответствующего евклидова угла.

5.32. Докажите, что треугольник и круг — выпуклые фигуры.

5.33. Докажите, что если соответственные углы двух треугольников равны, то равны и сами треугольники.

5.34. Докажите, что ортогональная проекция одной из сторон острого угла на другую сторону представляет собой ограниченное множество.

5.35. а) Докажите, что при $\alpha < (n-2)\pi/n$ существует правильный n-угольник, все углы которого равны α и все стороны которого равны.

б) Докажите, что если a и r — сторона и радиус вписанной окружности правильного n-угольника с углом α, то

$$\operatorname{ch} r = \frac{\cos(\alpha/2)}{\sin(\pi/n)}, \qquad \operatorname{ch}\frac{a}{2} = \frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\alpha/2)}.$$

в) При каких n существует правильный n-угольник с углом $\alpha = 2\pi/n$ (т. е. с суммой углов 2π)?

5.36. Три угла четырехугольника равны $\pi/2$, а четвертый угол равен γ. Найдите γ, если известны длины a и b сторон, соединяющих прямые углы.

5.37. Вычислите площадь треугольника с вершинами 1, -1, ∞ в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости, записав ее в виде двойного интеграла.

5.38. Докажите, что если $w = \dfrac{z-i}{z+i}$, то

$$\frac{|dz|}{\operatorname{Im} z} = \frac{2|dw|}{1-|w|^2}.$$

5.39. Докажите, что в модели Клейна элемент длины имеет вид

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 - (x\,dy - y\,dx)^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

5.40. а) Докажите, что в моделях Пуанкаре в верхней полуплоскости и в единичном круге площадь бесконечно малого прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат, равна $\frac{dx\,dy}{y^2}$ и $\frac{4dx\,dy}{(1-(x^2+y^2))^2}$ соответственно.

б) Рассмотрим в модели Клейна бесконечно малый прямоугольник, образованный линиями $\rho = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$, где ρ, φ — полярные координаты. Докажите, что длины его сторон равны $\frac{d\rho}{1-\rho^2}$ и $\frac{\rho d\varphi}{\sqrt{1-\rho^2}}$.

5.41. Докажите, что площадь круга радиуса r равна $4\pi \operatorname{sh}^2\left(\frac{r}{2}\right)$.

5.42. Докажите, что длина средней линии гиперболического треугольника меньше половины длины противоположной стороны.

5.43. Рассмотрим выпуклый четырехугольник $ABCD$ с прямыми углами A, B, C и выберем на отрезке CD точку P так, что $|BP| = |AD|$. Докажите, что лучи BP и AD параллельны.

5.44. а) Докажите, что перпендикуляр, восставленный из середины стороны AB треугольника ABC, перпендикулярен прямой, соединяющей середины сторон AC и BC.

б) Пусть $X \mapsto X'$ — изометричное отображение одной прямой на другую. Докажите, что середины отрезков XX' либо совпадают, либо лежат на одной прямой.

5.45. Докажите, что в одной точке пересекаются а) биссектрисы треугольника; б) медианы треугольника; в) высоты остроугольного треугольника.

5.46 (Гиперболическая теорема Менелая). Прямая l пересекает стороны BC, CA и AB треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что

$$\frac{\operatorname{sh}|AC_1|}{\operatorname{sh}|C_1B|} \cdot \frac{\operatorname{sh}|BA_1|}{\operatorname{sh}|A_1C|} \cdot \frac{\operatorname{sh}|CB_1|}{\operatorname{sh}|B_1A|} = 1.$$

5.47 (Гиперболическая теорема Чевы). На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1. Докажите, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих эквивалентных соотношений:

а) $\frac{\sin ACC_1}{\sin C_1CB} \cdot \frac{\sin BAA_1}{\sin A_1AC} \cdot \frac{\sin CBB_1}{\sin B_1BA} = 1$;

б) $\dfrac{\operatorname{sh}|AC_1|}{\operatorname{sh}|C_1B|}\cdot\dfrac{\operatorname{sh}|BA_1|}{\operatorname{sh}|A_1C|}\cdot\dfrac{\operatorname{sh}|CB_1|}{\operatorname{sh}|B_1A|}=1.$

5.48. Пусть числа $\varphi_1,\ldots,\varphi_n\in[0,\pi)$ таковы, что их сумма меньше $(n-2)\pi$. Докажите, что существует гиперболический n-угольник с углами $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$.

В задачах 5.49—5.51 $p=\dfrac{a+b+c}{2}$.

5.49. Докажите, что

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\operatorname{sh}(p-b)\operatorname{sh}(p-c)}{\operatorname{sh}b\operatorname{sh}c},\qquad \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\operatorname{sh}p\operatorname{sh}(p-a)}{\operatorname{sh}b\operatorname{sh}c}.$$

5.50. Докажите, что площадь $S=\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$ гиперболического треугольника можно вычислять по следующим формулам:

а) $2\sin\dfrac{S}{2}=\dfrac{\sqrt{\operatorname{sh}p\operatorname{sh}(p-a)\operatorname{sh}(p-b)\operatorname{sh}(p-c)}}{\operatorname{ch}\dfrac{a}{2}\operatorname{ch}\dfrac{b}{2}\operatorname{ch}\dfrac{c}{2}}$;

б) $\operatorname{tg}^2\dfrac{S}{4}=\operatorname{th}\dfrac{p}{2}\operatorname{th}\dfrac{p-a}{2}\operatorname{th}\dfrac{p-b}{2}\operatorname{th}\dfrac{p-c}{2}$.

5.51. Пусть r — радиус вписанной окружности треугольника. Докажите, что

$$r=\sqrt{\frac{\operatorname{sh}(p-a)\operatorname{sh}(p-b)\operatorname{sh}(p-c)}{\operatorname{sh}p}}.$$

5.52. Пусть R — радиус описанной окружности треугольника (если она существует). Докажите, что

$$\operatorname{th}R=\sqrt{\frac{\sin(S/2)}{\sin(\alpha+S/2)\sin(\beta+S/2)\sin(\gamma+S/2)}},$$

где $S=\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$.

5.53. В выпуклом гиперболическом четырехугольнике $ABCD$ углы A и B прямые, а лучи AB и DC параллельны. Докажите, что $e^{|CD|}=\dfrac{\operatorname{sh}|AD|}{\operatorname{sh}|BC|}$.

5.54. Выпуклый гиперболический четырехугольник $ABCD$ таков, что лучи AB и DC параллельны и лучи AD и BC тоже параллельны. Докажите, что $|AB|+|BC|=|AD|+|DC|$.

5.55. Пусть $ABCD$ — выпуклый гиперболический четырехугольник, для которого $|BA|+|AD|=|BC|+|CD|$. Докажите, что биссектрисы внешних углов A и C и биссектрисы внутренних углов B и D принадлежат одному пучку прямых.

Три типа собственных движений плоскости Лобачевского

5.56. Докажите, что любую пару параллельных прямых можно движением перевести в любую другую пару параллельных прямых.

5.57. Докажите, что в модели Клейна любой пучок прямых соответствует семейству евклидовых прямых, имеющих общую точку (лежащую внутри, на границе или вне круга).

5.58. Докажите, что все орициклы попарно конгруэнтны.

5.59. Найдите длину дуги AB орицикла, если известно расстояние d между точками A и B.

5.60. Докажите, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника принадлежат одному пучку прямых.

5.61. Докажите, что высоты треугольника принадлежат одному пучку.

5.62. Точка C перемещается по дуге AB окружности, орицикла или гиперцикла. Докажите, что при этом величина $\alpha + \beta - \gamma$ не изменяется (α, β и γ — углы треугольника ABC).

5.63. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ противоположные стороны попарно равны. Докажите, что противоположные стороны этого четырехугольника лежат на расходящихся прямых.

5.64. Изометрия f плоскости Лобачевского такова, что расстояние между точками X и $f(X)$ одно и то же для всех X. Докажите, что f — тождественное преобразование.

5.65. Преобразование f плоскости Лобачевского таково, что оно увеличивает расстояние между двумя любыми точками X и Y в одно и то же число раз k, т. е. $d(f(X), f(Y)) = kd(X, Y)$. Докажите, что $k = 1$, т. е. f — изометрия.

Глава 6

Бесконечномерный мир

Здесь будет кратко рассказано о бесконечномерной геометрии и ее приложениях к теориям линейных уравнений, линейных неравенств и квадратичных функций.

§6.1. Основные определения

Пространства, рассматриваемые в этой главе, наделены двумя структурами — линейностью и топологией; размерность их может быть и бесконечной.

Определение. Множество X с выделенной системой подмножеств τ называется *топологическим пространством* и обозначается (X, τ), если система τ удовлетворяет следующим аксиомам: 1) $\varnothing$ и X принадлежат τ; 2) объединение любого семейства множеств из τ принадлежит τ; 3) пересечение любого конечного числа множеств из τ принадлежит τ.

Сама система τ при этом называется *топологией*, множества из τ — *открытыми* множествами, а если множество из τ содержит некоторую точку x, оно называется *окрестностью точки* x. Топологическое пространство (X, τ) называется *хаусдорфовым*, если для любых двух различных точек x, $y \in X$ найдутся такие их окрестности V_1 и V_2, что $V_1 \cap V_2 = \varnothing$.

Важнейшие топологические понятия, с которыми нам придется иметь дело, — замкнутость, непрерывность, компактность. Напомним определения.

Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Подмножество C пространства X называется *замкнутым*, если дополнение к нему открыто. Замыканием $\mathrm{Cl}(A, X)$ (или $\mathrm{Cl}\, A$, если ясно, о каком множестве X идет речь), называется наименьшее замкнутое множество, содержащее A. Множество $X_1 \subset X$ называют *всюду плотным*, если $\mathrm{Cl}\, X_1 = X$. Пусть (Y, ϑ) — другое топологическое пространство. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *непрерывным*, если прообраз любого открытого множества из Y открыт в X. Топологическое пространство называется *компактным*, если из любого открытого покрытия (т. е. покрытия пространства открытыми множествами) можно выбрать конечное подпокрытие.

Определение. а) Линейное (векторное) пространство[1] X называется *векторным топологическим пространством*, если в нем введена топология, при которой сложение и умножение на число являются непрерывными операциями. Векторное топологическое пространство X называется *локально выпуклым*, если оно хаусдорфово и любая окрестность любой точки содержит выпуклую окрестность этой точки.

Совокупность непрерывных линейных функционалов на X называется *сопряженным пространством* и обозначается X^*. Топология на X^* может быть определена по-разному, слабейшая топология задается открытыми множествами $V(x, a) = \{x^* \mid \langle x^*, x\rangle < a\}$ (здесь $\langle x^*, x\rangle$ — значение функционала x^* на элементе x), их пересечениями в конечном числе и объединениями в любом числе.

б) Пространство X называется *нормированным* (и обозначается $(X, \|\cdot\|)$), если определена функция $\|\cdot\|\colon X \to \mathbb{R}$ (называемая *нормой*), удовлетворяющая следующим аксиомам:

1) $\|x\| \geqslant 0\ \forall x \in X,\ \ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2) $\|ax\| = |a|\|x\|\ \forall x \in X,\ \ a \in \mathbb{R}$;

3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|\ \forall x,\, y \in X$.

в) Пространство X называется *предгильбертовым* (и обозначается $(X, (\cdot, \cdot))$), если на $X \times X$ определена функция $(\cdot, \cdot)\colon X \times X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим аксиомам:

1) $(x, x) \geqslant 0\ \forall x \in X$, $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2) $(x, y) = (y, x)\ \forall x,\, y \in X$;

3) $(ax, y) = a(x, y)\ \forall x,\, y \in X,\ a \in \mathbb{R}$;

4) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)\ \forall x,\, y,\, z \in X$.

Нормированное пространство становится метрическим, если определить расстояние d формулой $d(x, y) = \|x - y\|$. Введенное расстояние дает возможность определить так называемую *нормированную топологию* $\tau_{\|\cdot\|}$. Говорят, что множество U открыто в нормированной топологии, если для любого $x \in U$ найдется такое число $\varepsilon > 0$, что если $y \in X$ и $\|x - y\| < \varepsilon$, то y принадлежит U. Последовательность x_n называют *последовательностью Коши*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для всех $n,\, m > N$ выполняется неравенство $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Нормированное пространство $(X, \|\cdot\|)$ называют *полным*, если в нем любая последовательность Коши сходится. Нормированное пространство, полное относительно метрики d, называется *банаховым*. Нормированное пространство называется *сепарабельным*, если в нем существует счетное всюду плотное множество.

[1] Все пространства рассматриваются над полем вещественных чисел.

Предгильбертово пространство $(X, (\cdot, \cdot))$ становится нормированным, если положить $\|x\| = (x, x)^{1/2}$. Полное (относительно этой нормы) предгильбертово пространство называется *гильбертовым*.

Нам осталось привести еще одно важное определение.

Определение. Говорят, что векторные пространства X и Y находятся *в двойственности*, если существует билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon X \times Y \to \mathbb{R}$, обладающая тем свойством, что из соотношений $\langle x, y \rangle = 0\ \forall y \in Y$ следует, что $x = 0$, а из соотношений $\langle x, y \rangle = 0\ \forall x \in X$ следует, что $y = 0$.

Двойственность пространств X и Y задает *топологии* $\sigma(X, Y)$ и $\sigma(Y, X)$ в каждом из пространств X и Y соответственно. А именно, топология $\sigma(X, Y)$ порождена окрестностями $U(y, \varepsilon) := \{x \mid \langle x, y \rangle < \varepsilon\}_{y \in Y, \varepsilon > 0}$, их конечными пересечениями и объединениями в любом числе; топология $\sigma(Y, X)$ порождена окрестностями $V(x, \varepsilon) := \{y \mid \langle x, y \rangle < \varepsilon\}_{x \in X, \varepsilon > 0}$, их конечными пересечениями и объединениями в любом числе.

Топологии $\sigma(X, Y)$ и $\sigma(Y, X)$ превращают X и Y в *локально выпуклые линейные топологические пространства* (сопряженные друг с другом). Если X — нормированное пространство и X^* — его сопряженное, то топологию $\sigma(X, X^*)$ называют *слабой*, а $\sigma(X^*, X)$ — *слабой * топологией*.

Отметим, что любое гильбертово пространство $(X, (\cdot, \cdot))$ двойственно с самим собой относительно введенного там скалярного произведения.

Можно доказать, что любое локально выпуклое пространство, в частности нормированное пространство X, находится в двойственности со своим сопряженным X^* относительно билинейной формы $(x, x^*) \to \langle x^*, x \rangle$, где $x \in X$, $x^* \in X^*$, а $\langle x^*, x \rangle$ — значение функционала x^* на элементе x.

Теперь разумно перейти к примерам. Начнем с конечномерного случая. Взглянем на него с бесконечномерных позиций.

Примеры. 1. Координатное пространство $\mathbb{R}^n$. Представляется естественным рассматривать пространство $\mathbb{R}^n$ не в одиночку, а в паре с изоморфным ему (но тем не менее — другим) пространством $\mathbb{R}^{n*}$ линейных функционалов на $\mathbb{R}^n$. Пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^{n*}$ образуют двойственную пару. Векторы $x \in \mathbb{R}^n$ удобно считать векторами-столбцами, а $y \in \mathbb{R}^{n*}$ — векторами-строками. При этом, в частности, сама билинейная форма записывается как произведение матриц: $\langle x, y \rangle = y \cdot x$. Топология двойственности здесь — это обычная топология n-мерного пространства. Пересечения открытых полупространств могут образовывать открытые параллелепипеды, которые задают топологию привычным образом (множество $U \in \mathbb{R}^n$ объявляется открытым, если для любой точки

$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in U$ найдется такое число $\delta > 0$, что если $|x_i - \xi_i| < \delta$, $1 \leqslant i \leqslant n$, то $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$). Можно показать, что топология двойственности — единственная локально выпуклая топология в $\mathbb{R}^n$.

Мы не имеем возможности уделить здесь достаточное внимание банаховой геометрии. Скажем лишь несколько слов. Банахова геометрия возникает при определении в векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ метрики, инвариантной лишь относительно группы сдвигов. Единичный шар любого нормирования в $\mathbb{R}^n$ есть выпуклое замкнутое ограниченное центрально-симметричное тело B, и наоборот, всякое такое тело порождает нормирование: $\|x\|_B = \inf\{t > 0 \mid x/t \in B\}$. (Так определенная функция множества B называется *функцией Минковского множества* B. Таким образом, нормы в $\mathbb{R}^n$ — это функции Минковского центрально-симметричных компактов, у которых нуль есть внутренняя точка.) Все нормированные пространства над $\mathbb{R}^n$ банаховы. Вот интересная шкала нормирований в $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty, \qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|.$$

Банахова геометрия — это особый геометрический мир. В нем имеется много ярких результатов, но они достаточно далеки от основных сюжетов нашей книги.

Пространство $\mathbb{R}^n$ превращается в гильбертово пространство в том и только том случае, если скалярное произведение задается с помощью симметричной положительно определенной матрицы:

$$(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j, \; a_{ij} = a_{ji}, \qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j > 0 \quad \forall x \neq 0.$$

Единственное нормирование, инвариантное относительно всей группы изометрий векторного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, — это привычное нормирование $\|x\| = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{1/2}$

2. Существуют два сепарабельных бесконечномерных банаховых пространства, играющих особую роль: пространство

$$l_2 = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \mid \|x\| := \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} x_k^2 \right)^{1/2} < \infty \right\}$$

и пространство $C([0, 1])$, состоящее из непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций с нормой $\|x(\cdot)\| = \max_{t \in [0,1]} |x(t)|$.

Первое из этих пространств универсально для всех сепарабельных гильбертовых пространств (любое сепарабельное гильбертово

пространство изометрично некоторому подпространству l_2). Второе пространство универсально вообще для всех сепарабельных банаховых пространств — любое такое пространство изометрически вкладывается в пространство $C([0,\,1])$.

Приведем еще важный пример линейного топологического пространства.

3. Совокупность $C^\infty(\mathbb{T})$ бесконечно дифференцируемых 2π-периодических функций $x(\cdot)$ со сходимостью: $x_n(\cdot) \to x(\cdot)$, если $x_n^{(k)}(\cdot)$ для любого $k \geqslant 0$ равномерно сходится к $x^{(k)}(\cdot)$, доставляет пример линейного топологического пространства («основных функций»). Сопряженное пространство есть пространство обобщенных функций, играющих столь значительную роль в анализе.

Исторический комментарий. Теорию бесконечномерных линейных топологических, банаховых, гильбертовых пространств и линейных непрерывных операторов в них называют (линейным) *функциональным анализом*. Среди основателей функционального анализа — замечательные математики, представители всех крупнейших математических школ первой половины нашего столетия: Вольтерра, Пеано (Италия), Гильберт, Шмидт (Германия), Адамар, Фреше (Франция), Ф. Рисс, фон Нейман (Венгрия), Хелли, Хан (Австрия), Колмогоров, Гельфанд (СССР), Винер (США), Банах, Штейнгауз (Польша). (Наш список, разумеется, не полон, но подробное изложение предыстории функционального анализа увело бы нас слишком далеко, и мы ограничиваемся этим перечнем.)

Основными стимулами к развитию линейного функционального анализа, явившегося синтезом классического анализа, линейной алгебры и геометрии, были квантовая механика, теория линейных интегральных уравнений и теория самосопряженных дифференциальных операторов.

Понятия топологического пространства и компактности сформировались под воздействием исследований Кантора, Хаусдорфа, Александрова, Урысона и др.; гильбертово пространство было введено Гильбертом как пространство l_2, а затем Шмидтом, фон Нейманом и другими — аксиоматически; банаховы пространства были определены Хелли (в частном случае пространств последовательностей), а затем Банахом и Винером; линейные топологические пространства появились впервые у Колмогорова, локально выпуклые линейные топологические пространства ввел фон Нейман. Двойственность линейных пространств, являющаяся исходным пунктом теории двойственности в выпуклом анализе, подробно изложена в мемуарах Бурбаки.

Переходим теперь к *выпуклому анализу*, который с определенной точки зрения можно рассматривать, как главу аффинной геометрии.

Выпуклый анализ — термин, появившийся совсем недавно, где-то в начале шестидесятых годов XX в. Так стали называть раздел математики, занимающий промежуточное положение между анализом и геометрией, в котором исследуются выпуклые объекты: выпуклые множества, функции и экстремальные задачи. (Сама же выпуклость вошла в математику с незапамятных времен. С понятием выпуклости оперировал еще Архимед.)

Теория выпуклых тел интенсивно развивалась в XIX в. Замечательные результаты о выпуклых многогранниках были получены Коши, но лишь Минковский в конце позапрошлого века обозначил основные контуры нового раздела — *выпуклой геометрии*. В тридцатые годы XX в. выпуклая геометрия стала модной. У нас,

в частности, она стала любимым предметом занятий школьных математических кружков (благодаря, главным образом, Шнирельману и Люстернику). Выпуклой геометрии в тридцатые—сороковые годы было посвящено множество брошюр и книг. Потом интерес стал несколько спадать, но в шестидесятые годы вновь возобновился.

Как раз в те годы (начиная с конца сороковых годов), была понята огромная роль выпуклости в задачах на экстремум. Родились линейное и выпуклое программирования, стала развиваться математическая экономика, в значительной мере основанная на идеях выпуклости, и это привело к рождению нового направления, названного выпуклым анализом. «Место действия» объектов выпуклого анализа — локально выпуклые (аффинные) пространства, построенные на базе двойственности.

Один из важнейших тезисов выпуклого анализа состоит в следующем: *основные объекты выпуклого анализа (выпуклые множества, выпуклые функции, а также выпуклые экстремальные задачи) допускают двойное описание — геометрическое и аналитическое, одно — в основном, другое — в двойственном пространстве.*

§6.2. Формулировки теорем

После этого краткого вступления сформулируем бесконечномерные аналоги тех теорем, которые обсуждались в гл. 2 (и были доказаны в двумерном случае — см. теоремы 1—5).

В теореме 1 описываются свойства решений линейных уравнений. Пусть X — (сепарабельное) гильбертово пространство. Линейный непрерывный оператор $A\colon X \to X$ называется *компактным*, если замыкание образа единичного шара (при действии этого оператора) компактно в X. Оператор $I - A$ обозначим через Λ. По оператору A соотношением $(A^*x,\, y) = (x,\, Ay)$ определим двойственный оператор.

Теорема 1. а) *Пусть X — гильбертово пространство и $A\colon X \to X$ — компактный оператор. Тогда либо уравнение $\Lambda x = \xi$ разрешимо для любого ξ, либо* $\operatorname{Ker}\Lambda \neq \{0\}$, *т. е. однородное уравнение $\Lambda x = 0$ имеет ненулевое решение,* (альтернатива Фредгольма).

б) *Уравнение $\Lambda x = \xi$ разрешимо тогда и только тогда, когда ξ ортогонально ядру $I - A^*$, где A^* — сопряженный оператор.*

Обсудим следствие теоремы 1 в конечномерном случае. Из утверждения «а» вытекает хорошо известный результат: *либо система n линейных уравнений с n неизвестными разрешима при любой правой части, либо однородное уравнение имеет ненулевое решение.* Утверждение б) — это не что иное, как соотношение двойственности для подпространств в $\mathbb{R}^n$: они описываются, с одной стороны, как образ линейного оператора, а с другой — как ортогональное дополнение к ядру сопряженного оператора.

Переходим к теоремам отделимости. Пусть X и Y — пространства в двойственности. (Если X локально выпуклое пространство, оно рассматривается нами в двойственности со своим сопряженным.) Множе-

ство $\Gamma_{y,b} \subset X$, задаваемое уравнением $\Gamma_{y,b} := \{x \mid \langle x, y\rangle = b\}$, называется *гиперплоскостью*. Множества $\Pi^-_{y,b} = \{x \mid \langle x, y\rangle \leqslant b\}$ и $\Pi^+_{y,b} = \{x \mid \langle x, y\rangle \geqslant \geqslant b\}$ называются *полупространствами* (ограниченными гиперплоскостью $\Gamma_{y,b}$). Говорят, что точка $\bar{x}$ *строго отделена* от непустого выпуклого множества $A \subset X$, если (на языке геометрии) существует такая гиперплоскость, что множество A лежит в одном полупространстве, ограниченном этой полуплоскостью, а точка $\bar{x}$ — в другом (причем самой гиперплоскости она не принадлежит). А на алгебраическом языке то же самое означает, что существует такой элемент $y \in Y$, что

$$\langle \bar{x}, y\rangle > \sup\{\langle x, y\rangle \mid x \in A\}.$$

Если же существует такой элемент $y \in Y$, $y \neq 0$, такой, что выписанное неравенство нестрогое, то говорят, что точка $\bar{x}$ *отделена* от множества A.

Теорема 2 (первая теорема отделимости). *Пусть X — локально выпуклое пространство и открытое выпуклое множество $U \subset X$ не содержит начала координат. Тогда существует гиперплоскость, проходящая через начало координат, не пересекающаяся с U (т. е. нуль может быть отделен от U).*

Теорема 3 (вторая теорема отделимости). *В локально выпуклом пространстве точка, не принадлежащая непустому замкнутому выпуклому множеству, может быть строго отделена от этого множества.*

Пусть X и Y — пространства в двойственности, $\{(y_\alpha, b_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ — семейство элементов из $Y \times \mathbb{R}$. Систему $\langle x, y_\alpha\rangle = 0$ $(\leqslant 0)$ назовем системой однородных равенств (неравенств); а систему $\langle x, y_\alpha\rangle = b_\alpha$ $(\leqslant b_\alpha)$ — системой неоднородных равенств (неравенств).

Совокупность $K \subset X$ называется *выпуклым конусом*, если для любых x_1 и x_2 из K их коническая комбинация $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$, принадлежит K.

Теорема 4 (описание систем равенств и неравенств). *Решением произвольной системы однородных равенств являются замкнутые подпространства и только они*; *решением системы однородных неравенств являются выпуклые замкнутые конусы и только они*; *решением системы неоднородных равенств — замкнутые линейные многообразия и только они*; *решением системы неоднородных неравенств — выпуклые замкнутые множества и только они.*

В этой теореме вскрыты те явления двойственности, о которых говорилось во вводной части (см. § 6.1). Скажем, понятие (замкнутого) аффинного многообразия можно определять двояким образом: геометрически, как объединение точек в аффинном пространстве, которое

вместе с двумя точками содержит всю прямую, проходящую через эти две точки (и является замкнутым множеством), или аналитически, как решение системы неоднородных равенств (т. е., что равносильно, как пересечение системы гиперплоскостей). Аналогично любое выпуклое замкнутое множество есть (геометрически) такое замкнутое множество (объединение точек), которое вместе с любыми двумя точками содержит весь отрезок, соединяющий эти точки, или (аналитически) решение системы линейных неоднородных неравенств (т. е. пересечение системы полупространств).

Все эти объекты (подпространства, аффинные многообразия, выпуклые множества) раньше изучались нами как бы сами по себе, а теперь они рассматриваются совместно с их «двойниками» в двойственном пространстве.

Теорема 5 (Крейн—Мильман). *Выпуклое компактное множество в локально выпуклом пространстве есть выпуклое замыкание своих крайних точек.*

В конечномерном случае можно вместо слов «выпуклое замыкание» употребить слова «выпуклая оболочка».

И в заключение сформулируем еще одну теорему, конечномерный вариант которой рассматривался в гл. 4.

Линейный непрерывный оператор $A\colon X \to X$, переводящий гильбертово пространство $(X, (\cdot, \cdot))$ в себя, называется *самосопряженным*, если $(Ax, y) = (x, Ay)$ для любых x и y из X. Ортонормированная система e_i (конечная или бесконечная) называется *базисом* в X, если для любого $x \in X$ справедливо разложение $x = \sum\limits_i (x, e_i)e_i$. Вектор $z \in X$, $z \neq 0$, называется *собственным вектором* оператора A, если существует такое число λ, что $Az = \lambda z$.

Теорема 6 (Гильберт). *Пусть X — сепарабельное гильбертово пространство и $A\colon X \to X$ — компактный самосопряженный оператор. Тогда существует базис в X, состоящий из собственных векторов оператора A.*

§6.3. Доказательства теорем

Мы сначала докажем теорему 2, затем извлечем из нее ряд следствий (в частности, теоремы 3 и 4), потом докажем теорему 1 и, наконец, теоремы Крейна—Мильмана и Гильберта.

Доказательство теоремы 2. Назовем максимальное (т. е. не содержащееся ни в каком собственном подпространстве) подпростран-

ство, отличное от X, *гиперплоскостью*. Основной шаг доказательства тот же, что в двумерном случае. Сформулируем его в виде леммы.

Лемма. *Пусть X — локально выпуклое пространство, U — открытое выпуклое множество и L — векторное подпространство, не пересекающееся с U. Тогда либо L — гиперплоскость, либо существует такая точка $\eta \in X$, что векторное подпространство, натянутое на L и η, не пересекается с U.*

Действительно, возьмем линейную оболочку подпространства L и любой точки ξ из U. Обозначим ее L_0. Возможно одно из двух: либо получится все пространство (и тогда L — гиперплоскость), либо найдется точка η, не принадлежащая этой линейной оболочке. Натянем на векторы ξ и η двумерную плоскость, введем в ней евклидову структуру и рассмотрим окружность S в этой плоскости. Не ограничив себя в общности, можно считать, что векторы ξ и η лежат на этой окружности и ортогональны. Полупространство $L_- = \{x = t\xi + z \,|\, t < 0,\ z \in L\}$, очевидно, не пересекается с U (иначе и подпространство L пересекалось бы с U), а полупространство $L_+ = \{x = t\xi + z \,|\, t > 0,\ z \in L\}$ пересекается, ибо $\xi \in U$. Начнем «поворачивать» L_0 вокруг L, т. е. рассмотрим линейную оболочку L и вектора $(\cos\varphi, \sin\varphi)$. Соответствующее подпространство обозначим L_φ. Пусть $\hat{\varphi}$ — верхняя грань тех значений φ, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, при которых L_φ пересекается с U. Нетрудно понять, что $L_{\hat{\varphi}}$ не пересекается с U.

А дальше применим так называемую «трансфинитную индукцию». (В конечномерном случае — обычную индукцию).

Пусть $\mathcal{L}$ — совокупность всех подпространств X, не пересекающихся с U. Упорядочим элементы из $\mathcal{L}$ по включению. Применив лемму Цорна, получаем, что существует максимальный элемент. Из леммы следует, что этот элемент — гиперплоскость. В силу того что замыканием подпространства является подпространство, максимальный элемент не может быть всюду плотным (иначе он пересекался бы с U), а значит, он замкнут. Итак, максимальный элемент — замкнутое подпространство, не совпадающее с X. Остается лишь заметить, что такое подпространство и есть гиперплоскость. (Действительно, взяв элемент ζ, не принадлежащий замкнутой гиперплоскости, построим линейный функционал, обращающийся на гиперплоскости в нуль и равный единице на ζ. Тогда объединение единичного и минус единичного множеств уровня функционала — замкнутое множество, не содержащее нуль, значит, имеется окрестность нуля, не пересекающаяся с этим множеством. Следовательно, функционал ограничен, т. е. непрерывен.) Теорема 2 доказана. □

Из доказанной теоремы сразу следует, что *два непересекающихся выпуклых множества, одно из которых открыто, можно разделить гиперплоскостью.*

Действительно, если множество U выпукло и открыто, а V выпукло и они не пересекаются, то множества $U \setminus V := \{x = u - v \mid u \in U,\, v \in V\}$ открыто и не пересекается с началом координат. Применение теоремы 3 сразу приводит к цели: сдвиг гиперплоскости, разделяющей $U \setminus V$ и нуль, разделяет U и V.

Из последнего результата следует вторая теорема отделимости.

Доказательство теоремы 3. По условию некоторая точка не принадлежит замкнутому выпуклому множеству. Но тогда (по определению локально выпуклого пространства) существует выпуклая окрестность точки, не пересекающаяся со множеством. По доказанному выше их можно разделить гиперплоскостью. Она строго отделяет точку от множества, что и доказывает теорему. □

В формулировке теоремы 2 открытое множество не содержит начала координат. Фактически безо всякого изменения доказательства можно было бы построить гиперплоскость (проходящую через начало координат), содержащую *любое подпространство*, не пересекающееся с открытым множеством. А отсюда немедленно следует теорема Хана—Банаха о продолжении линейного функционала в нормированном пространстве (и даже в локально выпуклом) и, следовательно, нетривиальность пространства, сопряженного к нормированному. (Общеизвестное доказательство теоремы Хана—Банаха, восходящее к Хелли, является аналитическим, но в нем содержится тот же самый геометрический элемент, что был использован нами: «вращение» подпространства вокруг подпространства «на единицу меньшей размерности».)

Отметим еще одно следствие. *Аннулятором* подпространства $L \subset X$ называется множество

$$L^\perp := \{y \in Y \mid \langle x,\, y\rangle = 0 \ \forall x \in L\}.$$

В гильбертовом случае элемент аннулятора — это такой вектор $y \in X$, что $(x,\, y) = 0$ для любого $x \in L$, т. е. элемент ортогонального дополнения.

Операция, сопоставляющая замкнутому подпространству L его ортогональное дополнение $L^\perp$, есть одна из форм двойственности в евклидовых и гильбертовых пространствах.

Лемма о нетривиальности аннулятора. *Пусть X — локально выпуклое пространство и L — замкнутое собственное подпространство X. Тогда аннулятор L нетривиален* ($L^\perp \neq \{0\}$).

Для доказательства надо взять элемент, не принадлежащий подпространству, и строго отделить его от этого подпространства.

Доказательство теоремы 4. Здесь уж совсем ничего не отличается от двумерного случая. Множества $\langle x,\, y_\alpha\rangle = b_\alpha$ ($\leqslant b_\alpha$) замкнуты и являются подпространствами, конусами, аффинными многообразиями,

выпуклыми множествами, а значит, и их пересечения замкнуты и являются подпространствами, конусами и т. д. В обратную сторону докажем теорему для выпуклых множеств. Если выпуклое замкнутое множество состоит из всех точек пространства X, то его элементы удовлетворяют неравенству $\langle x, 0\rangle \leqslant 0$. Пусть оно не совпадает с X. Тогда по первой теореме отделимости оно содержится в некотором полупространстве (надо отделить точку, не принадлежащую множеству, от самого множества). Далее следует рассмотреть семейство *всех* полупространств, содержащих наше множество. Пересечение всех элементов этого семейства, разумеется, содержит наше множество. Более того, оно совпадает с ним, ибо если бы нашлась точка, содержащаяся в пересечении и не принадлежащая изначальному множеству, то, строго отделив эту точку от множества, мы пришли бы к противоречию. Теорема 4 доказана. □

Доказательство теоремы 1. Упоминалось, что все сепарабельные гильбертовы пространства изометричны l_2 или конечномерному евклидову пространству. Ввиду того что в пространстве l_2 имеется ортонормированный базис (состоящий, например, из векторов $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, где имеет все координаты вектора e_i, кроме i-й, равны нулю, а i-я координата равна единице), такой же ортонормированный базис существует и у любого замкнутого (бесконечномерного) подпространства гильбертова пространства. Обозначим такой базис снова буквами e_i. Тогда вектор $\sum\limits_i (x, e_i)e_i$ будет ортогональной проекцией вектора x на данное подпространство. Отметим еще, что оператор, сопряженный к компактному, компактен.

Доказательство теоремы 1 складывается из нескольких шагов.

Шаг 1. Образ пространства X при отображении Λ замкнут в X.

Действительно, пусть y принадлежит $\operatorname{Im}\Lambda$. Тогда найдется последовательность

$$y_n = \Lambda x_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad y_n \to y. \tag{6.1}$$

Всегда можно вычесть из вектора x_n его проекцию на $\operatorname{Ker}\Lambda$, и потому можно считать, что векторы x_n ортогональны $\operatorname{Ker}\Lambda$. При этом они ограничены по норме (иначе, поделив на $\|x_n\|$, мы из ограниченной последовательности $x_n/\|x_n\|$ выберем подпоследовательность, сходящуюся к вектору η, по норме равному единице, ортогональному $\operatorname{Ker}\Lambda$ и при этом принадлежащему $\operatorname{Ker}\Lambda$, что, разумеется, невозможно). Но тогда мы выберем такую подпоследовательность x_{n_k} такую, что Ax_{n_k} сходится, значит, x_{n_k} сходится, и поэтому y принадлежит образу пространства X. Утверждение доказано.

Шаг 2. Очевидна альтернатива: образ ΛX есть все пространство X или является подпространством в X. В последнем случае в силу дока-

занного на шаге 1 это подпространство замкнуто. Но тогда по лемме о нетривиальности аннулятора найдется такой элемент $y \in X$, $y \neq 0$, что $(x - Ax,\, y) = 0\ \forall x \in X$, т. е. $y = A^*y$, что и требовалось.

Ш а г 3. Пусть $\Lambda X = X$. Докажем, что $\operatorname{Ker}\Lambda = 0$.

Действительно, если существует такой элемент $x_1 \neq 0$, что $\Lambda x_1 = 0$, то построим последовательность таких элементов $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, что $\Lambda x_{k+1} = x_k$, $k \in \mathbb{N}$. Обозначим $L_k = \operatorname{Ker}\Lambda^k$. Получается бесконечная система расширяющихся подпространств (то, что $L_k \neq L_{k+1}$, следует из того, что x_{k+1} принадлежит $L_{k+1} \setminus L_k$). Выберем теперь последовательность единичных векторов $y_k \in L_k$, ортогональных L_{k-1}. Полагая $l > k$, получим

$$\|Ay_l - Ay_k\| \overset{\text{id}}{=} \|y_l - (y_k + \Lambda y_l - \Lambda y_k)\| \geqslant 1,$$

поскольку вектор $y_k + \Lambda y_l - \Lambda y_k$ принадлежит (по определению) L_{l-1}. Но тогда из этой последовательности нельзя выбрать сходящуюся подпоследовательность (что противоречит компактности A). Итак, $\operatorname{Im}\Lambda = X \implies \operatorname{Ker}\Lambda = \{0\}$.

Ш а г 4. Завершение доказательства.

Пусть ΛX есть собственное подпространство в X. Тогда (шаг 2) ядро оператора Λ^* нетривиально. Значит (шаг 3), образ $\Lambda^* X$ не есть все пространство X, а тогда (шаг 2) ядро оператора Λ нетривиально. Теорема доказана. □

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 5. Назовем опорным множеством к $C \in X$ такое замкнутое аффинное множество S, которое пересекается с C и обладает следующим свойством: если некоторая внутренняя точка отрезка $[x,\, y]$ из C лежит в S, то весь отрезок лежит в S. Докажем, что среди опорных множеств имеются одноточечные множества (опорные точки), а опорные точки — это по определению крайние точки.

Доказательство существования крайней точки проводится в два шага.

Ш а г 1. Существует опорная гиперплоскость.

Действительно, таковой будет, как легко понять, гиперплоскость $H = H(x^*) = \{x \mid \langle x^*,\, x\rangle = \max\limits_{x\in C}\langle x^*,\, x\rangle\}$ ($x^* \in X^*$ — любой вектор).

Ш а г 2. Применим трансфинитную индукцию. Рассмотрим *все* опорные множества, содержащиеся в H. Обозначим эту совокупность $\mathcal{S}$. Упорядочим элементы множества $\mathcal{S}$ по включению. Тогда по лемме Цорна найдется максимальная цепь $\mathcal{M}$. Пересечение всех опорных множеств из $\mathcal{M}$ (в силу максимальности) принадлежит $\mathcal{M}$. Остается показать, что это пересечение (обозначим его $\hat{S}$) состоит из одной точки. Если это пересечение содержит два элемента ξ и η, то мы разделим их функционалом $\hat{x}^*$ ($\langle\hat{x}^*,\, \xi\rangle < \langle\hat{x}^*,\, \eta\rangle$) и положим $\bar{S} := \hat{S} \cup \Gamma$,

где $\Gamma = \{x \mid \langle \hat{x}^*, x\rangle = \sup\limits_{x\in\hat{S}\cup C} \langle \hat{x}^*, x\rangle\}$. Это, очевидно, замкнутое множество, пересекающееся с C и, как нетрудно понять, опорное. Пришли к противоречию с максимальностью множества $\hat{S}$.

Остальное просто. Обозначим через $\operatorname{extr} C$ совокупность всех крайних точек множества C. Если замыкание множества $\operatorname{extr} C$ (обозначим его C') не совпадает с C (т. е. является собственным подмножеством в C), строго отделим точку из $C \setminus C'$ от C' функционалом $\bar{x}^*$ и, рассмотрев опорную гиперплоскость $H(\bar{x})$, найдем на ней крайнюю точку множества C, не принадлежащую C'. Пришли к противоречию. Теорема доказана. □

Нам осталось доказать еще теорему Гильберта. По сказанному выше можно считать, что X реализовано как l_2. Рассмотрим экстремальную задачу

$$|(Ax, x)| \to \max, \quad (x, x) \leqslant 1. \tag{6.2}$$

Пусть $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x^n = (x_k^n)_{k\in\mathbb{N}} \in l_2$. При этом

$$\sum_k (x_k^n)^2 \leqslant 1 \quad \forall n. \tag{6.3}$$

Диагональным процессом построим такую подпоследовательность n_l, что $x_k^{n_l} \to \bar{x}_k$. Из неравенства (6.3) выводится, что $\bar{x} = (\bar{x}_k)$ лежит в единичном шаре. Из компактности оператора A следует, что $\bar{x}$ — решение задачи (6.2). Разумеется, $\|\bar{x}\| = 1$.

А теперь — маленький геометрический фрагмент. Докажем, что $\bar{x}$ — собственный вектор. Если это не так, то через векторы $\bar{x}$ и $A\bar{x}$ проведем двумерную плоскость. Сечением единичной сферы гильбертова пространства этой плоскостью будет окружность, проходящая через вектор $\bar{x}$. Проведя в нашей плоскости перпендикуляр к $\bar{x}$ и взяв вектор $\bar{\xi}$ единичной длины на этом перпендикуляре, чуть возмутим вектор $\bar{x}$, рассмотрев векторы $e_\alpha = \bar{x}\cos\alpha + \bar{\xi}\sin\alpha$. Все эти векторы единичной длины, в то время как функция $f(\alpha) := (Ae_\alpha, e_\alpha)$ не имеет локального экстремума в нуле (ибо если вектор $\bar{x}$ не собственный, то $f'(0) = 2(A\bar{x}, \bar{\xi}) \neq 0$), а это противоречит определению $\bar{x}$.

Конец доказательства прост. Был построен первый собственный вектор. Обозначим его z^1, $Az^1 = \lambda_1 z^1$. При этом $|\lambda_1|$ — максимум в задаче (6.2). Рассмотрим ортогональное дополнение $X_1 = \{x \mid (x, z^1) = 0\}$. Оно инвариантно относительно оператора A: если $x \in X_1$, то $(Ax, z^1) = (x, Az^1) = (x, \lambda_1 z^1) = 0$, т. е. $Ax \in X_1$. Пространство X_1 снова гильбертово. Можно для него снова поставить задачу (6.2) и найти собственный вектор, если (Ax, x) не тождественно равно нулю и т. д. Далее возможно одно из двух: либо в какой-то момент на k-м шаге окажется,

что $(x,\, x) = 0\ \forall x \in X_k$, либо процесс будет идти бесконечно. В первом случае из нашего «геометрического» рассуждения следует, что $Ax = 0\ \forall x \in X_k$, и, выбрав базис в X_k, получим совместно с построенными собственными векторами базис в X. Во втором случае получим счетную систему собственных векторов $\{z^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ с ненулевыми (и убывающими по абсолютной величине) собственными числами. Замкнув линейную оболочку всех этих векторов, рассмотрим ортогональное дополнение к этой оболочке. На этом ортогональном дополнении Ξ по построению $(Ax,\, x) = 0\ \forall x \in \Xi$, т. е. A — нулевой оператор. Присоединив базис в Ξ к $\{z^k\}$, получим требуемый базис в X. Теорема доказана.

§6.4. Заключительный комментарий

Геометрия как наука родилась где-то на рубеже VIII—VII в. до н. э. Согласно легенде родоначальником геометрии, первым человеком, который пытался осознать, что такое доказательство, был ионийский купец Фалес. Ему приписывают первые теоремы, в частности, теорему о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника. Из великих геометров древности необходимо назвать еще Пифагора, Евклида, Архимеда и Аполлония. Пифагор был организатором первой научной школы (в которой — по преданию — доказана теорема, носящая его имя). Элементарная геометрия на плоскости и в пространстве была впервые изложена в «Началах» Евклида, теория измерения площадей и объемов создана Евдоксом (а вслед за тем Архимед разработал способы вычисления площади поверхности сферы и объема шара), теория конических сечений — Аполлонием и его предшественниками.

С началом эпохи Возрождения наука устремилась к новым рубежам. В XVII в. Ферма и Декарт построили алгебраические модели геометрии на плоскости, Дезарг и Паскаль стали разрабатывать начала проективной геометрии. Галилей, Кеплер и Ньютон начали создавать науку о природе. (С той поры геометрия стала языком естествознания. Обнаружилось, в частности, что траектории планет и брошенных под углом к горизонту тел описываются коническими сечениями.)

Воссоединение алгебры и геометрии привело (среди прочего) к рождению (в трудах Эйлера) аффинной геометрии и геометризации теории линейных уравнений. В начале прошлого века все это ознаменовалось фундаментальной теорией Фредгольма линейных уравнений в бесконечномерном пространстве.

Концепция евклидова пространства, претерпев со времен Евклида более чем двухтысячелетнюю эволюцию, привела, с одной стороны, к

понятию бесконечномерного гильбертова пространства, а с другой — к понятию гладкого (риманова) многообразия.

Теорема Гильберта о компактных квадратичных формах в гильбертовом пространстве — одна из крайних точек теории, исходный пункт которой — «Коники» Аполлония.

Многовековые размышления над пятым постулатом Евклида с одной стороны, развитие проективной и дифференциальной геометрии с другой и комплексного анализа с третьей привели Гаусса, Лобачевского, Бойяи, Бельтрами, Кэли, Клейна, Пуанкаре и других к осознанию, а потом и к доказательству непротиворечивости геометрии Лобачевского. Общая концепция Римана построения геометрических объектов, ныне называемых римановыми многообразиями, была дополнена эрлангенской программой Клейна. В итоге был выделен класс многообразий постоянной кривизны, объединяющий геометрии Евклида, Лобачевского и Римана. Геометрия Лобачевского оказалась важнейшей компонентой современного воззрения на окружающий нас мир: на ней базируется теория относительности.

Рождение в трудах Минковского выпуклой геометрии привело, с одной стороны, к возникновению линейного функционального анализа, а с другой — выпуклого анализа, являющегося базой теории экстремальных задач.

Обо всем этом мы старались рассказать в нашей книге.

Многих важных аспектов геометрии мы не затронули. В частности, у нас ничего не сказано о том, что происходило в геометрии за последние пятьдесят лет. А сдвиги, произошедшие в последнее время в геометрической науке, огромны. Обозревая эволюцию нашей науки в последние десятилетия, В. И. Арнольд пишет: «На высшем уровне современная математика и теоретическая физика вновь сливаются в одну науку. Геометрия векторных расслоений и связностей, симплектическая топология и классификация четырехмерных многообразий, теория узлов и кос, суперсимметрия и теория алгебр Ли, квантовые группы и более общие алгебры Хопфа, особенности гиперповерхностей и гиперкэлеровы структуры, асимптотика гипергеометрических интегралов и подсчет числа рациональных кривых на алгебраических поверхностях, нелинейные уравнения с частными производными и спектральная теория дифференциальных операторов — все эти области чистейшей математики (почти все принадлежащие геометрии! — *Прим. авт.*) оказываются разными аспектами квантовой теории поля».

Многие из этих достижений современной геометрии должны стать предметом изучения в дальнейших курсах геометрического содержания.

Дополнение

§ 1. Геометрия и физика

Брошенные тела движутся по параболам (Галилей и Ньютон)

Великая книга Природы написана языком геометрии.
Галилей

Родоначальником современного естествознания по праву считается Галилео Галилей. Он первый стал задавать Природе вопросы всерьез — впервые в истории науки он начал ставить физические эксперименты. Пуская тела скользить по отполированной наклонной плоскости и замеряя время по биению пульса, он открыл начальные законы механики.

Галилей совмещал научные исследования с преподаванием — он обучал математике студентов Пизанского, а затем Падуанского университета. Он восхищался Евклидом и Архимедом. Знал о теории конических сечений Аполлония. Соединив результаты эксперимента и математику, Галилей сумел описать траектории брошенных тел.

Завершенную теорию движения материальных тел дал Ньютон, переведя законы классической механики (и, в частности, законы Галилея) на язык математического анализа.

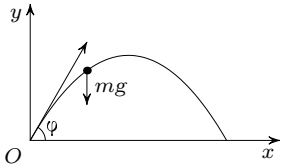


Рис. Д.1

Согласно законам механики Ньютона на брошенное тело массы m действует сила $F = -mg$ в обратном направлении к оси Oy, направленной вертикально вверх (по отношению к поверхности Земли, которую здесь считаем плоской: см. рис. Д.1). Следовательно, траектория $(x(t), y(t), z(t))$ тела, брошенного из начала координат под углом (углом бросания) φ к оси Ox в плоскости Oxy и имеющего начальную скорость v, согласно законам Ньютона удовлетворяет уравнениям

$$mx'' = 0, \quad my'' = -g, \quad mz'' = 0$$

и начальным данным $x(0) = y(0) = z(0) = 0$, $x'(0) = v\cos\varphi$, $y'(0) = v\sin\varphi$, $z'(0) = 0$.

Интегрируя эти уравнения, находим

$$x(t) = vt\cos\varphi, \quad y(t) = vt\sin\varphi - \frac{gt^2}{2}, \quad z(t) = 0,$$

откуда получаем уравнение для траектории брошенного тела:

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{x^2}{2v^2 \cos^2 \varphi}.$$

Получили уравнение параболы — одной из важнейших геометрических фигур, составляющих язык, на котором пишутся законы Природы.

Планеты движутся по эллипсам, астероиды — по кривым второго порядка (Кеплер и Ньютон)

> Я пишу свою книгу. Прочтется ли она моими современниками или потомками, она все равно найдет своего читателя. Разве Господь Бог не ждал шесть тысяч лет созерцателя своего творения?[1]
>
> *Кеплер*

В итоге многолетней кропотливейшей обработки весьма тонких наблюдений движения планет (произведенных Тихо Браге) Кеплер пришел сначала к несколько неожиданному заключению, что планеты Солнечной системы движутся по окружностям (и это было замечательно, ибо окружность — основная геометрическая кривая античной математики. Считалось, что все разумное должно совершать круговое движение или в крайнем случае некоторую комбинацию круговых), но — о, ужас! — само Солнце не было расположено в центре!

Это показалось Кеплеру очень странным, и он стал пересчитывать все заново и еще более тщательно. И тогда у него получилось, что планеты на самом деле движутся по эллипсам, но с очень малым эксцентриситетом и потому он первоначально их принял за окружности. Само же Солнце расположено в одном из фокусов эллипса. Это утверждение ныне известно каждому из нас как *первый закон Кеплера*.

Первый закон (вместе со вторым, так называемым *законом площадей*) был опубликован Кеплером в 1609 г.

Полную теорию планетных движений построил Ньютон. Он вывел законы Кеплера из своих законов механики и закона всемирного тяготения. Проведем этот вывод и мы.

Если записать второй закон Ньютона и закон всемирного тяготения в виде формул (для плоского движения планеты или кометы массы m, движущейся под действием солнечного тяготения, пренебрегая при этом воздействием других космических тел), то получится следующая картина.

[1] Слова эпиграфа взяты из книги Кеплера «Гармония Мира», в которой Кеплер подводил итоги своих трудов по исследованию движения планет.

Сила F воздействия на планету или комету со стороны Солнца равна по закону всемирного тяготения $-k\dfrac{(x(t),\,y(t))}{r^3(t)}$, где $r(t)=$ $=(x^2(t)+y^2(t))^{1/2}$. Отсюда, записывая второй закон Ньютона, получим

$$mx''=-\frac{kx}{(x^2+y^2)^{3/2}},\qquad my''=-\frac{ky}{(x^2+y^2)^{3/2}}. \tag{Д.1}$$

Переходя к полярным координатам $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, получаем

$$x'=r'\cos\varphi-r\sin\varphi\varphi',\qquad y'=r'\sin\varphi+r\cos\varphi\varphi'. \tag{Д.2}$$

Поэтому

$$x'\sin\varphi-y'\cos\varphi=-r\varphi',\qquad x'^2+y'^2=r'^2+r^2\varphi'^2, \tag{Д.3}$$

а из уравнений (Д.1) получаем

$$x''\sin\varphi-y''\cos\varphi=0. \tag{Д.4}$$

Из соотношений (Д.1)—(Д.4) после дифференцирования приходим к двум знаменитым законам сохранения:

$$m\Big(\frac{x'^2+y'^2}{2}\Big)+\frac{k}{r}=H, \tag{Д.5}$$

$$r^2\varphi'=\frac{L}{m}. \tag{Д.6}$$

Равенство (Д.5) выражает *закон сохранения энергии*, а (Д.6) — *закон площадей* Кеплера, о котором говорилось выше (константа L имеет физический смысл, но мы на этом не останавливаемся).

Из соотношений (Д.5), (Д.6) и (Д.3) б) приходим к следующему равенству:

$$\frac{m}{2}\Big(r'^2+\Big(\frac{L}{mr}\Big)^2\Big)+\frac{k}{r}=H,$$

равносильному дифференциальному уравнению

$$\frac{dr}{dt}=\sqrt{\frac{2}{m}\Big(H-\frac{k}{r}\Big)-\frac{L^2}{m^2r^2}}. \tag{Д.7}$$

Из закона площадей (Д.6) имеем

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{L}{mr^2}. \tag{Д.8}$$

А из последних двух соотношений (Д.7) и (Д.8) приходим к интегрируемому дифференциальному уравнению

$$\frac{d\varphi}{dr}=\frac{L/(mr^2)}{\sqrt{2/m(H-k/r)-L^2/m^2r^2}}.$$

Произведя интегрирование, получаем окончательно

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}, \quad p = \frac{L^2}{m|k|}, \quad e = \sqrt{\frac{2HL^2}{mk^2} + 1}, \quad L = \sqrt{m|k|p}.$$

Значит, если $H < 0$, орбита эллиптическая, если $H = 0$ — параболическая, а при $H > 0$ — гиперболическая (вспомним то, о чем говорилось в главе оониках и квадриках). Это ли не апофеоз теории конических сечений!

Геометрия и специальная теория относительности (Эйнштейн и Минковский)

Мир устроен просто. Очень просто. Но не более того!
Альберт Эйнштейн

Попробуем понять основные формулы специальной теории относительности на (относительно) простом примере.

Представим себе такую ситуацию. По прямолинейному участку железной дороги со скоростью v идет поезд. В тамбуре третьего вагона стоит курильщик (далее К). В тот самый момент, когда тамбур третьего вагона проносится мимо дежурного по станции (далее Д), там появляется пассажир (далее П), идущий вдоль поезда с постоянной скоростью v'. Допустим, что и у дежурного, и у курильщика, и у пассажира имеются хронометры.

Спрашивается, какова скорость V пассажира П относительно дежурного Д?

Но позвольте, скажет любой нормальный человек, при чем тут К, при чем тут хронометры? Очевидно же, что $V = v + v'$!

И Ньютон ответил бы точно так же. А вот у Эйнштейна получилась совсем другая формула: $V = \dfrac{v + v'}{1 + vv'/c^2}$, где c — скорость света. Кажется, именно по этому поводу была сочинена следующая сатира:

Был сущий Мир глубокой тьмой окутан,
«Да будет Свет», — сказал Господь,
И тут явился Ньютон.
Но Сатана недолго ждал реванша.
Эйнштейна он явил,
И мрак настал. Как раньше.

(Первая часть этого стихотворения принадлежит английскому поэту Александру Попу (1685–1744). Он писал:

Nature and Nature's laws lag hid in night.
God said: «Let Newton be!» And all was light.)

Давайте же — во всеоружии геометрических знаний — попробуем разобраться в том, так ли уж мрачно обстоит дело с теорией относительности, как это представляется автору сатиры.

Прежде всего необходимо сказать, что Ньютон не знал одного важного факта, который был экспериментально установлен лишь в начале нашего века. Обнаружилось, что *свет имеет постоянную скорость в любой инерциальной системе координат*, (т. е. системе координат, движущейся с постоянной скоростью) и скорость света ничто превзойти не может.

Так что если в тот самый начальный момент все трое — один неподвижный (Д), другой едущий со скоростью поезда (К) и третий, имеющий еще дополнительную свою собственную скорость (П), выпустили бы три солнечных зайчика вдоль дороги, то эти зайчики (как это ни покажется удивительным) бежали бы вровень, не отставая и не обгоняя друг друга.

Отсюда с неизбежностью вытекает, что хронометры Д, К и П ведут себя по-разному! И более того, координаты и время не могут рассматриваться независимо.

У нас, скажем, имеются три равноправных системы координат: одна связанная с Д (неподвижная), другая — с К — подвижная и третья — с П — «еще более подвижная». В каждый момент времени имеются три показания хронометров: t, t' и t'' для Д, К и П соответственно, и каждый из них имеет (в каждой из систем координат) свои координаты.

Пусть, например, в некий момент t по хронометру Д и t' по хронометру К пассажир П имеет координаты x в системе Д и x' в системе К соответственно. Считая справедливым закон инерции Галилея, согласно которому все инерциальные системы координат равноправны (т. е. если занавесить окна в тамбуре, то К не сможет установить, едет он или стоит), естественно предположить, что *связь между парами* (x, t) *и* (x', t') *задается линейными соотношениями.* Это — важнейший постулат теории относительности. (А если бы преобразования координат были нелинейными, тогда действительно все было бы довольно мрачно.) Условимся еще, что мы выбрали масштаб времени так, чтобы скорость света c равнялась единице.

Теперь все допущения сделаны и можно приступать к выводу формулы для суммы скоростей.

Допустим, что К в начальный момент выпускает солнечный зайчик и через время T (по хронометру Д) положение этого зайчика в неподвижной системе координат определяется координатами (X, T), а в системе, связанной с поездом, координатами (X', T'). Но тогда из гипотезы о постоянстве скорости света вытекает, что $X/T = X'/T' = 1$, т. е. линейное

преобразование должно сохранять форму $x^2 - t^2$. А такие преобразования мы изучали — это гиперболические повороты (устроенные ничуть не сложнее, чем обычные повороты):

$$t' = t \operatorname{ch} a - x \operatorname{sh} a, \tag{Д.9a}$$

$$x' = -t \operatorname{sh} a + x \operatorname{ch} a. \tag{Д.9b}$$

Пусть теперь хронометр Д показывает время t. Положение курильщика К в этот момент пусть будет (в системе координат, связанной с поездом) $(0,\, t')$, ибо курильщик все курит и курит в тамбуре, его координата x' как была нулем, так нулем и осталась, а его хронометр показал t'. Тогда из (Д.9b) следует, что

$$v = \frac{x}{t} = \operatorname{th} a. \tag{Д.10}$$

А теперь до формулы для сложения скоростей осталось два шага. В момент t (по хронометру Д) пассажир будет иметь в неподвижной системе координаты $(Vt,\, t)$, а в системе, связанной с поездом, — $(v't',\, t')$. Поэтому из соотношений (Д.9a) и (Д.9b) получаем

$$t = t' \operatorname{ch} a + v't' \operatorname{sh} a,$$
$$Vt = t' \operatorname{sh} a + v't' \operatorname{ch} a.$$

и, значит,

$$V = \frac{\operatorname{sh} a + v' \operatorname{ch} a}{\operatorname{ch} a + v' \operatorname{sh} a} \overset{\text{Id}}{=} \frac{v + v'}{1 + vv'}.$$

Вот и все, формула Эйнштейна доказана. И никакого особенного мрака. Все довольно-таки просто. Даже очень просто. Но не более того!

Зададимся вопросом: можно ли выразить суть специальной теории относительности одной фразой? (Разумеется, обращенной к Знатоку Геометрии).

Оказывается, это вполне возможно. Рассмотрим отображение $x \mapsto \mapsto \dfrac{x + v}{1 + xv}$, Оно встречалось нам неоднократно. Это отображение переводит отрезок $[-1,\, 1]$ в себя, точку 0 — в точку v, а точку v', т. е. в $\dfrac{v + v'}{1 + vv'}$ — в сумму скоростей v и V'.

Таким образом, с одной стороны, получился сдвиг прямой Лобачевского, промоделированной интервалом $(-1,\, 1)$, а с другой — то же отображение определяет формулу для суммы скоростей в специальной теории относительности. Рассмотрим теперь «пространство скоростей» при одномерном движении. Точнее говоря, выберем какую-то систему координат как неподвижную. Тогда остальные системы, движущиеся вдоль одной прямой, получат каждая по своей точке в интервале $(-1,\, 1)$.

И при этом суммирование скоростей осуществляется сдвигом прямой Лобачевского. То же самое верно и в двумерном случае (плоских движений), и в общем — трехмерном — случае.

Таким образом, одной из трактовок специальной теории относительности может служить следующая фраза.

Пространство скоростей в специальной теории относительности есть не что иное, как прямая в одномерном случае, плоскость в плоском случае, а в трехмерном — пространство Лобачевского.

Такому взгляду на плоскость Лобачевского посвящена книга «Релятивистский мир»[1], где читатель может узнать много интересного о геометрических интерпретациях многих физических явлений на языке геометрии Лобачевского.

§ 2. Многогранники и многоугольники

Выпуклые многогранники

Теория выпуклых многогранников — колыбель выпуклой геометрии. Здесь, в Дополнении, мы уделяем ей много места.

Выпуклую оболочку N точек в n-мерном аффинном пространстве, среди которых есть $n+1$ аффинно независимая точка, называют *n-мерным выпуклым многогранником.*

Гиперплоскость Π^{n-1} называют *гиперплоскостью грани* n-мерного многогранника $M^n \subset \mathbb{R}^n$, если M^n лежит «по одну сторону» от Π^{n-1} и пересечение M^n с Π^{n-1} является $(n-1)$-мерным многогранником. Пересечение гиперплоскости грани с n-мерным многогранником M^n называют $(n-1)$-мерной гранью многогранника M^n. По индукции $(n-2)$-мерную грань многогранника можно определить как $(n-2)$-мерную грань его $(n-1)$-мерной грани, и т. д. Нульмерные грани называют *вершинами*, а одномерные — *ребрами.*

Многогранники в многомерных пространствах нередко обладают неожиданными свойствами. Вот один из наиболее ярких примеров: многогранник с любым числом вершин, но без диагоналей!

Теорема 1. *Для любого $N \geqslant 5$ в $\mathbb{R}^4$ существует выпуклый многогранник с N вершинами, у которого любые две вершины соединены ребром.*

Доказательство. Рассмотрим в $\mathbb{R}^4$ кривую $\gamma(t) = (t, t^2, t^3, t^4)$ и выберем на ней N различных точек $A_i = (t_i, t_i^2, t_i^3, t_i^4)$. Покажем, что выпуклая оболочка этих точек обладает требуемыми свойствами. Для

[1] См.: Дубровский В. Н., Смородинский Я. А., Сурков Е. Л. Релятивистский мир. М.: Наука, 1984. (Библиотечка «Квант» 34).

точек A_i и A_j рассмотрим многочлен

$$(t-t_i)^2(t-t_j)^2 = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4.$$

Покажем, что гиперплоскость

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$$

пересекает кривую γ ровно в двух точках A_i и A_j, а все остальные точки кривой γ лежат по одну сторону от этой гиперплоскости. Действительно,

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 = (t-t_i)^2(t-t_j)^2 \geqslant 0.$$

Таким образом, все точки $A_1, \ldots, A_N$ лежат по одну сторону от рассматриваемой гиперплоскости, причем на самой гиперплоскости лежат лишь точки A_i и A_j. Следовательно, A_iA_j — ребро многогранника, являющегося выпуклой оболочкой точек $A_1, \ldots, A_N$. □

Формула Эйлера—Пуанкаре для альтернированной суммы количеств граней (разных размерностей) выпуклого многогранника

В 1758 г. Эйлер доказал, что для выпуклого многогранника в $\mathbb{R}^3$ число вершин v, число ребер e и число граней f связаны соотношением $v - e + f = 2$. Эта формула была известна Декарту (1620 г.), но он не опубликовал ее. Впоследствии формула Эйлера была обобщена Пуанкаре для n-мерных клеточных комплексов, в частности для n-мерных выпуклых многогранников. Вот как она выглядит.

Теорема 2. *Пусть N_k — число k-мерных граней выпуклого n-мерного многогранника M^n. Тогда*

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k N_k = (-1)^{n-1} + 1. \tag{Д.11}$$

Доказательство. Применим индукцию по n. При $n = 2$ утверждение очевидно: число вершин выпуклого многоугольника равно числу его сторон. Предположим теперь, что формула (Д.11) верна для любого выпуклого $(n-1)$-мерного многогранника, где $n \geqslant 3$. Для данного выпуклого многогранника M^n можно выбрать прямую l так, чтобы проекции вершин многогранника на нее были попарно различны. Действительно, имеется лишь конечное число прямых, соединяющих пары вершин многогранника; прямая l должна быть не ортогональна ни одной из этих прямых. Проведем через начало координат все гиперплоскости, ортогональные рассматриваемым прямым, а затем проведем через

начало координат прямую l так, чтобы она не лежала ни в одной из этих гиперплоскостей.

Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_v$ — проекции вершин многогранника на прямую l, а b_i — точка прямой l, расположенная между a_i и a_{i+1}. Проведем через точки a_1, b_1, a_2, b_2, $\ldots$, b_{v-1}, a_v гиперплоскости H_1, $\ldots$, H_{2v-1}, ортогональные прямой l. При $i = 2, 3, \ldots, 2v-2$ множество $M_i = M^n \cap H_i$ является выпуклым $(n-1)$-мерным многогранником. (Точка a_i принадлежит H_{2i-1}, точка b_i принадлежит H_{2i}.)

Пусть F^k — некоторая k-мерная грань многогранника M^n. Положим $\psi(F^k, M_i) = 1$, если многограннику M_i принадлежит хотя бы одна внутренняя точка грани F^k; в противном случае $\psi(F^k, M_i) = 0$. Проекция грани F^k на прямую l представляет собой отрезок $[a_s, a_t]$. При этом $\psi(F^k, M_i) = 1$ при $i = 2s, 2s+1, \ldots, 2t-2$, а значит,

$$\sum_{i=2}^{2v-2} (-1)^i \psi(F^k, M_i) = 1.$$

Просуммировав такие равенства по всем k-мерным граням F^k, получим

$$\sum_{k\text{-грани}} \sum_{i=2}^{2v-2} (-1)^i \psi(F^k, M_i) = N_k.$$

Затем рассмотрим альтернированную сумму по k полученных равенств:

$$\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \sum_{k\text{-грани}} \sum_{i=2}^{2v-2} (-1)^i \psi(F^k, M_i) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k N_k. \qquad (Д.12)$$

Основная идея предлагаемого доказательства формулы Эйлера—Пуанкаре заключается в том, чтобы, изменив порядок суммирования, воспользоваться предположением индукции для многогранников M_i, а также тем, что $v = N_0$.

Пусть $N_k(M_i)$ — число k-мерных граней многогранника M_i. Тогда

$$\sum_{1\text{-грани}} \psi(F^1, M_i) = N_0(M_i) - \varepsilon_1(i), \qquad (Д.13)$$

где $\varepsilon_1(i) = 1$ при нечетном i и $\varepsilon_1(i) = 0$ при четном i. Действительно, при четном i все вершины многогранника M_i являются внутренними точками ребер многогранника M^n, а при нечетном $i = 2s-1$ — все, кроме одной вершины a_s, которая одновременно является вершиной многогранника M^n. Если же $k > 1$, то

$$\sum_{k\text{-грани}} \psi(F^k, M_i) = N_{k-1}(M_i), \qquad (Д.14)$$

Таким образом, из соотношений (Д.13) и (Д.14) получаем

$$\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \sum_{k\text{-грани}} \psi(F^k,\, M_i) = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k N_{k-1}(M_i) + \varepsilon_1(i).$$

Согласно предположению индукции

$$\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k N_{k-1}(M_i) = -((-1)^{n-2}+1) = -1 + (-1)^{n-1},$$

поэтому

$$\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \sum_{k\text{-грани}} \psi(F^k,\, M_i) = (-1)^{n-1} + \varepsilon_2(i),$$

где $\varepsilon_2(i) = \varepsilon_1(i) - 1$. Следовательно,

$$\sum_{i=2}^{2v-2}(-1)^i \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \sum_{k\text{-грани}} \psi(F^k,\, M_i) =$$
$$= (-1)^{n-1}\sum_{i=2}^{2v-2}(-1)^i + \sum_{i=2}^{2v-2}(-1)^i\varepsilon_2(i) = (-1)^{n-1} + \sum_{i=2}^{2v-2}(-1)^i\varepsilon_2(i).$$

Здесь $\varepsilon_2(i) = 0$ при нечетном i и $\varepsilon_2(i) = -1$ при четном i. Поэтому

$$\sum_{i=2}^{2v-2}(-1)^i \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \sum_{k\text{-грани}} \psi(F^k,\, M_i) = (-1)^{n-1} - v + 1.$$

Сравнивая это выражение с соотношением (Д.12), получаем

$$\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k N_k = (-1)^{n-1} - N_0 + 1, \quad \text{т. е.} \quad \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k N_k = (-1)^{n-1} + 1. \quad \square$$

Двойственные многогранники

Пусть $A_1, \ldots, A_N$ — вершины выпуклого многогранника M в $\mathbb{R}^n$, причем начало координат O — внутренняя точка многогранника M, т. е. M содержит шар радиуса ε с центром O. Положим $a_i = \overrightarrow{OA_i}$ и рассмотрим множество M^*, заданное системой неравенств $(x,\, a_i) \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, N$. Эта конечная система неравенств эквивалентна бесконечной системе неравенств $(x,\, a) \leqslant 1$, где a — произвольная выпуклая линейная комбинация векторов a_i, т. е. $a = \sum \lambda_i a_i$, $\sum \lambda_i = 1$ и $\lambda_i \geqslant 0$. По-другому a можно определить как вектор $\overrightarrow{OA}$, где $A \in M$.

Многогранник M содержит сферу радиуса ε с центром O. Поэтому если $x \in M^*$, то $(x,\, a) \leqslant 1$ для всех векторов a длины ε. Таким образом,

$|x| \leqslant \varepsilon^{-1}$, т. е. множество M^* ограничено. С другой стороны, многогранник M содержится в сфере некоторого радиуса R с центром O. Поэтому если $|x| \leqslant R^{-1}$, то $(x, a_i) \leqslant 1$. Таким образом, множество M^* содержит шар радиуса R^{-1} с центром O. Учитывая, что множество M^* задано конечной системой линейных неравенств, получаем, что M^* — выпуклый многогранник.

Если $a \in M$ и $b \in M^*$, то $(b, a) \leqslant 1$. Более того,

$$M^* = \{b \,|\, (b, a) \leqslant 1 \ \forall a \in M\}, \quad M = \{a \,|\, (b, a) \leqslant 1 \ \forall b \in M^*\}. \qquad (Д.15)$$

Доказывать здесь нужно лишь включение $\{a|(b, a) \leqslant 1 \,\forall b \in M^*\} \subset M$. Пусть $a' \notin M$. Тогда существует гиперплоскость $(x, h) = 1$, отделяющая a' от M, т. е. $(a', h) > 1$ и $(a, h) \leqslant 1$ для всех $A \in M$. Таким образом, $h \in M^*$ и $(a', h) > 1$.

Симметричность равенств (Д.15) означает, что $M = (M^*)^*$. По этой причине многогранники M и M^* называют *двойственными* (относительно точки O).

Две грани многогранника называют *инцидентными*, если одна из них принадлежит другой.

Теорема 3. *Между k-мерными гранями n-мерного выпуклого многогранника M и $(n-k-1)$-мерными гранями двойственного многогранника M^* имеется взаимно однозначное соответствие, сохраняющее инцидентность (если $F_1 \subset F_2$, то $F_1^* \supset F_2^*$).*

Доказательство. Для грани F многогранника M рассмотрим все опорные гиперплоскости многогранника M, пересекающие M в точности по F, т. е. все гиперплоскости вида $(x, b) = 1$, для которых $(a, b) \leqslant 1$ при всех $a \in M$, но равенство $(a, b) = 1$ достигается лишь для тех $a \in M$, которые принадлежат грани F. Концы векторов b, соответствующих этим опорным гиперплоскостям, образуют двойственную грань F^*.

Пусть V и V^* — аффинные многообразия, порожденные гранями F и F^*. Легко проверить, что если $\dim V = k$, то $\dim V^* = n - k - 1$. Действительно,

$$V^* = \{x \,|\, (x, a) = 1 \ \forall a \in V\}.$$

Фиксировав $a_0 \in V$, для V^* получим систему однородных линейных уравнений $(x, a - a_0) = 0 \,\forall a \in V$ и неоднородное уравнение $(x, a_0) = 1$. Решением системы однородных уравнений служит пространство размерности $n - k$, в котором неоднородное уравнение высекает гиперплоскость размерности $n - k - 1$.

Сохранение инцидентности граней следует из того, что если $U \subset V$, то $U^* \supset V^*$. □

Формула Грама—Соммервиля для альтернированной суммы телесных углов граней выпуклого многогранника

Пусть M^n — выпуклый n-мерный многогранник, F_i^k – одна из его k-мерных граней $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$. Телесный угол при грани F_i^k можно определить следующим образом. Пусть A — внутренняя точка грани F_i^k (если $k=0$, то $A = F_i^k$), $S(A, \varepsilon)$ — сфера радиуса ε с центром A. При достаточно малом ε отношение $(n-1)$-мерных объемов фигур $M^n \cap S(A, \varepsilon)$ и $S(A, \varepsilon)$ не зависит от ε. Назовем это отношение *углом в абсолютной мере* при грани F_i^k или *телесным углом в абсолютной мере*[1]. Угол в абсолютной мере при грани размерности $n-1$ равен $1/2$.

Пусть σ_k — сумма телесных углов в абсолютной мере при всех k-мерных гранях выпуклого многогранника M^n. Если $n=2$, т. е. M^n — выпуклый m-угольник, то телесный угол при вершине равен половине угла в радианах при этой вершине, а телесный угол при ребре (стороне многоугольника) равен $1/2$, поэтому $\sigma_0 = (m-2)/2$ и $\sigma_1 = m/2$, а значит, $\sigma_1 - \sigma_0 = 1$. В 1874 г. Грам доказал, что для выпуклых многогранников в $\mathbb{R}^3$ выполняется соотношение $\sigma_2 - \sigma_1 + \sigma_0 = 1$. Для n-мерных выпуклых многогранников аналогичную формулу доказал Соммервиль (1927 г.), но в его доказательстве была неточность, которую устранил Грюнбаум (1967 г.).

Теорема 4 (формула Грама). *Пусть σ_k — сумма телесных углов в абсолютной мере при всех k-мерных гранях n-мерного выпуклого многогранника M^n. Тогда*

$$\sigma_{n-1} - \sigma_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1}\sigma_0 = 1, \quad \textit{т. е.} \quad \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \sigma_k = (-1)^{n-1}.$$

Доказательство (Шепард). На каждой грани F_i^k выберем внутреннюю точку A_i^k и рассмотрим конус, образованный лучами, исходящими из точки A_i^k и проходящими через точки многогранника M^n. Пусть O — начало координат. Перенесем параллельно каждый конус на вектор $\overrightarrow{A_i^k O}$; при этом получим конусы с общей вершиной O. Требуется доказать, что если мы припишем каждому конусу вес $(-1)^k$, где k — размерность соответствующей грани, то каждая точка пространства (за исключением граничных точек конусов) будет покрыта конусами с кратностью $(-1)^{n-1}$, т. е. сумма весов всех конусов, содержащих данную точку, равна $(-1)^{n-1}$.

[1] Обычный телесный угол отличается от телесного угла в абсолютной мере нормировкой: полный телесный угол равен $(n-1)$-мерному объему единичной $(n-1)$-мерной сферы, а полный телесный угол в абсолютной мере равен 1.

Пусть x — вектор, не принадлежащий границам рассматриваемых конусов, т. е. вектор x не параллелен ни одной из k-мерных граней многогранника M^n $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$. Конус, соответствующий грани F_i^k, содержит вектор x тогда и только тогда, когда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ точка $A_i^k + \varepsilon x$ принадлежит многограннику M^n. По-другому это свойство можно описать следующим образом. Пусть $\pi_x(M^n)$ — ортогональная проекция многогранника M^n на гиперплоскость, ортогональную вектору x. Многогранник $\pi_x(M^n)$ покрыт в два слоя проекциями граней многогранника M^n. Первый слой образуют проекции граней, для которых соответствующие им конусы содержат вектор x, а второй слой образуют проекции граней, для которых соответствующие им конусы содержат вектор $-x$. Но при этом граням, проецирующимся на границу многогранника $\pi_x(M^n)$, соответствуют конусы, которые не содержат ни вектора x, ни вектора $-x$ (рис. Д.2).

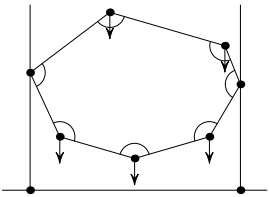


Рис. Д.2

Пусть N'_k — число k-мерных граней $(n-1)$-мерного многоугольника $\pi_x(M^n)$, N''_k — число k-мерных граней первого слоя, покрывающего $\pi_x(M^n)$, т. е. количество k-мерных граней многогранника M^n, которым соответствуют конусы, содержащие вектор x. Положим $N_k = N'_k + N''_k$. Точно такие же рассуждения, как и при доказательстве формулы Эйлера—Пуанкаре (теорема 2 на с. 178) показывают, что $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(-1)^k N_k = 1$, т. е.

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k N''_k = 1 - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k N'_k.$$

При этом $N'_{n-1} = 0$ и согласно формуле Эйлера—Пуанкаре $\sum\limits_{k=0}^{n-2}(-1)^k N'_k = (-1)^{n-2} + 1$. Следовательно, $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(-1)^k N''_k = (-1)^{n-1}$, что и требовалось. □

Теорема Гаусса — Бонне

Пусть A — вершина выпуклого трехмерного многогранника. Определим *кривизну* $k(A)$ как разность между 2π и суммой углов при вершине A всех граней, сходящихся в вершине A. Это определение имеет смысл не только для вершин, но и для всех точек поверхности многогранника. Но как для внутренних точек граней, так и для внутренних точек ребер кривизна равна нулю. Это связано с тем, что малую окрестность точки A, лежащей на ребре, можно «развернуть» и она станет плоской (под малой окрестностью мы здесь подразумеваем множество

точек поверхности многогранника, удаленных от точки A на расстояние не больше ε). Малую окрестность вершины тоже можно «развернуть», сделав разрез. Но при этом образуется «щель» — она как раз и равна кривизне.

Теорема 5. *Полная кривизна многогранника (т. е. сумма кривизн всех его вершин) равна*

$$2\pi(N_0 - N_1 + N_2),$$

где N_0 — число вершин, N_1 — число ребер, N_2 — число граней.

Доказательство. Сумма кривизн всех вершин равна $2\pi N_0 - \sigma$, где σ — сумма всех углов граней многогранника. Сумма углов i-й грани равна $(n_i - 2)\pi$, где n_i — число сторон i-й грани. Поэтому

$$\sigma = \sum_{i=1}^{N_2}(n_i - 2)\pi = \sum n_i - 2\pi N_2.$$

Ясно также, что $\sum n_i = 2N_1$, так как каждое ребро принадлежит ровно двум граням, а потому каждое ребро входит в $\sum n_i$ дважды. □

При доказательстве теоремы 5 мы не пользовались выпуклостью; она верна и для невыпуклых многогранников. Но в случае выпуклых многогранников можно воспользоваться формулой Эйлера: $N_0 - N_1 + N_2 = 2$.

Исторический комментарий. Декарту было известно, что полная кривизна выпуклого многогранника равна 4π, но его доказательство не сохранилось. Другое выражение для кривизны (кривизна равна $2\pi(N_0 - N_1 + N_2)$) Декарту также было известно. Таким образом, формула $N_0 - N_1 + N_2 = 2$ была известна Декарту задолго до Эйлера, но до 1860 г. эти заметки Декарта не публиковались. Поэтому формулу $N_0 - N_1 + N_2 = 2$ часто называют не формулой Декарта, а формулой Эйлера.

Теорему о том, что полная кривизна поверхности многогранника равна $2\pi(N_0 - N_1 + N_2)$, иногда называют теоремой Гаусса — Бонне в связи с тем, что они доказали такую же теорему для гладких поверхностей. (Теорема для многогранников получается из теоремы для гладких поверхностей предельным переходом.)

Для n-мерных многогранников тоже известна теорема, обобщающая теорему 5. Для ее доказательства нам потребуется формула Грама (теорема 4 на с. 182), поэтому углы мы будем измерять в абсолютной мере, т. е. считать полный угол равным 1.

Рассмотрим сначала четырехмерный многогранник M. Пусть V_i — вершина, E_j — ребро (1-грань) этого многогранника. Положим $k_0(V_i) = 1 - s_3(V_i)$, где $s_3(V_i)$ — сумма телесных углов с вершиной V_i всех 3-граней, содержащих вершину V_i; $k_1(E_j) = 1 - s_2(E_j)$, где $s_2(E_j)$ — сумма двугранных углов с ребром E_j всех 3-граней, содержащих ребро E_j.

Теорема 6 (Грюнбаум—Шепард [G4]). *Справедливо равенство*

$$\sum_i k_0(V_i) - \sum_j k_1(E_j) = N_0 - N_1 + N_2 - N_3 = 0.$$

Доказательство. Для каждой 3-грани F_k многогранника M запишем формулу Грама.

$$\sigma_0(F_k) - \sigma_1(F_k) + \sigma_2(F_k) = 1,$$

где $\sigma_0(F_k)$ — сумма телесных углов при вершинах многогранника F_k, $\sigma_1(F_k)$ — сумма двугранных углов при ребрах многогранника F_k, $\sigma_2(F_k)$ — половина числа 2-граней многогранника F_k. Сложив такие равенства для всех 3-граней, получим

$$\sum \sigma_0(F_k) - \sum \sigma_1(F_k) + \sum \sigma_2(F_k) = N_3,$$

т.е. $s_3 - s_2 + N_2 = N_3$, где s_3 — сумма всех телесных углов (для всех 3-граней многогранника M), s_2 — сумма всех двугранных углов. Из определения следует, что $\sum k_0(V_i) = N_0 - s_3(V_i)$ и $\sum k_1(E_j) = N_1 - s_2(E_j)$. Поэтому

$$\sum k_0(V_i) = N_0 - s_3(V_i) - \sum k_1(E_j) = N_1 - s_2(E_j) = \\ = N_0 - N_1 + s_2 - s_3 = N_0 - N_1 + N_2 - N_3. \quad \square$$

Для n-мерного многогранника M аналогично доказывается следующее утверждение.

Теорема 7. *Пусть* $k_i(F^{n-i}) = 1 - s_{n-1-i}(F^{n-i})$, *где* $s_{n-1-i}(F^{n-i})$ — *сумма всех телесных углов при* $(n-i)$*-грани* F^{n-i} *для всех* $(n-1)$*-граней многогранника* M, *содержащих* F^{n-i}; $k_i(M)$ — *сумма* $k_i(F^{n-i})$ *по всем* $(n-i)$*-граням многогранника* M. *Тогда*

$$\sum_{i=0}^{n-3} k_i(M) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i N_i.$$

Теорема Минковского

Пусть M — выпуклый m-мерный многогранник, $n_1, \ldots, n_k$ — единичные векторы внешних нормалей к его $(m-1)$-граням, $F_1, \ldots, F_k$ — $(m-1)$-мерные объемы этих граней. Легко проверить, что $\sum F_i n_i = 0$. Действительно, пусть Π — произвольная гиперплоскость, n — единичная нормаль к ней. Тогда (n, n_i) — косинус угла между гиперплоскостью Π и гиперплоскостью грани F_i, поэтому $(n, n_i)F_i$ — $(m-1)$-мерный объем проекции грани F_i на Π, взятый с соответствующим знаком. Проекции граней многогранника M дважды покрывают его проекцию, причем для

одной из двух граней, покрывающих одну и ту же точку, выполняется неравенство $(n, n_i) > 0$, а для другой грани выполняется неравенство $(n, n_i) < 0$. Поэтому $\sum (n, n_i) F_i = 0$, т. е. $(n, \sum F_i n_i) = 0$ для любого единичного вектора n. Следовательно, $\sum F_i n_i = 0$.

Для выпуклого m-мерного многогранника векторы $n_1, \ldots, n_k$ должны порождать все m-мерное пространство. Действительно, если бы векторы $n_1, \ldots, n_k$ лежали в некоторой гиперплоскости Π, то в направлении нормали к Π многогранник был бы неограничен.

Минковский доказал, что эти два условия на векторы n_i и числа F_i не только необходимы, но и достаточны.

Теорема 8 (Минковский). *Пусть $n_1, \ldots, n_k$ — единичные векторы в $\mathbb{R}^m$, порождающие все пространство $\mathbb{R}^m$; $F_1, \ldots, F_k$ — такие положительные числа, что $\sum F_i n_i = 0$. Тогда существует выпуклый m-мерный многогранник, у которого объемы $(m-1)$-граней равны $F_1, \ldots, F_k$, а векторы $n_1, \ldots, n_k$ являются векторами единичных внешних нормалей к этим граням.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что векторы $n_1, \ldots, n_k$ не направлены в одно полупространство, т. е. не существует такого вектора n, что $(n, n_i) > 0$ при всех i. В самом деле, если $(n, n_i) > 0$ при всех i, то $(n, \sum F_i n_i) = \sum F_i (n, n_i) > 0$, так как $F_i > 0$. С другой стороны, $(n, \sum F_i n_i) = 0$, так как $\sum n_i F_i = 0$.

Пусть $h_1, \ldots, h_k$ — положительные числа. Покажем, что множество

$$M(h_1, \ldots, h_k) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid (x, n_i) \leqslant h_i,\ i = 1, \ldots, k\}$$

является m-мерным выпуклым многогранником. Для этого нужно проверить его m-мерность и ограниченность. Размерность рассматриваемого множества равна m, потому что оно содержит шар $|x| \leqslant \min h_i$. Ограниченность следует из того, что для любого вектора $e \neq 0$ найдется такой вектор n_i, что $(e, n_i) > 0$, поэтому точки луча te принадлежат $M(h_1, \ldots, h_k)$ лишь при $t \leqslant h_i/(e, n_i)$.

Пусть $V(h_1, \ldots, h_k)$ — объем многогранника $M(h_1, \ldots, h_k)$; $F_i(h_1, \ldots, h_k)$ — $(m-1)$-мерный объем пересечения многогранника $M(h_1, \ldots, h_k)$ с гиперплоскостью $(x, n_i) = h_i$ (этот объем отличен от нуля лишь в том случае, когда у многогранника $M(h_1, \ldots, h_k)$ есть $(m-1)$-грань с вектором внешней нормали n_i). Легко проверить, что

$$\frac{\partial V(h_1, \ldots, h_k)}{\partial h_i} = F_i(h_1, \ldots, h_k).$$

Действительно, если $F_i(h_1, \ldots, h_k) > 0$, то при замене h_i на $h_i + \varepsilon$ к многограннику $M(h_1, \ldots, h_k)$ добавляется фигура, объем которой при малых $\varepsilon > 0$ приблизительно равен $\varepsilon F_i(h_1, \ldots, h_k)$. Если же $F_i(h_1, \ldots, h_k) = 0$, то

в случае, когда гиперплоскость $(x, n_i) = h_i$ не пересекает многогранник, объем не изменяется, а в случае, когда гиперплоскость $(x, n_i) = h_i$ пересекает многогранник по грани размерности меньше $m-1$, добавляется фигура, объем которой — бесконечно малая величина более высокого порядка.

Рассмотрим все многогранники $M(h_1, \ldots, h_k)$, для которых положительные числа $h_1, \ldots, h_k$ связаны соотношением $\sum F_i h_i = 1$. Покажем, что среди этих многогранников есть многогранник наибольшего объема. Из того, что числа $F_1, \ldots, F_k$ положительны, следует, что пересечение гиперплоскости $\sum F_i h_i = 1$ с положительным ортантом $x_1 \geqslant 0, \ldots, x_k \geqslant 0$ представляет собой $(k-1)$-мерный симплекс. На этом симплексе непрерывная функция $V(h_1, \ldots, h_k)$ достигает максимума, но нам нужно доказать, что максимум достигается во внутренней точке симплекса. Пусть максимум на симплексе достигается в точке $h_1^0, \ldots, h_k^0$. Максимум положителен, поэтому множество $M(h_1^0, \ldots, h_k^0)$ представляет собой выпуклый $(m-1)$-мерный многогранник (об этом следует упомянуть, потому что прежнее замечание о том, что это множество содержит шар $|x| \leqslant \min h_i$, в случае нулевых h_i неверно). Пусть $a \in \mathbb{R}^m$ — произвольный вектор. Неравенства $(x, n_i) \leqslant h_i^0$ $(i = 1, \ldots, k)$ и неравенства $(x + a, n_i) \leqslant h_i^0$ $(i = 1, \ldots, k)$ задают многогранники, которые получаются друг из друга сдвигом на $\pm a$. При этом неравенство $(x + a, n_i) \leqslant h_i^0$ эквивалентно неравенству $(x, n_i) \leqslant h_i'$, где $h_i' = h_i^0 - (a, n_i)$. Выбрав подходящим образом вектор a, можно добиться, чтобы начало координат оказалось строго внутри многогранника, т. е. $h_i' > 0$ $(i = 1, \ldots, k)$. При этом объем многогранника не изменяется. Кроме того,

$$\sum F_i h_i' = \sum F_i h_i^0 - \sum F_i (a, n_i) = \sum F_i h_i^0 - (a, \sum F_i n_i) = \sum F_i h_i^0,$$

так как $\sum F_i n_i = 0$.

Итак, у непрерывно дифференцируемой функции $V(h_1, \ldots, h_k)$ при условии $\sum F_i h_i = 1$ имеется точка максимума $h_1^0, \ldots, h_k^0$ с положительными h_i^0. Это означает, что гиперповерхность $V(h_1, \ldots, h_k) = V(h_1^0, \ldots, h_k^0)$ касается гиперплоскости $\sum F_i h_i = 1$ в точке $h_1^0, \ldots, h_k^0$, т. е. векторы нормалей к гиперплоскости и к гиперповерхности в точке $h_1^0, \ldots, h_k^0$ пропорциональны:

$$\frac{\partial V(h_1^0, \ldots, h_k^0)}{\partial h_i} = \lambda F_i, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Но, как было показано выше,

$$\frac{\partial V(h_1^0, \ldots, h_k^0)}{\partial h_i} = F_i(h_1^0, \ldots, h_k^0),$$

где $F_i(h_1^0, \ldots, h_k^0)$ — $(m-1)$-мерный объем грани с вектором внешней нормали n_i. Таким образом, объемы граней многогранника $M(h_1^0, \ldots, h_k^0)$ пропорциональны требуемым объемам $F_1, \ldots, F_k$. Поэтому требуемый многогранник можно получить из $M(h_1^0, \ldots, h_k^0)$ гомотетией с коэффициентом $\lambda^{-1/(m-1)}$. □

Теорема Коши о жесткости выпуклых многогранников

Два многогранника называют *эквивалентными*, если между их гранями установлено взаимно однозначное соответствие, сохраняющее размерность грани и отношение инцидентности, т. е. грани размерности k соответствует грань той же самой размерности k и если грань F_1 содержится в грани F_2, то соответствующая ей грань F_1' содержится в грани F_2'.

Теорема 9 (Коши). *Если соответствующие грани двух эквивалентных выпуклых многогранников M и M' в $\mathbb{R}^3$ изометричны (при изометрии вершины переходят в соответствующие вершины), то и сами многогранники изометричны.*

Замечание. Для невыпуклых многогранников аналогичное утверждение неверно. В качестве примера можно взять куб и построить на одной из его граней двумя разными способами (внешним и внутренним) пирамиду, основанием которой служит эта грань.

Доказательство. Пусть O и O' — соответственные вершины многогранников M и M'. Рассмотрим две сферы малого радиуса ε с центрами O и O'. Пересечения этих сфер с многогранниками M и M' являются выпуклыми сферическими многоугольниками $A_1 \ldots A_n$ и $A_1' \ldots A_n'$, у которых по условию соответствующие стороны равны. Для доказательства теоремы Коши нам потребуются две леммы о свойствах сферических многоугольников.

Лемма 1. *Пусть $A_1 \ldots A_n$ и $A_1' \ldots A_n'$ — выпуклые сферические многоугольники, у которых длины всех соответствующих сторон, кроме $|A_1A_n|$ и $A_1'A_n'$, равны, и $\angle A_2 \leqslant \angle A_2', \ldots, \angle A_{n-1} \leqslant \angle A_{n-1}'$. Тогда $|A_1A_n| \leqslant |A_1'A_n'|$.*

Доказательство. Применим индукцию по n. При $n = 3$ требуемое утверждение следует из сферической первой теоремы косинусов (см. с. 112):

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha,$$

поэтому при возрастании угла α возрастает длина стороны a.

Предположим теперь, что требуемое утверждение доказано для выпуклых $(n-1)$-угольников. Начнем с того, что докажем требуемое утверждение для выпуклых n-угольников, у которых равны

углы при вершинах A_i и A'_i, $1 < i < n$. Действительно, треугольники $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ и $A'_{i-1}A'_iA'_{i+1}$ равны, поскольку у них равны две стороны и угол между ними. Поэтому у этих треугольников стороны $A_{i-1}A_{i+1}$ и $A'_{i-1}A'_{i+1}$ и углы при этих сторонах равны, а значит, к многоугольникам $A_1 \dots A_{i-1}A_{i+1} \dots A_n$ и $A'_1 \dots A'_{i-1}A'_{i+1} \dots A'_n$ можно применить предположение индукции.

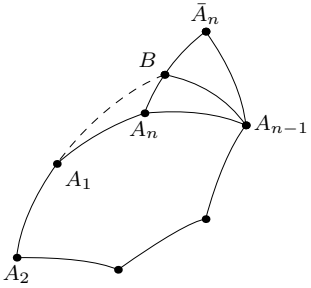


Рис. Д.3

Чтобы доказать шаг индукции, можно попытаться сделать равными углы при каких-нибудь двух вершинах, например при вершинах A_{n-1} и A'_{n-1}. Повернем для этого сторону $A_{n-1}A_n$ так, чтобы угол при вершине A_{n-1} увеличился и стал бы равен углу при вершине A'_{n-1}. Если в результате получится выпуклый многоугольник $A_1 \dots A_{n-1}\bar{A}_n$, то доказательство завершено. Остается разобрать случай, когда получается невыпуклый многоугольник (рис. Д.3). В этом случае продолжение стороны A_1A_2 пересекает отрезок $A_n\bar{A}_n$ в некоторой точке B. Ясно, что $|A_1B| = |A_2B| - |A_1A_2|$ и $|A'_1A'_n| \geqslant |A'_2A'_n| - |A'_1A'_2| = |A'_2A'_n| - |A_1A_2|$. К выпуклым $(n-1)$-угольникам $A_2A_3 \dots A_{n-1}B$ и $A'_2A'_3 \dots A'_{n-1}A'_n$ применимо предположение индукции, поэтому $|A_2B| \leqslant |A'_2A'_n|$, а значит, $|A_1B| \leqslant |A'_1A'_n|$. Кроме того, в треугольниках $A_1A_{n-1}A_n$ и $A_1A_{n-1}B$ стороны, выходящие из вершины A_{n-1}, равны, и $\angle A_1A_{n-1}A_n < \angle A_1A_{n-1}B$. Следовательно, $|A_1A_n| < |A_1B| \leqslant |A'_1A'_n|$ □

Лемма 2. *Пусть $A_1 \dots A_n$ и $A'_1 \dots A'_n$ — выпуклые сферические многоугольники, у которых длины всех соответствующих сторон равны, но сами многоугольники не равны. Пометим угол A_i знаком $+$, если $\angle A_i > \angle A'_i$, и знаком $-$, если $\angle A_i < \angle A'_i$. Тогда при обходе многоугольника $A_1 \dots A_n$ количество строгих перемен знака не меньше 4.*

Доказательство. Предположим, что помечен только один угол, например A_2. Тогда из леммы 1 следует, что либо $|A_1A_n| > |A'_1A'_n|$, либо $|A_1A_n| < |A'_1A'_n|$, чего не может быть. Те же самые рассуждения показывают, что все пометки не могут быть одинаковыми, среди них должны быть как плюсы, так и минусы. Поэтому остается лишь исключить ситуацию, когда можно провести отрезок PQ, разделяющий плюсы и минусы (рис. Д.4).

Предположим, что такой отрезок можно провести. Пусть P' и Q' — соответствующие точки на сторонах многоугольника $A'_1 \dots A'_n$. Применив лемму 1 к многоугольникам M_1 и M'_1, получим $|PQ| > |P'Q'|$, а

применив ту же самую лемму к многоугольникам M_2 и M_2', получим $|PQ| < |P'Q'|$. □

Теперь можно перейти непосредственно к доказательству теоремы Коши. Предположим, что у рассматриваемых многогранников M и M' не все соответствующие двугранные углы равны. Пометим ребра многогранника M знаками $+$ и $-$ в зависимости от того, больше или меньше двугранные углы при этих ребрах, чем соответствующие двугранные углы многогранника M'. Если из какой-то вершины выходит помеченное ребро, то согласно лемме 2 из этой вершины выходит не менее четырех помеченных ребер, причем при обходе вокруг этой вершины происходит по крайней мере 4 перемены знака.

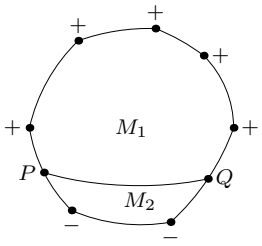


Рис. Д.4

Рассмотрим сначала случай, когда помечены все ребра многогранника. Общее число перемен знака при обходах вокруг вершин равно общему числу перемен знака при обходах граней; обозначим это число N. Пусть a_k — число k-сторонних граней. Число перемен знака при обходе k-сторонней грани четно и не превосходит k, поэтому

$$N \leqslant 2a_3 + 4a_4 + 4a_5 + 6a_6 + \ldots$$

Ясно также, что $a_3 + a_4 + a_5 + \ldots = N_2$ и $3a_3 + 4a_4 + 5a_5 + \ldots = 2N_1$, где N_1 — число ребер, N_2 — число граней. Следовательно,

$$4N_1 - 4N_2 = 2a_3 + 4a_4 + 6a_5 + 8a_6 + \ldots \geqslant N.$$

Согласно формуле Эйлера $4N_1 - 4N_2 = 4N_0 - 8$. Таким образом, $N \leqslant 4N_0 - 8 < 4N_0$. С другой стороны, при обходе вокруг каждой вершины происходит не менее четырех перемен знака, поэтому $N \geqslant 4N_0$. Получено противоречие.

В случае, когда помечены не все ребра, можно воспользоваться той же самой схемой рассуждений. Пусть N_1' — число помеченных ребер, N_0' — число вершин, из которых выходят помеченные ребра, N_2' — число областей, на которые помеченные ребра разбивают поверхность многогранника, a_k' — число этих областей, ограниченных k помеченными ребрами. Сеть помеченных ребер не обязательно связна: она может состоять из нескольких компонент, не соединенных друг с другом помеченными ребрами. Но два важнейших свойства сохраняются: справедливо равенство $a_2' = 0$ и через любую вершину сети проходит по крайней мере два помеченных ребра, т. е. нет «свободных» помеченных ребер, из концов которых не выходят другие помеченные ребра (первое свойство

очевидно, а второе свойство следует из леммы 2). Поэтому та же самая схема рассуждений приведет к противоречию, если только удастся доказать, что $4N_1' - 4N_2' \leqslant 4N_0' - 8$, т. е. $N_0' - N_1' + N_2' \geqslant 2$.

Будем поочередно добавлять к помеченным ребрам остальные ребра, добавляя на каждом шаге одно ребро, у которого по крайней мере одна вершина принадлежит либо помеченному ребру, либо уже добавленному ребру. При каждом таком добавлении число ребер увеличивается на 1, а число вершин плюс число областей либо увеличивается на 1, либо не изменяется. Действительно, если добавляется новая вершина, то число областей не изменяется, а если добавленное ребро соединяет две старые вершины, то либо это ребро разбивает одну область на две области, либо это ребро соединяет вершины двух разных компонент и не разбивает на части ни одну из областей. Таким образом, величина $\tilde{N}_0 - \tilde{N}_1 + \tilde{N}_2$ на каждом шаге либо не изменяется, либо уменьшается на 1, а в самом конце, когда добавлены все ребра, эта величина равна 2. Следовательно, $N_0' - N_1' + N_2' \geqslant 2$, что и требовалось. □

Правильные многогранники

Правильным n-угольником называют выпуклый n-угольник, у которого все стороны и все углы равны. Угол правильного n-угольника равен $(n-2)\pi/n$. Из этого следует, что правильный n-угольник единствен с точностью до подобия. Существование правильного n-угольника достаточно очевидно. По-другому правильный n-угольник можно определить как выпуклый n-угольник, который переходит в себя при повороте на угол $2\pi/n$ вокруг некоторой точки.

Определение правильного многогранника в $\mathbb{R}^3$ требует уже некоторой осторожности: равенство всех граней и всех многогранных углов — явно не то условие, которое нужно. В самом деле, возьмем произвольный прямоугольный параллелепипед и рассмотрим один из двух тетраэдров, ребрами которых служат диагонали граней параллелепипеда. Легко проверить, что все грани и все трехгранные углы этого тетраэдра равны.

Правильные многогранники в $\mathbb{R}^3$ можно определить разными способами. Одно из определений таково: выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^3$ называют *правильным*, если все его двугранные углы равны, а все грани — равные правильные многоугольники. Вместо равенства двугранных углов можно потребовать, чтобы для всех вершин концы выходящих из них ребер образовывали равные правильные многоугольники. Действительно, если известно, что все грани — равные правильные многоугольники, то оба условия эквивалентны тому, что все многогранные углы равны и являются правильными. (Выпуклый n-гранный угол называ-

ют правильным, если он переходит в себя при повороте на угол $2\pi/n$ вокруг некоторой оси.)

Покажем, что внутри правильного многогранника есть точка, равноудаленная от всех его вершин. Проведем через центры двух смежных граней перпендикуляры к этим граням. Они пересекаются в точке, удаленной от центров граней на расстояние $a\operatorname{tg}\varphi$, где a — расстояние от центра грани до ее стороны, а φ — половина двугранного угла между гранями многогранника. Проведем теперь перпендикуляры к граням через центры всех граней и на каждом перпендикуляре отметим точку, удаленную от центра грани на расстояние $a\operatorname{tg}\varphi$ (внутрь многогранника). Для каждой пары смежных граней построенные таким образом точки совпадают, поэтому все эти точки совпадают. В итоге получаем точку, равноудаленную от всех вершин многогранника. Эту точку называют *центром* правильного многогранника.

Займемся классификацией правильных многогранников в $\mathbb{R}^3$. Назовем *символом Шлефли* правильного многогранника упорядоченную пару чисел $\{r_1, r_2\}$, где r_1 — число сторон грани многогранника, r_2 — число сторон многоугольника, образованного концами ребер, выходящих из одной вершины.

Теорема 10. а) *Правильные многогранники в* $\mathbb{R}^3$ *могут иметь лишь следующие символы Шлефли*: $\{3, 3\}$ (*тетраэдр*), $\{3, 4\}$ (*октаэдр*), $\{4, 3\}$ (*куб*), $\{5, 3\}$ (*додекаэдр*), $\{3, 5\}$ (*икосаэдр*).

б) *Для каждого из перечисленных выше символов Шлефли правильный многогранник существует и единствен с точностью до подобия.*

Доказательство. а) Пусть a_3 — длина ребра правильного многогранника с символом Шлефли $\{r_1, r_2\}$, R_3 — радиус его описанной сферы; a_2 — длина стороны правильного многоугольника, образованного концами ребер, выходящих из вершины, R_2 — радиус описанной окружности этого многоугольника. Покажем, что величины $\rho_3 = (a_3/2R_3)^2$ и $\rho_2 = (a_2/2R_2)^2$ связаны соотношением

$$\rho_3 = 1 - \frac{\cos^2(\pi/r_1)}{\rho_2}. \tag{Д.16}$$

Пусть O — центр правильного многогранника, A — его вершина, $B_1 \dots B_{r_2}$ — правильный r_2-угольник, образованный концами ребер, выходящих из вершины A. Тогда если $\angle B_1OA = 2\varphi$, то $a_3 = 2R_3 \sin\varphi$ и $R_2 = a_3\cos\varphi$. Грань рассматриваемого многогранника является правильным r_1-угольником со стороной a_3, причем длина его наименьшей диагонали равна a_2, поэтому $a_2 = 2a_3\cos(\pi/r_1)$. Следовательно, $\rho_3 = (a_3/2R_3)^2 = \sin^2\varphi$ и $\rho_2 = (a_2/2R_2)^2 = \cos^2(\pi/r_1)/\cos^2\varphi$. Из этих формул равенство (Д.16) вытекает очевидным образом.

Легко проверить, что $\rho_2 = \sin^2(\pi/r_2)$, т. е. ρ_2 зависит только от r_2. Формула (Д.16) показывает, что ρ_3 зависит только от $\{r_1, r_2\}$. Поэтому удобно ввести обозначения $\rho\{r_2\} = \rho_2$ и $\rho\{r_1, r_2\} = \rho_3$, которые уже не зависят от многогранника, а зависят только от символа Шлефли многогранника.

Из формулы (Д.16) и очевидного неравенства $\rho_3 > 0$ следует, что $\rho_2 > \cos^2(\pi/r_1) \geqslant \cos^2(\pi/3) = 1/4$, т. е. $\sin(\pi/r_2) > 1/2$, а значит, $r_2 \leqslant 5$. Несложные вычисления показывают, что

$\rho\{3\} = 3/4$ и неравенство $\rho\{3\} > \cos^2(\pi/r_1)$ выполняется лишь при $r_1 \leqslant 5$;

$\rho\{4\} = 1/2$ и неравенство $\rho\{4\} > \cos^2(\pi/r_1)$ выполняется лишь при $r_1 \leqslant 3$;

$\rho\{5\} = (5 - \sqrt{5})/8$ и неравенство $\rho\{5\} > \cos^2(\pi/r_1)$ выполняется лишь при $r_1 \leqslant 3$.

б) Сначала докажем единственность (с точностью до подобия) правильного многогранника с данным символом Шлефли. Преобразованием подобия правильные многогранники с одним и тем же символом Шлефли можно расположить так, чтобы одна грань одного многогранника совпадала с гранью другого многогранника, причем многогранники будут находиться по одну и ту же сторону от плоскости, содержащей эту общую грань. Число $(a_3/2R_3)^2 = \rho\{r_1, r_2\}$ полностью определяется символом Шлефли, поэтому у рассматриваемых многогранников совпадают радиусы описанных сфер, а значит, совпадают и центры этих многогранников. Поэтому совпадают и сами многогранники.

Перейдем к доказательству существования правильных многогранников. Существование правильного тетраэдра и куба очевидно. Выпуклая оболочка центров граней куба является октаэдром.

Выпуклая оболочка центров граней икосаэдра является додекаэдром (и наоборот). Поэтому достаточно доказать существование икосаэдра. Ориентируем ребра октаэдра так, чтобы для каждой грани получилось какое-то определенное направление обхода ее границы (рис. Д.5). Затем поделим ребра в отношении $\lambda : (1 - \lambda)$ в соответствии с их ориентацией. Покажем, что λ можно выбрать так, что отмеченные точки будут вершинами икосаэдра. При любом λ у полученного многогранника есть два типа ребер — принадлежащие граням октаэдра и не принадлежащие им. Если длина ребра октаэдра равна 1, то квадрат длины ребра первого типа равен $\lambda^2 + (1 - \lambda)^2 - 2\lambda(1 - \lambda)\cos 60^\circ = 3\lambda^2 - 3\lambda + 1$, а квадрат длины ребра второго типа равен $2(1 - \lambda)^2 = 2 - 4\lambda + 2\lambda^2$ (это ребро является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами

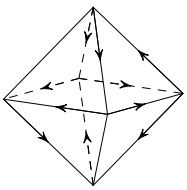


Рис. Д.5

длиной $1-\lambda$). Таким образом, если $\lambda=(\sqrt{5}-1)/2$, то все грани являются правильными треугольниками. Равенство двугранных углов полученного многогранника следует из того, что (для любого λ) все отмеченные точки равноудалены от центра октаэдра. □

Правильный многогранник в $\mathbb{R}^n$ можно определить по индукции: выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^n$ называют *правильным*, если все его $(n-1)$-грани — равные правильные многогранники и для всех вершин концы выходящих из них ребер образуют равные правильные $(n-1)$-мерные многогранники. Символ Шлефли тоже определяется по индукции: если 2-грань правильного многогранника является r_1-угольником, а символ Шлефли многогранника, образованного концами ребер, равен $\{r_2, \ldots, r_n\}$, то *символ Шлефли* многогранника равен $\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$.

Доказательство существования центра правильного многогранника проводится точно так же, как и в трехмерном случае.

Положим $\rho\{r_1, r_2, \ldots, r_n\} = \rho_n = (a_n/2R_n)^2$, где a_n — длина ребра, R_n — радиус описанной сферы. Формула (Д.16) принимает вид

$$\rho\{r_1, r_2, \ldots, r_n\} = 1 - \frac{\cos^2(\pi/r_1)}{\rho\{r_2, \ldots, r_n\}}. \qquad (Д.17)$$

Доказывается эта формула точно так же, нужно лишь вместо граней рассматривать 2-грани.

Теорема 11. а) *Правильные многогранники в* $\mathbb{R}^4$ *могут иметь лишь следующие символы Шлефли*: $\{3, 3, 3\}$, $\{3, 3, 4\}$, $\{4, 3, 3\}$, $\{3, 4, 3\}$, $\{5, 3, 3\}$, $\{3, 3, 5\}$.

б) *Правильные многогранники в* $\mathbb{R}^n$, $n > 4$, *могут иметь лишь следующие символы Шлефли*: $\{3, \ldots, 3\}$, $\{3, \ldots, 3, 4\}$, $\{4, 3, \ldots, 3\}$.

в) *Для каждого из перечисленных выше символов Шлефли правильный многогранник существует и единствен с точностью до подобия.*

Доказательство. а) Из формулы (Д.17) следует, что $\rho\{r_2, r_3\} > \cos^2(\pi/r_1) \geqslant 1/4$. По формуле (Д.16) можно вычислить $\rho\{r_2, r_3\}$ для всех правильных многогранников. Эти вычисления показывают, что

$\rho\{3, 3\} = 2/3$, поэтому $r_1 \leqslant 5$;
$\rho\{4, 3\} = 1/3$, поэтому $r_1 \leqslant 3$;
$\rho\{5, 3\} = (3-\sqrt{5})/6 < 1/4$;
$\rho\{3, 4\} = 1/2$, поэтому $r_1 \leqslant 3$;
$\rho\{3, 5\} = (5-\sqrt{5})/10$, поэтому $r_1 \leqslant 3$.

б) Рассмотрим сначала правильные многогранники в $\mathbb{R}^5$. Легко проверить, что неравенство $\rho\{r_1, r_2, r_3\} > 1/4$ выполняется лишь для символов Шлефли $\{3, 3, 3\}$ и $\{3, 3, 4\}$. При этом $\rho\{3, 3, 3\} = 5/8$ и неравенство

$5/8 > \cos^2(\pi/r_1)$ выполняется лишь при $r_1 \leqslant 4$; $\rho\{3, 3, 4\} = 1/2$ и неравенство $1/2 > \cos^2(\pi/r_1)$ выполняется лишь при $r_1 \leqslant 3$.

При $n \geqslant 5$ для многогранников в $\mathbb{R}^n$ получаем, что

$\rho\{3, \ldots, 3\} = \dfrac{n+1}{2n}$ и неравенство $\dfrac{n+1}{2n} > \cos^2(\pi/r_1)$ выполняется лишь при $r_1 \leqslant 4$;

$\rho\{4, 3, \ldots, 3\} = 1/n < 1/4$;

$\rho\{3, \ldots, 3, 4\} = 1/2$ и неравенство $1/2 > \cos^2(\pi/r_1)$ выполняется лишь при $r_1 \leqslant 3$.

в) Единственность правильных многогранников в $\mathbb{R}^n$ с заданным символом Шлефли доказывается точно так же, как и в $\mathbb{R}^3$.

Правильный симплекс в $\mathbb{R}^n$ можно построить как пересечение гиперплоскости $x_1 + \ldots + x_{n+1} = 1$ с положительным ортантом $x_1 \geqslant 0, \ldots \ldots, x_{n+1} \geqslant 0$. Куб строится очевидным образом, а с помощью куба строится двойственный ему многогранник с вершинами в центрах $(n-1)$-мерных граней куба. Поэтому остается лишь доказать существование многогранников в $\mathbb{R}^4$ с символами Шлефли $\{3, 4, 3\}$, $\{5, 3, 3\}$ и $\{3, 3, 5\}$.

Несложно показать, что многогранник с вершинами $(\pm 2, 0, 0, 0)$, $(0, \pm 2, 0, 0)$, $(0, 0, \pm 2, 0)$, $(0, 0, 0, \pm 2)$, $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$ является правильным и имеет символ Шлефли $\{3, 4, 3\}$. Если к вершинам этого многогранника добавить точки $(\pm\tau, \pm 1, \pm\tau^{-1}, 0)$, где $\tau = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, а также все точки, которые получаются из этих точек четными перестановками координат, то в результате получим правильный многогранник с символом Шлефли $\{5, 3, 3\}$. Двойственный ему многогранник имеет символ Шлефли $\{3, 3, 5\}$. □

Формула Коши

Пусть $\mathbb{S}^{n-1}$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$, $f\colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция на сфере. Возьмем многогранник, вписанный в сферу $\mathbb{S}^{n-1}$, и рассмотрим интегральную сумму $\sum f(\xi_k)V_k$, где V_k — $(n-1)$-мерный объем k-й грани, ξ_k — произвольная точка этой грани. Если многогранник приближается к сфере, т. е. максимальное расстояние между точками грани стремится к нулю, то интегральные суммы стремятся к определенному пределу. Этот предел называют *интегралом* функции f по сфере $\mathbb{S}^{n-1}$ и обозначают $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(\xi)d\mu$.

Важнейшим свойством интеграла по сфере является его инвариантность относительно движений: если $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — ортогональное преобразование, то

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(g\xi)d\mu = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(\xi)d\mu.$$

Инвариантность очевидным образом следует из определения интегральных сумм.

Теорема 12 (формула Коши). *Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый многогранник, $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$ и $f(\xi)$ — $(n-1)$-мерный объем проекции многогранника M на гиперплоскость, ортогональную единичному вектору ξ. Тогда*

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(\xi) d\mu = \beta_{n-1} P,$$

где β_{n-1} — объем $(n-1)$-мерного единичного шара, P — «площадь поверхности» многогранника M, т. е. сумма $(n-1)$-мерных объемов всех его граней.

Доказательство. Рассмотрим отдельно одну из $(n-1)$-мерных граней M. Пусть $f_i(\xi)$ — объем проекции этой грани на гиперплоскость, ортогональную вектору ξ. Ясно, что $f_i(\xi) = |(\xi, n_i)| V_i$, где V_i — объем грани, n_i — единичный вектор нормали к грани. Из инвариантности интеграла по сфере вытекает, что

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |(\xi, n_i)| d\mu = c_n$$

— константа, зависящая только от размерности n. Поэтому

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f_i(\xi) d\mu = c_n V_i.$$

Каждая точка проекции многогранника M (за исключением множества меры нуль) покрыта ровно двумя проекциями граней. Это означает, что

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(\xi) d\mu = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{2} \sum f_i(\xi) d\mu = \frac{c_n}{2} \sum V_i = \frac{c_n}{2} P.$$

Чтобы вычислить константу, удобно в качестве M взять не многогранник, а единичный шар (это можно сделать, воспользовавшись предельным переходом). В этом случае $f(\xi) = \beta_{n-1}$, а значит,

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(\xi) d\mu = \beta_{n-1} P,$$

где P — $(n-1)$-мерный объем сферы $\mathbb{S}^{n-1}$; в рассматриваемом случае он совпадает с площадью поверхности единичного шара M. □

Следствие. *Если внутри одного выпуклого многогранника лежит другой выпуклый многогранник, то площадь поверхности внутреннего многогранника меньше площади поверхности внешнего многогранника.*

Формула Штейнера—Минковского

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый многогранник, r — неотрицательное число и M_r — множество точек, удаленных от M на расстояние не больше r, т. е. объединение всех шаров радиуса r с центрами в точках множества M. Легко проверить, что множество M_r выпуклое. Действительно, если $a,\ b \in M$ и $|u|,\ |v| \leqslant r$, то при $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ точка $\lambda(a+u)+(1-\lambda)(b+v)$ удалена от точки $\lambda a+(1-\lambda)b \in M$ на расстояние $|\lambda u+(1-\lambda)v| \leqslant r$.

Теорема 13 (формула Штейнера—Минковского). *Объем V_r множества M_r полиномиально зависит от r, а именно*

$$V_r = V_0 + Pr + \ldots + \beta_n r^n,$$

где V_0 — объем многогранника M, P — площадь поверхности многогранника M, β_n — объем единичного n-мерного шара.

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по n с помощью формулы Коши (эту формулу мы сформулировали и доказали для выпуклых многогранников, но с помощью предельного перехода ее можно перенести на выпуклые фигуры). При $n=1$ формула Штейнера—Минковского очевидна. Предположим, что формула доказана для $(n-1)$-мерных многогранников, и рассмотрим выпуклый многогранник M в $\mathbb{R}^n$. Пусть $p_\xi(M)$ — проекция многогранника M на гиперплоскость, ортогональную единичному вектору ξ. Ясно, что $p_\xi(M)_r = p_\xi(M_r)$. Пусть $V_r(\xi)$ — $(n-1)$-мерный объем множества $p_\xi(M_r)$. По предположению индукции

$$V_r(\xi) = V_0(\xi) + \ldots + \beta_{n-1} r^{n-1}.$$

Пусть P_r — площадь поверхности тела M_r. По формуле Коши

$$\beta_{n-1}^{-1} P_r = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} V_r(\xi)\,d\mu = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} V_0(\xi)\,d\mu + \ldots + \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \beta_{n-1} r^{n-1}\,d\mu = \\ = \beta_{n-1}^{-1} P_0 + a_1 r + \ldots + a_{n-1} r^{n-1},$$

где $a_1, \ldots, a_{n-1}$ — константы.

Из геометрических соображений ясно, что $\dfrac{dV_r}{dr} = P_r$, поэтому

$$V_r = V_0 + \int_0^r P_s\,ds = V_0 + \int_0^r (P_0 + a_1' s + \ldots + a_{n-1}' s^{n-1})\,ds = \\ = V_0 + P_0 r + b_1 r^2 \ldots + b_{n-1} r^n.$$

Здесь $P_0 = P$ — площадь поверхности многогранника M, коэффициенты $b_1, \ldots, b_{n-2}$ зависят только от многогранника, а последний коэффициент b_{n-1} не зависит даже и от многогранника. Для вырожденного многогранника, состоящего из одной точки, $V_r = \beta_n r^n$, поэтому $b_{n-1} = \beta_n$. $\square$

Штейнер доказал формулу для V_r в случае $n=2$ и 3; в общем случае эту формулу доказал Минковский. При $n=2$ доказательство ясно из рис. Д.6. При $n=3$ аналогично получаем, во-первых, части, из которых складывается шар, а во-вторых, призмы, основаниями которых служат грани многогранника. Дополнительно получаем цилиндрические секторы, один из которых изображен на рис. Д.7. Ребру длиной a_i, двугранный угол при котором равен φ_i, соответствует цилиндрический сектор объемом $a_i(\pi-\varphi_i)r^2/2$.

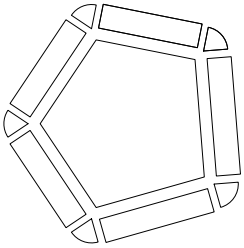


Рис. Д.6

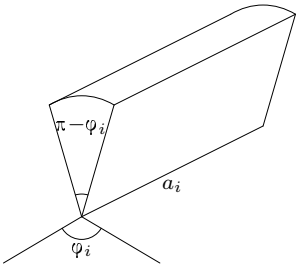


Рис. Д.7

Многоугольники в $\mathbb{R}^m$

Обсудим здесь некоторые свойства многоугольников в $\mathbb{R}^m$. Предварительно отметим следующее важное свойство наборов точек в $\mathbb{R}^m$.

Теорема 14. *Пусть $\{A_1, \ldots, A_n\}$ и $\{B_1, \ldots, B_n\}$ — два набора точек в m-мерном евклидовом пространстве, причем $|A_iA_j| = |B_iB_j|$ для любых i и j. Тогда существует изометрия, переводящая каждую точку A_i в соответствующую точку B_i.*

Доказательство. Точку A_1 можно перевести в B_1 с помощью либо тождественного отображения (если $A_1 = B_1$), либо симметрии относительно гиперплоскости (если $A_1 \neq B_1$). Предположим, что построена изометрия f, переводящая точки $A_1, \ldots, A_k$ в $B_1, \ldots, B_k$. В том случае, когда $f(A_{k+1}) \neq B_{k+1}$, применим симметрию g относительно гиперплоскости, состоящей из точек, равноудаленных от $f(A_{k+1})$ и B_{k+1}. При $i=1, \ldots, k$ точка $f(A_i) = B_i$ равноудалена от точек $f(A_{k+1})$ и B_{k+1}. Поэтому изометрия $g \circ f$ переводит точки $A_1, \ldots, A_{k+1}$ в $B_1, \ldots, B_{k+1}$ соответственно. □

Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — попарно различные точки в m-мерном евклидовом пространстве. Замкнутую ломаную со звеньями $A_1A_2, \ldots$ $\ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ называют *пространственным многоугольником*

$A_1 \dots A_n$. Пространственный многоугольник называют *k-равносторонним*, если длина отрезка $[A_i, A_{i+j}]$ не зависит от i при $j = 1, \dots, k$.

Для выпуклого плоского многоугольника из 2-равносторонности следует k-равносторонность при любом k. Но, как видно из рис. Д.8, изображенный там шестиугольник является 2-равносторонним, но не 3-равносторонним.

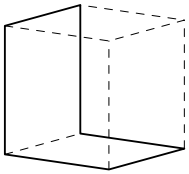


Рис. Д.8.

Известно, что любой 2-равносторонний пятиугольник в $\mathbb{R}^3$ является плоским. Это утверждение допускает следующее обобщение.

Теорема 15. *Размерность минимального аффинного подпространства, содержащего k-равносторонний $(2k+1)$-угольник, четна.*

Доказательство. Пусть $A_1, \dots, A_{2k+1}$ — данный k-равносторонний многоугольник. Он является d-равносторонним при всех $d \geqslant 1$, так как любые две его вершины соединены ломаной, содержащей не более k звеньев. Положим $B_i = A_{i+1}$. Тогда $|B_iB_j| = |A_iA_j|$ при всех i, j. По теореме 1 существует изометрия f, переводящая точки A_i в B_i при всех $i = 1, \dots, 2k+1$. Точка $(2k+1)^{-1}(A_1 + \dots + A_{2k+1})$ является, очевидно, неподвижной точкой этого отображения. Обозначим эту точку буквой O. Выбрав ее в качестве начала координат, получаем, что изометрия является линейным отображением. Линейную оболочку точек $A_1, \dots, A_{2k+1}$ обозначим буквой П. Ясно, что f переводит П в себя и можно рассмотреть ограничение изометрии f на П.

Допустим, что размерность пространства П нечетна. Линейная изометрия в нечетномерном пространстве сохраняет неподвижной некоторую прямую (характеристический многочлен ортогональной матрицы имеет корень ± 1), и при этом ортогональное дополнение к этой прямой также инвариантно. Таким образом, если хотя бы одна точка A_i при проекции на инвариантную прямую не попадет в нуль, то все точки спроектируются туда же, и, значит, среднее арифметическое всех точек не будет совпадать с точкой O. А если все они попадут в нуль, то линейная оболочка наших точек будет лежать в ортогональном дополнении, т. е.в четномерном пространстве. Но это противоречит тому, что их линейная оболочка совпадает с П. Теорема доказана. □

Из этого результата сразу следует, что 2-равносторонний пятиугольник в трехмерном евклидовом пространстве является плоским, ибо размерность аффинной оболочки всех его точек четна и не больше трех. Бывают и неплоские 2-равносторонние пятиугольники, например, можно взять вершины правильного четырехмерного симплекса и соединить их в произвольном порядке замкнутой ломаной.

Интересные примеры k-равносторонних многоугольников в $2k$-мерных евклидовых пространствах можно получить с помощью кривой

$$x(t) = (\cos t,\ \sin t,\ \cos 2t,\ \sin 2t,\ \ldots,\ \cos kt,\ \sin kt),$$

взяв в качестве вершин k-равностороннего n-угольника точки

$$A_j = x\Big(\frac{2\pi j}{n}\Big), \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

§ 3. Дополнительные вопросы проективной геометрии

Комплексное проективное пространство $\mathbb{CP}^n$

Комплексное проективное пространство определяется по аналогии с вещественным. Точками *комплексного проективного пространства* $\mathbb{CP}^n$ служат наборы чисел $(z_1, \ldots, z_{n+1})$, где $z_i \in \mathbb{C}$ и не все числа $z_1, \ldots, z_{n+1}$ равны нулю; наборы $(z_1, \ldots, z_{n+1})$ и $(\lambda z_1, \ldots, \lambda z_{n+1})$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, считаются эквивалентными.

Точки пространства $\mathbb{CP}^n$ вида $(x_1, \ldots, x_{n+1})$, где $x_i \in \mathbb{R}$, образуют подмножество, которое естественным образом можно отождествить с $\mathbb{RP}^n$. Поэтому пространство $\mathbb{CP}^n$ можно рассматривать как $\mathbb{RP}^n$, пополненное комплексными точками.

Без рассмотрения комплексной проективной плоскости нельзя, например, осмыслить несколько загадочную ситуацию с окружностями. Два эллипса могут пересекаться в четырех точках, но две окружности не могут пересекаться более чем в двух точках. Как это объяснить? А дело в том, что любые две окружности пересекаются в двух фиксированных точках комплексной бесконечно удаленной прямой, не принадлежащих вещественной проективной плоскости. Точнее говоря, имеет место следующее утверждение.

Любая окружность проходит через точки $(1, i, 0)$ *и* $(1, -i, 0)$.

Действительно, в однородных координатах уравнение окружности имеет вид

$$(x - az)^2 + (y - bz)^2 = R^2 z^2. \tag{Д.18}$$

Для нахождения точек пересечения окружности с бесконечно удаленной прямой $z = 0$ подставим в уравнение (Д.18) значение $z = 0$. В результате получим $x^2 + y^2 = 0$, т. е. $y = \pm ix$. Таким образом, любая окружность проходит через точки $(1, \pm i, 0)$, лежащие на бесконечно удаленной прямой. Утверждение доказано. □

По аналогии с k-мерными плоскостями в $\mathbb{RP}^n$ можно определить k-мерные плоскости в $\mathbb{CP}^n$. Геометрия пространства $\mathbb{CP}^n$ до некоторой

степени аналогична геометрии пространства $\mathbb{RP}^n$. Например, любые две прямые в $\mathbb{CP}^2$ пересекаются в одной точке. Это связано с тем, что система уравнений $a_1x+b_1y+c_1z=0$, $a_2x+b_2y+c_2z=0$ имеет единственное с точностью до пропорциональности решение как над полем $\mathbb{R}$, так и над полем $\mathbb{C}$. Но свойства конфигураций точек и прямых на комплексной проективной плоскости и на вещественной проективной плоскости могут и существенно различаться. Одно из наиболее интересных явлений такого рода — контрпример в $\mathbb{CP}^2$ к следующей теореме Сильвестра, относящейся к $\mathbb{RP}^2$.

Теорема 1 (Сильвестр). *Пусть точки $X_1, \ldots, X_n$ вещественной проективной плоскости таковы, что на любой прямой X_iX_j лежит еще хотя бы одна точка X_k, отличная от X_i и X_j. Тогда все точки $X_1, \ldots, X_n$ лежат на одной прямой.*

Доказательство. Теорема Сильвестра проективная, но наиболее простое ее доказательство использует метрику. Переход от проективной плоскости к евклидовой плоскости можно выполнить следующим образом. Рассмотрим прямую l, не проходящую ни через одну из точек X_i. Можно считать, что эта прямая бесконечно удаленная. Если из проективной плоскости исключить прямую l, то на оставшемся множестве можно ввести декартовы координаты. Предположим, что не все точки X_i лежат на одной прямой. Проведем все прямые X_iX_j и найдем число d — наименьшее из ненулевых расстояний от данных точек до этих прямых. Пусть для определенности расстояние от точки X_1 до прямой X_2X_3 равно d. На прямой X_2X_3 по условию лежит еще некоторая точка X_4. Опустим из точки X_1 перпендикуляр X_1A на прямую X_2X_3. Две из точек X_2, X_3, X_4 лежат на этой прямой по одну сторону от точки A. Пусть для определенности точки X_2 и X_3 лежат по одну сторону от точки A, причем $|AX_3|<|AX_2|$ (рис. Д.9). Тогда расстояние от точки X_3 до прямой X_1X_2 меньше d. Получено противоречие. □

На комплексной же проективной плоскости можно указать конфигурацию из девяти точек, для которой теорема Сильвестра не выполняется. Имеет место следующее утверждение.

Пусть $\varepsilon^3=1$, но $\varepsilon\neq 1$. Рассмотрим на комплексной проективной плоскости следующие девять точек:

$$\begin{array}{lll}(0,\,1,\,-1), & (0,\,\varepsilon^2,\,-\varepsilon), & (0,\,\varepsilon,\,-\varepsilon),\\ (-1,\,0,\,1), & (-\varepsilon^2,\,0,\,1), & (-\varepsilon,\,0,\,1),\\ (1,\,-1,\,0), & (-\varepsilon,\,1,\,0), & (-\varepsilon^2,\,1,\,0).\end{array}$$

Эти точки не лежат на одной прямой, но любая прямая, проходящая через две из них, содержит еще одну из этих точек.

Докажем это. Легко проверить, что каждая из двенадцати прямых

$$\begin{array}{lll} x=0, & y=0, & z=0, \\ x+y+z=0, & x+y+\varepsilon z=0, & x+y+\varepsilon^2 z=0, \\ x+\varepsilon y+z=0, & x+\varepsilon^2 y+z=0, & \varepsilon x+y+z=0, \\ \varepsilon^2 x+y+z=0, & x+\varepsilon y+\varepsilon^2 z=0, & x+\varepsilon^2 y+\varepsilon z=0 \end{array}$$

содержит ровно три из данных точек. Схематически конфигурация этих прямых изображена на рис. Д.10. Через любую пару данных точек проходит ровно одна из указанных двенадцати прямых, причем эта прямая содержит еще одну из данных точек. Утверждение доказано. □

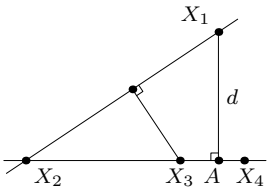
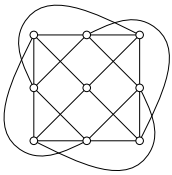


Рис. Д.9


Рис. Д.10

С помощью точек I, $J=(1,\,\pm i,\,0)\in\mathbb{CP}^2$ можно выражать метрические величины через двойное отношение, т. е. проективно-инвариантным образом.

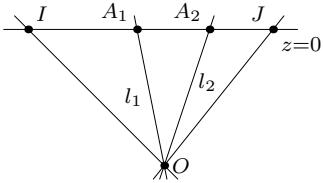


Рис. Д.11.

Рассмотрим, например, прямые l_1 и l_2 на плоскости $\mathbb{R}^2$, заданные уравнениями $x=y\operatorname{tg}\varphi_1+r_1$ и $x=y\operatorname{tg}\varphi_2+r_2$ соответственно. Угол между этими прямыми равен $\pm(\varphi_1-\varphi_2)$. Прямым l_1 и l_2 соответствуют прямые $x=y\operatorname{tg}\varphi_1+r_1 z$ и $x=y\operatorname{tg}\varphi_2+r_2 z$ в $\mathbb{CP}^2$. Они пересекают бесконечно удаленную прямую $z=0$ в точках $A_1=(1,\,\operatorname{tg}\varphi_1,\,0)$ и $A_2=(1,\,\operatorname{tg}\varphi_2,\,0)$, соответственно. Пусть O — точка пересечения прямых l_1 и l_2 (рис. Д.11). Тогда

$$[l_1,\,l_2,\,OI,\,OJ]=[A_1,\,A_2,\,I,\,J]=\frac{\operatorname{tg}\varphi_1-i}{\operatorname{tg}\varphi_1+i}:\frac{\operatorname{tg}\varphi_2-i}{\operatorname{tg}\varphi_2+i}.$$

Ясно также, что

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi-i}{\operatorname{tg}\varphi+i}=\frac{\sin\varphi-i\cos\varphi}{\sin\varphi+i\cos\varphi}=-e^{-2i\varphi}.$$

Поэтому

$$[l_1,\,l_2,\,OI,\,OJ]=e^{\pm 2i\alpha}, \tag{Д.19}$$

где α — угол между прямыми l_1 и l_2.

Формулу (Д.19) называют *формулой Лагерра*. Если заданы точки I и J, то она позволяет выразить угол (метрическую величину) через двойное отношение (проективную величину).

Поляра точки относительно кривой в $\mathbb{CP}^2$

С точки зрения проективной геометрии среднее гармоническое отличается от среднего арифметического и среднего геометрического тем, что оно сохраняется при проективных преобразованиях прямой. Напомним, что число x_0 называют *средним гармоническим* вещественных чисел $x_1, \ldots, x_n$, если

$$\frac{n}{x_0} = \frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}.$$

Из этого определения не видна проективная инвариантность среднего гармонического. Чтобы получить инвариантное определение, к набору точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$ нужно добавить начало координат a, потому что при изменении начала координат среднее гармоническое тоже изменяется. Назовем точку x_0 *средним гармоническим* точек $x_1, \ldots, x_n$ на прямой с началом координат a, если

$$\frac{n}{x_0 - a} = \frac{1}{x_1 - a} + \ldots + \frac{1}{x_n - a}. \qquad \text{(Д.20)}$$

Рассмотрим на данной прямой точку t, отличную от точек a, x_0, x_1, … … , x_n. Умножим обе части равенства (Д.20) на $t - a$, а затем вычтем n из обеих частей. Так как $\dfrac{t-a}{w-a} = \dfrac{t-w}{w-a} + 1$, в результате получим

$$\frac{n(t - x_0)}{x_0 - a} = \frac{t - x_1}{x_1 - a} + \ldots + \frac{t - x_n}{x_n - a},$$

т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{t - x_i}{x_i - a} : \frac{t - x_0}{x_0 - a} = n.$$

Итак, точка x_0 — среднее гармоническое точек $x_1, \ldots, x_n$ на прямой с началом координат a, если для произвольной точки t этой прямой выполняется равенство

$$[x_1, x_0, t, a] + \ldots + [x_n, x_0, t, a] = n.$$

Это определение инвариантно относительно проективных преобразований прямой.

Замечательное свойство среднего гармонического обнаружил ученик Ньютона *Котес* (именно ему Ньютон поручил подготовку второго издания книги «Математические начала натуральной философии»).

Теорема 2 (Котес). *Прямая, вращающаяся вокруг точки A, пересекает кривую степени n в n точках $X_1, \ldots, X_n$. Тогда среднее гармоническое точек $X_1, \ldots, X_n$ движется по некоторой прямой.* (Точка A считается при этом началом координат; она должна быть расположена вне рассматриваемой кривой.)

Доказательство. Можно считать, что точка A имеет координаты $(0, 0)$. Кривая степени n задается уравнением $\sum a_{ij}x^iy^j = 0$, где $i, j \geqslant 0$ и $i + j \leqslant n$. Кривая $\sum a_{ij}x^iy^j = 0$ не проходит через точку A, поэтому $a_{00} \neq 0$. Прямая, проходящая через точку A, задается уравнением $y = kx$ (исключение составляет лишь прямая $x = 0$). Подставив это соотношение в уравнение кривой, получим

$$0 = \sum a_{ij}k^jx^{i+j} = a_{00} + (a_{10} + ka_{01})x + \ldots,$$

где многоточием обозначены члены $\alpha_2x^2, \ldots, \alpha_nx^n$; в дальнейшем рассуждении они для нас будут несущественны. Если $x_1, \ldots, x_n$ — корни полученного многочлена, то $(x_1, kx_1), \ldots, (x_n, kx_n)$ — точки пересечения рассматриваемой кривой с прямой $y = kx$. Среднее гармоническое этих точек имеет координаты (x_0, kx_0), где

$$\frac{n}{x_0} = \frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n} = \frac{x_2x_3\ldots x_n + \ldots + x_1x_2\ldots x_{n-1}}{x_1\ldots x_n} = -\frac{a_{10} + ka_{01}}{a_{00}};$$

при записи последнего равенства мы воспользовались теоремой Виета. Все точки

$$\left(-\frac{na_{00}}{a_{10} + ka_{01}}, -\frac{kna_{00}}{a_{10} + ka_{01}}\right)$$

лежат на прямой $a_{10}x + a_{01}y + na_{00} = 0$. Последнее соотношение действительно определяет некоторую прямую, потому что $a_{00} \neq 0$; если $a_{10} = a_{01} = 0$, то эта прямая бесконечно удаленная. (Бесконечно удаленная прямая получается в том случае, когда сумма $\dfrac{1}{x_1} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}$ тождественно равна нулю. Для коники это означает, что A — центр коники.) □

Кривой степени n на плоскости $\mathbb{R}^2$, заданной уравнением $\sum a_{ij}x^iy^j = 0$, можно сопоставить сопоставить множество точек в $\mathbb{C}^2$, которое задается тем же самым уравнением. Кроме того, этой кривой можно сопоставить множества точек в $\mathbb{RP}^2$ и в $\mathbb{CP}^2$, которые задаются уравнением $\sum a_{ij}x^iy^jz^{n-i-j} = 0$. Все эти множества точек называют *алгебраическими кривыми*.

Среднее гармоническое можно определить и для комплексных чисел с помощью той же самой формулы, что и для вещественных. После этого можно сначала определить среднее гармоническое n точек на комплексной прямой $\mathbb{C}^1$ с заданным началом координат, а затем определить

среднее гармоническое точек пересечения кривой степени n в $\mathbb{C}^2$ с прямой, проходящей через заданную точку A.

На вещественной проективной плоскости прямая не всегда пересекает кривую степени n ровно в n точках; точки пересечения могут быть мнимыми. Но на комплексной проективной плоскости прямая всегда пересекает кривую степени n ровно в n точках (с учетом кратности). Поэтому на комплексной проективной плоскости для любой прямой, проходящей через точку A, определено среднее гармоническое точек пересечения этой прямой с кривой степени n. Все средние гармонические лежат на прямой $a_{10}x + a_{01}y + na_{00}z = 0$. Эту прямую называют *полярой* точки A относительно данной кривой.

Для кривой на вещественной плоскости (соответственно на вещественной проективной плоскости) поляру точки A относительно данной кривой тоже определяют как прямую, заданную уравнением $a_{10}x + a_{01}y + na_{00} = 0$ (соответственно уравнением $a_{10}x + a_{01}y + na_{00}z = 0$).

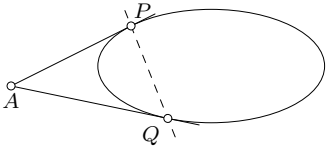


Рис. Д.12

Поляра точки A относительно коники (на вещественной плоскости) имеет весьма простой геометрический смысл в том случае, когда из точки A можно провести две касательные AP и AQ к данной конике (рис. Д.12). Касательная AP пересекает конику в двух совпадающих точках. Средним гармоническим двух равных чисел x и x будет число x. Следовательно, P — среднее гармоническое точек пересечения прямой AP с коникой. Таким образом, PQ — поляра точки A относительно данной коники.

Есть и более общий геометрический способ построения поляры точки относительно коники. Рассмотрим сначала случай вырожденной кривой второго порядка, состоящей из двух пересекающихся прямых.

Теорема 3. *Пусть две прямые, проходящие через точку A, пересекают прямые l_1 и l_2 в точках P_1, Q_1 и P_2, Q_2* (рис. Д.13); *X — точка пересечения прямых P_1Q_2 и P_2Q_1. Тогда точка X лежит на поляре точки A относительно кривой $l_1 \cdot l_2 = 0$.*

Доказательство. Можно считать, что точка A и точка, в которой пересекаются прямые l_1 и l_2, бесконечно удаленные, т. е. $P_1P_2 \parallel Q_1Q_2$ и $l_1 \parallel l_2$ (рис. Д.14). Пусть прямая AX пересекает прямые l_1 и l_2 в точках X_1 и X_2. Тогда X — середина отрезка X_1X_2. Остается доказать, что если начало координат на прямой — бесконечно удаленная точка, то средним гармоническим точек X_1 и X_2 будет середина отрезка X_1X_2.

Условие

$$\frac{t-x_1}{x_1-a}:\frac{t-x_0}{x_0-a}+\frac{t-x_2}{x_2-a}:\frac{t-x_0}{x_0-a}=2$$

при $a=\infty$ можно записать в виде

$$\frac{t-x_1}{t-x_0}+\frac{t-x_2}{t-x_0}=2,$$

т. е. $x_0=(x_1+x_2)/2$. □

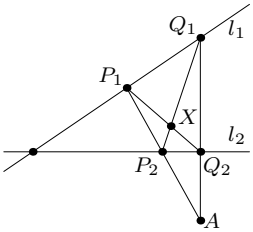


Рис. Д.13

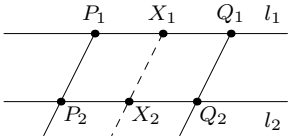


Рис. Д.14

Замечание. Точка пересечения прямых l_1 и l_2 тоже лежит на поляре точки A относительно кривой $l_1 \cdot l_2 = 0$.

Перейдем теперь к случаю невырожденной кривой второго порядка. При этом нам понадобится теорема 3.

Теорема 4. *Пусть две прямые, проходящие через точку A, пересекают конику в точках P_1, P_2 и Q_1, Q_2* (рис. Д.15); *X — точка пересечения прямых P_1Q_2 и P_2Q_1. Тогда точка X лежит на поляре точки A относительно данной коники.*

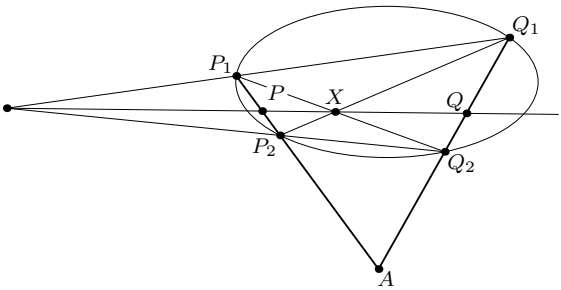


Рис. Д.15

Доказательство. Поляра точки A относительно любой коники, проходящей через точки P_1, P_2, Q_1 и Q_2, одна и та же. В самом деле,

если P и Q — средние гармонические точек P_1, P_2 и Q_1, Q_2 (см. рис. Д.15), то PQ — поляра любой коники, проходящей через точки P_1, P_2, Q_1 и Q_2. Согласно теореме 3 точка X принадлежит поляре точки A относительно кривой $|P_1Q_1| \cdot |P_2Q_2| = 0$, поэтому она принадлежит и поляре точки A относительно исходной коники. □

Теорема 5. *Если поляра точки A относительно данной коники проходит через точку B, то поляра точки B проходит через точку A.*

Доказательство. Проведем через точку B прямую, пересекающую конику в точках P_1 и P_2. Прямые AP_1 и AP_2 пересекают конику в точках Q_1 и Q_2; прямая BQ_2 пересекает конику в точке Q_1' (рис. Д.16). Согласно теореме 4 прямая Q_1Q_2 пересекает прямую P_1P_2 в точке, лежащей на поляре точки A. Поэтому если прямая P_1P_2 отлична от поляры точки A, то прямая Q_1Q_2 пересекает ее в точке B, а значит, $Q_1' = Q_1$. Можно считать, что прямая P_1P_2 отлична от поляры точки A. Тогда согласно теореме 4 прямые P_1Q_2 и P_2Q_1 пересекаются в точке, лежащей на поляре точки B, а эти прямые пересекаются именно в точке A. □

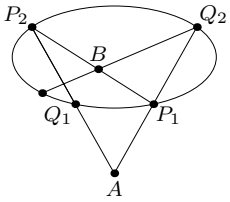


Рис. Д.16

Проективная двойственность

Здесь пойдет речь о двойственности «точки — прямые» в $\mathbb{RP}^2$ и $\mathbb{CP}^2$.

Выше было показано, что если задана коника и точка B лежит на поляре точки A, то точка A лежит на поляре точки B. Это свойство позволяет с помощью одной лишь линейки для любой прямой a построить точку A, полярой которой является данная прямая. Выберем для этого на прямой a точки B_1 и B_2; пусть b_1 и b_2 — поляры этих точек, A — точка пересечения прямых b_1 и b_2. Тогда поляра точки A проходит через точки B_1 и B_2, а значит, она совпадает с прямой a.

Поляру мы определяли лишь для точек, не лежащих на конике. Но соображения непрерывности показывают, что в качестве поляры точки, лежащей на конике, нужно взять касательную в этой точке. Таким образом, если на проективной плоскости задана коника, то каждой точке A можно сопоставить прямую — ее поляру $A^\perp$, а каждой прямой a можно сопоставить точку $a^\perp$, полярой которой является прямая a. Если при этом прямые a_1 и a_2 пересекаются в точке B, то точки $a_1^\perp$ и $a_2^\perp$ лежат на прямой $B^\perp$. Если для конфигурации точек и прямых каждой точке A сопоставить прямую $A^\perp$, а каждой прямой a сопоставить точку $a^\perp$, то полученную конфигурацию называют *двойственной*.

Наиболее простая связь между координатами точки и уравнением ее поляры получается в случае коники $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. Отметим, что,

хотя и эта коника не имеет вещественных точек, поляра относительно нее определена не только для комплексной проективной плоскости, но и для вещественной. Это связано с тем, что уравнение рассматриваемой коники вещественно.

Теорема 6. *Поляра точки* $(x_0 : y_0 : z_0)$ *относительно коники* $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ *задается уравнением* $x_0x + y_0y + z_0z = 0$.

Доказательство. Касательные, проведенные к конике $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ из точки $(x_0 : y_0 : z_0)$, касаются коники в точках $(x_1 : y_1 : z_1)$ и $(x_2 : y_2 : z_2)$. Касательная в точке $(x_i : y_i : z_i)$ задается уравнением $x_ix + y_iy + z_iz = 0$. Касательные $x_1x + y_1y + z_1z = 0$ и $x_2x + y_2y + z_2z = 0$ проходят через точку $(x_0 : y_0 : z_0)$, поэтому $x_ix_0 + y_iy_0 + z_iz_0 = 0$. Следовательно, прямая $x_0x + y_0y + z_0z = 0$ проходит через точки $(x_1 : y_1 : z_1)$ и $(x_2 : y_2 : z_2)$, а значит, эта прямая — поляра точки $(x_0 : y_0 : z_0)$. □

Геометрический смысл теоремы 6 весьма прост: если точке $A \in \mathbb{RP}^2$ соответствует прямая a в $\mathbb{R}^3$, то поляре точки A соответствует плоскость, ортогональная прямой a.

Для алгебраической кривой $C \subset \mathbb{CP}^2$ можно определить кривую $C^* \subset \subset \mathbb{CP}^2$, двойственную кривой C относительно коники Γ. Делается это следующим образом. Каждой точке $x \in C$ сопоставим касательную $l(x)$ к кривой C в точке x, а прямой $l(x)$ сопоставим точку x^*, поляра которой относительно коники Γ совпадает с прямой $l(x)$. Кривая C^*, состоящая из точек x^*, называется кривой, *двойственной* относительно коники Γ. Аналогично определяется двойственная кривая и для кривой в $\mathbb{R}^2$.

Теорема 7. *Если* C *— гладкая кривая, то* $(C^*)^* = C$.

Доказательство. Пусть касательные $l(x_1) = (x_1^*)^\perp$ и $l(x_2) = (x_2^*)^\perp$ к кривой C пересекаются в точке x (рис. Д.17 (а)). Это означает, что

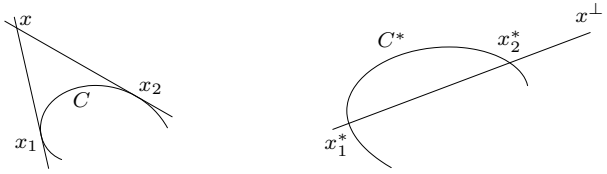


Рис. Д.17.

точки x_1^* и x_2^* кривой C^* лежат на прямой $x^\perp$ (рис. Д.17 (б)). Устремим точку x_1 к x_2. В пределе точки x_1 и x_2 совпадут с точкой x, а прямая $x^\perp$ совпадет с касательной к кривой C^* в точке x^*. Таким образом, точка $(x^*)^*$ кривой $(C^*)^*$ совпадает с точкой x, а значит, $(C^*)^* = C$. □

Рассмотрим в качестве примера кривую, двойственную кривой $y=x^3$ относительно коники $x^2+y^2+z^2=0$ (мы считаем, что плоскость $\mathbb{R}^2$ вложена в $\mathbb{CP}^2$ посредством отображения $(x,\,y)\mapsto(x,\,y,\,1)$). Касательная к кривой $y=x^3$ в точке $(x_0,\,y_0)$ задается уравнением $y-y_0=3x_0^2(x-x_0)$, т. е. $-3x_0^2x+y+2x_0^3=1$. Таким образом, точке $(x_0,\,x_0^3,\,1)\in\mathbb{CP}^2$ сопоставляется точка $(-3x_0,\,1,\,2x_0^3)\in\mathbb{CP}^2$. Последняя точка эквивалентна точке $\left(-\dfrac{3x_0^{-1}}{2},\,\dfrac{x_0^{-3}}{2},\,1\right)=(x_1,y_1,\,1)$. Двойственная кривая получается почти та же самая, она задается уравнением $\left(-\dfrac{2}{3}x_1\right)^3=2y_1$. Но есть и весьма существенное различие. Дело в том, что точке $(0,\,0,\,1)$ соответствует точка $(0,\,1,\,0)$. В окрестности точки $(0,\,1,\,0)$ удобно использовать координаты $(x_1,\,1,\,z_1)$. При этом $x_1=-3x_0$ и $z_1=2x_0^3$, т. е. двойственная кривая задается уравнением $27z_1^2+x_1^3=0$. Таким образом, точке перегиба (рис. Д.18 (а)) двойственна точка возврата (рис. Д.18 (б)). Ясно также, что точке самопересечения двойственна двойная касательная (рис. Д.19); точнее говоря, точке самопересечения x соответствуют точ-



Рис. Д.18.

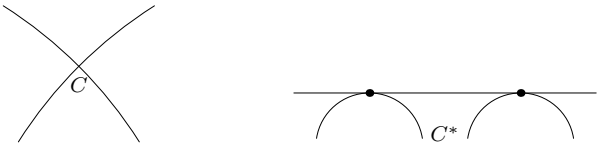


Рис. Д.19.

ки x_1^* и x_2^*, касательная в которых одна и та же. При переходе к двойственной кривой прямая l, пересекающая кривую C в точках $x_1,\,\ldots,\,x_n$, переходит в точку $l^\perp$, через которую проходят касательные к кривой C^* в точках $x_1^*,\,\ldots,\,x_n^*$(рис. Д.20). Согласно теореме 7 это означает, что степень кривой C^* равна количеству касательных к кривой C, которые можно провести из точки общего положения.

Из каждой точки, не лежащей на конике, к этой конике можно провести ровно две касательные (они могут быть мнимыми). Поэтому следует ожидать, что любой конике двойственна некоторая коника. Это действительно так. Предварительно введем удобные обозначения для

записи уравнения коники. Пусть $x=(x_1,\,x_2,\,x_3)$. Тогда любую конику в $\mathbb{CP}^2$ можно задать уравнением вида $xAx^T=0$, где A — симметрическая матрица размера 3×3. Коника $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$ задается в таких обозначениях уравнением $xx^T=0$.

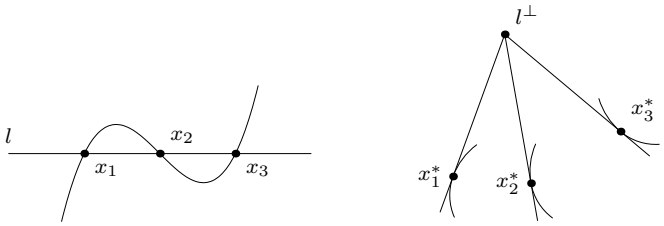


Рис. Д.20.

Теорема 8. *Коника $xBx^T=0$, где $B=A^{-1}$, двойственна конике $xAx^T=0$ относительно коники $xx^T=0$.*

Доказательство. Пусть точка p принадлежит конике $xAx^T=0$, т. е. $pAp^T=0$. Касательная в точке p к этой конике задается уравнением $pAx^T=0$, т. е. $qx^T=0$, где $q=pA$. Таким образом, точке p соответствует точка $p^*=pA$ двойственной кривой. Поэтому если $B=A^{-1}$, то $p^*B(p^*)^T=pABAp^T=pAp^T=0$. (Напомним, что матрица A симметрическая, т. е. $A^T=A$.) □

Для эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ матрица A имеет вид $\begin{pmatrix} a^{-2} & 0 & 0\\ 0 & b^{-2} & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$. Поэтому $B=\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0\\ 0 & b^2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$, т. е. этому эллипсу двойствен эллипс $a^2x^2+b^2y^2=1$. В частности, при $ab=1$ получаем пару эллипсов $f_1=\dfrac{x^2}{a^2}+a^2y^2-1=0$ и $f_2=a^2x^2+\dfrac{y^2}{a^2}-1=0$, двойственных друг другу (рис. Д.21). Рассмотрим кривую $f_1f_2=\varepsilon$, где ε — достаточно малое число. В зависимости от знака числа ε эта кривая имеет один из двух видов, изображенных на рис. Д.22. Соответствующие им двойственные кривые изображены на рис. Д.23.

В теореме Паппа и теореме Дезарга речь идет только о принадлежности точек прямым. Для утверждений такого рода переходом к двойственной конфигурации можно получить двойственные утверждения. В том случае, когда утверждение связано сониками, причем речь идет лишь о принадлежности точек коникам и прямым, можно рассмотреть двойственную конику и получить двойственное утвержде-

ние. Таким образом, из двух двойственных друг другу утверждений достаточно доказать одно. Нетрудно понять, что следующие два утверждения двойственны друг другу.

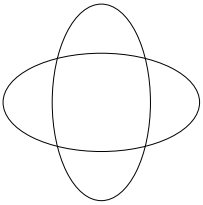


Рис. Д.21

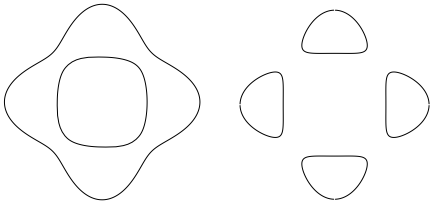


Рис. Д.22

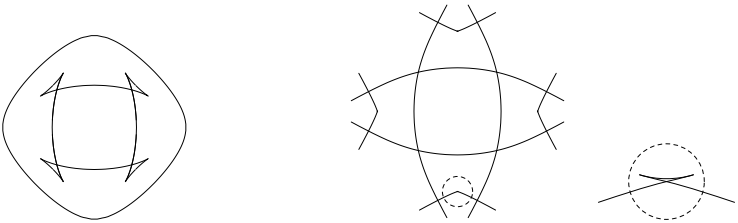


Рис. Д.23.

Теорема Паскаля. *Пусть точки A, B, C, D, E и F лежат на конике; P, Q, R — точки пересечения прямых AB и DE, BC и EF, CD и FA. Тогда точки P, Q и R лежат на одной прямой.*

Теорема Брианшона. *Пусть прямые a, b, c, d, e и f касаются коники; p, q, r — прямые, соединяющие точки пересечения прямых a, b и d, e; b, c и e, f; c, d и f, a. Тогда прямые p, q и r пересекаются в одной точке.*

(Иными словами, диагонали описанного вокруг коники шестиугольника пересекаются в одной точке.)

Неподвижные точки проективных преобразований прямой и построение Штейнера

Проективное преобразование прямой полностью определяется образами трех точек. В частности, если заданы образы трех точек, то можно найти неподвижные точки проективного преобразования. *Якоб Штейнер* (1796—1863) указал способ построения неподвижных точек проективного преобразования прямой с помощью одной лишь линейки

в том случае, когда на плоскости нарисована некоторая коника, например окружность.

Выберем для этого на конике некоторую точку M. Точке X данной прямой l можно сопоставить точку X' коники, в которой ее пересекает прямая MX (рис. Д.24). Пусть при проективном преобразовании точка X переходит в X_1. Сопоставляя прямой $O'X'_1$ прямую $O'_1X'_1$, получим проективное соответствие (точка O фиксирована, а точка X переменная). Действительно, соответствие $MX \mapsto MX'$ проективное, а $\angle X'O'Y' = \angle XMY$ и $\angle X'_1O'_1Y'_1 = \angle X_1MY_1$. Прямой $O'O'_1$ соответствует прямая O'_1O', поэтому все точки пересечения прямых $O'X'_1$ и O'_1X' лежат на одной прямой Δ (теорема 2 на с. 66). Точки пересечения прямой Δ с коникой соответствуют неподвижным точкам проективного преобразования. Таким образом, прямая Δ зависит лишь от самого проективного преобразования и не зависит от выбора точки O (в том случае, когда прямая Δ не пересекает конику, нужно рассмотреть комплексификацию).

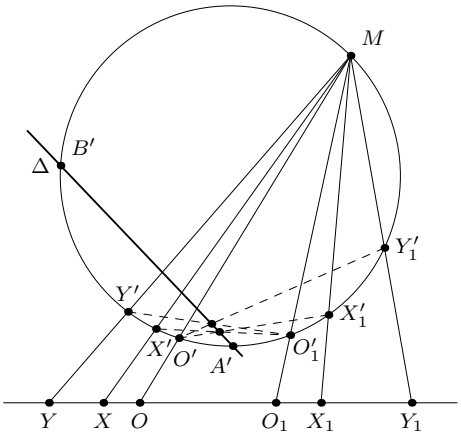


Рис. Д.24.

Построение прямой Δ в том случае, когда заданы образы O_1, X_1 и Y_1 точек O, X и Y, показано на рис. Д.24. Точки A' и B' соответствуют при этом неподвижным точкам A и B рассматриваемого проективного преобразования. Построение Штейнера можно использовать для решения многих задач на построение. Приведем два примера таких задач.

1. На плоскости даны три точки и три прямые. Построить треугольник, вершины которого лежат на данных прямых, а стороны проходят через данные точки.

Рассмотрим проективное преобразование прямой, представляющее собой композицию проекций

$$a \xrightarrow{C} b \xrightarrow{A} c \xrightarrow{B}$$

(рис. Д.25). Вершиной искомого треугольника служит любая из неподвижных точек этого проективного преобразования.

2. Вписать в данный треугольник ABC параллелограмм $AKLM$ данной[1] площади (рис. Д.26 (а)).

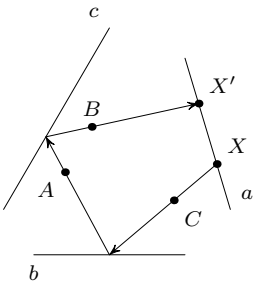
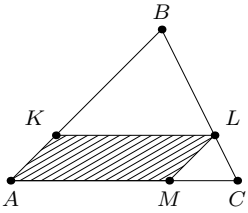


Рис. Д.25



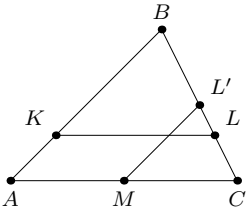


Рис. Д.26

Требуется найти точку L, для которой величина $|AK| \cdot |AM|$ принимает данное значение, т. е. величина $|BL| \cdot |LC|$ принимает данное значение k.

Рассмотрим преобразование $L \mapsto L'$ прямой BC, для которого $|BL'| \times |LC| = k$, т. е. $b - l' = k/(l - c)$ (рис. Д.26 (б)). Задача сводится к построению неподвижной точки этого проективного преобразования.

Для проективных преобразований прямой известен удобный критерий, позволяющий выяснять, есть ли у них неподвижные точки.

Теорема 9. *Пусть f — проективное преобразование прямой, O — середина отрезка IJ, где $I = f(\infty)$ и $f(J) = \infty$. У преобразования f нет неподвижных точек тогда и только тогда, когда точки $f(O)$ и J лежат по одну сторону от точки O.*

Доказательство. Введем на прямой систему координат с началом в точке O. Тогда $f(\infty) = p$ и $f(-p) = \infty$. Требуется доказать,

[1] Площадь может быть задана, например, некоторым квадратом. Чтобы не усложнять задачу, можно считать, что площадь задана параллелограммом со сторонами, параллельными прямым AB и AC.

что уравнение $f(x)=x$ не имеет решений тогда и только тогда, когда $pq<0$, где $q=f(0)$. Из условий $f(\infty)=p$, $f(-p)=\infty$ и $f(0)=q$ следует, что $f(x)=\dfrac{px+pq}{x+p}$. Поэтому уравнение $f(x)=x$ эквивалентно уравнению $x^2=pq$. Последнее уравнение не имеет решений тогда и только тогда, когда $pq<0$. □

Из доказательства теоремы 9 можно извлечь еще один способ построения неподвижных точек проективного преобразования прямой. А именно, сначала строим точки $I=f(\infty)$ и $J=f^{-1}(\infty)$. Затем строим середину O отрезка IJ и находим точку $O'=f(O)$. Неподвижная точка X удовлетворяет соотношению $|OX|^2=|OI|\cdot|OO'|$.

Пусть P — точка вне прямой l. Преобразования проективной прямой, не имеющие неподвижных точек, допускают простое геометрическое описание. Будем говорить, что преобразование $X\mapsto X'$ прямой l индуцировано поворотом на угол φ вокруг точки P, если оно устроено так, как показано на рис. Д.27.

Теорема 10. *Нетождественное проективное преобразование прямой не имеет неподвижных точек тогда и только тогда, когда оно индуцировано поворотом.*

Доказательство. Очевидно, что нетождественное преобразование прямой l, индуцированное поворотом, является проективным и не имеет неподвижных точек. Рассмотрим теперь проективное преобразование f прямой l, не имеющее неподвижных точек. Пусть $I=f(\infty)$, $J=f^{-1}(\infty)$, O — середина отрезка IJ, $O'=f(O)$. Согласно теореме 9 на с. 213 точки O' и J лежат по одну сторону от точки O. Восстановим из точки O перпендикуляр к прямой l и отложим на нем отрезок $|OP|=\sqrt{|OI|\cdot|OO'|}$ (рис. Д.28). Треугольники $O'PO$ и PIO подобны, поэтому $\angle O'PO=\angle PIO=\angle PJO=\varphi$. Преобразование, индуцированное поворотом на угол φ вокруг точки P, переводит точки ∞, O, J в точки I, O', ∞ соответственно. Следовательно, это преобразование совпадает с f. □

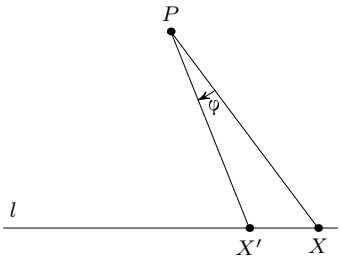


Рис. Д.27

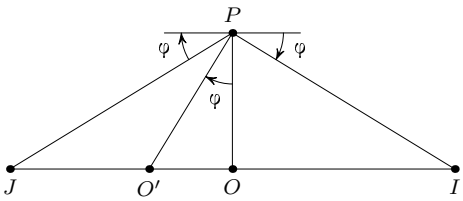


Рис. Д.28

Проективные инволюции. Гармонические четверки точек и прямых

Пусть G — произвольное множество. Преобразование $f\colon G \to G$ называют *инволюцией*, если $f(f(x)) = x$ для всех $x \in G$; при этом предполагается, что f — не тождественное преобразование.

Инволютивные преобразования проективной прямой допускают различные геометрические описания, два из которых мы сейчас обсудим.

Конику C можно отождествить с проективной прямой с помощью стереографической проекции из точки $M \in C$ (рис. Д.29). После этого можно считать, что любое преобразование $X \mapsto X_1$ проективной прямой индуцирует преобразование $X' \mapsto X'_1$ коники.

Теорема 11. *Проективное преобразование $X \mapsto X_1$ проективной прямой является инволюцией тогда и только тогда, когда все прямые $X'X'_1$ проходят через одну и ту же точку A.*

Доказательство. Мы воспользуемся прямой Δ, введенной при описании построения Штейнера. При этом мы докажем, что Δ — поляра точки A.

Возьмем две точки O' и X' коники C и рассмотрим их образы O'_1 и X'_1 при проективной инволюции. В силу инволютивности образом точки $Y' = X'_1$ служит точка $Y'_1 = X'$. Поэтому прямая Δ проходит через точки пересечения пар прямых $O'X'_1$ и O'_1X, $O'X'$ и $O'_1X'_1$ (рис. Д.30). Это означает, что прямая Δ является полярой точки A, в которой пересекаются прямые $O'O'_1$ и $X'X'_1$. Если Z' — произвольная точка коники C, то для построения ее образа Z'_1 при данной проективной инволюции нужно соединить точку O' с точкой пересечения прямых Δ и O'_1Z'. Так как Δ — поляра точки A, прямая $Z'Z'_1$ проходит через точку A.

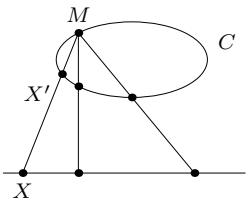


Рис. Д.29

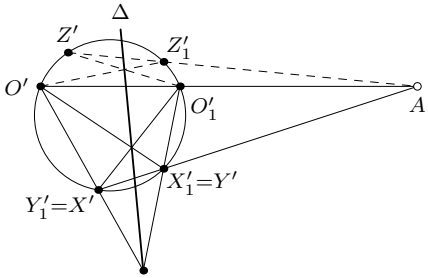


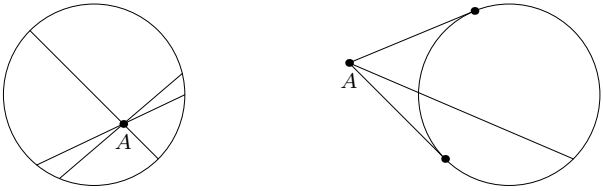
Рис. Д.30

Проверим теперь, что преобразование $X' \mapsto X'_1$ коники C, при котором все прямые $X'X'_1$ проходят через фиксированную точку A, проективно (инволютивность этого преобразования очевидна). Для этого

достаточно заметить, что все пары прямых $O'X_1'$ и $O_1'X'$ пересекаются на одной прямой — поляре точки A. Это означает, что соответствие $X' \mapsto X_1'$ проективное. □

По условию точка A не принадлежит конике C. В том случае, когда точка A лежит внутри коники C (рис. Д.31 (а)), инволюция не имеет неподвижных точек, а в том случае, когда точка A лежит вне коники C (рис. Д.31 (б)), инволюция имеет 2 неподвижные точки.

Другое описание инволютивных проективных преобразований прямой l использует пучок коник, проходящих через 4 фиксированные точки (см. с. 490). При этом фиксированные точки не должны лежать на прямой l. Пусть коника из такого пучка пересекает прямую l в точках X_1 и X_2. Сопоставим тогда точке X_1 точку X_2, а точке X_2 — точку X_1.



а) б)

Рис. Д.31.

Теорема 12. *Соответствие $X_1 \leftrightarrow X_2$, полученное с помощью пучка коник, проективно.*

Доказательство. Пусть уравнения ограничений двух коник пучка на прямую l имеют вид $x^2 + a_1x + b_1 = 0$ и $x^2 + a_2x + b_2 = 0$. Тогда ограничение любой коники пучка на прямую l задается уравнением

$$x^2 + a_1x + b_1 + k(x^2 + a_2x + b_2) = 0.$$

Это уравнение имеет корни x_1 и x_2, причем $x_1 + x_2 = -\dfrac{a_1 + ka_2}{1+k}$, $x_1x_2 = \dfrac{b_1 + kb_2}{1+k}$. Пусть p, q, r — ненулевые решения системы

$$\begin{cases} pb_1 - qa_1 + r = 0, \\ pb_2 - qa_2 + r = 0. \end{cases}$$

Тогда $px_1x_2 + q(x_1 + x_2) + r = 0$. Это означает, что x_1 и x_2 получаются друг из друга дробно-линейным преобразованием, которое, очевидно, инволютивно. □

Из теоремы 12 следует, что пересечения пучка коник с прямой l задают проективную инволюцию. Нетрудно показать, что любую проективную инволюцию прямой можно получить таким образом. В самом

деле, пусть при проективной инволюции точка A_1 переходит в точку A_2, а точка B_1 переходит в точку B_2. Тогда точка A_2 переходит в точку A_1, поэтому проективное преобразование уже однозначно определено образами трех точек. Следовательно, пучок коник, проходящих через точки A, B, C, D (рис. Д.32), задает именно эту инволюцию.

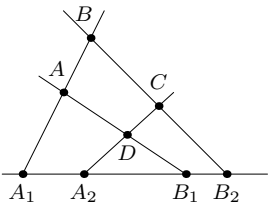


Рис. Д.32.

Обратите внимание, что мы не воспользовались тем, что точка B_2 переходит в точку B_1. Это связано с тем, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 13. *Дробно-линейное преобразование, меняющее местами две различные точки A_1 и A_2, инволютивно.*

Доказательство. Пусть f — комплексификация данного преобразования. Тогда f имеет неподвижную точку B. Преобразование $f^2(X) = f(f(X))$ имеет неподвижные точки A_1, A_2 и B, причем все они различны. Следовательно, преобразование f^2 тождественно. □

Из теоремы 13 следует, что для любых двух пар точек проективной прямой A и A', B и B' существует проективная инволюция, переставляющая точки каждой пары. Будем говорить, что три пары точек проективной прямой A и A', B и B', C и C' находятся в инволюции, если существует проективная инволюция, переставляющая точки каждой пары. При этом в качестве проективной прямой можно рассматривать и пучок прямых, проходящих через фиксированную точку плоскости.

Один из наиболее интересных примеров точек в инволюции можно получить с помощью теоремы 12. Для этого нужно рассмотреть пары точек пересечения прямой l с некоторыми тремяониками из пучка коник, проходящих через фиксированные 4 точки. Полученные при этом три пары точек будут находиться в инволюции. В частности, когда две или три из рассматриваемых коник вырожденные, получаем следующие утверждения.

1. *Точки пересечения прямой l с прямыми AB и CD, AC и BD, AD и BC находятся в инволюции.*

2. *Точки пересечения прямой l с коникой, описанной вокруг четырехугольника $ABCD$, и с прямыми AB и CD, AD и BC находятся в инволюции.*

Напомним, что точка b прямой с началом координат a называется средним гармоническим точек x_1 и x_2, если

$$\frac{2}{b-a} = \frac{1}{x_1-a} + \frac{1}{x_2-a}.$$

Среднее гармоническое инвариантно относительно проективных преобразований, поэтому можно считать, что $a=0$ и $b=\infty$. Тогда $x_1=-x_2$, а значит, $[a,\, b,\, x_1,\, x_2]=-1$. Назовем четверку точек $\{a,\, b,\, c,\, d\}$ *гармонической*, если $[a,\, b,\, c,\, d]=-1$.

Теорема 14. *Пусть a и b — неподвижные точки проективной инволюции f. Тогда для любой точки x четверка точек $\{a,\, b,\, x,\, f(x)\}$ будет гармонической.*

Доказательство. Можно считать, что $a=0$ и $b=\infty$. Тогда $f(x)=\lambda x$, а так как f — инволюция, $\lambda=-1$. Ясно, что

$$[0,\, \infty,\, x,\, f(x)]=\frac{x}{f(x)}=-1. \qquad \square$$

Теорема 15 (Дарбу). *Пусть f — некоторое преобразование вещественной проективной прямой $\mathbb{RP}^1$, переводящее любую гармоническую четверку точек в гармоническую четверку точек. Тогда f — проективное преобразование.*

Доказательство. Рассмотрим композицию $g(f(x))$, где g — проективное преобразование, переводящее точки $f(0)$, $f(1)$ и $f(\infty)$ в точки 0, 1 и ∞ соответственно. В результате получим преобразование φ, оставляющее точки 0, 1 и ∞ неподвижными и переводящее любую гармоническую четверку точек в гармоническую четверку точек. Требуется доказать, что это преобразование тождественно. Четверка $\left\{\infty,\, \dfrac{\lambda+\mu}{2},\, \lambda,\, \mu\right\}$ гармоническая, поэтому

$$\varphi\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right)=\frac{\varphi(\lambda)+\varphi(\mu)}{2}.$$

Следовательно, $2\varphi(\lambda)=\varphi(2\lambda)$ и $\varphi(\lambda+\mu)=\varphi(\lambda)+\varphi(\mu)$. Теперь легко проверить, что $\varphi(m/n)=m/n$ при натуральных m и n, $\varphi(0)=0$ и $\varphi(-\lambda)=-\varphi(\lambda)$ при всех $\lambda\in\mathbb{R}$. Таким образом, $\varphi(\lambda)=\lambda$ при $\lambda\in\mathbb{Q}$. Несложно проверить, что

$$\frac{\lambda^2-\lambda}{\lambda^2+\lambda}:\frac{1-\lambda}{1+\lambda}=-1,$$

т. е. четверка $\{\lambda,\, -\lambda,\, \lambda^2,\, 1\}$ гармоническая. Поэтому

$$\frac{\varphi(\lambda^2)-\varphi(\lambda)}{\varphi(\lambda^2)+\varphi(\lambda)}:\frac{1-\varphi(\lambda)}{1+\varphi(\lambda)}=-1,$$

т. е. $\varphi(\lambda^2)=(\varphi(\lambda))^2$. Это, в частности, означает, что условия $x>0$ и $\varphi(x)>0$ эквивалентны. Учитывая, что $\varphi(\lambda)=\lambda$ при $\lambda\in\mathbb{Q}$ и $\varphi(\lambda+\mu)=$ $=\varphi(\lambda)+\varphi(\mu)$ при $\lambda,\, \mu\in\mathbb{R}$, получим $\varphi(\lambda)=\lambda$ при $\lambda\in\mathbb{R}$. $\square$

Задачи

Проективная плоскость и проективные пространства

Д.1. Доказать, что любая прямая в $\mathbb{CP}^2$ пересекает $\mathbb{RP}^2$.

Д.2. Докажите, что любая сфера в $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{RP}^n \subset \mathbb{CP}^n$ пересекает бесконечно удаленную гиперплоскость $z_{n+1} = 0$ по квадрике $z_1^2 + \ldots + z_n^2 = 0$.

Д.3. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1 так, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке M. Докажите, что если точки A_1, B_1, C_1 и M имеют однородные координаты $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ и $(1, 1, 1)$ соответственно, то точки A, B и C имеют однородные координаты $(-1, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$ и $(1, 1, -1)$.

Д.4. Докажите, что касательная к эллипсу $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, проведенная из точки $(1, \pm i, 0)$, проходит через его фокус.

Д.5. Гипербола с перпендикулярными асимптотами пересекает бесконечно удаленную прямую в точках $(x_1, y_1, 0)$ и $(x_2, y_2, 0)$. Докажите, что $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.

Д.6. а) Докажите, что радикальные оси каждой пары из трех окружностей пересекаются в одной точке.

б) Три коники имеют общие точки A и B. Докажите, что общие хорды этих коник имеют общую точку.

Поляра точки относительно коники

Д.7. На плоскости дана коника. С помощью одной линейки постройте:

а) точку, лежащую на поляре данной точки A относительно данной коники;

б) поляру данной точки A относительно данной коники;

в) касательную, проведенную из данной точки A к данной конике;

г) касательную к данной конике в данной точке A, лежащей на конике.

Д.8. Докажите, что поляра фокуса коники совпадает с директрисой.

Д.9. Прямые a, b, c и d являются полярами относительно коники точек A, B, C и D, лежащих на одной прямой. Докажите, что $[a, b, c, d] = [A, B, C, D]$.

Д.10. Стороны треугольника $A_1B_1C_1$ являются полярами вершин треугольника ABC относительно коники. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Проективная двойственность

Д.11. а) Докажите, что если стороны AC, CE и EA треугольника ACE касаются некоторой коники в точках B, D и F соответственно, то прямые AD, CF и EB пересекаются в одной точке.

б) Сформулируйте двойственное утверждение.

Д.12. Треугольник PQR называют *автополярным* относительно коники C, если каждая его сторона является полярой (относительно C) противоположной вершины.

а) Докажите, что треугольник PQR автополярен относительно коники C тогда и только тогда, когда его вершины совпадают с точками пересечения диагоналей и двух пар противоположных сторон некоторого четырехугольника, описанного вокруг коники C.

б) Конус $z^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ пересекает плоскость Π по конике C, а оси Ox, Oy и Oz пересекают эту плоскость в точках X, Y и Z. Докажите, что треугольник XYZ автополярен относительно коники C.

Д.13. а) Докажите, что поляра точки a относительно коники $xAx^T = 0$ задается уравнением $aAx^T = 0$.

б) Докажите, что коника, двойственная конике $xBx^T = 0$ относительно коники $xAx^T = 0$, задается уравнением $xCx^T = 0$, где $C = AB^{-1}A$.

Д.14. Рассмотрим окружность C с центром $(a, 0)$ и радиусом R. Пусть C^* — коника, двойственная конике C относительно единичной окружности $x^2 + y^2 = 1$.

а) Докажите, что уравнение коники C^* имеет вид

$$x^2 + y^2 = e^2 \left(x - \frac{1}{a}\right)^2,$$

где $e^2 = \dfrac{a^2}{R^2}$.

б) Докажите, что эксцентриситет коники C^* равен e, а ее фокусом и директрисой служат начало координат и поляра центра окружности C относительно единичной окружности.

Д.15. Две коники пересекаются в точках A, B, C и D. Прямые AB и CD, BC и AD, AC и BD пересекаются в точках P, Q, R соответственно. Докажите, что точки пересечения общих касательных к коникам лежат на прямых PQ, QR и PR.

Проективные инволюции и гармонические четверки точек

Д.16. Докажите, что любая проективная инволюция прямой l получается как сечение прямой l пучком окружностей, проходящих через две фиксированные точки.

Д.17. Дано проективное инволютивное преобразование пучка прямых, проходящих через фиксированную точку. Докажите, что существуют две ортогональные прямые этого пучка, соответствующие друг другу при инволюции.

Д.18. Точки A', B' и C' лежат на прямых BC, AC и AB соответственно. Докажите, что ортогональные проекции точек A и A', B и B', C и C' на произвольную прямую находятся в инволюции.

Д.19. Прямые AB и CD, AD и BC пересекаются в точках E и F; O — произвольная точка. Докажите, что прямые OA и OC, OB и OD, OE и OF находятся в инволюции.

Д.20. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, а продолжения его сторон пересекаются в точках E и F.

а) Докажите, что $\{AO, BO, EO, FO\}$ — гармоническая четверка прямых.

б) Прямая AC пересекает прямую EF в точке P. Докажите, что $\{A, C, O, P\}$ — гармоническая четверка точек.

Д.21. Постройте n-угольник, стороны которого проходят через n данных точек, а вершины лежат на данной окружности.

Д.22. Рассмотрим две различные проективные инволюции f и g коники C, для которых все прямые XX', где $X' = f(X)$ или $g(X)$, проходят через точки F и G соответственно. Докажите, что $fg = gf$ тогда и только тогда, когда точка F лежит на поляре точки G относительно коники C.

Д.23. На конике C фиксирована точка A. Рассмотрим всевозможные хорды X_1X_2 коники C, которые видны из точки A под прямым углом. Докажите, что

а) отображение $X_1 \mapsto X_2$ проективное;

б) все хорды X_1X_2 проходят через одну и ту же точку.

Д.24. Окружности S_a и S_b пересекают прямую l, на которой лежат центры этих окружностей, в точках A_1 и A_2, B_1 и B_2. Общие касательные к окружностям S_a и S_b пересекают прямую l в точках C_1 и C_2. Доказать, что точки A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2 находятся в инволюции.

§4. Специальные свойства коник и квадрик

Конфокальные (софокусные) коники и квадрики

Пусть a и b — числа, причем $a > b$. Рассмотрим семейство коник

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} = 1, \qquad \text{(Д.21)}$$

зависящее от параметра λ. Тогда и для эллипсов $(b>\lambda)$, и для гипербол $(a>\lambda>b)$ фокусы лежат на оси Ox и удалены от начала координат на расстояние $\sqrt{(a-\lambda)-(b-\lambda)}=\sqrt{(a-\lambda-\lambda-b)}=\sqrt{a-b}$. Таким образом, фокусы всех коник совпадают, и потому такие коники называют *конфокальными* (*софокусными*).

Гомотетией добьемся того, что фокусы окажутся в точках ±1. Семейство (Д.21) конфокальных коник с фокусами в точках ±1 связано с интересной функцией комплексного переменного — так называемой *функцией Жуковского*

$$w=\frac{1}{2}\Big(z+\frac{1}{z}\Big). \qquad (Д.22)$$

Посмотрим, куда отображаются лучи $z=te^{i\varphi}$, $t>1$, при фиксированном φ и ортогональные им окружности $z=te^{i\varphi}$ при фиксированном $t>1$ (рис. Д.33). Имеем

$$z=te^{i\varphi}\Rightarrow w=\frac{1}{2}\Big(t+\frac{1}{t}\Big)\cos\varphi+\frac{i}{2}\Big(t-\frac{1}{t}\Big)\sin\varphi.$$

Следовательно, окружности (при $t>1$) переходят в эллипсы (если обозначить t через e^{α})

$$\frac{x^2}{\operatorname{ch}^2\alpha}+\frac{y^2}{\operatorname{sh}^2\alpha}=1,$$

а лучи — в гиперболы, имеющие уравнения

$$\frac{x^2}{\cos^2\varphi}-\frac{y^2}{\sin^2\varphi}=1.$$

Получилось семейство софокусных коник. Функция Жуковского конформно отображает внешность единичного круга на внешность отрезка $[-1,\,1]$. Это означает, в частности, что через любую точку $(x,\,y)$, $x\neq0$, $y\neq0$, проходит ровно один эллипс и ровно одна гипербола семейства и они ортогональны друг другу.

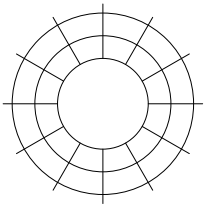


Рис. Д.33

Разумеется, этот факт легко получить и непосредственно, без апелляции к комплексному анализу, что мы и сделаем, когда будем обсуждать n-мерный случай.

Из полученных выражений для софокусных эллипсов можно извлечь несколько интересных следствий.

1. Пусть Γ_1 и Γ_2 — два софокусных эллипса. Тогда отображение эллипса Γ_1 на Γ_2 вдоль траектории софокусных им гипербол представляет собой ограничение на Γ_1 аффинного преобразования.

Действительно, речь идет о преобразовании, которое точку $(\operatorname{ch}\alpha_1\cos\varphi,\ \operatorname{sh}\alpha_1\sin\varphi)$ отображает в $(\operatorname{ch}\alpha_2\cos\varphi,\ \operatorname{sh}\alpha_2\sin\varphi)$. Его аффинность очевидна.

2. Диагонали криволинейного четырехугольника $w_1w_2w_3w_4$, образованного конфокальнымиониками, равны.

Действительно, пусть $w_{1,2}$ суть образы точек $z_{1,2}=t_{1,2}e^{i\varphi_1}$, а $w_{3,4}$ суть образы точек $z_{3,4}=t_{2,1}e^{i\varphi_2}$. Простые вычисления показывают, что $|w_1-w_3|=|w_2-w_4|$.

А вот еще один интересный факт.

Пусть XA и XB — касательные к эллипсу с фокусами F_1 и F_2. Тогда отрезки AX и BX образуют равные углы с касательной в точке X к эллипсу с теми же фокусами (рис. Д.34).

Действительно, согласно задаче 4.21 угол AXF_1 равен углу BXF_2. Кроме того, отрезки F_1X и F_2X, как было доказано на с. 85, образуют равные углы с касательной в точке X.

Из последнего результата можно извлечь интересное следствие. Наденем на неподвижный эллипс ремень, длина которого больше длины эллипса, и натянем этот ремень, держа его за некоторую точку X. *Тогда всевозможные положения точки X представляют собой эллипс, софокусный с исходным эллипсом* (рис. Д.35).

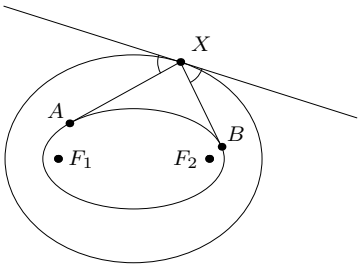


Рис. Д.34

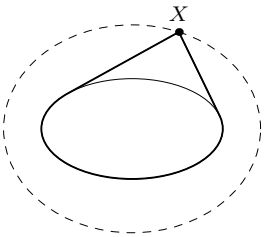


Рис. Д.35

Для доказательства этого нужно применить следующее утверждение.

Лемма. *Пусть C — неподвижная выпуклая кривая, $l=|xz|+|yz|+\operatorname{arc}(xy)$ — длина кривой, изображенной на рис.* Д.36. *Тогда*

$$\frac{dl}{dt}=\left|\frac{dz}{dt}\right|(\cos\varphi-\cos\psi).$$

Доказательство. Ясно, что

$$\frac{d}{dt}(\operatorname{arc}(xy))=\left|\frac{dx}{dt}\right|-\left|\frac{dy}{dt}\right|.$$

Кроме того,

$$\frac{d}{dt}(|xz|) = \frac{d}{dt}\sqrt{(x-z,\, x-z)} =$$
$$= |x-z|^{-1}\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt},\, x-z\right) = -\left|\frac{dx}{dt}\right| + \left|\frac{dz}{dt}\right|\cos\varphi.$$

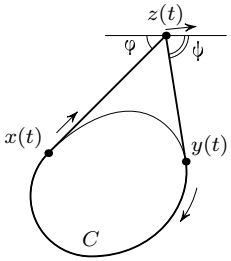


Рис. Д.36

Аналогично

$$\frac{d}{dt}(|yz|) = \left|\frac{dy}{dt}\right| - \left|\frac{dz}{dt}\right|\cos\psi,$$

и мы приходим к требуемой формуле. □

Таким образом, при движении точки X по эллипсу, софокусному с исходным эллипсом, величина l (длина ремня) остается постоянной, так как в этой ситуации $\varphi = \psi$.

Кроме описанных выше конфокальных гипербол и эллипсов имеется важное семейство конфокальных парабол. Рассмотрим простейшую ортогональную систему прямых — вертикальные и горизонтальные прямые. Рассмотрим, далее, отображение $z \mapsto w = z^2$. Вертикальные прямые $a + it$ переходят в семейство парабол $x = a^2 - \dfrac{y^2}{4a^2}$, фокусы которых совпадают с началом координат. Горизонтальные прямые переходят в параболы, ортогональные полученным параболам, причем их фокусы тоже совпадают с началом координат.

На плоскости ортогональных систем очень много: если взять внешность единичного круга с рассмотренной нами чуть раньше ортогональной системой окружностей и лучей и совершить однолистное конформное преобразование, то получится ортогональная система кривых. В пространстве же большего числа измерений ортогональные системы встречаются очень редко.

По аналогии с семейством конфокальных коник можно рассмотреть семейство *конфокальных (софокусных) квадрик*

$$\frac{x_1^2}{a_1-\lambda}+\ldots+\frac{x_n^2}{a_n-\lambda}=1. \qquad (Д.23)$$

Для определенности будем считать, что $a_1>a_2>\ldots>a_n>0$.

Покажем, что и в этом случае *через каждую точку* $(x_1,\ldots,x_n)$, *где* $x_1\ldots x_n\neq 0$, *проходит ровно* n *квадрик семейства* (Д.23), *причем квадрики этого семейства, проходящие через одну точку, ортогональны* (это означает, что касательные гиперплоскости к ним в этой точке попарно ортогональны).

Докажем это утверждение. Для данной точки $(x_1,\ldots,x_n)$ рассмотрим функцию

$$z(\lambda)=\frac{x_1^2}{a_1-\lambda}+\ldots+\frac{x_n^2}{a_n-\lambda}.$$

График этой функции изображен на рис. Д.37. Прямая $z=1$ пересекает этот график ровно в n точках.

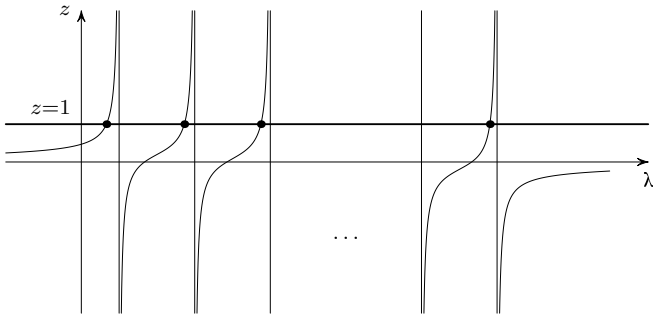


Рис. Д.37.

Далее, касательная гиперплоскость к квадрике (Д.23) в точке $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ задается уравнением

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i\xi_i}{a_i-\lambda}=1.$$

Ясно, что вектор

$$\left(\frac{\xi_1}{a_1-\lambda},\ldots,\frac{\xi_n}{a_n-\lambda}\right)$$

ортогонален этой гиперплоскости.

Пусть квадрики с параметрами λ и μ проходят через точку $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i \xi_i}{a_i - \lambda} = 1 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i \xi_i}{a_i - \mu} = 1.$$

Тогда

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \Big(\frac{1}{a_i - \lambda} - \frac{1}{a_i - \mu} \Big) = (\lambda - \mu) \sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_i^2}{(a_i - \lambda)(a_i - \mu)}.$$

Это означает, что векторы

$$\Big(\frac{\xi_1}{a_1 - \lambda}, \ldots, \frac{\xi_n}{a_n - \lambda} \Big) \quad \text{и} \quad \Big(\frac{\xi_1}{a_1 - \mu}, \ldots, \frac{\xi_n}{a_n - \mu} \Big)$$

ортогональны, а значит, ортогональны и гиперплоскости, ортогональные этим векторам.

Точке $(x_1, \ldots, x_n)$, где $x_1 \ldots x_n \neq 0$, соответствует набор чисел $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, для которых

$$\frac{x_1^2}{a_1 - \lambda_i} + \ldots + \frac{x_n^2}{a_n - \lambda_i} = 1.$$

Эти числа называют *эллипсоидальными координатами* точки $(x_1, \ldots, x_n)$.

Рассмотрим подробнее случай $n = 3$. В этом случае

$$x_1^2 = \frac{(a_1 - \lambda_1)(a_1 - \lambda_2)(a_1 - \lambda_3)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)};$$

числа x_2^2 и x_3^2 вычисляются аналогично.

Фиксируем два эллипсоида, соответствующие параметрам λ_3 и λ_3'. Числа λ_1 и λ_2 можно рассматривать как координаты на этих эллипсоидах. Отобразим точку одного эллипсоида в точку другого эллипсоида с теми же координатами λ_1 и λ_2. Это соответствует перемещению точки с одного эллипсоида на другой по траектории, ортогональной всем эллипсоидам семейства (Д.23). В декартовых координатах это преобразование имеет вид $x \mapsto x'$, где

$$x_1' = \sqrt{\frac{a_1 - \lambda_3'}{a_1 - \lambda_3}}\, x_1,$$

и т. д. Удивительным образом, построенное преобразование эллипсоидов, как видно из формулы, оказалось *ограничением на эллипсоид аффинного преобразования трехмерного пространства.* Аналогичное преобразование можно рассмотреть не только для эллипсоидов, но и для других квадрик того же семейства, т. е. для однополостных и двуполостных гиперболоидов. Особенно интересный результат получается

для однополостных гиперболоидов: прямолинейные образующие одного гиперболоида переходят в прямолинейные образующие другого гиперболоида. Более того, *отображение прямолинейных образующих является изометрией*. Дело в том, что если концы отрезка xy перемещаются по траекториям, ортогональным этому отрезку (рис. Д.38), то длина отрезка xy не изменяется. Действительно, по условию

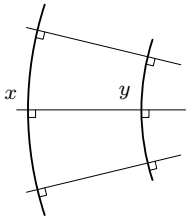


Рис. Д.38.

$$\left(\frac{dx}{dt},\, x-y\right) = \left(\frac{dy}{dt},\, x-y\right) = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}(x-y,\, x-y) = 2\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt},\, x-y\right) = 0.$$

Поэтому длина отрезка xy постоянна.

Рациональная параметризация коники

Фиксируем на конике некоторую точку $(x_0,\, y_0)$ и проведем через нее прямую $y = y_0 + t(x - x_0)$. Она пересекает конику еще в одной точке. Вычислим координаты этой точки. Для этого нужно в уравнение коники вместо y подставить $y_0 + t(x - x_0)$; в результате получим уравнение вида $A(t)x^2 + B(t)x + C(t) = 0$, где A, B и C — многочлены от t. У этого уравнения известен один корень x_0. По теореме Виета второй корень x_1 равен $-x_0 - \dfrac{B(t)}{A(t)} = \dfrac{P(t)}{A(t)}$. Кроме того,

$$y_1 = y_0 + t(x_1 - x_0) = y_0 + t\left(-2x_0 - \frac{B(t)}{A(t)}\right) = \frac{Q(t)}{A(t)}.$$

Следовательно, для кривой второго порядка существуют такие многочлены $A(t)$, $P(t)$ и $Q(t)$, что при изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ точка с координатами $\left(\dfrac{P(t)}{A(t)},\, \dfrac{Q(t)}{A(t)}\right)$ движется по данной кривой; если при этом добавить точку, соответствующую бесконечному значению t, то в результате получим все точки кривой. Такое представление кривой с помощью многочленов A, P и Q называют *рациональной параметризацией*.

В качестве примера найдем в явном виде рациональную параметризацию окружности $x^2 + y^2 = 1$, фиксировав на ней точку $(1,\, 0)$. Уравнение прямой, проходящей через точку $(1,\, 0)$, имеет вид $y = t(x - 1)$; при этом значению $t = \infty$ соответствует прямая $x = 1$. Подставив выражение $y = t(x - 1)$ в уравнение $x^2 + y^2 = 1$, получим $x^2 + t^2(x^2 - 2x + 1) = 1$, т. е. $(1 + t^2)x^2 + (-2t^2)x + (t^2 - 1) = 0$. Произведение корней этого уравнения

равно $\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$, причем один из корней равен 1. Следовательно, интересующий нас корень x_1 равен $\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$. Поэтому $y_1 = t(x_1-1) = \dfrac{-2t}{t^2+1}$. Итак, единичная окружность допускает рациональную параметризацию $\left(\dfrac{t^2-1}{t^2+1},\ \dfrac{-2t}{t^2+1}\right)$.

Полученная рациональная параметризация окружности позволяет найти все ее точки, обе координаты которых рациональны. Такими точками будут те и только те точки, для которых параметр t рационален. В самом деле, если числа x_1 и y_1 рациональны, то число $t = y_1/(x_1-1)$ рационально. А если число t рационально, то числа $x_1 = \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$ и $y_1 = \dfrac{-2t}{t^2+1}$ тоже рациональны. Аналогичным способом можно найти все рациональные точки кривой второго порядка с рациональными коэффициентами, если на ней известна хотя бы одна рациональная точка $(x_0,\, y_0)$.

Другое применение рациональной параметризации связано с вычислением интегралов вида

$$\int R(\sqrt{ax^2+bx+c},\, x)\, dx,$$

где R — рациональная функция двух переменных. Дело в том, что кривая $y^2 = ax^2+bx+c$ допускает рациональную параметризацию $(x(t),\, y(t))$. Поэтому

$$\int R(\sqrt{ax^2+bx+c},\, x)\, dx = \int R(y(t),\, x(t))\, dx(t) = \int Q(t)\, dt,$$

где Q — некоторая рациональная функция. Вычислив интеграл от этой функции, нужно подставить вместо t выражение t через x и y, представляющее собой рациональную функцию.

Теорема Понселе и теорема о зигзаге

Рассмотрим две окружности, одна из которых лежит внутри другой. Возьмем на внешней окружности точку A_1 и проведем из нее хорду A_1A_2, касающуюся внутренней окружности. Затем из точки A_2 проведем (отличную от A_1A_2) хорду A_2A_3, касающуюся внутренней окружности, и т. д. (рис. Д.39).

Теорема 1 (Понселе). *Если $A_n = A_1$, то для любой точки B_1 внешней окружности в результате аналогичных построений получим $B_n = B_1$.*

Доказательство. Можно считать, что точки внешней окружности имеют вид $A(\varphi) = (\cos\varphi,\, \sin\varphi)$. Пусть $A_1 = A(\varphi)$, $A_2 = A(\psi)$, $A_1' =$

$= A(\varphi + \Delta\varphi)$ и $A'_2 = A(\psi + \Delta\psi)$, P — точка пересечения хорд A_1A_2 и $A'_1A'_2$ (рис. Д.40). Тогда $|A_1A'_1| : |A_1P| = |A_2A'_2| : |A'_2P|$. При бесконечно малом $\Delta\varphi = d\varphi$ получаем

$$\frac{d\varphi}{l(\varphi)} = \frac{d\psi}{l(\psi)}, \tag{Д.24}$$

где $l(\alpha)$ — длина касательной, проведенной из точки $A(\alpha)$ к внутренней окружности (таких касательных две, но их длины равны).

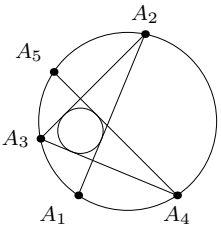


Рис. Д.39

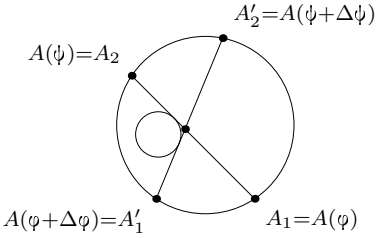


Рис. Д.40

Рассмотрим функцию $\psi(\varphi)$, соответствующую отображению $A_1 \mapsto \mapsto A_2$. Из соотношения (Д.24) следует, что

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\int_\varphi^{\psi(\varphi)} \frac{d\alpha}{l(\alpha)}\right) = \frac{d\psi}{d\varphi}\frac{1}{l(\psi)} - \frac{1}{l(\varphi)} = 0,$$

т. е. $\int_\varphi^{\psi(\varphi)} \frac{d\alpha}{l(\alpha)} = c$ — постоянная величина. Положим $\psi^2(\varphi) = \psi(\psi(\varphi))$, $\psi^n(\varphi) = \psi(\psi^{n-1}(\varphi))$. Тогда

$$nc = \int_\varphi^{\psi(\varphi)} \frac{d\alpha}{l(\alpha)} + \int_{\psi(\varphi)}^{\psi^2(\varphi)} \frac{d\alpha}{l(\alpha)} + \ldots + \int_{\psi^{n-1}(\varphi)}^{\psi^n(\varphi)} \frac{d\alpha}{l(\alpha)} = \int_\varphi^{\psi^n(\varphi)} \frac{d\alpha}{l(\alpha)}.$$

Ломаная $A_1A_2A_3\ldots$ замыкается после n шагов, сделав при этом m оборотов, если $\psi^n(\varphi) - \varphi = 2\pi m$. А так как функция $\int_0^t \frac{d\alpha}{l(\alpha)}$ монотонно возрастает при возрастании t, условие $\psi^n(\varphi) - \varphi = 2\pi m$ эквивалентно тому, что

$$\int_\varphi^{\varphi+2\pi m} \frac{d\alpha}{l(\alpha)} = \int_0^{2\pi m} \frac{d\alpha}{l(\alpha)} = nc.$$

Это условие либо выполняется для всех φ, либо не выполняется для всех φ одновременно. □

При доказательстве теоремы Понселе мы пользовались как тем, что внешняя кривая — окружность (иначе треугольники $A_1PA'_1$ и A'_2PA_2 не

будут подобны), так и тем, что внутренняя кривая — окружность (иначе функция $l(\varphi)$ будет двузначной, а не однозначной).

Другими методами можно доказать следующее обобщение теоремы Понселе.

Теорема 2. *Пусть C и C' — коники общего положения* (т. е. они не вырожденные и не касаются друг друга). *Возьмем на C точку A_1 и рассмотрим точку $A_2 \in C$, для которой прямая A_1A_2 касается C'. Затем рассмотрим точку $A_3 \in C$, для которой прямая A_2A_3 касается C', и т. д. Тогда если $A_n = A_1$, то $B_n = B_1$ для любой точки $B_1 \in C$.*

Мы не будем доказывать эту теорему, потому что все известные доказательства весьма сложные.

На теорему Понселе до некоторой степени внешне похожа следующая теорема.

Теорема 3 (о зигзаге). *Пусть C и C' — две окружности в $\mathbb{R}^3$, причем для некоторого ρ каждая точка любой из этих окружностей удалена на расстояние ρ ровно от двух точек другой окружности. Построим ломаную $A_1A_1'A_2A_2'\ldots$ со стороной ρ* (рис. Д.41). *Тогда если $A_{n+1} = A_1$ для некоторой точки $A_1 \in C$, то $B_{n+1} = B_1$ для любой точки $B_1 \in C$.*

Доказательство ([B4]). Пусть O и O' — центры окружностей C и C'. Положим $y_i = \overrightarrow{OA_i}$, $y_i' = \overrightarrow{A_i'O'}$ и $\Delta = \overrightarrow{O'O}$ (рис. Д.42). Рассмотрим также векторы n и n' единичной длины, ортогональные плоскостям окружностей C и C' соответственно.

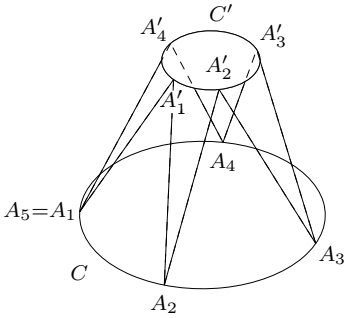


Рис. Д.41

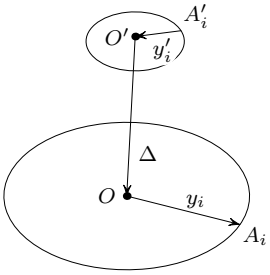


Рис. Д.42

Достаточно доказать, что бесконечно малое смещение dy_1 точки A_1 приводит к такому смещению dy_{n+1} точки A_{n+1}, что $\dfrac{|dy_1|}{|dy_{n+1}|} = 1$. Чтобы доказать это утверждение, нам придется рассмотреть также смещение dy_1'.

Так как вектор dy_1 ортогонален векторам y_1 и n, $dy_1 = \pm(n \times y_1)\dfrac{|dy_1|}{|y_1|}$. Заменив при необходимости вектор n на вектор $-n$, получим

$$dy_1 = (n \times y_1)\frac{|dy_1|}{|y_1|}.$$

Аналогично

$$dy_1' = (n' \times y_1')\frac{|dy_1'|}{|y_1'|}.$$

Вектор $y_1' + \Delta + y_1$ имеет постоянную длину ρ, поэтому

$$(y_1' + \Delta + y_1,\, dy_1' + dy_1) = 0,$$

т. е.

$$(y_1' + \Delta + y_1,\, n' \times y_1')\frac{|dy_1'|}{|y_1'|} + (y_1' + \Delta + y_1,\, n \times y_1)\frac{|dy_1|}{|y_1|} = 0.$$

Таким образом,

$$\frac{|dy_1'|}{|dy_1|} = -\frac{(\Delta + y_1',\, n \times y_1)}{(\Delta + y_1,\, n' \times y_1')}\frac{|y_1'|}{|y_1|}.$$

По отношению к точке A_1' точки A_1 и A_2 играют аналогичные роли, поэтому

$$\frac{|dy_2|}{|dy_1'|} = -\frac{(\Delta + y_2,\, n' \times y_1')}{(\Delta + y_1',\, n \times y_2)}\frac{|y_2|}{|y_1'|}.$$

Перемножим эти два равенства. Если учесть, что $|y_1| = |y_2|$, то в результате получим

$$\frac{|dy_2|}{|dy_1|} = \frac{(\Delta + y_1',\, n \times y_1)(\Delta + y_2,\, n' \times y_1')}{(\Delta + y_1,\, n' \times y_1')(\Delta + y_1',\, n \times y_2)}. \qquad (Д.25)$$

Равенство (Д.25) можно упростить, если воспользоваться следующим вспомогательным утверждением.

Лемма. *Справедливы равенства*

$$(\Delta + y_1',\, n \times y_1) = -(\Delta + y_1',\, n \times y_2),$$
$$(\Delta + y_2,\, n' \times y_1') = -(\Delta + y_2,\, n' \times y_2').$$

Доказательство. Ясно, что $|y_1| = |y_2|$, $|\Delta + y_1' + y_1| = |\Delta + y_1' + y_2|$ и $(n,\, y_1) = (n,\, y_2)$. Поэтому

$$(y_1 - y_2,\, y_1 + y_2) = 0,$$
$$(y_1 - y_2,\, \Delta + y_1') = 0,$$
$$(y_1 - y_2,\, n) = 0.$$

Таким образом, векторы $y_1 + y_2$, $\Delta + y_1'$ и n лежат в одной плоскости Π, ортогональной вектору $y_1 - y_2$. Вектор $n \times (y_1 + y_2)$ ортогонален плоскости Π, поэтому

$$(\Delta + y_1',\, n \times (y_1 + y_2)) = 0.$$

Равенство $(\Delta + y_2,\, n' \times (y_1' + y_2')) = 0$ доказывается аналогично. □

С учетом доказанной леммы равенство (Д.25) принимает вид

$$\frac{|dy_2|}{|dy_1|} = \frac{(\Delta + y_2,\, n' \times y_2')}{(\Delta + y_1,\, n' \times y_1')}.$$

Равенство столь симметричного вида позволяет сделать вывод, что

$$\frac{|dy_{n+1}|}{|dy_1|} = \frac{|dy_2|}{|dy_1|} \cdot \frac{|dy_3|}{|dy_2|} \cdot \ldots \cdot \frac{|dy_{n+1}|}{|dy_n|} = \frac{(\Delta + y_{n+1},\, n' \times y_{n+1}')}{(\Delta + y_1,\, n' \times y_1')}.$$

А так как $y_{n+1} = y_1$ и $y_{n+1}' = y_1'$, мы получаем

$$\frac{|dy_{n+1}|}{|dy_1|} = 1,$$

что и требовалось. □

Двойное отношение четырех точек на конике

Для четырех точек X_1, X_2, X_3, X_4, лежащих на окружности C, можно определить *двойное отношение* $[X_1, X_2, X_3, X_4]$ следующим образом. Возьмем на окружности произвольную точку O и положим

$$[X_1,\, X_2,\, X_3,\, X_4] = [OX_1,\, OX_2,\, OX_3,\, OX_4].$$

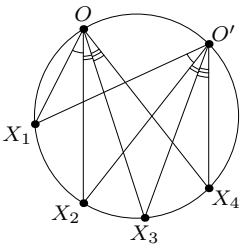


Рис. Д.43

Если вместо точки O взять другую точку O', то угол между прямыми OX_i и OX_j окажется равным углу между прямыми OX_i' и $O'X_j$ (рис. Д.43), поэтому

$$[O'X_1, O'X_2, O'X_3, O'X_4] = [OX_1, OX_2, OX_3, OX_4].$$

Аналогичным образом можно определить двойное отношение четырех точек, лежащих на одной конике. При проекции двойное отношение четырех прямых сохраняется, поэтому

$$[O'X_1',\, O'X_2',\, O'X_3',\, O'X_4'] = [OX_1,\, OX_2,\, OX_3,\, OX_4]$$

(см. рис. Д.44). Это означает, что двойное отношение точек X_1', X_2', X_3', X_4', лежащих на конике C', не зависит от выбора точки O' этой коники.

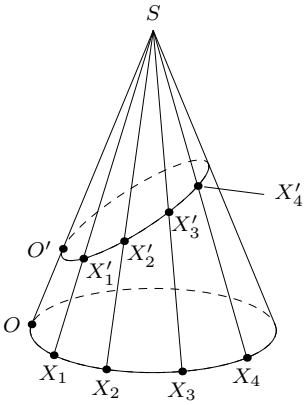


Рис. Д.44.

Независимость двойного отношения точек на конике от выбора точки O можно использовать для еще одного доказательства теоремы Паскаля о шестиугольнике, вписанном в конику. (Другие доказательства см. на с. 24 и 92.)

Теорема 4 (Паскаль). *Пусть точки A, B, C, D, E и F лежат на одной конике. Тогда точки пересечения прямых AB и DE, BC и EF, CD и FA лежат на одной прямой.*

Доказательство. Спроецируем точки A, C, D и E из точек B и F на прямые $l_1 = DE$ и $l_2 = CD$, соответственно (рис. Д.45). Двойные

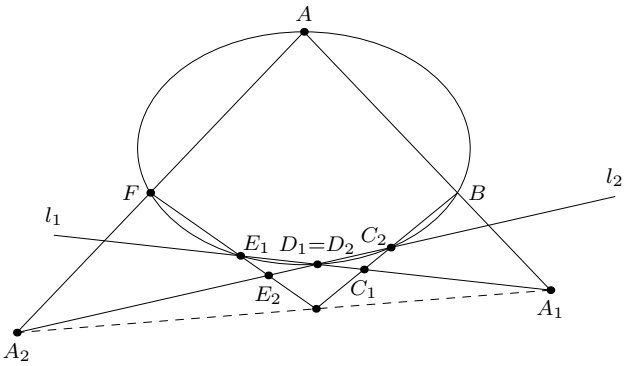


Рис. Д.45.

отношения $[A_1, C_1, D_1, E_1]$ и $[A_2, C_2, D_2, E_2]$ равны двойному отноше-

нию $[A, C, D, E]$ точек на конике. Поэтому соответствие между рассматриваемыми точками прямых l_1 и l_2 проективное, причем $D_1 = D_2$. А значит, прямые, соединяющие соответственные точки, пересекаются в одной точке (см. с. 66), т. е. прямые A_1A_2, C_1C_2 и E_1E_2 пересекаются в одной точке. Иными словами, точка $C_1C_2 \cap E_1E_2 = BC \cap EF$ лежит на прямой, соединяющей точки $A_1 = AB \cap DE$ и $A_2 = CD \cap FA$. □

Независимость двойного отношения точек на конике от выбора точки O геометрически можно проинтерпретировать следующим образом. Пусть l и l' — некоторые прямые, C — коника. Выберем на C точки O и O' и с их помощью построим отображение $l \to l'$. Для этого точке Y сопоставим точку X, в которой прямая YO пересекает конику, а точке X сопоставим точку Y', в которой прямая YO пересекает прямую l' (рис. Д.46). Тогда полученное в результате отображение проективно.

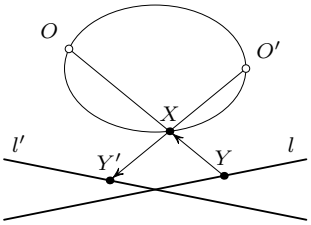


Рис. Д.46

Можно поступить и наоборот. Предположим, что задано проективное отображение $l \to l'$. Фиксируем некоторые точки O и O' и будем рассматривать точки X, в которых пересекаются прямые OY и $O'Y'$, где Y и Y' — соответственные точки. Вполне естественно ожидать, что точки X будут расположены на конике, проходящей через точки O и O'. Если только учесть, что в вырожденном случае вместо коники может получиться прямая (см. с. 66), то это действительно так.

Рассмотрим три точки X_1, X_2 и X_3, в которых пересекаются пары соответственных прямых OY_i и $O'Y_i'$. Вместе с точками O и O' они составляют пять точек. В невырожденной ситуации через них можно провести ровно одну конику C. Пусть прямые OY и $O'Y'$, где Y и Y' — соответственные точки, пересекают C в точках X и X'. Тогда $[X_1, X_2, X_3, X] = [X_1, X_2, X_3, X']$, т. е. точки X и X' совпадают. Следовательно, точка пересечения прямых OY и $O'Y'$ лежит на конике C.

Итак, в случае проективного соответствия пучков прямых, проходящих через точки O и O', точки пересечения соответственных прямых лежат на конике, проходящей через точки O и O'. Это свойство дает многочисленные способы получать коники исходя из прямых и коник.

Пример 1. Прямые l и l', а также точки A, O и O' фиксированы. Прямая YY', где точки Y и Y' лежат на прямых l и l', вращается вокруг точки A. Прямые OY и $O'Y'$ пересекаются в точке X (рис. Д.47). Тогда точка X движется по конике.

Пример 2. Прямая l и точки O и O' фиксированы. Точка Y движется по прямой l. Прямые, полученные из прямых OY и $O'Y$ поворотом вокруг O и O' на фиксированные углы φ и ψ соответственно, пересекаются в точке X (рис. Д.48). Тогда точка X движется по конике, проходящей через точки O и O'.

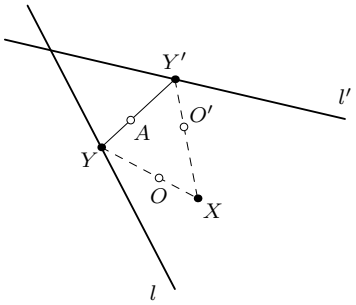


Рис. Д.47

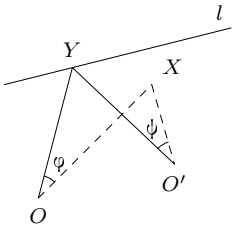


Рис. Д.48

Пример 3. В примере 2 точка Y может двигаться не только по прямой l, но и по конике C.

Двойное отношение точек на конике можно определить и по-другому. Проведем для этого в точке X_i касательную x_i; затем проведем к конике произвольную касательную l. Пусть прямая x_i пересекает l в точке Y_i. Тогда $[X_1, X_2, X_3, X_4] = [Y_1, Y_2, Y_3, Y_4]$. Доказательство этого утверждения достаточно провести для окружности. Пусть O — центр окружности, L — точка касания прямой l с окружностью, O_1 — точка, диаметрально противоположная L (рис. Д.49). Прямые O_1X_i и OY_i перпендикулярны прямой LX_i, поэтому они параллельны, а значит, $\angle LOY_i = \angle LO_1X_i$. Следовательно, $\sin X_iO_1X_j = \sin Y_iOY_j$, поэтому $[O_1X_1, O_1X_2, O_1X_3, O_1X_4] = [OY_1, OY_2, OY_3, OY_4]$.

Независимость двойного отношения $[Y_1, Y_2, Y_3, Y_4]$ от выбора касательной l тоже имеет интересные приложения. Разберем один пример.

Теорема 5. *Треугольники ABC и $A'B'C'$ описаны вокруг коники* Γ *(т. е. их стороны или продолжения сторон касаются* Γ*). Тогда точки A, B, C, A', B' и C' лежат на одной конике.*

Доказательство. Выберем в качестве касательных l и l' по одной стороне каждого из треугольников ABC и $A'B'C'$, например стороны BC и $B'C'$. Пусть X_1, X_2, X_3 и X_4 — точки касания остальных сторон треугольника с коникой (рис. Д.50). Если касательная в точке X_i пересекает прямые l и l' в точках Y_i и Y_i', то соответствие $Y_i \mapsto Y_i'$ проективное. Поэтому точки пересечения прямых AY_i' и $A'Y_i$ лежат на

конике, проходящей через точки A и A'. Ясно также, что $AY_1' \cap A'Y_1 = B$, $AY_2' \cap A'Y_2 = C$, $AY_3' \cap A'Y_3 = B'$ и $AY_4' \cap A'Y_4 = C'$. □

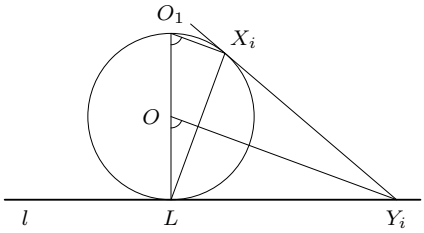


Рис. Д.49.

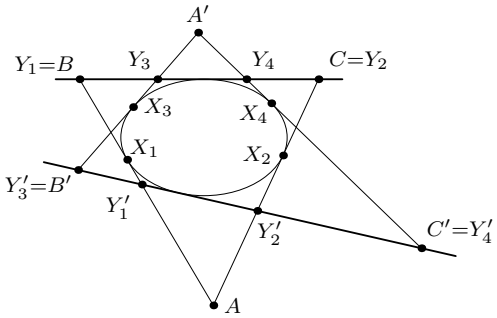


Рис. Д.50.

Следствие (теорема Понселе для треугольника). *Если коники* Γ_1 *и* Γ_2 *таковы, что существует треугольник, вписанный в* Γ_1 *и описанный вокруг* Γ_2*, то таких треугольников бесконечно много*: *любая точка коники* Γ_1 *может служить вершиной такого треугольника.*

Доказательство. Пусть треугольник ABC вписан в Γ_1 и описан вокруг Γ_2. Проведем хорду $A'B'$ коники Γ_1, касающуюся Γ_2. Из точек A' и B' проведем касательные к Γ_2; они пересекутся в некоторой точке C. Согласно теореме 5 точки A, B, C, A', B' и C' лежат на одной конике. С другой стороны, через пять точек A, B, C, A' и B' можно провести единственную конику: эта коника — Γ_1. Следовательно, точка C' лежит на Γ_1. □

Задачи

Д.25. Докажите, что все коники, двойственные (относительно коники $x^2+y^2+z^2=0$) коникам $\dfrac{x^2}{a-\lambda}+\dfrac{y^2}{b-\lambda}=z^2$, проходят через точки $(\pm 1,\ \pm i,\ \sqrt{a-b})$.

Д.26. Докажите, что все конфокальные коники имеют 4 общих касательных, проходящих через точки $(1,\ \pm i,\ 0)$.

Д.27. Докажите, что через прямую l в $\mathbb{CP}^3$, не содержащуюся в невырожденной квадрике Q, можно провести ровно две касательные плоскости к этой квадрике.

§5. Дополнительные вопросы неевклидовых геометрий

Замощение треугольниками сферы, плоскости и плоскости Лобачевского

Рассмотрим на евклидовой плоскости криволинейный треугольник, образованный тремя дугами окружностей или отрезками прямых. Для такого треугольника можно рассмотреть группу, порожденную отражениями (симметриями) относительно его сторон. Нас будут интересовать треугольники, при отражениях которых относительно сторон получается замощение, т. е. их образы при отражениях либо совпадают, либо не имеют общих внутренних точек. При этом совпадение подразумевается поточечное, т. е. совпадают не только сами треугольники, но и все их соответственные точки. Например, правильный треугольник и его образ при симметрии относительно высоты поточечно не совпадают.

Не теряя общности, можно считать, что две стороны криволинейного треугольника являются отрезками прямых (этого можно добиться, сделав инверсию с центром в одной из точек пересечения окружностей, содержащих стороны треугольника). Образы треугольника при отражениях относительно двух прямолинейных сторон составляют замощение тогда и только тогда, когда угол между этими сторонами равен π/n, где n — натуральное число. (Если не требовать поточечного совпадения образов, то угол может быть равен и $2\pi/n$.) Поэтому искомый треугольник должен иметь углы $(\pi/p,\ \pi/q,\ \pi/r)$; для краткости будем говорить, что такой треугольник имеет тип $(p,\ q,\ r)$.

Задача об отражениях криволинейного треугольника с углами α, β, γ в зависимости от знака числа $\alpha+\beta+\gamma-\pi$ фактически является задачей сферической, евклидовой или гиперболической геометрии. Точнее

говоря, в случае $\alpha+\beta+\gamma-\pi>0$ должны дополнительно выполняться три неравенства вида $\alpha+\beta<\gamma+\pi$, но для треугольника типа $(p,\,q,\,r)$ такие неравенства выполняются автоматически.

Поясним более подробно, что мы имеем в виду. Напомним, что стороны AB и AC криволинейного треугольника ABC можно считать отрезками прямых. Пусть O — центр окружности, содержащей дугу BC. Если точки O и A лежат по одну сторону от прямой BC, то $\alpha+\beta+\gamma>\pi$, а если точки O и A лежат по разные стороны от прямой BC, то $\alpha+\beta+\gamma<\pi$. Поэтому $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ лишь в том случае, когда BC — отрезок прямой. Таким образом, если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то мы получаем задачу об отражениях относительно трех евклидовых прямых.

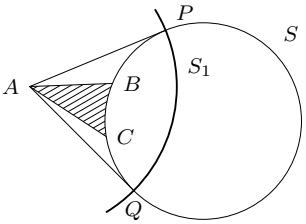


Рис. Д.51

Рассмотрим теперь случай, когда $\alpha+\beta+\gamma<\pi$, т. е. центр окружности S, одержащей дугу BC, и вершина A лежат по разные стороны от прямой BC. Проведем из точки A касательные AP и AQ к окружности S (рис. Д.51). Пусть S_1 — окружность радиуса $|AP|$ с центром A. Тогда стороны треугольника ABC являются гиперболическими прямыми для модели Пуанкаре в круге S_1. Ясно также, что симметрии относительно сторон криволинейного треугольника ABC являются симметриями относительно гиперболических прямых.

Это простое рассуждение имеет важное следствие: в случае $\alpha+\beta+\gamma<\pi$ все образы криволинейного треугольника ABC при отражениях относительно сторон лежат либо внутри некоторого круга, либо в некоторой полуплоскости.

Нам остается разобрать случай $\alpha+\beta+\gamma>\pi$. Такое неравенство еще не обеспечивает существования сферического треугольника с углами α, β, γ. Дополнительно должны выполняться три неравенства вида $\alpha+\beta<\pi+\gamma$, двойственных неравенствам вида $a+b>c$. Но если $\alpha,\,\beta,\,\gamma<\pi/2$, то неравенство $\alpha+\beta<\pi+\gamma$ выполняется автоматически. Поэтому будем считать, что существует сферический треугольник ABC с углами α, β и γ. Стереографическая проекция этого треугольника на плоскость, касающуюся сферы в вершине A, представляет собой криволинейный треугольник $AB'C'$ с углами α, β и γ, причем угол A прямолинейный. Легко проверить, что если криволинейные треугольники $AB'C'$ и AB_1C_1 с соответственно равными углами имеют общий прямолинейный угол A, то эти треугольники гомотетичны с центром гомотетии A. В самом деле, если O' и O_1 — центры окружностей, содержащих дуги $B'C'$ и B_1C_1, то треугольники $O'B'C'$ и $O_1B_1C_1$

являются равнобедренными треугольниками с параллельными боковыми сторонами, а значит, их основания $B'C'$ и B_1C_1 тоже параллельны. Поэтому, изменив при необходимости радиус сферы, можно добиться того, чтобы образ сферического треугольника при стереографической проекции совпадал с рассматриваемым криволинейным треугольником на плоскости. Ясно также, что симметрии относительно сторон криволинейного треугольника соответствуют симметриям относительно сторон сферического треугольника. В самом деле, точки A и B симметричны относительно сферической прямой l тогда и только тогда, когда любая сферическая окружность пересекает сферическую прямую l под прямым углом. Поэтому при стереографической проекции точки, симметричные относительно сферической прямой l, переходят в точки, симметричные относительно образа l.

Чтобы найти все возможные сферические и евклидовы треугольники с углами $(\pi/p,\ \pi/q,\ \pi/r)$, нужно решить в натуральных числах соответственно неравенство $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}>1$ и уравнение $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}=1$. Можно считать, что $p\leqslant q\leqslant r$. Тогда в обоих случаях $p\leqslant 3$. Несложный перебор приводит к сферическим треугольникам типа $(2,\ 2,\ n)$, $(2,\ 3,\ 3)$, $(2,\ 3,\ 4)$, $(2,\ 3,\ 5)$ и евклидовым треугольникам типа $(3,\ 3,\ 3)$, $(2,\ 4,\ 4)$, $(2,\ 3,\ 6)$.

Непосредственно можно убедиться, что образы всех указанных треугольников при отражениях относительно их сторон составляют замощение сферы или евклидовой плоскости. Для евклидовых треугольников см. рис. Д.52. Для образов сферических треугольников при

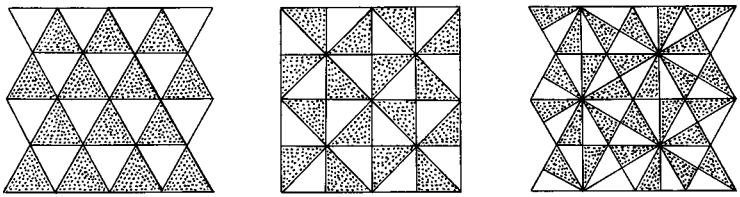


Рис. Д.52.

стереографической проекции можно нарисовать аналогичные картинки. В первых двух наиболее простых случаях см. рис. Д.53. Отметим, что требуемые замощения сферы (кроме первой серии треугольников) можно получить следующим образом. Соединим центр каждой грани правильного многогранника с вершинами и серединами сторон этой грани. Затем полученную систему отрезков (вместе с ребрами) спроецируем на описанную сферу из ее центра. Тогда для тетраэдра получим систему треугольников типа $(2,\ 3,\ 3)$, для куба и октаэдра получим

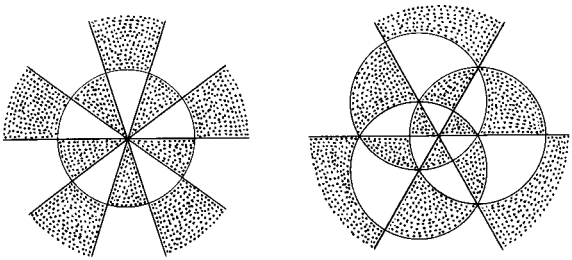


Рис. Д.53.

систему треугольников типа (2, 3, 4), а для додекаэдра и икосаэдра получим систему треугольников типа (2, 3, 5).

Чтобы найти все возможные гиперболические треугольники с углами $(\pi/p, \pi/q, \pi/r)$, нужно решить в натуральных числах неравенство $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<1$. Это неравенство выполняется для всех достаточно больших чисел p, q, r, поэтому оно имеет бесконечно много решений. Можно доказать, что если $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<1$, то образы гиперболического треугольника типа (p, q, r) при отражениях относительно сторон заполняют без перекрытий всю гиперболическую плоскость. Это следует из теоремы Пуанкаре о замощениях гиперболической плоскости многоугольниками (см. с. 245).

Фундаментальная область модулярной группы

Пусть G — группа, порожденная отражениями относительно сторон треугольника T с углами $(\pi/p, \pi/q, \pi/r)$. Тогда сферу, плоскость или плоскость Лобачевского можно представить в виде объединения треугольников gT $(g \in G)$, причем треугольники g_1T и g_2T при $g_1 \neq g_2$ не имеют общих внутренних точек. Последнее свойство обеспечивается требованием поточечного совпадения образов треугольников. В самом деле, если треугольники g_1T и g_2T имеют общую внутреннюю точку, то $g_1(x) = g_2(x)$ для всех $x \in T$, а значит, $g_1 = g_2$.

Назовем треугольник T *фундаментальной областью* группы G. Это определение допускает следующее обобщение. Пусть G — подгруппа группы движений сферы, плоскости или плоскости Лобачевского. Назовем D *фундаментальной областью* группы G, если выполняются следующие условия:

1) D — выпуклый многоугольник (в случае плоскости Лобачевского у него могут быть бесконечно удаленные вершины и стороны);

2) многоугольники gD ($g \in G$) покрывают всю сферу, плоскость или плоскость Лобачевского;

3) многоугольники g_1D и g_2D при $g_1 \neq g_2$ не имеют общих внутренних точек.

Отметим, что не у любой подгруппы группы движений есть фундаментальная область. Например, у всей группы движений нет фундаментальной области.

В качестве простого примера найдем фундаментальную область для подгруппы собственных движений в группе, порожденной отражениями относительно сторон треугольника T типа (p, q, r). Пусть s — симметрия относительно одной из сторон треугольника T. Тогда объединение T с sT представляет собой искомую фундаментальную область. Чтобы доказать это, разобьем треугольники вида gT на пары $\{gT, gsT\}$. Это можно сделать, потому что треугольник gsT определяет ту же самую пару, так как $(gs)sT = gT$.

Перейдем теперь к более интересному примеру фундаментальной области. Напомним, что в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости собственные движения имеют вид $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $ad - bc = 1$. Группу матриц размером 2×2 с вещественными элементами и определителем 1 обозначают $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Любым двум пропорциональным матрицам (и только им) соответствует одно и то же дробно-линейное преобразование. Поэтому группа собственных движений плоскости Лобачевского изоморфна факторгруппе $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\pm I = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$; здесь I — единичная матрица. В $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ есть важная подгруппа $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, состоящая из матриц с целочисленными элементами. Ей соответствует подгруппа $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ в $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Группу $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ называют *модулярной группой*.

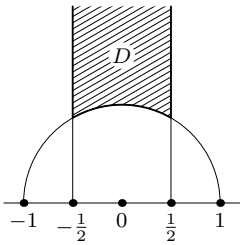


Рис. Д.54

Теорема 1. *Треугольник D с углами $\left(0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$, изображенный на рис.* Д.54*, является фундаментальной областью модулярной группы.*

Доказательство. Рассмотрим в группе $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ элементы $S(z) = -1/z$ и $T(z) = z + 1$. Они порождают некоторую подгруппу G'. Мы докажем сначала, что D — фундаментальная область группы G', а затем докажем, что $G' = G$, т. е. элементы S и T порождают всю группу G.

Прежде всего проверим, что треугольники $g'D$ ($g' \in G'$) покрывают всю плоскость Лобачевского, т. е. если $\mathrm{Im}(z) > 0$, то $g'z \in D$ для некоторого $g' \in G'$.

Лемма 1. *Если* $\operatorname{Im}(z)>0$, *то при* $g\in G$ *величина* $\operatorname{Im}(gz)$ *принимает лишь конечное число значений, превосходящих* $\operatorname{Im}(z)$.

Доказательство. Ясно, что

$$\operatorname{Im}(gz)=\operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=\operatorname{Im}\frac{adz+bc\bar z}{|cz+d|^2}=\frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2}.$$

Поэтому $\operatorname{Im}(gz)\geqslant\operatorname{Im}(z)$ лишь в том случае, когда $|cz+d|\leqslant 1$. Последнее неравенство выполняется лишь для конечного множества пар целых чисел $(c,\,d)$, причем для каждой такой пары величина $\operatorname{Im}(gz)$ определена однозначно. □

Группа G' содержится в G, поэтому для любой точки z в верхней полуплоскости можно выбрать элемент $g'\in G'$, для которого величина $\operatorname{Im}(g'z)$ максимальна. Преобразование $T(z)=z+1$ не изменяет мнимую часть числа z, поэтому для некоторого элемента $w=T^kg'z$, $k\in\mathbb{Z}$, выполняется неравенство $|\operatorname{Re}(w)|\leqslant 1/2$, а величина $\operatorname{Im}(w)$ по-прежнему максимальна. В частности,

$$\operatorname{Im}(w)\geqslant\operatorname{Im}\Big(-\frac{1}{w}\Big)=\frac{\operatorname{Im}(w)}{|w|^2}.$$

Поэтому $|w|\geqslant 1$, а значит, $w\in D$.

Лемма 2. *Если* z *— внутренняя точка области* D *и* $gz\in D$ *для* $g\in G$, *то* g *— тождественное преобразование.*

Доказательство. Пусть $g(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$. Рассмотрим сначала случай $c=0$. В этом случае $ad=1$, т. е. $g(z)=z\pm b$. Если $b\neq 0$, то лишь для преобразований $g(z)=z\pm 1$ образ множества D пересекается с множеством D. Но их пересечение принадлежит множеству $|\operatorname{Re}(z)|=1/2$, которое не содержит внутренних точек множества D.

Предположим теперь, что $c\neq 0$. Тогда

$$g(z)=\frac{a}{c}-\frac{1}{c(cz+d)},$$

поэтому

$$\Big|g(z)-\frac{a}{c}\Big|\cdot\Big|z+\frac{d}{c}\Big|=\frac{1}{c^2}. \tag{Д.26}$$

Числа a/c и d/c вещественны, поэтому мнимые части чисел $g(z)-a/c$ и $z+d/c$ равны мнимым частям чисел $g(z)$ и z. А так как мнимая часть любой точки области D не меньше $\sqrt{3}/2$, модули чисел $g(z)-a/c$ и $z+d/c$ тоже не меньше $\sqrt{3}/2$. Следовательно, $|c|\leqslant 2/\sqrt{3}$, причем c — ненулевое целое число. Таким образом, $c=\pm 1$, поэтому соотношение (Д.26) можно записать в виде

$$|g(z)\mp a|\cdot|z\pm d|=1.$$

Но если $g(z) \in D$ и z — внутренняя точка области D, то для любых целых чисел a и d выполняются неравенства $|g(z) \mp a| \geqslant 1$, $|z \pm d| > 1$. □

Из леммы 2, в частности, следует, что для несовпадающих элементов g_1' и g_2' группы G' множества $g_1'D$ и $g_2'D$ не имеют общих внутренних точек. Таким образом, D — фундаментальная область группы G'.

Теперь можно без труда доказать, что $G = G'$. В самом деле, пусть g — произвольный элемент группы G. Возьмем произвольную внутреннюю точку z области D. Точка gz лежит в верхней полуплоскости, поэтому существует элемент $g' \in G'$, для которого $g'(gz) \in D$. Движение $g'g \in G$ переводит внутреннюю точку z области D в некоторую точку области D. Поэтому согласно лемме 2 преобразование $g'g$ тождественно, т. е. $g = (g')^{-1} \in G'$.

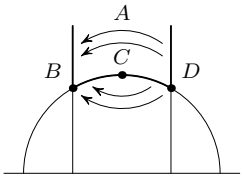


Рис. Д.55

Доказательство теоремы завершено. □

Фундаментальная область группы $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ представляет собой треугольник с углами $(0, \pi/3, \pi/3)$. Но ее удобнее рассматривать как четырехугольник $ABCD$ с углами 0, $\pi/3$, π, $\pi/3$ (рис. Д.55). Дело в том, что стороны этого четырехугольника разбиваются на пары; стороны каждой пары переводятся друг в друга некоторыми элементами группы $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$.

Теорема Пуанкаре о фундаментальном многоугольнике

Рассмотренные нами примеры замощений сферы, плоскости и плоскости Лобачевского треугольниками показывают, что наиболее сложную структуру имеют замощения плоскости Лобачевского. Тем не менее, можно описать все выпуклые многоугольники на плоскости Лобачевского, которые служат фундаментальными областями групп, состоящих из собственных движений. Подчеркнем, что в отличие от замощений треугольниками речь теперь будет идти только о собственных движениях. Но это не мешает одновременно получать результаты о замощениях треугольниками. Дело в том, что если склеить треугольники T и sT, где s — симметрия относительно одной из сторон треугольника T, то в результате получится фундаментальная область D группы, состоящей лишь из собственных движений. А из замощения плоскости Лобачевского образами фигуры D легко получить замощение образами треугольника T.

Пусть M — выпуклый многоугольник на плоскости Лобачевского. Мы ограничимся случаем, когда многоугольник M компактен, т. е. у него нет вершин, лежащих на абсолюте. Предположим, что M — фундаментальная область некоторой группы G, состоящей лишь

из собственных движений. Для фундаментальной области M можно рассмотреть многоугольники вида gM $(g \in G)$, пересечения которых с M непустые; таких многоугольников конечное число. Пересечение выпуклых множеств M и gM не имеет внутренних точек, поэтому оно является либо точкой, либо отрезком. Все отрезки вида $M \cap gM$ назовем *сторонами* фундаментальной области M, а все точки тройных пересечений $M \cap gM \cap hM$ назовем *вершинами* фундаментальной области. Концами каждой стороны фундаментальной области являются вершины фундаментальной области. Отметим, что вершина фундаментальной области M не обязана быть вершиной многоугольника M (рис. Д.56).

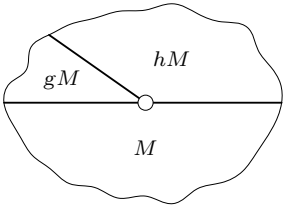


Рис. Д.56

К каждой стороне a фундаментальной области M приклеивается некоторый многоугольник $g(M)$, поэтому $a = g(b)$, где b — некоторая сторона фундаментальной области M. Ясно, что к стороне b приклеивается сторона $g^{-1}(a)$ фундаментальной области $g^{-1}(M)$. Поэтому стороны фундаментальной области M разбиваются на пары сторон, переводящихся друг в друга движениями $g \in G$. Соответствующие движения g называют движениями, *спаривающими стороны*.

Случай $a = g(a)$ не исключен. Легко проверить, что собственное движение $g \neq \mathrm{id}$ переводит отрезок в себя лишь в том случае, когда g — симметрия относительно середины отрезка. Поэтому от ситуации, когда $a = g(a)$, можно избавиться, добавив к числу вершин середину отрезка a. Подчеркнем, что вершины такого типа добавляются лишь для того, чтобы стороны в парах были различны. Если эти вершины не добавлять, то никаких других осложнений не возникает.

Каждое движение g, спаривающее стороны, переводит пару вершин A_1, A_2 в другую пару вершин $g(A_1)$, $g(A_2)$. Соединим вершины A_i и $g(A_i)$ ориентированным ребром; движению g^{-1} соответствует то же самое ребро, но с другой ориентацией. Проведем такие ребра для всех спаривающих движений. В результате получим некоторый граф. Каждой вершине соответствуют ровно два спаривающих движения, поэтому из каждой вершины графа выходят ровно два ребра. Таким образом, полученный граф состоит из нескольких циклов. Вершины, входящие в один цикл, назовем *эквивалентными*.

Рассмотрим цикл $A_1 \ldots A_n$. Его ребра можно ориентировать так, что $g_i(A_i) = A_{i+1}$. Покажем, что преобразование $g = g_n g_{n-1} \ldots g_1$ является поворотом с центром A_1 на угол $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, где α_i — угол при вер-

шине A_i. Ясно, что

$$g(A_1) = g_n g_{n-1} \dots g_2(A_2) = \dots = A_1.$$

Пусть a — та сторона фундаментальной области, которую движение g_1 переводит в другую сторону. Собственное движение

$$f = R^{\alpha_1}_{A_1} g_n \dots R^{\alpha_3}_{A_3} g_2 R^{\alpha_2}_{A_2} g_1$$

переводит в себя точку A_1 и прямую a, поэтому $f = \mathrm{id}$. Легко проверить, что для любого движения h справедливо равенство

$$hR^{\alpha}_{A} = R^{\varepsilon\alpha}_{h(A)} h, \tag{Д.27}$$

где $\varepsilon = 1$ для собственного движения h и $\varepsilon = -1$ для несобственного движения h. Воспользовавшись этим равенством (для собственных движений), получим

$$f = R^{\alpha_1}_{A_1} g_n \dots R^{\alpha_3}_{A_3} g_2 g_1 R^{\alpha_2}_{A_1} = \dots = g R^{\alpha_1+\dots+\alpha_n}_{A_1}.$$

Следовательно, $g = R^{-(\alpha_1+\dots+\alpha_n)}_{A_1}$.

Многоугольники $g_n(M)$, $g_n g_{n-1}(M)$, …, $g_n g_{n-1} \dots g_1(M)$ имеют общую вершину A_1, причем их углы при этой вершине равны α_n, α_{n-1}, … … , α_1 соответственно. Применим к этим многоугольникам степени преобразования $g = g_n g_{n-1} \dots g_1$. Необходимым и достаточным условием того, что в результате получится замощение окрестности точки A, является равенство $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 2\pi/k$, $k \in \mathbb{N}$.

Мы получили некоторые необходимые условия того, что выпуклый многоугольник на плоскости Лобачевского является фундаментальной областью. Оказывается, эти условия не только необходимы, но и достаточны.

Теорема Пуанкаре. *Пусть выпуклый гиперболический многоугольник M обладает следующими свойствами*:

1) *стороны многоугольника разбиты на пары $\{a, b\}$, причем для каждой такой пары сторон существует спаривающее их собственное движение g, т. е. $b = g(a) = M \cap g(M)$*;

2) *сумма углов при эквивалентных вершинах, не лежащих на абсолюте, равна $2\pi/k$, $k \in \mathbb{N}$.*

Тогда M — фундаментальная область группы G, порожденной движениями, спаривающими стороны.

Доказательство. Прежде всего докажем, что если многоугольники $h_1 M$ и $h_2 M$ $(h_1, h_2 \in G)$ имеют общую внутреннюю точку, то $h_1 = h_2$. Применим к обоим многоугольникам преобразование h_1^{-1}. После этого можно будет считать, что $h_1 = \mathrm{id}$. Преобразование $g = h_2$

представим в виде композиции преобразований, спаривающих стороны: $g = g_k g_{k-1} \dots g_1$. Предположим, что $g \neq \mathrm{id}$. При этом можно выбрать преобразование g с наименьшей длиной разложения k. Пусть A — общая внутренняя точка многоугольников M и $g(M)$. Разложению $g = g_k \dots g_1$ можно сопоставить замкнутую ломаную $A_1 \dots A_k$, где $A_1 = A$, $A_{s+1} = g_s(A_s)$ при $s \geqslant 1$. Точки A_s и A_{s+1} не могут совпадать, потому что они являются внутренними точками двух выпуклых многоугольников, лежащих по разные стороны от одной прямой (продолжения общей стороны). Из минимальности длины разложения следует, что ломаная $A_1 \dots A_n$ несамопересекающаяся. Действительно, самопересекающейся ломаной соответствует самопересекающаяся последовательность многоугольников, из которой можно выделить меньшую замкнутую цепочку.

В том случае, когда ломаная $A_1 \dots A_k$ представляют собой обход вокруг одной из вершин многоугольника M, преобразование g по условию является поворотом на угол 2π вокруг этой вершины, поэтому $g = \mathrm{id}$. Предположим теперь, что ломаная получается в результате объединения двух ломаных, причем их общие стороны проходятся в разных направлениях (рис. Д.57). Из равенств $\alpha\beta\gamma = 1$, $\beta_1\alpha_1 = 1$ и $\beta_1 = \beta^{-1}$ следует, что $\alpha\alpha_1\gamma = 1$. Поэтому для замкнутой ломаной, полученной в результате объединения нескольких обходов вокруг вершин многоугольников, тоже выполняется равенство $g = \mathrm{id}$. Ясно также, что любую замкнутую несамопересекающуюся ломаную, соответствующую разложению преобразования g, можно представить требуемым образом, поэтому $g = \mathrm{id}$.

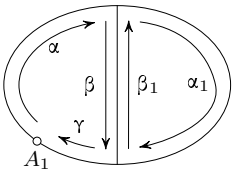


Рис. Д.57.

Остается доказать, что образы многоугольника M заполняют всю плоскость Лобачевского. Пусть X — произвольная точка. Вершины многоугольников $gM (g \in G)$ образуют счетное множество, поэтому внутри многоугольника M можно выбрать точку A так, что отрезок XA не содержит ни одной из вершин многоугольников gM. Достаточно доказать, что отрезок XA пересекает лишь конечное число многоугольников gM.

Расстояние между двумя сторонами выпуклого многоугольника равно нулю лишь в том случае, когда эти стороны соседние. Поэтому расстояние между любыми двумя точками несоседних сторон многоугольника M больше некоторого фиксированного положительного числа. Следовательно, на отрезке XA расположено лишь конечное число отрезков, соединяющих несоседние стороны многоугольников gM. Будем говорить, что отрезок *стягивает* вершину многоугольника, если его концы расположены на сторонах, выходящих из этой вер-

шины. Предположим, что пара соседних отрезков стягивает неэквивалентные вершины многоугольников g_1M и g_2M (рис. Д.58). Тогда в многоугольнике $g_1M \cup g_2M$ отрезок, составленный из двух рассматриваемых отрезков, не может стягивать вершину (в одну и ту же точку попадают лишь эквивалентные вершины), поэтому он соединяет точки двух несоседних сторон. Следовательно, длина полученного отрезка больше некоторого фиксированного положительного числа. Таким образом, исключив из рассмотрения конечное число отрезков, можно считать, что все отрезки стягивают вершины одного и того же класса эквивалентности.

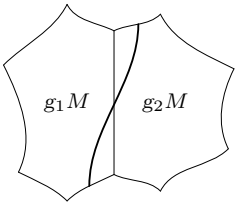


Рис. Д.58.

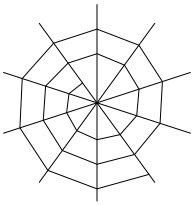


Рис. Д.59.

Предположим, что на отрезке XA расположено бесконечно много таких отрезков. В том случае, когда стягиваемая ими вершина не лежит на абсолюте, прямая XA должна спиралеобразно обвиваться вокруг этой вершины (рис. Д.59), чего не может быть. □

Из доказательства теоремы Пуанкаре видно, что все соотношения между спаривающими движениями следуют из соотношений, возникающих при обходе вокруг вершин многоугольника. При этом соотношения, возникающие при обходе вокруг вершин одного цикла, эквивалентны.

Пространство Лобачевского

Все рассмотренные нами модели плоскости Лобачевского обобщаются на случай n-мерного пространства, причем доказательства изометричности этих моделей проводятся без существенных изменений.

Для модели Клейна и модели Пуанкаре в n-мерном шаре $x_1^2 + \ldots + x_n^2 < 1$ расстояние между точками A и B можно определить как расстояние между точками A и B в соответствующей модели геометрии Лобачевского для сечения шара плоскостью, проходящей через центр шара и точки A и B.

Для модели Пуанкаре в полупространстве

$$H^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$$

расстояние между точками A и B определяется как расстояние между ними в модели Пуанкаре в полуплоскости, проходящей через точки A и B и перпендикулярной границе полупространства H^n (*абсолюту*).

Для модели на полости псевдосферы $[x, x] = -c^2$, где $[x, y] = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n - x_{n+1}y_{n+1}$, расстояние d между точками x и y задается формулой

$$\operatorname{ch}^2\left(\frac{d}{c}\right) = \frac{[x, y]^2}{[x, x][y, y]}.$$

В дальнейшем мы будем работать только с моделями Пуанкаре. В этих моделях гиперболическими подпространствами являются части сфер, ортогональных абсолюту (евклидовы подпространства мы при этом рассматриваем как сферы бесконечного радиуса). Подпространства размерности $n-1$ в пространстве размерности n будем называть *гиперплоскостями*. Чтобы определить симметрию относительно гиперплоскости в пространстве Лобачевского, достаточно определить симметрию относительно сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$. Назовем точки A и B *симметричными* относительно сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$, если любая сфера размерности $n-1$, проходящая через точки A и B, ортогональна сфере $\mathbb{S}^{n-1}$. Симметрия относительно сферы совпадает с инверсией относительно этой сферы. Инверсия сохраняет двойное отношение, поэтому симметрии относительно гиперплоскостей являются движениями пространства Лобачевского.

Теорема 2. *Любое движение n-мерного пространства Лобачевского можно представить в виде композиции не более $n+1$ симметрии относительно гиперплоскостей.*

Доказательство. Аналогичную теорему мы уже доказывали для плоскости Лобачевского. Поэтому остановимся лишь на той части доказательства, которая не переносится на n-мерный автоматически. А именно, покажем, что если движение имеет $n+1$ неподвижную точку, причем эти точки не лежат в одной гиперплоскости, то движение тождественно. Пусть $A_1, \ldots, A_{n+1}$ — данные неподвижные точки. Ясно, что точки $A_1, \ldots, A_m$ не могут лежать в одном $(m-2)$-мерном подпространстве. Для любых двух несовпадающих неподвижных точек X и Y строгое неравенство треугольника влечет, что все точки прямой XY неподвижны. В частности, все точки прямой A_1A_2 неподвижны. Через любую точку плоскости $A_1A_2A_3$ можно провести прямую, пересекающую две из неподвижных прямых A_1A_2, A_2A_3, A_1A_3 в двух различных точках. Это означает, что все точки плоскости $A_1A_2A_3$ неподвижны. Аналогично получаем, что все точки подпространства $A_1A_2A_3A_4$ неподвижны и т. д. □

Теорема 3. *Движение пространства Лобачевского однозначно определяется своим ограничением на абсолют.*

Доказательство. Воспользуемся моделью Пуанкаре в полупространстве. Рассмотрим множество всех гиперплоскостей, проходящих

через точку X. Среди их ограничений на абсолют можно выделить сферу минимального радиуса (центр этой сферы совпадает с ортогональной проекцией точки X на абсолют). Ясно также, что по выделенной сфере точка X однозначно восстанавливается. Движение g переводит рассматриваемое семейство гиперплоскостей в семейство гиперплоскостей, проходящих через точку $g(x)$. В соответствующем семействе сфер на абсолюте снова можно выделить сферу минимального радиуса, а по ней можно восстановить точку $g(x)$. Это означает, что точку $g(x)$ можно определить, зная лишь преобразование семейства сфер на абсолюте. Для этого, разумеется, достаточно знать лишь ограничение преобразования g на абсолют. □

Теорема 4. *Группа собственных движений трехмерного пространства Лобачевского изоморфна* $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$.

Доказательство. Согласно теоремам 2 и 3 группа движений трехмерного пространства Лобачевского изоморфна группе преобразований плоскости, порожденной симметриями относительно прямых и окружностей. Будем рассматривать плоскость как комплексную плоскость $\mathbb{C}$. Симметрии относительно вещественной оси и единичной окружности переводят z в $\bar{z}$ и $-1/\bar{z}$ соответственно. Композиции симметрий относительно двух параллельных прямых, двух прямых, проходящих через начало координат, и двух окружностей с центром в начале координат переводят z в $z+a$, $e^{i\alpha}z$ и $kz \quad (k>0)$ соответственно. Следовательно, любое отображение вида

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}, \quad \text{где} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}),$$

можно представить в виде композиции симметрий. Ясно также, что любая композиция симметрий относительно прямых и окружностей имеет такой вид.

Собственные движения соответствуют преобразованиям $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$. А так как пропорциональным матрицам соответствует одно и то же преобразование, группа собственных движений 3-мерного пространства Лобачевского изоморфна $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/\pm I$. □

Для трехмерного пространства Лобачевского по аналогии с плоскостью Лобачевского можно определить эллиптические, параболические и гиперболические пучки плоскостей. Это позволит доказать следующие утверждения:

1) группа $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ содержит (в качестве подгрупп) группы собственных движений сферы, плоскости и плоскости Лобачевского;

2) в трехмерное пространство Лобачевского можно изометрически вложить сферу, плоскость и плоскость Лобачевского.

Назовем *эллиптическим* пучком (в трехмерном пространстве Лобачевского) семейство плоскостей, проходящих через фиксированную точку; назовем *параболическим* пучком семейство плоскостей, проходящих через фиксированную точку на абсолюте; назовем *гиперболическим* пучком семейство плоскостей, ортогональных фиксированной плоскости.

Теорема 5. *Множество всех композиций симметрий относительно пар плоскостей одного пучка является подгруппой в* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. *Для эллиптического, параболического и гиперболического пучка эта подгруппа изоморфна группе собственных движений сферы, плоскости и плоскости Лобачевского соответственно.*

Доказательство. Для эллиптического пучка рассмотрим модель Пуанкаре в шаре, причем будем считать, что все плоскости пучка проходят через центр шара. Симметрии относительно таких плоскостей порождают группу движений сферы, концентричной с абсолютом.

Для параболического пучка рассмотрим модель Пуанкаре в полупространстве, причем будем считать, что все плоскости пучка являются евклидовыми полуплоскостями, ортогональными абсолюту (все такие плоскости проходят через точку ∞ на абсолюте). Симметрии относительно таких плоскостей переводят в себя каждую евклидову плоскость, параллельную абсолюту. Ограничения этих симметрий на указанные плоскости порождают группу евклидовых движений этих плоскостей.

Для гиперболического пучка рассмотрим модель Пуанкаре в полупространстве, причем будем считать, что все плоскости ортогональны некоторой гиперболической плоскости Π, проходящей через точку ∞. Пусть l — прямая, по которой плоскость Π пересекает абсолют. Симметрии относительно плоскостей данного пучка являются инверсиями относительно сфер, центры которых лежат на прямой l; эти движения переводят в себя любую евклидову полуплоскость Π', ограниченную прямой l. Ограничения этих преобразований на Π' являются симметриями относительно окружностей, ортогональных прямой l. Эти преобразования порождают группу движений модели Пуанкаре в верхней полуплоскости. □

На поверхности F в пространстве Лобачевского можно ввести *индуцированную метрику*. Для этого нужно определить элемент длины на поверхности F (расстояние между бесконечно близкими точками) как расстояние между соответствующими точками пространства Лобачевского.

Рассмотрим поверхность, состоящую из образов фиксированной точки под действием семейства собственных движений, соответствующих пучку плоскостей. Такую поверхность в случае эллиптического, пара-

болического и гиперболического пучка называют *сферой*, *орисферой* и *гиперсферой* соответственно. В рассмотренных нами ситуациях сферами будут евклидовы сферы с центром в центре модели, орисферами будут евклидовы плоскости, параллельные абсолюту, а гиперсферами будут евклидовы полуплоскости, содержащие прямую l.

Для модели Пуанкаре в полупространстве $H^3 = \{(x, y, z) \mid z > 0\}$ элемент длины имеет вид ds/z, где $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Поэтому на орисфере $z = a$ квадрат элемента длины имеет вид $a^{-2}(dx^2 + dy^2)$. Таким образом, в координатах (x, y) расстояние между точками орисферы пропорционально евклидову расстоянию.

На гиперсфере $y = kz$ квадрат элемента длины имеет вид

$$\frac{dx^2 + (1+k^2)dz^2}{z^2} = (1+k^2)\frac{du^2 + dv^2}{v^2},$$

где $u = x/\sqrt{1+k^2}$, $v = z$. Таким образом, в координатах (u, v) расстояние между точками гиперсферы пропорционально расстоянию на плоскости Лобачевского.

Для модели Пуанкаре в единичном шаре элемент длины имеет вид $\dfrac{2\,ds}{1-R^2}$, где ds — евклидов элемент длины, R — расстояние до центра шара. Поэтому расстояние между точками гиперболической сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ в $\dfrac{2}{1-R^2}$ раз больше расстояния между точками евклидовой сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Таким образом, рассматриваемая гиперболическая сфера изометрична евклидовой сфере радиуса $\dfrac{2R}{1-R^2}$.

Кватернионная модель

Движение трехмерного пространства Лобачевского можно представить с помощью кватернионов (введенных Гамильтоном). Напомним, что *кватернионами* называют элементы алгебры над $\mathbb{R}$ с образующими 1, i, j, k и соотношениями $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$; эта алгебра ассоциативна. Положим

$$H^3 = \{z + tj \mid z \in \mathbb{C},\ t > 0\}.$$

Действие матрицы $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ на точки абсолюта $\mathbb{C}$ задается формулой $\gamma z = \dfrac{az+b}{cz+d}$. Требуется продолжить это действие на кватернионы вида $q = z + tj$, $t > 0$. Это можно сделать двумя эквивалентными способами:

$$\gamma q = (aq + b)(cq + d)^{-1} = (qc + d)^{-1}(qa + b).$$

Прежде всего проверим, что обе формулы действительно эквивалентны, т. е.

$$(qc+d)(aq+b)=(qa+b)(cq+d).$$

Числа a, b, c и d попарно перестановочны, поэтому требуемое равенство эквивалентно равенству $(ad-bc)q=q(ad-bc)$. Последнее равенство очевидно, так как $ad-bc=1$.

Проверим теперь, что $\gamma q=z'+t'j$, где $t'>0$. Учитывая, что $j(\overline{cz+d})=(cz+d)j$ и $ad-bc=1$, получаем $(aq+b)(\overline{cq+d})=(az+b)\times$ $\times(\overline{cz+d})+act^2+tj$, поэтому

$$\gamma q=\frac{(aq+b)(\overline{cq+d})}{|cq+d|^2}=\frac{(az+b)(\overline{cz+d})+act^2+tj}{|cq+d|^2}.$$

Остается проверить, что преобразование γ является движением пространства Лобачевского. Для этого достаточно проверить, что γ сохраняет двойное отношение. Ясно, что

$$\begin{aligned}\gamma q-\gamma q'&=(aq+b)(cq+d)^{-1}-(q'c+d)^{-1}(q'a+b)=\\&=(q'c+d)^{-1}[(q'c+d)(aq+b)-(q'a+b)(cq+d)](cq+d)^{-1}=\\&=(q'c+d)^{-1}(q-q')(cq+d)^{-1}.\end{aligned}$$

Кроме того, $q'c+d=(z'c+d)+t\bar{c}j$ и $cq'+d=(cz'+d)+tcj$. Поэтому $|q'c+d|=|cq'+d|$, а значит,

$$|\gamma q-\gamma q'|=\frac{|q-q'|}{|cq+d||cq'+d|}.$$

С помощью этой формулы легко убедиться, что преобразование γ сохраняет двойное отношение $\dfrac{|CA|}{|CB|}:\dfrac{|DA|}{|DB|}$.

Об аксиоматическом подходе к евклидовой и неевклидовой геометриям

Среди причин, по которым были включены в книгу основания геометрии, две — мемориальные. Во-первых, недавно исполнилось 200 лет со дня рождения Николая Ивановича Лобачевского (1792—1856), одного из величайших русских ученых, удостоенного знаменитым английским математиком *Уильямом Клиффордом* (1845–1879) титула «Коперник геометрии». Год, когда впервые в Независимом университете читался тот курс, который потом привел к написанию этой книги, был годом Лобачевского, и потому было уместно познакомить слушателей с основным трудом его жизни. Вторая причина связана с Андреем Николаевичем Колмогоровым — об этом было уже сказано во введении.

Однако не только мемориальные причины руководили нами при выборе этой темы. Изложение неевклидовых геометрий дает повод обсудить ряд фундаментальных идей и концепций, выработка которых потребовала грандиозных усилий от наших великих предшественников. Речь идет о концепции дедуктивного построения геометрии; идее геометрической модели (об этих идеях шла речь уже в евклидовой ситуации); идее единства неевклидовых геометрий и единого подхода к самому понятию геометрии, основанного на понятии «движения»; наконец, хотелось приоткрыть тайны нелинейного, «искривленного» мира геометрических образов.

Геометрия Евклида реализуется на плоской доске. Геометрия Римана есть почти что геометрия поверхности мяча (надо лишь «склеить» диаметрально противоположные точки сферы). Геометрия Лобачевского, к сожалению, не реализуется глобально в трехмерном пространстве. Но локально она может быть реализована на одной специальной поверхности, называемой *псевдосферой*.

Псевдосфера — это поверхность вращения некоторой кривой, называемой *трактрисой* или *кривой погони* (у нее отрезок касательной до асимптоты постоянен).

Если вырезать кусочек сферы, то его можно перемещать по поверхности сферы, и он нигде от нее не оторвется. То же самое верно и для псевдосферы: если из нее вырезать кусочек, его можно заставить свободно скользить по псевдосфере без складок. В малом на сфере реализуется геометрия Римана, а на псевдосфере — геометрия Лобачевского. Обе эти геометрии характеризует постоянство «кривизны», но от них уже был один шаг до геометрических объектов с произвольной искривленностью (однако такие геометрии остаются за пределами этого курса).

Ранее мы старались освоиться со многими важнейшими понятиями геометрии — подпространствами, объемами, аффинными многообразиями, конусами, выпуклыми множествами; мы старались установить связи между алгебраическими объектами — линейными равенствами и неравенствами — и их геометрическими образами в декартовой модели.

Но важнейшей идеей, которая позволила переводить алгебру на геометрический язык, а геометрию — на язык алгебры, была идея модели. Сейчас она еще раз будет использована нами в соединении с идеей, также имеющей очень давнее происхождение. Нам придется повториться. Мы уже говорили о возможности дедуктивного построения науки. Само понятие вывода или доказательства должно опираться на какие-то основополагающие факты, которые не могут быть определены без тавтологии. Их называют *аксиомами*. Это — как бы «атомы» науки. Из них

формируются «молекулы» — теоремы — с помощью аксиом и логических связок, а из теорем, в свою очередь, «соединения» — целые научные теории.

Среди первых математиков, пытавшихся изложить геометрию на основе дедуктивного метода, был Евклид. Завершил дедуктивное построение геометрии *Давид Гильберт* (1862—1943). Его труд «Основания геометрии» (1899) безусловно принадлежит к выдающимся творениям человеческой мысли (хотя последовавшее за этим чрезмерное увлечение дедуктивным методом имело и много отрицательных последствий).

Но что это означает: «завершение замысла Евклида»? Чтобы разъяснить это, опишем понятие «математической структуры», введенное Николя Бурбаки. Приведем цитату из его основополагающего труда «Архитектура математики» (Н. Бурбаки. Очерки по истории математики. М.: ИЛ, 1963, с. 251).

«Теперь надо объяснить, что надо понимать в общем случае под математической структурой. Общей чертой различных понятий, объединенных под этим родовым названием, является то, что они применимы ко множеству элементов, природа которых не определена. Чтобы определить структуру, задают одно или несколько отношений, в которых находятся эти элементы...; затем постулируют, что данное отношение или данные отношения удовлетворяют некоторым условиям, которые являются аксиомами рассматриваемой структуры. Построить аксиоматическую теорию данной структуры — это значит вывести логические следствия из аксиом данной структуры, отказавшись от каких-либо других предположений относительно рассматриваемых элементов (в частности, от всяких гипотез относительно их природы)».

Что же такое плоскость с этой «структурной» точки зрения? Что же это за структура — «евклидова плоскость» (и одновременно — что такое «неевклидова плоскость») по Колмогорову?

Плоскость (и евклидова плоскость, и плоскость Лобачевского — различие между ними будет лишь в одной аксиоме) — это тройка (X, L, d), где X — множество «точек», L — выделенная совокупность подмножеств, называемых «прямыми», d — отображение, сопоставляющее паре точек x, y из X неотрицательное действительное число $d(x, y)$ — «расстояние» от x до y. Теперь очередь за аксиомами.

Мы сформулируем аксиомы евклидовой (и неевклидовой) геометрии, следуя А. Н. Колмогорову (см. в книге А. Н. Колмогоров, А. Ф. Семенович, Р. С. Черкасов. Геометрия 6—8, М.: Просвещение, 1982, с. 373—376). Они разбиты на пять групп.

I. Аксиомы принадлежности.

I_1. *Каждая прямая есть множество точек.*

I_2. *Через любые две различные точки проходит прямая, и притом только одна.*

I_3. *Существует хотя бы одна прямая*; *каждой прямой принадлежит хотя бы одна точка*; *существует точка вне прямой.*

II. Аксиомы расстояния.

Расстояние d — это функция $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая следующим аксиомам.

II_1. Равенство $d(x_1, x_2) = 0$ выполняется *тогда и только тогда, когда* $x_1 = x_2$;

II_2. Равенство $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$ выполняется *для любых* x_1, x_2;

II_3. *Имеет место неравенство треугольника*: $d(x_1, x_3) \leqslant d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$.

Эти аксиомы превращают X в *метрическое пространство* — одно из основных понятий геометрии и функционального анализа.

III. Аксиомы порядка. Здесь аксиоматизируется основное понятие «между».

Определение. Пусть точки x, y, z лежат на одной прямой. Мы скажем, что точка y *лежит между* x и z, если $d(x, y) + d(y, z) = d(x, z)$. Множество точек, лежащих между x и z называют *отрезком* $[x, z]$.

III_1. *Три точки* x_1, x_2, x_3 *лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда одна из них лежит между двумя другими.*

III_2. *Любая точка прямой* l *разбивает множество отличных от нее точек прямой* l *на два непустых подмножества так, что она лежит между любой парой точек из разных подмножеств.*

Определение. *Луч с началом* ξ — это одно из указанных в предыдущей аксиоме подмножеств вместе с самой точкой ξ.

III_3. *Для любого* $a \geqslant 0$ *на луче с началом в точке* ξ *найдется ровно одна точка, расстояние от которой до* ξ *равно* a.

Определение. Множество A точек плоскости называется *выпуклым*, если для любых x, y из A весь отрезок $[x, y]$ лежит в A.

III_4. *Любая прямая разбивает множество не принадлежащих ей точек плоскости на два непустых выпуклых подмножества.*

IV. Аксиома подвижности.

Определение. Совокупность точек, принадлежащих одному из подмножеств, на которые прямая l разбивает X, вместе с точками самой прямой l называется *полуплоскостью*. При этом прямую l называют граничной для полуплоскости. Если прямая, содержащая луч, гранична для некоторой полуплоскости, то говорят, что эта полуплоскость *примыкает к лучу*.

Определение. Взаимно однозначное и изометричное (расстояние между образами равно расстоянию между прообразами) отображение

плоскости на себя называется *перемещением* (или движением, или изометрией).

IV. *Для любой пары лучей и примыкающих к ним полуплоскостей* Π_1 *и* Π_2 *существует единственное перемещение, отображающее первый луч на второй, а полуплоскость* Π_1 *— на полуплоскость* Π_2.

IV′. *Пусть даны два отрезка равной длины* $[x_1, x_2]$ *и* $[y_1, y_2]$. *Тогда существуют ровно два перемещения, которые переводят* x_1 *в* y_1, *а* x_2 *— в* y_2.

V. Аксиома параллельных. Она различает евклидову и неевклидову геометрию.

V. В планиметрии Евклида: *через точку вне прямой можно провести ровно одну параллельную ей прямую.*

V. В планиметрии Лобачевского: *через точку вне прямой можно провести по крайней мере две параллельные данной прямые.*

Мы сказали выше, что окончательное завершение замысла Евклида выпало на долю Д. Гильберта. В своем труде «Основания геометрии» (1899) он построил совместную (непротиворечивую) и полную систему аксиом, доказав независимость основных групп аксиом своей аксиоматики. Впоследствии подобные аксиоматики, основанные на описании других структур, были даны Шуром, Г. Вейлем (он, по-видимому, первым предложил положить в основу аксиоматики евклидова пространства понятие векторного пространства), Биркгофом и многими другими математиками, в частности А. Н. Колмогоровым в его курсе геометрии.

Поясним смысл всех этих терминов: совместность, полнота, независимость.

Совместность: система аксиом называется *совместной*, если существует модель, в которой все аксиомы превращаются в истинные утверждения.

Мы приводили несколько моделей геометрий: декартову для евклидовой и аффинной геометрий, Клейна и Пуанкаре для геометрии Лобачевского.

Предоставим читателю самостоятельно продумать следующие два утверждения:

аксиоматика Колмогорова евклидовой плоскости совместна (в декартовой модели);

аксиоматика Колмогорова плоскости Лобачевского совместна (в модели Пуанкаре и в модели Клейна).

Полнота означает, что система аксиом приводит к единственной реализации. Некоторое утверждение называется независимым от остальных аксиом, если существует и модель с самим утверждением в качестве аксиомы, и модель с его отрицанием.

Коротко об истории неевклидовой геометрии

На протяжении свыше двух столетий внимание геометров привлекала особая роль пятого постулата Евклида в его «Началах». Во-первых, он формулировался как-то неестественно громоздко: «если прямая, пересекая две другие прямые, образует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых углов, то эти прямые, будучи продолжены неограниченно, пересекаются с той стороны от третьей прямой, с которой лежат упомянутые выше углы». (Остальные четыре постулата, вместе взятые, звучат короче: 1) через две точки можно провести прямую; 2) отрезок можно неограниченно продолжать; 3) из любого центра любым радиусом можно описать окружность; 4) все прямые углы равны между собой.)

Во-вторых, Евклид не сразу стал пользоваться своим постулатом, он впервые использовал его лишь в 28-м предложении. Все это вело к искушению вывести пятый постулат из остальных. В процессе этих попыток было установлено большое количество утверждений, равносильных пятому постулату. Например: а) *существует треугольник подобный, но не равный данному*; б) *существует хотя бы один треугольник, с суммой углов, равной двум прямым*; в) *через точку вне прямой можно провести единственную параллельную*; г) *перпендикуляр и наклонная всегда пересекаются*; д) *вокруг любого треугольника можно описать окружность*. (Читателю предоставляется возможность доказать, что ни одно из этих утверждений не выполняется в модели Пуанкаре.)

Гаусс был первым, кто усомнился в возможности вывести пятый постулат из остальных аксиом. Он писал (в 1817 г.): «Я прихожу все более к убеждению, что необходимость нашей геометрии не может быть доказана по крайней мере человеческим рассудком и для человеческого рассудка». Он далеко продвинулся в этом вопросе, но ничего не опубликовал на эту тему. Первая публикация (1829 г.), посвященная новой геометрии, где в качестве аксиомы выступает отрицание пятого постулата, принадлежит великому русскому математику Николаю Ивановичу Лобачевскому (1792—1856). Лобачевский очень глубоко развил новую геометрию, выписал формулы для соотношений между сторонами и углами треугольников и убедился, что они в точности соответствуют формулам сферической тригонометрии. Уже в своей первой работе «О началах геометрии» он писал так: «Эти уравнения [соотношения между углами и сторонами треугольников] переменяются в... [уравнения] сферической Тригонометрии, как скоро вместо боков a, b, c ставим $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$, но в обыкновенной Геометрии и сферической Тригонометрии везде входят одни содержания [т. е. отношения]

линий: следовательно, обыкновенная Геометрия, Тригонометрия и эта новая Геометрия всегда будут согласны между собой». Речь здесь шла о параллелизме теоремы косинусов, теоремы синусов и некоторых других. (Читатель может сравнить, скажем, теоремы синусов и косинусов в сферической геометрии и геометрии Лобачевского.)

Одновременно с Лобачевским к идее неевклидовой геометрии пришел гениальный венгерский математик — *Янош Бойяи* (1802–1860). После окончания военно-инженерной академии в Вене он служил в крепости Темешвар (ныне — Тимишоара). Там он заинтересовался проблемой параллельных и в 1823 г. писал своему отцу (видному математику, другу Гаусса): «Я не достиг цели, но... из ничего я создал целый мир». В 1832 г. Я. Бойяи опубликовал приложение к книге отца по математике. Так вышло в свет его знаменитое «Приложение [аппендикс], содержащее науку о пространстве абсолютно истинную, не зависящую от истинности или ложности XI аксиомы Евклида (что a priori никак решено быть не может)», известное под названием «Аппендикс». Гаусс прочитал эту работу и в одном письме писал: «Я считаю молодого геометра фон Бойяи гением первой величины». Однако отцу Бойяи он писал много сдержаннее, указав, что многими фактами владеет сам. Когда впоследствии Гаусс ознакомился с «Геометрическими исследованиями» Лобачевского, он посоветовал Я. Бойяи прочесть их. Тот сделал это и не поверил в истину. Бойяи писал: «Гаусс — колосс, овладевший такими сокровищами, не мог примириться с тем, что кто-то его предвосхитил в этом вопросе, и, так как он был уже не в состоянии этому воспрепятствовать, он сам обработал идею и выпустил в свет под именем Лобачевского».

Однако ни Гауссу, ни Лобачевскому, ни Бойяи не суждено было доказать независимость пятого постулата Евклида от остальных аксиом. Отметим в связи с этим такой интересный факт.

В 1838 г. были опубликованы (в известном немецком журнале Крелля) статьи Миндинга, в которых формулы, подобные теореме Пифагора, теоремам косинусов и синусов были приведены для геометрии псевдосферы. По непостижимым причинам Лобачевский, регулярно читавший журнал Крелля, так и не взял (это установлено по картотеке) ни одного из тех трех номеров, где были опубликованы статьи Миндинга. Иначе перед ним открылась бы дорога к доказательству непротиворечивости его геометрии. А так эта заслуга выпала на долю Бельтрами, установившего тождество формул Миндинга и Лобачевского и тем самым показавшего, что геометрия Лобачевского осуществляется на псевдосфере. Это случилось через 12 лет после смерти Лобачевского. А затем появились модели Кэли—Клейна, модель Пуанкаре, Эрланген-

ская программа, и геометрия Лобачевского стала настолько обыденной, что преподавание ее ушло из университетского математического образования.

Конические сечения в сферической геометрии и геометрии Лобачевского

В евклидовой геометрии коническое сечение (коника) определяется как сечение конуса $ax^2+by^2+cz^2=0$ евклидовой плоскостью. В сферической геометрии вместо евклидовой плоскости мы берем сферу $x^2+y^2+z^2=1$, а в геометрии Лобачевского — гиперболоид $x^2+y^2=z^2-1$.

Исследуем сначала конические сечения в сферической геометрии. Напомним, что на сфере есть двойственность: точкам $\pm(x_0,\,y_0,\,z_0)$ сферы $\mathbb{S}^2$ можно сопоставить сечение $\mathbb{S}^2$ плоскостью $x_0x+y_0y+z_0z=0$. Это позволяет определить двойственный конус для конуса $ax^2+by^2+cz^2=0$ следующим образом. Касательная плоскость к конусу в точке $(x_0,\,y_0,\,z_0)$ задается уравнением $ax_0x+by_0y+cz_0z=0$. Этой плоскости соответствует точка $(ax_0,\,by_0,\,cz_0)$; двойственный конус состоит из всех таких точек, т. е. точек, двойственных касательным плоскостям к исходному конусу. Чтобы найти уравнение двойственного конуса, нужно подобрать числа A, B и C так, чтобы равенство $ax_0^2+by_0^2+cz_0^2=0$ было эквивалентно равенству $A(ax_0)^2+B(by_0)^2+C(cz_0)^2=0$. Для этого можно положить $A=a^{-1}$, $B=b^{-1}$ и $C=c^{-1}$. Таким образом, конусу $ax^2+by^2+cz^2=0$ двойствен конус

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=0.$$

Координатные оси являются осями симметрии конуса $ax^2+by^2+{}$ ${}+cz^2=0$, а координатные плоскости — плоскостями симметрии. Точки пересечения координатных осей со сферой $x^2+y^2+z^2=1$ называют *центрами* конического сечения (коники) $ax^2+by^2+cz^2=0$.

Пусть O_1 — один из центров конического сечения. Проведем через точку O_1 сферическую прямую, т. е. большую окружность. Коника делит ее на 4 дуги. При этом серединами двух дуг являются точка O_1 и диаметрально противоположная ей точка O_2, а середины двух других дуг лежат на плоскости, двойственной O_1 и O_2.

Перейдем теперь к двойственному конусу и посмотрим, как выглядит двойственное утверждение. Пусть l — прямая, проходящая через точки O_1 и O_2, A и B — такие точки пересечения l с коникой, что середина дуги AB совпадает с точкой O_1. Двойственные объекты обозначим $l^\perp$, $O^\perp$, $A^\perp$ и $B^\perp$. Двойственное утверждение принимает следующий вид. Пусть касательные $A^\perp$ и $B^\perp$ к конике пересекаются в точке $l^\perp$, лежа-

щей в плоскости $O^\perp$. Тогда одной биссектрисой угла между прямыми $A^\perp$ и $B^\perp$ является сечение сферы плоскостью $O^\perp$, а другой биссектрисой является прямая, соединяющая точки $l^\perp$ и O_1. (Первое из этих утверждений очевидно, так как $O^\perp$ — плоскость симметрии.)

Для сферических коник, как и для плоских, можно определить фокусы, обладающие соответствующими фокальными свойствами. Но к этому понятию нам будет удобнее подойти издалека. Рассмотрим комплексификацию коники $ax^2+by^2+cz^2=0$ на сфере $x^2+y^2+z^2=1$, т. е. будем считать, что $x,\ y,\ z\in\mathbb{C}$. *Фокусами* этой коники называют точки пересечения общих касательных к данной конике и к конике $x^2+y^2+z^2=0$. Касательная к конике $x^2+y^2+z^2=0$ в точке $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ задается уравнением $x_1x+y_1y+z_1z=0$, а касательная к конике $ax^2+by^2+cz^2=0$ в точке $(x_2,\ y_2,\ z_2)$ задается уравнением $ax_2x+by_2y+cz_2z=0$. Оба уравнения должны задавать одну и ту же прямую. Это означает, что $ax_2:by_2:cz_2=x_1:y_1:z_1$. Искомую точку $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ можно найти как решение системы уравнений $x_1^2+y_1^2+z_1^2=0$ и $\dfrac{x_1^2}{a}+\dfrac{y_1^2}{b}+\dfrac{z_1^2}{c}=0$, т. е. как пересечение коники $x^2+y^2+z^2=0$ с двойственной коникой $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}+\dfrac{z^2}{c}=0$.

Итак, фокусы коники $ax^2+by^2+cz^2=0$ можно определить как точки, двойственные общим хордам двойственной коники $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}+\dfrac{z^2}{c}=0$ и коники $x^2+y^2+z^2=0$. В вещественном случае эти общие хорды имеют весьма простой геометрический смысл: они соответствуют круговым сечениям конуса $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}+\dfrac{z^2}{c}=0$. Мы имеем в виду следующее. Пусть общая хорда двух указанных выше коник задается уравнением $px+qy+rz=0$. Тогда сечение указанного выше конуса плоскостью $px+qy+rz=s$, $s\neq 0$, представляет собой окружность. В самом деле, сечение будет окружностью тогда и только тогда, когда система уравнений

$$px+qy+rz=s,\qquad \frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=0$$

эквивалентна системе уравнений

$$px+qy+rz=s,\qquad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

Перейдем от $\mathbb{R}^3$ к $\mathbb{RP}^3$, т. е. рассмотрим систему уравнений

$$px+qy+rz=sw,\qquad (x-x_0w)^2+(y-y_0w)^2+(z-z_0w)^2=R^2w^2.$$

Сечения конуса параллельными плоскостями подобны, поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $w=0$ (это соответствует сечению конуса бесконечно удаленной плоскостью). В этом случае получаем, что

система

$$px+qy+rz=0, \quad \frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=0$$

должна быть эквивалентна системе

$$px+qy+rz=0, \quad x^2+y^2+z^2=0.$$

Это означает, что $px+qy+rz=0$ — общая хорда двух рассматриваемых коник.

Коники $x^2+y^2+z^2=0$ и $ax^2+by^2+cz^2=0$ имеют шесть общих хорд. Но при вещественных a, b, c вещественными будут ровно две из этих хорд (если числа a, b, c попарно различны). В самом деле, можно считать, что $a>b>c$. Положим $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$, $a_1=a$,$a_2=b$, $a_3=c$. Тогда общие хорды задаются уравнениями вида

$$(a_i-a_j)x_i^2+(a_k-a_j)x_k^2=0.$$

Такое уравнение задает вещественные прямые лишь в том случае, когда числа a_i-a_j и a_k-a_j имеют разные знаки. Но это возможно лишь при $a_j=b$. В этом случае получаем пару прямых

$$(a-b)x^2=(b-c)z^2. \qquad (Д.28)$$

Рассмотрим на единичной сфере $x^2+y^2+z^2=1$ коники, фокусы которых фиксированы. Пусть, например, они задаются векторами с координатами $(1,\ 0,\ \pm\alpha)$. Пара ортогональных им плоскостей задается уравнением $x^2=\alpha^2z^2$. Это уравнение должно совпадать с уравнением (Д.28) для двойственного конуса, т. е. с заменой a на a^{-1}, и т. д. Поэтому указанные фокусы имеет коника $ax^2+by^2+cz^2=0$, где

$$a^{-1}-b^{-1}=1, \quad b^{-1}-c^{-1}=\alpha^2.$$

Положим $b=\lambda^{-1}$. Тогда $a=(1+\lambda)^{-1}$ и $c=(\lambda-\alpha^2)^{-1}$, т. е. коника задается уравнением

$$\frac{x^2}{\lambda+1}+\frac{y^2}{\lambda}+\frac{z^2}{\lambda-\alpha^2}=0.$$

Теперь можно доказать некоторые свойства коник на сфере, аналогичные свойствам плоских коник. Докажем сначала аналог утверждения о том, что произведение расстояний от фокусов до касательной не зависит от выбора касательной.

Теорема 6. *Пусть F_1 и F_2 — фокусы коники на сфере (с центром O), заданной конусом C; Π — касательная плоскость к конусу C. Пусть, далее, α_1 и α_2 — углы между плоскостью Π и прямыми OF_1 и*

OF_2 соответственно. Тогда величина $\sin\alpha_1 \sin\alpha_2$ *не зависит от выбора касательной плоскости.*

Доказательство. Можно считать, что центр сферы расположен в начале координат, а фокусы имеют координаты $(1, 0, \pm\alpha)$. Пусть вектор нормали к плоскости П имеет координаты (x_0, y_0, z_0). Этот вектор принадлежит двойственному к C конусу, поэтому его координаты удовлетворяют соотношению

$$(\lambda+1)x_0^2 + \lambda y_0^2 + (\lambda - \alpha^2)z_0^2 = 0, \qquad (Д.29)$$

где λ — некоторое число.

Пусть β_i — угол между прямой OF_i и нормалью к плоскости П. Тогда $\beta_i = 90^\circ - \alpha_i$. Поэтому нужно доказать, что $\cos\beta_1 \cos\beta_2 = \text{const}$. Косинусы углов между векторами $(1, 0, \pm\alpha)$ и (x_0, y_0, z_0) легко вычисляются. В результате получаем

$$\cos\beta_1 \cos\beta_2 = \frac{x_0^2 - \alpha z_0^2}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)(1+\alpha^2)}.$$

Воспользовавшись соотношением (Д.29), получим

$$\cos\beta_1 \cos\beta_2 = \frac{-\lambda}{1+\alpha^2} = \text{const}\,. \qquad \square$$

Теорема 7. *Проведем из точки A две касательные a и b к сферической конике* (рис. Д.60). *Пусть F_1 и F_2 — фокусы этой коники. Тогда угол между прямыми a и AF_1 равен углу между прямыми b и AF_2.*

Доказательство. Пусть a_1 и a_2 — расстояния от F_1 и F_2 до прямой a, b_1 и b_2 — расстояния от F_1 и F_2 до прямой b. Согласно теореме 6

$$\sin a_1 \sin a_2 = \sin b_1 \sin b_2$$

(мы считаем, что радиус сферы равен 1).

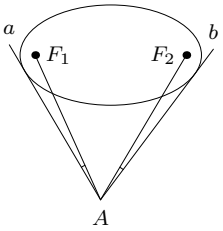


Рис. Д.60

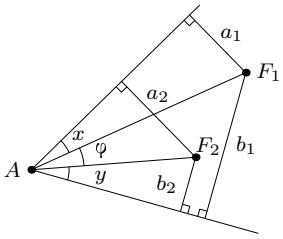


Рис. Д.61

Пусть, далее, c_1 и c_2 — сферические расстояния от точки A до точек F_1 и F_2, а x, y, φ — углы, изображенные на рис. Д.61. Применив сферическую теорему синусов к четырем прямоугольным треугольникам, изображенным на этом рисунке, получим

$$\sin a_1 = \sin c_1 \sin x, \qquad \sin b_1 = \sin c_1 \sin(y+\varphi),$$
$$\sin a_2 = \sin c_2 \sin(x+\varphi), \quad \sin b_2 = \sin c_2 \sin y.$$

Следовательно,

$$\frac{\sin a_1 \sin a_2}{\sin b_1 \sin b_2} = \frac{\sin x \sin(x+\varphi)}{\sin y \sin(y+\varphi)}.$$

Учитывая, что $\sin a_1 \sin a_2 = \sin b_1 \sin b_2$, получаем $\sin x \sin(x+\varphi) = \sin y \times \sin(y+\varphi)$, т. е.

$$\cos(2x+\varphi) - \cos\varphi = \cos(2y+\varphi) - \cos\varphi.$$

Равенство $x+y+\varphi = \pi$ выполняться не может, поэтому $x = y$. □

Следствие. *Пусть (сферическая) прямая l касается в точке A сферической коники с фокусами F_1 и F_2. Тогда прямые AF_1 и AF_2 образуют равные углы с прямой l.*

Для доказательства этого утверждения нужно точку A из формулировки теоремы 7 устремить к конике.

Теорема 8. *Для всех точек сферической коники сумма расстояний до фокусов постоянна.*

Доказательство. Рассмотрим касательную l к конике в точке A. Пусть точки F_1' и F_2' симметричны фокусам F_1 и F_2 относительно прямой l (рис. Д.62). Следствие теоремы 7 показывает, что точка A лежит на отрезке $|F_1'F_2|$, т. е. рассматриваемая сумма $|AF_1| + |AF_2|$ равна длине этого отрезка. Достаточно доказать, что если B — близкая к точке A точка прямой l, то для нее разность $|BF_1'| + |BF_2| - (|AF_1'| + |AF_2|)$ имеет величину порядка $|AB|^2$. В самом деле, в таком случае производная функции $|AF_1| + |AF_2|$ равна нулю.

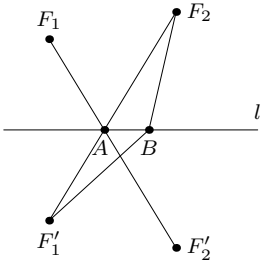


Рис. Д.62

Опустим из точки B перпендикуляр BA_1 на сторону $F_1'F_2$ и разобьем тем самым треугольник $F_1'BF_2$ на два прямоугольных треугольника. Достаточно доказать, что разности $|BF_1'| - |A_1F_1'|$ и $|BF_2| - |A_1F_2|$ имеют величину порядка $|A_1B|^2$. Пусть c — длина гипотенузы сферического прямоугольного треугольника с катетами a и x. Тогда $\cos c / \cos a = \cos x = 1 - x^2/2 + \ldots$ Поэтому при малых x величина $c - a$ имеет порядок x^2. □

Для гиперболической геометрии многое из сказанного выше о сферических кониках останется справедливым, но нужно сделать и некоторые изменения. Вместо коники $x^2+y^2+z^2=0$ в данном случае нужно рассматривать конику $x^2+y^2-z^2=0$. При этом конусу $ax^2+by^2+cz^2=0$ будет двойствен конус

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}-\frac{z^2}{c}=0.$$

В отличие от сферической геометрии, пересечение конуса ax^2+ $+by^2+cz^2=0$ с однополостным гиперболоидом $x^2+y^2-z^2=1$ может быть устроено весьма разнообразно. Это означает, что гиперболические коники бывают многих разных типов.

В гиперболической геометрии фокусами коники $ax^2+by^2+cz^2=0$ называют точки пересечения общих касательных к этой конике и к конике $x^2+y^2-z^2=0$. Легко проверить, что фокусам двойственны общие хорды коник $x^2+y^2-z^2=0$ и $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}-\dfrac{z^2}{c}=0$.

Параболические зеркала в геометрии Лобачевского

В евклидовой геометрии пучок лучей света, параллельных оси параболы, после отражения от параболы сходится в ее фокусе. В геометрии Лобачевского аналогичным свойством обладают кривые, которые в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости задаются уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1, \tag{Д.30}$$

где $0<a^2<-\lambda<b^2$. При этом лучи света, параллельные мнимой оси, после отражения от зеркал (Д.30) сходятся в точке $(0,\,c)$, где $c^2=b^2-a^2$. Напомним, что в евклидовой геометрии кривые (Д.30) представляют собой конфокальные гиперболы с фокусами $(0,\,\pm c)$.

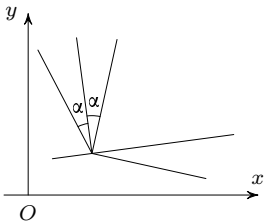


Рис. Д.63

Доказательство этого свойства зеркал (Д.30) приведено в работе [Р]; мы следуем этому доказательству.

В евклидовой геометрии после отражения от прямой $y=(\operatorname{tg}\alpha)x+d_1$ луч света, параллельный оси Oy, будет двигаться по прямой $y=$ $=-(\operatorname{ctg}2\alpha)x+d_2$ (рис. Д.63). Поэтому после отражения от кривой $y=f(x)$ в точке $(x_0,\,y_0)$ луч света, параллельный оси Oy, будет двигаться по прямой с тангенсом угла наклона $m=-\operatorname{ctg}2\alpha$, где $\operatorname{tg}\alpha=f'(x_0)$, т. е.

$$m=\frac{(f'(x_0))^2-1}{2f'(x_0)}. \tag{Д.31}$$

Для модели Пуанкаре в верхней полуплоскости это свойство остается справедливым, т. е. после отражения от кривой $y = f(x)$ в точке (x_0, y_0) луч света, параллельный мнимой оси, будет двигаться по гиперболической прямой с тангенсом угла наклона в точке (x_0, y_0), равным m, где m определятся по формуле (Д.31). Эта гиперболическая прямая представляет собой евклидову полуокружность. Евклидова нормаль к этой полуокружности в точке (x_0, y_0) имеет тангенс угла наклона $-1/m$, поэтому нормаль задается уравнением

$$y - y_0 = -(x - x_0)/m.$$

Центром полуокружности служит точка $(x_1, 0)$, в которой нормаль пересекает вещественную ось. Уравнение нормали показывает, что $x_1 = my_0 + x_0$. Квадрат радиуса полуокружности равен $(x_0 - x_1)^2 + y_0^2 = (m^2 + 1)y_0^2$.

Итак, после отражения от кривой $y = f(x)$ в точке (x_0, y_0) луч света движется по гиперболической прямой, заданной уравнением

$$(x - x_1)^2 + y^2 = (m^2 + 1)y_0^2.$$

Эта гиперболическая прямая пересекает мнимую ось в точке $(0, c)$, где c определяется равенствами $x_1^2 + c^2 = (m^2 + 1)y_0^2$, $x_1 = my_0 + x_0$, т. е.

$$c^2 = y_0^2 - 2mx_0y_0 - x_0^2. \qquad (Д.32)$$

Остается доказать, что для всех зеркал (Д.30) выполняется равенство $c^2 = b^2 - a^2$.

Обозначим для краткости $f'(x) = y'$. Тогда соотношение (Д.32) запишется в виде

$$c^2 = y^2 - \frac{(y')^2 - 1}{y'}xy - x^2, \quad \text{т. е.} \quad \frac{c^2}{xy} = \frac{1}{y'} - \frac{x}{y} - y' + \frac{y}{x}.$$

Продифференцировав соотношение (Д.30) по x, получим

$$y' = -\frac{x}{y} \cdot \frac{b^2 + \lambda}{a^2 + \lambda}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{y'} - \frac{x}{y} - y' + \frac{y}{x} = \frac{b^2 - a^2}{xy}\left(\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda}\right) = \frac{b^2 - a^2}{xy}.$$

Следовательно, $c^2 = b^2 - a^2$, что и требовалось.

При $-\lambda < a^2 < b^2$ кривые (Д.30) представляют собой эллипсы с фокусами $(0, \pm c)$. В этом случае (в модели Пуанкаре) лучи света, параллельные мнимой оси, после отражения от таких зеркал движутся по гиперболическим лучам, продолжения которых проходят через точку $(0, c)$.

Объем симплекса с вершинами на абсолюте

На плоскости Лобачевского площадь треугольника с углами α, β, γ равна $\pi-\alpha-\beta-\gamma$ (мы предполагаем, что мнимый радиус c равен 1). В частности, площадь любого треугольника с вершинами на абсолюте равна π.

Все треугольники с вершинами на абсолюте конгруэнтны. Но уже в трехмерном пространстве Лобачевского не все симплексы (тетраэдры) с вершинами на абсолюте конгруэнтны. Объем трехмерного симплекса с вершинами на абсолюте выражается через его углы между гранями с помощью *функции Лобачевского*

$$\Pi(\vartheta)=-\int_0^{\vartheta}\ln|2\sin u|du.$$

Формула для объема тетраэдра была получена Лобачевским. Мы приведем ее доказательство, следуя [М].

Прежде чем получить выражение для объема тетраэдра, докажем основные свойства функции Лобачевского.

Лемма. *Функция* $\Pi(\vartheta)$ *нечетна, имеет период* π *и удовлетворяет соотношению*

$$\Pi(2\vartheta)=2\,\Pi(\vartheta)+\Pi\left(\vartheta+\frac{\pi}{2}\right).$$

Доказательство. При $u\to 0$ подынтегральная функция стремится к $-\infty$, но медленнее, чем $-1/u^2$. Поэтому функция $\Pi(\vartheta)$ задана сходящимся интегралом. Очевидно, что $\Pi(\vartheta)$ — нечетная функция и $\Pi(0)=0$.

Равенство $\sin 2\vartheta=2\sin\vartheta\sin\left(\vartheta+\frac{\pi}{2}\right)$ показывает, что

$$\Pi'(2\vartheta)=2\,\Pi'(\vartheta)+2\,\Pi'\left(\vartheta+\frac{\pi}{2}\right),$$

поэтому

$$\Pi(2\vartheta)=2\,\Pi(\vartheta)+2\,\Pi\left(\vartheta+\frac{\pi}{2}\right)+C.$$

Подставим в это равенство $\vartheta=0$ и $\vartheta=\frac{\pi}{2}$, а затем вычтем одно из полученных равенств из другого. В результате получим $\Pi(\pi)=\Pi(0)=0$. График подынтегральной функции симметричен относительно прямой $u=\pi/2$, поэтому из равенства $\Pi(\pi)=0$ следует, что $\Pi(\pi/2)=0$. Таким образом,

$$C=\Pi(0)-2\,\Pi(0)-2\,\Pi(\pi/2)=0.$$

Функция $\Pi'(\vartheta)=-\ln|2\sin\vartheta|$ имеет период π и $\Pi(\pi)=\Pi(0)=0$, поэтому функция $\Pi(0)$ тоже имеет период π. □

Пусть α, β, γ — двугранные углы при ребрах тетраэдра, выходящих из одной вершины. Если вершины тетраэдра лежат на абсолюте, то $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ и двугранные углы при противоположных ребрах равны α, β, γ (задача Д.30).

Теорема 9. а) *Объем тетраэдра Δ с вершинами на абсолюте равен*

$$\text{Л}(\alpha)+\text{Л}(\beta)+\text{Л}(\gamma).$$

б) *Объем тетраэдра с вершинами на абсолюте максимален тогда и только тогда, когда тетраэдр правильный, т. е. $\alpha=\beta=\gamma=\pi/3$.*

Доказательство. а) Воспользуемся моделью Пуанкаре в полупространстве $H^3=\{(x,\,y,\,z)\,|\,z>0\}$. Квадрат элемента длины в этой модели имеет вид $\dfrac{dx^2+dy^2+dz^2}{z^2}$, а элемент объема имеет вид $\dfrac{dx\,dy\,dz}{z^3}$.

Расположим тетраэдр Δ так, чтобы одна его грань лежала на сфере $x^2+y^2+z^2=1$, а противоположная вершина находилась в бесконечно удаленной точке. Ортогональная проекция тетраэдра Δ на абсолют представляет собой треугольник ABC с углами α, β, γ, вписанный в окружность $x^2+y^2=1$.

Рассмотрим сначала случай, когда все углы α, β, γ острые. Можно считать, что ось Oy параллельна стороне BC и луч Ox пересекает сторону BC. Тогда часть тетраэдра Δ, лежащая над треугольником OBC, задается неравенствами

$$\begin{gathered}z\geqslant\sqrt{1-x^2-y^2},\\ -x\operatorname{tg}\alpha\leqslant y\leqslant -x\operatorname{tg}\alpha,\\ 0\leqslant x\leqslant\cos\alpha.\end{gathered}$$

Ее объем равен

$$\int_0^{\cos\alpha}\left(\int_{-x\operatorname{tg}\alpha}^{x\operatorname{tg}\alpha}\left(\int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\infty}\frac{dz}{z^3}\right)dy\right)dx=\int_0^{\cos\alpha}\left(\int_{-x\operatorname{tg}\alpha}^{x\operatorname{tg}\alpha}\frac{dy}{2(1-x^2-y^2)}\right)dx.$$

Напомним, что

$$\int\frac{dy}{A^2-y^2}=\frac{1}{2A}\ln\frac{A+y}{A-y}.$$

Поэтому

$$\int_{-x\operatorname{tg}\alpha}^{x\operatorname{tg}\alpha}\frac{dy}{2(1-x^2-y^2)}\,\frac{1}{4A}\ln\frac{A+y}{A-y}\,\Big|_{-x\operatorname{tg}\alpha}^{x\operatorname{tg}\alpha}=$$

$$=\frac{1}{2A}\ln\frac{A+x\operatorname{tg}\alpha}{A-x\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{2A}\ln\frac{A\cos\alpha+x\sin\alpha}{A\cos\alpha-x\sin\alpha},$$

где $A=\sqrt{1-x^2}$.

Чтобы вычислить интеграл

$$\int_0^{\cos\alpha} \frac{1}{2A} \ln \frac{A\cos\alpha + x\sin\alpha}{A\cos\alpha - x\sin\alpha} dx,$$

сделаем подстановку $x = \cos\vartheta$. Тогда $A = \sqrt{1-x^2}\sin\vartheta$ и $dx = -Ad\vartheta$, поэтому получаем интеграл

$$-\int_{\pi/2}^{\alpha} \frac{1}{2A} \ln \frac{\sin\vartheta\cos\alpha + \cos\vartheta\sin\alpha}{\sin\vartheta\cos\alpha - \cos\vartheta\sin\alpha} A d\vartheta = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\pi/2} \ln \frac{2\sin(\vartheta+\alpha)}{2\sin(\vartheta-\alpha)} d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{2\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} \ln(2\sin u)du - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \ln(2\sin u)du =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\Л\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) + \Л(2\alpha) + \Л\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - \Л(0)\right).$$

Согласно лемме $\Л(2\alpha) = 2\,\Л(\alpha) + \Л\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому выражение в скобках равно

$$2\,\Л(\alpha) + \Л\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) + \Л\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - \Л(0).$$

Согласно той же лемме функция $\Л(\vartheta)$ нечетна и имеет период π. Поэтому $\Л(0) = 0$ и

$$\Л\Big(\frac{\pi}{2}-\alpha\Big) = -\Л\Big(\alpha - \frac{\pi}{2}\Big) = -\Л\Big(\alpha - \frac{\pi}{2} + \pi\Big) = -\Л\Big(\frac{\pi}{2}+\alpha\Big).$$

Таким образом, объем части тетраэдра Δ, лежащей над треугольником OBC, равен $\Л(\alpha)$. Поэтому объем всего тетраэдра Δ равен $\Л(\alpha) + \Л(\beta) + \Л(\gamma)$.

Если же, например, $\gamma \geqslant \pi/2$, то те же самые рассуждения показывают, что объем тетраэдра Δ равен

$$\Л(\alpha) + \Л(\beta) - \Л(\pi - \gamma) = \Л(\alpha) + \Л(\beta) + \Л(\gamma).$$

б) Требуется найти максимум функции $\Л(\alpha) + \Л(\beta) + \Л(\gamma)$ для неотрицательных α, β, γ, связанных соотношением $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Максимум достигается во внутренней точке рассматриваемой области (если один из углов α, β, γ равен 0, то объем тетраэдра равен 0). Поэтому в точке максимума выполняются равенства $\Л'(\alpha) = \Л'(\beta) = \Л'(\gamma)$. В самом деле, функция $f(x) = \Л(\alpha + x) + \Л(\beta - x)$ имеет локальный максимум в точке $x = 0$, поэтому

$$0 = f'(0) = \Л'(\alpha) - \Л'(\beta).$$

По условию $\Л'(\vartheta) = -\ln|2\sin\vartheta|$. Если $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$, то $\Л'(\vartheta) = -\ln(2\sin\vartheta)$. Поэтому $\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma$. Это означает, что длины сторон треугольника с углами α, β, γ попарно равны, т. е. $\alpha = \beta = \gamma = \pi/3$. □

В n-мерном пространстве Лобачевского при $n>3$ максимальный объем тоже имеет правильный симплекс с вершинами на абсолюте (см. [Н1]).

Задачи

Д.28. Докажите, что ограничение движения трехмерного пространства Лобачевского на абсолют имеет одну или две неподвижные точки.

Д.29. Пусть A, B, C, D — попарно различные точки абсолюта для трехмерного пространства Лобачевского. Докажите, что существует движение, переставляющее как точки A и B, так и точки C и D.

Д.30. Рассмотрим тетраэдр с вершинами на абсолюте.

а) Докажите, что его противоположные двугранные углы равны.

б) Докажите, что сумма его двугранных углов при любой вершине равна π.

Д.31. Докажите, что сумма двугранных углов n-гранного угла с вершиной на абсолюте равна $(n-2)\pi$.

Д.32. Докажите, что объем тетраэдра с вершинами на абсолюте конечен.

Д.33. Двугранный угол куба в пространстве Лобачевского равен α, а угол между сторонами грани равен β. Докажите, что $\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{1}{2}$.

Д.34. Движение f пространства Лобачевского таково, что расстояние между точками X и $f(X)$ одно и то же для всех X. Докажите, что f — тождественное преобразование.

Д.35. Преобразование f пространства Лобачевского таково, что оно увеличивает расстояние между любыми двумя точками X и Y в одно и то же число раз k, т. е. $d(f(X),\,f(Y))=kd(X,\,Y)$. Докажите, что $k=1$, т. е. f — изометрия.

Д.36. Возьмем в n-мерном гиперболическом пространстве точки $z_1,\,\ldots,\,z_{n+2}$ и рассмотрим матрицу $A=(a_{ij})$, $a_{ij}=\operatorname{ch}(d_{ij})$, где d_{ij} — расстояние между точками z_i и z_j. Докажите, что $\det A=0$.

ешения, указания, ответы

Глава 1

1.1. Запишите уравнения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника и найдите точку их пересечения.

1.2. Векторы (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3) ортогональны данным плоскостям.

1.3.
$$\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right).$$

1.4. Плоскости $\alpha e_1 + \beta e_2$ и $\gamma e_3 + \delta e_4$.

1.5. Плоскости $\alpha e_1 + \beta e_2 + e_3$ и $\gamma e_1 + \delta e_4$.

1.6. Точку A сдвигаем сначала перпендикулярно $\mathbb{R}^3$, затем параллельно $\mathbb{R}^3$, а затем возвращаем в $\mathbb{R}^3$.

1.7. Одну окружность сдвигаем сначала перпендикулярно $\mathbb{R}^3$, затем параллельно $\mathbb{R}^3$, а затем возвращаем в $\mathbb{R}^3$.

1.8. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис, $a_k = \sum a_k^i e_i$, $x = \sum x^i e_i$. Тогда сумма квадратов проекций векторов $a_1, \ldots, a_n$ на прямую, параллельную вектору x, равна
$$\sum_k \frac{(a_k,\, x)^2}{|x|^2} = \frac{\sum\limits_{i,k}(a_k^i,\, x^i)^2 + 2\sum\limits_k \sum\limits_{i<j} a_k^i a_k^j x^i x^j}{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Это сумма постоянна тогда и только тогда, когда $\sum\limits_k (a_i^k)^2 = \lambda^2$ и $\sum\limits_k a_k^i a_k^j = 0$. Пусть $b_k^i = \lambda^{-1} a_k^i$. Тогда матрица $B = (b_k^i)$ ортогональна, а значит, $(b_p,\, b_q) = \sum\limits_i b_p^i b_q^i = \delta_{pq}$.

1.9. а) Нет, нельзя. Разрежем куб на 8 одинаковых кубиков с ребром $d/2$. Расстояние между любыми двумя точками, лежащими в маленьком кубике, не превосходит $d\sqrt{3}/2$, т. е. оно меньше d. Поэтому в каждом из восьми маленьких кубиков находится не более чем одна из данных точек.

б) Да, можно. Поместим 16 точек в вершины куба, а еще одну точку поместим в центр куба.

1.10. Можно считать, что длина каждого вектора $a_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ равна 1. Предположим, что эти векторы линейно зависимы. Тогда существуют числа $y_1, \ldots, y_n$, сумма квадратов которых равна 1 и для

которых выполняется равенство $\sum\limits_j y_j a_{ij} = 0$ (мы пользуемся тем, что линейная зависимость строк квадратной матрицы эквивалентна линейной зависимости ее столбцов). В таком случае

$$a_{ii}^2 y_i^2 = \Big(\sum_{j\neq i} y_j a_{ij}\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{j\neq i} y_j^2\Big)\Big(\sum_{j\neq i} a_{ij}^2\Big) = (1-y_i^2)(1-a_{ii}^2),$$

поэтому $y_i^2 + a_{ii}^2 \leqslant 1$, т. е. $a_{ii} \leqslant \sqrt{1-y_i^2}$. Следовательно,

$$\sum a_{ii} \leqslant \sum \sqrt{1-y_i^2} \leqslant \sqrt{n}\cdot\sqrt{\sum(1-y_i^2)} = \sqrt{n(n-1)}.$$

Итак, если векторы $a_1, \ldots, a_n$ линейно зависимы, то $\sum \cos\alpha_i = \sum a_{ii} \leqslant \sqrt{n(n-1)}$. Поэтому из неравенства $\sum \cos\alpha_i > \sqrt{n(n-1)}$ следует линейная независимость этих векторов.

Замечание. Для линейно зависимых векторов $a_i = ne_i - (e_1 + \ldots + e_n)$ выполняется равенство $\sum \cos\alpha_i = \sqrt{n(n-1)}$.

1.11. Пусть P — общая точка исходных шаров, $f(X) = \max |XB_i|/|PA_i|$ (максимум берется по i). Тогда $f(X) \to \infty$ при $X \to \infty$, поэтому f имеет точку минимума Q. Достаточно доказать, что $f(Q) \leqslant 1$ (тогда $|QB_i| \leqslant |PA_i| \leqslant R_i$). График функции $y = f(X)$ — граница пересечения конусов в вершинами $B_1, \ldots, B_m$. Точка минимума принадлежит границам не менее чем двух конусов с вершинами B_i и B_j. Рассмотрев ограничение функции f на прямую B_iB_j, легко убедиться, что $f(Q) \leqslant 1$.

1.12. а) Пусть a_3' — проекция вектора a_3 на плоскость Π, порожденную векторами a_1 и a_2. Тогда $(a_3', a_i) = (a_3, a_i) \geqslant 0$ при $i = 1, 2$, поэтому на плоскости Π можно выбрать оси прямоугольной системы координат так, чтобы координаты векторов a_1, a_2 и a_3' были неотрицательны. Третья ось координат перпендикулярна плоскости Π и направлена так, чтобы третья координата вектора a_3 была неотрицательна.

б) Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^n$ векторы $a_1 = (1, 0, 0)$, $a_2 = (0, 1, 0)$, $a_3 = (1, 0, 1)$, $a_4 = (0, 1, 1)$ и $a_5 = (1, 1, -1)$. Легко проверить, что $(a_i, a_j) \geqslant 0$. Докажем теперь, что в $\mathbb{R}^n$ нельзя выбрать прямоугольную систему координат так, чтобы координаты векторов $a_1, \ldots, a_5$ были неотрицательны. Прежде всего докажем, что в такой системе координат у вектора $a_6 = (0, 0, 1)$ все координаты тоже неотрицательны. Пусть некоторая координата вектора a_6 отрицательна. Тогда у вектора a_1 эта координата положительна, так как у вектора $a_3 = a_1 + a_6$ все координаты неотрицательны. Аналогично доказывается, что рассматриваемая координата вектора a_2 положительна, так как у вектора $a_4 = a_2 + a_6$ все координаты неотрицательны. Но у векторов a_1 и a_2 одна и та же координата не может быть одновременно положительной. В самом деле,

все координаты этих векторов неотрицательны, а их скалярное произведение равно нулю. Следовательно, у вектора a_6 нет неотрицательных координат.

Теперь уже легко прийти к противоречию. С одной стороны, все координаты векторов a_5 и a_6 неотрицательны, поэтому их скалярное произведение неотрицательно. С другой стороны, в $\mathbb{R}^3$ векторы a_5 и a_6 имеют координаты $(1, 1, -1)$ и $(0, 0, 1)$ соответственно, поэтому их скалярное произведение равно -1.

1.13. Рассматриваемый определитель равен ориентируемому объему параллелепипеда, натянутого на векторы $(x_1, y_1, 1)$, $(x_2, y_2, 1)$ и $(x_3, y_3, 1)$. Объем равен нулю тогда и только тогда, когда эти векторы линейно зависимы, т.е. рассматриваемые точки лежат на одной прямой.

1.14. Воспользуйтесь тем, что объем параллелепипеда не превосходит произведения длин его ребер.

1.15. Пусть A, B, C — концы данных векторов с общим началом O, H — проекция точки A на плоскость OBC. Тогда $V = |AH|bc\sin\alpha$. Чтобы вычислить $|AH|$, рассмотрим проекции M и N точки A на прямые OB и OC соответственно. Точки M и N лежат на окружности с диаметром $|OH|$, поэтому $|OH| = |MN|/\sin\alpha$. В треугольнике OMN сторону MN можно выразить по теореме косинусов. После этого выражаем $|AH|$ исходя из соотношения $|AH|^2 = a^2 - |OH|^2$.

1.16. *Первое решение.* Пусть S_i — площадь i-й грани. Тогда $S_1 = S_2\cos\varphi_{12} + S_3\cos\varphi_{13} + S_4\cos\varphi_{14}$. Аналогичные выражения можно записать и для S_2, S_3, S_4. Эти выражения можно рассмотреть как систему линейных уравнений относительно S_1, S_2, S_3, S_4. Эта система имеет ненулевое решение, поэтому ее определитель равен нулю. Но этот определитель совпадает с рассматриваемым определителем.

Второе решение. Пусть n_i — вектор внешней нормали к i-й грани. Тогда $(n_i, n_j) = -\cos\varphi_{ij}$ при $i \neq j$. Ясно также, что $\det\|(n_i, n_j)\|$ — определитель Грама порядка 4 в трехмерном пространстве. Поэтому он равен нулю.

1.17. а) Ясно, что

$$V_n = \int_0^h \left(\frac{t}{h}\right)^{n-1} V_{n-1}\,dt = \frac{1}{n}\frac{h^n}{h^{n-1}}V_{n-1}.$$

б) Пусть V_k — объем симплекса $A_1\ldots A_kA_{n+1}$. Тогда $V_k = hV_{k-1}/k$. С другой стороны, $|V(a_1, \ldots, a_k)| = h|V(a_1, \ldots, a_{k-1})|$. Ясно также, что $V_1 = |V(a_1)|$. Поэтому по индукции получаем

$$V_k = \frac{1}{k!}|V(a_1, \ldots, a_k)|.$$

1.18. Пусть W_n — объем параллелепипеда, порожденного ребрами

симплекса $A_1 \dots A_{n+1}$, выходящими из вершины A_1. Тогда $V_n = \dfrac{1}{n!} W_n$. Поэтому требуется доказать, что $W_n^2 = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n} D$, где D — рассматриваемый определитель.

Рассмотрим вспомогательный определитель

$$G = \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & \dots & (a_1, a_{n+1}) & 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & \\ (a_{n+1}, 1) & \dots & (a_{n+1}, a_{n+1}) & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

где $a_i = \overrightarrow{OA}_i$, O — начало координат. Доказательство проведем в два этапа. Сначала докажем, что $W_n^2 = -G$, а затем докажем, что $G = \dfrac{(-1)^n}{2^n} D$.

Определитель G можно представить в виде произведения двух определителей:

$$G = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n & 1 & 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & & \\ a_{n+1}^1 & \dots & a_{n+1}^1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_{n+1}^1 & 0 \\ \dots\dots\dots\dots & & & \\ a_1^n & \dots & a_{n+1}^n & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Учитывая, что

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n & 1 \\ \dots\dots\dots\dots & & & \\ a_{n+1}^1 & \dots & a_{n+1}^n & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n & 1 \\ a_2^1 - a_1^1 & \dots & a_2^n - a_1^n & 0 \\ \dots\dots\dots\dots & & & \\ a_{n+1}^1 - a_1^1 & \dots & a_{n+1}^n - a_{n+1}^n & 0 \end{vmatrix} = \pm W_n,$$

получим $G = -W_n^2$.

Перейдем ко второму этапу, т. е. к доказательству равенства $G = \dfrac{(-1)^n}{2^n} D$. Согласно теореме косинусов

$$d_{ij}^2 = a_i^2 + a_j^2 + 2(a_i, a_j),$$

поэтому в определителе G каждый элемент (a_i, a_j) можно заменить на $\dfrac{1}{2}(a_i^2 + a_j^2 - d_{ij}^2)$; для диагональных элементов $d_{ii} = 0$. Для $k = 1, 2, \dots$ $\dots, n+1$ вычтем из k-го столбца последний столбец определителя G, умноженный на $\dfrac{a_k^2}{2}$. Затем такую же операцию проделаем для строк. В результате получим определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & -(1/2)d_{12}^2 & \dots & -(1/2)d_{1,n+1}^2 & 1 \\ -(1/2)d_{21}^2 & 0 & \dots & -(1/2)d_{2,n+1}^2 & 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & & \\ -(1/2)d_{n+1,1}^2 & -(1/2)d_{n+1,2}^2 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Умножим последнюю строку и последний столбец на $-1/2$ (при этом определитель изменится: он умножится на $1/4$). Умножим затем каждый элемент на -2 (определитель при этом умножится на $(-2)^{n+2}$). В результате получим определитель D. Поэтому $D = \dfrac{(-2)^{n+2}}{4} G$, т. е. $G = \dfrac{(-1)^n}{2^n} D$.

1.19. Рассмотрим вырожденный $(n+1)$-мерный симплекс $A_1 \dots$ $\dots A_{n+2}$, где A_{n+2} — центр описанной сферы симплекса $A_1 \dots A_{n+1}$. Из вырожденности симплекса следует, что его объем равен нулю. Запишем это условие в детерминантном виде с помощью предыдущей задачи. При этом в определителе появятся дополнительные строка и столбец $d^2_{i,n+2} = d^2_{n+2,i} = R^2$. Прибавим в этом определителе к предпоследней строке последнюю строку, умноженную на $-R^2$; затем сделаем то же самое для столбцов. Разложив полученный определитель по предпоследней строке, получим $-2R^2 D + \Delta = 0$.

1.20. Пусть точка A_i имеет координаты $(a_i^1, \dots, a_i^n) = a_i$. Точки $A_1, \dots, A_{n+2}$ лежат на одной сфере или в одной гиперплоскости тогда и только тогда, когда можно подобрать ненулевой набор чисел $x, y, z_1, \dots, z_n$ так, чтобы выполнялись равенства

$$x|a_i|^2 + y + \sum_{j=1}^{n} z_j a_i^j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n+2.$$

Полученная система линейных уравнений относительно x, y, z_j имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ее определитель

$$\begin{vmatrix} |a_1|^2 & 1 & a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ |a_{n+2}|^2 & 1 & a_{n+2}^1 & \dots & a_{n+2}^n \end{vmatrix}$$

равен нулю. Равенство нулю этого определителя эквивалентно равенству нулю определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ |a_1|^2 & \dots & |a_{n+2}|^2 \\ -2a_1^1 & \dots & -2a_{n+2}^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ -2a_1^n & \dots & -2a_{n+2}^n \end{vmatrix}.$$

Легко проверить, что произведение первого определителя на второй равно определителю, участвующему в формулировке задачи.

1.21. Задача а) является частным случаем задачи б), поэтому решим сразу задачу б). Пусть d_{ij} — расстояние между центрами O_i и O_j данных сфер. Угол между сферами равен φ тогда и только тогда, когда

$$d_{ij}^2 = r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos\varphi.$$

Эти соотношения можно использовать для того, чтобы получить алгебраическое соотношение между $r_1, \ldots, r_{n+1}$. В самом деле, выбрав подходящим образом систему координат, можно считать, что у точки O_i первые $n-i$ координат нулевые. Тогда указанные $\dfrac{n(n+1)}{2}$ соотношений позволяют избавиться от всех координат и получить требуемое соотношение между r_i.

Покажем теперь, что при фиксированных $r_1, \ldots, r_n$ для r_{n+1} получится квадратное уравнение. В самом деле, при $i, j \leqslant n$ расстояния d_{ij} фиксированы, поэтому конфигурация центров первых n сфер определена однозначно. Таким образом, координаты этих центров можно считать фиксированными. Соотношения

$$d_{i,n+1}^2 = r_{n+1}^2 + r_i^2 - 2r_{n+1}r_i\cos\varphi, \quad i = 1, \ldots, n,$$

можно рассматривать как уравнение относительно неизвестных r_{n+1} и координат точки O_{n+1}. Перейдем к эквивалентной системе уравнений: оставим первое уравнение, а вместо уравнений с номерами $2, \ldots, n$ рассмотрим их разности с первым уравнением. Последние уравнения будут линейными. Они позволяют выразить координаты точки O_{n+1} через r_{n+1} (и фиксированные величины); выражения будут линейны по r_{n+1}. Подставив это выражение в первое уравнение, получим квадратное уравнение для r_{n+1}.

Рассмотрим частный случай $r_1 = \ldots = r_n = x^{-1}$, $r_{n+1} = y^{-1}$. Тогда квадраты попарных расстояний между точками $O_1, \ldots, O_n$ равны $d^2 = 2(1-\cos\varphi)y^{-2}$, а квадраты расстояний от этих точек до точки O_{n+1} равны $l^2 = x^{-2}y^{-2}(x^2+y^2-xy\cos\varphi)$. Поэтому $O_1\ldots O_n$ — правильный симплекс с центром O_{n+1}. Длина ребра этого симплекса равна d, а радиус описанной сферы равен l. Таким образом,

$$n(x^2+y^2-2xy\cos\varphi) = (n-1)(1-\cos\varphi)x^2. \tag{Р.1}$$

Пусть $s_k = r_1^{-k} + \ldots + r_{n+1}^{-k}$. Для $r_1, \ldots, r_{n+1}$ имеется алгебраическое соотношение $P(s_1, \ldots, s_{n+1}) = 0$. При подстановке $r_1 = \ldots = r_n = x^{-1}$, $r_{n+1} = y^{-1}$ это соотношение превращается в (Р.1), причем вырождения в этом случае не происходит, так как и в общем случае для r_{n+1} при фиксированных $r_1, \ldots, r_n$ получается квадратное уравнение. Поэтому P зависит только от s_1 и s_2. А так как относительно r_i^{-1} многочлен P однороден, $P(s_1, s_2) = \lambda s_1^2 + \mu s_2$.

В нашем случае $s_1 = x + ny$, $s_2 = x^2 + ny^2$. Многочлен P совпадает с (Р.1) при $\lambda = -\cos\varphi$, $\mu = 1 + n\cos\varphi$. Следовательно, и в общем случае

$$s_1^2 = \Big(n + \frac{1}{\cos\varphi}\Big)s_2.$$

1.22. При $n=1$ утверждение очевидно: рассматривается лишь один определитель; он равен $2d_{12}^2$, а знак перед определителем положительный.

Докажем теперь требуемое утверждение индукцией по n: сделаем шаг от n к $n+1$. По предположению индукции в $\mathbb{R}^n$ существуют симплексы $A_1A_3\dots A_{n+2}$ и $A_2A_3\dots A_{n+2}$ с ребрами длиной $d_{ij}=|A_iA_j|$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ гиперплоскость $\mathbb{R}^{n-1}$, содержащую симплекс $A_3\dots A_{n+2}$. Положение точек A_1 и A_2 определено с точностью до симметрии относительно этой гиперплоскости. Пусть $\rho_{\min}$ и $\rho_{\max}$ — расстояния между точками в том случае, когда они расположены по одну стороны от гиперплоскости, и в том случае, когда они расположены по разные стороны. Покажем, что симплекс $A_1A_2\dots A_{n+2}$ с ребрами длиной $d_{ij}=|A_iA_j|$ существует тогда и только тогда, когда $\rho_{\min}<d_{12}<\rho_{\max}$. Вложим $\mathbb{R}^{n-1}\subset\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{n+1}$. Можно считать, что эти подпространства задаются уравнениями $x_{n+1}=0$ и $x_n=x_{n+1}=0$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^{n+1}$ вращение вокруг $\mathbb{R}^{n-1}$ (это преобразование не изменяет координаты x_1, …, x_{n-1}, а на координаты x_n, x_{n+1} оно действует как поворот на угол φ). Подвергнем точку A_1 такому преобразованию. При изменении φ от 0 до 2π точка A_1 будет вращаться по окружности в двумерной плоскости, ортогональной $\mathbb{R}^{n-1}$. При этом расстояние от точки A_1 до точки A_2 будет изменяться от $\rho_{\min}$ до $\rho_{\max}$, а расстояния от A_1 до точек A_3, …, A_{n+2} будут постоянны. Поэтому при $\rho_{\min}<d_{12}<\rho_{\max}$ требуемый симплекс существует, а при других значениях d_{12} симплекс не существует. Случаи $d_{12}=\rho_{\min}$ и $d_{12}=\rho_{\max}$ соответствуют вырожденным симплексам нулевого объема.

Остается доказать, что неравенство

$$(-1)^{n+2}\begin{vmatrix} 0 & x & \dots & d_{1,n+2}^2 & 1\\ x & 0 & \dots & d_{2,n+2}^2 & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ d_{n+2,1}^2 & d_{n+2,2}^2 & \dots & 0 & 1\\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}>0$$

эквивалентно тому, что $\rho_{\min}<x<\rho_{\max}$. Ясно, что левая часть этого неравенства имеет вид ax^2+bx+c, где числа a, b, c не зависят от x, причем $a<0$. В самом деле, коэффициент a равен произведению числа $-(-1)^{n+2}$ на определитель для точек $A_3\dots A_{n+2}$, знак которого по условию равен $(-1)^n$. Корни многочлена ax^2+bx+c соответствуют вырождениям симплекса $A_1A_2\dots A_{n+2}$, т.е. эти корни равны $\rho_{\min}$ и $\rho_{\max}$. Учитывая, что $a<0$, получаем, что неравенство $ax^2+bx+c>0$ эквивалентно тому, что $\rho_{\min}<x<\rho_{\max}$.

1.23. Пусть S — $(n-1)$-мерный объем грани правильного n-мерного симплекса. Выделим одну из граней симплекса и спроецируем на нее

остальные n граней. Объем проекции каждой грани равен $S\cos\varphi$, поэтому $nS\cos\varphi = S$, т. е. $\cos\varphi = 1/n$.

1.24. Объем любого параллелепипеда, порожденного векторами с целочисленными координатами, является целым числом. Ясно также, что квадрат длины ребра — целое число. Таким образом, если a — длина ребра куба, то числа a^{2n+1} и a^2 целые. Следовательно, число $a = a^{2n+1}/(a^2)^n$ рационально, причем его квадрат — целое число. Поэтому число a целое.

1.25. Пусть O — некоторая точка внутри четырехмерного симплекса. Проведем через точку O и каждое ребро симплекса двумерную плоскость. В результате получим конечное число плоскостей (а именно, 10 плоскостей). В четырехмерном пространстве две двумерные плоскости общего положения, проходящие через точку O, не имеют других общих точек. Поэтому существует плоскость, проходящая через точку O и не имеющая других общих точек с проведенными плоскостями. Эта плоскость проходит через внутреннюю точку симплекса и не пересекает его ребер.

1.26. Проведем через начало координат в n-мерном пространстве плоскость, порожденную векторами a и b. Она пересекает куб $|x_k| \leqslant 1$, $k = 1, \ldots, n$, по множеству

$$\{xa + yb \mid |xa_k + yb_k| \leqslant 1,\ k = 1, \ldots, n\}.$$

Векторы a и b достаточно выбрать так, чтобы выполнялись следующие свойства:

1) $|a| = |b|$ и $(a, b) = 0$;

2) на плоскости с координатами x, y неравенства $|xa_k + yb_k| \leqslant 1$, $k = 1, \ldots, n$, задают правильный $2n$-угольник.

Оба свойства выполняются при $a_k = \sin k\alpha$, $b_k = \cos k\alpha$, где $\alpha = \pi/n$. В самом деле,

$$(a, b) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \sin 2k\alpha, \qquad |a|^2 = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \cos 2k\alpha, \qquad |b|^2 = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \cos 2k\alpha,$$

а все эти суммы синусов и косинусов равны нулю.

1.27. а) Рассмотрим сечения куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, перпендикулярные диагонали AC_1. Для наших целей не подходят такие сечения, проходящие через точки тетраэдров A_1ABD и $CC_1B_1D_1$. Рассмотрим затем сечения, перпендикулярные диагонали A_1C. Неподходящее множество точек сужается до двух меньших тетраэдров и пары отрезков BD и B_1D_1. Рассмотрим, наконец, сечения, перпендикулярные диагоналям BD_1 и B_1D. Плохое множество сужается после этого до вершин

куба и центров граней; внутренние точки куба в это множество не входят.

б) Проведем через центр куба двумерную плоскость Π, пересекающую куб по $2n$-угольнику (см. задачу 1.26). Плоскость Π пересекает все $(n-1)$-мерные грани куба во внутренних точках, поэтому трехмерное пространство, порожденное плоскостью Π и данной точкой A, обладает всеми требуемыми свойствами.

1.28. а) Предположим сначала, что высоты симплекса пересекаются в точке A_0. Положим $e_i = \overrightarrow{A_1A_i}$ и $x = \overrightarrow{A_1A_0}$. Тогда

$$(x,\, e_i - e_j) = 0, \quad (x - e_i,\, e_j) = 0.$$

Следовательно, $(x,\, e_i) = \text{const}$ и $(e_i,\, e_j) = (x,\, e_i)$.

Предположим теперь, что $(e_i,\, e_j) = \text{const}$. Из невырожденности симплекса следует линейная независимость векторов $e_2, \ldots, e_{n+1}$. Пусть $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n+1}$ — двойственный базис, т. е. $(\varepsilon_i,\, \varepsilon_j) = \delta_{ij}$. Положим $x = c(\varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n)$, где $c = (e_i,\, e_j)$. Легко проверить, что в таком случае

$$(x,\, e_i - e_j) = 0, \quad (x - e_i,\, e_j) = 0.$$

Поэтому если A_0 — конец вектора x с началом A_1, то A_0 — ортоцентр симплекса.

б) Ортогональность ребер симплекса эквивалентна равенствам $(e_i,\, e_j - e_k) = 0$, $(e_i - e_j,\, e_k - e_l) = 0$. А эти равенства эквивалентны тому, что $(e_i,\, e_j) = \text{const}$.

в) Предположим сначала, что $A_2 \ldots A_{n+1}$ — ортоцентрический симплекс и высота, опущенная из точки A_1, попадает в ортоцентр H этого симплекса. Нужно доказать, что $A_1A_k \perp A_iA_j$ при попарно различных $i, j, k \geqslant 2$. Ясно, что $A_2H \perp A_iA_j$ и $A_kH \perp A_iA_j$. Поэтому плоскость A_1A_kH перпендикулярна прямой A_iA_j, а значит, $A_1A_k \perp A_iA_j$.

Предположим теперь, что симплекс $A_1 \ldots A_n$ ортоцентрический. Тогда при попарно различных i, j, k, l ребра A_iA_j и A_kA_l ортогональны. Это означает, в частности, что симплекс $A_2 \ldots A_n$ ортоцентрический. Пусть H — его ортоцентр. Нужно доказать, что при $i, j \geqslant 2$ ребро A_iA_j ортогонально прямой A_1H. Тогда $A_kH \perp A_iA_j$ и $A_1A_k \perp A_iA_j$, а значит, $A_1H \perp A_iA_j$.

г) Пусть a, b, c, d — векторы сторон пространственного четырехугольника с вершинами в четырех вершинах симплекса. Проверим, что равенство $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ эквивалентно ортогональности диагоналей, т. е. равенству $(a+b,\, b+c) = 0$. Так как $d = -(a+b+c)$, то первое равенство можно записать в виде

$$a^2 + c^2 = b^2 + a^2 + b^2 + c^2 + 2(a,\, b) + 2(b,\, c) + 2(a,\, c).$$

Это равенство эквивалентно равенству $(a+b,\, b+c) = 0$.

д) Предположим сначала, что выполняются равенства $|A_iA_j|^2 = a_i + a_j$. Тогда, как легко проверить, выполняется соотношение (1.1), с. 44, поэтому симплекс ортоцентрический.

Предположим теперь, что симплекс ортоцентрический. Тогда из соотношения (1.1) следует, что число

$$a_i = \frac{1}{2}(|A_iA_j| + |A_iA_k| - |A_jA_k|)$$

не зависит от j и k. Ясно также, что $|A_iA_j|^2 = a_i + a_j$.

е) Если индексы i, j, k попарно различны и отличны от нуля, то $A_0A_i \perp A_jA_k$. Из этого следует, что выполняется соотношение (1.1) и существуют требуемые числа $a_0, \ldots, a_{n+1}$.

Равенство $a_0^{-1} + \ldots + a_{n+1}^{-1} = 0$ докажем индукцией по n. База индукции: точка A_0, лежащая на отрезке A_1A_2. Если $|A_1A_0| = b$ и $|A_0A_2| = c$, то $a_0 = -bc$, $a_1 = b(b+c)$, $a_2 = c(b+c)$.

Докажем теперь шаг индукции. Пусть A_0' и A_0 — ортоцентры симплексов $A_1 \ldots A_n$ и $A_1 \ldots A_{n+1}$. Положим $|A_0'A_0| = x$ и $|A_0A_{n+1}| = y$. Тогда

$$|A_iA_0^2| = |A_0'A_i|^2 + |A_0'A_0|^2 = a_i + a_0' + x^2,$$
$$|A_iA_{n+1}|^2 = |A_0'A_i|^2 + |A_0'A_{n+1}|^2 = a_i + a_0' + (x+y)^2.$$

Эти равенства означают, что $a_0 = a_0' + x^2$ и $a_{n+1} = a_0' + (x+y)^2$. Кроме того, $y^2 = a_0 + a_{n+1}$, поэтому $a_0' = -x(x+y)$.

По предположению индукции $a_1^{-1} + \ldots + a_n^{-1} = -(a_0')^{-1}$. Следовательно,

$$a_0^{-1} + \ldots + a_{n+1}^{-1} = \frac{1}{-xy} - \frac{1}{-x(x+y)} + \frac{1}{y(x+y)} = 0.$$

1.29. Соотношение $\overrightarrow{OA}_1 + \ldots + \overrightarrow{OA}_{n+1} = (n-1)\overrightarrow{OX}$ однозначно определяет точку X. Поэтому достаточно проверить, что $(\overrightarrow{A_2A_3},\ \overrightarrow{A_1X}) = 0$. Ясно, что

$$(n-1)\overrightarrow{A_1X} = (n-1)\overrightarrow{A_1O} + (n-1)\overrightarrow{OX} = (n-2)\overrightarrow{A_1O} + \overrightarrow{OA}_2 + \ldots + \overrightarrow{OA}_{n+1} =$$
$$= \overrightarrow{OA}_2 + \overrightarrow{OA}_3 + \overrightarrow{A_1A}_4 + \ldots + \overrightarrow{A_1A}_{n+1}.$$

Равенство $(\overrightarrow{A_2O} + \overrightarrow{OA}_3,\ \overrightarrow{OA}_2 + \overrightarrow{OA}_3) = 0$ следует из того, что $|OA_2| = |OA_3|$, а равенства $(\overrightarrow{A_2A}_3,\ \overrightarrow{A_1A}_4) = \ldots = (\overrightarrow{A_2A}_3,\ \overrightarrow{A_1A}_{n+1}) = 0$ следуют из того, что симплекс ортоцентрический.

Глава 2

2.4. Случаи трапеции и параллелограмма легко разбираются, поэтому будем предполагать, что у выпуклого четырехугольника $ABCD$ нет параллельных сторон. Для определенности будем считать, что пересе-

каются лучи AB и DC, BC и AD. Пусть $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{CD}=p\vec{a}+q\vec{b}$, $\overrightarrow{DA}=u\vec{a}+v\vec{b}$. Тогда $p<0$, $q>0$, $u<0$, $v<0$.

Рассмотрим аффинное преобразование, переводящее векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в ортогональные векторы $\vec{a}'$ и $\vec{b}'$, длины которых равны λ и μ. Нам нужно, чтобы обращалось в нуль скалярное произведение

$$(p\vec{a}+q\vec{b},\ u\vec{a}+v\vec{b})=pu\lambda^2+qv\mu^2.$$

Поскольку $pu>0$ и $qv<0$, этого всегда можно добиться выбором чисел λ и μ.

Отметим, что при любом аффинном преобразовании образ угла при вершине C больше образа угла при вершине A; эти углы нельзя сделать равными.

2.5. Пусть A_1, B_1, ..., F_1 — середины сторон AB, BC, ..., FA. Равенство диагоналей AD и BE эквивалентно тому, что прямая A_1D_1 перпендикулярна прямым AB и DE. Пусть O — точка пересечения прямых A_1D_1 и B_1E_1. Нужно построить аффинное преобразование, которое переводит углы A_1 и B_1 четырехугольника A_1BB_1O в прямые углы. Для этого можно воспользоваться результатом предыдущей задачи. То, что точки пересечения продолжений сторон четырехугольника A_1BB_1O расположены именно так, как нужно, следует из выпуклости шестиугольника.

2.6. Предположим, что существует аффинное преобразование, переводящее векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ в векторы $\vec{a}'$, $\vec{b}'$, $\vec{c}'$ равной длины. Из равенства $\alpha\vec{a}'+\beta\vec{b}'+\gamma\vec{c}'=0$ следует, что из отрезков длины $|\alpha|$, $|\beta|$, $|\gamma|$ можно составить треугольник.

Предположим теперь, что из отрезков длины $|\alpha|$, $|\beta|$, $|\gamma|$ можно составить треугольник. Тогда $\alpha\vec{a}'+\beta\vec{b}'+\gamma\vec{c}'=0$ для некоторых векторов $\vec{a}'$, $\vec{b}'$, $\vec{c}'$ единичной длины. Рассмотрим аффинное преобразование, переводящее векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в $\vec{a}'$ и $\vec{b}'$. Из равенств $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=0$ и $\alpha\vec{a}'+\beta\vec{b}'+\gamma\vec{c}'=0$ следует, что рассматриваемое аффинное преобразование переводит вектор $\vec{c}$ в $\vec{c}'$ (предполагается, что $\gamma\neq 0$).

2.10. Пусть $y_i=a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n$. В пространстве с координатами y_1, ..., y_n неравенства $|y_i|\leqslant b_i$ задают прямоугольный параллелепипед, объем которого равен $2^nb_1\ldots b_n$. Рассматриваемая фигура является образом этого параллелепипеда при отображении A^{-1}, поскольку из равенства $y=Ax$ следует равенство $x=A^{-1}y$. Поэтому объем этой фигуры равен $|\det A^{-1}|2^nb_1\ldots b_n=2^nb_1\ldots b_n/|\Delta|$.

2.11. а), б) Пусть $\lambda_1A_1+\lambda_2A_2$ и $\lambda_1B_1+\lambda_2B_2$ — точки фигуры $\lambda_1M_1+{}+\lambda_2M_2$ (здесь A_i и B_i — точки многоугольника M_i). Тогда фигура $\lambda_1M_1+\lambda_2M_2$ содержит параллелограмм с вершинами $\lambda_1A_1+\lambda_2A_2$,

$\lambda_1 B_1 + \lambda_2 A_2$, $\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2$, $\lambda_1 B_1 + \lambda_2 A_2$. Выпуклость фигуры $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$ следует из того, что она содержит диагональ этого прямоугольника.

Предположим, что многоугольники M_1 и M_2 лежат по одну стороны от некоторой прямой l. Будем сдвигать эту прямую параллельно самой себе до тех пор, пока она не соприкоснется с M_1 и с M_2. Пусть a_1 и a_2 — длины отрезков, по которым l пересекает M_1 и M_2 в момент соприкосновения ($a_i = 0$, если прямая l не параллельна сторонам многоугольника M_i). Тогда в момент соприкосновения с фигурой $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$ прямая l пересекает ее по отрезку длины $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$. Число $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$ отлично от нуля лишь в том случае, когда одно из чисел a_1 и a_2 отлично от нуля.

в) Выберем внутри многоугольника M_i точку O_i и разрежем его на треугольники с вершиной O_i; многоугольник $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$ разрежем на треугольники с вершиной $O = \lambda_1 O_1 + \lambda_2 O_2$. Паре треугольников с основаниями a_1 и a_2 и высотами h_1 и h_2 соответствует треугольник с основанием $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$ и высотой $\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2$. Остается заметить, что

$$(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2)(\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2) = \lambda_1^2 a_1 h_1 + \lambda_1 \lambda_2 (a_1 h_2 + a_2 h_1) + \lambda_2^2 a_2 h_2.$$

Глава 3

3.1. Требуемое равенство эквивалентно равенству

$$\left(\frac{c-a}{c-b} \cdot \frac{d-b}{d-a}\right) \cdot \left(\frac{d-a}{d-b} \cdot \frac{e-b}{e-a}\right) \cdot \left(\frac{e-a}{e-b} \cdot \frac{c-b}{c-a}\right) = 1.$$

3.2. Прямая $l(t)$ пересекает прямую $y = 1$ в точке $(x, 1)$, где x и t связаны соотношением $a_1 x + b_1 = t(a_2 x + b_2)$. Поэтому двойное отношение прямых $l(t_i)$ равно двойному отношению чисел w_i, где $t_i = \dfrac{a_1 w_i + b_1}{a_2 w_i + b_2}$. Остается заметить, что двойное отношение чисел w_i равно двойному отношению чисел t_i.

3.3. Двойные отношения точек, лежащих на прямых l_1 и l_2, равны двойному отношению плоскостей, проходящих через прямую l_3 и прямые a, b, c, d соответственно.

3.4. Пусть A_1, B_1, ... — точки пересечения прямой l с плоскостями BCD, ACD, ...; A_2, B_2, ... — точки пересечения прямой CD с плоскостями, проходящими через прямую l и вершины A, B, ... Тогда $C_2 = C$ и $D_2 = D$, а кроме того, прямые C_1C_2 и D_1D_2 пересекают прямую AB в точках C_3 и D_3, которые являются также точками пересечения прямой AB с плоскостями, проходящими через прямую l и вершины C и D. Ясно также, что точки A_1, A_2 и $A_3 = A$ лежат на одной прямой и точки B_1, B_2 и $B_3 = B$ тоже лежат на одной прямой. Поэтому, согласно

предыдущей задаче,

$$[A_1,\, B_1,\, C_1,\, D_1] = [A_3,\, B_3,\, C_3,\, D_3].$$

3.5. Пусть даны две прямые l_1 и l_2, пересекающие данные гиперплоскости с общим подпространством V^{n-2} размерности $n-2$. Рассмотрим трехмерное подпространство W^3, содержащие прямые l_1 и l_2. В общем положении пересечение W^3 с V^{n-2} является прямой, а пересечения W^3 с данными гиперплоскостями являются плоскостями. Теперь можно воспользоваться тем, что двойное отношение плоскостей в трехмерном пространстве не зависит от выбора прямой, пересекающей их.

3.6. Квадрат рассматриваемого преобразования равен

$$\frac{(a^2+bc)x + b(a+d)}{c(a+d)x + (bc+d^2)}.$$

Он будет тождествен тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия: $b(a+d) = c(a+d) = 0$ и $a^2+bc = d^2+bc$. Если $a+d \neq 0$, то $b=c=0$ и $a^2=d^2$, т. е. $a=d\neq 0$. Такая ситуация соответствует тождественному преобразованию, а по условию исходное преобразование нетождественно.

3.7. Линейное преобразование имеет неподвижную точку ∞, поэтому дробно-линейное преобразование с неподвижными точками a и b не может быть линейным. Таким образом, можно считать, что рассматриваемое преобразование имеет вид $x \mapsto \dfrac{px+q}{x+r}$. Точки a и b будут неподвижными точками этого преобразования, если $(p-r)a = a^2-q$ и $(p-r)b = b^2-q$. Эти соотношения означают, что $p-r = a+b$ и $q=-ab$, т. е. $p=\lambda$, $q=-ab$, $r=\lambda-a-b$.

3.8. Над полем $\mathbb{C}$ преобразование f имеет неподвижную точку x_0. Поэтому преобразование $f(f(x))$ имеет три различные неподвижные точки a, $f(a)$ и x_0, а значит, оно тождественно.

3.9. Пусть данное проективное преобразование f переводит точку ∞ в точку $x_0 \neq \infty$. Тогда композиция f с инволюцией $x \mapsto \dfrac{x_0 x + b}{x - x_0}$ оставляет точку ∞ неподвижной. Поэтому полученное преобразование является либо переносом $x \mapsto x+t$ (его можно представить в виде композиции инволюций $x \mapsto -x$ и $x \mapsto t-x$), либо гомотетией $x \mapsto \lambda x$ (ее можно представить в виде композиции инволюций $x \mapsto x^{-1}$ и $x \mapsto \lambda x^{-1}$).

3.10. Рассмотрите проекцию параллельно прямой l на плоскость, трансверсальную прямым l_1 и l_2 (т. е. пересекающую эти прямые ровно в одной точке).

3.11. Пусть M, M' — точки пересечения прямых A_1O' и A_2O, A_1O и A_2O'; N, N' — точки пересечения прямых A_1O' и A_3O, A_1O и A_3O';

P, P' — точки пересечения прямых A_2O и A_3O', A_2O' и A_3O. Прямые A_1O и C_1O пересекают прямые $O'A_1$, $O'A_2$, $O'A_3$ и $O'O$ в точках $\{A_1, M', N', O\}$ и $\{N, P, A_3, O\}$ соответственно. Соединим первую четверку точек с точкой M, а вторую четверку точек с точкой P. При этом прямые MO и PO совпадут, а значит, три остальные точки пересечения соответственных прямых лежат на одной прямой. А так как $MA_1 \cap PN = N$ и $MN' \cap PA_3 = N'$, точка $MM' \cap PP'$ лежит на прямой NN'.

3.12. Точки пересечения прямых O_1A_1 и O_2A_1 лежат на фиксированной прямой l, поэтому $O_1A_1 \mapsto O_2A_1$ — проективное отображение проективных пучков прямых, проходящих через точки O_1 и O_2. Аналогичные рассуждения для отображения $O_2A_2 \mapsto O_3A_2$ и т. д. показывают, что $O_1A_n \mapsto O_nA_n$ — проективное соответствие с неподвижной прямой $l = O_1O_n$, поэтому точки пересечения соответственных прямых пучков, проходящих через точки O_1 и O_n, лежат на одной прямой.

Глава 4

4.1. Примените теорему об общих хордах коник к следующим трем коникам: Γ — рассматриваемый эллипс, Γ_1 — пара прямых AB и CD, Γ_2 — пара прямых BC и AD.

4.2. На направление осей коники влияют лишь квадратичные члены ее уравнения, поэтому будем учитывать только их. Можно считать, что уравнение одной из коник имеет вид $ax^2 + by^2 + \ldots = 0$. Если линейная комбинация этого уравнения и уравнения $a_1x^2 + b_1y^2 + c_1xy + \ldots = 0$ имеет вид $x^2 + y^2 + \ldots = 0$, то $c_1 = 0$, т. е. оси коник перпендикулярны. Пусть, наоборот, $c_1 = 0$. Положим $\lambda = -\dfrac{a-b}{a_1-b_1}$ (случай $a_1 = b_1$ соответствует окружности). Тогда $a + \lambda a_1 = b + \lambda b_1$. Остается заметить, что если $a + \lambda a_1 = b + \lambda b_1 = 0$, то рассматриваемые коники имеют не более двух общих точек, так как среди линейных комбинаций их уравнений есть линейное уравнение.

4.3. Условие того, что коника из данного пучка является параболой, можно записать в виде $\det(\lambda A + \mu B) = 0$, где A и B — квадратные матрицы порядка 2. В таком виде условие представляет собой квадратное уравнение.

4.4. Коника, проходящая через точки A, B, C и D, имеет уравнение $F = 0$, где $F = \lambda|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|$. Центр этой коники задается системой уравнений $F_x = 0$, $F_y = 0$; оба эти уравнения линейны по x, y и λ. Выразив λ из одного уравнения и подставив это выражение во второе уравнение, получим уравнение второго порядка, связывающее x и y.

4.5. а) Пусть точки C' и D' симметричны точкам C и D относительно середины M отрезка AB. Тогда точки A, B, C, D, C', D' лежат на одной конике с центром M, поэтому $M \in \Gamma$.

Пусть O — точка пересечения прямых AB и CD. Точка O служит центром вырожденной коники, состоящей из пары прямых AB и CD. Поэтому $O \in \Gamma$.

б) Середины сторон четырехугольника $ABCD$ образуют параллелограмм, центр которого совпадает с центром масс точек A, B, C, D. Этот параллелограмм вписан в конику Γ, поэтому его центр совпадает с центром коники.

в) Следует из п. а).

г) Фиксируем в рассматриваемом пучке коник одну конику, отличную от окружности и параболы. Из задачи 4.2 следует, что оси всех остальных коник будут перпендикулярны осям фиксированной коники. (Оси коники взаимно перпендикулярны, поэтому оси всех остальных коник параллельны осям фиксированной коники.)

Среди коник пучка есть эллипс и есть гиперболы двух разных типов: ветвь гиперболы, содержащая точку A, может содержать либо точку B, либо точку D. Поэтому среди коник пучка есть две параболы, причем их оси взаимно перпендикулярны. Центрами этих двух парабол служат бесконечно удаленные точки двух взаимно перпендикулярных направлений.

4.6. Пусть $Y = 4ay$ и $X = 4ax$. Тогда уравнения $4ay = x^2$ и $Y = X^2$ эквивалентны.

4.7. Подставив уравнение параболы $y = x^2$ в уравнение окружности $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, получим уравнение четвертой степени с нулевым коэффициентом при x^3. Сумма корней этого уравнения равна нулю.

4.8. Сложите уравнения $x^2 + py = 0$ и $(y - y_0)^2 + ax + b = 0$.

4.9. Точки P_1 и P_2 имеют полярные координаты (r_1, φ) и $(r_2, \varphi + \pi)$, где

$$r_1 = \frac{2a}{1 - \cos\varphi}, \quad r_2 = \frac{2a}{1 - \cos(\varphi + \pi)} = \frac{2a}{1 + \cos\varphi}.$$

4.10. Касательная в точке $(2t_i, t_i^2)$ задается уравнением $y = xt_i - t_i^2$.

4.11. Пусть A_1 и B_1 — проекции точек A и B на директрису. Тогда AO и BO — серединные перпендикуляры к отрезкам A_1F и B_1F. Поэтому $|A_1O| = |FO| = |B_1O|$, а значит, $\angle A_1B_1O = \angle B_1A_1O = \varphi$. Следовательно, $\angle OFA = \angle OFB = 90^\circ + \varphi$ и $\angle AFB = 180^\circ - 2\varphi = \angle A_1OB_1 = 2\angle AOB$.

4.12. Воспользуемся обозначениями из задачи 4.11. Согласно этой задаче $\angle AFB = \angle A_1OB_1 = 2\angle AOB$. Поэтому условие $\angle AOB = 90^\circ$ эквивалентно тому, что $\angle AFB = 180^\circ$ и $\angle A_1OB_1 = 180^\circ$.

4.13. Точка $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ переходит в точку

$$w = \frac{-\cos\varphi + i\sin\varphi}{1-\cos\varphi}.$$

4.14. Да, существует. Положим $x = (x_1+y_1)^2$, $y = x_1+y_1$. Легко проверить, что x_1 и y_1 можно выразить через x и y.

4.15. а) Проекция фокуса F на касательную к параболе лежит на касательной к параболе, перпендикулярной оси. Поэтому проекции A', B', C' фокуса F на прямые BC, CA, AB лежат на одной прямой. Это означает, что точка F лежит на описанной окружности треугольника ABC. В самом деле, $\angle AFC' = \angle AB'C' = \angle A'B'C = \angle A'FC$, поэтому $\angle CFA = \angle A'FC' = 180^\circ - \angle B$.

б) Касательные к параболе $x^2 = 4y$ в точках $(2t_i,\, t_i^2)$ задаются уравнениями $y = t_i x - t_i^2$. Они пересекаются в точках $(t_i+t_j,\, t_it_j)$. Легко проверить, что ортоцентром треугольника с вершинами в трех таких точках служит точка $(t_1+t_2+t_3+t_1t_2t_3,\, -1)$.

в) Можно считать, что парабола задается уравнением $x^2 = 4y$. В таком случае точки α, β, γ имеют координаты $(2t_i,\, t_i^2)$, $i = 1,\, 2,\, 3$. Легко проверить, что

$$S_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2t_1 & t_1^2 & 1\\ 2t_2 & t_2^2 & 1\\ 2t_3 & t_3^2 & 1\end{vmatrix}, \qquad S_{ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} t_2+t_3 & t_2t_3 & 1\\ t_3+t_1 & t_3t_1 & 1\\ t_1+t_2 & t_1t_2 & 1\end{vmatrix}.$$

г) Существует аффинное преобразование, переводящее ось параболы и прямую AC в пару перпендикулярных прямых. Поэтому можно считать, что точки α, β, γ имеют координаты $(2t_1,\, t_1^2)$, $(0,\, 0)$, $(2t_3,\, t_3^2)$, причем $t_1 < 0$ и $t_3 > 0$. В таком случае

$$S_{\alpha\beta C} = -\frac{1}{2}t_1^3, \quad S_{\beta\gamma A} = \frac{1}{2}t_3^3, \quad S_{\alpha\beta B} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2t_3 & t_3^2 & 1\\ 2t_1 & t_1^2 & 1\\ t_1+t_3 & t_1t_3 & 1\end{vmatrix} = \frac{(t_3-t_1)^3}{2}.$$

4.16. Касательные к параболе $x^2 = 4y$ в точках $A = (2t_1,\, t_1^2)$ и $B = (2t_2,\, t_2^2)$ пересекаются в точке $O = (t_1+t_2,\, t_1t_2)$. В рассматриваемом случае $t_1t_2 = -2$. Теперь уже легко проверить, что точка $(0,\, 0)$ является ортоцентром треугольника AOB.

4.17. Рассмотрим семейство всех парабол с фокусом в данной точке F и осью, параллельной лучам света. Точнее говоря, ось параболы направлена так, чтобы данный пучок лучей света после отражения от параболы сходился в точке F.

Пусть луч света отражается от точки M кривой C и попадает в точку F. Тогда касательная к C в точке M совпадает с касательной в точке M к параболе, проходящей через точку M. Такое свойство может

выполняться для всех точек кривой C лишь в том случае, когда она совпадает с одной из парабол рассматриваемого семейства.

4.18. Любой параллелограмм является образом квадрата при аффинном преобразовании, а любой треугольник — образом правильного треугольника.

4.19. а) Эллипс является образом окружности при аффинном преобразовании. Сопряженные диаметры эллипса являются образами перпендикулярных диаметров окружности. Ясно также, что при аффинном преобразовании сохраняется отношение площадей фигур.

б) Можно считать, что точки O, A и B имеют координаты $(0,\,0)$, $(a\cos\varphi,\,b\sin\varphi)$ и $(-a\sin\varphi,\,b\cos\varphi)$.

4.20. Пусть O — центр эллипса, P_1 и P_2 — проекции фокусов F_1 и F_2 на касательную, A — точка касания. Тогда $\angle P_1AF_1 = \angle P_2AF_2 = \varphi$. Положим $x = F_1A$, $y = F_2A$. Величина $x + y = c$ не зависит от точки A. Поэтому

$$P_1O^2 = P_2O^2 = \left(\frac{x+y}{2}\cos\varphi\right)^2 + \left(\frac{x+y}{2}\sin\varphi\right)^2 = \frac{c^2}{4}.$$

Кроме того, $|F_1F_2|^2 = x^2 + y^2 + 2xy\cos 2\varphi = c^2 - 4xy\sin^2\varphi$, поэтому величина $xy\sin^2\varphi = d_1d_2$ постоянна.

4.21. Пусть точки G_1 и G_2 симметричны F_1 и F_2 относительно прямых OA и OB соответственно. Точки F_1, B и G_2 лежат на одной прямой и $|F_1G_2| = |F_1B| + |BG_2| = |F_1B| + |BF_2|$. Треугольники G_2F_1O и G_1F_2O имеют равные стороны. Поэтому $\angle G_1OF_1 = \angle G_2OF_2$ и $\angle AF_1O = \angle AG_1O = \angle BF_1O$.

4.22. Рассмотрим аффинное преобразование, переводящее эллипс в окружность. Оно переводит данный параллелограмм в ромб. Диагонали ромба содержат пару перпендикулярных диаметров полученной окружности.

4.23. Рассмотрим отображение $z \mapsto az + b\bar{z}$. В координатах $(x,\,y)$, где $x + iy = z$, это отображение линейное, причем его определитель равен $|a|^2 - |b|^2$. Образом окружности $|z| = 1$ при невырожденном линейном отображении будет эллипс, а при вырожденном — отрезок или точка.

4.24. Пусть O — вершина данного прямоугольника, OA и OB — касательные к эллипсу. Рассматриваемый в решении задачи 4.21 треугольник F_1OG_2 в данном случае прямоугольный. Следовательно,

$$|F_1O|^2 + |F_2O|^2 = |F_1G_2|^2 = \text{const}\,.$$

Если M — центр эллипса, то величина

$$|OM|^2 = \frac{1}{4}(2|F_1O|^2 + 2|F_2O|^2 - |F_1F_2|^2)$$

постоянна.

4.25. Для рассматриваемого эллипса вершины описанного вокруг него прямоугольника со сторонами, параллельными осям эллипса, лежат на рассматриваемой окружности. Согласно задаче 4.24 вершины всех остальных прямоугольников, описанных вокруг рассматриваемого эллипса, лежат на рассматриваемой окружности. Поэтому хорда PQ является стороной прямоугольника, описанного вокруг эллипса. Согласно задаче 4.22 диагонали этого прямоугольника содержат сопряженные диаметры эллипса.

4.26. а) Точки A и B имеют координаты $(a\cos\varphi,\, b\sin\varphi)$ и $(a\sin\varphi,\, -b\cos\varphi)$. Точки P и Q имеют координаты

$$((a+b)\sin\varphi,\, -(a+b)\cos\varphi) \quad \text{и} \quad ((a-b)\sin\varphi,\, (a-b)\cos\varphi).$$

б) Требуемое построение, по сути дела, описано в задаче а).

4.27. Точка Q лежит на описанной окружности треугольника AF_1F_2, где F_1 и F_2 — фокусы эллипса. При этом Q — середина дуги F_1F_2. Если R — радиус описанной окружности, α и β — углы при вершинах F_1 и F_2, то

$$|AQ| = 2R\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad |AP| = 2R\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Поэтому

$$|AP|\cdot|AQ| = \Big(2R\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\Big)^2 =$$
$$= (R\sin\alpha + R\cos\alpha)^2 = \Big(\frac{|AF_1|+|AF_2|}{2}\Big)^2.$$

4.28. Пусть ромб $ABCD$ вписан в эллипс с центром O. Тогда радиус r вписанной окружности ромба равен высоте прямоугольного треугольника AOB, т. е.

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{|OA|^2} + \frac{1}{|OB|^2}.$$

Для эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ прямые OA и OB имеют уравнения $y = kx$ и $y = -x/k$, а точки A и B имеют координаты $(x_0,\, y_0)$ и $(x_1,\, y_1)$, где

$$x_0^2\Big(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}\Big) = 1, \quad x_1^2\Big(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{k^2b^2}\Big) = 1.$$

Поэтому

$$\frac{1}{|OA|^2} + \frac{1}{|OB|^2} = \frac{1/a^2 + k^2/b^2}{1+k^2} + \frac{1/a^2 + 1/k^2b^2}{1+1/k^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2},$$

т. е. радиус r не зависит от положения ромба.

4.29. Сопряженные диаметры можно представить посредством диагоналей параллелограмма $ABCD$, описанного вокруг эллипса с центром

O. Пусть биссектрисы углов AOB, BOC, COD, DOA пересекают стороны этого параллелограмма в точках A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно, а лучи OA_1, OB_1, OC_1, OD_1 пересекают эллипс в точках A_2, B_2, C_2, D_2. Тогда точки A_2, B_2, C_2, D_2 — центры рассматриваемых окружностей.

Достаточно доказать, что $A_2B_2C_2D_2$ — параллелограмм со сторонами, параллельными прямым AC и BD. В самом деле, диагонали этого параллелограмма перпендикулярны, поэтому он является ромбом. Согласно задаче 4.28 радиус вписанной окружности такого ромба зависит только от эллипса и не зависит от положения ромба. Из параллельности прямых A_2B_2 и AC следует, что радиус вписанной окружности ромба равен расстоянию от точки A_2 до прямой AC, т. е. он равен радиусу рассматриваемой окружности с центром A_2.

Докажем, например, что $A_2B_2 \parallel AC$. Сначала заметим, что $A_1B_1 \parallel AC$, так как

$$|AA_1| : |A_1B| = |AO| : |BO| = |CO| : |BO| = |CB_1| : |BB_1|.$$

Сделаем аффинное преобразование, переводящее рассматриваемые сопряженные диаметры в диаметры окружности. В таком случае образы прямых A_1O и B_1O будут симметричны относительно прямой OB, поэтому образ прямой A_2B_2 будут параллелен образу прямой AC.

4.30. а) Пусть $\angle PF_1Q = 2\alpha$, $\angle PF_2Q = 2\beta$, $\angle POF_1 = p$, $\angle F_1OF_2 = q$. Согласно задаче 4.21

$$\angle PF_1O = \alpha, \quad \angle PF_2O = \beta, \quad \angle F_2OQ = p;$$

из последнего равенства следует, что $\angle POQ = 2p + q$.

Отрезки PF_1 и PF_2 образуют равные углы с касательной PO, поэтому

$$\alpha + p = \angle F_2PO = \pi - \beta - (p + q),$$

т. е. $\angle POQ = 2p + q = \pi - (\alpha + \beta) = \pi - \frac{1}{2}(\angle PF_1Q + \angle PF_2Q)$.

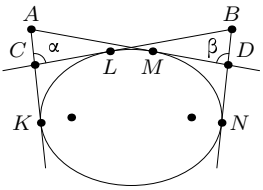


Рис. Р.1

б) Введем такие обозначения точек касания, как на рис. Р.1. Согласно задаче а) имеем равенства

$$\alpha = \frac{1}{2}(\angle KF_1L + \angle KF_2L), \quad \beta = \frac{1}{2}(\angle MF_1N + \angle MF_2N).$$

Лучи F_1A и F_1B являются биссектрисами углов KF_1M и LF_1N соответственно, поэтому

$$\varphi_1 = \angle AF_1B = \frac{1}{2}(\angle KF_1L + \angle MF_1N).$$

Аналогично

$$\varphi_2 = \angle AF_2B = \frac{1}{2}(\angle KF_2L + \angle MF_2N).$$

4.31. Пусть φ — угол между любой из рассматриваемых касательных и осью Ox. Рассмотрим окружность S с центром $((a+b)\cos\varphi,\ (a+b)\sin\varphi)$, проходящую через точку $A = (a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$.

Касательная к эллипсу в точке A задается уравнением

$$\frac{a\cos\varphi}{a^2}x + \frac{b\sin\varphi}{b^2}y = 1.$$

Эта прямая перпендикулярна прямой AO_1, которая задается уравнением

$$y = \frac{a\sin\varphi}{b\cos\varphi}x + c.$$

Поэтому окружность S касается эллипса.

Докажем теперь, что окружность S касается прямых l_1 и l_2. Пусть прямая l_1 касается эллипса в точке $(-a\cos\alpha,\ b\sin\alpha)$. Тогда она имеет уравнение

$$\frac{-x\cos\alpha}{a} + \frac{y\sin\alpha}{b} = 1.$$

Это, в частности, означает, что $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b\cos\alpha}{a\sin\alpha}$. Квадрат расстояния от начала координат до прямой l_1 равен

$$\frac{b^2}{\sin^2\alpha}\cdot\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\varphi} = b^2\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\alpha} = b^2\cos^2\varphi\Big(1+\frac{a^2\sin^2\varphi}{b^2\cos^2\varphi}\Big) = b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi.$$

Последнее выражение совпадает с квадратом радиуса окружности S. Для прямой l_2 получаем точно такое же выражение.

4.32. Нормаль к эллипсу в точке $(x_0,\ y_0)$ задается уравнением

$$\frac{-y_0}{b^2}x + \frac{x_0}{a^2}y = x_0y_0\Big(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\Big).$$

Она пересекает большую полуось в точке с координатой

$$x_1 = b^2x_0\Big(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\Big) = x_0\frac{a^2-b^2}{a^2}.$$

При этом

$$r^2 = y_0^2 + x_0^2\frac{b^4}{a^4} = b^2 - b^2x_0^2\Big(\frac{1}{a^2} - \frac{b^2}{a^4}\Big).$$

Легко проверить, что

$$\frac{(a^2-b^2)(b^2-r^2)}{b^2} = x_1^2.$$

4.33. Согласно задаче 4.32 выполняется равенство

$$r_1 + r_2 = |OC_1| - |OC_2| = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}(\sqrt{b^2 - r_1^2} - \sqrt{b^2 - r_2^2}).$$

Это выражение можно преобразовать к виду

$$a^4 r_1^2 - 2a^2(a^2 - 2b^2) r_1 r_2 + a^4 r_2^2 - 4b^4(a^2 - b^2) = 0.$$

Рассмотрим полученное выражение как квадратное уравнение относительно r_1. Оно имеет корни r_1 и r_3, поэтому

$$r_1 + r_3 = \frac{2a^2(a^2 - 2b^2)}{a^4}\, r_2.$$

4.34. Согласно задаче 4.33 числа r_i удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$r_{i+2} - k r_{i+1} + r_i = 0,$$

поэтому $r_p = a\lambda_1^p + b\lambda_2^p$, где λ_1 и λ_2 — корни уравнения $x^2 - kx + 1 = 0$. Ясно, что $\lambda_1\lambda_2 = 1$, т. е. $r_p = a\lambda^p + b\lambda^{-p}$. Требуемая формула проверяется теперь очевидным образом.

4.35. Можно считать, что треугольник ABC получен преобразованием

$$z \mapsto \frac{z + \bar{z}}{2} + \frac{z - \bar{z}}{2}\cos\alpha = z\cos^2\frac{\alpha}{2} + \bar{z}\sin^2\frac{\alpha}{2} \qquad \text{(P.2)}$$

из правильного треугольника с вершинами w, εw и $\varepsilon^2 w$, где $|w| = 1$ и $\varepsilon = \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)$. Тогда полуоси a и b рассматриваемого эллипса равны $\frac{1}{2}$ и $\frac{\cos\alpha}{2}$, а расстояние между его фокусами F_1 и F_2 равно $\sqrt{a^2 - b^2} = \frac{1}{2}\sin\alpha$. Точки F_1 и F_2 переходят в точки $(\pm 1, 0)$ при растяжении с коэффициентом

$$\left(\frac{1}{2}\sin\alpha\right)^{-1} = \left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)^{-1}.$$

В результате преобразования (P.2) и этого растяжения получаем преобразование

$$z \mapsto z\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \bar{z}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Положим $a = w\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Тогда многочлен с корнями A, B и C имеет вид

$$P(x) = \left(x - a - \frac{1}{a}\right)\left(x - a\varepsilon - \frac{1}{a\varepsilon}\right)\left(x - a\varepsilon^2 - \frac{1}{a\varepsilon^2}\right).$$

Легко проверить, что $P'(x) = 3x^2 + 3\varepsilon + 3\bar{\varepsilon} = 3x^2 - 3$, поэтому корни многочлена P' равны ± 1.

4.36. Любую гиперболу можно получить аффинным преобразованием из гиперболы $y = x^{-1}$, для которой требуемое утверждение очевидно.

4.37. Пусть $ax^2+bxy+cy^2=(px+qy)(rx+sy)$. Тогда прямые $px+qy=0$ и $rx+sy=0$ параллельны асимптотам рассматриваемой гиперболы. Эти прямые ортогональны тогда и только тогда, когда $pr+qs=0$, т. е. $a+c=0$.

4.38. Пусть $a=\alpha+i\alpha^{-1}$, $b=\beta+i\beta^{-1}$, $c=\gamma+i\gamma^{-1}$ — вершины данного треугольника на комплексной плоскости. Проверьте, что $h=-\alpha\beta\gamma-i(\alpha\beta\gamma)^{-1}$ — его ортоцентр. Покажите, например, что число $(a-h)/(b-c)$ чисто мнимое.

4.39. Пусть φ — величина того из углов между асимптотами, который содержит гиперболу. Тогда при $\varphi\geqslant 90^\circ$ искомое множество пусто, а при $\varphi<90^\circ$ оно представляет собой окружность (с центром в центре гиперболы), из которой выброшены 4 точки пересечения с асимптотами. Для доказательства этого утверждения можно воспользоваться решением задачи 4.24.

4.40. Пусть $A=(a,\,a^{-1})$, $B=(b,\,b^{-1})$, $C=(c,\,c^{-1})$. Тогда при $x=-x_0$, a, b, c получаем

$$(x_0-x)^2+(x_0^{-1}-x^{-1})^2=4x_0^2+4x_0^{-2}.$$

Таким образом, числа $-x_0$, a, b, c являются корнями многочлена вида

$$x^4-2x_0x^3+\ldots$$

Поэтому $-x_0+a+b+c=2x_0$, т. е. $a+b+c=3x_0$. Аналогично $a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}=3x_0^{-1}$. Следовательно, точка $(x_0,\,x_0^{-1})$ служит не только центром описанной окружности треугольника ABC, но и его центром масс. Это возможно лишь в том случае, когда треугольник ABC равносторонний.

4.41. Точка X, равноудаленная от точки A и окружности радиуса R с центром O, должна удовлетворять соотношению $|OX|-|AX|=R$ в случае, когда точка A расположена вне данной окружности, и соотношению $|OX|+|AX|=R$ в случае, когда точка A расположена внутри данной окружности. В случае, когда точка A лежит на данной окружности, точка X должна лежать на луче OA.

4.42. Центр окружности, проходящей через данную точку A и касающейся данной окружности S, равноудален от точки A и окружности S. Поэтому можно воспользоваться результатом задачи 4.41.

4.43. Прямая A_tB_t задается уравнением

$$\frac{x-1-t}{y-1-t}=\frac{1+t+1-t}{1+t-1+t}=\frac{1}{t},$$

т. е.

$$y=1-t^2+tx=-\left(t-\frac{x}{2}\right)^2+\frac{x^2}{4}+1.$$

При фиксированном x, когда t пробегает все действительные значения, y принимает все значения, не превосходящие $(x^2/4)+1$. Таким образом, искомое множество задается неравенством $y \leqslant (x^2/4)+1$.

4.44. Выберем систему координат так, чтобы прямая l задавалась уравнением $x=0$, а точка O имела координаты $(1,\,0)$. Точка $X=(x,\,y)$ принадлежит искомому множеству тогда и только тогда, когда окружность с диаметром $|OX|$ пересекает прямую l. Это означает, что расстояние от центра этой окружности до прямой l не превосходит ее радиуса, т. е.

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 \leqslant \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{4}.$$

Таким образом, искомое множество задается неравенством $y^2 \geqslant 4x$.

4.45. Будем называть преобразованием подобия композицию собственного движения и гомотетии. Пусть X_1 и X_2 — два положения точки X; X_1' и X_2' — положения точки X' в те же моменты времени. Существует единственное преобразование подобия, переводящее X_1 в X_1', а X_2 в X_2'. Это преобразование в любой момент времени переводит точку X в соответствующую точку X'. Пусть O — центр рассматриваемого преобразования подобия, OH — высота треугольника XOX'. Точка H получается из X некоторым преобразованием подобия, поэтому H движется по некоторой прямой. Учитывая, что $XX' \perp OH$, получаем такое же множество, как и в задаче 4.44.

4.46. Можно считать, что центр окружности S расположен в начале координат, а точка O имеет координаты $(c,\,0)$. Точка $A=(x,\,y)$ принадлежит искомому множеству тогда и только тогда, когда окружность S пересекает окружность S_1 с диаметром $|AO|$. Пусть a — радиус окружности S, R — радиус окружности S_1, d — расстояние между центрами этих окружностей. Окружности S и S_1 пересекаются тогда и только тогда, когда из отрезков a, d, R можно составить треугольник, т. е.

$$(R-a)^2 \leqslant d^2 \leqslant (R+a)^2.$$

Учитывая, что $4d^2=(x+c)^2+y^2$ и $4R^2=(x-c)^2+y^2$, приходим к неравенству

$$a^2 - 2Ra \leqslant cx \leqslant 2Ra + a^2,$$

которое эквивалентно неравенству $(cx-a^2)^2 \leqslant 4a^2R^2$, т. е.

$$(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 \leqslant a^2(c^2-a^2).$$

4.47. Можно считать, что уравнение коники имеет вид

$$A(z^2+\bar{z}^2) + Bz\bar{z} + Cz + \bar{C}\bar{z} + D = 0. \qquad \text{(Р.3)}$$

В самом деле, эллипс и гиперболу можно задать уравнением $A(z^2+\bar{z}^2)+$ $+Bz\bar{z}=1$ (при $B<2A$ получаем эллипс, а при $B>2A$ получаем гиперболу); параболу можно задать уравнением

$$z^2+\bar{z}^2+2z\bar{z}+2iz-2i\bar{z}=0.$$

Пусть u — центр правильного треугольника с вершинами $u+v\varepsilon^k$, где $k=1, 2, 3$ и $\varepsilon=\exp(2\pi i/3)$. Если этот треугольник вписан в конику (Р.3), то числа $z_k=u+v\varepsilon^k$, $k=1, 2, 3$, удовлетворяют соотношению (Р.3). Сложив три таких равенства, получим

$$A(u^2+\bar{u}^2)+B(u\bar{u}+v\bar{v})+Cu+\bar{C}\bar{u}+D=0 \qquad \text{(Р.4)}$$

(мы воспользовались тем, что $\varepsilon^1+\varepsilon^2+\varepsilon^3=0$). Подставим в (Р.3) значение $z=z_3=u+v$ и вычтем из (Р.4) полученное соотношение. В результате получим $\operatorname{Re}(Fv+A\bar{v}^2)=0$, где $F=2Au+B\bar{u}+C$. Проделав аналогичные вычисления для $z=z_1=u+v\varepsilon$, получим $Fv+A\bar{v}^2=0$. Так как $v\neq 0$, при $A\neq 0$

$$|v|^2=|2Au+B\bar{u}+C|^2A^{-2}; \qquad \text{(Р.5)}$$

случай $A=0$ соответствует окружности. Подставив (Р.5) в (Р.4), получим уравнение требуемой коники.

Отметим, что вторая коника совпадает с исходной тогда и только тогда, когда $B=0$, т. е. в случае равнобочной гиперболы.

4.48. Уравнение секущей плоскости можно записать либо в виде $z=ax+by+c=0$, либо в виде $ax+by+c=0$. В первом случае проекция сечения задается уравнением $x^2+y^2=ax+by+c$, а во втором — уравнением $ax+by+c=0$.

4.49. Пусть для определенности конус задан уравнением ax^2+by^2+ $+cz^2=0$, где $a\geqslant b\geqslant c$. Сложив уравнение конуса с уравнением $(b-a)\times$ $\times(x-a_1)^2+(b-c)(z-c_1)^2=0$, задающим пару плоскостей, получим уравнение

$$b(x^2+y^2+z^2)+2(a-b)a_1x+2(c-b)c_1z=(a-b)a_1^2+(c-b)c_1^2.$$

Числа $a-b$ и $c-b$ разного знака, поэтому a_1 и c_1 можно выбрать так, что число $(a-b)a_1^2+(c-b)c_1^2$ имеет такой же знак, как и число b, т.е. полученное уравнение задает сферу. Легко проверить, что при этом точка $(a_1, 0, c_1)$, принадлежащая обеим плоскостям, лежит внутри сферы. Таким образом, сечение конуса рассматриваемой парой плоскостей совпадает с сечением сферы этой парой плоскостей и представляет собой пару окружностей.

4.50. а) Пусть $f=0$ и $g=0$ — уравнения квадрик, $l=0$ — уравнение плоскости, содержащей их общее плоское сечение. В плоскости $l=0$

уравнения $f=0$ и $g=0$ задают одну и ту же кривую, поэтому $f=\lambda g+lm$, где m — некоторая линейная функция. Плоскость $m=0$ тоже содержит общее плоское сечение квадрик $f=0$ и $g=0$.

б) Пусть рассматриваемые квадрики имеют уравнения $f=0$, $g=0$, $h=0$. Согласно п. а) можно считать, что $g=f+lm_1$ и $h=f+lm_2$. В таком случае $g=h+l(m_1-m_2)$. Это означает, что плоскости других общих сечений задаются уравнениями $m_1=0$, $m_2=0$ и $m_1=m_2$. Третье уравнение является линейной комбинацией двух первых, поэтому три плоскости имеют общую прямую.

4.51. а) Точка A эллипса с центром O лежит на его главной оси тогда и только тогда, когда окружность радиуса $|OA|$ с центром O касается эллипса.

Пересечение данного эллипсоида со сферой радиуса $|OA|$ с центром O является конусом

$$\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}\right)x^2+\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^2}\right)y^2+\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{r^2}\right)z^2=0, \qquad \text{(Р.6)}$$

где $r=|OA|$. Искомая секущая плоскость однозначно определяется как плоскость, касающаяся конуса по лучу OA.

б) Пусть OA_1 и OA_2 — главные полуоси эллипса, полученного в сечении эллипсоида плоскостью $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0$. В тех случаях, когда $A=A_1$ или A_2 (т. е. $r=r_1$ или r_2) эта плоскость должна касаться конуса (Р.6). Несложно проверить, что последнее условие эквивалентно равенству

$$\frac{a^2\cos^2\alpha}{a^2-r^2}+\frac{b^2\cos^2\beta}{b^2-r^2}+\frac{c^2\cos^2\gamma}{c^2-r^2}=0.$$

4.52. Рассмотрим на плоскости Π окружность с центром A. Согласно задаче Д.14 полярой этой окружности относительно окружности с центром O служит коника с фокусом O, причем таким преобразованием можно получить любую конику с фиксированным фокусом O. Вращая плоскость Π в пространстве вокруг оси OA, можно получить аналогичное утверждение для квадрик, имеющих ось вращения.

а) Рассмотрим сферу с центром A и семейство плоскостей, параллельных фиксированной прямой l и касающихся этой сферы. Полярой этого семейства плоскостей относительно сферы с центром O служит коника с фокусом O, лежащая в плоскости, проходящей через точку O перпендикулярно прямой l. Полярой сферы с центром A служит квадрика, полученная при вращении вокруг оси OA некоторой плоской коники с центром O.

б) Рассмотрим семейство плоскостей, проходящих через фиксированную точку M и касающихся сферы с центром A. Перпендикуляры

к этим плоскостям, восставленные из точки M, образуют прямой круговой конус. Поэтому перпендикуляры, опущенные из точки $O = F_1$ на эти плоскости, тоже образуют прямой круговой конус K.

При полярном преобразовании относительно сферы с центром O рассматриваемое семейство плоскостей переходит в плоское сечение C эллипсоида (образа сферы с центром A при полярном преобразовании относительно сферы с центром O). Ясно также, что C — пересечение конуса K с вершиной O и этого эллипсоида.

Глава 5

5.1. Рассматриваемое отображение обладает следующими свойствами:

1) оставляет неподвижными все точки гиперплоскости $(x,\, a) = 0$;

2) сохраняет скалярное произведение $(x,\, y)$, т. е. является изометрией;

3) переводит a в $-a$, т. е. не тождественно.

5.2. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис. Рассмотрим векторы $\varepsilon_i = Ae_i$. Из условия следует, что эти векторы попарно ортогональны. Докажем, что все они имеют одинаковую длину. Для этого воспользуемся тем, что $e_i + e_j \perp e_i - e_j$. Таким образом, из условия следует, что $(\varepsilon_i + \varepsilon_j,\, \varepsilon_i - \varepsilon_j) = 0$, т. е. $|\varepsilon_i| = |\varepsilon_j|$. Итак, $|\varepsilon_1| = \ldots = |\varepsilon_n| = a$. Преобразование $a^{-1}A$ переводит ортонормированный базис в ортонормированный базис, поэтому оно является изометрией.

5.3. Рассматриваемое преобразование является поворотом на угол φ вокруг некоторой оси l. Возьмем плоскость, перпендикулярную прямой l, и выберем в этой плоскости две прямые l_1 и l_2, пересекающие прямую l и образующие между собой угол $\varphi/2$. Композиция симметрий относительно прямых l_1 и l_2 совпадает с исходным преобразованием.

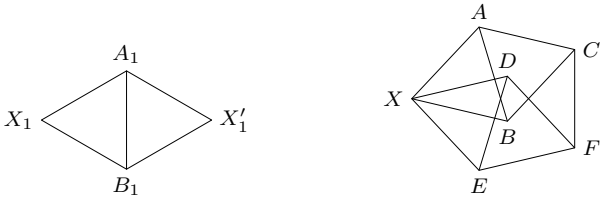
5.4. Ортогональное дополнение V к множеству неподвижных точек имеет размерность $n - s$. Ограничение преобразования f на V имеет одну неподвижную точку (начало координат), поэтому его можно представить в виде композиции $n - s$ симметрий относительно гиперплоскостей в V. Рассмотрим теперь симметрии в $\mathbb{R}^n$ относительно гиперплоскостей в $\mathbb{R}^n$, содержащих эти гиперплоскости и множество неподвижных точек. Их композиция совпадает с преобразованием f.

Предположим теперь, что изометрия f представлена в виде композиции симметрий относительно гиперплоскостей $H_1, \ldots, H_k$. Пусть W — пересечение этих гиперплоскостей. С одной стороны, W содержится в множестве неподвижных точек f, поэтому $\dim W \leqslant s$. С другой стороны, $\dim W \geqslant n - k$. Следовательно, $n - k \leqslant s$, т. е. $k \geqslant n - s$.

5.5. Пусть для некоторой точки X ее образ $f(X)$ содержит две точки X_1 и X_1'. Рассмотрим правильный треугольник XAB со стороной 1. Пусть $A_1 \in f(A)$ и $B_1 \in f(B)$. Тогда $X_1A_1B_1$ и $X_1'A_1B_1$ — правильные треугольники со стороной 1 (рис. Р.2 (а)), поэтому $|X_1X_1'| = \sqrt{3}$.

Возьмем теперь точки A, B, C, D, E, F так, чтобы все 11 отрезков, изображенных на рис. Р.2 (б), имели длину 1. В образах этих точек выберем по одной точке $A_1, \ldots, F_1$.

При фиксированных точках X_1 и X_1' условие $|A_1X_1| = |A_1X_1' = 1|$ задает два возможных положения точки A_1. Для точки B_1 возможные положения те же самые, но $A_1 \neq B_1$, так как $|A_1B_1| = 1$. Следовательно, точка C_1 совпадает с X_1 или с X_1'. Для точек D_1 и E_1 возможные положения те же самые, что и для точек A_1 и B_1, и по тем же причинам $D_1 \neq E_1$. Следовательно, точка F_1 совпадает с X_1 или с X_1'. В итоге получаем, что либо $|C_1F_1| = 0$, либо $|C_1F_1| = \sqrt{3}$. Но по условию должно выполняться равенство $|C_1F_1| = 1$. Приходим к противоречию.



(а) (б)

Рис. Р.2

5.6. Пусть f — поворот на угол $\sqrt{2}\pi$ вокруг точки O, $A_0 \neq O$ — произвольная точка, $A_i = f(A_{i-1})$ при $i = 1, 2, \ldots$ Тогда $A_i \neq A_j$ при $i \neq j$, так как число $i\sqrt{2} - j\sqrt{2}$ не целое. Положим $A = \{A_0, A_1, A_2, \ldots\}$. Тогда $f(A) = \{A_1, A_2, A_3, \ldots\} \subset A$ и $f(A) \neq A$.

5.7. Рассмотрим на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ множество A, состоящее из всех точек вида $a_0 + a_1e^i + a_2e^{2i} + \ldots + a_ke^{ki}$, где $k \geqslant 0$, $a_0, \ldots, a_k$ — неотрицательные целые числа. Пусть B и C — подмножества A, для которых $a_0 = 0$ и $a_0 \neq 0$ соответственно. Тогда $A = B \cup C$, $B = e^iA$ (т. е. B получается из A поворотом на угол 1 в радианной мере) и $C = A + 1$ (т. е. C получается из A параллельным переносом). Остается проверить, что $B \cap C = \varnothing$.

Предположим, что

$$b_1e^i + b_2e^{2i} + \ldots + b_me^{mi} = c_0 + c_1e^i + \ldots + c_ne^{ni},$$

где b_i, $c_j \in \mathbb{Z}$ и $c_0 \neq 0$. Тогда $c_0 + a_1e^i + \ldots + a_re^{ri} = 0$, где $a_i \in \mathbb{Z}$ и $c_0 \neq 0$.

Это противоречит трансцендентности числа e^i (см., напр., Гельфонд А. О. Трансцендентные и алгебраические числа. М.: 1952).

5.8. Двойственный треугольник имеет углы $\pi-a$, $\pi-b$, $\pi-c$. Сумма углов сферического треугольника больше π, поэтому $3\pi-(a+b+c)>\pi$, т. е. $a+b+c<2\pi$.

5.9. Углы автополярного треугольника равны $\pi/2$.

5.10. Требуемым свойством обладает проекция из центра сферы северной полусферы на плоскость, касающуюся сферы в северном полюсе.

5.11. Доказательство такое же, как и в евклидовой геометрии: если точка O равноудалена от точек A и B (прямых a и b) и точек B и C (прямых b и c), то она равноудалена и от точек A и C (прямых a и c).

5.12. а) Пусть O — центр сферы. Медианы сферического треугольника ABC пересекаются в точке, лежащей на луче OM, заданном вектором $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

б) Высоты сферического треугольника ABC пересекаются в точке, лежащей на луче OH, заданном вектором

$$w=\overrightarrow{OA}\operatorname{tg}\alpha+\overrightarrow{OB}\operatorname{tg}\beta+\overrightarrow{OC}\operatorname{tg}\gamma.$$

Проверим, например, что плоскости OAH и OBC перпендикулярны, т. е. скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OA}\times w=\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\operatorname{tg}\beta+\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}\operatorname{tg}\gamma$ и $\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}$ равно нулю. Длины векторов $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}$ равны $\sin c$ и $\sin a$, а угол между ними равен β. Таким образом, нужно проверить равенство

$$\sin c\sin a\cos\beta\operatorname{tg}\beta-\sin b\sin a\cos\gamma\operatorname{tg}\gamma=0.$$

Это равенство следует из теоремы синусов.

5.13. Длина сферической окружности радиуса r равна $2\pi\sin r$. Поэтому площадь сферического круга радиуса r равна

$$\int_0^r 2\pi\sin x\,dx=2\pi(1-\cos r)=4\pi\sin^2\Big(\frac{r}{2}\Big).$$

5.14. Согласно первой теореме косинусов

$$\cos\alpha=\frac{-\cos b\cos c+\cos a}{\sin b\sin c}.$$

Поэтому

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha=\frac{-\cos(b+c)+\cos a}{\sin b\sin c}=\frac{2\sin\dfrac{a+b+c}{2}\sin\dfrac{b+c-a}{2}}{\sin b\sin c},$$

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha=\frac{\cos(b-c)-\cos a}{\sin b\sin c}=\frac{2\sin\dfrac{b-c+a}{2}\sin\dfrac{a-b+c}{2}}{\sin b\sin c}.$$

5.15. Согласно предыдущей задаче

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}=\frac{\sin p}{\sin c}\sin\frac{\gamma}{2},\quad \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=\frac{\sin(p-c)}{\sin c}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Поэтому

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\sin p-\sin(p-c)}{\sin c}\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{\cos\dfrac{a+b}{2}}{\cos\dfrac{c}{2}}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Аналогично получаем

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}=\frac{\sin(p-b)}{\cos c}\frac{\gamma}{2},\quad \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin(p-a)}{\sin c}\cos\frac{\gamma}{2}$$

и

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\sin(p-a)+\sin(p-b)}{\sin c}\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{\cos\dfrac{a-b}{2}}{\cos\dfrac{c}{2}}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

5.16. а) Воспользовавшись результатами двух предыдущих задач, получим

$$\begin{aligned}\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}&=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\\&=\frac{\cos\dfrac{a+b}{2}-\cos\dfrac{a-b}{2}}{\cos\dfrac{c}{2}}\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\\&=-\frac{2\sin\dfrac{a}{2}\sin\dfrac{b}{2}}{\cos\dfrac{c}{2}}\frac{\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{\sin a\sin b}.\end{aligned}$$

б) Из соотношений

$$\frac{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\dfrac{\gamma}{2}}=\frac{\cos\dfrac{a-b}{2}}{\cos\dfrac{c}{2}}\quad\text{и}\quad\frac{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\dfrac{\gamma}{2}}=\frac{\cos\dfrac{a+b}{2}}{\cos\dfrac{c}{2}}$$

следует, что

$$\begin{aligned}\frac{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\cos\dfrac{\gamma}{2}}{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\cos\dfrac{\gamma}{2}}&=\frac{\cos\dfrac{a-b}{2}-\cos\dfrac{c}{2}}{\cos\dfrac{a-b}{2}+\cos\dfrac{c}{2}},\\\frac{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\sin\dfrac{\gamma}{2}}{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\cos\dfrac{\gamma}{2}}&=\frac{\cos\dfrac{a+b}{2}-\cos\dfrac{c}{2}}{\cos\dfrac{a+b}{2}+\cos\dfrac{c}{2}}.\end{aligned}$$

Чтобы получить требуемое равенство, достаточно перемножить эти два равенства и преобразовать в числителях и знаменателях суммы и разности синусов и косинусов в произведения:

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\gamma}{2}=2\cos\frac{\pi-\gamma+\alpha+\beta}{4}\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma-\pi}{4},$$
$$\cos\frac{a-b}{2}-\cos\frac{c}{2}=2\sin\frac{a-b+c}{4}\sin\frac{b+c-a}{4}\quad\text{и т. д.}$$

5.17. Из первой теоремы косинусов следует, что $\cos c=\cos a\cos b$, а из второй теоремы косинусов следует, что $\cos\alpha=\sin\beta\cos a$ и $\cos\beta=\sin\alpha\cos b$.

Согласно теореме синусов $\sin\alpha\sin b=\sin\beta\sin a$, поэтому $\sin\alpha\sin b\times$ $\times\cos a=(\sin\beta\cos a)\sin a=\cos\alpha\sin a$ т. е. $\operatorname{tg}\alpha\sin b=\operatorname{tg}a$.

Согласно теореме синусов $\sin a=\sin\alpha\sin c$, поэтому $\sin a\cos c=\sin\alpha\times$ $\times\sin c\cos c=\sin\alpha\sin c\cos a\cos b=\sin c\cos a\cos\beta$, т. е. $\operatorname{tg}a=\operatorname{tg}c\cos\beta$.

5.18. Пусть I — центр вписанной окружности сферического треугольника ABC, K — точка касания вписанной окружности со стороной AB. Тогда $|AK|=p-a$, $|IK|=r$, $\angle IAK=\dfrac{\alpha}{2}$ и $\angle AKI=\dfrac{\pi}{2}$. Поэтому согласно задаче 5.17 получаем

$$\operatorname{tg}r=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin(p-a).$$

Остается заметить, что согласно задаче 5.14 выполняется равенство

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-a)}}.$$

5.19. Пусть O — центр описанной окружности сферического треугольника ABC, M — середина стороны AB. Тогда $\angle OBM=\dfrac{\beta+\gamma-\alpha}{2}=$ $=\dfrac{\pi}{2}-(\alpha-s)$. Поэтому согласно задаче 5.17 выполняется равенство $\operatorname{tg}\dfrac{a}{2}=\operatorname{tg}\bar{R}\sin(\alpha-s)$. Остается заметить, что

$$\operatorname{ctg}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\sin(\beta-s)\sin(\gamma-s)}{\sin s\sin(\alpha-s)}};$$

эта формула получается из формулы для $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ переходом к полярному треугольнику.

5.20. а) Поляры сферических прямых, проходящих через данную точку A, заметают окружность большого круга, а именно поляру точки A. Поэтому рассматриваемые поляры заметают пару сферических двуугольников, образованных полярами концов данного отрезка.

б) Поляры сферических прямых, пересекающих данные отрезки, заметают множество, площадь которого меньше 4π, поэтому на сфере

найдется точка, не лежащая в этом множестве. Поляра этой точки не пересекает ни одного данного отрезка.

5.21. Достаточно доказать, что $w = \dfrac{2z}{1+z^2}$ (рис. Р.3). Ясно, что $x^2 + w^2 = 1$ и $x = \dfrac{w-z}{z}$. Поэтому

$$(w-z)^2 + z^2w^2 = z^2,$$

т. е. $w = \dfrac{2z}{1+z^2}$, что и требовалось.

5.22. Пусть AB — наибольшая сторона гиперболического треугольника ABC. Достаточно доказать, что $|AB| < |AC| + |BC|$. Пусть точки A и B лежат в верхней полуплоскости на вертикальном луче. Возьмем на евклидовом отрезке AB точку C_1 так, что $|AC_1| = |AC|$ (расстояния гиперболические). Рассмотрим гиперболические окружности с центрами A и B и радиусами $|AC_1|$ и $|BC_1|$ соответственно (рис. Р.4). Гиперболическая окружность в модели Пуанкаре является евклидовой окружностью, поэтому рассматриваемые окружности касаются в точке C_1. В частности, точка C лежит вне второй окружности, т. е. $|BC| > |BC_1|$.

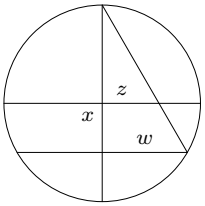


Рис. Р.3

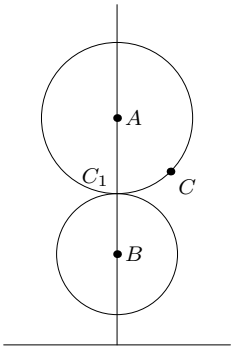


Рис. Р.4

5.23. Пусть d — гиперболическое расстояние от точки (x, y) до точки $(0, t)$. Тогда

$$\operatorname{ch}\alpha = 1 + \frac{x^2 + (t-y)^2}{2ty} = \frac{1}{2y}\left(\frac{x^2+y^2}{t} + t\right).$$

Минимум функции $(x^2+y^2)t^{-1} + t$ достигается при $t = \sqrt{x^2+y^2}$; это значение t соответствует основанию перпендикуляра, опущенного из точки (x, y) на рассматриваемую гиперболическую прямую. Минимальное

расстояние равно $\operatorname{arch}\Big(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}\Big)$, где arch — функция, обратная функции ch.

5.25. Сопоставим точке z из единичного круга точку $w = i\dfrac{1+z}{1-z}$ из верхней полуплоскости. При этом $z = \dfrac{w-i}{w+i}$. Собственное движение в координатах w задается формулой $w \mapsto \dfrac{pw+q}{rw+s}$, где $ps - qr = 1$. В координатах z это преобразование имеет вид

$$z \mapsto \frac{(ip+is-q+r)z + ip - is + q + r}{(ip-is-q-r)z + ip + is + q - r}.$$

Умножив числитель и знаменатель этой дроби на $\dfrac{i}{2}$, получим выражение требуемого вида.

5.26. В модели Клейна утверждение сводится к соответствующему утверждению евклидовой геометрии.

5.27. Ясно, что

$$\operatorname{ch}\frac{a}{c} = \frac{1}{2}(e^{a/c} + e^{-a/c}) = \frac{1}{2}\Big(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\Big) = \frac{1}{\sin\alpha},$$
$$\operatorname{sh}\frac{a}{c} = \frac{1}{2}(e^{a/c} - e^{-a/c}) = \frac{1}{2}\Big(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\Big) = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Третье соотношение следует из этих двух.

При $0 < \alpha < \pi/2$ каждое из рассматриваемых соотношений дает однозначное выражение для a, поэтому все они эквивалентны.

5.28. Рассмотрим модель Пуанкаре в верхней полуплоскости. Можно считать, что данная прямая — мнимая ось, а данная точка лежит на единичной окружности (этого можно добиться гомотетией с центром в начале координат). Для точки $\cos\alpha + i\sin\alpha$ угол параллельности равен α, а расстояние a от этой точки до данной прямой вычисляется по формуле

$$\operatorname{ch}\frac{a}{c} = 1 + \frac{\cos^2\alpha + (1-\sin\alpha)^2}{2\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

Это соотношение между a и α эквивалентно требуемому соотношению.

5.29. Требуемые соотношения вытекают из доказанных нами соотношений $\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b$, $\operatorname{sh} a = \operatorname{sh} b \operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{th} b = \operatorname{sh} a \operatorname{tg}\beta$ и тождества $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ (а также тригонометрических тождеств). Например, для доказательства соотношения $\operatorname{sh} a = \operatorname{sh} c \sin\alpha$ нужно возвести в квадрат обе части равенства $\operatorname{sh} a = \operatorname{sh} b \operatorname{tg}\alpha$, а затем воспользоваться тем, что

$$\operatorname{sh}^2 b = \operatorname{ch}^2 b - 1 = \frac{\operatorname{ch}^2 c - \operatorname{ch}^2 a}{\operatorname{ch}^2 a} = \frac{\operatorname{sh}^2 c - \operatorname{sh}^2 a}{\operatorname{ch}^2 a}.$$

5.30. а) Ясно, что

$$\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c \cos\alpha = \\ = \operatorname{ch} b(\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \cos\gamma) - \frac{\operatorname{sh} b \operatorname{sh} a \cos\alpha \sin\gamma}{\sin\alpha},$$

т. е.

$$\operatorname{ch} a(1 - \operatorname{ch}^2 b) = -\operatorname{ch} b \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \cos\gamma - \operatorname{sh} b \operatorname{sh} a \sin\gamma \operatorname{ctg}\alpha.$$

Учитывая, что $1 - \operatorname{ch}^2 b = -\operatorname{sh}^2 a$, получаем

$$\operatorname{ch} a = \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{sh} b}(\operatorname{ch} b \cos\gamma + \sin\gamma \operatorname{ctg}\alpha).$$

Остается заметить, что $\dfrac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{sh} b} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.

б) Дважды воспользовавшись формулой из задачи а), получим

$$\operatorname{ch} a \sin\beta = (\operatorname{ch} a \sin\beta \cos\gamma + \cos\beta \sin\gamma)\cos\gamma + \cos\alpha \sin\beta, \quad \text{т. е.}$$
$$\operatorname{ch} a \sin\beta \sin^2\gamma = \cos\beta \sin\gamma \cos\gamma + \cos\alpha \sin\gamma.$$

Остается сократить обе части на $\sin\gamma$.

5.31. Пусть сторона AB угла BAC проходит через центр O круга δ. Наряду с прямой CC_1 в модели Клейна рассмотрим прямую CC_1 в модели Пуанкаре в круге (рис. Р.5). Требуемое утверждение сводится к очевидному утверждению $\beta < \alpha$.

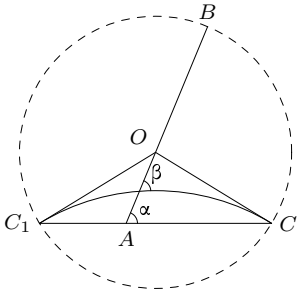


Рис. Р.5

5.32. Воспользуйтесь моделью Клейна.

5.33. Утверждение очевидным образом следует из формулы задачи 5.30 б). Но его можно доказать и непосредственно.

Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — гиперболические треугольники с соответственно равными углами. Совместим углы BAC и $B_1A_1C_1$. Покажем, что тогда $B = B_1$ и $C = C_1$. В самом деле, если $B \neq B_1$ или $C \neq C_1$, то либо отрезки BC и B_1C_1 пересекаются в некоторой точке M, либо эти отрезки не пересекаются. В первом случае можно считать, что точка M отлична от B. Тогда MBB_1 — гиперболический треугольник с суммой углов π. Во втором случае BCC_1B_1 — гиперболический четырехугольник с суммой углов 2π. Ни то, ни другое невозможно.

5.34. Будем считать, что одной стороной угла является мнимая ось Oy в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости. Чтобы опустить перпендикуляр из точки A на эту прямую, нужно провести окружность

радиуса $|OA|$ с центром O. Другая сторона угла представляет собой дугу евклидовой окружности, поэтому ее гиперболическая проекция на ось Oy будет ограниченным множеством.

5.35. а) и б) Пусть O — центр правильного n-угольника, AB — одна из его сторон, M — середина этой стороны. Тогда треугольник AOM прямоугольный с углами $\alpha/2$ и π/n, катетами $a/2$ и r. Требуемое соотношение следует из последнего соотношения задачи 5.29.

Треугольник AOM с указанными углами существует тогда и только тогда, когда $\operatorname{ch} r > 1$ и $\operatorname{ch}(a/2) > 1$. Оба эти неравенства эквивалентны тому, что $\alpha < (n-2)\pi/n$.

в) При $\alpha = 2\pi/n$ получаем $\operatorname{ch} r = \operatorname{ch}(a/2) = \operatorname{ctg}(\pi/n)$. Неравенство $\operatorname{ctg}(\pi/n) > 1$ выполняется при $n > 4$.

5.36. Отрежем от четырехугольника прямоугольный треугольник с катетами a и b. Он имеет углы α и β и гипотенузу c. Оставшийся треугольник имеет углы $\alpha_1 = \pi/2 - \alpha$, $\beta_1 = \pi/2 - \beta$ и γ. Согласно задаче 5.30б)

$$\cos\gamma = \sin\alpha_1 \sin\beta_1 \operatorname{ch} c - \cos\alpha_1 \cos\beta_1 = \cos\alpha\cos\beta \operatorname{ch} c - \sin\alpha\sin\beta.$$

А так как $\cos\alpha\cos\beta = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b \sin\alpha\sin\beta = \operatorname{ch} c \sin\alpha\sin\beta$,

$$\cos\gamma = (\operatorname{ch}^2 c - 1)\sin\alpha\sin\beta = \operatorname{sh}^2 c \sin\alpha\sin\beta = \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b.$$

5.37. Площадь рассматриваемого треугольника равна

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} \right) dx = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.$$

5.38. Если $w = \dfrac{z-i}{z+i}$, то $z = i\dfrac{1+w}{1-w}$. Поэтому

$$\operatorname{Im} z = \frac{1-|w|^2}{|1-w|^2}, \qquad |dz| = \frac{2|w|}{|1-w|^2}.$$

5.39. Пусть $x+iy$ — точка в модели Клейна. Согласно задаче 5.21 в модели Пуанкаре в круге ей соответствует точка $w = u+iv$, где

$$x = \frac{2u}{u^2+v^2+1}, \qquad y = \frac{2v}{u^2+v^2+1}.$$

Несложные вычисления показывают, что

$$dx^2 + dy^2 - (x\,dy - y\,dx)^2 = \frac{4(1-u^2-v^2)^2(du^2+dv^2)}{(u^2+v^2+1)^4},$$

$$(1-x^2-y^2)^2 = \left(\frac{1-u^2-v^2}{u^2+v^2+1}\right)^4.$$

Поэтому

$$\frac{dx^2+dy^2-(x\,dy-y\,dx)^2}{(1-x^2-y^2)^2}=\frac{4(du^2+dv^2)}{(1-u^2-v^2)^2}=\left(\frac{2|dw|}{1-|w|^2}\right)^2.$$

Согласно задаче 5.38 последнее выражение совпадает с ds^2.

5.40. а) В модели Пуанкаре в верхней полуплоскости длины сторон рассматриваемого бесконечно малого прямоугольника равны $\dfrac{dx}{y}$ и $\dfrac{dy}{y}$.

В модели Пуанкаре в единичном круге длины сторон рассматриваемого бесконечно малого прямоугольника равны

$$\frac{2dx}{1-(x^2+y^2)} \quad \text{и} \quad \frac{2dy}{1-(x^2+y^2)}.$$

Площадь бесконечно малого прямоугольника равна произведению длин его сторон.

б) Длина стороны прямоугольника, лежащей на прямой $\varphi=\text{const}$, равна

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\cdot\frac{1+\rho+d\rho}{1-\rho-d\rho}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{d\rho}{1+\rho}\right)\left(1+\frac{d\rho}{1-\rho-d\rho}\right)\approx$$
$$\approx\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{2d\rho}{1-\rho^2}\right)\approx\frac{d\rho}{1-\rho^2}.$$

Длина стороны, лежащей на прямой $\rho=\text{const}$, равна

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1-\rho^2}+\rho d\varphi}{\sqrt{1-\rho^2}-\rho d\varphi}\right)\approx\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{2\rho d\varphi}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\approx\frac{\rho d\varphi}{\sqrt{1-\rho^2}}.$$

5.41. Длина гиперболической окружности радиуса r равна $2\pi\operatorname{sh}r$, поэтому площадь гиперболического круга радиуса r равна

$$\int_0^r 2\pi\operatorname{sh}t\,dt=2\pi\operatorname{ch}t\Big|_0^r=2\pi(\operatorname{ch}r-1)=4\pi\operatorname{sh}^2\left(\frac{r}{2}\right).$$

5.42. Пусть $2a$, $2b$, $2c$ — длины сторон гиперболического треугольника, a' — длина средней линии. Требуется доказать, что $a'<a$, т. е. $\operatorname{ch}2a'<\operatorname{ch}2a$. Согласно теореме косинусов

$$\operatorname{ch}a'=\operatorname{ch}b\operatorname{ch}c-\operatorname{sh}b\operatorname{sh}c\cos\alpha,$$
$$\operatorname{ch}2a=\operatorname{ch}2b\operatorname{ch}2c-\operatorname{sh}2b\operatorname{sh}2c\cos\alpha.$$

Положим $\operatorname{ch}b=x_1$, $\operatorname{sh}b=x_2$, $\operatorname{ch}c=y_1$, $\operatorname{sh}b=y_2$, $\cos\alpha=p$. Тогда требуемое неравенство принимает вид

$$2(x_1y_1-x_2y_2p)^2-1<(2x_1^2-1)(2y_1y^2-1)-4x_1y_1x_2y_2p.$$

Это неравенство эквивалентно неравенству

$$x_2^2y_2^2p^2<(x_1^2-1)(y_1^2-1).$$

Последнее неравенство очевидно, поскольку $x_1^2-1=x_2^2$ и $y_1^2-1=y_2^2$, а $p^2=\cos^2\alpha<1$.

5.43. Рассмотрим модель Клейна и поместим вершину B в центр круга. Тогда евклидов четырехугольник $ABCD$ будет прямоугольником (рис. Р.6). Пусть луч AD пересекает окружность в точке X, P — точка пересечения прямых BX и CD. Достаточно доказать, что гиперболические длины отрезков AD и BP равны. Но это очевидным образом следует из того, что двойные отношения $[A, D, X, Y_1]$ и $[B, P, X, Y_2]$ равны, так как $Y_1Y_2 \parallel AB \parallel CD$.

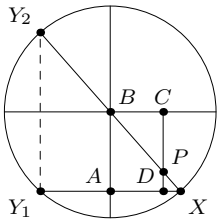


Рис. Р.6.

5.44. а) Пусть A_1 и B_1 — середины сторон AC и BC соответственно (рис. Р.7 (а)). Опустим из вершины C перпендикуляр CH на прямую A_1B_1 и рассмотрим точки A_2 и B_2, симметричные точке H относительно точек A_1 и B_1 соответственно. Легко проверить, что $A_2 \neq B_2$. В том случае, когда H лежит на отрезке A_1B_1, это очевидно, а если H попадает на продолжение отрезка A_1B_1, то равенство $|A_1H| = |B_1H|$ выполняться не может, поэтому не может выполняться и равенство $|A_2H| = |B_2H|$. Таким образом, точки A_2 и B_2 однозначно определяют прямую A_1B_1, поэтому достаточно доказать, что рассматриваемый перпендикуляр l, восстановленный из середины отрезка AB, перпендикулярен прямой A_2B_2.

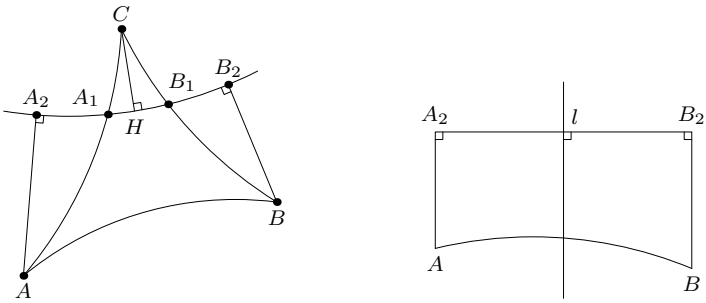


Рис. Р.7.

Треугольники A_1CH и A_1AA_2 (а также треугольники B_1CH и B_1BB_2) являются равными прямоугольными треугольниками, поэтому в четырехугольнике AA_2B_2B углы при вершинах A_2 и B_2 прямые, а стороны AA_2 и BB_2 равны (обе они равны $|CH|$). Такой четырехугольник должен иметь ось симметрии (рис. Р.7 (б)), причем она должна совпасть с прямой l. Следовательно, $l \perp A_2B_2$.

б) Случай совпадающих прямых очевиден, поэтому будем считать, что прямые, изометрично отображающиеся друг на друга, не совпадают. Возможны два случая.

1. Два различных отрезка XX' и YY' имеют общую точку M. В таком случае рассматриваемая изометрия является симметрией относительно точки M.

2. Середины всех отрезков вида XX' попарно различны. Пусть P, Q, R — середины отрезков XX', YY', ZZ'. Достаточно доказать, что точки P, Q, R лежат на одной прямой. При симметрии относительно точки P точки X, Y, Z переходят в точки $X''=X'$, Y'' и Z'', лежащие на одной прямой. При этом прямая PX' является серединным перпендикуляром к отрезкам $Y'Y''$ и $Z'Z''$. Поэтому согласно задаче а прямая PX' будет перпендикулярна прямым PQ и PR. Следовательно, точки P, Q, R лежат на одной прямой.

5.45. а) Точка пересечения двух биссектрис треугольника равноудалена от всех его сторон, поэтому она лежит на третьей биссектрисе.

б) Пусть M — середина стороны AB, P и Q — середины сторон AC и BC. Рассмотрим модель Клейна и поместим точку M в центр круга (рис. Р.8). Согласно задаче 5.44 а) серединный перпендикуляр к отрезку AB будет перпендикулярен прямой PQ. Это означает, что в евклидовом треугольнике ABC отрезок PQ будет параллелен стороне AB. В таком случае отрезки AQ и BP пересекаются в точке K, лежащей на отрезке CM. В самом деле, при (евклидовой) гомотетии с центром K отрезок PQ переходит в отрезок BA, поэтому прямая, соединяющая середины этих отрезков, проходит через точку K.

в) Рассмотрим модель Клейна и поместим точку A в центр круга (рис. Р.9). В таком случае гиперболические высоты BB_1 и CC_1 будут и

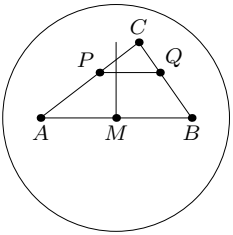


Рис. Р.8

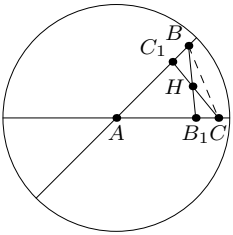


Рис. Р.9

евклидовыми высотами. Они пересекаются в некоторой точке H. Прямая AH будет евклидовым перпендикуляром к прямой BC. Но AH —

диаметр, поэтому AH будет и гиперболическим перпендикуляром к прямой BC.

5.46. Опустим из вершин треугольника перпендикуляры AA_2, BB_2, CC_2 на прямую l. Так как $\angle AC_1A_2 = \angle BC_1B_2 = \varphi$, согласно теореме синусов $\operatorname{sh}|AA_2|/\operatorname{sh}|AC_1| = \sin\varphi = \operatorname{sh}|BB_2|/\operatorname{sh}|C_1B|$, поэтому

$$\frac{\operatorname{sh}|AC_1|}{\operatorname{sh}|C_1B|} = \frac{\operatorname{sh}|AA_2|}{\operatorname{sh}|BB_2|}.$$

Аналогично

$$\frac{\operatorname{sh}|BA_1|}{\operatorname{sh}|A_1C|} = \frac{\operatorname{sh}|BB_2|}{\operatorname{sh}|CC_2|} \quad \text{и} \quad \frac{\operatorname{sh}|CB_1|}{\operatorname{sh}|B_1A|} = \frac{\operatorname{sh}|CC_2|}{\operatorname{sh}|AA_2|}.$$

Остается перемножить полученные неравенства.

5.47. Достаточно доказать, что если указанные отрезки пересекаются в некоторой точке M, то выполняются указанные соотношения. Обратное утверждение следует из того, что на отрезке существует единственная точка, делящая его в данном отношении.

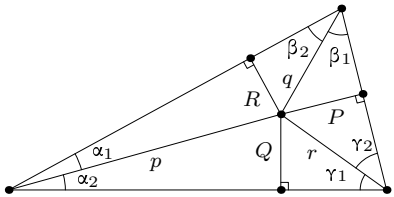


Рис. Р.10.

а) Введем такие обозначения, как на рис. Р.10. Согласно теореме синусов $\operatorname{sh} R = \operatorname{sh} p \sin\alpha_1$ и $\operatorname{sh} Q = \operatorname{sh} p \sin\alpha_2$. Поэтому

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{\operatorname{sh} R}{\operatorname{sh} Q}.$$

Аналогично

$$\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} = \frac{\operatorname{sh} P}{\operatorname{sh} R} \quad \text{и} \quad \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = \frac{\operatorname{sh} Q}{\operatorname{sh} P}.$$

б) Применив терему синусов к треугольникам BAA_1 и CAA_1, получим

$$\frac{\operatorname{sh}|BA_1|}{\operatorname{sh}|AB|} = \frac{\sin BAA_1}{\sin BA_1A} \quad \text{и} \quad \frac{\operatorname{sh}|A_1C|}{\operatorname{sh}|AC|} = \frac{\sin A_1AC}{\sin AA_1C}.$$

Но $\sin BA_1A = \sin AA_1C$, поэтому

$$\frac{\operatorname{sh}|BA_1|}{\operatorname{sh}|A_1C|} = \frac{\operatorname{sh}|AB|}{\operatorname{sh}|AC|} \cdot \frac{\sin BAA_1}{\sin A_1AC}.$$

Теперь уже легко понять, что соотношения а) и б) эквивалентны.

5.48. Мы даже докажем, что существует описанный n-угольник с углами $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Его можно составить из прямоугольных треугольников с углами $\varphi_i/2$ и α_i и фиксированным катетом R (рис. Р.11). Из этих прямоугольных треугольников можно составить n-угольник в том

и только в том случае, когда $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = \pi$. Согласно последнему соотношению задачи 5.29 $\sin\alpha_i = \cos(\varphi_i/2)/\operatorname{ch} R$, т. е.

$$\alpha_i = \arcsin[\cos(\varphi_i/2)/\operatorname{ch} R].$$

Таким образом, $\sum \alpha_i \to 0$ при $R \to \infty$ и

$$\sum \alpha_i = \sum \frac{\pi - \varphi_i}{2} = \frac{1}{2}(\pi n - \varphi_1 - \ldots - \varphi_n) > \pi$$

при $R = 0$. Следовательно, существует такое число R, что $\sum \alpha_i = \pi$.

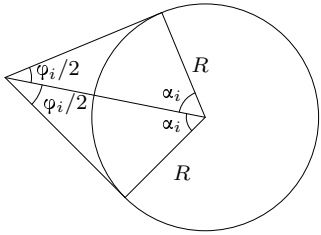


Рис. Р.11.

5.49. Согласно теореме косинусов

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{ch} a}{\operatorname{sh} b \operatorname{sh} c},$$

поэтому

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha = \frac{\operatorname{ch}(b+c) - \operatorname{ch} a}{\operatorname{sh} b \operatorname{sh} c} = \frac{2\operatorname{sh} p \operatorname{sh}(p-a)}{\operatorname{sh} b \operatorname{sh} c},$$
$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha = \frac{\operatorname{ch} a - \operatorname{ch}(b-c)}{\operatorname{sh} b \operatorname{sh} c} = \frac{2\operatorname{sh}(p-b)\operatorname{sh}(p-c)}{\operatorname{sh} b \operatorname{sh} c}.$$

5.50. а) Воспользовавшись доказанными в задаче 5.49 формулами, легко проверить, что

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\operatorname{sh}(p-a) + \operatorname{sh}(p-b)}{\operatorname{sh} c}\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{\operatorname{ch}\dfrac{a-b}{2}}{\operatorname{ch}\dfrac{c}{2}}\cos\frac{\gamma}{2}, \qquad \text{(Р.7)}$$

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\operatorname{sh} p - \operatorname{sh}(p-c)}{\operatorname{sh} c}\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{\operatorname{ch}\dfrac{a+b}{2}}{\operatorname{ch}\dfrac{c}{2}}\sin\frac{\gamma}{2}. \qquad \text{(Р.8)}$$

Поэтому

$$\sin\frac{S}{2}=\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\frac{\operatorname{ch}\dfrac{a+b}{2}-\operatorname{ch}\dfrac{a-b}{2}}{\operatorname{ch}\dfrac{c}{2}}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Остается заметить, что

$$\operatorname{ch}\frac{a+b}{2}-\operatorname{ch}\frac{a-b}{2}=2\operatorname{sh}\frac{a}{2}\operatorname{sh}\frac{b}{2}$$

и

$$\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{\sqrt{\operatorname{sh}p\operatorname{sh}(p-a)\operatorname{sh}(p-b)\operatorname{sh}(p-c)}}{\operatorname{sh}a\operatorname{sh}b}.$$

б) Формулы (Р.7) и (Р.8) можно записать в виде

$$\frac{\cos\dfrac{S+\gamma}{2}}{\cos\dfrac{\gamma}{2}}=\frac{\operatorname{ch}\dfrac{a-b}{2}}{\operatorname{ch}\dfrac{c}{2}}\quad\text{и}\quad\frac{\sin\dfrac{S+\gamma}{2}}{\sin\dfrac{\gamma}{2}}=\frac{\operatorname{ch}\dfrac{a+b}{2}}{\operatorname{ch}\dfrac{c}{2}}.$$

Из первой их этих формул следует, что

$$\frac{\cos\dfrac{S+\gamma}{2}-\cos\dfrac{\gamma}{2}}{\cos\dfrac{S+\gamma}{2}+\cos\dfrac{\gamma}{2}}=\frac{\operatorname{ch}\dfrac{a-b}{2}-\operatorname{ch}\dfrac{c}{2}}{\operatorname{ch}\dfrac{a-b}{2}+\operatorname{ch}\dfrac{c}{2}},$$

т. е.

$$\operatorname{tg}\frac{S}{4}\operatorname{tg}\left(\frac{S}{4}+\frac{\gamma}{2}\right)=\operatorname{th}\frac{p-b}{2}\operatorname{th}\frac{p-a}{2}.$$

Аналогично из второй формулы получаем

$$\operatorname{tg}\frac{S}{4}\operatorname{ctg}\left(\frac{S}{4}+\frac{\gamma}{2}\right)=\operatorname{th}\frac{p-c}{2}\operatorname{th}\frac{p}{2}.$$

Остается перемножить полученные формулы.

5.51. Пусть I — центр вписанной окружности, K — точка касания вписанной окружности со стороной AB. Тогда $\operatorname{th}|IK|=\operatorname{sh}|AK|\operatorname{tg}\angle IAK$, т. е. $\operatorname{th}r=\operatorname{sh}(p-a)\operatorname{tg}(\alpha/2)$.

Выразив $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ по формулам из задачи 5.49, получим требуемое.

5.52. Пусть O — центр описанной окружности, M — середина стороны BC. Тогда $\operatorname{th}|CM|=\operatorname{th}|CO|\cos\angle COM$, т. е.

$$\operatorname{th}\frac{a}{2}=\operatorname{th}R\cos\left(\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\right).$$

При этом

$$\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}=\frac{\pi}{2}-\left(\alpha+\frac{S}{2}\right).$$

Таким образом,

$$\operatorname{th} R = \frac{\operatorname{th}\dfrac{a}{2}}{\sin\left(\alpha + \dfrac{S}{2}\right)}. \qquad \text{(Р.9)}$$

Согласно задаче 5.49 а) выполняется равенство

$$\operatorname{ch} a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma},$$

поэтому

$$\operatorname{ch}^2\frac{a}{2} = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma}{2\sin\beta\sin\gamma} = \frac{\sin\left(\beta + \dfrac{S}{2}\right)\sin\left(\gamma + \dfrac{S}{2}\right)}{\sin\beta\sin\gamma},$$

$$\operatorname{sh}^2\frac{a}{2} = \frac{\sin\dfrac{S}{2}\sin\left(\alpha + \dfrac{S}{2}\right)}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

Выразим $\operatorname{th}\dfrac{a}{2}$ по этим формулам и подставим в формулу (Р.9). В результате получим требуемое выражение.

5.53. Можно считать, что в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости точки A, B, C, D имеют координаты $(0,\, a)$, $(0,\, b)$, $(k,\, \sqrt{b^2-k^2})$, $(k,\, \sqrt{a^2-k^2})$, где $a > b > 0$. Тогда

$$e^{|CD|} = \frac{\sqrt{a^2-k^2}}{\sqrt{b^2-k^2}}, \quad \operatorname{ch}|AD| = 1 + \frac{k^2 + (a - \sqrt{a^2-k^2})}{2a\sqrt{a^2-k^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2-k^2}},$$

$$\operatorname{ch}|BC| = \frac{b}{\sqrt{b^2-k^2}}.$$

Поэтому

$$\operatorname{sh}|AD| = \frac{1}{\sqrt{a^2-k^2}} \quad \text{и} \quad \operatorname{ch}|BC| = \frac{1}{\sqrt{b^2-k^2}}.$$

5.54. Существует единственная прямая l, параллельная как лучам AB и DC, так и лучам AD и BC. Пусть A', B', C', D' — основания перпендикуляров, опущенных из точек A, B, C, D на прямую l. Прямые AA' и CC' являются биссектрисами углов A и C, а прямые BB' и DD' являются биссектрисами внешних углов B и D. Поэтому точка C_b, симметричная точке C относительно прямой BB', лежит на прямой AB, а точка C_d, симметричная точке C относительно прямой DD', лежит на прямой AD. Пусть C_b' и C_d' — проекции точек C_b и C_d на прямую l. Тогда $|C_bC_b'| = |CC'| = |C_dC_d'|$, поэтому точки C_b и C_d симметричны относительно прямой AA'. Значит, $|AC_b| = |AC_d|$. Остается заметить, что $|AC_b| = |AB| + |BC_b| = |AB| + |BC|$ и $|AC_d| = |AD| + |DC|$.

5.55. Пусть B_a и B_c — точки, симметричные точке B относительно биссектрис внешних углов A и C. Точки B_a и B_c лежат на лучах DA и

DC и $|DB_a| = |DB_c|$. Поэтому биссектриса внутреннего угла D является серединным перпендикуляром к отрезку $[B_aB_c]$, а биссектрисы внешних углов A и C являются серединными перпендикулярами к отрезкам $[B_aB]$ и $[B_cB]$. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника принадлежат одному пучку прямых. Аналогично доказывается, что тому же пучку прямых принадлежит биссектриса внутреннего угла B.

5.56. Совместим сначала движением точки на абсолюте, в которых пересекаются данные пары параллельных прямых. Тогда в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости можно будет считать, что все рассматриваемые прямые являются лучами, перпендикулярными вещественной оси. Любую пару таких лучей можно совместить с другой парой посредством параллельного переноса и гомотетии.

5.57. Для эллиптических и параболических пучков утверждение очевидно. Рассмотрим гиперболический пучок прямых, т. е. пучок прямых, перпендикулярных некоторой прямой AB, где A и B — точки на абсолюте. Проведем через точки A и B касательные к окружности. Пусть они пересекаются в точке P. Тогда (евклидовы) продолжения всех прямых пучка пересекаются в точке P. Для доказательства этого утверждения достаточно рассмотреть проективное преобразование, сохраняющее круг и переводящее отрезок AB в диаметр.

5.58. В модели Пуанкаре в верхней полуплоскости любой орицикл движением можно перевести в орицикл, задаваемый уравнением $y = \text{const}$. А любые два таких орицикла можно совместить гомотетией.

5.59. Можно считать, что в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости точки A и B имеют координаты $(x_1,\, y)$ и $(x_2,\, y)$. Тогда

$$\operatorname{ch} d = 1 + \frac{(x_1 - x_2)^2}{2y^2},$$

а длина l дуги орицикла равна $\dfrac{|x_1 - x_2|}{y}$. Таким образом,

$$\operatorname{ch} d = 1 + \frac{l^2}{2}, \quad \text{т. е.} \quad l = 2\operatorname{sh}\Big(\frac{d}{2}\Big).$$

5.60. В том случае, когда два серединных перпендикуляра пересекаются в одной точке, утверждение очевидно.

В том случае, когда два серединных перпендикуляра параллельны, их можно считать лучами в верхней полуплоскости, параллельными оси Oy. Тогда все вершины треугольника лежат на одной высоте над вещественной осью, поэтому третий серединный перпендикуляр будет лучом, параллельным оси Oy.

В том случае, когда два серединных перпендикуляра перпендикулярны некоторой прямой l, все вершины треугольника удалены от пря-

мой l на одно и то же расстояние, поэтому третий серединный перпендикуляр тоже перпендикулярен прямой l.

Заодно мы доказали, что любые три точки лежат либо на одной окружности, либо на одном орицикле, либо на одном гиперцикле.

5.61. Решение задачи 5.45 в) годится и в этом случае.

5.62. Дуга PQ окружности, орицикла или гиперцикла образует в точках P и Q равные углы с (гиперболической) прямой PQ. Пусть α_1, β_1 и γ_1 — углы, соответствующие дугам BC, CA и AB. Тогда в случае окружности $\alpha = \pi - \beta_1 - \gamma_1$, $\beta = \pi - \alpha_1 - \gamma_1$, $\gamma = \pi - \alpha_1 - \beta_1$, а в случае орицикла или гиперцикла $\alpha = \gamma_1 - \beta_1$, $\beta = \gamma_1 - \alpha_1$, $\gamma = \pi - \alpha_1 - \beta_1$. Таким образом, $\alpha + \beta - \gamma = \pm(\pi - 2\gamma_1)$. При этом угол γ_1 постоянен, так как он соответствует постоянной дуге AB.

5.63. Диагональ AC разрезает четырехугольник $ABCD$ на два равных треугольника. Пусть M — середина отрезка AC. Тогда треугольники DCM и BAM равны, поэтому M — середина отрезка BD. Таким образом, при симметрии относительно точки M прямая AB переходит в прямую CD. Но в таком случае перпендикуляр, проведенный из точки M к прямой AB, будет общим перпендикуляром к прямым AB и CD.

5.64. Изометрия f переводит прямую l в некоторую прямую $f(l)$. Пусть точка X движется по прямой l к абсолюту. Расстояние от точки X до прямой $f(l)$ не превосходит расстояния от точки X до точки $f(X)$, поэтому расстояние от точки X до прямой l остается ограниченным. Это означает, что прямые l и $f(l)$ выходят на абсолют в одних и тех же точках, поэтому $l = f(l)$.

Любую точку A можно представить в виде пересечения двух прямых. При изометрии f эти прямые переходят каждая в себя, поэтому точка A остается неподвижной.

5.65. Из неравенства треугольника следует, что преобразование f переводит прямые в прямые. При этом пара параллельных прямых переходит в пару параллельных прямых, так как только у параллельных прямых есть сколь угодно близкие точки. Ясно также, что окружность радиуса r с центром O переходит в окружность радиуса kr с центром $f(O)$.

Рассмотрим треугольник с вершинами на абсолюте. Преобразование f переводит этот треугольник в такой же треугольник. При этом вписанная окружность одного треугольника переходит во вписанную окружность другого треугольника. Все треугольники с нулевыми углами изометричны, поэтому радиус вписанной окружности у них один и тот же. Ясно, что этот радиус r конечен. В итоге получаем $r = kr$, т. е. $k = 1$.

Дополнение

Д.1. Пусть прямая в $\mathbb{CP}^2$ не вещественна. Тогда ее уравнение имеет вид $l(P)+im(P)=0$, где l и m — вещественные линейные функции, причем прямые $l(P)=0$ и $m(P)=0$ не совпадают. Эти прямые пересекаются в одной вещественной точке, и эта точка принадлежит рассматриваемой прямой в $\mathbb{CP}^2$.

Д.2. Сфера в $\mathbb{R}^n$ задается уравнением $\sum\limits_{n=1}^{n}(x-a_i)^2=R^2$. При переходе к $\mathbb{CP}^n$ получим уравнение $\sum\limits_{i=1}^{n}(z_i-a_iz_{n+1})^2=R^2z_{n+1}^2$. Поэтому пересечение с бесконечно удаленной плоскостью задается уравнением $z_1^2+\ldots+z_n^2=0$.

Д.3. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ точки $A_1(1,\,0,\,0)$, $B_1=(0,\,1,\,0)$, $C_1=(0,\,0,\,1)$ и $M=(1/3,\,1/3,\,1/3)$. Ясно, что треугольник $A_1B_1C_1$ правильный и M — его центр. Выберем точки A, B и C на лучах OA, OB и OC (O — начало координат) так, чтобы они лежали в плоскости $A_1B_1C_1$. Тогда точки A_1, B_1 и C_1 лежат на сторонах треугольника ABC, а точка M является точкой пересечения отрезков AA_1, BB_1 и CC_1. Это возможно лишь в том случае, когда треугольник ABC правильный и $A=(-1,\,1,\,1)$, $B=(1,\,-1,\,1)$, $C=(1,\,1,\,-1)$.

Д.4. Касательная к данному эллипсу в точке $(x_0,\,y_0,\,z_0)$ задается однородным уравнением

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=zz_0.$$

Если эта касательная проходит через точку $(1,\,\pm i,\,0)$, то $y_0=\pm ib^2x_0/a^2$. Подставив это выражение в уравнение эллипса, получим

$$\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{b^2x_0^2}{a^4}=z_0^2,\quad \text{т. е.}\quad \frac{z_0}{x_0}=\pm\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a^2}.$$

Итак, касательная задается уравнением

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=\pm\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a^2}zx_0.$$

Ясно, что она проходит через один из фокусов $(\pm\sqrt{a^2-b^2},\,0,\,1)$.

Замечание. Пусть I, $J=(1,\,\pm i,\,0)$, F_1 и F_2 — некоторые вещественные точки. Из результата задачи Д.4 следует, что все коники, вписанные в четырехугольник IF_1JF_2, имеют общие фокусы, а именно F_1 и F_2.

Д.5. Коника $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ пересекает бесконечно удаленную прямую в таких точках $(x_i,\,y_i,\,0)$, что $ax_i^2+bx_iy_i+cy_i^2=0$. По теореме Виета $\left(\dfrac{x_1}{y_1}\right)\cdot\left(\dfrac{x_2}{y_2}\right)=\dfrac{c}{a}$. Кроме того, для гиперболы с перпендикулярными асимптотами выполняется равенство $a+c=0$. В самом

деле, это равенство выполняется, например, для гиперболы $xy = k$, а при повороте $x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi$, $y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi$ получаем $a' = a\cos^2\varphi + c\sin^2\varphi$, $c' = a\sin^2\varphi + c\cos^2\varphi$, поэтому $a' + c' = a + c$.

Д.6. а) Пусть O — точка пересечения радикальных осей двух пар окружностей. Тогда степени точки O относительно всех трех пар окружностей равны, поэтому точка O лежит и на радикальной оси третьей пары окружностей.

б) Можно считать, что $A, B = (1, \pm i, 0)$. В таком случае коники будут окружностями, а их общие хорды будут радикальными осями.

Д.7. а), б) Проведем из точки A прямые l_1 и l_2, пересекающие данную конику в точках P_1, Q_1 и P_2, Q_2 соответственно. Тогда точка пересечения прямых P_1Q_1 и P_2Q_2 лежит на поляре точки A относительно данной коники. Точка пересечения прямых P_1P_2 и Q_1Q_2 тоже лежит на этой поляре. Соединив построенные точки, построим поляру.

в) Построим поляру a точки A относительно данной коники. Требуемая касательная соединяет точку A с одной из точек пересечения поляры a с коникой.

г) Проведем через точку A прямую и возьмем на этой прямой точки P и Q. Построим поляры p и q этих точек. Требуемая касательная соединяет точку A с точкой пересечения прямых p и q.

Д.8. Эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b)$ имеет фокусы $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$, а его директрисы задаются уравнениями $x = \pm\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$. Проведем через один из фокусов прямую $x = \sqrt{a^2 - b^2}$. Она пересекает эллипс в точках $(x_0, \pm y_0)$, где $x_0 = \sqrt{a^2 - b^2}$. Касательные к эллипсу в этих точках задаются уравнениями

$$\frac{xx_0}{a^2} \pm \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Точка их пересечения имеет координаты $\left(\dfrac{a^2}{x_0}, 0\right)$. Поэтому поляра фокуса $(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ задается уравнением $x = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$.

Д.9. Можно считать, что данная коника является окружностью с центром O. В таком случае $a \perp OA, \ldots, d \perp OD$, поэтому

$$[a, b, c, d] = [OA, OB, OC, OD] = [A, B, C, D].$$

Д.10. Пусть прямая BC пересекает конику в точках I и J. Можно считать, что $I, J = (1, \pm i, 0)$. В таком случае коника является окружностью с центром A_1, прямые A_1B_1 и A_1C_1 служат диаметрами этой окружности, а прямые AB и AC ортогональны прямым A_1B_1 и A_1C_1 соответственно. Рассматриваемые прямые AA_1, BB_1 и CC_1 являются высотами треугольника $A_1B_1C_1$, поэтому они пересекаются в одной точке.

Д.11. а) Стороны треугольника ACE являются полярами вершин треугольника BDF. Согласно задаче Д.10 прямые AD, CF и BE пересекаются в одной точке.

б) Двойственное утверждение эквивалентно тому, что точки пересечения прямых AC и DF, CE и FB, EA и BD лежат на одной прямой.

Д.12. а) Двойственное утверждение (треугольник PQR автополярен относительно коники C тогда и только тогда, когда его вершины совпадают с точками пересечения диагоналей и двух пар противоположных сторон четырехугольника, вписанного в конику C) непосредственно следует из построения поляры точки относительно коники (см. задачу Д.7 а)).

б) В однородных координатах поляра точки (x_0, y_0, z_0) относительно коники $z^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ задается уравнением $zz_0 = \dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2}$. В частности, полярой точки $X = (1, 0, 0)$ служит прямая YZ.

Д.13. а) Пусть x_1 и x_2 — точки касания коники с касательными, проведенными из точки a. Касательные в точках x_1 и x_2 задаются уравнениями $xAx_1^T = 0$ и $xAx_2^T = 0$. Обе эти касательные проходят через точку a, поэтому $aAx_1^T = aAx_2^T = 0$. Следовательно, прямая x_1x_2 задается уравнением $aAx^T = 0$.

б) Точке x_0, удовлетворяющей уравнению $x_0Bx_0^T = 0$, двойственна прямая $x_0Ax^T = 0$. Эта прямая касается коники $xCx^T = 0$ в некоторой точке x_1, поэтому ее уравнение имеет вид $x_1Cx^T = 0$. Таким образом, $x_1C = x_0A$. Ясно, что $x_1Cx_1^T = x_0AC^{-1}CC^{-1}Ax_0^T = x_0AC^{-1}Ax_0^T$. Поэтому равенства $x_0Bx_0^T = 0$ и $x_1Cx_1^T = 0$ эквивалентны в том случае, когда $B = AC^{-1}A$, т. е. $C = AB^{-1}A$.

Д.14. а) В однородных координатах (x, y, z) окружность C задается уравнением $(x - az)^2 + y^2 - R^2z^2 = 0$, которому соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & 0 & a^2 - R^2 \end{pmatrix}.$$

Поэтому двойственной конике C^* соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & 0 & a^2 - R^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{R^2} \begin{pmatrix} a^2 - R^2 & 0 & -a \\ 0 & -R^2 & 0 \\ -a & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, коника C^* задается уравнением

$$(a^2 - R^2)x^2 - R^2y^2 - 2axz + z^2 = 0,$$

т. е.

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{R^2}\left(x - \frac{z}{a}\right)^2.$$

б) Уравнение коники C^* можно записать в виде

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1,$$

где $x_1=x+\dfrac{a}{R^2-a^2}$, $a_1^2=\dfrac{R^2}{(R^2-a^2)^2}$, $b_1^2=\dfrac{1}{R^2-a^2}$. Ясно также, что поляра точки $(a,\,0)$ относительно единичной окружности задается уравнением $x=a^{-1}$. Теперь все требуемые утверждения легко проверяются.

Д.15. Для двух коник существует ровно один треугольник, автополярный относительно их обеих. Его можно определить либо как треугольник с вершинами в точках пересечения общих хорд данных коник, либо как треугольник, стороны которого проходят через точки пересечения общих касательных к данным коникам. Из первого определения видно, что рассматриваемый треугольник PQR как раз и будет этим автополярным треугольником, а из второго определения видно, что точки пересечения общих касательных к коникам лежат на сторонах этого треугольника.

Д.16. Данное проективное инволютивное преобразование полностью определяется образами X' и Y' точек X и Y. Возьмем произвольную точку A и рассмотрим точку B, в которой пересекаются описанные окружности треугольников AXX' и AYY'. Пусть Z и Z' — точки пересечения окружности, проходящей через точки A и B, с рассматриваемой прямой. Достаточно доказать, что преобразование $Z\mapsto Z'$ проективно. Пусть O — точка пересечения прямой AB с данной прямой (если $O=\infty$, то преобразование $Z\mapsto Z'$ является симметрией относительно некоторой точки). Выбрав точку O в качестве начала координат, получим, что преобразование $Z\mapsto Z'$ имеет вид $z\mapsto\dfrac{c}{z}$.

Д.17. Пусть O — точка, через которую проходят все прямые пучка; a и a', b и b' — соответственные прямые при данной инволюции. Некоторая прямая l пересекает эти прямые в точках A и A', B и B'. Пусть P — точка пересечения описанных окружностей треугольников OAA' и OBB'. Рассмотрим окружность с центром на прямой l, проходящую через точки O и P. Эта окружность пересекает прямую l в точках C и C'. Ясно, что прямые OC и OC' ортогональны и переходят друг в друга при рассматриваемой инволюции.

Д.18. Пусть a, a', ... — координаты проекций рассматриваемых точек. Согласно теореме Менелая

$$(a-c)(b-a')(b'-c')=-(a'-c')(b'-a)(b-c).$$

Легко проверить, что это соотношение эквивалентно равенству

$$[a,\,b,\,c',\,a']=[a',\,b',\,c,\,a].$$

Д.19. В том случае, когда точка O бесконечно удаленная, требуемое утверждение эквивалентно утверждению предыдущей задачи.

Д.20. Проективным преобразованием точки A, B, C, D можно перевести в вершины квадрата. В таком случае оба утверждения очевидны.

Д.21. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — данные точки; $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ — проективные инволюции окружности, переводящие точку X окружности в другую точку пересечения прямой XA_i с окружностью. Требуется построить неподвижные точки преобразования $\sigma_n\sigma_{n-1}\ldots\sigma_1$. Это преобразование проективно, поэтому его неподвижные точки можно построить методом Штейнера.

Д.22. Совпадение точек $f(g(X))$ и $g(f(X))$ эквивалентно тому, что точки F и G являются точками пересечения двух пар противоположных сторон четырехугольника, вписанного в конику. Это означает, что точка F лежит на поляре точки G относительно данной коники.

Д.23. Ортогональность прямых AX_1 и AX_2 эквивалентна условию

$$[AX_1,\, AX_2,\, AI,\, AJ] = -1,$$

где $I,\, J = (1,\, \pm i,\, 0)$. Таким образом, для пучка прямых, проходящих через точку A, преобразование $AX_1 \mapsto AX_2$ проективно. Ясно также, что это преобразование инволютивно. Но для проективной инволюции коники $X_1 \mapsto X_2$ все хорды X_1X_2 проходят через фиксированную точку.

Д.24. Достаточно проверить равенство

$$[A_1,\, B_1,\, S_1,\, S_2] = [A_2,\, B_2,\, S_2,\, S_1].$$

Для этого нужно убедиться, что знаки этих двойных отношений совпадают и выполняется равенство

$$\frac{A_1S_1}{B_1S_1} : \frac{A_1S_2}{B_1S_2} = \frac{A_2S_2}{B_2S_2} : \frac{A_2S_1}{B_2S_1},$$

т. е.

$$\frac{A_1S_1 \cdot A_2S_1}{B_1S_1 \cdot B_2S_1} = \frac{A_2S_2 \cdot A_1S_2}{B_2S_2 \cdot B_1S_1}.$$

Последнее равенство очевидно, так как выражения в правой и левой части равны $\left(\dfrac{r_a}{r_b}\right)^2$, где r_a и r_b — радиусы окружностей.

Д.25. Конике $\dfrac{x^2}{a-\lambda} + \dfrac{y^2}{b-\lambda} - z^2 = 0$ соответствует матрица

$$A = \begin{pmatrix} (a-\lambda)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (b-\lambda)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Двойственной конике соответствует матрица

$$B = A^{-1} = \begin{pmatrix} a-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & b-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

т. е. двойственная коника задается уравнением

$$(a-\lambda)x^2 + (b-\lambda)y^2 = z^2.$$

Легко проверить, что точки $(\pm 1, \pm i, \sqrt{a-b})$ удовлетворяют этому уравнению.

Д.26. Согласно задаче Д.25 коники, двойственные конфокальным коникам

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} = z^2,$$

проходят через точки $(\pm 1, \pm i, \sqrt{a-b}z)$. Это означает, что прямые

$$\pm x \pm iy + \sqrt{a-b}z = 0,$$

двойственные этим точкам, являются касательными к конфокальным коникам. Легко проверить, что каждая такая прямая проходит через одну из точек $(1, \pm i, 0)$.

Д.27. Рассмотрим семейство плоскостей, содержащих прямую l. Двойственные им точки образуют прямую l^*. Пусть Q^* — квадрика, двойственная квадрике Q. Легко проверить, что если $l \subset Q$, то $l^* \subset Q^*$. Действительно, любая плоскость, содержащая прямую l, пересекает Q по двум прямым, поэтому она является касательной плоскостью к Q, а значит, двойственная ей точка принадлежит Q^*. Наоборот, если $l^* \subset Q^*$, то $l \subset Q$. Поэтому если прямая l не содержится в Q, то прямая l^* пересекает квадрику Q^* ровно в двух точках.

Д.28. Ограничение движения трехмерного пространства Лобачевского на абсолют представляет собой дробно-линейное преобразование над $\mathbb{C}$, а дробно-линейное преобразование над $\mathbb{C}$ обязательно имеет неподвижную точку, причем неподвижных точек не может быть больше двух (если преобразование не тождественно).

Д.29. Достаточно доказать, что если a, b, c, $d \in \mathbb{C}$ — попарно различные числа, то существует такое дробно-линейное преобразование f, что $f(a) = b$, $f(b) = a$, $f(c) = d$, $f(d) = c$. Первые три равенства позволяют однозначно определить f. При этом дробно-линейное преобразование $f \circ f$ имеет неподвижные точки a, b и еще какую-то неподвижную точку, (а именно, неподвижную точку отображения f; она, вообще говоря, может быть бесконечно удаленной), которая не может совпадать ни с a,

ни с b. Таким образом, $f \circ f$ — тождественное преобразование, а значит, $f(d) = c$.

Д.30. а) Согласно задаче Д.29 существует движение, переводящее двугранный угол при ребре AC в двугранный угол при ребре BD.

б) В модели Пуанкаре в верхнем полупространстве можно считать, что рассматриваемая вершина тетраэдра находится в бесконечно удаленной точке. Тогда грани трехгранного угла при этой вершине будут расположены на гранях евклидовой треугольной призмы с основанием на абсолюте. Сумма двугранных углов треугольной призмы равна π.

Д.31. Доказывается аналогично задаче Д.30б).

Д.32. Рассмотрим в модели Пуанкаре в верхнем полупространстве трехгранный угол с вершиной в бесконечно удаленной точке. Его грани образуют треугольную (евклидову) призму с основанием на абсолюте. Элемент объема в верхнем полупространстве имеет вид $z^{-3}\,dx\,dy\,dz$. Поэтому объем части трехгранного угла, лежащей в полупространстве $z \geqslant c$, равен

$$\int_c^\infty Sz^{-3}\,dz = \frac{S}{2c^2},$$

где S — евклидова площадь сечения призмы. Для нас существенно, что этот объем конечен. Это означает, что орисфера рассекает трехгранный угол с вершиной на абсолюте на две части, объем одной из которых (содержащей вершину угла) конечен.

Отсечем от тетраэдра с вершинами на абсолюте его вершины орисферами. В результате тетраэдр будет разрезан на 5 частей, объем каждой из которых конечен.

Д.33. Пусть O — центр куба, P — центр одной из его граней, M — середина ребра этой грани, A — вершина этого ребра. Тогда треугольники OMP и APM прямоугольные; их углы указаны на рис. Р.12.

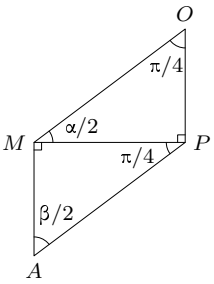


Рис. Р.12.

Напомним, что в прямоугольном треугольнике с катетом a выполняется соотношение $\operatorname{ch} a = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\beta}$. Применив это соотношение к катету MP в обоих треугольниках, получим

$$\cos\frac{\pi}{4} : \sin\frac{\alpha}{2} = \operatorname{ch} MP = \cos\frac{\beta}{2} : \sin\frac{\pi}{4}.$$

Д.34. Решение задачи 5.64 годится и в этом случае.

Д.35. Из неравенства треугольника следует, что f переводит прямые в прямые. Рассмотрим треугольник с вершинами на абсолюте. Этот треугольник (включая его внутреннюю часть) переходит в такой же

треугольник. Ясно также, что любые два треугольника с вершинами на абсолюте изометричны. После этих замечаний уже можно воспользоваться решением задачи 5.65.

Д.36. Выберем в качестве модели пространства Лобачевского модель на двуполостном гиперболоиде, т. е. будем считать, что точки $z_1, \ldots, z_{n+2}$ лежат в $\mathbb{R}^{n+1}$ и их координаты удовлетворяют соотношению

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = -1,$$

причем $x_{n+1} > 0$. Пусть $[u, v] = u_1v_1 + \ldots + u_nv_n - u_{n+1}v_{n+1}$ — псевдоскалярное произведение в $\mathbb{R}^{n+1}$. Тогда $\operatorname{ch}(d_{ij}) = [z_i, z_j]$.

Пусть $S = (z_1, \ldots, z_{n+2})$ — матрица размером $(n+2) \times (n+2)$, образованная столбцами координат точек $z_1, \ldots, z_{n+2}$, к которым в качестве первой координаты добавлен нуль; J — диагональная матрица порядка $n+2$ с диагональю $(1, 1, \ldots, 1, -1)$. Легко проверить, что

$$A = ([z_i, z_j]) = S^T JS.$$

Но у матрицы S первая строка нулевая, поэтому $\det S = 0$, а значит, $\det A = 0$.

Литература

[А1] Адамар Ж. Неевклидова геометрия в теории автоморфных функций. М.—Л.: Гостехиздат, 1951.

[А2] Альфорс Л. Преобразование Мёбиуса в многомерном пространстве. М.: Мир, 1986.

[А3] Артин Э. Геометрическая алгебра. М.: Наука, 1966.

[Б1] Бердон А. Геометрия дискретных групп. М.: Наука, 1986.

[Б2] Берже М. Геометрия. Т. 1, 2. М.: Мир, 1984.

[Б3] Берже М., Берри Ж.-П., Пансю П., Сен-Реймон К. Задачи по геометрии с комментариями и решениями. М.: Мир, 1989.

[Б4] Брёнстед К. Введение в теорию выпуклых многогранников. М.: Мир, 1988.

[Б5] Буземан Г., Келли П. Проективная геометрия и проективные метрики. М.: Изд-во иностранной литературы, 1957.

[Г1] Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. М.: Наука, 1981.

[Г2] Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.—Л.: ГИТТЛ, 1941.

[Д1] Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В. Теорема Хелли. М.: Мир, 1968.

[Д2] Дарбу Г. Принципы аналитической геометрии. М.—Л.: ГРТТЛ, 1938.

[Д3] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука, 1986.

[Е] Ефимов Н. В. Высшая геометрия. М.: Наука, 1978.

[К1] Клейн Ф., Высшая геометрия. М.—Л.: ГОНТИ, 1939.

[К2] Клейн Ф. Неевклидова геометрия. М.—Л.: ОНТИ, 1936.

[К3] Клейн Ф. Элементарная геометрия с точки зрения высшей. Т. 2 (Геометрия). М.: Наука, 1987.

[К4] Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.: Наука, 1989.

[К5] Клеменс Г. Мозаика теории комплексных кривых. М.: Мир, 1984.

[К6] Коксетер Г. С. М. Введение в геометрию. М.: Наука, 1966.

[Л1] Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука, 1985.

[Л2] Лобачевский Н. И. Избранные труды по геометрии. М.: Изд-во АН СССР, 1956.

[Л3] Люстерник Л. А. Выпуклые фигуры и многогранники. М.: ГИТТЛ, 1956.

[Н1] Нестерович Н. М. Геометрические построения в плоскости Лобачевского. М.—Л.: ГИТТЛ, 1951.

[Н2] Норден А. П. Элементарное введение в геометрию Лобачевского. М.: ГИТТЛ, 1953.

[П1] Прасолов В. В. Геометрия Лобачевского. М.: МЦНМО, 2004.

[П2] Прасолов В. В. Конические сечения и проективная геометрия. М.: МК НМУ, 1993.

[П3] Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. МЦНМО, 2006.

[П4] Прасолов В. В., Шарыгин И. Ф. Задачи по стереометрии. М.: Наука, 1989.

[С1] Сальмон Ж. Конические сечения. СПб., 1860.

[С2] Сальмон Ж. Курс аналитической геометрии двух измерений. СПб., 1908.

[С3] Скотт П. Геометрии на трехмерных многообразиях. М.: Мир, 1986.

[С4] Смогоржевский А. С. О геометрии Лобачевского. М.: ГИТТЛ, 1957.

[Т1] Тихомиров В. М. Рассказы о максимумах и минимумах. М.: МЦНМО, 2006.

[Т2] Тихомиров В. М. Лекции по геометрии. М.: МК НМУ, 1993.

[Ш1] Шаль М. Руководство высшей геометрии. М., 1910.

[Ш2] Шаль М. История геометрии. М., 1883.

[Э] Энциклопедия элементарной математики. Т. 5. М.: Наука, 1966.

[Я] Яглом И. М., Болтянский В. Г. Выпуклые функции. М.: ГИТТЛ, 1951.

[A] Altshiller-Court N. Modern pure solid geometry. NY: Cheslea, 1964.

[B1] Baker H. F. An introduction to plane geometry. NY: Cheslea, 1971.

[B2] Baker H. F. Principles of geometry. V. 1—5. NY: Ungar, 1961.

[B3] Bankoff L. The metamorphosis of butterfly problem // Math. Mag. 1987. V. 60, №4. P. 195—210.

[B4] Black W. L., Howland H. C., and Howland B. A theorem about zig-zags between two circles. Amer. Math. Monthly.1974. V. 81. P. 754—757.

[B5] Beckman F. S., Quarles D. A. jr. On isometries of Euclidean spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 1953. V. 4. P. 810—815.

[D1] Darboux G. Sur le théorème fondamental de la géométrie projective // Math. Ann. 1880. V. 17. P. 55—61.

[D2] Dekster B. V., Wilker J. B. Simplexes in spaces of constant curvature // Geom. Dedicata. 1991. V. 38. P. 1—12.

[F1] Fenchel W. Elementary geometry in hyperbolic space. W. de Gruyter, Berlin–NY, 1989.

[F2] Fox Ch. The Pascal line and its generalizations // Amer. Math. Monthly. 1958. V. 65. P. 185—190.

[F3] Frankl P., Maehara H., Simplices with given 2-face areas // Europ. J. Comb. 1990. V. 11. P. 241—247.

[G1] Gerber L. Associated and perspective simplexes // Trans. Amer. Math. Soc. 1975. V. 201. P. 43—55.

[G2] Gray L. J., Wilson D. G. Nonnegative factorization of positive semidefinite nonnegative matrices // Linear Algebra and Appl. 1980. V. 31. P. 119—127.

[G3] Greenberg M. J. Euclidean and non-Euclidean geometry. NY: Freeman, 1994.

[G4] Grünbaum B., Shepard G. S. Descartes' theorem in n dimensions // Enseign. Math. 1991. V. 37. P. 11—15.

[H1] Haagerup U., Munkholm H. J. Simplices of maximal volume in hyperbolic n-space // Acta Math. 1981. V. 147. P. 1—11.

[H2] Honsberger R. A. A surprise from geometry // Math. Magazine. 1986. V. 59. P. 28—29.

[I] Iversen B. Hyperbolic geometry. Cambridge GB: Cambridge Univ. Press, 1992.

[L1] Lenz H. Über eine Satz von June Lester zur Charakterisierung euklidischer Bewegungen // J. Geometry. 1987. Bd. 28. P. 197—201.

[L2] Lester J. A. Euclidean plane point-transformations preserving unit area or unit perimeter // Arch. Math. 1985. V. 45. P. 561—564.

[L3] Lester J. A. Martin's theorem for Euclidean n-space and a generalization to the perimeter case // J. Geom. 1986. V. 27. P. 29—35.

[M] Milnor J., Hyperbolic geometry: the first 150 years // Bull. Amer. Math. Soc. 1982. V. 6. P. 9—24.

[P] Perline R. Non-Euclidean flashlights // Amer. Math. Monthly. 1996. V. 103. P. 377—385.

[R1] Ramsay A., Richtmyer R. D. Introduction to hyperbolic beometry. Springer, Berlin etc, 1995.

[R2] de Rham G. Sur les polygones générateurs de groupes fuchsiens // L'Enseign. Math. 1971. V. 17. P. 49—61.

[S1] Salmon G. A treatise on conic sections, 6th ed. London: Longmans, 1879.

[S2] Salmon G. A treatise on analytic geometry of three dimensions. Chelsea, New York, 1965.

[Th] Thébault V. Parmi les belles figures de la géométrie dans l'espase (Géométrie du tétraèdre). Libraire Vuibert, Paris, 1955.

Предметный указатель

абсолют, 116, 247
автополярный треугольник, 220
алгебраическая кривая, 204
аргумент, 20
аффинное многообразие, 34
— пространство, 31

базис, 29
большая окружность, 107

вектор, 28
векторное пространство, 27, 28
выпуклая линейная комбинация, 59
— оболочка, 39
выпуклое замыкание, 49
— множество, 39
выпуклый многогранник, 177

гармоническая четверка точек, 218
геодезическая, 108
геометрия сферическая, 107
гипербола, 79
гиперболическая окружность, 131
— теорема косинусов, 130
— — Пифагора, 130
— — синусов, 130
гиперболический косинус, 125
— пучок, 147
гиперболическое движение, 146
гиперплоскость, 33, 75
гиперсфера, 251
гиперцикл, 148

движение несобственное, 124
— собственное, 124
двойное отношение, 22, 65, 232
двойное отношение плоскостей, 68
двойственная конфигурация, 207
— кривая, 208
двойственные многогранники, 181
дедуктивный метод, 13
дефект, 132
директриса, 82
длина кривой на сфере, 108
дробно-линейное преобразование, 119

евклидово n-мерное пространство, 31
— пространство, 29
единичная окружность, 119

задача Ньютона, 23
— о бабочке, 27, 90

изоморфные векторные пространства, 28
инверсия, 119
инволюция, 215
индуцированная метрика, 250
инцидентные грани, 181

канонический базис, 29
каноническое уравнение, 82
касательная гиперплоскость, 94
квадрика, 94
кватернионная модель пространства Лобачевского, 251
комплексная проективная плоскость, 125
комплексно сопряженное число, 20
комплексное проективное пространство, 200
— число, 20

конус, 94
— вращения, 94
конфокальные квадрики, 225
— коники, 222
координаты, 16, 27

лемма Каратеодори, 59
— Радона, 59
линейная комбинация, 29
линейное отображение, 28
— подпространство, 28
— пространство, 28
Лобачевского функция, 266

матрица, 35
метрическое пространство, 16
минор, 39
модель Клейна, 116
— Пуанкаре в верхней полуплоскости, 123
— — в круге, 122
модуль, 20
модулярная группа, 241

неравенство треугольника, 29

объем параллелепипеда, 36
однородные координаты, 75
окружность, 18
— большого круга, 107
определитель, 19, 39
— Грама, 39
ориентированная площадь, 37
ориентированный объем, 38
орисфера, 251
орицикл, 148
ортогональная матрица, 32
ортогональное преобразование, 32
ортонормированные векторы, 30
ортоцентрический симплекс, 44
ось параболы, 82

парабола, 80
параболический пучок, 147
параболическое движение, 146
параллелепипед, 35
параллельная прямая, 18
параллельные лучи в геометрии Лобачевского, 128
перенос Клиффорда, 143
площадь параллелограмма, 20
полюс, 110
поляра, 110, 205
полярное соответствие, 110
правильный многогранник, 194
— симплекс, 40
предельная окружность, 148
проективное преобразование, 76
— пространство, 75
— соответствие, 66
простое отношение, 22
прямая Гаусса, 24
— Лобачевского в модели Клейна, 115
— Паскаля, 92
— Эйлера, 23
прямой круговой конус, 94
прямоугольный параллелепипед, 35
пучок прямых, 147

радикальная ось, 26
размерность, 29
ранг, 39
расстояние, 16, 29
расходящиеся прямые, 147
рациональная параметризация, 227

сверхпараллельные прямые, 147
символ Шлефли, 194
— — правильного многогранника, 192
симплекс, 40
скалярное произведение, 29
софокусные квадрики, 225
— коники, 222
среднее гармоническое точек, 203
— гармоническое чисел, 203
стереографическая проекция, 121
сфера, 40

сфера в пространстве Лобачевского, 251
сферическая геометрия, 107
— окружность, 143
— теорема косинусов, вторая, 112
— — — первая, 111
— — синусов, 111
сферический двуугольник, 111

теорема Брианшона, 211
— Гильберта, 163
— Дезарга, 72
— Киркмана, 92
— Коши, 188
— Крейна—Мильмана, 163
— о зигзаге, 230
— Паппа, 71
— Паскаля, 24, 92, 211, 233
— Пифагора, 21
— Понселе, 228
— — для треугольника, 236
— принцессы Елизаветы, 26
— Пуанкаре, 245
— Сильвестра, 201
— Фалеса, 22
теорема Хана—Банаха, 165
— Хелли, 60
— Штейнера, 92
точки общего положения, 71, 77

угол параллельности, 128

фокус, 82
формула Коши, 196
— Лагерра, 203
— Штейнера—Минковского, 197
формулы Крамера, 47
фундаментальная область, 240
функция Жуковского, 222
— Лобачевского, 266

шар, 40
шестиугольник Брианшона, 98

эквидистанта, 148
эксцентриситет, 82
элемент длины, 131
эллипс, 79
эллипсоид, 94
эллипсоидальные координаты, 226
эллиптический пучок, 147
эллиптическое движение, 146

Именной указатель

Адамар Ж. (Hadamard J.), 160
Александров П. С., 160
Аполлоний, 7, 17, 79, 169
Арнольд В. И., 170
Архимед, 7, 49, 160, 169

Банах (Banach S.), 160
Бельтрами Э. (Beltrami E.), 11, 170
Биркгоф Г. Д. (Birkhoff G. D.), 256
Бляшке В. (Blaschke W.), 49
Бойяи Я. (Bolyai J.), 11, 24, 170, 258
Брианшон Ш. (Brianchon Ch.), 211
Бурбаки Н. (Bourbaki N.), 9, 160, 254

Валле-Пуссен Ш. (Vallée-Poussin C. J.), 52
Вейль Г. (Weyl H.), 9, 15, 49, 256
Виет Ф. (Viète F.), 204
Винер Н. (Wiener N.), 160
Вольтерра В. (Volterra V.), 160

Галилей Г. (Galilei G.), 18, 169, 171
Гамильтон У. Р. (Hamilton W. R.), 33, 251
Гаусс К. Ф. (Gauss C. F.), 11, 24, 25, 170, 257, 258
Гельфанд И. М., 5, 7, 160
Гильберт Д. (Hilbert D.), 11, 14, 160, 254, 256

Данделен Ж. (Dandelin G.), 89
Дезарг Ж. (Desargues G.), 70, 72, 73, 169, 210
Декарт Р. (Descartes R.), 17, 26, 169

Евклид, 7, 13, 169, 256

Елизавета (Elizabeth), 26

Кеплер И. (Kepler J.), 18, 169, 172
Кетле А. (Quetelet A.), 89
Клейн Ф. (Klein F.), 9, 11, 15, 63, 170, 256
Клеро А. К. (Clairaut A.-C.), 32
Клиффорд У. (Clifford W.), 252
Колмогоров А. Н., 7, 15, 160, 254, 256
Котес Р. (Cotes R.), 203
Коши О. (Cauchy A.), 49, 160
Крелль А. Л. (Crelle A. L.), 258
Кэли А. (Cayley A.), 11, 63, 170

Лагерр Э. Н. (Laguerre E. N.), 203
Лейбниц Г. (Leibniz G.), 23
Лобачевский Н. И., 11, 16, 24, 170, 252, 257, 258
Люстерник Л. А., 161

Менелай, 11
Мёбиус А. (Möbius A.), 11
Миндинг Ф. Г. (Minding F.), 258
Минковский Г. (Minkowski H.), 49, 52, 160, 170

фон Нейман Дж. (von Neumann J.), 160
Ньютон И. (Newton I.), 23, 25, 169, 171, 172, 174, 203

Папп, 17, 70, 71, 73, 210
Паскаль Б. (Pascal B.), 24, 169, 211
Пеано Дж. (Peano G.), 160
Пифагор, 7, 16, 169
Понселе Ж.-В. (Poncelet J.-V.), 70
Пуанкаре А. (Poincaré H.), 11, 122, 170, 256

Риман Б. (Riemann B.), 11, 16
Рисс Ф. (Riesz F.), 160

Сильвестр Дж. (Sylvester J.), 201
Сперри Р. (Sperry R.), 5

Урысон П. С., 160

Фалес, 7, 169
Ферма П. (Fermat P.), 17, 169
Фредгольм И. (Fredholm I.), 169
Фреше Р. М. (Fréchet R. M.), 160

Хан Г. (Hahn H.), 160
Хаусдорф Ф. (Hausdorff F.), 160
Хелли Э. (Helly E.), 160, 165
Хирцебрух Ф. (Hirzebruch F.), 9

Чева Г. (Ceva G.), 11

Шмидт Э. (Schmidt E.), 160
Шнирельман Л. Г., 161
Штейнгауз Х. (Steinhaus H.), 160
Штейнер Я. (Steiner J.), 211
Шур И. (Schur I.), 15, 256

Эйлер Л. (Euler L.), 21, 24, 25, 169
Эйнштейн А. (Einstein A.), 174