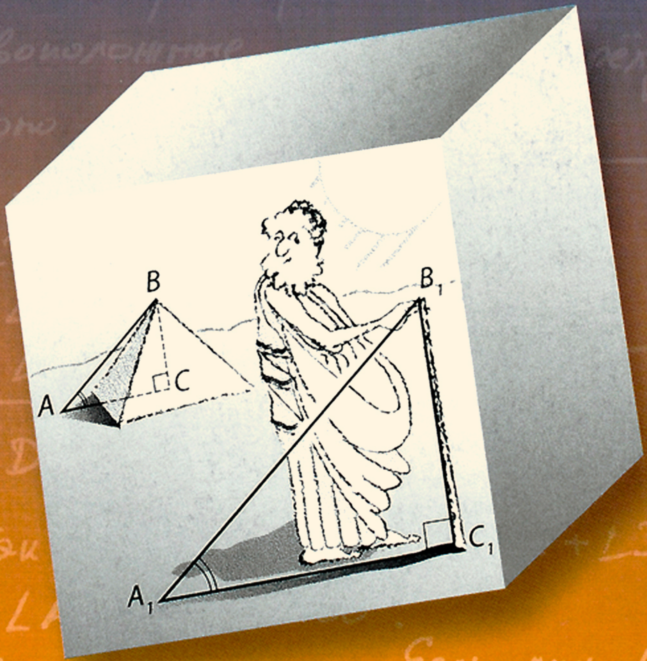
Математика · Элективные курсы

А. Х. Шахмейстер

Геометрические задачи на экзаменах

Часть 1. Планиметрия



Для тех, кто хочет учиться

А. Х. Шахмейстер

Геометрические задачи на экзаменах

Часть 1. Планиметрия

ПОСОБИЕ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ,
АБИТУРИЕНТОВ И ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ

С.-Петербург
Москва
2015

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я71.6
Ш 32

Редактор:
Кандидат пед. наук, доцент кафедры
математики МИОО А. В. Семенов.

Рекомендовано
Московским институтом открытого образования (МИОО)
и Московским центром непрерывного математического
образования (МЦНМО) в качестве пособия для школьников,
абитуриентов и преподавателей.

Шахмейстер А.Х.
Ш32 Геометрические задачи на экзаменах. Часть 1. Планиметрия / А.Х. Шахмейстер — СПб.: «Петроглиф» : «Виктория плюс» : М.: Издательство МЦНМО, 2015.—392с.: илл.—
ISBN 978-5-98712-083-5, ISBN 978-5-91673-155-2,
ISBN 978-5-4439-0347-7.

Данное пособие предназначено для углубленного изучения школьного курса математики, содержит большое количество разноуровневого тренировочного материала. В книге представлена программа для проведения элективных курсов в профильных и предпрофильных классах. Пособие адресовано широкому кругу учащихся, абитуриентов, студентов педагогических вузов, учителей.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я71.6

ISBN 978-5-98712-083-5 («Петроглиф»)
ISBN 978-5-91673-155-2 («Виктория плюс»)
ISBN 978-5-4439-0347-7 (МЦНМО)

Посвящается памяти Заслуженных учителей России:

Бориса Германовича Зива
Иосифа Яковлевича Веребейчика
Арона Рувимовича Майзелиса
Таисии Ивановны Курсиш
Владимира Леонидовича Ильина

Предисловие

Предлагаемая серия книг адресована широкому кругу учащихся средних школ, классов и школ с углубленным изучением математики, абитуриентов, студентов педагогических вузов, учителей.

Книги можно использовать как самостоятельные учебные пособия (самоучители), как задачники по данной теме и как сборники дидактических материалов. Каждая книга снабжена программой элективного курса.

Для учащихся можно предложить следующую схему работы: прочитав вступление и рассмотрев примеры решения, самостоятельно решать тренировочные работы, затем посмотреть решения и, осмыслив их, попробовать решить проверочные работы, проверяя их решения по книге и т.д.

Книги полностью подходят для самостоятельного овладения той или иной темой и рассчитаны на последовательное обучение от начального уровня до уровня, необходимого абитуриентам.

Для учителей эти книги предоставляют широкий выбор приемов и методов работы:

Это могут быть задания учащимся для самостоятельной работы с последующим контролем учителя.

Возможно использование книги как задачника для работы в классе и для домашних заданий.

Подбор материала позволяет существенно дифференцировать уровень требований к учащимся при проведении контрольных и зачетных работ.

Уровень сложности и объем материала в книгах серии, безусловно, избыточен, и учитель должен сам выбирать сложность и объем материала в соответствии с возможностями учащихся и задачами, стоящими перед ними.

А. Х. Шахмейстер

Предисловие редактора

Перед вами уникальная книга «Геометрические задачи на экзаменах. Часть I. Планиметрия». Серии «Математика. Элективные курсы» по школьному курсу для тех, кто хочет учится и может научиться. В действительности это удивительная энциклопедия различных методов решения задач, кладовая педагогического и методического опыта преподавания сложных тем школьного курса математики. Это настоящий самоучитель, в котором с «разных позиций» рассматриваются основные идеи решения геометрических задач по планиметрии. Это готовые занятия математических кружков и факультативов по интересным математическим темам. Большое количество разнообразных задач, методов доказательства, интересных планиметрических фактов и теорем позволит учащемуся «прочувствовать», геометрически образно представить и «увидеть» их естественное применение.

Книга адресована широкому кругу читателей:
– интересующемуся ученику обычного класса;
– ученику профильного или специализированного класса;
– студенту, изучающему высшую математику;
– учителю, преподающему школьный курс математики.

Ценность книги заключается в том, что решенными заданиями приходит понимание трудных для восприятия математических понятий, изучаемых в школе. Многие факты и идеи, заложенные в систему задач, тренировочных, самостоятельных, безусловно, могут быть использованы для подготовки к экзаменам, творческим работам и олимпиадам.

Желательно подробно разобраться в кратком теоретическом материале, рассмотренном в качестве повторения в первых параграфах книги, а затем обратить особое внимание на доказательства: выделить для себя, что дано, что необходимо доказать, какой чертеж наиболее точно отражает условия задачи.

Существенно помогает при обучении решению задач большое количество лабораторных, блиц-самостоятельных, упражнений на готовых чертежах, задач-ловушек, самостоятельных и тренировочных работ.

Планомерная работа с материалами книг этой серии вместе с материалами учебных методических комплектов дает наибольший эффект понимания и усвоения содержания школьного курса математики.

А. В. Семенов

Программы элективных курсов для учащихся 8-11 классов

Элективный курс №1. 25 уроков (8 класс)

№№ уроков	Название темы В скобках указаны номера заданий
1–4	**Треугольники и параллелограммы** (стр. 13 – 27) Признаки равенства треугольников. Параллельные прямые. Медианы, биссектрисы, высоты треугольника их свойства. Четырехугольники: параллелограмм, ромб, прямоугольник, квадрат, свойства и признаки.
5–10	**Задачи на доказательство. Моделирование условий** (стр. 28 – 70) (1, 3, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 15, 16, 18, 21, 23, 24, 25).
11–15	**Теорема Фалеса, подобие** (стр. 71 – 85) Окружность и прямая, вписанные и центральные углы, свойства касательных к окружности, треугольник и окружность. Признаки подобия треугольников, подобие различных фигур.
16–20	**Практикум 1** (2, 3, 6, 7, 8, 9) (стр. 76 – 100) **Лабораторная работа 1** **Практикум 2** (1, 2, 3, 4, 5)
21–25	**Лабораторная работа 1** (стр. 137 – 164) Формулы площадей треугольника, параллелограмма, четырехугольника (через диагонали).

Элективный курс №2. 20 уроков (9 класс)

1–2	**Самостоятельная работа 1** (стр. 109) **Трапеция** (стр. 166 – 169)
3–7	**Практикум 4** (1, 2, 3, 4, 5, 7, 8) (стр. 170 – 188) **Тренировочная работа 1** (1 (а, в, г, д), 2, 3) (стр. 111) **Самостоятельная работа 2** (стр. 165)
8–10	**Метрические соотиошения в окружиости** (стр. 200 – 238) **Практикум 5** (2, 4, 5)
11–15	**Тренировочная работа 2** (1, 2, 3, 4) (стр. 189 – 190) **Блиц-самостоятельные работы** (частично) (стр. 235) **Лабораторная работа 1** (частично) (стр. 110)
16–20	**Средние величины** (1, 2, 3) (стр. 239 – 260) **Практикум 6** (2, 4, 5) **Тренировочная работа 3** (1, 4) (стр. 218) **Самостоятельная работа 3 (Моделирование...)** (стр. 193 – 229)

Элективный курс №3. 20 уроков (обобщение)

№№ уроков	**Название темы** В скобках указаны номера заданий
1–5	Теория (обобщение из разных разделов): Треугольники – свойства, признаки равенства. Четырехугольники – свойства, признаки. Окружность и многоугольники. Подобие, признаки, свойства. Площади фигур. Правильные многоугольники.
6–10	**Тренировочная работа 4** (1, 2, 4) (стр. 261 – 263) **Тренировочная работа 5** (2, 4)
11–15	**Метрические соотношения в окружности** (стр. 200 – 217) **Практикум 5**
16–20	**Итоговая самостоятельная работа 1** (2, 5, 7, 8, 10) (стр. 341 – 355) **Итоговая самостоятельная работа 2** (1, 3, 5, 6, 8, 9, 10) **Итоговая самостоятельная работа 3** (1, 2, 3, 6, 7, 8, 10)

Программа разработана по материалам книги заслуженным учителем РФ Е. Б. Лившицем.

Авторский элективный курс №1. 58 – 66 уроков

№№ уроков	**Название темы.** В скобках указаны номера заданий
1–2	**Введение** (стр. 9 – 12)
3 – 4 (+1)	Основные определения и теоремы (стр. 13 – 27)
5–6 (+1)	**Задачи на доказательство** (стр. 28 – 41) Особенности моделирования текстовых условий задач (6, 12, 13, 15, 17, 20)
7–10	**Решение задач на доказательство** (стр. 42 – 70) (3, 6, 7, 9, 11, 14, 18, 21, 22, 23, 24, 25), остальные — задание на дом
11–12 (+1)	**Теорема Фалеса, подобие** (стр. 71 – 85) Тригонометрические отношения: в прямоугольном треугольнике, в треугольнике (1, 2, 3, 4, 5, 6)
13–15 (+1)	**Практикум 1** (2, 3, 4, 6, 8, 10) (стр. 88 – 108) (1, 5, 7, 9) — задание на дом
16–18	**Метрические отношения в прямоугольном треугольнике** (стр. 124 – 152) **Практикум 2** (1, 2, 3, 4, 5) **Теорема Стюарта**

№№ уроков	Название темы В скобках указаны номера заданий	
19–23 (+1)	**Практикум 3** (2, 3, 4, 5) (1, 6, 7) — задание на дом	(стр. 158 – 164)
24–25	**Самостоятельная работа 1** Противоположный вариант — задание на дом	(стр. 109)
26–29	**Трапеция** **Практикум 4** (1, 2, 3, 4, 5, 7, 10), остальные — задание на дом	(стр. 166 – 188)
30–31	**Тренировочная работа 1** (1, 2, 3), (4) — задание на дом	(стр. 111 – 123)
32–33	**Самостоятельная работа 2**	(стр. 165)
34–37	**Метрические отношения в окружности** **Практикум 5** (1, 2, 5), (3, 4) — задание на дом **Тренировочная работа 2**	(стр. 200 – 217) (стр. 189 – 199)
38–40 (+1)	**Блиц-самостоятельные работы** По выбору, но не менее пяти работ, остальные — задание на дом. **Лабораторая работа 1** **Лабораторая работа 2** **Лабораторая работа 3** По одному варианту на занятии, остальные — задание на дом	(стр. 235 – 236) (стр. 110) (стр. 137) (стр. 153)
41–44 (+1)	**Средние величины.** Неравенства о средних (1, 2, 4), (3) — задание на дом. **Практикум 6** (2, 4, 5), (1, 3) — задание на дом	(стр. 239 – 260)
45–48	**Решение комбинированных задач на закрепление полученных навыков** **Тренировочная работа 3** (1, 4), остальные — задание на дом **Самостоятельная работа 3** (1, 3), остальные — задание на дом	(стр. 261 – 210)
49–52 (+1)	**Тренировочная работа 4** **Самостоятельная работа 4** **Тренировочная работа 5** **Самостоятельная работа 5** **Тренировочная работа 6**	(стр. 261) (стр. 263) (стр. 282) (стр. 284) (стр. 305)
53–58	**Итоговые самостоятельные работы** (задания по выбору учителя)	(стр. 341 – 355)

Авторский элективный курс №2. 64 урока (повторение для 10-11 классов)

№№ уроков	Название темы. В скобках указаны номера заданий
1–8	**Треугольники и параллелограммы** (стр. 13 – 123) **Практикум 1** **Самостоятельная работа 1** **Лабораторая работа 1** **Тренировочная работа 1**
9–20	**Метрические отношения в прямоугольном треугольнике** (стр. 124 – 165) **Практикум 2** **Лабораторая работа 2** **Лабораторая работа 3** **Практикум 3** **Самостоятельная работа 2**
21–27	**Трапеция** (стр. 166 – 199) **Практикум 4** **Тренировочная работа 2** **Самостоятельная работа 3**
28–40	**Метрические отношеиия в окружности** (стр. 200 – 238) **Упражнения на готовых чертежах 1** **Практикум 5** **Тренировочная работа 3** **Упражнения на готовых чертежах 2** **Блиц-самостоятельные работы** **Лабораторая работа 4**
41–64	**Решение комбинированных задач на закрепление полученных навыков** (стр. 261 – 340) **Тренировочная работа 4. Самостоятельная работа 4** **Тренировочная работа 5. Самостоятельная работа 5** **Треиировочная работа 6. Самостоятельная работа 6** **Тренировочиая работа 7. Самостоятельная работа 7** **Домашняя тренировочная работа** **Самостоятельная работа 8**

Разумеется, учитель может составить свой элективный курс, комбинируя и выбирая блоки тем, или уменьшая количество часов и задач в блоке, распределяя, если нужно, по классам. Предполагается, что книга есть у каждого учащегося.

*Математика — это специфический язык,
который мы используем для моделирования
явлений действительности.*

Введение[1]

Об аксиоматике

Наиболее трудной темой в геометрии является введение основных неопределяемых понятий и аксиом. В период активного повторения имеет смысл обратиться к этой теме более подробно.

Трудность в восприятии идей аксиоматики в том, что для учащихся непонятно, для чего выделять **очевидные** для них свойства (аксиомы) взаимоотношений между основными понятиями. Это исторически связано с тем, что они формировались из непосредственной практики и наблюдений за естественными явлениями природы и опыта их применения.

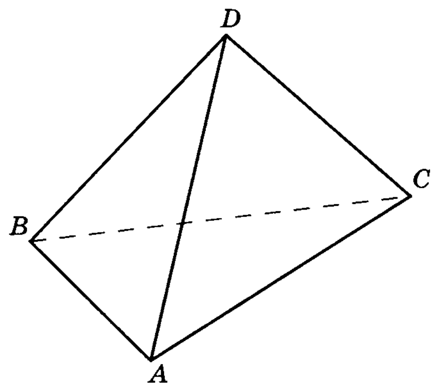
В геометрии под основными понятиями (позже станет понятно, почему они принципиально не могут быть определены) понимаются понятия точки, прямой и плоскости (а также некоторые другие).

Пример 1. Рассмотрим треугольную пирамиду $DABC$ как модель, на которой реализуются ряд принципов аксиоматического построения геометрии.

Будем под «точками» понимать вершины пирамиды A, B, C, D.

Под «прямыми» мы будем понимать ребра AB, BC, AC, AD, BD, CD.

Под «плоскостями» мы будем понимать грани DAB, DBC, DAC, ABC.



Под **аксиомами** обычно понимаются правила взаимоотношений между основными понятиями (как правила игры в футболе, шахматы...). Рассмотрим примеры двух аксиом.

[1] При первом прочтении это введение можно опустить.

1) Через любые две «точки» можно провести «прямую».
2) Если через две «точки» можно провести «прямую», то только одну.

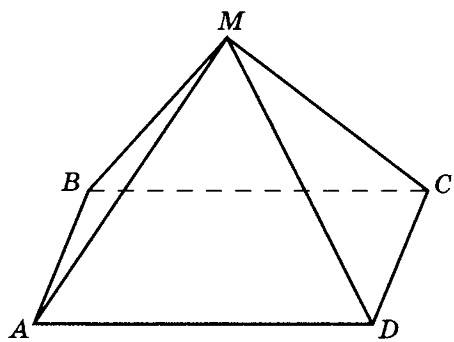
Для треугольной пирамиды, где «точки» — вершины, «прямые» — ребра, «плоскости» — грани, первая и вторая аксиомы (правила игры) выполняются (справедливы).

Пример 2. Рассмотрим другой пример. Пусть дана четырехугольная пирамида $MABCD$.

Здесь под «точками» будем понимать вершины пирамиды A, B, C, D, M.

Под «прямыми» — ребра AB, BC, CD, AD, AM, BM, CM, DM.

Под «плоскостями» — грани ABM, BCM, DCM, DAM, $ABCD$.



Тогда для такой модели основных понятий первая аксиома не выполняется. Действительно, не через любые две точки можно провести прямую, т. е. не любые две вершины соединяются ребрами, например AC, BD ребрами не являются.

Вывод. *Содержание основных понятий* (т. е. то, что можно понимать под точкой, прямой, плоскостью) *косвенным образом определяется системой аксиом* (правилами взаимоотношений между основными понятиями). Поэтому *основные понятия всегда принципиально не определяемы*, так как их возможное содержание (наполнение) зависит от системы аксиом.

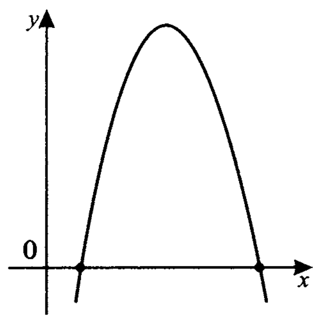
Пример 3. Можно рассмотреть пример и иной модели, реализующей другое содержание основных понятий.

а) Будем понимать под «точками» координатные пары $(x; y)$, причем, если точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ таковы, что $x_1 = x_2$, то значит и $y_1 = y_2$. Если же $y_1 = y_2$, то отсюда вовсе не следует, что $x_1 = x_2$. Итак, «точками» считаем любые точки координатной плоскости, не принадлежащие одной прямой, параллельной оси $0y$.

б) Под «прямыми» будем понимать кривые, заданные функцией $y = x^2 + px + q$.

Проверим, какие из аксиом для них выполнимы.

Первая аксиома, утверждающая, что через любые две «точки» можно провести «прямую», очевидно выполняется, так как для любых x_1, x_2, y_1, y_2 существуют числа p и q, для которых



$$\left.\begin{array}{ll} A(x_1;y_1) & y_1 = x_1^2 + px_1 + q \\ B(x_2;y_2) & y_2 = x_2^2 + px_2 + q \end{array}\right|,$$

т. е. $\begin{array}{l} A \in \Gamma y = x^2 + px + q \\ B \in \Gamma y = x^2 + px + q \end{array}$.

Вторая аксиома, утверждающая, что если через две «точки» можно провести «прямую», то только одну, также выполняется, так как при $x_1 \neq x_2$ система уравнений $\begin{cases} y_1 = x_1^2 + px_1 + q \\ y_2 = x_2^2 + px_2 + q \end{cases}$ есть система линейных уравнений относительно p и q, и она имеет единственное решение.

Таким образом, кривая («прямая») с найденными коэффициентами $y = x^2 + px + q$ будет единственной. Значит, под «прямой» можно понимать параболу вида $y = x^2 + px + q$, и обычные аксиомы (правила) будут справедливы.

Примечания. 1. В рамках этой модели никакие обычные прямые «прямыми» не являются, так как не являются графиками парабол.

2. Известны и другие примеры моделей, реализующих иную систему аксиом. Например, с этим можно столкнуться в геометрии Н. И. Лобачевского (1792–1856), Г. Ф. Римана (1826–1866) и т. д.

Как работать с этой книгой

Сначала предлагается краткое теоретическое воспоминание (для некоторых, возможно, эта информация незнакома). Затем показывается, как применять теорию к решению задач.

Роль чертежа в формировании геометрической интуиции трудно переоценить. Поэтому переход от текстовой формы записи условий геометрической задачи к геометрическому чертежу, да еще наглядному, верному, всегда очень не прост, так как отражает весьма мучительный процесс точного соотнесения условий задачи и возможного геометрического чертежа. (Это, зачастую, сложно и при переходе от геометрического чертежа к текстовому описанию условий задачи — кстати, очень полезное упражнение.)

Учитывая сложность формирования геометрического воображения, особенно пространственного, процесс решения задач в книге, зачастую, разбит на этапы:

а) на первом дано только текстовое условие задачи;

б) на втором, если не очень получается самостоятельно формализовать условие, предлагается возможный (иногда только единственный возможный) чертеж с уточняющими данными в виде «дано/найти»;

в) и только на третьем этапе рассматривается решение задачи с той или иной степенью подробности.

После окончательного ознакомления с решением задачи очень даже полезно для себя отметить, что и на каком этапе вызвало или вызывает трудности, что нового вы узнали. Такой подход существенно углубит, облегчит и ускорит в дальнейшем процесс «научения» и желателен при решении любых задач.

Разумеется, полный обзор всех теоретических положений элементарной геометрии школьного курса здесь не приводится.

Треугольники и параллелограммы

Основные понятия и утверждения

Параллельные и перпендикулярные прямые

Определение 1. Две прямые на плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.

Примечание. По определению, две прямые называются пересекающимися, если они имеют *только* одну общую точку. Значит, если мы рассматриваем непересекающиеся прямые, то это возможно только в двух случаях:
а) две прямые не имеют ни одной общей точки;
б) две прямые совпадают.

Некоторые вопросы логики доказательства

Определение 2. Если из истинности утверждения A следует истинность утверждения B, то такая логическая цепочка называется теоремой.

Записывается это так:

из (A — И) следует, что (B — И),
или (A — И) $\Rightarrow$ (B — И), где И — истина.

Пусть A — утверждение о том, что рассматриваемые углы вертикальны; B — утверждение о том, что рассматриваемые углы равны.
Рассмотрим пример логической цепочки — «любые вертикальные углы равны». Это теорема.

Определение 3. Для верной логической цепочки (A — И) $\Rightarrow$ (B — И) (теоремы) говорят, что истинность утверждения A достаточна для истинности утверждения B, а истинность утверждения B необходима для истинности утверждения A.

Также говорят, что (A — И) есть признак (B — И),
а (B — И) есть свойство (A — И),
т. е. истинность A есть признак истинности B,
а истинность B есть свойство истинности A.

Очевидно, что логическая цепочка $(B - \text{И}) \Rightarrow (A - \text{И})$ в данном случае ложная, т. е. из того, что углы равны, совсем не следует, что они вертикальные.

Таким образом, вертикальность углов есть *признак* равенства углов, но не *свойство.* Иначе говоря, вертикальность углов есть *достаточное* условие для их равенства, но не *необходимое.*

Разумеется, есть примеры и иных теорем, для которых
из $(A - \text{И})$ следует $(B - \text{И})$ и одновременно
из $(B - \text{И})$ следует $(A - \text{И})$,
т. е. $(A - \text{И}) \Leftrightarrow (B - \text{И})$ (утверждения равносильны).

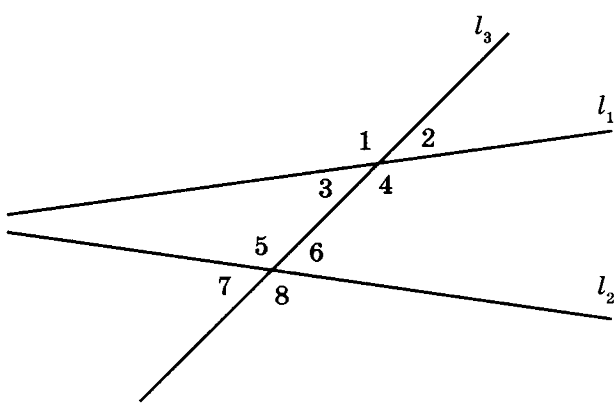
В этом случае говорят о *необходимых и достаточных условиях* истинности утверждений A и B. Иногда говорят о справедливости *прямой и обратной* теорем.

Виды углов и их свойства

Пусть l_1 и l_2 — различные прямые, l_3 — секущая.

Напомним, какие из углов, обозначенных на чертеже, являются: вертикальными, соответственными, внутренними накрест лежащими, внешними накрест лежащими, смежными, внутренними односторонними, внешними односторонними.

Отметим также их свойства при некоторых условиях.



Вертикальные углы: $\angle 1 - \angle 4$; $\angle 2 - \angle 3$; $\angle 5 - \angle 8$; $\angle 7 - \angle 6$.	Соответственные углы: $\angle 1 - \angle 5$; $\angle 3 - \angle 7$; $\angle 2 - \angle 6$; $\angle 4 - \angle 8$.	Внутренние накрест лежащие углы: $\angle 3 - \angle 6$; $\angle 5 - \angle 4$. Внешние накрест лежащие углы: $\angle 1 - \angle 8$; $\angle 2 - \angle 7$.

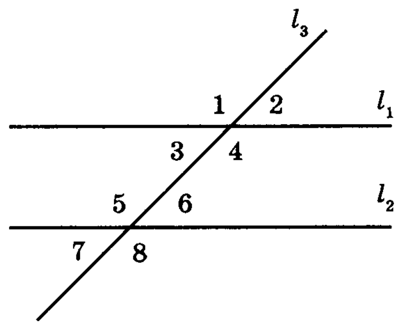
Свойства параллельности: пары соответственных, внутренних накрест лежащих, внешних накрест лежащих углов — равны между собой, если прямые l_1 и l_2 параллельны.

Пары вертикальных углов равны всегда.

Иными словами, если $l_1 \parallel l_2$, то

а) $\angle 1 = \angle 5$; $\angle 3 = \angle 7$; $\angle 2 = \angle 6$; $\angle 4 = \angle 8$.

б) $\angle 3 = \angle 6$; $\angle 5 = \angle 4$; $\angle 1 = \angle 8$; $\angle 2 = \angle 7$.



Для пересекающихся прямых всегда

в) $\angle 1 = \angle 4$; $\angle 2 = \angle 3$; $\angle 5 = \angle 8$; $\angle 7 = \angle 6$.

Смежные углы: $\angle 1 - \angle 2$; $\angle 1 - \angle 3$; $\angle 3 - \angle 4$; $\angle 2 - \angle 4$; $\angle 5 - \angle 6$; $\angle 5 - \angle 7$; $\angle 7 - \angle 8$; $\angle 6 - \angle 8$.	Внутренние односторонние углы: $\angle 3 - \angle 5$; $\angle 4 - \angle 6$. Внешние односторонние углы: $\angle 1 - \angle 7$; $\angle 2 - \angle 8$.

Свойства параллельности: пары внутренних односторонних, внешних односторонних углов — в сумме равны 180°, если прямые l_1 и l_2 параллельны.

Пары смежных углов всегда в сумме равны 180°.

Иными словами, если $l_1 \parallel l_2$, то

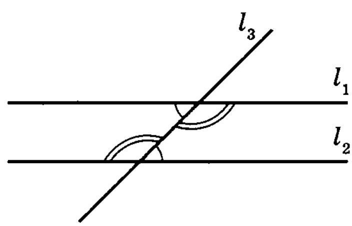
а) $\angle 3 + \angle 5 = 180^\circ$;
$\angle 4 + \angle 6 = 180^\circ$;
$\angle 1 + \angle 7 = 180^\circ$;
$\angle 2 + \angle 8 = 180^\circ$.

Для любых пересекающихся прямых

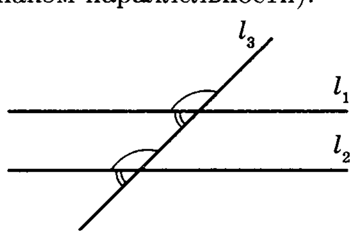
б) $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$; $\angle 5 + \angle 6 = 180^\circ$;
$\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$; $\angle 5 + \angle 7 = 180^\circ$;
$\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$; $\angle 7 + \angle 8 = 180^\circ$;
$\angle 4 + \angle 2 = 180^\circ$. $\angle 6 + \angle 8 = 180^\circ$.

Напомним некоторые известные признаки и свойства параллельности прямых.

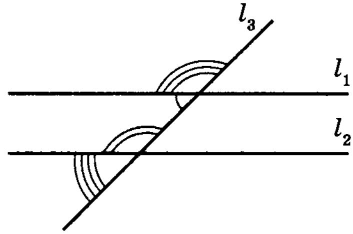
Теорема 1. Для того чтобы две различные прямые были параллельными, необходимо и достаточно, чтобы при пересечении их секущей образованные при этом внутренние накрест лежащие углы были равны (т. е. равенство внутренних накрест лежащих углов является и свойством, и признаком параллельности).



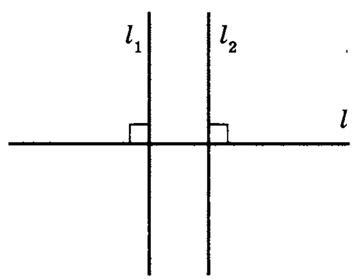
Теорема 2. Для того чтобы две различные прямые были параллельными, необходимо и достаточно, чтобы при пересечении их секущей образованные при этом соответственные углы были равны (т. е. равенство соответственных углов является и свойством, и признаком параллельности).



Теорема 3. Для того чтобы две различные прямые были параллельными, необходимо и достаточно, чтобы при пересечении их секущей образованные при этом односторонние углы в сумме были равны 180° (т. е. равенство суммы односторонних углов 180° является и свойством, и признаком параллельности).



Теорема 4. Две различные прямые, перпендикулярные одной прямой, параллельны (т. е. параллельность двух прямых является свойством перпендикулярности двух прямых третьей прямой).



Теорема 5. Если одна из двух различных параллельных прямых перпендикулярна третьей прямой, то и другая прямая также будет перпендикулярна этой прямой (т. е. перпендикулярность двух параллельных прямых третьей прямой есть свойство перпендикулярности этих прямых данной прямой).

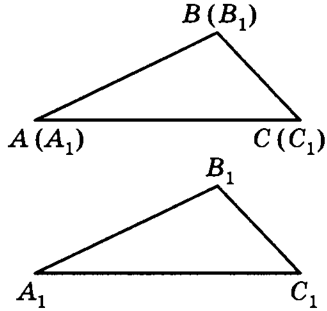
Примечание. В дальнейшем в книге (см., например, с. 28–68, 109–121, 145–148, 234–239, 251–254, 309–312, 342–355) вопросы доказательства тех или иных утверждений достаточно подробно обсуждаются.

Равенство геометрических фигур

Определение 4. Две геометрические фигуры называются равными, если их можно совместить при наложении.

В случае, если фигуры — треугольники, из $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$ ($\equiv$ — знак совмещения) следует, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, а значит для элементов треугольников:

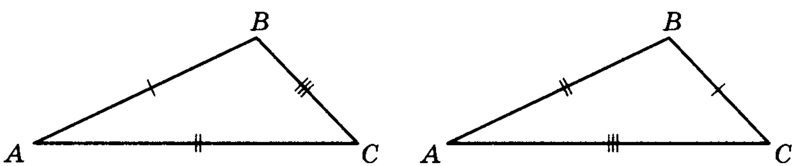
$$\left.\begin{array}{l} AB \equiv A_1B_1 \\ AC \equiv A_1C_1 \\ BC \equiv B_1C_1 \\ \angle A \equiv \angle A_1 \\ \angle B \equiv \angle B_1 \\ \angle C \equiv \angle C_1 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} AB = A_1B_1 \\ AC = A_1C_1 \\ BC = B_1C_1 \\ \angle A = \angle A_1 \\ \angle B = \angle B_1 \\ \angle C = \angle C_1 \end{array}\right| .$$



Таким образом, если $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, то отсюда следует, что в данных треугольниках соответствующие элементы треугольников равны между собой.

Примечание. Допустим, что $\triangle ABC \equiv \triangle BCA$, тогда

$$\begin{array}{l} AB \equiv BC \\ AC \equiv BA \\ BC \equiv CA \end{array}, \quad \text{а значит} \quad \begin{array}{l} AB = BC \\ AC = BA \\ BC = CA \end{array},$$



что возможно только если мы рассматриваем равносторонние треугольники.

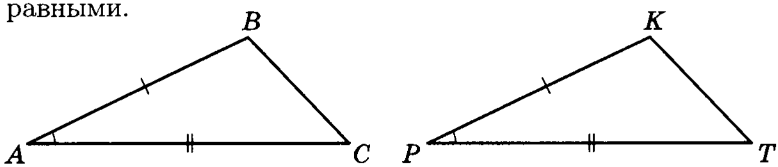
Значит в общем случае $\triangle ABC \not\equiv \triangle BCA$,

т. е. $\boxed{\triangle ABC \neq \triangle BCA}$.

Вывод. Порядок в буквенном обозначении при сравнении треугольников весьма существенен.

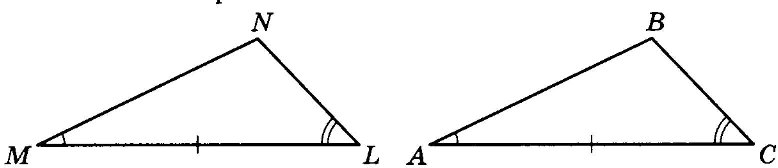
Признаки равенства треугольников

1. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники являются равными.



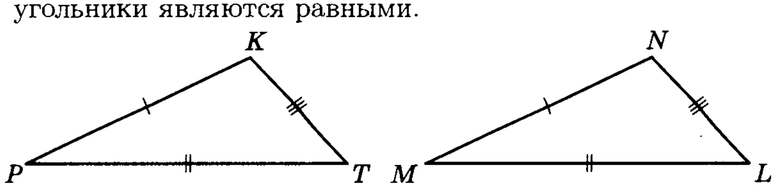
$$\left.\begin{array}{l} AB = PK \\ AC = PT \\ \angle BAC = \angle KPT \end{array}\right|, \text{ тогда } \triangle ABC = \triangle PKT.$$

2. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники являются равными.



$$\left.\begin{array}{l} ML = AC \\ \angle NML = \angle BAC \\ \angle MLN = \angle ACB \end{array}\right|, \text{ тогда } \triangle MNL = \triangle ABC.$$

3. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники являются равными.

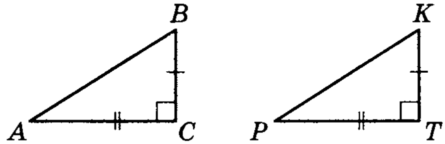


$$\left.\begin{array}{l} PK = MN \\ PT = ML \\ KT = NL \end{array}\right|, \text{ тогда } \triangle PKT = \triangle MNL.$$

Из признаков равенства двух треугольников и равенства суммы всех внутренних углов любого треугольника 180° следуют **признаки равенства прямоугольных треугольников**.

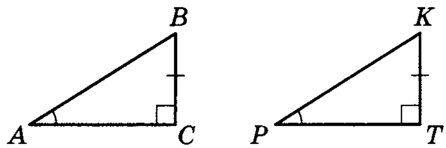
1. Если два катета одного прямоугольного треугольника соответственно равны двум катетам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники являются равными.

$$\left.\begin{aligned} BC &= KT \\ AC &= PT \end{aligned}\right|, \text{ тогда}$$
$$\triangle ABC = \triangle PKT.$$

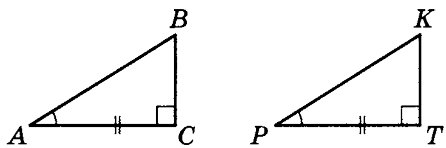


2. Если острый угол и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны острому углу и катету другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники являются равными.

$$\left.\begin{aligned} BC &= KT \\ \angle A &= \angle P \end{aligned}\right|, \text{ тогда}$$
$$\triangle ABC = \triangle PKT.$$

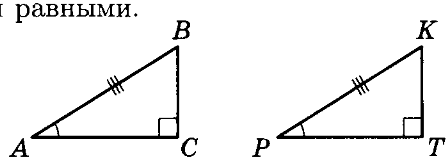


$$\left.\begin{aligned} AC &= PT \\ \angle A &= \angle P \end{aligned}\right|, \text{ тогда}$$
$$\triangle ABC = \triangle PKT.$$

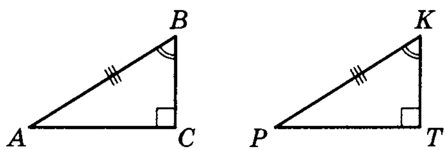


3. Если острый угол и гипотенуза одного прямоугольного треугольника соответственно равны острому углу и гипотенузе другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники являются равными.

$$\left.\begin{aligned} AB &= PK \\ \angle A &= \angle P \end{aligned}\right|, \text{ тогда}$$
$$\triangle ABC = \triangle PKT.$$

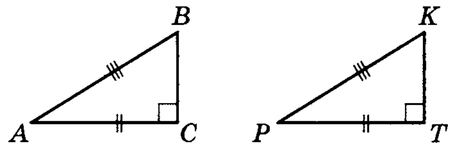


$$\left.\begin{aligned} AB &= PK \\ \angle B &= \angle K \end{aligned}\right|, \text{ тогда}$$
$$\triangle ABC = \triangle PKT.$$

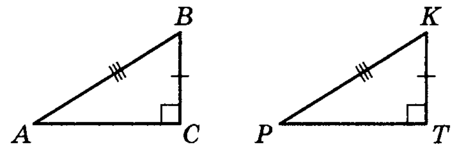


4. Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники являются равными.

$$\left.\begin{array}{l} AB = PK \\ AC = PT \end{array}\right| \text{, тогда}$$
$\triangle ABC = \triangle PKT.$



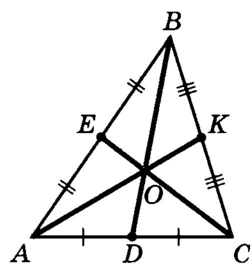
$$\left.\begin{array}{l} AB = PK \\ BC = KT \end{array}\right| \text{, тогда}$$
$\triangle ABC = \triangle PKT.$



Линии в треугольнике

> **<u>Определение 5</u>. Медианой треугольника называется отрезок, концы которого соединяют вершину треугольника и середину противоположной стороны.**

Медиана обозначается:
$m_{AC} = BD$;
$m_{AB} = CE$;
$m_{BC} = AK$.



Свойства медианы

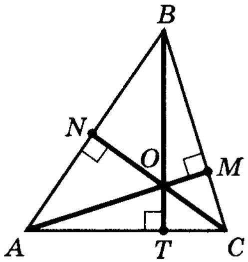
1. Медианы треугольника пересекаются в одной точке.

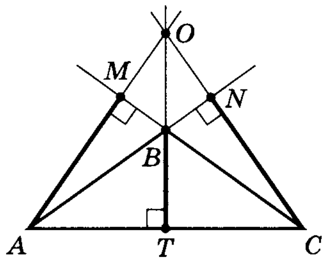
2. Точкой пересечения медианы делятся в отношении $2 : 1$, считая от вершин.

3. Каждая медиана делит треугольник на два треугольника, равных по площади.

4. Точка пересечения медиан есть вершина трех треугольников (AOB, BOC и AOC), равных по площади одной трети площади треугольника ABC.

Определение 6. Высотой треугольника называется отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины треугольника на противоположную сторону или ее продолжение (если треугольник тупоугольный).

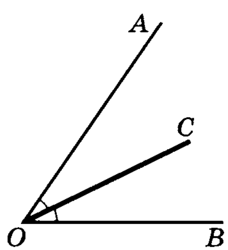


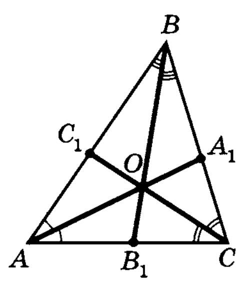


Высота обозначается: $H_{AC} = BT$; $H_{AB} = CN$; $H_{BC} = AM$.

Основное свойство высоты: все высоты треугольника (или прямые, их содержащие) пересекаются в одной точке.

Определение 7. а) Биссектрисой угла называется луч, исходящий из вершины угла и делящий его на два равных угла.
б) Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла в треугольнике, соединяющий вершину треугольника и противоположную сторону.



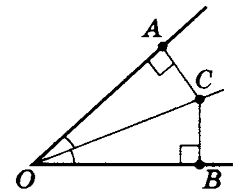


Биссектриса обозначается:

для угла B $\quad l_{\angle B} = l_{AC} = BB_1$;
для угла C $\quad l_{\angle C} = l_{AB} = CC_1$;
для угла A $\quad l_{\angle A} = l_{BC} = AA_1$.

Основные свойства биссектрисы

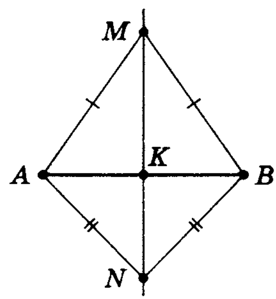
1. Биссектриса есть множество всех точек, равноудаленных от сторон угла.
2. Все биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.



3. Точка пересечения биссектрис в треугольнике равноудалена от всех сторон треугольника.

Следствие 1. В любой треугольник можно вписать окружность, и только одну, причем ее центр есть точка пересечения биссектрис треугольника.

Лемма (вспомогательное утверждение). Множество всех точек плоскости, равноудаленных от концов отрезка, есть серединный перпендикуляр к отрезку.

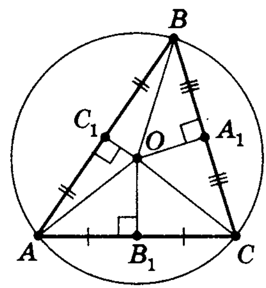


Следствие 2. Около любого треугольника можно описать окружность, и только одну. Ее центр есть точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

O — центр описанной окружности;

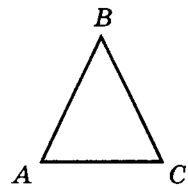
$$\left.\begin{array}{ll} AC_1 = C_1B, & OC_1 \perp AB \\ BA_1 = A_1C, & OA_1 \perp BC \\ CB_1 = B_1A, & OB_1 \perp AC \end{array}\right| \Rightarrow$$

$\Rightarrow AO = BO = CO = R_{о}$.



<u>Определение 8</u>. Треугольник называется равнобедренным, если две стороны его равны между собой. Сторона, не равная двум другим, называется основанием равнобедренного треугольника, а углы при ней — углами при основании равнобедренного треугольника.

В этом треугольнике: $AB = BC$,
сторона AC — основание,
$\angle A$ и $\angle C$ — углы при основании треугольника.



Свойства равнобедренного треугольника

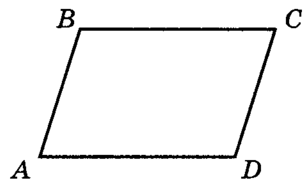
1. Углы при основании равнобедренного треугольника равны между собой.
2. В равнобедренном треугольнике медиана, высота и биссектриса, проведенные к основанию, совпадают.
3. В равнобедренном треугольнике медианы, высоты и биссектрисы, проведенные к боковым сторонам, соответственно равны между собой.

Признаки равнобедренного треугольника

1. Если углы, прилежащие к одной стороне, равны между собой, то треугольник является равнобедренным, а сторона есть основание.
2. Если или медианы, или высоты, или биссектрисы, проведенные к двум сторонам, соответственно равны, то треугольник является равнобедренным.
3. Если высота, медиана и биссектриса, проведенные к одной стороне, совпадают, то треугольник является равнобедренным.
4. Если высота и медиана, проведенные к одной стороне, совпадают, то треугольник является равнобедренным.
5. Если высота и биссектриса, проведенные к одной стороне, совпадают, то треугольник является равнобедренным.
6. Если медиана и биссектриса, проведенные к одной стороне, совпадают, то треугольник является равнобедренным.

<u>Определение 9</u>. Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

Например, в четырехугольнике $ABCD$ $AB \parallel DC$, $BC \parallel AD$.



Свойства параллелограмма

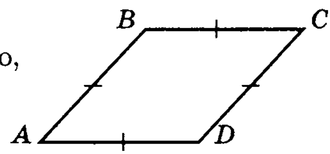
1. Противоположные стороны параллелограмма попарно равны.
2. Противоположные углы параллелограмма попарно равны.
3. Сумма односторонних углов параллелограмма равна 180°.
4. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.
5. Любая диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника.

Признаки параллелограмма

1. Если противоположные стороны четырехугольника попарно равны, то он является параллелограммом.
2. Если две противоположные стороны четырехугольника равны и параллельны, то он является параллелограммом.
3. Если сумма односторонних углов при любой стороне четырехугольника равна 180°, то он является параллелограммом.
4. Если все противоположные углы четырехугольника попарно равны, то он является параллелограммом.
5. Если диагонали четырехугольника точкой пересечения делятся пополам, то он является параллелограммом.

Определение. Ромбом называется четырехугольник, все стороны которого равны между собой.

По признаку параллелограмма ромб есть параллелограмм. Следовательно, можно дать и иное определение — через параллелограмм.



Определение 10. Ромбом называется параллелограмм, у которого две смежные стороны равны между собой.

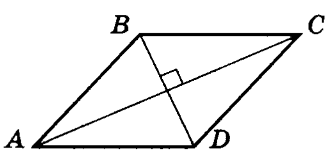
Можно доказать равносильность этих определений. Примем определение 10 за основное.

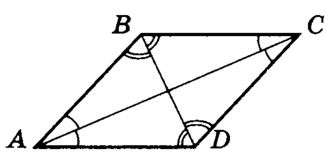
Свойства ромба

1. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.
2. Диагонали ромба являются биссектрисами противоположных углов.
3. Диагонали ромба разбивают его на четыре равных между собой треугольника.

Признаки ромба

1. Если диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны, то он является ромбом.
2. Если диагонали параллелограмма есть биссектрисы противоположных углов, то он является ромбом.
3. Если диагонали параллелограмма делят его на четыре равных между собой треугольника, то он является ромбом.

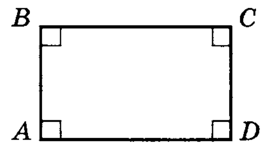




Отметим, что обе диагонали ромба являются его осями симметрии, т. е. для того чтобы четырехугольник являлся ромбом, необходимо и достаточно, чтобы его диагонали были осями симметрии.

Определение. Четырехугольник, все углы которого равны между собой, называется прямоугольником.

Очевидно, что по признаку параллелограмма прямоугольник есть параллелограмм. Значит, можно дать определение через параллелограмм.



Определение 11. Параллелограмм, у которого хотя бы один из углов прямой, называется прямоугольником.

Примем это определение за основное.

Свойства прямоугольника

1. В прямоугольнике все углы прямые.
2. В прямоугольнике диагонали равны между собой.

Признаки прямоугольника

1. Параллелограмм, диагонали которого равны между собой, является прямоугольником.
2. Параллелограмм, имеющий хотя бы одну ось симметрии, перпендикулярную его стороне, является прямоугольником.

Отметим, что у прямоугольника есть две оси симметрии — это прямые, проходящие через середины противоположных сторон.

Определение 12. Квадратом называется четырехугольник, все стороны и углы которого равны между собой.

Очевидно, что квадрат есть параллелограмм. Отметим также, что квадрат одновременно обладает свойствами ромба и прямоугольника. Поэтому можно сформулировать утверждение.

Теорема. Для того чтобы четырехугольник являлся квадратом, необходимо и достаточно, чтобы его диагонали были равны и взаимно перпендикулярны, а точка пересечения делила их пополам.

Кроме того, у квадрата — четыре оси симметрии.

Задачи на доказательство

В задачах на доказательство требуется доказать утверждение или показать, что оно неверно (привести контрпример).

1. В четырехугольнике противоположные углы попарно равны. Докажите, что противоположные стороны четырехугольника попарно равны.

2. В четырехугольнике две противоположные стороны параллельны, а два противоположных угла равны. Докажите, что две другие противоположные стороны равны между собой.

3. В четырехугольнике две противоположные стороны образуют с одной из диагоналей равные углы. Известно, что два противоположных угла равны между собой. Докажите, что тогда и другие два противоположных угла равны между собой.

4. В четырехугольнике две противоположные стороны образуют с одной из диагоналей равные углы, а углы при вершинах углов четырехугольника, через которые не проходит данная диагональ, равны между собой. Верно ли, что данные противоположные стороны равны?

5. Диагонали четырехугольника пересекаются в точке O, причем одна из диагоналей этой точкой делится пополам. Известно также, что две противоположные стороны четырехугольника параллельны. Докажите, что тогда и другая диагональ этой точкой пересечения делится пополам.

6. Диагонали четырехугольника пересекаются в точке O, причем одна из диагоналей этой точкой пересечения делится пополам, а другая диагональ с противоположными сторонами образует равные углы. Докажите, что данные противоположные стороны равны между собой.

7. Диагонали четырехугольника равны между собой. Два противоположных угла также равны между собой. Верно ли, что две противоположные стороны параллельны?

8. Диагонали четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Углы при вершинах B и C равны между собой. Докажите, что стороны AB и CD параллельны.

9. Две стороны четырехугольника и одна из диагоналей равны между собой. Известно также, что два противоположных угла равны между собой. Верно ли, что две другие стороны параллельны, две диагонали взаимно перпендикулярны и одна из диагоналей точкой пересечения делится пополам?

10. Два противоположных угла четырехугольника равны между собой. Кроме того, три стороны четырехугольника также равны между собой. Докажите, что две стороны четырехугольника параллельны, диагонали взаимно перпендикулярны, и точка пересечения делит одну из диагоналей пополам.

11. Две стороны четырехугольника параллельны, а диагонали равны между собой. Докажите, что две другие стороны равны и параллельны.

12. В четырехугольнике две стороны параллельны, а две другие равны между собой. Верно ли, что равные стороны параллельны, а диагонали равны между собой?

13. В четырехугольнике две стороны параллельны, а два угла при рядом расположенных вершинах равны. Докажите, что диагонали равны и две другие стороны также равны.

14. В четырехугольнике две стороны параллельны. Диагонали четырехугольника пересекаются в точке O, получившиеся при этом два отрезка двух разных диагоналей равны между собой. Докажите, что два других отрезка диагоналей четырехугольника равны между собой и углы при вершинах одной из параллельных сторон равны между собой.

15. В четырехугольнике две стороны параллельны. Диагонали точкой пересечения делятся на четыре отрезка, два из которых, принадлежащие разным диагоналям и примыкающие к одной из параллельных сторон, равны между собой. Докажите, что остальные стороны четырехугольника равны между собой.

16. В четырехугольнике две стороны параллельны. Угол между одной диагональю и одной из параллельных сторон равен углу между другой диагональю и другой из параллельных сторон. Верно ли, что две другие стороны равны между собой?

17. В четырехугольнике две стороны параллельны. Угол между одной диагональю и одной из параллельных сторон равен углу между другой диагональю и другой из параллельных сторон. Докажите, что углы при вершинах одной из параллельных сторон равны.

18. В четырехугольнике две стороны параллельны друг другу, а две другие перпендикулярны диагоналям. Докажите, что перпендикулярные диагоналям стороны равны между собой.

19. В четырехугольнике точка пересечения диагоналей O одну из них делит пополам. Отрезок, соединяющий две противоположные стороны и проходящий через точку O, также делится ею пополам. Докажите, что стороны, которые он пересекает, равны между собой.

20. Диагонали четырехугольника пересекаются в точке O. Отрезок, соединяющий две противоположные стороны и проходящий через точку O, делится ею пополам. Отрезки, соединяющие вершины противоположных углов с концами отрезка, проходящего через точку O, попарно равны между собой. Верно ли равенство между собой двух других сторон четырехугольника?

21. Две стороны четырехугольника параллельны, две другие — возможно, нет. Угол между диагональю и одной из возможно непараллельных сторон равен углу между другой диагональю и другой возможно непараллельной стороной. Докажите, что возможно непараллельные стороны равны между собой.

22. В четырехугольнике две стороны параллельны, а диагонали взаимно перпендикулярны. Докажите, что две другие стороны равны между собой.

23. В треугольнике медиана и биссектриса, проведенные к одной и той же стороне, совпадают. Докажите, что треугольник равнобедренный.

24. В треугольнике медианы, проведенные к двум сторонам, равны между собой. Докажите, что тогда треугольник равнобедренный.

25. Два треугольника равны, причем одна сторона у них общая. Из одной их общей вершины проведена биссектриса угла первого треугольника, а из другой общей вершины — биссектриса угла второго треугольника. Докажите, что отрезки сторон, на которые биссектрисы делят стороны, прилежащие к общей стороне, соответственно равны между собой.

Примечание. У читателя может возникнуть вопрос: для чего в данной книге рассматривать задачи на доказательство? Дело в том, что часто в экзаменационных задачах для решения необходимо использовать свойства геометрических фигур, напрямую не сформулированные в условиях задачи, но без знания которых задачу решить нельзя. Иногда знание этих свойств дает возможность получить недостающие для решения задачи метрические соотношения.

К тому же, умение решать задачи на доказательство формирует бесценную геометрическую интуицию и беспощадную логику ее проверки — самостоятельную ценность, ведущую к наиболее короткому и изящному пути решения.

Задачи на доказательство. Моделирование условий

В задачах на доказательство требуется доказать утверждение или показать, что оно неверно (привести контрпример).

1. В четырехугольнике противоположные углы попарно равны. Докажите, что противоположные стороны четырехугольника попарно равны.

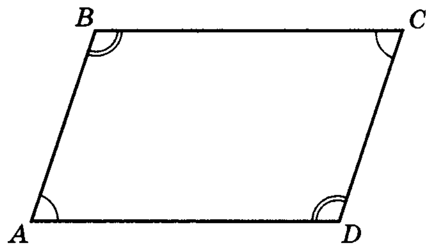
Дано:

$ABCD$ — четырехугольник

$\angle A = \angle C$

$\angle B = \angle D$

$BC = AD$ $(AB = DC)$



2. В четырехугольнике две противоположные стороны параллельны, а два противоположных угла равны. Докажите, что две другие противоположные стороны равны между собой.

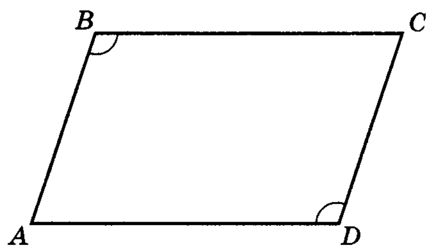
Дано (один из возможных вариантов моделирования условий задачи):

$ABCD$ — четырехугольник

$\angle B = \angle D$

$BC \parallel AD$

$AB = DC$ $(BC = AD)$

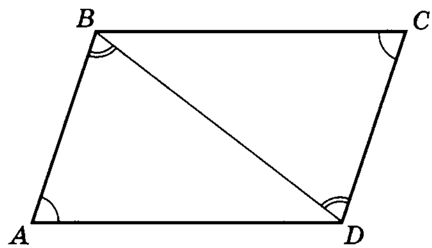


3. В четырехугольнике две противоположные стороны образуют с одной из диагоналей равные углы. Известно, что два противоположных угла равны между собой. Докажите, что тогда и другие два противоположных угла равны между собой.

Дано (один из возможных вариантов моделирования условий задачи):

$ABCD$ — четырехугольник
$\angle A = \angle C$
$\angle ABD = \angle BDC$

$\angle B = \angle D$

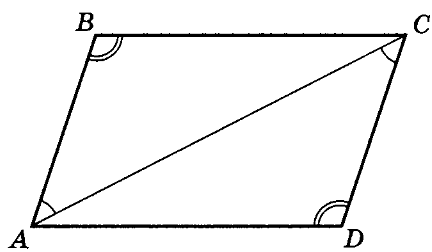


4. В четырехугольнике две противоположные стороны образуют с одной из диагоналей равные углы, а углы при вершинах углов четырехугольника, через которые не проходит данная диагональ, равны между собой. Верно ли, что данные противоположные стороны равны?

Дано (один из возможных вариантов моделирования условий задачи):

$ABCD$ — четырехугольник
$\angle BAC = \angle ACD$
$\angle B = \angle D$

$AB = DC$

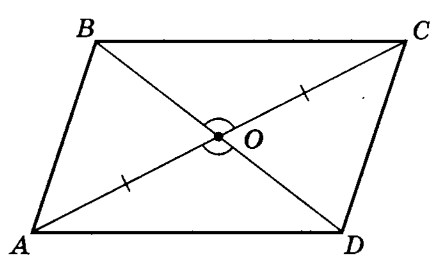


5. Диагонали четырехугольника пересекаются в точке O, причем одна из диагоналей этой точкой делится пополам. Известно также, что две противоположные стороны четырехугольника параллельны. Докажите, что тогда и другая диагональ этой точкой пересечения делится пополам.

Дано (один из возможных вариантов моделирования условий задачи):

$ABCD$ — четырехугольник
$OC = OA$
$O = AC \cap BD$
$BC \parallel AD$

$OB = OD$

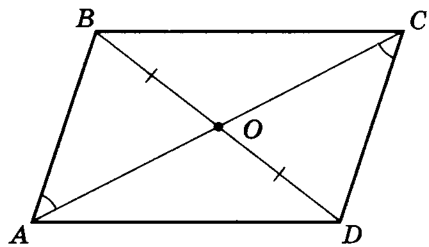


6. Диагонали четырехугольника пересекаются в точке O, причем одна из диагоналей этой точкой пересечения делится пополам, а другая диагональ с противоположными сторонами образует равные углы. Докажите, что данные противоположные стороны равны между собой.

Дано (один из возможных вариантов моделирования условий задачи):

$ABCD$ — четырехугольник
$OB = OD$
$O = AC \cap BD$
$\angle BAC = \angle DCA$

$AB = DC$



7. Диагонали четырехугольника равны между собой. Два противоположных угла также равны между собой. Верно ли, что две противоположные стороны параллельны?

Дано (один из возможных вариантов моделирования условий задачи):

$ABCD$ — четырехугольник
$AC = BD$
$\angle B = \angle D$

$AB \parallel CD$

8. Диагонали четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Углы при вершинах B и C равны между собой. Докажите, что стороны AB и CD параллельны.

Дано (один из возможных вариантов моделирования условий задачи):

$ABCD$ — четырехугольник
$AC \perp BD$
$\angle B = \angle C$

$AB \parallel DC$

9. Две стороны четырехугольника и одна из диагоналей равны между собой. Известно также, что два противоположных угла равны между собой. Верно ли, что две другие стороны параллельны, две диагонали взаимно перпендикулярны и одна из диагоналей точкой пересечения делится пополам?

Дано:

$ABCD$ — четырехугольник
$\angle A = \angle C$
$AB = BD = DC$

а) $BC \parallel AD$
б) $AC \perp BD$
в) $AO = OC$
$(O = AC \cap BD)$

10. Два противоположных угла четырехугольника равны между собой. Кроме того, три стороны четырехугольника также равны между собой. Докажите, что две стороны четырехугольника параллельны, диагонали взаимно перпендикулярны и точка пересечения делит одну из диагоналей пополам.

Дано:

$ABCD$ — четырехугольник
$\angle A = \angle C$
$AD = DC = BC$

а) $AB \parallel DC$
б) $AC \perp BD$
в) $AO = OC$
$(O = AC \cap BD)$

11. Две стороны четырехугольника параллельны, а диагонали равны между собой. Докажите, что две другие стороны равны и параллельны.

Дано:

$ABCD$ — четырехугольник
$BC \parallel AD$
$AC = BD$

а) $AB \parallel DC$
б) $AB = DC$

12. В четырехугольнике две стороны параллельны, а две другие равны между собой. Верно ли, что равные стороны параллельны, а диагонали равны между собой?

Дано:

$ABCD$ — четырехугольник
$BC \parallel AD$
$AB = CD$

а) $AB \parallel DC$
б) $AC = BD$

13. В четырехугольнике две стороны параллельны, а два угла при рядом расположенных вершинах равны. Докажите, что диагонали равны и две другие стороны также равны.

Дано (один из возможных вариантов моделирования условий задачи):

$ABCD$ — четырехугольник
$BC \parallel AD$
$\angle A = \angle D$

а) $AC = BD$
б) $AB = CD$

14. В четырехугольнике две стороны параллельны. Диагонали четырехугольника пересекаются в точке O, получившиеся при этом два отрезка двух разных диагоналей равны между собой. Докажите, что два других отрезка диагоналей четырехугольника равны между собой и углы при вершинах одной из параллельных сторон равны между собой.

Дано (один из возможных вариантов моделирования условий задачи):

$ABCD$ — четырехугольник
$BC \parallel AD$
$O = AC \cap BD$
$AO = OD$

а) $\angle A = \angle D$
б) $OB = OC$

15. В четырехугольнике две стороны параллельны. Диагонали точкой пересечения делятся на четыре отрезка, два из которых, принадлежащие разным диагоналям и примыкающие к одной из параллельных сторон, равны между собой. Докажите, что остальные стороны четырехугольника равны между собой.

Дано:

$ABCD$ — четырехугольник
$BC \parallel AD$
$BO = OC$

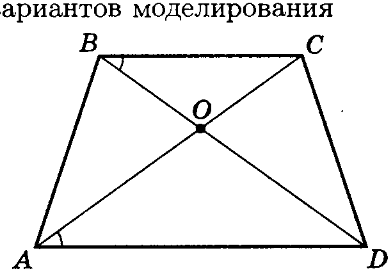
$AB = DC$

16. В четырехугольнике две стороны параллельны. Угол между одной диагональю и одной из параллельных сторон равен углу между другой диагональю и другой из параллельных сторон. Верно ли, что две другие стороны равны между собой?

Дано (один из возможных вариантов моделирования условий задачи):

$ABCD$ — четырехугольник
$BC \parallel AD$
$\angle CAD = \angle CBD$

$AB = DC$

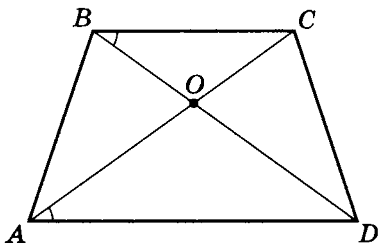


17. В четырехугольнике две стороны параллельны. Угол между одной диагональю и одной из параллельных сторон равен углу между другой диагональю и другой из параллельных сторон. Докажите, что углы при вершинах одной из параллельных сторон равны.

Дано (один из возможных вариантов моделирования условий задачи):

$ABCD$ — четырехугольник
$BC \parallel AD$
$\angle DBC = \angle CAD$

$\angle A = \angle D$

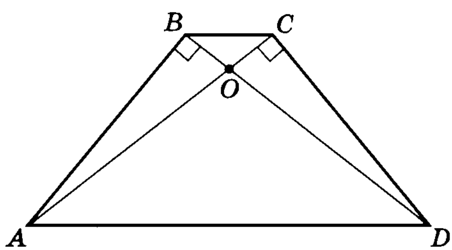


18. В четырехугольнике две стороны параллельны друг другу, а две другие перпендикулярны диагоналям. Докажите, что перпендикулярные диагоналям стороны равны между собой.

Дано:

$ABCD$ — четырехугольник
$BC \parallel AD$
$AC \perp CD$
$AB \perp BD$

$AB = DC$

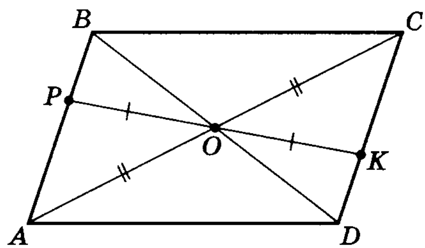


19. В четырехугольнике точка пересечения диагоналей O одну из них делит пополам. Отрезок, соединяющий две противоположные стороны и проходящий через точку O, также делится ею пополам. Докажите, что стороны, которые он пересекает, равны между собой.

Дано (один из возможных вариантов моделирования условий задачи):

$ABCD$ — четырехугольник
$P \in AB$
$K \in DC$
$O \in PK$
$OP = OK$
$AO = OC$

$AB = DC$

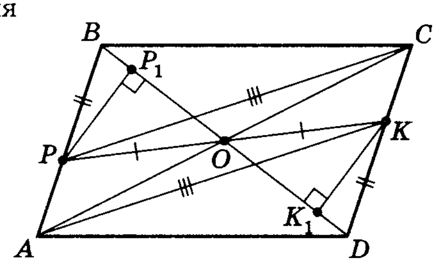


20. Диагонали четырехугольника пересекаются в точке O. Отрезок, соединяющий две противоположные стороны и проходящий через точку O, делится ею пополам. Отрезки, соединяющие вершины противоположных углов с концами отрезка, проходящего через точку O, попарно равны между собой. Верно ли равенство между собой двух других сторон четырехугольника?

Дано (один из возможных вариантов моделирования условий задачи):

$ABCD$ — четырехугольник
$OP = OK$
$AK = PC$
$PB = DK$

$BC = AD$



21. Две стороны четырехугольника параллельны, две другие — возможно, нет. Угол между диагональю и одной из возможно непараллельных сторон равен углу между другой диагональю и другой возможно непараллельной стороной. Докажите, что возможно непараллельные стороны равны между собой.

Дано:

$ABCD$ — четырехугольник
$BC \parallel AD$
$\angle ABD = \angle ACD$

$AB = DC$

22. В четырехугольнике две стороны параллельны, а диагонали взаимно перпендикулярны. Докажите, что две другие стороны равны между собой.

Дано:

$ABCD$ — четырехугольник
$BC \parallel AD$
$AC \perp BD$

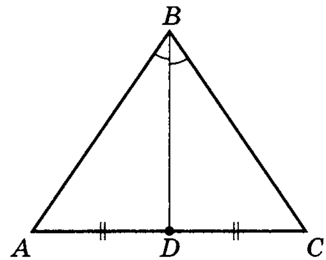
$AB = CD$

23. В треугольнике медиана и биссектриса, проведенные к одной и той же стороне, совпадают. Докажите, что треугольник равнобедренный.

Дано:

$\triangle ABC$
$BD = m_{AC} = l_{AC}$

$AB = BC$

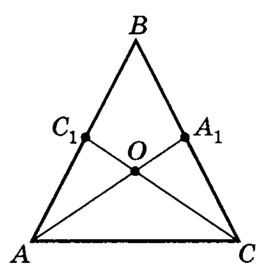


24. В треугольнике медианы, проведенные к двум сторонам, равны между собой. Докажите, что тогда треугольник равнобедренный.

Дано:

$\triangle ABC$
$AA_1 = m_{BC}$
$CC_1 = m_{AB}$
$m_{AB} = m_{BC}$

$AB = BC$



25. Два треугольника равны, причем одна сторона у них общая. Из одной их общей вершины проведена биссектриса угла первого треугольника, а из другой общей вершины — биссектриса угла второго треугольника. Докажите, что отрезки сторон, на которые биссектрисы делят стороны, прилежащие к общей стороне, соответственно равны между собой.

Дано:

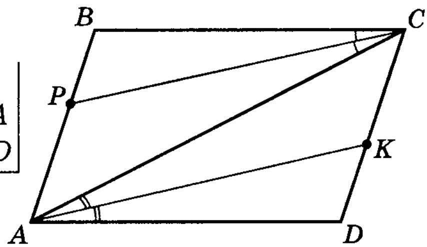
$\triangle ABC = \triangle ADC$

CP — биссектриса $\angle BCA$

AK — биссектриса $\angle CAD$

а) $PB = DK$

б) $AP = CK$



Примечания. 1. По умолчанию обозначение $ABCD$ означает четырехугольник, в дальнейшем мы это уточнять не будем.

2. Фигуры на чертежах, приведенных здесь, могут быть похожи (или не похожи) на параллелограммы. Это можно определить только при наличии соответствующих доказательств или контрпримеров.

3. Далее рассмотрим решение приведенных выше задач на доказательство (1–25).

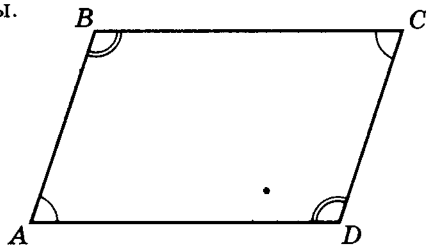
Задачи на доказательство. Решение

В задачах на доказательство требуется доказать утверждение или показать, что оно неверно (привести контрпример).

1. В четырехугольнике противоположные углы попарно равны. Докажите, что противоположные стороны четырехугольника попарно равны.

Дано:
$ABCD$
$\angle A = \angle C$
$\angle B = \angle D$

$BC = AD$ $(AB = DC)$



а) Так как $\underline{\angle A} + \underline{\underline{\angle B}} + \underline{\angle C} + \underline{\underline{\angle D}} = 360°$, то $\angle A + \angle B = 180°$.

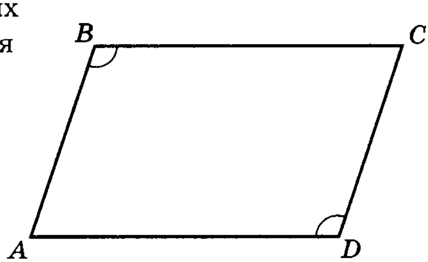
Известна теорема: «Если при пересечении двух прямых третьей сумма образованных при этом внутренних односторонних углов равна 180°, то эти две прямые параллельны». Поэтому $BC \parallel AD$.

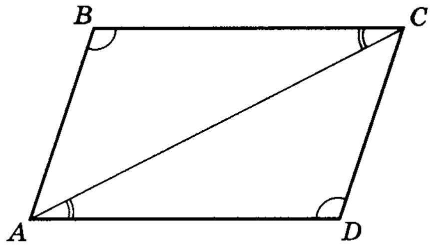
б) Аналогично можно доказать, что $AB \parallel DC$, значит $ABCD$ — параллелограмм. Тогда по свойству параллелограмма $BC = AD$ и $AB = DC$.

2. В четырехугольнике две противоположные стороны параллельны, и два противоположных угла равны. Докажите, что две другие противоположные стороны равны между собой.

Дано (один из возможных вариантов моделирования условий задачи):
$ABCD$
$\angle B = \angle D$
$BC \parallel AD$

$AB = DC$ $(BC = AD)$





а) Так как зачастую задачи такого типа связаны в дальнейшем с доказательством равенства двух треугольников, то для доказательства проведем диагональ AC.

По свойству параллельных прямых (здесь по условию $BC \parallel AD$) $\angle BCA = \angle DAC$.

б) Так как сумма внутренних углов любого треугольника равна $180°$, то

$$\left.\begin{array}{l}\angle BAC + \underline{\angle B} + \underline{\underline{\angle BCA}} = 180° \\ \angle ACD + \underline{\angle D} + \underline{\underline{\angle DAC}} = 180°\end{array}\right|, \text{ но } \begin{array}{l}\angle B = \angle D \\ \angle BCA = \angle DAC\end{array},$$

значит $\angle BAC = \angle ACD$, тогда $AB \parallel DC$.

в) Рассмотрим треугольники ABC и CDA.

$$\left.\begin{array}{l}AC \text{ — общая} \\ \angle BCA = \angle DAC \\ \angle BAC = \angle ACD\end{array}\right|, \begin{array}{l}\text{значит } \triangle ABC = \triangle CDA \\ \text{по второму признаку} \\ \text{равенства треугольников.}\end{array}$$

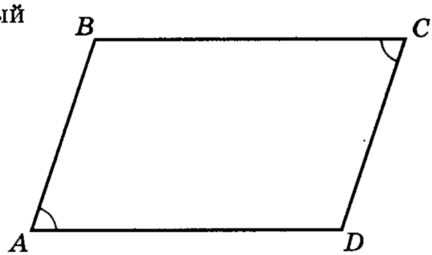
Тогда $AB = DC$ ($BC = AD$), что и требовалось доказать.

Примечание. Так как из пункта б) следует, что $ABCD$ — параллелограмм, то далее можно было воспользоваться первым свойством параллелограммов.

Дано (еще один возможный вариант моделирования этой задачи):

$$\left.\begin{array}{l}ABCD \\ \angle A = \angle C \\ BC \parallel AD\end{array}\right|$$

$AB = DC$ ($BC = AD$)



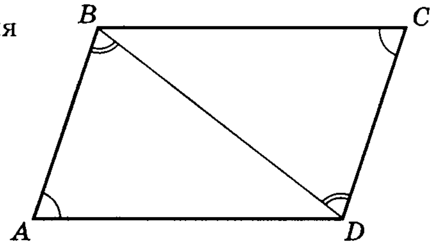
Докажите это утверждение самостоятельно.

3. В четырехугольнике две противоположные стороны образуют с одной из диагоналей равные углы. Известно, что два противоположных угла равны между собой. Докажите, что тогда и другие два противоположных угла равны между собой.

Дано (один из возможных вариантов моделирования условий задачи):

$ABCD$
$\angle A = \angle C$
$\angle ABD = \angle BDC$

$\angle B = \angle D$



а) Так как $\begin{aligned} &\underline{\angle A} + \underline{\underline{\angle ABD}} + \angle ADB = 180^\circ \\ &\underline{\angle C} + \underline{\underline{\angle CDB}} + \angle DBC = 180^\circ \end{aligned}$,

то $\angle ADB = \angle DBC$.

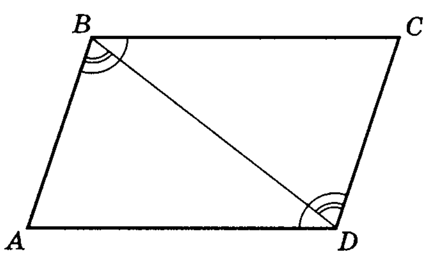
б) Учтем, что $\begin{aligned} \angle B &= \underline{\angle ABD} + \underline{\underline{\angle DBC}} \\ \angle D &= \underline{\angle CDB} + \underline{\underline{\angle ADB}} \end{aligned}$,

значит $\angle B = \angle D$, что и требовалось доказать.

Дано (существует другой вариант моделирования условий задачи):

$ABCD$
$\angle B = \angle D$
$\angle ABD = \angle CDB$

$\angle A = \angle C$



а) Так как $\left.\begin{aligned} \angle B &= \angle D \\ \angle ABD &= \angle CDB \end{aligned}\right|$, то $\angle CBD = \angle ADB$.

б) Рассмотрим треугольники ABD и CDB.

$$\left.\begin{array}{l} BD \text{ — общая} \\ \angle ABD = \angle CBD \text{ (по условию)} \\ \angle ADB = \angle CBD \text{ (по доказанному)} \end{array}\right| ,$$

значит $\triangle ABD = \triangle CDB$ по II признаку равенства треугольников, тогда $\angle A = \angle C$.

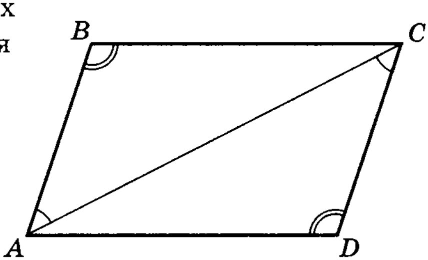
Рассмотрите другие возможные варианты моделирования условий задачи и самостоятельно докажите утверждение о равенстве других противоположных углов.

4. В четырехугольнике две противоположные стороны образуют с одной из диагоналей равные углы, а углы при вершинах углов четырехугольника, через которые не проходит данная диагональ, равны между собой. Верно ли, что данные противоположные стороны равны?

Дано (один из возможных вариантов моделирования условий задачи):

$$\left.\begin{array}{l} ABCD \\ \angle BAC = \angle ACD \\ \angle B = \angle D \end{array}\right|$$

$AB = DC$



а) $$\left.\begin{array}{l} \underline{\angle B} + \underline{\underline{\angle BAC}} + \angle ACB = 180^\circ \\ \underline{\angle D} + \underline{\underline{\angle ACD}} + \angle DAC = 180^\circ \end{array}\right| \Rightarrow \angle ACB = \angle DAC.$$

б) Так как $\angle B = \angle D$ (по условию) и $\angle ACB = \angle DAC$ (по доказанному), то по определению $ABCD$ — параллелограмм.

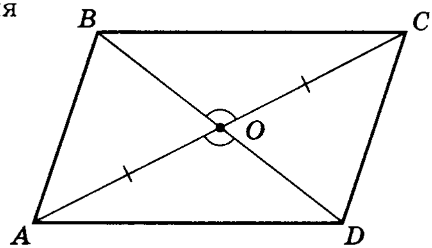
Тогда по свойству параллелограмма $AB = DC$, что и требовалось доказать.

Предложите еще одну интерпретацию условий задачи и докажите справедливость выводов самостоятельно.

5. Диагонали четырехугольника пересекаются в точке O, причем одна из диагоналей этой точкой делится пополам. Известно также, что две противоположные стороны четырехугольника параллельны. Докажите, что тогда и другая диагональ этой точкой пересечения делится пополам.

Дано (один из возможных вариантов моделирования условий задачи):

$$\left.\begin{array}{l} ABCD \\ OC = OA \\ O = AC \cap BD \\ BC \parallel AD \end{array}\right|$$
$$\overline{OB = OD}$$



Рассмотрим треугольники BOC и DOA:

$\angle BOC = \angle DOA$ (как вертикальные);

$OC = OA$ (по условию);

$\angle BCO = \angle DAO$ (как внутренние накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей AC).

Тогда по второму признаку равенства треугольников $\triangle BOC = \triangle DOA$, значит $OB = OD$, что и требовалось доказать.

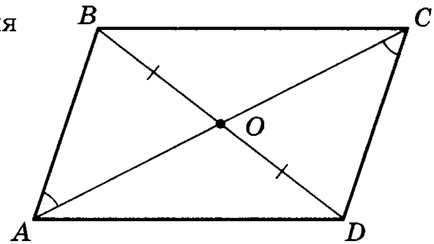
Рассмотрите другие возможные варианты моделирования условий задачи и самостоятельно докажите утверждение.

6. Диагонали четырехугольника пересекаются в точке O, причем одна из диагоналей этой точкой пересечения делится пополам, а другая диагональ с противоположными сторонами образует равные углы. Докажите, что данные противоположные стороны равны между собой.

Дано (один из возможных вариантов моделирования условий задачи):

$ABCD$
$OB = OD$
$O = AC \cap BD$
$\angle BAC = \angle DCA$

$AB = DC$



а) Рассмотрим треугольники AOB и COD:

$\angle AOB = \angle DOC$ (вертикальные);

$OB = OD$ (по условию).

Так как $\angle BAC = \angle DCA$ по условию и

$\angle ABD + \underline{\angle BAC} + \underline{\underline{\angle AOB}} = \underline{\angle DCA} + \underline{\underline{\angle DOC}} + \angle BDC = 180°$

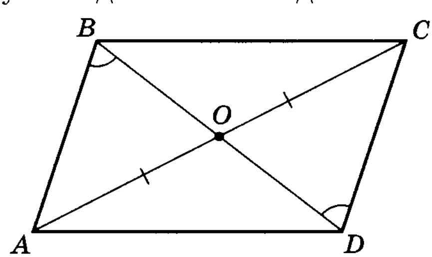
(суммы углов треугольников AOB и COD),

то $\angle ABD = \angle BDC$.

б) Значит $\triangle AOB = \triangle COD$ по второму признаку.

Тогда $AB = DC$.

Возможен и такой вариант интерпретации условий задачи. Сформулируйте и докажите выводы самостоятельно.

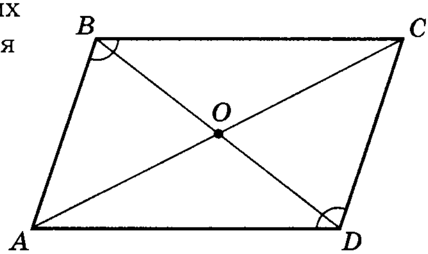


7. Диагонали четырехугольника равны между собой. Два противоположных угла также равны между собой. Верно ли, что две противоположные стороны параллельны?

Дано (один из возможных вариантов моделирования условий задачи):

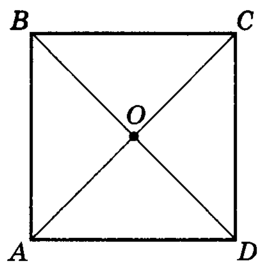
$ABCD$
$AC = BD$
$\angle B = \angle D$

$AB \parallel CD$



Очевидно, что если это параллелограмм, то чертеж другой. Например, $ABCD$ — прямоугольник, так как диагонали равны.

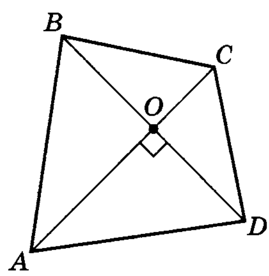
Но в условии задачи об этом ничего не сказано.



Возникает крамольная мысль. А может, это не параллелограмм, и утверждение $AB \parallel CD$ — ложное?

Для того чтобы доказать, что в общем случае $AB \nparallel DC$, необходимо привести хотя бы один контрпример. Попробуем привести пример четырехугольника, для которого условие задачи выполняются, но $AB \nparallel DC$.

Пусть $AC = BD$, $AC \perp BD$ и $BO = OD$ ($OC \neq OA$), тогда $\angle B = \angle D$, $AC = BD$ — условия задачи выполняются, но $AB \nparallel DC$.



Сформулируйте и иной вариант модели условий задачи и докажите или опровергните соответствующие утверждения самостоятельно.

8. Диагонали четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Углы при вершинах B и C равны между собой. Докажите, что стороны AB и CD параллельны.

Дано (один из возможных вариантов моделирования условий задачи):

$ABCD$

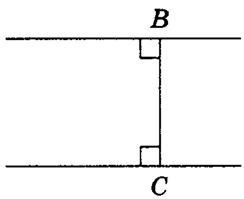
$AC \perp BD$

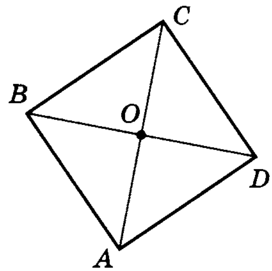
$\angle B = \angle C$

$AB \parallel DC$

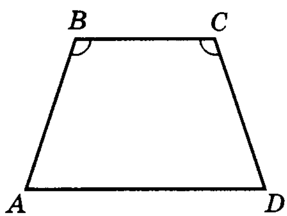
а) Так как $\angle B = \angle C$, то, возможно, $\angle B = \angle C = 90°$.

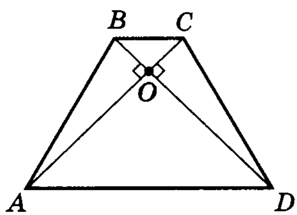
Тогда, учитывая, что $AC \perp BD$, получим квадрат.





б) Если $\angle B = \angle C \neq 90°$, то это возможно для равнобедренных трапеций (рисунок слева).





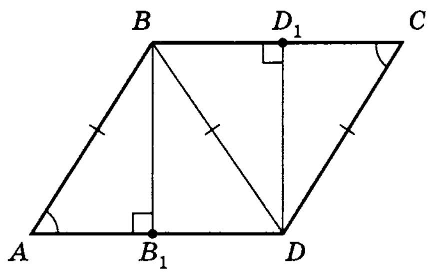
Существуют также равнобедренные трапеции, у которых $AC \perp BD$ (очевидно, что $AB \nparallel CD$ — рисунок справа).

в) Значит, в общем случае утверждать, что из условий задачи следует, что $AB \parallel CD$, нельзя.

9. Две стороны четырехугольника и одна из диагоналей равны между собой. Известно также, что два противоположных угла равны между собой. Верно ли, что две другие стороны параллельны, две диагонали взаимно перпендикулярны и одна из диагоналей точкой пересечения делится пополам?

Дано:
$ABCD$
$\angle A = \angle C$
$AB = BD = DC$

а) $BC \parallel AD$
б) $AC \perp BD$
в) $AO = OC$
$(O = AC \cap BD)$



а) 1. Выполним дополнительное построение: $\begin{matrix} BB_1 \perp AD \\ DD_1 \perp BC \end{matrix}$.

2. Рассмотрим треугольники ABB_1 и CDD_1.

Так как $\angle A = \angle C$ и $AB = DC$, то эти прямоугольные треугольники равны по гипотенузе и острому углу: $\triangle ABB_1 = \triangle CDD_1$.

Значит $BB_1 = DD_1$; $\angle ABB_1 = \angle CDD_1$.

3. Рассмотрим треугольники DBB_1 и BDD_1.

Эти треугольники равны по гипотенузе и катету.

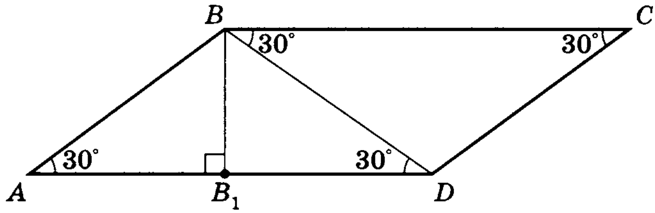
Тогда $\angle DBB_1 = \angle BDD_1$.

4. Так как $\angle ABB_1 = \angle CDD_1$ и $\angle DBB_1 = \angle BDD_1$, то $\angle ABB_1 + \angle DBB_1 = \angle D_1DC + \angle BDD_1$, т. е. $\angle ABD = \angle BDC$, тогда $AB \parallel DC$.

Учитывая, что $AB = DC$, получим, что $ABCD$ — параллелограмм. Отсюда следует, что $BC \parallel AD$.

б) $AC \perp BD$ из условий задачи явно не следует.

Приведем контрпример:



Для такого четырехугольника $\angle B = \angle D = 150°$.

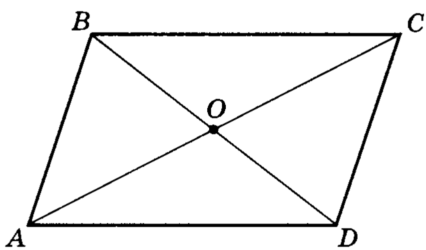
Пусть $AB = a$, $BB_1 \perp AD$, тогда

$AB_1 = AB \cos 30°$; $AB_1 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$,

значит $AD = a\sqrt{3}$, т. е. $AB \neq AD$.

Таким образом, $ABCD$ не является ромбом, а тогда диагонали взаимно не перпендикулярны.

в)

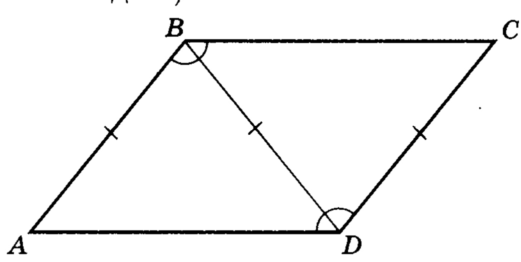


Так как $ABCD$ — параллелограмм, то диагонали точкой пересечения делятся пополам: $AO = OC$.

Дано (еще один из вариантов моделирования условий задачи):

$ABCD$
$AB = BD = DC$
$\angle B = \angle D$

а) $BC \parallel AD$
б) $AC \perp BD$
в) $AO = OC$
$(O = AC \cap BD)$



Так как $\left.\begin{array}{l}\angle A = \angle ADB \\ \angle C = \angle DBC\end{array}\right|$, то $\begin{array}{l}\angle ABD = 180° - 2\angle A \\ \angle BDC = 180° - 2\angle C\end{array}$.

С другой стороны, $\begin{array}{l}\angle B = \angle ABD + \angle C \\ \angle D = \angle BDC + \angle A\end{array}$,

но $\angle B = \angle D$, тогда

$\underline{180°} - 2\angle A + \angle C = \underline{180°} - 2\angle C + \angle A$,

значит $\angle A = \angle C$, и приходим к первому варианту моделирования условий задачи.

Обобщая различные варианты, интерпретирующие условия задачи, отметим, что $BC \parallel AD$, $AC \not\perp BD$ и $AO = OC$.

10. Два противоположных угла четырехугольника равны между собой. Кроме того, три стороны четырехугольника также равны между собой. Докажите, что две стороны четырехугольника параллельны, диагонали взаимно перпендикулярны и точка пересечения делит одну из диагоналей пополам.

Дано:

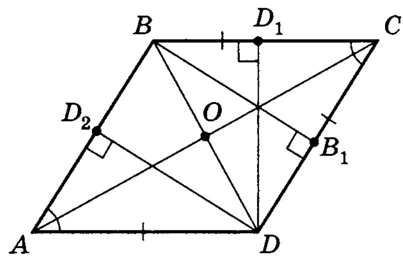
$\left.\begin{array}{l}ABCD \\ \angle A = \angle C \\ AD = DC = BC\end{array}\right|$

а) $AB \parallel DC$

б) $AC \perp BD$

в) $AO = OC$

$(O = AC \cap BD)$



а) Проведем дополнительное построение.

$DD_1 \perp BC$; $DD_2 \perp AB$; $BB_1 \perp DC$.

б) $\triangle ADD_2 = \triangle CDD_1$ и $\triangle ADD_2 = \triangle CBB_1$ по гипотенузе и острому углу.

Тогда $DD_2 = DD_1 = BB_1$ и $AD_2 = CD_1$.

в) $\triangle DD_2B = \triangle DD_1B$ по гипотенузе BD и катетам DD_2 и DD_1. Значит $\angle D_1BD = \angle DBD_2$, $D_2B = D_1B$, тогда BD — биссектриса.

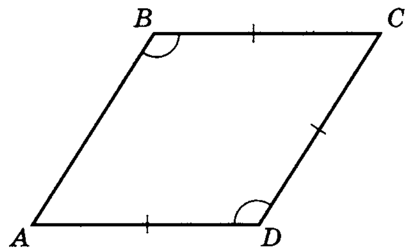
Так как $\left.\begin{matrix} D_2B = D_1B \\ AD_2 = CD_1 \end{matrix}\right|$, то по доказанному

$AB = AD_2 + D_2B$, $BC = CD_1 + D_1B$,

т. е. $AB = BC$, значит $ABCD$ — ромб.

Отсюда следует, что $AB \parallel DC$; $AC \perp BD$; $AO = OC$.

Рассмотрите еще один из возможных вариантов моделирования условий задачи. Формализуйте условия задачи в виде «Дано» и чертежа и самостоятельно докажите.



11. Две стороны четырехугольника параллельны, а диагонали равны между собой. Докажите, что две другие стороны равны и параллельны.

Дано:

$\left.\begin{matrix} ABCD \\ BC \parallel AD \\ AC = BD \end{matrix}\right|$

а) $AB \parallel DC$
б) $AB = DC$

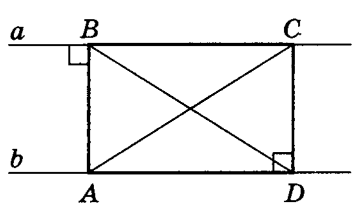
Рассмотрим $a \parallel b$.

а) По условию $AC = BD$.

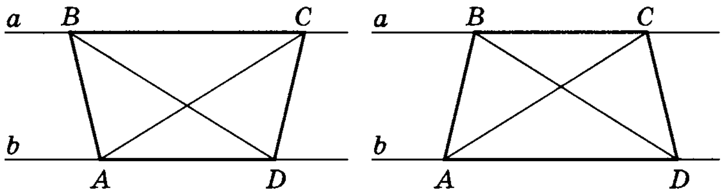
Пусть $\left.\begin{matrix} DC \perp AD \\ AB \perp BC \end{matrix}\right\|$,

тогда $AB = DC$

и $AB \parallel DC$.

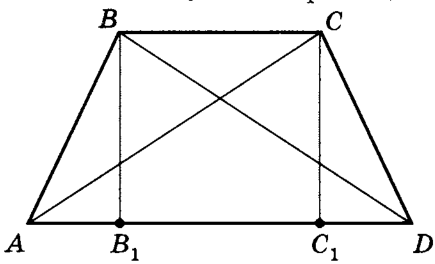


б)



Известно, что если в трапеции диагонали равны, то она равнобедренная.

Для доказательства пусть $BB_1 \perp AD$; $CC_1 \perp AD$.



в) Рассмотрим треугольники ACC_1 и DBB_1.

1. $BB_1 = CC_1$ (как высоты одной трапеции).
2. $AC = DB$ (по условию), значит по гипотенузе и катету $\triangle ACC_1 = \triangle DBB_1$, значит $\angle DAC = \angle ADB$.
3. Так как $BC \parallel AD$, то $\left.\begin{array}{l} \angle DAC = \angle ACB \\ \angle ADB = \angle DBC \end{array}\right|$,

   т. е. $\angle ACB = \angle ADB = \angle DBC$.

г) Рассмотрим треугольники ACB и DBC.

1. BC — общая.
2. $AC = DB$ (по условию).
3. $\angle ACB = \angle DBC$ (по доказанному), значит $\triangle ACB = \triangle DBC$, тогда $AB = DC$ $(AB \nparallel DC)$.
4. Вывод. В любом случае $AB = CD$.
5. В общем случае, естественно, $AB \nparallel DC$.

12. В четырехугольнике две стороны параллельны, а две другие равны между собой. Верно ли, что равные стороны параллельны, а диагонали равны между собой?

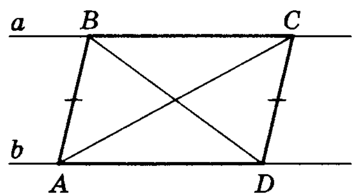
Дано:

$ABCD$
$BC \parallel AD$
$AB = CD$

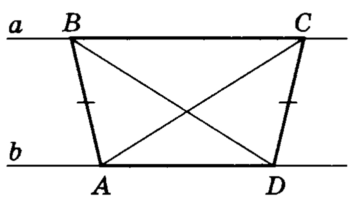
а) $AB \parallel DC$
б) $AC = BD$

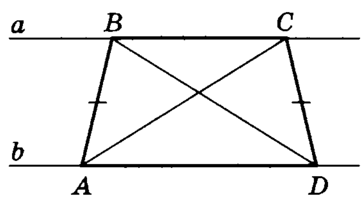
а) Рассмотрим $a \parallel b$, $AB = CD$.

Пусть $AB \parallel DC$, тогда $ABCD$ — параллелограмм, а значит, в общем случае $AC \neq BD$, если $ABCD$ не является прямоугольником.



Пусть $AB \nparallel DC$, тогда $ABCD$ — равнобедренная трапеция.





$AB = CD, \quad AC = BD, \quad AB \nparallel DC.$

Других случаев нет, так как если две стороны четырехугольника параллельны, то это либо параллелограмм, либо трапеция.

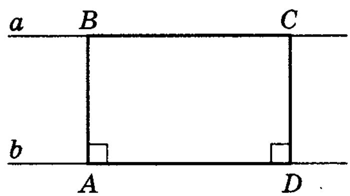
в) Вывод. В общем случае $AC \neq BD$; $AB \nparallel DC$.

13. В четырехугольнике две стороны параллельны, а два угла при рядом расположенных вершинах равны. Докажите, что диагонали равны и две другие стороны также равны.

Дано (один из возможных вариантов моделирования условий задачи):

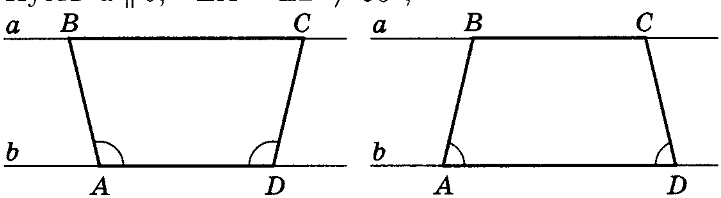
$ABCD$
$BC \parallel AD$
$\angle A = \angle D$

а) $AC = BD$
б) $AB = CD$



а) Пусть $a \parallel b$,
$\angle A = \angle D = 90°$, тогда
$AB = CD$, $AC = BD$
(прямоугольник).

б) Пусть $a \parallel b$, $\angle A = \angle D \neq 90°$,

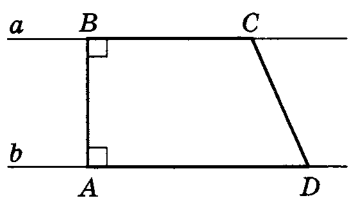


тогда $ABCD$ — трапеция, значит
$AB = CD$, $AC = BD$.

Дано (другой возможный вариант моделирования условий задачи):

$ABCD$
$BC \parallel AD$
$\angle ABC = \angle DAB = 90°$

а) $AC = BD$
б) $AB = CD$



В этом случае $\begin{matrix} AB \neq DC \\ AB \nparallel DC \end{matrix}$.

Вывод. В общем случае $AC \neq BD$ и $AB \neq DC$.

14. В четырехугольнике две стороны параллельны. Диагонали четырехугольника пересекаются в точке O, получившиеся при этом два отрезка двух разных диагоналей равны между собой. Докажите, что два других отрезка диагоналей четырехугольника равны между собой и углы при вершинах одной из параллельных сторон равны между собой.

Дано (один из возможных вариантов моделирования условий задачи):

$$\left.\begin{array}{l} ABCD \\ BC \parallel AD \\ O = AC \cap BD \\ AO = OD \end{array}\right|$$

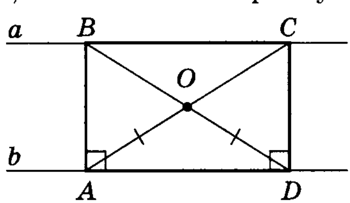
а) $\angle A = \angle D$
б) $BO = OC$

1) Рассмотрим $\triangle AOD$.

1. $AO = OD$ (по условию), значит $\angle OAD = \angle ODA$.
2. $BC \parallel AD$ (по условию), тогда $\left.\begin{array}{l} \angle OAD = \angle OCB \\ \angle ODA = \angle OBC \end{array}\right|$ (как внутренние накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущих AC и BD), следовательно $BO = OC$.
3. Так как $\left.\begin{array}{l} AC = AO + OC \\ BD = DO + OD \end{array}\right|$, то $AC = BD$.

2) Пусть $a \parallel b$, $AC = BD$, $O = AC \cap BD$, $AO = OD$.

Предположим, что $ABCD$ — прямоугольник, тогда



$\angle A = \angle D$, $BO = OC$.

3) Пусть $a \parallel b$, $AO = OD$, $AC = BD$.

Предположим, что $ABCD$ — трапеция.

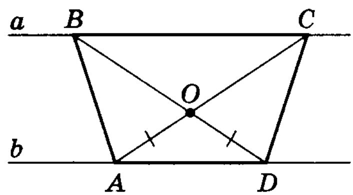
Рассмотрим $\triangle AOB$ и $\triangle DOC$.

$AO = OD$ (по условию), $BO = OC$ (по доказанному), $\angle AOB = \triangle DOC$ (как вертикальные).

Тогда $\triangle AOB = \triangle DOC$ по I признаку равенства треугольников.

Следовательно, $AB = DC$, т. е. трапеция равнобедренная.

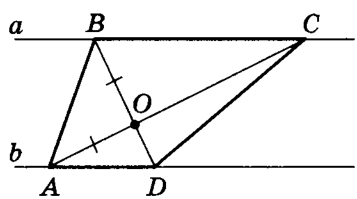
Тогда $\angle DAB = \angle ADC$, $BO = OC$, что и требовалось доказать.



Дано (еще один из возможных вариантов моделирования условий задачи):

$ABCD$
$BC \parallel AD$
$O = AC \cap BD$
$BO = OA$

а) $\angle A = \angle D$
б) $OD = OC$



Из чертежа следует, что возможен случай, при котором $\angle A \neq \angle D$ и $OD \neq OC$. Следовательно, найден контрпример, опровергающий предыдущие выводы.

Вывод. В общем случае утверждение задачи не выполняется: $\angle A \neq \angle D$ и $OB \neq OC$.

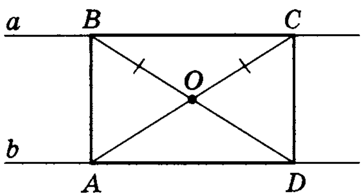
15. В четырехугольнике две стороны параллельны. Диагонали точкой пересечения делятся на четыре отрезка, два из которых, принадлежащие разным диагоналям и примыкающие к одной из параллельных сторон, равны между собой. Докажите, что остальные стороны четырехугольника равны между собой.

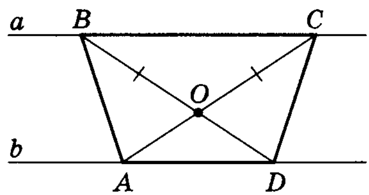
Дано:

$ABCD$
$BC \parallel AD$
$AC \cap BD = O$
$BO = OC$

$AB = DC$

В этом случае возможны только два вида четырехугольников, так как равные отрезки разных диагоналей примыкают к одной из параллельных сторон. Очевидно, что четырехугольник может быть или прямоугольником, или трапецией.





а) Рассмотрим $\triangle BOC$.

$BO = OC$ (по условию), значит $\angle OBC = \angle OCB$.

$BC \parallel AD$ (по условию), тогда $\left.\begin{array}{l}\angle OBC = \angle ODA \\ \angle OCB = \angle OAD\end{array}\right|$,

следовательно $AO = OD$.

б) Рассмотрим $\triangle AOB$ и $\triangle DOC$.

$BO = OC$ (по условию), $AO = OD$ (по доказанному), $\angle AOB = \angle DOC$ (как вертикальные). Тогда $\triangle AOB =$ $= \triangle DOC$ по I признаку равенства треугольников.

Значит, $AB = DC$, что и требовалось доказать.

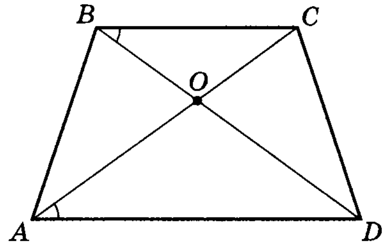
Вывод. В общем случае $AB = DC$.

16. В четырехугольнике две стороны параллельны. Угол между одной диагональю и одной из параллельных сторон равен углу между другой диагональю и другой из параллельных сторон. Верно ли, что две другие стороны равны между собой?

Дано (один из возможных вариантов моделирования условий задачи):

$ABCD$
$BC \parallel AD$
$\angle CAD = \angle CBD$

$AB = DC$



Отметим, что в данной задаче вид четырехугольника — трапеция или прямоугольник — для доказательства несущественен.

а) Так как $BC \parallel AD$,

то $\left.\begin{array}{l}\angle CAD = \angle ACB \\ \angle CBD = \angle ADB\end{array}\right|$ (как внутренние накрест лежащие

при $BD \parallel AD$ и секущих AC и BD).

б) Так как $\angle CAD = \angle CBD$, то $\left.\begin{array}{l}\angle CBD = \angle ACB \\ \angle CAD = \angle ADB\end{array}\right|$,

тогда $BO = OC$ и $AO = OD$, значит $AC = BD$.

в) Рассмотрим $\triangle AOB$ и $\triangle DOC$.

$\begin{array}{l}BO = OC \\ AO = OD\end{array}$ (по доказанному),

$\angle AOB = \angle DOC$ (как вертикальные),

следовательно $\triangle AOB = \triangle DOC$ по I признаку равенства треугольников, значит $AB = DC$, что и требовалось доказать.

Очевидно, что если $BO = AO$, то $ABCD$ — прямоугольник, а если $BO \neq AO$, то $ABCD$ — трапеция.

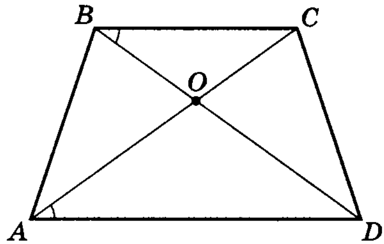
В общем виде $AB = DC$.

17. В четырехугольнике две стороны параллельны. Угол между одной диагональю и одной из параллельных сторон равен углу между другой диагональю и другой из параллельных сторон. Докажите, что углы при вершинах одной из параллельных сторон равны.

Дано (один из возможных вариантов моделирования условий задачи):

$ABCD$
$BC \parallel AD$
$\angle DBC = \angle CAD$

$\angle A = \angle D$



а) Используя идеи и план доказательства задачи 16, получим, что $AC = BD$, $AB = DC$.

б) Рассмотрим $\triangle ABD$ и $\triangle DCA$.

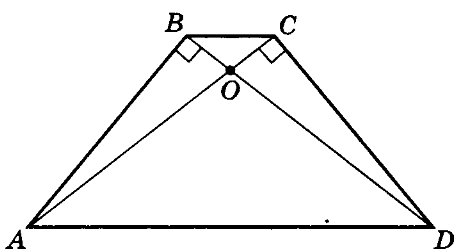
$AC = BD$, $AB = DC$, AD — общая, значит по III признаку равенства треугольников $\triangle ABD = \triangle DCA$, тогда $\angle A = \angle D$, что и требовалось доказать.

18. В четырехугольнике две стороны параллельны друг другу, а две другие перпендикулярны диагоналям. Докажите, что перпендикулярные диагоналям стороны равны между собой.

Дано:

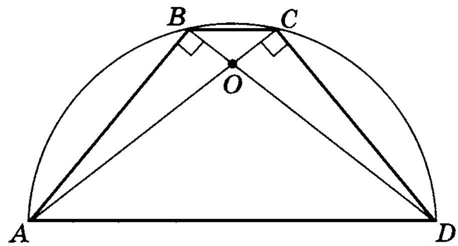
$ABCD$
$BC \parallel AD$
$AC \perp CD$
$AB \perp BD$

$AB = DC$



а) Так как $BC \parallel AD$, то этот четырехугольник — либо параллелограмм, либо трапеция. Известно, что не существует параллелограмма, у которого обе диагонали перпендикулярны противоположным сторонам.

б) Пусть $ABCD$ — трапеция. Тогда так как треугольники ABD и DCA прямоугольные, то вершины B и C принадлежат одной и той же окружности диаметра AD.



Действительно, три точки, не лежащие на одной прямой, определяют единственную окружность, а значит, $\triangle ABD$ принадлежит окружности диаметра AD.

Но $\triangle DCA$ также определяет единственную окружность диаметра AD, тогда они совпадают.

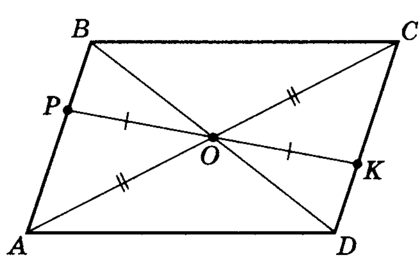
Учтя, что $BC \parallel AD$, получим $\smile AB = \smile DC$, значит $AB = CD$.

19. В четырехугольнике точка пересечения диагоналей O одну из них делит пополам. Отрезок, соединяющий две противоположные стороны и проходящий через точку O, также делится ею пополам. Докажите, что стороны, которые она пересекает, равны между собой.

Дано (один из возможных вариантов моделирования условий задачи):

$ABCD$
$P \in AB$
$K \in DC$
$AC \cap BD = O$
$O \in PK$
$OP = OK$
$AO = OC$

$AB = DC$



а) Рассмотрим треугольники APO и CKO.

1. $OP = OK$ по условию;
2. $AO = OC$ по условию;
3. $\angle AOP = \angle COK$ как вертикальные.

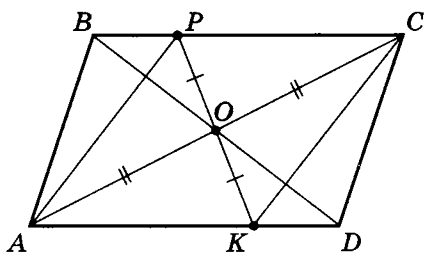
Значит, по I признаку равенства треугольников $\triangle APO = \triangle CKO$. Следовательно, $\angle OAP = \angle OCK$, значит $AB \parallel DC$ по признаку параллельности двух прямых.

б) Рассмотрим треугольники ABO и CDO.

1. $AO = OC$;
2. $\angle OAP = \angle OCK$ (по доказанному);
3. $\angle AOB = \angle COD$ (как вертикальные).

Значит $\triangle ABO = \triangle CDO$ по II признаку равенства треугольников. Следовательно, $AB = DC$.

Рассмотрите еще один возможный вариант моделирования условий задачи и докажите его.



20. Диагонали четырехугольника пересекаются в точке O. Отрезок, соединяющий две противоположные стороны и проходящий через точку O, делится ею пополам. Отрезки, соединяющие вершины противоположных углов с концами отрезка, проходящего через точку O, попарно равны между собой. Верно ли равенство между собой двух других сторон четырехугольника?

Дано (один из возможных вариантов моделирования условий задачи):

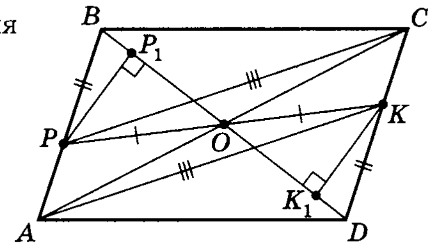
$ABCD$

$OP = OK$

$AK = PC$

$PB = DK$

$BC = AD$



а) Проведем дополнительное построение:

$PP_1 \perp BD; \quad KK_1 \perp BD.$

б) Рассмотрим треугольники OPP_1 и OKK_1.

Так как $\angle POB = \angle KOD$ (как вертикальные углы) и $OP = OK$ (по условию), то по гипотенузе и острому углу $\triangle OPP_1 = \triangle OKK_1$.

Тогда $PP_1 = KK_1$, $OP_1 = OK_1$ и $\angle P_1PO = \angle K_1KO$.

в) Рассмотрим треугольники PBP_1 и KDK_1.

Так как $PB = DK$ и $PP_1 = KK_1$, то по гипотенузе и катету $\triangle PBP_1 = \triangle KDK_1$.

Значит $BP_1 = DK_1$ и $\angle PBO = \angle KDO$, следовательно, по признаку параллельности $AB \parallel DC$.

Так как $OP_1 = OK_1$ (по доказанному), $BP_1 = DK_1$ (по доказанному), $BO = BP_1 + OP_1$, $OD = OK_1 + DK_1$, то $BO = OD$.

г) $ABCD$ — четырехугольник, где $AB \parallel DC$, следовательно, $\angle APO = \angle CKO$ (как внутренние накрест лежащие при $AB \parallel DC$ и секущей PK) и $\angle POA =$ $= \angle KOC$ (как вертикальные).

д) Рассмотрим треугольники APO и CKO.

$OP = OK$ по условию;

$\angle APO = \angle CKO$ и $\angle AOP = \angle COK$ (по доказанному).

Значит, по II признаку $\triangle APO = \triangle CKO$,

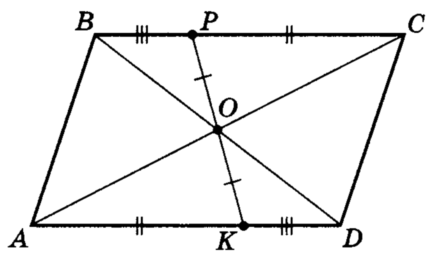
тогда $AO = OC$.

е) Получили $ABCD$ — четырехугольник, диагонали которого точкой пересечения делятся пополам.

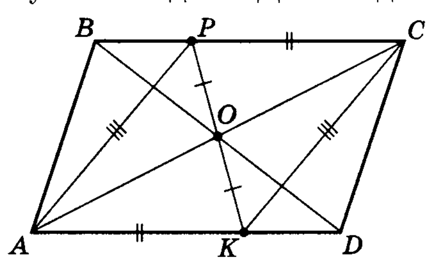
По признаку это значит, что $ABCD$ — параллелограмм, тогда $AD = BC$.

Примечание. Отметим, что в этом варианте моделирования условий задачи равенство $AK = PC$ совсем не использовалось.

Возможен еще один вариант моделирования условий задачи. Формализуйте «Дано» данного варианта моделирования условий задачи и докажите.



Возможен и третий, и четвертый вариант моделирования условий задачи. Формализуйте для каждого варианта моделирования условий задачи «Дано» и докажите.



21. Две стороны четырехугольника параллельны, две другие — возможно, нет. Угол между диагональю и одной из возможно непараллельных сторон равен углу между другой диагональю и другой возможно непараллельной стороной. Докажите, что возможно непараллельные стороны равны между собой.

Дано:

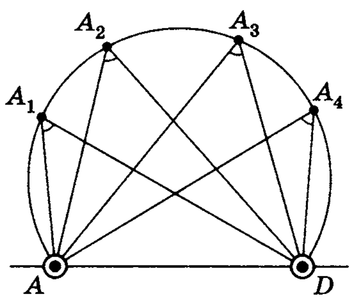
$ABCD$

$BC \parallel AD$

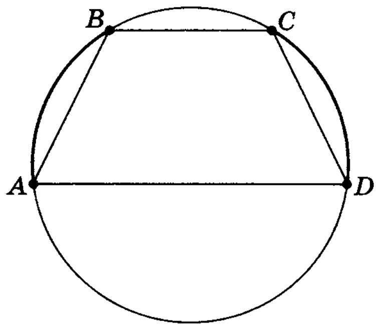
$\angle ABD = \angle ACD$

$AB = DC$

а) Известна теорема: *множество всех вершин углов, из которых отрезок виден под одним и тем же углом, есть множество всех точек окружности, лежащих в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей отрезок — хорду (без ее концов).*



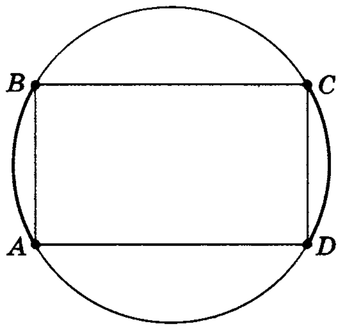
Так как $BC \parallel AD$, то



б) Если это трапеция, то дуги, ограниченные параллельными хордами, равны,

т. е. $BC \parallel AD$; $\smile AB = \smile DC$, значит $AB = DC$.

в) Если рассматривать параллелограмм, то это только прямоугольник, так как *для того чтобы около четырехугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма противоположных углов совпадала и была равна* 180°.



Следовательно, $AB = DC$.

22. В четырехугольнике две стороны параллельны, а диагонали взаимно перпендикулярны. Докажите, что две другие стороны равны между собой.

Дано:
$ABCD$
$BC \parallel AD$
$AC \perp BD$

$AB = CD$

а) Если $ABCD$ — параллелограмм, то $AB = CD$. Отметим также, что так как $AC \perp BD$, то $ABCD$ — ромб.

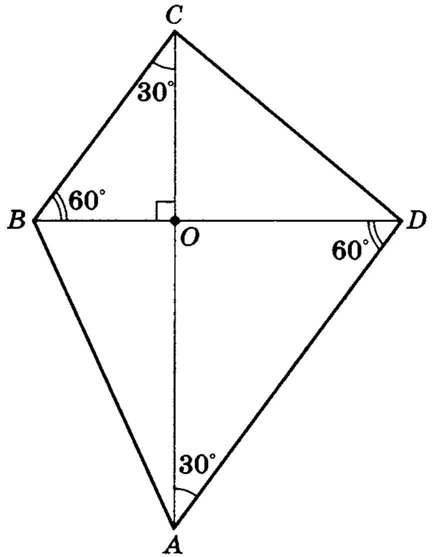
б) Пусть $ABCD$ — трапеция ($AB \nparallel CD$).

Попытка в лоб доказать, что $AB = CD$, не проходит.

Попробуем построить контрпример, т. е. построить трапецию, для которой $BC \parallel AD$, $AC \perp BD$, но $AB \neq CD$.

1. Пусть $AC \perp BD$. Пусть $\triangle OBC$ таков, что $BC = 2OB$ $\begin{pmatrix} \angle BCO = 30^\circ \\ \angle CBO = 60^\circ \end{pmatrix}$.

   Пусть $AD = 2OD$. Пусть $OB \neq OD$.



2. $\triangle OBC$ подобен $\triangle ODA$ (по углам), но $\triangle OBC \neq \triangle ODA$, тогда $BC \neq AD$ $(BC \parallel AD)$.
3. Так как $\angle DBC \neq \angle ACB$, то трапеция не равнобедренная, т. е. $AB \neq DC$.

   Значит, в общем случае утверждение ложно.

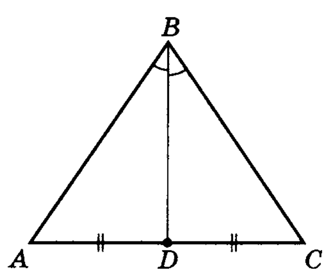
23. В треугольнике медиана и биссектриса, проведенные к одной и той же стороне, совпадают. Докажите, что треугольник равнобедренный.

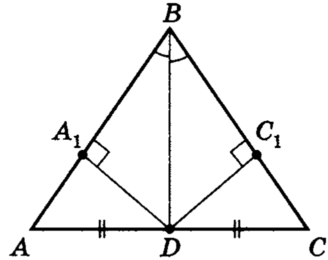
Дано:

$\triangle ABC$

$BD = m_{AC} = l_{AC}$

$AB = BC$





а) Выполним дополнительные построения:
$DC_1 \perp BC$ и $DA_1 \perp AB$.

б) Рассмотрим треугольники BDA_1 и BDC_1.
BD — общая,
$\angle DBA_1 = \angle DBC_1$.
Значит $\triangle BDA_1 = \triangle BDC_1$, значит $DA_1 = DC_1$.

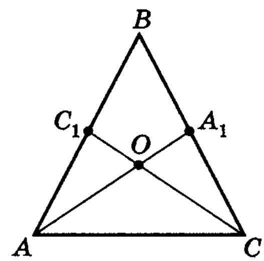
Примечание. Можно проще, если использовать тот факт, что биссектриса — множество всех точек, равноудаленных от сторон угла. Тогда сразу $DA_1 = DC_1$.

в) Рассмотрим треугольники ADA_1 и CDC_1. По гипотенузе и катету $\triangle ADA_1 = \triangle CDC_1$, значит $\angle A = \angle C$, тогда по признаку равнобедренности $AB = BC$.

24. В треугольнике медианы, проведенные к двум сторонам, равны между собой. Докажите, что тогда треугольник равнобедренный.

Дано:
$\triangle ABC$
$AA_1 = m_{BC}$
$CC_1 = m_{AB}$
$m_{AB} = m_{BC}$

$AB = BC$



а) Так как медианы точкой пересечения делятся в отношении два к одному, считая от вершины, то

$$AO = \frac{2}{3}AA_1; \quad CO = \frac{2}{3}CC_1.$$

б) По условию $AA_1 = CC_1$, значит $AO = CO$, т. е. $\angle OAC = \angle OCA$, и $OC_1 = OA_1$.
Тогда $\triangle C_1AO = \triangle A_1CO$, значит $\angle C_1AO = \angle A_1CO$.

в) Следовательно $\angle BAC = \angle BCA$, т. е. $AB = BC$.

25. Два треугольника равны, причем одна сторона у них общая. Из одной их общей вершины проведена биссектриса угла первого треугольника, а из другой общей вершины — биссектриса угла второго треугольника. Докажите, что отрезки сторон, на которые биссектрисы делят стороны, прилежащие к общей стороне, соответственно равны между собой.

Дано:

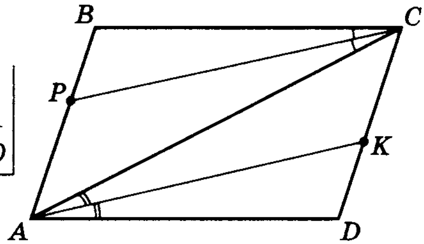
$\triangle ABC = \triangle ADC$

CP — биссектриса $\angle BCA$

AK — биссектриса $\angle CAD$

а) $PB = DK$

б) $AP = CK$



Здесь необходимо **точно** понимать, что значит равенство

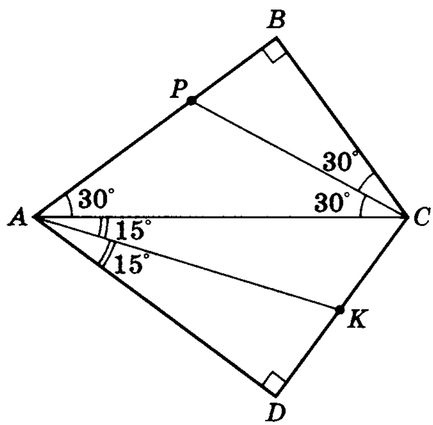
$$\triangle ABC = \triangle ADC. \text{ А это значит, что } \left.\begin{array}{l} AB = AD \\ BC = DC \\ AC = AC \end{array}\right| .$$

Похоже, что $ABCD$, возможно, не параллелограмм.

Приведем контрпример. Пусть $\triangle ABC$ такой, что

$\angle B = 90°$, $BC = 1$, $AC = 2$ $(\angle D = 90°,\ DC = 1)$.

Тогда чертеж такой:



Тогда очевидно, что $PB \neq DK$, $AP \neq CK$,

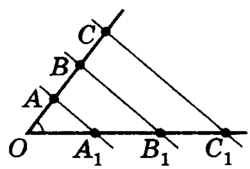
т. е. в общем случае утверждения ложны.

Теорема Фалеса, подобие

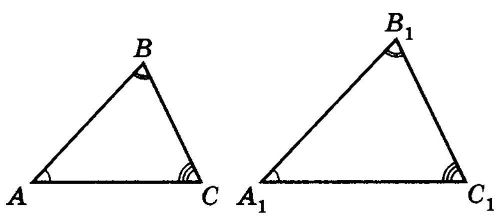
Определение 1. Отрезки AB и CD называются пропорциональными отрезкам A_1B_1 и C_1D_1, если $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{CD}{C_1D_1}$.

Примечание. Можно аналогичным образом ввести понятие пропорциональности и для трех, четырех, ..., n отрезков.

Теорема Фалеса[2]**.** При пересечении сторон угла параллельными прямыми на сторонах угла образуются пропорциональные отрезки $\dfrac{OA}{OA_1} = \dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \ldots$



Определение 2. Если в $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ углы соответственно равны — $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ — то противолежащие соответственно равным углам стороны (в $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$) — BC и B_1C_1, AC и A_1C_1, AB и A_1B_1 — называются сходственными.



Определение 3. Два треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого треугольника. Подобие треугольников записывается так: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

[2] Фалес из Милета — древнегреческий ученый (625–547 г. до н. э.).

Итак:

а) $\angle A = \angle A_1, \quad \angle B = \angle B_1, \quad \angle C = \angle C_1$.

б) $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = k$,

где k — отношение сходственных сторон, называемое коэффициентом подобия подобных треугольников.

Теорема 1. Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия. Иными словами, если $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, то $\boxed{\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = k^2}$.

Естественно, что для решения задач в чистом виде использование определения подобия треугольников может быть малоэффективным. Известны признаки подобия треугольников, которые существенно облегчают решение задач на подобие.

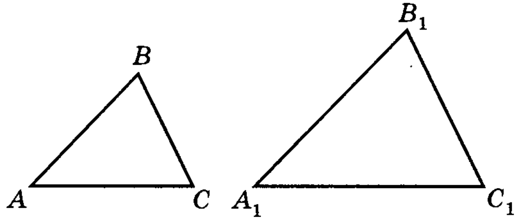
Признаки подобия треугольников

1. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники являются подобными.

2. Если один угол одного треугольника равен углу другого треугольника, а прилежащие к этим углам стороны пропорциональны, то такие треугольники являются подобными.

3. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники являются подобными.

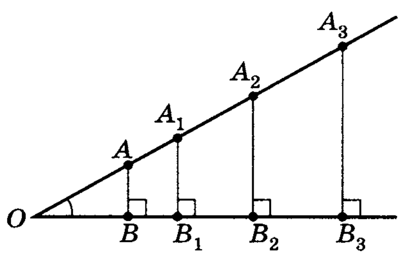
Примечание. Используя определение подобия треугольников, можно доказать, что не только длины сходственных сторон подобных треугольников, но и длины биссектрис, медиан, высот, периметров, радиусов вписанных и описанных окружностей относятся как коэффициенты подобия.



$$\boxed{\begin{aligned}\frac{AB}{A_1B_1} &= \frac{l_{AB}}{l_{A_1B_1}} = \frac{m_{AB}}{m_{A_1B_1}} = \frac{H_{AB}}{H_{A_1B_1}} = \\ &= \frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle A_1B_1C_1}} = \frac{r_{\text{в}\ \triangle ABC}}{r_{\text{в}\ \triangle A_1B_1C_1}} = \frac{R_{\text{о}\ \triangle ABC}}{R_{\text{о}\ \triangle A_1B_1C_1}} = k\end{aligned}}.$$

Напомним простейшие тригонометрические определения и соотношения.

Рассмотрим угол AOB.



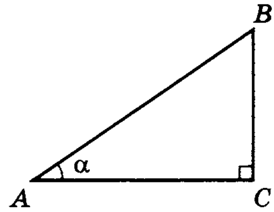
Отрезки $AB, A_1B_1, \ldots, A_nB_n$ перпендикулярны лучу $[OB)$.

Получили, что $\triangle AOB$ подобен $\triangle A_1OB_1, \ldots,\ \triangle A_nOB_n$.

Тогда $\dfrac{AB}{OA} = \dfrac{A_1B_1}{OA_1} = \dfrac{A_2B_2}{OA_2} = \ldots = \dfrac{A_nB_n}{OA_n}$ — величина постоянная, характеризующая угол $\angle AOB$.

$\dfrac{OB}{OA} = \dfrac{OB_1}{OA_1} = \dfrac{OB_2}{OA_2} = \ldots = \dfrac{OB_n}{OA_n}$ — другая постоянная величина, характеризующая также угол $\angle AOB$.

Очевидно, что эти численные характеристики не зависят от линейных размеров треугольников. Для прямоугольных треугольников можно дать следующие определения.



Определение 4. Синусом угла α в прямоугольном треугольнике называется отношение катета, противолежащего углу α, к гипотенузе — $\sin\alpha = \dfrac{BC}{AB}$.

Определение 5. Косинусом угла α в прямоугольном треугольнике называется отношение катета, прилежащего к углу α, к гипотенузе — $\cos\alpha = \dfrac{AC}{AB}$.

Примечание. Из определений следует, что

а) $BC = AB\sin\alpha$; $AB = \dfrac{BC}{\sin\alpha}$.

б) $AC = AB\cos\alpha$; $AB = \dfrac{AC}{\cos\alpha}$.

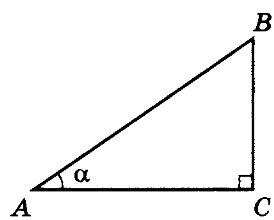
в) Для $\triangle ABC$

по теореме Пифагора

$BC^2 + AC^2 = AB^2 \,|\, : AB^2$

$$\frac{BC^2 + AC^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2},$$

т. е. $\dfrac{BC^2}{AB^2} + \dfrac{AC^2}{AB^2} = 1,$



$\left(\dfrac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\dfrac{AC}{AB}\right)^2 = 1$, значит, учитывая данные определения, получим $\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$ — основное тригонометрическое тождество.

Тогда $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ и $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$.

Упражнение.

Дано:

$ABCD$ — прямоугольник
$AB = 12$
$BC = 16$
$BP \perp AC$
$PM \perp BC$
$DK \perp AC$
$KN \perp DC$

I. Укажите все подобные треугольники.

II. Найдите:

а) AC

б) BP

в) CK

г) PK

д) $\cos(\angle BAC)$

е) $\cos(\angle ADK)$

ж) $\sin(\angle CBP)$

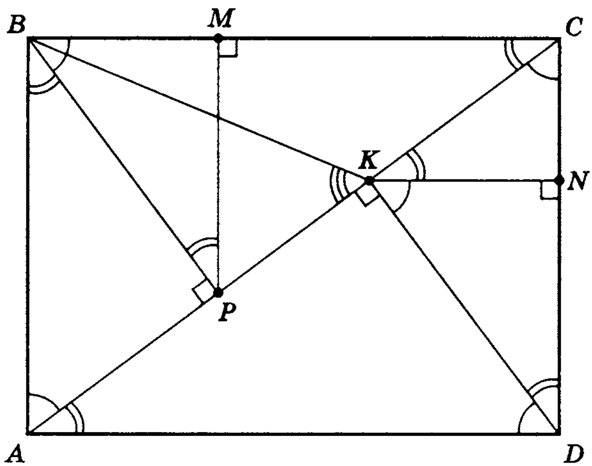
з) $\sin(\angle CDK)$

и) $\operatorname{tg}(\angle BKP)$

к) PM

л) KN

м) S_{ABMP}



I. $\triangle ABC \sim \triangle APB \sim \triangle BPC \sim \triangle CNK \sim \triangle CDA \sim \triangle BMP \sim$ $\sim \triangle PMC \sim \triangle KND \sim \triangle DKA$.

II. а) $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$; $\quad AC = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$.

б) $\left.\begin{array}{l} S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \\ S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AC \cdot BP \end{array}\right|$, значит $AB \cdot BC = AC \cdot BP$;

$$BP = \frac{AB \cdot BC}{AC}; \quad BP = \frac{12 \cdot 16}{20} = 9{,}6.$$

в) Так как $\triangle ABP = \triangle CDK$, то

$CK = AP = \sqrt{AB^2 - BP^2} = \sqrt{(AB - BP)(AB + BP)}$,

т. е. $CK = \sqrt{(12 - 9{,}6)(12 + 9{,}6)} = \sqrt{2{,}4 \cdot 21{,}6} =$

$= \sqrt{\dfrac{24 \cdot 216}{10^2}} = \sqrt{\dfrac{2^2 \cdot 6^4}{10^2}} = \dfrac{2 \cdot 36}{10} = 7{,}2.$

г) $PK = AC - 2AP$, т. е. $PK = 20 - 2 \cdot 7{,}2 = 5{,}6$.

д) $\cos(\angle BAC) = \dfrac{AB}{AC}$, т. е. $\cos(\angle BAC) = \dfrac{12}{20} = 0{,}6$.

Можно доказать, что

$\angle BAC = \angle CBP = \angle ADK = \angle DKN$;

$\angle BCA = \angle CKN = \angle CDK = \angle BPM = \angle NDK$.

е) $\cos(\angle ADK) = \cos(\angle BAC) = 0{,}6$.

ж) $\sin(\angle CBP) = \sin(\angle BAC) = \dfrac{BC}{AC}$,

т. е. $\sin(\angle CBP) = \dfrac{16}{20} = 0{,}8$.

з) $\sin(\angle CDK) = \sin(\angle BCA) = \dfrac{AB}{AC}$,

т. е. $\sin(\angle CDK) = \dfrac{12}{20} = 0{,}6$.

и) $\mathrm{tg}(\angle BKP) = \dfrac{BP}{PK}$, т. е. $\mathrm{tg}(\angle BKP) = \dfrac{9{,}6}{5{,}6} = \dfrac{12}{7}$.

к) $PM = BP \cdot \sin(\angle PBM)$.

Так как $\angle BAC = \angle PBM$,

то $\sin(\angle BAC) = \sin(\angle CBP) = 0{,}8$.

Тогда $PM = 9{,}6 \cdot 0{,}8 = 7{,}68$.

л) $KN = DK \cdot \sin(\angle NDK)$.

$\sin(\angle NDK) = 0{,}6$, значит $KN = 9{,}6 \cdot 0{,}6 = 5{,}76$.

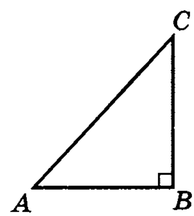
м) $S_{ABMP} = \dfrac{AB + PM}{2} \cdot BM$ ($ABMP$ — трапеция).

$BM = BP\cos(\angle CBP)$, где $\angle CBP = \angle BAC$;

$BM = 9{,}6 \cdot 0{,}6 = 5{,}76 = KN$ ($\triangle BMP = \triangle KND$);

Значит $S_{ABMP} = \dfrac{12 + 7{,}68}{2} \cdot 5{,}76 = 56{,}6784.$

Задача 1. В $\triangle ABC$ $AB \perp BC$, $AC = 12$, $\sin(\angle A) = \dfrac{3}{4}$. Найдите площадь треугольника ABC.



а) $\sin(\angle A) = \dfrac{BC}{AC}$; $BC = AC\sin(\angle A)$.

Тогда $BC = 12 \cdot \dfrac{3}{4}$; $BC = 9$.

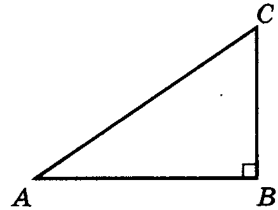
б) $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2}$;

$AB = \sqrt{12^2 - 9^2} = \sqrt{144 - 81} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$.

в) $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot BC$; $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 3\sqrt{7} \cdot 9 = \boxed{13{,}5\sqrt{7}}$.

Обратите внимание, что порядок букв в обозначении вершин треугольника другой (см. с. 74). Это сделано для того, чтобы при решении задачи были осмысленно использованы определения синуса и косинуса угла A.

Задача 2. В $\triangle ABC$ $AB \perp BC$, $AB = 15$, $\cos(\angle A) = \dfrac{3}{5}$. Найдите площадь и периметр $\triangle ABC$.



а) $\cos(\angle A) = \dfrac{AB}{AC}$,

тогда $AC = \dfrac{AB}{\cos(\angle A)}$,

значит $AC = \dfrac{15}{\frac{3}{5}} = 25$.

б) $\sin^2(\angle A) + \cos^2(\angle A) = 1; \quad \sin^2(\angle A) = 1 - \cos^2(\angle A);$

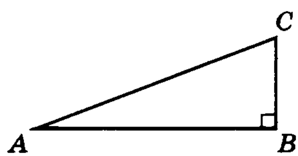
$$\sin^2(\angle A) = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{25-9}{25} = \frac{16}{25}; \quad \sin(\angle A) = \frac{4}{5}.$$

в) $\sin(\angle A) = \dfrac{BC}{AC}; \quad BC = AC\sin(\angle A); \quad BC = 25 \cdot \dfrac{4}{5} = 20.$

г) $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot BC; \quad S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20 = \boxed{150}.$

д) $P_{\triangle ABC} = 15 + 25 + 20 = \boxed{60}.$

Задача 3. В $\triangle ABC$ $AB \perp BC$, $BC = 34$, $\cos(\angle A) = \dfrac{15}{17}$. Найдите площадь и периметр $\triangle ABC$.



а) Так как $\sin^2(\angle A) = 1 - \cos^2(\angle A)$,

то $\sin^2(\angle A) = 1 - \left(\dfrac{15}{17}\right)^2 = \dfrac{17^2 - 15^2}{17^2} =$

$$= \frac{(17-15)(17+15)}{17^2} = \frac{2 \cdot 32}{17^2} = \left(\frac{8}{17}\right)^2,$$

т. е. $\sin(\angle A) = \dfrac{8}{17}$.

б) $\sin(\angle A) = \dfrac{BC}{AC}$, тогда

$$AC = \frac{BC}{\sin(\angle A)}; \quad AC = \frac{34}{\frac{8}{17}} = \frac{17^2}{4} = \frac{289}{4} = 72{,}25.$$

в) $\cos(\angle A) = \dfrac{AB}{AC}; \quad AB = AC\cos(\angle A);$

$$AB = \frac{289}{4} \cdot \frac{15}{17} = \frac{17 \cdot 15}{4} = \frac{255}{4} = 63{,}75.$$

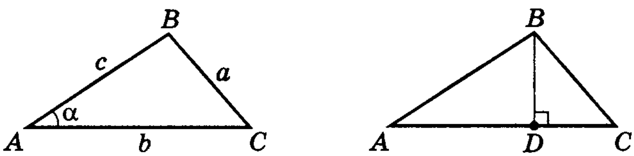
г) $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot BC$; $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{255}{4}\cdot 34=\dfrac{255\cdot 17}{4}=\boxed{1083{,}75}$.

д) $P_{\triangle ABC}=34+72{,}25+63{,}75=\boxed{170}$.

Весьма эффективно применение простейших тригонометрических соотношений и для обычных треугольников.

Задача 4. В остроугольном $\triangle ABC$ $AB=c$, $AC=b$, $\angle BAC=\alpha$ $(0<\alpha<90^\circ)$. Найдите площадь треугольника и сторону BC.

а) Проведем доп. построение. Пусть $BD\perp AC$.



б) Так как $\sin(\angle BAC)=\sin\alpha=\dfrac{BD}{AB}$,

то $BD=AB\sin\alpha$, т.е. $BD=c\cdot\sin\alpha$.

в) $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot BD$, т.е. $\boxed{S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\alpha}$.

г) $\cos(\angle BAC)=\cos\alpha=\dfrac{AD}{AB}$,

тогда $AD=AB\cos\alpha$, т.е. $AD=c\cdot\cos\alpha$.

д) $DC=AC-AD$, т.е. $DC=b-c\cdot\cos\alpha$.

е) Из $\triangle BDC$ по теореме Пифагора получим

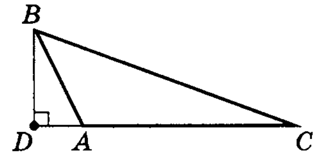
$BC^2=BD^2+DC^2$. Таким образом,

$$BC^2=(c\sin\alpha)^2+(b-c\cos\alpha)^2=$$
$$=c^2\sin^2\alpha+b^2-2bc\cos\alpha+c^2\cos^2\alpha=$$
$$=c^2\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)+b^2-2bc\cos\alpha.$$

Тогда если $BC^2=a^2$, то $\boxed{a^2=c^2+b^2-2bc\cdot\cos\alpha}$.

В таком виде это теорема косинусов для острого угла $(\angle BAC)$: $BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\left(\widehat{AB;AC}\right)}$.

Примечание. Для тупого угла $\angle BAC$ необходимо несколько иное построение:
$\angle BAD = 180° - \angle BAC$;



$$BD = AB \cdot \sin(\angle BAD) = AB \sin(180° - \angle BAC);$$
$$AD = AB \cdot \cos(\angle BAD) = AB \cos(180° - \angle BAC).$$

Значит, необходимо расширение понятия тригонометрических соотношений для углов $0 < \alpha < 180°$, где:

$\boxed{\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha}$; $\boxed{\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha}$[3].

Для $0° < \alpha < 90°$ $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$.
Для $90° < \alpha < 180°$ $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$.
Для $\alpha = 90°$ $\sin\alpha = 1$, $\cos\alpha = 0$;
$BD \equiv BA \equiv BC$
(см. рисунок на стр. 79).

Значит $BD = AB\sin(\angle BAC)$; $AD = -AB\cos(\angle BAC)$,
тогда $DC = AC + AD = AC - AB\cos(\angle BAC)$
$(\cos(\angle BAC) < 0)$.

Из $\triangle BDC$: $BC^2 = BD^2 + DC^2$;

$$BC^2 = (AB\sin(\angle BAC))^2 + (AC - AB\cos(\angle BAC))^2 =$$
$$= \underline{AB^2\sin^2(\angle BAC)} + AC^2 - 2AC \cdot AB\cos(\angle BAC) +$$
$$+ \underline{AB^2\cos^2(\angle BAC)} =$$
$$= AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AB\cos(\angle BAC);$$

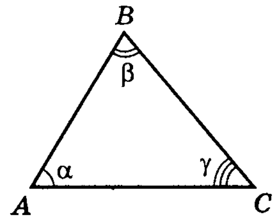
$$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AB\cos(\angle BAC)}.$$

Тогда для любого треугольника:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$	$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin\left(\widehat{a;b}\right)$
$\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$	$\sin\left(\widehat{a;b}\right) = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{ab}$

[3] См. Шахмейстер А.Х. Тригонометрия. СПб.; М., 2010, 2013. С. 89–90.

Задача 5. В $\triangle ABC$ $AB = 26$, $AC = 28$, $\cos(\angle BAC) = \dfrac{5}{13}$.
Найдите BC, $\sin(\angle ABC)$, $\cos(\angle ACB)$.



а) Обозначим $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$.

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos(\angle BAC)}$.

По теореме косинусов: $BC = \sqrt{26^2 + 28^2 - 2 \cdot 26 \cdot 28 \cdot \dfrac{5}{13}} =$

$= \sqrt{676 + 784 - 560} = \boxed{30}$.

б) 1. $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot AC \sin(\angle BAC) = \dfrac{1}{2} AB \cdot BC \sin(\angle ABC)$,

тогда $\sin(\angle ABC) = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{AB \cdot BC}$.

2. Значит, сначала необходимо найти $\sin(\angle BAC) = \sin\alpha$.

Так как $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ и $\cos\alpha = \dfrac{5}{13} > 0$ ($\alpha \in (0; 90°)$), то

$$\sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{13^2 - 5^2}{13^2} = \frac{169 - 25}{13^2} = \frac{144}{13^2} = \left(\frac{12}{13}\right)^2,$$

т. е. $\sin\alpha = \dfrac{12}{13}$.

3. Следовательно, $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 26 \cdot 28 \cdot \dfrac{12}{13} = 336$.

4. Теперь можно найти

$$\sin(\angle ABC) = \sin\beta = \frac{2 \cdot 336}{26 \cdot 30} = \frac{168}{13 \cdot 15} = \boxed{\frac{56}{65}}.$$

в) Используя формулу $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$, выразим $\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, получим

$$\cos(\angle ACB) = \cos\gamma = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC}.$$

Тогда $\cos\gamma = \dfrac{28^2+30^2-26^2}{2\cdot 28\cdot 30} = \dfrac{784+900-676}{2\cdot 28\cdot 30} =$

$$= \frac{1008}{2\cdot 28\cdot 30} = \frac{126}{14\cdot 15} = \frac{63}{7\cdot 15} = \boxed{\frac{3}{5}}.$$

Задача 6. В $\triangle ABC$ $AA_1 \perp BC$, $CC_1 \perp AB$, $BB_1 \perp AC$. Докажите, что для остроугольного $\triangle ABC$ выполняются следующие свойства:

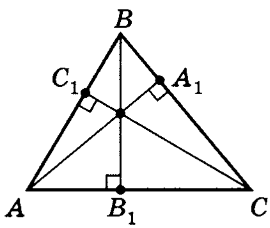
а) $\triangle AA_1B$ подобен $\triangle CC_1B$;

б) точки A, C_1, A_1, C принадлежат одной окружности;

в) $\triangle A_1C_1B$ подобен $\triangle ABC$;

г) AA_1, BB_1, CC_1 — биссектрисы $\triangle A_1B_1C_1$.

Доказательство:

а) 

1. Так как по условию задачи $AA_1 \perp BC$ и $CC_1 \perp AB$,

то из $\left.\begin{array}{ll} \triangle AA_1B & \cos(\angle B) = \dfrac{A_1B}{AB} \\ \triangle CC_1B & \cos(\angle B) = \dfrac{C_1B}{BC} \end{array}\right|$, значит $\dfrac{A_1B}{AB} = \dfrac{C_1B}{CB}$.

2. Для $\triangle AA_1B$ и $\triangle CC_1B$ угол B — общий, тогда по II признаку подобия треугольников $\triangle AA_1B$ подобен $\triangle CC_1B$, что и требовалось доказать.

б) Учитывая, что $\triangle AA_1C$ и $\triangle CC_1A$ прямоугольные с гипотенузой AC, получим AC — диаметр окружности, которой принадлежат точки A, C_1, A_1, C.

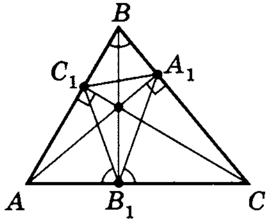
В данном случае мы применили известное свойство: множество всех вершин прямоугольных треугольников с общей гипотенузой есть множество всех точек окружности диаметра, равного гипотенузе, исключая точки, совпадающие с концами диаметра.

в) 1. Для $\triangle AA_1B$ и $\triangle CC_1B$ была доказана пропорциональность сторон, т. е. $\dfrac{A_1B}{AB} = \dfrac{C_1B}{CB}$.

2. Помня, что $\angle B$ для них общий и используя II признак подобия треугольников, получим, что $\triangle A_1BC_1$ подобен $\triangle ABC$.

Причем, так как из $\dfrac{A_1B}{AB} = \dfrac{C_1B}{CB} = \cos(\angle B)$ следует, что $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{C_1B}{A_1B} = \cos(\angle B)$, а $\triangle ABC$ подобен $\triangle A_1BC_1$, то $k = \cos(\angle B)$. Рассуждая аналогично, получим, что $\triangle A_1C_1B \sim \triangle ACB$.

г) Так как в любом треугольнике медианы, биссектрисы и высоты пересекаются в одной точке (хотя в общем случае это три разные точки), то отрезок, проходящий через вершину и точку пересечения высот, опущенных из двух других вершин треугольника, является высотой. Очевидно, это верно и для биссектрис, и для медиан.



Проводя рассуждения, аналогичные предыдущим, получим:

$\triangle AC_1B_1$ подобен $\triangle ACB$, где $k = \cos(\angle A)$,

тогда $\angle AB_1C_1 = \angle B$;

$\triangle CA_1B_1$ подобен $\triangle CAB$, где $k = \cos(\angle C)$,

тогда $\angle CB_1A_1 = \angle B$ и $\angle AC_1B_1 = \angle CB_1A_1$.

Значит $\left.\begin{matrix} \angle C_1B_1B = 90^\circ - (\angle B) \\ \angle A_1B_1B = 90^\circ - (\angle B) \end{matrix}\right|$ (напомним, $BB_1 \perp AC$),

следовательно, BB_1 — биссектриса $\angle C_1B_1A_1$.

Для других высот $\triangle ABC$ доказательства аналогичны.

Примечание. Для тупоугольного $\triangle ABC$ коэффициент подобия $\boxed{k = |\cos(\angle B)|}$. Модуль нужен, так как $k > 0$, а при $\angle B > 90^\circ$ $\cos(\angle B) < 0$. Но это уже совсем другая, хотя и очень интересная задача.

Свойства треугольника, образованного основаниями высот данного треугольника

1. $\triangle AA_1C$ подобен $\triangle BB_1C$;
2. $\triangle ABC$ подобен $\triangle A_1B_1C$, где коэффициент подобия $k = |\cos(\angle C)|$;
3. AA_1, BB_1, CC_1 — биссектрисы $\triangle A_1B_1C_1$;

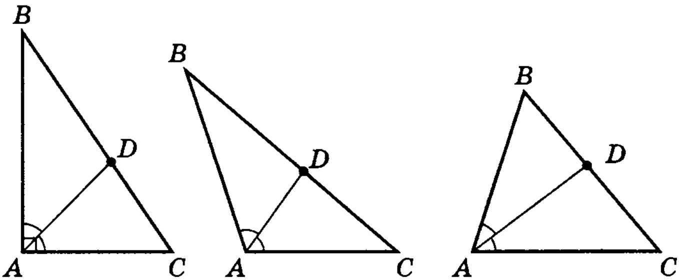
4*. $S_{\triangle A_1B_1C_1} = 2S_{\triangle ABC} \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma$;

5*. $\dfrac{P_{\triangle A_1B_1C_1}}{P_{\triangle ABC}} = \dfrac{r_{\text{в}}}{R_{\text{о}}}$.

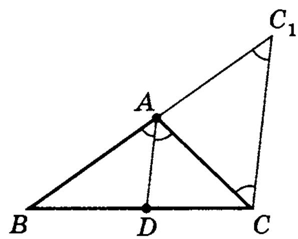
Свойства 4 и 5 попробуйте доказать самостоятельно.

Напомним еще несколько теорем из школьного курса геометрии 7–9 классов и рассмотрим применение их к решению базовых задач.

Теорема 2. Биссектриса любого угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим к данному углу сторонам треугольника: $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{DC}$.



Пусть $AD = l_{BC}$ (биссектриса $\angle A$).



а) Проведем доп. построение: $CC_1 \parallel AD$, где $C_1 \in$ прямой (AB).

б) $\angle BAD = \angle BC_1C$ как соответственные при параллельных CC_1, AD и секущей BC_1.

в) $\angle CAD = \angle ACC_1$ как внутренние накрест лежащие при $CC_1 \parallel AD$ и секущей AC.

г) Значит $\triangle CAC_1$ — равнобедренный, и $AC = AC_1$.

д) По теореме Фалеса $\dfrac{AB}{AC_1} = \dfrac{BD}{DC}$.

Так как $AC = AC_1$, то $\boxed{\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{DC}}$,

что и требовалось доказать.

Примечание. При доказательстве особенности $\angle A$ (острый он, прямой или тупой) нигде не учитывались. Значит, теорема справедлива для любых видов треугольников.

Практикум 1

1. В прямоугольном треугольнике наибольшая сторона равна 34, а наименьшая 16. Найдите периметр, площадь и синусы острых углов треугольника.

2. Периметр прямоугольного треугольника равен 90, а отношение гипотенузы к катету равно $5:3$. Найдите площадь треугольника и тангенс наименьшего острого угла.

3. В равнобедренном треугольнике две стороны равны 17, а третья сторона равна 16. Найдите площадь треугольника и тангенс наибольшего угла.

4. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 26, а синус одного из углов равен $\frac{5}{13}$. Найдите катеты и площадь треугольника.

5. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 24, а косинус угла, противолежащего данному катету, равен $\frac{2\sqrt{10}}{7}$. Найдите гипотенузу и площадь треугольника.

6. Стороны треугольника равны 18 и 24, а модуль косинуса угла между ними $\frac{31}{216}$. Найдите третью сторону, если периметр треугольника — натуральное число.

7*. Одна из сторон треугольника равна 34, а косинусы углов, прилежащих к этой стороне, равны $\frac{15}{17}$ и $\frac{8}{17}$. Найдите периметр и площадь треугольника.

8. В $\triangle ABC$ $AD = l_{BC}$ — биссектриса. Определите:

   а) отрезки BD и DC, если $AB=13$, $BC=15$, $AC=17$;

   б) сторону AB, если $BD : DC = 3 : 2$, а $AC = 20$;

   в) сторону BC, если $AB : AC = 3 : 4$, а $DC - BD = 7$.

9. На большей стороне $\triangle ABC$, стороны которого равны 34, 85 и 105, находится центр окружности, касающейся меньших сторон. Определите отрезки, на которые центр окружности делит большую сторону.

10. В $\triangle ABC$, стороны которого равны $AB = 12$, $AC = 8$, проведена биссектриса AD. Определите сторону BC, если один из отрезков, на которые эту сторону делит биссектриса, равен одной из известных сторон.

11. В $\triangle ABC$ со сторонами, равными 15, 18 и 22, вписан ромб, причем две вершины ромба принадлежат одной стороне, а две другие двум другим сторонам, и одна из вершин ромба совпадает с вершиной треугольника. Найдите такой ромб, периметр которого будет наибольшим.

12. В равнобедренном треугольнике центр вписанной окружности делит высоту, проведенную к основанию, в отношении $7 : 5$, а боковая сторона равна 70. Найдите площадь треугольника и радиус вписанной окружности.

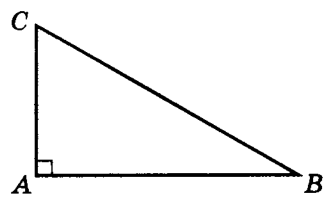
13*. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 5, 12 и 13. Найдите наименьший угол, стороны и площадь треугольника.

14. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна a^2, а сторона $AD = a$. Точка P делит сторону DC в отношении $m : 1$ $(CP : DP)$, считая от вершины C, а точка M делит сторону AD в отношении $n : 1$ $(DM : AM)$, считая от вершины A. Отрезки BP и CM пересекаются в точке K. Найдите площадь треугольника BKC.

Решение практикума 1

1. В прямоугольном треугольнике наибольшая сторона равна 34, а наименьшая 16. Найдите периметр, площадь и синусы острых углов треугольника.

Дано:
$\triangle ABC$
$\angle A = 90^\circ$
$BC = 34$
$AC = 16$



а) $P_{\triangle ABC}$
б) $S_{\triangle ABC}$
в) $\sin(\angle B)$
г) $\sin(\angle C)$

а) $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2}$;

$AB = \sqrt{34^2 - 16^2} = \sqrt{(34+16)(34-16)} =$

$= \sqrt{50 \cdot 18} = 30.$

$P_{\triangle ABC} = AB + BC + AC$;

$P_{\triangle ABC} = 30 + 34 + 16 = \boxed{80}$.

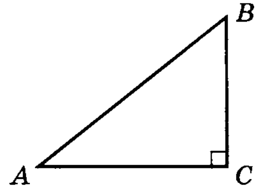
б) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC$;

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 16 = \boxed{240}$.

в) $\sin(\angle B) = \frac{AC}{BC}$; $\sin(\angle B) = \frac{16}{34} = \boxed{\frac{8}{17}}$.

г) $\sin(\angle C) = \frac{AB}{BC}$; $\sin(\angle C) = \frac{30}{34} = \boxed{\frac{15}{17}}$.

2. Периметр прямоугольного треугольника равен 90, а отношение гипотенузы к катету равно $5:3$. Найдите площадь треугольника и тангенс наименьшего острого угла.



Дано:

$\triangle ABC$

$P_{\triangle ABC} = 90$

$\angle C = 90°$

$AB : BC = 5 : 3$

а) $S_{\triangle ABC}$

б) $\operatorname{tg}(\angle A)$

а) Пусть $AB = 5x$, тогда $BC = 3x$.

$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2}$; $\quad AC = \sqrt{(5x)^2 - (3x)^2} = 4x$;

$P_{\triangle ABC} = AB + BC + AC$,

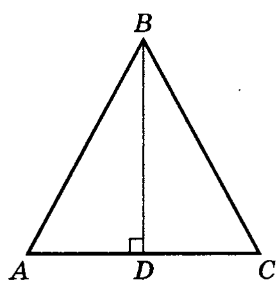
т. е. $90 = 5x + 3x + 4x$; $\quad x = \dfrac{15}{2}$.

Тогда $AC = 30$, $\quad BC = \dfrac{45}{2}$.

$S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BC$, т. е. $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 30 \cdot \dfrac{45}{2} = \boxed{337{,}5}$.

б) $\operatorname{tg}(\angle A) = \dfrac{BC}{AC}$; $\quad \operatorname{tg}(\angle A) = \boxed{\dfrac{3}{4}}$.

3. В равнобедренном треугольнике две стороны равны 17, а третья сторона равна 16. Найдите площадь треугольника и тангенс наибольшего угла.



Дано:

$\triangle ABC$

$AB = BC = 17$

$AC = 16$

а) $S_{\triangle ABC}$

б) $\operatorname{tg} \alpha_{\text{наиб. остр}}$

а) Пусть $BD \perp AC$.

$AD = DC = 8$;

$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2}$; $\quad BD = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$.

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$; $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 15 = \boxed{120}$.

б) Необходимо определить, какой из углов $\angle A$ и $\angle B$ является наибольшим.

$\operatorname{tg}(\angle A) = \frac{BD}{AD}$; $\quad \operatorname{tg}(\angle A) = \frac{15}{8}$.

$\cos(\angle A) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\angle A)}}$; $\quad \cos(\angle A) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{15}{8}\right)^2}} = \frac{8}{17}$.

(Кстати, $\cos(\angle A)$ можно проще найти из $\triangle ABD$: $\cos(\angle A) = \frac{AD}{AB}$.)

$\cos(\angle B) = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC}$. Так как $AB = BC$,

то $\cos(\angle B) = \frac{2AB^2 - AC^2}{2AB^2} = 1 - \frac{AC^2}{2AB^2}$,

тогда $\cos(\angle B) = 1 - \frac{16^2}{2 \cdot 17^2} = 1 - \frac{128}{289} = \frac{161}{289}$.

Так как $\frac{161}{289} > \frac{8}{17} = \frac{136}{289}$, то $\cos(\angle B) > \cos(\angle A)$.

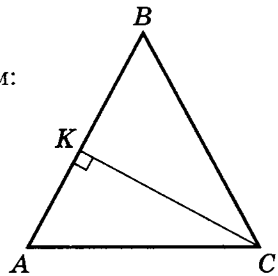
На $[0°; 90°]$ косинус убывает, значит $\angle B < \angle A$.

Итак, $\angle A$ — наибольший острый угол, значит, тангенс наибольшего угла — $\operatorname{tg}(\angle A) = \boxed{\frac{15}{8}}$, так как на $[0°; 90°)$ тангенс возрастает.

Примечание. Пункт б) можно решить и по-другому.

Из $\triangle ABD$ (см. с. 89) $\cos(\angle A) = \frac{AD}{AB}$, т. е. $\cos(\angle A) = \frac{8}{17}$.

Пусть $CK \perp AB$.



Используя метод площадей, получим:

$$CK = \frac{2S_{\triangle ABC}}{AB};$$

$$CK = \frac{2 \cdot 120}{17} = \frac{240}{17}.$$

$$\text{Так как } \begin{array}{ll} AB^2 + BC^2 > AC^2 & 17^2 + 17^2 > 16^2 \\ AB^2 + AC^2 > BC^2 & 17^2 + 16^2 > 17^2, \\ BC^2 + AC^2 > AB^2 & 17^2 + 16^2 > 17^2 \end{array}$$

то $\triangle ABC$ — остроугольный. Значит $\cos(\angle B) > 0$.

$BK = \sqrt{BC^2 - CK^2}$;

$$BK = \sqrt{17^2 - \left(\frac{240}{17}\right)^2} = \frac{1}{17}\sqrt{(17^2 - 240)(17^2 + 240)} =$$

$$= \frac{1}{17}\sqrt{49 \cdot 529} = \frac{7 \cdot 23}{17} = \frac{161}{17}.$$

Тогда $\cos(\angle B) = \frac{BK}{BC}$; $\cos(\angle B) = \frac{161}{17} : 17 = \frac{161}{289}$.

Ранее было доказано, что $\frac{161}{289} > \frac{8}{17}$.

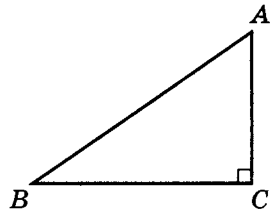
Значит $\cos(\angle B) > \cos(\angle A)$.

Следовательно, учитывая вид монотонности функции $y = \cos x$ на $(0; 90^\circ)$, $\angle B < \angle A$. Поэтому $\angle A$ с тангесом $\operatorname{tg} \angle A = \frac{15}{8}$ — наибольший острый угол в $\triangle ABC$.

Такой способ несколько легче, так как требует знания меньшего количества формул планиметрии и тригонометрии.

4. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 26, а синус одного из углов равен $\frac{5}{13}$. Найдите катеты и площадь треугольника.

Дано:
$\triangle ABC$
$AC \perp BC$
$AB = 26$
$\sin(\angle B) = \frac{5}{13}$



а) AC
б) BC
в) $S_{\triangle ABC}$

а) $AC = AB\sin(\angle B)$, т. е. $AC = 26 \cdot \frac{5}{13} = \boxed{10}$.

б) 1. $\cos(\angle B) = \sqrt{1 - \sin^2(\angle B)}$, $\angle B < 90°$, тогда

$$\cos(\angle B) = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{13^2 - 5^2}{13^2}} =$$
$$= \sqrt{\frac{169 - 25}{13^2}} = \frac{12}{13}.$$

2. $BC = AB\cos(\angle B)$, т. е. $BC = 26 \cdot \frac{12}{13} = \boxed{24}$

(можно использовать теорему Пифагора).

в) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AC$, т. е. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 10 = \boxed{120}$,

или $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin(\angle B)$,

т. е. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot 24 \cdot \frac{5}{13} = 120$.

5. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 24, а косинус угла, противолежащего данному катету, равен $\frac{2\sqrt{10}}{7}$. Найдите гипотенузу и площадь треугольника.

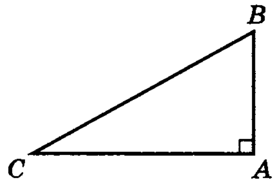
Дано:

$\triangle ABC$

$AC \perp AB$

$AC = 24$

$\cos(\angle B) = \frac{2\sqrt{10}}{7}$



а) BC

б) $S_{\triangle ABC}$

а) 1. Найдем $\sin(\angle B) = \sqrt{1-\cos^2(\angle B)}$,

т. е. $\sin(\angle B) = \sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{10}}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{49-4\cdot 10}{7^2}} = \frac{3}{7}$.

2. $BC = \frac{AC}{\sin(\angle B)}$, т. е. $BC = \frac{24}{\frac{3}{7}} = \boxed{56}$.

б) 1. $AB = BC\cos(\angle B)$, т. е. $AB = 56 \cdot \frac{2\sqrt{10}}{7} = \boxed{16\sqrt{10}}$.

2. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot AB$; $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 16\sqrt{10} = \boxed{192\sqrt{10}}$.

6. Стороны треугольника равны 18 и 24, а модуль косинуса угла между ними $\frac{31}{216}$. Найдите третью сторону, если периметр треугольника — натуральное число.

Дано:

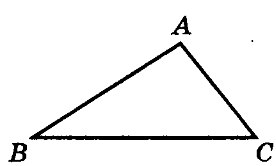
$\triangle ABC$

$BC = 18$

$AB = 24$

$|\cos(\angle B)| = \frac{31}{216}$

AC — натуральное число



AC

а) Пусть $\cos(\angle B) > 0$, тогда $|\cos(\angle B)| = \cos(\angle B)$ $(\angle B \in (0°; 90°))$;

$$AC = \sqrt{BC^2 + AB^2 - 2BC \cdot AB\cos(\angle B)};$$

$$AC = \sqrt{18^2 + 24^2 - 2 \cdot 18 \cdot 24 \cdot \frac{31}{216}} =$$

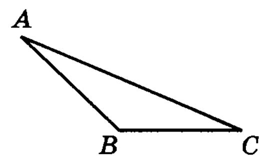
$$= \sqrt{324 + 576 - \frac{864 \cdot 31}{216}} = \sqrt{900 - 4 \cdot 31} = \sqrt{776} \notin \mathbb{N},$$

значит $\angle B \in (0°; 90°)$ не подходит.

б) Пусть $\cos(\angle B) < 0$,

тогда $|\cos(\angle B)| = -\cos(\angle B)$

$(\angle B \in (90°; 180°))$;



$$AC = \sqrt{18^2 + 24^2 - 2 \cdot 18 \cdot 24 \cdot \left(-\frac{31}{216}\right)} =$$

$$= \sqrt{324 + 576 + \frac{864 \cdot 31}{216}} = \sqrt{900 + 4 \cdot 31} = \sqrt{1024} = \boxed{32}.$$

7*. Одна из сторон треугольника равна 34, а косинусы углов, прилежащих к этой стороне, равны $\frac{15}{17}$ и $\frac{8}{17}$. Найдите периметр и площадь треугольника.

Дано:

$\triangle ABC$

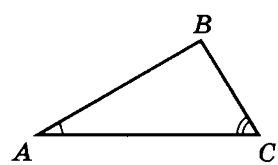
$AC = 34$

$\cos(\angle A) = \frac{15}{17}$

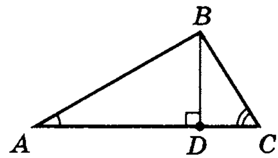
$\cos(\angle C) = \frac{8}{17}$

а) $P_{\triangle ABC}$

б) $S_{\triangle ABC}$



а) Для решения задачи проведем дополнительное построение: $BD \perp AC$.



б) $\operatorname{tg}(\angle A) = \dfrac{BD}{AD} = \dfrac{\sin(\angle A)}{\cos(\angle A)}$; $\quad \sin(\angle A) = \sqrt{1 - \cos^2(\angle A)}$;

$$\sin(\angle A) = \sqrt{1 - \left(\frac{15}{17}\right)^2} = \sqrt{\frac{17^2 - 15^2}{17^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{289 - 225}}{17} = \frac{8}{17};$$

$$\operatorname{tg}(\angle A) = \frac{8}{17} : \frac{15}{17} = \frac{8}{15}.$$

в) $\operatorname{tg}(\angle C) = \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{\sin(\angle C)}{\cos(\angle C)}$;

$$\sin(\angle C) = \sqrt{1 - \left(\frac{8}{17}\right)^2} = \frac{\sqrt{289 - 64}}{17} = \frac{15}{17};$$

$$\operatorname{tg}(\angle C) = \frac{15}{17} : \frac{8}{17} = \frac{15}{8}.$$

г) $BD = AD \cdot \operatorname{tg}(\angle A)$ и $BD = DC \cdot \operatorname{tg}(\angle C)$.

Значит $AD \cdot \dfrac{8}{15} = DC \cdot \dfrac{15}{8}$.

Так как $DC = AC - AD$, т. е. $DC = 34 - AD$,

то $AD \cdot \dfrac{8}{15} = (34 - AD) \cdot \dfrac{15}{8}$.

Значит $64AD = (34 - AD) \cdot 15^2$;

$(64 + 225)\,AD = 34 \cdot 15^2$; $\quad AD = \dfrac{34 \cdot 15^2}{289} = \dfrac{2 \cdot 15^2}{17}$.

д) $AB = \dfrac{AD}{\cos(\angle A)}$, т. е. $AB = \dfrac{2 \cdot 15^2}{17} : \dfrac{15}{17} = 2 \cdot 15 = 30$.

е) $BC = \sqrt{AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos(\angle A)}$;

$$BC = \sqrt{34^2 + 30^2 - 2 \cdot 34 \cdot 30 \cdot \frac{15}{17}} =$$

$$= \sqrt{1156 + 900 - 1800} = \sqrt{256} = 16.$$

ж) $P_{\triangle ABC} = 34 + 16 + 30 = \boxed{80}$.

з) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin(\angle A)$;

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 34 \cdot \frac{8}{17} = \boxed{240}.$$

Примечания

1. $\triangle ABC$ прямоугольный, так как $AC^2 = AB^2 + BC^2$, т. е. $34^2 = 30^2 + 16^2$.

2. Можно было решать проще, если знать, что из $\cos^2(\angle A) + \cos^2(\angle C) = \left(\frac{15}{17}\right)^2 + \left(\frac{8}{17}\right)^2 = \frac{225 + 64}{17^2} = 1$ следует, что $\angle A + \angle C = 90°$ или $\angle C = 90° - \angle A$, значит $\angle B = 90°$ $(\angle A + \angle B + \angle C = 180°)$ и далее стандартное решение.

8. В $\triangle ABC$ $AD = l_{BC}$ — биссектриса. Определите:

а) отрезки BD и DC, если $AB = 13$, $BC = 15$, $AC = 17$;

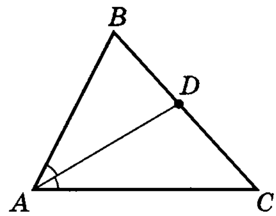
б) сторону AB, если $BD : DC = 3 : 2$, $AC = 20$;

в) сторону BC, если $AB : AC = 3 : 4$, $DC - BD = 7$.

а) Дано:

$\triangle ABC$
$AB = 13$
$BC = 15$
$AC = 17$
$AD = l_{BC}$

1. BD
2. DC



Так как $AD = l_{BC}$ — биссектриса, то

1. $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{DC}$, т. е. $\dfrac{13}{17} = \dfrac{BD}{15 - BD}$;

$13 \cdot 15 - 13 \cdot BD = 17BD$; $\quad 13 \cdot 15 = 17BD + 13BD$;

$BD = \dfrac{13 \cdot 15}{30} = \boxed{6{,}5}$.

2. $DC = 15 - BD$, т. е. $DC = 15 - 6{,}5 = \boxed{8{,}5}$.

б) Дано:

$\triangle ABC$
$AD = l_{BC}$
$BD : DC = 3 : 2$
$AC = 20$

AB

Так как $AD = l_{BC}$ — биссектриса, то $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{DC}$,

с учетом условий получим $\dfrac{AB}{20} = \dfrac{3}{2}$, т. е. $AB = \boxed{30}$.

в) Дано:

$\triangle ABC$
$AD = l_{BC}$
$AB : AC = 3 : 4$
$DC - BD = 7$

BC

1. Так как $AD = l_{BC}$ — биссектриса, то $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{DC}$,

с учетом условий получим $\dfrac{3}{4} = \dfrac{BD}{DC}$.

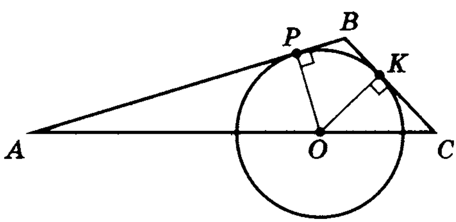
2. Тогда $\begin{cases} \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{3}{4} \\ DC - BD = 7 \end{cases}$; $\begin{cases} BD = \dfrac{3}{4}DC \\ DC - \dfrac{3}{4}DC = 7 \end{cases}$,

значит $DC = 28$, а $BD = \dfrac{3}{4} \cdot 28 = 21$,

тогда $BC = BD + DC = 21 + 28 = \boxed{49}$.

9. На большей стороне $\triangle ABC$, стороны которого равны 34, 85 и 105, находится центр окружности, касающейся меньших сторон. Определите отрезки, на которые центр окружности делит большую сторону.

Дано:
$\triangle ABC$
Окружность, где ее центр $O \in AC$
AB, BC — стороны касания
$AB = 85$
$BC = 34$
$AC = 105$



1. AO
2. OC

а) Так как AB и BC — стороны, касающиеся окружности, то $BP = BK$, где $OP = OK = r_в$ и $BO = l_{AC}$ — биссектриса (потому что $\triangle OPB = \triangle OKB$).

б) Значит, $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AO}{OC}$, т. е. $\dfrac{85}{34} = \dfrac{AO}{OC} = \dfrac{5}{2}$.

в) $\begin{cases} AO + OC = 105 \\ AO = \dfrac{5}{2}OC \end{cases}$, тогда $\dfrac{5}{2}OC + OC = 105$;

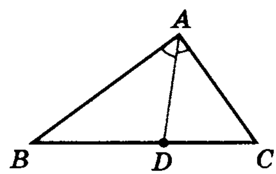
$\dfrac{7}{2}OC = 105$; $OC = \boxed{30}$, а $AO = \boxed{75}$.

Примечание. Одним из приемов моделирования является сам чертеж, который является иногда более наглядным отражением текстовых условий задачи. Иногда же он — лишь один из возможных вариантов моделирования условий. Поэтому если рядом с «Дано» есть чертеж, то *формализация* текстовых условий задачи не всегда достаточно полно и точно их отражает. Это следует помнить в дальнейшем.

10. В $\triangle ABC$, стороны которого равны $AB = 12$, $AC = 8$, проведена биссектриса AD. Определите сторону BC, если один из отрезков, на которые эту сторону делит биссектриса, равен одной из известных сторон.

Дано:
$\triangle ABC$
$AB = 12$
$AC = 8$
$AD = l_{BC}$
а) $BD = AB$
б) или $BD = AC$
в) или $DC = AB$
г) или $DC = AC$

BC



а) Пусть $BD = AB$.

Так как $AD = l_{BC}$, то $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{DC}$, т. е. $\dfrac{12}{8} = \dfrac{12}{DC}$,

значит $DC = 8$, тогда $BC = BD + DC = 12 + 8 = 20$; $BC = AB + AC$ — вырожденный треугольник.

б) Пусть $BD = AC$, тогда так как $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{DC}$, то $\dfrac{12}{8} = \dfrac{8}{DC}$.

$DC = \dfrac{64}{12} = 5\dfrac{1}{3}$, значит $BC = 8 + 5\dfrac{1}{3} = \boxed{13\dfrac{1}{3}}$.

в) Пусть $DC = AB$, тогда $\dfrac{12}{8} = \dfrac{BD}{12}$; $BD = 18$.

$BC = 12 + 18 = 30$, значит $AB + AC < BC$,

так как $12 + 8 < 30$ — такого треугольника не существует.

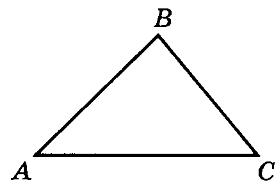
г) Пусть $DC = AC$, тогда $\dfrac{12}{8} = \dfrac{BD}{8}$, т.е. $BD = 12$.

Значит $BC = 12 + 8 = 20$ — получили вырожденный треугольник.

Ответ: $BC = 13\frac{1}{3}$.

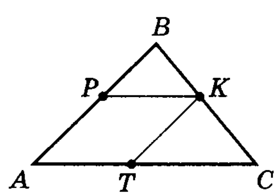
11. В $\triangle ABC$ со сторонами, равными 15, 18 и 22, вписан ромб, причем две вершины ромба принадлежат одной стороне, а две другие двум другим сторонам, и одна из вершин ромба совпадает с вершиной треугольника. Найдите такой ромб, периметр которого будет наибольшим.

Дано:
$\triangle ABC$
$AB = 18$
$BC = 15$
$AC = 22$
В $\triangle ABC$ вписан ромб



$P_{\text{ромба}}$ — наибольший

а) $AP = PK$.

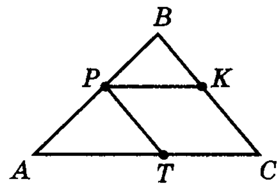


Пусть $AP = x$, тогда так как $\triangle PBK \sim \triangle ABC$ ($\angle A = \angle BPK$ и $\angle B$ — общий),

то $\dfrac{PB}{PK} = \dfrac{AB}{AC}$; $\dfrac{18 - x}{x} = \dfrac{18}{22}$; $22 \cdot 18 - 22x = 18x$;

$x = \dfrac{22 \cdot 18}{22 + 18} = \dfrac{11 \cdot 9}{10} = 9{,}9$; $P_{APKT} = \boxed{39{,}6}$.

б) $PK = CK$.



Пусть $PK = x$,

тогда $\dfrac{BK}{PK} = \dfrac{BC}{AC}$,

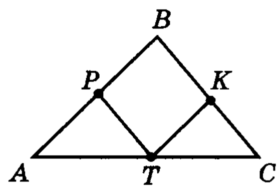
т. е. $\dfrac{15 - x}{x} = \dfrac{15}{22}$;

$22 \cdot 15 = 22x + 15x$;

$x = \dfrac{22 \cdot 15}{37} = 8\dfrac{34}{37}$;

$P_{CTPK} = 35\dfrac{25}{37}$.

в) $PB = PT$.



Пусть $PB = x$,

тогда $\dfrac{AP}{PT} = \dfrac{AB}{BC}$, т. е.

$\dfrac{18 - x}{x} = \dfrac{18}{15}$; $5 \cdot 18 - 5x = 6x$;

$x = \dfrac{5 \cdot 18}{11} = 8\dfrac{2}{11}$.

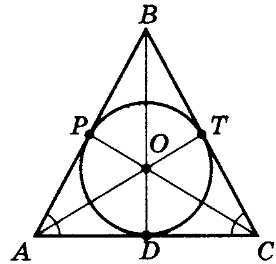
$P_{PBKT} = 32\dfrac{8}{11}$.

Ответ: $P_{APKT} = 39{,}6$. $APKT$ — ромб наибольшего периметра.

Примечание. Если еще исследовать и площади таких ромбов, то задача становится интересной домашней лабораторной работой (технически трудоемкой).

12. В равнобедренном треугольнике центр вписанной окружности делит высоту, проведенную к основанию, в отношении $7 : 5$, а боковая сторона равна 70. Найдите площадь треугольника и радиус вписанной окружности.

Дано:
$\triangle ABC$
$AB = BC = 70$
O — центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности
$BD \perp AC$
$BO : OD = 7 : 5$



а) $S_{\triangle ABC}$
б) $r_{в}$

а) Так как AB и AC касаются окружности, то $AP = AD$, и $AO = l_{BC}$ — биссектриса.

б) Значит $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BO}{OD} = \dfrac{7}{5}$, т. е. $\dfrac{70}{AD} = \dfrac{7}{5}$; $AD = 50$.

в) По теореме Пифагора[4] $BD = \sqrt{AB^2 - AD^2}$,

т. е. $BD = \sqrt{70^2 - 50^2} = 20\sqrt{6}$.

г) Так как $AD = DC = \dfrac{1}{2}AC$, то $S_{\triangle ABC} = AD \cdot BD$,

т. е. $S_{\triangle ABC} = 50 \cdot 20\sqrt{6} = \boxed{1000\sqrt{6}}$.

д) Так как $OD = r_{в}$, то, учитывая, что

$OD + OB = BD = 20\sqrt{6}$, получим $OD + OD \cdot \dfrac{7}{5} = 20\sqrt{6}$;

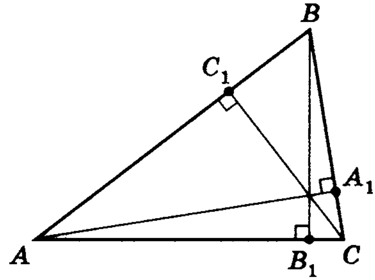
$$OD = \frac{5}{12} \cdot 20\sqrt{6} = \boxed{\frac{25}{3}\sqrt{6} = r_{в}}.$$

[4] **Теорема Пифагора** (572–500 г. до н.э.). Для того чтобы треугольник являлся прямоугольным, необходимо и достаточно, чтобы сумма квадратов двух сторон треугольника была равна квадрату третьей стороны.

13*. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 5, 12 и 13. Найдите наименьший угол, стороны и площадь исходного треугольника.

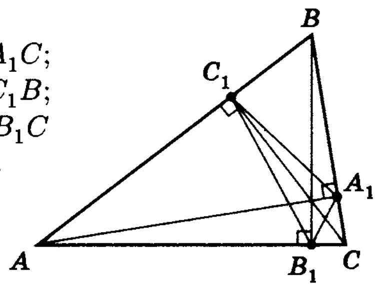
Дано:

$AA_1 \perp BC$
$BB_1 \perp AC$
$CC_1 \perp AB$
$B_1A_1 = 5$
$C_1A_1 = 12$
$B_1C_1 = 13$



а) наименьший угол $\triangle ABC$
б) BC
в) AB
г) AC
д) $S_{\triangle ABC}$

а) 1. $\angle A = \angle C_1A_1B = \angle B_1A_1C$;
$\angle C = \angle AC_1B_1 = \angle A_1C_1B$;
$\angle B = \angle AB_1C_1 = \angle A_1B_1C$
(см. задачу 6, стр. 82).



2. Для $\triangle B_1C_1A_1$

$B_1C_1^2 = C_1A_1^2 + B_1A_1^2$,

так как $13^2 = 12^2 + 5^2$,

т. е. $\angle B_1A_1C_1 = 90°$.

3. В задаче 6 (стр. 82) было доказано, что

$\angle BAC = \angle BA_1C_1 = \angle B_1A_1C$ (для этого доказали что $\triangle A_1BC_1$ подобен $\triangle ABC$, и коэффициент подобия $\boxed{k = \cos(\angle B)}$).

Далее аналогично можно доказать, что $\triangle A_1B_1C$ подобен $\triangle ABC$, где $\boxed{k = \cos(\angle C)}$).

4. Так как около четырехугольника AB_1A_1B можно описать окружность, где AB — диаметр и $\angle A + \angle B_1A_1B = 180°$, но $\angle B_1A_1C_1 = 90°$ (пункт 2) и $\angle C_1A_1B = \angle A$ (пункт 1), значит $\angle B_1A_1B = 90° + \angle A$.
Учитывая, что $\angle A = 180° - \angle B_1A_1B$, получим $\angle A = 180° - (90° + \angle A)$, тогда $2\angle A = 90°$, т. е. $\angle A = \dfrac{180° - \angle B_1A_1C_1}{2} = \dfrac{180° - 90°}{2} = 45°$,
т. е. $\boxed{\angle A = 45°}$. Можно доказать, что он наименьший в $\triangle ABC$. (Позже будет доказано, что BC — наименьшая сторона $\triangle ABC$.)

б) Так как можно по аналогии доказать, что $\triangle AB_1C_1$ подобен $\triangle ABC$, где $k = \cos\angle A = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,
то $\dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Значит $BC = B_1C_1 \cdot \sqrt{2}$, т. е. $\boxed{BC = 13\sqrt{2}}$.

в) Для $\triangle B_1C_1A_1$ $\cos(\angle C_1B_1A_1) = \dfrac{B_1A_1}{B_1C_1}$,
т. е. $\cos(\angle C_1B_1A_1) = \dfrac{5}{13}$.
Так как $\angle B = \dfrac{180° - \angle C_1B_1A_1}{2}$,
то, учитывая тригонометрические формулы[5]

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \text{ и } \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha,$$

можно найти $\cos(\angle B) = \cos\dfrac{180° - \angle C_1B_1A_1}{2} =$

$$= \sqrt{\frac{1+\cos(180° - \angle C_1B_1A_1)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\cos(\angle C_1B_1A_1)}{2}},$$

[5] См. Шахмейстер А.Х. Тригонометрия. СПб.; М., 2010, 2013. С. 135.

т. е. $\cos(\angle B) = \sqrt{\dfrac{1-\frac{5}{13}}{2}} = \sqrt{\dfrac{4}{13}} = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$ (для любого треугольника $\cos\dfrac{\alpha}{2} > 0$).

Уже известно, что $\triangle A_1BC_1$ подобен $\triangle ABC$.

Причем $k = \cos(\angle B)$, т. е. $k = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$.

Тогда $\dfrac{C_1A_1}{AC} = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$, значит $\boxed{AC = 6\sqrt{13}}$.

г) Для $\triangle A_1B_1C_1$ $\cos(\angle B_1C_1A_1) = \dfrac{C_1A_1}{B_1C_1}$,
т. е. $\cos(\angle B_1C_1A_1) = \dfrac{12}{13}$.

Так как $\angle C = \dfrac{180^\circ - \angle B_1C_1A_1}{2}$,
то, зная формулу половинного угла $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$
и помня, что $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$, найдем $\cos(\angle C) =$
$= \sqrt{\dfrac{1+\cos(180^\circ - \angle B_1C_1A_1)}{2}} = \sqrt{\dfrac{1-\cos(\angle B_1C_1A_1)}{2}}$.

Таким образом, $\cos(\angle C) = \sqrt{\dfrac{1-\frac{12}{13}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{26}}$.

По аналогии можно доказать, что $\triangle A_1BC_1$ подобен $\triangle ABC$ с коэффициентом подобия $k = \cos(\angle C)$, т. е. $k = \dfrac{1}{\sqrt{26}}$. Тогда $\dfrac{B_1A_1}{AB} = \dfrac{1}{\sqrt{26}}$, т. е. $\boxed{AB = 5\sqrt{26}}$.

Заметим, что $\left.\begin{array}{l} (BC)^2 = \left(13\sqrt{2}\right)^2 = 338 \\ (AC)^2 = \left(6\sqrt{13}\right)^2 = 468 \\ (AB)^2 = \left(5\sqrt{26}\right)^2 = 650 \end{array}\right|$, значит,

$338 + 468 > 650$
$338 + 650 > 468$, а значит, $\triangle ABC$ — остроугольный.
$468 + 650 > 338$

д) $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AB_1C_1} + S_{\triangle BA_1C_1} + S_{\triangle CA_1B_1} + S_{\triangle A_1B_1C_1}$.

1. Так как $\triangle AB_1C_1$ подобен ABC с коэффициентом подобия $k = \cos(\angle A) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, то $S_{\triangle AB_1C_1} = \dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC}$.
2. Так как $\triangle BA_1C_1$ подобен $\triangle ABC$ с коэффициентом подобия $k = \cos(\angle B) = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$,
то $S_{\triangle BA_1C_1} = \dfrac{4}{13}S_{\triangle ABC}$.
3. Так как $\triangle CA_1B_1$ подобен $\triangle ABC$ с коэффициентом подобия $k = \cos(\angle C) = \dfrac{1}{\sqrt{26}}$,
то $S_{\triangle CA_1B_1} = \dfrac{1}{26}S_{\triangle ABC}$.
4. $S_{\triangle A_1B_1C_1} = \dfrac{1}{2}C_1A_1 \cdot B_1C_1$, т. е. $S_{\triangle A_1B_1C_1} = \dfrac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 = 30$.
5. $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC} + \dfrac{4}{13}S_{\triangle ABC} + \dfrac{1}{26}S_{\triangle ABC} + 30$;
$S_{\triangle ABC}\left(1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{4}{13} - \dfrac{1}{26}\right) = 30$,
т. е. $\boxed{S_{\triangle ABC} = 195}$.

Примечания. Очевидно, что задача была решена без использования знания сторон. Это достаточно трудная задача. Используя знание сторон и формулу $S_\triangle = \dfrac{1}{2}bc \cdot \sin\alpha$, получим более простое решение:

а) $\cos(\angle C) = \dfrac{1}{\sqrt{26}}$, значит $\sin(\angle C) = \sqrt{1 - \dfrac{1}{26}} = \dfrac{5}{\sqrt{26}}$;

б) $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot \sin(\angle C)$,

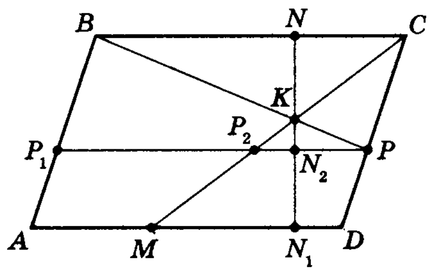
т. е. $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 6\sqrt{13} \cdot 13 \cdot \sqrt{2} \cdot \dfrac{5}{\sqrt{26}} = 195$.

14. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна a^2, а сторона $AD = a$. Точка P делит сторону DC в отношении $m:1$ $(CP:DP)$, считая от вершины C, а точка M делит сторону AD в отношении $n:1$ $(DM:AM)$, считая от вершины A. Отрезки BP и CM пересекаются в точке K. Найдите площадь треугольника BKC.

Дано:

$S_{ABCD} = a^2$
$AB \parallel DC$
$BC \parallel AD$
$M \in AD$; $P \in DC$
$\dfrac{CP}{DP} = m$; $\dfrac{DM}{AM} = n$
$CM \cap BP = K$

$S_{\triangle BKC}$



а) Проведем дополнительное построение:

$PP_1 \parallel$ | $NN_1 \perp AD$
$PP_1 \cap CM = P_2$ | $NN_1 \cap PP_1 = N_2$;

б) $CP = m \cdot DP = m(DC - CP)$, значит $CP = \dfrac{m \cdot DC}{m+1}$;

$DM = n \cdot AM = n(AD - DM)$, значит $DM = \dfrac{n \cdot AD}{n+1}$.

в) $\dfrac{DC}{DM} = \dfrac{CP}{PP_2}$; $PP_2 = \dfrac{CP \cdot DM}{DC}$; $PP_2 = \dfrac{m \cdot DM}{m+1}$,

т. е. $PP_2 = \dfrac{m \cdot n \cdot AD}{(m+1)(n+1)}$; $PP_2 = \dfrac{amn}{(m+1)(n+1)}$.

г) $S_{ABCD} = BC \cdot NN_1$, т. е. $s^2 = a \cdot NN_1$; $NN_1 = a$.

д) $\dfrac{P_2P}{BC} = \dfrac{H_{\triangle PKP_2}}{H_{\triangle BKC}}$;

$$\frac{\frac{amn}{(m+1)(n+1)}}{a} = \frac{N_2K}{NK}, \text{ т. е. } \frac{N_2K}{NK} = \frac{mn}{(m+1)(n+1)}.$$

е) $\dfrac{NN_2}{NN_1} = \dfrac{CP}{DC} = \dfrac{m}{m+1}$, т. е. $NN_2 = \dfrac{am}{m+1}$.

ж) $NN_2 = NK + N_2K$; $\quad \dfrac{NN_2}{N_2K} = \dfrac{NK + N_2K}{N_2K} = \dfrac{NK}{N_2K} + 1$.

С другой стороны, $\dfrac{NK}{N_2K} = \dfrac{BC}{PP_2} = \dfrac{a}{\frac{amn}{(m+1)(n+1)}}$,

т. е. $\dfrac{NK}{N_2K} = \dfrac{(m+1)(n+1)}{mn}$.

Следовательно, $NK = \dfrac{(m+1)(n+1)}{mn} \cdot N_2K$.

Но $NK + N_2K = NN_2 = \dfrac{am}{m+1}$; $\quad N_2K = \dfrac{am}{m+1} - NK$,

значит

$$NK = \frac{(m+1)(n+1)}{mn} \cdot \left(\frac{am}{m+1} - NK\right).$$

Тогда

$$NK = \frac{am(n+1)}{mn + mn + m + n + 1} = \frac{am(n+1)}{2mn + m + n + 1}.$$

з) $S_{\triangle BKC} = \dfrac{1}{2} \cdot BC \cdot NK$; $\quad S_{\triangle BKC} = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot \dfrac{am(n+1)}{2mn + m + n + 1}$.

Итак, $\boxed{S_{\triangle BKC} = \dfrac{a^2m(n+1)}{2(2mn + m + n + 1)}}$.

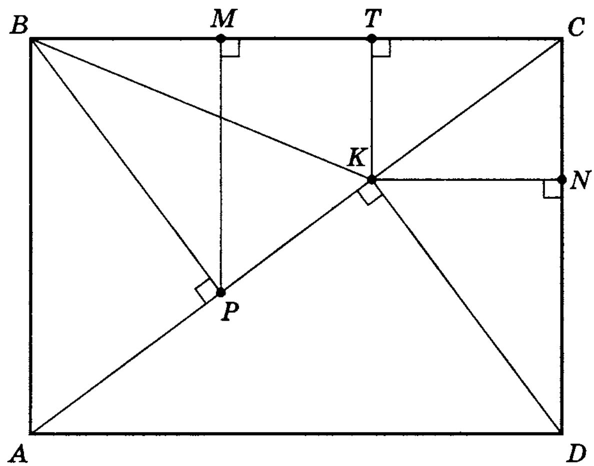
Например, если $S_{ABCD} = 16$, $AD = 4$, $m = 1$ и $n = 1$,

то $S_{\triangle BKC} = \dfrac{16 \cdot 1 \cdot 2}{2 \cdot (2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 + 1 + 1)} = \dfrac{16}{5} = 3{,}2$.

Самостоятельная работа 1

Вариант I
Дано:
$ABCD$ – прямоугольник
$AB = 10$
$BC = 24$

Вариант II
Дано:
$ABCD$ – прямоугольник
$AB = 16$
$BC = 30$

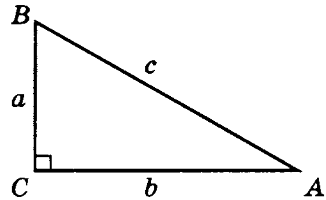


Найдите:

		Вариант I	Вариант II
1	AC		
2	BP		
3	CK		
4	PK		
5	$\cos(\angle BAC)$		
6	$\cos(\angle ADK)$		
7	$\sin(\angle CBP)$		
8	$\sin(\angle CDK)$		
9	KT		
10	PM		
11	KN		
12	S_{KTMP}		

Лабораторная работа 1

Варианты 1–10



Для прямоугольного треугольника ABC, где $\angle C = 90°$, $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, по двум данным из таблицы найдите все остальные.

Справочно:

$$R_{\text{о}} = \frac{abc}{4S} = \frac{a}{2\sin(\angle A)}; \quad r_{\text{в}} = \frac{2S}{P} = \frac{S}{p}, \text{ где } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

	a	b	c	$S_\triangle$	$r_{\text{в}}$	$R_{\text{о}}$	$\sin(\angle A)$	$\sin(\angle B)$
1	7		25					
2		15		60				
3	9			180				
4		60					$\frac{11}{61}$	
5	12					$18\frac{1}{2}$		
6	16							$\frac{63}{65}$
7						$26\frac{1}{2}$	$\frac{28}{53}$	
8						$32\frac{1}{2}$		$\frac{56}{65}$
9		77	85					
10						$44\frac{1}{2}$	$\frac{80}{89}$	

Тренировочная работа 1 (на доказательства)

Вариант I

Докажите следующие утверждения.

1. Если две медианы треугольника перпендикулярны двум сторонам, то такой треугольник является равносторонним.
2. Точка пересечения биссектрис углов трапеции при большем основании принадлежит меньшему основанию трапеции. Докажите, что тогда сумма длин боковых сторон равна длине меньшего основания.

Вариант II

Докажите следующие утверждения.

1. Если треугольник является равнобедренным, то биссектрисы, проведенные к равным сторонам треугольника, равны между собой.
2. Если отрезок медианы от вершины до точки пересечения медиан в три раза меньше стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

Вариант III

Докажите следующие утверждения.

1. Если две высоты в треугольнике равны между собой, то такой треугольник является равнобедренным.
2. Биссектриса треугольника делит его на два треугольника, площадь одного из которых в два раза больше площади другого, если биссектриса делит медиану пополам. При этом медиана делит данную биссектрису в отношении $1:3$.

Вариант IV

Докажите следующие утверждения.

1. Если две медианы треугольника взаимно перпендикулярны, то $\frac{2}{3}$ третьей медианы равны стороне, к которой она проведена.

2. Для того чтобы диагонали четырехугольника были взаимно перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы сумма квадратов противоположных сторон совпадала.

Вариант V

1. Докажите, что если две биссектрисы треугольника перпендикулярны сторонам, к которым они проведены, то такой треугольник является равносторонним.

2. В остроугольном треугольнике ABC на стороне AC как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны треугольника в точках A_1 и C_1. Отрезки CC_1 и AA_1 пересекаются в точке O. Выясните, какой угол образует прямая OB со стороной AC.

Вариант VI

Докажите следующие утверждения.

1. Если в треугольнике медиана и биссектриса взаимно перпендикулярны, то биссектриса делит сторону, к которой она проведена, в отношении $2:1$.

2. Высота и медиана, проведенные к одной стороне треугольника, делят угол, из вершины которого они проведены, на три равные части. Докажите, что такой треугольник — прямоугольный.

Вариант VII

1. Корректно ли такое определение: прямым углом называется угол, стороны которого взаимно перпендикулярны?

2. Верно ли утверждение: если в описанном многоугольнике все стороны равны, то равны и все его углы?

Вариант VIII

1. Корретно ли такое определение: равносторонним называется такой треугольник, у которого равны все его стороны и все его углы?

2. Верно ли такое определение: параллелограммом называется многоугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны?

Решение тренировочной работы 1

Вариант I

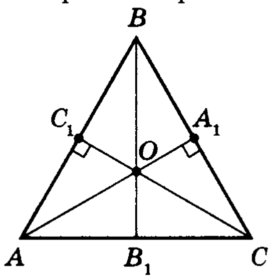
Докажите следующие утверждения.

1. Если две медианы треугольника перпендикулярны двум сторонам, то такой треугольник является равносторонним.

Дано:

$\triangle ABC$
$CC_1 = m_{AB}$
$AA_1 = m_{BC}$
$AA_1 \perp BC$; $CC_1 \perp AB$

$AB = BC = AC$



а) Так как медиана $CC_1 = m_{AB} = H_{AB}$, то $\triangle AA_1B = \triangle AA_1C$, значит $AC = BC$.

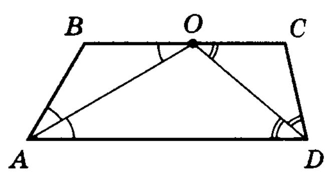
б) Следовательно, $AB = BC = AC$, что и требовалось доказать.

2. Точка пересечения биссектрис углов трапеции при большем основании принадлежит меньшему основанию трапеции. Докажите, что тогда сумма длин боковых сторон равна длине меньшего основания.

Дано:

$ABCD$ — трапеция
$BC \parallel AD$
$AO = l_{\angle A}$
$DO = l_{\angle D}$
$O \in BC$

$AB + DC = BC$



$\left.\begin{array}{l} AB = BO \\ DC = CO \end{array}\right|$, тогда

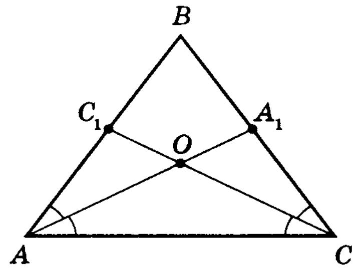
$AB + DC = BO + CO$,

т. е. $AB + DC = BC$, что и требовалось доказать.

Вариант II

Докажите следующие утверждения.

1. Если треугольник является равнобедренным, то биссектрисы, проведенные к равным сторонам треугольника, равны между собой.



Дано:

$\triangle ABC$

$AB = BC$

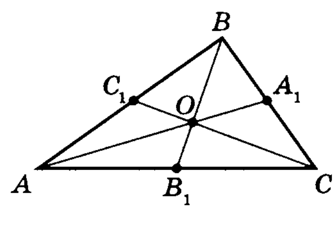
$l_{AB} = l_{BC}$

а) $AA_1 = l_{BC}$;
$CC_1 = l_{AB}$.

б) $\triangle AA_1C = \triangle C_1CA$, так как
AC — общая, $\angle A_1AC = \angle C_1CA$, $\angle C_1AC = \angle A_1CA$.

в) Значит $AA_1 = CC_1$, что и требовалось доказать.

2. Если отрезок медианы от вершины до точки пересечения медиан в три раза меньше стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.



Дано:

$\triangle ABC$

$m_{AC} \cap m_{AB} = O$

$3BO = AC$

$AB \perp BC$

а) $BB_1 = m_{AC}$; $BO = \frac{2}{3}BB_1$.

б) $3BO = AC$, т. е. $2BB_1 = AC$,

значит $BB_1 = \frac{1}{2}AC = AB_1$.

в) Известно, что если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник является прямоугольным, т. е. $AB \perp BC$.

Вариант III

Докажите следующие утверждения.

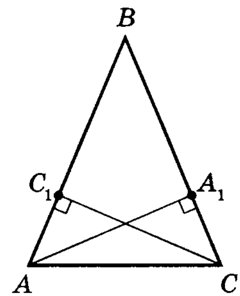
1. Если две высоты в треугольнике равны между собой, то такой треугольник является равнобедренным.

Дано:

$\triangle ABC$

$H_{AB} = H_{BC}$

$AB = BC$



Рассмотрим $\triangle AC_1C$ и $\triangle CA_1A$.

AC — общая (гипотенуза),

$CC_1 = AA_1$ (катеты),

значит $\triangle AC_1C = \triangle CA_1A$ по гипотенузе и катету.

Следовательно, $\angle BAC = \angle BCA$, т. е. по признаку равнобедренности $AB = BC$, что и требовалось доказать.

2. Биссектриса треугольника делит его на два треугольника, площадь одного из которых в два раза больше площади другого, если биссектриса делит медиану пополам. При этом медиана делит данную биссектрису в отношении $1:3$.

Дано:

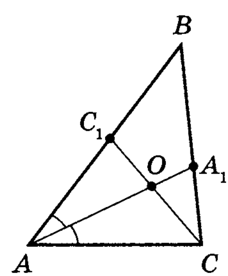
$\triangle ABC$

$AA_1 = l_{BC}$, $AA_1 \cap CC_1 = O$

$CC_1 = m_{AB}$, $OC_1 = OC$

а) $S_{\triangle AA_1B} = 2S_{\triangle AA_1C}$

б) $AO = 3OA_1$



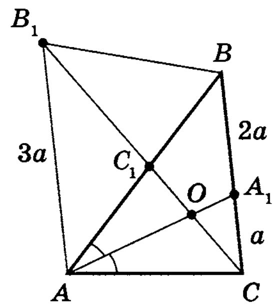
а) Так как $OC = OC_1$ и $\left.\begin{array}{l} AO = m_{CC_1} \\ AO = l_{CC_1} \end{array}\right|$,

то $AC_1 = AC = BC_1$ ($AO \perp CC_1$).

Тогда так как $AA_1 = l_{BC}$, то $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BA_1}{A_1C}$, т. е. $\dfrac{BA_1}{A_1C} = \dfrac{2}{1}$.

Значит $S_{\triangle AA_1B} = 2S_{\triangle AA_1C}$.

б) Сделаем дополнительное построение:
$AB_1 \parallel BC$; $CC_1 \cap AB_1 = B_1$.
Рассмотрим $\triangle AB_1C_1$ и $\triangle BCC_1$.
$\angle AC_1B_1 = \angle BC_1C$
(вертикальные);
$\angle B_1AC_1 = \angle CBC_1$ (внутренние накрест лежащие при $AB_1 \parallel BC$ и секущей AB);
$AC_1 = BC_1$.
Значит $\triangle AB_1C_1 = \triangle BCC_1$.



Значит, $AB_1 = BC$.
Следовательно, AB_1BC — параллелограмм.

Отметим, что $B_1C_1 = CC_1$, $OC_1 = OC$ и $AB_1 = BC$.
$\triangle AOB_1 \sim \triangle A_1OC$, тогда
$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{B_1O}{OC} = \frac{3OC}{OC} = \frac{3}{1},$$
т. е. $AO : OA_1 = 3 : 1$, что и требовалось доказать.

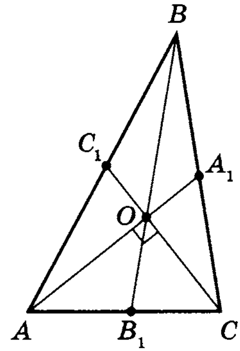
Примечание. Отметим, что в задаче условия даны в завуалированном виде, поэтому вначале необходимо осмыслить, что дано, а что необходимо доказать.

Более привычная формулировка задачи могла бы быть такой: если биссектриса треугольника делит медиану пополам, то такая биссектриса делит треугольник на два треугольника, площадь одного из которых в два раза больше площади другого, а медиана делит данную биссектрису в отношении $1 : 3$.

Вариант IV

Докажите следующие утверждения.

1. Если две медианы треугольника взаимно перпендикулярны, то $\frac{2}{3}$ другой медианы равны стороне, к которой она проведена.



Дано:

$\triangle ABC$
$CC_1 = m_{AB}$, $AA_1 = m_{BC}$
$CC_1 \perp AA_1$, $AA_1 \cap CC_1 = O$

$BO = AC$

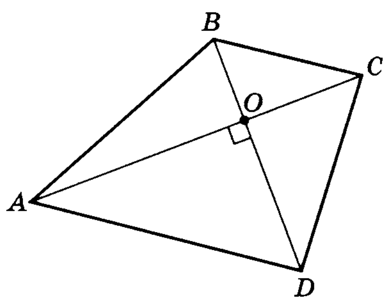
$BB_1 = m_{AC}$, где $O \in BB_1$,
и $BO = 2 \cdot OB_1$ по свойству медиан.
$AO \perp OC$ и $AB_1 = CB_1$,

значит, $AB_1 = OB_1$ $\left(OB_1 = \frac{1}{2} m_{AC}\right)$.

Тогда $AC = 2 \cdot OB_1$, и $BO = AC$, что и требовалось доказать $\left(BO = \frac{2}{3} m_{AC}\right)$.

2. Для того чтобы диагонали четырехугольника были взаимно перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы сумма квадратов противоположных сторон совпадала.

Необходимость



Дано:

$ABCD$ — четырехугольник
$AC \perp BD$

$AB^2 + DC^2 = AD^2 + BC^2$

а) $\left.\begin{array}{l} OB^2 + OA^2 = AB^2 \\ OC^2 + OD^2 = DC^2 \end{array}\right|$

$OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = AB^2 + DC^2.$

б) $\left.\begin{aligned} OB^2+OC^2&=BC^2\\ OA^2+OD^2&=AD^2\end{aligned}\right|$

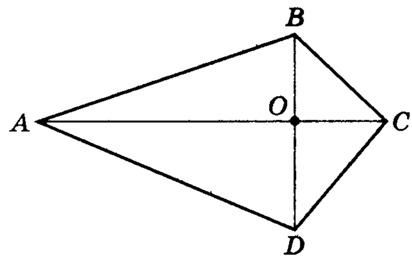
$$OA^2+OB^2+OC^2+OD^2=BC^2+AD^2.$$

в) Значит, $AB^2+DC^2=AD^2+BC^2$, что и требовалось доказать.

Достаточность

Дано:
$ABCD$ — четырехугольник
$AB^2+DC^2=AD^2+BC^2$

$AC \perp BD$



Пусть $\angle AOB=\alpha$, тогда $\angle BOC=180^\circ-\alpha$.

$AB^2=OA^2+OB^2-2\cdot OA\cdot OB\cdot\cos\alpha$
$DC^2=OD^2+OC^2-2\cdot OD\cdot OC\cdot\cos\alpha$
$BC^2=OB^2+OC^2-2\cdot OB\cdot OC\cdot\cos(180^\circ-\alpha)$
$AD^2=OA^2+OD^2-2\cdot OA\cdot OD\cdot\cos(180^\circ-\alpha)$

$$AB^2+DC^2=OA^2+OB^2+OD^2+OC^2-$$
$$-2\cdot OA\cdot OB\cdot\cos\alpha-2\cdot OD\cdot OC\cdot\cos\alpha;$$
$$AD^2+BC^2=OA^2+OD^2+OB^2+OC^2-$$
$$-2\cdot OA\cdot OD\cdot\cos(180^\circ-\alpha)-2\cdot OB\cdot OC\cdot\cos(180^\circ-\alpha).$$

Так как $AB^2+DC^2=AD^2+BC^2$, то

$$-2(OA\cdot OB+OD\cdot OC)\cos\alpha=$$
$$=-2(OA\cdot OD+OB\cdot OC)\cos(180^\circ-\alpha).$$

Так как $\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$, то

$$(AO\cdot OD+OB\cdot OC+OA\cdot OB+OD\cdot OC)\cos\alpha=0.$$

Таким образом, $\cos\alpha=0$, т. е. $\alpha=90^\circ$,

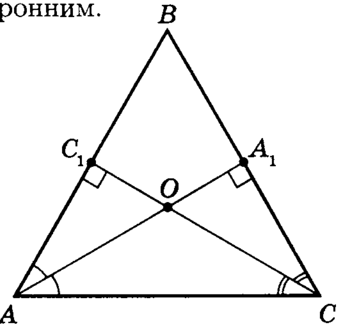
а значит, $AC\perp DB$, что и требовалось доказать.

Вариант V

1. Докажите, что если две биссектрисы треугольника перпендикулярны сторонам, к которым они проведены, то такой треугольник является равносторонним.

Дано:
$\triangle ABC$
$AA_1 = l_{BC}$
$CC_1 = l_{AB}$
$AA_1 \perp BC$
$CC_1 \perp AB$

$AB = BC = AC$

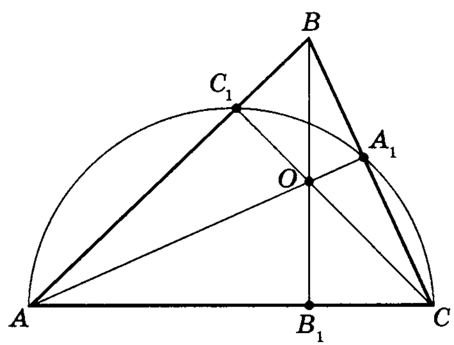


Так как $l_{BC} = H_{BC}$, то $AB = AC$.
Так как $l_{AB} = H_{AB}$, то $BC = AC$.
Значит $AB = BC = AC$, и $\triangle ABC$ — равносторонний.

2. В остроугольном треугольнике ABC на стороне AC как на диаметре проведена окружность, пересекающая стороны треугольника в точках A_1 и C_1. Отрезки CC_1 и AA_1 пересекаются в точке O. Выясните, какой угол образует прямая OB со стороной AC.

Дано:
$\triangle ABC$ — остроугольный
Окр (AC)
(AC — диаметр)
Окр $(AC) \cap \triangle ABC = \{A_1; C_1\}$
$CC_1 \cap AA_1 = O$

$\angle BB_1A$



Так как AC — диаметр, то $\triangle AC_1C$ и $\triangle CA_1A$ — прямоугольные. Значит $AC_1 \perp CC_1$ и $CA_1 \perp AA_1$.

Так как все высоты в треугольнике пересекаются в одной точке, то $BB_1 \perp AC$ ($B_1 \in AC$).

Вариант VI

Докажите следующие утверждения.

1. Если в треугольнике медиана и биссектриса взаимно перпендикулярны, то биссектриса делит сторону, к которой она проведена, в отношении $2 : 1$.

Дано:

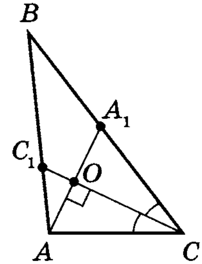
$\triangle ABC$

$AA_1 = m_{BC}$

$CC_1 = l_{AB}$

$CC_1 \perp AA_1$

$2AC_1 = BC_1$



Так как $OC \perp AA_1$ и $OC = l_{AA_1}$, то $\triangle ACA_1$ — равнобедренный, т. е. $AC = CA_1$. Значит $AC = CA_1 = BA_1$.

Тогда так как $BC = 2 \cdot CA_1$, $CA_1 = AC$ и $CC_1 = l_{AB}$, то $\frac{BC_1}{AC_1} = \frac{BC}{AC}$, т. е. $\frac{BC_1}{AC} = \frac{2AC}{AC} = 2$,

значит $BC_1 = 2AC_1$, что и требовалось доказать.

2. Высота и медиана, проведенные к одной стороне треугольника, делят угол, из вершины которого они проведены, на три равные части. Докажите, что такой треугольник — прямоугольный.

Дано:

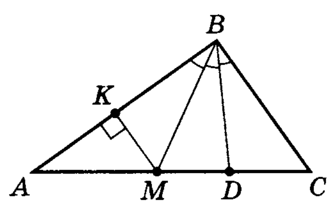
$\triangle ABC$

$BD \perp AC$

$BM = m_{AC}$

$\angle ABM = \angle MBD = \angle DBC$

$AB \perp BC$



а) $AM = MC$.

б) Проведем $MK \perp AB$.

в) $\triangle BMK = \triangle BMD$, так как BM — общая сторона и $\angle KBM = \angle DBM$, значит $MK = DM$.

г) $BD = l_{MC} = H_{MC}$, следовательно, $BM = BC$. Значит $BD = m_{MC}$.

д) $MC = AM = 2MK$. Значит $\sin(\angle A) = \dfrac{MK}{AM} = \dfrac{1}{2}$, т. е. $\angle A = 30^\circ$.

е) Тогда $\angle ABD = 60^\circ$, а $\angle ABM = 30^\circ$, значит $\angle ABC = 3 \cdot \angle ABM$, т. е. $\angle ABC = 90^\circ$, что и требовалось доказать.

Вариант VII

1. Корректно ли такое определение: прямым углом называется угол, стороны которого взаимно перпендикулярны?

Ответ — нет.

Характерная логическая ошибка, называемая «порочный круг» («circulus vitiosus»), встречается как в определениях, так и в доказательствах. В определениях эта ошибка выражается в том, что в качестве определяющего берется понятие, которое само определяется с помощью определяемого понятия. Верные определения таковы:

Определение 1. Прямым углом называется половина развернутого угла.

Определение 2. Две пересекающиеся прямые называются перпендикулярными, если они образуют хотя бы один прямой угол.

2. Верно ли утверждение: если в описанном многоугольнике все стороны равны, то равны и все его углы?

Ответ — нет.

В любой ромб можно вписать окружность. В этом случае ромб является описанным многоугольником, имеющим равные стороны, но не равные углы (конечно, если этот ромб — не квадрат).

Вариант VIII

1. Корретно ли такое определение: равносторонним называется такой треугольник, у которого равны все его стороны и все его углы?

Ответ — нет.

Логически правильное определение должно содержать *необходимые* признаки определяемого понятия, *не зависимые* между собой.

Приведенное определение равностороннего треугольника ошибочно, так как равенство углов есть *прямое следствие* равенства сторон, и включенное в определение требование равенства углов избыточно.

2. Верно ли такое определение: параллелограммом называется многоугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны?

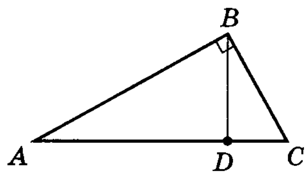
Ответ — нет.

Логические правильное определение должно содержать *достаточные* признаки определяемого понятия, позволяющие исчерпывающе охарактеризовать его, точно отграничив от других понятий.

Данное определение параллелограмма ошибочно, так как указанным в определении признакам удовлетворяет, например, и правильный шестиугольник. Ошибка произошла вследствие того, что в определении указано не ближайшее «родовое понятие» к понятию параллелограмм (это понятие «четырехугольник»), а более отдаленное «многоугольник».

Метрические отношения в прямоугольном треугольнике

Теорема 3. В любом прямоугольном треугольнике перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, есть средняя пропорциональная величина между отрезками, на которые делит данная высота гипотенузу, а каждый катет есть средняя пропорциональная между гипотенузой и прилежащим к этому катету отрезком гипотенузы.

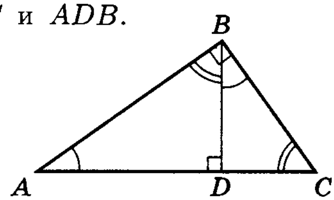


Аналитически это можно выразить в виде формул.

1. $AB^2 = AC \cdot AD$ из подобия $\triangle ABC$ и $\triangle ADB$;
2. $BC^2 = AC \cdot DC$ из подобия $\triangle ABC$ и $\triangle BDC$;
3. $AB^2 + BC^2 = AC^2$ как сумма отношений пунктов 1 и 2 (теорема Пифагора);
4. $BD^2 = AD \cdot DC$ (или $BD = \sqrt{AD \cdot DC}$) из подобия $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$.

Примечание. Используя теоретический материал на с. 71, попытайтесь самостоятельно доказать данные утверждения. Если же это получается плохо, то рассмотрите доказательства на следующей странице и отметьте те трудности, из-за которых вам самостоятельно не удалось их получить.

Доказательство



1. Рассмотрим треугольники ABC и ADB.
   Так как $\angle BAC = \angle BAD$
   и $\angle ABC = \angle ADB = 90°$,
   то $\triangle ABC \sim \triangle ADB$
   по I признаку подобия. Тогда
   AB из $\triangle ABC$ сходственен AD из $\triangle ADB$;
   AC из $\triangle ABC$ сходственен AB из $\triangle ADB$,
   значит $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AD}{AB}$, т. е. $\boxed{AB^2 = AC \cdot AD}$.

2. Рассмотрим треугольники ABC и BDC.
   Так как $\angle BAC = \angle DBC$ и $\angle ABC = \angle BDC = 90°$,
   то $\triangle ABC \sim \triangle BDC$ (по какому признаку?) Тогда
   BC из $\triangle ABC$ сходственен DC из $\triangle BDC$;
   AC из $\triangle ABC$ сходственен BC из $\triangle BDC$,
   значит $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{DC}{BC}$, т. е. $\boxed{BC^2 = AC \cdot DC}$.

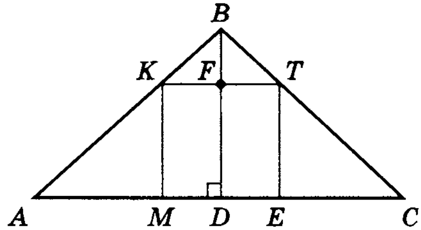
3. Так как $AB^2 = AC \cdot AD$ и $BC^2 = AC \cdot DC$, то, сложив почленно, получим:
   $AB^2 + BC^2 = AC \cdot AD + AC \cdot DC = AC \cdot (AD + DC) = AC^2$,
   т. е. $\boxed{AB^2 + BC^2 = AC^2}$ — теорема Пифагора.

4. Рассмотрим треугольники ABD и BCD.
   Так как $\angle BAD = \angle CBD$ и $\angle ADB = \angle BDC = 90°$,
   то $\triangle ABD \sim \triangle BCD$ (почему?). Тогда
   BD из $\triangle ABD$ сходственен DC из $\triangle BCD$;
   AD из $\triangle ABD$ сходственен BD из $\triangle BCD$,
   значит $\dfrac{BD}{AD} = \dfrac{DC}{BD}$, т. е. $\boxed{BD^2 = AD \cdot DC}$,
   что и требовалось доказать.

Задача 1

Дано:
$\triangle ABC$
$BD \perp AC$
$MKTE$ — квадрат
$AC = 6$
$BD = 2$

ME



Так как $\triangle ABC \sim \triangle KBT$ (докажите),

где $BF \perp KT$ и $BD \perp AC$, то

$\dfrac{BF}{KT} = \dfrac{BD}{AC}$, т. е. $\dfrac{BF}{KT} = \dfrac{2}{6}$, значит $KT = 3BF$.

Но $BD = DF + BF$, где $DF = ME = MK = KT = TE$,

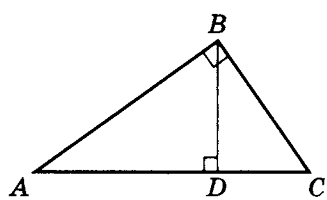
значит $2 = KT + BF = 3BF + BF$, т. е. $BF = \dfrac{1}{2}$.

Тогда $KT = ME = 2 - BF$; $\boxed{ME = 1{,}5}$.

Задача 2

Дано:
$\triangle ABC$
$AB \perp BC$
$BD \perp AC$
а) $DC = 4$, $BD = 6$
б) $AB = 6$, $DC = 4$

а) AD, AB
б) AD, BC



а) $BD^2 = AD \cdot DC$, т. е. $36 = AD \cdot 4$; $\boxed{AD = 9}$.

$AB^2 = AC \cdot AD$ $(AC = AD + DC)$,

т. е. $AB^2 = (9 + 4) \cdot 9$; $\boxed{AB = 3\sqrt{13}}$.

б) $AB^2 = AC \cdot AD$ ($AD = AC - DC$), т.е. $36 = AC \cdot (AC - 4)$;
$AC^2 - 4AC - 36 = 0$; $AC_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+36} = 2 \pm 2\sqrt{10}$.
Подходит только $AC = 2 + 2\sqrt{10} > 0$.
Значит $AD = AC - DC$, т.е. $\boxed{AD = 2\sqrt{10} - 2}$.

$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2}$;

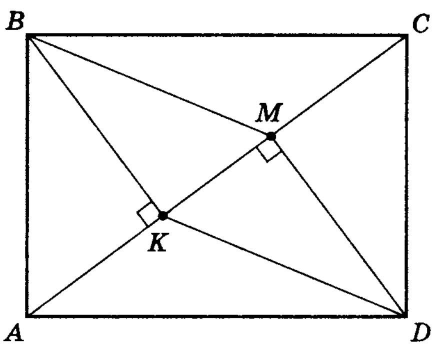
$BC = \sqrt{\left(2+2\sqrt{10}\right)^2 - 6^2} = \sqrt{4 + 8\sqrt{10} + 40 - 36} =$

$= \sqrt{8 + 8\sqrt{10}}$, т.е. $\boxed{BC = 2\sqrt{2 + 2\sqrt{10}}}$.

Задача 3

Дано:
$ABCD$ — прямоугольник
$AB = 10$
$AD = 24$
$BK \perp AC$
$DM \perp AC$

S_{KBMD}



а) $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$; $AC = \sqrt{10^2 + 24^2} = 26$.

б) $AB \cdot BC = AC \cdot BK$; $BK = \dfrac{10 \cdot 24}{26} = \dfrac{120}{13} = 9\dfrac{3}{13}$.

в) $AK = \sqrt{AB^2 - BK^2}$; $AK = \sqrt{10^2 - \left(\dfrac{120}{13}\right)^2} =$

$= \dfrac{1}{13}\sqrt{(130+120)(130-120)} = \dfrac{1}{13}\sqrt{2500} = \dfrac{50}{13} = 3\dfrac{11}{13}$.

г) $MK = AC - 2 \cdot AK$; $MK = 26 - 2 \cdot \dfrac{50}{13} = 26 - 7\dfrac{9}{13} = 18\dfrac{4}{13}$.

д) $S_{KBMD} = BK \cdot MK$;

$S_{KBMD} = \dfrac{120}{13} \cdot \dfrac{238}{13} = \dfrac{28\,560}{169} = 168\dfrac{168}{169}$.

Практикум 2

1. Катеты прямоугольного треугольника находятся в отношении $3:2$, а высота, опущенная из вершины прямого угла, делит гипотенузу на отрезки, из которых один больше другого на 2. Найдите площадь треугольника.

2. Высота и медиана, опущенные из вершины прямого угла, равны соответственно 8 и 10. Найдите все стороны треугольника и биссектрису, проведенную к гипотенузе.

3. В треугольнике высоты равны соответственно 30, 40, 40. Определите стороны такого треугольника.

4. В треугольнике стороны равны 13, 14 и 15. Найдите наибольшую из высот, а также радиус вписанной и описанной окружности.

5. Катеты треугольника равны 13 и 84. Найдите радиус вписанной окружности и наибольшую из биссектрис.

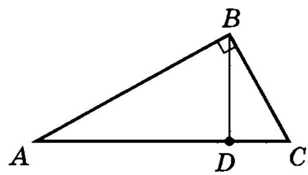
6. Площадь трапеции $ABCD$ равна 240, диагонали ее пересекаются в точке O. Из середины основания AD, т. е. точки P, проводятся отрезки BP и CP, которые пересекаются диагоналями AC и DB в точках M и N. Найдите площадь четырехугольника $OMPN$, если одно из оснований трапеции втрое больше другого.

Решение практикума 2

1. Катеты прямоугольного треугольника находятся в отношении 3 : 2, а высота, опущенная из вершины прямого угла, делит гипотенузу на отрезки, из которых один больше другого на 2. Найдите площадь треугольника.

Дано:
$\triangle ABC$
$AB \perp BC$
$BD \perp AC$
$\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{3}{2}$
$AD - DC = 2$

$S_{\triangle ABC}$



а) Пусть $DC = x$, тогда $AD = x + 2$.

Применяя метрические отношения в прямоугольном треугольнике, получим:

$AB^2 = AC \cdot AD$, т. е. $AB^2 = (x + 2 + x)(x + 2)$;

$BC^2 = AC \cdot DC$, т. е. $BC^2 = 2(x + 1)x$.

б) Используя условия задачи $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{3}{2}$, получим

$$\frac{2(x+1)(x+2)}{2(x+1)x} = \frac{9}{4}; \quad \frac{x+2}{x} = \frac{9}{4}; \quad 4x + 8 = 9x;$$

$$x = \frac{8}{5} = 1{,}6 = DC; \quad AD = x + 2 = 1{,}6 + 2 = 3{,}6.$$

в) Так как $BD^2 = AD \cdot DC$, то $BD^2 = 3{,}6 \cdot 1{,}6$;

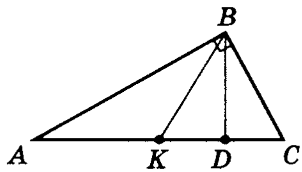
тогда $BD^2 = \dfrac{6^2 \cdot 4^2}{100}$; $BD = \dfrac{6 \cdot 4}{10} = 2{,}4$.

г) Так как $AC = AD + DC = 3{,}6 + 1{,}6 = 5{,}2$, то

$S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BD$, значит $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 5{,}2 \cdot 2{,}4 = \boxed{6{,}24}$.

2. Высота и медиана, опущенные из вершины прямого угла, равны соответственно 8 и 10. Найдите все стороны треугольника и биссектрису, проведенную к гипотенузе.

Дано:
$\triangle ABC$
$AB \perp BC$
$BD \perp AC$
$BK = m_{AC}$
$BD = 8$
$BK = 10$



а) AB
б) BC
в) AC
г) l_{AC}

1) $KD = \sqrt{BK^2 - BD^2}$, т. е. $KD = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$.

2) Пусть $AK = KC = x$, тогда, используя свойство

$BD^2 = AD \cdot DC$, получим: $8^2 = (x+6)(x-6)$,

где $AD = AK + KD$, а $DC = KC - KD$.

Таким образом, $x^2 - 36 = 64$; $x = 10$ и $AC = 20$, тогда $\boxed{DC = 4}$.

Но этот результат можно было получить без сложных вычислений, если знать, что **медиана, проведенная из вершины прямого угла к гипотенузе, равна половине гипотенузы** (докажите).

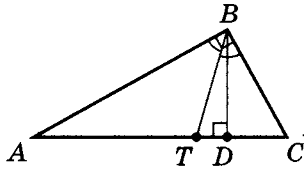
Значит $AC = \boxed{20}$.

3) $AB^2 = AC \cdot AD$, т. е. $AB^2 = 20(10+6)$;

$AB = \boxed{8\sqrt{5}}$.

4) $BC^2 = AC \cdot DC$, т. е. $BC^2 = 20(10-6)$; $BC = \boxed{4\sqrt{5}}$.

5) Теперь найдем l_{AC}.



Пусть $BT = l_{AC}$,

тогда $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AT}{TC}$,

т. е. $\dfrac{8\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \dfrac{AT}{TC}$. $2TC = AT$, значит

$AC = AT + TC = 2TC + TC = 3TC = 20$,

$TC = \dfrac{20}{3}$; $AT = \dfrac{40}{3}$.

6) $TD = AD - AT$; $TD = 16 - \dfrac{40}{3} = \dfrac{8}{3}$.

7) $BT = \sqrt{TD^2 + BD^2}$;

$$BT = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 + 8^2} = \boxed{\frac{8}{3}\sqrt{10}} = l_{AC}.$$

3. В треугольнике высоты равны соответственно 30, 40, 40. Определите стороны такого треугольника.

Дано:

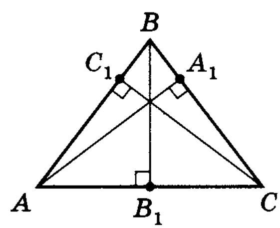
$\triangle ABC$

Высоты к сторонам треугольника:

$H_{AC} = 30$

$H_{BC} = 40$

$H_{AB} = 40$



а) AB

б) AC

в) BC

1) Так как $H_{BC} = H_{AB}$, то $\triangle ABC$ равнобедренный (попробуйте доказать сами), значит

$AB = BC$ и $AB_1 = B_1C = \dfrac{1}{2}AC$.

2) $2S_{\triangle ABC} = BB_1 \cdot AC = AA_1 \cdot BC$,

т. е. $AC = \dfrac{AA_1 \cdot BC}{BB_1}$; $AC = \dfrac{40}{30}BC$; $AC = \dfrac{4}{3}BC$.

3) Пусть $BC = x$, тогда

$AC = \frac{4}{3}x$ и $AB_1 = B_1C = \frac{1}{2}AC = \frac{2}{3}x$.

4) $BC^2 = B_1C^2 + BB_1^2$, тогда

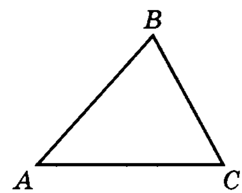
$x^2 = \frac{4}{9}x^2 + 30^2$; $\frac{5}{9}x^2 = 30^2$; $x^2 = \frac{(3 \cdot 30)^2}{5}$;

$x = \frac{90}{\sqrt{5}} = \boxed{18\sqrt{5}} = BC = AB$.

5) $AC = \frac{4}{3}BC$; $AC = \boxed{24\sqrt{5}}$.

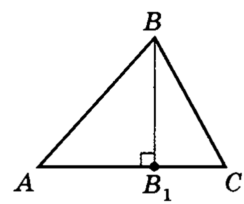
4. В треугольнике стороны равны 13, 14 и 15. Найдите наибольшую из высот, а также радиус вписанной и описанной окружности.

Дано:
$\triangle ABC$
$AB = 13$
$BC = 14$
$AC = 15$



а) $H_{\text{наиб}}$
б) $R_{\text{о}}$
в) $r_{\text{в}}$

а) Пусть $BB_1 \perp AC$.
Положим $AB_1 = x$.



1. Рассмотрим $\triangle ABB_1$.
$BB_1^2 = AB^2 - AB_1^2$,
т. е. $BB_1^2 = 13^2 - x^2$.

2. Рассмотрим $\triangle CBB_1$.
$BB_1^2 = BC^2 - B_1C^2$, т. е. $BB_1^2 = 14^2 - (15 - x)^2$,
где $B_1C = AC - AB_1$, т. е. $B_1C = 15 - x$.

3. Из $\left.\begin{aligned} BB_1^2 &= 13^2 - x^2 \\ BB_1^2 &= 14^2 - (15-x)^2 \end{aligned}\right|$ следует:

$13^2 - x^2 = 14^2 - (15-x)^2;$

$13^2 - x^2 = 14^2 - 15^2 + 30x - x^2;$

$x = \dfrac{13^2 - 14^2 + 15^2}{30} = 6{,}6.$

4. $BB_1 = \sqrt{AB^2 - AB_1^2};$

$BB_1 = \sqrt{13^2 - 6{,}6^2} = \sqrt{19{,}6 \cdot 6{,}4} = \dfrac{14 \cdot 8}{10} = 11{,}2.$

Пусть $H_{AC} = BB_1, \quad H_{BC} = AA_1, \;\; H_{AB} = CC_1,$

тогда $2S_{\triangle ABC} = BB_1 \cdot AC = AA_1 \cdot BC = CC_1 \cdot AB.$

Учитывая, что $AC > BC > AB,$

получим, что $H_{\text{наиб}} = H_{AB} = CC_1.$

Так как $BB_1 \cdot AC = CC_1 \cdot AB$, то $11{,}2 \cdot 15 = CC_1 \cdot 13,$

т. е. $CC_1 = \dfrac{11{,}2 \cdot 15}{13} = \dfrac{168}{13} = \boxed{12\dfrac{12}{13}}.$

б) Так как $\boxed{R_{\text{о}} = \dfrac{abc}{4S_{\triangle}}},$

то найдем вначале $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot BB_1 \cdot AC;$

$S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 11{,}2 \cdot 15 = 5{,}6 \cdot 15 = 84.$

$R_{\text{о}} = \dfrac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} = \dfrac{13 \cdot 15}{4 \cdot 6} = \dfrac{13 \cdot 5}{8} = \dfrac{65}{8} = 8\dfrac{1}{8} = \boxed{8{,}125}.$

в) $\boxed{r_{\text{в}} = \dfrac{S_{\triangle}}{p}}; \quad r_{\text{в}} = \dfrac{84 \cdot 2}{13 + 14 + 15} = \dfrac{84 \cdot 2}{42} = \boxed{4}.$

Примечание. Можно проще, если знать формулу Герона: $S_{\triangle} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$. В этой задаче $p = \dfrac{13+14+15}{2} = 21$, и $S_{\triangle ABC} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84.$

Значит $H_{AB} = \dfrac{2 \cdot S_{\triangle}}{AB}$, т. е. $H_{AB} = \dfrac{2 \cdot 84}{13} = 12\dfrac{12}{13}$ и так далее.

5. Катеты треугольника равны 13 и 84. Найдите радиус вписанной окружности и наибольшую из биссектрис.

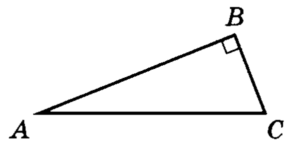
Дано:

$\triangle ABC$

$AB \perp BC$

$AB = 84$

$BC = 13$



а) $r_{\text{в}}$

в) $l_{\text{наиб}}$

а) 1. $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$;

$AC = \sqrt{84^2 + 13^2} = \sqrt{7056+169} = \sqrt{7225} = 85.$

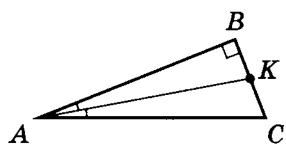
2. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC$;

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 84 \cdot 13 = 42 \cdot 13 = 546.$

3. $r_{\text{в}} = \frac{S_{\triangle}}{p}$; $r_{\text{в}} = \frac{546 \cdot 2}{84 + 13 + 85} = \frac{1092}{182} = \frac{546}{91} = \boxed{6}$.

б) 1. Известно, что медиана, высота и биссектриса, проведенные к наибольшей (наименьшей) стороне являются наименьшей (наибольшей) в треугольнике.

Так как $BC < AB < AC$,
то $l_{BC} > l_{AB} > l_{AC}$,
значит $l_{\text{наиб}} = l_{BC} = AK$.



2. $\frac{AB}{AC} = \frac{BK}{KC}$, т. е. $\frac{84}{85} = \frac{BK}{BC - BK}$,

тогда $84 \cdot 13 - 84 \cdot BK = 85 \cdot BK$;

$BK = \frac{84 \cdot 13}{84 + 85} = \frac{84 \cdot 13}{169} = \frac{84}{13} = 6\frac{6}{13}$.

3. $l_{BC} = AK = \sqrt{AB^2 + BK^2}$, т. е. $AK = \sqrt{\left(\frac{84}{13}\right)^2 + 84^2} =$

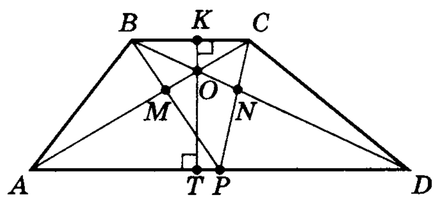
$= \frac{84}{13}\sqrt{1 + 169} = \boxed{\frac{84}{13}\sqrt{170}} = l_{\text{наиб}}$.

6. Площадь трапеции $ABCD$ равна 240, диагонали ее пересекаются в точке O. Из середины основания AD, точки P, проводятся отрезки BP и CP, которые пересекаются диагоналями AC и DB в точках M и N. Найдите площадь четырехугольника $OMPN$, если одно из оснований трапеции втрое больше другого.

Дано:

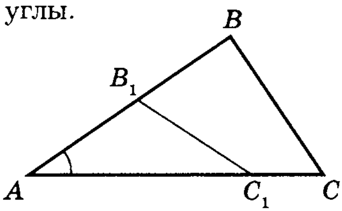
$ABCD$ — трапеция
$AC \cap DB = O$
$PB \cap AC = M$
$PC \cap DB = N$
$3BC = AD$
$AP = PD$
$S_{ABCD} = 240$

S_{OMPN}



Для решения задачи применим следующую теорему.

Теорема. Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы.



$$\boxed{\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AB_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{AB_1 \cdot AC_1}}.$$

а) 1. Пусть $BC = a$, тогда $AD = 3a$.

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot H_{ABCD},$$

т. е. $240 = \dfrac{3a + a}{2} \cdot H_{ABCD}$; $\quad a \cdot H_{ABCD} = 120$.

2. Так как $O = AC \cap BD$, то пусть $KT \perp AD$ $(O \in KT)$.

Тогда, учитывая, что $\dfrac{BC}{AD} = \dfrac{1}{3}$, получим:

$$H_{\triangle AOD} = OT = \frac{3}{4} H_{ABCD}.$$

3. $S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot \frac{3}{4} H_{ABCD} = \frac{9}{8} a \cdot H_{ABCD} = \frac{9}{8} \cdot 120 = 135.$

4. Так как $\triangle BMC \sim \triangle PMA$, $\triangle BNC \sim \triangle DNP$ и $BC = AP = PD$, то $MN \parallel AD$.

   Тогда $H_{\triangle AMP} = H_{\triangle DNP}$, значит, $S_{\triangle AMP} = S_{\triangle DNP}$. Зная $S_{\triangle AOD}$, получим $\dfrac{S_{\triangle AMP}}{S_{\triangle AOD}} = \dfrac{AM \cdot AP}{AO \cdot AD}$ (см. с. 135).

б) Найдем отношения $\dfrac{AM}{AO}$ и $\dfrac{AP}{AD}$.

1. $\dfrac{BC}{AD} = \dfrac{1}{3}$ и $\dfrac{BC}{AD} = \dfrac{OC}{AO} = \dfrac{1}{3}$,

   тогда $AO = \dfrac{3}{4} AC$ и $OC = \dfrac{1}{3} AC$.

   $\dfrac{BC}{AP} = \dfrac{a}{\frac{3}{2}a} = \dfrac{2}{3}$; $\dfrac{BC}{AP} = \dfrac{MC}{AM} = \dfrac{2}{3}$,

   тогда $MC = \dfrac{2}{5} AC$ и $AM = \dfrac{3}{5} AC$.

2. $\dfrac{AM}{AO} = \dfrac{\frac{3}{5}AC}{\frac{3}{4}AC} = \dfrac{4}{5}$; $\dfrac{AP}{AD} = \dfrac{\frac{3}{2}a}{3a} = \dfrac{1}{2}$.

3. Значит $\dfrac{S_{\triangle AMP}}{S_{\triangle AOD}} = \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{5}$,

   т. е. $S_{\triangle AMP} = S_{\triangle DNP} = \dfrac{2}{5} \cdot 125 = 54$.

4. Следовательно, $S_{OMPN} = S_{\triangle AOD} - 2S_{\triangle AMP}$,

   т. е. $S_{OMPN} = 135 - 54 \cdot 2 = \boxed{27}$.

Аналогично задача решается для случая $3AD = BC$, в этом случае ответ другой — $6\frac{3}{7}$.

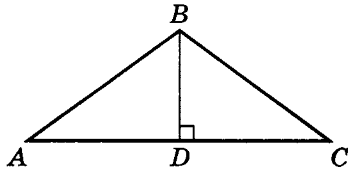
Ответ: $\left\{27; 6\frac{3}{7}\right\}$.

Лабораторная работа 2

Варианты 1–10

В равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC = a$, $AC = b$ — основание.

По данным из таблицы найдите остальные ($H_{AC} = BD$).



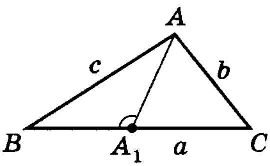
	b	a	H_{AC}	$S_{\triangle ABC}$	вид $\angle B$	$r_в$	$R_о$	$\sin(\angle B)$
1	6	5						
2			3	12				
3	10			60				
4		13		60	тупой			
5	14				острый		$13\frac{1}{48}$	
6		25	7					
7	16		15					
8		41					$\frac{1681}{80}$	
*9	80				тупой		$\frac{1681}{18}$	
10				660				$\frac{1320}{3721}$

Теорема Стюарта и ее следствия

Рассмотрим ряд дополнительных теорем и формул, позволяющих проще решать иногда довольно трудные задачи.

Теорема Стюарта. Для любого треугольника $\triangle ABC$, где $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$ и произвольная точка A_1 принадлежит стороне BC, справедливо утверждение (формула)

$$\boxed{AA_1^2 = \frac{b^2 A_1B + c^2 A_1C - a \cdot A_1B \cdot A_1C}{a}}.$$



Для $\triangle AA_1B$ по теореме косинусов:

$$AA_1^2 + A_1B^2 - 2AA_1 \cdot A_1B \cos(\angle AA_1B) = c^2. \qquad (1)$$

Для $\triangle AA_1C$ вновь используем теорему косинусов:

$$AA_1^2 + A_1C^2 - 2AA_1 \cdot A_1C \cos(180^\circ - \angle AA_1B) = b^2.$$

Так как $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$, то

$$AA_1^2 + A_1C^2 + 2AA_1 \cdot A_1C \cos(\angle AA_1B) = b^2. \qquad (2)$$

Далее умножим обе части первого равенства на A_1C:

$$AA_1^2 + A_1B^2 - 2AA_1 \cdot A_1B \cos(\angle AA_1B) = c^2 \quad |\cdot A_1C$$

$$AA_1^2 \cdot A_1C + A_1B^2 \cdot A_1C - 2AA_1 \cdot A_1B \cdot A_1C \cos(\angle AA_1B) = c^2 \cdot A_1C.$$

Затем умножим на A_1B второе равенство. После этого сложим почленно полученные равенства:

$$\begin{array}{l} \,AA_1^2 \cdot A_1B + A_1C^2 \cdot A_1B + \cancel{2AA_1 \cdot A_1C \cdot A_1B \cos(\angle AA_1B)} = b^2 \cdot A_1B \\ + \\ \,AA_1^2 \cdot A_1C + A_1B^2 \cdot A_1C - \cancel{2AA_1 \cdot A_1B \cdot A_1C \cos(\angle AA_1B)} = c^2 \cdot A_1C \\ \hline \end{array}$$

$$\underline{AA_1^2} \cdot A_1C + \underline{\underline{A_1B^2 \cdot A_1C}} + \underline{AA_1^2 \cdot A_1B} + \underline{\underline{A_1C^2 \cdot A_1B}} = c^2 \cdot A_1C + b^2 \cdot A_1B;$$

$$AA_1^2 \cdot (A_1C + A_1B) + A_1B \cdot A_1C \cdot (A_1B + A_1C) = c^2 \cdot A_1C + b^2 \cdot A_1B.$$

Так как $A_1C + A_1B = a$, то, поделив на a и перенеся $A_1B \cdot A_1C$ в другую сторону, имеем:

$$\boxed{AA_1^2 = \frac{b^2 A_1B + c^2 A_1C - a \cdot A_1B \cdot A_1C}{a}}, \text{ или}$$

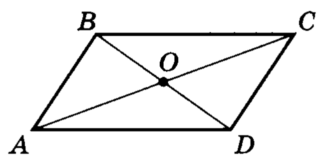
$$\boxed{AA_1^2 = \frac{b^2 A_1B + c^2 A_1C}{a} - A_1B \cdot A_1C}.$$

Следствие 1. Полагая, что $A_1B = A_1C = \frac{a}{2}$, получим, что $AA_1 = m_{BC} = m_a$, тогда

$$m_a^2 = \frac{b^2 \cdot \frac{a}{2} + c^2 \cdot \frac{a}{2} - a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}}{a} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4};$$

$$\boxed{m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}}, \text{ или } m_a = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}.$$

Следствие 2. В любом параллелограмме сумма квадратов его диагоналей равна сумме квадратов длин всех его сторон.



Используем формулу медианы из следствия 1 для параллелограмма $ABCD$ (существуют и другие доказательства, например, с использованием теоремы косинусов).

Из $\triangle ABC$ $\quad BD^2 = (2BO)^2 = 4BO^2$.

Так как $m_{AC}^2 = BO^2 = \dfrac{2AB^2 + 2BC^2 - AC^2}{4}$, то

$$BD^2 = 2AB^2 + 2BC^2 - AC^2. \tag{3}$$

Из $\triangle ABD$, рассуждая аналогично, получим

$$AC^2 = 2AB^2 + 2AD^2 - BD^2. \tag{4}$$

Тогда, сложив почленно равенства (3) и (4), получим

$AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2BC^2$,

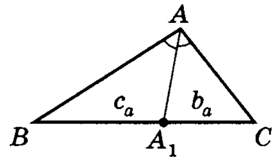
или $\boxed{AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + AD^2 + DC^2}$

$(AB = DC;\ BC = AD)$.

Следствие 3. Полагая в формуле Стюарта $AA_1 = l_a$ (биссектрисе, проведенной к стороне a), выведем формулу вычисления длины биссектрисы:

$\boxed{l_a^2 = AB \cdot AC - A_1B \cdot A_1C}$,

или $\boxed{l_a^2 = bc - b_a c_a}$.



Для $\triangle ABC$ положим $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. $A_1B = c_a$, $A_1C = b_a$. Это своеобразная проекция сторон на отрезки, пропорциональные сторонам треугольника.

По теореме (свойству) о биссектрисе $\dfrac{AB}{A_1B} = \dfrac{AC}{A_1C}$, т. е. $\dfrac{c}{c_a} = \dfrac{b}{b_a}$.

Так как $A_1B + A_1C = BC = a$, то $A_1B = a - A_1C$, или $c_a = a - b_a$.

Тогда $\dfrac{c}{a - b_a} = \dfrac{b}{b_a}$, значит $b_a = \dfrac{ab}{c+b}$; $A_1B = c_a = a - \dfrac{ab}{c+b}$.

Далее, используя формулу Стюарта, получим:

$$l_a^2 = \frac{b^2\left(a - \frac{ab}{c+b}\right) + c^2\frac{ab}{c+b} - ac_ab_a}{a} =$$

$$= \frac{b^2ac + c^2ab}{a(c+b)} - c_ab_a = \frac{abc(c+b)}{a(c+b)} - c_ab_a = bc - c_ab_a.$$

Значит $\boxed{l_a^2 = bc - b_a c_a}$.

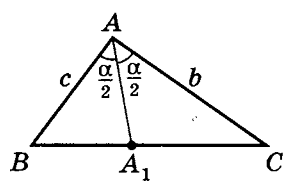
Примечание. Иногда пользуются и второй формулой длины биссектрисы.

а) Для $\triangle ABC$

$\angle BAA_1 = \angle CAA_1 = \dfrac{\alpha}{2}$.

Известно, что по свойству площадей

$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABA_1} + S_{\triangle ACA_1}$.



б) Одна из формул площади треугольника имеет вид

$S_\triangle = \dfrac{1}{2}cb\sin\left(\widehat{c;b}\right)$ ($\left(\widehat{c;b}\right)$ — угол между c и b в данном случае положим равным α).

$$\left.\begin{array}{ll}\triangle ABC & S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}b\cdot c\sin\alpha \\ \triangle ACA_1 & S_{\triangle ACA_1} = \frac{1}{2}c\cdot l_a\sin\frac{\alpha}{2} \\ \triangle CBA_1 & S_{\triangle CBA_1} = \frac{1}{2}b\cdot l_a\sin\frac{\alpha}{2}\end{array}\right| .$$

Тогда $\frac{1}{2}b\cdot c\sin\alpha = \frac{1}{2}c\cdot l_a\sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}b\cdot l_a\sin\frac{\alpha}{2}$,

значит, зная из тригонометрии формулу синуса двойного угла[6] $\boxed{\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}$, получим

$bc\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}l_a(c+b)\sin\frac{\alpha}{2}$.

Сокращая на $\sin\frac{\alpha}{2}$, имеем равенство $bc\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}l_a(b+c)$.

Таким образом, вывели новую формулу.

Следствие 4. $\boxed{l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Можно доказать справедливость и следующей формулы.

Следствие 5. $\boxed{l_a = \frac{2}{c+b}\sqrt{p\cdot c\cdot b\,(p-a)}}$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Задача 1. В треугольнике со сторонами, равными 4, 6 и 8, к большей стороне из вершины противолежащего угла проведен отрезок, равный 5, поделивший большую сторону на отрезки. Найдите:

а) полученные отрезки наибольшей стороны;

б) медиану, проведенную к большей стороне;

в) полагая, что данный треугольник — половина параллелограмма, диагонали этого параллелограмма;

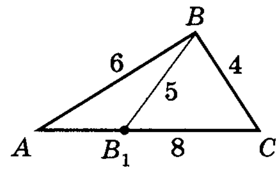
г) наибольшую биссектрису треугольника;

д) наибольший косинус половинного угла углов треугольника.

[6] См. Шахмейстер А. Х. Тригонометрия. СПб.; М., 2013. С. 135.

Дано:

$\triangle ABC$
$AB = 6$
$BC = 4$
$AC = 8$
$BB_1 = 5$



а) AB_1; B_1C
б) m_{AC}
в) диагональ достроенного параллелограмма
г) $l_{\text{наиб}}$
д) наибольший $\cos\dfrac{\angle\alpha}{2}$, где $\angle\alpha$ — наименьший.

а) По теореме Стюарта

$$BB_1^2 = \frac{AB^2 \cdot B_1C + BC^2 \cdot AB_1}{AC} - AB_1 \cdot B_1C.$$

Подставим конкретные данные из условия задачи, получим $5^2 = \dfrac{36B_1C + 16AB_1}{8} - AB_1 \cdot B_1C$;

$$50 = 9B_1C + 4AB_1 - 2AB_1 \cdot B_1C.$$

Так как $AB_1 + B_1C = 8$, то $AB_1 = 8 - B_1C$, тогда

$$50 = 9B_1C + 4(8 - B_1C) - 2(8 - B_1C) \cdot B_1C.$$

Получили квадратное уравнение

$$2(B_1C)^2 - 11B_1C - 18 = 0.$$

$$(B_1C)_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 144}}{4} = \frac{11 \pm \sqrt{265}}{4}.$$

Так как $B_1C > 0$, то $B_1C = \dfrac{11 + \sqrt{265}}{4}$;

$AB_1 = 8 - B_1C$, т. е. $AB_1 = 8 - \dfrac{11 + \sqrt{265}}{4} = \dfrac{21 - \sqrt{265}}{4} > 0.$

Ответ: $B_1C = \dfrac{11 + \sqrt{265}}{4}$; $AB_1 = \dfrac{21 - \sqrt{265}}{4}$.

Попробуйте решить задачу, не используя теорему Стюарта. Для этого необходимо:

1. По теореме Герона найти $S_{\triangle ABC}$.
2. Найти $H_{AC} = BK$.
3. По теореме Пифагора найти B_1K и KC и т. д.

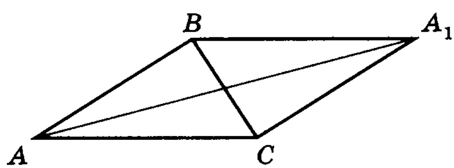
б) Необходимо найти m_{AC}.

Используя формулу $m_{AC} = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot AB^2 + 2 \cdot BC^2 - AC^2}$,

получим $m_{AC} = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 6^2 + 2 \cdot 4^2 - 8^2} = \frac{1}{2}\sqrt{72 + 32 - 64} = $
$= \frac{\sqrt{40}}{2} = \sqrt{10}$.

в) Достроить треугольник до параллелограмма можно тремя способами.

1. Пусть BC — диагональ параллелограмма ABA_1C.

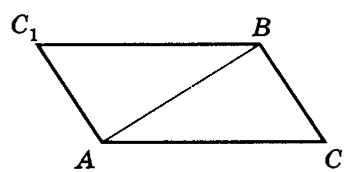


Тогда $AA_1^2 = 2AB^2 + 2AC^2 - BC^2$,

т. е. $AA_1^2 = 2 \cdot 6^2 + 2 \cdot 8^2 - 4^2 = 72 + 128 - 16 = 184$;

$AA_1^2 = 184$; $\quad AA_1 = \boxed{2\sqrt{46}}$.

2. Пусть AB — диагональ параллелограмма $BCAC_1$.

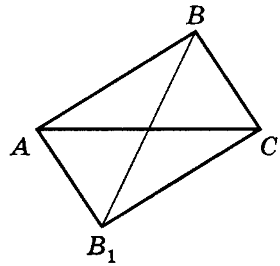


Тогда $CC_1^2 = 2BC^2 + 2AC^2 - AB^2$,

т. е. $CC_1^2 = 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 8^2 - 6^2 = 32 + 128 - 36 = 124$;

$\boxed{CC_1 = 2\sqrt{31}}$.

3. Пусть AC — диагональ параллелограмма $ABCB_1$.



Тогда $BB_1^2 = 2 \cdot AB^2 + 2 \cdot BC^2 - AC^2$,

т. е. $BB_1^2 = 2 \cdot 6^2 + 2 \cdot 4^2 - 8^2 = 72 + 32 - 64 = 40$;

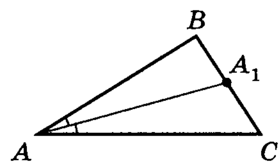
$BB_1 = \boxed{2\sqrt{10}}$.

($BB_1 = 2m_{AC}$ — это можно было использовать сразу.)

Очевидно, что при этом площади всех этих параллелограммов равны, так как

$S_{ABA_1C} = S_{BCAC_1} = S_{ABCB_1} = 2S_{\triangle ABC}$.

г) Для $\triangle ABC$ очевидно, что l_{BC} — наибольшая.



Пусть $AA_1 = l_{BC}$. По теореме (свойстве) о биссектрисе

$\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{A_1B}{A_1C}$, т. е. $\dfrac{6}{8} = \dfrac{A_1B}{A_1C}$.

Так как $A_1B + A_1C = 4$; $A_1B = 4 - A_1C$,

то $\dfrac{3}{4} = \dfrac{4 - A_1C}{A_1C}$; $A_1C = \dfrac{16}{7}$, и $A_1B = 4 - \dfrac{16}{7} = \dfrac{12}{7}$.

Теперь можно применить формулу длины:

$$l_{BC}^2 = AB \cdot AC - A_1B \cdot A_1C, \text{ т. е.}$$

$$l_{BC}^2 = 6 \cdot 8 - \frac{16}{7} \cdot \frac{12}{7} = \frac{6 \cdot 8(49 - 2 \cdot 2)}{7^2} = \frac{48 \cdot 45}{7^2};$$

$$l_{BC} = \sqrt{\frac{16 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 5}{7^2}} = \frac{4 \cdot 3}{7}\sqrt{15} = \boxed{\frac{12}{7}\sqrt{15}}.$$

д) Так как треугольник остроугольный, а косинус угла $0 < \alpha < 90^\circ$ есть убывающее отношение, (т. е. большему углу соответствует меньшее значение косинуса угла), то нам необходимо рассмотреть косинус наименьшего угла, т. е. $\angle CAB = \alpha$.

В задаче требуется найти $\cos\frac{\alpha}{2}$. Применим тогда вторую формулу биссектрисы для $\triangle ABC$, где $AA_1 = l_a$, $AB = c$ и $AC = b$.

По следствию 4 из теоремы Стюарта $l_a = \dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

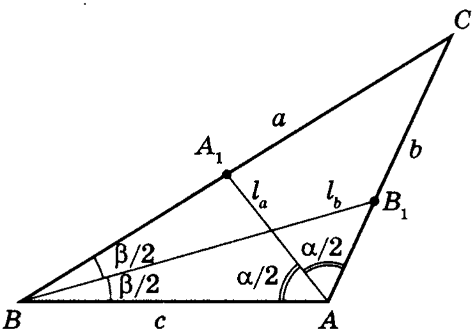
Отсюда следует, что $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{l_a(b+c)}{2bc}$.

Подставим известные и найденные значения, получим

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{(6+8) \cdot \frac{12}{7}\sqrt{15}}{2 \cdot 6 \cdot 8} = \boxed{\frac{\sqrt{15}}{4}}.$$

Примечание. Очевидно, что если в $\triangle ABC$ значение BC неизвестно, а l_{BC} известно, то это единственное простое решение. Без знания формулы задача становится очень трудно решаемой.

Задача 2. Докажите, что в любом треугольнике большей стороне соответствует меньшая биссектриса.



Пусть в треугольнике ABC:

$BC = a, \quad AC = b, \quad AB = c,$

$\angle A = \alpha, \quad \angle B = \beta,$

$AA_1 = l_a, \quad BB_1 = l_b$ — биссектрисы.

Докажем, что если $a > b$, то $l_a < l_b$.

Составим разность биссектрис:

$$l_b - l_a = \frac{2ac \cdot \cos\frac{\beta}{2}}{a+c} - \frac{2bc \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{b+c} =$$

$$= \frac{2c\left((ab+ac)\cos\frac{\beta}{2} - (ab+bc)\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{(a+c)(b+c)}.$$

Так как

$$a > b \Leftrightarrow ac > bc \Leftrightarrow \underline{ab + ac > ab + bc}; \tag{1}$$

$$b < a \Leftrightarrow \beta < \alpha \Leftrightarrow \frac{\beta}{2} < \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \underline{\cos\frac{\beta}{2} > \cos\frac{\alpha}{2}}; \tag{2}$$

$(1) \times (2)$: $(ab+ac)\cos\frac{\beta}{2} > (ab+bc)\cos\frac{\alpha}{2}$,

то $l_b - l_a > 0$; $\quad l_a < l_b$. Утверждение доказано.

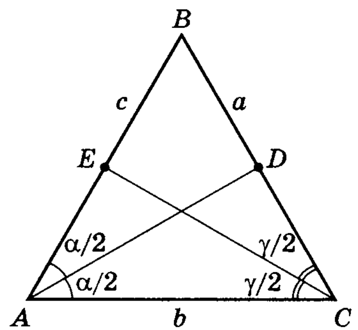
Теорема. Если две биссектрисы треугольника равны, то этот треугольник — равнобедренный.

Сколько ни пытались доказать этот признак равнобедренного треугольника способами, аналогичными доказательству двух других признаков, ничего не получалось! Это утверждение является одним из примеров геометрических утверждений, который в одну сторону доказываются элементарно, а в другую — гораздо сложнее.

В конечном итоге, стали искать другие способы доказательства. Доказано это утверждение было только в XIX веке двумя математиками, Лемусом и Штейнером, которые обменивались письмами в течение нескольких лет. Поэтому сформулированная теорема носит название теорема Лемуса — Штейнера.

Мы рассмотрим другое доказательство: докажем теорему методом от противного.

Предположим, что биссектрисы в $\triangle ABC$ к сторонам $AB = c$ и $BC = a$ равны ($l_a = l_c$), а стороны не равны ($AB \neq BC$, или $a \neq c$).



Рассмотрим длины биссектрис:

$$l_a = \frac{2bc \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}; \quad l_c = \frac{2ab \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $a > c$, тогда $\alpha > \gamma$, и $\cos\frac{\alpha}{2} < \cos\frac{\gamma}{2}$ (так как эти углы — острые).

Тогда $\dfrac{bc}{b+c} - \dfrac{ab}{a+b} = \dfrac{b^2(c-a)}{(b+c)(a+b)} < 0$, и $\dfrac{bc}{b+c} < \dfrac{ab}{a+b}$.

Таким образом, $l_a < l_c$, что противоречит предположению.

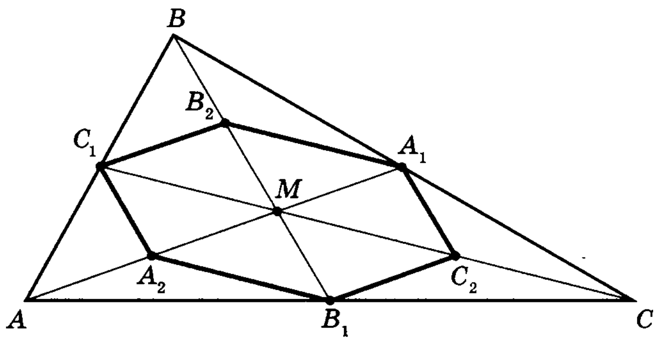
Это противоречие доказывает, что наше предположение о том, что из равенства двух биссектрис следует неравенство двух сторон, к которым они проведены, ложно. Значит, из равенства двух биссектрис следует равенство двух сторон, к которым они проведены.

Задача 3. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Точки A_2, B_2 и C_2 — середины отрезков MA, MB и MC, соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC.

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 4$, $BC = 7$ и $AC = 8$.

а) Площадь треугольника A_1MB_2 в два раза меньше площади треугольника A_1MB, поскольку $MB = 2MB_2$, а высота, проведенная из вершины A_1, у этих треугольников общая.



Таким образом, $S_{\triangle A_1MB} = 2S_{\triangle A_1MB_2}$.

Аналогично получаем еще пять равенств:

$S_{\triangle A_1MC} = 2S_{\triangle A_1MC_2}$;

$S_{\triangle B_1MC} = 2S_{\triangle B_1MC_2}$;

$S_{\triangle B_1MA} = 2S_{\triangle B_1MA_2}$;

$S_{\triangle C_1MA} = 2S_{\triangle C_1MA_2}$;

$S_{\triangle C_1MB} = 2S_{\triangle C_1MB_2}$.

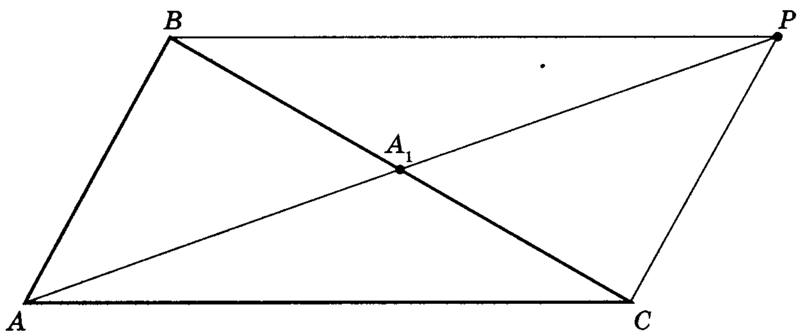
Складывая эти равенства почленно, получаем:

$S_{\triangle ABC} = 2S_{A_1B_2C_1A_2B_1C_2}$.

б) Обозначим длины сторон BC, AC и AB треугольника ABC через a, b и c.

Докажем, что квадрат медианы AA_1 равен $\frac{1}{4}\left(2b^2+2c^2-a^2\right)$ (здесь мы рассмотрим другое доказательство этой формулы без использования теоремы Стюарта).

Для доказательства на продолжении отрезка AA_1 за точку A_1 отложим отрезок $A_1P = AA_1$. Получим параллелограмм $ACPB$ со сторонами $AC = PB = b$ и $AB = CP = c$, а также диагоналями $BC = a$ и $AP = 2AA_1$.



Известно, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон:

$2b^2 + 2c^2 = a^2 + 4AA_1^2$, откуда

$$AA_1^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right).$$

Аналогично доказывается, что

$$BB_1^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right) \text{ и } CC_1^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right).$$

Отрезок C_1A_2 — средняя линия треугольника ABM, значит $C_1A_2 = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}BB_1 = \frac{1}{3}BB_1$.

Рассуждая аналогично, мы получим, что стороны шестиугольника втрое меньше медиан треугольника ABC:

$$B_2C_1 = B_1C_2 = \frac{1}{3}AA_1; \quad A_2B_1 = A_1B_2 = \frac{1}{3}CC_1.$$

Следовательно, сумма квадратов сторон шестиугольника равна:

$$2\cdot\left(B_1C_2^2+A_1C_2^2+A_1B_2^2\right)=\frac{2}{9}\cdot\left(AA_1^2+BB_1^2+CC_1^2\right)=$$
$$=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(2b^2+2c^2-a^2+2a^2+2c^2-b^2+2a^2+2b^2-c^2\right)=$$
$$=\frac{1}{18}\cdot 3\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)=\frac{1}{6}\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Подставляя в эту формулу длины сторон треугольника ABC, получаем ответ: сумма квадратов сторон шестиугольника равна $\frac{43}{2}=21{,}5$.

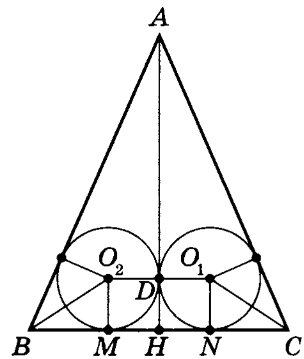
Ответ: 21,5.

Задача 4. Дан треугольник со сторонами 26, 26 и 20. Внутри него расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

Случай I

Дано:
$\triangle ABC$
$AB=AC=26$
$BC=20$
$AH\perp BC$
$r_1=r_{\triangle ABH}$
$r_2=r_{\triangle ACH}$
$r_1=r_2=r$

Найдите r



а) Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB=AC=26$ и $BC=20$. Пусть AH — высота треугольника ABC. Тогда точка H — середина стороны BC. Обозначим $\angle ABC=\angle ACB=\alpha$.

Тогда $\cos\alpha = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{5}{13}$, $\sin\alpha = \dfrac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{12}{5}$.

Предположим, что окружность радиуса r с центром O_1 вписана в угол ABC и касается основания BC в точке N, а окружность того же радиуса с центром O_2 вписана в угол ABC, касается основания BC в точке M, а первой окружности — в точке D.

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому

$$\angle O_2BM = \frac{\alpha}{2}; \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{2}{3}.$$

Из прямоугольного треугольника BMO_2 находим:

$$BM = O_2M \cdot \operatorname{ctg}(\angle MBO_2) = r \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{2}r.$$

Тогда $CN = BM = \dfrac{3}{2}r$.

Линия центров касающихся окружностей проходит через точку их касания, поэтому $O_1O_2 = 2r$, значит $MN = O_1O_2 = 2r$, поскольку O_1O_2MN — прямоугольник. Следовательно,

$$20 = BC = BM + MN + CN = \frac{3}{2}r + 2r + \frac{3}{2}r = 5r,$$

откуда находим $r = 4$.

б) Возможно и иное решение.

Так как $AB = AC$, то $BH = CH = 10$.

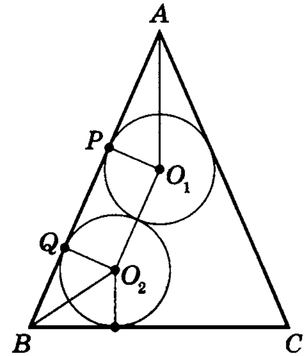
$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2}; \quad AH = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{576} = 24.$$

$$S_{\triangle ABH} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 24 = 120;$$

$$p = \frac{26 + 24 + 10}{2} = 30.$$

Значит $r_в = \dfrac{120}{30} = 4$.

Случай II



Пусть теперь окружность радиуса r с центром O_1 вписана в угол BAC и касается боковой стороны AB в точке P, вторая окружность радиуса r с центром O_2 вписана в угол ABC, касается боковой стороны AB в точке Q, а также касается первой окружности.

Из прямоугольных треугольников APO_1 и BQO_2 находим:

$AP = O_1P \cdot \mathrm{ctg}(\angle PAO_1) = r \cdot \mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{12}{5}r;$

$(\dfrac{O_1P}{AP} = \mathrm{ctg}\,(\angle PAO_1)$, из $\triangle ABH$ $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{12}{5}$.

Учтем, что $\angle PAO_1 = 90° - \alpha$,

тогда $\mathrm{ctg}\,(\angle PAO_1) = \mathrm{ctg}\,(90° - \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha.)$

$BQ = O_2Q \cdot \mathrm{ctg}(\angle QBO_2) = r \cdot \mathrm{ctg}\,\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{3}{2}r.$

Следовательно,

$$26 = AB = AP + PQ + QB = AP + O_1O_2 + QB =$$
$$= \frac{12}{5}r + 2r + \frac{3}{2}r = \frac{59}{10}r,$$

откуда находим $r = \dfrac{260}{59} = 4\dfrac{24}{59}$.

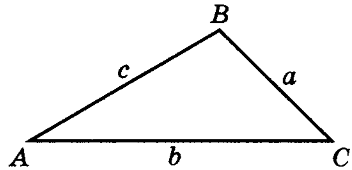
В случае, когда окружности вписаны в углы BAC и ACB, получим тот же результат.

Ответ: 4 или $4\dfrac{24}{59}$.

Лабораторная работа 3

Варианты 1–10

Для треугольника ABC, используя теорему Герона, по данным из таблицы найдите остальные.

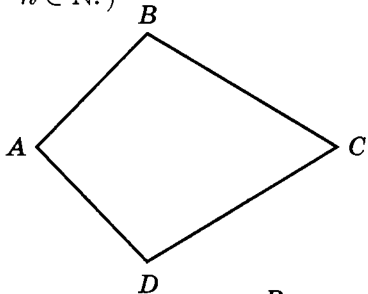


Справочно: $\boxed{S_\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$.

	a	b	c	$S_\triangle$	$R_о$	$r_в$	$\sin(\angle A)$	$\cos(\angle B)$
1	4	13	15					
2	51	4	53					
3	30		5	72				
4		29	6	60				
5	7	15		42				
6		10	21				$\frac{4}{5}$	
7	10	39	35					
8	11	30	25					
9		9	78				$\frac{12}{13}$	
10	8		26					$-\frac{5}{13}$

Задача-исследование 1

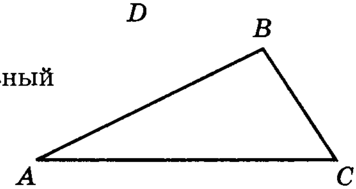
Задача. Разрежьте произвольный четырехугольник на n четырехугольников, равных по площади. (Укажите метод или способ, годный для любых $n \geqslant 3$, $n \in \mathbb{N}$.)



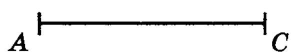
Рассмотрим задачу для $n = 3$, т. е. разрежем произвольный четырехугольник на три равновеликих четырехугольника.

Так сразу дельная идея может и не возникнуть. Попробуем упростить задачу.

Подзадача. Разрежьте произвольный треугольник на три равновеликих треугольника.

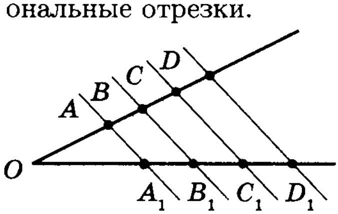


Подзадача тоже оказывается сложной. Продолжим решать методом вертикального спуска, т. е. все более и более упрощая. Попробуем разделить произвольный отрезок на три равных части (в общем случае на $n \geqslant 3$ частей, где $n \in \mathbb{N}$).



Для решения этой вспомогательной задачи применим теорему Фалеса[7] (см. с. 71).

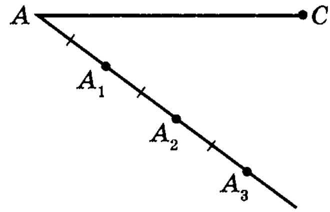
Теорема (Фалеса). При пересечении стороны угла параллельными прямыми на сторонах угла образуются пропорциональные отрезки.



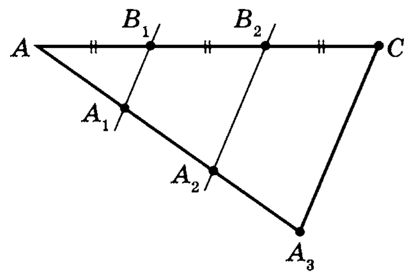
$$\frac{OA}{OA_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \ldots$$

[7] Фалес (625–547 г. до н. э.) — математик из Милета, древнегреческий ученый.

С учетом этой теоремы становится ясно, как любой отрезок разделить на равные части.



Сначала из точки A проведем луч, на котором одинаковым раствором циркуля от точки A отложим n равных отрезков. В данном случае $n = 3$.



Затем соединим точку A_3 с точкой C.

Проведем параллельные A_3C прямые A_1B_1 и A_2B_2.

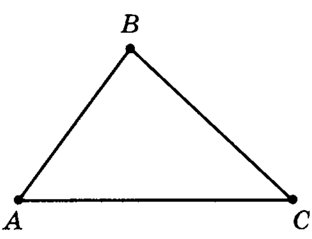
Значит по теореме Фалеса
$$\frac{AB_1}{AA_1} = \frac{B_1B_2}{A_1A_2} = \frac{B_2C}{A_2A_3}.$$
Учитывая, что $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$, получим:
$AB_1 = B_1B_2 = B_2C$.

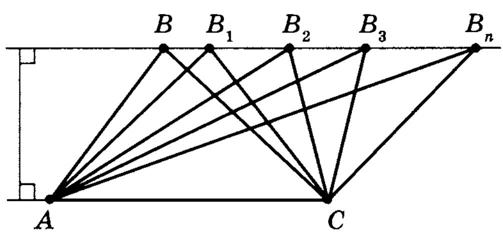
Итак, таким способом мы можем произвольный отрезок разделить на n равных частей.

Примечание. Разумеется, для этого необходимо уметь через любую точку вне прямой проводить прямую, параллельную данной.

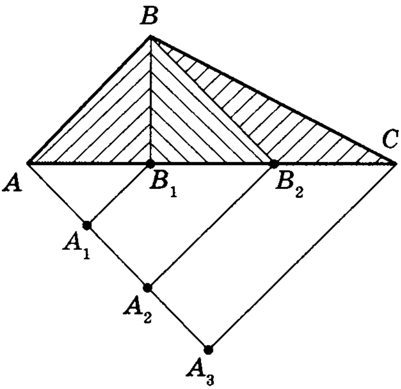
Теперь можно перейти к решению подзадачи, т. е. к решению вопроса о разделении любого треугольника на n равных по площади треугольников.

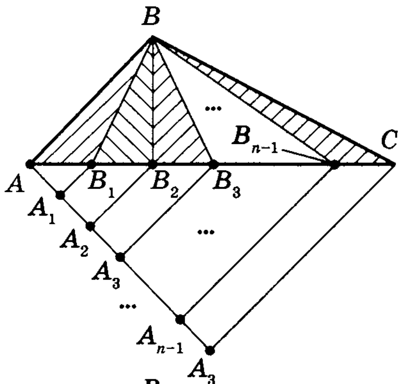
Для этого рассмотрим $\triangle ABC$. Сначала построим прямую, параллельную основанию AC и проходящую через точку B. На этой прямой отметим произвольно точки B_1, B_2, $B_3, \ldots, B_n$.

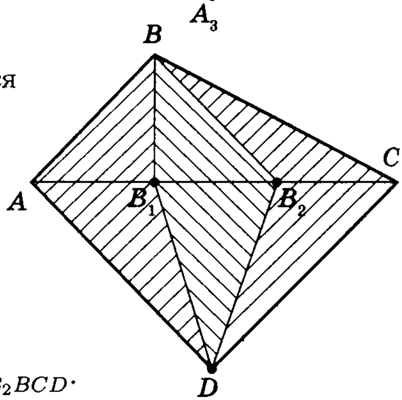




Рассмотрим треугольники AB_1C, $AB_2C, \ldots, AB_nC$.
Так как расстояние между параллельными прямыми есть отрезок перпендикуляра, являющегося высотой любого из этих треугольников с одинаковым основанием, то площади всех таких треугольников равны между собой:
$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AB_1C} = S_{\triangle AB_2C} = \ldots = S_{\triangle AB_nC}$.
Теперь решение для $\triangle ABC$ очевидно:







Таким образом, вырисовывается и решение основной задачи. Сначала проведем диагональ AC. Разделим AC на три равные части (в общем случае на n равных частей). Соединим вершины B и D с точками B_1 и B_2.
Тогда $S_{ABB_1D} = S_{B_1BB_2D} = S_{B_2BCD}$.

Аналогично решается задача о разрезании произвольного четырехугольника на n равновеликих четырехугольников.

Примечание. Разумеется, важно учесть, что точки D, B_1 и B могут принадлежать одной прямой. Подумайте, что делать в этом случае. Может быть, тогда можно разделить на n частей другую диагональ, а может быть, есть и другой путь. Подумайте!

Практикум 3

1. Стороны треугольника равны b и c. Сумма обратных величин этих сторон равна обратной величине биссектрисы, проведенной к третьей стороне. Найдите угол, противолежащий этой стороне.

2. Две стороны треугольника равны 10, а третья сторона — 2,5. Найдите биссектрису к одной из равных сторон.

3. Стороны треугольника равны 35 и 14. Биссектриса, проведенная к третьей стороне, равна 12. Найдите площадь такого треугольника.

4. Одна из высот, проведенных к стороне треугольника, равна 20. Другая высота треугольника делит сторону, к которой она проведена, на отрезки, равные 12 и 13. Найдите остальные стороны.

5. Стороны треугольника равны 18, 18 и 12. К сторонам треугольника проведены высоты. Вершинами нового треугольника являются основания этих высот. Найдите наибольшую из сторон нового треугольника.

6. Две стороны треугольника равны 6 и 12, а биссектриса, проведенная к третьей стороне, равна $4\sqrt{3}$. Найдите третью сторону.

7. Стороны треугольника равны 4, 8 и 9. Найдите наименьшую из биссектрис треугольника.

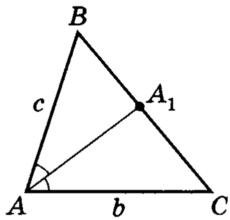
Решение практикума 3

1. Стороны треугольника равны b и c. Сумма обратных величин этих сторон равна обратной величине биссектрисы, проведенной к третьей стороне. Найдите угол, противолежащий этой стороне.

Дано:

$\triangle ABC$
$AB = c$
$AC = b$
$AA_1 = l_a$
$\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{l_a}$

$\angle A$



а) По следствию 4 из теоремы Стюарта

$$l_a = \frac{2bc\cos\left(\frac{\angle A}{2}\right)}{b+c}, \text{ т. е. } \frac{1}{l_a} = \frac{b+c}{2bc\cos\left(\frac{\angle A}{2}\right)}.$$

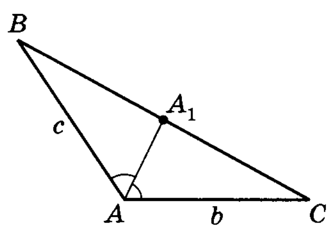
б) Так как $\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{l_a}$, то $\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{b+c}{bc} = \dfrac{1}{l_a}$;

значит $\dfrac{1}{l_a} = \dfrac{b+c}{bc} = \dfrac{b+c}{2bc\cos\left(\frac{\angle A}{2}\right)}$.

Тогда после сокращений получим $\cos\left(\dfrac{\angle A}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$;

$\dfrac{\angle A}{2} = 60^\circ$, т. е. $\boxed{\angle A = 120^\circ}$.

Отметим, что рисунок на самом деле отличается от изначального, так как $\angle A$ — тупой.



2. Две стороны треугольника равны 10, а третья сторона — 2,5. Найдите биссектрису к одной из равных сторон.

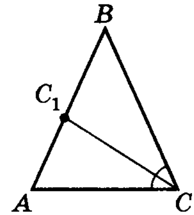
Дано:

$\triangle ABC$

$AB = BC = 10$

$AC = 2{,}5$

l_{AB}



Отметим, что на самом деле $\triangle ABC$, конечно, более «вытянутый», но для нахождения l_{AB} это не существенно.

а) По теореме косинусов $\cos(\angle ACB) = \dfrac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC}$,

т. е. $\cos(\angle ACB) = \dfrac{10^2 + (2{,}5)^2 - 10^2}{2 \cdot 10 \cdot 2{,}5} = \dfrac{1}{8}$.

б) Так как $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$ $(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$,

то $\cos\left(\dfrac{\angle ACB}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{\frac{1}{8}+1}{2}} = \dfrac{3}{4}$.

в) Используя формулу $l_{AB} = \dfrac{2AC \cdot BC \cdot \cos\left(\frac{\angle ACB}{2}\right)}{AC + BC}$,

получим $l_{AB} = CC_1 = \dfrac{2 \cdot 2{,}5 \cdot 10 \cdot \frac{3}{4}}{2{,}5 + 10} = \boxed{3}$.

3. Стороны треугольника равны 35 и 14. Биссектриса, проведенная к третьей стороне, равна 12. Найдите площадь такого треугольника.

Дано:

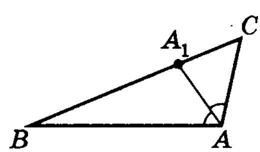
$\triangle ABC$

$AB = 35$

$AC = 14$

$l_{BC} = 12$

$S_{\triangle ABC}$



а) $\cos(\angle CAA_1) = \dfrac{(AC + AB) \cdot l_{BC}}{2AC \cdot AB}$, тогда

$$\cos(\angle CAA_1) = \frac{12 \cdot (35 + 14)}{2 \cdot 35 \cdot 14} = \frac{3}{5}.$$

б) $\sin(\angle CAA_1) = \sqrt{1 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^2} = \dfrac{4}{5}.$

Учитывая, что $\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha}$, получим

$$\sin(\angle CAB) = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{25}.$$

в) $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \sin(\angle CAB)$, значит

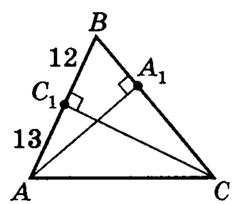
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 35 \cdot 14 \cdot \frac{24}{25} = \boxed{235{,}2}.$$

4. Одна из высот, проведенных к стороне треугольника, равна 20. Другая высота треугольника делит сторону, к которой она проведена, на отрезки, равные 12 и 13. Найдите остальные стороны.

Дано (один из возможных вариантов моделирования условий задачи):

$\triangle ABC$
$AA_1 \perp BC$
$CC_1 \perp AB$
$AC_1 = 13$
$C_1B = 12$
$AA_1 = 20$

а) BC
б) AC



а) $2S_{\triangle ABC} = AA_1 \cdot BC = AB \cdot CC_1$,

т. е. $20BC = (13 + 12) \cdot CC_1$; $\dfrac{4}{5}BC = CC_1$.

б) Рассмотрим $\triangle C_1BC$.

$BC^2 = BC_1^2 + CC_1^2; \quad BC^2 = CC_1^2 + 12^2,$

тогда $BC^2 = \left(\frac{4}{5}BC\right)^2 + 12^2$, т. е. $\frac{9}{25}BC^2 = 12^2$.

Значит $\frac{3}{5}BC = 12$, следовательно, $\boxed{BC = 20}$.

в) $CC_1 = \sqrt{BC^2 - BC_1^2}; \quad CC_1 = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16;$

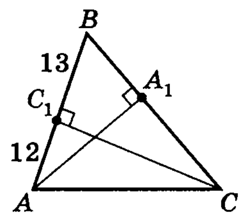
$AC = \sqrt{CC_1^2 + AC_1^2}; \quad AC = \sqrt{16^2 + 13^2} = \sqrt{425} = 5\sqrt{17};$

$\boxed{AC = 5\sqrt{17}}$.

Дано (другой возможный вариант моделирования условий задачи):

$\triangle ABC$
$AA_1 \perp BC$
$CC_1 \perp AB$
$AC_1 = 12$
$C_1B = 13$
$AA_1 = 20$

а) BC
б) AC



а) $2S_{\triangle ABC} = AA_1 \cdot BC = AB \cdot CC_1,$

т. е. $20BC = (12 + 13)CC_1; \quad 20BC = 25CC_1;$

$BC = \frac{5}{4}CC_1.$

б) $BC^2 = BC_1^2 + CC_1^2; \quad \left(\frac{5}{4}CC_1\right)^2 = 13^2 + CC_1^2;$

$\left(\frac{25}{16} - 1\right)CC_1^2 = 13^2; \quad CC_1^2 = \frac{13^2 \cdot 16}{9};$

$CC_1 = \frac{13 \cdot 4}{3} = \frac{52}{3}.$

в) $BC = \sqrt{13^2 + \left(\frac{52}{3}\right)^2} = \frac{13}{3}\sqrt{3^2 + 4^2} = \frac{65}{3} = 21\frac{2}{3}$;

$\boxed{BC = 21\frac{2}{3}}$.

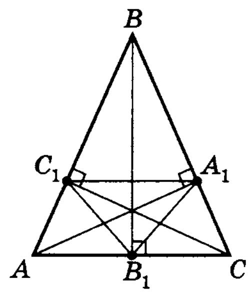
г) $AC = \sqrt{AC_1^2 + CC_1^2}$; $AC = \sqrt{12^2 + \left(\frac{13 \cdot 4}{3}\right)^2} =$

$= \frac{4}{3}\sqrt{3^2 \cdot 3^2 + 13^2} = \frac{4}{3}\sqrt{250} = \frac{20\sqrt{10}}{3}$; $\boxed{AC = \frac{20}{3}\sqrt{10}}$.

5. Стороны треугольника равны 18, 18 и 12. К сторонам треугольника проведены высоты. Вершинами нового треугольника являются основания этих высот. Найдите наибольшую из сторон нового треугольника.

Дано:
$\triangle ABC$
$AB = BC = 18$
$AC = 12$
$AA_1 \perp BC$
$BB_1 \perp AC$
$CC_1 \perp AB$

Наибольшую из сторон $\triangle A_1B_1C_1$



а) 1. $\triangle AB_1C_1$ подобен $\triangle ABC$ (см. задачу 6, стр. 82), где коэффициент подобия $k = \cos(\angle A)$ $(\cos(\angle A) > 0)$.

2. Из $\triangle ABB_1$ имеем:
$\cos(\angle A) = \frac{AB_1}{AB}$; $\cos(\angle A) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$.
Тогда из подобия $\triangle AB_1C_1$ и $\triangle ABC$ следует, что
$B_1C_1 = BC \cdot \frac{1}{3}$; $B_1C_1 = 18 \cdot \frac{1}{3} = \boxed{6}$.
Очевидно, что из равенства AB и BC следует $B_1C_1 = B_1A_1$.

б) 1. $\triangle A_1BC_1$ подобен $\triangle ABC$, где $k = \cos(\angle B)$.

2. По теореме косинусов

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos(\angle B)$.

Зная, что $AB = BC$, получим

$\cos(\angle B) = \dfrac{2AB^2 - AC^2}{2AB \cdot AB}$; $\cos(\angle B) = \dfrac{2 \cdot 18^2 - 12^2}{2 \cdot 18^2} = \dfrac{7}{9}$.

3. $A_1C_1 = AC \cdot \dfrac{7}{9}$, т. е. $A_1C_1 = 12 \cdot \dfrac{7}{9} = \dfrac{28}{3} = \boxed{9\dfrac{1}{3}}$,

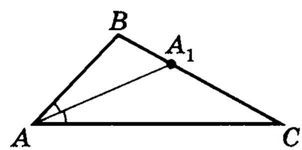
значит $A_1C_1 = 9\dfrac{1}{3}$ — наибольшая.

6. Две стороны треугольника равны 6 и 12, а биссектриса, проведенная к третьей стороне, равна $4\sqrt{3}$. Найдите третью сторону.

Дано:

$\triangle ABC$
$AB = 6$
$AC = 12$
$l_{BC} = 4\sqrt{3}$

BC



а) По следствию 4 из теоремы Стюарта

$$l_{BC} = \frac{2AB \cdot AC \cos\left(\frac{\angle A}{2}\right)}{AB + AC}.$$

Используя эту формулу, получим значение $\cos\left(\dfrac{\angle A}{2}\right)$:

$$4\sqrt{3} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \cos\left(\frac{\angle A}{2}\right)}{6 + 12}, \text{ т. е. } \cos\left(\frac{\angle A}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

значит $\dfrac{\angle A}{2} = 30^\circ$; $\angle A = 60^\circ$, где $\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$.

б) Используем теорему косинусов, получим

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC}$,

т. е. $BC = \sqrt{6^2 + 12^2 - 6 \cdot 12} = \boxed{6\sqrt{3}}$.

7. Стороны треугольника равны 4, 8 и 9. Найдите наименьшую из биссектрис треугольника.

Дано:

$\triangle ABC$
$AB = 4$
$BC = 8$
$AC = 9$

l_{AC}

Так как наибольшей стороне треугольника соответствует наименьшая из биссектрис, то l_{AC} — наименьшая (см. задачу 3, стр. 148).

а) Известна формула биссектрисы $l_a = \dfrac{2}{b+c}\sqrt{pcb(p-a)}$.

$$p = \frac{4+8+9}{2} = 10{,}5;$$

$$l_{AC} = \frac{2}{8+4}\sqrt{10{,}5\cdot 4\cdot 8(10{,}5-9)} = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{21}{2}\cdot 4^2\cdot 2\cdot\frac{3}{2}} =$$
$$= \frac{3\cdot 2}{6}\sqrt{14} = \sqrt{14};$$

$$l_{BC} = \frac{2}{9+4}\sqrt{\frac{21}{2}\cdot 9\cdot 4(10{,}5-8)} = \frac{2\cdot 3\cdot 2}{13}\sqrt{\frac{21}{2}\cdot\frac{5}{2}} =$$
$$= \frac{6}{13}\sqrt{105} > \frac{60}{13} > \sqrt{14};$$

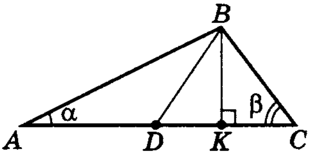
$$l_{AB} = \frac{2}{9+8}\sqrt{\frac{21}{2}\cdot 9\cdot 8(10{,}5-4)} = \frac{2\cdot 3\cdot 2}{17}\sqrt{\frac{21\cdot 2}{2}\cdot\frac{13}{2}} =$$
$$= \frac{6}{17}\sqrt{546} > \frac{6\cdot 23}{17} = \frac{138}{17} > \sqrt{14}.$$

Значит, l_{AC} — наименьшая, т. е. $\boxed{l_{AC} = \sqrt{14}}$.

б) Можно, конечно, не зная данной формулы, воспользоваться другой формулой $l_{AC} = AB\cdot BC - AB_1\cdot CB_1$, предварительно вычислив AB_1 и CB_1 при помощи теоремы $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AB_1}{CB_1}$, но это значительно дольше и технически сложнее.

Самостоятельная работа 2

Вариант 1



Дано:

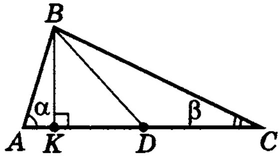
$\triangle ABC$
$BC = 5$
$\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$
$AD = DC$
$BK \perp AC$
$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$

1. Докажите $AB \perp BC$.

Найдите:

2. $AC =$
3. $AB =$
4. $BK =$
5. $S_{\triangle ABC} =$
6. $\sin(\angle ADB) =$
7. $\cos(\angle CBD) =$
8. $R_{\circ\triangle ABD} =$
9. $m_{BC} =$
10. $l_{AB} =$

Вариант 2



Дано:

$\triangle ABC$
$BC = 8$
$\cos\alpha = \dfrac{15}{17}$
$AD = DB = DC$
$BK \perp AC$

1. Докажите $AB \perp BC$.

Найдите:

2. $AC =$
3. $AB =$
4. $BK =$
5. $S_{\triangle ABC} =$
6. $\sin(\angle ADB) =$
7. $\cos(\angle CBD) =$
8. $R_{\circ\triangle ABD} =$
9. $m_{AB} =$
10. $l_{BC} =$

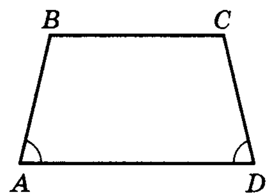
Трапеция

Напомним ряд определений и теорем, связанных с трапецией.

Определение 1. Четырехугольник, две противоположные стороны которого параллельны, а две другие нет, называется трапецией.

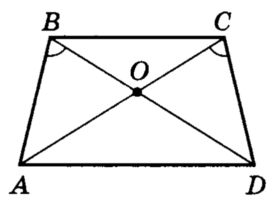
Определение 2. Трапеция, две непараллельные стороны которой равны между собой, называется равнобедренной.

Теорема 1. Для того чтобы трапеция являлась равнобедренной, необходимо и достаточно, чтобы углы при основании трапеции были равны между собой.



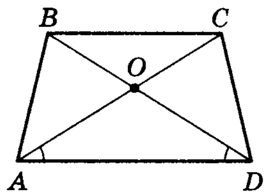
Теорема 2. Для того чтобы трапеция являлась равнобедренной, необходимо и достаточно, чтобы диагонали трапеции были равны между собой.

Теорема 3. Для того чтобы трапеция являлась равнобедренной, необходимо и достаточно, чтобы из каждой вершины одного основания другое основание было видно под одним и тем же углом.



Следствие. В случае перпендикулярности диагоналей боковым сторонам трапеция является равнобедренной.

Теорема 4. Для того чтобы трапеция являлась равнобедренной, необходимо и достаточно, чтобы диагонали трапеции образовывали с одним и тем же основанием равные углы.



Следствие. Образованные диагоналями четыре треугольника в равнобедренной трапеции таковы, что:

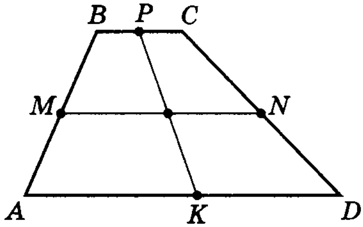
а) два треугольника равны, если одна из сторон каждого из этих треугольников есть боковая сторона трапеции;

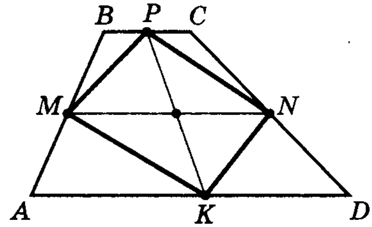
б) два других треугольника равнобедренные, причем одна из сторон каждого треугольника есть основание трапеции.

Теорема 5. Диагонали произвольной трапеции делят ее на четыре треугольника, два из которых равны по площади.

Теорема 6. Отрезки, концы которых соединяют середины противоположных сторон трапеции, делятся точкой пересечения пополам.

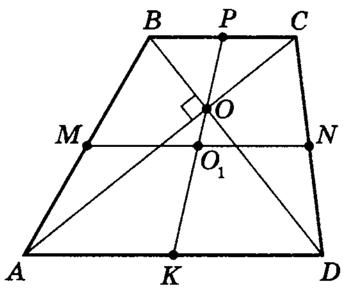
Примечание. Отметим, что тогда четырехугольник $MPNK$ является параллелограммом.

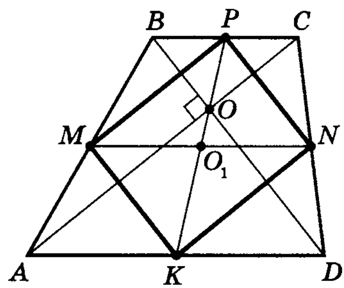




Теорема 7. Для того чтобы диагонали трапеции были взаимно перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, были равны.

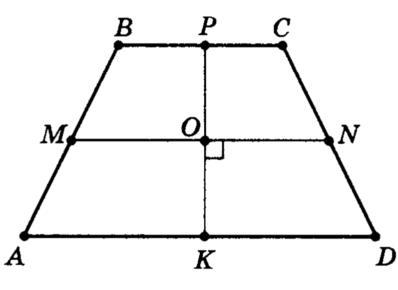
Примечание. Отметим, что тогда четырехугольник $MPNK$ является прямоугольником.

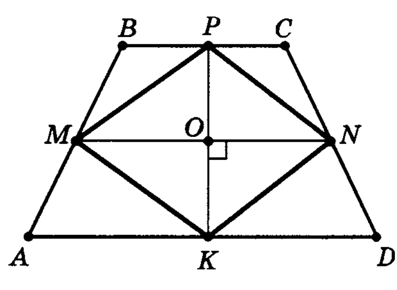




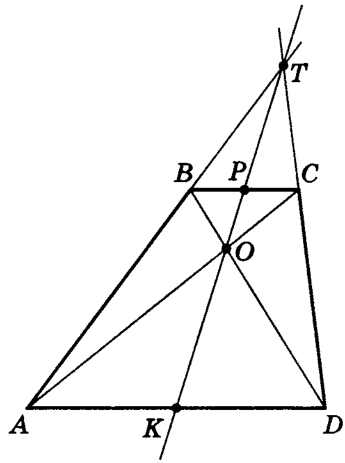
Теорема 8. Для того чтобы трапеция являлась равнобедренной, необходимо и достаточно, чтобы отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, были взаимно перпендикулярны.

Примечание. В этом случае четырехугольник $MPNK$ — ромб.





Теорема 9. Прямая, проходящая через середины оснований трапеции, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции и через точку пересечения продолжений ее боковых ребер.



Доказательство предложенных теорем — очень полезное и поучительное занятие. Надеюсь, вы справитесь.

Практикум 4

1. В равнобедренном треугольнике основание равно 30, а высота, проведенная к нему, равна 20. Найдите:

а) высоту, проведенную к боковой стороне;

б) радиус описанной окружности;

в) радиус вписанной окружности.

2. Как бы вы решали задачу по следующим данным? В параллелограмме высоты, проведенные к смежным сторонам, равны 10 и 15, а площадь параллелограмма равна 120. Найдите стороны параллелограмма.

3. В треугольнике ABC вписан параллелограмм, стороны которого являются частью сторон треугольника, а вершина принадлежит третьей стороне, причем отношение сторон параллелограмма, принадлежащих сторонам треугольника, равно $6:5$. Бóльшая сторона параллелограмма принадлежит стороне треугольника $AB = 20$, а меньшая сторона принадлежит стороне треугольника $AC = 25$. Найдите стороны параллелограмма.

4. В треугольник вписан ромб, вершина которого совпадает с вершиной треугольника, а две стороны ромба являются частью двух сторон треугольника. Найдите сторону ромба, если одна из вершин ромба принадлежит третьей стороне, а две другие стороны треугольника равны b и c.

5. Диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны боковым сторонам. Найдите площадь трапеции, если основания ее равны 4 и 8.

6. Из вершины треугольника опустили высоту, которая делит угол при вершине на два: величиной 10° и 50°. На какие углы делят высоты, опущенные из других вершин, углы при этих вершинах?

7. В прямоугольный треугольник вписан квадрат, вершина которого совпадает с вершиной прямого угла треугольника, а противоположная вершина квадрата принадлежит гипотенузе треугольника. Найдите сторону квадрата, если площадь треугольника равна 24, а гипотенуза 10.

8. В равнобедренной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны, а основания равны 12 и 20. Найдите:

а) площадь трапеции;

б) радиус описанной окружности.

9. Площадь равнобедренной трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равна 4. Найдите высоту трапеции.

10. В трапецию с основаниями, равными 7 и 28, и боковыми сторонами, равными 13 и 20, вписан прямоугольник наибольшей площади, причем две вершины его принадлежат большему основанию, а две другие — боковым сторонам трапеции. Найдите площадь такого прямоугольника.

Практикум 4. Моделирование условий задачи

Рекомендуем вам сначала попробовать самостоятельно решить задачи, затем свериться с ответами (они даны после моделирования условий всех задач практикума) и только потом, если ответ не подходит, т. е. ваше решение неверно, сверить его с приведенным далее решением.

1. В равнобедренном треугольнике основание равно 30, а высота, проведенная к нему, равна 20. Найдите:

а) высоту, проведенную к боковой стороне;

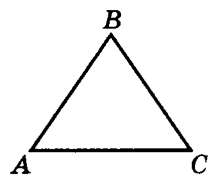
б) радиус описанной окружности;

в) радиус вписанной окружности.

Дано:

$\triangle ABC$
$AB = BC$
$AC = 30$
$H_{AC} = 20$

H_{BC}
$R_{о}$
$r_{в}$

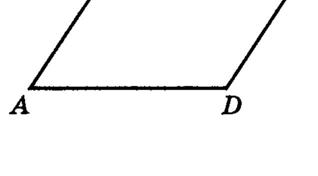


2. Как бы вы решали задачу по следующим данным? В параллелограмме высоты, проведенные к смежным сторонам, равны 10 и 15, а площадь параллелограмма равна 120. Найдите стороны параллелограмма.

Дано:

$ABCD$
$AB \parallel CD$
$BC \parallel AD$
$H_{AD} = 10$
$H_{DC} = 15$
$S_{ABCD} = 120$

AB
BC

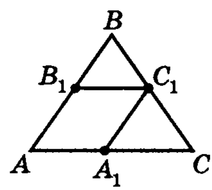


3. В треугольник $\triangle ABC$ вписан параллелограмм, стороны которого являются частью сторон треугольника, а вершина принадлежит третьей стороне, причем отношение сторон параллелограмма, принадлежащих сторонам треугольника, равно $6:5$. Бо́льшая сторона параллелограмма принадлежит стороне треугольника $AB = 20$, а меньшая сторона принадлежит стороне треугольника $AC = 25$. Найдите стороны параллелограмма.

Дано:

$\triangle ABC$
$A_1 \in AC$
$B_1 \in AB$
$C_1 \in BC$
$AB_1 \parallel A_1C_1$
$B_1C_1 \parallel AA_1$
$AB = 20$
$AC = 25$
$AB_1 : AA_1 = 6 : 5$

AA_1
AB_1

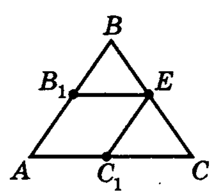


4. В треугольник вписан ромб, вершина которого совпадает с вершиной треугольника, а две стороны ромба являются частью двух сторон треугольника. Найдите сторону ромба, если одна из вершин ромба принадлежит третьей стороне, а две другие стороны треугольника равны b и c.

Дано:

$\triangle ABC$
$AB = c$
$AC = b$
AB_1EC_1 – ромб

AB_1



5. Диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны боковым сторонам. Найдите площадь трапеции, если основания ее равны 4 и 8.

Дано:

$ABCD$ — трапеция

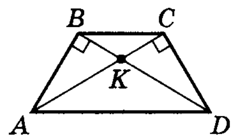
$AB = CD$

$BC = 4$

$AD = 8$

$\angle ABK = \angle DCK = 90^\circ$

S_{ABCD}



6. Из вершины треугольника опустили высоту, которая делит угол при вершине на два: величиной 10° и 50°. На какие углы делят высоты, опущенные из других вершин, углы при этих вершинах?

Дано:

$\triangle ABC$

$AA_1 \perp BC$

$CC_1 \perp AB$

$\angle BAA_1 = 10^\circ$

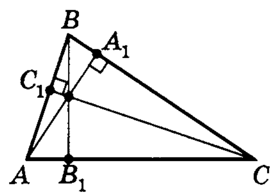
$\angle A_1AC = 50^\circ$

$\angle ABB_1$

$\angle CBB_1$

$\angle BCC_1$

$\angle ACC_1$



7. В прямоугольный треугольник вписан квадрат, вершина которого совпадает с вершиной прямого угла треугольника, а противоположная вершина квадрата принадлежит гипотенузе треугольника. Найдите сторону квадрата, если площадь треугольника равна 24, а гипотенуза 10.

Дано:

$\triangle ABC$

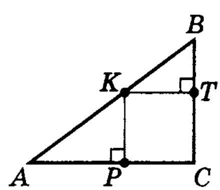
$S_{\triangle ABC} = 24$

$AC \perp BC$

$AB = 10$

$CPKT$ — квадрат

KP



8. В равнобедренной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны, а основания равны 12 и 20. Найдите:

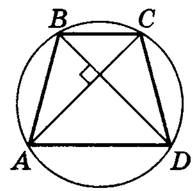
а) площадь трапеции;

б) радиус описанной окружности.

Дано:

$ABCD$ — трапеция
$AB = CD$
$BC = 12$
$AD = 20$
$AC \perp BD$

S_{ABCD}
$R_о$

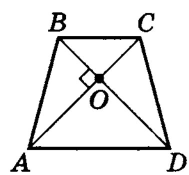


9. Площадь равнобедренной трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равна 4. Найдите высоту трапеции.

Дано:

$ABCD$ — трапеция
$AB = CD$
$AC \perp BD$
$S_{ABCD} = 4$

H_{AD}

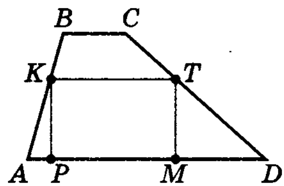


10. В трапецию с основаниями, равными 7 и 28, и боковыми сторонами, равными 13 и 20, вписан прямоугольник наибольшей площади, причем две вершины его принадлежат большему основанию, а две другие — боковым сторонам трапеции. Найдите площадь такого прямоугольника.

Дано:

$ABCD$ — трапеция
$AB = 13$
$BC = 7$
$CD = 20$
$AD = 28$

$S_{PKTM_{\text{наиб}}}$



Примечание. Напомним еще раз некоторые формулы, необходимые для решения практикума.

1. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot H_{BC}$.

2. $R_{\text{о}} = \frac{abc}{4S_{\triangle}}$.

3. $r_{\text{в}} = \frac{S_{\triangle}}{p}$.

4. Для квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ координаты вершины параболы равны $x_0 = -\frac{b}{2a}$ или $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, где x_1, x_2 — корни квадратного трехчлена (а $x = x_0$ — ось симметрии параболы).

   Кроме того, если

   а) $a > 0$, то существует $y_{\text{наим}} = y_0 = ax^2 + bx_0 + c$, равное $y_{\text{наим}} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$;

   б) $a < 0$, то существует $y_{\text{наиб}} = y_0 = ax^2 + bx_0 + c$, равное $y_{\text{наиб}} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Ответы

1. $H_{BC} = \boxed{24}$; $R_{\text{о}} = \boxed{15\frac{5}{8}}$; $r_{\text{в}} = \boxed{7\frac{1}{2}}$.

2. Решений нет (или $\emptyset$). **3.** $AA_1 = \boxed{10}$; $AB_1 = \boxed{12}$.

4. $AB_1 = \boxed{\frac{bc}{b+c}}$. **5.** $S_{ABCD} = \boxed{12\sqrt{3}}$. **6.** $\angle ABB_1 = \boxed{30^\circ}$; $\angle CBB_1 = \boxed{50^\circ}$; $\angle BCC_1 = \boxed{10^\circ}$; $\angle ACC_1 = \boxed{30^\circ}$.

7. $KP = \boxed{3\frac{3}{7}}$. **8.** $S_{ABCD} = \boxed{256}$; $R_{\text{о}} = \boxed{2\sqrt{34}}$. **9.** $H_{AD} = \boxed{2}$.

10. $S_{PKTM_{\text{наиб}}} = \boxed{112}$.

Решение практикума 4

1. В равнобедренном треугольнике основание равно 30, а высота, проведенная к нему, равна 20. Найдите:

а) высоту, проведенную к боковой стороне;

б) радиус описанной окружности;

в) радиус вписанной окружности.

Дано:

$\triangle ABC$

$AB = BC$

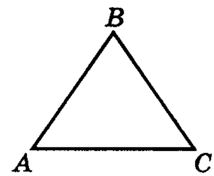
$AC = 30$

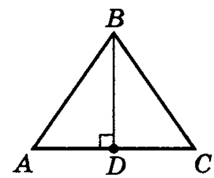
$H_{AC} = 20$

H_{BC}

$R_{\text{о}}$

$r_{\text{в}}$





а) Проведем построение, соответствующее условиям задачи.

1. $BD \perp AC \quad (BD = H_{AC})$;

$BD = 20; \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot H_{AC};$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 20 = 300.$

2. $BC = \sqrt{BD^2 + DC^2}; \quad BC = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25.$

3. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot H_{BC}; \quad H_{BC} = \frac{2S_{\triangle ABC}}{BC};$

$H_{BC} = \frac{2 \cdot 300}{25} = \boxed{24}.$

б) $R_{\text{о}} = \frac{abc}{4S_{\triangle}}; \quad R_{\text{о}} = \frac{25 \cdot 25 \cdot 30}{4 \cdot 300} = \boxed{15\frac{5}{8}}.$

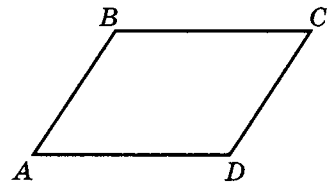
в) $r_{\text{в}} = \frac{S_{\triangle}}{p}; \quad p = \frac{25 + 25 + 30}{2} = 40;$

$r_{\text{в}} = \frac{300}{40} = \frac{30}{4} = \frac{15}{2} = \boxed{7\frac{1}{2}}.$

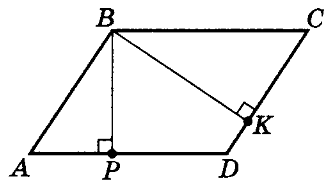
2. Как бы вы решали задачу по следующим данным? В параллелограмме высоты, проведенные к смежным сторонам, равны 10 и 15, а площадь параллелограмма равна 120. Найдите стороны параллелограмма.

Дано:

$ABCD$
$AB \parallel CD$
$BC \parallel AD$
$H_{AD} = 10$
$H_{DC} = 15$
$S_{ABCD} = 120$



AB
BC



а) Проведем построение, соответствующее условиям задачи.

1. $BK \perp DC \quad (BK = H_{DC})$;
   $BP \perp AD \quad (BP = H_{AD})$.

2. $DC = \dfrac{S_{ABCD}}{BK} \quad (S_{ABCD} = DC \cdot BK)$;
   $DC = \dfrac{120}{15} = 8$; $\quad AB = DC = 8$ (свойство параллелограмма).

б) $AD = \dfrac{S_{ABCD}}{BP}$; $\quad AD = \dfrac{120}{10} = 12$; $\quad BC = AD = 12$.

Формально все расчеты вроде бы верны, но...

Рассмотрим $\triangle ABP$.

1. $AP \perp BP$;
2. $BP = H_{AD} = 10$;
3. $AB = 8$, но тогда $AB < BP$, что невозможно, так как AB — гипотенуза, а BP — катет.

Ну и какой же вывод? А вывод такой — параллелограмма с такими данными не существует.

Примечание. Отметим, что для того чтобы параллелограмм с высотами, опущенными из одной вершины и равными $H_{AD} = 10$ и $H_{DC} = 15$, существовал, необходимо, чтобы его площадь была $S_{ABCD} \geqslant 150$ кв. ед.

Действительно, пусть $S_{ABCD} = a$, тогда

$AB \cdot BK = AD \cdot BP$, т.е. $AB \cdot 15 = AD \cdot 10 = a$.

Получим $\begin{cases} AB = \dfrac{a}{15} \\ AD = \dfrac{a}{10} \end{cases}$, но $\begin{cases} AB = \dfrac{a}{15} \geqslant 10 \ (AB \geqslant BP) \\ AD = \dfrac{a}{10} \geqslant 15 \ (BC \geqslant BK) \end{cases}$,

значит $a \geqslant 150$.

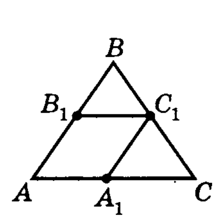
Очевидно, что задача имела бы решение, если бы, например, $S_{ABCD} = 200$. В этом случае $AB = \boxed{13\frac{1}{3}}$; $BC = \boxed{20}$.

3. В треугольник $\triangle ABC$ вписан параллелограмм, стороны которого являются частью сторон треугольника, а вершина принадлежит третьей стороне, причем отношение сторон параллелограмма, принадлежащих сторонам треугольника, равно $6 : 5$. Бо́льшая сторона параллелограмма принадлежит стороне треугольника $AB = 20$, а меньшая сторона принадлежит стороне треугольника $AC = 25$. Найдите стороны параллелограмма.

Дано:

$\triangle ABC$
$A_1 \in AC$
$B_1 \in AB$
$C_1 \in BC$
$AB_1 \parallel A_1C_1$
$B_1C_1 \parallel AA_1$
$AB = 20$
$AC = 25$
$AB_1 : AA_1 = 6 : 5$

AA_1
AB_1



Проанализируем условия задачи. Так как большая сторона параллелограмма принадлежит стороне $AB = 20$, то $AB_1 > AA_1$, значит $AB_1 : AA_1 = 6 : 5$.

а) Так как $B_1C_1 \parallel AC$, то $\triangle BB_1C_1$ подобен $\triangle ABC$.

1. Значит $\dfrac{BB_1}{B_1C_1} = \dfrac{AB}{AC}$,

   где $B_1B = AB - AB_1$ и $B_1C_1 = AA_1$.

2. Пусть $\left.\begin{aligned} AB_1 &= 6x \\ AA_1 &= 5x \end{aligned}\right|$, тогда $\dfrac{AB - AB_1}{AA_1} = \dfrac{20}{25}$,

   т. е. $\dfrac{20 - 6x}{5x} = \dfrac{4}{5}$, значит $x = 2$.

3. $AA_1 = 5 \cdot 2 = \boxed{10}$.

б) $AB_1 = 6 \cdot 2 = \boxed{12}$.

4. В треугольник вписан ромб, вершина которого совпадает с вершиной треугольника, а две стороны ромба являются частью двух сторон треугольника. Найдите сторону ромба, если одна из вершин ромба принадлежит третьей стороне, а две другие стороны треугольника равны b и c.

Дано:

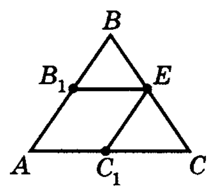
$\triangle ABC$

$AB = c$

$AC = b$

AB_1EC_1 — ромб

AB_1



а) Так как $\left.\begin{aligned} B_1E &\parallel AC \\ AB_1 &\parallel C_1E \end{aligned}\right|$, то $\triangle B_1BE$ подобен $\triangle ABC$.

б) $\dfrac{B_1B}{B_1E} = \dfrac{c}{b}$, но $B_1B = AB - AB_1 = c - AB_1$; $\quad AB_1 = B_1E$,

тогда $\dfrac{c - AB_1}{AB_1} = \dfrac{c}{b}$. Отсюда $c \cdot b - b \cdot AB_1 = c \cdot AB_1$;

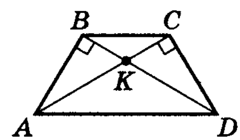
$cb = AB_1(c + b)$; $\boxed{AB_1 = \dfrac{cb}{c+b}}$.

5. Диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны боковым сторонам. Найдите площадь трапеции, если основания ее равны 4 и 8.

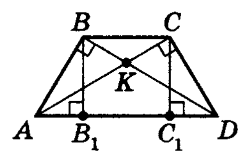
Дано:

$ABCD$ — трапеция
$AB = CD$
$BC = 4$
$AD = 8$
$\angle ABK = \angle DCK = 90°$

S_{ABCD}



а) По условию $AB = CD$, тогда $\triangle ABD = \triangle DCA$ по гипотенузе и катету.



б) Проведем дополнительные построения: $BB_1 \perp AD$; $CC_1 \perp AD$.

BB_1C_1C — параллелограмм, так как:

$BB_1 \parallel CC_1$ (как перпендикуляры к одной стороне);

$BB_1 = CC_1$ (как высоты треугольников $\triangle ABD$ и $\triangle DCA$, проведенные к равным сторонам).

в) $AB_1 = \dfrac{AD - BC}{2}$; $AB_1 = 2$

($\triangle ABB_1 = \triangle DCC_1$, тогда $AB_1 = DC_1$).

г) Известны метрические отношения в прямоугольном треугольнике $\triangle ABD$ (стр. 124).

Тогда для $\triangle ABD$ $BB_1^2 = AB_1 \cdot B_1D$.

$AB_1 = 2$; $B_1D = AD - AB_1$; $B_1D = 6$;

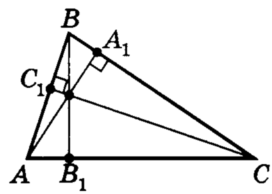
$BB_1^2 = 2 \cdot 6 = 12$; $BB_1 = 2\sqrt{3}$.

д) $S_{ABCD} = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BB_1$; $S_{ABCD} = \dfrac{4+8}{2} \cdot 2\sqrt{3} = \boxed{12\sqrt{3}}$.

6. Из вершины треугольника опустили высоту, которая делит угол при вершине на два: величиной $10°$ и $50°$. На какие углы делят высоты, опущенные из других вершин, углы при этих вершинах?

Дано:

$\triangle ABC$
$AA_1 \perp BC$
$CC_1 \perp AB$
$\angle BAA_1 = 10°$
$\angle A_1AC = 50°$



$\angle ABB_1$
$\angle CBB_1$
$\angle BCC_1$
$\angle ACC_1$

а) 1. Хотя предварительный чертеж уже дан, опишем построение согласно условиям задачи ($AA_1 \perp BC$ и $CC_1 \perp AB$). Затем через точку O ($O = AA_1 \cap CC_1$) проведем BB_1.

Так как $AA_1 \perp BC$ и $CC_1 \perp AB$, то $BB_1 \perp AC$ (перпендикуляры в треугольнике пересекаются всегда в одной точке).

$\angle CAB = \angle BAA_1 + \angle A_1AC = 10° + 50° = 60°.$

2. Из $\triangle ABB_1$:
$\angle ABB_1 = 90° - \angle BAB_1$ ($\angle BAB_1 = \angle CAB$);
$\angle ABB_1 = 90° - 60° = \boxed{30°}$.

б) Рассмотрим $\triangle ABA_1$.

$\angle ABA_1 = 90° - \angle BAA_1$; $\angle ABA_1 = 90° - 10° = 80°$;

$\angle ACB = 180° - \angle CAB - \angle ABC$;

$\angle ACB = 180° - 60° - 80° = 40°$.

в) Рассмотрим $\triangle CBB_1$.

$\angle CBB_1 = 90° - \angle ACB$; $\angle CBB_1 = 90° - 40° = \boxed{50°}$.

г) Рассмотрим $\triangle BCC_1$.

$\angle BCC_1 = 90° - \angle ABC$ ($\angle ABC = \angle ABA_1$);

$\angle BCC_1 = 90° - 80° = \boxed{10°}$.

д) Рассмотрим $\triangle ACC_1$.

$\angle ACC_1 = 90° - \angle CAB$; $\angle ACC_1 = 90° - 60° = \boxed{30°}$.

7. В прямоугольный треугольник вписан квадрат, вершина которого совпадает с вершиной прямого угла треугольника, а противоположная вершина квадрата принадлежит гипотенузе треугольника. Найдите сторону квадрата, если площадь треугольника равна 24, а гипотенуза 10.

Дано:

$\triangle ABC$

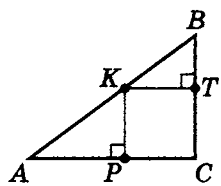
$S_{\triangle ABC} = 24$

$AC \perp BC$

$AB = 10$

$CPKT$ — квадрат

KP



а) Рассмотрим $\triangle ABC$.

$$\begin{cases} AC \cdot BC = 48 \quad (AC \cdot BC = 2S_{ABC}) & \boxed{1} \\ AC^2 + BC^2 = 100 & \boxed{2} \end{cases}$$

$$2 \cdot \boxed{1} \pm \boxed{2} \Rightarrow \begin{cases} (AC + BC)^2 = 196 \\ (AC - BC)^2 = 4 \end{cases};$$

$$\begin{cases} AC + BC = 14 \\ |AC - BC| = 2 \end{cases} \pm$$

1. Если $AC > BC$, то $\begin{cases} AC = 8 \\ BC = 6 \end{cases}$.

2. Если $BC > AC$, то $\begin{cases} AC = 6 \\ BC = 8 \end{cases}$.

Впрочем, ответ получится такой же.

б) Пусть $KT = x = KP = TC = PC$ ($CPKT$ — квадрат).

$\triangle BTK \sim \triangle KPA$ ($\angle KAP = \angle BKT$, $\angle AKP = \angle KBT$).

Тогда $\dfrac{BT}{KT} = \dfrac{KP}{AP}$, где $BT = 6 - x$; $AP = 8 - x$, значит

$\dfrac{6-x}{x} = \dfrac{x}{8-x}$; $(6-x)(8-x) = x^2$; $x = \dfrac{24}{7} = \boxed{3\dfrac{3}{7}}$.

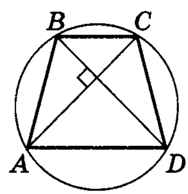
8. В равнобедренной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны, а основания равны 12 и 20. Найдите:

а) площадь трапеции;

б) радиус описанной окружности.

Дано:

$ABCD$ — трапеция
$AB = CD$
$BC = 12$
$AD = 20$
$AC \perp BD$

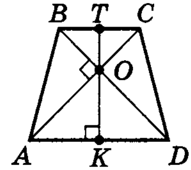


S_{ABCD}
$R_о$

Проанализируем условия задачи. Так как около любой равнобедренной трапеции можно описать окружность, то существование $R_о$ очевидно (серединные перпендикуляры к сторонам трапеции всегда пересекаются в одной точке).

а) 1. Так как по условию $ABCD$ — равнобедренная трапеция, то $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$ равнобедренные (докажите это самостоятельно), а так как $AC \perp BD$, значит $\angle CAD = \angle BCA = 45°$.

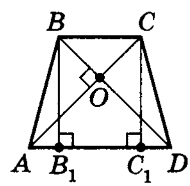
2. Проведем дополнительное построение $TK \perp AD$ ($O \in TK$). Можно доказать, что TK — ось симметрии трапеции $ABCD$.



3. $OK = AK \cdot \operatorname{tg} 45° = AK$,
   где $AK = \frac{1}{2}AD$; $AK = 10 = OK$.
   $OT = BT \cdot \operatorname{tg} 45° = BT$, где $BT = \frac{1}{2}BC$; $BT = 6 = OT$.
4. $S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot TK$;
   $S_{ABCD} = \frac{20 + 12}{2} \cdot (10 + 6) = \boxed{256}$.

б) Так как около трапеции $ABCD$ можно описать окружность, то $\triangle ABD$, $\triangle ACD$, $\triangle BDC$ и $\triangle ABC$ принадлежат той же окружности, что и $ABCD$.

1. Тогда так как $R_{\text{o}ABCD} = R_{\text{o}\triangle ABC}$, то найдем AB, AC.



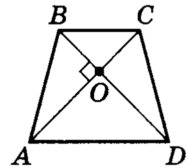
2. Проведем дополнительное построение: $BB_1 \perp AD$ и $CC_1 \perp AD$.

   В силу равнобедренности $ABCD$ можно доказать, что $AB_1 = DC_1$, тогда
   $AB_1 = \frac{AD - BC}{2}$; $AB_1 = \frac{20 - 12}{2} = 4$.
3. Так как $BB_1 = TK = 16$,
   то $CD = AB = \sqrt{AB_1^2 + BB_1^2}$;
   $AB = \sqrt{4^2 + 16^2} = \sqrt{16 + 256} = \sqrt{272} = 4\sqrt{17}$.
4. $AC_1 = AB_1 + B_1C_1$; $AC_1 = 4 + 12 = 16$;
   $AC = \sqrt{AC_1^2 + CC_1^2}$; $AC = \sqrt{16^2 + 16^2} = 16\sqrt{2}$.
5. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot BB_1$; $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96$.
6. $R_{\text{o}\triangle ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S}$;
   $R_{\text{o}\triangle ABC} = \frac{4\sqrt{17} \cdot 12 \cdot 16\sqrt{2}}{4 \cdot 96} = \boxed{2\sqrt{34}}$.

9. Площадь равнобедренной трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равна 4. Найдите высоту трапеции.

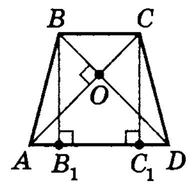
Дано:
$ABCD$ — трапеция
$AB = CD$
$AC \perp BD$
$S_{ABCD} = 4$

H_{AD}



а) Так как $ABCD$ — равнобедренная трапеция и $AC \perp BD$, то $AO = OD$ и $\angle CAD = \angle BDA = 45°$.

б) Проведем дополнительное построение: $BB_1 \perp AD$; $CC_1 \perp AD$.



Так как $\angle CAD = 45°$, то $AC_1 = CC_1$;

$AB_1 = \dfrac{AD - BC}{2}$ (см. задачу 8, стр. 184); $BC = B_1C_1$;

$AC_1 = AB_1 + B_1C_1 = AB_1 + BC$;

$AC_1 = \dfrac{AD - BC}{2} + BC = \dfrac{AD + BC}{2}$;

$AC_1 = \dfrac{AD + BC}{2} = CC_1$.

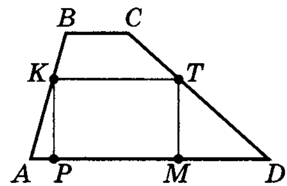
в) $S_{ABCD} = CC_1 \cdot CC_1$; $CC_1^2 = 4$; $CC_1 = \boxed{2}$.

10. В трапецию с основаниями, равными 7 и 28, и боковыми сторонами, равными 13 и 20, вписан прямоугольник наибольшей площади, причем две вершины его принадлежат большему основанию, а две другие — боковым сторонам трапеции. Найдите площадь такого прямоугольника.

Дано:

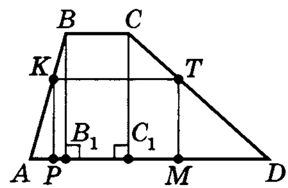
$ABCD$ — трапеция
$PKTM$ — прямоугольник
$AB = 13$; $BC = 7$;
$CD = 20$; $AD = 28$
$P, M \in AD$; $K \in AB$; $T \in DC$

$S_{PKTM_{\text{наиб}}}$



Отметим, что $S_{PKTM_{\text{наиб}}}$ означает наибольшую из возможных площадей прямоугольника $PKTM$.

а) 1. Проведем дополнительное построение: $BB_1 \perp AD$; $CC_1 \perp AD$.



2. Пусть $AB_1 = x$, тогда $DC_1 = AD - AB_1 - B_1C_1$; $DC_1 = 21 - x$.

3. Рассмотрим $\triangle ABB_1$.

$$\left.\begin{array}{l} \underline{BB_1^2 = AB^2 - AB_1^2} \\ BB_1^2 = 13^2 - x^2 \\ \underline{CC_1^2 = CD^2 - DC_1^2} \\ CC_1^2 = 20^2 - (21 - x)^2 \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 13^2 - x^2 = 20^2 - (21 - x)^2 \\ 13^2 - 20^2 + 21^2 = 42x; \quad x = 5 \end{array}$$

б) Пусть $KP = y$.

1. Для $\triangle ABB_1$ получим $BB_1 = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.

2. $\operatorname{ctg}(\angle A) = \dfrac{AB_1}{BB_1}$; $\operatorname{ctg}(\angle A) = \dfrac{5}{12}$,

тогда $AP = KP \cdot \operatorname{ctg}(\angle A)$; $AP = \dfrac{5}{12}y$.

3. Для $\triangle DCC_1$ получим

$$\operatorname{ctg}(\angle D) = \frac{C_1D}{CC_1}; \quad \operatorname{ctg}(\angle D) = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}.$$

Тогда так как $TM = KP$, то

$$MD = TM \cdot \operatorname{ctg}(\angle D); \quad MD = \frac{4}{3}y.$$

4. Так как $AD = AP + PM + MD$,

то $PM = 28 - \frac{5}{12}y - \frac{4}{3}y = 28 - \frac{7}{4}y.$

в) $S_{PKTM} = KP \cdot PM$, т. е. $S(y) = S_{PKTM} = y\left(28 - \frac{7}{4}y\right)$.

Очевидно, что $0 \leqslant y \leqslant 12$ ($KP \leqslant BB_1$),

т. е. $D(S) = [0; 12]$.

$S(y) = y\left(28 - \frac{7}{4}y\right)$ — функция, график которой парабола (квадратный трехчлен);

$$S(y) = 0; \quad \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = \dfrac{28 \cdot 4}{7} = 16 \end{array}\right..$$

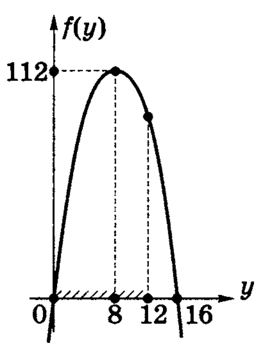
Координаты вершины параболы:

$$y_0 = \frac{0 + 16}{2} = 8;$$

$$f(y_0) = f(8) = 8 \cdot \left(28 - \frac{7}{4} \cdot 8\right) = 8 \cdot 14 = 112.$$

Так как $f(y_0) = f(8) = f_{\text{наиб}}$, причем $8 \in [0; 12]$,

то $S_{\text{наиб}} = S_{PKTM} = \boxed{112}$.



Тренировочная работа 2

1. В равнобедренном треугольнике боковые стороны равны 17, а основание равно 30. Найдите:

а) высоту, проведенную к боковой стороне;

б) синус угла между равными сторонами;

в) отношение радиуса вписанной окружности к радиусу описанной окружности;

г) медиану, проведенную к боковой стороне;

д) биссектрису, проведенную к боковой стороне.

2. Из точки A к окружности проведены секущие AB и AC, равные 24 и 16 соответственно, пересекающие окружность в точках D и E. Угол между секущими равен 30°. Хорда EC равна 10. Найдите площадь четырехугольника $DBCE$.

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ расстояния между серединами смежных сторон равны 2 и 3. Острый угол в четырехугольнике, вершинами которого являются середины сторон исходного, равен 30°. Найдите площадь $ABCD$.

4. В трапеции диагонали равны 10, а площадь 48. Найдите высоту трапеции.

Самостоятельная работа 3

1. Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 25, а основание 14. Найдите:
   а) высоту, проведенную к боковой стороне;
   б) синус угла между боковыми сторонами;
   в) отношение радиуса вписанной окружности к радиусу описанной окружности;
   г) медиану, проведенную к боковой стороне;
   д) биссектрису, проведенную к боковой стороне.

2. Секущие окружности равны $AB = 12$ и $AC = 8$, причем отрезок EC секущей AC равен 5. Площадь четырехугольника, вершины которого принадлежат одновременно и секущим, и окружности, равна 45. Найдите синус угла между секущими.

3. В выпуклом четырехугольнике расстояния между серединами противоположных сторон равны 3 и 4, а одна из диагоналей равна 5. Найдите площадь исходного выпуклого четырехугольника.

4. Диагонали трапеции равны 39 и 17, основание равно 28. Найдите площадь трапеции, если высота трапеции равна 15.

Тренировочная работа 2. Моделирование условий

1. В равнобедренном треугольнике боковые стороны равны 17, а основание равно 30. Найдите:

а) высоту, проведенную к боковой стороне;

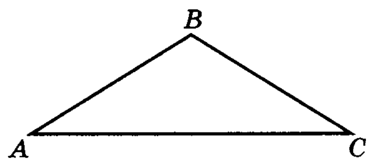
б) синус угла между равными сторонами;

в) отношение радиуса вписанной окружности к радиусу описанной окружности;

г) медиану, проведенную к боковой стороне;

д) биссектрису, проведенную к боковой стороне.

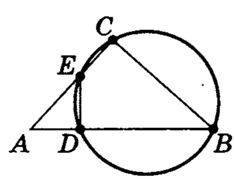
Дано:
$\triangle ABC$
$AB = BC = 17$
$AC = 30$



а) H_{BC}
б) $\sin(\angle ABC)$
в) $r_{\text{в}} : R_{\text{о}}$
г) m_{BC}
д) l_{BC}

2. Из точки A к окружности проведены секущие AB и AC, равные 24 и 16 соответственно, пересекающие окружность в точках D и E. Угол между секущими равен 30°. Хорда EC равна 10. Найдите площадь четырехугольника $DBCE$.

Дано:
Окружность
$AB = 24$
$AC = 16$
$EC = 10$
$\angle BAC = 30°$



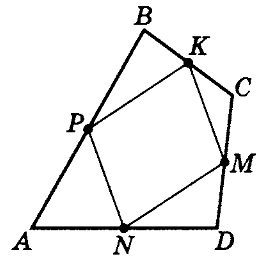
S_{DBCE}

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ расстояния между серединами смежных сторон равны 2 и 3. Острый угол в четырехугольнике, вершинами которого являются середины сторон исходного, равен 30°. Найдите площадь $ABCD$.

Дано:

$ABCD$ — выпуклый
P, K, M, N — середины сторон
$PK = 2$
$KM = 3$
$\angle PKM = 30°$

S_{ABCD}

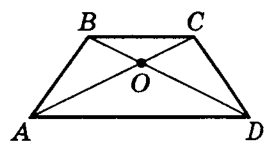


4. В трапеции диагонали равны 10, а площадь 48. Найдите высоту трапеции.

Дано:

$ABCD$ — трапеция
$BC \parallel AD$
$AC = BD = 10$
$S_{ABCD} = 48$

H_{ABCD}



Самостоятельная работа 3. Моделирование условий

1. Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 25, а основание 14. Найдите:

а) высоту, проведенную к боковой стороне;

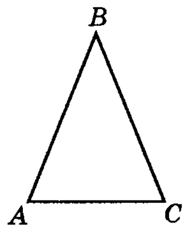
б) синус угла между боковыми сторонами;

в) отношение радиуса вписанной окружности к радиусу описанной окружности;

г) медиану, проведенную к боковой стороне;

д) биссектрису, проведенную к боковой стороне.

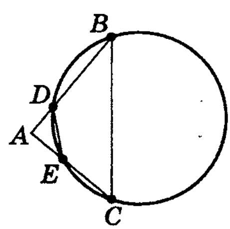
Дано:
$\triangle ABC$
$AB = BC = 25$
$AC = 14$



а) H_{BC}
б) $\sin(\angle ABC)$
в) $r_в : R_о$
г) m_{BC}
д) l_{BC}

2. Секущие окружности равны $AB = 12$ и $AC = 8$, причем отрезок EC секущей AC равен 5. Площадь четырехугольника, вершины которого принадлежат одновременно и секущим, и окружности, равна 45. Найдите синус угла между секущими.

Дано:
Окружность
$AB = 12$
$AC = 8$
$EC = 5$
$S_{DBCE} = 45$

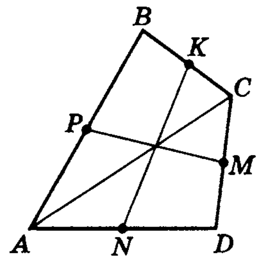


$\sin(\angle BAC)$

3. В выпуклом четырехугольнике расстояния между серединами противоположных сторон равны 3 и 4, а одна из диагоналей равна 5. Найдите площадь исходного выпуклого четырехугольника.

Дано:
$ABCD$ — выпуклый
P, K, M, N — середины сторон
$PM = 3$
$KN = 4$
$AC = 5$

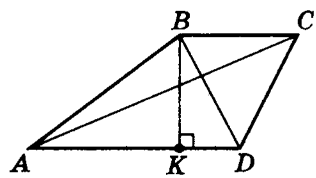
S_{ABCD}



4. Диагонали трапеции равны 39 и 17, основание равно 28. Найдите площадь трапеции, если высота трапеции равна 15.

Дано:
$ABCD$
$BC \parallel AD$
$AD = 28$
$H_{ABCD} = 15$
$AC = 17$
$BD = 39$

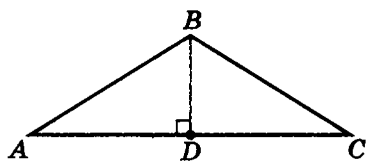
S_{ABCD}



Решение тренировочной работы 2

1. В равнобедренном треугольнике боковые стороны равны 17, а основание равно 30. Найдите:
   а) высоту, проведенную к боковой стороне;
   б) синус угла между равными сторонами;
   в) отношение радиуса вписанной окружности к радиусу описанной окружности;
   г) медиану, проведенную к боковой стороне;
   д) биссектрису, проведенную к боковой стороне.

Дано:
$\triangle ABC$
$AB = BC = 17$
$AC = 30$



а) H_{BC}
б) $\sin(\angle ABC)$
в) $r_в : R_о$
г) m_{BC}
д) l_{BC}

а) Пусть $BD \perp AC$, тогда $AD = DC = \frac{1}{2}AC$, так как $\triangle ABC$ — равнобедренный.

1. $BD = \sqrt{AB^2 - AD^2}$; $\quad BD = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$.
2. Так как $BD \cdot AC = BC \cdot H_{BC} = 2S_{\triangle ABC}$, то $H_{BC} = \frac{8 \cdot 30}{17} = \frac{240}{17} = \boxed{14\frac{2}{17}}$.

б) Найдем $\sin(\angle ABC)$.

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \sin(\angle ABC)$,

тогда так как $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BD \cdot AC$, то

$$\sin(\angle ABC) = \frac{BD \cdot AC}{AB \cdot BC}; \quad \sin(\angle ABC) = \frac{8 \cdot 30}{17 \cdot 17} = \boxed{\frac{240}{289}}.$$

в) Из курса планиметрии известно, что $R_{\text{о}} = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{4S}$;

$$R_{\text{о}} = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma} \text{ (теорема синусов)};$$

$$R_{\text{о}} = \frac{AC}{2\sin(\angle ABC)}; \quad R_{\text{о}} = \frac{30}{2 \cdot \frac{240}{289}} = \frac{289}{16}.$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 30 = 120, \text{ а } p = \frac{1}{2}(17 + 17 + 30) = 32.$$

Из того же курса $r_{\text{в}} = \dfrac{S}{p}$; $\quad r_{\text{в}} = \dfrac{120}{32} = \dfrac{15}{4} = 3\dfrac{3}{4}$,

Таким образом, $r_{\text{о}} : R_{\text{о}} = \dfrac{\frac{15}{4}}{\frac{289}{16}} = \boxed{\dfrac{60}{289}}$.

г) $m_{BC} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 \cdot AB^2 + 2AC^2 - BC^2}$;

$$m_{BC} = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 17^2 + 2 \cdot 30^2 - 17^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{289 + 1800} = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{2089}}.$$

д) Найдем $l_{BC} = AK$.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BK}{KC}; \quad \frac{17}{30} = \frac{BK}{17 - BK};$$

$$289 - 17BK = 30BK; \quad 47BK = 289;$$

$$BK = \frac{289}{47}; \quad KC = 17 - \frac{289}{47} = \frac{799 - 289}{47} = \frac{510}{47}.$$

Так как $\boxed{AK^2 = AB \cdot AC - BK \cdot KC}$ (известная формула для нахождения биссектрисы), то

$$AK^2 = 17 \cdot 30 - \frac{289}{47} \cdot \frac{510}{47};$$

$$AK^2 = \frac{510\left(47^2 - 17^2\right)}{47^2} = \frac{510 \cdot 30 \cdot 64}{47^2} = \frac{30^2 \cdot 8^2 \cdot 17}{47^2};$$

$$l_{BC} = AK = \boxed{\frac{240}{47}\sqrt{17}}.$$

Примечание. Можно решить задачу, не зная формулу $\boxed{AK^2 = AB \cdot AC - BK \cdot KC}$.

Действительно, если из $\triangle BCD$ найти $\cos(\angle BCD) = \frac{15}{17}$ и по теореме косинусов найти

$AK = \sqrt{AC^2 + KC^2 - 2 \cdot AC \cdot KC \cdot \cos(\angle BCD)}$,

получим $AK = \sqrt{30^2 + \left(\frac{510}{47}\right)^2 - 2 \cdot 30 \cdot \frac{510}{47} \cdot \frac{15}{17}} =$

$= \frac{30}{47}\sqrt{47^2 + 17^2 - 2 \cdot 47 \cdot 15} = \frac{30}{47}\sqrt{2209 + 289 - 1410} =$

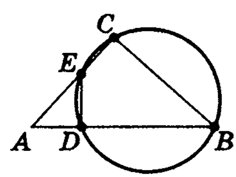
$= \frac{30}{47}\sqrt{1088} = \frac{240}{47}\sqrt{17}.$

2. Из точки A к окружности проведены секущие AB и AC, равные 24 и 16 соответственно, пересекающие окружность в точках D и E. Угол между секущими равен $30°$. Хорда EC равна 10. Найдите площадь четырехугольника $DBCE$.

Дано:

Окружность
$AB = 24$
$AC = 16$
$EC = 10$
$\angle BAC = 30°$

S_{DBCE}



а) Из метрических отношений в окружности известно, что если из точки, взятой вне окружности, проведены секущие, то произведения каждой секущей на ее внешнюю часть равны между собой (см. стр. 201). Тогда

$AB \cdot AD = AC \cdot AE;$

$AC \cdot AE = AC\,(AC - EC)\,;$

$AE = 6; \quad AC \cdot AE = 16\,(16 - 10) = 96.$

б) $AC \cdot AE = AB \cdot AD = 96$, т. е. $24 \cdot AD = 96$; $AD = 4$.

в) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin(\angle BAC)$;

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 16 \cdot \sin 30°$; $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 16 \cdot \frac{1}{2} = 96$.

г) $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot AE \cdot \sin 30°$; $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 6$.

д) $S_{DBCE} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ADE}$; $S_{DBCE} = 96 - 6 = \boxed{90}$.

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ расстояния между серединами смежных сторон равны 2 и 3. Острый угол в четырехугольнике, вершинами которого являются середины сторон исходного, равен 30°. Найдите площадь $ABCD$.

Дано:

$ABCD$ — выпуклый

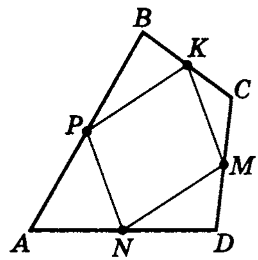
P, K, M, N — середины сторон

$PK = 2$

$KM = 3$

$\angle PKM = 30°$

S_{ABCD}



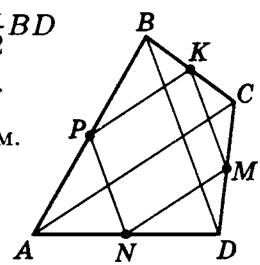
а) Из $\triangle ABC$: $PK \parallel AC$; $PK = \frac{1}{2}AC$

(PK — средняя линия $\triangle ABC$).

Из $\triangle BCD$: $KM \parallel BD$; $KM = \frac{1}{2}BD$

(KM — средняя линия $\triangle BCD$).

Тогда $PKNM$ — параллелограмм.



б) $S_{PKMN} = PK \cdot KM \cdot \sin 30°$;

$S_{PKMN} = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 3$ (кв. ед.).

$S_{ABCD} = 2S_{PKMN}$ (докажите самостоятельно).

Значит $S_{ABCD} = 2 \cdot 3 = \boxed{6}$ (кв. ед.).

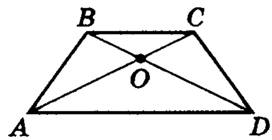
4. В трапеции диагонали равны 10, а площадь 48. Найдите высоту трапеции.

Дано:

$BC \parallel AD$

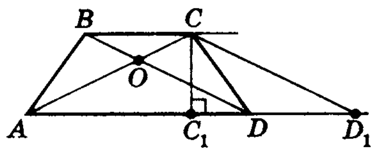
$AC = BD = 10$

$S_{ABCD} = 48$



H_{ABCD}

Проведем дополнительное построение: $CD_1 \parallel BD$, $CC_1 \perp AD$.



а) $S_{\triangle ACD_1} = S_{ABCD}$ (докажите самостоятельно).

б) $S_{\triangle ACD_1} = \frac{1}{2}AC^2 \sin(\angle ACD_1) = 48 \quad (CD_1 = BD)$;

$\frac{1}{2} \cdot 10^2 \sin(\angle ACD_1) = 48; \quad \sin(\angle ACD_1) = \frac{24}{25}$.

в) $\cos(\angle ACD_1) = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{24}{25}\right)^2} = \pm\frac{7}{25}$.

г) Пусть $\cos(\angle ACD_1) = \frac{7}{25}$.

Так как $\boxed{\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}$, то

$$\cos\left(\frac{\angle ACD_1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos(\angle ACD_1)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{7}{25}}{2}} = \frac{4}{5};$$

$$CC_1 = CD_1 \cdot \cos\frac{\angle ACD_1}{2}; \quad H_{ABCD} = CC_1 = 10 \cdot \frac{4}{5} = \boxed{8}.$$

д) Пусть $\cos(\angle ACD_1) = -\frac{7}{25}$. Тогда

$$\cos\left(\frac{\angle ACD_1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\frac{7}{25}}{2}} = \frac{3}{5}; \; H_{ABCD} = CC_1 = 10 \cdot \frac{3}{5} = \boxed{6}.$$

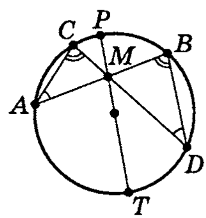
Метрические отношения в окружности

Напомним основные метрические отношения в окружности.

1. Если через точку, взятую внутри окружности, проведены хорды, то произведения отрезков хорд равны между собой и есть число постоянное, равное произведению отрезков диаметра, проходящего через данную точку.

   Дано:

   Окружность диаметра PT
   AB, DC — хорды
   $M \in PT$
   $M = AB \cap DC$

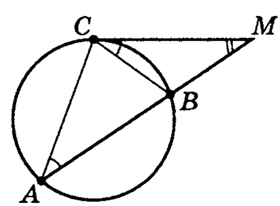
   $\boxed{AM \cdot MB = CM \cdot MD = PM \cdot MT}$

   Для доказательства используют подобие треугольников $\triangle AMC$ и $\triangle DMB$, учитывая, что $\angle ACD = \angle ABD$ и $\angle CAB = \angle CDB$ как вписанные в окружность углы, опирающиеся на равные хорды.

2. Пусть MC — касательная. Если из точки, взятой вне окружности, проведены к ней секущая и касательная, то произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной.

   Дано:

   Окружность
   MC — касательная к ней
   AM — секущая

   $\boxed{MC^2 = AM \cdot BM}$

   Для доказательства используют подобие треугольников $\triangle AMC$ и $\triangle CMB$:

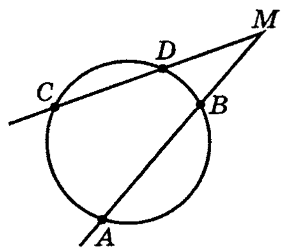
   $$\angle MCB = \frac{1}{2}(\smile CB); \quad \angle MAC = \frac{1}{2}(\smile CB).$$

3. Если из точки, взятой вне окружности, проведены секущие, то произведения каждой секущей на ее внешнюю часть равны между собой и есть постоянное число, равное квадрату касательной из этой точки.

Дано:

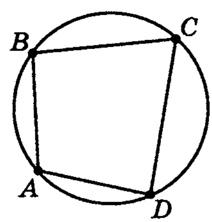
M вне окружности
AM, MC — секущие
D, B — точки пересечения окружности с секущими MC и AM

$\boxed{AM \cdot BM = MC \cdot DM}$

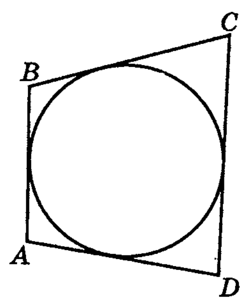


Для проведения доказательства можно воспользоваться тем, что $\angle AMC = \frac{1}{2}(\smile AC - \smile BD)$.

4. Для того чтобы в окружность можно было вписать четырехугольник, необходимо и достаточно, чтобы сумма противоположных углов совпадала и была равна 180°:
$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$.



5. Для того чтобы в четырехугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма противоположных сторон четырехугольника совпадала:
$AB + DC = AD + BC$.

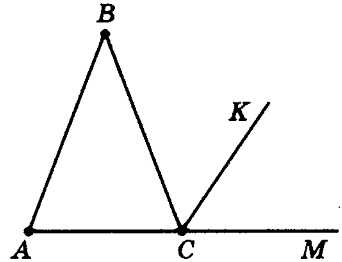


Упражнения на готовых чертежах 1

1. Дано:

$AB = BC$
$CK = l_{\angle BCM}$
$\angle ABC = 42^\circ$

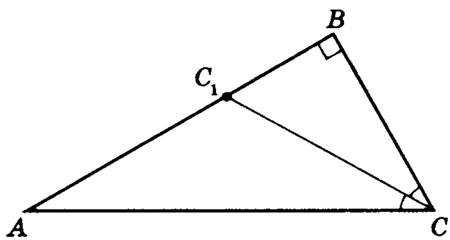
$\angle KCM$



2. Дано:

$AB \perp BC$
$AC = 14$
$BC = 7$
$CC_1 = l_{AB}$

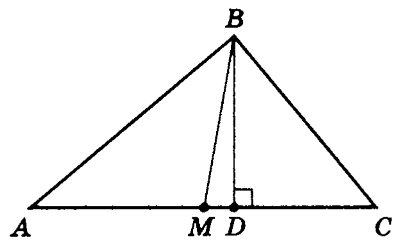
$\angle AC_1C$



3. Дано:

$\angle A = 40^\circ$
$\angle C = 60^\circ$
$BM = l_{AC}$

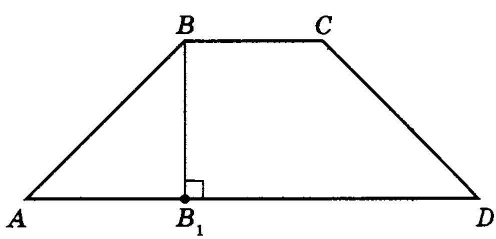
$\angle DBM$



4. Дано:

$ABCD$ — трапеция
$AB = DC$
$BB_1 \perp AD$
$AB_1 = 6$
$BB_1 = 8$
$BC = 7$

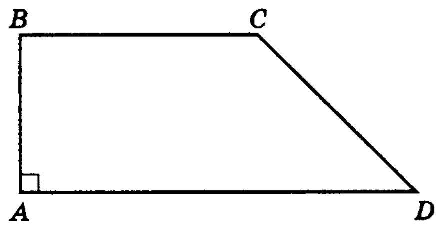
P_{ABCD}; S_{ABCD}



5. Дано:

$ABCD$ — трапеция
$AB \perp AD$
$BC = 5$
$AD = 8$
$\angle D = 45°$

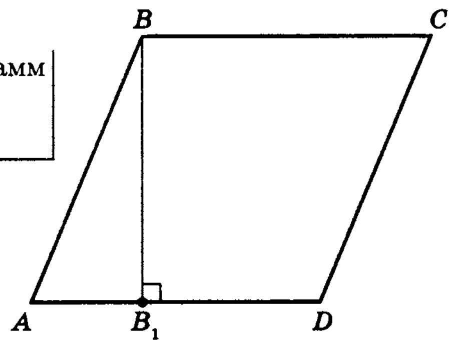
P_{ABCD}; S_{ABCD}



6. Дано:

$ABCD$ — параллелограмм
$BB_1 \perp AD$; $BB_1 = 12$
$AB = 13$; $DB_1 = 8$

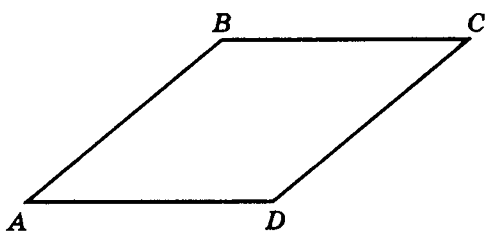
P_{ABCD}; S_{ABCD}



7. Дано:

$ABCD$ — ромб
$AB = 17$
$AC = 30$

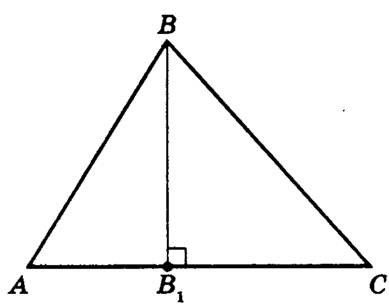
P_{ABCD}; S_{ABCD}



8. Дано:

$\triangle ABC$
$AB = 7$; $BC = 8$
$AC = 9$

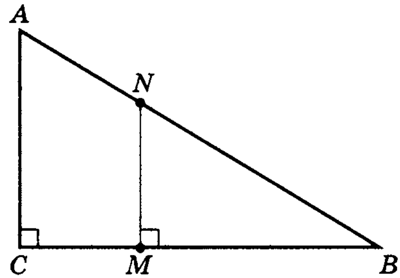
$S_{\triangle ABC}$; BB_1; CB_1



9. Дано:

$\triangle ABC$
$AC \perp BC$; $MN \parallel AC$
$AN = 5$; $BN = 10$
$BM = 6$

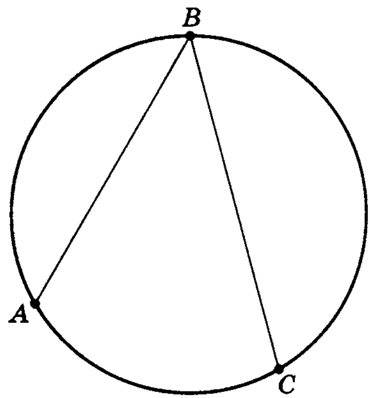
AC



10. Дано:

Окружность
$\smile AB = 120°$
$\smile BC = 150°$

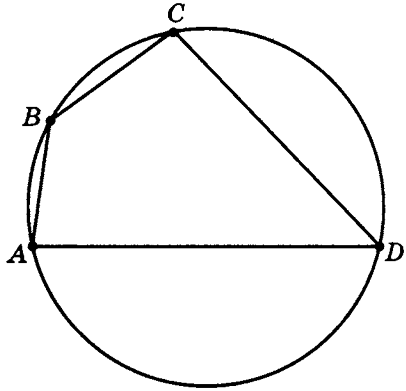
$\angle ABC$



11. Дано:

Окружность
$\angle A = 82°$
$\angle B = 134°$

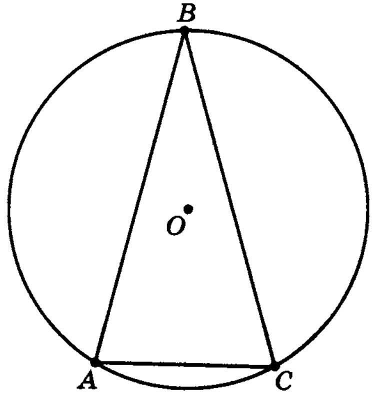
$\angle C$; $\angle D$



12. Дано:

Окружность
$\angle ABC = 30^\circ$
$AC = 8$

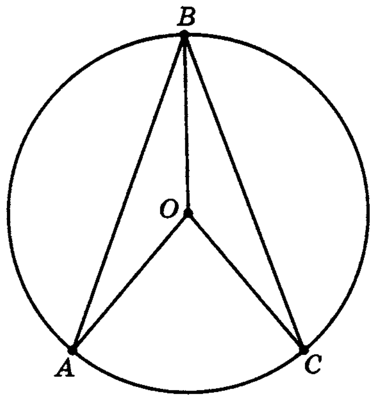
R_o



13. Дано:

Окружность
O — центр
$AB = BC$
$\angle AOC = 80^\circ$

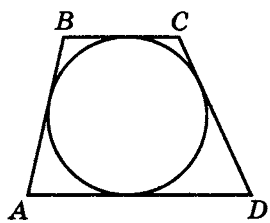
$\angle BAO$



14. Дано:

$ABCD$ — трапеция,
в нее вписана окружность
$P_{ABCD} = 100$
DC больше AB на 10

DC



Практикум 5 (типовые задачи)

1. В окружность вписан треугольник, опирающийся на диаметр. Высота, проведенная из вершины угла к диаметру, равна 30 и делит диаметр в отношении $4 : 9$. Найдите диаметр описанной около треугольника окружности.

2. Хорда, равная 30, перпендикулярна диаметру окружности и делит его в отношении $18 : 16$. Найдите треугольник наибольшей площади, опирающийся на хорду и вписанный в окружность.

3. Секущие, исходящие из одной точки, равны 24 и 16. Внутренняя часть наименьшей секущей равна 10. Найдите внутреннюю часть другой секущей.

4. Секущая и касательная равны 4 и 2. Найдите внутреннюю часть секущей.

5. Биссектриса CM треугольника ABC делит сторону AB на отрезки $AM = 17$ и $BM = 19$. Касательная к описанной около треугольника ABC окружности проходит через точку C и пересекает прямую AB в точке D. Найдите CD.

6. Биссектриса AE угла A делит четырехугольник $ABCD$ на равнобедренный треугольник ABE ($AB = BE$) и ромб $AECD$. Радиус круга, описанного около треугольника ECD, в 1,5 раза больше радиуса круга, вписанного в треугольник ABE. Найдите отношение периметров треугольников ECD и ABE.

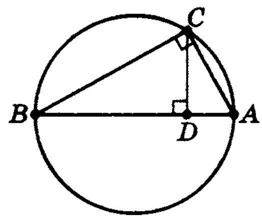
7. Окружность вписана в трапецию с боковыми сторонами, равными 13 и 20, и одним из оснований, равным 6. Найдите наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в трапецию, если две его вершины принадлежат основанию, а две другие боковым сторонам.

Практикум 5. Моделирование условий

1. В окружность вписан треугольник, опирающийся на диаметр. Высота, проведенная из вершины угла к диаметру, равна 30 и делит диаметр в отношении 4 : 9. Найдите диаметр описанной около треугольника окружности.

Дано:
Окружность диаметра AB
$CD \perp AB$
$AD : BD = 4 : 9$
$CD = 30$

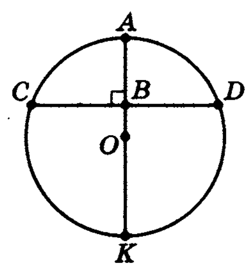
AB



2. Хорда, равная 30, перпендикулярна диаметру окружности и делит его в отношении 18 : 16. Найдите треугольник наибольшей площади, опирающийся на хорду и вписанный в окружность.

Дано (один из возможных вариантов моделирования условий задачи):
Окружность диаметра AK
CD — хорда
$CD \perp AK$
$B = AK \cap CD$
$BK : AB = 18 : 16$
$CD = 30$

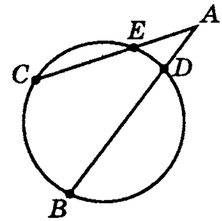
$S_{\triangle CDK}$



3. Секущие, исходящие из одной точки, равны 24 и 16. Внутренняя часть наименьшей секущей равна 10. Найдите внутреннюю часть другой секущей.

Дано:
Окружность
AB, AC — секущие
EC, BD — хорды
$AB = 24$
$AC = 16$
$EC = 10$

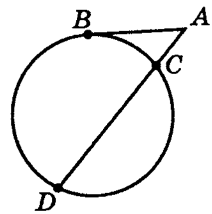
BD



4. Секущая и касательная равны 4 и 2. Найдите внутреннюю часть секущей.

Дано:
Окружность
AB — касательная
AD — секущая
CD — хорда
$AB = 2$
$AD = 4$

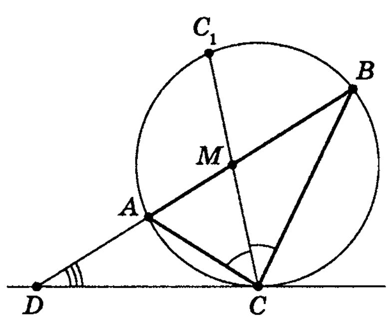
CD



5. Биссектриса CM треугольника ABC делит сторону AB на отрезки $AM = 17$ и $BM = 19$. Касательная к описанной около треугольника ABC окружности проходит через точку C и пересекает прямую AB в точке D. Найдите CD.

Дано:
$\triangle ABC$
$l_{AB} = CM$
$AM = 17$; $BM = 19$
DC — касательная к окр. около $\triangle ABC$ в точке C
$(AB) \cap (DC) = D$

CD

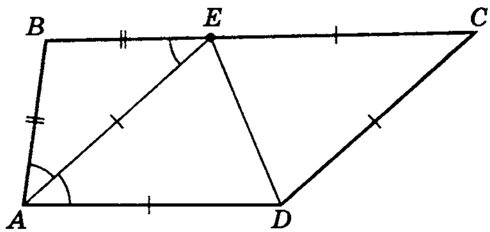


6. Биссектриса AE угла A делит четырехугольник $ABCD$ на равнобедренный треугольник ABE ($AB = BE$) и ромб $AECD$. Радиус круга, описанного около треугольника ECD, в 1,5 раза больше радиуса круга, вписанного в треугольник ABE. Найдите отношение периметров треугольников ECD и ABE.

Дано:

$ABCD$
$AE = l_{BC}$
$AB = BE$
$AECD$ — ромб
$\dfrac{R_{\text{о}\triangle ECD}}{r_{\text{в}\triangle ABE}} = \dfrac{3}{2}$

$\dfrac{P_{\triangle ECD}}{P_{\triangle ABE}}$

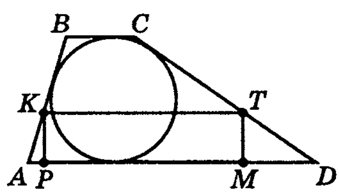


7. Окружность вписана в трапецию с боковыми сторонами, равными 13 и 20, и одним из оснований, равным 6. Найдите наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в трапецию, если две его вершины принадлежат основанию, а две другие боковым сторонам.

Дано:

$ABCD$ — трапеция
$BC \parallel AD$
$AB = 13$
$BC = 6$
$CD = 20$
В трапецию вписана окружность

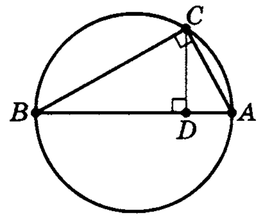
Найдите наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в трапецию.



Решение практикума 5

1. В окружность вписан треугольник, опирающийся на диаметр. Высота, проведенная из вершины угла к диаметру, равна 30 и делит диаметр в отношении 4 : 9. Найдите диаметр описанной около треугольника окружности.

Дано:
Окружность диаметра AB
$CD \perp AB$
$AD : BD = 4 : 9$
$CD = 30$
AB



Из условия задачи ясно, что для решения не принципиально, какое отношение равно 4 : 9: или $AD : BD$, или $BD : AD$.

Для определенности положим $AD : BD = 4 : 9$.

а) Из соотношения $AD : BD = 4 : 9$ следует,

что $AD = 4x$; $BD = 9x$.

б) Так как $CD^2 = AD \cdot DB$ (см. тему «Метрические отношения в прямоугольном треугольнике», стр. 124),

то $30^2 = 4x \cdot 9x$; $x^2 = \dfrac{30^2}{36} = 25$; $x = 5$.

в) Значит $AD = 4 \cdot 5 = 20$; $BD = 9 \cdot 5$,

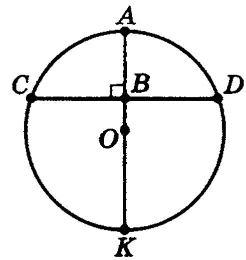
тогда $AB = AD + DB = 20 + 45 = \boxed{65}$.

2. Хорда, равной 30, перпендикулярна диаметру окружности и делит его в отношении 18 : 16. Найдите треугольник наибольшей площади, опирающийся на хорду и вписанный в окружность.

Дано (один из возможных вариантов моделирования условий задачи):

Окружность диаметра AK
CD — хорда
$CD \perp AK$
$B = AK \cap CD$
$BK : AB = 18 : 16$
$CD = 30$

$S_{\triangle CDK}$



Так как из всех треугольников с основанием CD и вершиной, принадлежащей окружности, наибольшим по площади является $\triangle CDK$, то необходимо найти $S_{\triangle CDK}$.

а) Пусть $AB = 16x$, $BK = 18x$, $AK = 34x$.

Так как диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам, то $CB = BD = 15$.

Тогда, учитывая, что $AB \cdot BK = CB \cdot BD$, получим: $AB \cdot BK = CB^2$, т. е. $16x \cdot 18x = 15^2$.

Значит $x^2 = \dfrac{15^2}{16 \cdot 18}$; $x = \dfrac{15}{4 \cdot 3\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{8}$.

Так как $BK = 18x$,

то $BK = 18 \cdot \dfrac{5\sqrt{2}}{8} = \dfrac{45\sqrt{2}}{4}$.

б) $S_{\triangle CDK} = CB \cdot BK$;

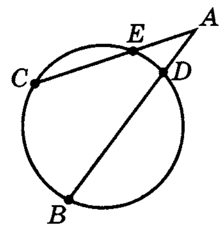
$S_{\triangle CDK} = 15 \cdot \dfrac{45\sqrt{2}}{4} = \boxed{168{,}75\sqrt{2}}$ (кв. ед.).

3. Секущие, исходящие из одной точки, равны 24 и 16. Внутренняя часть наименьшей секущей равна 10. Найдите внутреннюю часть другой секущей.

Дано:

Окружность
AB, AC — секущие
EC, BD — хорды
$AB = 24$
$AC = 16$
$EC = 10$

BD



а) $AE = AC - EC$, т. е. $AE = 16 - 10$; $AE = 6$.

б) $AC \cdot AE = 16 \cdot 6 = 96$.

Так как $AB \cdot AD = AC \cdot AE$, то $AB \cdot AD = 96$,

т. е. $24 \cdot AD = 96$, значит $AD = 4$.

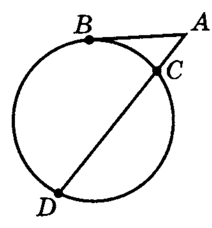
в) $DB = AB - AD$, т. е. $DB = 24 - 4 = \boxed{20}$.

4. Секущая и касательная равны 4 и 2. Найдите внутреннюю часть секущей.

Дано:

Окружность
AB — касательная
AD — секущая
CD — хорда
$AB = 2$
$AD = 4$

CD



Отметим, что длина касательной всегда меньше длины секущей.

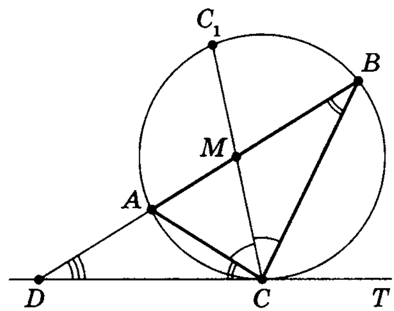
а) $AB^2 = AD \cdot AC$; $2^2 = 4AC$; $AC = 1$.

б) $CD = AD - AC$; $CD = 4 - 1 = \boxed{3}$.

5. Биссектриса CM треугольника ABC делит сторону AB на отрезки $AM=17$ и $BM=19$. Касательная к описанной около треугольника ABC окружности проходит через точку C и пересекает прямую AB в точке D. Найдите CD.

Дано:
$\triangle ABC$
$l_{AB}=CM$
$AM=17$; $BM=19$
TC — касательная к окр. около $\triangle ABC$ в точке C
$(AB)\cap(TC)=D$

CD



а) Так как угол между хордой AC и касательной TC равен вписанному углу, опирающемуся на эту хорду, то $\angle ACD=\angle ABC$ (с. 200).

б) Рассмотрим $\triangle ADC$ и $\triangle BDC$.

Так как $\left.\begin{matrix}\angle ACD=\angle CBD\\ \angle ADC=\angle BDC\end{matrix}\right|$,

то $\triangle ADC\sim\triangle BDC$.

в) Тогда $\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{DC}{AD}$.

Значит, так как $CM=l_{AB}$, то $\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{BM}{AM}=\dfrac{19}{17}$ (по теореме 2, с. 85).

Следовательно, $\dfrac{19}{17}=\dfrac{DC}{AD}$ $\left(\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{DC}{AD}\right)$.

г) Известно, что $DC^2=DB\cdot AD$, где $DB=AD+AB$ (по теореме 2, с. 200).

Тогда $DC^2=AD\cdot(AD+36)$.

Следовательно, $\begin{cases} DC^2 = AD \cdot (AD + 36) \\ \dfrac{19}{17} = \dfrac{DC}{AD} \end{cases}$;

$$\begin{cases} AD = \dfrac{17}{19} \cdot DC \\ DC^2 = \dfrac{17}{19} \cdot DC \left(\dfrac{17}{19} \cdot DC + 36 \right) \end{cases};$$

$19^2 DC^2 = 17^2 DC^2 + 17 \cdot 19 \cdot 36 DC$;

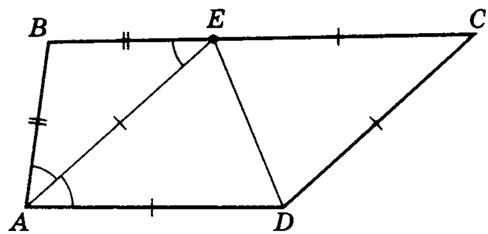
$(19^2 - 17^2) DC^2 - 17 \cdot 19 \cdot 36 \cdot DC = 0$;

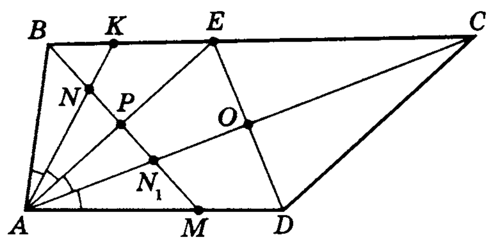
$36 \cdot DC \cdot (2DC - 17 \cdot 19) = 0$; $\boxed{CD = 161{,}5}$.

6. Биссектриса AE угла A делит четырехугольник $ABCD$ на равнобедренный треугольник ABE ($AB = BE$) и ромб $AECD$. Радиус круга, описанного около треугольника ECD, в 1,5 раза больше радиуса круга, вписанного в треугольник ABE. Найдите отношение периметров треугольников ECD и ABE.

Дано:
$ABCD$
$AE = l_{BC}$
$AB = BE$
$AECD$ — ромб
$\dfrac{R_{\text{о}\triangle ECD}}{r_{\text{в}\triangle ABE}} = \dfrac{3}{2}$

$\dfrac{P_{\triangle ECD}}{P_{\triangle ABE}}$





а) Сделаем дополнительное построение:

$AK = l_{BE}$; $BM = l_{\angle B}$.

Пусть $\angle BAE = \alpha$, $AE = a$.

Так как $AB = BE$, то $BM \perp AE$, тогда $r_{\text{в}\triangle ABE} = NP$ (центр вписанной в $\triangle ABE$ окружности находится на пересечении биссектрис, а $BP \subset BM$).

б) $AC = l_{\angle EAD}$ (свойство диагоналей ромба).

$BM \perp AE$ ($PM \subset BM$), $AC \perp ED$ (свойство ромба). Тогда $AO \perp ED$, $PM \perp AE$ — серединные перпендикуляры.

Значит, $AN_1 = R_{\text{о}\triangle AED}$, т. е. N_1 — центр описанной около $\triangle AED$ окружности.

в) $AN = AN_1$ (докажите), тогда так как $\triangle ECD = \triangle EAD$, то $\dfrac{R_{\text{о}\triangle ECD}}{r_{\text{в}\triangle ABE}} = \dfrac{AN}{NP} = \dfrac{3}{2}$,

т. е. так как $\dfrac{NP}{AN} = \sin\dfrac{\alpha}{2}$, то $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{2}{3}$.

г) Рассмотрим $\triangle ABE$.

$AB \cdot \cos\alpha = AP$; $P_{\triangle ABE} = 2AB + AE$; $2AP = AE = a$,

т. е. $P_{\triangle ABE} = \dfrac{a}{\cos\alpha} + a = \dfrac{a(1+\cos\alpha)}{\cos\alpha}$.

Рассмотрим $\triangle ECD$ ($AE = EC = a$).

$ED = 2 \cdot EC \cdot \sin\dfrac{\alpha}{2}$, т. е. $ED = 2a\sin\dfrac{\alpha}{2}$,

тогда $P_{\triangle ECD} = 2a\left(1 + \sin\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

д) $\dfrac{P_{\triangle ECD}}{P_{\triangle ABE}} = \dfrac{2a\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\frac{a(1+\cos\alpha)}{\cos\alpha}}$; $\dfrac{P_{\triangle ECD}}{P_{\triangle ABE}} = \dfrac{2\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$.

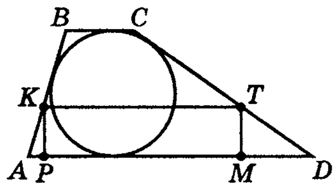
Так как $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$, то $\cos\alpha = 1 - 2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9}$.

Значит, $\dfrac{P_{\triangle ECD}}{P_{\triangle ABE}} = \dfrac{2\cdot\left(1+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{9}}{1+\frac{1}{9}} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$.

7. Окружность вписана в трапецию с боковыми сторонами, равными 13 и 20, и одним из оснований, равным 6. Найдите наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в трапецию, если две его вершины принадлежат основанию, а две другие боковым сторонам.

Дано:

$ABCD$ — трапеция
$BC \parallel AD$
$AB = 13$
$BC = 6$
$CD = 20$
В трапецию вписана окружность

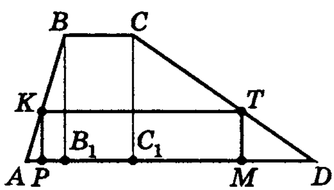


Найдите наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в трапецию.

Для того чтобы в четырехугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы его противоположных сторон были равны.

а) Так как в трапецию можно вписать окружность, то $AD+BC=AB+CD$, значит $20+13=6+AD$, $AD=27$.

б)



Дополнительные построения: $BB_1 \perp AD$, $CC_1 \perp AD$.
Положим $AB_1 = x$, тогда $C_1D = 27 - 6 - x = 21 - x$ ($BC = B_1C_1 = 6$).

в) Из $\left.\begin{array}{l} \triangle ABB_1 : BB_1^2 = 13^2 - x^2 \\ \triangle DCC_1 : CC_1^2 = 20^2 - (21-x)^2 \end{array}\right|$ $BB_1 = CC_1$,

тогда $13^2 - x^2 = 20^2 - (21-x)^2$, т.е. $x = 5 = AB_1$.
$C_1D = 21 - x$, т.е. $C_1D = 16$.

г) $BB_1 = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \quad (CC_1 = BB_1 = 12)$.

д) Пусть $AP = t \ (0 \leqslant t \leqslant 5)$.

Из $\triangle ABB_1$: $\operatorname{tg}(\angle A) = \dfrac{BB_1}{AB_1} = \dfrac{12}{5}$,

значит $PK = AP \cdot \operatorname{tg}(\angle A)$, т.е. $PK = \dfrac{12}{5}t$.

Из $\triangle DCC_1$: $\operatorname{ctg}(\angle D) = \dfrac{C_1D}{CC_1} = \dfrac{16}{12} = \dfrac{4}{3}$,

тогда $MD = MT \cdot \operatorname{ctg}(\angle D)$, т.е. $MD = \dfrac{12}{5}t \cdot \dfrac{4}{3} = \dfrac{16}{5}t$.

Так как $PK = MT$, то

$$PM = 27 - t - \frac{16}{5}t = 27 - \frac{5t + 16t}{5} = \frac{135 - 21t}{5} = \frac{3}{5}(45 - 7t).$$

е) $S_{PKTM} = PK \cdot PM = \dfrac{12}{5}t \cdot \dfrac{3}{5}(45 - 7t)$; $S(t) = \dfrac{36t}{25} \cdot (45 - 7t)$;

$D(t) = [0; 5]$

$t_0 = \dfrac{t_1 + t_2}{2}$, где $t_1 = 0$; $\quad t_2 = \dfrac{45}{7} = 6\dfrac{3}{7}$.

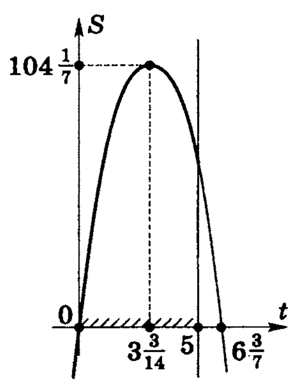
Значит $t_0 = 3\dfrac{3}{14} \in [0; 5]$, тогда

$$S_{\text{наиб}} = S\left(3\frac{3}{14}\right) =$$

$$= \frac{12}{5} \cdot \frac{45}{14} \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(45 - 7 \cdot \frac{45}{14}\right) =$$

$$= \frac{36}{25} \cdot \frac{45}{14} \cdot \frac{45}{2} = \frac{9 \cdot 9 \cdot 9}{7} = \boxed{104\frac{1}{7}}$$

(более подробно см. стр. 176).



Тренировочная работа 3

1. Из вершины прямого угла треугольника, вписанного в окружность, опущена высота на гипотенузу, причем высота в 3 раза больше наименьшего из отрезков, на которые она делит гипотенузу. Радиус вписанной в треугольник окружности равен 2. Найдите диаметр описанной около треугольника окружности.

2. Хорда, перпендикулярная диаметру, делит его на части, наименьшая из которых равна 10. Найдите треугольник наибольшей площади, опирающийся на хорду и вписанный в окружность радиуса 25.

3. Сумма секущих, проведенных к окружности, равна 50, а отношение их внешних частей равно $3:7$. Найдите наименьшую секущую.

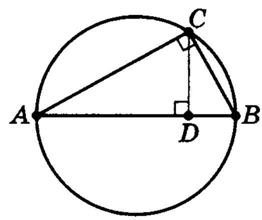
4. К окружности из одной точки проведены секущая и касательная. Отношение внешней части секущей к внутренней равно $4:5$. Найдите секущую, если касательная равна 12.

5. Окружности радиусов 13 и 20 соответственно с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке C. AO_1 и BO_2 — параллельные радиусы этих окружностей, причем $\angle AO_1O_2 = 60°$. Найдите AB.

6. В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 14$, $BC = 18$ и $AC = 20$. Окружность, проходящая через точки A и C, пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и L, отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдите длину отрезка KL.

Тренировочная работа 3. Моделирование условий

1. Из вершины прямого угла треугольника, вписанного в окружность, опущена высота на гипотенузу, причем высота в 3 раза больше наименьшего из отрезков, на которые она делит гипотенузу. Радиус вписанной в треугольник окружности равен 2. Найдите диаметр описанной около треугольника окружности.

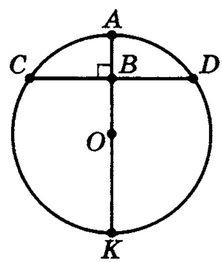


Дано:

$\triangle ABC$ вписан в окружность
$CD \perp AB$ (AB — диаметр)
$CD = 3BD$
$r_{\text{в}\triangle ABC} = 2$

AB

2. Хорда, перпендикулярная диаметру, делит его на части, наименьшая из которых равна 10. Найдите треугольник наибольшей площади, опирающийся на хорду и вписанный в окружность радиуса 25.

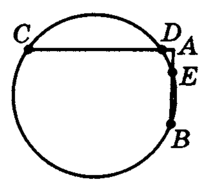


Дано:

Окружность
$A, K, D, C \in$ окружности
$CD \perp AK$
$R_{OA} = 25$
$AB = 10$

$S_{\triangle CDK_{\text{наиб}}}$

3. Сумма секущих, проведенных к окружности, равна 50, а отношение их внешних частей равно $3:7$. Найдите наименьшую секущую.



Дано:

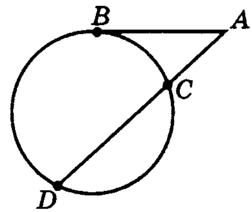
Окружность
AC, AB — секущие
$AB + AC = 50$
$AD : AE = 3 : 7$

Найти наименьшую секущую.

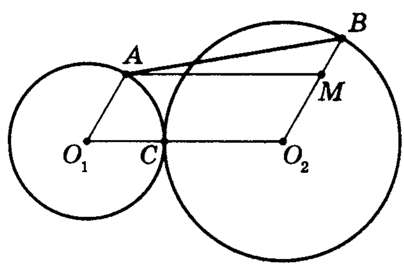
4. К окружности из одной точки проведены секущая и касательная. Отношение внешней части секущей к внутренней равно $4:5$. Найдите секущую, если касательная равна 12.

Дано:
Окружность
AB — касательная
AD — секущая
DC — хорда
$AB = 12$
$AC : DC = 4 : 5$

AD
AC

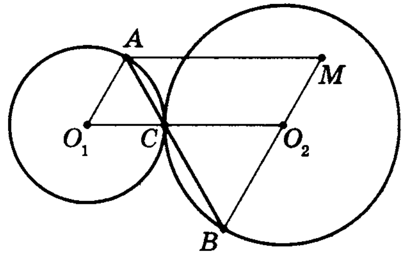


5. Окружности радиусов 13 и 20 соответственно с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке C. AO_1 и BO_2 — параллельные радиусы этих окружностей, причем $\angle AO_1O_2 = 60°$. Найдите AB.



Дано:
Окр (r_1), $r_1 = 13 = AO_1$
Окр (r_2), $r_2 = 20 = BO_2$
$AO_1 \parallel BO_2$
Окр $(r_1) \cap$ окр $(r_2) = C$ внешним образом
$\angle AO_1O_2 = 60°$

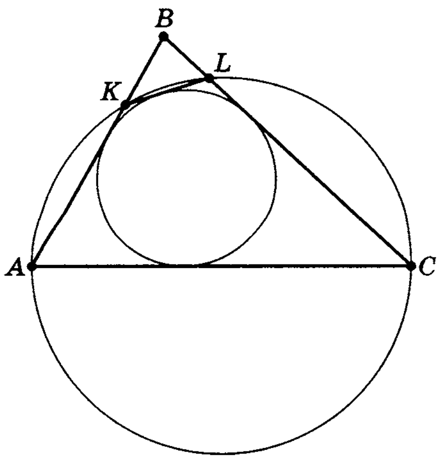
AB



6. В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 14$, $BC = 18$ и $AC = 20$. Окружность, проходящая через точки A и C, пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и L, отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдите длину отрезка KL.

Дано:
$\triangle ABC$
$AB = 14$
$BC = 18$
$AC = 20$
$A \in$ окр (r)
$C \in$ окр (r)
Окр $(r) \cap AB = \{K; A\}$
Окр $(r) \cap BC = \{L; C\}$
Окр (r_1) — окружность, вписанная в $\triangle ABC$
KL касается окр (r_1)

KL

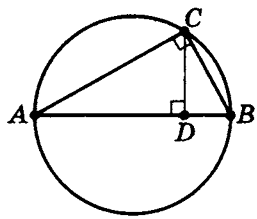


Примечание. Отметим, что это только один из возможных чертежей, отражающих, увы, не полностью возможные варианты решения задачи. Исследование и решение будут рассмотрены позже.

Напомним, что $\{K; A\}$ обозначает множество, в данном случае, состоящее из двух элементов — K и A. Подробнее см. книгу А. Х. Шахмейстер Множества. Функции. Последовательности. Прогрессии. СПб.:-М.: 2014.

Решение тренировочной работы 3

1. Из вершины прямого угла треугольника, вписанного в окружность, опущена высота на гипотенузу, причем высота в 3 раза больше наименьшего из отрезков, на которые она делит гипотенузу. Радиус вписанной в треугольник окружности равен 2. Найдите диаметр описанной около треугольника окружности.



Дано:

$\triangle ABC$ вписан в окружность
$CD \perp AB$ (AB — диаметр)
$CD = 3BD$
$r_{\text{в}\triangle ABC} = 2$

AB

а) Пусть $BD = x$, тогда $CD = 3x$.

Так как $CD^2 = AD \cdot BD$, то $9x^2 = AD \cdot x$, значит $AD = 9x$ $(x > 0)$.

б) 1. $CB = \sqrt{CD^2 + BD^2}$; $CB = \sqrt{(3x)^2 + x^2} = \sqrt{10}x$.

2. $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2}$; $AC = \sqrt{(9x)^2 + (3x)^2} = 3\sqrt{10}x$.

в) 1. $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} AC \cdot CB$;

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{10}x \cdot \sqrt{10}x = \frac{3}{2} \cdot 10x^2 = 15x^2.$$

2. $P = 3\sqrt{10}x + \sqrt{10}x + 10x = 4\sqrt{10}x + 10x =$

$= \left(4\sqrt{10} + 10\right)x$, т. е. $p = \left(2\sqrt{10} + 5\right)x$.

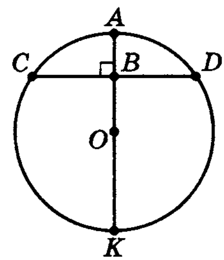
3. $r_{\text{в}} = \dfrac{S_{\triangle}}{p}$, значит $r_{\text{в}\triangle ABC} = \dfrac{15x}{2\sqrt{10} + 5}$, но $r_{\text{в}\triangle ABC} = 2$,

тогда $15x = 2 \cdot \left(2\sqrt{10} + 5\right)$; $x = \dfrac{2\left(2\sqrt{10} + 5\right)}{15}$.

г) $AB = 10x$ $(AB = AD + DB)$,

т. е. $AB = \dfrac{10 \cdot 2 \cdot \left(2\sqrt{10} + 5\right)}{15} = \boxed{\dfrac{4}{3}\left(2\sqrt{10} + 5\right)}$.

2. Хорда, перпендикулярная диаметру, делит его на части, наименьшая из которых равна 10. Найдите треугольник наибольшей площади, опирающийся на хорду и вписанный в окружность радиуса 25.



Дано:

Окружность
$A, K, D, C \in$ окружности
$CD \perp AK$
$R_{OA} = 25$
$AB = 10$

$S_{\triangle CDK_{\text{наиб}}}$

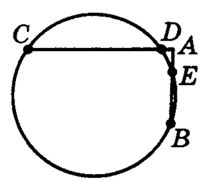
а) $AK = 2OA$; $AK = 2 \cdot 25 = 50$.
$BK = AK - AB$; $BK = 50 - 10 = 40$.

б) Так как $AB \cdot BK = CB^2$, то $10 \cdot 40 = CB^2$; $CB = 20$, значит $CD = 40$.

в) $S_{\triangle CDK} = \frac{1}{2} CD \cdot BK$;

$S_{\triangle CDK} = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 40 = \boxed{800}$ (кв. ед.).

3. Сумма секущих, проведенных к окружности, равна 50, а отношение их внешних частей равно $3:7$. Найдите наименьшую секущую.



Дано:

Окружность
$C, E, D, B \in$ окружности
AC, AB — секущие
$AB + AC = 50$
$AD : AE = 3 : 7$

Найти наименьшую секущую.

Так как соотношение длин внешней части секущих не говорит о соотношении длин самих секущих, то необходимо вычислить длины обеих секущих и выбрать наименьшую.

а) Так как $AC \cdot AD = AB \cdot AE$, то $AB = AC \cdot \frac{AD}{AE}$,

т. е. $AB = AC \cdot \frac{3}{7}$.

б) $AB + AC = 50$, тогда $\frac{3}{7}AC + AC = \frac{10}{7}AC = 50$;

$\boxed{AC = 35}$.

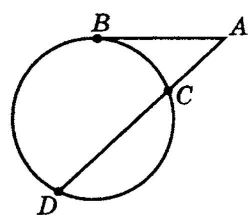
Вторая секущая $\boxed{AB = 15}$, т. е. она — наименьшая.

4. К окружности из одной точки проведены секущая и касательная. Отношение внешней части секущей к внутренней равно $4:5$. Найдите секущую, если касательная равна 12.

Дано:

Окружность
AB — касательная
AD — секущая
DC — хорда
$AB = 12$
$AC : DC = 4 : 5$

DC
AD



Пусть $AC = 4x$, а $DC = 5x$.

а) Так как $AB^2 = AD \cdot AC$, то $12^2 = (4x + 5x) \cdot 4x$, значит $12 = 6x$, т. е. $x = 2$.

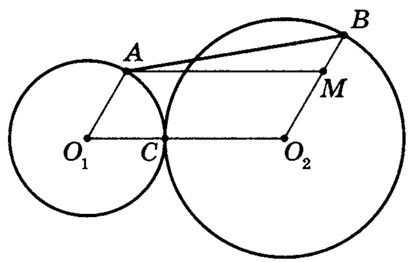
б) $AD = AC + DC = 9x$, тогда $AD = 9 \cdot 2 = \boxed{18}$.

5. Окружности радиусов 13 и 20 соответственно с центрами O_1 и O_2, касаются внешним образом в точке C. AO_1 и BO_2 — параллельные радиусы этих окружностей, причем $\angle AO_1O_2 = 60°$. Найдите AB.

Случай I

Дано:
Окр (r_1), $r_1 = 13 = AO_1$
Окр (r_2), $r_2 = 20 = BO_2$
$AO_1 \parallel BO_2$
Окр $(r_1) \cap$ окр $(r_2) = C$ внешним образом
$\angle AO_1O_2 = 60°$
A и B в одной полуплоскости относительно прямой O_1O_2

AB



Очевидно, что точки O_1, O_2 и C лежат на одной прямой.

Возможны два случая. Рассмотрим первый, когда точки A и B лежат в одной полуплоскости относительно прямой O_1O_2.

Пусть отрезок AM параллелен отрезку O_1O_2 (точка M принадлежит радиусу BO_2). Тогда O_1O_2MA — параллелограмм:

$AM = O_1O_2 = 33$; $O_1A = O_2M = 13$;

$\angle O_2MA = \angle AO_1O_2 = 60°$.

В треугольнике AMB:

$MB = 7$; $AM = 33$; $\angle AMB = 120°$, откуда

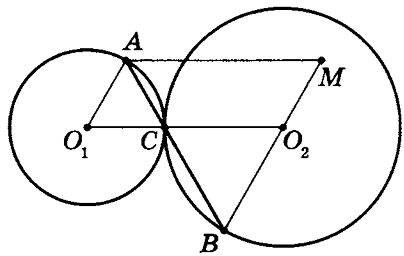
$AB = \sqrt{AM^2 + MB^2 - 2 \cdot AM \cdot MB \cdot \cos(\angle AMB)} = \boxed{37}$.

Случай II

Дано:

Окр (r_1), $r_1 = 13 = AO_1$
Окр (r_2), $r_2 = 20 = BO_2$
$AO_1 \parallel BO_2$
Окр $(r_1) \cap$ окр $(r_2) = C$
внешним образом
$\angle AO_1O_2 = 60°$
A и B в разных полуплоскостях относительно прямой O_1O_2

AB



Во втором случае точки A и B лежат в разных полуплоскостях относительно прямой O_1O_2.

Отрезок AM параллелен отрезку O_1O_2 (точка M теперь лежит на продолжении радиуса BO_2 за точку O_2), следовательно, O_1O_2MA — параллелограмм. Аналогично:

$AM = O_1O_2 = 33$; $\quad O_1A = O_2M = 13$;

$\angle O_2MA = \angle AO_1O_2 = 60°$.

В треугольнике AMB имеем:

$MB = 33$; $\quad AM = 33$; $\quad \angle AMB = 60°$,

значит, треугольник AMB — правильный,

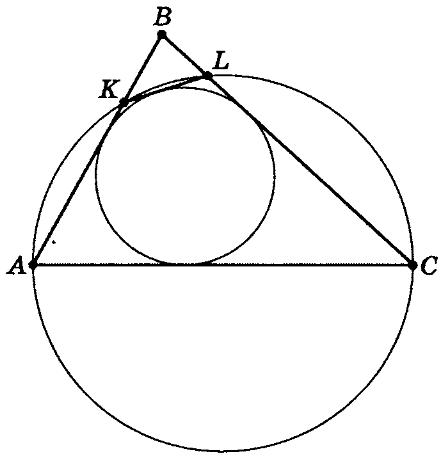
а значит, $AB = \boxed{33}$.

Ответ: $AB = 33$ или $AB = 37$.

6. В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 14$, $BC = 18$ и $AC = 20$. Окружность, проходящая через точки A и C, пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и L, отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдите длину отрезка KL.

Дано:
$\triangle ABC$
$AB = 14$
$BC = 18$
$AC = 20$
$A \in$ окр (r)
$C \in$ окр (r)
Окр $(r) \cap AB = \{K; A\}$
Окр $(r) \cap BC = \{L; C\}$
Окр (r_1) — окружность, вписанная в $\triangle ABC$
KL касается окр (r_1)

KL



а) Пусть обе точки K и L лежат на сторонах треугольника.

Четырехугольник $AKLC$ — вписанный, следовательно, $\angle KAC = 180° - \angle KLC = \angle BLK$ $(\angle KLC + \angle BLK = 180°)$.

Значит, $\triangle ABC$ подобен $\triangle LBK$, так как угол ABC — общий.

Пусть коэффициент подобия равен k, тогда
$BL = kAB, \quad BK = kBC, \quad KL = kAC.$

Суммы противоположных сторон описанного четырехугольника $AKLC$ равны:
$AK + LC = KL + AC;$
$AB(1-k) + BC(1-k) = AC(1+k);$
$$k = \frac{AB + BC - AC}{AC + AB + BC}.$$

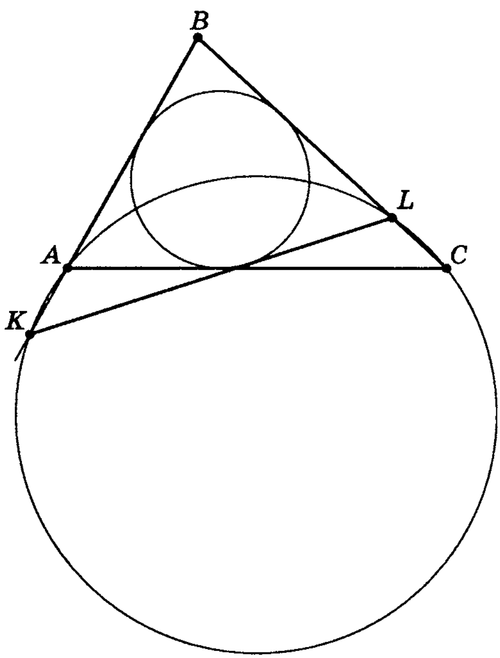
Подставляя известные длины сторон, находим:
$$k = \frac{14+18-20}{14+18+20} = \frac{3}{13}.$$

Следовательно, $KL = \frac{3}{13}AC = \boxed{\frac{60}{13}}$.

б) Обе точки K и L не могут лежать вне треугольника ABC, поскольку в этом случае отрезок KL не может касаться вписанной окружности.

Значит, по крайней мере одна из этих точек лежит на стороне треугольника.

Пусть точка K лежит на продолжении стороны AB.



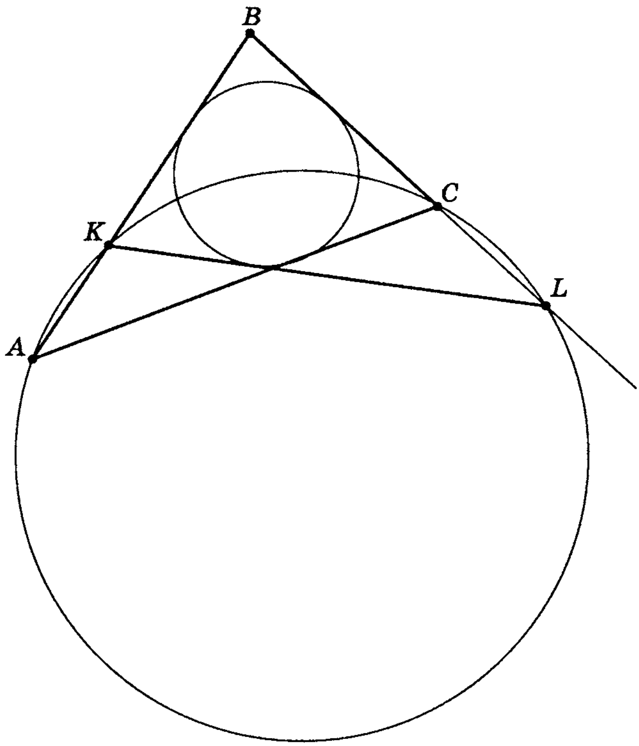
Углы AKL и ACL равны, поскольку опираются на одну дугу. Значит, треугольник ABC подобен треугольнику LBK, так как угол ABC — общий.

Более того, они описаны около одной и той же окружности. Следовательно, коэффициент подобия равен 1, то есть треугольники LBK и ABC равны, поэтому $KL = AC = \boxed{20}$.

Заметим, что $BK = BC > AB$, и точка K действительно лежит на продолжении стороны AB.

в) Если точка L лежит на продолжении стороны BC, то $BL > BC$. Но рассуждая аналогично предыдущему случаю, получаем $BL = AB < BC$. Пришли к противоречию.

Значит, такой случай не достигается.



Ответ: $KL = \dfrac{60}{13}$ или $KL = 20$.

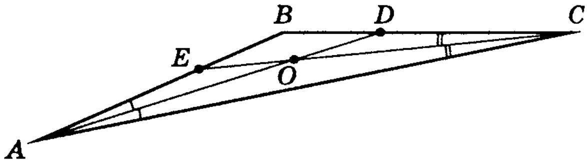
Упражнения на готовых чертежах 2 (повторение)

1. Дано:

$\triangle ABC$

$\angle B = 156°$

$\angle AOC$



2. Дано:

$\triangle ABC$

$\angle BDC = 100°$

$\angle BCD = 10°$

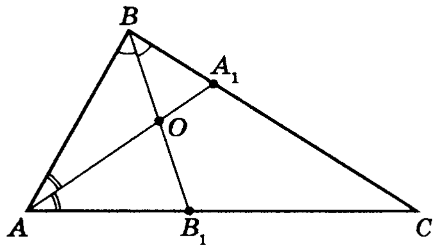
$\angle BAC$

3. Дано:

$\triangle ABC$

$\angle BOA = 106°$

$\angle ACB$

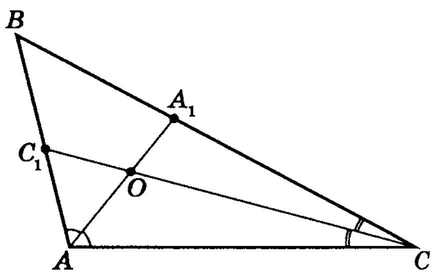


4. Дано:

$\triangle ABC$

$\angle ABC = 48°$

$\angle AOC$

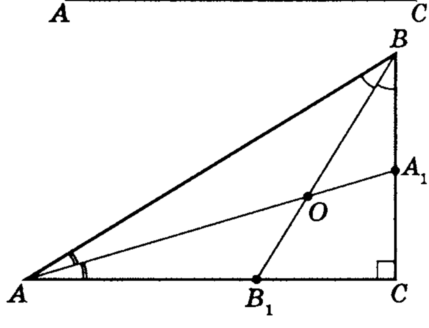


5. Дано:

$\triangle ABC$

$AC \perp BC$

$\angle AOB$

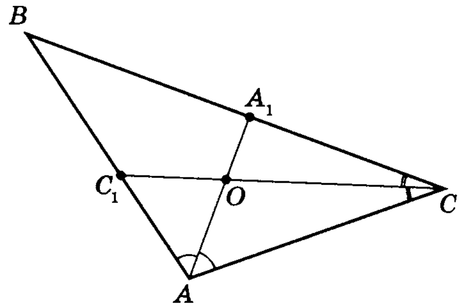


6. Дано:

$\triangle ABC$

$\angle AOC + \angle ABC = 144°$

$\angle AOC$

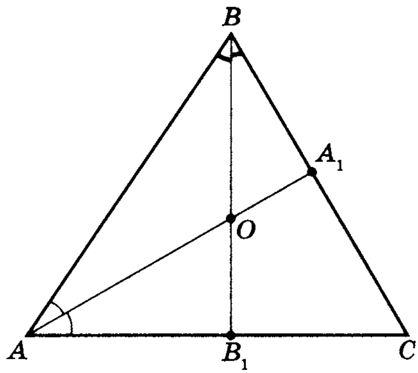


7. Дано:

$\triangle ABC$

$\angle BOA = 2(\angle ACB)$

$\angle ACB$

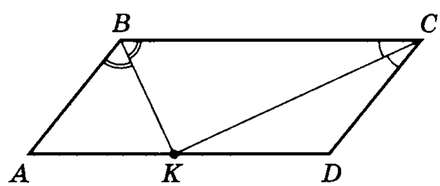


8. Дано:

$ABCD$ — параллелограмм

$K \in AD$

$\angle BKC$

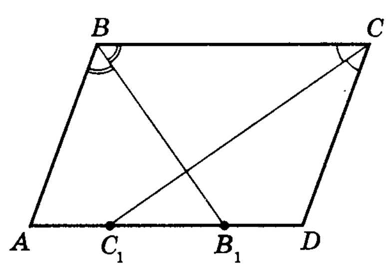


9. Дано:

$ABCD$ — параллелограмм

$\angle ABB_1 - \angle DCC_1 = 20°$

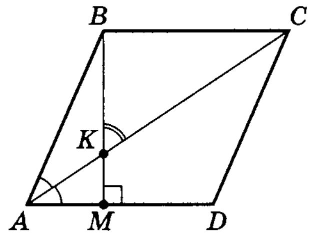
$\angle BAD$



10. Дано:

$ABCD$ — параллелограмм
$\angle BKC = 57°$
$BM \perp AD$
$K \in BM$

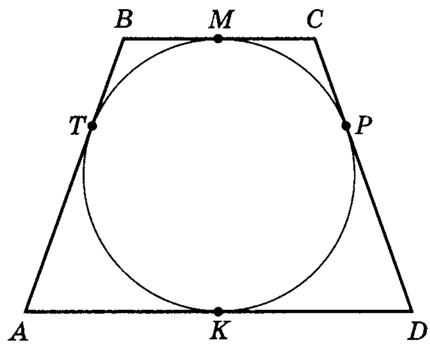
$\angle ABC$



11. Дано:

$ABCD$ — трапеция
$AB = DC$
T, M, P, K — точки касания
$BT = 2$
$AK = 8$

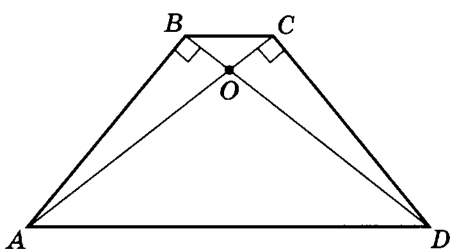
S_{ABCD}



12. Дано:

$ABCD$ — трапеция
$AD = 25$
$AB = 15$

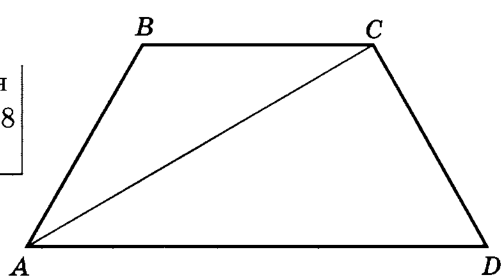
S_{ABCD}



13. Дано:

$ABCD$ — трапеция
$AB = BC = DC = 8$
$AD = 16$

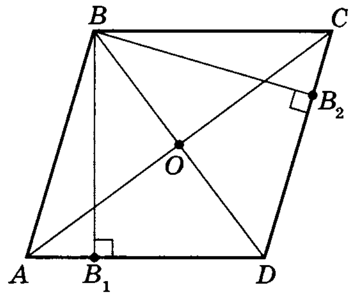
а) S_{ABCD}
б) AC



14. Дано:

$ABCD$ — ромб
$AC = 16$
$DB = 12$

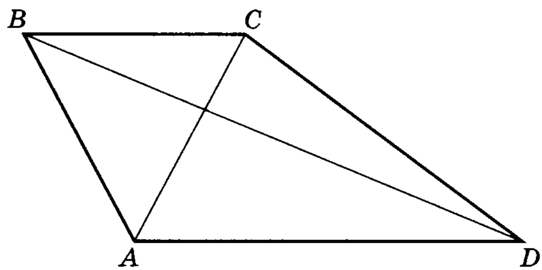
$\dfrac{S_{ABCD}}{S_{BB_1DB_2}}$



15. Дано:

$ABCD$ — трапеция
$AD = 28$
$BC = 16$
$AC = 17$
$BD = 39$

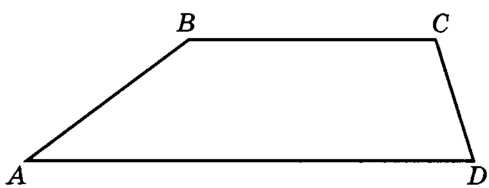
S_{ABCD}



16. Дано:

$ABCD$ — трапеция
$AD = 11$
$BC = 7$
$AB = 5$
$DC = 3$

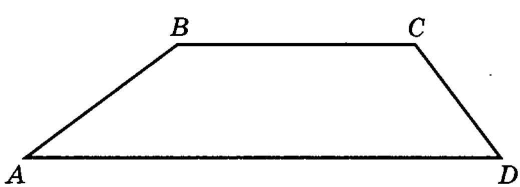
S_{ABCD}



17. Дано:

$ABCD$ — трапеция
$AD = 20$
$BC = 10$
$AB = 8$
$DC = 6$

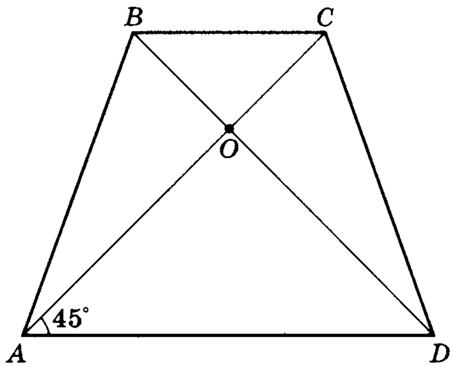
S_{ABCD}



18. Дано:

$ABCD$ — трапеция
$AC = BD = 4\sqrt{2}$
$\angle CAD = 45°$

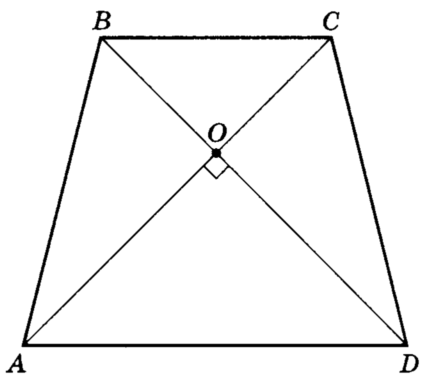
S_{ABCD}



19. Дано:

$ABCD$ — трапеция
$AB = DC$
$AD = 20$
$BC = 12$
$AC \perp DB$

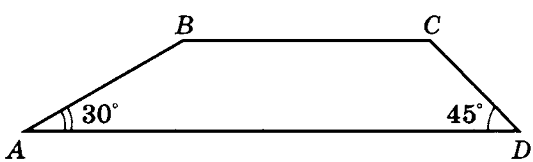
S_{ABCD}



20. Дано:

$ABCD$ — трапеция
$BC = 10$
$AD = 20$

S_{ABCD}



Блиц-самостоятельные работы

Вариант А

1. Дано:

$\triangle ABC$

$\angle A = 120^\circ$; $R_{\text{о}} = \sqrt{3}$

BC

2. Дано:

$\triangle ABC$

$AB = BC$

$\angle A = \alpha$; $r_{\text{в}} = 2$

AC

3. Дано:

$\triangle ABC$

$\angle A = 25^\circ$

$AB = BC$

$\angle ABC$

4. Дано:

$\triangle ABC$

$\angle B = 90^\circ$; $\angle A = 13^\circ$

$BP \perp AC$

$\angle PBC$

5. Дано:

$\triangle ABC$

$\angle B = 90^\circ$; $\angle A = \alpha$

$BP \perp AC$

$AB = 5$

PC

6. Дано:

$\triangle ABC$

$\angle B = 90^\circ$

$BP \perp AC$

$BP = 6$; $PC = 4$

AP

7. Дано:

$\triangle ABC$

$AB = 8$

$BC = 6$; $AC = 10$

$\angle B$

8. Дано:

$\triangle ABC$

$OD \perp AB$

$OK \perp BC$; $OP \perp AC$

$r_{\text{в}} = OD = OK = OP$

$AD = 5$; $CK = 4$

AC

9. Дано:

$ABCD$ — трапеция

$AD \parallel BC$; $BK \perp AD$

$AB = DC$

$BC = 10$; $AD = 16$

AK; KD

10. Дано:

$ABCD$ — трапеция

$AD \parallel BC$; $AC = BD$

$\left(\widehat{AC; BD}\right) = 40^\circ$

$\angle BDA$

Вариант В

1. Дано:
$ABCD$ — ромб
$\angle A = 30°$
$r_в = 3$
AB

6. Дано:
$\triangle ABC$
$\angle B = 90°;\ m_{AC} = 10$
AC

2. Дано:
$\triangle ABC$
$AB = BC$
$\angle ABC = 2\alpha$
$AB = b$
$BK \perp AC$
BK

7. Дано:
$\triangle ABC$
$\angle B = 120°$
$AB = 2;\ BC = 3$
AC^2

3. Дано:
$ABCD$ — трапеция
$BC \parallel AD$
$AB = DC$
$\angle A = 60°$
$r_в = 3$
Найти среднюю линию

8. Дано:
$\triangle ABC$
$\angle B = 90°;\ r_в = 4$
$AB + BC = 30$
AC

4. Дано:
$ABCD$
$AC \cap BD = O$
$OA = 8;\ OC = 3;\ OB = 2$
$ABCD$ вписан в окр.
BD

9. Дано:
$ABCD$ — трапеция
$AD \parallel BC;\ \angle A = 90°$
$AB = 12;\ BC = 4;$
$AD = 9$
DC

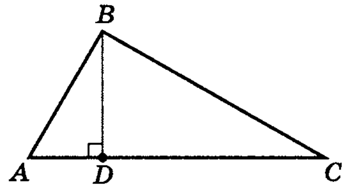
5. Дано:
$\triangle ABC$
$AB = 12$
$BC = 5$
$\sin(\angle C) = 0{,}8$
$\sin(\angle A)$

10. Дано:
$ABCD$ — трапеция
$AD \parallel BC;\ AB = DC$
$AC = 10$
$\angle ADB = 50°$
$BD;\ \angle BCA$

Лабораторная работа 4

Варианты (1–6)

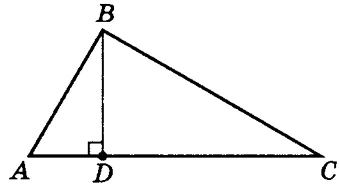
Для треугольника ABC, где $BD \perp AC$, по трем данным из таблицы найдите все остальные.



	1	2	3	4	5	6
AB	7	26				14
BC	24	28	7			
CD				$23\frac{1}{25}$	16,8	$46\frac{2}{25}$
AD			3,3	$1\frac{24}{25}$	13,2	
BD	6,72	$11\frac{1}{5}$				
$\sin(\angle B)$						
$\cos(\angle C)$				$\frac{24}{25}$		
$\operatorname{tg}(\angle A)$					$1\frac{23}{33}$	$3\frac{3}{7}$
$R_{\circ \triangle ABC}$			4,0625			
$r_{в \triangle ABC}$						
m_{BC}						
l_{AC}						

Варианты (7–12)

Для треугольника ABC, где $BD \perp AC$, по трем данным из таблицы найдите все остальные.



	7	8	9	10	11	12
AB	13				6,5	14
BC			48	24	14	
CD					4,2	
AD		3,92	1,96	$6\frac{3}{5}$		
BD						$13\frac{11}{25}$
$\sin(\angle B)$	$\frac{12}{13}$	1				1
$\cos(\angle C)$	$\frac{3}{5}$		$0,96$	$\frac{3}{5}$		
$\mathrm{tg}(\angle A)$						
$R_{\text{о}\triangle ABC}$					$4\frac{1}{16}$	
$r_{\text{в}\triangle ABC}$						
m_{BC}						
l_{AC}						

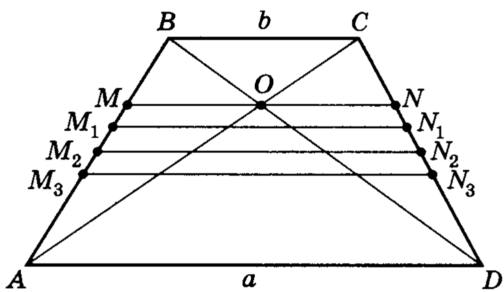
Средние величины

Можно алгебраически доказать серию неравенств.

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}; \qquad a, b > 0.$$

Но эти соотношения были известны еще древним грекам. И получены они были из геометрических соображений, так как алгебра тогда еще не была создана.

Пусть $ABCD$ — трапеция, где $AD = a$, $BC = b$.



Тогда:

1. $MN = \dfrac{2}{\frac{1}{AD}+\frac{1}{BC}} = \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \dfrac{2ab}{a+b}$; $O \in MN$; $MN \parallel AD$.

2. $M_1N_1 = \sqrt{AD \cdot BC} = \sqrt{ab}$; $M_1N_1 \parallel AD$;
   $AM_1N_1D \sim M_1BCN_1$.

3. $M_2N_2 = \dfrac{AD+BC}{2} = \dfrac{a+b}{2}$; $AM_2 = M_2B$; $DN_2 = N_2C$.

4. $M_3N_3 = \sqrt{\dfrac{AD^2+BC^2}{2}} = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$;
   $S_{AM_3N_3D} = S_{M_3BCN_3}$.

$MN = \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \dfrac{2ab}{a+b}$ называется **средним гармоническим** чисел a и b (или оснований трапеции).

$M_1N_1 = \sqrt{ab}$ называется **средним геометрическим** чисел a и b (или оснований трапеции).

$M_2N_2 = \dfrac{a+b}{2}$ называется **средним арифметическим** чисел a и b (или оснований трапеции).

$M_3N_3 = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ называется **средним квадратичным** чисел a и b (или оснований трапеции).

Примечания. 1. Когда мы ведем речь о средних величинах в геометрической интерпретации, естественно, имеются в виду длины отрезков (то есть под AB понимается длина отрезка AB). По умолчанию говорить об этом дополнительно мы далее не будем, но это важно понимать.

2. Очевидно, что все соотношения о средних верны в применении к любой трапеции.

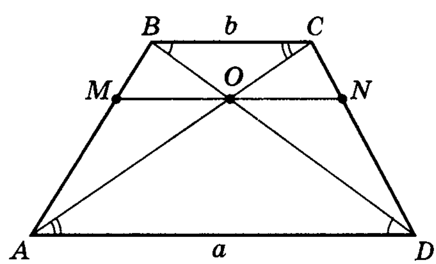
Докажем сформулированные соотношения.

1. Докажите, что отрезок, параллельный основанию трапеции, проходящий через точку пересечения ее диагоналей и соединяющий боковые стороны, является средним гармоническим оснований трапеции.

Дано:

$ABCD$ — трапеция
$BC \parallel AD$
$MN \parallel AD$
$AC \cap BD = O$ — точка пересечения диагоналей
$O \in MN$
$AD = a$
$BC = b$

$MN = \dfrac{2ab}{a+b}$



а) Рассмотрим $\triangle OBC$, $\triangle ODA$.

Так как $\left| \begin{array}{l} \angle CBO = \angle ODA \\ \angle BCO = \angle OAD \\ \angle BOC = \angle DOA \end{array} \right.$, то $\triangle OBC \sim \triangle ODA$,

значит $\dfrac{BC}{AD} = \dfrac{BO}{OD} = \dfrac{OC}{AO} = \dfrac{b}{a}$.

б) Рассмотрим $\triangle ABC$, $\triangle AMO$.

Можно доказать что $\triangle ABC \sim \triangle AMO$,

тогда $\dfrac{BC}{MO} = \dfrac{AC}{AO}$,

но $\dfrac{AC}{AO} = \dfrac{AO+OC}{AO} = \dfrac{AO}{AO} + \dfrac{OC}{AO} = 1 + \dfrac{OC}{AO} = 1 + \dfrac{b}{a}$,

значит $\dfrac{BC}{MO} = 1 + \dfrac{b}{a}$; $\quad MO = \dfrac{BC}{1+\frac{b}{a}} = \dfrac{ba}{a+b}$.

в) Рассмотрим $\triangle DBC$, $\triangle DON$.

Можно аналогично доказать, что $\triangle DBC \sim \triangle DON$,

тогда $\dfrac{ON}{BC} = \dfrac{OD}{BD}$;

$$\frac{OD}{BD} = \frac{OD}{BO+OD} = \frac{1}{\frac{BO+OD}{OD}} = \frac{1}{\frac{BO}{OD}+1} = \frac{1}{\frac{b}{a}+1} = \frac{a}{a+b},$$

значит $\dfrac{ON}{BC} = \dfrac{ON}{b} = \dfrac{a}{a+b}$; $\quad ON = \dfrac{ab}{a+b}$.

г) Таким образом, $OM = \dfrac{ab}{a+b}$ и $ON = \dfrac{ab}{a+b}$.

Значит $OM = ON$, т. е. точка пересечения диагоналей делит $MN \parallel AD$ пополам.

Следовательно, $MN = \dfrac{2ab}{a+b}$ или $\boxed{MN = \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}}$.

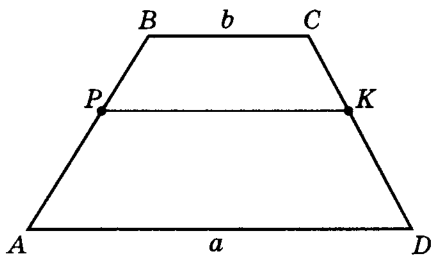
Это и есть среднее гармоническое чисел a и b.

Итак, MN — среднее гармоническое оснований трапеции.

2. Докажите, что отрезок, параллельный основанию трапеции и делящий его на две подобные трапеции, является средним геометрическим оснований этой трапеции.

Дано:

$ABCD$
$BC \parallel AD$
$PK \parallel AD$
$APKD \sim PBCK$
$AD = a$
$BC = b$



$PK = \sqrt{ab}$

Так как $APKD \sim PBCK$, то $\dfrac{AD}{PK} = \dfrac{PK}{BC}$,

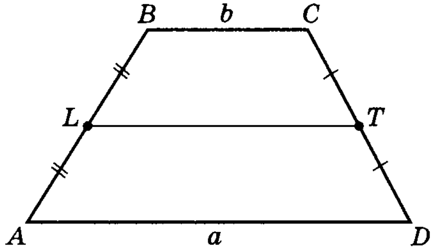
значит $PK^2 = AD \cdot BC$.

Тогда $\boxed{PK = \sqrt{ab}}$ называется средним геометрическим чисел a и b, т. е. PK — среднее геометрическое оснований трапеции.

3. Докажите, что отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, является средним арифметическим ее оснований.

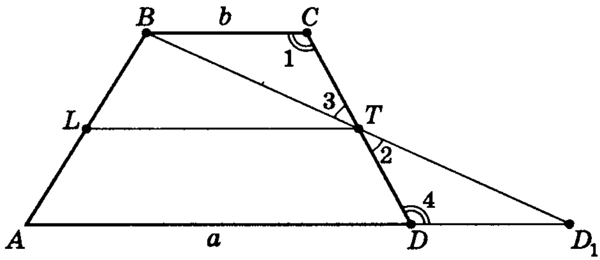
Дано:

$ABCD$
$BC \parallel AD$
$AL = LB$, $AD = a$
$DT = TC$, $BC = b$



$LT = \dfrac{a+b}{2}$

а) Проведем дополнительное построение: BD_1, где D_1 принадлежит прямой (AD) и $T \in BD_1$.



б) Рассмотрим $\triangle BCT$ и $\triangle D_1DT$.

1. $CT = TD$ по условию;
2. $\angle 1 = \angle 4$ (внутренние накрест лежащие углы);
3. $\angle 3 = \angle 2$ — вертикальные.

Из 1–3 следует, что $\triangle BCT = \triangle D_1DT$,

значит $BC = DD_1 = b$ и $BT = D_1T$.

в) Рассмотрим $\triangle ABD_1$.

LT — средняя линия $\triangle ABD_1$, значит $LT \parallel AD$. Докажите этот факт самостоятельно.

$LT = \dfrac{1}{2}AD_1$, но $AD_1 = AD + DD_1 = a + b$,

т. е. $\boxed{LT = \dfrac{a+b}{2}}$.

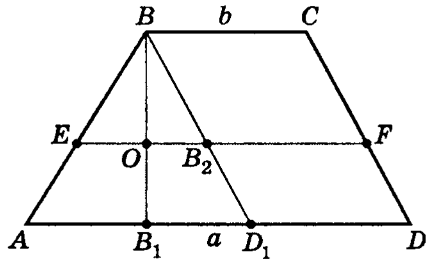
Это и называется средним арифметическим чисел a и b.

Таким образом, LT — среднее арифметическое оснований трапеции.

4. В трапеции отрезок, параллельный основанию и делящий ее на две трапеции, равные по площади, является средним квадратичным ее оснований.

Дано:

$ABCD$
$BC \parallel AD$
$EF \parallel AD$
$S_{AEFD} = S_{EBCF}$
$AD = a$
$BC = b$



$$EF = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

а) 1. Проведем дополнительное построение: $BD_1 \parallel CD$, где $D_1 \in (AD)$.

$BD_1 \cap EF = B_2$ — точка пересечения EF и BD_1.

$BB_1 \perp AD$; $\quad BB_1 \cap EF = O$.

2. Тогда $BC = B_2F = D_1D = b$;

$EB_1 = EF - B_1F = EF - b$;

$AD_1 = AD - D_1D = a - b$;

$BB_1 = OB + OB_1$.

б) 1. $S_{AEFD} = \dfrac{AD+EF}{2} \cdot OB_1 = \dfrac{a+EF}{2} \cdot OB_1$;

$S_{EBCF} = \dfrac{EF+BC}{2} \cdot OB = \dfrac{b+EF}{2} \cdot OB$.

Так как $S_{AEFD} = S_{EBCF}$, то

$$\frac{a+EF}{2} \cdot OB_1 = \frac{b+EF}{2} \cdot OB;$$

$$\frac{b+EF}{a+EF} = \frac{OB_1}{OB}.$$

2. Рассмотрим $\triangle ABD_1$, $\triangle EBB_2$.

Можно доказать, что $\triangle ABD_1 \sim \triangle EBB_2$.

Тогда $\dfrac{EB_2}{OB} = \dfrac{AD_1}{BB_1}$, т. е. $\dfrac{EF-b}{OB} = \dfrac{a-b}{OB+OB_1}$

или $\dfrac{OB+OB_1}{OB} = \dfrac{a-b}{EF-b}$;

$1+\dfrac{OB_1}{OB} = \dfrac{a-b}{EF-b}$; $\dfrac{OB_1}{OB} = \dfrac{a-b}{EF-b} - 1$;

$\dfrac{OB_1}{OB} = \dfrac{a-EF}{EF-b}$.

3. $$\left.\begin{aligned} \frac{OB_1}{OB} &= \frac{b+EF}{a+EF} \\ \frac{OB_1}{OB} &= \frac{a-EF}{EF-b} \end{aligned}\right| \Rightarrow \frac{b+EF}{a+EF} = \frac{a-EF}{EF-b},$$ значит

$(EF+b)(EF-b) = (a+EF)(a-EF)$

$(EF)^2 - b^2 = a^2 - (EF)^2$; $(EF)^2 = \dfrac{a^2+b^2}{2}$;

$\boxed{EF = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}}$ — это и называется средним квадратичным чисел a и b.

Таким образом, EF — среднее квадратичное оснований трапеции.

Практикум 6 (решение задач с использованием средних величин)

1. В трапеции проведены два отрезка, параллельных основанию и соединяющих боковые стороны. Один из них, равный $\sqrt{7}$, делит трапецию на две подобные трапеции, а другой, равный 5, делит трапецию на две трапеции, равные по площади. Найдите отношение отрезков, на которые делят боковую сторону данные отрезки.

2. В трапеции диагонали пересекаются в точке, через которую проведен отрезок, соединяющий боковые стороны параллельно основанию. Отношение площадей треугольников с вершиной в точке пересечения и основаниями, равными основаниям трапеции, равно $9:1$. Найдите отношения площадей трапеций, на которые делит исходную трапецию данный отрезок.

3. Два параллельных основанию трапеции отрезка, соединяющие боковые стороны, равны 1,75 и 5. Один из них проходит через точку пересечения диагоналей, а другой делит трапецию на две трапеции, равные по площади. Выясните отношение отрезков боковой стороны, на которую делят ее два данных отрезка.

4. В трапеции проведены два параллельных основанию отрезка. Один проходит через точку пересечения диагоналей и равен 1,6. Другой, равный 2, делит ее на две подобные трапеции. Найдите отношения отрезков боковой стороны, на которые ее делят два отрезка.

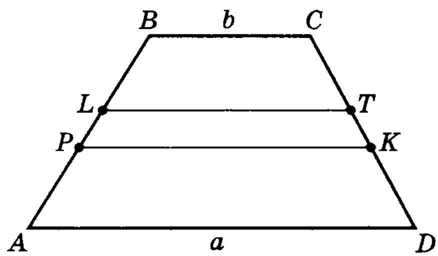
5. В трапеции точка пересечения диагоналей является вершиной двух треугольников, основания которых есть основания трапеций, площади которых относятся как $81:16$. Найдите отношение площадей подобных трапеций, образованных отрезком, параллельным основанию.

Решение практикума 6

1. В трапеции проведены два отрезка, параллельных основанию и соединяющих боковые стороны. Один из них, равный $\sqrt{7}$, делит трапецию на две подобные трапеции, а другой, равный 5, делит трапецию на две трапеции, равные по площади. Найдите отношение отрезков, на которые делят боковую сторону данные отрезки.

Дано:

$ABCD$ — трапеция
$BC \parallel AD$
$LT \parallel PK \parallel AD$
$ALTD \sim LBCT$
$S_{APKD} = S_{PBCK}$
$LT = \sqrt{7}$
$PK = 5$



$AP : PL : LB$

а) Пусть $AD = a; \quad BC = b$,

тогда $\left.\begin{array}{l} PK = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} \\ LT = \sqrt{ab} \end{array}\right|$, значит, $\left\{\begin{array}{l} \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} = 5 \\ \sqrt{ab} = \sqrt{7} \end{array}\right.$;

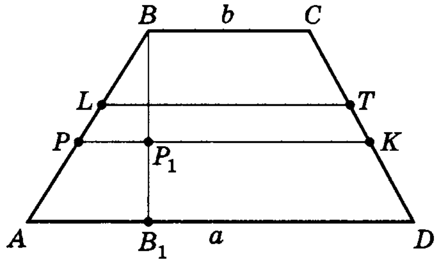
$$\left\{\begin{array}{l} a^2+b^2 = 50 \\ ab = 7 \end{array}\right.; \quad \left\{\begin{array}{l} a^2+b^2 = 50 \\ 2ab = 14 \end{array}\right. \quad \boxed{1} + \boxed{2}$$

$$\left\{\begin{array}{l} (a+b)^2 = 64 \\ ab = 7 \end{array}\right..$$

Так как $a > 0, \ b > 0$, то $\left\{\begin{array}{l} a+b = 8 \\ ab = 7 \end{array}\right.$.

Решением системы будет $\left\{\begin{array}{l} a = 7 \\ b = 1 \end{array}\right.; \quad \left\{\begin{array}{l} AD = 7 \\ BC = 1 \end{array}\right.$.

б) Проведем $BB_1 \perp AD$.



$$\left.\begin{aligned} S_{APKD} &= \frac{AD+PK}{2}\cdot B_1P_1 = \frac{7+5}{2}B_1P_1 = 6B_1P_1 \\ S_{PBCK} &= \frac{PK+BC}{2}\cdot P_1B = \frac{5+1}{2}\cdot P_1B = 3P_1B \\ S_{ABCD} &= \frac{AD+BC}{2}\cdot B_1B = \frac{7+1}{2}\cdot B_1B = 4B_1B \end{aligned}\right|$$

1. (номер относится к системе выше)

Тогда $S_{ABCD} = S_{APKD} + S_{PBCK}$.

Значит $4BB_1 = 6B_1P_1 + 3P_1B$.

Так как $B_1B = BP_1 + P_1B_1$, то

$6B_1P_1 + 3P_1B = 4B_1P_1 + 4P_1B$;

$2B_1P_1 = P_1B$, значит

$$\frac{P_1B}{B_1B} = \frac{P_1B}{B_1P_1 + P_1B} = \frac{P_1B}{\frac{1}{2}P_1B + P_1B} = \frac{2P_1B}{3P_1B} = \frac{2}{3}.$$

2. $\triangle ABB_1 \sim \triangle PBP_1$, тогда $\dfrac{PB}{AB} = \dfrac{P_1B}{BB_1} = \dfrac{2}{3}$,

т. е. $PB = \dfrac{2}{3}AB$; $AP = \dfrac{1}{3}AB$.

в) 1. Так как $ALTD \sim LBCT$, то

$\dfrac{LB}{LT} = \dfrac{AL}{AD}$, т. е. $\dfrac{LB}{AL} = \dfrac{LT}{AD} = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$,

но $\left.\begin{aligned} AL + LB &= AB \\ LB &= \frac{\sqrt{7}}{7}AL \end{aligned}\right|$; $AL + \dfrac{\sqrt{7}}{7}AL = AB$;

$$AL = \frac{AB}{1+\frac{\sqrt{7}}{7}} = AB\frac{7}{7+\sqrt{7}} = AB\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+1} =$$
$$= \frac{\sqrt{7}\left(\sqrt{7}-1\right)}{6}\cdot AB.$$

Таким образом, $AL = \frac{\sqrt{7}\left(\sqrt{7}-1\right)}{6}\cdot AB = \frac{7-\sqrt{7}}{6}AB.$

Найдем $LB = AB - AL$;

$$LB = AB - \frac{\sqrt{7}\left(\sqrt{7}-1\right)}{6}AB = \left(1-\frac{7-\sqrt{7}}{6}\right)AB =$$
$$= \frac{\sqrt{7}-1}{6}AB;$$

Получили $LB = \frac{\sqrt{7}-1}{6}AB.$

2. Найдем $PL = PB - LB$.

$$\left.\begin{array}{l} LB = \frac{\sqrt{7}-1}{6}AB \\ PB = \frac{2}{3}AB \end{array}\right|$$

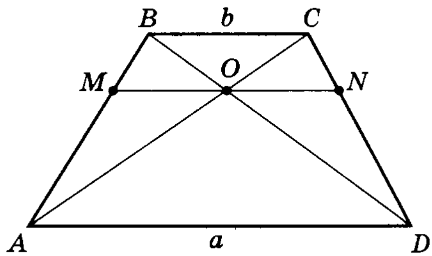
$$PL = \frac{2}{3}AB - \frac{\sqrt{7}-1}{6}AB = \frac{5-\sqrt{7}}{6}AB;$$
$$AP = \frac{1}{3}AB = \frac{2}{6}AB.$$

Значит $\boxed{AP : PL : LB = 2 : \left(5-\sqrt{7}\right) : \left(\sqrt{7}-1\right)}$.

2. В трапеции диагонали пересекаются в точке, через которую проведен отрезок, соединяющий боковые стороны параллельно основанию. Отношение площадей треугольников с вершиной в точке пересечения и основаниями, равными основаниям трапеции, равно $9:1$. Найдите отношения площадей трапеций, на которые делит исходную трапецию данный отрезок.

Дано:
$ABCD$ — трапеция
$BC \parallel AD$
$MN \parallel AD$
$AC \cap BD = O$
O — точка пересечения диагоналей
$S_{\triangle AOD} : S_{\triangle BOC} = 9 : 1$

$S_{AMND} : S_{MBCN}$



а) $\triangle BOC \sim \triangle AOD$, так как $\angle CBO = \angle ODA$ и $\angle BOC = \angle DOA$.

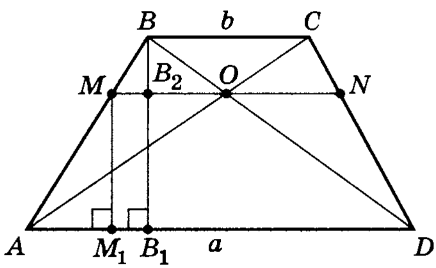
б) Значит $\dfrac{AD}{BC} = \dfrac{AO}{OC} = \dfrac{OD}{OB}$.

в) Известно, что площади подобных фигур относятся как квадраты сходственных сторон, тогда

$$\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle BOC}} = \left(\frac{AD}{BC}\right)^2, \text{ значит } \left(\frac{AD}{BC}\right)^2 = \frac{9}{1}; \quad AD = 3BC.$$

Так как MN — среднее гармоническое оснований, т. е. $MN = \dfrac{2 \cdot AD \cdot BC}{AD + BC}$, то $MN = \dfrac{2 \cdot BC \cdot 3BC}{3BC + BC} = \dfrac{3}{2}BC$.

г) Пусть H — высота трапеции $AMND$ ($H = MM_1$), h — высота трапеции $MBCN$ ($h = BB_2$).



Очевидно, что $\dfrac{H}{h} = \dfrac{AD}{BC} = \dfrac{3}{1}; \quad H = 3h$.

д) $S_{AMND} = \dfrac{AD + MN}{2} \cdot H = \dfrac{3BC + \frac{3}{2}BC}{2} \cdot 3h = \dfrac{27}{4} BC \cdot h;$

$S_{MBCN} = \dfrac{MN + BC}{2} \cdot h = \dfrac{\frac{3}{2}BC + BC}{2} \cdot h = \dfrac{5}{4} BC \cdot h.$

е) $\dfrac{S_{AMND}}{S_{MBCN}} = \dfrac{\frac{27}{4}BC \cdot h}{\frac{5}{4}BC \cdot h} = \dfrac{27}{5},$

т. е. $\boxed{S_{AMND} : S_{MBCN} = 27 : 5}$.

3. Два параллельных основанию трапеции отрезка, соединяющие боковые стороны, равны 1,75 и 5. Один из них проходит через точку пересечения диагоналей, а другой делит трапецию на две трапеции, равные по площади. Выясните отношение отрезков боковой стороны, на которую делят ее два данных отрезка.

Дано:

$ABCD$ — трапеция

$BC \parallel AD$

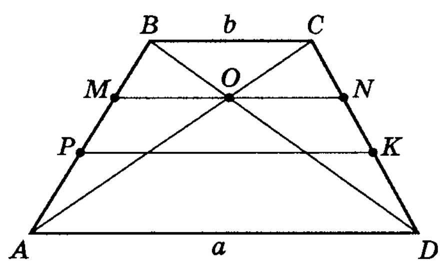
$O = AC \cap DB$, $O \in MN$

$MN \parallel PK \parallel AD$

$MN = 1{,}75$

$PK = 5$

$S_{APKD} = S_{PBCK}$



$AP : PM : MB$

а) Пусть $AD = a$, $BC = b$.

Тогда $MN = \dfrac{2ab}{a+b}$; $PK = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$. Значит

$$\begin{cases} \dfrac{2ab}{a+b} = 1{,}75 \\ \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} = 5 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2ab = \dfrac{7}{4}(a+b) \; \boxed{1} \\ a^2 + b^2 = 50 \quad \boxed{2} \end{cases} \qquad \boxed{1} + \boxed{2}$$

$$a^2 + b^2 + 2ab = 50 + \frac{7}{4}(a+b);$$

$$(a+b)^2 - \frac{7}{4}(a+b) - 50 = 0.$$

Положим $a + b = t$ $(t > 0)$.

$$4t^2 - 7t - 200 = 0; \quad \left[\begin{array}{l} t = 8 \\ t = -\dfrac{25}{4} \notin (0;\infty) \end{array}\right. .$$

Тогда $\begin{cases} a + b = 8 \\ ab = 7 \end{cases}$ (из первого уравнения системы).

Решая систему, получим $\begin{array}{r|l} a = 7 & AD = 7 \\ b = 1 & BC = 1 \end{array}$.

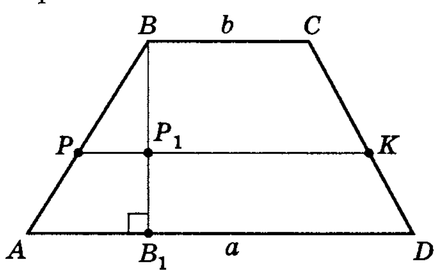
б) Рассмотрим $\triangle MBO$, $\triangle ABD$.

Можно доказать, что $\triangle MBO \sim \triangle ABD$.

Тогда $\dfrac{BM}{OM} = \dfrac{AB}{AD}$ или $\dfrac{BM}{AB} = \dfrac{OM}{AD}$,

т. е. $\dfrac{BM}{AB} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{4}}{7}$; $\dfrac{BM}{AB} = \dfrac{1}{8}$; $BM = \dfrac{1}{8}AB$.

в) Пусть $BB_1 \perp AD$.



Рассмотрим $\triangle ABB_1$, $\triangle PBP_1$.

$$\frac{PB}{AP} = \frac{BP_1}{B_1P_1} \text{ или } \frac{PB}{AB} = \frac{BP_1}{BB_1}.$$

$$S_{APKD} = \frac{AD + PK}{2} \cdot B_1P_1 = \frac{7+5}{2} \cdot B_1P_1 = 6B_1P_1;$$

$$S_{PBCK} = \frac{PK + BC}{2} \cdot BP_1 = \frac{5+1}{2} \cdot BP_1 = 3BP_1.$$

Учитывая, что $S_{APKD} = S_{PBCK}$, получим:
$6B_1P_1 = 3BP_1$; $\quad BP_1 = 2B_1P_1$.

Значит $\dfrac{PB}{AP} = \dfrac{2}{1}$; $\quad PB = 2AP$; $\quad AB = 3AP$,

т. е. $AP = \dfrac{1}{3}AB$, $PB = \dfrac{2}{3}AB$.

Так как $\left.\begin{array}{l} BM = \dfrac{1}{8}AB = \dfrac{3}{24}AB \\ AP = \dfrac{1}{3}AB = \dfrac{8}{24}AB \end{array}\right|$,

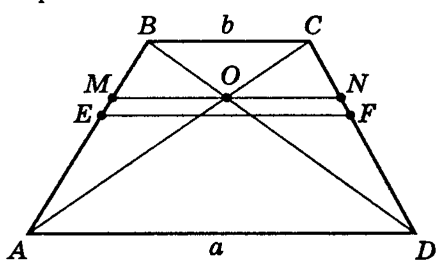
то $PM = AB - \dfrac{3}{24}AB - \dfrac{8}{24}AB = \dfrac{13}{24}AB$.

Тогда $\boxed{AP : PM : MB = 8 : 13 : 3}$.

4. В трапеции проведены два параллельных основанию отрезка. Один проходит через точку пересечения диагоналей и равен 1,6. Другой, равный 2, делит ее на две подобные трапеции. Найдите отношения отрезков боковой стороны, на которые ее делят два отрезка.

Дано:
$ABCD$ — трапеция
$MN \parallel EF \parallel AD$
$AEFD \sim EBCF$
$MN = 1{,}6$
$EF = 2$

$AE : EM : MB$



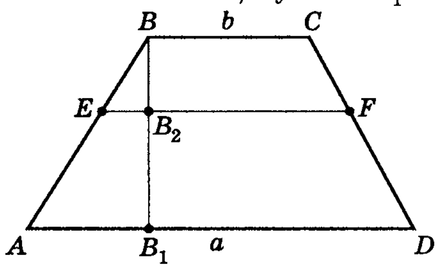
а) Пусть $AD = a$, $\quad BC = b$.

Тогда $MN = \dfrac{2ab}{a+b} = 1{,}6$; $\quad EF = \sqrt{ab} = 2$;

$$\begin{cases} \dfrac{2ab}{a+b} = 1{,}6 \\ \sqrt{ab} = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} ab = 0{,}8\,(a+b) \\ ab = 4 \end{cases}.$$

Решением системы будет $\begin{cases} a+b = 5 \\ ab = 4 \end{cases}$; $\quad \begin{matrix} a = 4 \\ b = 1 \end{matrix}$.

б) $AEFD \sim EBCF$, пусть $BB_1 \perp AD$.



$$S_{AEFD} = \frac{AD + EF}{2} \cdot B_1B_2 = \frac{4+2}{2} B_1B_2 = 3B_1B_2;$$

$$S_{EBCF} = \frac{EF + BC}{2} \cdot B_2B = \frac{2+1}{2} B_2B = \frac{3}{2} B_2B;$$

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot (B_1B_2 + B_2B) =$$

$$= \frac{4+1}{2}(B_1B_2 + B_2B) = 2{,}5B_1B_2 + 2{,}5B_2B.$$

$$S_{AEFD} + S_{EBCF} = S_{ABCD}.$$

Значит $3B_1B_2 + 1{,}5B_2B = 2{,}5B_1B_2 + 2{,}5B_2B;$

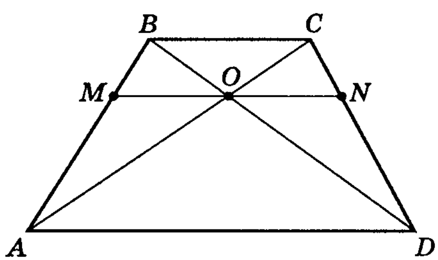
$0{,}5B_2B_1 = B_2B; \quad B_2B_1 = 2B_2B.$

По теореме Фалеса $\dfrac{EB}{AE} = \dfrac{BB_2}{B_1B_2} = \dfrac{BB_2}{2B_2B} = \dfrac{1}{2}.$

Значит $AE = 2EB; \quad AB = 3EB.$

Тогда $AE = \dfrac{2}{3}AB, \ \ EB = \dfrac{1}{3}AB.$

в)



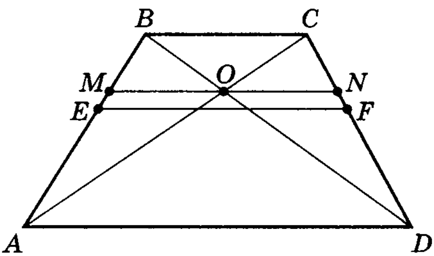
С другой стороны, известно, что $\dfrac{BM}{AB} = \dfrac{OM}{AD}$,

т. е. $\dfrac{BM}{AB} = \dfrac{0{,}8}{4} = \dfrac{1}{5}; \quad BM = \dfrac{1}{5}AB.$

г) $AE = \frac{2}{3}AB = \frac{10}{15}AB;$

$EB = \frac{1}{3}AB = \frac{5}{15}AB;$

$BM = \frac{1}{5}AB = \frac{3}{15}AB;$



$$EM = AB - AE - BM = AB - \frac{10}{15}AB - \frac{3}{15}AB = \frac{2}{15}AB.$$

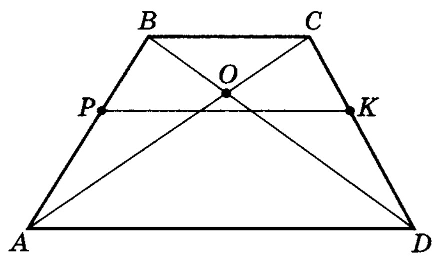
Тогда $\boxed{AE : EM : MB = 10 : 2 : 3}$.

5. В трапеции точка пересечения диагоналей является вершиной двух треугольников, основания которых есть основания трапеций, площади которых относятся как $81 : 16$. Найдите отношение площадей подобных трапеций, образованных отрезком, параллельным основанию.

Дано:

$ABCD$ — трапеция
$BC \parallel AD$
$PK \parallel AD$
$APKD \sim PBCK$
$\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle COB}} = \frac{81}{16}$

$\frac{S_{APKD}}{S_{PBCK}}$



а) $\triangle AOD \sim \triangle COB$, тогда $\left(\frac{AD}{BC}\right)^2 = \frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle COB}} = \frac{81}{16}$,

значит $\frac{AD}{BC} = \frac{9}{4}$.

б) Пусть $AD = 9a$, тогда $BC = 4a$,

значит, так как $APKD \sim PBCK$,

то $PK = \sqrt{AD \cdot BC}$, $PK = \sqrt{9a \cdot 4a} = 6a$.

в) Пусть $H_{APKD} = t, \quad H_{PBCK} = z.$

Так как $S_{ABCD} = S_{APKD} + S_{PBCK}$, то

$$\frac{AD+BC}{2}(t+z) = \frac{AD+PK}{2}\cdot t + \frac{PK+BC}{2}\cdot z,$$

значит $\dfrac{9a+4a}{2}(t+z) = \dfrac{9a+6a}{2}\cdot t + \dfrac{6a+4a}{2}\cdot z;$

$6{,}5t + 6{,}5z = 7{,}5t + 5z; \quad t = 1{,}5z,$

тогда $\dfrac{S_{APKD}}{S_{PBCK}} = \dfrac{\frac{9a+6a}{2}\cdot t}{\frac{6a+4a}{2}\cdot z} = \dfrac{15a\cdot 1{,}5z}{10a\cdot z} = \dfrac{3\cdot 1{,}5}{2} = \dfrac{9}{4},$

т. е. $\dfrac{S_{APKD}}{S_{PBCK}} = \boxed{\dfrac{9}{4}}.$

Можно проще.

Так как $APKD \sim PBCK$ и AD (из $APKD$) сходна с PK (из $PBCK$), а $PK = 6a$,

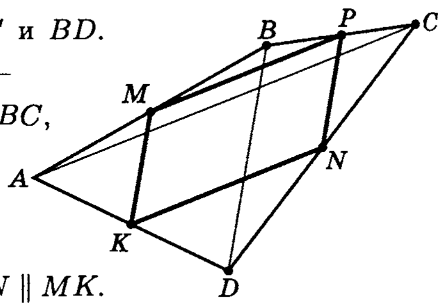
то $\dfrac{S_{APKD}}{S_{PBCK}} = \left(\dfrac{AD}{PK}\right)^2$, т. е. $\dfrac{S_{APKD}}{S_{PBCK}} = \left(\dfrac{9a}{6a}\right)^2 = \dfrac{9}{4}.$

Задача-исследование 2

Дан произвольный четырехугольник $ABCD$. Точки M, P, N и K — середины соответствующих сторон AB, BC, DC и AD. Определите и докажите:

1. Вид четырехугольника $MPNK$.
2. Вид четырехугольника $MPNK$, если $AC = BD$.
3. Вид четырехугольника $MPNK$, если $AC \perp BD$.
4. Вид четырехугольника $ABCD$, если точки пересечения диагоналей четырехугольников $ABCD$ и $MPNK$ совпадают.
5. Вид четырехугольника $ABCD$, если точки пересечения диагоналей четырехугольников $ABCD$ и $MPNK$ совпадают, и $MN = PK$.
6. Вид четырехугольника $ABCD$, если точки пересечения диагоналей четырехугольников $ABCD$ и $MPNK$ совпадают, и $MN \perp PK$.
7. Вид четырехугольника $ABCD$, если $MN = PK$ и $MN \perp PK$.
8. Вид четырехугольника $MPNK$, если $AC = BD$ и $AC \perp BD$.

Краткое решение задачи-исследования 2



1. Проведем диагонали AC и BD. Так как точки M и P — середины сторон AB и BC, то $MP \parallel AC$. Аналогично $NK \parallel AC$, $PN \parallel BD$ и $MK \parallel BD$. Значит $MP \parallel NK$ и $PN \parallel MK$.

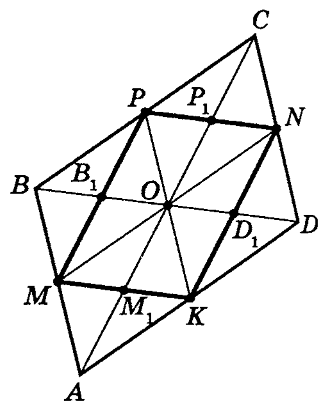
Следовательно, по определению $\boxed{MPNK \text{ — параллелограмм}}$.

2. Так как по условию $AC = BD$, то используем тот факт, что средняя линия треугольника равна половине стороны, которой параллельна.

Значит, $MP = \frac{1}{2}AC$ и $MK = \frac{1}{2}BD$. Тогда $MP = MK$.

Отсюда следует, что по определению $\boxed{MPNK \text{ — ромб}}$.

3. Так как по условию $AC \perp BD$, то учитывая, что по доказанному $MP \parallel AC$ и $MK \parallel BD$, по определению $\boxed{MPNK \text{ — прямоугольник}}$.



4. Так как по условию точки пересечения диагоналей четырехугольников $ABCD$ и $MPNK$ совпадают, то чертеж, моделирующий условие, будет другим.

Ранее было доказано, что $MPNK$ — параллелограмм.

Так как контур параллелограмма центрально-симметричен относительно точки пересечения диагоналей (докажите), то $OB_1 = OD_1$, где точки B_1 и D_1 — точки пересечения параллелограмма диагональю BD.

С другой стороны, $PN = B_1D_1$, и $PN = \frac{1}{2}BD$,

значит $PN = B_1D_1 = \frac{1}{2}BD$.

Аналогично доказывается, что $PM = P_1M_1 = \frac{1}{2}AC$.

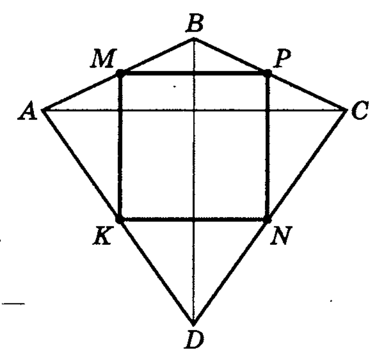
Следовательно, точка O — середина диагоналей $ABCD$, а значит, по признаку $\boxed{ABCD \text{ — параллелограмм}}$.

5. Так как по доказанному $ABCD$ — параллелограмм и по условию $MN = PK$, где $MPNK$ по ранее доказанному есть параллелограмм, то по признаку — $MPNK$ — прямоугольник.

   Значит, $AC \perp BD$, тогда $\boxed{ABCD \text{ — ромб}}$.

6. Так как по ранее доказанному $ABCD$ и $MPNK$ — параллелограммы, то учитывая условие $MN \perp PK$, отсюда следует, что $MPNK$ — ромб. Значит, $AC = BD$, следовательно, $\boxed{ABCD \text{ — прямоугольник}}$.

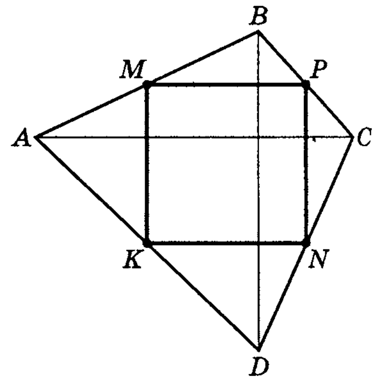
7. Так как по условию в общем виде точки пересечения четырехугольников $ABCD$ и $MPNK$ не совпадают, $ABCD$ не является параллелограммом.



   С другой стороны, $MN = PK$ и $MN \perp PK$, значит $MPNK$ — квадрат.

   Следовательно, $AC = BD$ и $AC \perp BD$, а значит, $\boxed{ABCD \text{ — дельтоид}}$.

8. Так как в любом случае $MPNK$ — параллелограмм, и по условию $AC = BD$ и $AC \perp BD$, то $MP = MK$ и $MP \perp MK$, значит $\boxed{MPNK \text{ — квадрат}}$.



Примечание. Дельтоидом называется четырехугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны. Отметим, что дельтоиды, симметричные относительно одной из диагоналей, используются для проектирования дельтапланов.

Решение комбинированных задач на закрепление и развитие полученных навыков

Тренировочная работа 4

Вариант 1

1. В треугольнике $\triangle ABC$ из вершины прямого угла B проведена к стороне AC высота $BD = 4$ и медиана $BM = 5$. Найдите площадь треугольника и косинус наибольшего угла между медианой и гипотенузой.

2. В треугольнике со сторонами, равными 30, 28 и 26, найдите произведение радиусов вписанной и описанной окружностей и наименьшую медиану.

Вариант 2

1. В трапеции $ABCD$ стороны оснований равны $AD = 27$ и $BC = 6$. Боковые стороны равны $AB = 13$ и $CD = 20$. Найдите площадь трапеции $ABCD$ и сумму тангенсов половинных углов при большем основании.

2. В выпуклом четырехугольнике расстояния между противоположными вершинами углов равны друг другу. Расстояния между серединами противоположных сторон равны, соответственно, 6 и 4. Найдите площадь такого четырехугольника.

Вариант 3

1. Высоты треугольника $\triangle ABC$ равны $H_{BC}=20$, $H_{AC}=12$ и $H_{AB}=15$ соответственно. Найдите площадь треугольника $\triangle ABC$.

2. Диагонали трапеции делят ее на четыре треугольника. Площади треугольников, одна из сторон которых является основанием, соответственно, равны n^2 и m^2, причем сумма чисел m и n равна 10. Найдите площадь такой трапеции.

Вариант 4

1. Стороны оснований равнобедренной трапеции, в которую вписали окружность, равны, соответственно, $3\sqrt[4]{15}$ и $5\sqrt[4]{15}$. Найдите площадь такой трапеции.

2. Стороны треугольника равны 35 и 14, а длина биссектрисы угла между ними равна 12. Найдите площадь такого треугольника.

Самостоятельная работа 4

Вариант 1

1. В прямоугольном треугольнике к гипотенузе проведена медиана $BM = 25$ и опущен перпендикуляр $BD = 20$. Найдите площадь такого треугольника и косинус наибольшего угла между данной медианой и гипотенузой.

2. Стороны треугольника $\triangle ABC$ равны: $AB = 7$, $BC = 6$ и $AC = 8$. Найдите произведение радиусов вписанной и описанной окружностей и длину медианы, проведенной к стороне AC.

Вариант 2

1. В трапеции параллельные стороны равны, соответственно, 33 и 5, а остальные — 17 и 25. Найдите площадь трапеции и сумму тангенсов половинных углов, если их полные углы являются острыми.

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали равны 13. Расстояние между серединами двух противоположных сторон равно 5. Найдите площадь треугольника $\triangle ABC$.

Вариант 3

1. Найдите площадь треугольника, высоты которого равны 60, 21 и 28.

2. Известна средняя линия $MN = 5$ трапеции, в которую вписана окружность. Отношение площадей, на которые делит средняя линия данную трапецию, равно $\frac{7}{13}$. Найдите высоту исходной трапеции.

Вариант 4

1. В равнобедренную трапецию со сторонами оснований, равными 18 и 8, вписали окружность. Найдите площадь трапеции.

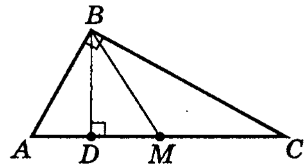
2. Площадь треугольника равна 1056. Найдите биссектрису угла треугольника, если стороны, образующие этот угол, соответственно равны 22 и 10.

Тренировочная работа 4. Моделирование условий

Вариант 1

1. Дано:

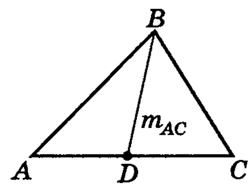
$\triangle ABC$
$AB \perp BC$
$BD \perp AC$
$AM = CM$
$BD = 4$
$BM = 5$



а) $S_{\triangle ABC}$
б) $\cos(\angle BMC)$

2. Дано:

$\triangle ABC$
$AC = 30$
$AB = 28$
$BC = 26$

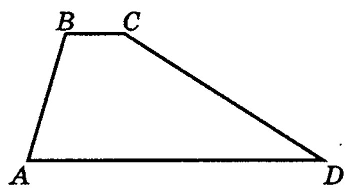


а) $R_{о} \cdot r_{в}$
б) m_{AC}

Вариант 2

1. Дано:

$ABCD$ — трапеция
$BC \parallel AD$
$AB = 13$
$BC = 6$
$CD = 20$
$AD = 27$

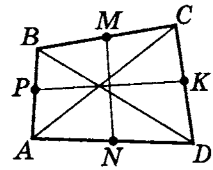


а) S_{ABCD}
б) $\operatorname{tg}\dfrac{\angle A}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{\angle D}{2}$

2. Дано:

$ABCD$ — четырехугольник
$AC = BD$
P, M, K, N — середины сторон
$PK = 6$
$MN = 4$

S_{ABCD}

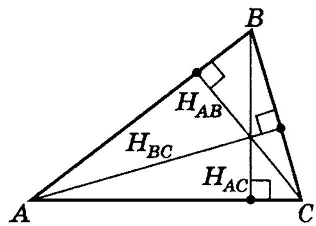


Вариант 3

1. Дано:

$\triangle ABC$
$H_{BC} = 20$
$H_{AC} = 12$
$H_{AB} = 15$

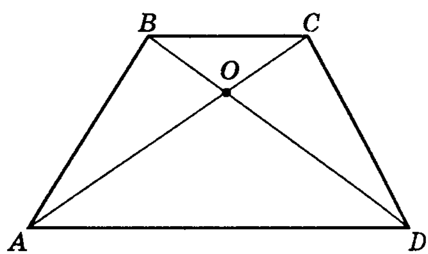
$S_{\triangle ABC}$



2. Дано:

$ABCD$ — трапеция
$S_{\triangle OBC} = n^2$
$S_{\triangle AOD} = m^2$
$m + n = 10$

S_{ABCD}

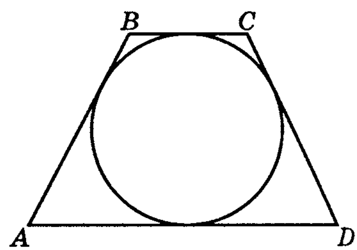


Вариант 4

1. Дано:

$ABCD$ — трапеция
Окружность вписана в трапецию
$AB = CD$
$BC = 3\sqrt[4]{15}$
$AD = 5\sqrt[4]{15}$

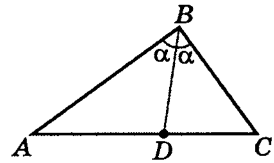
S_{ABCD}



2. Дано:

$\triangle ABC$
$\angle ABD = \angle CBD$
$AB = 35$
$BC = 14$
$BD = 12$

$S_{\triangle ABC}$



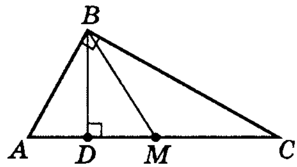
Самостоятельная работа 4. Моделирование условий

Вариант 1

1. Дано:

$\triangle ABC$
$AB \perp BC$
$BD \perp AC$
$AM = MC$
$BD = 15$
$BM = 25$

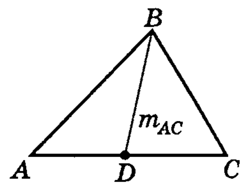
а) $S_{\triangle ABC}$
б) $\cos(\angle BMC)$



2. Дано:

$\triangle ABC$
$AC = 8$
$AB = 7$
$BC = 6$

а) $R_{о} \cdot r_{в}$
б) m_{AC}

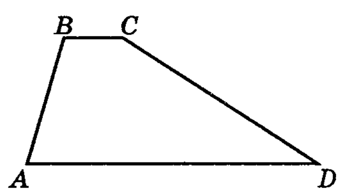


Вариант 2

1. Дано:

$ABCD$ — трапеция
$BC \parallel AD$
$AB = 17$
$BC = 5$
$CD = 25$
$AD = 33$

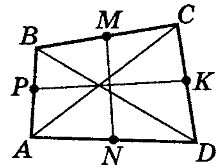
а) S_{ABCD}
б) $\operatorname{tg}\dfrac{\angle A}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{\angle D}{2}$



2. Дано:

$ABCD$ — четырехугольник
$AC = BD = 13$
P, K — середины сторон
$PK = 5$

$S_{\triangle ABC}$

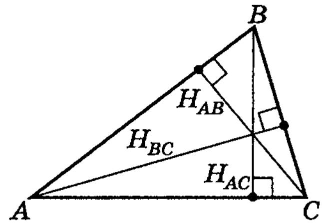


Вариант 3

1. Дано:

$\triangle ABC$
$H_{BC} = 60$
$H_{AC} = 21$
$H_{AB} = 28$

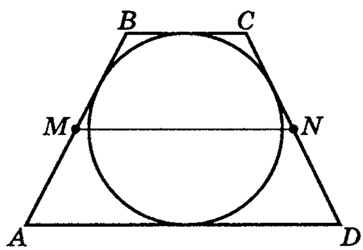
$S_{\triangle ABC}$



2. Дано:

$ABCD$ — трапеция
Окружность вписана в трапецию
MN — средняя линия
$MN = 5$
$\frac{S_{MBCN}}{S_{AMND}} = \frac{7}{13}$

H_{ABCD}

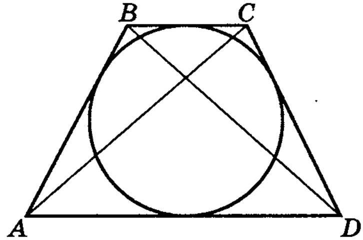


Вариант 4

1. Дано:

$ABCD$ — трапеция
Окружность вписана в трапецию
$BC = 8$
$AB = CD$
$AD = 18$

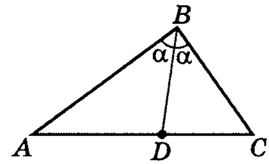
S_{ABCD}



2. Дано:

$\triangle ABC$
$\angle ABD = \angle CBD$
$AB = 22$
$BC = 10$
$S_{\triangle ABC} = 1056$

BD

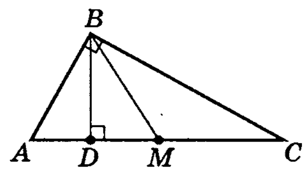


Решение тренировочной работы 4

Вариант 1

1. Дано:

$\triangle ABC$
$AB \perp BC$
$BD \perp AC$
$AM = CM$
$BD = 4$
$BM = 5$



а) $S_{\triangle ABC}$
б) $\cos(\angle BMC)$

а) Найдем $S_{\triangle ABC}$. Для этого рассмотрим $\triangle BDM$.

1. $DM = \sqrt{BM^2 - BD^2}$; $\quad DM = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.
2. Так как $\triangle ABC$ — прямоугольный, то точка M — центр описанной окружности (известно, что медиана, проведенная из вершины прямого угла к гипотенузе, равна радиусу описанной окружности, т. е. половине гипотенузы).

   Значит $BM = AM = MC$.

   Тогда $AC = 2BM$, $\quad AC = 10$.
3. $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BD$; $\quad S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = \boxed{20}$.

б) Теперь найдем $\cos(\angle BMC)$. Рассмотрим $\triangle BDC$.

1. $DC = DM + MC$; $\quad DC = 3 + 5 = 8$.
2. $BC = \sqrt{BD^2 + DC^2}$; $\quad BC = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.
3. В $\triangle BMC$ $\boxed{\cos(\angle BMC) = \dfrac{BM^2 + MC^2 - BC^2}{2 \cdot BM \cdot MC}}$;

$$\cos(\angle BMC) = \frac{5^2 + 5^2 - 80}{2 \cdot 5 \cdot 5} = -\frac{30}{50} = \boxed{-0{,}6}.$$

Примечание. Можно проще.

Для этого рассмотрим $\triangle BDM$.

$\cos(\angle BMD) = \dfrac{DM}{BM}$; $\cos(\angle BMD) = \dfrac{3}{5}$.

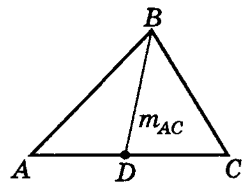
Так как $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$, то

$\cos(\angle BMC) = \cos(180^\circ - \angle BMD) = -\cos(\angle BMD) =$

$= -\dfrac{3}{5} = -0{,}6.$

2. Дано:

$\triangle ABC$
$AC = 30$
$AB = 28$
$BC = 26$



а) $R_о \cdot r_в$
б) m_{AC}

а) Найдем $R_о \cdot r_в$.

1. Вначале найдем $S_{\triangle ABC}$, используя формулу Герона

$S_\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$

$p = \dfrac{30+28+26}{2} = 42$, значит

$S_{\triangle ABC} = \sqrt{42(42-30)(42-28)(42-26)} =$
$= \sqrt{42 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16} = \sqrt{6 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 4^2} =$
$= 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 336.$

2. $\boxed{R_о = \dfrac{abc}{4S}}$; $R_о = \dfrac{30 \cdot 28 \cdot 26}{4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} = 16\dfrac{1}{4}.$

3. $\boxed{r_в = \dfrac{S}{p}}$; $r_в = \dfrac{336}{42} = 8.$

4. $R_о \cdot r_в = \dfrac{65}{4} \cdot 8 = \boxed{130}.$

Можно было решить и проще.

Так как $\left.\begin{array}{l} R_{о} = \dfrac{abc}{4S} \\ r_{в} = \dfrac{S}{p} \end{array}\right|$, то $\boxed{R_{о} \cdot r_{в} = \dfrac{abc}{4p}}$.

В данном случае $R_{о} \cdot r_{в} = \dfrac{30 \cdot 28 \cdot 26}{4 \cdot 42} = \boxed{130}$.

б) Найдем m_{AC}.

Так как AC — наибольшая сторона, то m_{AC} — наименьшая медиана.

$$m_{AC} = \frac{\sqrt{2AB^2 + 2BC^2 - AC^2}}{2}, \text{ значит}$$

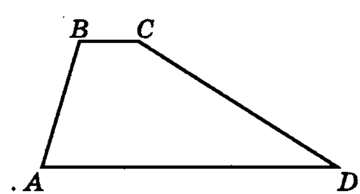
$$m_{AC} = \frac{\sqrt{2 \cdot 28^2 + 2 \cdot 26^2 - 30^2}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2 \cdot 784 + 2 \cdot 676 - 900}}{2} = \boxed{\sqrt{505}}.$$

Вариант 2

1. Дано:

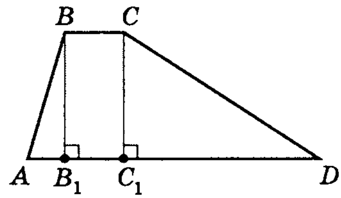
$ABCD$ — трапеция
$BC \parallel AD$
$AB = 13$
$BC = 6$
$CD = 20$
$AD = 27$



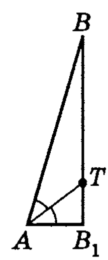
а) S_{ABCD}

б) $\operatorname{tg}\dfrac{\angle A}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{\angle D}{2}$

а) Найдем S_{ABCD}.



1. Проведем дополнительные построения: $BB_1 \perp AD$; $CC_1 \perp AD$;
2. Пусть $AB_1 = x$.
   $C_1D = AD - AB_1 - B_1C_1$, но $B_1C_1 = BC = 6$, тогда $C_1D = 27 - x - 6 = 21 - x$.
3. Рассмотрим $\triangle ABB_1$:
   $BB_1^2 = AB^2 - AB_1^2$; $\quad \underline{BB_1^2} = 13^2 - x^2$.
4. Аналогично в $\triangle DCC_1$:
   $CC_1^2 = CD^2 - C_1D^2$; $\quad \underline{CC_1^2} = 20^2 - (21 - x)^2$.
5. Так как $BB_1^2 = CC_1^2$, то $13^2 - x^2 = 20^2 - (21 - x)^2$;
   $13^2 - x^2 = 20^2 - 21^2 + 42x - x^2$; $\quad 42x = 13^2 - 20^2 + 21^2$;
   $x = 5$, т.е. $AB_1 = 5$.
6. $BB_1 = \sqrt{AB^2 - AB_1^2}$; $\quad BB_1 = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.
7. $S_{ABCD} = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BB_1$;
   $S_{ABCD} = \dfrac{27 + 6}{2} \cdot 12 = \boxed{198}$.



б) Теперь найдем $\operatorname{tg} \dfrac{\angle A}{2} + \operatorname{tg} \dfrac{\angle D}{2}$.

1. Рассмотрим $\triangle ABB_1$.
   Пусть $\angle BAT = \angle B_1AT = \dfrac{1}{2}(\angle A)$.

   По свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника $\dfrac{BT}{TB_1} = \dfrac{AB}{AB_1}$, т.е. $\dfrac{BT}{TB_1} = \dfrac{13}{5}$,

   но $\begin{cases} BT + TB_1 = 12 \\ BT = \dfrac{13}{5} \cdot TB_1 \end{cases}$, значит $TB_1 = \dfrac{10}{3}$.

2. $\operatorname{tg}\dfrac{\angle A}{2}=\dfrac{TB_1}{AB_1}$; $\operatorname{tg}\dfrac{\angle A}{2}=\dfrac{\frac{10}{3}}{5}=\dfrac{2}{3}$.

Примечание. Можно вычислить и иначе, если знать, что $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

Тогда $\operatorname{tg}(\angle A)=\dfrac{12}{5}$; $\operatorname{tg}(\angle A)=\dfrac{2\operatorname{tg}\left(\frac{\angle A}{2}\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\angle A}{2}\right)}$.

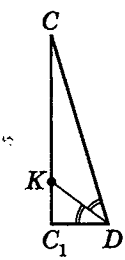
Теперь пусть $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\angle A}{2}\right)=t$, тогда

$\dfrac{12}{5}=\dfrac{2t}{1-t^2}$; $12t^2+10t-12=0$; $6t^2+5t-6=0$;

$t_{1,2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{25+144}}{12}=\dfrac{-5\pm 13}{12}$; $\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{2}{3} \\ t=-\dfrac{3}{2}\notin(0;\infty) \end{array}\right.$,

т. е. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\angle A}{2}\right)=\dfrac{2}{3}$.

3. Рассмотрим $\triangle DCC_1$.



Пусть $\angle CDK=\angle C_1DK$,

тогда $\dfrac{CK}{KC_1}=\dfrac{DC}{DC_1}$,

т. е. $\dfrac{CK}{KC_1}=\dfrac{20}{16}$,

где $DC_1=AD-AB_1-B_1C_1$, т. е. $DC_1=16$.

Получим $\begin{cases} \dfrac{CK}{KC_1}=\dfrac{5}{4} \\ CK+KC_1=12 \end{cases}$; $KC_1=\dfrac{48}{9}$.

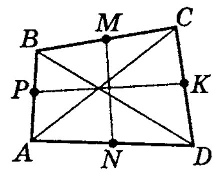
4. $\operatorname{tg}\dfrac{\angle D}{2}=\dfrac{KC_1}{DC_1}$; $\operatorname{tg}\dfrac{\angle D}{2}=\dfrac{48}{9\cdot 16}=\dfrac{1}{3}$.

5. $\operatorname{tg}\dfrac{\angle A}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{\angle D}{2}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}=\boxed{1}$.

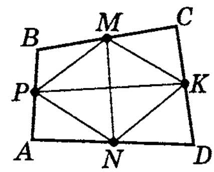
2. Дано:

$ABCD$ — четырехугольник
$AC = BD$
P, M, K, N — середины сторон
$PK = 6$
$MN = 4$

S_{ABCD}



а) Так как M, N, P, K — середины сторон, то
PM — средняя $\triangle ABC$;
MK — средняя $\triangle BCD$;
KN — средняя $\triangle CDA$;
PN — средняя $\triangle DAB$.



б) По условию $BD = AC$, но

$$\left.\begin{array}{l} PM=\frac{1}{2}AC \\ PN=\frac{1}{2}BD \\ KN=\frac{1}{2}AC \\ PN=\frac{1}{2}BD \end{array}\right|$$, значит $PMKN$ — ромб, т. е. $PK \perp MN$.

в) Так как $S_{PMKN} = \frac{1}{2} \cdot PK \cdot MN$, то $S_{PMKN} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$.

г) Учтем, что $\left.\begin{array}{l} PM \parallel AC \\ MK \parallel BD \end{array}\right|$,

значит $\left(\widehat{AC; BD}\right) = \left(\widehat{PM; MK}\right)$.

Так как $PMKN$ параллелограмм,

то $S_{PMKN} = PM \cdot MK \cdot \sin\left(\widehat{PM; MK}\right)$,

а $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\left(\widehat{AC; BD}\right)$.

д) Далее, так как $AC = 2PM$, $BD = 2MK$, то

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 2PM \cdot 2MK \sin\left(\widehat{AC;BD}\right) =$$

$$= 2 \cdot PM \cdot MK \cdot \sin\left(\widehat{AC;BD}\right),$$

но $MK \cdot PM \cdot \sin\left(\widehat{AC;BD}\right) = MK \cdot PM \cdot \sin\left(\widehat{MK;PM}\right) =$

$= S_{PMKN} = 12,$

значит $S_{ABCD} = 2S_{PMKN} = \boxed{24}$.

Отметим, что возможны и другие способы доказательства того, что $S_{ABCD} = 2S_{PMKN}$.

Вариант 3

1. Дано:

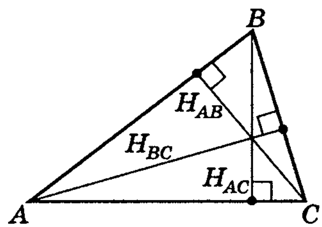
$\triangle ABC$

$H_{BC} = 20$

$H_{AC} = 12$

$H_{AB} = 15$

$S_{\triangle ABC}$



К сожалению, мало известна формула площади треугольника через его высоты, поэтому мы выведем ее сами в процессе решения задачи.

а)
$$\begin{array}{l|l}
S_\triangle = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot H_{BC} & BC = \frac{2S_\triangle}{20} = \frac{1}{10}S_\triangle \\
S_\triangle = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot H_{AC} & AC = \frac{2S_\triangle}{12} = \frac{1}{6}S_\triangle \\
S_\triangle = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot H_{AB} & AB = \frac{2S_\triangle}{15}
\end{array}.$$

б) $S_\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;

$$p = \frac{1}{2}(BC + AC + AB) = \frac{1}{2}S_\triangle\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{6} + \frac{2}{15}\right) = \frac{1}{5}S_\triangle;$$

$$p - AB = \frac{1}{5}S_\triangle - \frac{2S_\triangle}{15} = \frac{1}{15}S_\triangle;$$

$$p - AC = \frac{1}{5}S_\triangle - \frac{1}{6}S_\triangle = \frac{1}{30}S_\triangle;$$

$$p - BC = \frac{1}{5}S_\triangle - \frac{1}{10}S_\triangle = \frac{1}{10}S_\triangle,$$

значит $S_\triangle = \sqrt{\frac{1}{5} \cdot S_\triangle \cdot \frac{1}{15} \cdot S_\triangle \cdot \frac{1}{30} \cdot S_\triangle \cdot \frac{1}{10} \cdot S_\triangle}$,

тогда $S_\triangle = \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_\triangle^2$, т. е. $S_\triangle = \boxed{150}$.

Задача решается проще, если знать формулу площади треугольника через его высоты:

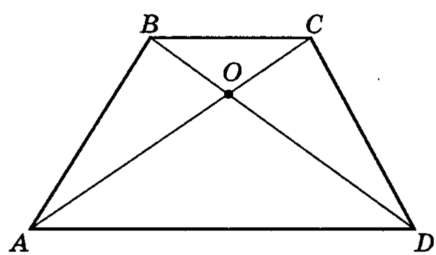
$$S_\triangle = \frac{4}{\sqrt{\left(\frac{1}{H_{AB}} + \frac{1}{H_{AC}} + \frac{1}{H_{BC}}\right)\left(\frac{1}{H_{AB}} + \frac{1}{H_{AC}} - \frac{1}{H_{BC}}\right)}} \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{H_{AB}} + \frac{1}{H_{BC}} - \frac{1}{H_{AC}}\right)\left(\frac{1}{H_{AC}} + \frac{1}{H_{BC}} - \frac{1}{H_{AB}}\right)}}.$$

2. Дано:

$ABCD$ — трапеция
$S_{\triangle BOC} = n^2$
$S_{\triangle DOA} = m^2$
$m + n = 10$

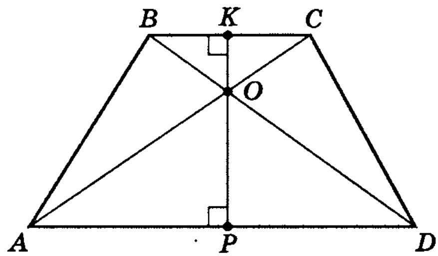
S_{ABCD}



а) Так как $\triangle BOC \sim \triangle DOA$ и площади подобных фигур относятся друг к другу как квадраты сходственных сторон, то $\frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle DOA}} = \frac{n^2}{m^2} = \left(\frac{BC}{AD}\right)^2$, тогда $\left.\begin{array}{l} BC = nt \\ AD = mt \end{array}\right|$,

где t — некий коэффициент пропорциональности.

Пусть $KP \perp BC$.



б) $S_{\triangle BOC} = n^2$; $S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot OK = \frac{1}{2} n \cdot t \cdot OK = n^2$;

$OK = \frac{2n}{t}$.

в) $S_{\triangle DOA} = m^2$; $S_{\triangle DOA} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot OP = \frac{1}{2} m \cdot t \cdot OP = m^2$;

$OP = \frac{2m}{t}$.

г) Для H_{ABCD} — высоты трапеции $ABCD$:

$H_{ABCD} = OK + OP = \frac{2n}{t} + \frac{2m}{t} = \frac{2(m+n)}{t} = \frac{20}{t}$

$(m + n = 10)$.

д) $S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot H_{ABCD}$;

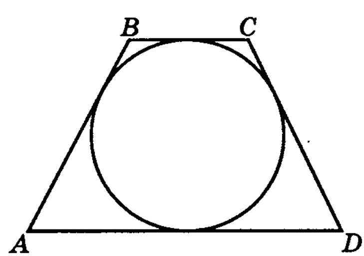
$S_{ABCD} = \frac{mt + nt}{2} \cdot \frac{20}{t} = \frac{t(m+n)}{2} \cdot \frac{20}{t} = 10 \cdot 10 = \boxed{100}$.

Вариант 4

1. Дано:

$ABCD$ — трапеция
Окружность вписана в трапецию
$AB = CD$
$BC = 3\sqrt[4]{15}$
$AD = 5\sqrt[4]{15}$

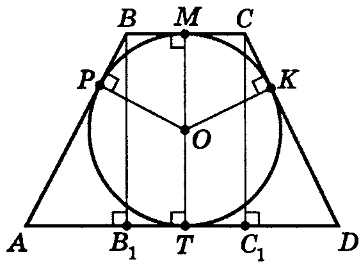
S_{ABCD}



а) $\left.\begin{array}{l} AD + BC = AB + CD \\ AB = CD \end{array}\right| \Rightarrow AD + BC = 2AB;$

$$AB = \frac{1}{2}\left(5\sqrt[4]{15} + 3\sqrt[4]{15}\right); \quad AB = 4\sqrt[4]{15}.$$

б) Пусть $BB_1 \perp AD$, $CC_1 \perp AD$ $(BB_1 \parallel MT \parallel CC_1)$.



$$AB_1 = \frac{AD - BC}{2}; \quad AB_1 = \frac{5\sqrt[4]{15} - 3\sqrt[4]{15}}{2} = \sqrt[4]{15}.$$

$$BB_1 = \sqrt{AB^2 - AB_1^2};$$

$$BB_1 = \sqrt{\left(4\sqrt[4]{15}\right)^2 - \left(\sqrt[4]{15}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{16\sqrt{15} - \sqrt{15}} = \sqrt{15\sqrt{15}}.$$

в) $S_{ABCD} = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BB_1;$

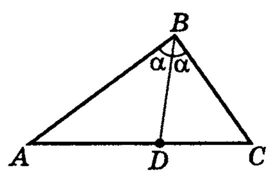
$$S_{ABCD} = \frac{5\sqrt[4]{15} + 3\sqrt[4]{15}}{2} \cdot \sqrt{15\sqrt{15}} =$$

$$= 4\sqrt[4]{15} \cdot \sqrt{15\sqrt{15}} = 4\sqrt[4]{15 \cdot 15^3} = 4 \cdot 15 = \boxed{60}.$$

2. Дано:

$\triangle ABC$
$\angle ABD = \angle CBD$
$AB = 35$
$BC = 14$
$BD = 12$

$S_{\triangle ABC}$



а) Пусть $\angle ABD = \alpha = \angle CBD$ $(\alpha \in (0°; 90°))$.

$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BD \cdot \sin\alpha;$

$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot 35 \cdot 12 \cdot \sin\alpha.$

б) $S_{\triangle DBC} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot BC \cdot \sin\alpha;$

$S_{\triangle DBC} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 14 \cdot \sin\alpha.$

в) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin 2\alpha;$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 35 \cdot 14 \cdot \sin 2\alpha.$

г) $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle DBC}$, тогда

$\frac{1}{2} \cdot 35 \cdot 14 \cdot \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \cdot 35 \cdot 12 \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 14 \cdot \sin\alpha$

$(\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha);$

$35 \cdot 14 \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2}(35 \cdot 12 + 12 \cdot 14);$

$\cos\alpha = \frac{35 \cdot 12 + 12 \cdot 14}{2 \cdot 35 \cdot 14} = \frac{7 \cdot 4(5 \cdot 3 + 3 \cdot 2)}{4 \cdot 5 \cdot 7^2} = \frac{21}{5 \cdot 7} = \frac{3}{5};$

$\sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5};$

$\sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}.$

д) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 35 \cdot 14 \cdot \frac{24}{25} = \frac{49 \cdot 24}{5} = \frac{1176}{5} = \boxed{235{,}2}.$

Тренировочная работа 5

Вариант 1

1. В треугольнике $\triangle ABC$ две стороны равны 9, а третья сторона — 6. От общей вершины равных сторон отложили на одной из них отрезок AM, равный наименьшей стороне. Найдите:

   а) длину отрезка, соединяющего точку M с противоположной вершиной B;

   б) площадь треугольника $\triangle AMB$;

   в) медиану $\triangle ABC$, проведенную к стороне AB.

2. Из вершины прямого угла треугольника $\triangle ABC$ опустили перпендикуляр, разделивший гипотенузу на две отрезка, наименьший из которых равен 6, а наибольший катет равен $12\sqrt{5}$. Найдите:

   а) наименьший катет;

   б) биссектрису, проведенную к гипотенузе.

Вариант 2

1. Вершины треугольника заданы координатами $A\ (-3;2)$, $B\ (4;-1)$, $C\ (1;5)$. Найдите:

   а) тангенс угла при вершине B;

   б) площадь треугольника;

   в) медиану, проведенную к наименьшей стороне.

2. Из вершины прямого угла треугольника проведена высота, равная $4\sqrt{2}$, и биссектриса, равная $5\sqrt{2}$. Найдите:

   а) наименьший катет;

   б) наибольший катет;

   в) медиану, проведенную к наибольшему катету.

Вариант 3

1. Одна из сторон угла треугольника равна 21, а биссектриса прилежащего к этой стороне угла равна $8\sqrt{7}$, причем делит сторону, к которой проведена, на две части, бóльшая из которых равна 8. Найдите периметр этого треугольника.

2. В трапеции одна из диагоналей является биссектрисой угла при основании, равного 2α, причем боковая сторона трапеции, прилежащая к этому углу, равна a. Боковые стороны трапеции взаимно перпендикулярны. Найдите площадь такой трапеции.

Вариант 4

В равнобедренном треугольнике основание равно a, а угол при основании равен 2α. Из вершины основания проведена биссектриса, пересекающая боковую сторону в точке K. Далее проведена прямая MK, параллельная основанию, где M — точка боковой стороны.

а) Докажите, что прямая, проведенная через точку M и другую вершину основания, есть биссектриса.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, вершины которого есть вершина основания треугольника, точка K и вершина, противолежащая основанию треугольника.

в) Найдите площадь такого треугольника.

г) Найдите радиус окружности, вписанной в данный треугольник.

д) Через точку пересечения биссектрис углов при основании треугольника проведена прямая PT, параллельная основанию. Найдите PT, если точки P и T принадлежат боковым сторонам треугольника.

Самостоятельная работа 5

Вариант 1

1. Две равные стороны треугольника равны 16, а третья сторона 8. На одной из равных сторон отложили от общей вершины отрезок равный 4. Найдите:

   а) расстояние от конца отрезка, не являющегося вершиной треугольника, до противоположной вершины;

   б) площадь наибольшего (по площади) из образовавшихся треугольников;

   в) наименьшую медиану исходного треугольника.

2. В прямоугольном треугольнике высота, проведенная к гипотенузе, делит ее на две части, наибольшая из которых равна 28, а наименьший катет $7\sqrt{5}$. Найдите:

   а) наибольший катет;

   б) биссектрису, проведенную к гипотенузе.

Вариант 2

1. Известны координаты вершин треугольника: $A\ (2;-3)$, $B\ (-1;4)$, $C\ (5;1)$. Найдите:

   а) котангенс наименьшего угла;

   б) площадь треугольника;

   в) медиану, проведенную к наибольшей стороне.

2. Высота, опущенная из вершины прямого угла треугольника, равна $3\sqrt{2}$, биссектриса $5\sqrt{2}$. Найдите:

   а) наименьший катет;

   б) наибольший катет;

   в) медиану, проведенную к гипотенузе.

Вариант 3

1. Одна из сторон угла треугольника равна 21, а биссектриса этого угла делит сторону, к которой проведена, на две части, бо́льшая из которых равна 8. Известно, что сумма меньшей части стороны, к которой проведена биссектриса, и другой стороны, образующей данный угол, равна 31. Найдите биссектрису данного угла.

2. В трапеции один из углов при основании, равный 2α, в два раза больше другого угла при основании. Меньшая диагональ трапеции является биссектрисой угла при основании. Найдите площадь трапеции, если меньшее основание трапеции равно a.

Вариант 4

В равнобедренном треугольнике углы при основании равны 2α. Из вершины треугольника, принадлежащей основанию, проведена биссектриса, пересекающая боковую сторону в точке K. Через точку K проведена прямая MK, параллельная основанию, причем точка M принадлежит боковой стороне, и MK равно a.

а) Докажите, что прямая, проведенная через точку M и другую вершину треугольника, принадлежащую основанию, есть биссектриса. Вычислите ее длину.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, вершины которого есть вершина треугольника, принадлежащая основанию, точка K и вершина, противолежащая основанию треугольника.

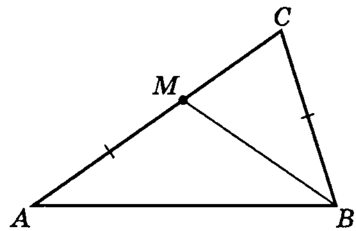
в) Найдите площадь такого треугольника.

г) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник из пункта б).

д) Через точку пересечения биссектрис углов при основании треугольника проведена прямая PT, параллельная основанию. Найдите PT, если точки P и T принадлежат боковым сторонам треугольника.

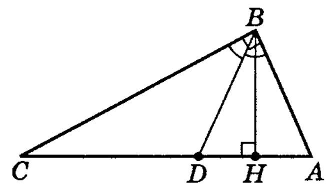
Тренировочная работа 5. Моделирование условий

Вариант 1



1. Дано:
$\triangle ABC$
$AB = AC = 9$
$BC = 6$
$AM = 6$

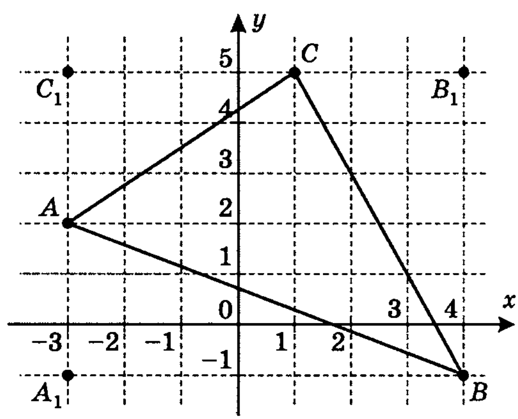
а) BM
б) $S_{\triangle AMB}$
в) m_{AB}



2. Дано:
$\triangle ABC$
$AB \perp BC$
$BH \perp AC$
$AH = 6$
$BC = 12\sqrt{5}$

а) AB
б) l_{AC}

Вариант 2

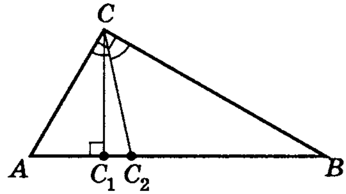


1. Дано:
$A(-3;2)$
$B(4;-1)$
$C(1;5)$

а) $\operatorname{tg}(\angle ABC)$
б) $S_{\triangle ABC}$
в) m_{AB}

2. Дано:

$\triangle ABC$
$AC \perp BC$
$CC_1 \perp AB$
$CC_1 = 4\sqrt{2}$
$\angle BCC_2 = \angle ACC_2$
$CC_2 = 5\sqrt{2}$

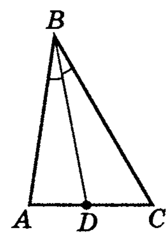


а) m_{BC}
б) AC
в) BC

Вариант 3

1. Дано (один из возможных вариантов моделирования условий задачи):

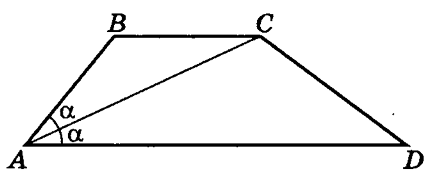
$\triangle ABC$
$\angle ABD = \angle CBD$
$AB = 21$
$BD = 8\sqrt{7}$
$DC = 8$



$P_{\triangle ABC}$

2. Дано:

$ABCD$ — трапеция
$BC \parallel AD$
$\angle BAC = \alpha$
$\angle CAD = \alpha$
$AB = a$
$AB \perp CD$



S_{ABCD}

Вариант 4

Дано:

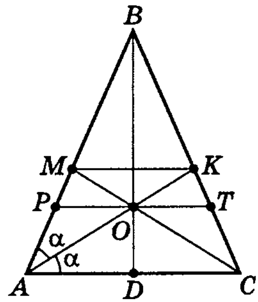
$\triangle ABC$

$AB = BC$

$AC = a$

$\angle BAK = \angle CAK = \alpha$

$MK \parallel AC$



а) l_{AB}

б) $R_{\text{о}\triangle AKB}$

в) $S_{\triangle ABK}$

г) $r_{\text{в}\triangle ABK}$

д) $PT \parallel AC$

$O \in PT$

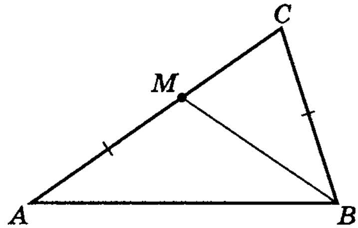
PT

Примечание. Зачастую «Дано» и чертеж только вместе наиболее точно моделируют текстовые условия задачи. Но возможно, что даже вместе «Дано» и чертеж далеко не полностью моделируют их (например, задача 1 варианта 3).

Самостоятельная работа 5. Моделирование условий

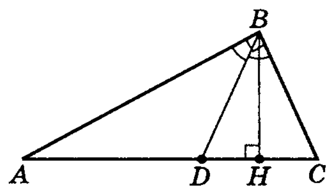
Вариант 1

1. Дано:
$\triangle ABC$
$AB = AC = 16$
$BC = 8$
$AM = 4$



а) BM
б) $S_{\triangle AMB}$
в) m_{AB}

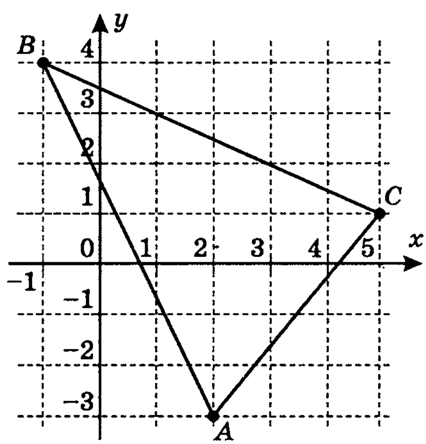
2. Дано:
$\triangle ABC$
$AB \perp BC$
$BH \perp AC$
$AH = 28$
$BC = 7\sqrt{5}$



а) AB
б) l_{AC}

Вариант 2

1. Дано:
$A(2; -3)$
$B(-1; 4)$
$C(5; 1)$

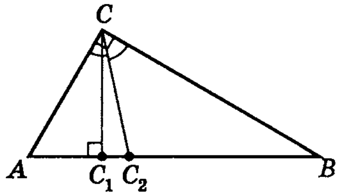


а) $\operatorname{ctg}(\angle ABC)$
б) $S_{\triangle ABC}$
в) m_{AB}

2. Дано:

$\triangle ABC$
$AC \perp AB$
$CC_1 \perp AB$
$CC_1 = 3\sqrt{2}$
$\angle ACC_2 = \angle C_2CB$
$CC_2 = 5\sqrt{2}$

а) m_{AB}
б) AC
в) BC

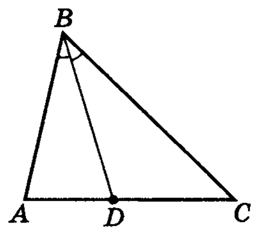


Вариант 3

1. Дано (один из возможных вариантов моделирования условий задачи):

$\triangle ABC$
$\angle ABD = \angle CBD$
$AB = 21$
$AD + BC = 31$
$DC = 8$

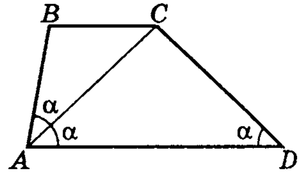
BD



2. Дано:

$ABCD$ — трапеция
$BC \parallel AD$
$\angle BAD = 2(\angle ADC)$
$\angle BAC = \angle CAD = \alpha$
$BC = a$

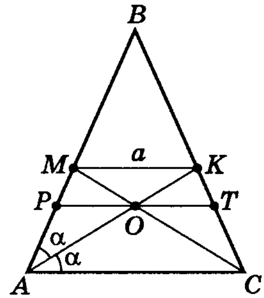
S_{ABCD}



Вариант 4

Дано:

$\triangle ABC$
$AB = BC$
$MK = a$
$\angle BAK = \angle CAK$
$MK \parallel AC$
$\angle A = 2\alpha$

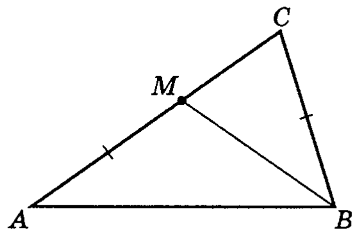


а) l_{AB}
б) $R_{\text{o}\triangle AKB}$
в) $S_{\triangle ABK}$
г) $r_{\text{в}\triangle ABK}$
д) $PT \parallel AC$, $O \in PT$
   PT

Примечание. Здесь «Дано» и чертеж только вместе полностью моделируют текстовые условия задачи.

Решение тренировочной работы 5

Вариант 1



1. Дано:

$\triangle ABC$
$AB = AC = 9$
$BC = 6$
$AM = 6$

а) BM
б) $S_{\triangle AMB}$
в) m_{AB}

а) 1. $\cos(\angle A) = \dfrac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2 \cdot AC \cdot AB}$;

$$\cos(\angle A) = \frac{2 \cdot 81 - 36}{2 \cdot 81} = \frac{7}{9}.$$

2. $BM = \sqrt{AM^2 + AB^2 - 2 \cdot AM \cdot AB \cdot \cos(\angle A)}$;

$$BM = \sqrt{36 + 81 - 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \frac{7}{9}} = \boxed{\sqrt{33}}.$$

б) $S_{\triangle AMB} = \dfrac{1}{2} AM \cdot AB \cdot \sin(\angle A)$;

$\sin(\angle A) = \sqrt{1 - \cos^2(\angle A)}$;

$\sin(\angle A) = \sqrt{1 - \left(\dfrac{7}{9}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{32}}{9} = \dfrac{4\sqrt{2}}{9}$, значит

$$S_{\triangle AMB} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 \cdot \frac{4\sqrt{2}}{9} = \boxed{12\sqrt{2}}.$$

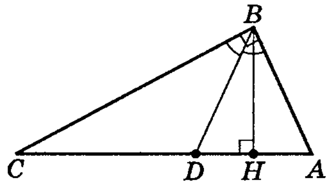
в) $m_{AB} = \dfrac{\sqrt{2 \cdot AC^2 + 2 \cdot CB^2 - AB^2}}{2}$;

$$m_{AB} = \frac{\sqrt{2 \cdot 9^2 + 2 \cdot 6^2 - 9^2}}{2} = \frac{\sqrt{81 + 72}}{2} = \boxed{\frac{3}{2}\sqrt{17}}.$$

2. Дано:

$\triangle ABC$
$AB \perp BC$
$BH \perp AC$
$AH = 6$
$BC = 12\sqrt{5}$

а) AB
б) l_{AC}



Так как мы положили, что AH — наименьший отрезок гипотенузы, то $AB < BC$, т. е. наибольший катет — BC.

а) 1. $BC^2 = AC \cdot CH$ (метрические свойства прямоугольного треугольника).

$(BC)^2 = (AH + CH) \cdot CH$; $\left(12\sqrt{5}\right)^2 = (6 + CH) \cdot CH$;

$CH^2 + 6 \cdot CH - 720 = 0$; $\left[\begin{array}{l} CH = 24 \\ CH = -30 \notin (0; \infty) \end{array}\right.$.

2. $BH^2 = AH \cdot HC$; $BH^2 = 6 \cdot 24 = 12^2$; $BH = 12$.

3. $AB = \sqrt{(AH)^2 + (BH)^2}$;

$AB = \sqrt{6^2 + 12^2} = \sqrt{180} = \boxed{6\sqrt{5}}$.

б) 1. $BD = l_{AC}$.

2. По теореме о биссектрисе внутреннего угла в треугольнике $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{AB}{BC}$, т. е. $\dfrac{AD}{AC - AD} = \dfrac{6\sqrt{5}}{12\sqrt{5}} = \dfrac{1}{2}$,

значит $2AD = (AH + HC) - AD$,

т. е. $3AD = 6 + 24$; $AD = 10$.

3. $\cos(\angle A) = \dfrac{AB}{AC}$. Так как $AC = AH + HC$,

т. е. $AC = 6 + 24 = 30$, то $\cos(\angle A) = \dfrac{6\sqrt{5}}{30} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

4. $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos(\angle A)}$,

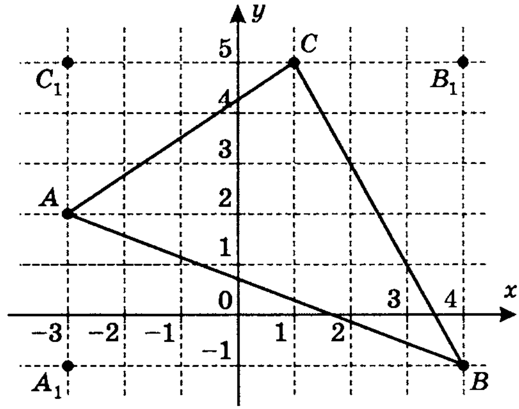
т. е. $BD = \sqrt{36 \cdot 5 + 100 - 2 \cdot 6\sqrt{5} \cdot 10 \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{5}} = \boxed{4\sqrt{10}}$.

Вариант 2

1. Дано:

$A(-3;2)$
$B(4;-1)$
$C(1;5)$

а) $\operatorname{tg}(\angle ABC)$
б) $S_{\triangle ABC}$
в) m_{AC}



а) 1. Так как для $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$

$$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$

то $AB = \sqrt{(4+3)^2+(-1-2)^2} = \sqrt{58}$;

$$AC = \sqrt{(1+3)^2+(5-2)^2} = 5;$$

$$BC = \sqrt{(1-4)^2+(5+1)^2} = 3\sqrt{5}.$$

2. $\cos(\angle ABC) = \dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}$;

$$\cos(\angle ABC) = \frac{58+45-25}{2\sqrt{58}\cdot 3\sqrt{5}} = \frac{78}{6\sqrt{58}\cdot\sqrt{5}} = \frac{13}{\sqrt{58}\cdot\sqrt{5}};$$

$$\sin(\angle ABC) = \sqrt{1-\frac{13^2}{58\cdot 5}} = \frac{11}{\sqrt{58}\cdot\sqrt{5}};$$

$$\operatorname{tg}(\angle ABC) = \frac{\sin(\angle ABC)}{\cos(\angle ABC)} = \boxed{\frac{11}{13}}.$$

б) $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin(\angle ABC)$;

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{58}\cdot 3\sqrt{5}\cdot\frac{11}{\sqrt{58}\cdot\sqrt{5}} = \frac{33}{2} = \boxed{16{,}5}.$$

Отметим, что $S_{\triangle ABC}$ можно найти и более простым, не требующим знания тригонометрических отношений, способом. Из чертежа следует, что

$$S_{\triangle ABC} = S_{A_1C_1B_1B} - S_{\triangle A_1AB} - S_{\triangle AC_1C} - S_{\triangle CB_1B},$$

Значит $S_{\triangle ABC} = 6\cdot 7 - \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 7 - \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4 - \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3 = 16{,}5.$

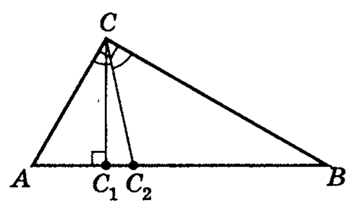
в) $m_{AC} = \dfrac{\sqrt{2\cdot AB^2 + 2\cdot BC^2 - AC^2}}{2} =$

$= \dfrac{\sqrt{2\cdot 58 + 2\cdot 45 - 25}}{2} = \dfrac{\sqrt{181}}{2}.$

2. Дано:

$\triangle ABC$
$AC \perp BC$
$CC_1 \perp AB$
$CC_1 = 4\sqrt{2}$
$\angle BCC_2 = \angle ACC_2$
$CC_2 = 5\sqrt{2}$

а) m_{BC}
б) AC
в) BC



Для того чтобы найти медиану, проведенную к наибольшему из катетов, прежде всего, необходимо найти сами катеты и выбрать наибольший.

а) 1. Обозначим $\angle C_2CC_1 = \alpha$.

Тогда $\cos\alpha = \dfrac{CC_1}{CC_2}$; $\cos\alpha = \dfrac{4\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = \dfrac{4}{5}$.

2. $\angle C_1CA = 45^\circ - \alpha$.

3. $AC = \dfrac{CC_1}{\cos(\angle C_1CA)}$, т. е. $AC = \dfrac{4\sqrt{2}}{\cos(45^\circ - \alpha)}$.

Напомним, что $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$.

Тогда $\cos(45^\circ-\alpha)=\cos 45^\circ\cdot\cos\alpha+\sin 45^\circ\cdot\sin\alpha=$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{4}{5}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}\cdot 4}{10}+\frac{\sqrt{2}\cdot 3}{10}=\frac{7}{10}\sqrt{2},$$

значит $AC=\dfrac{4\sqrt{2}}{\frac{7}{10}\sqrt{2}}=\boxed{\dfrac{40}{7}}$.

б) $\angle A=90^\circ-(45^\circ-\alpha)=45^\circ+\alpha$.

Так как $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, то $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\dfrac{3}{4}$ (имея в виду, что $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$, т. е. $\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}$).

Учитывая, что $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$, получим

$$\operatorname{tg}(\angle A)=\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)=\frac{\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}45^\circ\cdot\operatorname{tg}\alpha}=$$

$$=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1+\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}=7.$$

$BC=AC\cdot\operatorname{tg}(\angle A)$; $\quad BC=\dfrac{40}{7}\cdot 7=\boxed{40}$.

Следовательно, $AC<BC$, и m_{BC} — медиана, проведенная к наибольшему из катетов.

в) $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}$;

$$AB=\sqrt{\left(\frac{40}{7}\right)^2+40^2}=\frac{40}{7}\sqrt{1+49}=\frac{200\sqrt{2}}{7}.$$

$$m_{BC}=\frac{\sqrt{2\cdot AB^2+2\cdot AC^2-BC^2}}{2};$$

$$m_{BC}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2\cdot\left(\frac{200\sqrt{2}}{7}\right)^2+2\cdot\left(\frac{40}{7}\right)^2-40^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{40}{7}\cdot\sqrt{2\cdot 50+2-49}=\frac{20\sqrt{53}}{7}.$$

Можно проще, если использовать теорему Пифагора:

$$m_{BC} = \sqrt{AC^2 + \left(\frac{1}{2}BC\right)^2};$$

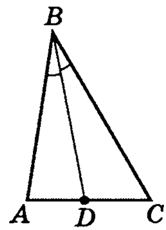
$$m_{BC} = \sqrt{\left(\frac{40}{7}\right)^2 + 20^2} = \frac{20}{7}\sqrt{4+49} = \frac{20\sqrt{53}}{7}.$$

Вариант 3

1. Дано (один из возможных вариантов моделирования условий задачи):

$\triangle ABC$
$\angle ABD = \angle CBD$
$AB = 21$
$BD = 8\sqrt{7}$
$DC = 8$ $(DC > AD)$

$P_{\triangle ABC}$



Напомним, что для биссектрисы внутреннего угла треугольника известны следующие метрические отношения:

$\boxed{\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BC}{DC}}$ $\boxed{BD^2 = AB \cdot BC - AD \cdot DC}$ (см. стр. 140).

а) Так как $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BC}{DC}$, то $\dfrac{21}{AD} = \dfrac{BC}{8}$, т. е. $AD \cdot BC = 168$.

б) Так как $BD^2 = AB \cdot BC - AD \cdot DC$, то $\left(8\sqrt{7}\right)^2 = 21BC - 8AD$.

Тогда решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 64 \cdot 7 = 21BC - 8AD \\ 168 = AD \cdot BC \end{cases}; \quad \begin{cases} BC = \dfrac{168}{AD} \\ 448 = \dfrac{21 \cdot 168}{AD} - 8AD \end{cases}.$$

Решая последнее уравнение, получим квадратное уравнение $56AD = 441 - AD^2$.

Тогда $AD^2 + 56AD - 441 = 0$;

$(AD)_{1,2} = -28 \pm \sqrt{784 + 441} = -28 \pm 35$;

$\left[\begin{array}{l} AD = 7 \text{ (действительно, } DC > AD!) \\ AD = -63 \notin (0; \infty) \end{array}\right.$.

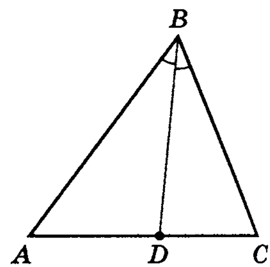
Значит $BC = \dfrac{168}{7} = 24$.

в) $P_{\triangle ABC} = AB + BC + AD + DC$,

т. е. $P_{\triangle ABC} = 21 + 24 + 7 + 8 = \boxed{60}$.

Дано (еще один возможный вариант моделирования условий задачи):

$\triangle ABC$
$\angle ABD = \angle CBD$
$AB = 21$
$BD = 8\sqrt{7}$
$AD = 8$ $(AD > DC)$



$P_{\triangle ABC}$

а) Так как $BD = l_{AC} = l_{\angle B}$, то

$$\begin{cases} \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BC}{DC} \\ BD^2 = AB \cdot BC - AD \cdot DC \end{cases};$$

$$\begin{cases} \dfrac{21}{8} = \dfrac{BC}{DC}; \qquad DC = \dfrac{8}{21}BC \\ (8\sqrt{7})^2 = 21BC - 8 \cdot \dfrac{8}{21} \cdot BC \end{cases}.$$

б) Тогда $64 \cdot 7 = \dfrac{21^2 - 8^2}{21}BC$; $\quad BC = \dfrac{64 \cdot 7 \cdot 21}{377}$;

$$DC = \frac{8}{21} \cdot \frac{64 \cdot 7 \cdot 21}{377} = \frac{64 \cdot 8 \cdot 7}{377}.$$

в) $P_{\triangle ABC} = AB + BC + AD + DC$;

$$P_{\triangle ABC} = 21 + \frac{64 \cdot 7 \cdot 21}{377} + 8 + \frac{64 \cdot 8 \cdot 7}{377} =$$

$$= 29 + \frac{64 \cdot 7 \cdot (21 + 8)}{377} = 29 + \frac{64 \cdot 7 \cdot 29}{29 \cdot 13} = 29 + \frac{64 \cdot 7}{13} =$$

$$= 29 + 34\frac{6}{13} = 63\frac{6}{13}.$$

г) Для того чтобы проверить условие $AD > DC$, найдем значение DC:

$$DC = \frac{64 \cdot 8 \cdot 7}{377} = \frac{3584}{377} = 9\frac{191}{377}$$

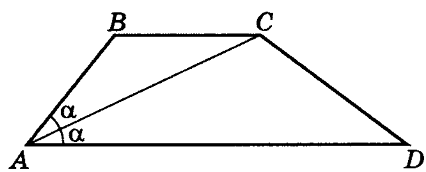
$\left(DC = \dfrac{BC \cdot AD}{AB}\right.$, см. пункт а).

Таким образом, $AD < DC$, и условие задачи не выполняется, следовательно, этот вариант моделирования условий задачи не реализуется.

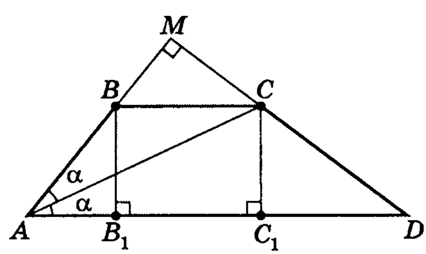
2. Дано:

$ABCD$ — трапеция
$BC \parallel AD$
$\angle BAC = \alpha$
$\angle CAD = \alpha$
$AB = a$
$AB \perp CD$

S_{ABCD}



Анализируя условия задачи, продолжим до пересечения стороны AB и CD. Получим прямоугольный треугольник AMD.



а) $BC \parallel AD$; $\angle CAD = \angle ACB = \alpha$.

б) Так как AC — биссектриса угла A и $\angle BAC = \angle ACB = \alpha$, то $AB = BC = a$.

в) Пусть $BB_1 \perp AD$ и $CC_1 \perp AD$, тогда
$BB_1 = AB \sin 2\alpha$; $BB_1 = a \sin 2\alpha$;
$AB_1 = AB \cos 2\alpha$; $AB_1 = a \cos 2\alpha$.

г) Рассмотрим $\triangle AMD$. Учитывая, что $CC_1 = BB_1$, получим $\angle D = 90° - 2\alpha$, тогда $\angle C_1CD = 2\alpha$.
Значит $C_1D = CC_1 \operatorname{tg} 2\alpha$; $C_1D = a \sin 2\alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha$;
$AD = AB_1 + B_1C_1 + C_1D$;
$AD = a\cos 2\alpha + a + a\sin 2\alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha =$
$= \dfrac{a\cos^2 2\alpha + a\cos 2\alpha + a\sin^2 2\alpha}{\cos 2\alpha}$; $AD = \dfrac{a(1+\cos 2\alpha)}{\cos 2\alpha}$.

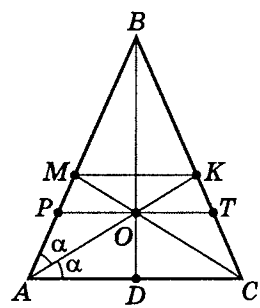
д) $S_{ABCD} = \dfrac{AD + BC}{2} BB_1$;

$$S_{ABCD} = \frac{\frac{a(1+\cos 2\alpha)}{\cos 2\alpha} + a}{2} \cdot a \sin 2\alpha = \boxed{\frac{a^2(1+2\cos 2\alpha)}{2} \cdot \operatorname{tg} 2\alpha}.$$

Вариант 4

Дано:
$\triangle ABC$
$AB = BC$
$AC = a$
$\angle BAK = \angle CAK = \alpha$
$MK \parallel AC$

а) $R_{\text{о}\triangle AKB}$
б) l_{AB}
в) $S_{\triangle ABK}$
г) $r_{\text{в}\triangle ABK}$
д) $PT \parallel AC$, $O \in PT$
PT



а) 1. Так как $MK \parallel AC$ и $AB = BC$ $(\angle A = \angle C)$,

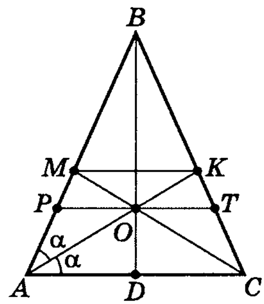
то $\angle BMK = \angle A = \angle C = \angle BKM$,

т. е. $BM = BK$, значит $AM = CK$,

и $MC = l_{AB}$ $(\triangle AKC = \triangle CMA)$, т. е. $AK = MC$.

2. По сути мы имеем дело с равнобедренной трапецией $AMKC$. Причем $AM = MK$ $(\angle KAC = \angle MKA)$.

3. Пусть $BD \perp AC$.



$$AB = \frac{AD}{\cos 2\alpha};$$

$$AB = \frac{\frac{1}{2}a}{\cos 2\alpha} = \frac{a}{2\cos 2\alpha}.$$

4. $\angle KAC = \angle MKA = \alpha$;

$\angle BKM = \angle BCA = 2\alpha$;

$\angle AKB = \angle BKM + \angle MKA = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$.

Из $\triangle ABK$: $R_{\circ} = \dfrac{AB}{2\sin(\angle AKB)}$; $\quad R_{\circ} = \dfrac{AB}{2\sin 3\alpha}$;

$$R_{\circ\triangle AKB} = \frac{a}{2\cos 2\alpha} : 2\sin 3\alpha = \boxed{\frac{a}{4\cos 2\alpha \cdot \sin 3\alpha}}.$$

б) $\dfrac{AK}{\sin(\angle ABC)} = \dfrac{AB}{\sin(\angle AKB)}$ $(AK = MC = l_{AB})$;

$$AK = \frac{a}{2\cos 2\alpha} \cdot \frac{\sin(180^\circ - 4\alpha)}{\sin 3\alpha}, \text{ тогда}$$

$$AK = \frac{a\sin 4\alpha}{2\cos 2\alpha \cdot \sin 3\alpha} = \frac{a\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}, \text{ т. е. } \boxed{l_{AB} = \frac{a\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}}.$$

в) $S_{\triangle ABK} = \dfrac{1}{2}AB \cdot AK \cdot \sin(\angle BAK)$;

$$S_{\triangle ABK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2\cos 2\alpha} \cdot \frac{a\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha} \cdot \sin\alpha = \boxed{\frac{1}{4}a^2\frac{\operatorname{tg} 2\alpha \cdot \sin\alpha}{\sin 3\alpha}}.$$

г) 1. $\dfrac{AB}{\sin 3\alpha} = \dfrac{BK}{\sin\alpha}$; $\quad BK = \dfrac{a\cdot\sin\alpha}{2\cos 2\alpha\cdot\sin 3\alpha}$.

2. $p = \dfrac{1}{2}(AB + BK + AK)$;

$$p = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2\cos 2\alpha} + \frac{a\sin\alpha}{2\cos 2\alpha\cdot\sin 3\alpha} + \frac{a\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}a\frac{\sin 3\alpha + \sin\alpha + 2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha}{2\cos 2\alpha\cdot\sin 3\alpha} =$$

$[\sin 3\alpha + \sin\alpha = 2\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha]$ [8]

$$= \frac{1}{4}a\frac{2\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha + 2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha\cdot\sin 3\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2}a\frac{\sin 2\alpha\,(\cos\alpha + \cos 2\alpha)}{\cos 2\alpha\cdot\sin 3\alpha}.$$

3. $r_{\text{в}\triangle ABK} = \dfrac{S_\triangle}{p}$;

$$r_{\text{в}\triangle ABK} = \frac{\frac{1}{4}a^2\frac{\operatorname{tg}2\alpha}{\sin 3\alpha}\cdot\sin\alpha}{\frac{1}{2}a\frac{\sin 2\alpha(\cos\alpha+\cos 2\alpha)}{\cos 2\alpha\cdot\sin 3\alpha}} = \boxed{\frac{a\sin\alpha}{2(\cos\alpha + \cos 2\alpha)}}.$$

д) PT есть среднее гармоническое относительно AC и MK.

1. $AM = MK = KC$; $\quad KC = BC - BK$;

$$KC = \frac{a}{2\cos 2\alpha} - \frac{a\sin\alpha}{2\cos 2\alpha\cdot\sin 3\alpha} =$$

$$= \frac{a}{2\cos 2\alpha}\cdot\frac{\sin 3\alpha - \sin\alpha}{\sin 3\alpha} =$$

$[\sin 3\alpha - \sin\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos 2\alpha]$

$$= \frac{a\cdot 2\sin\alpha\cdot\cos 2\alpha}{2\cos 2\alpha\cdot\sin 3\alpha} = \frac{a\sin\alpha}{\sin 3\alpha} = MK.$$

[8] См. Шахмейстер А. Х. Тригонометрия. СПб.; М., 2010, 2013. С. 742, 743.

2. $PT = \dfrac{2MK \cdot AC}{MK + AC}$

(свойство среднего гармонического для AC и MK).

$$PT = \frac{2 \cdot \frac{a \sin\alpha}{\sin 3\alpha} \cdot a}{\frac{a \sin\alpha}{\sin 3\alpha} + a} = \frac{2a \sin\alpha}{\sin\alpha + \sin 3\alpha} =$$

$[\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha; \qquad 2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha]$

$$= \frac{2a \sin\alpha}{2 \sin 2\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{a}{2\cos^2\alpha} = \boxed{\frac{a}{1 + \cos 2\alpha}}.$$

Тренировочная работа 6

Вариант 1

Из точки A к окружности проведены касательная, касающаяся окружности в точке B, и секущая, проходящая через центр окружности и пересекающая ее в точке C. Расстояние от точки A до центра окружности равно 85, а радиус окружности равен 36. Найдите:

а) касательную;

б) хорду BC;

в) площадь сегмента, опирающегося на хорду BC и не проходящего через центр окружности.

Вариант 2

Сумма касательных к окружности равна 120, а радиус окружности равен 11. Найдите:

а) расстояние от центра окружности до общей точки касательных;

б) площадь криволинейного треугольника, сторонами которого являются касательные и дуга между ними.

Вариант 3

Высота, опущенная из вершины прямого угла, есть диаметр окружности, пересекающей катеты треугольника. Хорды окружности, исходящие из вершины прямого угла, равны 18 и 12. Найдите катеты этого треугольника.

Вариант 4

Высота треугольника, опущенная из вершины прямого угла, делит гипотенузу на отрезки, являющиеся диаметрами окружностей, пересекающих катеты треугольника. Наибольший отрезок гипотенузы равен 80, а наименьший катет 75. Найдите хорды окружностей, являющихся частью катетов, и площадь четырехугольника, противоположные вершины которого есть точки пересечения окружностей с катетами и концы перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла.

Самостоятельная работа 6

Вариант 1

Из точки к окружности радиуса 36 проведены касательная, равная 77, и секущая, проходящая через центр. Найдите:

а) расстояние от точки A до центра окружности;

б) хорду, стягивающую дугу между касательной и секущей;

в) площадь сектора, ограниченного наименьшей из дуг.

Вариант 2

Сумма касательных, проведенных к окружности, равна 120, а расстояние от центра окружности до общей точки касательных равно 61. Найдите:

а) радиус окружности;

б) площадь криволинейного треугольника, основание которого есть дуга.

Вариант 3

Высота, опущенная из вершины прямого угла треугольника, есть диаметр окружности, пересекающей катеты треугольника. Хорды, исходящие из одной вершины, равны 12 и 8. Найдите катеты треугольника, которым принадлежат хорды.

Вариант 4

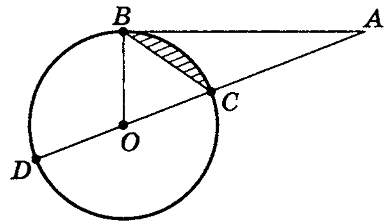
Высота треугольника, опущенная из вершины прямого угла, делит гипотенузу на отрезки, являющиеся диаметрами окружностей. Наибольший катет равен 100, а наименьший диаметр — 45. Найдите хорды окружностей, полученные при пересечении окружностями сторон треугольника, и площадь четырехугольника, противоположные вершины которого есть точки пересечения окружностей с катетами и концы перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла.

Тренировочная работа 6. Моделирование условий

Вариант 1

Дано:

Окружность
DC — диаметр
AD — секущая
AB — касательная
$AO = 85$
$BO = 36$

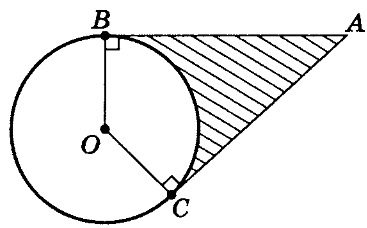


а) AB
б) BC
в) $S_{\text{сег. } BC}$

Вариант 2

Дано:

Окружность
AB, AC — касательные
$AB + AC = 120$
$OB = 11$

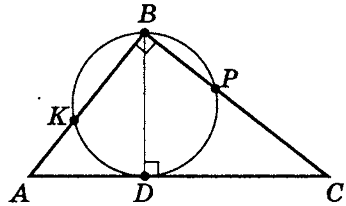


а) OA
б) $S_{\text{кр. тр. } BAC}$ (криволинейный треугольник BAC)

Вариант 3

Дано:

$\triangle ABC$
$AB \perp BC$
$BD \perp AC$
BD — диаметр
$KB = 18$
$BP = 12$

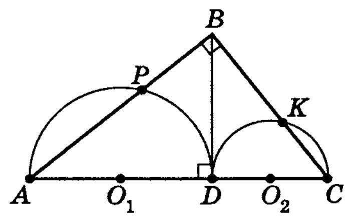


а) AB
б) BC

Вариант 4

Дано:

$\triangle ABC$
$AB \perp BC, BD \perp AC$
AD, DC — диаметры
O_1, O_2 — центры
$AD = 80$ ($AD > DC$)
$BC = 75$



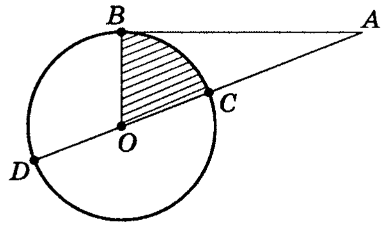
а) AP
б) CK
в) S_{DPBK}

Самостоятельная работа 6. Моделирование условий

Вариант 1

Дано:

Окружность
O — центр окружности
AD — секущая
AB — касательная
$AB = 77$
$O \in AD$
$OB = 36$

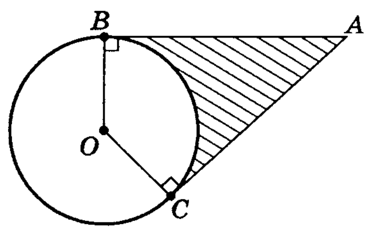


а) AO
б) BC
в) $S_{\text{сек. } BC}$

Вариант 2

Дано:

Окружность
AB, AC — касательные
$AB + AC = 120$
$OA = 61$



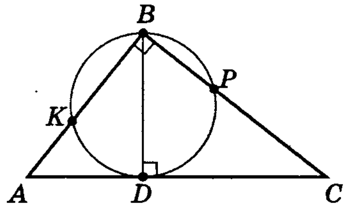
а) $R_{\text{о}}$
б) $S_{\text{кр. тр. } BAC}$ (криволинейный треугольник BAC)

Вариант 3

Дано:

$\triangle ABC$
$AB \perp BC$
$BD \perp AC$
BD — диаметр
$KB = 12$
$BP = 8$

а) AB
б) BC

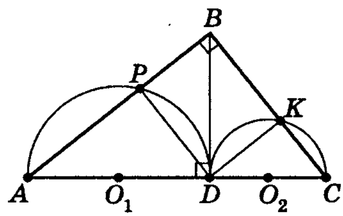


Вариант 4

Дано:

$\triangle ABC$
$AB \perp BC$
AD, DC — диаметры
O_1, O_2 — центры
$DC = 45$
$AB = 100$

а) AP
б) CK
в) S_{DPBK}



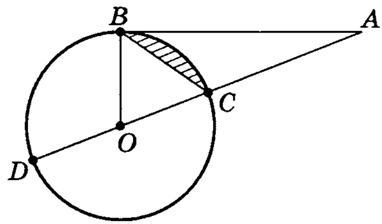
Решение тренировочной работы 6

Вариант 1

Дано:

Окружность
DC — диаметр
AD — секущая
AB — касательная
$O \in DC$
$AO = 85$
$BO = 36$

а) AB
б) BC
в) $S_{\text{сег. } BC}$



а) Так как $AB^2 = AD \cdot AC$ и $BO = OC = OD$, то

$$AB^2 = (85 + 36)(85 - 36); \quad AB^2 = 121 \cdot 49; \quad AB = \boxed{77}.$$

б) 1. $\cos(\angle AOB) = \dfrac{OB}{OA}; \quad \cos(\angle AOB) = \dfrac{36}{85}.$

2. $BC = \sqrt{OB^2 + OC^2 - 2OB \cdot OC \cdot \cos(\angle AOB)};$

$$BC = \sqrt{2 \cdot 36^2 - 2 \cdot 36^2 \cdot \frac{36}{85}} = 36\sqrt{2 - \frac{72}{85}} = 36\sqrt{\frac{98}{85}} =$$

$$= 36 \cdot 7\sqrt{\frac{2}{85}} = \frac{252}{85}\sqrt{170}.$$

в) 1. Известна формула площади сектора:

$\boxed{S_{\text{сек}} = \dfrac{1}{2} \cdot R^2\alpha}$ (α в радианах),

следовательно, $S_{\text{сек}} = \dfrac{1}{2} \cdot 36^2 \arccos\dfrac{36}{85}.$

2. $S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2}OB^2 \cdot \sin(\angle BOC)$;

$\sin(\angle BOC) = \sqrt{1 - \left(\frac{36}{85}\right)^2} = \frac{77}{85}$,

значит $S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{36^2 \cdot 77}{85}$.

3. $S_{\text{сег}} = S_{\text{сек}} - S_{\triangle BOC}$;

$$S_{\text{сег}} = 648 \arccos\frac{36}{85} - \frac{648 \cdot 77}{85} = \boxed{648\left(\arccos\frac{36}{85} - \frac{77}{85}\right)}.$$

Вариант 2

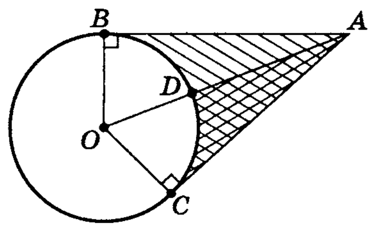
Дано:

Окружность

AB, AC — касательные

$AB + AC = 120$

$OB = 11$



а) OA

б) $S_{\text{кр. тр. } BAC}$ (криволинейный треугольник BAC)

а) Так как $AB = AC$, то $AB = AC = 60$.

$OA = \sqrt{OB^2 + AB^2}$; $OA = \sqrt{11^2 + 60^2} = \boxed{61}$.

б) 1. $\cos(\angle AOB) = \frac{OB}{OA}$; $\cos(\angle AOB) = \frac{11}{61}$;

$\angle AOB = \arccos\left(\frac{11}{61}\right)$.

2. $S_{\text{сек. } BOD} = \frac{1}{2}OB^2 \cdot \arccos\left(\frac{11}{61}\right) = \frac{121}{2}\arccos\left(\frac{11}{61}\right)$.

3. $S_{\triangle OBA} = \frac{1}{2}OB \cdot AB$; $S_{\triangle OBA} = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 60 = 330$.

4. $S_{\text{кр. тр. } BAC} = 2\left(S_{\triangle OBA} - S_{\text{сек. } BOD}\right)$;

$S_{\text{кр. тр. } BAC} = 2\left(330 - \dfrac{121}{2}\arccos\dfrac{11}{61}\right) =$

$= \boxed{660 - 121\arccos\dfrac{11}{61}}$.

Вариант 3

Дано:

$\triangle ABC$

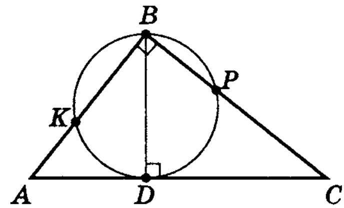
$AB \perp BC$

$BD \perp AC$

BD — диаметр

$KB = 18$

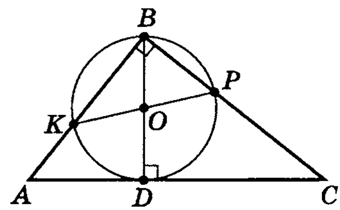
$BP = 12$



а) AB

б) BC

а) 1. Проведем дополнительное построение. Так как $\angle B = 90°$, то PK — диаметр.



2. $PK = \sqrt{BP^2 + BK^2}$; $PK = \sqrt{12^2 + 18^2} = 6\sqrt{13}$,

т. е. $BD = PK = 6\sqrt{13}$ (BD и PK — диаметры).

3. Пусть $PC = x$, тогда $DC^2 = BC^2 - BD^2$,

т. е. $DC^2 = (x+12)^2 - \left(6\sqrt{13}\right)^2$.

С другой стороны, $DC^2 = BC \cdot PC$, т. е. $DC^2 = (x+12)x$.

Тогда $(x+12)^2 - \left(6\sqrt{13}\right)^2 = (x+12)x$;

$(x+12)(x+12-x) = 36 \cdot 13$; $x + 12 = 39$; $x = 27 = PC$,

значит $BC = 12 + 27 = \boxed{39}$.

б) Пусть $AK = y$, тогда $AD^2 = AB^2 - BD^2$,

т. е. $AD^2 = (18 + y)^2 - \left(6\sqrt{13}\right)^2$.

С другой стороны, $AD^2 = AB \cdot AK$, т. е. $AD^2 = (18+y) \cdot y$.

Получили уравнение

$(18 + y)^2 - \left(6\sqrt{13}\right)^2 = (18 + y)y$.

$(18 + y)^2 - (18 + y)y = \left(6\sqrt{13}\right)^2$;

$(18 + y)(18 + y - y) = 36 \cdot 13$;

$18 + y = 2 \cdot 13$; $\quad y = 8$.

Значит $AB = KB + AK$; $\quad AB = 18 + 8 = \boxed{26}$.

Вариант 4

Дано:

$\triangle ABC$

$AB \perp BC$

$BD \perp AC$

AD, DC — диаметры окружностей

O_1, O_2 — центры окружностей

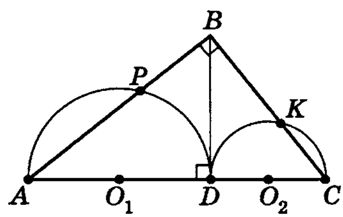
$AD = 80$ $(AD > DC)$

$BC = 75$

а) AP

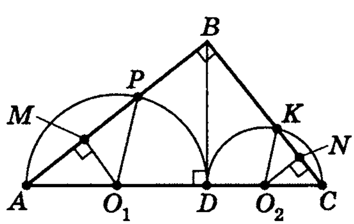
б) CK

в) S_{DPBK}



Так как по условию $AD > DC$, то $AB > BC$.

Проведем дополнительное построение: $O_1M \perp AP$; $O_2N \perp KC$.



а) Пусть $DC = x$, тогда

1. $BC^2 = AC \cdot DC$, т. е. $75^2 = (80+x)x$; $x^2 + 80x - 75^2 = 0$;

   $x_{1,2} = -40 \pm \sqrt{40^2 + 75^2} = -40 \pm 5\sqrt{8^2 + 15^2} = -40 \pm 5 \cdot 17$;

   $$\left[\begin{array}{l} x = -40 + 85 = 45 = DC \\ x - 40 - 85 \notin (0; \infty) \end{array}\right.$$

   Значит $DC = 45$, а $AC = 125$.

2. $BD^2 = AD \cdot DC$;

   $BD^2 = 80 \cdot 45 = 16 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 9 = (4 \cdot 5 \cdot 3)^2$, т. е. $BD = 60$.

3. $AB = \sqrt{AD^2 + BD^2}$; $AB = \sqrt{80^2 + 60^2} = 100$.

4. $\cos(\angle A) = \dfrac{AD}{AB}$; $\cos(\angle A) = \dfrac{80}{100} = \dfrac{4}{5}$.

5. Так как $O_1M \perp AP$, то $AM = AO_1 \cdot \cos(\angle A)$;

   $AP = 2 \cdot AO_1 \cdot \cos(\angle A)$; $AP = 2 \cdot 40 \cdot \dfrac{4}{5} = \boxed{64}$.

б) 1. Так как $DC = 45$, то

   $\cos(\angle C) = \dfrac{DC}{BC}$; $\cos(\angle C) = \dfrac{45}{75} = \dfrac{9}{15} = \dfrac{3}{5}$.

2. По построению $O_2N \perp KC$,

   значит $CN = O_2C \cdot \cos(\angle C)$.

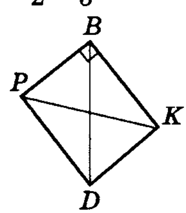
   $KC = 2 \cdot O_2C \cdot \cos(\angle C)$, т. е. $KC = 2 \cdot \dfrac{45}{2} \cdot \dfrac{3}{5} = \boxed{27}$.

в) $PB = AB - AP$; $PB = 100 - 64 = 36$;

$BK = BC - KC$; $BK = 75 - 27 = 48$;

$PK = \sqrt{PB^2 + BK^2}$;

$PK = \sqrt{36^2 + 48^2} = 12\sqrt{3^2 + 4^2} = 60$.



Так как $\triangle APD$ и $\triangle CKD$ — прямоугольные, а AD и DC — диаметры, то $DP \perp AB$, $DK \perp BC$. Значит, $DPBK$ — прямоугольник.

Тогда $S_{DPBK} = PB \cdot BK$, т. е. $S_{DPBK} = 36 \cdot 48 = \boxed{1728}$.

Тренировочная работа 7

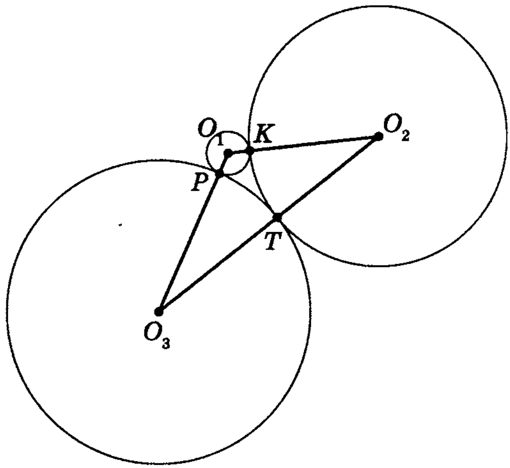
1. Три окружности с центрами в точках O_1, O_2 и O_3 и радиусами 1, 6 и 7, соответственно, внешним образом попарно касаются друг друга. Найдите угол $O_2O_1O_3$.
2. В равнобедренной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны. Высота трапеции равна 19. Найдите площадь данной трапеции.
3. Расстояние между параллельными прямыми равно 21. На одной из них взята точка C, а на другой — точки A и B. При этом $\triangle ABC$ остроугольный и равнобедренный, а его боковая сторона равна 29. Найдите радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$.
4. В равнобедренной трапеции $ABCD$ боковые стороны равны меньшему основанию BC. К диагонали трапеции провели перпендикуляры BP и CK. Найдите площадь трапеции $BCKP$, если площадь трапеции $ABCD$ равна 36.
5. Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях от вершины A, равных, соответственно, 18 и 22. Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB в точке K, если $\cos(\angle BAC) = \frac{\sqrt{11}}{6}$.
6. Углы при одном из оснований трапеции равны 64° и 26°, а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 11 и 10. Найдите основания трапеции.
7. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны, соответственно, 45 и 15, а сумма углов при основании трапеции равна 90°. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся прямой CD в точке K, если $AB = 9$.
8. В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно 12. В продолжении сторон AB и AC вписана окружность радиуса, равного 8, касающаяся сторон и основания BC. Найдите радиус вписанной в $\triangle ABC$ окружности.

Решение тренировочной работы 7

1. Три окружности с центрами в точках O_1, O_2 и O_3 и радиусами 1, 6 и 7, соответственно, внешним образом попарно касаются друг друга. Найдите угол $O_2O_1O_3$.

Дано:
Окр (O_1), $R_1 = 1$
Окр (O_2), $R_2 = 6$
Окр (O_3), $R_3 = 7$
Попарно касаются друг друга

$\angle O_2O_1O_3$



Пусть точки P, K и T — точки касания, где

$P \in O_1O_3$, $K \in O_1O_2$, $T \in O_2O_3$.

Рассмотрим $\Delta O_1O_2O_3$, где

$O_1O_3 = 8$ (сумма радиусов R_1 и R_3);

$O_1O_2 = 7$ (сумма радиусов R_1 и R_2);

$O_2O_3 = 13$ (сумма радиусов R_2 и R_3).

$$\cos(\angle O_2O_1O_3) = \frac{O_1O_3^2 + O_1O_2^2 - O_2O_3^2}{2 \cdot O_1O_3 \cdot O_1O_2};$$

$$\cos(\angle O_2O_1O_3) = \frac{8^2 + 7^2 - 13^2}{2 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{64 + 49 - 169}{2 \cdot 56} =$$

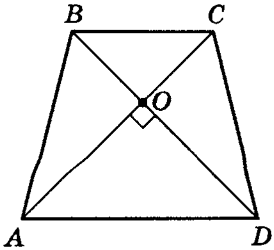
$$= -\frac{56}{2 \cdot 56} = -\frac{1}{2}.$$

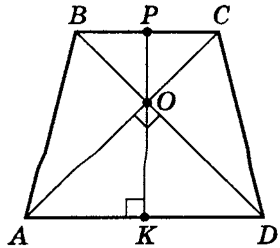
Итак, $\cos(\angle O_2O_1O_3) = -\frac{1}{2}$, значит, $\boxed{\angle O_2O_1O_3 = 120^\circ}$.

2. В равнобедренной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны. Высота трапеции равна 19. Найдите площадь данной трапеции.

Дано:
$ABCD$ — трапеция
$AB = DC$
$AC \perp DB$
$H_{ABCD} = 19$

S_{ABCD}





Сделаем доп. построение.

Проведем $PK \perp AD$ так, чтобы $O \in PK$, где $O \in AC \cap DB$.

Так как $AB = DC$, то $AO = DO$, причем $AO \perp DO$.

Значит $\angle OAD = \angle ODA = 45°$. Тогда $AK = OK$.

Аналогично $BO = CO$ и $BP = OP$.

Следовательно, $PK = \dfrac{AD + BC}{2}$.

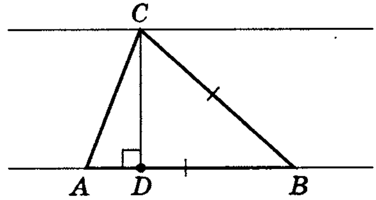
Подводя итоги, получим:

$S_{ABCD} = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot PK = PK^2$, т. е. $S_{ABCD} = 19^2 = \boxed{361}$.

3. Расстояние между параллельными прямыми равно 21. На одной из них взята точка C, а на другой — точки A и B. При этом $\triangle ABC$ остроугольный и равнобедренный, а его боковая сторона равна 29. Найдите радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$.

а) Дано:
$\triangle ABC$
$H_{AB} = 21$
$AB = BC = 29$

$R_о$



$DB = \sqrt{BC^2 - DC^2}$;

$DB = \sqrt{29^2 - 21^2} = \sqrt{(29+21)(29-21)} = \sqrt{50 \cdot 8} = 20.$

Тогда $AD = AB - DB$; $AD = 9.$

$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2}$;

$AC = \sqrt{9^2 + 21^2} = \sqrt{(81+441)} = \sqrt{522} = 3\sqrt{58}.$

$\sin(\angle B) = \dfrac{DC}{BC}$; $\sin(\angle B) = \dfrac{21}{29}.$

$R_{\text{о}} = \dfrac{AC}{2\sin(\angle B)}$; $R_{\text{о}} = \dfrac{3\sqrt{58}}{2 \cdot \frac{21}{29}} = \boxed{\dfrac{29}{14}\sqrt{58}}.$

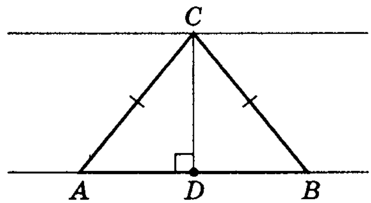
б) Дано:

$\triangle ABC$

$H_{AB} = 21$

$AC = BC = 29$

$R_{\text{о}}$



$DB = 20$, тогда $AD = 9.$

$\sin(\angle A) = \dfrac{DC}{AC}$, т. е. $\sin(\angle A) = \dfrac{21}{29}.$

$R_{\text{о}} = \dfrac{BC}{2\sin(\angle A)}$; $R_{\text{о}} = \dfrac{29}{2 \cdot \frac{21}{29}} = \dfrac{29^2}{42} = \boxed{20\dfrac{1}{42}}.$

4. В равнобедренной трапеции $ABCD$ боковые стороны равны меньшему основанию BC. К диагонали трапеции провели перпендикуляры BP и CK. Найдите площадь трапеции $BCKP$, если площадь трапеции $ABCD$ равна 36.

Дано:

$ABCD$ — трапеция

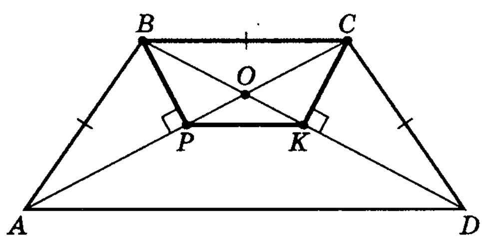
$BP \perp AC$

$CK \perp DC$

$AB = BC = DC$

$S_{ABCD} = 36$

S_{BPKC}



Так как $AB = BC = DC$, то из $BP \perp AC$ следует, что $AP = CP$, а из $CK \perp BD$ следует, что $DK = BK$.

Значит, $PK \in MN$, где $MN = \dfrac{AD + BC}{2}$.

Отметим, что $MP = KN = \dfrac{1}{2}BC$.

Тогда $PK = MN - BC = \dfrac{AD + BC}{2} - BC = \dfrac{AD - BC}{2}$.

Следовательно, $H_{BPKC} = \dfrac{1}{2} \cdot H_{ABCD}$.

$$S_{BPKC} = \frac{BC + PK}{2} \cdot H_{BPKC} = \frac{BC + \frac{AD-BC}{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}H_{ABCD} =$$
$$= \frac{AD + BC}{4} \cdot \frac{1}{2}H_{ABCD} = \frac{1}{4} \cdot \frac{AB + DC}{2} \cdot H_{ABCD} = \frac{1}{4}S_{ABCD}.$$

Значит, $S_{BPKC} = \dfrac{1}{4}S_{ABCD}$, т. е. $S_{BPKC} = \boxed{9}$.

5. Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях от вершины A, равных, соответственно, 18 и 22. Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB в точке K, если $\cos(\angle BAC) = \dfrac{\sqrt{11}}{6}$.

Дано:

$\triangle ABC$

$\cos(\angle BAC) = \dfrac{\sqrt{11}}{6}$

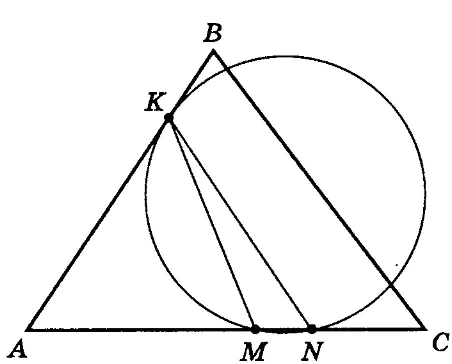
окр (R) касается AB в точке K

$\begin{cases} M \in AC \\ M \in \text{окр}\,(R) \end{cases}$

$\begin{cases} N \in AC \\ N \in \text{окр}\,(R) \end{cases}$

$AM = 18$, $AN = 22$

$R_{\triangle KMN}$



а) $AK^2 = AN \cdot AM$ (см. теорему 2, с. 200),

т. е. $AK^2 = 22 \cdot 18$; $AK = 6\sqrt{11}$.

б) $KN^2 = AK^2 + AN^2 - 2 \cdot AK \cdot AN \cos(\angle BAC)$;

$$KN^2 = 22 \cdot 18 + 22^2 - 2 \cdot 6\sqrt{11} \cdot 22 \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} =$$

$$= 22 \cdot 18 + 22^2 - 22^2 = 22 \cdot 18.$$

Значит, $AK = KN = 6\sqrt{11}$.

в) $KM^2 = AK^2 + AM^2 - 2 \cdot AK \cdot AM \cdot \cos(\angle BAC)$;

$$KM^2 = 22 \cdot 18 + 18^2 - 2 \cdot 6\sqrt{11} \cdot 18 \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} =$$

$$= 22 \cdot 18 + 18^2 - 22 \cdot 18 = 18^2.$$

Значит, $KM = AM = 18$.

г) $\cos(\angle KMN) = \dfrac{KM^2 + MN^2 - KN^2}{2 \cdot KM \cdot MN}$;

$$\cos(\angle KMN) = \frac{18^2 + 4^2 - 22 \cdot 18}{2 \cdot 18 \cdot 4} = \frac{324 + 16 - 396}{2 \cdot 18 \cdot 4} =$$

$$= -\frac{56}{8 \cdot 18} = -\frac{7}{18},$$

тогда $\sin(\angle KMN) = \sqrt{1 - \left(-\dfrac{7}{18}\right)^2} =$

$$= \frac{\sqrt{(18+7)(18-7)}}{18} = \frac{5}{18}\sqrt{11}.$$

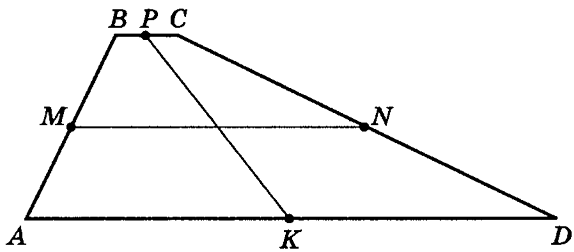
д) $R_{\triangle KMN} = \dfrac{KN}{2\sin(\angle KMN)}$;

$$R_{\triangle KMN} = \frac{6\sqrt{11}}{2 \cdot \frac{5}{18}\sqrt{11}} = \frac{6 \cdot 18}{10} = \boxed{10{,}8}.$$

6. Углы при одном из оснований трапеции равны $64°$ и $26°$, а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 11 и 10. Найдите основания трапеции.

Дано:
$ABCD$ — трапеция
$\angle A = 64°$
$\angle D = 26°$
Точки M, P, N и K — середины сторон
$MN = 11$
$PK = 10$

AD, BC

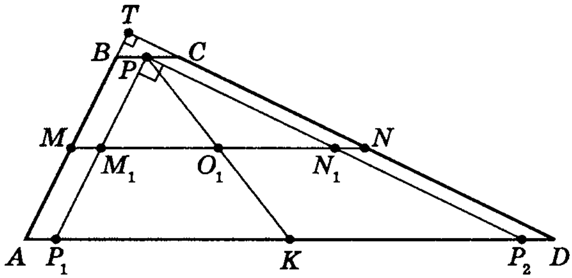


а) Напомним известные геометрические факты.

1. Если через середины оснований трапеции провести прямую, то ей принадлежат: точка пересечения продолжений боковых сторон, точка пересечения диагоналей трапеции и середина средней линии трапеции.
2. Для любого прямоугольного треугольника медиана, проведенная из вершины прямого угла, равна средней линии этого треугольника, соединяющей середины катетов.

б) 1. Проведем доп. построение.
$PP_1 \parallel AB$, где $P_1 \in AD$;
$PP_2 \parallel DC$, где $P_2 \in AD$, $\quad (AB) \cup (DC) = T$.

2. Так как сумма углов при основании трапеции равна $90°$, то $\triangle ATD$ — прямоугольный, для него TK — медиана, а значит, TK равна половине гипотенузы AD, а также радиусу описанной около $\triangle ATK$ окружности ($(AB) \cup (DC) = T$).



Как следствие, $P_1P_2 = 2P_1K = 2PK$
и $P_1P_2 = AD - BC$.

в) Пусть $BC = 2x$, $AD = 2y$. Тогда

$$\frac{AD + BC}{2} = \frac{2y + 2x}{2} = y + x = MN = 11;$$

$$AD - BC = 2y - 2x = P_1P_2 = 2PK = 20.$$

Значит, $\begin{cases} y + x = 11 \\ y - x = 10 \end{cases}$; $2y = 21$ и $2x = 1$,

следовательно, $AD = 21$ и $BC = 1$.

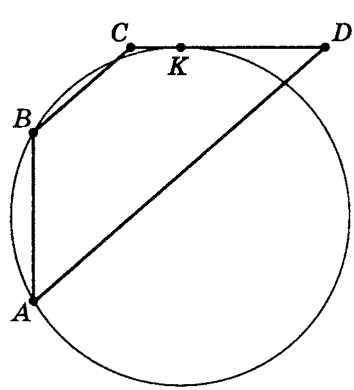
Примечание. Так как $PK = M_1N_1$, то $MN > PK$, что важно для понимания корректности условий задачи.

7. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны, соответственно, 45 и 15, а сумма углов при основании трапеции равна 90°. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся прямой CD в точке K, если $AB = 9$.

Дано:

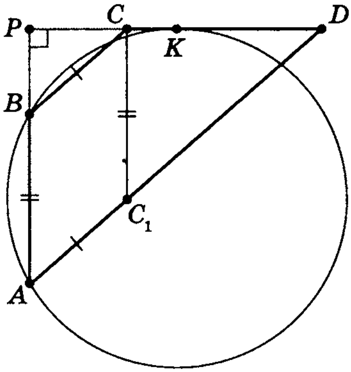
$ABCD$ — трапеция
$BC \parallel AD$
$\angle A + \angle D = 90^\circ$
$BC = 15$, $AD = 45$
AB — хорда окр (R),
$AB = 9$
окр (R) касается
прямой CD

$R_{\circ}$



а) Сделаем доп. построение:

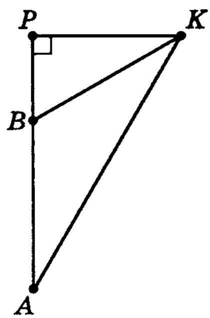
$CC_1 \parallel AB$, тогда $AC_1 = BC$; $AB = CC_1$.



б) $\dfrac{AP}{AD} = \dfrac{CC_1}{C_1D}$, тогда

$AP = \dfrac{AD \cdot CC_1}{C_1D}$, т. е. $AP = \dfrac{45 \cdot 9}{30} = 13{,}5$

и $PB = AP - AB$, т. е. $PB = 4{,}5$.



в) $PK^2 = AP \cdot PB$

(см. теорему 2, с. 200).

$PK^2 = \dfrac{27}{2} \cdot \dfrac{9}{2} = \dfrac{81 \cdot 3}{4}$; $PK = \dfrac{9}{2}\sqrt{3}$.

$BK^2 = PB^2 + PK^2$;

$BK^2 = \left(\dfrac{9}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{9}{2}\right)^2 \cdot 3,$

т. е. $BK = \dfrac{9}{2}\sqrt{1+3} = 9$, значит, $BK = AB$.

$AK^2 = AP^2 + PK^2$; $AK^2 = \left(\dfrac{27}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{9}{2}\right)^2 \cdot 3,$

т. е. $AK = \dfrac{9}{2}\sqrt{12} = 9\sqrt{3}$, значит, $AK = 2 \cdot PK$.

Следовательно, $\angle PAK = 30^\circ$, т. е. $\angle BAK = 30^\circ$.

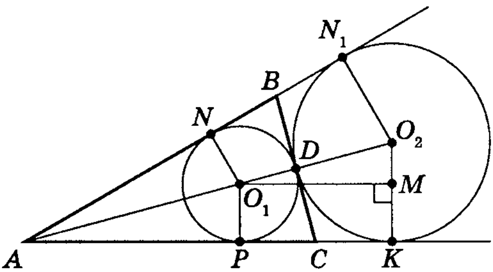
г) $R_{\circ\triangle ABK} = \dfrac{BK}{2\sin(\angle BAK)}$, т. е. $R_{\circ\triangle ABK} = \dfrac{9}{2 \cdot \sin 30^\circ} = \boxed{9}$.

8. В равнобедренном треугольнике ABC основание BC равно 12. В продолжении сторон AB и AC вписана окружность радиуса, равного 8, касающаяся сторон и основания BC. Найдите радиус вписанной в $\triangle ABC$ окружности.

Дано:

Окр (O_1) вписана в $\triangle ABC$
Окр (O_2) вневписана в $\triangle ABC$
$R_{O_2} = 8$; $BC = 12$

R_{O_1}



Сделаем доп. построение. Пусть точки P, K, N и N_1 — точки касания окр (O_1) и окр (O_2) сторон угла BAC. Тогда $O_1P \perp (AC)$, $O_2K \perp (AC)$, $O_1N \perp (AB)$ и $O_2N_1 \perp (AB)$.

Следовательно, (AO_2) — биссектриса угла BAC, причем $O_1 \in (AO_2)$. Точка $D =$ окр $(O_1) \cap$ окр (O_2).

Значит, $D \in (AO_2)$. Так как $AB = AC$, $AO_2 \perp BC$

($l_{BC} \equiv H_{BC} \equiv m_{BC}$), то точка $D \in BC$, которая касается одновременно окр (O_1) и окр (O_2).

а) O_2C — биссектриса $\angle DCK$, O_1C — биссектриса $\angle DCP$, значит, $\angle O_1CO_2 = 90°$, так как

$$\angle DCK + \angle DCP = 180°; \quad \angle O_1CD + \angle O_2CD = 90°.$$

б) Очевидно, что $O_1O_2 \perp BC$, тогда $DC^2 = O_1D \cdot O_2D$ (см. теорему 3 (4), с. 124).

Следовательно, $6^2 = 8 \cdot O_1D$, т. е. $O_1D = \dfrac{35}{8} = \dfrac{9}{2} = R_{O_1}$.

в) Доп. построение: $O_1M \perp O_2K$,

где $O_1M = \sqrt{(O_1D + O_2D)^2 - (O_2K - MK)^2}$, т. е.

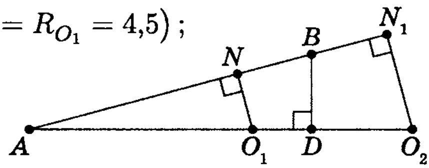
$$O_1M = \sqrt{\left(\frac{9}{2}+8\right)^2 - \left(\frac{9}{2}-8\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{25}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{625-49} = 12 = PK.$$

Можно проще, если понимать, что $DC = PC = CK = 6$.

г) $\dfrac{NO_1}{AO_1} = \dfrac{N_1O_2}{AO_2}$. Пусть $AO_1 = x$, тогда

$$\frac{4{,}5}{x} = \frac{8}{x+12{,}5} \quad (NO_1 = R_{O_1} = 4{,}5);$$



$$4{,}5(x+12{,}5) = 8x;$$

$$4{,}5 + \frac{9}{2}\cdot\frac{25}{2} = 8x;$$

$$3{,}5x = \frac{225}{4}; \quad x = \frac{225}{7\cdot 2} = 16\frac{1}{14};$$

д) $AD = AO_1 + R_{O_1}$.

$$AD = 16\frac{1}{14} + 4{,}5 = 20\frac{1}{14} + \frac{1}{2} = 20\frac{8}{14} = 20\frac{4}{7}.$$

е) $AB = \sqrt{AD^2 + DB^2}$;

$$AB = \sqrt{\left(20\frac{4}{7}\right)^2 + 6^2} = \sqrt{\left(\frac{144}{7}\right)^2 + 6^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{6^2\cdot 24^2 + 6^2\cdot 7^2}}{7} = \frac{6}{7}\sqrt{24^2+7^2} = \frac{6\cdot 25}{7} = \frac{150}{7} = 21\frac{3}{7}.$$

ж) $\sin(\angle ABD) = \dfrac{AD}{AB}$; $\sin(\angle ABD) = \dfrac{\frac{144}{7}}{\frac{150}{7}} = \dfrac{144}{150} = \dfrac{72}{75} = \dfrac{24}{25}$.

з) $R_{O_1\triangle ABC} = \dfrac{AB}{2\sin(\angle ABD)}$;

$$R_{O_1\triangle ABC} = \frac{\frac{150}{7}}{2\cdot\frac{24}{25}} = \frac{150\cdot 25}{7\cdot 48} = \frac{25^2}{56} = \frac{625}{56} = 11\frac{9}{56}.$$

Итак, $R_{O_1\triangle ABC} = \boxed{11\frac{9}{56}}$.

Самостоятельная работа 7

1. В треугольнике ABC вершины имеют координаты $A(1;1)$, $B(3;10)$ и $C(8;2)$. Найдите тангенс угла A.

2. В равнобедренной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны. Средняя линия трапеции равна 10. Найдите площадь трапеции.

3. Расстояние от вершины $\triangle ABC$ до одной из его сторон равно 10. Известно, что $\triangle ABC$ — равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна 26. Найдите радиус описанной около $\triangle ABC$ окружности.

4. Две окружности с центрами O_1 и O_3 и радиусами, равными 2 и 5, касаются друг друга внешним образом, а внутренним образом касаются окружности с центром O_2 и радиусом, равным 10. Найдите угол $O_1O_2O_3$.

5. Окружности радиусов 3 и 8 касаются друг друга. Через центр одной из них проведены две прямых, каждая из которых касается другой окружности, а A и B — точки касания. Найдите расстояние между точками A и B.

6. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны, соответственно, 15 и 5, а сумма углов при одном из оснований трапеции равна $90°$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся прямой DC, если $AB = 3$.

7. Углы при одном из оснований трапеции равны $50°$ и $40°$, а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 15 и 13. Найдите основания трапеции.

8. Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 12. Окружность радиуса 9 с центром вне этого треугольника касается продолжения боковых сторон треугольника, а также основания AC. Найдите радиусы окружностей, вписанной и описанной около треугольника ABC.

Домашняя тренировочная работа

1. В тупоугольном треугольнике ABC наибольшая сторона BC равна 14, а синусы прилежащих к ней углов равны $\frac{3}{5}$ и $\frac{5}{13}$. Найдите синус наибольшего угла, остальные стороны и площадь треугольника ABC.

2. В четырехугольнике $ABCD$ сторона AD равна 63. Стороны AB и AD образуют тупой угол, синус которого равен $\frac{12}{13}$. Стороны AD и DC тоже образуют тупой угол, синус которого равен $\frac{8}{17}$. Сторона AD образует с диагональю AC угол, синус которого равен $\frac{5}{13}$, а с диагональю DB угол, синус которого равен $\frac{15}{17}$. Найдите: все неизвестные стороны, диагонали и площадь $ABCD$, радиус описанной около $\triangle AOD$ окружности (O — точка пересечения диагоналей) и радиус вписанной в $\triangle ABD$ окружности. Выясните, является ли $ABCD$ трапецией.

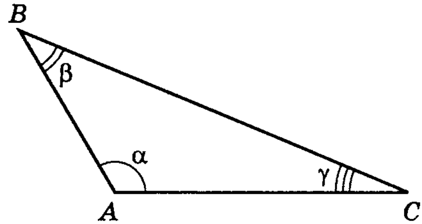
3. Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C. Докажите, что $AD \parallel BC$. Найдите $S_{\triangle AKB}$, если радиусы окружностей равны 4 и 1.

4. Окружности радиусов 2 и 3 соответственно с центрами O_1 и O_2, касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1 = 30°$.

Решение домашней тренировочной работы

1. Дано:

$\triangle ABC$
$BC = 14$
$\sin\beta = \dfrac{3}{5}$
$\sin\gamma = \dfrac{5}{13}$



а) $\sin\alpha$
б) AB
в) AC
г) $S_{\triangle ABC}$

а) Так как $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, то
$\sin\alpha = \sin\big(180° - (\beta + \gamma)\big) = \sin(\beta + \gamma)$.
Известно, что $\boxed{\sin(\beta + \gamma) = \sin\beta \cdot \cos\gamma + \sin\gamma \cdot \cos\beta}$.
Чтобы воспользоваться этой формулой, необходимо вычислить множители.

$$\cos\gamma = \sqrt{1 - \sin^2\gamma}, \text{ т. е. } \cos\gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13};$$

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta}, \text{ т. е. } \cos\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

Теперь, используя данные вычисления и формулу, получим $\sin\alpha = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{12}{13} + \dfrac{5}{13} \cdot \dfrac{4}{5} = \boxed{\dfrac{56}{65}}$.

б) Так как $\dfrac{BC}{\sin\alpha} = \dfrac{AB}{\sin\gamma} = \dfrac{AC}{\sin\beta}$ (теорема синусов), то

$$AB = \frac{BC \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha}, \quad AB = \frac{14 \cdot \frac{5}{13}}{56} = \frac{14 \cdot 5 \cdot 65}{56 \cdot 13} = \frac{5 \cdot 5}{4} = \boxed{6\frac{1}{4}}.$$

в) $$AC = \frac{BC \cdot \sin\beta}{\sin\alpha}; \quad AC = \frac{14 \cdot \frac{3}{5}}{\frac{56}{65}} = \frac{14 \cdot 3 \cdot 65}{56 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 13}{4} = \boxed{9\frac{3}{4}}.$$

г) Так как $\dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$,

то $b = \dfrac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$ и $c = \dfrac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$.

Тогда $\boxed{S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a^2\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha}}$.

Значит, $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{14^2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}}{\frac{56}{65}} = \dfrac{14\cdot 14\cdot 3\cdot 5\cdot 65}{2\cdot 5\cdot 13\cdot 56} =$

$= \dfrac{7\cdot 3\cdot 5}{4} = \boxed{26\frac{1}{4}}$.

2. Дано:

$ABCD$ — четырехугольник

$AD = 63$

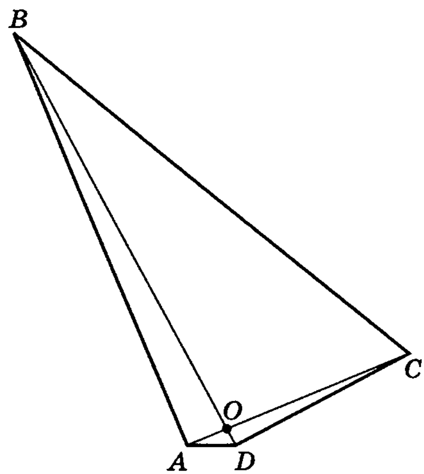
$\angle DAB = \alpha$ $(\alpha > 90^\circ)$

$\angle ADC = \beta$ $(\beta > 90^\circ)$

$\angle DAC = \alpha_1$, $\angle ADB = \beta_1$

$\sin\alpha = \dfrac{12}{13}$, $\sin\beta = \dfrac{8}{17}$

$\sin\alpha_1 = \dfrac{5}{13}$, $\sin\beta_1 = \dfrac{15}{17}$



а) AB д) BC

б) DC е) S_{ABCD}

в) BD ж) $R_{\text{о}\triangle AOD}$

г) AC з) $r_{\text{в}\triangle ABD}$

и) Вопрос: является ли $ABCD$ трапецией?

Напомним, что для $\triangle ABC$ $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$ (теорема синусов).

Также верны формулы для синуса суммы и разности:

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cdot\cos\alpha$;

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \sin\beta\cdot\cos\alpha$.

а) $\sin(\angle ABD) = \sin\big(180^\circ - (\alpha + \beta_1)\big) = \sin(\alpha + \beta_1);$

$\sin(\alpha + \beta_1) = \sin\alpha \cdot \cos\beta_1 + \sin\beta_1 \cdot \cos\alpha,$

где $\cos\beta_1 = \sqrt{1 - \sin^2\beta_1};\quad \cos\beta_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{15}{17}\right)^2} = \frac{8}{17}.$

Так как $\alpha > 90^\circ$, то $\cos\alpha < 0$.

$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha};\quad \cos\alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = -\frac{5}{13}.$

Тогда $\sin(\angle ABD) = \sin(\alpha + \beta_1) = \frac{12}{13} \cdot \frac{8}{17} - \frac{5}{13} \cdot \frac{15}{17} = \frac{21}{13 \cdot 17}.$

Так как $\dfrac{AB}{\sin\beta_1} = \dfrac{AD}{\sin(\angle ABD)}$, то

$$AB = \frac{3 \cdot 21 \cdot \frac{15}{17}}{\frac{21}{13 \cdot 17}} = 3 \cdot 13 \cdot 15 = \boxed{585}.$$

б) $\sin(\angle ACD) = \sin\big(180^\circ - (\alpha_1 + \beta)\big) = \sin(\alpha_1 + \beta);$

$\sin(\alpha_1 + \beta) = \sin\alpha_1 \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha_1.$

Так как $\beta > 90^\circ$, то

$\cos\beta = -\sqrt{1 - \sin^2\beta};\quad \cos\beta = -\sqrt{1 - \left(\frac{8}{17}\right)^2} = -\frac{15}{17};$

$\cos\alpha_1 = \sqrt{1 - \sin^2\alpha_1};\quad \cos\alpha_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}.$

$\sin(\angle ACD) = \sin(\alpha_1 + \beta) = \frac{5}{13} \cdot \left(-\frac{15}{17}\right) + \frac{8}{17} \cdot \frac{12}{13} = \frac{21}{17 \cdot 13}.$

Так как $\dfrac{DC}{\sin\alpha_1} = \dfrac{AD}{\sin(\angle ACD)}$,

то $DC = \dfrac{3 \cdot 21 \cdot \frac{5}{13} \cdot 13 \cdot 17}{21} = 3 \cdot 5 \cdot 17 = \boxed{255}.$

в) Так как $\dfrac{BD}{\sin\alpha} = \dfrac{AD}{\sin(\angle ABD)}$,

то $BD = \dfrac{3\cdot 21\cdot \frac{12}{13}}{\frac{21}{17\cdot 13}} = 3\cdot 12\cdot 17 = \boxed{612}$.

г) Так как $\dfrac{AC}{\sin\beta} = \dfrac{AD}{\sin(\angle ACD)}$,

то $AC = \dfrac{3\cdot 21\cdot \frac{8}{17}}{\frac{21}{17\cdot 13}} = 3\cdot 8\cdot 13 = \boxed{312}$.

д) $\sin(\angle BAC) = \sin(\alpha - \alpha_1) = \sin\alpha\cdot\cos\alpha_1 - \sin\alpha_1\cdot\cos\alpha$.

$\cos\alpha_1 = \sqrt{1-\sin\alpha_1^2}$; $\quad \cos\alpha_1 = \sqrt{1-\left(\dfrac{5}{13}\right)^2} = \dfrac{12}{13}$.

Так как $\alpha > 90^\circ$, то $\cos\alpha < 0$, тогда $\cos\alpha = -\dfrac{5}{13}$ (см. пункт а).

Тогда $\sin(\angle BAC) = \dfrac{12}{13}\cdot\dfrac{12}{13} - \dfrac{5}{13}\cdot\left(-\dfrac{5}{13}\right) = \dfrac{169}{169} = 1$.

Таким образом, $\sin(\angle BAC) = 1$, т.е. $\angle BAC = 90^\circ$.

Следовательно, $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}$;

$BC = \sqrt{585^2 + 312^2} = \sqrt{3^2\cdot 13^2\cdot 15^2 + 3^2\cdot 13^2\cdot 8^2} =$

$= 3\cdot 13\cdot\sqrt{225+64} = 3\cdot 13\cdot 17 = \boxed{663}$.

е) $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}\cdot BD\cdot AC\cdot\sin\left(\widehat{BD;AC}\right)$.

$\sin(\angle AOD) = \sin\big(180^\circ - (\alpha_1+\beta_1)\big) = \sin(\alpha_1+\beta_1) =$

$= \sin\alpha_1\cdot\cos\beta_1 + \cos\alpha_1\cdot\sin\beta_1$.

$$\cos\beta_1 = \sqrt{1-\sin^2\beta_1}; \quad \cos\beta_1 = \sqrt{1-\left(\frac{15}{17}\right)^2} = \frac{8}{17}.$$

$$\cos\alpha_1 = \sqrt{1-\sin^2\alpha_1}; \quad \cos\alpha_1 = \sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}.$$

$$\sin(\angle AOD) = \sin(\alpha_1+\beta_1) = \frac{5}{13}\cdot\frac{8}{17} + \frac{15}{17}\cdot\frac{12}{13} = \frac{220}{17\cdot 13}.$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot 612\cdot 312\cdot\frac{220}{17\cdot 13} = \frac{3\cdot 12\cdot 17\cdot 3\cdot 8\cdot 13\cdot 220}{2\cdot 17\cdot 13} =$$

$$= 864\cdot 110 = \boxed{95\,040}.$$

ж) $$R_{\text{o}\triangle AOD} = \frac{AD}{2\cdot\sin(\angle AOD)};$$

$$R_{\text{o}\triangle AOD} = \frac{63}{2\cdot\frac{220}{17\cdot 13}} = \frac{63\cdot 17\cdot 13}{2\cdot 220} = \frac{63\cdot 221}{440} =$$

$$= \frac{13\,923}{440} = \boxed{31\frac{283}{440}}.$$

з) $$r_{\text{в}} = \frac{S_{\triangle ABD}}{P_{\triangle ABD}}.$$

1. $$P_{\triangle ABD} = \frac{585+612+63}{2} = 630;$$

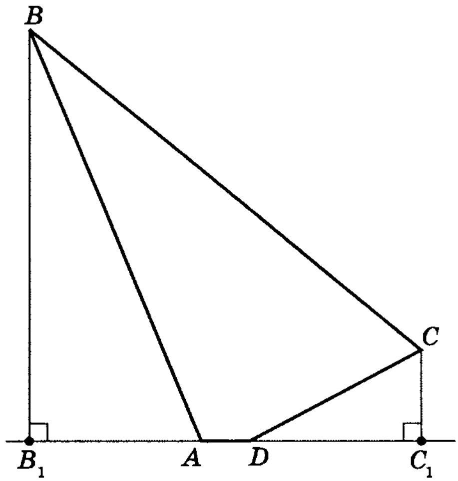
2. $$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot AD\cdot\sin\alpha;$$

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}\cdot 585\cdot 63\cdot\frac{12}{13} = \frac{1}{2}\cdot 45\cdot 63\cdot 12 =$$

$$= 270\cdot 63 = 17\,010.$$

Значит, $r_{\text{в}} = \dfrac{17\,010}{630} = \boxed{27}$.

и) Ответ: нет.



Из $\triangle ABB_1$:

$BB_1 \perp (AD)$; $\quad BB_1 = AB \cdot \sin\alpha$;

$BB_1 = 585 \cdot \dfrac{12}{13} = 45 \cdot 12 = 540.$

$CC_1 \perp (AD)$; $\quad CC_1 = DC \cdot \sin\beta$;

$CC_1 = 255 \cdot \dfrac{8}{17} = 120.$

Так как $BB_1 \neq CC_1$, то $BC \nparallel AD$.

Значит, $ABCD$ трапецией не является.

3. Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.

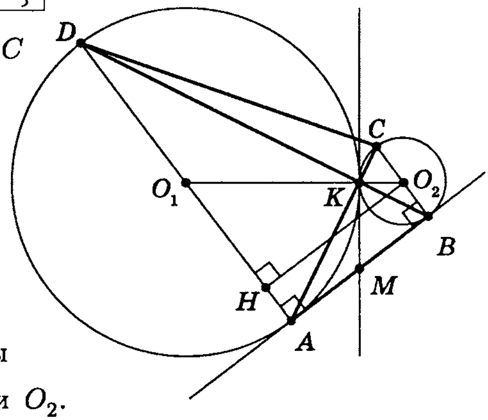
а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника AKB, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

Дано:

$\text{Окр}\,(R_1) \cap \text{окр}\,(R_2) = K$
$AB \cap \text{окр}\,(R_1) = A$
$AB \cap \text{окр}\,(R_2) = B$
$BK \cap \text{окр}\,(R_1) = \{D; K\}$
$AK \cap \text{окр}\,(R_2) = \{C; K\}$

а) Докажите: $AD \parallel BC$
б) $S_{\triangle AKB} = ?$
при $R_1 = 4$, $R_2 = 1$



а) Обозначим центры окружностей O_1 и O_2.

Пусть общая касательная, проведенная к окружностям в точке K, пересекает AB в точке M. По свойству касательных, проведенных из одной точки, $AM = KM$ и $BM = KM$, тогда $AM = BM$ и $KM = m_{AB}$.

Треугольник AKB, у которого медиана равна половине стороны, к которой она проведена, — прямоугольный.

Вписаный угол AKD — прямой, поэтому он опирается на диаметр AD. Значит, $O_1 \in AD$ и $AD \perp AB$.

Аналогично получаем, что $BC \perp AB$.

Следовательно, прямые AD и AB параллельны.

б) Пусть, для определенности, первая окружность имеет радиус 4, а радиус второй равен 1.

Треугольники BKC и AKD подобны, $\dfrac{AD}{BC} = 4$.

Пусть $S_{\triangle BKC} = S$, тогда $S_{\triangle AKD} = 16S$.

У треугольников AKD и AKB общая высота, следовательно, $\frac{S_{\triangle AKD}}{S_{\triangle AKB}} = \frac{DK}{KB}$.

С другой стороны $\frac{DK}{KB} = \frac{AD}{BC}$,

так как $\triangle AKD \sim \triangle BKC$.

Тогда $S_{\triangle AKB} = 4S$ $(AK = 4KC)$.

Аналогично $S_{CKD} = 4S$.

Так как $S_{\triangle DCB} = S_{\triangle ACB}$, то $S_{\triangle DKC} = S_{\triangle ABK}$.

Площадь трапеции $ABCD$ равна $25S$.

Так как $S_{\triangle AKB} = 4S = S_{\triangle DKC}$,

то $S_{\triangle AKD} = 4 \cdot 4S$, $S_{\triangle BKC} = S$.

Вычислим площадь трапеции $ABCD$.

Проведем к AD перпендикуляр O_2H, равный высоте трапеции, и найдем его из прямоугольного треугольника O_2HO_1: $O_2H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1H^2} = 4$.

Тогда $S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot AB = 20$.

Следовательно, $25S = 20$,

откуда $S = 0{,}8$ и $S_{AKB} = 4S = 3{,}2$.

Ответ: 3,2.

4. Окружности радиусов 2 и 3, с центрами O_1 и O_2 соответственно, касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1 = 30°$.

Точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой.

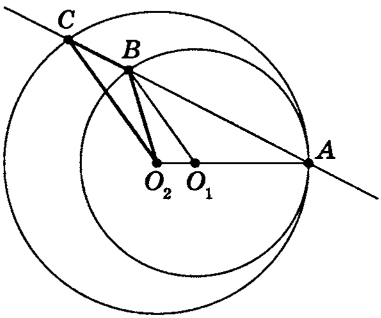
Так как треугольники BO_1A и CO_2A равнобедренные,

и $\angle ABO_1 = \angle BAO_1 = \angle CAO_2 = \angle ACO_2 = 30°$,

то $AB = 2O_1A \cdot \cos 30° = 2\sqrt{3}$ и $AC = 2O_2A \cdot \cos 30° = 3\sqrt{3}$.

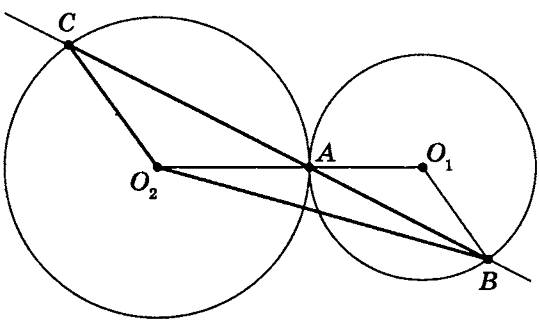
Возможны два случая.

Первый случай: окружности касаются внутренним образом, тогда точка B лежит между точками A и C, откуда $BC = AC - AB = \sqrt{3}$.



Тогда $S_{BCO_2} = \dfrac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin(BCO_2)}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

Второй случай: окружности касаются внешним образом, тогда точка A лежит между точками B и C, откуда $BC = AC + AB = 5\sqrt{3}$.



Тогда $S_{BCO_2} = \dfrac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin(\angle BCO_2)}{2} = \dfrac{15\sqrt{3}}{4}$.

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ или $\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$.

Самостоятельная работа 8 (Задачи-ловушки)

Вариант 1

Какие из следующих утверждений верны?

1. В неравных треугольниках против неравных сторон лежат неравные углы.

2. Биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника, противолежащей основанию, параллельна основанию.

3. Если сторона и три угла одного треугольника равны стороне и трем углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

4. Каждая биссектриса делит остроугольный разносторонний треугольник на два треугольника, один из которых тупоугольный, а другой — остроугольный.

5. Если диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, то эта трапеция равнобедренная.

6. Существует треугольник, три высоты которого пересекаются в одной из его вершин.

7. Трапеция разделена диагоналями на четыре треугольника, из которых два равновеликих.

8. Если стороны треугольника относятся как $n:(n+1):(n+2)$, где n — любое натуральное число, то этот треугольник остроугольный.

9. Около четырехугольника, вершинами которого являются точки пересечения биссектрис углов трапеции, можно описать окружность.

10. Существует треугольник, внешние углы которого относятся как $1:2:3$.

Вариант 2

Какие из следующих утверждений верны?

1. Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник.
2. Существует трапеция, у которой диагонали точкой пересечения делятся пополам.
3. Если диагонали четырехугольника равны и взаимно перпендикулярны, то этот четырехугольник — ромб.
4. Две прямые, проходящие через центр симметрии параллелограмма, делят его на четыре попарно равновеликие фигуры.
5. У любой трапеции разность оснований больше разности боковых сторон.
6. Если в выпуклом четырехугольнике диагонали равны, и хотя бы один из углов прямой, то этот четырехугольник — прямоугольник.
7. Любой треугольник можно разрезать на две части, из которых можно составить параллелограмм.
8. Середины сторон любого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.
9. Существует четырехугольник, который можно разрезать двумя прямыми на шесть частей.
10. Средняя линия трапеции разбивает ее на две подобные трапеции.

Примечание. Хотя ответы к самостоятельной работе 8 даны в стиле «да»-«нет», необходимо очень подробно, логически обоснованно записать решение. Это связано с тем, что интуитивно очевидный ответ при более тщательном рассмотрении оказывается не всегда верным (см. краткое решение в конце книги).

Вариант 3

Какие из следующих утверждений верны?

1. Если два треугольника имеют по равному углу, то их площади относятся как произведения сторон, заключающих эти углы.
2. Не существует треугольника, у которого две высоты больше $1{,}41$ дм, а площадь меньше 1 дм^2.
3. Медианы любого треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников.
4. Если периметр параллелограмма больше 100 м, то его площадь не может быть меньше 10 м^2.
5. Площадь четырехугольника с вершинами в серединах сторон произвольного выпуклого четырехугольника не превышает половины площади этого выпуклого четырехугольника.
6. Площадь равностороннего треугольника, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, не равна сумме площадей равносторонних треугольников, построенных на его катетах.
7. Существует треугольник, медиана которого делит его на два тупоугольных треугольника.
8. Существует выпуклый многоугольник, у которого ровно десять диагоналей.
9. Существует трапеция, диагональ которой разбивает трапецию на два подобных треугольника.
10. Существует трапеция, средняя линия которой разбивает ее на две трапеции, площади которых относятся как $1 : 3$.

Вариант 4

Какие из следующих утверждений верны?

1. Четырехугольник, суммы противоположных углов которого равны, и две противоположные стороны которого равны, является параллелограммом, если две другие стороны параллельны.

2. Если в параллелограмм можно вписать окружность, то его диагонали взаимно перпендикулярны.

3. Не существует четырехугольника, отличного от квадрата и равнобедренной трапеции, около которого можно описать окружность и в который можно вписать окружность.

4. Любой треугольник можно разделить на три тупоугольных треугольника.

5. Если центр описанной около треугольника окружности лежит на медиане, то этот треугольник равнобедренный.

6. Существует треугольник, две биссектрисы которого пересекаются под прямым углом.

7. Если диагонали трапеции перпендикулярны боковым сторонам, то эта трапеция равнобедренная.

8. Точки пересечения биссектрис параллелограмма есть вершины квадрата.

9. Если из вершины параллелограмма проведены два отрезка, пересекающие середины смежных сторон, то они делят одну из диагоналей на три равные части.

10. Существует равнобедренная трапеция, у которой диагональ равна большему основанию. При каком значении тупого угла это возможно?

Итоговые самостоятельные работы

Итоговая самостоятельная работа 1

1. Угол между диагоналями прямоугольника равен $60°$, а сумма диагонали с наименьшей стороной прямоугольника равна 36. Найдите диагональ прямоугольника.
2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы при вершинах B и C относятся как $5 : 3$. Угол B равен разности углов при вершинах A и C, а угол при вершине A больше угла при вершине D на $12°$. Найдите угол при вершине D.
3. Даны два подобных прямоугольных треугольника $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, причем катеты $AB = 2$, $AC = 1{,}2$, а катет $A_1C_1 = 4{,}5$. Найдите катет A_1B_1.
4. В прямоугольной трапеции основания равны 4 и 8. Наименьшая диагональ трапеции равна $\sqrt{65}$. Найдите площадь такой трапеции.
5. Даны два выпуклых подобных четырехугольника $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Стороны $ABCD$ последовательно относятся друг к другу как $2 : 4 : 3 : 6$. Периметр $A_1B_1C_1D_1$ равен 150. Найдите наименьшую сторону четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$.
6. Периметр параллелограмма равен 84. Высоты параллелограмма, опущенные из одной вершины, относятся как $4 : 3$. Найдите наибольшую сторону параллелограмма.
7. Высота трапеции равна H. Три стороны трапеции равны половине основания. Найдите площадь такой трапеции.
8. Смежные стороны параллелограмма равны 6 и 5, а площадь равна $10\sqrt{5}$. Найдите наибольшую диагональ.
9. Стороны прямоугольника относятся как $a : b$, а диагональ равна $2R$. Найдите площадь прямоугольника.
10. В равнобедренном треугольнике радиус вписанной окружности равен 0,2 высоты, проведенной к основанию. Периметр треугольника равен 60. Найдите равные стороны треугольника.

Итоговая самостоятельная работа 1. Моделирование условий

1. Угол между диагоналями прямоугольника равен 60°, а сумма диагонали с наименьшей стороной прямоугольника равна 36. Найдите диагональ прямоугольника.

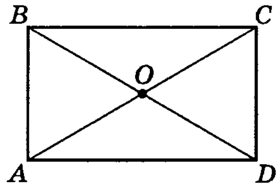
Дано:

$ABCD$ — прямоугольник

$\left(\widehat{AC;BD}\right) = 60^\circ$

$AC + CD = 36$

BD



2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы при вершинах B и C относятся как $5 : 3$. Угол B равен разности углов при вершинах A и C, а угол при вершине A больше угла при вершине D на 12°. Найдите угол при вершине D.

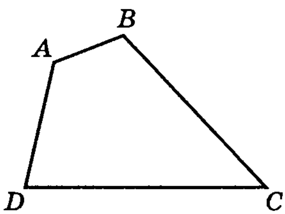
Дано:

$\angle B : \angle C = 5 : 3$

$\angle B = \angle A - \angle C$

$\angle A = \angle D + 12^\circ$

$\angle D$



3. Даны два подобных прямоугольных треугольника $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, причем катеты $AB = 2$, $AC = 1{,}2$, а катет $A_1C_1 = 4{,}5$. Найдите катет A_1B_1.

Дано:

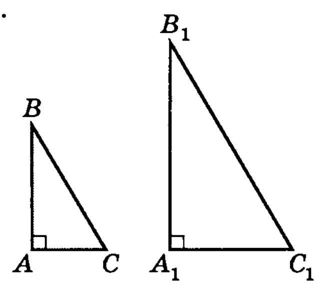
$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

$AB = 2$

$AC = 1{,}2$

$A_1C_1 = 4{,}5$

A_1B_1

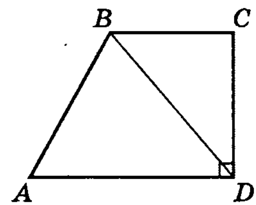


4. В прямоугольной трапеции основания равны 4 и 8. Наименьшая диагональ трапеции равна $\sqrt{65}$. Найдите площадь такой трапеции.

Дано:

$ABCD$
$BC = 4$
$BC \parallel AD$
$CD \perp AD$
$AD = 8$
$BD = \sqrt{65}$

S_{ABCD}

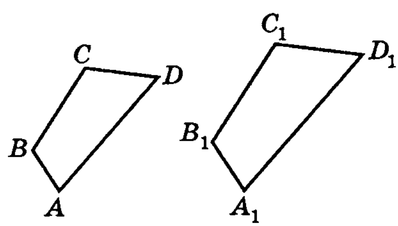


5. Даны два выпуклых подобных четырехугольника $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Стороны $ABCD$ последовательно относятся друг к другу как $2:4:3:6$. Периметр $A_1B_1C_1D_1$ равен 150. Найдите наименьшую сторону четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$.

Дано:

$ABCD \sim A_1B_1C_1D_1$
$AB : BC : CD : AD =$
$= 2 : 4 : 3 : 6$
$P_{A_1B_1C_1D_1} = 150$

A_1B_1

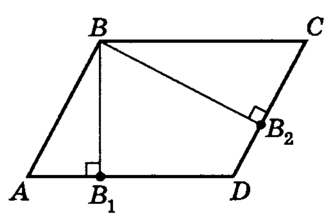


6. Периметр параллелограмма равен 84. Высоты параллелограмма, опущенные из одной вершины, относятся как $4:3$. Найдите наибольшую сторону параллелограмма.

Дано:

$ABCD$
$AD \parallel BC$
$AB \parallel DC$
$P_{ABCD} = 84$
$BB_1 : BB_2 = 4 : 3$

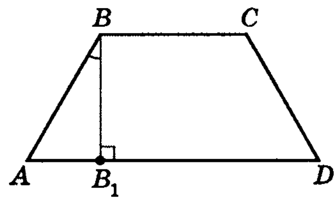
AD



7. Высота трапеции равна H. Три стороны трапеции равны половине основания. Найдите площадь такой трапеции.

Дано:
$ABCD$
$BC \parallel AD$
$BB_1 = H$
$AB = BC = CD = \dfrac{AD}{2}$

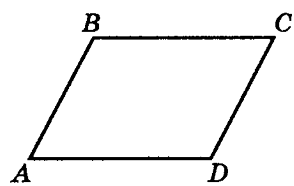
S_{ABCD}



8. Смежные стороны параллелограмма равны 6 и 5, а площадь равна $10\sqrt{5}$. Найдите наибольшую диагональ.

Дано:
$ABCD$
$AB \parallel DC$
$BC \parallel AD$
$AB = 6$
$BC = 5$
$S_{ABCD} = 10\sqrt{5}$

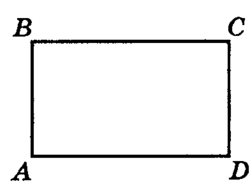
AC



9. Стороны прямоугольника относятся как $a : b$, а диагональ равна $2R$. Найдите площадь прямоугольника.

Дано:
$ABCD$ — прямоугольник
$AC = 2R$
$AB : BC = a : b$

S_{ABCD}



10. В равнобедренном треугольнике радиус вписанной окружности равен 0,2 высоты, проведенной к основанию. Периметр треугольника равен 60. Найдите равные стороны треугольника.

Дано:

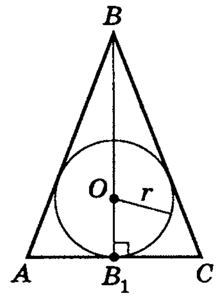
$\triangle ABC$

$AB = BC$

$r_{в} = 0{,}2BB_1$

$P_{\triangle ABC} = 60$

AB

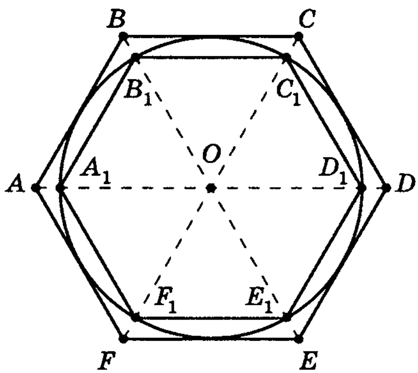


Итоговая самостоятельная работа 2

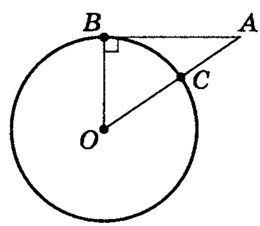
1. Как относятся площади вписанного и описанного около окружности правильных шестиугольников?
2. К окружности радиуса 5 из точки A проведена касательная длины $2\sqrt{6}$. Чему равно расстояние от точки A до ближайшей точки окружности?
3. К стороне треугольника, равной 60, проведены высота и медиана, равные 12 и 13 соответственно. Найдите наименьшую сторону треугольника.
4. В окружность вписали квадрат и прямоугольник. Угол между диагоналями прямоугольника равен α. Найдите отношение площади прямоугольника к площади квадрата.
5. Найдите радиус вписанной окружности равнобедренной трапеции с основаниями, равными 20 и 5.
6. В прямоугольном треугольнике высота, опущенная из вершины прямого угла, делит этот угол в отношении $2 : 1$. Найдите отношение площадей треугольников, на которые данный прямоугольный треугольник делит данная высота.
7. Окружности радиусов, равных соответственно 2 и 3, касаются внутренним образом. Чему равна наибольшая из хорд большей окружности, касающаяся меньшей?
8. В трапеции три стороны равны между собой, а диагонали равны наибольшему основанию. Найдите острый угол при основании трапеции.
9. Две окружности касаются друг друга и сторон прямого угла. Чему равно отношение их радиусов?
10. В квадрат со стороной, равной 1, вписан равносторонний треугольник, одна из вершин которого совпадает с вершиной квадрата, а две другие вершины принадлежат сторонам квадрата. Найдите площадь такого равностороннего треугольника.

Итоговая самостоятельная работа 2. Моделирование условий

1. Как относятся площади вписанного и описанного около окружности правильных шестиугольников?



2. К окружности радиуса 5 из точки A проведена касательная длины $2\sqrt{6}$. Чему равно расстояние от точки A до ближайшей точки окружности?

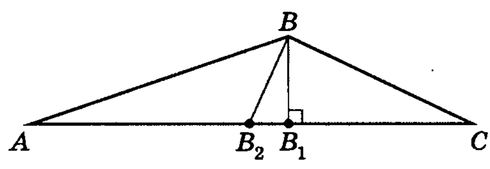


3. К стороне треугольника, равной 60, проведены высота и медиана, равные 12 и 13 соответственно. Найдите наименьшую сторону треугольника.

Дано:

$\triangle ABC$
$AC = 60$
$BB_1 \perp AC$
$AB_2 = B_2C$
$BB_1 = 12$
$BB_2 = 13$

AB



4. В окружность вписали квадрат и прямоугольник. Угол между диагоналями прямоугольника равен α. Найдите отношение площади прямоугольника к площади квадрата.

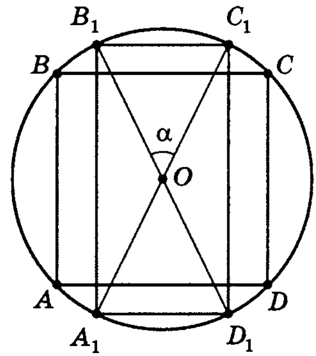
Дано:

$ABCD$ — квадрат

$A_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник

$\left(\widehat{A_1C_1; B_1D_1}\right) = \alpha$

$\dfrac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}}$



5. Найдите радиус вписанной окружности равнобедренной трапеции с основаниями, равными 20 и 5.

Дано:

$ABCD$

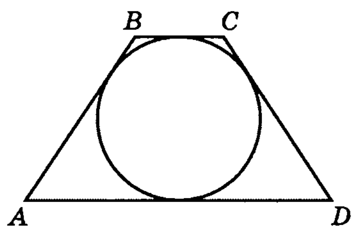
$BC \parallel AD$

$AB = CD$

$AD = 20$

$BC = 5$

$r_{\text{в}}$



6. В прямоугольном треугольнике высота, опущенная из вершины прямого угла, делит этот угол в отношении 2 : 1. Найдите отношение площадей треугольников, на которые данный прямоугольный треугольник делит данная высота.

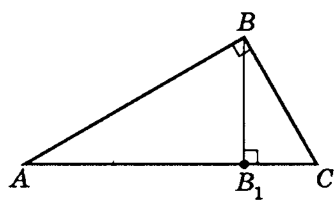
Дано:

$\triangle ABC$

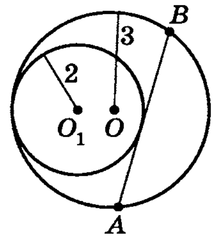
$AB \perp BC$

$\angle ABB_1 : \angle CBB_1 = 2 : 1$

$\dfrac{S_{\triangle ABB_1}}{S_{\triangle CBB_1}}$



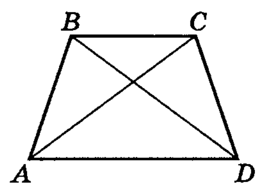
7. Окружности радиусов, равных соответственно 2 и 3, касаются внутренним образом. Чему равна наибольшая из хорд большей окружности, касающаяся меньшей?



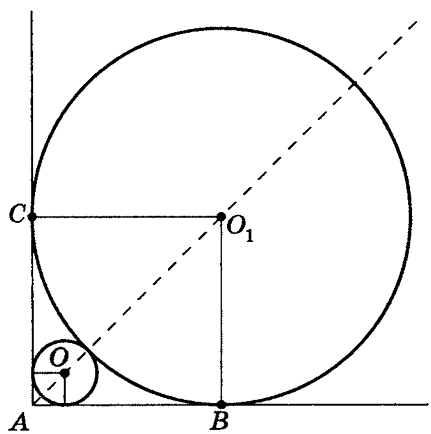
8. В трапеции три стороны равны между собой, а диагонали равны наибольшему основанию. Найдите острый угол при основании трапеции.

Дано:
$ABCD$
$BC \parallel AD$
$AB = BC = CD$
$AC = BD = AD$

$\angle BAD$



9. Две окружности касаются друг друга и сторон прямого угла. Чему равно отношение их радиусов?

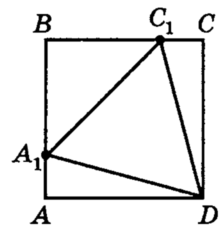


10. В квадрат со стороной, равной 1, вписан равносторонний треугольник, одна из вершин которого совпадает с вершиной квадрата, а две другие вершины принадлежат сторонам квадрата. Найдите площадь такого равностороннего треугольника.

Дано:

$ABCD$ — квадрат
$A_1 \in AB$, $C_1 \in BC$
$\triangle DA_1C_1$ — правильный
$AB = 1$

$S_{\triangle A_1DC_1}$



Итоговая самостоятельная работа 3

1. В прямоугольный треугольник с катетами, равными 10 и 24, вписали окружность. Найдите ее радиус.
2. В равнобедренной трапеции стороны основания относятся как 2 к 5. Диагональ трапеции является биссектрисой острого угла при основании. Найдите тангенс острого угла трапеции.
3. Основания трапеции равны 30 и 10, а боковые стороны — $3\sqrt{41}$ и 13. Найдите площадь трапеции.
4. Расстояние между параллельными хордами, равными 10 и 24, равно 17. Найдите площадь круга, окружность которого имеет такие хорды.
5. Диагонали трапеции равны 15 и 20, а высота трапеции равна 12. Найдите площадь такой трапеции.
6. В окружности радиуса 1 проведена хорда AB, равная $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ и хорда AC. Длина большей дуги, стягивающей хорду AC, равна сумме меньшей дуги хорды AB и числа 2. Найдите хорду AC.
7. Через центр вписанной в ромб окружности проведена высота, которая делит стороны ромба в отношении $3:2$. Найдите синус острого угла ромба.
8. Последовательность квадратов, начиная с единичного, такова, что вершины последующего квадрата, вписанного в предыдущий, делят стороны предыдущего в отношении $3:1$. Чему равна сумма площадей всех членов этой последовательности?
9. Радиус вписанной в равнобедренную трапецию окружности проведен к боковой стороне. Острый угол трапеции равен α. В каком отношении этот радиус делит боковую сторону?
10. Высота трапеции, проведенная через центр вписанной окружности, делит площадь трапеции в отношении $1:2$. Найдите отношение синусов острых углов трапеции.

Итоговая самостоятельная работа 3. Моделирование условий

1. В прямоугольный треугольник с катетами, равными 10 и 24, вписали окружность. Найдите ее радиус.

Дано:

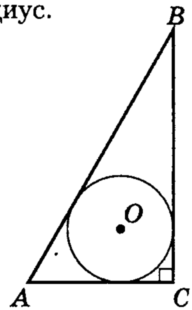
$\triangle ABC$

$AC \perp BC$

$AC = 10$

$BC = 24$

$r_{в}$



2. В равнобедренной трапеции стороны основания относятся как 2 к 5. Диагональ трапеции является биссектрисой острого угла при основании. Найдите тангенс острого угла трапеции.

Дано:

$ABCD$

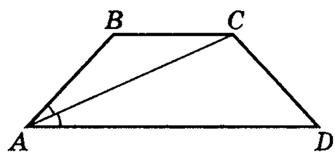
$BC \parallel AD$

$AB = CD$

$BC : AD = 2 : 5$

$\angle BAC = \angle DAC$

$\operatorname{tg}(\angle A)$



3. Основания трапеции равны 30 и 10, а боковые стороны — $3\sqrt{41}$ и 13. Найдите площадь трапеции.

Дано:

$ABCD$

$BC \parallel AD$

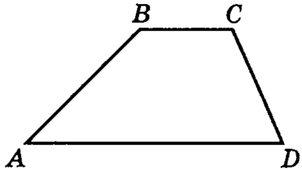
$BC = 10$

$AD = 30$

$CD = 13$

$AB = 3\sqrt{41}$

S_{ABCD}

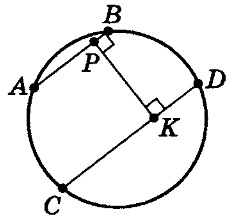


4. Расстояние между параллельными хордами, равными 10 и 24, равно 17. Найдите площадь круга, окружность которого имеет такие хорды.

Дано:

Окружность
$A, B, C, D \in$ окружности
$AB \parallel DC$
$AB = 10$
$DC = 24$
$\rho(AB; DC) = PK$
$PK = 17$

$S_{\text{кр}}$

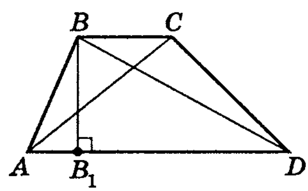


5. Диагонали трапеции равны 15 и 20, а высота трапеции равна 12. Найдите площадь такой трапеции.

Дано:

$ABCD$
$BC \parallel AD$
$BB_1 \perp AD$
$BB_1 = 12$
$AC = 15$
$BD = 20$

S_{ABCD}

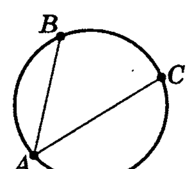


6. В окружности радиуса 1 проведены хорда AB, равная $\sqrt{2-\sqrt{2}}$, и хорда AC. Длина большей дуги, стягивающей хорду AC, равна сумме меньшей дуги хорды AB и числа 2. Найдите хорду AC.

Дано:

Окружность
$A, B, C \in$ окружности
$R = 1$
$AB = \sqrt{2-\sqrt{2}}$
$\smile ABC = 2 + \smile AB$

AC



7. Через центр вписанной в ромб окружности проведена высота, которая делит стороны ромба в отношении $3:2$. Найдите синус острого угла ромба.

Дано:

$ABCD$ — ромб

$AP : PB = 3 : 2$

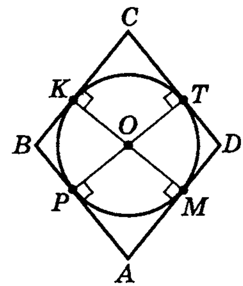
$\rho(AB; DC) = PT$

$\rho(BC; AD) = KM$

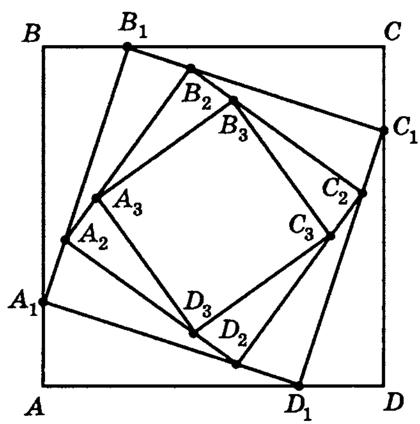
$O \in PT$, $O \in KM$

$K, T, M, P \in$ окружности

$\sin(\angle A)$



8. Последовательность квадратов, начиная с единичного, такова, что вершины последующего квадрата, вписанного в предыдущий, делят стороны предыдущего в отношении $3:1$. Чему равна сумма площадей всех членов этой последовательности?

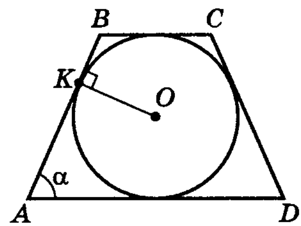


9. Радиус вписанной в равнобедренную трапецию окружности проведен к боковой стороне. Острый угол трапеции равен α. В каком отношении этот радиус делит боковую сторону?

Дано:

$ABCD$
O — центр окружности
$OK = r_{\text{в}}$
$BC \parallel AD$
$AB = CD$
$\angle A = \alpha$

$BK : AK$

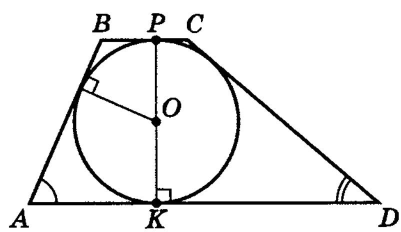


10. Высота трапеции, проведенная через центр вписанной окружности, делит площадь трапеции в отношении $1 : 2$. Найдите отношение синусов острых углов трапеции.

Дано:

$ABCD$
O — центр вписанной окружности
$BC \parallel AD$
$PK \perp AD$
Точка $O \in PK$
$S_{ABPK} : S_{KPCD} = 1 : 2$

$$\frac{\sin(\angle A)}{\sin(\angle D)}$$



Ответы

Ответы на лабораторные работы

Лабораторная работа 1

	a	b	c	$S_\triangle$	$r_в$	$R_о$	$\sin(\angle A)$	$\sin(\angle B)$
1		24		84	3	$12\frac{1}{2}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{24}{25}$
2	8		17		3	$8\frac{1}{2}$	$\frac{8}{17}$	$\frac{15}{17}$
3		40	41		4	$20\frac{1}{2}$	$\frac{9}{41}$	$\frac{40}{41}$
4	11		61	330	5	$30\frac{1}{2}$		$\frac{60}{61}$
5		35	37	210	5		$\frac{12}{37}$	$\frac{35}{37}$
6		63	65	504	7	$32\frac{1}{2}$	$\frac{16}{65}$	
7	28	45	53	630	10			$\frac{45}{53}$
8	33	56	65	924	12		$\frac{33}{65}$	
9	36			1386	14	$42\frac{1}{2}$	$\frac{36}{85}$	$\frac{77}{85}$
10	80	39	89	1560	15			$\frac{39}{89}$

Лабораторная работа 2

	b	a	H_{AC}	$S_{\triangle ABC}$	вид $\angle B$	$r_в$	$R_о$	$\sin(\angle B)$
1			4	12	острый	1,5	$3\frac{1}{8}$	$\frac{24}{25}$
2	8	5			тупой	$1\frac{1}{3}$	$4\frac{1}{6}$	$\frac{24}{25}$
3		13	12		острый	$3\frac{1}{3}$	$\frac{169}{24}$	$\frac{120}{169}$
4	24		5			$2\frac{2}{5}$	$16\frac{9}{10}$	$\frac{120}{169}$
5		25	24	168		$5\frac{1}{4}$		$\frac{336}{625}$
6	48			168	тупой	$\frac{24}{7}$	$\frac{625}{14}$	$\frac{336}{625}$
7		17		120	острый	$\frac{24}{5}$	$\frac{289}{30}$	$\frac{240}{289}$
8	18		40	360	острый	$\frac{36}{5}$		$\frac{720}{1681}$
*9		41	9	360		$\frac{40}{9}$		$\frac{720}{1681}$
10	22	61	60		острый	$\frac{55}{6}$	$\frac{3721}{120}$	

Лабораторная работа 3

	a	b	c	$S_\triangle$	$R_о$	$r_в$	$\sin(\angle A)$	$\cos(\angle B)$
1				24	$8\frac{1}{8}$	$1\frac{1}{2}$	$\frac{16}{65}$	$\frac{3}{5}$
2				90	$31\frac{1}{30}$	$1\frac{2}{3}$	$\frac{45}{53}$	$\frac{31}{106}$
3		29			15	$2\frac{1}{4}$	$\frac{144}{145}$	$\frac{7}{25}$
4	25				$18\frac{1}{8}$	2	$\frac{20}{29}$	$-\frac{3}{5}$
5			20		$12\frac{1}{2}$	2	$\frac{7}{25}$	$\frac{4}{5}$
6	17			84	$10\frac{5}{8}$	$3\frac{1}{2}$		$\frac{15}{17}$
7				168	$20\frac{39}{125}$	4	$\frac{16}{65}$	$-\frac{7}{25}$
8				132	$15\frac{5}{8}$	4	$\frac{139}{275}$	$-\frac{77}{275}$
9	75			324	$40\frac{5}{8}$	4		$\frac{16}{65}$
10		30		96	$16\frac{1}{2}$	3	$\frac{16}{65}$	

Лабораторная работа 4

Варианты (1–6)

	1	2	3	4	5	6
AB			6,5	7	26	
BC				24	28	48
CD	23,04	$16\frac{4}{5}$	4,2			
AD	1,96	$13\frac{1}{5}$				$3\frac{23}{25}$
BD			5,6	$6\frac{18}{25}$	11,2	$13\frac{11}{25}$
$\sin(\angle B)$	1	$\frac{12}{13}$	$\frac{12}{13}$	1	$\frac{12}{13}$	1
$\cos(\angle C)$	0,96	$\frac{3}{5}$	0,6		$\frac{3}{5}\,\frac{14}{9}\sqrt{13}$	$\frac{24}{25}$
$\mathrm{tg}(\angle A)$	$3\frac{3}{7}$	$1\frac{23}{33}$	$1\frac{23}{33}$	$3\frac{3}{7}$		
$R_{\text{о}\triangle ABC}$	12,5	$16\frac{1}{4}$		$12\frac{1}{2}$	$16\frac{1}{4}$	25
$r_{\text{в}\triangle ABC}$	3	8	2	3	8	6
m_{BC}	$\sqrt{193}$	$4\sqrt{37}$	$\sqrt{37}$	$\sqrt{193}$	$4\sqrt{37}$	$2\sqrt{193}$
l_{AC}	$\frac{168\sqrt{2}}{31}$	$\frac{56}{9}\sqrt{13}$		$\frac{168}{31}\sqrt{2}$	$\frac{56}{9}\sqrt{13}$	$\frac{336}{31}\sqrt{2}$

Варианты (7–12)

	7	8	9	10	11	12
AB		14	7	13		
BC	14					48
CD	8,4	46,08	23,04	$8\frac{2}{5}$		$46\frac{2}{5}$
AD	6,6				3,3	$3\frac{23}{25}$
BD	11,2	13,44	6,72	$5\frac{3}{5}$	5,6	
$\sin(\angle B)$			1	$\frac{12}{13}$	$\frac{12}{13}$	
$\cos(\angle C)$		0,96			0,6	$\frac{24}{25}$
$\mathrm{tg}(\angle A)$	$1\frac{23}{33}$	$3\frac{3}{7}$	$3\frac{3}{7}$	$1\frac{23}{33}$	$1\frac{23}{33}$	$3\frac{3}{7}$
$R_{\text{о}\triangle ABC}$	$8\frac{1}{8}$	25	$12\frac{1}{2}$	$8\frac{1}{8}$		25
$r_{\text{в}\triangle ABC}$	4	6	3	4	2	6
m_{BC}	$2\sqrt{37}$	$2\sqrt{193}$	$\sqrt{193}$	$2\sqrt{37}$	$\sqrt{37}$	$2\sqrt{193}$
l_{AC}	$\frac{28}{9}\sqrt{13}$	$\frac{336}{31}\sqrt{2}$	$\frac{168}{31}\sqrt{2}$	$\frac{28}{9}\sqrt{13}$	$\frac{14}{9}\sqrt{13}$	$\frac{336}{31}\sqrt{2}$

Ответы на упражнения на готовых чертежах

Упражнения на готовых чертежах 1

1. $\boxed{55^\circ 30'}$. **2.** $\boxed{120^\circ}$. **3.** $\boxed{10^\circ}$. **4.** $\boxed{46}$; $\boxed{104}$.
5. $\boxed{16+3\sqrt{2}}$; $\boxed{19{,}5}$. **6.** $\boxed{52}$; $\boxed{156}$. **7.** $\boxed{16}$; $\boxed{68}$; $\boxed{240}$.
8. $\boxed{12\sqrt{5}}$; $\boxed{\dfrac{8\sqrt{5}}{3}}$; $\boxed{5\dfrac{1}{3}}$. **9.** $\boxed{12}$. **10.** $\boxed{45^\circ}$. **11.** $\boxed{98^\circ}$; $\boxed{46^\circ}$.
12. $\boxed{8}$. **13.** $\boxed{20^\circ}$. **14.** $\boxed{20}$.

Упражнения на готовых чертежах 2

1. $\boxed{168^\circ}$. **2.** $\boxed{30^\circ}$. **3.** $\boxed{32^\circ}$. **4.** $\boxed{114^\circ}$. **5.** $\boxed{135^\circ}$. **6.** $\boxed{108^\circ}$.
7. $\boxed{60^\circ}$. **8.** $\boxed{90^\circ}$. **9.** $\boxed{70^\circ}$. **10.** $\boxed{114^\circ}$. **11.** $\boxed{80}$. **12.** $\boxed{192}$.
13. $\boxed{8\sqrt{3}}$. **14.** $\boxed{25:18}$. **15.** $\boxed{330}$. **16.** $\boxed{27}$. **17.** $\boxed{72}$.
18. $\boxed{16}$. **19.** $\boxed{256}$. **20.** $\boxed{75\left(\sqrt{3}-1\right)}$.

Ответы на самостоятельные работы

Самостоятельная работа 1

		Вариант I	Вариант II
1	AC	26	34
2	BP	$9\frac{3}{13}$	$14\frac{2}{17}$
3	CK	$3\frac{11}{13}$	$7\frac{9}{17}$
4	PK	$18\frac{4}{13}$	$18\frac{14}{17}$
5	$\cos(\angle BAC)$	$\frac{5}{13}$	$\frac{8}{17}$
6	$\cos(\angle ADK)$	$\frac{12}{13}$	$\frac{15}{17}$
7	$\sin(\angle CBP)$	$\frac{12}{13}$	$\frac{15}{17}$
8	$\sin(\angle CDK)$	$\frac{5}{13}$	$\frac{8}{17}$
9	KT	$1\frac{81}{169}$	$3\frac{157}{289}$
10	PM	$8\frac{88}{169}$	$12\frac{132}{289}$
11	KN	$3\frac{93}{169}$	$6\frac{186}{189}$
12	S_{KTMP}	$83\frac{153}{169}$	$133\frac{203}{289}$

Самостоятельная работа 2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	–	13	12	$4\frac{8}{13}$	30	$\frac{120}{169}$	$\frac{5}{13}$	$8\frac{9}{20}$	$\frac{1}{2}\sqrt{601}$	$\frac{5}{3}\sqrt{13}$
2	–	17	15	$6\frac{8}{17}$	60	$\frac{240}{289}$	$\frac{8}{17}$	$9\frac{1}{32}$	$\sqrt{481}$	$\frac{15\sqrt{17}}{4}$

Самостоятельная работа 3

1. $H_{BC} = \boxed{13{,}44}$; $\sin(\angle ABC) = \boxed{0{,}5376}$; $r_в : R_о = \boxed{0{,}4032}$; $m_{BC} = \boxed{0{,}5\sqrt{233}}$; $l_{BC} = \boxed{14\frac{14}{39}}$. **2.** $\boxed{1}$ ($\angle BAC = 90°$). **3.** $\boxed{12}$. **4.** $\boxed{330}$.

Блиц-самостоятельные работы

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	3	$4\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$	130°	13°	$\frac{5\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$	9	90°	9	3; 13	20°; 70°
B	12	$b\cos\alpha$	$4\sqrt{3}$	14	$\frac{1}{3}$	20	19	22	13	10; 50°

Самостоятельная работа 4

Вариант 1. 1. а) $\boxed{500}$. б) $\boxed{-0{,}6}$. **2.** а) $\boxed{8}$. б) $\boxed{\frac{1}{2}\sqrt{106}}$.

Вариант 2. 1. а) $\boxed{285}$. б) $\boxed{0{,}2}$. **2.** $\boxed{60}$.

Вариант 3. 1. $\boxed{1050}$. **2.** $\boxed{4}$.

Вариант 4. 1. $\boxed{156}$. **2.** $\boxed{8\frac{1}{4},\ 11}$.

Самостоятельная работа 5

Вариант 1. 1. а) $\boxed{4\sqrt{10}}$. б) $\boxed{4\sqrt{15}}$. в) $\boxed{4\sqrt{6}}$.

2. а) $\boxed{14\sqrt{5}}$. б) $\boxed{\frac{14}{3}\sqrt{5}}$.

Вариант 2. 1. а) $\boxed{\dfrac{13}{11}}$. б) $\boxed{16{,}5}$. в) $\boxed{\dfrac{1}{2}\sqrt{82}}$.

2. а) $\boxed{\dfrac{10}{3}\sqrt{61}}$. б) $\boxed{30}$. в) $\boxed{3\dfrac{1}{3}}$.

Вариант 3. 1. $\boxed{8\sqrt{7}}$. **2.** $\boxed{\dfrac{1}{2}a^2(3+2\cos 2\alpha)\sin 2\alpha}$.

Вариант 4. а) $\boxed{2a\cos\alpha}$. б) $\boxed{\dfrac{a\cos\alpha}{\sin 4\alpha}}$ или $\boxed{\dfrac{9}{4\cos 2\alpha\cdot\sin\alpha}}$.

в) $\boxed{\dfrac{a^2}{4}(1+2\cos 2\alpha)\operatorname{tg} 2\alpha}$ или $\boxed{\dfrac{a^2}{4}(\operatorname{tg} 2\alpha+2\sin 2\alpha)}$.

г) $\boxed{\dfrac{a(2\cos\alpha+1)\cdot\sin 2\alpha}{4\cos\alpha(1+\cos\alpha)}}$. д) $\boxed{\dfrac{a\sin 3\alpha}{\cos\alpha}}$.

Самостоятельная работа 6

Вариант 1. а) $\boxed{85}$. б) $\boxed{\dfrac{252}{85}\sqrt{170}}$. в) $\boxed{648\arccos\dfrac{36}{85}}$.

Вариант 2. а) $\boxed{11}$. б) $\boxed{0{,}2}$.

Вариант 3. а) $\boxed{26}$. б) $\boxed{17\dfrac{1}{3}}$.

Вариант 4. а) $\boxed{64}$. б) $\boxed{27}$. в) $\boxed{108\left(5\sqrt{21}-9\right)}$.

Самостоятельная работа 7

1. $\boxed{2}$. **2.** $\boxed{100}$. **3.** $\boxed{13\sqrt{2},\ 33{,}8}$. **4.** $\boxed{60^\circ}$. **5.** $\boxed{\dfrac{16}{11}\sqrt{57},\ \dfrac{16}{11}\sqrt{30}}$.
6. $\boxed{3}$. **7.** $\boxed{2,\ 28}$. **8.** $\boxed{4,\ 8{,}45}$.

Самостоятельная работа 8

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Нет	Да	Нет	Да	Нет	Да	Да	Нет	Да	Нет
2	Да	Нет	Нет	Да	Да	Нет	Да	Да	Да	Нет
3	Да	Нет	Нет	Нет	Да	Нет	Да	Нет	Да	Нет
4	Нет	Да	Нет	Да	Да	Нет	Да	Нет	Да	Да

Итоговая самостоятельная работа 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
24	58°	7,5	42	20	18	$\sqrt{3}\pi^2$	$\sqrt{101}$	$\dfrac{4abR^2}{a^2+b^2}$	24

Итоговая самостоятельная работа 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3 : 4	2	37	$\sin\alpha$	5	3	$2\sqrt{2}$	$\dfrac{2\pi}{5}$	$3-2\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}-3$

Итоговая самостоятельная работа 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	$\dfrac{\sqrt{7}}{3}$	240	169π	150	$\sqrt{2}$	$\dfrac{2}{5}\sqrt{6}$	$2\dfrac{2}{3}$	$\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$	2

Краткие решения

Упражнения на готовых чертежах 1

1. Так как $AB = BC$, то $\angle A = \angle C$, и $\angle C = \dfrac{180^\circ - 42^\circ}{2} = 69^\circ$.

Значит $\angle KCM = \dfrac{180^\circ - 69^\circ}{2} = \boxed{55^\circ 30'}$.

2. Так как $\angle B = 90^\circ$ и $AC = 2BC$, то $\angle A = 30^\circ$, и $\angle C = 60^\circ$.
Тогда $\angle BC_1C = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$,
$\angle AC_1C = 180^\circ - 60^\circ = \boxed{120^\circ}$.

3. Так как $\angle A = 40^\circ$ и $\angle C = 60^\circ$, то $\angle ABC = 80^\circ$. Следовательно, $\angle ABM = 40^\circ$. Далее: $\angle ABD = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$, значит $\angle DBM = 50^\circ - 40^\circ = \boxed{10^\circ}$.

4. Так как $AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ и $AD = 2 \cdot 6 + 7 = 19$, то $P_{ABCD} = 2 \cdot 10 + 7 + 19 = \boxed{46}$.
Значит $S_{ABCD} = \dfrac{19 + 7}{2} \cdot 8 = 13 \cdot 8 = \boxed{104}$.

5. Построим $CC_1 \perp AD$. Тогда $DC_1 = 8 - 5 = 3$.
Так как $\angle D = 45^\circ$, то $DC_1 = CC_1 = AB = 3$.
Следовательно, $DC = 3\sqrt{2}$,
и $P_{ABCD} = 3 + 5 + 8 + 3\sqrt{2} = \boxed{16 + 3\sqrt{2}}$.
$S_{ABCD} = \dfrac{5 + 8}{2} \cdot 3 = \dfrac{39}{2} = \boxed{19{,}5}$.

6. Так как $AB_1 = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$, то $AD = 5 + 8 = 13$,
значит $P_{ABCD} = 4 \cdot 13 = \boxed{52}$; $S_{ABCD} = 13 \cdot 12 = \boxed{156}$.

7. Так как $AC \perp DB$ и $AC \cap DB = O$, то $BO = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$,
т. е. $DB = \boxed{16}$; $P_{ABCD} = 4 \cdot 17 = \boxed{68}$;
$S_{ABCD} = \dfrac{1}{2} \cdot 30 \cdot 16 = \boxed{240}$.

8. Используя теорему Герона, получим

$S_\triangle = \sqrt{12 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \boxed{12\sqrt{5}}$.

Так как $BB_1 = \dfrac{2 \cdot S_\triangle}{AC}$, то $BB_1 = \dfrac{2 \cdot 12\sqrt{5}}{9} = \boxed{\dfrac{8\sqrt{5}}{3}}$.

$$CB_1 = \sqrt{8^2 - \left(\frac{8\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \frac{8}{3}\sqrt{9-5} = \frac{16}{3} = \boxed{5\frac{1}{3}}.$$

9. Так как $NM = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ и $\triangle BNM \sim \triangle BAC$,
то $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{NM}{BN}$, т. е. $AC = \dfrac{8 \cdot (5+10)}{10} = \dfrac{8 \cdot 15}{10} = \boxed{12}$.

10. Так как $\smile AB = 120°$ и $\smile BC = 150°$,
то $\smile AC = 360° - 120° - 150° = 90°$.

$\angle ABC = \dfrac{1}{2} \cdot 90° = \boxed{45°}$.

11. Так как $ABCD$ описан окружностью,
то $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$.
Тогда $\angle C = 180° - 82° = \boxed{98°}$; $\angle D = 180° - 134° = \boxed{46°}$.

12. Так как $R_\text{о} = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$,

то $R_\text{о} = \dfrac{8}{2\sin 30°} = \dfrac{8}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \boxed{8}$.

13. Так как $AB = BC$, то $\smile AB = \smile BC$.
Но $\smile AC = 80°$, тогда $\smile AB = \dfrac{360° - 80°}{2} = 140°$.
Значит $\angle AOB = 140°$,
следовательно, $\angle BAO = \dfrac{180° - 140°}{2} = \boxed{20°}$.

14. Так как в трапецию вписана окружность,
то $AB + DC = AD + BC$, т. е. $AB + DC = 50$.
Но $DC = AB + 10$, значит $DC = \dfrac{50 - 10}{2} = \boxed{20}$.

Упражнения на готовых чертежах 2

1. $\angle A + \angle C = 180° - 156° = 24°$;

$\angle AOC = 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle C) = 180° - 12° = \boxed{168°}$.

2. $\angle CBD = 180° - 100° - 10° = 70°$ и $\angle CBD = \angle ABD = 70°$.

С другой стороны, $\angle BDA = 180° - 100° = 80°$.

Значит, $\angle BAC = 180° - 70° - 80° = \boxed{30°}$.

3. Так как $\frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = 180° - 106° = 74°$,

то $\angle A + \angle B = 148°$.

Значит, $\angle ACB = 180° - 148° = \boxed{32°}$.

4. Так как $\angle A + \angle C = 180° - 48° = 132°$,

то $\frac{1}{2}(\angle A + \angle C) = 66°$.

Значит, $\angle AOC = 180° - 66° = \boxed{114°}$.

5. Так как $\angle A + \angle B = 90°$ и $\angle AOB = 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$,

то $\angle AOB = 180° - 45° = \boxed{135°}$.

6. Так как $\angle AOC = 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle C)$,

а $\angle ABC = 180° - (\angle A + \angle C)$,

то учитывая, что $\angle AOC + \angle ABC = 144°$, получим

$180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle C) + 180° - (\angle A + \angle C) = 144°$,

т. е. $\frac{3}{2}(\angle A + \angle C) = 360° - 144°$, значит, $\frac{1}{2}(\angle A + \angle C) = 72°$.

Тогда $\angle AOC = 180° - 72° = \boxed{108°}$.

7. Так как $\angle BOA = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$

и $\angle ACB = 180^\circ - (\angle A + \angle B)$,

то учитывая, что $\angle BOA = 2(\angle ACB)$, получим

$180^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = 2\,(180^\circ - (\angle A + \angle B))$.

Значит, $\angle A + \angle B = 120^\circ$, тогда $\angle ACB = 180^\circ - 120^\circ = \boxed{60^\circ}$.

8. Так как $AB \parallel DC$, то $\angle B + \angle C = 180^\circ$.

Тогда $\frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = 90^\circ$.

Значит, $\angle BKC = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = \boxed{90^\circ}$.

9. Так как $\angle ABB_1 - \angle DCC_1 = 20^\circ$, то $\angle B - \angle C = 40^\circ$,

т. е. $\angle B = \angle C + 40^\circ$.

Но $\angle B + \angle C = 180^\circ$, значит, $\angle C = \angle A = \boxed{70^\circ}$.

10. Так как $\frac{1}{2}(\angle C) = 90^\circ - 57^\circ = 33^\circ$, то $\angle C = 66^\circ$.

Но $\angle B = 180^\circ - \angle C$, значит, $\angle ABC = 180^\circ - 66^\circ = \boxed{114^\circ}$.

11. Так как $AT = AK = 8$ и $BM = BT = 2$, то, учитывая, что $AB = DC$, $AD = 16$ и $BC = 4$.

Пусть $BB_1 \perp AD$, тогда $AB_1 = \dfrac{AD - BC}{2} = 6$.

Из $\triangle ABB_1$, где $AB = 8 + 2 = 10$ и $AB_1 = 6$,

получим $BB_1 = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

Значит, $S_{ABCD} = \dfrac{16 + 4}{2} \cdot 8 = \boxed{80}$.

12. Так как $AB \perp DB$, то $DB = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$.

Используя метод площадей, получим

$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot DB = \frac{1}{2} AD \cdot H_{AD}$,

тогда $H_{AD} = \frac{AB \cdot DB}{AD}$, т. е. $H_{AD} = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12$.

Так как $ABCD$ — трапеция, около которой можно описать окружность (докажите), то $AB = DC$ (докажите).

Пусть $BB_1 \perp AD$, тогда $AB_1 = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$.

Значит, $BC = AD - 2 \cdot AB_1$, т. е. $BC = 25 - 2 \cdot 9 = 7$.

$S_{ABCD} = \frac{25+7}{2} \cdot 12 = \boxed{192}$.

13. Пусть $BB_1 \perp AD$.

Тогда, учитывая, что $AB = DC = 8$, $AB_1 = \frac{AD - BC}{2} = 4$.

Из $\triangle ABB_1$ следует, что $BB_1 = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$.

$S_{ABCD} = \frac{16+8}{2} \cdot 4\sqrt{3} = \boxed{48\sqrt{3}}$.

Пусть $CC_1 \perp AD$, тогда $DC_1 = AB_1 = 4$ и $AC_1 = 12$.

Из $\triangle ACC_1$ $AC = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 12^2} = \boxed{8\sqrt{3}}$.

14. Проведем диагонали AC и DB. Пусть O — точка их пересечения. $AB = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ (из $\triangle ABO$).

Так как $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$, то $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{4} \cdot AC \cdot DB$,

т. е. $S_{\triangle ABD} = \frac{16 \cdot 12}{4} = 48$. Следовательно,

$BB_1 = \frac{2S_{\triangle ABD}}{AD}$ ($BB_1 \perp AD$), т. е. $BB_1 = \frac{2 \cdot 48}{10} = 9{,}6$.

Из $\triangle ABB_1$ $AB_1 = \sqrt{10^2 - 9{,}6^2} = 2{,}8$ и $DB_1 = 7{,}2$.

Так как $S_{ABCD} : S_{BB_1DB_2} = S_{\triangle ABD} : S_{\triangle BB_1D}$,

$S_{\triangle ABD} : S_{\triangle BB_1D} = AD : DB_1$,

то $S_{ABCD} : S_{BB_1DB_2} = 10 : 7{,}2 = \boxed{25 : 18}$.

15. Проведем $CD_1 \parallel BD$ ($AD \subset AD_1$), получим $\triangle ACD_1$.

Так как $BC = DD_1 = 16$, то $AD_1 = 44$, а $BD = CD_1 = 39$.

По теореме Герона

$S_{\triangle ACD_1} = \sqrt{50(50-39)(50-17)(50-44)} = 5 \cdot 11 \cdot 6 = 330.$

Так как $S_{\triangle ACD_1} = S_{ABCD}$ (докажите), то $S_{ABCD} = \boxed{330}$.

16. Проведем $BB_1 \perp AD$ и $CC_1 \perp AD$.

Положим $AB_1 = x$, тогда $DC_1 = 11 - x - 7 = 4 - x$.

Из $\triangle ABB_1$ $BB_1^2 = 5^2 - x^2$; из $\triangle DCC_1$ $CC_1^2 = 3^2 - (4-x)^2$.

Так как $BB_1 = CC_1$ (докажите), то $5^2 - x^2 = 3^2 - (4-x)^2$.

Значит, $x = 4$ (это означает, что $DC_1 = 0$, т. е. $DC \perp AD$).

$S_{ABCD} = \dfrac{11+7}{2} \cdot 3 = \boxed{27}.$

17. Проведем $BB_1 \perp AD$ и $CC_1 \perp AD$.

Положим $AB_1 = x$, тогда $DC_1 = 20 - x - 10 = 10 - x$.

Из $\triangle ABB_1$ $BB_1^2 = 8^2 - x^2$;

из $\triangle DCC_1$ $CC_1^2 = 6^2 - (10-x)^2$.

Так как $BB_1 = CC_1$ (докажите),

то $8^2 - x^2 = 6^2 - (10-x)^2$; $x = 6{,}4$.

Из $\triangle ABB_1$ $BB_1^2 = 8^2 - 6{,}4^2$; $BB_1 = 4{,}8$.

$S_{ABCD} = \dfrac{20+10}{2} \cdot 4{,}8 = 15 \cdot 4{,}8 = \boxed{72}.$

18. Так как $AC = BD$, то $AB = DC$ и $AO = DO$.

Учитывая, что $\angle CAD = 45°$, $\angle AOD = 90°$.

Тогда $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2} \cdot AC \cdot BD$, т. е. $S_{ABCD} = \dfrac{(4\sqrt{2})^2}{2} = \boxed{16}$.

19. Проведем $CD_1 \parallel BD$ ($AD \subset AD_1$).

Получим $\triangle ACD_1$, где $AD_1 = 20 + 12 = 32$.

Так как $AB = DC$, то $AC = BD$.

Так как $AC \perp BD$ и $AC = BD$,
то $AC = CD_1$ и $\angle ACD_1 = 90°$.
Значит, $\angle CAD_1 = \angle CD_1A = 45°$,
следовательно, $H_{AD} = \frac{1}{2}AD$, т. е. $H_{AD} = 16$.
Тогда $S_{\triangle ACD_1} = \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 16 = 256$.
$S_{\triangle ACD_1} = S_{ABCD}$ (докажите), значит $S_{ABCD} = \boxed{256}$.

20. Проведем $BB_1 \perp AD$ и $CC_1 \perp AD$.
Положим $DC_1 = x$.
Так как $\angle D = 45°$, то $CC_1 = x$.
Из $\triangle ABB_1$ $AB_1 = BB_1 \cdot \operatorname{tg} 60°$, т. е. $AB_1 = x\sqrt{3}$.
Значит, $AD = 20 = x\sqrt{3} + 10 + x$; $x = \dfrac{10}{\sqrt{3}+1} = 5\left(\sqrt{3}-1\right)$.
$S_{ABCD} = \dfrac{20+10}{2} \cdot 5\left(\sqrt{3}-1\right) = \boxed{75\left(\sqrt{3}-1\right)}$.

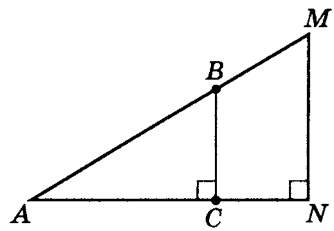
Самостоятельная работа 8

Вариант 1

1. Ответ: нет.

Рассмотрим контрпример.

В данном примере в неравных треугольниках ABC и AMN против неравных сторон лежат равные углы.

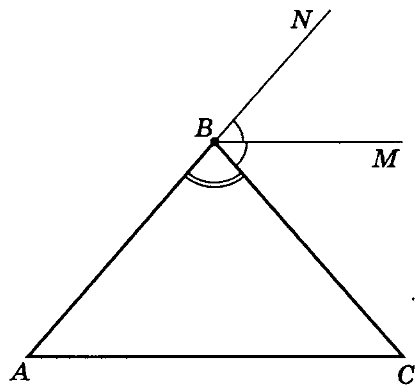


2. Дано:

$AB = BC$

$\angle NBM = \angle MBC$

$BM \parallel AC$



Ответ: да.

Так как $AB = BC$,

то $\angle A = \angle C$.

С другой стороны,

$\angle NBC = \angle A + \angle C = 2\,(\angle A)$

и $\angle NBM = \angle CBM$, значит $\angle A = \angle CBM = \angle C$.

Следовательно, $BM \parallel AC$, что и требовалось доказать.

3. Ответ: нет.

Рассмотрим контрпример.

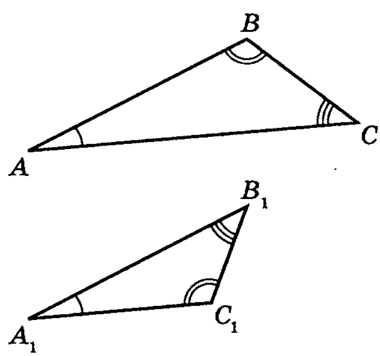
$AB = A_1B_1$;

$\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$;

$\angle ABC = \angle A_1C_1B_1$;

$\angle ACB = \angle A_1B_1C_1$,

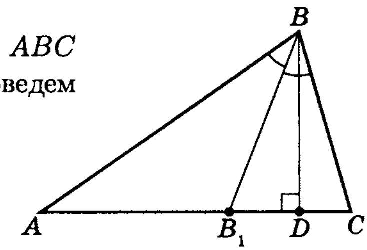
но $\triangle ABC \neq \triangle A_1B_1C_1$.



4. Ответ: да.

Так как треугольник остроугольный разносторонний, то любая биссектриса не совпадает с высотой, проведенной из этой же вершины. Тогда остроугольным будет тот треугольник, внутри которого проходит соответствующая высота, а тупоугольным тот, в котором эта высота не проходит.

Например, для треугольника ABC рассмотрим вершину B. Проведем из нее биссектрису BB_1 и высоту BD.

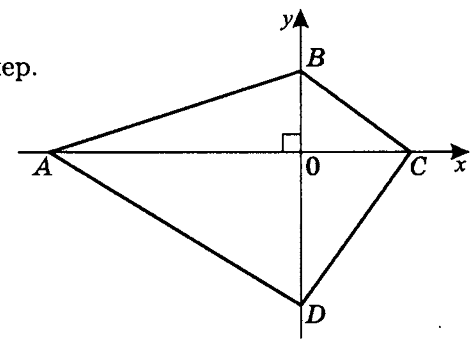


В этом случае остроугольным будет треугольник B_1BC (в нем проходит высота BD), а тупоугольным — треугольник ABB_1.

Проводя аналогично рассуждения с другими биссектрисами, убеждаемся в справедливости исходного утверждения.

5. Ответ: нет.

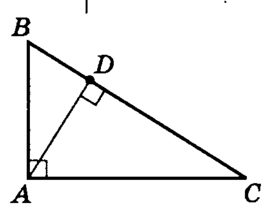
Приведем контрпример.



6. Ответ: да.

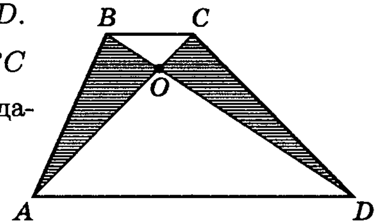
Приведем пример.

В вершине A все высоты пересекаются.



7. Ответ: да.

Рассмотрим трапецию $ABCD$. Так как для $\triangle ABC$ и $\triangle DBC$ высоты треугольников совпадают с высотой трапеции, то $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle DBC}$, а значит, $S_{\triangle ABO} = S_{\triangle DOC}$.

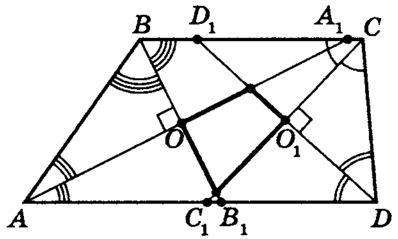


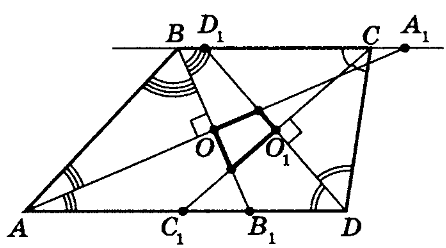
8. Ответ: нет.

Приведем контрпример. Это «египетский» треугольник — треугольник со сторонами 3, 4 и 5. Известно, что такой треугольник является прямоугольным.

9. Ответ: да.

Рассмотрим трапецию $ABCD$. Существует два возможных варианта:





По свойствам:

а) $AB = A_1B$; $DC = D_1C$; $DC = DC_1$; $AB = AB_1$;

б) $\angle A + \angle B = 180°$; $\angle C + \angle D = 180°$.

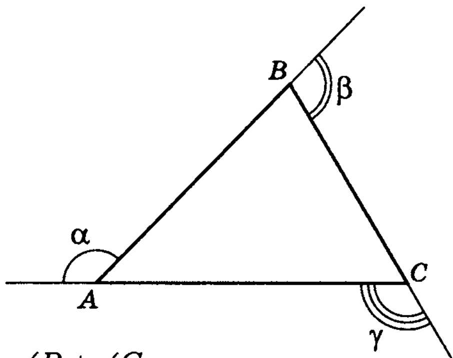
Значит, $\dfrac{\angle A}{2} + \dfrac{\angle B}{2} = 90^\circ$, т. е. $\angle AOB = 90^\circ$,

и $\dfrac{\angle C}{2} + \dfrac{\angle D}{2} = 90^\circ$, т. е. $\angle DO_1C = 90^\circ$.

Тогда в полученном четырехугольнике суммы противоположных углов равны 180°, значит, около него можно описать окружность.

10. Ответ: нет.

Рассмотрим внешние углы ΔABC: α, β и γ.



Так как $\begin{aligned}\alpha &= \angle B + \angle C\\ \beta &= \angle A + \angle C,\\ \gamma &= \angle A + \angle B\end{aligned}$

то $\alpha + \beta + \gamma = 2\,(\angle A + \angle B + \angle C) = 2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$,

т. е. $\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$, а учитывая, что $\alpha : \beta : \gamma = 1 : 2 : 3$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$ и $\gamma = 180^\circ$, что невозможно.

Вариант 2

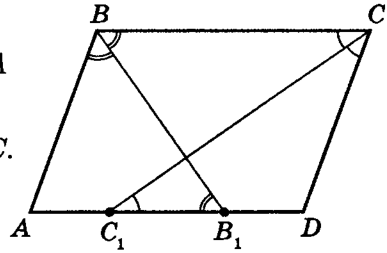
1. Ответ: да.

Так как или $C_1 \in [AD]$, или $B_1 \in [AD]$ (а возможно и то, и то одновременно), то или $\triangle ABB_1$, или $\triangle DCC_1$ — равнобедренный, так как

$\angle ABB_1 = \angle CBB_1 = \angle BB_1A$

или

$\angle BCC_1 = \angle DCC_1 = \angle DC_1C$.

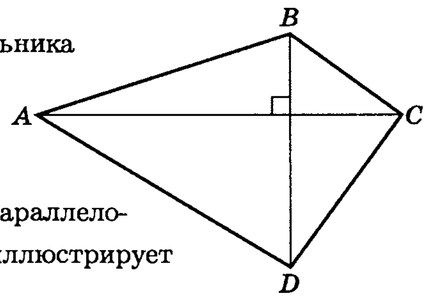


2. Ответ: нет.

Так как если диагонали четырехугольника точкой пересечения делятся пополам, то это есть признак параллелограмма.

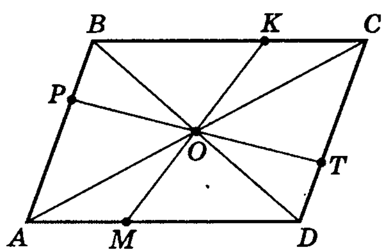
3. Ответ: нет.

Так как для четырехугольника условие перпендикулярности диагоналей *не достаточно* для того, чтобы он являлся параллелограммом. Контрпример иллюстрирует это утверждение.



4. Ответ: да.

Естественно, речь идет о центральной симметрии. Можно доказать, что $\triangle OPB = \triangle OTD$ и $\triangle OBK = \triangle ODM$. Значит, $OPBK = OTDM$.

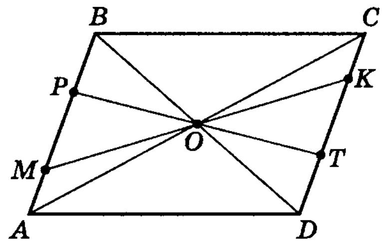


Аналогично доказывается, что $OPAM = OTCK$.

Следовательно, $S_{OPBK} = S_{OTDM}$ и $S_{OPAM} = S_{OTCK}$.

Возможно и иное расположение пересекающихся прямых.

В этом случае идея доказательства — та же.

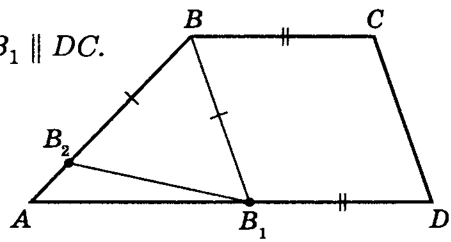


5. Ответ: да.

Пусть $AB > DC$ и $BB_1 \parallel DC$.

Отметим на AB точку B_2, так что $BB_2 = BB_1$.

Тогда $\angle AB_2B_1 > 90°$.



Значит $AB_1 > B_2B_1$, где $AB_1 = AD - BC$, а $AB_2 = AB - DC$.

Аналогично можно рассматривать и другие варианты.

6. Ответ: нет.

Приведем контрпример.

$AB \perp AD$; $AC = BD$;

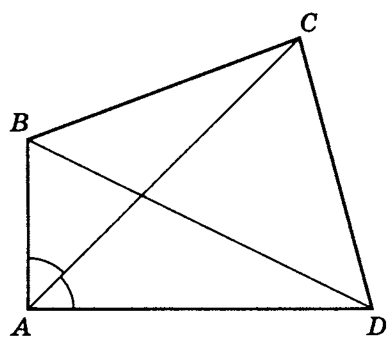
$AB = 3$; $AD = 4$;

$\angle BAC = \angle DAC$;

$BC = \sqrt{34 - 15\sqrt{2}}$;

$DC = \sqrt{41 - 15\sqrt{2}}$;

$BD = AC = 5$.



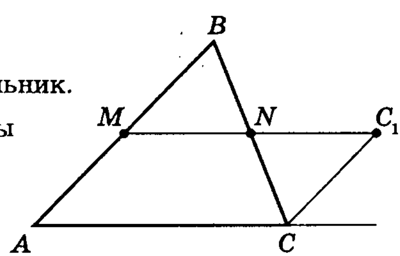
Очевидно, что $ABCD$ не является параллелограммом.

7. Ответ: да.

Рассмотрим любой треугольник.

Пусть M и N — середины сторон AB и DC,

тогда $MN = \frac{1}{2}AC$.



Проведем доп. построение: $CC_1 \parallel AB$ (точка C_1 принадлежит прямой MN).

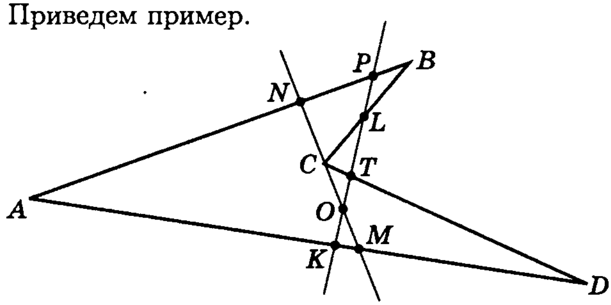
Можно доказать, что $\triangle NBM = \triangle NCC_1$ и т. д.

8. Ответ: да.

См. решение задачи-исследования 2 (с. 258).

9. Ответ: да.

Приведем пример.



Пусть MN — прямая, $C \in MN$; PK — прямая, $L \in CB$; $T \in DC$; $O \in MN$, и $MN \cap PK = O$.

Получим $\triangle ANM$, $NPLC$, $\triangle PBL$, $\triangle TCO$, $\triangle KOM$ и $MOTD$.

10. Ответ: нет.

Так как отрезок PK, параллельный основанию трапеции и делящий его на две подобные трапеции, является средним геометрическим оснований этой трапеции, то $PK = \sqrt{ab}$, где a и b — основания этой трапеции.

Средняя линия трапеции $MN = \dfrac{a+b}{2}$ (см. с. 242, 243).

Тогда $MN = PK$, т. е. $\sqrt{ab} = \dfrac{a+b}{2}$.

Но это возможно, только если $a = b$. Следовательно, это верно только если это параллелограмм, что противоречит условию.

Вариант 3

1. Ответ: да.

Это известная теорема планиметрии (см., например, учебник 7–9 класса: Атанасян А. С. «Геометрия», с. 127).

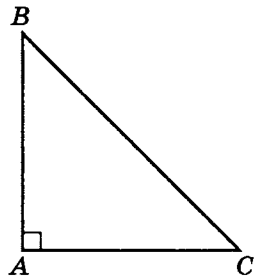
2. Ответ: нет.

Построим контрпример.

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC.

Пусть $AB \perp BC$ и $AB = AC = 1{,}41$.

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB^2$,



тогда $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot (1{,}41)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}9881$, т. е. $S_{\triangle ABC} < 1$.

3. Ответ: нет.

Это возможно только для равностороннего треугольника.

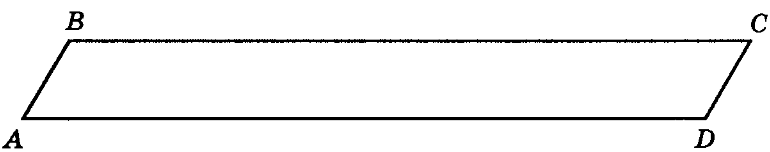
4. Ответ: нет.

Построим контрпример.

Рассмотрим параллелограмм $ABCD$, такой что:

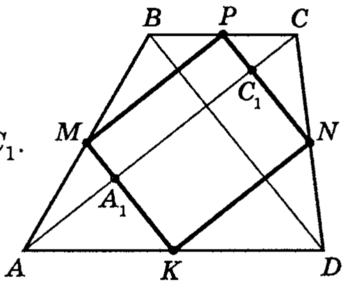
$AD = 50, \quad AB = 2, \quad \sin(\angle BAD) = 0{,}05$

$(BC \parallel AD$ и $AB \parallel DC)$.



Тогда $P_{ABCD} = 104$, а $S_{ABCD} = 2 \cdot 50 \cdot 0{,}05 = 5 < 10$

$(S_{ABCD} = ab \cdot \sin(\angle BAD))$.



5. Ответ: да.

Рассмотрим чертеж.

$MP \parallel AC$; $MP = \frac{1}{2}AC = A_1C_1$.

$MPNK$ — параллелограмм.

$S_{A_1MPC_1} = \frac{1}{2}AC \cdot \frac{1}{2}H_{AC}$

$(AA_1 + CC_1 = \frac{1}{2}AC$, так как $MP = A_1C_1 = \frac{1}{2}AC)$.

$S_{\triangle AMA_1} + S_{\triangle CPC_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}AC \cdot \frac{1}{2}H_{AC}$;

$S_{\triangle MBP} = \frac{1}{2} \cdot MP \cdot \frac{1}{2} \cdot H_{MP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}AC \cdot \frac{1}{2}H_{AC}$.

Значит, $S_{A_1MPC_1} = S_{\triangle MBP} + S_{\triangle AMA_1} + S_{\triangle CPC_1} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$.

Аналогично $S_{A_1KNC_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot \frac{1}{2}H_{AC} = \frac{1}{2}S_{\triangle ADC}$.

Тогда $S_{MPNK} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$,

т. е. S_{MPNK} не превосходит $\frac{1}{2}S_{ABCD}$.

6. Ответ: нет.

Пусть $\triangle ABC$ — прямоугольный, $BC \perp AC$, где AB — гипотенуза ($c^2 = a^2 + b^2$).

Тогда $S_{\triangle CC_1B} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $S_{\triangle AB_1C} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$; $S_{\triangle AA_1B} = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}$.

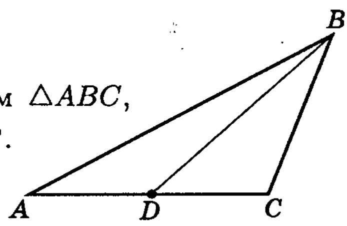
Так как $c^2 = a^2 + b^2$, то и $\frac{c^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$,

значит, $S_{\triangle AA_1B} = S_{\triangle CC_1B} + S_{\triangle AB_1C}$,

что и требовалось доказать.

7. Ответ: да.

В качестве примера рассмотрим $\triangle ABC$, где $BD = m_{AC}$ и $\angle ACB > 90°$.

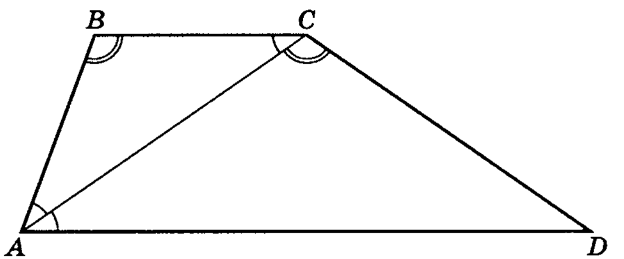


8. Ответ: нет.

Так как в выпуклом шестиугольнике девять диагоналей, а в семиугольнике — тринадцать, причем, количество диагоналей увеличивается, следовательно, многоугольников, у которых только десять диагоналей, нет.

9. Ответ: да.

Примером является трапеция, у которой длина одной боковой стороны равна длине верхнего основания, а диагональ есть биссектриса угла — при условии, что эта диагональ равна другой боковой стороне.



10. Ответ: нет.

$$S_{AMND} = \frac{a + \frac{a+b}{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} H_{ABCD} = \frac{3a+b}{8} \cdot H_{ABCD};$$

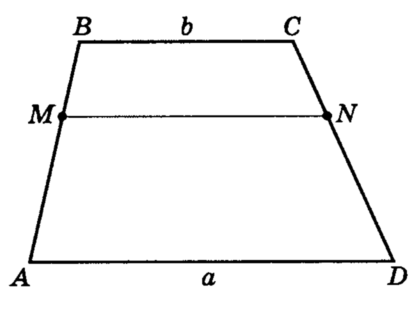
$$S_{MBCN} = \frac{\frac{a+b}{2} + b}{2} \cdot \frac{1}{2} H_{ABCD} = \frac{3a+b}{8} \cdot H_{ABCD}.$$

Тогда $\dfrac{S_{MBCN}}{S_{AMND}} = \dfrac{3b+a}{3a+b} = \dfrac{1}{3}$,

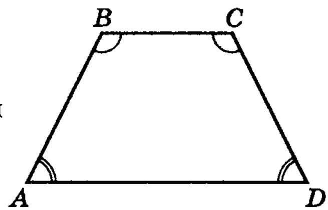
т. е. $9b + 3a = 3a + b$;

$8b = 0$.

Следовательно, для трапеции, в отличие от треугольника, это невозможно.



Вариант 4



1. Ответ: нет.

   Контрпример — равнобедренная трапеция $ABCD$:
   $BC \parallel AD$, $AB = DC$.

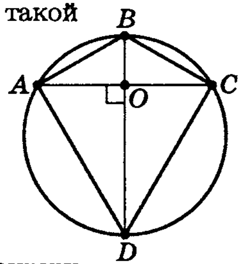
2. Ответ: да.

   Единственный параллелограмм, в который можно вписать окружность — ромб, у которого диагонали взаимно перпендикулярны.

3. Ответ: нет.

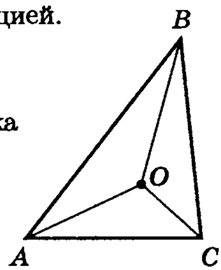
   Приведем контрпример.

   Рассмотрим четырехугольник $ABCD$, такой что $AB = BC$, $AD = DC$, $AC \perp BD$.



   Очевидно, что
   $\angle DAB = \angle DCB = 90°$,
   $\angle ABC + \angle ADC = 180°$,
   $AD + BC = AB + DC$.
   Значит, около $ABCD$ можно описать окружность и в него можно вписать окружность, но он не является квадратом и равнобедренной трапецией.

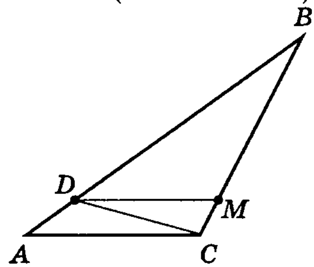
4. Ответ: да.



   а) В случае остроугольного треугольника это очевидно.

   Примечание. Это верно для любых треугольников, если точка пересечения биссектрисы треугольника есть вершина каждого из треугольников, сторонами которого являются стороны исходного треугольника,
   т. е. $\angle AOB > 90°$, $\angle BOC > 90°$ и $\angle COA > 90°$
   ($\angle AOB + \angle BOC + \angle COA = 360°$).

б) В случае тупоугольного треугольника ($\angle ACB > 90°$) нужно провести DC так, чтобы $\angle BCD$ был тупым. Тогда DM разбивает его на два тупоугольных треугольника, если $CM = BM$ (или $AC \parallel DM$).



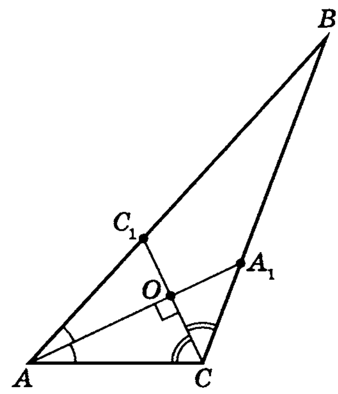
Итак, $\triangle ADC_1$, $\triangle DCM$ и $\triangle DMB$ — тупоугольные.

5. Ответ: да.

Так как центр описанной около треугольника окружности есть точка пересечения биссектрис, то если он принадлежит и медиане, значит, эта медиана совпадает с биссектрисой, а тогда треугольник является равнобедренным (см. задачу 23, с. 31).

6. Ответ: нет.

Пусть $AA_1 = l_{\angle A}$, $CC_1 = l_{\angle B}$,
$AA_1 \perp CC_1$ и $AA_1 \cap CC_1 = O$.
Тогда $\angle AOB = 90°$, так как
$\frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = 90°$,
но тогда $\angle A + \angle B = 180°$,
что невозможно, поскольку
ABC — треугольник.

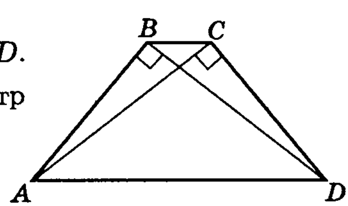


Следовательно, такого треугольника не существует.

7. Ответ: да.

Приведем пример.

$AB \perp DB$, $AC \perp DC$, $BC \parallel AD$.
В этом случае AD есть диаметр описанной около $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$ окружности.

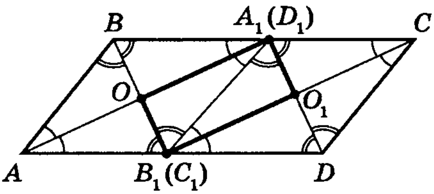


Так как $BC \parallel AD$, и дуги окружностей, ограниченных параллельными прямыми равны, то и хорды, стягивающие их, также равны, т. е. $AB = DC$.

Значит, $ABCD$ — равнобедренная трапеция.

8. Ответ: нет.

Приведем контрпример.



Очевидно, что

$AB = BA_1 = A_1C = DC$; $BO = OB_1$; $AO = OA_1$,

но $BO \neq AO$, тогда $A_1O \neq OB_1$.

С другой стороны, $\angle A + \angle B = 180°$,

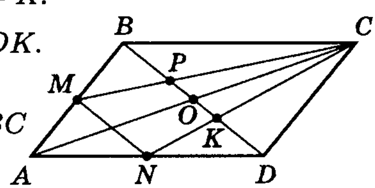
значит, $\frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = 90°$.

Тогда $\angle BOA = 90°$, т. е. $OA_1O_1B_1$ — прямоугольник, причем не квадрат.

9. Ответ: да.

По условию: $AB \parallel DC$, $BC \parallel AD$, $AM = BM$, $AN = DN$, $MC \cap DB = P$, $NC \cap DB = K$.

Докажем, что $BP = PK = DK$.



Проведем AC, тогда в $\triangle ABC$ $MC = m_{AB}$, а $BK = m_{AC}$.

Значит, $BP = \frac{2}{3}BO$, а $PO = \frac{1}{3}BO$.

Из $\triangle ACD$ $NC = m_{AD}$ а $DP = m_{AC}$.

Значит, $DK = \frac{2}{3}DO$, а $KO = \frac{1}{3}DO$.

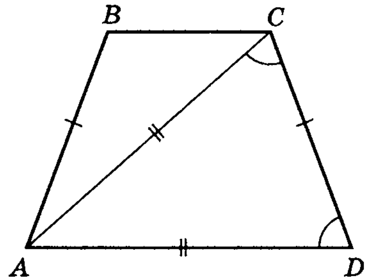
Так как $OB = OD$, то $BP = PK = DK = \frac{1}{3}BD$.

10. Ответ: да.

Рассмотрим равнобедренную трапецию $ABCD$:

$BC \parallel AD$, $AB = DC$,

$AC = AD$.



Так как $AB = DC$,

то $\angle A = \angle D = \alpha$.

Так как $AC = AD$,

то $\angle ACD = \alpha$

и $\angle DAC = 180^\circ - 2\alpha$,

тогда $\angle BAD = \alpha - (180^\circ - 2\alpha) = 3\alpha - 180^\circ > 0$,

т. е. $\alpha > 60^\circ$, или $\angle B < 120^\circ$.

Значит, такая трапеция существует.

Пример.

Пусть $\angle D = 70^\circ$, тогда $\angle ACD = \angle D = 70^\circ$, $\angle DAC = 40^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$, $\angle ABC = 110^\circ$.

Контрпример.

Пусть $\angle D = 50^\circ$, тогда $\angle ACD = \angle D = 50^\circ$, $\angle DAC = 80^\circ$, $\angle BCA = 80^\circ$.

Но $\angle BAC = 50^\circ$, значит, $\angle BAC < \angle DAC$ — противоречие, так как $\angle BAC > \angle DAC$.

Содержание

Для заметок

Учебное издание

Шахмейстер Александр Хаймович

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ЭКЗАМЕНАХ
ЧАСТЬ 1. ПЛАНИМЕТРИЯ

Научный редактор серии *А.В. Семенов*
Художник *Ю.Н. Куликов*
Компьютерная Верстка *С.С. Афонин*
Корректоры *Е.Г. Никитина, С.С. Афонин, О.А. Войтишек*

По вопросам приобретения просьба обращаться:

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПЕТРОГЛИФ»
Тел.: (812) 943-8076; E-mail: spb@petroglyph.ru

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВИКТОРИЯ ПЛЮС»
В Санкт-Петербурге: (812) 292-3660, 292-3661
В Москве (филиал): (499) 488-3005
E-mail: victory@mailbox.alkor.ru; www.victory.sp.ru

ИЗДАТЕЛЬСТВО МЦНМО
119002, Москва, Б. Власьевский пер., 11.
Тел.: (495) 241-7285; факс: (499) 795-1015.
E-mail: biblio@mccme.ru; www.mccme.ru.

Налоговая льгота — ОКП 005-93-95-3005

Подписано к печати 10.08.2011 г. Формат 60x90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Объем 24,5 печ. л. Тираж 1500 экз. Заказ № 393.

Отпечатано с диапозитивов в ГППО «Псковская областная типография». 180004, г. Псков, ул. Ротная, 34

Перед вами серия книг практически по всем разделам школьного курса математики.

По существу это энциклопедия различных методов решения задач, которые чаще всего встречаются непосредственно в школьном курсе.

Это прекрасные самоучители, которые позволят ученикам и абитуриентам без репетитора подготовиться к экзаменам.

Естественная логика построения материала «от простого к сложному» позволит учителю использовать эти книги для дифференцированной работы с учениками различного уровня подготовки.

Желательно, чтобы работа с материалами этой серии книг начиналась уже с 7, 8 класса и была постоянной и планомерной, тогда она даст наибольший эффект.

Б. Г. Зив.

Серия «МАТЕМАТИКА · ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ»

1. Дроби.
2. Корни.
3. Уравнения.
4. Дробно-рациональные неравенства.
5. Системы уравнений.
6. Иррациональные уравнения и неравенства.
7. Множества. Функции. Последовательности. Прогрессии.
8. Логарифмы.
9. Тригонометрия.
10. Построение графиков функций элементарными методами.
11. Построение и преобразования графиков. Параметры. (в 3-х книгах)
12. Уравнения и неравенства с параметрами.
13. Задачи с параметрами на экзаменах.
14. Введение в математический анализ.
15. Комплексные числа.
16. Комбинаторика. Статистика. Вероятность.
17. Геометрические задачи на экзаменах. Часть 1. Планиметрия.
18. Геометрические задачи на экзаменах. Часть 2. Стереометрия. Часть 3. Векторы.

ISBN 978-5-4439-0347-7