Д. В. Аносов, Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны, *Тр. МИАН СССР*, 1967, том 90, 3–210

ВВЕДЕНИЕ

Основным объектом исследования в настоящей работе, как видно из ее заглавия, являются геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны. При этом используется главным образом тот факт, что геодезический поток на замкнутом римановом многообразии отрицательной кривизны удовлетворяет некоторому «условию (У)», точная формулировка которого приводится в § 1. Грубо говоря, динамическая система удовлетворяет условию (У), если около любой фиксированной траектории поведение соседних траекторий по отношению к ней напоминает поведение траекторий возле седла.

Довольно часто (в том числе во всех разделах, посвященных эргодической теории) используется также наличие у геодезического потока интегрального инварианта. Никаких других свойств геодезических потоков я не использую, за одним исключением (см. конец § 3 и § 23). Поэтому кажется целесообразным рассматривать произвольные динамические системы, удовлетворяющие условию (У) (и — если речь идет об эргодических свойствах — имеющие интегральный инвариант). Такие системы я называю *(У)-системами.*

Динамическая система может быть системой с непрерывным либо с дискретным временем. Поскольку динамическую систему с непрерывным временем часто называют *потоком*, то динамическую систему с дискретным временем я позволю себе называть *каскадом*. Поток, соответственно каскад, удовлетворяющий условию (У), я называю *(У)-потоком*, соответственно *(У)-каскадом*.

Примеры (У)-систем приводятся в § 2. Там имеется пример (У)-каскада — это каскад, получающийся при итерациях некоторого автоморфизма тора,— и пример (У)-потока — это геодезический поток на многообразии отрицательной кривизны.

Кроме того, в § 2 указаны две операции, при применении которых из (У)-системы получается некоторая новая (У)-система. Во-первых, систему с дискретным временем можно некоторым стандартным способом вложить в систему с непрерывным временем; при этом из (У)-каскада получается (У)-поток. Во-вторых, при малом (в смысле C^1) возмущении (У)-системы снова получается (У)-система.

В § 3—5 приводятся результаты настоящей работы и обсуждается их связь с результатами других авторов. В § 4, 5 выделены теоремы 8—15, имеющие, так сказать, «технический характер»; сама формулировка этих теорем требует определения некоторых вспомогательных понятий, специально связанных с (У)-системами. Эти «технические» теоремы не отвечают непосредственно на такие вопросы, как, скажем, «сколько периодических траекторий может иметь (У)-система?» или «является ли (У)-система эргодической?» Но с помощью теорем 8—15 доказываются содержащиеся в § 3 теоремы (кроме теоремы 1, доказательство которой не опирается на результаты

§ 4, 5), отвечающие на подобные вопросы (в данном примере это теоремы 2—4).

Основные результаты настоящей работы — это теоремы 1, 10 и 14. Первая из них утверждает, что любая (У)-система является грубой в смысле Андронова и Понтрягина [8]. Это значит, что для любого достаточно малого возмущения существует гомеоморфизм фазового пространства, близкий к тождественному и переводящий траектории невозмущенной системы в траектории возмущенной системы. Основная идея доказательства теоремы 1 изложена в § 4, там же обсуждается ее связь с известной теоремой Адамара — Перрона об инвариантных многообразиях типа «усов седла». (Кроме того, в § 4 формулируются «технические» теоремы, не связанные с эргодической теорией,— теоремы 8 и 9.) Эта связь неоднократно используется в настоящей работе, многие места которой представляют собой просто модификацию применительно к рассматриваемой ситуации соответствующих рассуждений из теории возмущений.

На любой поверхности (слово «поверхность» я везде в настоящей работе употребляю как синоним выражения «двумерное замкнутое многообразие») грубые системы имеют довольно простую структуру. Оказывается, что уже в трехмерном случае дело обстоит иначе. Это обнаружил С. Смейл. Он построил пример грубой системы, имеющий счетное множество периодических траекторий и локально не связное минимальное множество [17] (см. также относящуюся к этому вопросу его работу [79]. В этой работе имеются интересные замечания об истории вопроса). Он же высказал в 1961 г. предположение, что грубыми могут быть и некоторые системы с интегральным инвариантом, а именно, каскад, получающийся при итерациях эргодического автоморфизма двумерного тора (грубость этого каскада Смейлу позднее удалось доказать), и геодезический поток на замкнутом римановом многообразии отрицательной кривизны. Обе эти системы удовлетворяют условию (У) и в силу теоремы 1 действительно являются грубыми.

(У)-системы совсем не похожи на те «простые» грубые системы, которые свойственны двумерному случаю. Устойчивых по Ляпунову движений в них нет. Если (У)-система обладает интегральным инвариантом, то в ней имеются всюду плотные траектории, а также счетное всюду плотное множество периодических траекторий. (В полном объеме это доказано в настоящей работе, а раньше было известно для некоторых частных случаев.) Если же не предполагать наличия интегрального инварианта, то получаются (у меня, во всяком случае) более слабые утверждения, но все-таки множество периодических траекторий должно быть счетным. Впрочем, во всякой (У)-системе, получающейся путем некоторого достаточно малого возмущения из (У)-системы с интегральным инвариантом, тоже имеются всюду плотные траектории, и множество периодических траекторий такой системы должно быть всюду плотным. Это вытекает из сказанного выше и из грубости.

Должен заметить, что все (У)-системы, которые я знаю,— это либо системы с интегральным инвариантом, либо системы, получающиеся при малом возмущении систем с интегральным инвариантом, причем неизвестно даже, может ли у (У)-системы пропасть интегральный инвариант при малом возмущении. (Имеется в виду суммируемый интегральный инвариант; нетрудно построить пример, когда непрерывного интегрального инварианта не существует.)

Геодезические потоки на многообразиях отрицательной кривизны — классический объект эргодической теории. Первые результаты в этой области относились к весьма частным случаям и были получены с помощью соображений весьма специального характера. Но к 1940 г. стало совершенно ясно, что все дело в неустойчивости траекторий или, говоря языком настоящей работы, в условии (У). После того как в работах Хедлунда выяснилась важная роль орициклов (см. § 5), Э. Хопф предложил для доказательства эргодичности метод, который, по существу, опирался только на условие (У).

В его статьях [6, 7] была доказана эргодичность геодезического потока на многообразиях постоянной отрицательной кривизны *, а для поверхностей — также и в случае переменной отрицательной кривизны (и даже в несколько более общем случае), и там же было сказано, что возможности метода этим не ограничиваются. Однако после появления этих статей никаких новых применений этого метода не появилось. В частности, эргодичность геодезического потока на n-мерном многообразии переменной отрицательной кривизны при $n > 2$ так и не была доказана. Почему так получилось?

Мне кажется, причина состоит в том, что на пути, намеченном Хопфом, встретилось некоторое «техническое» затруднение. По ходу доказательства эргодичности приходится делать некоторое преобразование координат. Для эргодической теории совершенно необходимо, чтобы при этом преобразовании координат множество меры нуль переходило в множество меры нуль. Последнее будет обеспечено, если преобразование гладкое. В тех частных случаях, для которых эргодичность была доказана до сих пор, оно действительно гладкое; этим до сих пор и пользовались. В общем же случае оно не обязано быть гладким (даже если исходная система аналитическая).

Упомянутая выше в качестве одного из основных результатов данной работы теорема 10 является «технической» теоремой, которая позволяет преодолеть эту «техническую» трудность. Оказывается, что это преобразование, даже если оно не гладкое, все же переводит множество меры нуль в множество меры нуль. А большего для эргодической теории и не требуется.

Кроме эргодичности, в эргодической теории имеются и другие понятия: перемешивание, спектр, энтропия. Как обстоит дело у (У)-системы с соответствующими свойствами?

Оказывается, что любая (У)-система, за одним исключением, о котором будет сказано ниже, является так называемой K-системой. Понятие K-системы было введено Колмогоровым (сам он называл их «квазирегулярными») [9, 10]. Определение K-систем и некоторые сведения о них приводятся в приложении. Подробное изложение теории K-каскадов можно найти у В. А. Рохлина [11], а теории K-потоков — у Я. Г. Синая [12]; см. также обзор Рохлина [13] и более новый обзор Синая [14]. K-системы имеют положительную энтропию, счетнократный лебеговский спектр ** и перемешивание всех степеней.

Я сказал, что имеются исключения; таковыми являются (У)-потоки, получающиеся из (У)-каскадов с помощью некоторой стандартной конструкции, описанной в примере Б § 2. Других исключений нет,— это следует из «технических» теорем 11 и 14, которые «подводят» (У)-системы под теорию, построенную Синаем. Если (У)-поток получается из некоторого (У)-каскада с помощью конструкции, описанной в примере Б § 2, то это накладывает сильные топологические ограничения на его фазовое пространство. Легко проверяется, что фазовое пространство геодезического потока этим ограничениям не удовлетворяет и, следовательно, геодезический поток на замкнутом римановом многообразии отрицательной кривизны является K-системой.

За последние годы был достигнут значительный прогресс в эргодической теории, в первую очередь благодаря работам Колмогорова, Рохлина и Синая (см. цитированные выше обзоры). Настоящая работа тесно связана с этим направлением, особенно с некоторыми работами Синая, хотя она имеет, в основном, не метрический, а аналитический характер. Из сказанного в предыдущем абзаце видно, что исследовать эргодические свойства (У)-систем удается путем сопоставления результатов Синая с результатами, доказанными в настоящей работе. Имеются и другие соприкосновения и пересечения с работами Синая; см. § 3—5, а также Приложение.

* Говоря о постоянной кривизне, я подразумеваю, что она во всех точках и по всем двумерным направлениям одна и та же.

** Определение счетнократного лебеговского спектра и энтропии приводится в Приложении, пп. 2 и 4.

Основные результаты настоящей работы опубликованы в статьях [19, 68]. Некоторые из применяемых в ней методов теории возмущений я еще раньше использовал в работах [53, 62], посвященных более обычным для теории обыкновенных дифференциальных уравнений вопросам.

Для чтения данной работы требуется, естественно, известное общее знакомство с затрагиваемыми разделами математики, но я избегал использовать такие факты, которые почему-либо не являются довольно широко известными. Изложение, так сказать, ведется *ab ovo* по модулю стандартной математической культуры. Некоторое исключение представляет необходимый запас сведений из эргодической теории. Этот раздел математики широко известен в том виде и в той степени, как он был в свое время изложен Хопфом [81] или Халмошем [1]; но возникшие позднее «энтропийные» идеи и методы пока что такой известностью не пользуются. Для удобства читателя в конце книги помещено Приложение, содержащее краткое и догматическое (без доказательств) изложение необходимого минимума сведений из «энтропийной» теории.

ГЛАВА I

§ 1. Условия (У)

Говоря о динамической системе, я везде подразумеваю, что она определена на m-мерном связном замкнутом гладком многообразии W^m и принадлежит к классу C^1; а в разделах, посвященных эргодической теории,— что она принадлежит к классу C^2 и имеет интегральный инвариант. Некоторые замечания и примеры, показывающие, что нельзя избежать той или иной «неприятной» ситуации за счет усиления требований гладкости, относятся к аналитическому случаю C^ω. Класс гладкости многообразия W^m должен был бы соответствовать тому, чего мы требуем от рассматриваемой динамической системы; но удобнее не заботиться об этом, считая, например, что W^m снабжено гладкостью класса C^∞ или C^ω (при желании можно начать с гладкости C^k, $k = 1$ или 2, и заменить ее C^k-эквивалентной гладкостью класса C^∞ или C^ω). Мы сразу же снабдим W^m римановой метрикой g_{ij} (там, где надо, она предполагается достаточно гладкой, скажем, класса C^∞). Эта метрика будет фигурировать во многих формулировках, но во всех случаях ее можно заменить эквивалентной (а в силу замкнутости W^m все римановы метрики на W^m эквивалентны). Например, выражение «динамическая система имеет интегральный инвариант» означает, что система имеет инвариантную меру, которая эквивалентна мере Лебега, связанной с римановой метрикой g_{ij}, т. е. выражается через эту меру Лебега с помощью интеграла от положительной (с точностью до множества меры нуль) суммируемой функции. Последняя и называется интегральным инвариантом. Если мы переходим от римановой метрики g_{ij} к римановой метрике h_{ij}, то интегральный инвариант умножается на положительную непрерывную функцию $(\det g_{ij}/\det h_{ij})^{1/2}$.

Поток $\{T^t\}$ класса C^k ($k = 1, 2, \ldots, \infty$ или ω) определяется заданием на W^m (контравариантного) векторного поля $f(w)$ класса C^k; через $T^t w$ (t — любое вещественное число) обозначается решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d(T^t w)}{dt} = f(T^t w), \qquad T^0 w = w.$$

Каскад класса C^k порождается C^k-диффеоморфизмом $T: W^m \to W^m$; T^t (t — любое целое число) определяется обычным образом с помощью итераций.

Касательное пространство к W^m в точке w будем обозначать R^m_w. Диффеоморфизмы T^t индуцируют отображения $\widetilde{T}^t$ касательных пространств:

$$\widetilde{T}^t : R^m_w \to R^m_{T^t w},$$

являющиеся дифференциалами отображений T^t. Под действием $\widetilde{T}^t$ вектор

$\omega \in R^m_w$ переходит в вектор $\widetilde{T}^t\,\omega$, имеющий (в несколько небрежных обозначениях) вид

$$\widetilde{T}^t\omega = \frac{\partial (T^t w)}{\partial w}\,\omega.$$

В случае потока $\widetilde{T}^t\omega$ является решением системы уравнений в вариациях

$$\frac{\partial(\widetilde{T}^t\omega)}{\partial t} = f_w\,(T^t w)\,\widetilde{T}^t\omega, \qquad \widetilde{T}^0\omega = \omega.$$

(Следует заметить, что $\widetilde{T}^t\omega$ — вектор, но ни его производная по времени, ни f_w не имеют тензорного характера. Подробнее см. в § 7.)

Для потока условия ($У$) гласят:

($У$1). $f(w) \neq 0$ *при всех* w.

($У$ 2). *Любое* R^m_w *разлагается в прямую сумму*

$$R^m_w = X^k_w \oplus Y^l_w \oplus Z^1_w,\ \dim\ X = k \neq 0,\ \dim\ Y = l \neq 0, \qquad (1.1)$$

где Z^1_w *порождается вектором* $f(w)$, *а при* $\xi \in X^k_w$, $\eta \in Y^l_w$ *имеем*

а) $|\widetilde{T}^t\xi| \leqslant a|\xi|e^{-ct}$ *для* $t \geqslant 0$; $|\widetilde{T}^t\xi| \geqslant b|\xi|e^{-ct}$ *для* $t \leqslant 0$;

б) $|\widetilde{T}^t\eta| \leqslant a|\eta|e^{ct}$ *для* $t \leqslant 0$; $|\widetilde{T}^t\eta| \geqslant b|\eta|e^{ct}$ *для* $t \geqslant 0$.

Константы a, b, *с положительны и одни и те же для всех* w *и всех* ξ, η.

Для каскада условия ($У$) видоизменяются: поскольку теперь нет векторного поля $f(w)$, то ($У$1) отпадает, а в ($У$2) вместо (1.1) речь идет о разложении $R^m_w = X^k_w \oplus Y^l_w$ с аналогичными свойствами.

Обсудим условия ($У$). Для потока условие ($У$1) означает, что система не имеет положений равновесия; так оно и есть для геодезических потоков. $f(T^t w)$ всегда является одним из решений уравнения в вариациях, и это решение, в силу компактности и ($У$1), не стремится ни к нулю, ни к ∞. ($У$2) описывает поведение всех остальных решений уравнений в вариациях (а в случае каскада — просто всех $\widetilde{T}^t\omega$, $\omega \in R^m_w$). Легко показать, что подпространства X^k_w и Y^l_w определяются своими свойствами а), б) однозначно, потому что ни одно решение уравнений в вариациях, не проходящее через X^k_w и Y^l_w, не стремится к нулю ни при $t \to -\infty$, ни при $t \to +\infty$ (а решения, не проходящие через $X^k_w \cup Y^l_w \cup Z^1_w$, даже стремятся к ∞ при $t \to \pm\infty$). Кроме того, оба подпространства непрерывно зависят от w, а k, l — одни и те же для всех w (причем в случае потока очевидно, что если w меняется вдоль траектории, то X_w и Y_w меняются гладко). Действительно, пусть $w_n \to w_0$. Можно считать (перейдя, если потребуется, к подпоследовательности), что

$$\dim\ X_{w_1} = \dim\ X_{w_2} = \ldots = \dim\ X_{w_n} = \ldots,$$

$$\dim Y_{w_1} = \dim\ Y_{w_2} = \ldots = \dim\ Y_{w_n} = \ldots$$

и что существуют пределы $\lim\ X_{w_n}$, $\lim\ Y_{w_n}$ (понимаемые в очевидном смысле). Из а) и б) тогда следует, что $\lim\ X_{w_n} \subset X_{w_0}$ и $\lim\ Y_{w_n} \subset Y_{w_0}$ (поскольку при любом фиксированном t преобразование $\widetilde{T}^t$ непрерывно зависит от w и от $\xi \in R^m_w$). Поэтому $\dim X_w$ и $\dim Y_w$ — полунепрерывные сверху функции w, а так как в сумме эти функции равны $m - 1$ (m в случае каскада), то они непрерывны, т. е. постоянны. Наконец, из сказанного видно, что из любой последовательности $w_n \to w_0$ можно выделить подпоследовательность, для которой $\lim X_{w_n} = X_{w_0}$ и $\lim Y_{w_n} = Y_{w_0}$, что влечет непрерывность*.

Однако даже в аналитическом случае зависимость X_w и Y_w от w не всегда является гладкой; соответствующий пример см. в § 24.

Наконец, легко видеть, что

$$\widetilde{T}^t X_w^k = X_{T^t w}^k, \quad \widetilde{T}^t Y_w^l = Y_{T^t w}^l. \tag{1.2}$$

Между прочим, если постулировать (1.2), то в а) и б) можно ограничиться только первыми (или же только вторыми) неравенствами, ибо тогда при $\xi \in X_w^k$, $t \leqslant 0$

$$|\xi| = |\widetilde{T}^{-t}\widetilde{T}^t\xi| \leqslant a|\widetilde{T}^t\xi|\,e^{ct}, \qquad |\widetilde{T}^t\xi| \geqslant \frac{1}{a}|\xi|e^{-ct},$$

а при $\eta \in Y_w^l$, $t \geqslant 0$ —

$$|\eta| = |\widetilde{T}^{-t}\widetilde{T}^t\eta| \leqslant a|\widetilde{T}^t\eta|\,e^{-ct},$$

$$|\widetilde{T}^t\eta| \geqslant \frac{1}{a}|\eta|\,e^{ct}.$$

На протяжении всей этой работы символы

$$k,\ l,\ X_w^k,\ Y_w^l,\ Z_w^1,\ R_w^m,\ T^t,\ \widetilde{T}^t,\ f(w)$$

имеют один и тот же смысл, а именно, тот, который им придан в настоящем параграфе (если только явно не сказано противное).

§ 2. Примеры (У)-систем

Здесь будут приведены или по крайней мере упомянуты все примеры (У)-систем, какие я знаю. Подробнее часть этих примеров рассматривается в гл. VI.

А. Пусть W^m — m-мерный тор, получающийся путем факторизации m-мерного эвклидова пространства $(w_1, \ldots, w_m)$ по целочисленной решетке. Автоморфизм T тора (как группы Ли) порождается линейным преобразованием $w_i \to \Sigma a_{ij} w_j$, где матрица (a_{ij}) — целочисленная и либо унимодулярная, либо с определителем — 1. Рассмотрим каскад $\{T^n, -\infty < n < \infty\}$. Хорошо известно [1], что этот каскад является эргодическим тогда и только тогда, когда среди собственных значений матрицы (a_{ij}) нет корней из единицы (тогда он автоматически оказывается и K-каскадом; это было доказано несколькими авторами и является частным случаем общей теоремы Рохлина [80] об эндоморфизмах компактных коммутативных групп). Для того же, чтобы каскад $\{T^n\}$ удовлетворял условию (У), необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы (a_{ij}) были по модулю отличны от 1.

Всякий эргодический автоморфизм двумерного или трехмерного тора автоматически удовлетворяет условию (У). Действительно, пусть среди собственных значений матрицы (a_{ij}) нет корней из единицы, но имеется собственное значение, равное по модулю единице. Оно должно быть комплексным числом вида $e^{i\varphi}$. Поскольку коэффициенты характеристического уравнения вещественные, то $e^{-i\varphi}$ — тоже собственное значение. В двумерном случае сумма собственных чисел $e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2\cos\varphi$ должна быть следом целочисленной матрицы, т. е. целым числом; отсюда угол φ кратен 60° и потому $e^{i\varphi}$ — корень из единицы. В трехмерном случае, кроме $e^{i\varphi}$ и $e^{-i\varphi}$, имеется еще третье собственное значение λ. Их произведение

$$e^{i\varphi}e^{-i\varphi}\lambda = \det(a_{ij}) = \pm 1,$$

откуда $\lambda = \pm 1$, т. е. λ — корень из единицы.

---

* Можно показать, что в (У)-системе класса C^2 поля X_w, Y_w удовлетворяют условию Гельдера [82].

В многомерном же случае условие эргодичности шире, чем условие ($У$).

Б. Всякий каскад можно вложить в некоторый поток. Опишем, как это делается. Пусть диффеоморфизм $T_0 : W_0^m \to W_0^m$ порождает каскад $\{T_0^n\}$. Отождествляя в прямом произведении $W_0^m \times [0, 1]$ точки $(w, 0)$ и $(T_0 w, 1)$, получим новое замкнутое многообразие W^{m+1}. Пусть $p : W_0^m \times [0, 1] \to W^{m+1}$ — отображение отождествления. Определим поток $T^t : W^{m+1} \to W^{m+1}$, полагая, что

$$T^t p(w, s) = p(T_0^{[t+s]} w, t+s-[t+s])$$

(квадратные скобки обозначают целую часть). Конечно, изучение этого потока полностью сводится к изучению каскада T_0^n и обратно.

Описанная конструкция представляет собой частный случай одного построения, применяемого в эргодической теории (см. Приложение, п. 1), а именно: поток $\{T^t\}$ является специальным потоком, построенным по отображению T_0 и функции $F \equiv 1$. Для нас, однако, существенно, что $\{T^t\}$ является гладким потоком на гладком многообразии, поскольку в настоящей работе только такие потоки и рассматриваются. Имеет смысл пояснить, как вводится гладкость в W^{m+1}. Пусть

$$W_1 = p\left(\left(W_0^m \times \left[0, \frac{2}{7}\right)\right) \cup \left(W_0^m \times \left(\frac{5}{7}, 1\right]\right)\right) \subset W^{m+1},$$

$$V_1 = W_0^m \times \left(-\frac{2}{7}, \frac{2}{7}\right).$$

Определим гомеоморфизм $\psi_1 : W_1 \to V_1$, полагая

$$\psi_1 p(w, s) = \begin{cases} (w, s), & 0 \leqslant s < \frac{2}{7}, \\ (T_0 w, s-1), & \frac{5}{7} < s \leqslant 1. \end{cases}$$

Пусть, далее,

$$V_2 = W_0 \times \left(\frac{1}{7}, \frac{4}{7}\right) \subset W_0 \times [0, 1], \quad V_3 = W_0 \times \left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right) \subset W_0 \times [0, 1],$$

$$W_2 = p(V_2), \quad W_3 = p(V_3), \quad \psi_2 = p^{-1}|W_2, \quad \psi_3 = p^{-1}|W_3.$$

Очевидно, что отображения $\psi_j \psi_i^{-1}$ суть диффеоморфизмы областей $\psi_i(W_i \cap W_j) \subset V_i$ в V_j, имеющие тот же класс гладкости, что и T_0. Пусть атлас многообразия W_0^m состоит из карт $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, где U_α — координатные окрестности, а φ_α: $U_\alpha \to R^m$ — задающие локальные координаты отображения в m-мерное эвклидово пространство. Для V_i $(i = 1, 2, 3)$ карты $(U_{\alpha i}, \varphi_{\alpha i})$ определяются очевидным образом, как для прямого произведения. Тогда

$$(\widetilde{U}_{\alpha i} = \psi_i^{-1}(U_{\alpha i}), \widetilde{\varphi}_{\alpha i} = \varphi_{\alpha i} \psi_i)$$

суть карты многообразия W^{m+1}, совокупность которых образует атлас того же класса гладкости, что и T_0. Поток $\{T^t\}$ определяется в локальных координатах $(w_1, \ldots, w_m, s)$ системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dw_1}{dt} = 0, \ldots, \frac{dw_m}{dt} = 0, \quad \frac{ds}{dt} = 1$$

и, очевидно, имеет тот же класс гладкости, что и W^{m+1}.

W^{m+1} является косым произведением, базой которого служит окружность S^1, слоем — W_0^m (а структурная группа порождена диффеоморфизмом T_0). Если диффеоморфизмы T_0, $\hat{T}_0 : W_0^m \to W_0^m$ диффеотопны, то построенные с их помощью многообразия W^{m+1}, $\hat{W}^{m+1}$ будут послойно диффеоморфны. (Диффеоморфизм $\varphi : W^{m+1} \to \hat{W}^{m+1}$ можно определить так:

$$\varphi\, p(w, s) = p(S_s w,\ s)\ ,$$

где S_t — диффеотопия, связывающая $1_{W_0^m}$ с $\hat{T}_0^{-1}T_0$ и постоянная по t возле концов отрезка $[0, 1]$). Поскольку диффеоморфизм можно аппроксимировать диффеотопным ему диффеоморфизмом класса C^∞ (или даже C^ω), то класс гладкости W^{m+1} можно повысить до C^∞ или C^ω, не меняя проекции на базу $\pi : W^{m+1} \to S^1$. (Структурная группа, т. е. ее действие в слое, конечно, меняется.) При этом сглаживании класс гладкости потока $\{T^t\}$ остается прежним, т. е. тем же, что и класс гладкости исходного каскада $\{T_0^n\}$.

Очевидно, что если каскад $\{T_0^n\}$ имеет интегральный инвариант, то и поток $\{T^t\}$ тоже будет иметь интегральный инвариант. Обратное тоже справедливо. Действительно, пусть μ — инвариантная (и эквивалентная лебеговой) мера для потока $\{T^t\}$. Рассматривая этот поток в прямом произведении W_0^m на отрезок, мы видим, что для любого измеримого множества $A \subset W_0^m$

$$\mu\,(A \times (a, b)\,) = \mu\,(A \times (a + t, b + t)),$$

откуда легко вывести, что мера μ совпадает с прямым произведением некоторой меры ν в W_0^m (тоже эквивалентной мере Лебега) на обычную меру на прямой. После сказанного ясно, что T_0 сохраняет меру ν.

Ясно, что в спектре потока $\{T^t\}$ содержится дискретная компонента; а именно, если f есть функция на окружности (а $\pi : W^{m+1} \to S^1$,— как и выше, проекция), то, обозначая через P^t поворот окружности S^1 на угол $2\pi^t$, имеем

$$f \circ \pi \circ T^t = f \circ P^t \circ \pi,$$

откуда видно, что если f — собственная функция потока $\{P^t\}$, то $f \circ \pi$ — собственная функция потока $\{T^t\}$.

Применив описанную конструкцию к ($У$)-каскаду на W_0^m, получим ($У$)-поток на W^{m+1}. Обратно, если поток, полученный таким путем из некоторого каскада, удовлетворяет условию ($У$), то исходный каскад тоже удовлетворяет условию ($У$). Отсюда видно, что существуют ($У$)-потоки, в спектре которых содержится дискретная компонента.

В. Пусть V^n — замкнутое n-мерное риманово многообразие, а W^{2n-1} — пространство единичных касательных векторов V^n, т. е. пространство пар (v, e), где $v \in V^n$, $e \in R_v^n$, $|e| = 1$. Геодезические линии многообразия V^n определяют некоторую динамическую систему («геодезический поток») в W^{2n-1}, которая имеет интегральный инвариант. Если V^n — многообразие отрицательной кривизны (кривизна должна быть отрицательной в любой точке и в любом двумерном направлении), то геодезический поток удовлетворяет условиям ($У$); это фактически доказано Адамаром и Э. Картаном (см. прибавление III к книге Картана [3]). Соответствующее рассуждение, модифицированное применительно к нашим целям (Адамар и Картан, конечно, не говорили об ($У$)-системах), приводится в § 22.

Отрицательность кривизны — условие достаточное, но не необходимое для того, чтобы выполнялось условие ($У$): имеются многообразия, у которых кривизна кое-где положительна и геодезические потоки на которых все же удовлетворяют условию ($У$). Грубо говоря, наличие небольших кусочков с небольшой положительной кривизной не приводит к нарушению условия ($У$); однако я не знаю, как сформулировать это утверждение сколько-нибудь удовлетворительным образом. У Э. Хопфа есть статья [7], в которой геодезический поток на поверхности рассматривается в предположении, что выполняется некоторое условие неустойчивости, из которого следует условие (У). В § 1 статьи [7] Хопф приводит некоторые условия малости тех кусков поверхности, где кривизна положительна, обеспечивающие выполнение его условий неустойчивости; но он сам справедливо называет содержание этого параграфа «примитивным».

Можно показать, что на финслеровом многообразии отрицательной кривизны геодезический поток тоже удовлетворяет условию (У).

Г. Рассмотрим кривые постоянной геодезической кривизны k на поверхности V^2. Сквозь данную точку $v \in V^2$ в данном направлении проходят две такие кривые; возле точки v одна из них «заворачивает» в одну сторону, а другая — в другую. Если поверхность V^2 — ориентируемая, то можно условиться рассматривать лишь те кривые, которые заворачивают в какую-нибудь определенную сторону; такие кривые определяют некоторый поток в пространстве W^3 единичных касательных векторов. Если же поверхность V^2 — неориентируемая, то направление, в котором поворачивает кривая, нельзя единообразным образом задать во всех точках и для всех единичных касательных векторов; поэтому не получается потока в W^3. Чтобы с помощью кривых постоянной кривизны на неориентируемой поверхности определить поток, надо рассматривать не W^3, а пространство ортонормированных 2-реперов. Это эквивалентно тому, что рассматриваются кривые не на самой V^2, а на ее двулистной накрывающей.

Можно доказать (см. § 22), что если кривизна $K(v)$ поверхности V^2 во всех точках отрицательна и если выполняется условие

$$k^2 < \min_{v \in V^2} |K(v)|, \tag{2.1}$$

то полученный поток будет (У)-потоком. В случае поверхности постоянной отрицательной кривизны условие (2.1) является не только достаточным, но и необходимым. Действительно, хорошо известно, что при $k^2 = |K|$ получаются орициклы, а при $k^2 > |K|$ — окружности; ни те, ни другие не образуют (У)-потока.

Д. При малом (в смысле C^1) возмущении (У)-системы * снова получается (У)-система (см. § 7). В сущности, это доказали Арнольд и Синай, хотя в их работе [4] говорится о частном случае — о малых возмущениях (У)-автоморфизмов тора, в основном двумерного тора.

В этом последнем случае $k = l = 1$, так что поля касательных пространств X_w^k, Y_w^l суть просто поля направлений; в [4] доказано, что эти поля принадлежат к классу C^1. (При обсуждении вопроса о гладкости полей X_w, Y_w всегда предполагается, что рассматриваемая (У)-система принадлежит, по крайней мере, к классу C^2.) Доказательство гладкости поля X_w^k, по существу, годится для любой (У)-системы, для которой $l = 1$; аналогично, поле Y_w^l будет гладким, если $k = 1$. Если (У)-система имеет непрерывный интегральный инвариант и $k = 1$ или $l = 1$, то оба поля X_w, Y_w будут гладкими как для исходной системы, так и для любой достаточно близкой к ней системы.

В [4] утверждалось также, что первые производные угловых коэффициентов, определяющих поля направлений X_w^1, Y_w^1, имеют ограниченную вариацию, но доказательство, которое имелось в виду, оказалось ошибочным [5, 68], и я не знаю, верно ли это утверждение. Можно построить пример, когда каскад аналитический, а поля X_w^1, Y_w^1 не принадлежат к классу C^2.

---

* Под «расстоянием» между двумя динамическими системами подразумевается расстояние в метрике C^1 между порождающими их векторными полями (для потоков) или диффеоморфизмами (для каскадов).

Этот пример строится посредством малого возмущения эргодического автоморфизма двумерного тора (см. § 24).

В многомерном же случае, как уже говорилось, даже для аналитической (У)-системы поля X_w^k, Y_w^l не обязаны быть гладкими. Соответствующий пример тоже строится в § 24 с помощью возмущения (У)-автоморфизма многомерного тора.

Для геодезического потока на замкнутом n-мерном римановом многообразии V^n отрицательной кривизны $k = l = n - 1$, поэтому в случае $n = 2$ поля касательных подпространств X_w^1, Y_w^1 гладкие (что фактически было известно Э. Хопфу, см. [6, § 14] и [7, § 7]). Эти поля будут гладкими также в том случае, когда n любое, а кривизна постоянна (что знал уже сам Лобачевский) или «почти постоянна». В общем же случае они, видимо, не гладкие.

Ясно, что при малом k поток, определяемый кривыми постоянной кривизны k на поверхности, можно рассматривать как малое возмущение геодезического потока; таким образом, из сказанного в Д следует, что при достаточно малых k поток кривых постоянной кривизны на поверхности отрицательной кривизны будет (У)-потоком. Но, конечно, из таких общих соображений не следует, что этот поток будет (У)-потоком при всех k, удовлетворяющих условию (2.1); это приходится доказывать отдельно.

Е. При гладкой замене времени (У)-поток остается (У)-потоком [82].

Ж. Совсем недавно Смейл предложил следующее обобщение (У)-каскада из А. Пусть G — группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, $\Gamma \subset G$ — дискретная подгруппа с компактным факторпространством G/Γ, $T : G \to G$ — автоморфизм группы Ли G, оставляющий инвариантной подгруппу Γ. Тогда T порождает диффеоморфизм $T_\Gamma : G/\Gamma \to G/\Gamma$. Легко видеть, что каскад $\{T_\Gamma^n\}$ удовлетворяет условию (У) тогда и только тогда, когда все собственные значения автоморфизма $\widetilde{T} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, порожденного автоморфизмом $T : G \to G$, по модулю отличны от единицы. Можно показать, что только у нильпотентных групп Ли имеются автоморфизмы с этим последним свойством. Смейл указал примеры, когда такой автоморфизм действительно оставляет инвариантной некоторую дискретную подгруппу с компактным факторпространством. Таким образом, помимо тора, (У)-каскады существуют также и на некоторых нильмногообразиях.

З. Возникает вопрос, на каких многообразиях W^m могут существовать (У)-системы. Вообще говоря, уже существование непрерывных полей касательных подпространств X_w^k, Y_m^l и (в случае потока) векторного поля $f(w) \neq 0$ накладывает некоторые ограничения на W^m. Кроме подобных очевидных ограничений, известны также и некоторые другие, которые, однако, все относятся к случаю, когда $k = 1$ или $l = 1$ или даже $k = l = 1$. Эти результаты принадлежат С. Новикову [95] (§ 5 и конец § 6) и Маргулису [96]. (Следует предупредить читателя, что в [95] рассуждения на стр. 261 нуждаются в серьезном исправлении.)

§ 3. Формулировка результатов, I

Согласно Андронову и Понтрягину [8], динамическая система $\{T^t\}$ (заданная, как всегда, на W^m) называется *грубой*, если для любой динамической системы $\{S^t\}$, достаточно близкой к $\{T^t\}$ в смысле C^{1*}, найдется гомеоморфизм (вообще говоря, не гладкий) $\chi : W^m \to W^m$, близкий к тождественному в смысле C^0 и переводящий траектории системы $\{T^t\}$ в траектории системы $\{S^t\}$, причем направление движения по траекториям сохраняется.

---

* См. сноску на стр. 12.

В том случае, когда $\{T^t\}$ — каскад, это означает коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} W^m & \xrightarrow{T^t} & W^m \\ \chi\downarrow & & \downarrow\chi \\ W^m & \xrightarrow{S^t} & W^m \end{array}.$$

Для потоков же такая диаграмма, вообще говоря, не коммутативна, ибо скорости движения по траекториям при гомеоморфизме χ не обязаны сохраняться.

Теорема 1 (теорема о грубости). *Если система удовлетворяет условию (У), то она грубая.*

Теорема 2. *Если система удовлетворяет условию (У), то она имеет счетное множество периодических траекторий.*

Теорема 3. *Если система удовлетворяет условию (У) и имеет интегральный инвариант *, то ее периодические траектории образуют в W^m всюду плотное множество.*

Теорема 4. *Если система класса C^2 удовлетворяет условию (У) и имеет интегральный инвариант, то она эргодическая.*

Из теоремы 4 легко вывести, что спектр любого (У)-каскада непрерывен (ибо декартов квадрат (У)-каскада, очевидно, сам является (У)-каскадом и, следовательно, эргодичен, а это эквивалентно непрерывности спектра, см. [1]). Со спектрами (У)-потоков, как видно из примера Б § 2 дело обстоит сложнее. Поэтому дальнейшие эргодические теоремы формулируются по-разному для каскадов и для потоков.

Теорема 5. *Если каскад класса C^2 удовлетворяет условию (У) и имеет интегральный инвариант, то он является К-системой.*

Теорема 6. *Если (У)-поток $T^t: W^m \to W^m$ класса C^2 с интегральным инвариантом имеет собственную функцию, отличную от константы, то эта функция непрерывна и существует такое замкнутое подмногообразие $W_0^{m-1} \subset W^m$ и такой (У)-каскад T_0^n: $W_0^{m-1} \to W_0^{m-1}$, что поток $\{T^t\}$ получается из каскада $\{T_0^n\}$ с помощью конструкции, описанной в примере Б (с точностью до умножения масштаба времени на константу)* **.

Теорема 7. *Если (У)-поток класса C^2 с интегральным инвариантом имеет непрерывный спектр, то он является К*-системой.

Замечание 3.1. Доказательство теорем 5 и 7 сводится к проверке выполнения условий некоторых теорем Синая, формулировка которых приводится в Приложении. Эта проверка осуществляется с помощью теорем 11 и 14 (см. § 5).

Замечание 3.2. Принадлежность системы к классу C^2 используется только при доказательстве теоремы 10 (см. § 5). В остальных рассуждениях непосредственно используется только принадлежность системы к классу C^1; иными словами, если известно, что справедливо утверждение теоремы 10, то теоремы 4—7 будут верны и при гладкости класса C^1. Я не знаю, можно ли доказать теорему 10, предполагая только, что система принадлежит классу C^1. Можно обойтись требованием, чтобы система принадлежала к классу C^1 и чтобы модуль непрерывности $\omega(r)$ первых производных порождающего систему векторного поля или диффеоморфизма удовлетворял условию

$$\int_0 \frac{\omega(r)}{r}\, dr < \infty.$$

---

* Напомню, что в начале § 1 сказано, в каком смысле употребляется в настоящей работе термин «интегральный инвариант».

** Я не выяснял, имеет ли подмногообразие W_0^{m-1} класс гладкости C^2, но независимо от этого каскад $\{T_0^n\}$ является К-каскадом (см. замечание 3.2 и сноску на стр. 27).

(Насколько мне известно, такое условие не имеет специального названия.) К сожалению, доказательство достаточности этого условия слишком громоздко.

Как видно, здесь мы встречаемся с грубыми системами иной структуры, нежели на плоскости [8, 15, 70] или, более обще, на поверхности [16, 83]. Впервые пример грубой системы с иной структурой, нежели на плоскости, указал Смейл [17], и он же высказал предположение о грубости эргодического автоморфизма двумерного тора и геодезического потока на замкнутом многообразии отрицательной кривизны [см. его доклад на Стокгольмском математическом конгрессе [18] и посвященную родственному вопросу его статью [79], где имеются также интересные замечания об истории вопроса]. Согласно [18], грубость эргодического автоморфизма двумерного тора Смейлу удалось доказать, но доказательство осталось неопубликованным. Арнольд и Синай тоже пытались доказать грубость эргодического автоморфизма двумерного тора [4], но в их доказательстве имеется пробел [5], упомянутый в § 2. Мой метод ближе к тем методам, посредством которых Гробман [20, 21] и Гартман [22, 23] доказали грубость седла *.

При доказательстве теоремы 1 мы увидим, что гомеоморфизм χ, существование которого утверждается в этой теореме, определен в случае каскада однозначно, а в случае потока почти однозначно (однозначно с точностью до сдвигов вдоль траекторий). (В этом, в сущности, и состоит основная идея доказательства теоремы 1.) Оказывается, что он может быть сингулярным, т. е. переводить множество полной меры в множество меры нуль. Дело в том, что при малом возмущении метрический тип ($У$)-системы может измениться — в § 25 указан пример малого аналитического возмущения эргодического автоморфизма T двумерного тора W^2, при котором эвклидова мера μ остается инвариантной, но энтропия меняется. Обозначая возмущенный диффеоморфизм тора через S, можно сказать, что гомеоморфизм χ устанавливает эквивалентность между метрическими динамическими системами (S, W^2, μ) и $(T, W^2, \bar{\mu})$, где мера $\bar{\mu}(A) = \mu\chi(A)$. Поскольку энтропия системы $(T, W^2, \bar{\mu})$, т. е. (S, W^2, μ), отлична от энтропии системы (T, W^2, μ), то меры μ и $\bar{\mu}$ не совпадают. В то же время эти меры одинаково нормированы ($\mu(W^2) = \bar{\mu}(W^2)$) и обе являются эргодическими (эргодичность $(T, W^2, \bar{\mu}) \sim (S, W^2, \mu)$ следует из теоремы 4). Хорошо известно, что если две различные (одинаково нормированные) меры инвариантны и эргодичны относительно одного и того же преобразования T, то они сингулярны друг относительно друга. Поэтому гомеоморфизм χ сингулярен. Это дает отрицательный ответ на вопрос, поставленный в [4].

Применительно к ($У$)-автоморфизмам тора теоремы 2—7 не дают ничего нового. Переходя к обсуждению этих теорем применительно к геодезическим потокам на многообразиях отрицательной кривизны, следует сразу же напомнить, что я ограничиваюсь замкнутыми многообразиями, тогда как в большинстве упоминаемых ниже работ других авторов рассматриваются также и многие открытые многообразия и многообразия с особенностями. Таким образом, в этом отношении моя работа не является более общей (хотя вероятно, что многое из нее можно перенести на некоторые классы незамкнутых многообразий отрицательной кривизны). В других отношениях она носит завершающий характер. Ниже я говорю исключительно о замкнутых многообразиях. В дифференциальные уравнения для геодезических линий входят первые производные метрического тензора. Поэтому к геодезическому потоку теоремы 1—3 можно применять, когда риманова метрика имеет класс C^2, а теоремы 4—7,— когда она имеет класс C^3 (или даже меньше, см. замечание 2 выше). Эти требования гладкости не сильнее, чем у других авторов (кроме Буземана [25]).

* Эти важные работы Гробмана и Гартмана изложены также в их книгах: [102, гл. 9] и [103, гл. 10].

Поведение геодезических линий на многообразиях V^n отрицательной кривизны интенсивно изучалось примерно между 1920 и 1940 гг. Обзор Хедлунда [24] и статьи Э. Хопфа [6, 7] подводят итоги этому периоду. Согласно [24], утверждение теоремы 3 было доказано в то время для геодезических потоков на двумерных и трехмерных многообразиях постоянной отрицательной кривизны. Однако если для геодезических потоков на поверхностях переменной отрицательной кривизны утверждение теоремы 3 и не было в этот период явно сформулировано и доказано,— в таком случае придется признать, что это сделал Буземан [25] в более позднее время,— то, во всяком случае, все необходимое для его доказательства имелось *.

Хотя я ограничиваюсь ссылкой на завершающие этот период статьи [24, 6, 7] и не даю обзора работ, опубликованных в этот период разными авторами, я все же должен отметить важную роль, которую сыграл Морс (он, правда, не касался метрических вопросов). Название одной из его статей «Does instability imply transitivity» (1934 г.) говорит само за себя.

Хопф и Хедлунд доказали эргодичность геодезического потока для поверхностей переменной отрицательной кривизны (более обще, для поверхностей, на которых геодезический поток удовлетворяет некоторому условию неустойчивости [7], из которого тоже следует условие (У)) и для многообразий постоянной отрицательной кривизны произвольной размерности. Они доказали также, что на многообразии постоянной отрицательной кривизны геодезический поток обладает перемешиванием. Позднее Каримова [26] с помощью метода Хопфа доказала эргодичность геодезического потока для трехмерных многообразий отрицательной кривизны, удовлетворяющих некоторому (довольно сильному) дополнительному условию (условию свободной подвижности вокруг некоторой точки). Парасюк [27] рассматривал некоторые трехмерные многообразия, не делая в явном виде предположения о постоянстве кривизны; однако Даукер указала в реферате [28], что, как ей представляется, условия, наложенные в [27], могут выполняться лишь когда кривизна постоянна. Это действительно так, если многообразие замкнутое **, но я не знаю, останется ли это утверждение в силе, если (как это делает Парасюк) предполагать многообразие всего лишь имеющим конечный объем.

Несколько особняком стоит алгебраический метод, который придумали Гельфанд и Фомин [29]; позднее Маутнер [30, 31] предложил другой вариант

* Для динамической системы с бесконечным счетным множеством периодических траекторий вопрос об «изобилии» последних имеет две стороны. Одна из них (плотность) отражена в теореме 3, а другая — оценка числа N_T периодических траекторий с периодом $\leqslant T$ — нет. В (У)-системе N_T растет при $T \to \infty$ не медленнее некоторой экспоненты. Дабы убедиться в этом, проще всего отметить, что в (У)-системе всегда имеются гомоклинические точки (это очевидно, если система имеет интегральный инвариант, и следует из рассуждений § 13, 14 в противном случае), и сослаться на описание гомоклинических точек, данное Смейлом [79]. По существу, такое рассуждение восходит к «символической динамике» Морса (см. [24]). С другой стороны, из теоремы 1 и результатов М. Артина и Мазура [97] сразу следует, что в (У)-каскаде N_T растет не быстрее некоторой экспоненты; вероятно, это справедливо и для (У)-потока. Для геодезических потоков на многообразиях отрицательной кривизны Синай и Маргулис получили более конкретные результаты [98, 96].

** Парасюк рассматривал многообразия M, получающиеся из полупространства $z \geqslant 0$ с метрикой

$$ds^2 = \frac{f(z)\,(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{z^2}$$

путем факторизации по некоторой группе гиперболических движений, относительно которой непрерывная функция $f(z)$ должна быть инвариантна. Рассмотрим другое многообразие N, получающееся тем же путем при $f \equiv 1$. Функция $f(z)$, рассматриваемая как функция на многообразии N, обладает тем свойством, что все ее множества уровня состоят из орисфер, ибо плоскости $z=\text{const}$ являются орисферами в пространстве Лобачевского, реализованного в виде полупространства $z \geqslant 0$ с метрикой $ds^2 = \frac{1}{z^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$. Но из теоремы 15 следует, что каждая орисфера всюду плотна в N.

этого метода. В [29] доказано, что спектр геодезического потока на многообразии V^n постоянной отрицательной кривизны — лебеговский. Маутнер доказал, что геодезический поток на симметрических римановых многообразиях отрицательной кривизны эргодичен и имеет абсолютно непрерывный спектр. (Кривизна симметрического пространства может зависеть от двумерного направления и в этом смысле не постоянна.) Кратностью спектра Маутнер не занимался, а Гельфанд и Фомин доказали, что в случае $n = 2$ спектр счетнократный. Вероятно, и в многомерном случае можно с помощью алгебраического метода определить кратность спектра. Но алгебраический метод применим лишь тогда, когда изучаемый поток получается при действии некоторой однопараметрической подгруппы некоторой группы Ли на некотором факторпространстве этой группы Ли. (Зато алгебраический метод с успехом применялся не только для изучения геодезических потоков, но и к некоторым другим задачам,— см. работы Парасюка [32] и ряда американских авторов [33—36]. По сравнению с предыдущими исследованиями в последних работах Ауслендера и Грина [конец 34 и 35] теория представлений используется в меньшей степени и бо́льшую роль играет структурная теория групп Ли и их факторпространств.)

Наконец, недавно Синай доказал, что геодезический поток на многообразии постоянной отрицательной кривизны [37] и на поверхности переменной отрицательной кривизны [38] является K-системой.

Теоремы 4—7 полностью перекрывают все эти результаты. Дело в том, что, как доказал Арнольд [39, 40], эргодический геодезический поток не может иметь непрерывной собственной функции, отличной от константы, равно как и поток, получающийся из него при непрерывной замене времени*. Поэтому для геодезического потока не возникает альтернативы, о которой идет речь в теоремах 6, 7; следовательно, *геодезический поток на многообразии отрицательной кривизны является K-системой* (ср. с примером 5.1, замечаниями 23.1, 23.2 и текстом между теоремами 13 и 14).

Доказательство теоремы Арнольда приводится в § 23.

Теорема Арнольда на самом деле доказана не для всех многообразий, а для всех, кроме двумерного тора. Но так как на торе кривизна не может быть отрицательной во всех точках (полная кривизна тора равна нулю), то в предыдущем абзаце это ничего не меняет. Известно также, что геодезический поток на двумерном торе не может удовлетворять условию неустойчивости Хопфа [7]. Более обще, единственная метрика на двумерном торе, при которой нет сопряженных точек,— это метрика, локально совпадающая с эвклидовой метрикой на плоскости (гауссова кривизна всюду равна нулю) [41]. Маргулис [добавление к 82] доказал, что геодезический поток на торе не может удовлетворять условию($У$). Неизвестно, может ли вообще геодезический поток на торе быть эргодическим. (Имеется в виду, что риманова метрика имеет обычную в подобных вопросах гладкость — C^3 или выше. Синай построил пример эргодического геодезического потока на торе, но в этом примере гладкость метрики нарушается в некоторых точках.) Эта книга была написана еще до работы Маргулиса и поэтому в ней, желая без всяких оговорок высказать утверждение, несколько более общее, нежели в предыдущем абзаце: *если геодезический поток удовлетворяет условию* ($У$), *то он является K-потоком*,— я вынужден специально рассмотреть в конце § 23 исключительный случай тора. Фактически там выясняется, каким топологическим условиям удовлетворяет трехмерное многообразие, на котором существует ($У$)-поток, получающийся с помощью конструкции из § 2, Б.

Из теорем 5—7 вытекает доказанный еще раньше Синаем факт, что любая ($У$)-система класса C^2 (или удовлетворяющая условию, указанному в замечании 3.2) имеет положительную энтропию. Действительно, K-системы имеют положительную энтропию. Энтропия же ($У$)-потока, построенного

* Родственная теорема имеется у Риба ([104], п. 3.2).

из ($У$)-каскада $\{T_0^n\}$ с помощью конструкции, описанной в примере Б § 2, по известной формуле Абрамова (П. 12) для энтропии специального потока сводится к энтропии каскада $\{T_0^n\}$, т. е. тоже положительна.

В § 7 доказывается, что ($У$)-системы образуют открытое множество в топологии C^1 (и тем более в топологии C^r с $r > 1$). Таким образом, среди классических динамических систем в естественной для этих систем топологии множество систем с положительной энтропией никоим образом не является «исключительным». Более того, среди каскадов уже множество K-каскадов содержит открытое ядро. Относительно потоков мы знаем, что не всякий ($У$)-поток с интегральным инвариантом является K-потоком; однако можно доказать, что, во всяком случае, любой поток класса C^2 с интегральным инвариантом, достаточно близкий к геодезическому потоку на замкнутом римановом многообразии отрицательной кривизны, является K-потоком. (В связи с этим см. § 5, абзац между теоремами 13 и 14, а также замечание 23.1. Вероятно, среди ($У$)-потоков класса C^2 с интегральным инвариантом потоки со смешанным спектром представляют в некотором смысле исключение.) Эти факты контрастируют с известным результатом Рохлина [86], что если рассматривать всевозможные динамические системы в том смысле, как это понимается в чисто метрической теории, и ввести в это множество естественную с метрической точки зрения топологию, то в этой топологии динамические системы с положительной энтропией образуют множество I категории.

§ 4. Теорема Адамара — Перрона и слоения $\mathfrak{S}^k$, $\mathfrak{S}^l$. Формулировка результатов, II

Следуя Шевалле [42], я буду говорить, что гладкое p-мерное *многообразие* M^p (не обязательно замкнутое) *является подмногообразием многообразия* W^m (обычно замкнутого), если точки M^p содержатся среди точек W^m и вложение $M^p \subset W^m$ является регулярным отображением. Например, согласно этому определению некомпактная однопараметрическая подгруппа тора является его подмногообразием. Будем называть подмногообразие *полным*, если оно полно в римановой метрике, индуцированной на M^p римановой метрикой во всем W^m. (Если W^m компактно, то это определение не зависит от выбора римановой метрики.)

Слоением * $\mathfrak{S}^p$ я называю разбиение многообразия W^m на связные гладкие полные p-мерные подмногообразия (именуемые *слоями*), обладающее теми свойствами, что если каждой точке $w \in W^m$ сопоставить p-мерное векторное подпространство касательного пространства, касающееся в этой точке проходящего через нее слоя, то полученное поле p-мерных пространств (оно называется *касательным полем* слоения $\mathfrak{S}^p$) будет непрерывным, и что слой, проходящий через точку w (локально), непрерывно зависит от w. Последнее свойство аналогично непрерывной зависимости интегральных кривых системы дифференциальных уравнений от начальных данных и может быть сформулировано, например, следующим образом: для любой точки $w \in W^m$ найдутся такая окрестность $U^m \ni w$ и такой гомеоморфизм этой окрестности на m-мерный куб $|w_i| < 1$ $(i = 1, \ldots, m)$, при котором слои (точнее, связные компоненты их пересечений с U^m) переходят в плоскости $w_{p+1} = \text{const.}, \ldots, w_m = \text{const.}$

Пусть каждой точке $w \in W^m$ сопоставлено некоторое p-мерное векторное подпространство R_w^p касательного пространства R_w^m и пусть поле R_w^p непрерывно. Гладкое связное p-мерное подмногообразие $M^p \subset W^m$ (не обязатель-

* Этот термин я употребляю как синоним терминов «слоеное строение», «листьяж», соответствующих французскому «feuilletage» и английскому «foliated manifold», «foliation». Говоря о слоении, я всегда имею в виду, что слои гладкие.

но полное) называется *интегральным многообразием поля* R_w^p, если M^p во всех своих точках касается этого поля.

Слоение называется *гладким*, если его касательное поле гладкое. Гладкое слоение — весьма естественный объект, который уже давно встречается в математике, хотя в явном виде определение гладкого слоения было сформулировано примерно 15 лет назад Рибом. Негладкие же слоения, по-видимому, до сих пор нигде не встречались. У меня нет уверенности, что в приведенном выше определении слоения выделены именно те свойства, которые целесообразно принять за основу. В заметке [68] в определении слоения не требовалось, чтобы слой непрерывно зависел от начальной точки. Конечно, если касательное поле гладкое, то непрерывная зависимость слоя от начальной точки автоматически имеет место, но если это поле негладкое, то непрерывной зависимости может не быть, как показывает следующий пример. В трехмерном пространстве (x, y, z) рассмотрим интегральные кривые векторного поля $(1, f(y, z), 0)$, где

$$f(y,z)=\begin{cases}\sqrt[3]{y^2+z^2}-\sqrt[3]{z^2}, & z\geqslant 0,\\ \sqrt[3]{y^2+z^2}, & z<0;\end{cases}$$

кубический корень берется со знаком плюс. Каждая интегральная кривая лежит в плоскости $z = z_0 = \mathrm{const}$. При $z = 0$ векторное поле негладкое, а при $z \neq 0$ оно гладкое. Объявим слоями интегральные кривые нашего векторного поля при $z \neq 0$, а при $z = 0$ возьмем в качестве слоев семейство тех ветвей кубических парабол $y = \frac{1}{27}(x-c)^3$, которые касаются нашего поля. При $z > 0$ $f(0, z) \equiv 0$, поэтому

$$y=0,\quad z=z_0>0$$

—интегральная кривая, и другие интегральные кривые ввиду гладкости поля ее не пересекают, так что ни одна интегральная кривая не переходит из области $y < 0$ в область $y > 0$. В то же время при $z \leqslant 0$ слои переходят из области $y < 0$ в область $y > 0$, так что непрерывной зависимости слоя от начальных данных здесь нет.

Поскольку в тех случаях, с которыми приходится иметь дело при изучении $(У)$-систем, непрерывная зависимость слоев от начальных данных имеет место и поскольку это свойство, очевидно, существенно с топологической точки зрения, целесообразно говорить о слоениях только в тех случаях, когда это свойство выполняется. Вместе с тем неясно, не было бы целесообразным включить в определение слоения какое-то свойство «единственности»: то ли, о котором говорится в последней фразе теоремы 8 (интегральное многообразие касательного поля, так сказать, однозначно определяется одной своей точкой, если не говорить о тривиальной неоднозначности, когда мы берем только некоторую часть максимального интегрального многообразия), или же то более сильное свойство, о котором говорится в леммах 12.10 и 12.11 (каждая гладкая кривая, во всех своих точках касающаяся слоев, целиком лежит в некотором слое). Тогда, как и для обыкновенных дифференциальных уравнений, непрерывную зависимость от начальных данных можно было бы вывести из единственности (но не обратно).

Теорема 8. *Поля X_w^k, Y_w^l являются касательными полями некоторых слоений $\mathfrak{S}^k$, $\mathfrak{S}^l$, которые инвариантны относительно $(У)$-системы $\{T^t\}$ в том смысле, что слой переходит в (другой, вообще говоря) слой. Если $\{T^t\}$ — $(У)$-поток, то поля $Z_w^1 \oplus X_w^k$, $Z_w^1 \oplus Y_w^l$ тоже являются касательными полями некоторых слоений $\mathfrak{S}^{k+1}$, $\mathfrak{S}^{l+1}$, причем каждый слой $\mathfrak{S}^{k+1}$ или $\mathfrak{S}^{l+1}$ инвариантен относительно $\{T^t\}$. Любое интегральное многообразие поля*

X_w^k, Y_w^l, $Z_w^1 \oplus X_w^k$ *или* $Z_w^1 \oplus Y_w^l$, *является открытым подмножеством одного из слоев слоения* $\mathfrak{S}^k$, $\mathfrak{S}^l$, $\mathfrak{S}^{k+1}$ *или* $\mathfrak{S}^{l+1}$ *соответственно.*

На протяжении всей этой работы символы $\mathfrak{S}^k$, $\mathfrak{S}^l$, $\mathfrak{S}^{k+1}$, $\mathfrak{S}^{l+1}$ будут иметь тот же смысл, что и здесь.

Слоение $\mathfrak{S}^p$ с касательным полем X_w^p называется *инвариантным сжимающимся* (*или устойчивым*) *слоением для динамической системы* $\{T^t\}$, если оно инвариантно относительно преобразований T^t (т. е. каждый слой переходит в некоторый, вообще говоря, другой слой) и для любого вектора $\xi \in X_w^p$ имеет место обычное неравенство

$$|\widetilde{T}^t \xi| \leqslant a |\xi| e^{-ct} \text{ при } t \geqslant 0, \tag{4.1}$$

где константы a, c положительны и одни и те же для всех w, ξ. (Как уже отмечалось в конце § 1, из (4.1) и из инвариантности поля X_w^p следует и второе неравенство

$$|\widetilde{T}^t \xi| \geqslant b |\xi| e^{-ct} \text{ при } t \leqslant 0.$$

Если $\{T^t\}$ — поток, вектор фазовой скорости которого всюду отличен от нуля, то из (4.1) и из компактности фазового многообразия W^m следует, что слоение $\mathfrak{S}^p$ трансверсально к потоку в том смысле, что угол между вектором фазовой скорости потока и X_w^p ограничен снизу некоторым положительным числом.) Слоение называется *инвариантным расширяющимся* (*или неустойчивым*) *слоением для динамической системы* $\{T^t\}$, если оно является инвариантным сжимающимся слоением для системы $\{T^{-t}\}$. Например, любой автоморфизм тора W^m, порожденный матрицей A (см. § 2, А), не все собственные значения которой лежат на единичной окружности (а так как $\det A = \pm 1$, то это означает, что имеется хотя бы одно собственное значение λ с $|\lambda| < 1$ и хотя бы одно с $|\lambda| > 1$), имеет инвариантные сжимающиеся и расширяющиеся слоения. Таких слоений может быть и не одно, а много: каждое инвариантное пространство R^p матрицы A, для которого спектр $A \mid R^p$ лежит внутри или, соответственно, вне единичной окружности, определяет некоторое сжимающееся или соответственно расширяющееся инвариантное слоение. Это слоение получится, если заполнить R^m пространствами, параллельными R^p, и спроектировать полученную картину в W^m. В то же время автоморфизм может и не порождать (У)-каскад, ибо некоторые из собственных значений матрицы A могут лежать на единичной окружности. Менее простые примеры динамических систем, имеющих инвариантные сжимающиеся и расширяющиеся слоения, но не удовлетворяющие условию (У), можно найти у Арнольда [39]. Речь идет о некоторых потоках линейных элементов и реперов на многообразиях отрицательной кривизны; Арнольд доказал, что в случае постоянной кривизны эти потоки являются K-потоками.

После введенных определений можно перефразировать часть теоремы 8 следующим образом: *любая* (*У*)*-система имеет инвариантные сжимающиеся и расширяющиеся слоения* $\mathfrak{S}^k$ *и* $\mathfrak{S}^l$, *касательными полями к которым служат поля* X_w^k *и* Y_w^l. Обратно, ясно, что любой каскад $\{T^n\}$ на W^m, имеющий инвариантные сжимающиеся и расширяющиеся слоения $\mathfrak{S}^k$ и $\mathfrak{S}^l$, причем $k + l = m$, является (У)-каскадом и что любой поток $\{T^t\}$ без положений равновесия, имеющий инвариантные сжимающиеся и расширяющиеся слоения $\mathfrak{S}^k$ и $\mathfrak{S}^l$, причем $k + l = m - 1$, является (У)-потоком.

Теорему 8 можно считать новой лишь постольку, поскольку ново само понятие (У)-системы. Она будет доказываться одновременно с теоремой 1, и здесь уместно сказать несколько слов о доказательстве. Прежде чем излагать его основную идею, сделаю два замечания: 1) При доказательстве можно ограничиться потоками, ибо для каскадов доказательство, во-первых, проще, а во-вторых, может быть сведено к доказательству для потоков. 2) В доказательстве теоремы 8 основное связано со слоениями $\mathfrak{S}^{k+1}$, $\mathfrak{S}^{l+1}$, а переход к слоениям $\mathfrak{S}^k$, $\mathfrak{S}^l$ осуществляется затем без особого труда.

Поскольку в топологических вопросах основной интерес представляет только взаимное расположение траекторий, а не сдвиги вдоль них, то целесообразно ввести новую систему координат, в которой одна координата отсчитывалась бы вдоль траектории и была пропорциональна времени, а остальные координаты отсчитывались бы по маленьким площадкам $\Pi(w)$, трансверсальным к траектории. Такую систему надо ввести вдоль каждой траектории, причем это необходимо сделать в каком-то смысле «согласованно» и «равномерно». Вот более точное описание. В каждой точке $w \in W^m$ мы строим маленькую гладкую $(m-1)$-мерную площадку $\Pi(w)$, имеющую в своем центре w касательную плоскость $X_w^k \oplus Y_w^l$; при изменении w площадка $\Pi(w)$ должна меняться непрерывно, а при изменении w вдоль траекторий — даже гладко. Можно сказать, что площадки Π образуют систему локальных сечений для потоков $\{T^t\}$, $\{S^t\}$. Возьмем траекторию $T^t w_0$ и рассмотрим какую-нибудь точку w_1 вблизи нее. Точка w_1 лежит на какой-то из площадок $\Pi(T^t w_0)$; пусть, скажем, $w_1 \in \Pi(T^{t_1} w_0)$. Чтобы определить положение точки w_1, надо, таким образом, задать число t_1 и указать положение w_1 на площадке $\Pi(T^{t_1} w_0)$. Для описания поведения какой-нибудь траектории вблизи $T^t w_0$ нужно следить за тем, как меняется при изменении t точка пересечения рассматриваемой траектории с $\Pi(T^t w_0)$, а для движения этой последней точки получается некоторая система дифференциальных уравнений. И все это надо проделать для всех $w_0 \in W^m$, так что указанная система дифференциальных уравнений содержит w_0 в качестве параметра. Совокупность всех пар (w, w_0), где $w \in \Pi(w_0)$, естественным образом образует некоторое расслоение $\mathfrak{V} \to W^m$ с проекцией π: $(w, w_0) \to w_0$ и слоем $\pi^{-1}(w_0) = \Pi(w_0)$. Система дифференциальных уравнений, о которой говорилось выше,— это некоторое векторное поле на $\mathfrak{V}$. Аккуратное построение этого поля и исследование его свойств,— по существу, простое, чтобы не сказать тривиальное, но довольно громоздкое дело, особенно если учесть, что негладкость X_w^k и Y_w^l вынуждает к осторожности. Этому посвящена гл. II.

Громоздкость, таким образом, в значительной степени связана с необходимостью, так сказать, «работать равномерно по w_0». Если же пока не обращать на эту необходимость внимания, то ясно, что при фиксированном w_0 получится система вида

$$\frac{dv}{dt} = C(t)\,v + f(v, t), \tag{4.2}$$

где $v = (v_1, \ldots, v_{m-1})$ — координаты на площадке $\Pi(T^t w_0)$. Эта система определена при достаточно малых v, скажем, при $|v| \leqslant \delta$. Функция f и ее производные малы, $C(t)$ ограничена. Условия (У) означают, что линейная система

$$\frac{dv}{dt} = C(t)\,v \tag{4.3}$$

обладает следующим свойством «экспоненциальной дихотомии решений». Для любого t пространство V^{m-1} переменных v можно разложить в прямую сумму двух подпространств X_t^k и Y_t^l, угол между которыми при всех t ограничен снизу некоторой положительной константой, и любые решения $\xi(t), \eta(t)$ системы (4.3) с начальными значениями $\xi(t_0) \in X_{t_0}^k$, $\eta(t_0) \in Y_{t_0}^l$ удовлетворяют неравенствам

$$|\xi(t)| \leqslant a\,|\xi(t_0)|\,e^{-c(t-t_0)} \quad \text{при } t \geqslant t_0;$$
$$|\xi(t)| \geqslant b\,|\xi(t_0)|\,e^{-c(t-t_0)} \quad \text{при } t \leqslant t_0;$$
$$|\eta(t)| \leqslant a\,|\eta(t_0)|\,e^{c(t-t_0)} \quad \text{при } t \leqslant t_0;$$
$$|\eta(t)| \geqslant b\,|\eta(t_0)|\,e^{c(t-t_0)} \quad \text{при } t \geqslant t_0$$

(a, b, c — некоторые положительные константы).

Основная идея доказательства достаточности условий ($У$) для грубости состоит в следующем. Допустим на минуту, что грубость ($У$)-потока $\{T^t\}$ уже доказана. Возьмем какой-нибудь другой поток $\{S^t\}$, близкий к $\{T^t\}$. Тогда должен существовать гомеоморфизм $\chi : W^m \to W^m$, переводящий траектории $\{T^t\}$ в траектории $\{S^t\}$ (конечно, с изменением скорости движения по траектории) и близкий к тождественному. Попытаемся найти ту траекторию системы $\{S^t\}$, в которую переходит при гомеоморфизме χ траектория $T^t w$ системы $\{T^t\}$. Искомая траектория системы $\{S^t\}$ должна при всех t — как при $t \geqslant 0$, так и при $t \leqslant 0$ — находиться вблизи исходной траектории $T^t w$. Оказывается, что если система $\{S^t\}$ достаточно близка к системе $\{T^t\}$, то при любом w те точки $w' \in \Pi(w)$, для которых траектории $S^t w'$ остаются при всех $t \geqslant 0$ в некоторой малой окрестности исходной траектории системы $\{T^t\}$, образуют гладкое k-мерное многообразие $M^k(w) \subset \Pi'(w)$, а те точки $w'' \in \Pi(w)$, для которых траектории $S^t w''$ остаются при всех $t \leqslant 0$ в некоторой малой окрестности исходной траектории системы $\{T^t\}$, образуют гладкое l-мерное многообразие $N^l(w) \subset \Pi(w)$. Оказывается, далее, что с изменением w $M^k(w)$ и $N^l(w)$ меняются непрерывно. Касательные плоскости к $M^k(w)$ близки к X^k_w, а касательные плоскости к $N^l(w)$ близки к Y^l_w; таким образом, $M^k(w)$ и $N^l(w)$ должны пересекаться в одной и только одной точке $\hat{w} \in \Pi(w)$, которая непрерывно зависит от w. Теперь легко убедиться, что отображение χ: $w \to \hat{w}$ дает искомый гомеоморфизм. Так доказывается теорема 1.

С другой стороны, мы можем положить $\{S^t\} = \{T^t\}$, и в этом случае $M^k(w)$ и $N^l(w)$ должны проходить через w, потому что траектория $T^t w$ при всех t, конечно, находится возле самой себя и потому точка w должна лежать и на $M^k(w)$, и на $N^l(w)$. Слои искомых слоений $\mathfrak{S}^{k+1}$, $\mathfrak{S}^{l+1}$ получаются посредством надлежащего «склеивания» этих $M^k(w)$ и $N^l(w)$; так доказывается теорема 8.

Если перефразировать сформулированные в предыдущем абзаце утверждения в терминах систем вида (4.2) (которые описывают поведение траекторий возмущенной системы $\{S^t\}$,— в частности, можно за $\{S^t\}$ взять саму $\{T^t\}$,— вблизи фиксированных траекторий невозмущенной системы $\{T^t\}$), то получится теорема, которую можно охарактеризовать как «некоторую теорему об условной устойчивости при постоянно действующих возмущениях». Она аналогична известной теореме Адамара — Перрона об инвариантных многообразиях [43—46] или даже совпадает с ней — условие и заключение теоремы Адамара — Перрона можно несколько варьировать и поэтому имеется некоторая неопределенность в том, что именно относить к теореме Адамара — Перрона, а что нет, тем более, что эта теорема имеет длинную историю.

В аналитическом случае теорема об инвариантных многообразиях была более или менее известна Дарбу, Пуанкаре и Ляпунову. Они доказывали ее с помощью разложений в ряды, что не только гораздо менее удобно, чем метод Адамара или метод Перрона, но и требует некоторых дополнительных предположений (помимо аналитичности; поэтому я и связываю эту теорему с именами Адамара и Перрона). Последнее особенно относится к доказательству Дарбу и Пуанкаре (см. книгу Немыцкого и Степанова [47] или Лефшеца [48]). Ляпунов [49, § 13] был одним из немногих, кто рассматривал тот случай, когда уравнения (4.3) имеют переменные непериодические коэффициенты, но в этом случае его метод требует, чтобы система (4.3) была правильной или удовлетворяла несколько более общему условию, сформулированному в [49, конец § 13].

Для применимости же метода Адамара или Перрона требуется только то, чтобы для системы (4.3) имела место экспоненциальная дихотомия решений. Перрон в [46] и следовавший ему Та Ли [50] пользовались следующим условием: линейная неоднородная система

$$\frac{dv}{dt} = C(t)v + f(t)$$

при любой непрерывной и ограниченной $f(t)$ должна иметь хотя бы одно ограниченное решение. Это условие эквивалентно условию экспоненциальной дихотомии, как доказали Майзель [51] и Массера и Шеффер [52] *.

Примерно каждые пять лет, если не чаще, кто-нибудь заново «открывает» теорему Адамара — Перрона, доказывая ее либо по схеме доказательства Адамара, либо по схеме Перрона. Я сам в этом повинен [53]. Доказательство (вариант адамаровского), данное в [53], как раз таково, что оно почти непосредственно переносится на наш случай. Метод Перрона тоже можно было бы приспособить для наших целей. Гладкость инвариантных многообразий была доказана Коддингтоном и Левинсоном в их книге [54, гл. 13], Шмидт [55], Стернбергом [56 и 57, теорема 9], Гартманом [58, теорема III] и мной [53]. Замечу, наконец, что Боголюбов ([59, гл. I]; воспроизведено в [60, гл. 6]) использовал метод Перрона при решении некоторых задач, связанных с инвариантными торами, и что после работ Боголюбова появился целый ряд вариаций на ту же тему. Купка [71] рассматривал инвариантные многообразия, не обязательно являющиеся торами, пользуясь, по-видимому, близкими соображениями.

Утверждение, что у «возмущенной» системы $\{S^t\}$ имеется ровно одна траектория, целиком лежащая вблизи данной траектории «невозмущенной» системы $\{T^t\}$, представляет собой в терминах системы дифференциальных уравнений, описывающей поведение траекторий возмущенной системы вблизи фиксированной траектории невозмущенной системы, утверждение о том, что эта система дифференциальных уравнений имеет ровно одно «малое» решение. При доказательстве теорем 2, 3 мы фактически будем иметь дело с аналогичной ситуацией, причем правые части будут периодическими по времени, и мы будем доказывать существование малого периодического решения. Утверждения подобного характера неоднократно доказывались различными авторами. Но, насколько я знаю, в той форме, в какой это надо для доказательства теоремы 1, подобное утверждение нигде не доказано. При доказательстве теорем 2, 3 можно было бы почти непосредственно использовать какой-нибудь из имеющихся в литературе (например, у Демидовича [61]) результатов; в первоначальном варианте я предпочел воспользоваться рассуждением, которое я сам предложил по несколько иному поводу [62]. Кстати, в этой статье [62] впервые появилось в явном виде инвариантное разбиение касательного пространства на подпространства Z^1_w, X^k_w, Y^l_w, последовательное использование которого составляет основную идею настоящей работы.

Статья Арнольда и Синая [4] была, по-видимому, первой работой, в которой построение слоений $\mathfrak{S}^k$, $\mathfrak{S}^l$ осуществлялось исходя непосредственно из условия (У) (хотя последнее в [4] явно и не сформулировано), а не из каких-либо других, более или менее случайных, обстоятельств. В обзоре Синая [14] эти слоения называются «трансверсальными потоками» (когда слои одномерные) и «трансверсальными полями» (когда размерность слоя больше единицы). Синай определяет некоторый класс динамических систем, включающий (У)-системы — *динамические системы с трансверсальными слоениями.* Это—динамические системы, имеющие инвариантные сжимающиеся или расширяющиеся слоения (не предполагается, что и то, и другое) и, если речь идет о потоках, не имеющие неподвижных точек; кроме того, Синай

* Статья [52] положила начало циклу работ ее авторов и, позднее, Гартмана, посвященных различным аспектам дихотомии решений (понимаемой в весьма широком смысле). Основные результаты отражены в книге Гартмана [102, 13 и отчасти 9, 10, 12 главы].

требует, чтобы эти слоения были абсолютно непрерывны (определение абсолютной непрерывности слоения см. в § 5; согласно теореме 10, в (У)-системе класса C^2 это свойство выполняется) и чтобы система имела интегральный инвариант. Последние два требования нужны для эргодической теории, которой и посвящены работы Синая; некоторые из его результатов приводятся в Приложении. Топологические свойства систем с трансверсальными слоениями не исследовались; вероятно, для такого исследования еще мало одного только наличия инвариантного сжимающегося или расширяющегося слоения. Точка зрения Синая, который исходит не из уравнений в вариациях, а непосредственно требует, чтобы существовали слоения $\mathfrak{S}^k$ и $\mathfrak{S}^l$ с надлежащими свойствами, оказывается, однако, удобной для дальнейшего развития эргодической теории. Дело не только в том, что существуют системы с трансверсальными слоениями, не удовлетворяющие условию (У). Определение Синая можно видоизменить таким образом, чтобы охватить одну в высшей степени интересную динамическую систему, которая чрезвычайно похожа на (У)-систему, но все же (У)-системой не является. Речь идет об изученной Синаем системе твердых шариков, движущихся внутри прямоугольного ящика и сталкивающихся по законам упругого удара [14, 63, 64].

Т е о р е м а 9. *В случае (У)-каскада с интегральным инвариантом каждый слой слоения $\mathfrak{S}^k$ или $\mathfrak{S}^l$ всюду плотен в W^m. В случае (У)-потока с интегральным инвариантом каждый слой слоения $\mathfrak{S}^{k+1}$ или $\mathfrak{S}^{l+1}$ всюду плотен в W^m.*

Если не предполагать наличия интегрального инварианта, то в случае (У)-каскада можно доказать, что существует конечное число слоев слоения $\mathfrak{S}^k$, объединение которых всюду плотно в W^m (и аналогично для $\mathfrak{S}^l$); в случае (У)-потока можно доказать, что существует конечное число слоев $\mathfrak{S}^{k+1}$, объединение которых всюду плотно в W^m (и аналогично для $\mathfrak{S}^{l+1}$).

В случае потока удовлетворительную информацию о слоях слоений $\mathfrak{S}^k$ и $\mathfrak{S}^l$ удается получить лишь при наличии интегрального инварианта (и гладкости класса C^2; см. § 5).

В заключение рассмотрим два геометрических примера.

П р и м е р 4.1. Известно, что на плоскости Лобачевского с кривизной K кривые постоянной кривизны k, где $k^2 < |K|$, являются эквидистантами. Иными словами, каждая такая кривая l_k состоит из точек, отстоящих от некоторой прямой l_0 (эту прямую называют базисной прямой эквидистанты l_k) на одно и то же расстояние h, где h некоторым образом зависит от k и K (а именно,

$$k = \sqrt{|K|}\,\mathrm{th}\,(h\sqrt{|K|}),$$

но для нас это несущественно). Обратно, все те точки, которые отстоят от l_0 на h и находятся по ту же сторону от этой прямой, что и l_k, лежат на l_k. Поскольку любые две прямые хотя бы в одном направлении неограниченно удаляются одна от другой, то для любой прямой l_0', отличной от l_0, можно найти на l_k точку, сколь угодно далеко отстоящую от l_0'. В частности, отсюда видно, что базисная прямая данной эквидистанты l_k определяется однозначно.

Допустим теперь, что на плоскости введена риманова метрика переменной отрицательной кривизны, удовлетворяющая некоторым требованиям «равномерности». Эти требования выполняются, например, в том случае, когда рассматриваемая плоскость является универсальной накрывающей поверхностью некоторой замкнутой поверхности отрицательной кривизны, метрика с которой и была «поднята» на плоскость. Уточнять характер требований «равномерности» в общем случае я не буду. Оказывается, что кое-что из сказанного в предыдущем абзаце до некоторой степени остается в силе и при переменной отрицательной кривизне $K(v)$. А именно, для любой кривой l_k постоянной кривизны k, где $k^2 < \inf\limits_v |K(v)|$, найдется одна и только одна геодезическая l_0 (назовем ее базисной), обладающая тем свойством, что все точки кривой l_k отстоят от l_0 не более, чем на некоторое конечное расстояние h. Для любой другой геодезической l_0' на l_k найдется точка, сколь угодно далеко отстоящая от l_0'. Это последнее утверждение, обуславливающее, в частности, единственность базисной геодезической, вытекает из того, что, как более или менее хорошо известно, в наших предположениях любые две геодезические хотя бы в одном направлении неограниченно удаляются одна от другой. Для того же, чтобы доказать существование базисной геодезической, рассмотрим в пространстве единичных касательных векторов плоскости поток $\{T_k^t\}$ кривых постоянной кривизны k, «заворачивающих» в ту же сторону, что и l_k (см. § 2, Г). Этот поток непрерывно зависит от k и вместе с тем, как уже говорилось в § 2 и как будет доказано в § 22, при $0 \leqslant k^2 < \inf_v |K(v)|$ этот поток удовлетворяет условию ($У$). С помощью теоремы 1 или теоремы Адамара — Перрона теперь легко заключить, что каждая траектория потока $\{T_k^t\}$ находится на конечном расстоянии от некоторой траектории потока $\{T_0^t\}$. Строго говоря, мы должны были бы еще убедиться, что в данном случае можно пользоваться этими теоремами, ведь в данном случае фазовое пространство некомпактно. Это можно сделать, если риманова метрика удовлетворяет некоторым условиям «равномерности», точной формулировки которых я не даю; во всяком случае, это совсем очевидно, если рассматриваемая плоскость является (с учетом метрики) накрывающей поверхностью некоторой замкнутой поверхности отрицательной кривизны.

Пример 4.2. Пусть ds — метрика на плоскости Лобачевского а $\varphi(v)\,ds$ — конформно-эквивалентная ей метрика отрицательной кривизны. Непосредственное вычисление показывает, что в таком случае при всех t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, метрики $\varphi^t(v)ds$ имеют отрицательную кривизну. Соответствующие этим метрикам геодезические потоки образуют непрерывно зависящее от параметра t семейство ($У$)-потоков. В тех случаях, когда мы можем, несмотря на некомпактность, использовать теорему 1 или теорему Адамара — Перрона,— например, когда функция $\varphi(v)$ инвариантна относительно дискретной группы движений плоскости Лобачевского с компактной фундаментальной областью,—мы получаем, что можно установить взаимно-однозначное соответствие между прямыми в плоскости Лобачевского и геодезическими линиями метрики $\varphi(v)\,ds$, при котором соответствующие одна другой кривые на всем своем протяжении не отходят одна от другой больше, чем на некоторое конечное расстояние. На это обстоятельство впервые обратил внимание Морс. Далее, такое взаимно-однозначное соответствие можно установить между геодезическими линиями любых двух римановых метрик на плоскости, индуцированных при накрытии римановыми метриками отрицательной кривизны на некоторой замкнутой поверхности. Действительно, в классе римановых метрик отрицательной кривизны мы можем непрерывно продеформировать заданные две метрики в конформно-эквивалентные им метрики постоянной кривизны, а пространство всех метрик постоянной кривизны на замкнутой поверхности, как известно, связно.

Сравнение геодезических линий некоторой римановой метрики на плоскости с прямыми линиями в метрике постоянной кривизны нередко использовалось в работах Морса и других авторов, цитированных в обзоре Хедлунда [24]. В настоящее время значительная часть результатов этих старых работ перекрыта, но нужно заметить, что это относится все же далеко не ко всем результатам; в частности, в этих работах имеются некоторые результаты, принципиально выходящие за рамки концепции ($У$)-систем и современной метрической теории. Сюда относится исследование свойств некоторых геодезических — так называемых геодезических класса A — на произвольных замкнутых поверхностях рода $\geqslant 2$ (без каких бы то ни было предположений об отрицательности кривизны или о неустойчивости траекторий геодезического потока). В многомерном случае совершенно не ясно, является ли множество метрик отрицательной кривизны на замкнутом многообразии связным, так что мы не можем с помощью теории (У)-систем сравнивать поведение геодезических линий двух разных метрик отрицательной кривизны, а между тем простые геометрические соображения позволяют и в этом случае установить результат, аналогичный приведенному выше для поверхностей.

В настоящей монографии «геометрическое» направление не отражено. Читатель, интересующийся новыми результатами в этой области, может обратиться к [99—101].

§ 5. Формулировка результатов, III. Вспомогательные результаты, связанные с эргодической теорией

Чтобы сформулировать теорему 10, нужно ввести важное для эргодической теории понятие абсолютно непрерывного слоения.

Пусть имеются две гладкие $(m-p)$-мерные площадки Π_0^{m-p} и Π_1^{m-p}, трансверсальные к слоению $\mathfrak{S}^p$, т. е. два $(m-p)$-мерные шара, гладко вложенные в W^m и нигде не касающиеся слоев слоения $\mathfrak{S}^p$. Из непрерывной зависимости слоев от начальных точек и замкнутости W^m следует, что существует такое $\varepsilon > 0$, что если каждую точку $w_0 \in \Pi_0$ можно соединить с некоторой (зависящей от w_0) точкой $w_1 \in \Pi_1$ кривой, которая целиком лежит в некотором (зависящем от w_0) слое слоения $\mathfrak{S}^p$ и длина которой меньше ε, то отображение $w_0 \to w_1$ площадки Π_0 в Π_1 непрерывно. Кроме того, при малой непрерывной деформации этих площадок отображение $\Pi_0 \to \Pi_1$ будет меняться непрерывно. Это означает следующее. Пусть

$$i_t^0 : E^{m-p} \to W^m, \quad i_t^1 : E^{m-p} \to W^m$$

—непрерывное по t семейство вложений шаров в W^m (подразумевается, что производные $i_t^k(x)$ по x непрерывны по (x, t), причем при каждом t площадки $i_t^0(E)$, $i_t^1(E)$ трансверсальны к слоению $\mathfrak{S}^p$ и любую точку $w_0 \in i_t^0(E)$ можно соединить с площадкой $i_t^1(E)$ кривой, лежащей в некотором слое и имеющей длину $< \varepsilon$. Обозначим через f_t отображение, сопоставляющее точке $x \in E$ такую точку $y \in E$, что $i_t^0(x)$ можно соединить с $i_t^1(y)$ упомянутой кривой. Тогда $f_t(x)$ непрерывно по (x, t).

Будем называть слоение $\mathfrak{S}^p$ *абсолютно непрерывным*, если $f_s(x)$ имеет по x обобщенный якобиан, который непрерывен по (x, s). Это значит, что существует такая функция $\varphi_s(x)$, непрерывная по (x, s), что для любого измеримого множества $A \subset E$

$$\operatorname{mes} f_s(A) = \int_A \varphi_s(x)\,dx.$$

(Это не совсем соответствует терминологии, принятой в теории функций *.)

Совершенно очевидно, что гладкое слоение абсолютно непрерывно.

Теорема 10 (теорема об абсолютной непрерывности). *Если (У)-система имеет класс C^2, то слоения $\mathfrak{S}^k$, $\mathfrak{S}^l$ абсолютно непрерывны.* (Как уже упоминалось в замечании 3.2, требование, чтобы гладкость была класса C^2, можно несколько ослабить.)

Эта теорема является новой. Она существенно используется при доказательстве всех результатов эргодической теории (У)-систем. Сказанное отно-

* В духе теории функций следовало бы называть слоение абсолютно непрерывным, если отображение $\Pi_0 \to \Pi_1$ переводит множество меры нуль в множество меры нуль. В работах Синая под названием абсолютной непрерывности фигурирует именно это более слабое свойство; для целей настоящей работы его тоже было бы вполне достаточно.

сится как к моим доказательствам, так и к упоминаемым ниже доказательствам Синая, который предполагал (а не доказывал) абсолютную непрерывность слоений $\mathfrak{S}^k$, $\mathfrak{S}^l$. Впрочем, для геодезического потока на многообразии отрицательной кривизны Синай (независимо от меня, но несколько позже) тоже доказал абсолютную непрерывность слоений.

Теорема 10 верна независимо от того, имеет ли система интегральный инвариант. В оставшейся же части этого параграфа предполагается, что ($У$)-система имеет интегральный инвариант и является гладкой класса C^2 (или хотя бы удовлетворяет условию, приведенному в замечании 3.2).

Как доказать теорему 4, если теорема 10 уже доказана,—это, в сущности, придумал Э. Хопф. Хотя он имел дело только с геодезическим потоком, его доказательство можно дословно перенести на общий случай, как это отметил Синай. Мое доказательство теоремы 4, хотя формально и отличается от хопфовского, по существу, основано на той же идее.

Слоение называется *метрически транзитивным*, если для любого измеримого множества $A \subset W^m$, целиком состоящего из слоев, либо $\operatorname{mes} A = 0$, либо $\operatorname{mes} W^m \setminus A = 0$.

Теорема 11. *Для любого ($У$)-каскада слоения $\mathfrak{S}^k$, $\mathfrak{S}^l$ метрически транзитивны.*

Одновременно со мной, если не раньше, эту теорему доказал Синай. Построенная им теория позволяет вывести из метрической транзитивности слоений $\mathfrak{S}^k$ и $\mathfrak{S}^l$, что каскад является K-каскадом [69]. Таким образом, теорема 5 является следствием теоремы 11. Новейший прогресс энтропийной теории позволил Синаю [69] дать новое и, возможно, более совершенное доказательство теоремы 11, но здесь я излагаю свое старое доказательство. Это оправдано хотя бы тем, что оно тесно связано с соответствующими рассмотрениями для ($У$)-потоков, для которых, как мне кажется, пока что не имеется столь значительных усовершенствований, как для каскадов.

Будем говорить, что *слоения $\mathfrak{S}^k$ и $\mathfrak{S}^l$ образуют интегрируемую пару*, если $k + l = m - 1$, слои $\mathfrak{S}^k$ нигде не касаются слоев $\mathfrak{S}^l$ и существует такое слоение $\mathfrak{S}^{m-1}$, что каждый слой слоения $\mathfrak{S}^k$ и каждый слой слоения $\mathfrak{S}^l$ целиком содержится в некотором слое слоения $\mathfrak{S}^{m-1}$. (Верхние индексы, как обычно, указывают размерности слоев слоения.) Слоение $\mathfrak{S}^{m-1}$ будем обозначать через $\mathfrak{S}^k \wedge \mathfrak{S}^l$.

Теорема 12. *Если для ($У$)-потока слоения $\mathfrak{S}^k$, $\mathfrak{S}^l$ образуют интегрируемую пару и хоть один слой W_0^{m-1}слоения $\mathfrak{S}^k \wedge \mathfrak{S}^l$ компактен, то существует такой ($У$)-каскад $T_0^n : W_0^{m-1} \to W_0^{m-1}$, что поток $\{T^t\}$ получается из каскада $\{T_0^n\}$ с помощью конструкции, описанной в примере* Б *(с точностью до умножения масштаба времени на константу)**.

В частности, тогда все слои слоения $\mathfrak{S}^k$, $\mathfrak{S}^l$ компактны, а спектр ($У$)-потока смешанный. Обратно, теорема 6 утверждает, что смешанный спектр возможен только при такой ситуации, как в теореме 12.

Теорема 13. *Если ($У$)-поток имеет непрерывный спектр, то слоения $\mathfrak{S}^k$, $\mathfrak{S}^l$ метрически транзитивны.*

Сопоставляя это с теоремой 12, мы видим, что непрерывный спектр имеет место тогда, когда либо слоения $\mathfrak{S}^k$, $\mathfrak{S}^l$ не образуют интегрируемой пары, либо же образуют интегрируемую пару, но слои слоения $\mathfrak{S}^k \wedge \mathfrak{S}^l$ не компактны. Я не знаю, может ли последнее осуществляться. Для геодезического ($У$)-потока и для потока, получающегося из него при гладкой замене

---

* Из абсолютной непрерывности слоений $\mathfrak{S}^k$, $\mathfrak{S}^l$ в W^m легко в данном случае вывести, что их ограничения на W_0^{m-1} тоже абсолютно непрерывны.

времени, слоения $\mathfrak{S}^k$, $\mathfrak{S}^l$ не образуют интегрируемой пары (замечание 23.2). В таком случае они не образуют интегрируемой пары и для любого достаточно близкого потока, который поэтому тоже является K-системой.

Теоремы 6, 12 и 13 можно резюмировать следующим образом.

Теорема 14 (теорема об альтернативе). *Для (У)-потока $\{T^t\}$ имеет место следующая альтернатива:*

Либо существуют такое подмногообразие $W_0^{m-1} \subset W^m$ и такой У)-каскад $T_0^n : W_0^{m-1} \to W_0^{m-1}$, что поток $\{T^t\}$ получается из каскада $\{T_0^n\}$ с помощью конструкции, описанной в примере Б;

либо же слоения $\mathfrak{S}^k$, $\mathfrak{S}^l$ метрически транзитивны.

Пример 5.1. Ясно, что у (У)-потока, удовлетворяющего первому условию альтернативы, периоды всех периодических траекторий должны быть соизмеримы. Отсюда легко вывести, что из такого потока можно путем сколь угодно гладкого изменения времени получить поток, удовлетворяющий второму условию альтернативы. Замена времени состоит в том, что мы изменяем скорость движения по траекториям, оставляя сами траектории неизменными, т. е. от системы $\dot{w} = f(w)$ мы переходим к системе $\dot{w} = \varphi(w) f(w)$, где $\varphi(w)$ — положительная скалярная функция. (Интегральный инвариант второй системы получается из интегрального инварианта первой делением на $\varphi(w)$.) Очевидно, можно так подобрать сколь угодно гладкую функцию $\varphi(w)$, чтобы периоды каких-нибудь двух периодических траекторий стали несоизмеримыми.

Понятно, что если осуществляется первая возможность альтернативы, то ни один слой слоения $\mathfrak{S}^k$ или $\mathfrak{S}^l$ не плотен в W^m.

Теорема 15. *Если для (У)-потока осуществляется вторая возможность альтернативы, то каждый слой слоения $\mathfrak{S}^k$ или $\mathfrak{S}^l$ всюду плотен в W^m.*

Если осуществляется первая возможность альтернативы, то, очевидно, у потока имеются непрерывные собственные функции. Если же осуществляется вторая возможность альтернативы, то, согласно теории Синая, поток является K-потоком [69]. Теорема 7 вытекает из этого результата Синая и из теоремы об альтернативе. Теорема 6, конечно, тоже следует из этого результата Синая и из теоремы об альтернативе. (Если имеется собственная функция, то поток не является K-потоком и, следовательно, для него осуществляется первая возможность альтернативы. В таком случае пространство $L^2(W^m)$ разлагается в прямую сумму двух инвариантных подпространств — пространства функций, постоянных на слоях $\mathfrak{S}^k \wedge \mathfrak{S}^l$, и ортогонального к нему пространства. В первом пространстве спектр, очевидно, дискретный и все собственные функции непрерывны. Других собственных функций нет, потому что во втором пространстве, как можно показать, спектр счетнократный лебеговский; см. Приложение, п. 2.) Однако при принятом мной способе изложения теорема 6 доказывается непосредственно, вернее, сводится к теореме 12 и в свою очередь используется при доказательстве теоремы об альтернативе.

Как уже говорилось в § 3, для геодезических потоков первая возможность альтернативы не может выполняться, поэтому для геодезического (У)-потока слоения $\mathfrak{S}^k$, $\mathfrak{S}^l$ метрически транзитивны и, согласно теории Синая, такой поток является K-потоком. Метрическая транзитивность слоений $\mathfrak{S}^k$, $\mathfrak{S}^l$ была доказана для поверхностей постоянной отрицательной кривизны Хедлундом [66], который установил также, что в этом случае каждый слой слоения $\mathfrak{S}^k$ или $\mathfrak{S}^l$ всюду плотен в W^3 [67]. Последнее утверждение было вскоре доказано Грант [65] для поверхностей переменной отрицательной кривизны. Метрическую транзитивность $\mathfrak{S}^k$ и $\mathfrak{S}^l$ для таких поверхностей доказал Синай [38]. Для n-мерных ($n > 2$) многообразий постоянной отрицательной кривизны метрическую транзитивность слоений $\mathfrak{S}^k$ и $\mathfrak{S}^l$ фактически доказал Э. Хопф [6]. Наконец, в самое последнее время Синай (одновременно со мной, но другим методом, см. ниже) доказал метрическую транзитивность слоений $\mathfrak{S}^k$ и $\mathfrak{S}^l$ для многообразий переменной отрицательной кривизны.

Для геодезического потока на многообразии V^n постоянной отрицательной кривизны слоения $\mathfrak{S}^k$, $\mathfrak{S}^l$ тесно связаны с известными еще со времен Лобачевского орициклами (при $n=2$) и орисферами (при $n>2$). Опишем эту связь вкратце. Обозначим накрывающее V^n пространство Лобачевского через $\mathfrak{V}^n$, а пространства единичных касательных векторов многообразий V^n и $\mathfrak{V}^n$ обозначим соответственно через W^{2n-1} и $\mathfrak{W}^{2n-1}$. В пространстве Лобачевского $\mathfrak{V}^n$ орисфера (в тех случаях, когда безразлично, равно ли n двум или больше двух, я говорю об «орисфере», рассматривая орицикл как частный случай) является $(n-1)$-мерным полным гладким (даже аналитическим) подмногообразием $\mathfrak{M}^{n-1}$, которое обладает тем свойством, что совокупность $\mathfrak{P}$ геодезических линий, ортогональных $\mathfrak{M}^{n-1}$, образует асимптотический пучок, т. е. при неограниченном продолжении в одну сторону они неограниченно сближаются (в то время как при продолжении в другую сторону они расходятся). Рассмотрим пары (v, e), где $v \in \mathfrak{M}^{n-1}$, а e — исходящий из точки v единичный касательный вектор, ортогональный $\mathfrak{M}^{n-1}$ и направленный в сторону сближения геодезических асимптотического пучка $\mathfrak{P}$. Совокупность таких пар образует подмногообразие $\mathfrak{N}^{n-1} \subset \mathfrak{W}^{2n-1}$. В $\mathfrak{V}^n$ две разные орисферы $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ могут пересекаться, но в $\mathfrak{W}^{2n-1}$ соответствующие им $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ не пересекаются. Разбиение многообразия $\mathfrak{W}^{2n-1}$ на подмногообразия $\mathfrak{N}$ является слоением. Касательное поле этого слоения аналитическое, потому что орисферы в пространстве Лобачевского описываются аналитическими уравнениями. При проекции $\mathfrak{W}^{2n-1} \to W^{2n-1}$ это слоение проектируется в слоение $\mathfrak{S}^k$ в том смысле, что образом каждого слоя $\mathfrak{N}^{n-1} \subset \mathfrak{W}^{2n-1}$ является некоторый слой $N^{n-1} \subset W^{2n-1}$ слоения $\mathfrak{S}^k$. Чтобы получить слоение $\mathfrak{S}^l$, нужно вместо пар (v, e) взять пары $(v, -e)$.

Можно определить орисферу M^{n-1} в многообразии V^n как образ орисферы $\mathfrak{M}^{n-1} \subset \mathfrak{V}^n$ при накрытии $\mathfrak{V}^n \to V^n$ или, что то же самое, как образ соответствующего слоя N^{n-1} при проектировании $W^{2n-1} \to V^n$. Заметим, что M^{n-1} не является подмногообразием многообразия V^n из-за самопересечений (которые неизбежно имеются, если V^n, как мы предполагаем, замкнутое; это следует из теоремы 15), локально же отображения $N^{n-1} \to V^n$, $\mathfrak{M}^{n-1} \to V^n$ регулярны.

Еще около 1900 г. Адамар рассматривал асимптотические пучки геодезических на многообразиях V^n переменной отрицательной кривизны (см. приложение III к книге Картана [3]). Грант [65] дала определение орицикла для поверхности переменной отрицательной кривизны, орисфер же (при $n>2$) в случае переменной кривизны, по-видимому, никто не вводил до последних работ Синая. Предложенное им доказательство метрической транзитивности слоений $\mathfrak{S}^k$, $\mathfrak{S}^l$ основано на выпуклости орисфер. Поскольку в настоящей работе все рассмотрения ведутся исключительно в фазовом пространстве и используются слоения $\mathfrak{S}^k$, $\mathfrak{S}^l$, а орисферы сами по себе нам не нужны, я ограничусь замечанием, что и в случае переменной отрицательной кривизны связь между этими слоениями и орисферами та же, что и выше.

Отправляясь от геометрии Лобачевского, можно обобщить понятие орисферы в другом направлении — алгебраическом. Пусть G — группа Ли и $g(t)$ — ее однопараметрическая подгруппа; *орисферическая подгруппа, связанная с $g(t)$, определяется как*

$$\{h : h \in G, \lim_{t \to +\infty} g^{-1}(t)\, h\, g(t) = 1\},$$

где 1 — единица группы. Орбиты орисферических подгрупп в однородном пространстве называются *орисферами*. Представляется несомненным, что они должны играть важную роль при изучении потоков, определяемых однопараметрическими подгруппами групп Ли на однородных пространствах.

Из теоремы 15 (в сочетании с теоремой Арнольда) следует, что на римановом многообразии отрицательной кривизны всякая орисфера всюду плотна. Интересно, что этот результат существенно связан с замкнутостью многообразия и не может быть перенесен на незамкнутые полные многообразия конечного объема: примеры показывают, что на таких многообразиях могут существовать замкнутые орисферы. Отклоняясь немного в сторону, замечу, что в алгебраической теории замкнутые орисферы были обнаружены во всех тех примерах некомпактных однородных многообразий конечного объема, полученных факторизацией по дискретной подгруппе, которые были разобраны до сих пор, и имеется гипотеза, что они существуют на любом таком многообразии.

В алгебраической теории орисферы связаны с представлениями полупростых групп Ли на однородных пространствах, каковые связи, собственно, и привели Гельфанда, Граева и Пятецкого-Шапиро к описанному алгебраическому обобщению орисфер. Поскольку эта область находится в стороне от темы данной монографии, я ограничусь тем немногим, что сказано выше, а также ссылкой на обзоры [87, 88] и цитированную там литературу.

ГЛАВА II

§ 6. Предварительные замечания

В этой главе доказываются некоторые леммы, с помощью которых в следующей главе будут доказаны теоремы 1—3, 8 и 9. Поскольку всякий (У)-каскад вкладывается в некоторый (У)-поток, как это было описано в § 2, Б, то при доказательстве теорем, как правило, можно ограничиваться рассмотрением (У)-потоков, а теоремы об (У)-каскадах выводить из соответствующих теорем об (У)-потоках (что уже довольно просто). Поэтому в данной главе мы будем рассматривать только (У)-потоки. Мы будем считать, что нам задан некоторый (У)-поток $\{T^t\}$, определяемый системой дифференциальных уравнений

$$\dot{w} = f(w). \tag{6.1}$$

Этот и следующие два параграфа посвящены хорошо известным вспомогательным средствам: локальным сечениям, уравнениям в вариациях и функциям Ляпунова.

В теореме 1 мы имеем дело с двумя (У)-потоками: (У)-потоком $\{T^t\}$, описываемым системой (6.1), и (У)-потоком $\{S^t\}$, описываемым системой

$$\dot{w} = g(w), \tag{6.2}$$

в которой векторное поле $g(w)$ очень близко (в смысле C^1) к векторному полю $f(w)$. При доказательстве теоремы 1 мы должны будем рассматривать поведение траекторий потока $\{S^t\}$ вблизи любых фиксированных траекторий системы $\{T^t\}$.

В теореме 8 мы имеем дело только с одной системой (6.1). Мы должны получить некоторую информацию о взаимном расположении траекторий этой системы друг возле друга.

Наконец, при доказательстве теорем 2 и 3 мы тоже имеем дело с одной системой (6.1). Фундаментальную роль при этом играет лемма 13.1. При доказательстве этой леммы приходится рассматривать поведение траекторий системы (6.1) в окрестности некоторой замкнутой кривой L. Эта кривая описывается гладкой периодической функцией

$$w = \hat{w}(t) \equiv \hat{w}(t+\tau) \in C^1, \tag{6.3}$$

причем вектор скорости $\frac{d\hat{w}(t)}{dt}$ очень близок к $f(\hat{w}(t))$. Можно сказать, что локально кривая L очень похожа на траектории системы (6.1).

Таким образом, во всех этих случаях надо описывать поведение траекторий некоторых (У)-систем в окрестности некоторых кривых. (У)-системы, с которыми мы имеем дело,— это системы (6.2), удовлетворяющие условию

$$\| f - g \|_{C^1} < \varepsilon_1, \tag{6.4}$$

где ε_1 — некоторое малое положительное число, а f — векторное поле, определяющее фиксированную ($У$)-систему (6.1). В частности, к числу рассматриваемых ($У$)-систем относится сама система (6.1). Кривые, с которыми мы имеем дело,— это кривые

$$L: w = \hat{w}(t) \in C^1,$$

«локально близкие» к траекториям системы (6.1) (стало быть, и к траекториям системы (6.2)) в том смысле, что при всех t

$$\left| \frac{d\hat{w}(t)}{dt} - f(\hat{w}(t)) \right| < \varepsilon_2, \tag{6.5}$$

где ε_2 — некоторое малое положительное число. В частности, к числу рассматриваемых кривых относятся сами траектории системы (6.1); с ними мы и имеем дело при доказательстве теорем 1 и 8. При доказательстве же леммы 13.1 мы имеем дело с замкнутой кривой (6.3), которую можно рассматривать как образ окружности S^1, получающейся из отрезка $[0, \tau]$ путем отождествления его концов. Отображение $S^1 \to W^m$ дается периодической функцией (6.3). Когда точка t движется по окружности S^1 с единичной скоростью, образ $\hat{w}(t)$ этой точки движется по кривой L в пространстве W^m со скоростью $d\hat{w}(t)/dt$, очень близкой к фазовой скорости $f(\hat{w}(t))$.

Как уже говорилось в § 4, для изучения поведения траекторий системы (6.2) вблизи кривых L удобно воспользоваться локальными сечениями. В каждой точке $w \in W^m$ мы строим маленькую гладкую $(m-1)$-мерную площадку $\Pi(w)$, которая трансверсальна к потоку $\{T^t\}$, т. е. ни в одной своей точке не касается вектора фазовой скорости. Конечно, зависимость этих площадок от w должна быть в некотором смысле «достаточно хорошей», но об этом см. ниже, пока же я хочу обратить внимание на другое. В этом параграфе мы рассмотрим локальные сечения (т. е. площадки Π) «в линейном приближении». Очень маленькую площадку $\Pi(w)$, проходящую через точку w, можно считать как бы лежащей не в многообразии W^m, а в касательном пространстве R^m_w. Площадка $\Pi(w)$ как бы является маленьким кусочком своей $(m-1)$-мерной касательной плоскости V^{m-1}_w. Трансверсальность площадки $\Pi(w)$ к потоку (6.1) означает в линейном приближении просто то, что

$$f(w) \notin V^{m-1}_w. \tag{6.6}$$

Таким образом, в линейном приближении система локальных сечений — это поле $(m-1)$-мерных касательных подпространств V^{m-1}_w, которые ни при одном w не содержат вектора $f(w)$.

Разумеется, мы предполагаем поле V^{m-1}_w непрерывным; но этого мало. При доказательстве теорем 1 и 8 мы полагаем

$$V^{m-1}_w = X^k_w \oplus Y^l_w. \tag{6.7}$$

Это поле, вообще говоря, не гладкое, но при изменении w вдоль траекторий системы (6.1) V^{m-1}_w меняется гладко, что для нас весьма существенно. Если же w движется вдоль кривой L, не являющейся траекторией системы (6.1), то V^{m-1}_w, определенное согласно (6.7), не обязано меняться гладко. Поэтому при доказательстве леммы 13.1 мы аппроксимируем непрерывные поля X^k_w и Y^l_w гладкими полями $\hat{X}^k_w$ и $\hat{Y}^l_w$ и полагаем

$$V^{m-1}_w = \hat{X}^k_w \oplus \hat{Y}^l_w. \tag{6.8}$$

Необходимая степень близости $\hat{X}^k_w$ к X^k_w и $\hat{Y}^l_w$ к Y^l_w будет постепенно уточняться. Во всяком случае, аппроксимация должна быть настолько близкой, чтобы при всех w выполнялось условие трансверсальности (6.6). Кроме того, нужно, чтобы при движении w вдоль кривой L пространства

$\hat{X}^k_w$ и $\hat{Y}^l_w$ изменялись бы со скоростью, близкой к скорости, с которой изменяются пространства X^k_w и Y^l_w при движении w согласно системе (6.1). В возможности аппроксимации с такими свойствами мы убедимся в конце настоящего параграфа.

Такая ситуация, когда рассматриваемые поля касательных подпространств являются, так сказать, гладкими в одном направлении и негладкими в другом, вынуждает к известной осторожности. Поэтому оставшаяся часть настоящего параграфа специально посвящена обсуждению того, какие объекты в этой ситуации, каким образом и в каком смысле можно дифференцировать и как надо «сгладить» поля X^k_w, Y^l_w.

Мы имеем дело со следующими полями касательных пространств:

$$X^k_w,\ Y^l_w,\ Z^1_w,\ R^m_w,\ \hat{X}^k_w,\ \hat{Y}^l_w,\ V^{m-1}_w. \tag{6.9}$$

$\hat{X}^k_w$ и $\hat{Y}^l_w$ — гладкие поля класса C^∞, выбор которых пока не уточняется; точно так же не уточняется, определяется ли поле V^{m-1}_w согласно (6.7) или (6.8). Рассмотрим векторные расслоения с базой W^m, пространствами которых служат

$$\mathfrak{X} = \bigcup_{w \in W^m} X^k_w,\ \mathfrak{Y} = \bigcup_{w \in W^m} Y^l_w,\ \mathfrak{Z} = \bigcup_{w \in W^m} Z^1_w,$$

$$\mathfrak{R} = \bigcup_{w \in W^m} R^m_w,\ \hat{\mathfrak{X}} = \bigcup_{w \in W^m} \hat{X}^k_w,\ \hat{\mathfrak{Y}} = \bigcup_{w \in W^m} \hat{Y}^l_w,\ \mathfrak{V} = \bigcup_{w \in W^m} V^{m-1}_w,$$

а проекции

$${}^k\pi : \mathfrak{X} \to W^m,\ {}^l\pi : \mathfrak{Y} \to W^m,\ {}^1\pi : \mathfrak{Z} \to W^m,$$

$${}^m\pi : \mathfrak{R} \to W^m,\ {}^k\hat{\pi} : \hat{\mathfrak{X}} \to W^m,\ {}^l\hat{\pi} : \hat{\mathfrak{Y}} \to W^m,\ {}^{m-1}\pi : \mathfrak{V} \to W^m$$

переводят векторные пространства (6.9) в точку w, так что эти пространства являются слоями соответствующих расслоений над точкой w. В зависимости от (6.7) или (6.8) $\mathfrak{V} = \mathfrak{X} \oplus \mathfrak{Y}$ или $\mathfrak{V} = \hat{\mathfrak{X}} \oplus \hat{\mathfrak{Y}}$. Точки пространств

$$\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{R}, \hat{\mathfrak{X}}, \hat{\mathfrak{Y}}, \mathfrak{V}$$

обозначаем через ξ или x; η или y; ζ или z; ω; ξ или x; η или y; υ или v соответственно, или же (особенно когда нужно подчеркнуть, что они лежат над точкой w базы и что локальные координаты точки базы входят в число локальных координат лежащей над ней точки расслоения) через (w, ξ) или (w, x); (w, η) или (w, y); (w, ζ) или (w, z); (w, ω); (w, ξ) или (w, x); (w, η) или (w, y); (w, υ) или (w, v).

Векторное расслоение $\mathfrak{Z}$, конечно, изоморфно прямому произведению $W^m \times R^1$ многообразия W^m на числовую прямую R^1: паре (w, z), где $z \in R^1$, соответствует $(w, f(w)\, z) \in \mathfrak{Z}$. Разумеется, вместо $f(w)$ здесь можно было бы взять любое другое векторное поле, совпадающее с f по направлению, но не по величине; однако для целей настоящей работы удобен именно тот изоморфизм, который строится с помощью f. Введя таким путем в $\mathfrak{Z}$ структуру прямого произведения, я буду пользоваться только такими локальными координатами, которые согласуются с этой структурой: координатами точки $(w, f(w)z)$ служат $m+1$ число — m координат точки w в некоторой карте многообразия W^m и еще число z. Поскольку структура прямого произведения в $\mathfrak{Z}$ фиксирована, я не буду педантично соблюдать различие между ζ — вектором из Z^1_w — и числом z — единственной координатой этого вектора в Z^1_w. Вложение $Z^1_w \subset R^m_w$ задается в локальных координатах матрицей, которая имеет один-единственный столбец, состоящий из координат вектора $f(w)$ в некотором базисе пространства R^m_w. В связи с этим данное вложение я тоже обозначаю через $f(w)$.

Несколько слов о локальных координатах в остальных векторных расслоениях, например в $\mathfrak{X}$. Пусть атлас многообразия W^m состоит из достаточно мелких карт $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, где U_α — координатные окрестности, а $\varphi_\alpha: U_\alpha \to R^m$ — задающие локальные координаты отображения в m-мерное «арифметическое» (состоящее из всевозможных упорядоченных наборов m чисел) эвклидово пространство. Локальные координаты в ${}^k\pi^{-1}(U_\alpha)$ вводятся с помощью каких-нибудь k непрерывных линейно-независимых векторных полей $e_1^\alpha(w), \ldots, e_k^\alpha(w)$, определенных в U_α и принимающих значения в пространстве X^k_w (в котором они образуют базис). Координатами точки $(w, \xi) \in \mathfrak{X}$ являются $m+k$ чисел, из которых первые m чисел суть координаты точки w в карте $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$,— в наших обозначениях совокупность этих чисел есть $\varphi_\alpha(w)$,— а остальные k чисел, упорядоченную совокупность которых мы обозначим через $\varphi^k_{\alpha, w}(\xi)$, являются координатами точки $\xi \in X^k_w$ в базисе $e_1^\alpha(w), \ldots, e_k^\alpha(w)$. Впрочем, говоря о локальных координатах в $\mathfrak{X}$, я часто имею в виду только последние k координат $\varphi^k_{\alpha, w}(\xi)$. Аналогичные координаты в $\mathfrak{R}$ (упорядоченный набор m чисел) обозначим через $\varphi^m_{\alpha, w}(\omega)$. Атлас многообразия $\mathfrak{X}$ состоит из карт $({}^k\pi^{-1}(U_\alpha), \psi^k_\alpha)$, где

$$\psi^k_\alpha(w, \xi) = (\varphi_\alpha(w), \varphi^k_{\alpha, w}(\xi)).$$

(Аналогично, атлас многообразия $\mathfrak{R}$ состоит из карт $({}^m\pi^{-1}(U_\alpha), \psi^m_\alpha)$, где

$$\psi^m_\alpha(w, \omega) = (\varphi_\alpha(w), \varphi^m_{\alpha, w}(\omega))).$$

Координатные преобразования в $\mathfrak{X}$

$$\psi^k_\beta(\psi^k_\alpha)^{-1} = (\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}, \varphi^k_{\beta, w}(\varphi^k_{\alpha, w})^{-1}).$$

Если $\xi \in X^k_w$, $w \in U_\alpha \cap U_\beta$, $\varphi^k_{\alpha, w}(\xi) = (\xi_1^\alpha, \ldots, \xi_k^\alpha)$, $\varphi^k_{\beta, w}(\xi) = (\xi_1^\beta, \ldots, \xi_k^\beta)$, то

$$\xi = \sum_{j=1}^{k} \xi_j^\alpha e_j^\alpha(w) = \sum_{i=1}^{k} \xi_i^\beta e_i^\beta(w);$$

разлагая вектора $e_j^\alpha(w)$ по базису $e_1^\beta(w), \ldots, e_k^\beta(w)$:

$$e_j^\alpha(w) = \sum_{i=1}^{k} a_{ij}^{\alpha\beta}(w)\, e_i^\beta(w),$$

найдем, что

$$\xi_i^\beta = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}^{\alpha\beta}(w)\, \xi_j^\alpha.$$

Таким образом, преобразование $\varphi^k_{\beta, w}(\varphi^k_{\alpha, w})^{-1}$ — линейное преобразование с матрицей $A_{\alpha\beta}(w) = \| a_{ij}^{\alpha\beta}(w) \|$, $i, j = 1, \ldots, k$:

$$\varphi^k_{\beta, w}(\xi) = A_{\alpha\beta}(w)\, \varphi^k_{\alpha, w}(\xi), \tag{6.10}$$

элементы которой являются координатами векторов $e_j^\alpha(w)$ в базисе $e_1^\beta(w), \ldots, e_k^\beta(w)$.

Проявляя известную непоследовательность (или гибкость?), можно во многих случаях смотреть на ξ или (w, ξ) не как на некоторые геометрические объекты, не зависящие от локальных координат, а скорее как на сокращенные обозначения для k локальных координат $\xi_1^\alpha, \ldots, \xi_k^\alpha$ или $m+k$ локальных координат $w_1^\alpha, \ldots, w_m^\alpha, \xi_1^\alpha, \ldots, \xi_k^\alpha$.

Имея дело с $\mathfrak{R}$, часто выбирают вектора $e_1^\alpha(w), \ldots, e_m^\alpha(w)$ специальным образом, а именно, $e_i^\alpha(w) = \dfrac{\partial}{\partial w_i^\alpha}$ (напомню, что линейные однородные дифференциальные операторы первого порядка естественно отождествляются с (контравариантными) касательными векторами). Полученный базис и связанные с ним координаты в R_w^m иногда называют «естественными», подробнее было бы сказать: «естественный базис и естественные координаты в R_w^m, связанные с картой $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ многообразия W^m». Как правило, в элементарных учебниках римановой геометрии используются только «естественные» локальные координаты в $\mathfrak{R}$, да и само касательное пространство R_w^m определяется с их помощью.

Ясно, что в случае $\mathfrak{R}$ мы можем выбрать m векторных полей $e_1^\alpha(w), \ldots$ $\ldots, e_m^\alpha(w)$ принадлежащими классу C^∞. Тогда координатные преобразования в $\mathfrak{R}$ будут класса C^∞, и тем самым в $\mathfrak{R}$ будет введена гладкая структура класса C^∞. Точно так же в случае $\hat{\mathfrak{X}}$ и $\hat{\mathfrak{Y}}$ соответствующие векторные поля могут быть выбраны принадлежащими классу C^∞, т. е. $\hat{\mathfrak{X}}$ и $\hat{\mathfrak{Y}}$ являются гладкими (класса C^∞) подрасслоениями расслоения $\mathfrak{R}$. Имея дело с $\mathfrak{X}$ или $\mathfrak{Y}$, мы, вообще говоря, уже не можем выбирать соответствующие векторные поля гладкими, потому что X_w^k и Y_w^l зависят от w, вообще говоря, всего лишь непрерывно, и только при изменении w вдоль траекторий потока (6.1) зависимость является гладкой.

Конечно, сами по себе расслоения $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ допускают сколь угодно гладкую структуру. Действительно, считая поле $\hat{X}_w^k$ достаточно близким к полю X_w^k, можно гладкую структуру из $\hat{\mathfrak{X}}$ перенести в $\mathfrak{X}$ следующим образом. Пусть

$$\hat{e}_1^\alpha(w) \in \hat{X}_w^k, \ldots, \hat{e}_k^\alpha(w) \in \hat{X}_w^k \tag{6.11}$$

—линейно-независимые векторные поля класса C^∞, с помощью которых вводятся локальные координаты $\hat{\varphi}_{\alpha, w}^k(\hat{\xi})$ в ${}^k\hat{\pi}^{-1}(U_\alpha)$. С помощью каких-нибудь взаимно-однозначных линейных отображений $\pi : \hat{X}_w^k \to X_w^k$, например, ортогональных проекций в некоторой римановой метрике, перенесем в $\mathfrak{X}$ локальные координаты из $\hat{\mathfrak{X}}$; это будут координаты в базисе

$$\{e_1^\alpha(w), \ldots, e_k^\alpha(w)\} = \{\pi\hat{e}_1^\alpha(w), \ldots, \pi\hat{e}_k^\alpha(w)\}. \tag{6.12}$$

Поскольку $\varphi_{\alpha, w}^k(\pi\hat{\xi}) = \hat{\varphi}_{\alpha, w}^k(\hat{\xi})$, то для $\mathfrak{X}$ и $\hat{\mathfrak{X}}$ матрицы $A_{\alpha\beta}(w)$ будут одинаковыми. Тем самым мы снабдим $\mathfrak{X}$ структурой класса C^∞. Однако $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ не являются гладкими подрасслоениями $\mathfrak{R}$, т. е. вложения $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{R}$, $\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{R}$ не являются гладкими.

В соответствии со сказанным можно считать, что расслоения $\mathfrak{X}$ и $\hat{\mathfrak{X}}$ — это одно и то же расслоение $\mathfrak{X}$, но по-разному вложенное в $\mathfrak{R}$; аналогично для $\mathfrak{Y}$ и $\hat{\mathfrak{Y}}$. Далее, $\mathfrak{B} = \mathfrak{X} \oplus \mathfrak{Y}$ независимо от того, имеет ли место (6.7) или (6.8). Однако оттого, имеет ли место (6.7) или (6.8), зависит, будет ли вложение $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{R}$ негладким или гладким.

Обозначим вложения

$$X_w^k \subset R_w^m, \quad Y_w^l \subset R_w^m,$$

$$\hat{X}_w^k \subset R_w^m, \quad \hat{Y}_w^l \subset R_w^m, \quad V_w^{m-1} \subset R_w^m$$

через

$$\varkappa(w),\ \lambda(w),\ \hat{\varkappa}(w),\ \hat{\lambda}(w),\ \mu(w)$$

соответственно. Соответствующие вложения расслоений обозначим теми же буквами, опуская аргумент w:

$$\varkappa,\ \hat{\varkappa}:\mathfrak{X}\to\mathfrak{R};\quad \lambda,\ \hat{\lambda}:\mathfrak{Y}\to\mathfrak{B};\quad \mu:\mathfrak{B}\to\mathfrak{R}. \tag{6.13}$$

Если в некоторой координатной окрестности U_α вектора $e_1^\alpha(w),\ldots,e_k^\alpha(w)$ образуют базис в X_w^k, а $\bar{e}_1^\alpha(w),\ldots,\bar{e}_m^\alpha(w)$ — базис в R_w^m и если

$$e_j^\alpha(w)=\sum_{i=1}^m \varkappa_{ij}^\alpha(w)\,\bar{e}_i^\alpha(w), \tag{6.14}$$

то в соответствующих локальных координатах $\varkappa(w)$ выражается матрицей

$$\varkappa(w)=\|\varkappa_{ij}^\alpha(w)\|\quad (i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,k). \tag{6.15}$$

Вложения (6.13) и вложение $f:\mathfrak{Z}\subset\mathfrak{R}$ порождают отображения векторных расслоений

$$(\varkappa,\lambda)\ \text{и}\ (\hat{\varkappa},\hat{\lambda}):\mathfrak{X}\oplus\mathfrak{Y}\to\mathfrak{R}, \tag{6.16}$$

$$(\varkappa,\lambda,f)\ \text{и}\ (\hat{\varkappa},\hat{\lambda},f):\mathfrak{X}\oplus\mathfrak{Y}\oplus\mathfrak{Z}\to\mathfrak{R}, \tag{6.17}$$

из которых первые два являются вложениями, а последние два — изоморфизмами (вложение $(\varkappa,\lambda)$ и изоморфизм $(\varkappa,\lambda,f)$ — не гладкие по w). В зависимости от того, имеет ли место (6. 7) или (6.8),

$$\mu=(\varkappa,\lambda)\ \text{или}\ \mu=(\hat{\varkappa},\hat{\lambda}).$$

Для каждого $\omega\in R_w^m$ можно написать разложения

$$\omega=\mu(w)\,\upsilon+f(w)\,\zeta,$$
$$\omega=\varkappa(w)\,\xi+\lambda(w)\eta+f(w)\,\zeta,$$
$$\omega=\hat{\varkappa}(w)\,\xi+\hat{\lambda}(w)\,\eta+f(w)\,\zeta,$$

что мы будем также записывать в виде

$$\omega=(\mu,f)\begin{pmatrix}\upsilon\\ \zeta\end{pmatrix}=(\varkappa,\lambda,f)\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}\ \text{или}\ =(\hat{\varkappa},\hat{\lambda},f)\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}. \tag{6.18}$$

Аналогичным образом отображения (6.16) можно записывать в виде

$$\omega=(\varkappa,\lambda)\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\ \text{или}\ \omega=(\hat{\varkappa},\hat{\lambda})\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}.$$

Эти обозначения согласуются с векторно-матричными обозначениями для локальных координат. Действительно, если записывать координаты векторов столбцом, то локальные координаты вектора из $\mathfrak{X}\oplus\mathfrak{Y}\oplus\mathfrak{Z}$ запишутся в виде столбца, в котором сверху выписаны координаты ξ, затем координаты η и внизу — ζ; далее, если в этих локальных координатах

$$\varkappa=\begin{pmatrix}\varkappa_{11}\ \ldots\ \varkappa_{1k}\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \varkappa_{m1}\ldots\varkappa_{mk}\end{pmatrix},\quad \lambda=\begin{pmatrix}\lambda_{11}\ \ldots\ \lambda_{1l}\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \lambda_{m1}\ldots\lambda_{ml}\end{pmatrix},\quad f=\begin{pmatrix}f_1\\ \vdots\\ f_m\end{pmatrix},$$

то матрица отображения $(\varkappa, \lambda, f)$: $\mathfrak{X} \oplus \mathfrak{Y} \oplus \mathfrak{Z} \to \mathfrak{R}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \varkappa_{11} \ldots \varkappa_{1k} \lambda_{11} \ldots \lambda_{1l} f_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varkappa_{m1} \ldots \varkappa_{mk} \lambda_{m1} \ldots \lambda_{ml} f_m \end{pmatrix}.$$

Разумеется, если выбрать в R^m_w такой базис $e_1(w), \ldots, e_m(w)$, для которого

$$e_1(w), \ldots, e_k(w) \in X^k_w;\ e_{k+1}(w), \ldots, e_{k+l}(w) \in Y^l_w;\ e_m(w) \in Z^1_w,$$

и с помощью первых k векторов ввести локальные координаты в $\mathfrak{X}$, с помощью следующих l векторов — координаты в $\mathfrak{Y}$ и с помощью последнего — в $\mathfrak{Z}$, то в этих локальных координатах будет просто

$$\omega = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix},$$

но этот базис не будет гладким, а я предпочитаю иметь дело с гладкими объектами, «загоняя» всю негладкость в отображения этих объектов. Конечно, можно считать само $\mathfrak{R}$ прямой (уитнеевской) суммой $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{Z}$, но гладкая структура в $\mathfrak{R}$ не совпадает со структурой прямой суммы.

Рассмотрим вектора, касательные к нашим векторным расслоениям, например к многообразию $\mathfrak{X}$. Если некоторая точка $(w, \xi) \in \mathfrak{X}$ движется: $w = w(t)$, $\xi = \xi(t)$, то ее скорость $d/dt\,(w, \xi)$ как раз является касательным вектором многообразия $\mathfrak{X}$. В других случаях удобнее говорить о «дифференциале» $d(w, \xi)$. Касательное пространство к $\mathfrak{X}$ в точке (w, ξ) я обозначаю через $R^{m+k}_{(w,\xi)}$. В естественном базисе этого пространства, связанном с картой $(U_\alpha, \psi^k_\alpha)$ многообразия $\mathfrak{X}$, производная $d/dt\,(w, \xi)$ имеет координаты

$$\dot{w}^\alpha_1, \ldots, \dot{w}^\alpha_m, \dot{\xi}^\alpha_1, \ldots, \dot{\xi}^\alpha_k. \tag{6.19}$$

В связи с этим я обозначаю $d/dt\,(w, \xi)$ через $(\dot{w}, \dot{\xi})$, рассматривая (w, ξ) одновременно и как некоторый не зависящий от локальных координат геометрический объект, и как сокращенную запись для координат (6.19); то же относится и к обозначению $(dw, d\xi)$ для дифференциала $d(w, \xi)$. Следует отметить, что $\dot{\xi}$ или $d\xi$, вообще говоря, не имеет тензорного характера и не является геометрическим объектом, не зависящим от локальных координат; инвариантный характер имеет только пара $(\dot{w}, \dot{\xi})$ или $(dw, d\xi)$. Действительно, дифференцируя (6.10), получим

$$d\varphi^k_{\beta, w}(\xi) = (dA_{\alpha\beta}(w))\, \varphi^k_{\alpha, w}(\xi) + A_{\alpha\beta}(w)\, d\varphi^k_{\alpha, w}(\xi).$$

Отсюда видно, что из-за первого члена в правой части в координатные преобразования для $d\xi$ входит dw. Первый член правой части обращается в нуль, если $dw = 0$ или $\xi = 0$. Следовательно, в этих двух случаях $(dw, d\xi)$ можно рассматривать как вектор из R^m_w. С геометрической точки зрения ситуация такова. Поскольку слой X^k_w является гладким подмногообразием $\mathfrak{X}$, касательное пространство к слою, которое можно отождествить с самим слоем X^k_w, естественно вкладывается в касательное пространство к $\mathfrak{X}$:

$$j: X^k_w \subset R^{m+k}_{(w,\xi)} \qquad j(\xi) = (0, \xi).$$

Проекция ${}^k\pi: \mathfrak{X} \to W^m$ порождает проекцию

$$\pi = d({}^k\pi): R^{m+k}_{(w,\xi)} \longrightarrow R^m_w,$$

переводящую $(dw, d\xi)$ в $(dw, 0)$. Таким образом, естественные операции приводят к точной последовательности

$$0 \longrightarrow X^k_w \xrightarrow{j} R^{m+k}_{(w,\xi)} \xrightarrow{\pi} R^m_w \longrightarrow 0, \tag{6.20}$$

но не к разложению в прямую сумму $R^{m+k}_{(w,\,\xi)} = X^k_w \oplus R^m_w$. При $\xi = 0$ положение меняется, ибо нулевая секущая поверхность расслоения $\mathfrak{X}$

$$W^m \to \mathfrak{X}, \quad w \to (w,\, 0)$$

индуцирует вложение

$$i : R^m_w \subset R^{m+k}_{(w,\,0)} \qquad i(\omega) = (\omega,\, 0),$$

поэтому имеем разложение

$$R^{m+k}_{(w,\,0)} = iR^m_w \oplus jX^k_w,$$

не зависящее от локальных координат. Mutatis mutandis все сказанное относится и к $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{B}$.

Несколько слов об уравнениях в вариациях. Система уравнений в вариациях

$$\dot{\omega} = f_w(w)\,\omega \qquad (\dot{w} = f(w)) \tag{6.21}$$

описывает поток $\{T^t\}$ в $\mathfrak{R}$. В «естественных» локальных координатах, связанных с некоторой картой $(U_\alpha,\, \varphi_\alpha)$ многообразия W^m, уравнения в вариациях имеют вид

$$\dot{\omega}^\alpha_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f^\alpha_i(w)}{\partial w^\alpha_j}\,\omega^\alpha_j,$$

где вместо w надо подставить какое-нибудь решение уравнения $\dot{w} = f(w)$ (в этом состоит одна из двух причин, почему в (6.21) я к уравнению $\dot{\omega} = f_w\omega$ добавил еще справа в скобках уравнение $\dot{w} = f$). Если эту систему переписать в других, уже не «естественных», локальных координатах $(\omega^\beta_1, \ldots, \omega^\beta_m)$, то по-прежнему получится некоторая линейная по ω^β_j система. Можно условиться сокращенно обозначать матрицу коэффициентов полученной таким путем системы (которую нам нет нужды выписывать в явном виде) по-прежнему через f_w, но следует отметить, что f_w, как и $\dot{\omega}$, не имеет тензорного характера; после сказанного ранее ясно, что инвариантный характер имеет только пара $(\dot{w},\, \dot{\omega}) = (f(w),\, f_w(w)\,\omega)$, которая является касательным вектором к многообразию $\mathfrak{R}$ (в этом состоит вторая причина, почему в (6.21) я к $\dot{\omega} = f_w\omega$ приписал еще $\dot{w} = f$).

Обозначим через $\mathrm{Hom}\,(X^k_w,\, R^m_w)$ множество линейных отображений пространства X^k_w в пространство R^m_w; это множество естественным образом является km-мерным векторным пространством. Образуем векторное расслоение

$$\underline{\mathrm{Hom}}\,(\mathfrak{X},\, \mathfrak{R}) = \bigcup_{w \in W^m} \mathrm{Hom}\,(X^k_w,\, R^m_w),$$

в котором $\mathrm{Hom}\,(X^k_w,\, R^m_w)$ является слоем над точкой w. В $\underline{\mathrm{Hom}}\,(\mathfrak{X},\, \mathfrak{R})$ без труда вводится структура класса C^∞. Вложение $\varkappa$: $\mathfrak{X} \to \mathfrak{R}$ можно интерпретировать как некоторое сечение (секущую поверхность) этого расслоения: над точкой w лежит $\varkappa(w)$ или, если пользоваться обозначением, указывающим на полное число $m + km$ локальных координат, пара $(w,\, \varkappa(w))$.

Ясно, что сечения $\hat{\varkappa}$, $\hat{\lambda}$ векторных расслоений $\underline{\mathrm{Hom}}\,(\mathfrak{X},\, \mathfrak{R})$, $\underline{\mathrm{Hom}}\,(\mathfrak{Y},\, \mathfrak{R})$ являются гладкими класса C^∞. Сечения же $\varkappa$ и λ, вообще говоря, не гладкие, однако мы сейчас увидим, что у них существуют производные в силу системы (6.1). Дифференцирование в силу системы (6.1) я обозначаю символом D_f, так что, в частности,

$$D_f\varkappa(w) = \frac{d}{dt}\,\varkappa(T^t w)\,\Big|_{t=0}.$$

Мы увидим также, что производные $D_f \varkappa(w)$ и $D_f \lambda(w)$ непрерывно зависят от w.

Чтобы доказать существование и непрерывность производной $D_f\varkappa(w)$, воспользуемся локальными координатами. В карте $({}^m\pi^{-1}(U_\alpha), \psi_\alpha^m)$ многообразия $\mathfrak{N}$ локальные координаты точки $\omega \in R_w^m$ суть ее координаты в некотором гладком (класса C^∞) базисе $\bar{e}_1^\alpha(w), \ldots, \bar{e}_m^\alpha(w)$ (не считая координат точки w). В карте $({}^k\pi^{-1}(U_\alpha), \psi_\alpha^k)$ многообразия $\mathfrak{X}$ локальные координаты точки $\xi \in X_w^k$ суть ее координаты в базисе (6.12), получающемся путем ортогонального проектирования $\pi: \hat{X}_w^k \to X_w^k$ из некоторого гладкого (класса C^∞) базиса (6.11). Согласно (6.14) и (6.15), существование и непрерывность по w производной $D_f\varkappa(w)$ означает существование и непрерывность по w производных

$$D_f e_i^\alpha(w) = \frac{d}{dt} e_i^\alpha(T^t w)\big|_{t=0} \quad (i = 1, \ldots, k). \tag{6.22}$$

Обозначим для краткости

$$e_j^\alpha(w, t) = \widetilde{T}^t \pi \hat{e}_j^\alpha(w) \quad (j = 1, \ldots, k).$$

Ясно, что вектора $e_j^\alpha(w, t)$ образуют базис в $X_{T^t w}^k$, непрерывны по (w, t) и имеют частные производные

$$\frac{\partial}{\partial t} e_j^\alpha(w, t) = f_w(T^t w)\, e_j^\alpha(w, t),$$

также непрерывные по (w, t). Вектора $e_i^\alpha(T^t w) \in X_{T^t w}^k$ можно разложить по базису $\{e_j^\alpha(w, t)\}$:

$$e_i^\alpha(T^t w) = \sum_{j=1}^{k} x_{ij}(w, t)\, e_i^\alpha(w, t) \quad (i = 1, \ldots, k). \tag{6.23}$$

Так как $e_i^\alpha(T^t w)$ суть ортогональные проекции $\pi \hat{e}_i^\alpha(T^t w)$ векторов $\hat{e}_i^\alpha(T^t w)$ в $X_{T^t w}^k$, то скалярные произведения

$$(e_i^\alpha(T^t w), e_h^\alpha(w, t)) = (\hat{e}_i^\alpha(T^t w), e_h^\alpha(w, t)) \quad (i, h = 1, \ldots, k),$$

или, используя (6.23),

$$\sum_{j=1}^{k} (e_j^\alpha(w, t), e_h^\alpha(w, t))\, x_{ij}(w, t) = (\hat{e}_i^\alpha(T^t w), e_h^\alpha(w, t)) \quad (i, h = 1, \ldots, k). \tag{6.24}$$

При фиксированном i для определения $x_{i1}, \ldots, x_{ik}$ получается система k уравнений, определителем которой является определитель Грама системы k линейно-независимых векторов $e_j^\alpha(w, t)$:

$$\det \| (e_j^\alpha(w, t), e_h^\alpha(w, t)) \| \neq 0. \tag{6.25}$$

Поэтому $x_{ij}(w, t)$ однозначно определяются из системы (6.24), причем каждое $x_{ij}(w, t)$ выражается в виде некоторой рациональной функции от скалярных произведений

$$(e_j^\alpha(w, t), e_h^\alpha(w, t)) \text{ и } (\hat{e}_i^\alpha(T^t w), e_h^\alpha(w, t)), \tag{6.26}$$

знаменатель которой (им является определитель (6.25)) отличен от нуля. Поскольку скалярные произведения (6.26) непрерывны по (w, t) и имеют частные производные по t, также непрерывные по (w, t), то же самое верно и для $x_{ij}(w, t)$. А тогда из (6.22) и (6.23) следует, что производные $D_f e_i^\alpha(w)$ существуют и непрерывны по w.

Если векторное поле $f(w)$ имеет класс гладкости C^n, то существуют и непрерывны производные $(D_f)^\nu \varkappa(w)$, $(D_f)^\nu \lambda(w)$, $\nu = 1, \dots, n$. Это доказывается аналогично.

Когда w движется согласно системе (6.1), точка $(w, \varkappa(w)) \in \underline{\mathrm{Hom}}\,(\mathfrak{X}, \mathfrak{N})$ движется со скоростью

$$\frac{d}{dt}(w, \varkappa(w)) = (f(w), D_f\varkappa(w)).$$

Таким образом, инвариантную бескоординатную интерпретацию имеет не $D_f\varkappa$ само по себе, а пара $(f, D_f\varkappa)$.

В следующих параграфах гладкие (класса C^∞) сечения $\hat{\varkappa}$ и $\hat{\lambda}$ расслоений $\underline{\mathrm{Hom}}\,(\mathfrak{X}, \mathfrak{N})$ и $\underline{\mathrm{Hom}}\,(\mathfrak{Y}, \mathfrak{N})$ считаются аппроксимирующими $\varkappa$ и λ в том смысле, что при всех w

$$\begin{aligned} &|\varkappa(w) - \hat{\varkappa}(w)| < \varepsilon_3, \quad |D_f\varkappa(w) - D_f\hat{\varkappa}(w)| < \varepsilon_3, \\ &|\lambda(w) - \hat{\lambda}(w)| < \varepsilon_3, \quad |D_f\lambda(w) - D_f\hat{\lambda}(w)| < \varepsilon_3, \end{aligned} \tag{6.27}$$

где ε_3 — некоторое положительное число («малость» ε_3 постепенно уточняется по ходу рассуждений). Покажем, что для любого $\varepsilon_3 > 0$ действительно можно найти гладкие $\hat{\varkappa}$ и $\hat{\lambda}$, удовлетворяющие неравенствам (6.27). Разумеется, можно ограничиться рассмотрением $\varkappa$.

Зафиксируем какой-нибудь атлас многообразия W^m, состоящий из конечного числа карт $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$. Пусть $\{\vartheta_\alpha(w)\}$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$ многообразия W^m (и состоящее из функций класса C^∞). Положим

$$\varkappa(w) = \vartheta_\alpha(w)\,\varkappa(w).$$

Сечения $\varkappa_\alpha(w)$ расслоения $\underline{\mathrm{Hom}}\,(\mathfrak{X}, \mathfrak{N})$ обладают следующими свойствами:

1) носитель $S(\varkappa_\alpha)$ сечения $\varkappa_\alpha$ (т. е. замыкание множества точек, в которых $\varkappa_\alpha \neq 0$) целиком содержится в U_α;

2) $\varkappa_\alpha(w)$ непрерывны и имеют непрерывные производные в силу системы (6.1) $D_f\varkappa_\alpha(w)$;

3) $\Sigma\varkappa_\alpha(w) = \varkappa(w)$.

Достаточно доказать, что для любого α и для любого положительного числа δ найдется такое сечение $\hat{\varkappa}_\alpha$ расслоения $\underline{\mathrm{Hom}}\,(\mathfrak{X}, \mathfrak{N})$, что

1) $S(\hat{\varkappa}_\alpha) \subset U_\alpha$;

2) $\hat{\varkappa}_\alpha \in C^\infty$;

3) для всех w

$$|\varkappa_\alpha - \hat{\varkappa}_\alpha| < \delta, \quad |D_f\varkappa_\alpha - D_f\hat{\varkappa}_\alpha| < \delta.$$

(Действительно, тогда при достаточно малом δ сумма $\hat{\Sigma}\varkappa_\alpha$ будет обладать всеми свойствами, требуемыми от $\hat{\varkappa}$.) А это утверждение, в свою очередь, эквивалентно следующему. *Пусть имеются некоторая ограниченная область U эвклидова пространства R^m, гладкое векторное поле $f(w)$, заданное в U, и некоторая функция $F(w)$, обладающая теми свойствами, что*

1) $S(F) \subset U$;

2) *функция $F(w)$ непрерывна по w и имеет в области U производную $D_f F(w)$ в силу системы* (6.1) (*теперь в этой системе w — точка области U, а не многообразия W^m*), *тоже непрерывную по w. Тогда для любого $\delta > 0$ существует такая функция $\hat{F}$, что*

1) $S(\hat{F}) \subset U$ (*в частности, отсюда следует, что $\hat{F}(w) = F(w) = 0$ при $w \notin U$*);

2) $\hat{F} \in C^\infty$;

3) *при всех $w \in U$*

$$|F(w) - \hat{F}(w)| < \delta, \quad |D_f F(w) - D_f \hat{F}(w)| < \delta. \tag{6.28}$$

Доказательство последнего утверждения проводится обычным образом с помощью осреднения. Возьмем какую-нибудь неотрицательную скалярную функцию одного переменного $K(r)$ такую, что $K(r) \in C^\infty$, $K(r) = 0$ при $r \geqslant 1$ и $K(r) = 1$ при $r \leqslant \frac{1}{2}$. Положим

$$\hat{F}(w) = \frac{1}{\varepsilon^m I} \int K\left(\frac{|w - w'|}{\varepsilon}\right) F(w')\, dw',$$

где

$$I = \int K(|w'|)\, dw', \text{ т. е. } \varepsilon^m I = \int K\left(\frac{|w'|}{\varepsilon}\right) dw'.$$

Всюду, где не указаны пределы интегрирования, подразумевается, что интегрирование ведется по всему пространству R^m. Ясно, что $\hat{F} \in C^\infty$ и что носитель $S(\hat{F})$ целиком содержится в замкнутой ε-окрестности множества $S(F)$:

$$S(\hat{F}) \subset \bar{U}_\varepsilon(S(F)),$$

а так как при достаточно малом ε

$$\bar{U}_\varepsilon(S(F)) \subset U,$$

то тем самым обеспечивается выполнение условия $S(\hat{F}) \subset U$. Тривиальным образом проверяется, что при достаточно малом ε выполняется первое из неравенств (6.28).

Осталось проверить второе из неравенств (6.28). Если $w \in U \setminus \bar{U}_\varepsilon(S(F))$, то $D_f F(w) = D_f \hat{F}(w) = 0$. В дальнейшем считается, что $w \in \bar{U}_\varepsilon(S(F))$. При достаточно малых t определено $T^t w$, и мы имеем

$$\varepsilon^m I D_f \hat{F}(w) = \frac{\partial}{\partial t} \int K\left(\frac{|T^t w - w'|}{\varepsilon}\right) F(w')\, dw' \Big|_{t=0} =$$

$$= \int \frac{\partial}{\partial t} K\left(\frac{|T^t w - w'|}{\varepsilon}\right)\Big|_{t=0} F(w')\, dw',$$

т. е.

$$\varepsilon^m I D_f \hat{F}(w) = \int D_{f(w)} K\left(\frac{|w - w'|}{\varepsilon}\right) F(w')\, dw'.$$

Здесь обозначение $D_{f(w)}$ указывает на то, что дифференцирование в силу системы (6.1) функции, зависящей от двух аргументов w и w', производится по аргументу w; когда же дифференцирование в силу системы (6.1) производится по аргументу w', употребляется обозначение $D_{f(w')}$. Введем интеграл

$$I_1 = \int \left[D_{f(w')} K\left(\frac{|w - w'|}{\varepsilon}\right)\right] F(w')\, dw'.$$

Имеем

$$\varepsilon^m I D_f \hat{F}(w) + I_1 =$$

$$= \int \left[D_{f(w)} K\left(\frac{|w - w'|}{\varepsilon}\right) + D_{f(w')} K\left(\frac{|w - w'|}{\varepsilon}\right)\right] F(w')\, dw'.$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, равно

$$\left(\operatorname{grad}_w K\left(\frac{|w - w'|}{\varepsilon}\right), f(w)\right) + \left(\operatorname{grad}_{w'} K\left(\frac{|w - w'|}{\varepsilon}\right), f(w')\right),$$

где $(.,.)$ обозначает скалярное произведение двух векторов, а индексы w и w' у grad указывают, по каким переменным производится дифференцирование. Легко видеть, что

$$\operatorname{grad}_w K\left(\frac{|w-w'|}{\varepsilon}\right) = -\operatorname{grad}_{w'} K\left(\frac{|w-w'|}{\varepsilon}\right),$$

поэтому

$$\varepsilon^m I D_f \hat{F}(w) + I_1 = \int \left(\operatorname{grad}_{w'} K\left(\frac{|w-w'|}{\varepsilon}\right), f(w') - f(w)\right) F(w')\, dw'.$$

Сравним этот интеграл с произведением $I_2 F(w)$, где

$$I_2 = \int \left(\operatorname{grad}_{w'} K\left(\frac{|w-w'|}{\varepsilon}\right), f(w') - f(w)\right) dw'.$$

Имеем

$$\varepsilon^m I D_f \hat{F}(w) + I_1 - I_2 F(w) =$$
$$= \int \left(\operatorname{grad}_{w'} K\left(\frac{|w-w'|}{\varepsilon}\right), f(w') - f(w)\right) (F(w') - F(w))\, dw'. \qquad (6.29)$$

Но

$$\operatorname{grad}_{w'} K\left(\frac{|w-w'|}{\varepsilon}\right) = K'\left(\frac{|w-w'|}{\varepsilon}\right) \frac{w-w'}{\varepsilon\,|w-w'|},$$

так что

$$\operatorname{grad}_{w'} K\left(\frac{|w-w'|}{\varepsilon}\right) \leqslant \frac{C}{\varepsilon} \quad \text{при} \quad |w-w'| \leqslant \varepsilon,$$
$$\operatorname{grad}_{w'} K\left(\frac{|w-w'|}{\varepsilon}\right) = 0 \quad \text{при} \quad |w-w'| > \varepsilon.$$

Далее, при $w \in \bar{U}_\varepsilon(S(F))$ и $|w - w'| \leqslant \varepsilon$

$$|f(w') - f(w)| \leqslant A\varepsilon,$$

где A, как и C выше,— некоторая константа, а

$$|F(w') - F(w)| \leqslant \Omega(\varepsilon),$$

где $\Omega(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Стало быть, интеграл, стоящий в правой части (6.29), не превосходит величины

$$\int\limits_{|w-w'| \leqslant \varepsilon} \frac{C}{\varepsilon} A\varepsilon\Omega(\varepsilon)\, dw' = AC\Omega(\varepsilon) \cdot (\text{объем области } |w - w'| \leqslant \varepsilon),$$

т. е.

$$|\varepsilon^m I D_f \hat{F}(w) + I_1 - I_2 F(w)| \leqslant o(\varepsilon^m). \qquad (6.30)$$

Здесь и далее $o(\varepsilon^m)$ не зависит от w при $w \in \bar{U}_\varepsilon(S(F))$.

Вычислим интеграл I_2. Так как

$$\left(\operatorname{grad}_{w'} K\left(\frac{|w-w'|}{\varepsilon}\right), f(w') - f(w)\right) = \operatorname{div}_{w'}\left[K\left(\frac{|w-w'|}{\varepsilon}\right)(f(w') - f(w))\right] -$$
$$- K\left(\frac{|w-w'|}{\varepsilon}\right) \operatorname{div} f(w'),$$

то

$$I_2 = \int \operatorname{div}_{w'}\left[K\left(\frac{|w-w'|}{\varepsilon}\right)(f(w') - f(w))\right] dw' -$$
$$- \int K\left(\frac{|w-w'|}{\varepsilon}\right) \operatorname{div} f(w')\, dw'.$$

Векторное поле, стоящее под знаком дивергенции в первом интеграле, финитно, вследствие чего этот интеграл равен нулю. Второй же интеграл (или, точнее говоря, второй интеграл, разделенный на $\varepsilon^m I$) представляет собой осреднение функции $\operatorname{div} f(w)$. Итак,

$$I_2 = -\varepsilon^m I \operatorname{div} f(w) + o(\varepsilon^m). \qquad (6.31)$$

Теперь мы вычислим интеграл I_1. Имеем

$$\left[D_{f(w')} K\left(\frac{|w-w'|}{\varepsilon}\right)\right] F(w') =$$

$$= D_{f(w')}\left[K\left(\frac{|w-w'|}{\varepsilon}\right) F(w')\right] - K\left(\frac{|w-w'|}{\varepsilon}\right) D_{f(w')} F(w').$$

Положив

$$I_3(t) = \int \frac{\partial}{\partial t}\left[K\left(\frac{|w-T^t w'|}{\varepsilon}\right) F(T^t w')\right] dw'$$

и обычным образом оценив разность

$$\left|\int K\left(\frac{|w-w'|}{\varepsilon}\right) D_f F(w')\, dw' - \varepsilon^m I D_f F(w)\right| \leqslant o(\varepsilon^m),$$

найдем, что

$$I_1 = I_3(0) - \varepsilon^m I D_f F(w) + o(\varepsilon^m). \tag{6.32}$$

В интеграле $I_3(t)$ вынесем $\frac{\partial}{\partial t}$ за знак интеграла, сделаем замену $w' = T^{-t} w''$ и опять внесем $\frac{\partial}{\partial t}$ под знак интеграла; получим

$$I_3(t) = \int K\left(\frac{|w-w''|}{\varepsilon}\right) F(w'') \frac{\partial}{\partial t} \det \left\| \frac{\partial T^{-t} w''}{\partial w''} \right\| dw''.$$

Но матрица $\frac{\partial T^t w''}{\partial w''}$ удовлетворяет системе уравнений в вариациях (6.21), поэтому производная ее определителя равна произведению определителя на след матрицы коэффициентов, т. е. на

$$\mathrm{Sp}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) = \operatorname{div} f.$$

Значит,

$$\frac{\partial}{\partial t} \det \left\| \frac{\partial T^{-t} w''}{\partial w''} \right\| = -\operatorname{div} f(T^{-t} w'') \det \left\| \frac{\partial T^{-t} w''}{\partial w''} \right\|$$

и

$$I_3(0) = -\int K\left(\frac{|w-w''|}{\varepsilon}\right) F(w'') \operatorname{div} f(w'')\, dw''.$$

Отсюда обычным образом заключаем, что

$$I_3(0) = -\varepsilon^m I F(w) \operatorname{div} f(w) + o(\varepsilon^m). \tag{6.33}$$

Сопоставляя (6.30)—(6.33), получаем

$$\varepsilon^m I D_f \hat{F}(w) = \varepsilon^m I D_f F(w) + o(\varepsilon^m),$$

что и требовалось доказать.

§ 7. Ляпуновская метрика, грубость условия (У) и уравнения в вариациях

До сих пор я не уточнял выбора используемой римановой метрики на многообразии W^m. В дальнейшем же я буду считать, что используемая метрика обладает некоторыми специальными свойствами. Метрика с нужными свойствами строится в настоящем параграфе. Грубо говоря, метрика должна задаваться квадратичной дифференциальной формой, являющейся функцией Ляпунова для системы уравнений в вариациях, а углы между пространствами X_w^k, Y_w^l и Z_w^1 в этой метрике не должны значительно отличаться от 90°. С помощью такой «ляпуновской» метрики в настоящем параграфе доказывается грубость условий (У): при малом (в смысле C^1) возмущении (У)-системы снова получается (У)-система. Хотя этот результат неявно содержится в доказательстве теоремы 1, мне казалось целесообразным привести и отдельное доказательство, поскольку оно простое и служит хорошим примером, показывающим удобство ляпуновской метрики. Наконец, в настоящем параграфе содержатся некоторые замечания об уравнениях в вариациях.

В дополнение к уже введенному в предыдущем параграфе обозначению $D_f\varphi(w)$ для производной функции $\varphi(w)$ в силу системы (6.1) примем еще следующее обозначение. Пусть $\varphi(w, \omega)$ — функция, зависящая от $w \in W^m$ и от $\omega \in R^m_w$. Через $D_f\varphi$ обозначается ее производная в силу систем (6.1) и (6.21):

$$D_f\varphi(w, \omega) = \frac{d}{dt}\varphi(T^t w, \widetilde{T}^t \omega)\,|_{t=0}.$$

Иногда вместо $D_f\varphi$ я пишу $\dot{\varphi}$.

Обозначая, как обычно, длину вектора в некоторой (пока произвольной) римановой метрике с помощью двух черточек, положим для $\xi \in X^k_w$, $\eta \in Y^l_w$

$$U(\xi, w) = \int_0^\tau |\widetilde{T}^t\xi|^2\,dt, \quad V(\eta, w) = \int_{-\tau}^0 |\widetilde{T}^t\eta|^2\,dt,$$

где $\tau > 0$ должно быть достаточно большим (точнее см. ниже). Очевидно, что U, V — положительно определенные квадратичные формы на X^k_w и Y^l_w соответственно, непрерывно зависящие от w. Имеем

$$\frac{d}{dt}U(\widetilde{T}^t\xi, T^t w) = \frac{d}{dt}\int_0^\tau |\widetilde{T}^s\widetilde{T}^t\xi|^2\,ds = \frac{d}{dt}\int_0^\tau |\widetilde{T}^{s+t}\xi|^2\,ds =$$

$$= \frac{d}{dt}\int_\tau^{\tau+t} |\widetilde{T}^s\xi|^2\,ds = -|\widetilde{T}^t\xi|^2 + |\widetilde{T}^{\tau+t}\xi|^2.$$

При $t = 0$ получается, что

$$D_fU(\xi, w) = -|\xi|^2 + |\widetilde{T}^\tau\xi|^2,$$

и если τ было выбрано достаточно большим, то по условию (У)

$$D_fU(\xi, w) \leqslant -a_1|\xi|^2 \leqslant -a_2U(\xi, w) \qquad (\xi \in X^k_w;\ a_1, a_2 > 0).$$

Аналогично

$$D_fV(\eta, w) \geqslant a_3V(\eta, w) \qquad (\eta \in Y^l_w;\ a_3 > 0).$$

Заметим, наконец, что, положив для $\zeta \in Z^1_w$

$$W(\zeta, w) = \frac{|\zeta|^2}{|f(w)|^2},$$

получим

$$D_fW(\zeta, w) = 0 \qquad (\zeta \in Z^1_w),$$

потому что $\widetilde{T}^t\zeta = \mathrm{const}\cdot f(T^t w)$.

Любой вектор $\omega \in R^m_w$ однозначно представляется в виде $\omega = \xi + \eta + \zeta$, где $\xi \in X^k_w$, $\eta \in Y^l_w$, $\zeta \in Z^1_w$. Продолжим квадратичные формы U, V, W на все R^m_w, полагая

$$U(\omega, w) = U(\xi, w),\ V(\omega, w) = V(\eta, w),\ W(\omega, w) = W(\zeta, w).$$

На R^m_w эти формы неотрицательно определены и непрерывны, а их сумма положительно определена.

Покажем, что любую непрерывную неотрицательную квадратичную форму $V(w, \omega)$, которая имеет непрерывную по (w, ω) производную $D_f V(w, \omega)$, можно так аппроксимировать неотрицательной квадратичной формой $\hat{V}(w, \omega)$ класса C^∞, что

$$\max_{|\omega|\le 1} |\hat{V}(w, \omega) - V(w, \omega)| < \varepsilon,$$
$$\max_{|\omega|\leqslant 1} |D_f \hat{V}(w, \omega) - D_f V(w, \omega)| < \varepsilon, \tag{7.1}$$

где ε — любое наперед заданное положительное число.

Для этого достаточно доказать, что $V(w, \omega)$ можно аппроксимировать квадратичной формой (не обязательно неотрицательной) $\check{V}(w, \omega)$ класса C^∞ таким образом, чтобы для разности $\check{V} - V$ выполнялись неравенства (7.1). Действительно, пусть возможность такой аппроксимации уже доказана; рассмотрим

$$\hat{V}(w, \omega) = \check{V}(w, \omega) + \varepsilon |\omega|^2.$$

Из (7.1) и неотрицательности $V(w, \omega)$ следует, что при всех ω

$$\check{V}(w, \omega) \geqslant V(w, \omega) - \varepsilon |\omega|^2 \geqslant -\varepsilon |\omega|^2,$$

поэтому форма $\hat{V}(w, \omega)$ — неотрицательная. Далее, ясно, что при $|\omega| \leqslant 1$

$$|\hat{V}(w, \omega) - V(w, \omega)| \leqslant \check{V}(w, \omega) - V(w, \omega)| + \varepsilon |\omega|^2 \leqslant 2\varepsilon$$

и

$$|D_f \hat{V}(w, \omega) - D_f V(w, \omega)| \leqslant |D_f \check{V}(w, \omega) - D_f V(w, \omega)| + \varepsilon |D_f |\omega|^2| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\left(1 + \max_{|\omega|\leqslant 1} |D_f |\omega|^2|\right),$$

а так как ε за счет выбора $\check{V}$ может быть сделано сколь угодно малым, то мы убеждаемся в возможности аппроксимации $V(w, \omega)$ неотрицательной гладкой квадратичной формой.

Докажем теперь, что действительно можно аппроксимировать квадратичную форму $V(w, \omega)$ квадратичной формой (не обязательно неотрицательной) $\check{V}(w, \omega)$ с надлежащими свойствами. Зафиксируем какой-нибудь атлас многообразия W^m, состоящий из конечного числа карт $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$. С помощью какого-нибудь разбиения единицы $\{\vartheta_\alpha(w)\}$, подчиненного покрытию $\{U_\alpha\}$ многообразия W^m, представим V в виде

$$V(w, \omega) = \Sigma V_\alpha(w, \omega),$$

где

$$V_\alpha(w, \omega) = \vartheta_\alpha(w) V(w, \omega).$$

Ясно, что наше утверждение достаточно доказать только для форм V_α. Так как форма V_α тождественно обращается в нуль вне U_α, то для этой формы наше утверждение о возможности аппроксимации вытекает из подобного утверждения для ее коэффициентов. Эти коэффициенты являются скалярными функциями от w, носители которых содержатся в U_α. Для таких функций возможность аппроксимации была доказана в конце § 6.

Вернемся теперь к «ляпуновским» квадратичным формам U, V, W, построенным ранее, и аппроксимируем их, согласно сказанному выше, бесконечно дифференцируемыми неотрицательными формами, которые мы снова обозначим через U, V, W. Введем новую риманову метрику, которую мы снова обозначим с помощью двух черточек, полагая для $\omega \in R_w^m$

$$|\omega|^2 = U(\omega, w) + V(\omega, w) + W(\omega, w).$$

Это — метрика в W^m или, что то же самое, в векторном расслоении $\mathfrak{R}$.

В векторные расслоения $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ можно было бы ввести метрику, принимая длины векторов ξ и η из этих расслоений равными

$$|\xi| = |\varkappa\xi|, \quad |\eta| = |\lambda\eta|.$$

Однако построенная таким путем метрика, вообще говоря, не будет гладкой. Иными словами, если пользоваться теми картами $(U_\alpha, \psi_\alpha^k)$ расслоения $\mathfrak{X}$, которые были указаны в § 6, то в соответствующих локальных координатах коэффициенты квадратичной формы $|\xi|^2$ не будут гладкими функциями w. Можно утверждать только, что эти коэффициенты непрерывны по w и имеют производную в силу системы (6.1), также непрерывную по w. Конечно, можно найти и такие карты, что в соответствующих локальных координатах коэффициенты квадратичной формы $|\xi|^2$ будут гладкими. Например, можно взять какой-нибудь базис в $\mathfrak{X}$,—скажем, базис $e_1^\alpha(w), \ldots, e_k^\alpha(w)$, с помощью которого строится карта $(U_\alpha, \psi_\alpha^k)$ (см. § 6),—и ортонормировать его в метрике $|\xi|^2$. В карте $(U_\alpha, \tilde{\psi}_\alpha^k)$, построенной с помощью полученного таким путем базиса $\tilde{e}_1^\alpha(w), \ldots, \tilde{e}_k^\alpha(w)$, матрица коэффициентов квадратичной формы $|\xi|^2$ будет просто единичной матрицей. Однако мало того, что базис $\{\tilde{e}_i^\alpha(w)\}$ по-прежнему не будет гладким (т. е. вектора $\tilde{e}_i^\alpha(w) \in R_w^m$ зависят от w не гладко), но и координатные преобразования $\tilde{\psi}_\beta^k(\tilde{\psi}_\alpha^k)^{-1}$ не будут гладкими по $w \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$.

По этой причине лучше аппроксимировать в $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ квадратичные формы $|\varkappa\xi|^2$ и $|\lambda\eta|^2$ гладкими квадратичными формами (аппроксимация должна быть такой, чтобы были близки не только сами формы, но и их производные в силу системы (6.1)) и эти аппроксимирующие формы обозначить через $|\xi|^2$ и $|\eta|^2$. Такие обозначения и применяются в дальнейшем, за исключением части настоящего параграфа, посвященной грубости условий (У). В названной части § 7 ξ и η отождествляются с $\varkappa\xi$ и $\lambda\eta$, так что там $|\xi| = |\varkappa\xi|$ и $|\eta| = |\lambda\eta|$.

Построенные нами нормы и квадратичные формы обладают следующими свойствами. Прежде всего, если ε_2 и ε_3 достаточно малы (что всегда предполагается в дальнейшем), то для любого вектора $\hat{f} \in R_w^m$, удовлетворяющего условию

$$|\hat{f} - f(w)| < \varepsilon_2,$$

и для любых $\hat{\varkappa}$, $\hat{\lambda}$, удовлетворяющих условию (6.27), выполняется неравенство

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{|\hat{\varkappa}\xi + \hat{\lambda}\eta + \hat{f}\zeta|^2}{|\xi|^2 + |\eta|^2 + |\zeta|^2} \leqslant 2, \tag{7.2}$$

каковы бы ни были вектора $\xi \in X_w^k$, $\eta \in Y_w^l$ и число ζ. В частности,

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{|\xi + \eta + \zeta|^2}{|\xi|^2 + |\eta|^2 + |\zeta|^2} \leqslant 2.$$

Обозначим, далее,

$$K(w) = \{\omega\colon \omega \in R_w^m,\ U(\omega, w) \geqslant V(\omega, w),\ U(\omega, w) \geqslant W(\omega, w)\},$$

$$L(w) = \{\omega\colon \omega \in R_w^m,\ V(\omega, w) \geqslant U(\omega, w),\ V(\omega, w) \geqslant W(\omega, w)\},$$

$$I(w) = \{\omega\colon \omega \in R_w^m,\ W(\omega, w) \geqslant U(\omega, w),\ W(\omega, w) \geqslant V(\omega, w)\}.$$

Тогда

$$X_w^k \subset K(w),\ Y_w^l \subset L(w), \quad Z_w^1 \subset I(w), \tag{7.3}$$

$$D_f U \leqslant -aU, \quad U \leqslant |\omega|^2 \leqslant 3U \quad \text{при} \quad \omega \in K(w), \tag{7.4}$$

$$D_f V \geqslant aV, \qquad V \leqslant |\omega|^2 \leqslant 3V \text{ при } \omega \in L(w), \tag{7.5}$$

$$|D_f W| \leqslant 0{,}1aW, \; W \leqslant |\omega|^2 \leqslant 3W \text{ при } \omega \in I(w), \tag{7.6}$$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}|\widetilde{T}^t\xi| \leqslant -a|\widetilde{T}^t\xi| \text{ при } \xi \in X_w^k, \\ &\frac{d}{dt}|\widetilde{T}^t\eta| \geqslant a|\widetilde{T}^t\eta| \text{ при } \eta \in Y_w^l. \end{aligned} \tag{7.7}$$

В последней формуле $\widetilde{T}^t\xi$ обозначает то же самое, что и $\varkappa^{-1}\widetilde{T}^t\varkappa\xi$. Заметим, что формулы (7.2)—(7.7) верны независимо от того, понимать ли под $|\xi|^2$ и $|\eta|^2$ квадратичные формы, аппроксимирующие квадратичные формы $|\varkappa\xi|^2$ и $|\lambda\eta|^2$, или же сами формы $|\varkappa\xi|^2$ и $|\lambda\eta|^2$.

С помощью введенных «ляпуновских» квадратичных дифференциальных форм легко доказать, что при малом (в смысле C^1) возмущении (У)-системы снова получается (У)-система. Действительно, если $\| g - f \| C_1$ достаточно мало, то (7.4) и (7.5) останутся в силе при замене D_f на D_g (при этом, быть может, придется несколько изменить a), а (7.6) останется в силе при такой замене, если вместо 0,1 поставить 0,2. В этом легко убедиться, пользуясь тем, что $D_g = D_f + D_{g-f}$ и что для любой гладкой квадратичной дифференциальной формы $\Phi(\omega, w)$

$$|D_{g-f}\Phi(\omega, w)| \leqslant M \| g - f \|_{C_1} |\omega|^2,$$

где M — некоторая константа, зависящая от Φ.

Преобразования в касательном векторном расслоении, порожденные потоком $\{S^t\}$ (определяемым системой (6.2)), обозначим через $\{\widetilde{S}^t\}$. Покажем, что при $t > 0$

$$\widetilde{S}^{-t}K(w) \subset K(S^{-t}w), \; \widetilde{S}^t L(w) \subset L(S^t w). \tag{7.8}$$

Иными словами, если

$$U(\omega, w) \geqslant V(\omega, w), \; U(\omega, w) \geqslant W(\omega, w),$$

то при $t > 0$

$$\begin{aligned} U(\widetilde{S}^{-t}\omega, S^{-t}w) &\geqslant V(\widetilde{S}^{-t}\omega, S^{-t}w), \\ U(\widetilde{S}^{-t}\omega, S^{-t}w) &\geqslant W(\widetilde{S}^{-t}\omega, S^{-t}w), \end{aligned}$$

а если

$$V(\omega, w) \geqslant U(\omega, w), \; V(\omega, w) \geqslant W(\omega, w),$$

то при $t > 0$

$$\begin{aligned} V(\widetilde{S}^t\omega, S^t w) &\geqslant U(\widetilde{S}^t\omega, S^t w), \\ V(\widetilde{S}^t\omega, S^t w) &\geqslant W(\widetilde{S}^t\omega, S^t w). \end{aligned} \tag{7.9}$$

Докажем, например, последнее утверждение. При $t = 0$ имеем $\frac{U}{V} \leqslant 1$, $\frac{W}{V} \leqslant 1$. Если же допустить, что в некоторый момент времени в каком-нибудь из неравенств (7.9) или в обоих имеет место равенство, скажем, $U = V$, то тогда получим

$$D_g\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{VD_gU - UD_gV}{V^2} \leqslant \frac{-aVU - aUV}{V^2} = -\frac{2aU}{V} < 0.$$

Из (7.7) следует, что при $s > t \geqslant 0$

$$\begin{aligned} \widetilde{S}^{-s}K(S^s w) &\subset \widetilde{S}^{-t}K(S^t w), \\ \widetilde{S}^s L(S^{-s}w) &\subset \widetilde{S}^t L(S^{-t}w). \end{aligned} \tag{7.10}$$

Рассмотрим последовательность линейных подпространств пространства R_w^m

$$\tilde{S}^{-t}X^k_{S^t w},\ \tilde{S}^t Y^l_{S^{-t}w} \quad (t \to \infty).$$

Выберем из них сходящиеся подпоследовательности и обозначим их пределы через $\overline{X}^k_w$ и $\overline{Y}^l_w$. Согласно (7.3),

$$\tilde{S}^{-s}X^k_{S^s w} \subset \tilde{S}^{-s}K(S^s w),$$
$$\tilde{S}^s Y^l_{S^{-s}w} \subset \tilde{S}^s L(S^{-s}w),$$

поэтому из (7.10) следует, что при $s > t \geqslant 0$

$$\tilde{S}^{-s}X^k_{S^s w} \subset \tilde{S}^{-t}K(S^t w),$$

$$\tilde{S}^s L(S^{-s}w) \subset \tilde{S}^t L(S^{-t}w).$$

Переходя к пределу по надлежащей подпоследовательности $s_k \to \infty$, получим, что при $t > 0$

$$\overline{X}^k_w \subset \tilde{S}^{-t}K(S^t w), \quad \overline{Y}^l_w \subset \tilde{S}^t L(S^{-t}w),$$

т. е. что

$$\tilde{S}^t\overline{X}^k_w \subset K(S^t w), \qquad \tilde{S}^{-t}\overline{Y}^l_w \subset L(S^{-t}w) \quad (t > 0).$$

Далее, из (7.3) и (7.8) следует, что при $t > 0$

$$\tilde{S}^{-t}\overline{X}^k_w \subset \tilde{S}^{-t}K(w) \subset K(S^{-t}w), \quad \tilde{S}^t\overline{Y}^l_w \subset \tilde{S}^t L(w) \subset L(S^t w).$$

Поэтому окончательно получаем, что при всех t, $-\infty < t < \infty$,

$$\tilde{S}^t\overline{X}^k_w \subset K(S^t w), \quad \tilde{S}^t\overline{Y}^l_w \subset L(S^t w). \tag{7.11}$$

Из (7.11), (7.4) и (7.5) следует, что если $\xi \in \overline{X}^k_w$, $\eta \in \overline{Y}^l_w$, то при всех t

$$\frac{d}{dt}U(\tilde{S}^t\xi, S^t w) \leqslant -aU(\tilde{S}^t\xi, S^t w),$$

$$\frac{d}{dt}V(\tilde{S}^t\eta, S^t w) \geqslant aV(\tilde{S}^t\eta, S^t w),$$

т. е.

$$|\tilde{S}^t\xi|^2 \leqslant 3e^{-at}|\xi|^2 \text{ при } t \geqslant 0, \quad |\tilde{S}^t\xi|^2 \geqslant \frac{1}{3}e^{-at}|\xi|^2 \text{ при } t \leqslant 0,$$

$$|\tilde{S}^t\eta|^2 \leqslant 3e^{at}|\eta|^2 \text{ при } t \leqslant 0, \quad |\tilde{S}^t\eta|^2 \geqslant \frac{1}{3}e^{at}|\eta|^2 \text{ при } t \geqslant 0.$$

Отсюда видно также, что пространства $\overline{X}^k_w$ и $\overline{Y}^l_w$ пересекаются только в нуле и что одномерное пространство $\overline{Z}^1_w$, проходящее через вектор $g(w)$, пересекает $\overline{X}^k_w \oplus \overline{Y}^l_w$ только в нуле (ибо при $\zeta \in Z^1_w$ имеем $S^t\zeta = \text{const}\cdot g(S^t w)$, что не стремится ни к 0, ни к ∞). А так как $k + l + 1 = m$, то $R^m_w = \overline{X}^k_w \oplus \overline{Y}^l_w \oplus \overline{Z}^1_w$. Тем самым доказано, что поток $\{S^t\}$ удовлетворяет условию (У).

Займемся теперь потоком $\{\tilde{T}^t\}$ и описывающими его уравнениями в вариациях (6.21). Расслоение $\mathfrak{R}$ изоморфно прямой сумме $\mathfrak{X} \oplus \mathfrak{Y} \oplus \mathfrak{Z}$, причем изоморфизмом является отображение $(\varkappa, \lambda, f)$, где

$$(\varkappa(w), \lambda(w), f(w)):\ X^k_w \oplus Y^l_w \oplus Z^1_w \to R^m_w$$

(см. (6.18) и относящийся к (6.18) текст). С помощью этого изоморфизма перейдем от отображения $\tilde{T}^t$: $R^m_w \to R^m_{T^t w}$ к отображению

$$(\varkappa, \lambda, f)^{-1}\tilde{T}^t(\varkappa, \lambda, f):\ X^k_w \oplus Y^l_w \oplus Z^1_w \to X^k_{T^t w} \oplus Y^l_{T^t w} \oplus Z^1_{T^t w}.$$

Подрасслоения $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ касательного расслоения $\mathfrak{N}$ инвариантны относительно потока $\{\widetilde{T}^t\}$, поэтому ограничения этого потока на этих подрасслоениях сами являются некоторыми потоками, и

$$(\varkappa(T^t w), \lambda(T^t w), f(T^t w))^{-1}\widetilde{T}^t(\varkappa(w), \lambda(w), f(w)) = \begin{pmatrix} P(t, w) & 0 & 0 \\ 0 & Q(t, w) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7.12}$$

Здесь 1 переводит число ζ в то же самое число (или, если угодно, вектор $\zeta f(w)$ — в вектор $\zeta f(T^t w)$), а линейные преобразования $P(t, w)$ и $Q(t, w)$, отображающие X_w^k и Y_w^l в $X_{T^t w}^k$ и $Y_{T^t w}^l$ соответственно, образуют (в сочетании с T^t) упомянутые выше потоки в $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$. Выведем систему дифференциальных уравнений, описывающую эти потоки.

Продифференцируем (6.18):

$$\dot{\omega} = (D_f\varkappa, D_f\lambda, D_f f)\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix} + (\varkappa, \lambda, f)\begin{pmatrix}\dot\xi\\ \dot\eta\\ \dot\zeta\end{pmatrix}. \tag{7.13}$$

Отдельным членам здесь, вероятно, можно дать инвариантную бескоординатную интерпретацию, вернее, не самим по себе этим членам, а этим членам в сочетании с (6.1). Например, в § 6 была дана бескоординатная интерпретация $D_f\varkappa$. Надо было бы дать еще бескоординатную интерпретацию выражениям вида $D_f\varkappa \cdot \xi$ (ведь $D_f\varkappa$, согласно сказанному в § 6, является не гомоморфизмом $\mathfrak{X} \to \mathfrak{N}$ векторных расслоений, а векторным полем, касательным к $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathfrak{X},\mathfrak{N})$!) и $\varkappa\dot\xi$ (ведь $\dot\xi \notin X_w^k$!). После этого можно было бы сказать, что формула (7.13) имеет смысл, а затем уж доказать, что эта формула верна. Все это очень просто, но длинно и скучно. Поэтому я предпочитаю считать, что вычисление производится в локальных координатах.

Сопоставляя (7.13) и (6.21), получаем

$$\begin{pmatrix}\dot\xi\\ \dot\eta\\ \dot\zeta\end{pmatrix} = (\varkappa, \lambda, f)^{-1}\,[f_w\cdot(\varkappa, \lambda, f) - (D_f\varkappa, D_f\lambda, D_f f)]\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}. \tag{7.14}$$

Выражение в квадратных скобках можно несколько упростить, а именно $f_w f = D_f f$, поэтому у матрицы, стоящей в квадратных скобках, последний столбец состоит из нулей; иными словами, правая часть (7.14) в действительности не зависит от ζ. Это, конечно, согласуется с видом последнего столбца в (7.12). Так как уравнения (7.14) должны описывать поток (7.12), то они должны распадаться на отдельные уравнения для ξ, η и ζ. Итак, получаем систему

$$\dot\xi = A(w)\,\xi, \tag{7.15}$$

$$\dot\eta = B(w)\,\eta, \tag{7.16}$$

$$\dot\zeta = 0, \tag{7.17}$$

в которой

$$\begin{pmatrix} A(w) & 0 \\ 0 & B(w) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (\varkappa(w), \lambda(w), f(w))^{-1}\,[f_w(w)(\varkappa(w), \lambda(w)) - D_f(\varkappa(w), \lambda(w))]. \tag{7.18}$$

Коэффициенты системы (7.15)—(7.17) непрерывны по w. Бескоординатную интерпретацию имеют не ξ и η сами по себе, а пары

$$(\dot w, \dot\xi) = (f, A\xi), \quad (\dot w, \dot\eta) = (f, B\eta).$$

Таким образом, я уклонился от того, чтобы давать бескоординатную интерпретацию отдельным членам, стоящим в правой части (7.14) или (7.18), но в целом правая часть (7.15), (7.16) или (7.18) в сочетании с (6.1) имеет инвариантный смысл.

Система (7.15) (равно как и (7.16)) — линейная. Строго говоря, это означает только то, что она является линейной в любой системе локальных координат. Мы ведь не можем инвариантным образом сравнивать между собой значения $A\xi$ при разных ξ, потому что вектора $(f, A\xi)$ при разных ξ принадлежат разным пространствам $R^{m+k}_{(w,\xi)}$ (см. текст, окружающий формулу (6.20)). Впрочем, никаких особенных неприятностей это не вызывает. Если бы мы все же пожелали бы инвариантным образом сравнивать между собой значения $A\xi$ при разных ξ или, что то же, придать инвариантный смысл выражению $A\xi$ (а не паре $(f, A\xi)$), то следовало бы воспользоваться параллельным перенесением согласно какой-нибудь связности. Для наших целей пока что это было излишне. Однако в некоторых случаях, как мы увидим, все же надо пользоваться параллельным перенесением.

Желая рассматривать поведение траекторий системы (6.2) в окрестности кривой $L : w = \hat{w}(t)$, мы в следующем параграфе выведем систему дифференциальных уравнений,— будем пока называть ее системой (S),— описывающую, как меняется со временем точка пересечения какой-нибудь траектории системы (6.2) с площадкой $\Pi(\hat{w}(t))$. В зависимости от того, доказываем ли мы теорему 1, теорему 8 или лемму 13.1, система (S) имеет несколько различные свойства.

Если кривая L является некоторой фиксированной траекторией $T^t w_0$ системы (6.1) и $g(w) \equiv f(w)$ (это значит, что мы доказываем теорему 8), то линейной частью системы (S), естественно, служит система (7.15) & (7.16) (через (A) & (B) обозначается ради краткости система, получающаяся путем объединения двух систем (A) и (B)), а остальные члены имеют высший порядок малости по сравнению с линейными. При доказательстве теоремы 1 кривая L по-прежнему совпадает с траекторией $T^t w_0$, но траектории, поведение которых в окрестности кривой L мы рассматриваем, являются траекториями системы (6.2), отличной от (6.1), хотя и близкой к ней. В этом случае система (S) уже не имеет систему (7.15) & (7.16) своей линейной частью, но все же система (7.15) & (7.16) в некотором смысле составляет «главную часть» системы (S). А именно, разность между правой частью (S) и правой частью (7.15) & (7.16) есть сумма членов порядка $O(\varepsilon_1)$, где ε_1 оценивает близость систем (6.1) и (6.2) (см. (6.4)), и членов высшего порядка малости по сравнению с линейными.

Наконец, при доказательстве леммы 13.1 кривая L не является траекторией системы (6.1), поле V^{m-1}_w, с помощью которого строятся локальные сечения, определяется не посредством (6.7), а посредством (6.8), и, наконец, $f(w) \equiv g(w)$. Хотелось бы сказать, что в этом случае система (7.15) & (7.16) составляет «главную часть» системы (S) в том смысле, что разность между правой частью (S) и правой частью (7.15) & (7.16) есть сумма членов порядка $O(\varepsilon_2)$, где ε_2 оценивает локальную близость кривой L и траекторий системы (6.1) (см. (6.5)), членов порядка $O(\varepsilon_3)$, где ε_3 оценивает близость $\hat{\varkappa}$ и $\hat{\lambda}$ к $\varkappa$ и λ (см. (6.27)), и членов высшего порядка малости по сравнению с линейными. В локальных координатах, разумеется, примерно так и получается (оговорка «примерно» связана с тем, что на самом деле член порядка ε_2 зависит от $\hat{\varkappa}$ и $\hat{\lambda}$, так что, грубо говоря, ε_2 должно быть мало по сравнению с ε_3; это пока для нас несущественно), но инвариантного смысла это утверждение не имеет. Дело в том, что сама система (7.15), как и система (7.16), не имеет инвариантного смысла, а инвариантный смысл эти системы имеют в сочетании с системой (6.1). Если же точка w движется не по траектории системы (6.1), а по несколько иной кривой L: $w = \hat{w}(t)$, то к (7.15) или к (7.16) надо добавить не (6.1), а уравнения вида

$$\dot{w} = \frac{d}{dt}\hat{w}(t). \tag{7.19}$$

Но комбинация (7.15) & (7.19), в отличие от комбинации (7.15) & (6.1), не имеет инвариантного смысла.

Само по себе это еще не так плохо. Мы ведь можем сказать, что системы (S) & (7.19) и (7.15) & (7.16) & (6.1) имеют инвариантный смысл — их правые части являются касательными векторами к многообразию $\mathfrak{V}$. Разность между правой частью системы (S) & (7.19) и правой частью системы (7.15) & (7.16) & (6.1) есть, с некоторыми оговорками, $o(v) + O(\varepsilon_2) + O(\varepsilon_3)$. Однако хотелось бы иметь возможность написать «линейную и главную» (в некотором смысле) часть системы (S) & (7.19) в виде

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \frac{d}{dt}\hat{w}(t), \\ \dot{\xi} &= \hat{A}(w)\xi, \\ \dot{\eta} &= \hat{B}(w)\eta, \end{aligned} \tag{7.20}$$

т. е. в таком виде, чтобы уравнением для w было в точности уравнение (7.19), а не (6.1). Дело в том, что мы будем пользоваться матрицантом системы (7.20). Этот матрицант является некоторым линейным преобразованием

$$V^{m-1}_{\hat{w}(0)} \longrightarrow V^{m-1}_{\hat{w}(t)}. \tag{7.21}$$

Решение системы (S), начинающееся при $t = 0$ в точке $v \in \Pi(\hat{w}(0))$, через время t попадает в некоторую точку $v' \in \Pi(\hat{w}(t))$ (если только оно за это время не выходит из области определения системы (S), т. е. из окрестности кривой L, «заметаемой» площадками Π); рассмотрим отображение

$$\Pi(\hat{w}(0)) \longrightarrow \Pi(\hat{w}(t)), \tag{7.22}$$

переводящее v в v'. (Согласно сказанному, в действительности это отображение определено не на всей площадке Π, так что в (7.22) нарушено обычно принятое правило, согласно которому область определения отображения, обозначаемого стрелкой, совпадает с тем, что стоит слева от стрелки.) Мы будем пользоваться тем, что при небольших t отображение (7.22) в некотором смысле «близко» к линейному отображению (7.21). Очевидно, здесь существенно, что в системе (7.20) уравнения для w имеют в точности вид (7.19), а не (6.1). Матрицант же системы (7.15) & (7.16) (точнее, системы (7.15) & (7.16) & (6.1)) отображает пространство $V^{m-1}_{\hat{w}(0)}$ в пространство $V^{m-1}_{T^t\hat{w},0)}$, а не в $V^{m-1}_{\hat{w}(t)}$. В то же время, конечно, хотелось бы, чтобы система (7.20) была близка к системе (7.15) & (7.16) & (6.1).

Примем сокращенное обозначение

$$\hat{f}(w) = \left.\frac{d\hat{w}(t)}{dt}\right|_{\hat{w}(t) = w}.$$

Каким образом можно было бы перейти от системы (7.15) & (6.1) к системе

$$\dot{w} = \hat{f}(w), \quad \dot{\xi} = \hat{A}(w)\xi? \tag{7.23}$$

Правые части систем (7.15) & (6.1) и (7.23) суть вектора

$$(f(w),\ A(w)\xi) \text{ и } (\hat{f}(w),\ \hat{A}(w)\xi).$$

Эти вектора лежат в пространстве $R^{m+k}_{(w,\xi)}$. При проекции π (см. (6.20)) они переходят в вектора f и $\hat{f}$ соответственно, так что вектора $(f, A\xi)$ и $(\hat{f}, \hat{A}\xi)$ должны лежать в k-мерных подпространствах $\pi^{-1}f$ и $\pi^{-1}\hat{f}$ пространства $R^{m+k}_{(w,\xi)}$, которые параллельны один другому и пространству $jX^k_w =$

$= \pi^{-1}0$. Теперь можно вопрос, поставленный в начале этого абзаца, перефразировать так: каким образом, исходя из некоторого вектора пространства $\pi^{-1}f$, перейти к некоторому вектору пространства $\pi^{-1}\hat{f}$? По-видимому, единственный разумный способ состоит в том, чтобы спроектировать каким-то образом пространство $\pi^{-1}f$ на параллельное ему пространство $\pi^{-1}\hat{f}$. Так как a priori $\hat{f}$ может принимать различные значения (хотя и близкие к f), то для того, чтобы иметь единообразный способ проектирования, надо иметь некоторое выделенное m-мерное пространство $R^m_{(w,\xi)}$, трансверсальное к пространствам вида $\pi^{-1}\dot{w}$ (где $\dot{w} \in R^m_w$), т. е. пересекающее каждое из них ровно в одной точке, и производить проектирование параллельно $R^m_{(w,\xi)}$. Очевидно, можно считать, что $R^m_{(w,\xi)}$ проходит через нуль пространства $R^{m+k}_{(w,\xi)}$, так что $R^m_{(w,\xi)} \cap j\, X^k_w = 0$.

Вместо точной последовательности (6.20) мы теперь имеем разложение в прямую сумму

$$R^{m+k}_{(w,\xi)} = X^k_w \oplus R^m_{(w,\xi)} \tag{7.24}$$

и взаимно-однозначную проекцию

$$\pi \,|\, R^m_{(w,\xi)} : R^m_{(w,\xi)} \longrightarrow R^m_w .$$

Обозначим точку пространства $R^m_{(w,\xi)}$, проектирующуюся при проекции π в точку $\dot{w} \in R^m_w$, через

$$(\dot{w}, -\Gamma(w, \xi, \dot{w})). \tag{7.25}$$

(В принятой нами системе обозначений эта точка действительно имеет первую координату $\dot{w}$.) Γ зависит от $\dot{w}$ линейно (и однородно). Сейчас мы увидим, что для наших целей зависимость Γ от ξ тоже должна быть линейной (и однородной). В самом деле, при проектировании пространства $\pi^{-1} f$ на пространство $\pi^{-1} \hat{f}$ параллельно $R^m_{(w,\xi)}$ точка $(f, \dot{\xi})$ переходит в

$$(\hat{f},\ \dot{\xi} + \Gamma(w, \xi, f) - \Gamma(w, \xi, \hat{f})) = (\hat{f}, \dot{\xi} + \Gamma(w, \xi, f - \hat{f})).$$

Если мы хотим, чтобы вектор $(f, A\,\xi)$ переходил бы при этом в $(\hat{f}, \hat{A}\,\xi)$, то мы должны потребовать, чтобы было

$$\hat{A}(w)\,\xi = A(w)\,\xi + \Gamma(w, \xi, f - \hat{f}), \tag{7.26}$$

а для этого Γ действительно должно зависеть от ξ линейно. (Точнее говоря, в локальных координатах Γ должно линейно зависеть от ξ).

Билинейность $\Gamma(w, \xi, \dot{w})$ по $\xi, \dot{w}$ означает, что разложение (7.24) определяет некоторую связность в расслоении $\mathfrak{X}$; при параллельном перенесении согласно этой связности слои X^k_w отображаются линейно, а Γ играет роль, аналогичную роли символов Кристоффеля при параллельном перенесении в римановой геометрии.

Итак, чтобы перейти от (7.15) & (6.1) к (7.23), нужно воспользоваться некоторой связностью в векторном расслоении $\mathfrak{X}$. Известно, что связности всегда существуют, в том числе связности класса C^∞ (т. е. такие, у которых в локальных координатах коэффициенты Γ являются гладкими функциями класса C^∞). Впрочем, в данном случае нет необходимости ссылаться на этот общий факт: можно получить некоторую связность в $\mathfrak{X}$, исходя из какой-нибудь связности в $\mathfrak{R}$ (а существование связностей в $\mathfrak{R}$ известно из римановой геометрии).

Действительно, пусть $\overline{\Gamma}(w, \omega, \dot{w})$ — какая-нибудь связность в $\mathfrak{R}$. Обозначая касательное пространство в $\mathfrak{R}$ в точке (w, ω) через $R^{2m}_{(w,\omega)}$, имеем точную последовательность, аналогичную (6.20):

$$0 \to R^m_w \xrightarrow{j} R^{2m}_{(w,\,\omega)} \xrightarrow{\pi} R^m_w \to 0$$
$$j\omega = (0, \omega), \quad \pi(\dot{w}, \dot{\omega}) = \dot{w}. \tag{7.27}$$

Вложение $\hat{\varkappa} : \mathfrak{X} \subset \mathfrak{R}$, при котором точка (w, ξ) переходит в $(w, \hat{\varkappa}(w)\xi)$, порождает вложение касательных пространств

$$R^{-m+k}_{(w,\,\xi)} \subset R^{2m}_{(w,\,\hat{\varkappa}(w)\xi)}. \tag{7.28}$$

Чтобы перейти от

$$(\dot{w}, -\Gamma(w, \hat{\varkappa}(w)\xi, \dot{w})) \in R^{2m}_{(w,\,\hat{\varkappa}(w)\xi)}$$

к вектору (7.25) пространства $R^{m+k}_{(w,\,\xi)}$, надо спроектировать $R^{2m}_{(w,\,\hat{\varkappa}\xi)}$ на $R^{m+k}_{(w,\,\xi)}$. Это проектирование, которое мы обозначим через $P_{(w,\,\xi)}$, не должно менять $\dot{w}$, т. е. проектирование должно производиться вдоль какого-то $(l+1)$-мерного подпространства пространства jR^m_w; это $(l+1)$-мерное подпространство, конечно, должно быть трансверсально к jX^k_w. Такое пространство имеет вид jE^{l+1}, где E^{l+1} — $(l+1)$-мерное подпространство R^m_w, трансверсальное к X^k_w; мы выберем $E^{l+1} = E^{l+1}_w$ не зависящим от ξ. Например, можно за E^{l+1}_w взять $\hat{Y}^l_w \oplus Z^1_w$ или же (если гладкость векторного поля $f(w)$, порождающего Z^1_w, будет признана недостаточной) можно аппроксимировать поле f каким-нибудь полем $\check{f}$ класса C^∞, провести сквозь $\check{f}(w)$ прямую $\check{Z}^1_w$ и положить $E^{l+1}_w = \hat{Y}^1_w \oplus \check{Z}^1_w$. Непосредственно очевидно, что Γ, определенное по формуле

$$(\dot{w}, -\Gamma(w, \xi, \dot{w})) = P_{(w,\,\xi)}(\dot{w}, -\Gamma(w, \hat{\varkappa}(w)\xi, \dot{w})),$$

обладает всеми требуемыми свойствами, кроме, может быть, линейности по ξ; чтобы удостовериться в наличии и этого свойства, нужно проделать небольшое вычисление в локальных координатах.

А именно, обозначая проектирование R^m_w на X^k_w параллельно E^{l+1}_w через P_w, нужно выразить $P_{(w,\,\xi)}$ через P_w. Пусть $P_{(w,\,\xi)}(\dot{w}, \dot{\omega}) = (\dot{w}, \dot{\xi})$. При вложении (7.28) точка $(\dot{w}, \dot{\xi})$ переходит в точку

$$(\dot{w}, \hat{\varkappa}_w(w)\dot{w}\xi + \hat{\varkappa}(w)\dot{\xi}), \tag{7.29}$$

в чем легко убедиться, дифференцируя $(w, \hat{\varkappa}(w)\xi)$. (Я надеюсь, небрежная запись в (7.29) не смутит читателя.) Точка $(\dot{w}, \dot{\omega})$ может отличаться от (7.29) лишь на вектор вида $(0, e)$, где $e \in E^{l+1}_w$, т. е.

$$\hat{\varkappa}\dot{\xi} = \dot{\omega} - \hat{\varkappa}_w\dot{w}\xi + (0, e) \times \text{некоторое число}.$$

Иными словами,

$$\dot{\xi} = P_w(\dot{\omega} - \hat{\varkappa}_w\dot{w}\xi).$$

Стало быть,

$$P_{(w,\,\xi)}(\dot{w}, \dot{\omega}) = (\dot{w}, P_w(\dot{\omega} - \hat{\varkappa}_w\dot{w}\xi)).$$

Подставив сюда $\dot{\omega} = \overline{\Gamma}(\dot{w}, \hat{\varkappa}\xi, \dot{w})$, непосредственно убеждаемся в линейности Γ по ξ.

В дальнейшем везде, где надо, предполагается, что мы раз и навсегда выбрали некоторую (безразлично, какую именно) связность Γ.

Система (7.15), точнее, система (7.15) & (6.1), описывает поток $\{P(t, w)\}$ в $\mathfrak{X}$. Система (7.23) тоже описывает некоторый поток в некотором расслоении, сейчас я уточню, в каком именно. Если кривая L не имеет самопересечений, то этим расслоением является ограничение $\mathfrak{X}^L$ расслоения $\mathfrak{X}$ над кривой L.

Пока что для нас безразлично, является ли кривая L: $w = \hat{w}(t)$ замкнутой ($\hat{w}(t) \equiv \hat{w}(t+\tau)$) или незамкнутой (в последнем случае подразумевается, что t изменяется во всем интервале $-\infty < t < \infty$, иначе, конечно, не получим потока), хотя в лемме 13.1 речь идет о замкнутой кривой. В условиях леммы не предполагается, что L не имеет самопересечений. Однако если L и имеет самопересечения, то их можно устранить путем сколь угодно малой и сколь угодно гладкой деформации кривой L (ибо $\dim W^m \geqslant 3$). Вместо этого можно обозначить через L «абстрактную» кривую,—скажем, отрезок $[0, \tau]$ с отождествленными концами, если L замкнута, или всю вещественную ось, если L незамкнута,— рассмотреть отображение

$$\hat{w} : L \longrightarrow W^m, \qquad t \longrightarrow \hat{w}(t) \tag{7.30}$$

и принять за $\mathfrak{X}^L$ расслоение $\hat{w}^! \, \mathfrak{X}$, индуцированное над L отображением (7.30) и расслоением $\mathfrak{X} \to W^m$. Точки кривой L я буду обозначать теми же буквами w, w_1 и т. д., что и точки всего многообразия W^m. «Фазовая скорость» этих точек при движении согласно формуле $w = \hat{w}(t)$ уже раньше была обозначена через $\hat{f}(w)$. Система (7.23) по своей записи отличается от (7.15) & (6.1) только тем, что w обозначает не произвольную точку многообразия W^m, а произвольную точку кривой L, да еще «крышкой» над f и A.

Матрицант системы (7.23) обозначим через $\hat{P}(t, w)$, а матрицант системы

$$\dot{w} = \hat{f}(w), \qquad \dot{\eta} = \hat{B}(w)\,\eta$$

через $\hat{Q}(t, w)$. Любое решение $\xi(t)$ системы (7.23) с начальным значением $\xi(0) \equiv X_w^k$ имеет вид $\xi(t) = \hat{P}(t, w)\, \xi(0)$. Ясно, что преобразования $\{\hat{P}(t,w)\}$ и $\{\hat{Q}(t, w)\}$ образуют потоки в $\mathfrak{X}^L$ и $\mathfrak{Y}^L$ соответственно. Матрицанты систем (7.15) & (6.1) и (7.16) & (6.1) еще раньше были обозначены через $P(t, w)$ и $Q(t, w)$. В заключение настоящего параграфа приведем неравенства, которым удовлетворяют нормы матрицантов в используемой нами «ляпуновской» метрике.

Из (7.3) — (7.5) следует, что

$$\frac{d}{dt}|\tilde{T}^t \xi| \leqslant -a|\tilde{T}^t \xi|, \quad \frac{d}{dt}|\tilde{T}^t \eta| \geqslant a|\tilde{T}^t \eta| \qquad \text{при } t \geqslant 0, \tag{7.7}$$

где a — некоторое положительное число. Изменив, если потребуется, масштаб времени, мы вправе считать, что $a = 1$. А тогда отсюда вытекает, что

$$|P(t, w)| \leqslant e^{-t}, \quad |Q(-t, w)| \leqslant e^{-t} \quad \text{при } t \geqslant 0. \tag{7.31}$$

Покажем теперь, что если кривая L удовлетворяет (6.5) с достаточно малым ε_2, то

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}|\hat{P}(t,w)\,\xi| \leqslant -a|\hat{P}(t,w)\,\xi|, \\ \frac{d}{dt}|\hat{Q}(t,w)\,\eta| \geqslant a|\hat{Q}(t, w)\,\eta| \quad \text{при } t \geqslant 0. \end{gathered} \tag{7.32}$$

Как и выше, можно считать, что $a = 1$; тогда из (7.32) вытекает, что

$$|\hat{P}(t, w)| \leqslant e^{-t}, \quad |\hat{Q}(-t, w)| \leqslant e^{-t} \quad \text{при } t \geqslant 0. \tag{7.33}$$

Докажем, например, первое из неравенств (7.32). Зафиксируем какой-нибудь атлас расслоения $\mathfrak{X}$, состоящий из конечного числа карт

$$\{(U_\alpha, \psi_\alpha^k)\} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha, \varphi_{\alpha, w}^k)\}.$$

При $\xi \in X_w^k$, $w \in U_\alpha$ квадратичную форму $|\xi|^2$ можно с помощью локальных координат

$$\xi^\alpha = (\xi_1^\alpha, \ldots, \xi_k^\alpha) = \varphi_{\alpha, w}^k(\xi)$$

записать в виде

$$|\xi|^2 = \sum_{i,j=1}^{k} g_{ij}^\alpha(w)\, \xi_i^\alpha \xi_j^\alpha$$

или короче

$$|\xi|^2 = (g^\alpha(w)\, \xi^\alpha, \xi^\alpha).$$

По обычным правилам дифференцирования,

$$D_f |\xi|^2 = ((D_f g^\alpha)\, \xi^\alpha, \xi^\alpha) + 2\, (g^\alpha \xi^\alpha, D_f \xi^\alpha).$$

Здесь матрица $D_f g^\alpha(w)$ имеет своими коэффициентами производные $D_f g_{ij}^\alpha(w)$ функций $g_{ij}^\alpha(w)$ в силу системы (6.1), а вектор $D_f \xi^\alpha$ совпадает с правой частью системы (7.15), записанной в локальных координатах $\xi^\alpha = \varphi_{\alpha, w}^k$. Аналогичную формулу можно написать для $D_{\hat f}|\xi|^2$, поэтому

$$D_{\hat f} |\xi|^2 - D_f |\xi|^2 = ((D_{\hat f} g^\alpha - D_f g^\alpha)\xi^\alpha, \xi^\alpha) + 2\, (g^\alpha \xi^\alpha, D_{\hat f} \xi^\alpha - D_f \xi^\alpha),$$

а значит,

$$|D_{\hat f} |\xi|^2 - D_f |\xi|^2| \leqslant |D_{\hat f} g^\alpha - D_f g^\alpha| \cdot |\xi^\alpha|^2 + 2 |g^\alpha| \cdot |\xi^\alpha| \cdot |D_{\hat f} \xi^\alpha - D_f \xi^\alpha|, \tag{7.34}$$

где нормы векторов и матриц в правой части означают, скажем, эвклидовы нормы в «арифметическом» пространстве. Так как

$$D_{\hat f} g_{ij}^\alpha - D_f g_{ij}^\alpha = \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial g_{ij}^\alpha(w)}{\partial w^s} (\hat f^s - f^s),$$

то ясно, что

$$|D_{\hat f} g^\alpha - D_f g^\alpha| \leqslant C\, |\hat f - f| \leqslant C \varepsilon_2, \tag{7.35}$$

где C — некоторая константа, которую можно считать одной и той же для всех карт нашего атласа. Далее, из (7.26) следует, что

$$D_{\hat f} \xi^\alpha - D_f \xi^\alpha = \Gamma(w, \xi, \hat f - f),$$

откуда в силу билинейности Γ по последним двум аргументам выводим, что

$$|D_{\hat f} \xi^\alpha - D_f \xi^\alpha| \leqslant C' |\xi| \varepsilon_2, \tag{7.36}$$

где C' — некоторая константа, которую можно считать одной и той же для всех карт нашего атласа. Из (7.34) — (7.36) следует, что

$$|D_f |\xi|^2 - D_{\hat f} |\xi|^2| \leqslant C'' |\xi| \varepsilon_2, \tag{7.37}$$

где C'' — некоторая константа. Но (7.7) (с $a = 1$) эквивалентно тому, что

$$D_f |\xi|^2 = 2 |\xi| D_f |\xi| \leqslant -2 |\xi|^2,$$

поэтому

$$D_{\hat f} |\xi|^2 \leqslant (-2 + C'' \varepsilon_2) |\xi|^2,$$

откуда и следует (7.32).

§ 8. Локальные сечения

Построим отображение $h : \mathfrak{R} \to W^m$ класса C^∞, переводящее (w, ω) в $h(w, \omega)$ и обладающее следующими свойствами:

$$h(w, 0) = \omega, \tag{8.1}$$

$$h_\omega(\omega, \ 0) = 1_{R^m_w}, \tag{8.2}$$

$$\rho(h(w, \omega), w) = |\omega| \text{ при } |\omega| \leqslant 1, \tag{8.3}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{ограничение отображения} \\ h(w, \cdot) : R^m_w \to W^m, \qquad \omega \to h(w, \omega) \\ \text{на единичном шаре } |\omega| < 1 \text{ пространства } R^m_w \text{ является диф-} \\ \text{феоморфизмом этого шара в пространство } W^m. \end{array}\right\} \tag{8.4}$$

В (8.3) и (8.4) предполагается, конечно, что выбран надлежащий масштаб длины. В (8.2) $h_\omega = dh \circ j$, где $dh : R^{2m}_{(w, 0)} \to R^m_w$ — дифференциал отображения h (через $R^{2m}_{(w, 0)}$ обозначается касательное пространство к $\mathfrak{R}$ в точке $(w, 0)$), а $j : R^m_w \to R^{2m}_{(w, 0)}$ порождено вложением $R^m_w \subset \mathfrak{R}$ аналогично тому, как это описано в § 6 для $\mathfrak{X}$. В локальных координатах (8.2) означает, что $\frac{\partial h_i}{\partial \omega_j} = \delta_{ij}$. (Подразумевается, что используются естественные координаты в R^m_w, связанные с используемыми локальными координатами в W^m.) Хорошо известно, что в качестве h можно взять, например, экспоненциальное геодезическое отображение, соответствующее какой-нибудь римановой метрике класса C^∞ на W^m. При этом отображении точка (w, ω) переходит в точку $w(1)$, где $w(t)$ — геодезическая линия многообрази ^{m}, для которой $w(0) = w$ и $\dot{w}(0) = \omega$. Мы будем пользоваться «ляпуновской» метрикой.

Введем обозначения

$$X^k_\delta(w) = \{x : x \in X^k_w, \ |x| \leqslant \delta\},$$

$$Y^l_\delta(w) = \{y : y \in Y^l_w, \ |y| \leqslant \delta\},$$

$$V^{m-1}_\delta(w) = X^k_\delta(w) \times Y^l_\delta(w),$$

$$\mathfrak{X}_\delta = \bigcup_w X^k_\delta(w) \subset \mathfrak{X}, \quad \mathfrak{Y}_\delta = \bigcup_w Y^l_\delta(w) \subset \mathfrak{Y},$$

$$\mathfrak{V}_\delta = \mathfrak{X}_\delta \oplus \mathfrak{Y}_\delta = \bigcup_w V^{m-1}_\delta(w) \subset \mathfrak{V} = \mathfrak{X} \oplus \mathfrak{Y}.$$

Таким образом, $\mathfrak{V}_\delta$ состоит из точек $(w, v) = (w, x, y)$, где $x \in X^k_w$, $y \in Y^l_w$ и $|x|$, $|y| \leqslant \delta$.

Из (8.2) следует, что при достаточном малом δ отображение

$$h \circ \mu \,|\, V^{m-1}_\delta(w)$$

при любом фиксированном w является C^∞-вложением, образ которого

$$\Pi_\delta(w) = h\mu(V^{m-1}_\delta(w))$$

является площадкой, ни в одной своей точке не касающейся векторного поля f. Сама площадка $\Pi_\delta(w)$ гладкая, а ее край имеет «углы». В своем центре w площадка $\Pi_\delta(w)$ имеет касательную плоскость $X^k_w \oplus Y^l_w$ или $\hat{X}^k_w \oplus \hat{Y}^l_w$ в зависимости от того, имеет ли место (6.7) или (6.8). В первом случае при изменении w площадка $\Pi_\delta(w)$ меняется непрерывно, а при изменении w вдоль траекторий системы (6.1) — даже гладко. Во втором случае $\Pi_\delta(w)$ гладко зависит от w. Впредь мы будем считать δ, ε_1, ε_2, и ε_3 настолько малыми, что при выполнении (6.4), (6.5) и (6.27) ни одна из площадок $\Pi_\delta(w)$ ни в одной своей точке не касается ни одной траектории системы (6.2) и ни одной кривой L.

Пусть L — произвольная гладкая кривая $w = \hat{w}(t)$, удовлетворяющая (6.5), и пусть $\hat{w}(0) = w_0$. Обозначим через I дугу кривой L, состоящую из точек вида $\hat{w}(t)$, $|t| \leqslant \delta$. Обозначим через $\mathfrak{V}_\delta^I = \mathfrak{X}_\delta^I \oplus \mathfrak{Y}_\delta^I$ ограничение расслоения $\mathfrak{V}_\delta \to W^m$ над I. Разумеется, каждое $\mathfrak{V}_\delta^I$ диффеоморфно прямому произведению $V_\delta^{m-1}(w_0) \times I$.

Лемма 8.1. *Существуют также $\delta_0 > 0$ (изменив, если надо, масштаб длины, можно считать, что $\delta_0 = 1$) и $\varepsilon_3 > 0$, что при всех положительных $\delta < \delta_0$ справедливо следующее:*

а) *Пусть поле V_w^{m-1} определяется с помощью* (6.7), *т. е. $\mu = (\varkappa, \lambda)$. Примем за L траекторию системы* (6.1), *проходящую при $t = 0$ через точку w_0. Тогда отображение*

$$h\mu \,|\, \mathfrak{V}_\delta^I : \mathfrak{V}_\delta^I \to W^m$$

является диффеоморфизмом многообразия $\mathfrak{V}_\delta^I$ в многообразие W^m, причем образ

$$h\mu(\mathfrak{V}_\delta^I) = \bigcup_{|t| \leqslant \delta} \Pi_\delta(T^t w_0)$$

целиком содержит внутри себя $\frac{2}{3}$ δ-окрестность точки w_0.

б) *Пусть $\hat{\varkappa}$ и $\hat{\lambda}$ удовлетворяют* (6.27), *а поле V_w^{m-1} определяется с помощью* (6.8), *т. е. $\mu = (\hat{\varkappa}, \hat{\lambda})$. Существует такое $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\hat{\varkappa}, \hat{\lambda})$, что если кривая L удовлетворяет* (6.5), *то отображение*

$$h\mu \,|\, \mathfrak{V}_\delta^I : \mathfrak{V}_\delta^I \to W^m$$

является диффеоморфизмом многообразия $\mathfrak{V}_\delta^I$ в многообразие W^m, причем образ

$$h\mu(\mathfrak{V}_\delta^I) = \bigcup_{|t| \leqslant \delta} \Pi_\delta(\hat{w}(t))$$

целиком содержит внутри себя $\frac{2}{3}$ δ-окрестность точки w_0.

В таком случае мы будем говорить, что площадки Π_δ образуют *трубчатую окрестность кривой L.*

Доказательство. Ради краткости обозначим вектор $\left.\frac{d\hat{w}(t)}{dt}\right|_{t=0}$ через $\hat{f}$, как мы это уже делали. Введем также обозначения

$$h\mu \,|\, \mathfrak{V}_\delta^I = H,$$

$$h(w_0, \cdot)\,|\,\{\omega : |\omega| \leqslant 1,\ \omega \in R_{w_0}^m\} = H_1.$$

Любое $\omega \in R_{w_0}^m$ можно представить в виде

$\omega = \mu(w_0)\, \upsilon + \hat{f}\tau$, $\upsilon \in V_{w_0}^{m-1}$, τ — число, поэтому отображение

$$(\mu, \hat{f}) : V_{w_0}^{m-1} \oplus R^1 \longrightarrow R_{w_0}^m,$$

$$(\mu, \hat{f})\left(\frac{\upsilon}{\tau}\right) = \mu(w_0)\, \upsilon + \hat{f}\tau$$

является изоморфизмом. Рассмотрим композицию

$$\mathfrak{V}_\delta^I \xrightarrow{H} W^m \xrightarrow{H_1^{-1}} R_{w_0}^m \xrightarrow{(\mu, \hat{f})^{-1}} V_{w_0}^{m-1} \oplus R^1.$$

Ясно, что при достаточно малых δ_0 и ε_2 эта композиция определена (образ H содержится в 1-окрестности точки w_0).

Зафиксируем какой-нибудь атлас многообразия W^m, состоящий из конечного числа карт $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$. Предполагая δ_0 и ε_2 достаточно малыми, мы вправе считать, что каждая дуга I, удовлетворяющая условиям доказываемой леммы, целиком содержится в некоторой координатной окрестности U_α. Векторные поля, с помощью которых вводятся локальные координаты в $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$, можно считать ортонормированными в используемой метрике. Тогда каждая точка $\mathfrak{V}_\delta^I$ имеет координаты

$$(t, v) = (t, x, y) = (t, x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l),$$

где $|t| \leqslant \delta\, |x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_k^2} \leqslant \delta$, $|y| = \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_l^2} \leqslant \delta$.

Отображение H имеет вид

$$w = H(v, t) = h(\hat{w}(t), \mu(\hat{w}(t))\, v).$$

Рассмотрим дифференциал этого отображения, т. е. матрицу $\frac{\partial H(v, t)}{\partial (v, t)}$. Ее первые $m - 1$ столбцов имеют вид

$$h_\omega(\hat{w}(t), \mu'(\hat{w}(t))\, v)\, \mu'\hat{w}(t)), \tag{8.5}$$

а последний равен

$$h_w(\hat{w}(t), \mu(\hat{w}(t))\, v) \frac{d\hat{w}(t)}{dt} + h_\omega(\hat{w}(t), \mu(\hat{w}(t))\, v) \frac{d\mu(\hat{w}(t))}{dt} v. \tag{8.6}$$

Если кривая L является траекторией системы (6.1) и $\mu = (\varkappa, \lambda)$, то величина выражения

$$\frac{d\mu(\hat{w}(t))}{dt} = D_f \mu(\hat{w}(t))$$

равномерно оценивается сверху некоторой константой C_1. В противном же случае пишем, пользуясь тем, что $\mu = (\hat{\varkappa}, \hat{\lambda})$ — гладкая функция своих аргументов:

$$\frac{d\mu(\hat{w}(t))}{dt} = D_f \mu'\hat{w}(t)) - \frac{d\mu(\hat{w}(t))}{dw}\left[f(\hat{w}(t)) - \frac{d\hat{w}(t)}{dt}\right]$$

(коль скоро карта фиксирована, нетензорный характер записи не имеет значения). Следовательно, имеем оценку вида

$$\left|\frac{d\mu(\hat{w}(t))}{dt}\right| < C_2(\hat{\varkappa}, \hat{\lambda})\, \varepsilon_2 + C_1,$$

которой можно пользоваться и в том случае, когда $\hat{w}(t) = T^t w_0$ и $\mu = (\varkappa, \lambda)$, считая, что в этом случае $C_2 \varepsilon_2 = 0$. Остальные члены в (8.5) и (8.6) не вызывают никаких затруднений, и мы получаем

$$\frac{\partial H(v, t)}{\partial (v, t)} = \left(\mu(\hat{w}(t)), \frac{d\hat{w}(t)}{dt}\right) + O(v) + C_2(\hat{\varkappa}, \hat{\lambda})\, \varepsilon_2\, O(v). \tag{8.7}$$

Здесь и ниже $O(v)$ служит общим обозначением для величин, удовлетворяющим оценкам вида $|O(v)| \leqslant C\,|v|$, где константу C можно выбрать не зависящей от v ($|v| \leqslant \delta_0$) и от w_0 (напоминаю, что каждой точке w_0 сопоставлена некоторая карта $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ — одна из нескольких карт, составляющих используемый атлас многообразия W^m,— и что рассуждения, связанные с w_0, проводятся в этой карте). Заметим также, что если $w = H(v, t)$, то

$$\rho(w, w_0) = O(v) + O(t). \tag{8.8}$$

Напишем теперь дифференциал отображения

$$H_1(\mu, \hat{f}) : (v, \tau) \to h(w_0, \mu(w_0)\, v + \hat{f}\, \tau).$$

Так как

$$h_\omega(w_0, \mu(w_0)\upsilon + \hat{f}\tau) = 1_{R^m_{w_0}} + O(\upsilon) + O(\tau),$$

то

$$\frac{\partial H_1(\mu, \hat{f})(\upsilon, \tau)}{\partial(\upsilon, \tau)} = (\mu(w_0), \hat{f}) + O(\upsilon) + O(\tau). \tag{8.9}$$

Далее, если $w = (\mu, \hat{f})H_1(\upsilon, \tau)$, то

$$|\upsilon| + |\tau| = O(\rho(w, w_0)). \tag{8.10}$$

Из (8.7) — (8.10) следует, что

$$\frac{\partial(\mu, \hat{f})^{-1} H_1^{-1} H(v, t)}{\partial(v, t)} =$$

$$= (\mu(w_0), \hat{f})^{-1}\left(\mu(\hat{w}(t)), \frac{d\hat{w}(t)}{dt}\right) + O(v) + O(t) + C_2(\hat{\varkappa}, \hat{\lambda})\varepsilon_2 O(v).$$

Но

$$|\mu(\hat{w}(t)) - \mu(w_0)| < (C_1 + C_2\varepsilon_2)|t|,$$

$$\left|\frac{d\hat{w}(t)}{dt} - \hat{f}\right| < \Omega(t) + 2\varepsilon_2$$

(здесь и далее в аналогичных ситуациях $\Omega(\cdot)$ служит общим обозначением для величин, стремящихся к нулю, когда их аргумент стремится к нулю, причем $\Omega(\cdot)$, входящие в различного рода неравенства и оценки, всегда выбираются монотонными по своему аргументу), поэтому

$$\frac{\partial(\mu, \hat{f})^{-1} H_1^{-1} H(v, t)}{\partial(v, t)} =$$

$$= 1_{(v,t)} + \Omega(t) + O(v) + C_2(\hat{\varkappa}, \hat{\lambda})\varepsilon_2 [O(v) + O(\varepsilon_2) + O(t)].$$

Выберем $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\hat{\varkappa}, \hat{\lambda})$ столь малым, чтобы, скажем, было $C_2\varepsilon_2 < 1$. Тогда окончательно можно написать, что

$$\frac{\partial(\mu, \hat{f})^{-1} H_1^{-1} H(v, t)}{\partial(v, t)} = 1_{(v,t)} + \Omega(\delta) + O(\varepsilon_2) \tag{8.11}$$

(ибо $|t|, |x|, |y| \leqslant \delta$ в $\mathfrak{V}^l_\delta$).

С помощью (8.11) мы вскоре докажем, что *при δ, не превосходящем некоторого δ_0, отображение*

$$(\mu, \hat{f})^{-1} H_1^{-1} H : \mathfrak{V}^l_\delta \to V^{m-1}_{w_0} \oplus R^1$$

является диффеоморфизмом многообразия $\mathfrak{V}^l_\delta$ в эвклидово пространство $V^{m-1}_{w_0} \oplus R^1$, причем образ $\mathfrak{V}^l_\delta$ целиком содержит множество точек

$$|\xi|^2 + |\eta|^2 + |\tau|^2 \leqslant \frac{8}{9}\delta^2. \tag{8.12}$$

Отсюда уже нетрудно вывести и утверждения леммы. Действительно, отображение $(\mu, \hat{f})$, равно как и H_1 в рассматриваемой области, являются диффеоморфизмами, поэтому из того, что $(\mu, \hat{f})^{-1} H_1^{-1} H$ — диффеоморфизм, следует, что H — диффеоморфизм. Отображение H_1^{-1}, обратное к геодезическому отображению $h(w_0, \cdot)$, переводит $\frac{2}{3}\delta$-окрестность точки w_0 в $\frac{2}{3}\delta$-окрестность начала координат в $R^m_{w_0}$, а из (7.2) видно, что отображение $(\mu, \hat{f})^{-1}$ переводит шар

$$|\omega|^2 \leqslant \frac{4}{9}\delta^2 \; (\omega = \hat{\varkappa}\xi + \hat{\lambda}\eta + \hat{f}\tau)$$

внутрь шара (8.12) в пространстве $V_{w_0}^{m-1} \oplus R'$. (Слово «внутрь» употреблено здесь не в строгом смысле.)

Итак, докажем выделенные курсивом утверждения предыдущего абзаца. Мы должны проверить, что δ_0, о котором там говорилось, зависит только от функции $\Omega(\delta)$, фигурирующей в (8.11). Для этого надо просто повторить применительно к нашему случаю некоторые рассуждения из доказательства теоремы о неявной функции.

Точки $\mathfrak{B}_\delta^{\mathrm{I}}$ и $V_{w_0}^{m-1} \oplus R^1$ имеют своими координатами тройки (x, y, t), (ξ, η, τ); ради краткости обозначим такую тройку через u, а отображение $(\mu, \hat{f})^{-1} H_1^{-1} H$ — через $\varphi(u)$. Это гладкое отображение, определенное в некоторой окрестности начала координат, скажем в области $|u| < \delta_1$, и переводящее начало координат в начало координат. Норму удобно выбрать в виде

$$|u|^2 = |x|^2 + |y|^2 + t^2.$$

Условие (8.11) означает, что при $|u| < \delta_1$

$$|\varphi_u(u) - 1| < \Omega(|u|) + O(\varepsilon_2) \tag{8.13}$$

(1 — единичная матрица). Положим еще $o(\delta) = \delta\,\Omega(\delta)$.

Из теоремы о неявных функциях, конечно, следует, что локально φ является диффеоморфизмом. Покажем, что существует такое δ_2, что ограничение φ на δ_2-окрестность начала координат является диффеоморфизмом, т. е. при $|u|, |u'| \leqslant \delta_2$ и $u \neq u'$

$$\varphi(u) \neq \varphi(u').$$

Действительно, из (8.13) и из $\varphi(0) = 0$ следует, что

$$\varphi(u) = u + \psi(u),$$

где

$$\begin{aligned} |\psi(u)| &< o(|u|) + O(\varepsilon_2)\,|u|, \\ |\psi_u(u)| &< \Omega(|u|) + O(\varepsilon_2). \end{aligned} \tag{8.14}$$

Поэтому при $|u|, |u'| \leqslant \delta_2$, переписав равенство $\varphi(u) = \varphi(u')$ в виде

$$u - u' = \psi(u') - \psi(u),$$

получаем

$$|u - u'| = |\psi_u(\text{в промежуточной точке})\,(u' - u)| \leqslant \\ \leqslant [\Omega(\delta_2) + O(\varepsilon_2)]\,|u - u'|,$$

что при $\Omega(\delta_2) < \frac{1}{2}$ и $O(\varepsilon_2) < \frac{1}{2}$ возможно лишь, когда $u - u' = 0$.

Ясно, что $\mathfrak{B}_\delta^I$ содержится в $\sqrt{3}\,\delta$-окрестности начала координат: если $|x|, |y|, |t| \leqslant \delta$, то

$$|x|^2 + |y|^2 + |t|^2 \leqslant 3\delta^2.$$

Поэтому в первом утверждении леммы, что $\varphi\,|\,\mathfrak{B}_\delta^I$ является диффеоморфизмом, можно за δ_0 взять $\delta_2 \diagdown \sqrt{3}$. Перейдем теперь ко второму утверждению, — что $\varphi(\mathfrak{B}_\delta^I)$ содержит шар (8.12). Для этого, повторяя обычные рассуждения, покажем, что любая достаточно близкая к началу координат точка u имеет прообраз u_1 при отображении φ, тоже близкий к началу, и оценим разность $|u - u_1|$.

Пусть δ_0 и ε_2 столь малы, что

$$2\delta_0 < \delta_1, \quad 2\Omega(2\delta_0) < \frac{1}{2}, \quad 2O(\varepsilon_2) < \frac{1}{2}.$$

Тогда для любой точки u, для которой $|u| \leqslant \delta_0$, имеется такая точка u_1, что $u = \varphi(u_1)$, причем

$$|u - u_1| \leqslant o(|2u|) + 2O(\varepsilon_2)|u|. \tag{8.15}$$

Действительно, будем искать u_1 в виде $u_1 = u - u_2$; тогда уравнение $u = \varphi(u_1)$ примет вид

$$u_2 = \psi(u - u_2).$$

Рассмотрим отображение

$$u_2 \to \psi(u - u_2). \tag{8.16}$$

Оно определено при всех u_2, для которых $|u_2| \leqslant o(2|u|) + 2O(\varepsilon_2)|u|$; в самом деле, при $|u_2| \leqslant o(2|u|) + 2O(\varepsilon_2)|u|$

$$|u - u_2| \leqslant |u| + o(2|u|) + 2O(\varepsilon_2)|u| =$$
$$= |u| + 2|u|[\Omega(2|u|) + O(\varepsilon_2)] \leqslant 2|u| \leqslant 2\delta_0 < \delta_1,$$

т. е. $u - u_2$ находится в области определения функции ψ. Отсюда же видно, что отображение (8.16) отображает шар $|u_2| \leqslant o(2|u|)$ в себя:

$$|\psi(u - u_2)| \leqslant o(|u - u_2|) + O(\varepsilon_2)|u - u_2| \leqslant o(2|u|) + 2O(\varepsilon_2)|u|.$$

Наконец, отображение (8.16) сжатое, ибо

$$|\psi(u - u_2) - \psi(u - u_2')| = |\psi_u \text{ (в промежуточной точке) } (u_2 - u_2')| \leqslant$$
$$\leqslant [\Omega(2|u|) + O(\varepsilon_2)]|u_2 - u_2'| < \frac{1}{2}|u_2 - u_2'|.$$

Из (8.15) следует, что если $|u| \leqslant \frac{2\sqrt{2}}{3}\delta$, то

$$|u_1| \leqslant |u| + |u - u_1| \leqslant \frac{2\sqrt{2}}{3}\delta + o\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\delta\right) + 2O(\varepsilon_2)\frac{2\sqrt{2}}{3}\delta.$$

Поэтому при достаточно малых δ_0, ε_2 обратное отображение $u \to u_1$ переводит шар (8.12) внутрь шара

$$|x|^2 + |y|^2 + t^2 \leqslant \frac{17}{18}\delta^2.$$

А для всех точек этого шара $|x|$, $|y|$, $|t| < \delta$, т. е. он лежит в $\mathfrak{B}_\delta^{\mathrm{I}}$. Тем самым лемма 8.1 доказана.

Сформулируем еще следующее совершенно очевидное утверждение.

Лемма 8.2. *Пусть имеются две гладкие кривые $w_1(t)$ и $w_2(t)$, которые обе заданы либо на полупрямой $0 \leqslant t < \infty$, либо на прямой $-\infty < t < \infty$ и которые параметризованы таким образом, что модули скоростей*

$$\left|\frac{d}{dt}w_1(t)\right|, \qquad \left|\frac{d}{dt}w_2(t)\right|$$

ограничены сверху и снизу положительными константами. Пусть площадки Π_δ образуют трубчатую окрестность первой кривой и пусть вторая кривая нигде не касается площадок Π_δ (ни в одной своей точке не касается ни одной из площадок, проходящих через эту точку). Пусть, наконец, $w_2(0) \in \Pi_\delta(w_1(0))$.

Тогда существуют такой интервал времени Δ, содержащий 0 и имеющий вид $[a, b]$, $[a, \infty)$, $(-\infty, a]$ или $(-\infty, \infty)$ (возможно, вырождающийся в одну точку 0), и такая гладкая функция $s(t)$, определенная на этом интервале, что

1) $s(0) = 0$; $w_2(t) \in \Pi_\delta(w_1(s(t)))$ *при* $t \in \Delta$.

2) *Если Δ' — связное подмножество числовой оси (т. е. какой-нибудь открытый, замкнутый или открытый с одной стороны и замкнутый с дру-*

гой стороны, ограниченный или неограниченный интервал), содержащее 0, *а* $\sigma(t)$ — *непрерывная функция, определенная на этом интервале и такая, что*

$$\sigma(0)=0;\ w_2(t)\in\Pi_\delta(w_1(\sigma(t)))\ \text{при}\ t\in\Delta',\quad \text{то}\ \Delta'\subset\Delta\ \text{и}\ \sigma(\cdot)=s(\cdot)\,|\,\Delta'.$$

Если точка $w_2(0)$ *лежит внутри площадки* $\Pi_\delta(w_1(0))$, *то* Δ *содержит некоторый интервал вида* $[0, \varepsilon]$ *или* $[-\varepsilon, \varepsilon]$ *в зависимости от того, определены ли* $w_1(t)$ *и* $w_2(t)$ *при* $0\leqslant t<\infty$ *или при* $-\infty<t<\infty$.

Пусть $\{S^t\}$ — поток, описываемый системой (6.2) с векторным полем g, удовлетворяющим условию (6.4) и, в частности, нигде не касающимся площадок П. Идея локальных сечений состоит в том, чтобы от динамической системы $\{S^t\}$ перейти к некоторой динамической системе $\{S_t\}$ в $\mathfrak{X}_\delta\oplus\mathfrak{Y}_\delta$. Система $\{S_t\}$ описывает поведение траекторий системы $\{S^t\}$ вблизи любых фиксированных траекторий системы $\{T^t\}$; таким образом, при переходе от $\{S^t\}$ к $\{S_t\}$ сохраняется некоторая информация о взаимном расположении различных траекторий систем $\{S^t\}$ и $\{T^t\}$, содержащаяся в уравнениях (6.2) и (6.1). Отбрасывается же содержащаяся в этих уравнениях ненужная информация о том, как при преобразованиях S^t, T^t две близкие точки сдвигаются друг относительно друга вперед и назад в направлении траекторий.

Наряду со сказанным имеется еще один случай, когда локальные сечения применяются в сходной, но все же иной обстановке, а именно, когда от динамической системы $\{T^t\}$ мы переходим к некоторой динамической системе $\{S_t\}$ в $\mathfrak{X}_\delta^L\oplus\mathfrak{Y}_\delta^L$. В этом случае система $\{S_t\}$ описывает поведение траекторий системы $\{T^t\}$ вблизи кривой L: $w=\hat{w}(t)$, удовлетворяющей условию (6.5). Чтобы не слишком усложнять изложение, рассмотрим этот случай несколько позднее.

Сперва мы построим не $\{S_t\}$, а другую динамическую систему $\{\Sigma_t\}$, имеющую те же траектории, но несколько другое время. Пусть $w'\in\Pi_\delta(w)$. Применим лемму 8.2 к $w_1(t)=T^t w$, $w_2(t)=S^t w'$. Интервал Δ и функция s, о которых говорится в этой лемме, зависят от w и w', поэтому будем писать $\Delta=\Delta(w, w')$, $s=s(t, w, w')$. По определению, Σ_t переводит точку $(w, x, y)\in\mathfrak{X}_\delta\oplus\mathfrak{Y}_\delta$ в точку (w_t, x_t, y_t), которая определяется следующим образом: пусть

$$w'=h(w,\ \varkappa(w)x+\lambda(w)y);$$

тогда

$$w_t=T^{s(t, w, w')}w$$

и

$$h(w_t,\ \varkappa(w_t)x_t+\lambda(w_t)y_t)=S^t w'.$$

Собственно говоря, $\{\Sigma_t\}$ не является динамической системой в обычном смысле этого слова, потому что $\Sigma_t(w, x, y)$ определено лишь при

$$t\in\Delta(w, x, y)=\Delta(w, h(w, \varkappa(w)x+\lambda(w)y)).$$

Мы увидим, что, вообще говоря, $\Delta\neq(-\infty, \infty)$, т. е. существуют точки, выходящие со временем из области определения системы $\{\Sigma_t\}$; дальнейшее движение таких точек не определено. Однако в области определения $\{\Sigma_t\}$ имеет место единственность и непрерывная зависимость от начальных значений. $\{\Sigma_t\}$ можно было бы назвать «частичной динамической системой», потому что Σ_t — не преобразования, а частичные преобразования (преобразования, области определения которых не совпадают со всем пространством $\mathfrak{X}_\delta\oplus\mathfrak{Y}_\delta$).

Система $\{\Sigma_t\}$ обладает следующими свойствами, которыми она однозначно определяется:

1) $\Sigma_t(w, x, y)$ определено при $t\in\Delta(w, x, y)$.

2) В области определения системы $\{\Sigma_t\}$

$$h \circ (\varkappa, \lambda) \circ \Sigma_t = S^t \circ h \circ (\varkappa, \lambda).$$

3) При проекции

$$\pi = {}^k\pi \oplus {}^l\pi : \mathfrak{X}_\delta \oplus \mathfrak{Y}_\delta \to W^m \qquad \pi(w, x, y) = w$$

(ориентированные) траектории системы $\{\Sigma_t\}$ проектируются в (ориентированные) траектории системы $\{T^t\}$, но скорость при этом, вообще говоря, не сохраняется.

Система $\{\Sigma_t\}$ описывается векторным полем $(\dot w, \dot x, \dot y)$ на $\mathfrak{X}_\delta \oplus \mathfrak{Y}_\delta$, которое можно определить, исходя из свойств 2), 3) этой системы. Применительно к $(\dot w, \dot x, \dot y)$ эти свойства означают следующее:

2′) При отображении $h \circ (\varkappa, \lambda)$ вектор $(\dot w, \dot x, \dot y)$ переходит в $g(h(w, \varkappa(w)x + \lambda(w)y))$, т. е.

$$\frac{d}{dt} h(w, \varkappa(w)x + \lambda(w)y) = g(h(w, \varkappa(w)x + \lambda(w)y)). \tag{8.17}$$

3′) При проекции $\pi = {}^k\pi \oplus {}^l\pi$ вектор $(\dot w, \dot x, \dot y)$ проектируется в вектор, имеющий то же направление, что и $f(w)$, т. е.

$$\dot w = v(w, x, y) f(w),$$

где v — некоторый скалярный множитель (который можно рассматривать как последнюю координату в $\mathfrak{Z}$).

Из 3′) следует, что дифференцирование в силу системы $\{\Sigma_t\}$ функций, зависящих только от w, осуществляется с помощью оператора vD_f. Левая часть (8.17)

$$\frac{d}{dt} h(w, \varkappa(w)x + \lambda(w)y) = h_w(w, \varkappa(w)x + \lambda(w)y)\, v f(w) +$$
$$+ h_\omega(w, \varkappa(w)x + \lambda(w)y)(vD_f\varkappa(w)\cdot x + vD_f\lambda(w)\cdot y) +$$
$$+ h_\omega(w, \varkappa(w)x + \lambda(w)y)(\varkappa(w)\dot x + \lambda(w)\dot y),$$

поэтому (8.17) означает, что

$$M(w, x, y)\begin{pmatrix} \dot x \\ \dot y \\ v \end{pmatrix} = g(h(w, \varkappa(w)x + \lambda(w)y)), \tag{8.18}$$

где

$$M(w, x, y) = (M_1, M_2, M_3),$$
$$M_1 = h_\omega(w, \varkappa(w)x + \lambda(w)y)\,\varkappa(w),$$
$$M_2 = h_\omega(w, \varkappa(w)x + \lambda(w)y)\,\lambda(w),$$
$$M_3 = h_w(w, \varkappa(w)x + \lambda(w)y) f(w) +$$
$$+ h_\omega(w, \varkappa(w)x + \lambda(w)y)(D_f\varkappa(w)\cdot x + D_f\lambda(w)\cdot y).$$

Имеем (можно считать, что вычисления производятся в локальных координатах)

$$h_\omega(w, \varkappa(w)x + \lambda(w)y) = h_\omega(w, 0) + f_1(w, x, y) = 1_{R^m_w} + f_1(w, x, y),$$

где $f_1(w, 0, 0) = 0$;

$$h_w(w, \varkappa(w)x + \lambda(w)y) =$$
$$= h_w(w, 0) + \frac{d}{d\omega} h_w(w, \omega)\Big|_{\omega=0}\cdot(\varkappa x + \lambda y) + f_2(w, x, y) =$$
$$= 1_{R^m_w} + \frac{d}{dw} h_\omega(w, \omega)\Big|_{\omega=0}\cdot(\varkappa x + \lambda y) + f_2(w, x, y) =$$
$$= 1_{R^m_w} + \frac{d}{dw} 1_{R^m_w}\cdot(\varkappa x + \lambda y) + f_2(w, x, y) = 1_{R^m_w} + f_2(w, x, y),$$

где $f_2(w, 0, 0) = 0$, $f_{2x}(w, 0, 0) = 0$, $f_{2y}(w, 0, 0) = 0$. Поэтому

$$M_1 = \varkappa(w) + f_3(w, x, y),$$
$$M_2 = \lambda(w) + f_4(w, x, y),$$

где $f_3(w, 0, 0) = 0$, $f_4(w, 0, 0) = 0$;

$$M_3 = f(w) + D_f\varkappa(w)\cdot x + D_f\lambda(w)\cdot y + f_5(w, x, y),$$

где $f_5(w, 0, 0) = 0$, $f_{5x}(w, 0, 0) = 0$, $f_{5y}(w, 0, 0) = 0$.

Перепишем (8.18) в виде

$$M(w, x, y)\begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\\ v-1\end{pmatrix} = g(h(w, \varkappa(w)\, x + \lambda(w)\, y)) - M_3(w, x, y).$$

Правую часть можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned}&g(h(w, \varkappa(w)\, x + \lambda(w)\, y)) - M_3(w, x, y) =\\ &= g(h(w, \varkappa(w)\, x + \lambda(w)\, y)) - f(h(w, \varkappa(w)\, x + \lambda(w)\, y)) +\\ &+ f(h(w, \varkappa(w)\, x + \lambda(w)\, y)) - f(w) -\\ &- D_f\varkappa(w)\cdot x - D_f\lambda(w)\cdot y - f_5(w, x, y).\end{aligned}$$

Для

$$\begin{aligned}&f_6(w, x, y) =\\ &\qquad = g(h(w, \varkappa(w)\, x + \lambda(w)\, y)) - f(h(w, \varkappa(w)x + \lambda(w)\, y))\end{aligned}$$

можно согласно (6.4) написать оценку

$$|f_6|,\ |f_{6x}|,\ |f_{6y}| < O(\varepsilon_1)$$

(эта и другие аналогичные ей оценки, приводимые ниже, имеют место равномерно по $(w, x, y) \in \mathfrak{X}_\delta + \mathfrak{Y}_\delta$). Далее,

$$\begin{aligned}&f(h(w, \varkappa(w)\, x + \lambda(w)\, y)) = f(h(w, 0)) +\\ &\quad + f_w(h(w, 0))\, h_\omega(w, 0)\,(\varkappa(w)\, x + \lambda(w)\, y) + f_7(w, x, y) =\\ &\qquad\qquad = f(w) + f_w(w)\,(\varkappa(w)\, x + \lambda(w)\, y) + f_7(w, x, y),\end{aligned}$$

где $f_7(w, 0, 0) = 0$, $f_{7x}(w, 0, 0) = 0$, $f_{7y}(w, 0, 0) = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned}g - M_3 = f_w(w)\,(\varkappa(w)\, x + \lambda(w)\, y) - D_f\varkappa(w)\cdot x - D_f\lambda(w)\cdot y +\\ + f_7(w, x, y) + f_6(w, x, y) - f_5(w, x, y).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\\ v-1\end{pmatrix} &= (\varkappa(w), \lambda(w), f(w))^{-1}\,[f_w(w)\,(\varkappa(\omega), \lambda(w)) -\\ &- (D_f\varkappa(w), D_f\lambda(w))]\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + f_8(w, x, y) + f_9(w, x, y),\end{aligned}$$

где f_8 не зависит от g и

$$f_8(w, 0, 0) = 0,\ f_{8x}(w, 0, 0) = 0,\ f_{8y}(w, 0, 0) = 0,$$

а для f_9 имеет место оценка вида

$$|f_9(w, x, y)|,\ |f_{9x}(w, x, y)|,\ |f_{9y}(w, x, y)| < O(\varepsilon_1).$$

Наконец, с помощью (7.18) получаем следующую систему, описывающую $\{\Sigma_t\}$:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= A(w)\, x + a(w, x, y), \\
\dot{y} &= B(w)\, y + b(w, x, y), \\
v &= 1 + c(w, x, y), \\
\dot{w} &= vf(w).
\end{aligned} \tag{8.19}
$$

Уравнения (8.19) имеют уже инвариантный смысл, не зависящий от локальных координат. Функции a, b, c непрерывны по своим аргументам (w, x, y) и имеют производные по x и y, тоже являющиеся непрерывными функциями (w, x, y), причем выполняются оценки следующего типа:

$$
\begin{gathered}
|a(w, x, y)| < o(|x| + |y|) + O(\varepsilon_1), \\
|a_x(w, x, y)|,\ |a_y(w, x, y)| < \Omega(|x| + |y|) + O(\varepsilon_1).
\end{gathered} \tag{8.20}
$$

Перейдем теперь от системы $\{\Sigma_t\}$ к системе $\{S_t\}$, которая определяется таким образом, чтобы она обладала следующими свойствами:

1) $S_t(w, x, y)$ определено при $t \in s(\Delta(w, x, y))$.

2) При отображении

$$h \circ (\varkappa, \lambda) : \mathfrak{X}_\delta \oplus \mathfrak{Y}_\delta \to W^m$$

(ориентированные) траектории системы $\{S_1\}$ переходят в (ориентированные) траектории системы $\{S^t\}$, но скорость при этом, вообще говоря, не сохраняется.

3) $\pi \circ S_t = T^t \circ \pi$.

Ясно, что система дифференциальных уравнений, описывающая $\{S_t\}$, получится, если правые части системы (8.19) разделить на v. Таким путем приходим к системе

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= A(w)\, x + a(w, x, y), \\
\dot{y} &= B(w)\, y + b(w, x, y), \\
\dot{w} &= f(w).
\end{aligned} \tag{8.21}
$$

Разумеется, функции a, b здесь не те же самые, что в (8.19), но для них точно так же справедливы оценки (8.20).

Замечание 8. 1. Мы не ввели римановой метрики в многообразие $\mathfrak{X} \oplus \mathfrak{Y}$, так что мы можем говорить о длине вектора, целиком лежащего в слое, но не о длине вектора, ведущего из одного слоя в (бесконечно близкий) другой слой. Несмотря на это, не только система (8. 21), но и неравенства (8. 20) для правых частей этой системы имеют инвариантный смысл, не зависящий от локальных координат. Действительно, замена координат в $\mathfrak{X} \oplus \mathfrak{Y}$, совместимая со структурой прямого произведения, имеет в понятных обозначениях вид

$$x = C(w)\,\xi, \quad y = D(w)\,\eta$$

(заменой координат для w мы не интересуемся). Первое уравнение системы (8.21) переходит в уравнение

$$C(w)\,\dot{\xi} + D_f C(w)\cdot\xi = A(w)\, C(w)\,\xi + a(w, C(w)\,\xi, D(w)\,\eta),$$

т. е.

$$\dot{\xi} = \mathrm{A}(w)\,\xi + \alpha(w, \xi, \eta),$$

где

$$
\begin{gathered}
\mathrm{A}(w) = C^{-1}(w)\,[A(w)\, C(w) - D_f C(w)], \\
\alpha(w, \xi, \eta) = C^{-1}(w)\, a(w, C(w)\,\xi, D(w)\,\eta).
\end{gathered}
$$

Преобразование a в α таково, каким должно быть преобразование векторного поля на X_w^k, касающегося X_w^k. (Напротив, преобразование A в A носит иной характер — оно такое же, что и для уравнений в вариациях, см. § 7.) Поскольку в слоях X_w^k и Y_w^l у нас есть метрика, то оценки типа (8.20) для a

и b имеют инвариантный смысл. Наглядно можно представлять себе, что при переходе от точки $x(t) \in X^k_{w(t)}$ к точке $x(t+dt) \in X^k_{w(t+dt)}$ смещение на adt происходит в слое $X^k_{w(t)}$, и лишь при добавлении $Axdt$ точка переходит из слоя $X^k_{w(t)}$ в слой $X^k_{w(t+dt)}$. Замечу, наконец, что для системы (8.19) ситуация сложнее. После замены координат x на ξ первое уравнение этой системы принимает вид

$$\dot{\xi} = C^{-1}(w)\,[A(w)\,C(w)\,\xi - vD_f C(w)\cdot\xi + a(w, C(w)\,\xi, D(w)\,\eta)],$$

и множитель $v = 1 + c(w, C(w)\,\xi, D(w)\,\eta)]$ «портит картину». Инвариантный смысл оценке (8.20) для этой системы можно придать лишь в том случае, когда все $\mathfrak{X}_\delta \oplus \mathfrak{Y}_\delta$ снабжены римановой метрикой.

$\{S_t\}$, как и $\{\Sigma_t\}$, является «частичной динамической системой». Удобно продолжить ее до настоящей динамической системы во всем $\mathfrak{X} \oplus \mathfrak{Y}$, чтобы не возникал вопрос об области определения того или иного преобразования. Для этого надо продолжить $a(w, x, y)$ и $b(w, x, y)$ с $\mathfrak{X}_\delta \oplus \mathfrak{Y}_\delta$ на все $\mathfrak{X} \oplus \mathfrak{Y}$, причем для целей настоящей работы желательно, чтобы a и b остались «малыми». Такое продолжение можно осуществить, не прибегая к теоремам Хестенеса и Уитни; для целей настоящей работы вполне пригоден простейший способ продолжения, который сейчас будет приведен. Этот способ связан с некоторой «жертвой» — с изменением значений a и b возле края $\mathfrak{X}_\delta \oplus \mathfrak{Y}_\delta$, скажем, значения a и b изменятся при $\frac{\delta}{2} < \max(|x|, |y|) \leqslant \delta$, но для нас это несущественно. Удобнее считать, что та область, в которой a и b остались неизменными, есть $\mathfrak{X}_\delta \oplus \mathfrak{Y}_\delta$, а изменение произошло в $\mathfrak{X}_{2\delta} \oplus \mathfrak{Y}_{2\delta} \setminus \mathfrak{X}_\delta \oplus \mathfrak{Y}_\delta$; иными словами, я уменьшаю значение δ в 2 раза, так что через 2δ теперь обозначается то, что раньше обозначалось через δ. Пусть функция $\varphi \in C^\infty$ такова, что $\varphi(r) = 1$ при $0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}$, $\varphi(r)$ убывает при $\frac{1}{2} < r < 1$ и $\varphi(r) = 0$ при $r > 1$. Рассмотрим

$$\bar{a}(w, x, y) = a(w, x, y)\,\varphi\left(\frac{|x|}{2\delta}\right)\varphi\left(\frac{|y|}{2\delta}\right),$$

$$\bar{b}(w, x, y) = b(w, x, y)\,\varphi\left(\frac{|x|}{2\delta}\right)\varphi\left(\frac{|y|}{2\delta}\right).$$

Ясно, что $|\bar{a}| \leqslant |a|$ и $|\bar{b}| \leqslant |b|$, производные же оцениваются следующим образом. Дифференцирование дает

$$\bar{a}_x = a_x\varphi\left(\frac{|x|}{2\delta}\right)\varphi\left(\frac{|y|}{2\delta}\right) + a\varphi'\left(\frac{|x|}{2\delta}\right)\frac{1}{2\delta}\,|x|_x\,\varphi\left(\frac{|y|}{2\delta}\right).$$

Первый член правой части не превосходит $|a_x|$, а во втором φ' и $|x|_x$ равномерно ограничены. Вне $\mathfrak{X}_{2\delta} \oplus \mathfrak{Y}_{2\delta}$, можно положить $\bar{a}$ и $\bar{b}$ тождественно равными нулю. Обозначая $\bar{a}$ и $\bar{b}$ снова через a и b, имеем окончательно

$$\begin{gathered} |a|,\ |b| \leqslant o(\delta) + O(\varepsilon_1), \\ |a_x|,\ |a_y|,\ |b_x|,\ |b_y| \leqslant \Omega(\delta) + \frac{1}{\delta}\,O(\varepsilon_1). \end{gathered} \tag{8.22}$$

Проведем теперь аналогичные рассуждения для того случая, когда рассматривается поведение траекторий системы (6.1) вблизи кривой $L: w = \hat{w}(t)$, удовлетворяющей условию (6.5). Пусть точка w лежит на кривой L, скажем $w = \hat{w}(t_0)$, а $w' \in \Pi_\delta(w)$. Применяя лемму 8.2 к $w_1(t) = w(t+t_0)$, $w_2(t) = T^t w'$, построим динамическую систему $\{\Sigma_t\}$ в $\mathfrak{X}^L_\delta \oplus \mathfrak{Y}^L_\delta$, обладающую следующими свойствами:

1) Если $h(w, \hat{\varkappa}(w)\,x + \hat{\lambda}(w)\,y) = w'$, то $\Sigma_t(w, x, y)$ определено при $t \in \Delta$, где Δ — тот интервал, о котором говорится в лемме 8.2.

2) В области определения системы $\{\Sigma_t\}$

$$h \circ (\hat{\varkappa}, \hat{\lambda}) \circ \Sigma_t = T^t \circ h \circ (\hat{\varkappa}, \hat{\lambda}).$$

3) При проекции

$$\pi = {}^k\pi \oplus {}^l\pi : \mathfrak{X}_\delta^L \oplus \mathfrak{Y}_\delta^L \to L$$

(ориентированные) траектории системы $\{\Sigma_t\}$ проектируются в (ориентированную) кривую L.

Векторное поле $(\dot{w}, \dot{x}, \dot{y})$ на $\mathfrak{X}_\delta^L \oplus \mathfrak{Y}_\delta^L$, описывающее систему $\{\Sigma_t\}$, имеет следующие свойства:

$$\frac{d}{dt} h\,(w,\ \hat{\varkappa}\,(w)\,x + \hat{\lambda}\,(w)\,y) = f\,(h\,(w,\ \hat{\varkappa}\,(w)\,x + \hat{\lambda}\,(w)\,y)), \qquad (8.23)$$

$$\dot{w} = v\,(w,\ x,\ y)\,\hat{f}\,(w), \qquad (8.24)$$

где, как уже говорилось раньше, $\hat{f} = \frac{d\hat{w}}{dt}$, а v — некоторый скалярный множитель.

Дальнейшие вычисления проводятся совершенно аналогично тому, как это делалось в предыдущем случае. Мы пользуемся локальными координатами. Сперва из (8.23) и (8 24) мы заключаем, что

$$M\,(w,\ x,\ y)\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ v - 1 \end{pmatrix} = $$

$$= f\,(h\,(w,\ \hat{\varkappa}\,(w)\,x + \hat{\lambda}\,(w)\,y)) - M_3\,(w,\ x,\ y), \qquad (8.25)$$

где

$$M = (M_1,\ M_2,\ M_3),$$

$$M_1 = h_\omega\,(w,\ \hat{\varkappa}\,(w)\ x + \hat{\lambda}\,(w)\,y)\,\hat{\varkappa}\,(w),$$

$$M_2 = h_\omega\,(w,\ \hat{\varkappa}\,(w)\,x + \hat{\lambda}\,(w)\,y)\,\hat{\lambda}\,(w),$$

$$M_3 = h_w\,(w,\ \hat{\varkappa}\ (w)\ \ x + \hat{\lambda}\,(w)\,y)\ \hat{f}\,(w) +$$

$$+ h_\omega\,(w, \hat{\varkappa}\ (w)\,x + \hat{\lambda}\,(w)\,y)\ (D_{\hat{f}}\hat{\varkappa}\ (w)\cdot x + D_{\hat{f}}\hat{\lambda}\,(w)\cdot y).$$

Здесь, как и раньше, имеем

$$h_\omega = 1_{R_w^m} + f_1\,(w,\ x,\ y),$$

$$h_w = 1_{R_w^m} + f_2\,(w,\ x,\ y),$$

где

$$f_1\,(w,\ 0,\ 0) = 0,\ f_2\,(w,\ 0,\ 0) = 0,\ f_{2x}\,(w,\ 0,\ 0) = 0,\ f_{2y}\,(w,\ 0,\ 0) = 0.$$

Значит,

$$M_1 = \hat{\varkappa}\,(w) + f_3\,(w,\ x,\ y),\ M_2 = \hat{\lambda}\,(w) + f_4\,(w,\ x,\ y),$$

где $f_3\,(w,\ 0,\ 0) = 0,\ f_4\,(w,\ 0,\ 0) = 0$,

а
$$M_3 = \hat{f}\,(w) + D_{\hat{f}}\ \hat{\varkappa}(w)\cdot x + D_{\hat{f}}\hat{\lambda}\,(w)\cdot y + f_5\,(w,\ x,\ y),$$

где

$$f_5\,(w,\ 0,\ 0) = 0,\ f_{5x}\,(w,\ 0,\ 0) = 0,\ f_{5y}\,(w,\ 0,\ 0) = 0.$$

Поэтому матрицу, стоящую в левой части (8.25), можно записать в виде

$$M = (\varkappa\ (w),\ \lambda\,(w),\ f\ (w)) + f_6\ (w,\ x,\ y) + f_7\,(w),$$

где $f_6\,(w,\ 0,\ 0) = 0$,

а
$$f_7\,(w) = (\hat{\varkappa}\,(w) - \varkappa\ (w),\ \ \hat{\lambda}\,(w) - \lambda\ (w),\ \hat{f}\ \ (w) - f\,(w)),$$

согласно (6.5) и (6.27), есть $O(\varepsilon_2) + O(\varepsilon_3)$. В правой же части (8.25) член

$$f(h(w, \hat{\varkappa}(w)x + \hat{\lambda}(w)y)) =$$
$$= f(w) + f_w(w)(\hat{\varkappa}(w)x + \hat{\lambda}(w)y) + f_8(w, x, y),$$

где $f_8(w, 0, 0) = 0$, $f_{8x}(w, 0, 0) = 0$, $f_{8y}(w, 0, 0) = 0$. Теперь правую часть (8.25) можно переписать так:

$$[f_w(w)(\hat{\varkappa}(w), \hat{\lambda}(w)) - (D_{\hat{f}}\hat{\varkappa}(w), D_{\hat{f}}\hat{\lambda}(w))]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} +$$
$$+ f(w) - \hat{f}(w) + f_8(w, x, y) - f_5(w, x, y).$$

Используя (6.5) и (6.27), заменим в квадратной скобке $\hat{\varkappa}$, $\hat{\lambda}$ на $\varkappa$, λ и $D_{\hat{f}}$ на D_f. Ошибка при замене $D_{\hat{f}}\hat{\varkappa}$ на $D_f\varkappa$ равна

$$|D_{\hat{f}}\hat{\varkappa} - D_f\varkappa| \leqslant |D_{\hat{f}}\hat{\varkappa} - D_f\hat{\varkappa}| + |D_f\hat{\varkappa} - D_f\varkappa| \leqslant C(\hat{\varkappa})\varepsilon_2 + O(\varepsilon_3).$$

Окончательно получаем, что правая часть (8.25) есть

$$[f_w(w)(\varkappa(w), \lambda(w)) - (D_f\varkappa(w), D_f\lambda(w))]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f_9(w, x, y),$$

где $|f_9(w, 0, 0)| < O(\varepsilon_2)$,

а $|f_{9x}(w, x, y)|$, $|f_{9y}(w, x, y)| < C(\hat{\varkappa}, \hat{\lambda})\varepsilon_2 + O(\varepsilon_3) + \Omega(|x| + |y|)$.

Так как $\hat{\varkappa}$, $\hat{\lambda}$ у нас фиксированы, то $C(\hat{\varkappa}, \hat{\lambda})\varepsilon_2$ есть просто некое $O(\varepsilon_2)$.

С помощью (7.18) получаем систему, описывающую $\{\Sigma_t\}$ и имеющую вид (8.19), только вместо $\dot{w} = v f(w)$ последним уравнением в данном случае служит $\dot{w} = v\hat{f}(w)$. В этой системе функции a, b, c непрерывны по своим аргументам (w, x, y) и имеют производные по x и y, тоже являющиеся непрерывными функциями (w, x, y), причем выполняются оценки следующего типа:

$$\begin{aligned} &|a(w, x, y)| < o(|x| + |y|) + O(\varepsilon_2) + O(\varepsilon_3)(|x| + |y|), \\ &|a_x(w, x, y)|, |a_y(w, x, y)| < \Omega(|x| + |y|) + O(\varepsilon_2) + O(\varepsilon_3). \end{aligned} \tag{8.26}$$

Как уже объяснялось в § 7, если мы хотим, чтобы «линейная часть» нашей системы имела инвариантный смысл, надо заменить $A(w)x$ членом

$$\hat{A}(w)x = A(w)x + \Gamma(w, x, f(w) - \hat{f}(w))$$

и аналогичную замену проделать с $B(w)y$. Заменяя в первых двух строчках системы (8.20) Ax и By на $\hat{A}x$ и $\hat{B}y$, мы должны одновременно вычесть из правых частей обеих строчек по Γ; мы обозначим $a - \Gamma$ и $b - \Gamma$ снова через a и b. Для новых a, b справедливы оценки того же вида (8.26), что и раньше так как в силу билинейности Γ и (6.5)

$$|\Gamma| < O(\varepsilon_2)(|x| + |y|).$$

Таким путем мы приходим к системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \hat{A}(w)x + a(w, x, y), \\ \dot{y} &= \hat{B}(w)y + b(w, x, y), \\ v &= 1 + c(w, x, y), \\ \dot{w} &= v\hat{f}(w). \end{aligned} \tag{8.27}$$

От системы $\{\Sigma_t\}$ перейдем к системе $\{S_t\}$, для чего, как и в предыдущем случае, правые части системы (8.27) надо разделить на v. Получим

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \hat{A}(w)\,x + a(w, x, y), \\ \dot{y} &= \hat{B}(w)\,y + b(w, x, y), \\ \dot{w} &= \hat{f}(w). \end{aligned} \tag{8.28}$$

Здесь a и b по-прежнему удовлетворяют неравенствам вида (8.26), причем теперь эти неравенства имеют инвариантный смысл (см. замечание 8.1). Наконец, продолжим «частичную динамическую систему» $\{S_t\}$, определенную пока что только в $\mathfrak{X}_\delta^L \oplus \mathfrak{Y}_\delta^L$, до настоящей динамической системы во всем $\mathfrak{X}^L \oplus \mathfrak{Y}^L$. Это можно сделать тем же способом, что и раньше. Функции a и b для этой системы удовлетворяют неравенствам

$$\begin{gathered} |a|,\ |b| < o(\delta) + O(\varepsilon_2) + O(\varepsilon_3\delta), \\ |a_x|,\ |a_y|,\ |b_x|,\ |b_y| < \Omega(\delta) + \frac{1}{\delta} O(\varepsilon_2) + O(\varepsilon_3), \end{gathered} \tag{8.29}$$

ибо оценка для самих a, b не меняется, а в оценку для производных нужно добавить еще член вида

$\frac{1}{\delta}$ (оценка для функции).

Преобразования S_t можно записать в виде

$$\begin{aligned} x &\to P(t, w)\,x + p(t, w, x, y), \\ y &\to Q(t, w)\,y + q(t, w, x, y), \\ w &\to T^t w \end{aligned} \tag{8.30}$$

или (в случае кривой L) в виде

$$\begin{aligned} x &\to \hat{P}(t, w)\,x + p(t, w, x, y), \\ y &\to \hat{Q}(t, w)\,y + q(t, w, x, y), \\ \hat{w}(s) &\to \hat{w}(t+s), \end{aligned} \tag{8.31}$$

где $P,\ Q,\ \hat{P},\ \hat{Q}$ — те же, что и в § 7. В частности, для $P,\ Q,\ \hat{P},\ \hat{Q}$ имеют место неравенства (7,31) и (7.32) (мы предполагаем, конечно, что кривая L удовлетворяет условию (6.5) с достаточно малым ε_2). Установим некоторые оценки для $p,\ q$.

Л е м м а 8.3. *Пусть в* (8.21) *или в* (8.28)

$$|a|, |b| \leqslant \varepsilon_0,\ |a_x|, |a_y|, |b_x|, |b_y| \leqslant \Delta_0. \tag{8.32}$$

Тогда в (8.30) *или в* (8.31) *при* $0 \leqslant t \leqslant 1$

$$|p|\,|q| \leqslant t\varepsilon;\ |p_x|, |p_y|, |q_x|, |q_y| \leqslant t\Delta, \tag{8.33}$$

где $\varepsilon \leqslant m\varepsilon_0$, $\Delta \leqslant m\Delta_0$; m — *некоторое положительное число, не зависящее от* a, b, ε_0 *и* Δ_0.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $S_t(w, x, y)$ через

$$(\overline{w}(t, w),\ \overline{x}(t, w, x, y),\ \overline{y}(t, w, x, y)),$$

а короче через $(\overline{w}(t), \overline{x}(t), \overline{y}(t))$ и будем для определенности говорить о системе (8.21) и преобразованиях (8.30). Сравним $\overline{y}(t)$ и $Q(t, w)\,y$. Для $\eta(t) = \overline{y}(t) - Q(t, w)\,y$ имеем уравнение

$$\dot{\eta}(t) = B(\overline{w}(t))\,\eta(t) + b(\overline{w}(t), \overline{x}(t), \overline{y}(t)); \quad \eta(0) = 0.$$

Отсюда

$$\eta(t) = Q(t, w)\int_0^t Q^{-1}(\tau, w)\, b(\overline{w}(\tau), \overline{x}(\tau), \overline{y}(\tau))\,d\tau =$$

$$= \int_0^t Q(t-\tau, \overline{w}(\tau))\, b(\overline{w}(\tau), \overline{x}(\tau), \overline{y}(\tau))\,d\tau,$$

ибо $Q(t, w) = Q(t-\tau, \bar{w}(\tau)) Q(\tau, w)$. Поэтому

$$|\eta(t)| \leqslant t \max_{0 \leqslant \tau \leqslant 1} |Q(\tau, w)| \sup_{(w, x, y)} |b(w, x, y)| \leqslant m_1 t \varepsilon_0,$$

где m_1 — некоторая положительная константа. Для $\xi(t) = \bar{x}(t) - P(t, w)x$ дело обстоит еще проще, ибо $|P(\tau, w)| < 1$ при $\tau > 0$ и поэтому $|\xi| < t\varepsilon_1$.

Это же рассуждение проходит и для системы (8.28) и преобразований (8.31), если соответствующая кривая L удовлетворяет условию (6.5) с достаточно малым ε_2, ибо тогда при $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ по-прежнему будет $|\hat{P}(\tau, w)| < 1$, $|\hat{Q}(\tau, w)| < m_1$, где константа m_1 не зависит от кривой L,—ведь в локальных координатах, соответствующих какому-нибудь конечному атласу многообразия W^m, нормы матриц $\hat{B}(w)$ в (8.28) равномерно ограничены.

Производные $\bar{x}_x$, $\bar{x}_y$, $\bar{y}_x$, $\bar{y}_y$ являются решениями уравнения в вариациях

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \bar{x}_x & \bar{x}_y \\ \bar{y}_x & \bar{y}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(\bar{w}(t)) & 0 \\ 0 & B(\bar{w}(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_x & \bar{x}_y \\ \bar{y}_x & \bar{y}_y \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} a_x(\bar{w}(t), \bar{x}(t), \bar{y}(t)) & a_y(\bar{w}(t), \bar{x}(t), \bar{y}(t)) \\ b_x(\bar{w}(t), \bar{x}(t), \bar{y}(t)) & b_y(\bar{w}(t), \bar{x}(t), \bar{y}(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_x & \bar{x}_y \\ \bar{y}_x & \bar{y}_y \end{pmatrix}$$

с начальными значениями

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_x & \bar{x}_y \\ \bar{y}_x & \bar{y}_y \end{pmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{pmatrix} 1_{X^k_w} & 0 \\ 0 & 1_{Y^l_w} \end{pmatrix}.$$

Отсюда прежде всего следует, что при $0 \leqslant t \leqslant 1$ эти четыре производные ограничены сверху некоторой константой. Поэтому в (8.34) второй член в правой части не превосходит $m_2\Delta_0$, где m_2 — некоторая константа. Теперь аналогично тому, как это было сделано выше для ξ и η, получается искомая оценка для

$$\begin{pmatrix} p_x & p_y \\ q_x & q_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_x & \bar{x}_y \\ \bar{y}_x & \bar{y}_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}.$$

Это же рассуждение проходит и для системы (8.28) и преобразований (8.31) (см. замечание, сделанное выше по поводу оценки для ξ и η).

Закончим этот параграф следующим очевидным замечанием.

Замечание 8.2. Пусть $w' \in \Pi(w)$, так что $w' = h\mu\bar{w}$, где

$$\bar{w} = (w, x, y) \in X^k_\delta(w) \times Y^l_\delta(w).$$

Тогда при $t \in \Delta(\bar{w})$

$$\Sigma_t \bar{w} = S_{s(t, w, w')}(\bar{w})$$

и

$$\frac{d}{dt} s(t, w, w') = 1 + c(\Sigma_t \bar{w}).$$

§ 9. Теорема Адамара — Перрона

Лемма 9.1 (теорема Адамара — Перрона). *Пусть*

$$\Delta < \frac{1}{10}, \quad \varepsilon < \min\left(\frac{1}{10}, \frac{\delta}{10}\right) \tag{9.1}$$

и пусть в (8.30) (*или, соответственно, в* (8.31)) p *и* q *удовлетворяют при* $0 \leqslant t \leqslant 1$ *неравенствам* (8.33). *Тогда по отношению к преобразованиям* S_t *точки* $\mathfrak{X}_\delta \oplus \mathfrak{Y}_\delta$ (*соответственно* $\mathfrak{X}^L_\delta \oplus \mathfrak{Y}^L_\delta$) *распадаются на три группы:*

1. *Точки* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, *для которых* $S_t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *выходит из* $\mathfrak{X}_\delta \oplus \mathfrak{Y}_\delta$ (*соответственно из* $\mathfrak{X}_\delta^L \oplus \mathfrak{Y}_\delta^L$) *как при* $t \to \infty$, *так и при* $t \to -\infty$.

2. *Точки* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, *для которых* $S_t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *выходит из* $\mathfrak{X}_\delta \oplus \mathfrak{Y}_\delta$ (*соответственно из* $\mathfrak{X}_\delta^L \oplus \mathfrak{Y}_\delta^L$) *при* $t \to -\infty$ и $S_t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathfrak{X}_\delta \oplus \mathfrak{Y}_\delta$ $\left(\text{\textit{соответственно}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \in \mathfrak{X}_\delta^L \oplus \mathfrak{Y}_\delta^L\right)$ *при всех* $t > 0$. *Эти точки образуют некоторое* $(m + k)$*-мерное многообразие* $\mathfrak{M}^{m+k}$ (*соответственно* $(k + 1)$*-мерное многообразие* $\mathfrak{M}^{k+1}$), *являющееся графиком некоторой функции* $y = \varphi(w, x)$, *которая непрерывна по* (w, x) *и при фиксированном* w *гладко зависит от* x, *причем* $|\varphi| \leqslant \varepsilon$, $|\varphi_x| \leqslant \Delta$.

3. *Точки* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, *для которых* $S_t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *выходит из* $\mathfrak{X}_\delta \oplus \mathfrak{Y}_\delta$ (*соответственно из* $\mathfrak{X}_\delta^L \oplus \mathfrak{Y}_\delta^L$) *при* $t \to +\infty$ и $S_t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathfrak{X}_\delta \oplus \mathfrak{Y}_\delta$ $\left(\text{\textit{соответственно}}\ S_t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \in \mathfrak{X}_\delta^L \oplus \mathfrak{Y}_\delta^L\right)$ *при всех* $t < 0$. *Эти точки образуют некоторое* $(m + l)$*-мерное многообразие* $\mathfrak{N}^{m+l}$ (*соответственно* $(l + 1)$*-мерное многообразие* $\mathfrak{N}^{l+1}$), *являющееся графиком некоторой функции* $x = \psi(w, y)$, *которая непрерывна по* (w, y) *и при фиксированном* w *гладко зависит от* y, *причем* $|\psi| \leqslant \varepsilon$, $|\psi_y| \leqslant \Delta$.

Доказательство теоремы Адамара — Перрона будет проведено для преобразований (8.30) в $\mathfrak{X} \oplus \mathfrak{Y}$. Для преобразований (8.31) в $\mathfrak{X}^L \oplus \mathfrak{Y}^L$ доказательство в случае замкнутой кривой L остается дословно тем же самым, тогда как в случае незамкнутой кривой из-за ее некомпактности в доказательство дифференцируемости φ и ψ нужно было бы внести небольшое добавление. Последнее вкратце отмечено в соответствующем месте доказательства, но подробно останавливаться на этом я не стал, ибо для моих целей нужны только замкнутые кривые L.

Формулировка теоремы Адамара — Перрона такова, что безразлично, рассматривать ли $\{S_t\}$ как «частичную динамическую систему» в $\mathfrak{X}_\delta \oplus \mathfrak{Y}_\delta$ или же как динамическую систему в $\mathfrak{X} \oplus \mathfrak{Y}$. В доказательстве этой теоремы удобно выделить несколько отдельных этапов и оформить их в виде самостоятельных лемм. В этих леммах преобразования S_t рассматриваются как определенные во всем $\mathfrak{X} \oplus \mathfrak{Y}$.

Лемма 9.2. *Пусть*

$$\varepsilon, \Delta < 0,1 \tag{9.2}$$

и пусть в (8.30) p *и* q *удовлетворяют при* $0 \leqslant t \leqslant 1$ *неравенствам* (8.33). *Тогда существует непрерывная функция* $y = \varphi(w, x)$, *определенная при всех* $(w, x) \in \mathfrak{X}$ *и такая, что ее график* (*который обозначается через* $\mathfrak{M}^{m+k}$) *инвариантен относительно преобразований* S_t. *Существует также непрерывная функция* $x = \psi(w, y)$, *определенная при всех* $(w, y) \in \mathfrak{Y}$ *и такая, что ее график* (*который обозначается через* $\mathfrak{N}^{m+l}$) *инвариантен относительно преобразований* S_t.

Доказательство. Очевидно, что при изменении знака времени x и y меняются местами, поэтому достаточно рассмотреть вопрос о $\varphi(w, x)$. Инвариантность графика $\mathfrak{M}^{m+k}$ функции $y = \varphi(w, x)$ означает, что

$$Q(t, w)\,\varphi(w, x) + q(t, w, x, \varphi(w, x)) = \varphi(T^t w, P(t, w)\,x + p(t, w, x, \varphi(w, x))) \tag{9.3}$$

при всех t, w, x. Поскольку $\{S_t\}$ — группа, то соотношение (9.3) выполняется при всех t в том случае, когда оно выполняется при всех $t \in [0,1]$.

(9.3) эквивалентно соотношению

$$\varphi(w, x) = Q^{-1}(t, w)\,\varphi(T^t w, P(t, w)\,x + p(t, w, x, \varphi(w, x))) - \\ - Q^{-1}(t, w)\,q(t, w, x, \varphi(w, x)).$$

Существование непрерывной функции φ, удолетворяющей этому соотношению, легко доказывается с помощью последовательных приближений, что сейчас и будет проделано.

Рассмотрим в пространстве всех непрерывных ограниченных функций $y = f(w, x)$ семейство преобразований $\mathfrak{T}_t$, переводящих функцию $f(w, x)$ в функцию

$$(\mathfrak{T}_t f)(w, x) = Q^{-1}(t, w)\,f(T^t w,\ P(t, w)\,x + p(t, w, x, f(w, x))) - \\ - Q^{-1}(t, w)\,q(t, w, x, f(w, x)). \qquad (9.4)$$

Обозначим через $D_{\varepsilon, \Delta}$ совокупность непрерывных функций $f(w, x)$, которые при фиксированном w гладко зависят от x и удовлетворяют условиям

$$\|f\|_{C^0} \leqslant \varepsilon, \quad \|f_x\|_{C^0} \leqslant \Delta. \qquad (9.5)$$

Замыкание $D_{\varepsilon, \Delta}$ в пространстве непрерывных ограниченных функций состоит из всех непрерывных функций, удовлетворяющих условиям

$$\|f\|_{C_0} \leqslant \varepsilon, \\ |f(w, x') - f(w, x)| \leqslant \Delta\,|x - x'|. \qquad (9.6)$$

Совокупность $\overline{D}_{\varepsilon, \Delta}$ таких функций является полным метрическим пространством с метрикой $\|f\|_{C^0}$, короче обозначаемой просто $\|f\|$. Докажем, что преобразования $\mathfrak{T}_t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, имеют в $\overline{D}_{\varepsilon, \Delta}$ общую для них неподвижную точку.

Проверим прежде всего, что $\mathfrak{T}_t$ отображает $D_{\varepsilon, \Delta}$ в $D_{\varepsilon, \Delta}$ и, следовательно, $\overline{D}_{\varepsilon, \Delta}$ в $\overline{D}_{\varepsilon, \Delta}$. Если $f \in D_{\varepsilon, \Delta}$, то из (9.4), (7.31), (9.5), (8.33) и (9.2) следует, что

$$|\mathfrak{T}_t f| \leqslant |Q^{-1}|\ |f| + |Q^{-1}|\ |q| \leqslant e^{-t}\varepsilon + e^{-t}t\varepsilon = e^{-t}(1 + t)\,\varepsilon \leqslant e^{-t}e^t\varepsilon = \varepsilon$$

Дифференцируя (9.4) по x, получим

$$(\mathfrak{T}_t f)_x = Q^{-1} f_x (T^t w, Px + \tilde{p})\,(P(t, w) + \tilde{p}_x + \tilde{p}_y f_x) - Q^{-1}(\tilde{q}_x + \tilde{q}_y f_x), \qquad (9.7)$$

где ради краткости приняты сокращенные обозначения

$$\tilde{p} = p(t, w, x, f(w, x)),\quad \tilde{p}_x = p_x(t, w, x, f(w, x)), \\ \tilde{p}_y = p_y(t, w, x, f(w, x)), \\ \tilde{q}_x = q_x(t, w, x, f(w, x)),\quad \tilde{q}_y = q_y(t, w, x, f(w, x)).$$

Отсюда при $0 \leqslant t \leqslant 1$ с помощью (7.31), (8.33), (9.5) и (9.2) найдем, что

$$|(\mathfrak{T}_t f)_x| \leqslant e^{-t}\Delta\,(e^{-t} + t\Delta + t\Delta\cdot\Delta) + e^{-t}(t\Delta + t\Delta\cdot\Delta) = \\ = e^{-t}\Delta\,[e^{-t} + t\Delta + \Delta^2 t + t + t\Delta] \leqslant e^{-t}\Delta\,[e^{-t} + 1{,}3\,t] \leqslant e^{-t}\Delta e^t = \Delta$$

(неравенство $e^{-t} + 1{,}3t \leqslant e^t$ вытекает из $t \leqslant \operatorname{sh} t$).

Докажем, что при $f, g \in \overline{D}_{\varepsilon, \Delta}$

$$\|\mathfrak{T}_t f - \mathfrak{T}_t g\| \leqslant e^{-0{,}5t}\|f - g\|. \qquad (9.8)$$

Имеем

$$(\mathfrak{T}_t f)(w, x) - (\mathfrak{T}_t g)(w, x) = Q^{-1}(t, w)\,[f(T^t w,\ P(t, w)\,x + \\ + p(t, w, x, f(w, x))) - g(T^t w, P(t, w)\,x + p(t, w, x, g(w, x)))] - \\ - Q^{-1}(t, w)\,[q(t, w, x, f(w, x)) - q(t, w, x, g(w, x))].$$

Вторая квадратная скобка, согласно (8.33), по модулю не превосходит

$\Delta \| f - g \|$. Первую квадратную скобку можно заменить суммой двух разностей

$$[f(T^t w,\ P(t, w)x + p(t, w,\ x,\ f(w, x))) - f(T^t w,\ P(t, w)x + p(t, w, x, g(w, x)))] + [f(T^t w,\ P(t, w)x + p(t, w, x, g(w, x))) - g(T^t w,\ P(t, w)x + p(t, w, x, g(w, x)))].$$

Вторая разность по модулю не превосходит $\| f - g \|$, а первая разность в силу (9.5) и (8.33) по модулю не превосходит $\Delta \cdot t\Delta \| f - g \|$. Используя (9.2), находим, что

$$\| \mathfrak{T}_t f - \mathfrak{T}_t g \| \leqslant e^{-t} (\Delta^2 t \| f - g \| + \| f - g \|) + e^{-t} t\Delta \| f - g \| \leqslant \leqslant e^{-t}(1 + 0{,}11\ t) \| f - g \| \leqslant e^{-0{,}5t} \| f - g \|.$$

Из (9.8) следует, что каждое из отображений $\mathfrak{T}_t$, $0 < t \leqslant 1$, имеет в $\overline{D}_{\varepsilon,\Delta}$ одну и только одну неподвижную точку. Покажем, что эта неподвижная точка—одна и та же для всех $t \in (0, 1]$. Поскольку $\mathfrak{T}_t f$ непрерывно зависит от t, достаточно доказать, что неподвижная точка одна и та же для всех двоично-рациональных $t \in (0, 1]$. А последнее вытекает из следующего утверждения: если t, s, $t + s \in (0, 1]$ и преобразования $\mathfrak{T}_t$ и $\mathfrak{T}_s$ имеют одну и ту же неподвижную точку, то и преобразование $\mathfrak{T}_{t+s}$ имеет ту же самую неподвижную точку. Действительно, функция $\varphi(w, x)$ является неподвижной точкой преобразования $\mathfrak{T}_t$, если выполняется соотношение (9.3). Введя обозначение

$$S_t(w, x, y) = (T^t w, \bar{x}(t, w, x, y), \bar{y}(t, w, x, y)),$$

перепишем (9.3) в виде

$$\bar{y}(t, w, x, \varphi(w, x)) = \varphi(T^t w, \bar{x}(t, w, x, \varphi(w, x))).$$

Используя несколько раз это соотношение для t и s, а также групповое свойство $S_{t+s} = S_t S_s$, легко получить аналогичное соотношение для $t + s$:

$$\begin{aligned}
&\bar{y}(t + s, w, x, \varphi(w, x)) = \\
&= \bar{y}(s, T^t w, \bar{x}(t, w, x, \varphi(w, x)), \bar{y}(t, w, x, \varphi(w, x))) = \\
&= \bar{y}(s, T^t w, \bar{x}(t, w, x, \varphi(w, x)), \varphi(T^t w, \bar{x}(t, w, x, \varphi(w, x)))) = \\
&= \varphi(T^{t+s} w, \bar{x}(s, T^t w, \bar{x}(t, w, x, \varphi(w, x)), \varphi(T^t w, \bar{x}(t, w, x, \varphi(w, x))))) = \\
&= \varphi(T^{t+s} w, \bar{x}(s, T^t w, \bar{x}(t, w, x, \varphi(w, x)), \bar{y}(t, w, x, \varphi(w, x)))) = \\
&= \varphi(T^{t+s} w, \bar{x}(t + s, w, x, \varphi(w, x))).
\end{aligned}$$

Неподвижная точка преобразований $\mathfrak{T}_t$ и является искомой функцией $\varphi(w, x)$.

Лемма 9.3. *Функции φ и ψ, о которых шла речь в лемме 9.2, имеют производные $\varphi_x(w, x)$ и $\psi_y(w, y)$, непрерывные по (w, x) и (w, y) соответственно. При всех значениях своих аргументов φ и ψ удовлетворяют неравенствам*

$$|\varphi|,\ |\psi| \leqslant \varepsilon, \quad |\varphi_x|,\ |\psi_y| \leqslant \Delta. \tag{9.9}$$

Доказательство. По-прежнему можно ограничиться рассмотрением φ. Неравенство $|\varphi| \leqslant \varepsilon$ вытекает из $\varphi \in \overline{D}_{\varepsilon,\Delta}$. Если дифференцируемость φ будет доказана, то из $\varphi \in \overline{D}_{\varepsilon,\Delta}$ будет следовать и неравенство $|\varphi_x| \leqslant \Delta$. Поэтому достаточно доказать, что при фиксированном w φ гладко зависит от x и что производная $\varphi_x(w, x)$ непрерывна по (w, x).

Пусть $\mathfrak{F}$ — какое-нибудь векторное расслоение над W^m, в слоях которого F_w введена норма $|\cdot|$. Отображение $F : \mathfrak{X} \to \mathfrak{F}$ переводит X_w^k в F_w (непрерывность F по w не предполагается). Введем «модуль непрерывности по x»:

$$\omega_F^k(r) = \sup_{\substack{w, x, x' \\ |x - x'| \leqslant r}} |F(w, x) - F(w, x')|.$$

Если же F есть отображение $F : \mathfrak{X} \oplus \mathfrak{Y} \to \mathfrak{F}$, переводящее $X_w^k \oplus Y_w^e$ в F_w, то определяем

$$\omega_F^k(r) = \sup_{\substack{w,\,x,\,x',\,y \\ |x-x'|\leqslant r}} |F(w, x, y) - F(w, x', y)|,$$

$$\omega_F^l(r) = \sup_{\substack{w,\,x,\,y,\,y' \\ |y-y'|\leqslant r}} |F(w, x, y') - F(w, x, y)|,$$

$$\omega_F^{k+l}(r) = \sup_{\substack{w,\,x,\,x'\,y,\,y' \\ |x-x'|\leqslant r \\ |y-y'|\leqslant r}} |F(w, x', y') - F(w, x, y)|.$$

Когда нет опасности недоразумения, верхние индексы k, l, $k+l$ у ω я не пишу. $\omega_F(r)$ — неотрицательная неубывающая функция r, равная нулю при $r=0$. Если F непрерывно зависит от x равномерно по (w, x), то $\omega_F(r) < \infty$ и $\omega_F(r) \to 0$ при $r \to 0$; и обратно, если $\lim\limits_{r\to 0} \omega_F(r) = 0$, то F непрерывно зависит от x равномерно по (w, x). Если $F = F(w)$ не зависит от x, то $\omega_F(r) \equiv 0$. Отметим неравенства

$$\omega_{F(G)}(r) \leqslant \omega_F(\omega_G(r)), \tag{9.10}$$

$$\omega_{FG} \leqslant \|F\|\,\omega_G + \|G\|\,\omega_F \quad (\text{норма } \|F\| = \sup_{(w,\,x)} |F|), \tag{9.11}$$

$$\omega_{F+G} \leqslant \omega_F + \omega_G, \tag{9.12}$$

$$\omega^{k+l}_{F(w,\,x,\,y)}(r) \leqslant \omega_F^k(r) + \omega_F^l(r). \tag{9.13}$$

Первое неравенство следует из

$$|F(G(w, x')) - F(G(w, x))| \leqslant \omega_F(|G(w, x') - G(w, x)|),$$

а второе — из

$$|F(w, x')\,G(w, x') - F(w, x)\,G(w, x)| \leqslant$$
$$\leqslant |F(w, x')|\cdot|G(w, x') - G(w, x)| + |F(w, x') - F(w, x)|\cdot|G(w, x)|.$$

Разумеется, в (9.10) предполагается, что область значений G содержится в области определения F, а в (9.11), — что имеют смысл произведения типа $F\,G$ и что $|F\,G| \leqslant |F|\cdot|G|$.

Положим

$$\omega_1(r) = \max(\omega_{p_x}(r), \omega_{p_y}(r), \omega_{q_x}(r), \omega_{q_y}(r)). \tag{9.14}$$

$\omega_1(r) < \infty$ и $\omega_1(r) \to 0$ при $r \to 0$ (напомню, что p и q отличны от нуля только на компакте $\mathfrak{X}_{2\delta} \oplus \mathfrak{Y}_{2\delta}$).

Замечу попутно, что в случае незамкнутой кривой L пространство $\mathfrak{X}^L_{2\delta} \oplus \mathfrak{Y}^L_{2\delta}$ некомпактно, так что в этом случае равномерная непрерывность p_x, p_y, q_x, q_y нуждалась бы в дополнительном обосновании. Таковое без труда может быть дано. Достаточно показать, что функции a и b в (8.28) обладают соответствующими равномерными свойствами. Это, грубо говоря, следует из того, что некомпактная кривая L как бы получает эти функции от компактного многообразия W^m, аккуратное же доказательство можно получить, просмотрев шаг за шагом с этой точки зрения вычисления из § 8.

Пусть $f \in D_{\varepsilon,\Delta}$. Оценим $\omega_{(\mathfrak{T}_t f)_x}(r)$ через $\omega_{f_x}(r)$ и $\omega_1(r)$. Сперва оценим ω для отдельных членов, входящих в (9.7). Ясно, что $\omega_{Q^{-1}} = 0$,

$$\omega_f(r) \leqslant \Delta r, \tag{9.15}$$

и, согласно (9.13), (9.10), (8.33), (9.15) и (9.2), для $\widetilde{p} = p(t, w, x, f(w, x))$ имеем

$$\omega_{\widetilde{p}}(r) \leqslant \omega_p^k(r) + \omega_p^l(\omega_f(r)) \leqslant \Delta t r + \Delta t\cdot\Delta r \leqslant r.$$

Поэтому для $\widetilde{f}_x = f_x(T^t w,\ P\ (t, w)\ x + p\ (t,\ w,\ x,\ f\ (w,\ x)))$ с помощью (9.10) получается оценка $\omega_{\widetilde{f}_x}(r) \leqslant \omega_{f_x}(r)$. Кроме того, ясно, что $\| \widetilde{f}_x \| \leqslant \| f_x \| \leqslant \varepsilon$. Далее, в силу (9.13) — (9.15), (9.10) и (9.2) для $\widetilde{p}_x = p_x\ (t, w,\ x,\ f\ (w,\ x))$ получаем

$$\omega_{\widetilde{p}_x}(r) \leqslant \omega_1(r) + \omega_1(\Delta r) \leqslant 2\omega_1(r) \tag{9.16}$$

и аналогично для $\widetilde{p}_y$, $\widetilde{q}_x$, $\widetilde{q}_y$. В силу (9.11), (8.33), (9.5), (9.16) и (9.2)

$$\omega_{\widetilde{p}_y f_x}(r) \leqslant \Delta t \cdot \omega_{f_x}(r) + 2\omega_1(r) \cdot \Delta \leqslant 0{,}1\ t\omega_{f_x}(r) + \omega_1(r)$$

и аналогично для $\widetilde{q}_y f_x$. Используя все эти неравенства и (9.11), получим из (9.7), что

$$\begin{aligned}\omega_{(\mathfrak{T}_t f)_x}(r) &\leqslant \| Q \|^{-1} \{ \| \widetilde{f}_x \| (\omega_{\widetilde{p}_x} + \omega_{\widetilde{p}_y f_x}) + \omega_{\widetilde{f}_x}(\| P \| + \| \widetilde{p}_x \| + \| \widetilde{p}_y f_x \|) + \\ &+ \omega_{\widetilde{q}_x} + \omega_{\widetilde{q}_y f_x} \} \leqslant e^{-t} \{ 0{,}1\ (2\omega_1(r) + 0{,}1 t\omega_{f_x}(r) + \omega_1(r)) + \\ &+ \omega_{f_x}(r)(e^{-t} + 0{,}1t + 0{,}01t) + 2\omega_1(r) + 0{,}1\omega_{f_x}(r) + \omega_1(r) \} = \\ &= e^{-t}\{3{,}3\omega_1(r) + (e^{-t} + 0{,}22t)\,\omega_{f_x}(r)\} \leqslant e^{-t}[4\omega_1(r) + \omega_{f_x}(r)],\end{aligned}$$

ибо $e^{-t} + 0{,}22t \leqslant 1$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$. Итак, при $f \in D_{\varepsilon, \Delta}$

$$\omega_{(\mathfrak{T}_t f)_x}(r) \leqslant e^{-t}[4\omega_1(r) + \omega_{f_x}(r)]. \tag{9.17}$$

Рассмотрим последовательность $f^{(n)} = (\mathfrak{T}_1)^n f$, в которой исходная функция f выбрана таким образом, что

$$f \in D_{\varepsilon, \Delta} \ \text{и} \ \omega_{f_x}(r) \leqslant \frac{4}{e-1}\omega_1(r) \tag{9.18}$$

например, можно взять $f \equiv 0$). Из того, что $f \in D_{\varepsilon,\Delta}$ и из (9.17) следует, что для всех $f^{(n)}$ из этой последовательности выполняются условия (9.18). Зафиксируем теперь произвольное значение w, скажем $w = w_0$, и покажем, что при этом значении $w\ \varphi\ (w,\ x)$ гладко зависит от x. Последовательность функций $\{f_x^{(n)}(w_0, x)\}$ (рассматриваемых как функции x) удовлетворяет условиям теоремы Асколи (более известной под неправильным названием леммы Арцела), и поэтому из нее можно выбрать подпоследовательность $\{f_x^{(n_k)}\ (w_0,\ x)\}$, сходящуюся равномерно на каждом компакте. Пусть пределом этой подпоследовательности является $\Phi(x)$. Поскольку отображение $\mathfrak{T}_1 : \overline{D}_{\varepsilon,\Delta} \to \overline{D}_{\varepsilon,\Delta}$ сжимающее, $\lim\limits_{n\to\infty} \| f^{(n)} - \varphi \| = 0$. Имеем

$$f^{(n_k)}(w_0, x) = f^{(n_k)}(w_0, 0) + \int_0^x f_x^{(n_k)}(w_0, \xi)\, d\,\xi,$$

где интеграл берется по любому спрямляемому пути в $X_{w_0}^k$. Отсюда следует

$$\varphi\,(w_0, x) = \varphi\,(w_0, 0) + \int_0^x \Phi\,(\xi)\, d\,\xi.$$

Следовательно, $\varphi\ (w_0,\ x)$ гладко зависит от x.

Из сказанного вытекает, что производная $\varphi_x(w,\ x)$ не только существует и (при фиксированном w) непрерывна по x, но и удовлетворяет неравенствам

$$|\varphi_x| \leqslant \Delta, \qquad \omega_{\varphi_x}^k(r) \leqslant \frac{4}{e-1}\omega_1(r).$$

Пусть теперь $w_n \to w$. В силу теоремы Асколи, из последовательности $\{\varphi_x(w_n,\ x)\}$ можно выбрать раномерно сходящуюся на каждом компакте подпоследовательность $\{\varphi_x\ (w_{n_k},\ x)\}$. Рассуждая как и выше, найдем, что

$\varphi_x(w, x) = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_x(w_{n_k}, x)$. Отсюда следует, что производная $\varphi_x(w, x)$ непрерывна по (w, x).

Лемма 9.4. *Пусть по-прежнему выполняется* (9.2), *и пусть*

$$d\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \mathfrak{M}^{m+k}\right) = |y - \varphi(w, x)|$$

есть расстояние от точки $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in X_w^k \oplus Y_w^l$ *до многообразия* $\mathfrak{M}^{m+k}$ *«вдоль подпространства* Y_w^l», *а*

$$d\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \mathfrak{N}^{m+l}\right) = |x - \psi(w, y)|$$

— расстояние от $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *до многообразия* $\mathfrak{N}^{m+l}$ *«вдоль подпространства* X_w^k». *Тогда*

$$\begin{gathered} d\left(S_t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \mathfrak{M}^{m+k}\right) \geqslant e^{0,5t} d\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \mathfrak{M}^{m+k}\right) \text{ при } t > 0, \\ d\left(S_t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \mathfrak{N}^{m+l}\right) \geqslant e^{-0,5t} d\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \mathfrak{N}^{m+l}\right) \text{ при } t < 0. \end{gathered} \tag{9.19}$$

Доказательство. Мы можем ограничиться только первым неравенством, которое достаточно доказать лишь при $t \in [0, 1]$. Из определений следует, что

$$d\left(S_t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \mathfrak{M}^{m+k}\right) = |Q(t, w)y + q(t, w, x, y) - \\ - \varphi(T^t w, P(t, w)x + p(t, w, x, y))|.$$

Используя (9.3), можно написать

$$Q(t, w)y + q((t, w, x, y) - \varphi(T^t w, P(t, w)x + p(t, w, x, y))) = \\ = Q(t, w)(y - \varphi(w, x)) + [q(t, w, x, y) - q(t, w, x, \varphi(w, x))] + \\ + [\varphi(T^t w, P(t, w)x + p(t, w, x, \varphi(w, x))) - \\ - \varphi(T^t w, P(t, w)x + p(t, w, x, y))].$$

Но из (7.31), (8.33), (9.2) и $\varphi \in D_{\varepsilon, \Delta}$ следует, что

$$|Q(t, w)(y - \varphi(w, x))| \geqslant e^t |y - \varphi(w, x)|,$$

$$|q(t, w, x, y) - q(t, w, x, \varphi(w, x))| \leqslant \\ \leqslant \Delta t |y - \varphi(w, x)| \leqslant 0,1t |y - \varphi(w, x)|,$$

$$|\varphi(T^t w, P(t, w)x + p(t, w, x, \varphi(w, x))) - \\ - \varphi(T^t w, P(t, w)x + p(t, w, x, y))| \leqslant \|f_x\| \cdot \|p_y\| \cdot |\varphi(w, x) - y| \leqslant \\ \leqslant \Delta \cdot \Delta t \cdot |y - \varphi(w, x)| \leqslant 0,01t |y - \varphi(w, x)|.$$

Поэтому

$$d\left(S_t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \mathfrak{M}^{m+k}\right) \geqslant e^t |y - \varphi(w, x)| - 0,1t |y - \varphi(w, x)| - \\ - 0,01t |y - \varphi(w, x)| \geqslant e^{0,5t} |y - \varphi(w, x)|,$$

ибо

$$e^t - 0,11t \geqslant e^{0,5t}.$$

Для завершения доказательства леммы 9.1 осталось заметить, что при $\varepsilon < \delta$ пересечения

$$\mathfrak{M}^{m+k} \cap (\mathfrak{X}_\delta \oplus \mathfrak{Y}_\delta), \quad \mathfrak{N}^{m+l} \cap (\mathfrak{X}_\delta \oplus \mathfrak{Y}_\delta)$$

являются графиками функций $\varphi \mid \mathfrak{X}_\delta$ и $\psi \mid \mathfrak{Y}_\delta$ соответственно, а также доказать следующую лемму.

Лемма 9.5. *Если выполняется* (9.1), $|x| \leqslant \delta$ *и* $|y| \leqslant \delta$, *то*

$$S_t \begin{pmatrix} x \\ \varphi(w, x) \end{pmatrix} \in \mathfrak{X}_\delta \oplus \mathfrak{Y}_\delta \text{ и } S_t \begin{pmatrix} \psi(w, y) \\ y \end{pmatrix} \in \mathfrak{X}_\delta \oplus \mathfrak{Y}_\delta$$

при всех $t > 0$.

Доказательство. Как обычно, достаточно доказать только первое утверждение при $t \in [0, 1]$. Поскольку y-компонента $S_t \begin{pmatrix} x \\ \varphi(w, x) \end{pmatrix}$ не превосходит $m\varepsilon$, то надо рассмотреть только x-компоненту, которая равна

$$P(t, w)\, x + p(t, w, x, \varphi(w, x)).$$

Из (7.31), (8.33), (9.1) и $|x| \leqslant \delta$ выводим, что

$$|P(t, w)\, x + p(t, w, x, \varphi(w, x))| \leqslant$$
$$\leqslant e^{-t} |x| + \varepsilon t \leqslant (e^{-t} + 0{,}1t)\, \delta \leqslant \delta.$$

ГЛАВА III

§ 10. Доказательство теоремы 1

В этой главе будут доказаны теоремы 1, 3, 8 и 9. Мы сохраним все обозначения и соглашения, принятые в предыдущей главе. Как уже говорилось в § 4 и 6, мы ограничимся рассмотрением ($У$)-потоков и только в конце данной главы, в § 15, выведем теоремы 1, 3, 8 и 9 для ($У$)-каскадов из соответствующих теорем об ($У$)-потоках.

В этом параграфе употребляется выражение: «такие-то траектории или полутраектории находятся одна от другой на таком-то расстоянии». Поэтому я начну с того, что напомню, каким образом уточняется смысл этого выражения.

Пусть $I = [0,1]$, $[0, \infty)$, $(-\infty, 0]$ или $(-\infty,\infty)$, а $u\colon I \to W^m$ — непрерывное отображение. Когда t движется по отрезку I, точка $u(t)$ очерчивает некоторую «ориентированную кривую» в W^m. Другое отображение $v\colon I \to W^m$ задает ту же самую ориентированную кривую, если $v(t)$ проходит те же точки, что и $u(t)$, и в том же порядке. Точное определение таково: u и v определяют одну и ту же ориентированную кривую, если существуют такие два непрерывных неубывающих отображения $f, g\colon I \to I$, при которых $f(I) = g(I) = I$ и $u \circ f = v \circ g$. Бинарное отношение «u и v определяют одну и ту же ориентированную кривую» является, очевидно, отношением эквивалентности, так что под ориентированной кривой можно понимать класс эквивалентности по этому бинарному отношению. Расстояние между двумя ориентированными кривыми $\mathfrak{u}$ и $\mathfrak{v}$ определится так:

$$\rho(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}) = \inf_{u \in \mathfrak{u},\, v \in \mathfrak{v}} \sup_t \rho(u(t), v(t)).$$

Очевидно, что

$$\rho(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}) = 0, \rho(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}) = \rho(\mathfrak{v}, \mathfrak{u}), \rho(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}) \leqslant \rho(\mathfrak{u}, \mathfrak{b}) + \rho(\mathfrak{v}, \mathfrak{b}).$$

Кроме того, при $I = [0,1]$ из $\rho(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}) = 0$ следует, что $\mathfrak{u} = \mathfrak{v}$, так что в этом случае множество всех ориентированных кривых с этим расстоянием образует метрическое пространство. Этот (не столь очевидный) факт нам не понадобится, поэтому доказательство его не приводится. Если же интервал I бесконечный, то $\rho(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})$ может равняться нулю и при $\mathfrak{u} \neq \mathfrak{v}$. Вот два примера:

1) $W = R^1$ (или, если угодно, можно от R^1 перейти к компактному отрезку или к окружности), $I = [0, \infty)$, $u(t) = \operatorname{arctg} t$,

$$v(t) = \begin{cases} t, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 1, & t \leqslant 1. \end{cases}$$

2) W есть двумерный тор, получающийся путем факторизации эвкли-

довой плоскости (w_1, w_2) по целочисленной решетке, $I = (-\infty, \infty)$, а отображения u и v таковы:

$$u: \begin{cases} w_1 = t, \\ w_2 = \sqrt{2}t, \end{cases} \qquad v: \begin{cases} w_1 = t + \frac{1}{2}, \\ w_2 = \sqrt{2}t. \end{cases}$$

Пусть отображение u: $I \to W^m$ непостоянно ни на каком отрезке и пусть отображение v: $I \to W^m$ определяет ту же ориентированную кривую, что и u. Тогда существует такое непрерывное неубывающее отображение F: $I \to I$, что $F(I) = I$ и $u \circ F = v$. Действительно, существуют такие непрерывные неубывающие отображения f, g: $I \to I$, что $f(I) = g(I) = I$ и $u \circ f = v \circ g$. Положим $F = f \circ g^{-1}$. В оправдании нуждается только законность этого определения (функция g^{-1}, вообще говоря, многозначна). Прообраз $g^{-1}(t)$ — это либо одна точка, либо некоторый отрезок $I' \subset I$, на котором функция g принимает постоянное значение t. Определение F законно, если $f \equiv \mathrm{const}$ на I'. Допустим, что $f \not\equiv \mathrm{const}$ на I'. Тогда $u \circ f \not\equiv \mathrm{const}$ на I', но в этом случае и $v \circ g = u \circ f \not\equiv \mathrm{const}$ на I', тогда как $g|I' \equiv \mathrm{const}$.

Лемма 10.1. *Пусть имеется гладкая кривая $w(t)$, $0 \leqslant t < \infty$, параметризованная таким образом, что модуль скорости $\left|\frac{d}{dt} w(t)\right|$ ограничен сверху и снизу положительными константами, и пусть при всех t вектор $\frac{d}{dt} w(t)$ образует с площадками Π (со всеми теми площадками, которые проходят через точку $w(t)$) угол, ограниченный снизу некоторой положительной константой. Пусть кривая $w(t)$ находится на расстоянии $\leqslant \frac{\delta}{2}$ от положительной полутраектории $\{T^t w_1;\ t \geqslant 0\}$. Тогда в $\mathfrak{X}_\delta \oplus \mathfrak{Y}_\delta$ существует кривая $\bar{w}(t)$, $0 \leqslant t < \infty$, которая при проекции π: $\mathfrak{X}_\delta \oplus \mathfrak{Y}_\delta \to W^m$ отображается на полутраекторию $\{T^t w_1',\ t \geqslant 0\}$, где $w_1' = T^\tau w_1$, $|\tau| < \delta$, а при отображении $h \circ (\varkappa, \lambda)$ переходит в кривую $w(t)$.*

Доказательство. Из леммы 8.1 следует, что точка $w(0)$ лежит внутри площадки $\Pi(w_1')$, где $w_1' = T^\tau w_1$, $|\tau| < \delta$. Применим лемму 8.2, приняв $w_1(t) = T^t w_1'$, $w_2(t) = w(t)$. Надо доказать, что $\Delta = [0, \infty)$. Допустим, что $\Delta = [0, a]$. Тогда $w(a)$ лежит на краю площадки $\Pi(T^{s(a)} w_1')$. Поэтому из леммы 8.1 следует, что $w(a)$ находится на расстоянии $\geqslant \frac{2\delta}{3}$ от любой точки вида $T^\tau T^{s(a)} w_1'$, где $|\tau| \leqslant \delta$.

Так как расстояние между кривыми $w(t)$ и $T^t w_1$ не превосходит $\frac{\delta}{2}$, то имеются такие отображения u, v: $[0, \infty) \to W^m$, которые задают те же самые ориентированные кривые и для которых $\rho(u(t), v(t)) < \frac{2\delta}{3}$ при всех t. Но $w(t)$ и $T^t w_1$ непостоянны ни на каком отрезке, поэтому можем считать, что $u = w \circ f$ и $v(t) = T^{g(t)} w_1$, где f, g: $[0, \infty) \to [0, \infty)$ — непрерывные неубывающие функции, переводящие $[0, \infty)$ в $[0, \infty)$. Число a должно иметь прообраз (один или много) при отображении f; пусть $f(t_0) = a$, причем t_0 — крайний левый прообраз, если их много. Докажем, что при всех $t \in [0, t_0]$

$$T^{g(t)} w_1 = T^{\tau(t)} T^{s(f(t))} w_1', \quad \text{где } |\tau(t)| < \delta. \tag{10.1}$$

При $t = 0$ это действительно так, поэтому множество тех $t \in [0, t_0]$, для которых справедливо (10.1), непусто. Очевидно, что это множество открыто. Покажем, что оно в то же время должно быть замкнутым. Пусть $t_n \to t_* \in [0, t_0]$ и при всех t_n выполняется (10.1). Ясно, что тогда при t_* имеем

$$T^{g(t_*)} w_1 = T^{\tau_*} T^{s(f(t_*))} w_1',$$

где $|\tau_*| \leqslant \delta$. Допустим, что $|\tau_*| = \delta$. Тогда площадка $\Pi\,(T^{s(f(t_*))}\,w_1')$ расположена вне множества

$$\bigcup_{|\tau|<\delta} \Pi\,(T^{\tau}\,T^{g(t_*)}\,w_1)$$

и подавно вне $\frac{2\delta}{3}$-окрестности точки $T^{g(t_*)}w_1$. Но это противоречит тому, что по определению функций s, f и g

$$w\,(f\,(t_*)) \in \Pi\,(T^{s(f(t_*))}w_1') \quad \text{и} \quad \rho\,(w\,(f\,(t_*)),\; T^{g(t_*)}w_1) < \frac{2\delta}{3}.$$

(10.1) справедливо и для $t = t_0$, т. е.

$$T^{g(t_0)}\,w_1 = T^{\tau}T^{s(f(t_0))}w_1' = T^{\tau}T^{s(a)}w_1', \text{ где } |\tau| < \delta.$$

Но раньше мы видели, что от любой точки такого вида точка $w\,(f\,(t_0)) = w\,(a)$ находится на расстоянии $\geqslant \frac{2\delta}{3}$. Следовательно,

$$\rho\,(w\,(f\,(t_0)),\; T^{g(t_0)}w_1) \geqslant \frac{2\delta}{3},$$

что противоречит выбору функций f и g.

Лемма 10.2. *Пусть выполняются неравенства* (9.1) *и пусть в* (8.30) p *и* q *удовлетворяют при* $0 \leqslant t \leqslant 1$ *неравенствам* (8.33). *Тогда те точки* $\binom{x}{y} \in \mathfrak{X}_\delta \oplus \mathfrak{Y}_\delta$, *для которых* $S_t\binom{x}{y}$ *остается в* $\mathfrak{X}_\delta \oplus \mathfrak{Y}_\delta$ *как при* $t \to \infty$, *так и при* $t \to -\infty$, *образуют некоторое* m*-мерное многообразие, являющееся графиком некоторой функции*

$$x = \chi_1\,(w), \qquad y = \chi_2\,(w),$$

непрерывной по w, *причем*

$$|\chi_1|, \quad |\chi_2| \leqslant \varepsilon. \tag{10.2}$$

Доказательство. Если $S_t\binom{x}{y} \in \mathfrak{X}_\delta \oplus \mathfrak{Y}_\delta$ при всех $t \geqslant 0$, то $\binom{x}{y} \in \mathfrak{M}^{m+k}$, а если $S_t\binom{x}{y} \in \mathfrak{X}_\delta \oplus \mathfrak{Y}_\delta$ при всех $t \leqslant 0$, то $\binom{x}{y} \in \mathfrak{N}^{m+l}$. Иными словами, надо доказать, что $\mathfrak{M}^{m+k} \cap \mathfrak{N}^{m+l}$ является графиком некоторой функции $x = \chi_1\,(w)$, $y = \chi_2\,(w)$. Но $\binom{x}{y} \in \mathfrak{M}^{m+k} \cap \mathfrak{N}^{m+l}$ тогда и только тогда, когда $x = \psi\,(w, y)$ и $y = \varphi\,(w, x)$. Поэтому нужно доказать, что уравнение

$$x = \psi\,(w,\; \varphi\,(w,\; x)) \tag{10.3}$$

имеет единственное решение, которое непрерывно зависит от w. (Поскольку $|\varphi|$, $|\psi| \leqslant \varepsilon$, то это решение и соответствующее ему y по модулю не могут превосходить ε, так что автоматически выполняются (10.2) и $\mathfrak{M}^{m+k} \cap \mathfrak{N}^{m+l} \subset \mathfrak{X}_\delta \oplus \mathfrak{Y}_\delta$.) Рассмотрим отображение $X_w^k \to X_w^k$, переводящее x в $\psi\,(w,\, \varphi\,(w,\, x))$. Это отображение — сжимающее, ибо

$$|\psi\,(w, \varphi\,(w, x_1)) - \psi\,(w, \varphi\,(w, x_2))| \leqslant \|\,\psi_x\,\| \cdot \|\,\varphi_x\,\| \cdot |x_1 - x_2| \leqslant \\ \leqslant 0{,}01\,|x_1 - x_2|.$$

Поэтому решение уравнения (10.3) существует и единственно. Непрерывная зависимость решения от w легко доказывается. Например, можно рассмотреть в пространстве непрерывных секущих поверхностей $W^m \to \mathfrak{X}$ отображение, переводящее функцию $x = f\,(w)$ в функцию $x = \psi\,(w, \varphi\,(w,\, f\,(w)))$, которое, очевидно, является сжимающим. Вместо этого можно исходить из равномерной ограниченности решения и из того, что для любой последовательности $w_n \to w_0$, для которой существует $\lim \chi_1(w_n)$, этот предел должен совпадать с $\chi_1(w_0)$ в силу единственности решения уравнения (10.3).

Замечание 10.1. Напомню, что в § 8 система $\{S_t\}$ строилась, исходя из двух систем $\dot{w} = f(w)$ и $\dot{w} = g(w)$. В частности, можно взять $g \equiv f$; соответствующие системы $\{\Sigma_t\}$ и $\{S_t\}$ обозначим в этом случае через $\{\Sigma_t^0\}$ и $\{S_t^0\}$. Для $\{S_t^0\}$, очевидно, $\chi_1(w) = 0$, $\chi_2(w) = 0$, а если $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq 0$, то $S_t^0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ и $\Sigma_t^0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ со временем выходят из $\mathfrak{X}_\delta \oplus \mathfrak{Y}_\delta$.

Доказательство теоремы 1. Согласно (8.22), a и b удовлетворяют неравенствам (8.32) с

$$\varepsilon_0 = o(\delta) + O(\varepsilon_1), \quad \Delta_0 = \Omega(\delta) + \frac{1}{\delta} O(\varepsilon_1),$$

а следовательно, согласно лемме 8.3, p и q удовлетворяют при $0 \leqslant t \leqslant 1$ неравенствам (8.33) с $\varepsilon \leqslant m\,\varepsilon_0$, $\Delta \leqslant m\,\Delta_0$.

Пусть дано какое-нибудь $\delta > 0$, которое мы вправе (уменьшив его при необходимости) считать столь малым, что

$$\delta < 1, mo(\delta) < \frac{\delta}{20}, \quad m\Omega(\delta) < \frac{1}{20}.$$

Будем рассматривать только такие системы $\{S^t\}$, для которых ε_1 столь мало, что

$$mO(\varepsilon_1) < \frac{\delta}{20}, \quad m\frac{1}{\delta} O(\varepsilon_1) < \frac{1}{20}.$$

Тогда выполняются условия леммы 10.2. Покажем, что отображение

$$w \to \chi(w) = h(w, \varkappa(w)\chi_1(w) + \lambda(w)\chi_2(w))$$

является гомеоморфизмом многообразия W^m на себя, переводящим траектории системы $\{T^t\}$ в траектории системы $\{S^t\}$, и что при всех w

$$\rho(w, \chi(w)) \leqslant \delta.$$

То, что отображение χ переводит каждую траекторию системы $\{T^t\}$ в траекторию системы $\{S^t\}$ с сохранением ориентации, вытекает из следующих трех фактов:

1) Отображение

$$w \to \begin{pmatrix} \chi_1(w) \\ \chi_2(w) \end{pmatrix}$$

переводит каждую траекторию системы $\{T^t\}$ в некоторую траекторию системы $\{S_t\}$.

2) Траектории системы $\{S_t\}$ совпадают с траекториями системы $\{\Sigma_t\}$.

3) При отображении

$$h \circ (\varkappa, \lambda) : \mathfrak{X}_\delta \oplus \mathfrak{Y}_\delta \to W^m$$

траектории системы $\{\Sigma_t\}$ переходят в траектории системы $\{S^t\}$.

То, что отображение χ непрерывно, следует из того, что оно является суперпозицией непрерывных отображений. Неравенство $\rho(w, \chi(w)) \leqslant \delta$ вытекает из (8.3), (10.2) и (7.2):

$$\rho(w, \chi(w)) \leqslant |\varkappa(w)\chi_1(w) + \lambda(w)\chi_2(w)| \leqslant \sqrt{2(|\chi_1(w)|^2 + |\chi_2(w)|^2)} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{4\varepsilon^2} = 2\varepsilon < \delta.$$

Осталось только доказать, что $\chi(w_1) \neq \chi(w_2)$ при $w_1 \neq w_2$. Действительно, так как W^m — компакт, то отсюда будет следовать, что W^m гомеоморфно своему образу $\chi(W^m)$, который должен быть замкнутым m-мерным многообразием, содержащимся в W^m; это может быть только само W^m.

Допустим, что $w_1 \neq w_2$ и $\chi(w_1) = \chi(w_2) = w_3$. Полутраектория $\{S^t w_3; t \geqslant 0\}$ отстоит, согласно сказанному выше, не более, чем на 2ε, от полутраекторий

$$\{T^t w_1;\ t \geqslant 0\} \text{ и } \{T^t w_2;\ t \geqslant 0\}, \tag{10.4}$$

а полутраектория $\{S^t w_3;\ t \leqslant 0\}$ отстоит не более, чем на 2ε, от полутраекторий

$$\{T^t w_1;\ t \leqslant 0\} \text{ и } \{T^t w_2;\ t \leqslant 0\}. \tag{10.5}$$

Следовательно, полутраектории (10.4) отстоят друг от друга не более, чем на $4\varepsilon < \frac{\delta}{2}$, равно как и полутраектории (10.5). С помощью леммы 10.1 заключаем, что в $\mathfrak{X}_\delta \oplus \mathfrak{Y}_\delta$ существует кривая $\overline{w}(t)$, которая при проекции $\pi\colon \mathfrak{X}_\delta \oplus \mathfrak{Y}_\delta \to W^m$ отображается на тректорию $\{T^t w_1;\ -\infty < t < \infty\}$, а при отображении $h \circ (\varkappa, \lambda)$ переходит в траекторию $\{T^t w_2;\ -\infty < t < \infty\}$, причем $h \circ (\varkappa, \lambda)\overline{w}(0) = w_2$ и $\pi\overline{w}(0) = w_1'$, где $w_1' = T^\tau w_1$, $|\tau| < \delta$. Согласно § 8, $\overline{w}(t)$ является траекторией динамической системы $\{\Sigma_t^0\}$, построенной так же, как и $\{\Sigma_t\}$, но с $g \equiv f$. Согласно сказанному в замечании 10.1, тогда кривая $\overline{w}(t)$ лежит на нулевой секущей поверхности расслоения $\mathfrak{X} \oplus \mathfrak{Y} \to W^m$, т. е. x- и y- компоненты $\overline{w}(t)$ равны нулю. Следовательно, $w_2 = w_1' = T^\tau w_1$, где $|\tau| < \delta$. Но в этом случае площадки $\Pi(w_1)$ и $\Pi(w_2)$ не могут пересекаться, тогда как из $\chi(w_1) = \chi(w_2)$ следует, что они пересекаются.

Замечание 10.2. В последнем абзаце содержится доказательство следующего утверждения, которое нам пригодится и в дальнейшем и по этой причине заслуживает отдельной формулировки:

Если точки w_1 и w_2 таковы, что расстояние между проходящими через них положительными полутраекториями (10.4) *меньше, чем $\frac{\delta}{2}$, равно как и расстояние между проходящими через них отрицательными полутраекториями* (10.5), *то эти две точки лежат на одной траектории системы* (6.1) *и различаются только малым (меньше чем на δ) сдвигом по времени.*

§ 11. Первая часть доказательства теоремы 8

В этом параграфе будут построены слоения $\mathfrak{S}^{k+1}$ и $\mathfrak{S}^{l+1}$, у которых каждый слой инвариантен относительно потока $\{T^t\}$, а касательными полями являются, соответственно, поля $X_w^k \oplus Z_w^1$ и $Y_w^l \oplus Z_w^1$. Все рассмотрения проводятся для $\mathfrak{S}^{k+1}$; к $\mathfrak{S}^{l+1}$ можно перейти, изменив знак времени. Сперва строятся маленькие открытые многообразия M_w^{k+1}, играющие роль кусков, из которых склеиваются слои слоения $\mathfrak{S}^{k+1}$. Склеивание осуществляется в конце параграфа, после того как доказано, что многообразия M_w^{k+1} обладают нужными для наших целей свойствами.

Раньше мы имели дело с двумя системами: ($У$)-системой (6.1) и с близкой к ней системой (6.2). Для изучения поведения траекторий системы (6.2) вблизи любых фиксированных траекторий системы (6.1) использовались «частичные» динамические системы $\{\Sigma_t\}$ и $\{S_t\}$ в $\mathfrak{X}_\delta \oplus \mathfrak{Y}_\delta$. Теперь же мы будем иметь дело только с одной системой (6.1) Для описания взаимного расположения траекторий этой системы возле друг друга надо использовать системы $\{\Sigma_t^0\}$ и $\{S_t^0\}$, построенные так же, как $\{\Sigma_t\}$ и $\{S_t\}$, но с $g \equiv f$. Стало быть, теперь $\varepsilon_1 = 0$, так что это число больше не входит в наши неравенства. Число же δ мы будем считать меньшим $\frac{1}{2}$ и настолько малым, чтобы в неравенствах (8.32)

ε_0 и Δ_0 были столь малы, чтобы в неравенствах (8.33) ε и Δ удовлетворяли неравенствам (9.1). Говоря в этом параграфе о многообразиях $\mathfrak{M}^{m+k}$ и $\mathfrak{N}^{n+l}$, функциях $y = \varphi(w, x)$ и $x = \psi(w, y)$, я подразумеваю, что эти многообразия и функции построены для системы $\{S_t^0\}$. Очевидно, что нулевая секущая поверхность расслоения $\mathfrak{X}_\delta \oplus \mathfrak{Y}_\delta$ инвариантна относительно преобразований S_t^0 и что $\mathfrak{M}^{m+k}$ и $\mathfrak{N}^{m+l}$ пересекаются по этой секущей поверхности. Поэтому к тем свойствам φ и ψ, которые мы имели раньше, теперь добавляются еще

$$\varphi(w, 0) = 0, \psi(w, 0) = 0, |\varphi(w, x)| \leqslant 0{,}1\,|x|, |\psi(w, y)| \leqslant 0{,}1\,|y|. \quad (11.1)$$

Кроме того,

$$\varphi_x(w, 0) = 0, \ \psi_y(w, 0) = 0, \quad (11.2)$$

потому что при $|x| < \delta$ имеет место оценка $|\varphi_x| < \Delta$, где $\Delta \leqslant m\Delta_0$ и $\Delta_0 = \Omega(\delta)$.

Заметим, что если $(w, x, y) \in \mathfrak{M}^{m+k}$, то для $(T^t w, x_t, y_t) = S_t^0(w, x, y)$

$$|x_t| \leqslant e^{-0{,}5t}|x| \quad \text{при } t > 0 \quad (11.3)$$

(а $|y_t|$, согласно (11.1), оценивается через $|x_t|$); если же $(w, x, y) \in \mathfrak{N}^{m+l}$, то

$$|y_t| < e^{0{,}5t}|y| \quad \text{при } t < 0.$$

Действительно, (11.3) достаточно доказать лишь при $0 \leqslant t \leqslant 1$, ибо $\mathfrak{M}^{m+k}$ инвариантно относительно $\{S_t^0\}$. Имеем

$$\begin{aligned} |x_t| &= |P(t, w)\,x + p(t, w, x, \varphi(w, x))| \leqslant \\ &\leqslant |P(t, w)\,x| + |p(t, w, x, \varphi(w, x))| \leqslant \\ &\leqslant e^{-t}|x| + (|p_x| + |p_y| \cdot |\varphi_x|)\,|x| \leqslant \\ &\leqslant e^{-t}|x| + (\Delta t + \Delta^2 t)\,|x| \leqslant e^{-t}|x| + 0{,}11t\,|x| \leqslant e^{-0{,}5t}|x|. \end{aligned}$$

В силу имеющейся связи между $\{S_t^0\}$ и $\{\Sigma_t^0\}$, мы можем заключить, что если $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}^{m+k} \cap (\mathfrak{X}_\delta \oplus \mathfrak{Y}_\delta)$, то $\sum_t^0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to 0$ экспоненциально и равномерно по $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ при $t \to +\infty$, а если $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathfrak{N}^{m+l} \cap (\mathfrak{X}_\delta \oplus \mathfrak{Y}_\delta)$, то $\sum_t^0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to 0$ экспоненциально и равномерно по $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ при $t \to -\infty$.

Положим

$$\mathfrak{M}_{w_0}^{k+1} = \{(w, x, y): \ y = \varphi(w, x), |x| < \delta, w = T^\tau w_0, |\tau| < \delta\}$$

и обозначим через $M_{w_0}^{k+1}$ образ $\mathfrak{M}_{w_0}^{k+1}$ при отображении $h\mu = h \circ (\varkappa, \lambda)$.

Л е м м а 11.1. *$M_{w_0}^{k+1}$ является гладким $(k+1)$-мерным подмногообразием многообразия W^m, которое в точке w_0 касается $(k+1)$-мерного касательного подпространства $X_{w_0}^k \oplus Z_{w_0}^1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть I — дуга проходящей через w_0 траектории системы (6.1), состоящая из точек вида $T^t w_0$, $|t| \leqslant \delta$. Ограничение расслоения $\mathfrak{B}_\delta \to W^m$ над I мы уже обозначили в § 8 через $\mathfrak{B}_\delta^I$, а ограничение расслоения $\mathfrak{B} \to W^m$ над I обозначим через $\mathfrak{B}^I$. Лемма 8.1 утверждает, в частности, что отображение $h\mu$ устанавливает диффеоморфизм между $\mathfrak{B}_\delta^I$ и некоторой (замкнутой) окрестностью точки w_0. Несколько неприятно, что $\mathfrak{B}_\delta^I$ является многообразием «с углами», точнее, его край имеет «углы». Чтобы не тратить времени на эти «углы», иногда удобнее иметь дело с множеством внутренних точек

$$\operatorname{Int} \mathfrak{B}_\delta^I = \{(T^t w_0, x, y): |t|, |x|, |y| < \delta\},$$

которое является настоящим открытым многообразием. Отображение $h\mu$ устанавливает диффеоморфизм между $\mathrm{Int}\, \mathfrak{V}_\delta^I$ и некоторой открытой окрестностью точки w_0. Введем теперь множество

$$\overline{\mathfrak{M}}_{w_0}^{k+1} = \{(w,\ x,\ y):\ y = \varphi\,(w,\ x),\ w \in I\}.$$

Ясно, что

$$\mathfrak{M}_{w_0}^{k+1} = \mathrm{Int}\, \mathfrak{V}_\delta^I \cap \overline{\mathfrak{M}}_{w_0}^{k+1}$$

является областью в $\overline{\mathfrak{M}}_{w_0}^{k+1}$, поэтому для доказательства гладкости многообразия $M_{w_0}^{k+1} = h\mu\mathfrak{M}_{w_0}^{k+1}$ достаточно доказать, что $\overline{\mathfrak{M}}_{w_0}^{k+1}$ является гладким $(k+1)$-мерным подмногообразием в $\mathfrak{V}^I$.

Ясно, что $\overline{\mathfrak{M}}_{w_0}^{k+1}$ представляет собой совокупность точек вида $S_t^0\,(w_0,\ x,\ \varphi\,(w_0,\ x))$, где $|\,t\,| \leqslant \delta$, $x \in X_{w_0}^k$. Нам будет несколько удобнее исходить из $w_1 = T^\delta w_0$ и представлять себе $\overline{\mathfrak{M}}_{w_0}^{k+1}$ в виде совокупности точек $S_t^0\,(w_1,\ x,\ \varphi\,(w_1,\ x))$, где $-2\delta \leqslant t \leqslant 0$ и $x \in X_{w_1}^k$. Примем $(t,\ x)$ за координаты в $\overline{\mathfrak{M}}_{w_0}^{k+1}$. Гладкость функции $\varphi\,(w_1,\ x)$ по x доказана в лемме 9.3, гладкость $S_t^0\,(w,\ x,\ y)$ по $(x,\ y)$ отмечалась (в несколько иных терминах) в § 8, а гладкость S_t^0 по t следует просто из того, что S_t^0 описывается системой дифференциальных уравнений. Поэтому для доказательства того, что $\overline{\mathfrak{M}}_{w_0}^{k+1}$ является гладким $(k+1)$-мерным подмногооообразием в $\mathfrak{V}^I$, остается убедиться, что матрица частных производных

$$\frac{\partial\, S_t^0\,(w_1,\ x,\ \varphi\,(w_1,\ x))}{\partial\,(x,\ t)}$$

имеет наибольший возможный ранг, т. е. ранг $k+1$.

Пользуясь теми же координатами $(w,\ x,\ y,\ t)$ в расслоении $\mathfrak{V}_\delta^I$, которые применялись при доказательстве леммы. 8.1, можно записать $S_t^0\,(w_1,\ \ x,\ \varphi\,(w_1,\ x))$ в следующем виде:

первая координата $\bar{x}\,(x,\ t) = P\,(t,\ w_1)\,x + p\,(t,\ w_1,\ x,\ \varphi\,(w_1,\ x))$,

вторая координата $\bar{y}\,(x,\ t) = Q\,(t,\ w_1)\,\varphi\,(w_1,\ x) + q\,(t,\ w_1,\ x,\ \varphi\,(w_1,\ x))$,

третья координата $t+\delta$.

Поэтому в этих локальных координатах матрица частных производных

$$\frac{\partial\, S_t^0\,(w_1,\ x,\ \varphi\,(w_1,\ x))}{\partial\,(x,\ t)} = \begin{pmatrix} \bar{x}_x\,(x,t) & \bar{x}_t\,(x,t) \\ \bar{y}_x\,(x,t) & \bar{y}_t\,(x,t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P\,(t,w_1) + \tilde{p}_x + \tilde{p}_y\,\varphi_x & * \\ Q\,(t,w_1)\,\varphi_x + \tilde{q}_x + \tilde{q}_y\ \varphi_x & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где приняты сокращения: $\varphi_x = \varphi_x\,(w_1,\ x)$; $\tilde{p}_x = p_x(t,\ w_1,\ x,\ \ \varphi\,(w_1,\ x))$ и аналогично для $\tilde{p}_y,\ \tilde{q}_x,\ \tilde{q}_y$; звездочки обозначают правые части системы (8.21), точнее, двух первых строчек этой системы, в которые вместо $w,\ x,\ y$ надо подставить $T^t w_0$ и указанные выше $\bar{x},\ \bar{y}$. Минор $(k+1)$-го порядка

$$\begin{vmatrix} \bar{x}_x\,(x,\ t) & * \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = |\,\bar{x}_x\ (x,\ t)\,| = |\,P\,(t,w_1) + \tilde{p}_x + \tilde{p}_y\,\varphi_x\,|$$

отличен от нуля, ибо норма матрицы $\tilde{p}_x + \tilde{p}_y\varphi_x$, как уже много раз мы видели, не превосходит $0{,}11\,|t|$, а $|P\,(t,\ w_1)x\,| > e^{|t|}\,|\,x\,|$ при всех x.

Покажем, наконец, что многообразие $M_{w_0}^{k+1}$ касается в точке w_0 $(k+1)$-мерного касательного пространства $X_{w_0}^k \oplus Z_{w_0}^1$. То, что $M_{w_0}^{k+1}$ касается вектора $f\,(w_0)$, следует из того, что это многообразие содержит отрезок I траектории $\{T^t w_0\}$. То, что $M_{w_0}^{k+1}$ касается $X_{w_0}^k$, следует из того, что в $\mathfrak{X}\oplus\mathfrak{Y}$ многообразие $\overline{\mathfrak{M}}_{w_0}^{k+1}$ касается при $x=0$ слоя $X_{w_0}^k$, а это в свою очередь вытекает из $\varphi_x\,(w,0) = 0$.

Л е м м а 11.2 *При любых* t, w *в пересечении*

$$T^t M_w^{k+1} \cap M_{T^t w}^{k+1}$$

содержится некоторое гладкое $(k+1)$*-мерное подмногообразие* $U_{T^t w}^{k+1}$ *многообразия* W^m, *содержащее точку* $T^t w$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Можно ограничиться случаем $t > 0$. Ясно, что отображение

$$T^t \mid M_w^{k+1}\colon\ M_w^{k+1} \to W^m$$

является гладким вложением и переводит точку w в точку $T^t w$. Ниже будет доказано, что имеется такая окрестность V_w^{k+1} точки w на многообразии M_w^{k+1}, для которой

$$T^t V_w^{k+1} \subset M_{T^t w}^{k+1}.$$

Очевидно, что тем самым лемма 11.2 будет доказана — за $U_{T^t w}^{k+1}$ можно будет принять $T^t V_w^{k+1}$.

Пусть $w' \in M_w^{k+1}$. Обозначим через $\bar{w}$ точку, лежащую над точкой w на нулевой секущей поверхности расслоения $\mathfrak{X} \oplus \mathfrak{Y}$, а через $\bar{\bar{w}}$ — ту точку многообразия $\mathfrak{M}_w^{k+1}$, для которой $h\mu\bar{\bar{w}} = w'$. Если расстояние $\rho(w, w')$ достаточно мало, то

$$T^t w' \in \frac{2}{3}\,\delta\text{-окрестности}\quad T^t w \subset h\mu\mathfrak{V}_\delta^{T^t I}$$

и, следовательно, $\Sigma_t^0 \bar{\bar{w}} \in \mathfrak{V}_\delta^{T^t I}$ (обозначения те же, что и при доказательстве леммы 11.1). Для $T^t w$ роль $\mathfrak{V}_\delta^I$ играет $\mathfrak{V}_\delta^{T^t I}$. Напомню, что для точек $\mathfrak{M}^{m+k} \cap (\mathfrak{X}_\delta \oplus \mathfrak{Y}_\delta)$ отображения Σ_t^0 определены при всех $t > 0$). Поскольку

$$\bar{\bar{w}} \in \mathfrak{M}_w^{k+1} \subset \mathfrak{M}^{m+k},$$

то и $\Sigma_t^0 \bar{\bar{w}} \in \mathfrak{M}^{m+k}$. Итак,

$$\Sigma_t^0 \bar{\bar{w}} \in \mathfrak{V}_\delta^{T^t I} \cap \mathfrak{M}^{m+k} = \mathfrak{M}_{T^t w}^{k+1},$$

откуда и следует, что $T^t w' \in M_{T^t w}^{k+1}$.

Л е м м а 11.3. *Если расстояние между полутраекториями*

$$\{T^t w,\ t \geqslant 0\}\ \text{и}\ \{T^t w_0,\ t \geqslant 0\}$$

не превосходит $\frac{\delta}{2}$, *то* $w \in M_{w_0}^{k+1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. С помощью леммы 10.1 получаем, что существует такая точка $\bar{w} = (w', x', y') \in \mathfrak{X}_\delta \oplus \mathfrak{Y}_\delta$, для которой

$$w' = T^\tau w_0, \qquad |\tau| < \delta, \tag{11.4}$$

$$h(w',\ \varkappa(w')x' + \lambda(w')y') = w \tag{11.5}$$

и положительная полутраектория $\Sigma_t^0 \bar{w}$ не выходит из $\mathfrak{X}_\delta \oplus \mathfrak{Y}_\delta$. Следовательно, $y' = \varphi(w', x')$, что в сочетании с (11.4) дает $(w', x', y') \in \mathfrak{M}_{w_0}^{k+1}$. Утверждение леммы вытекает теперь из (11.5) и из определения $M_{w_0}^{k+1}$.

Л е м м а 11.4. *Если* $w \in M_{w_0}^{k+1}$, *то любая положительная полутраектория системы* (6.1), *начинающаяся на многообразии* $M_{w_0}^{k+1}$ *в некоторой окрестности точки* w, *отстоит от полутраектории* $\{T^t w;\ t \geqslant 0\}$ *не более чем на* $\frac{\delta}{2}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем на минуту какую-нибудь риманову метрику в многообразие (с краем) $\mathfrak{X}_\delta \oplus \mathfrak{Y}_\delta$ (ввиду его компактности конкретный выбор метрики для нас безразличен). Изменив, если потребуется, связанный с этой метрикой масштаб длины в несколько раз, можем считать, что расстояние $\rho(\bar{w}, \bar{\bar{w}})$ между двумя точками $\bar{w}=(w', x', y')$ и $\bar{\bar{w}}=(w'', x'', y'')$ многообразия $\mathfrak{X}_\delta \oplus \mathfrak{Y}_\delta$ не превосходит суммы

$$|x'| + |x''| + |y'| + |y''| + \rho(w', w''),$$

слагаемыми которой являются постоянно используемые нами «ляпуновские» нормы и метрика в W^m. Пусть δ' таково, что из $\rho(\bar{w}, \bar{\bar{w}}) < \delta'$ следует $\rho(h\mu\bar{w}, h\mu\bar{\bar{w}}) < \frac{\delta}{2}$.

Точка $w \in M_{w_0}^{k+1}$ является образом некоторой точки $\bar{w}=(w', x', y') \in \mathfrak{M}_{w_0}^{k+1}$. Достаточно доказать, что любая положительная полутраектория системы $\{\Sigma_t^0\}$, начинающаяся на многообразии $\mathfrak{M}_{w_0}^{k+1}$ в некоторой окрестности точки $\bar{w}$ — такая полутраектория не выходит из $\mathfrak{X}_\delta \oplus \mathfrak{Y}_\delta$, — отстоит от положительной полутраектории $\Sigma_t^0\bar{w}$ не более чем на δ'. Вместо $\{\Sigma_t^0\}$ можно говорить о $\{S_t^0\}$.

Мы знаем, что за некоторое конечное время T всё $S_t^0\mathfrak{M}_{w_0}^{k+1}$ попадает в $\mathfrak{X}_{0,2\delta'} \oplus \mathfrak{Y}_{0,2\delta'}$ и более не выходит оттуда. Поэтому если $\bar{\bar{w}} = (w'', x'' y'') \in \in \mathfrak{M}_{w_0}^{k+1}$ и $\rho(\bar{\bar{w}}, \bar{w})$ достаточно мало, так что, в частности, w'' получается из w' достаточно малым сдвигом по траектории системы (6.1), то, обозначая

$$(w'_t, x'_t, y'_t) = S_t^0\bar{w}, \quad (w''_t, x''_t, y''_t) = S_t^0\bar{\bar{w}},$$

при всех t будем иметь $\rho(w''_t, w'_t) < 0{,}2\delta'$ и, следовательно, при $t \geqslant T$

$$\rho(S_t^0\bar{\bar{w}}, S_t^0\bar{w}) \leqslant |x''_t| + |x'_t| + |y''_t| + |y'_t| + \rho(w''_t, w'_t) \leqslant \delta'.$$

Но если $\bar{\bar{w}}$ взять достаточно близким к $\bar{w}$, то $S_t^0\bar{\bar{w}}$ не сможет отойти от $S_t^0\bar{w}$ более чем на δ' и при $t \in [0, T]$.

Лемма 11.5. *Если $w_1 \in M_{w_0}^{k+1}$, то имеется такое гладкое $(k+1)$-мерное подмногообразие $U_{w_1}^{k+1}$ многообразия W^m, которое содержит точку w_1 и содержится в пересечении многообразий $M_{w_0}^{k+1}$ и $M_{w_1}^{k+1}$:*

$$w_1 \in U_{w_1}^{k+1} \subset M_{w_0}^{k+1} \cap M_{w_1}^{k+1}.$$

Доказательство. Это следует из лемм 11.3 и 11.4.

Лемма. 11.6. *Каждое из многообразий M_w^{k+1} является интегральным многообразием поля $X_w^k \oplus Z_w^1$.*

Доказательство. Это следует из лемм 11.1 и 11.5.

Лемма 11.7. *Для любой точки $w_0 \in W^m$ найдутся такая окрестность $U^m \ni w_0$ и такой гомеоморфизм m-мерного куба*

$$|w_i| < \rho \quad (i = 1, \dots, m)$$

на эту окрестность, при котором образ каждой $(k+1)$-мерной плоскости

$$w_{k+2} = \text{const}, \dots, w_m = \text{const}$$

целиком лежит на некотором многообразии M_w^{k+1}.

Доказательство. Вместо координат $(w_1, \dots, w_m)$ я буду писать

$$(x_1, \dots, x_k, t, y_1, \dots, y_l) = (x, t, y).$$

Я буду считать, что $y \in Y_{w_0}^l$, а вместо куба $|w_i| < \rho$ возьму прямое произведение шара $|x| < \rho$, интервала $|t| < \rho$ и шара $|y| < \rho$ (иными словами, $y \in Y_\rho^l(w_0)$). При отображении $h\lambda$: $Y_{w_0}^l \to W^m$ каждое y переходит в некоторую точку $w = h\lambda y \in W^m$. При этом многообразие $h\lambda Y_\rho^l(w_0)$ «почти касается» поля l-мерных касательных пространств Y_w^l и трансверсально к полю

$(k+1)$-мерных касательных пространств $X_w^k \oplus Z_w^1$. Поэтому можно считать (уменьшив, если потребуется, ρ и δ), что ни одно из многообразий M_w^{k+1} не пересекает $h\,\lambda\,Y_\rho^l\,(w_0)$ в двух точках.

Здесь уместно напомнить, что при построении многообразий M_w^{k+1} фигурировало число δ (характеризующее их «размеры»); см. определение $\mathfrak{M}_{w_0}^{k+1}$. При доказательстве леммы 11.7 приходится иметь дело с многообразиями M_w^{k+1} «разных размеров», поэтому я буду временно пользоваться обозначением, явно указывающим на зависимость этих многообразий от δ и писать $M_\delta^{k+1}\,(w)$ вместо M_w^{k+1}.

В пространствах $X_{h\lambda y}^k$ можно выбрать ортонормированный базис $e_1\,(y),\ldots,$ $e_k\,(y)$, непрерывно зависящий от y; пусть

$$\hat{x}\,(x, y) = \sum_{i=1}^{k} x_i e_i\,(y)\ \cdot$$

Это — точка пространства $X_{h\lambda y}^k$.

Рассмотрим отображение, переводящее точку прямого произведения

$$(x, t, y) \in \{x : |x| < \rho\} \times (-\rho, \rho) \times Y_\rho^l\,(w_0)$$

в точку

$$h\,(\varkappa, \lambda)\, S_t^0\,(h\,\lambda\,y,\ \hat{x}\,(x, y),\ \varphi\,(h\,\lambda\,y,\ \hat{x}\,(x, y)))$$

многообразия W^m. Очевидно, что это — непрерывное отображение, при котором образ каждой $(k+1)$-мерной плоскости $y=\mathrm{const}$ лежит на многообразии $M_\varepsilon^{k+1}\,(h\,\lambda y)$, где ε можно сделать сколько угодно малым, если ρ достаточно мало. (В действительности ε имеет порядок ρ, но это для нас несущественно.) Мы будем считать, что $\varepsilon < \frac{1}{20}\,\delta$.

Докажем, что построенное отображение является гомеоморфизмом. Для этого надо доказать, что при этом отображении две разные точки не могут перейти в одну. Действительно, взаимно однозначное и непрерывное отображение компакта является гомеоморфизмом. У нас, правда, отображаемая область не является компактом, но наши рассуждения годятся и для ее замыкания

$$\{\xi : |\xi| \leqslant \rho\} \times [-\rho, \rho] \times \{y : |y| \leqslant \rho\}.$$

Ясно, что на плоскостях $y = \mathrm{const}$ наше отображение является гомеоморфным. Поэтому достаточно доказать, что при $y_1 \neq y_2$

$$M_\varepsilon^{k+1}\,(h\,\lambda\,y_1) \cap M_\varepsilon^{k+1}\,(h\,\lambda\,y_2) = \phi.$$

Допустим, что

$$w \in M_\varepsilon^{k+1}\,(h\lambda y_1) \cap M_\varepsilon^{k+1}\,(h\lambda y_2).$$

Тогда легко видеть, что расстояние между положительными полутраекториями

$$\{T^t w,\ t \geqslant 0\} \text{ и } \{T^t h\lambda y_1,\ t \geqslant 0\}$$

не превосходит 5ε, равно как и расстояние между положительными полутраекториями

$$\{T^t w,\ t \geqslant 0\} \text{ и } \{T^t h\lambda y_2,\ t \geqslant 0\}.$$

Следовательно, расстояние между полутраекториями

$$\{T^t h\lambda y_1,\ t \geqslant 0\} \text{ и } \{T^t h\lambda y_2,\ t \geqslant 0\}$$

не превосходит $\frac{\delta}{2}$, а тогда, по лемме 11.3,

$$h\lambda y_2 \in M_\delta^{k+1}(h\lambda y_1).$$

Но это означает, что пересечение

$$M_\delta^{k+1}(h\lambda y_1) \cap h\lambda Y_\rho^l(w_0)$$

содержит две разные точки ($h\lambda y_1$ и $h\lambda y_2$), чего, как говорилось выше, не может быть.

Из того, что построенное нами отображение

$$\{x : |x| < \rho\} \times (-\rho, \rho) \times Y_\rho^l(w_0) \to W^m$$

является гомеоморфным отображением m-мерной области в m-мерное многообразие, а точка w_0 является образом внутренней точки отображаемой области, следует, что образ этого отображения является некоторой окрестностью точки w_0 в W^m. Тем самым лемма 11.7 полностью доказана.

Замечу, что можно было бы обойтись без использования топологической теоремы об инвариантности внутренних точек. Вместо этого можно было бы доказать, что если w достаточно близко к w_0, то пересечение

$$M_\rho^{k+1}(w) \cap h\lambda Y_\rho^l(w_0) \neq \phi,$$

а затем, обозначая точку пересечения этих двух многообразий через w_1, доказать, что $w \in M_\rho^{k+1}(w_1)$. Это несложно, но сослаться на теорему об инвариантности внутренних точек все же короче.

Лемма 11.8. *Существуют слоения $\mathfrak{S}^{k+1}$ и $\mathfrak{S}^{l+1}$ многообразия W^m, касательными полями которых служат поля $X_w^k \oplus Z_w^1$ и $Y_w^l \oplus Z_w^1$ соответственно. Каждый слой $\mathfrak{S}^{k+1}$ или $\mathfrak{S}^{l+1}$ инвариантен относительно $\{T^t\}$.*

Доказательство. Как уже говорилось в начале этого параграфа, можно ограничиться только тем, что связано со слоением $\mathfrak{S}^{k+1}$. Отнесем две точки w, w' к одному слою, если существует такая «цепочка» многообразий $M_{w_0}^{k+1}, \ldots, M_{w_n}^{k+1}$, что

$$w \in M_{w_0}^{k+1}, \quad w' \in M_{w_n}^{k+1},$$

$$M_{w_i}^{k+1} \cap M_{w_{i+1}}^{k+1} \neq \phi \quad \text{при } i = 0, \ldots, n-1.$$

Из лемм 11.1 и 11.5 следует, что каждый слой действительно является гладким подмногообразием многообразия W^m, из леммы 11.6 — что касательным полем служит поле $X_w^k \oplus Z_w^1$, а из леммы 11.7 вытекает, что слой, проходящий через точку w (локально), непрерывно зависит от w. Связность слоев очевидна, а полноту их легко вывести из того, что в римановой метрике, индуцированной на многообразиях M_w^{k+1} римановой метрикой во всем W^m, каждое из этих многообразий содержит геодезический шар с центром в w и с радиусом, не меньшим $\frac{2}{3}\delta$ (последнее же следует из того, что край многообразия M_w^{k+1} лежит на границе множества $\bigcup_{|t| \leqslant \delta} \Pi(T^t w)$, и из леммы 8.1).

Из леммы 11.2 следует, что при отображении T^t каждый слой должен перейти в некоторый слой. А так как из самого построения многообразий M_w^{k+1} видно, что при $|t| \leqslant 1$

$$M_w^{k+1} \cap T^t M_w^{k+1} \neq \phi,$$

то при $|t| \leqslant 1$ отображение T^t отображает каждый слой в самого себя. Поскольку же $T^t = T^{\{t\}}(T^1)^{[t]}$, где $\{t\}$ и $[t]$ суть дробная и целая части числа t, то и при любом t отображение T^t отображает каждый слой в тот же самый слой.

§ 12. Вторая часть доказательства теоремы 8

В этом параграфе доказательство теоремы 8 доводится до конца. Строятся слоения $\mathfrak{S}^k$ и $\mathfrak{S}^l$, причем аналогично тому, как это было в предыдущем параграфе, рассмотрения проводятся для слоения $\mathfrak{S}^k$, слои которого склеиваются из маленьких открытых многообразий M_w^k. С построения этих многообразий M_w^k и доказательства того, что они имеют нужные для наших целей свойства, и начинается данный параграф. После того как склеивание слоев $\mathfrak{S}^k$ закончено, доказывается последнее из утверждений теоремы 8: что любое интегральное многообразие поля X_w^k, Y_w^l, $X_w^k \oplus Z_w^1$ или $Y_w^l \oplus Z_w^1$ является открытым подмножеством одного из слоев слоения $\mathfrak{S}^k$, $\mathfrak{S}^l$, $\mathfrak{S}^{k+1}$ или $\mathfrak{S}^{l+1}$ соответственно. В действительности доказывается более сильное утверждение (леммы 12.10, 12.11).

В системе (8.19) $c(w, x, y)$ удовлетворяет условиям

$$|c(w, x, y)| < o(|x| + |y|), \qquad |c_x|, |c_y| < \Omega(|x| + |y|).$$

В дополнение к уже сделанным ранее предположениям о малости δ будем считать δ столь малым, что в $\mathfrak{X}_\delta \oplus \mathfrak{Y}_\delta$

$$|c_x|, \ |c_y| < 0{,}1. \tag{12.1}$$

Лемма 12.1. *Если*

$$\overline{w} = (w, x, y) \in \mathfrak{M}^{k+m} \cap (\mathfrak{X}_\delta \oplus \mathfrak{Y}_\delta), \tag{12.2}$$

то сходится интеграл

$$\int_0^\infty c\left(\Sigma_t^0 \overline{w}\right) dt = \sigma(\overline{w}), \tag{12.3}$$

причем

$$|\sigma(\overline{w})| \leqslant 0{,}5\,|x| \tag{12.4}$$

и ограничения $\sigma\,|\,\mathfrak{M}_{w_0}^{k+1}$ функции $\sigma(\overline{w})$ на многообразиях $\mathfrak{M}_{w_0}^{k+1}$ являются гладкими функциями.

Доказательство. Сходимость интеграла (12.3) следует из того, что $|c| < o(|x| + |y|)$ и из того, что при выполнении (12.2) $\Sigma_t^0 \binom{x}{y} \to 0$ экспоненциально и равномерно по $\overline{w}$. Для доказательства неравенства (12.4) перепишем с помощью замечания 8.2 интеграл (12.3) в следующем виде:

$$\sigma(\overline{w}) = \int_0^\infty c\left(\Sigma_t^0 \overline{w}\right) dt = \int_0^\infty c\,(S^0_{s\,(t,\,\pi\overline{w},\,h\,\mu\,\overline{w})}\,(\overline{w}))\,dt = \int_0^\infty \frac{c\,(S_s^0\,\overline{w})}{1 + c\,(S_s^0\,\overline{w})}\,ds. \tag{12.5}$$

(Здесь π, как и обычно, обозначает проекцию $\mathfrak{X} \oplus \mathfrak{X}\ W^m$). Поэтому

$$|\sigma(\overline{w})| \leqslant \int_0^\infty |2\,c\,(S_s^0\,\overline{w})|\,ds\ .$$

Но из (11.3), (11.1) и (12.1) следует, что

$$|c\,(S_s^0\,\overline{w})| \leqslant |c_x|\,e^{-0{,}5\,t}\,|x| + |c_y|\,|\varphi_x|\,e^{-0{,}5\,t}\,|x| \leqslant 0{,}11\,e^{-0{,}5\,t}\,|x|,$$

откуда

$$|\sigma(\overline{w})| \leqslant \int_0^\infty 0{,}22\,e^{-0{,}5\,t}\,|x|\,dt = 0{,}44\,|x| \leqslant 0{,}5\,|x|.$$

При доказательстве гладкости $\sigma\,|\,\mathfrak{M}_{w_0}^{k+1}$ я буду пользоваться локальными координатами в $\mathfrak{M}_{w_0}^{k+1}$, введенными при доказательстве леммы 11.1. Пусть точка $\overline{w}$ имеет координаты (x, t) (x здесь другое, нежели в (12.2)).

Имеем

$$\bar{w} = \bar{w}(x, t) = S_t^0(w_1, x, \varphi(w_1, x)),$$

и следовательно (поскольку $S_s^0 S_t^0 = S_{s+t}^0$)

$$\sigma(\bar{w}) = \sigma(x, t) = \int_0^\infty \frac{c(S_{s+t}^0(w_1, x, \varphi(w_1, x)))}{1 + c(S_{s+t}^0(w_1, x, \varphi(w_1, x)))}\, ds =$$

$$= \int_t^\infty \frac{c(S_s^0(w_1, x, \varphi(w_1, x)))}{1 + c(S_s^0(w_1, x, \varphi(w_1, x)))}\, ds. \tag{12.6}$$

Теперь, очевидно, что функция $\sigma(x, t)$ дифференцируема по t и что производная $\frac{\partial\sigma}{\partial t}$ непрерывна по (x, t). Займемся производной по x. Производная подинтегрального выражения по x равна

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c}{1+c}\right) = \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{c}{1+c}\right) \cdot \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{1}{(1+c)^2}\frac{\partial c}{\partial x},$$

где $c = c(S_s^0(w_1, x, \varphi(w_1, x)))$. Существование непрерывной производной $\frac{\partial\sigma}{\partial x}$ будет доказано, если нам удастся установить, что $\frac{\partial c}{\partial x} \to 0$ экспоненциально и равномерно по $\bar{w} \in \mathfrak{M}_{w_0}^{k+1}$ при $s \to +\infty$. Обозначим x-компоненту $S_s^0(w_1, x, \varphi(w_1, x))$ через $\bar{x}(x, s)$; y-компонента $\bar{y}(x, s)$ должна быть равна $\varphi(T^s w_1, \bar{x}(x, s))$, ибо $S_s^0 \mathfrak{M}^{m+k} = \mathfrak{M}^{m+k}$. Итак,

$$S_s^0(w_1, x, \varphi(w_1, x)) = (T^s w_1, \bar{x}(x, s), \bar{y}(x, s)) =$$

$$= (T^s w_1, \bar{x}(x, s), \varphi(T^s w_1, \bar{x}(x, s))),$$

поэтому

$$\frac{\partial c}{\partial x} = [c_{\bar{x}}(T^s w_1, \bar{x}, \bar{y}) + c_{\bar{y}}(T^s w_1, \bar{x}, \bar{y})\,\varphi_{\bar{x}}(T^s w_1, \bar{x})]\,\bar{x}_x(x, s).$$

Следовательно, достаточно показать, что $\bar{x}_x(x, s) \to 0$ экспоненциально и равномерно по $\bar{w} \in \mathfrak{M}_{w_0}^{k+1}$ при $s \to +\infty$. Мы докажем, что при $s > 0$

$$|\bar{x}_x(x, s)| < e^{-0,5s}. \tag{12.7}$$

$\{S_t^0 \mid \mathfrak{M}^{m+k}\}$—однопараметрическая группа преобразований, переводящих точку $(w, x, \varphi(w, x))$ в $(w_t, x_t, \varphi(w_t, x_t))$, где

$$w_t = T^t w, \quad x_t = P(t, w)\, x + p(t, w, x, \varphi(w, x)).$$

Мы знаем, что при $0 \leqslant t \leqslant 1$

$$|P + p_x + p_y \varphi_x| \leqslant |P| + 0{,}11t \leqslant e^{-t} + 0{,}11t \leqslant e^{-0,5t}.$$

Представив число s в виде суммы его целой и дробной частей: $s = [s] + \{s\}$, мы можем записать S_s^0 в виде

$$S_s^0 = S_{\{s\}}^0 (S_1^0)^{[s]}.$$

Таким образом, полагая $x_0 = x$,

$$x_{i+1} = P(1, T^i w_1)\, x_i + p(1, T^i w_1, x_i, \varphi(T^i w_1, x_i)), \quad i < [s],$$

и имея в виду, что

$$\bar{x}(x, s) = P(\{s\}, T^{[s]} w_1)\, x_{[s]} + p(\{s\}, T^{[s]} w_1, x_{[s]}, \varphi(T^{[s]} w_1, x_{[s]})),$$

получаем

$$|\bar{x}_x'(x, s)| = \left| \frac{\partial \bar{x}}{\partial x_{[s]}} \frac{\partial x_{[s]}}{\partial x_{[s-1]}} \cdots \frac{\partial x_{[1]}}{\partial x} \right| \leqslant e^{-0,5\{s\}} (e^{-0,5})^{[s]} = e^{-0,5s}.$$

Тем самым (12.7) доказано.

По-прежнему пользуясь координатами (x, t) в $\mathfrak{M}_{w_0}^{k+1}$, рассмотрим гладкую функцию $t + \sigma(x, t)$. Из (12.6)

$$\frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial t} = -\frac{c}{1+c},$$

а следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t}(t + \sigma(x, t)) = 1 - \frac{c}{1+c} = \frac{1}{1+c} \neq 0,$$

т. е. градиент функции $t + \sigma(x, t)$ отличен от нуля. Поэтому ее поверхности уровня

$$t + \sigma(x, t) = \mathrm{const}$$

являются гладкими подмногообразиями многообразия $\mathfrak{M}_{w_0}^{k+1}$. Поверхность уровня, которая проходит через точку $\bar{w}_0 \in \mathfrak{M}_{w_0}^{k+1}$, лежащую на нулевой секущей поверхности расслоения $\mathfrak{X} \oplus \mathfrak{Y}$ над точкой w_0, обозначим через $\mathfrak{M}_{w_0}^{k}$. Образ $\mathfrak{M}_{w_0}^{k}$ при отображении $h\mu$ обозначим через $M_{w_0}^{k}$.

Лемма 12.2. *$M_{w_0}^{k}$ является гладким k-мерным подмногообразием многообразия W^m, касающимся в точке w_0 k-мерного касательного подпространства $X_{w_0}^{k}$.*

Доказательство. $\mathfrak{M}_{w_0}^{k}$, как уже говорилось, является подмногообразием многообразия $\mathfrak{M}_{w_0}^{k+1}$, а при доказательстве леммы 11.1 мы видели, что ограничение на этом последнем многообразии отображения $h\mu$ является гладким вложением.

Утверждение, что $M_{w_0}^{k}$ касается $X_{w_0}^{k}$, равносильно утверждению, что в $\mathfrak{X} \oplus \mathfrak{Y}$ многообразие $\mathfrak{M}_{w_0}^{k}$ касается в точке $\bar{w}_0 = (w_0, 0, 0)$ слоя $X_{w_0}^{k}$. Поскольку $\mathfrak{M}_{w_0}^{k+1}$ касается $X_{w_0}^{k} \oplus Z_{w_0}^{1}$ и $\mathfrak{M}_{w_0}^{k}$ является поверхностью уровня функции $t + \sigma(x, t)$, то для доказательства того, что $\mathfrak{M}_{w_0}^{k}$ касается в точке $\bar{w}_0$ слоя $X_{w_0}^{k}$, достаточно показать, что

$$\frac{\partial}{\partial x}(t + \sigma(x, t)) = 0 \quad \text{при } x = 0,$$

т. е. что $\sigma_x(0, t) = 0$. Но это получается посредством дифференцирования интеграла (12.6) по x при $x = 0$. Законность дифференцирования под знаком интеграла была установлена при доказательстве леммы 12.1. Используя те же обозначения, что и в этом доказательстве, имеем

$$\sigma_x(0, t) = \int_t^{\infty} \frac{1}{(1+c)^2} (c_{\bar{x}} + c_{\bar{y}}\varphi_{\bar{x}}) \bar{x}_x \, ds,$$

а так как $\bar{x}(0, s) = 0$, $\bar{y}(0, s) = 0$ и $c(w, x, y) < o(|x| + |y|)$, то $c_{\bar{x}} = 0$, $c_{\bar{y}} = 0$ и интеграл равен нулю.

Лемма 12.3. *Пусть $w \in M_{w_0}^{k+1}$ и пусть точки w, w_0 являются образами точек $\bar{w}, \bar{w}_0 \in \mathfrak{M}_{w_0}^{k+1}$ при отображении $h\mu$, причем в многообразии $\mathfrak{M}_{w_0}^{k+1}$ точка $\bar{w}$ имеет координаты (x, t) (в той же системе координат, что и при доказательстве леммы 11.1). Тогда при $\tau \to +\infty$ расстояние*

$$\rho(T^{\tau}w, T^{\tau+\sigma(\bar{w})+t+\delta}w_0) \to 0.$$

Доказательство. Согласно замечанию 8.2,

$$\Sigma^0_\tau \bar{w} = S^0_{s(\tau, \pi\bar{w}, w)}(\bar{w})$$

и

$$s(\tau, \pi\bar{w}, w) = \tau + \int_0^\tau c(\Sigma^0_\vartheta \bar{w})\, d\vartheta.$$

При $\tau \to +\infty$

$$\int_0^\tau c(\Sigma^0_\vartheta \bar{w})\, d\vartheta \to \sigma(\bar{w}),$$

поэтому

$$\rho(\Sigma^0_\tau \bar{w}, S^0_{\tau+\sigma(\bar{w})}(\bar{w})) \to 0. \tag{12.8}$$

Но

$$S^0_{\tau+\sigma(\bar{w})}(\bar{w}) = (T^{\tau+\sigma(\bar{w})}\pi\bar{w}, x_\tau, y_\tau),$$

где

$$|x_\tau|, |y_\tau| \to 0 \text{ при } \tau \to +\infty. \tag{12.9}$$

Далее, точка $\bar{w}$ имеет координаты (x, t); это значит, что $\bar{w} = S^0_t(w_1, x, \varphi(w_1, x))$, где $w_1 = T^\delta w_0$. Таким образом, $\pi\bar{w} = T^t w_1 = T^{t+\delta}_{w_0}$ и, стало быть,

$$S^0_{\tau+\sigma(\bar{w})}(\bar{w}) = (T^{\tau+\sigma(\bar{w})+t+\delta} w_0, x_\tau, y_\tau). \tag{12.10}$$

(12.8) — (12.10) влекут за собой утверждение леммы.

Лемма 12.4. *$M^k_{w_0}$ есть множество*

$$\{w : w \in M^{k+1}_{w_0}, \lim_{t\to+\infty} \rho(T^t w, T^t w_0) = 0\}.$$

Доказательство. Это следует из определения $M^k_{w_0}$ и из леммы 12.3.

Лемма 12.5. *При любых t, w_0 в пересечении*

$$T^t M^{k+1}_{w_0} \cap M^{k+1}_{T^t w_0}$$

содержится некоторое гладкое k-мерное подмногообразие $U^k_{T^t w_0}$ многообразия W^m, содержащее точку $T^t w_0$.

Доказательство. Это следует из лемм 11.2 и 12.4.

Лемма. 12.6. *Если $w_1 \in M^k_{w_0}$, то имеется такое гладкое k-мерное подмногообразие $U^k_{w_1}$ многообразия W^m, которое содержит точку w_1 и содержится в пересечении многообразий $M^k_{w_0}$ и $M^k_{w_1}$:*

$$w_1 \in U^k_{w_1} \subset M^k_{w_0} \cap M^k_{w_1}.$$

Доказательство. Это следует из лемм 11.5 и 12.4.

Лемма 12.7. *Каждое из многообразий M^k_w является интегральным многообразием поля X^k_w.*

Доказательство. Это следует из лемм 12.2 и 12.6.

Наряду с координатами (x, t) в $\mathfrak{M}^{k+1}_{w_0}$ удобно ввести другие координаты (ξ, τ), где $\xi \in X^k_\delta(w_0)$, $|\tau| < \delta$. А именно, возьмем какое-нибудь изометрическое линейное отображение

$$G(\tau, w_0) : X^k_{w_0} \longrightarrow X^k_{T^\tau w_0}.$$

Тогда ясно, что точки многообразия $\mathfrak{M}^{k+1}_{w_0}$ имеют вид

$$(T^\tau w_0, G(\tau, w_0)\xi, \varphi(T^\tau w_0, G(\tau, w_0)\xi)) \quad (|\tau| < \delta, \xi \in X^k_\delta(w_0)). \qquad (12.11)$$

Стало быть, (ξ, τ) можно принять за координаты в $\mathfrak{M}^{k+1}_{w_0}$.

Отображение $G(\tau, w_0)$ проще всего построить так. Композицией линейного отображения

$$P(\tau, w_0): X^k_{w_0} \longrightarrow X^k_{T^\tau w_0}$$

и сопряженного к нему линейного отображения

$$P^*(\tau, w_0): X^k_{T^\tau w_0} \longrightarrow X^k_{w_0}$$

является симметрический положительный линейный оператор

$$P^*(\tau, w_0) P(\tau, w_0): X^k_{w_0} \longrightarrow X^k_{w_0}.$$

Пусть

$$F(\tau, w_0) = \sqrt{P^*(\tau, w_0) P(\tau, w_0)},$$

причем имеется в виду положительный квадратный корень; тогда за G можно взять $G(\tau, w_0) = P(\tau, w_0) F^{-1}(\tau, w_0)$.

Система координат (ξ, τ) в $\mathfrak{M}^{k+1}_{w_0}$ — гладкая, в чем проще всего убедиться, связав ее с ранее использовавшейся системой координат (x, t), гладкость которой была установлена при доказательстве леммы 11.1. Ясно, что $\tau = t + \delta$. Далее, если точка имеет координаты (x, t), то ее x-компонента равна

$$P(t, w_1) x + p(t, w_1, x, \varphi(w_1, x)),$$

где $w_1 = T^\delta w_0$; сопоставляя это с (12.11), получаем

$$\xi(x, t) = G^{-1}(t + \delta, w_0)[P(t, w_1) x + p(t, w_1, x, \varphi(w_1, x))].$$

Теперь гладкость $\xi(x, t)$ очевидна ($F = \sqrt{PP^*}$ гладко зависит от P), причем из изометричности G и из сказанного при доказательстве леммы 11.1 следует, что производная ξ по x

$$\xi_x(x, t) = G^{-1}(P + p_x + p_y \varphi_x)$$

является расширяющим оператором.

Выразим $\sigma(\bar{w})$ через ξ и τ: $\sigma = \sigma(\xi, \tau)$. Докажем, что при достаточно малом δ

$$|\sigma_\tau(\xi, \tau)| < 1. \qquad (12.12)$$

Действительно,

$$\sigma_\tau(\xi, \tau) = \sigma_t(x, t) + \sigma_x(x, t) x_\tau(\xi, \tau).$$

Из (12.6) $\sigma_t(x, t) = -\frac{c}{1+c} = O(\delta)$. Далее, дифференцируя (12.6) по x и используя (12.1) и (11.5), легко получить, что и $\sigma_x(x, t) = O(\delta)$. Поэтому достаточно доказать равномерную ограниченность $x_\tau(\xi, \tau)$. Дифференцируя по t тождество

$$\xi(x(\xi, \tau), t) = \xi,$$

получим

$$\xi_x(x, t) x_\tau(\xi, \tau) + \xi_t(x, t) = 0,$$

откуда

$$x_\tau(\xi, \tau) = -\xi_x^{-1}(x, t) \xi_t(x, t),$$

так что

$$|x_\tau(\xi, \tau)| \leqslant |\xi_t(x, t)|,$$

ибо оператор ξ_x — расширяющий. Равномерная же ограниченность $\xi_t(x, t)$ — более того, равномерная по w_0, $t \in [-\delta, \delta]$ оценка $|\xi_t| \leqslant O(|\xi|) \leqslant O(\delta)$ — следует из того, что $\xi(x, t)$ является первой (или, если угодно, второй) координатой некоторой траектории системы S_t^0 и удовлетворяет первому из уравнений системы (8.21), которое в данном случае можно записать в виде

$$\dot{\xi} = A(w_0, t)\,\xi + a(w_0, t, \xi) \tag{12.13}$$

$$(w_0 \in W^m; \quad t \in [-2\delta, 0]; \quad \xi \in X_\delta^k(w_0)).$$

Здесь A и a — непрерывные функции своих аргументов, причем существует производная a_ξ, тоже непрерывная по $(w_0, t\ \xi)$; $a(w_0, t, 0) = 0$ и $a_\xi(w_0, t, 0) = 0$. Отсюда следует, что равномерно по $(w_0, t) \in W^m \times [-2\delta, 0]$

$$|\dot{\xi}| = |A\xi + a| \leqslant O(\xi).$$

Отображение $G(\tau, w_0)$ как бы позволило нам, оставаясь в слое $X_{w_0}^k$, следить за тем, как точка $\overset{0}{\Sigma}_t \overline{w}$ переходит из слоя в слой. Поэтому в (12.13)

$$A(w_0, t) \in \mathrm{Hom}(X_{w_0}^k, X_{w_0}^k), \qquad a(w_0, t, \xi) \in X_{w_0}^k.$$

Ср. с замечанием 8.1.

Вернемся к определению многообразий $\mathfrak{M}_{w_0}^k$. Точку $\overline{w} \in \mathfrak{M}_{w_0}^{k+1}$, имеющую координаты (ξ, τ), обозначим через $\overline{w}(\xi, \tau, w_0)$. В координатах (ξ, τ) уравнение $t + \sigma(x, t) = \mathrm{const}$ принимает вид $\tau + \sigma(x, t) = \mathrm{const}$, а подробнее

$$\tau + \sigma(\overline{w}(\xi, \tau, w_0)) = \mathrm{const}.$$

Неравенство (12.4) в координатах (ξ, τ) можно переписать так:

$$|\sigma(\overline{w}(\xi, \tau, w_0))| \leqslant \frac{1}{2}|\xi|. \tag{12.14}$$

В силу (12.12),

$$\frac{\partial}{\partial \tau}[\tau + \sigma(\overline{w}(\xi, \tau, w_0))] \neq 0. \tag{12.15}$$

Из (12.14) и (12.15) следует, что при $|\vartheta| < 0{,}5\,\delta$ уравнение

$$\tau + \sigma(\overline{w}(\xi, \tau, w_0)) = \vartheta$$

имеет ровно одно решение $\tau = \tau(\xi, \vartheta, w_0)$, которое непрерывно по (ξ, ϑ, w_0) и имеет непрерывную производную τ_ϑ. Из имеющихся определений следует, что

$$\mathfrak{M}_{w_0}^k = \{\overline{w} : \overline{w} = \overline{w}(\xi, \tau(\xi, 0, w_0), w_0), \ \ \xi \in X_\delta^k(w_0)\}$$

и, более того (см. леммы 12.3, 12.4),

$$\mathfrak{M}_{T^\vartheta w_0}^k = \{\overline{w} : \overline{w} = \overline{w}(\xi, \tau(\xi, \vartheta, w_0), w_0)\}.$$

Лемма 12.8. *Для любой точки $w_0 \in W^m$ найдутся такая окрестность $U^m \ni w_0$ и такой гомеоморфизм m-мерного куба*

$$|w_i| < \rho \quad (i = 1, \ldots, m)$$

на эту окрестность, при котором образ каждой k-мерной плоскости

$$w_{k+1} = \mathrm{const}, \ldots, w_m = \mathrm{const}$$

целиком лежит на некотором многообразии M_w^k.

Доказательство. Вместо координат $(w_1, \ldots, w_m)$ я буду писать (ξ, ϑ, y). Я буду считать, что $\xi \in X^k_{w_0}$, $y \in Y^l_{w_0}$, а вместо куба $|w_i| < \rho$ возьму прямое произведение шара $|\xi| < \rho$, интервала $|\vartheta| < \rho$ и шара $|y| < \rho$:

$$(\xi, \vartheta, y) \in X^k_\rho(w_0) \times (-\rho, \rho) \times Y^l_\rho(w_0). \tag{12.16}$$

Как и при доказательстве леммы 11.7, выберем в пространствах $X^k_{h\lambda y}$ ортонормированный базис $e_1(y), \ldots, e_k(y)$, непрерывно зависящий от y. В частности, $e_1(0), \ldots, e_k(0)$ — базис в $X^k_{w_0}$, и $\xi \in X^k_{w_0}$ можно разложить по этому базису:

$$\xi = \sum_{i=1}^{k} \xi_i e_i(0).$$

Положим

$$\hat{\xi}(\xi, y) = \sum_{i=1}^{k} \xi_i e_i(y).$$

Это — точка пространства $X^k_{h\lambda y}$.

Рассмотрим отображение, переводящее точку (12.16) в точку

$$h(\varkappa, \lambda; \overline{w}(\hat{\xi}(y, \xi), \tau(\hat{\xi}(y, \xi), \vartheta, h\lambda y), h\lambda y).$$

Непрерывность данного отображения очевидна. Никакие две точки не переходят в одну,— это вытекает из рассуждений, непосредственно предшествующих настоящей лемме, и из того, что, как мы видели при доказательстве леммы 11.7, при $y_1 \neq y_2$

$$M^{k+1}_\rho(h\lambda y_1) \cap M^{k+1}_\rho(h\lambda y_2) = \phi.$$

То, что при $y = \text{const}$ отображение гомеоморфно, тоже ясно после всего сказанного выше. Как и при доказательстве леммы 11.7, мы можем закончить ссылкой на теорему об инвариантности внутренних точек и замечанием, что без этой теоремы можно было бы обойтись.

Лемма 12.9. *Существуют слоения $\mathfrak{S}^k$ и $\mathfrak{S}^l$ многообразия W^m, касательными полями которых служат поля X^k_w и Y^l_w соответственно. Эти слоения инвариантны относительно потока $\{T^t\}$ в том смысле, что при отображениях T^t каждый слой переходит в некоторый (вообще говоря, другой) слой.*

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 11.8.

Лемма 12.10. *Если гладкая кривая $L: w = w(s)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$ в каждой своей точке касается поля $X^k_w \oplus Z^1_w$:*

$$w'(s) \in X^k_{w(s)} \oplus Z^1_{w(s)}, \quad 0 \leqslant s \leqslant 1 \tag{12.17}$$

(соответственно поля $Y^l_w \oplus Z^1_w$), то эта кривая целиком лежит в некотором слое слоения $\mathfrak{S}^{k+1}$ (соответственно $\mathfrak{S}^{l+1}$).

Доказательство. Как обычно, можно ограничиться утверждением, относящимся к $\mathfrak{S}^{k+1}$. (12.17) означает, что при всех $s \in [0, 1]$

$$w'(s) = \xi(s) + \zeta(s), \quad \xi(s) \in X^k_{w(s)}, \quad \zeta(s) \in Z^1_{w(s)}.$$

Рассмотрим кривую T^tL, где $t \geqslant 0$. Имеем

$$\frac{d}{ds} T^t w(s) = \widetilde{T}^t w'(s) = \widetilde{T}^t \xi(s) + \widetilde{T}^t \zeta(s).$$

Из (7.31)

$$|\widetilde{T}^t\xi(s)| \leqslant e^{-t}|\xi(s)|;$$

кроме того, $\widetilde{T}^t\zeta(s) = \mathrm{const}\cdot f(T^t w(s))$, так что

$$|\widetilde{T}^t\zeta(s)| \leqslant \frac{\max\limits_{w\in W^m}|f(w)|}{\min\limits_{w\in W^m}|f(w)|}|\zeta(s)|.$$

Отсюда и из (7.2) следует, что

$$\left|\frac{d}{ds}T^t w(s)\right| \leqslant a|w'(s)| \quad \text{при } t \geqslant 0,$$

где a — некоторая константа. Поэтому

$$\text{длина } T^t L \leqslant a \cdot \text{длина } L.$$

Из этого вытекает, что если длина кривой L меньше $\frac{\delta}{2a}$, то при всех $s \in [0,1]$ расстояние между полутраекториями

$$\{T^t w(s),\ t \geqslant 0\} \quad \text{и} \quad \{T^t w(0),\ t \geqslant 0\}$$

не превосходит $\frac{\delta}{2}$. Согласно лемме 11.3, отсюда следует, что при любом $s \in [0,1]$ $w(s) \in M^{k+1}_{w(0)}$. Если же длина кривой больше $\frac{\delta}{2a}$, то эту кривую можно разбить на несколько дуг $w_0\, w_1, w_1\, w_2, \ldots, w_{n-1}w_n$, длина каждой из которых не превосходит $\frac{\delta}{2a}$. Тогда, согласно сказанному выше,

$$\text{дуга } \ w_i w_{i+1} \subset M^{k+1}_{w_i} \quad (i = 0, \ldots, n-1),$$

а это и означает, что кривая L целиком лежит в некотором слое слоения $\mathfrak{S}^{k+1}$.

Лемма 12.11. *Если гладкая кривая* L: $w = w(s)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$ *в каждой своей точке касается поля* X^k_w:

$$w'(s) \in X^k_{w(s)},\ 0 \leqslant s \leqslant 1 \tag{12.18}$$

(*соответственно поля* Y^l_w), *то эта кривая целиком лежит в некотором слое слоения* $\mathfrak{S}^k$ (*соответственно* $\mathfrak{S}^l$).

Доказательство. Из (12.18) и (7.31) следует, что при $t \geqslant 0$

$$|\widetilde{T}^t w'(s)| \leqslant e^{-t}|w'(s)|,$$

поэтому

$$\text{длина } T^t L \leqslant e^{-t} \cdot \text{длина } L.$$

Кроме того, из леммы 12.10 следует, что кривая L целиком лежит в некотором слое слоения $\mathfrak{S}^{k+1}$. Если длина L меньше δ, то с помощью леммы 12.4 получаем, что $L \subset M^k_{w(0)}$. Если длина L больше δ, то разбиваем L на несколько дуг, длина каждой из которых меньше δ.

§ 13. Лемма 13.1 и доказательство теоремы 3

Лемма 13.1. *Для любого* $\delta > 0$ *найдется* $\varepsilon > 0$ *со следующим свойством. Пусть точка* $w \subset W^m$ *и число* $\tau > \delta$ *таковы, что* $\rho(w, T^\tau w) < \varepsilon$. *Тогда существует такая периодическая траектория* $\{T^t\overline{w}\}$ *с некоторым периодом* τ', *что* $\rho(w, \overline{w}) < \delta$, *и даже более того: расстояние между кривыми*

$$\{T^t w, 0 \leqslant t \leqslant \tau\} \quad \text{и} \quad \{T^t \overline{w}, 0 \leqslant t \leqslant \tau'\}$$

(*понимаемое в смысле* § 10) *меньше* δ.

Доказательство. Лемма 13.1 вытекает из следующих двух лемм.

Лемма 13.2. *Для любого $\delta > 0$ найдется $\varepsilon > 0$ со следующим свойством. Пусть точка $w \in W^m$ и число $\tau > \delta$ таковы, что $\rho(w, T^\tau w) < \varepsilon$. Тогда существует такая гладкая класса C^1 периодическая функция $w = \hat{w}(t)$ с периодом τ, что*

$$\left| \frac{d\hat{w}(t)}{dt} - f(\hat{w}(t)) \right| < \delta \quad \text{при всех } t, \tag{13.1}$$

$$\rho(\hat{w}(t), T^t w) < \delta \quad \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \tau. \tag{13.2}$$

Лемма 13.3. *Для любого $\delta > 0$ найдется $\varepsilon_2 > 0$ со следующим свойством. Пусть имеется замкнутая кривая, описываемая периодической функцией $\hat{w}(t) \in C^1$ с каким-нибудь периодом τ, причем при всех t выполняется неравенство (6.5). Тогда у (У)-потока (6.1) имеется такая периодическая траектория $\{T^t \bar{w}\}$ с некоторым периодом τ', что $\rho(\hat{w}(0), \bar{w}) < \delta$, и даже более того: расстояние между кривыми*

$$\{\hat{w}(t),\ 0 \leqslant t \leqslant \tau\} \ \text{и}\ \{T^t \bar{w},\ 0 \leqslant t \leqslant \tau'\}$$

меньше δ.

Доказательство леммы 13.2. Считая, что расстояние между точками w и w' многообразия W^m мало, а $t \in [0,1]$, обозначим через $\gamma(w, w', t)$ ту точку кратчайшего геодезического отрезка, соединяющего w и w', которая делит этот отрезок в отношении $t : (1 - t)$. Обозначая, как и в § 8, экспоненциальное геодезическое отображение через $h = h(w, \omega)$ ($w \in W^m$, $\omega \in R^m_w$), можем перефразировать определение $\gamma(w, w', t)$ следующим образом: если

$$h(w, \omega) = w', \tag{13.3}$$

то

$$\gamma(w, w', t) = h(w, t\omega). \tag{13.4}$$

Из (13.3) можно выразить $\omega = \omega(w, w')$ как гладкую (и даже бесконечно дифференцируемую, ибо мы пользуемся римановой метрикой класса C^∞) функцию своих аргументов. Подставив $\omega = \omega(w, w')$ в (13.4), получим, что γ гладко (и даже с гладкостью C^∞) зависит от своих аргументов.

При достаточно малом ε из $\rho(w, T^\tau w) < \varepsilon$ следует, что

$$\rho(T^t w, T^{t+\tau} w) < 2\varepsilon \quad \text{при } t \in [0, \sqrt{\varepsilon}]. \tag{13.5}$$

(Действительно, хорошо известно, что расстояние между любыми двумя точками, движущимися каждая по своей траектории, возрастает не более чем экспоненциально с некоторым ограниченным показателем.) Положим

$$\hat{w}(t) = \begin{cases} \gamma\left(T^t w, T^{t+\tau} w, \alpha\left(\dfrac{t}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right) & \text{при } 0 \leqslant t < \sqrt{\varepsilon}, \\ T^t w & \text{при } \sqrt{\varepsilon} \leqslant t \leqslant \tau, \end{cases}$$

где функция $\alpha(s) \in C^\infty$ такова, что $\alpha(s) = 1$ при $s \in [0, \frac{1}{3}]$, $\alpha(s)$ монотонно убывает при $s \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, $\alpha(s) = 0$ при $s \in \left[\frac{2}{3}, 0\right]$; конкретный выбор функции $\alpha(s)$ для нас безразличен. Если ε достаточно мало, то это определение $\hat{w}(t)$ законно и выполняется (13.2). Очевидно также, что $\hat{w}(t) \in C^1$ (и даже $\hat{w}(t) \in C^2$), ибо из $f \in C^1$ следует, что каждая траектория дважды непрерывно дифференцируема, а при «соединении» двух траекторий с помощью γ потери гладкости не происходит), и что при $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3}\sqrt{\varepsilon}$

$$\hat{w}(t) = T^{\tau+t} w.$$

Отсюда вытекает, что $\hat{w}(t)$ продолжается с сохранением гладкости на всю ось t как периодическая функция с периодом τ.

Осталось доказать, что при достаточно малом ε выполняется (13.1). Так как $\hat{w}(t)$ при $\sqrt{\varepsilon} \leqslant t \leqslant \tau$ совпадает с некоторой траекторией системы $\dot{w} = f(w)$, то в рассмотрении нуждаются только моменты времени $t \in [0, \sqrt{\varepsilon}]$. Обозначая производные функции $\gamma(w, w', s)$ по ее первому, второму и третьему аргументам через γ_w, $\gamma_{w'}$ и γ_s соответственно, имеем

$$\frac{d\hat{w}(t)}{dt} = \gamma_w f(T^t w) + \gamma_{w'} f(T^{t+\tau} w) + \gamma_s \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \alpha' \left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}\right),$$

где производные функции γ берутся в точке

$$\left(T^t w,\ T^{t+\tau} w,\ \alpha\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right).$$

Чтобы доказать (13.1), установим, что

$$|\gamma_w(w, w', s) f(w) + \gamma_{w'}(w, w', s) f(w') - f(\gamma(w, w', s))| = O(\rho(w, w')) \quad (13.6)$$

(равномерно по s) и

$$|\gamma_s(w, w', s)| = \rho(w, w'). \quad (13.7)$$

Отсюда и из (13.5) будет следовать, что

$$\left|\frac{d\hat{w}(t)}{dt} - f(\hat{w}(t))\right| = O(\sqrt{\varepsilon}).$$

Выражение, стоящее под знаком модуля в (13.6), является гладкой функцией своих аргументов, которая при $w = w'$ равна

$$\gamma_w(w, w, s) f(w) + \gamma_{w'}(w, w, s) f(w) - f(w),$$

т. е. нулю, ибо из $\gamma(w, w, s) = w$ следует, что

$$\gamma_w(w, w, s) + \gamma_{w'}(w, w, s) = 1_{R^m_w}.$$

Отсюда вытекает (13.6). Наконец, (13.7) выводится так: если зафиксировать w и w', то при изменении s от 0 до 1 точка $\gamma(w, w', s)$ будет двигаться с постоянной скоростью по кратчайшему геодезическому отрезку, соединяющему w и w'; за единичное время она пройдет весь отрезок и поэтому ее скорость равна его длине.

Доказательство леммы 13.3. Обозначим через L замкнутую кривую, описываемую периодической функцией $\hat{w}(t)$, о которой идет речь в формулировке леммы 13.3. В § 8 мы для описания поведения траекторий системы (6.1) возле кривой L ввели систему $\{S_t\}$ в $\mathfrak{X}^L_\delta \oplus \mathfrak{Y}^L_\delta$, описывающую, как меняется со временем точка пересечения какой-нибудь траектории системы (6.1) с площадкой $\Pi_\delta(\overline{w}(t))$. Площадки $\Pi_\delta(w)$ строились с помощью поля V^{m-1}_w, которое в данном случае, как уже объяснялось в главе II, надо определять согласно формуле (6.8). В этой формуле $\hat{X}^k_w$, $\hat{Y}^l_w$ — гладкие поля, аппроксимирующие поля X^k_w, Y^l_w, причем степень аппроксимации, согласно неравенствам (6.27), оценивается числом ε_3.

Система $\{S_t\}$ первоначально была «частичной динамической системой» в $\mathfrak{X}^L_\delta \oplus \mathfrak{Y}^L_\delta$, но потом мы ее расширили до настоящей динамической системы в $\mathfrak{X}^L \oplus \mathfrak{Y}^L_\delta$, состоящей из преобразований (8.31) и описываемой дифференциальными уравнениями (8.28). «Главные» члены $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ преобразований (8. 31) удовлетворяют неравенствам (7.33), а лемма 8.3 показывает, как получить оценку для «малых» членов p, q этих преобразований, если известна оценка для «малых» членов a, b, в уравнениях (8.28). Оценка же для a, b дается неравенствами (8.29).

Доказывая все эти (и другие) утверждения в §§ 7 и 8, мы по ходу рассуждений предполагали, что ε_2, ε_3 и δ «достаточно малы». Более точно, требования малости, которые мы предъявляли к ε_2, ε_3 и δ, во всех без исключения случаях имели вид

$$\delta < \delta\ , \ \varepsilon_3 < \varepsilon_{30},\ \varepsilon_2 < \varepsilon_2(\hat{\varkappa}, \hat{\lambda}). \tag{13.8}$$

Подобных ограничений на ε_2, ε_3, δ было наложено конечное число, так что их все можно заменить одной тройкой неравенств (13.8), считая, что фигурирующие в ней δ_0, ε_{30} и $\varepsilon_2(\hat{\varkappa}, \hat{\lambda})$ — самые малые.

Посмотрим теперь, какие условия надо наложить на ε_2, ε_3 и δ, чтобы к системе $\{S_t\}$ можно было применить теорему Адамара — Перрона (лемму 9.1). Сопоставляя (9.1), лемму 8.3 и (8.29), видим, что эти условия суть неравенства

$$\begin{gathered} m\left[\Omega(\delta) + \frac{1}{\delta} O(\varepsilon_2) + O(\varepsilon_3)\right] < \frac{1}{10}, \\ m\,[o(\delta) + O(\varepsilon_2) + O(\varepsilon_3\delta)] < \min\left(\frac{1}{10}, \frac{\delta}{10}\right). \end{gathered} \tag{13.9}$$

Выберем, прежде всего, настолько малое ε_3, чтобы оно, во-первых, удовлетворяло относящемуся к нему неравенству (13.8), чтобы, во-вторых, в первом из неравенств (13.9) было $m\ O(\varepsilon_3) < \frac{1}{30}$ и чтобы, в-третьих, во втором из неравенств (13.9) было $m\ O(\varepsilon_3\,\delta) < \frac{\delta}{30}$. Выберем, далее, какие-нибудь $\hat{\varkappa}$ и $\hat{\lambda}$, удовлетворяющие неравенству (6.27) с этим ε_3, и будем отныне считать, что поле V_w^{m-1}, с которым мы работаем, построено с помощью именно этих $\hat{\varkappa}$ и $\hat{\lambda}$. Тогда в неравенствах (13.8) $\varepsilon_2(\hat{\varkappa}, \hat{\lambda})$ становится просто некоторым положительным числом, так что эти неравенства (или, вернее, то, чему в них мы еще должны удовлетворить) принимают вид

$$\delta < \delta_0,\ \varepsilon_2 < \varepsilon_{20}, \tag{13.10}$$

а в неравенствах (13.9) член $O(\varepsilon_2)$ приобретает определенный смысл (напомню, что $O(\varepsilon_2)$ в действительности имеет вид $C(\hat{\varkappa}, \hat{\lambda})\,\varepsilon_2$, см. § 8). Считая, что $\delta < 1$, можем заменить (13.9) неравенствами (более сильными)

$$\begin{gathered} m\left[\Omega(\delta) + \frac{1}{\delta} O(\varepsilon_3)\right] < \frac{2}{30}, \\ m\,[o(\delta) + O(\varepsilon_2)] < \frac{2\delta}{30}. \end{gathered}$$

Ясно, что эти неравенства будут выполнены (вместе с условием $\delta < 1$), если δ и ε_2 удовлетворяют некоторым неравенствам вида

$$\delta < \delta_1,\ \varepsilon_2 < \varepsilon_2(\delta). \tag{13.11}$$

Мы вправе считать, что δ, фигурирующее в формулировке леммы 13.3, удовлетворяет неравенствам $\delta < \delta_0$, $\delta < \delta_1$. Пусть

$$\varepsilon_2 < \min\,[\varepsilon_2, \varepsilon_2(\delta)].$$

Тогда система $\{S_t\}$ определена и для нее справедливо заключение теоремы Адамара—Перрона. Рассуждая так же, как и при доказательстве леммы 10.2, убеждаемся в том, что в $\mathfrak{X}_\delta^L \oplus \mathfrak{Y}_\delta^L$ имеются точки $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, для которых $S_t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ остается в $\mathfrak{X}_\delta^L \oplus \mathfrak{Y}_\delta^L$ при всех t, и что эти точки образуют одномерное многообразие, т. е. замкнутую кривую, являющуюся графиком некоторой функции

$$x = \chi_1(w),\ y = \chi_2(w) \qquad (w = \hat{w}(s) \in L).$$

Эта кривая L', будучи инвариантной относительно преобразований S_t, является периодической траекторией системы $\{S_t\}$. После всего сказанного ясно, что $h\mu L'$ является искомой периодической траекторией системы $\{T^t\}$.

Доказательство теоремы 3. Из леммы 13.1 следует, что если в ($У$)-системе некоторая точка устойчива по Пуассону, то сколь угодно близко к ней найдется точка, лежащая на некоторой периодической траектории. А если система имеет интегральный инвариант, то по теореме Пуанкаре о возвращении почти все точки фазового многообразия W^m устойчивы по Пуассону.

Наконец, нетрудно убедиться, что множество периодических траекторий в ($У$)-системе не может быть более чем счетным (как, впрочем, и в любой грубой системе, см [75]). Дело в том, что число периодических траекторий, период которых не превосходит заданного числа C, в ($У$)-системе конечно. (Сказанное тоже справедливо и для любой грубой системы [75], но я привожу доказательство только для ($У$)-систем, которое — после всего, что мы о них уже узнали,— весьма просто.) Действительно, пусть имеется бесконечная последовательность попарно различных периодических траекторий $\{T^t w_n\}$ ($У$)-системы (6.1) с периодами τ_n, причем все $\tau_n \leqslant C$. Из последовательности (w_n, τ_n) выберем сходящуюся подпоследовательность; пусть

$$w_{n_k} \to w_0, \quad \tau_{n_k} \to \tau_0. \tag{13.12}$$

Тогда из $T^{\tau_{n_k}} w_{n_k} = w_{n_k}$ следует, что $T^{\tau_0} w_0 = w_0$. Ясно, что $\tau_0 > 0$, ибо все периоды τ_n отделены от нуля некоторой положительной константой (ввиду компактности многообразия и либо отсутствия положений равновесия, либо, если угодно, ввиду гладкости нашей системы). Значит, $\{T^t w_0\}$ — периодическая траектория с периодом τ_0 (наименьший период этой траектории, конечно, может быть в несколько раз меньше τ_0). Поскольку траектории $\{T^t w_{n_k}\}$ попарно различны, то траектория $\{T^t w_0\}$ может совпасть, самое бо́льшее, только с одной из них. Из (13.12) следует, что расстояние между кривыми

$$\{T^t w_{n_k},\ 0 \leqslant t \leqslant \tau_{n_k}\} \text{ и } \{T^t w_0,\ 0 \leqslant t \leqslant \tau_0\}$$

стремится к нулю. А в силу периодичности это означает, что расстояние между положительными полутраекториями

$$\{T^t w_{n_k},\ t \geqslant 0\} \text{ и } \{T^t w_0,\ t \geqslant 0\}$$

стремится к нулю, равно как и расстояние между отрицательными полутраекториями

$$\{T^t w_{n_k},\ t \leqslant 0\} \text{ и } \{T^t w_0,\ t \leqslant 0\}.$$

Но это противоречит замечанию 10.2.

§ 14. Доказательство теорем 2 и 9

Я начну с двух лемм, относящихся к произвольному слоению $\mathfrak{S}^p$ с касательным полем R^p_w. В этих леммах речь идет о непрерывной зависимости слоя, проходящего через точку w, от этой точки w. Это свойство «непрерывной зависимости слоев от начальных данных» можно сформулировать несколькими способами. Одна из формулировок была приведена в § 4, когда давалось определение слоения; в леммах 14.1 и 14.2, по существу, дается другая формулировка того же свойства. Впрочем, я не буду доказывать, что если слоение обладает тем свойством, о котором говорится в этих леммах, то имеет место непрерывная зависимость слоев от начальных данных в том смысле, как она была сформулирована в § 4.

Лемма 14.1. *Пусть имеется путь f: $[0,1]\to W^m$, целиком лежащий в одном слое. Тогда для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что для любой точки w, для которой расстояние $\rho(w, f(0))<\delta$, имеется путь $g:[0,1]\to W^m$, исходящий из этой точки: $g(0)=w$, целиком лежащий в одном слое и такой, что $\rho(f(t), g(t))<\varepsilon$ при всех $t\in[0,1]$.*

Доказательство. Напомню, как определялась в § 4 непрерывная зависимость слоев от начальных данных: для любой точки $w\in W^m$ существуют такая окрестность $U\ni w$ и такой гомеоморфизм φ этой окрестности на m-мерный куб $|w_j|<1$ ($j=1,\ldots, m$), при котором слои переходят в плоскости $w_{p+1}=\mathrm{const},\ldots, w_m=\mathrm{const}$. Построим такую окрестность U_t для каждой точки $f(t)$. Каждое число $t\in[0,1]$ содержится в некотором открытом отрезке Δ_t, для которого $f(\Delta_t)\subset U_t$. (Под «открытым» здесь понимается «открытый в топологии отрезка $[0,1]$»: такой отрезок может иметь вид (a, b), $[0, a)$, $(b, 1]$ или $[0,1]$.) Выберем из открытого покрытия $\{\Delta_t\}$ компакта $[0,1]$ конечную систему, покрывающую $[0,1]$ и, так сказать, не содержащую «лишних» отрезков, т. е. обладающую тем свойством, что если выбросить какой-нибудь из этой конечной системы отрезков, то оставшиеся отрезки уже не будут покрывать весь $[0,1]$. Ясно, что такая система отрезков обязательно линейно упорядочена в том смысле, что если один отрезок имеет точку, лежащую справа от другого, то у второго отрезка имеется точка, лежащая слева от первого. Таким образом, выбранная система отрезков имеет вид

$$\Delta_0=[0, b_1),\quad \Delta_1=(a_1, b_2),\ \ldots,\ \Delta_n=(a_{n-1}, b_n),\ \Delta_{n+1}=(a_n, 1],$$

где

$$0<a_1<b_1<a_2<\cdots<a_{n-1}<b_{n-1}<a_n<b_n<1.$$

Положим

$$t_0=0,\quad t_i=\frac{1}{2}(a_i+b_i)\quad \text{при } i=1,\ldots, n,\quad t_{n+1}=1.$$

Полученная система точек $\{t_i\}$ обладает следующими свойствами:

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_n<t_{n+1}=1$$

и $[t_i, t_{i+1}]\subset\Delta_i$, а так как каждое Δ_i содержится в некотором U_t— обозначим это U_t через U_i,— то и подавно

$$f([t_i, t_{i+1}])\subset U_i\quad (i=0,\ldots, n).$$

Докажем теперь индукцией по i утверждение: *для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что для любой точки w, для которой расстояние $\rho(w, t(0))<\delta$, имеется путь g: $[0, t_i]\to W^m$, целиком лежащий в одном слое и такой, что $g(0)=w$ и $\rho(f(t), g(t))<\varepsilon$ при всех $t\in[0, t_i]$.* При $i=0$ нечего доказывать. Допустим, что утверждение доказано для i, и докажем его для $i+1$.

Отрезок пути $f(t)$, где $t\in[t_i, t_{i+1}]$, целиком лежит в U_i, а при отображении φ: $U_i\to R^m$, устанавливающим гомеоморфизм между U_i и кубом $|w_j|<1$ «арифметического» пространства R^m, этот отрезок пути переходит в лежащий в этом кубе путь

$$\varphi f(t)=(\varphi_1 f(t),\ \ldots,\ \varphi_m f(t))\qquad (t\in[t_i, t_{i+1}]),$$

причем $\varphi_j f(t)=\mathrm{const}$ при $j>p$, поскольку $f(t)$ целиком лежит в одном слое. Если расстояние $\rho(w, f(t_i))$ достаточно мало, то $w\in U_i$, и можно рассмотреть путь в R^m

$$w(t)=(w_1(t),\ \ldots,\ w_m(t))=\varphi f(t)+\varphi w-\varphi f(t_i)$$
$$(t\in[t_i, t_{i+1}]).$$

При достаточно малом $\rho(w, f(t_i))$ этот путь целиком будет лежать в кубе $|w_j|<1$, так что можно говорить о пути $\varphi^{-1}w(t)$ в U_i. Этот путь исходит из точки w, целиком лежит в одном слое (ибо ясно, что $w_j(t) = \mathrm{const}$ при $j > p$) и расстояние $\rho(f(t), \varphi^{-1}w(t))$ можно сделать сколь угодно малым при всех $t \in [t_i, t_{i+1}]$, если $\rho(f(t_i), w)$ достаточно мало.

Пусть теперь $\rho(w, f(0))$ настолько мало, что, во-первых, можно построить путь g: $[0, t_i] \to W^m$, для которого $g(0) = w$, $\rho(f(t), g(t)) < \varepsilon$ при всех $t \in [0, t_i]$ и который целиком лежит в одном слое, и что, во-вторых, $\rho(f(t_i), g(t_i))$ настолько мало, что к точке $g(t_i)$ применимы построения предыдущего абзаца,причем полученный путь $\varphi^{-1}w(t)$ при всех $t \in [t_i, t_{i+1}]$ отстоит от $f(t)$ менее чем на ε. Продолжим путь $g(t)$ на отрезок $[t_i, t_{i+1}]$, принимая на этом отрезке $\varphi^{-1}w(t)$ за $g(t)$. Получим путь $g: [0, t_{i+1}] \to W^m$, удовлетворяющий всем требованиям.

Лемма 14.2 *Пусть имеется гладкий путь f: $[0, 1] \to W^m$, целиком лежащий в одном слое и имеющий длину l. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любой точки w, для которой расстояние $\rho(w, f(0)) < \delta$, существует гладкий путь g: $[0, 1] = W^m$, исходящий из этой точки, целиком лежащий в одном слое, имеющий длину $< l + \varepsilon$ и такой, что $\rho(f(t), g(t)) < \varepsilon$ при всех $t \in [0, 1]$.*

Доказательство. Пусть $q = m - p$ и пусть E^q_w—гладкое поле q-мерных касательных подпространств, трансверсальных к слоению (т. е. $E^q_w \cap R^p_w = 0$ при всех w). Обозначим через $B^q_\Delta(w)$ образ шара $\{e \in E^q_w, |e| < \Delta\}$ при геодезическом отображении h, а через $B^p_\Delta(w)$ — совокупность точек слоя, проходящего через w, которые относят от w менее чем на Δ в метрике слоя. Как нетрудно показать, для любого достаточно малого $\Delta > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $\rho(w, w') < \delta$ пересечение $B^p_\Delta(w) \cap B^q_\Delta(w')$ состоит ровно из одной точки, которая гладко зависит от w'.

Пусть теперь $g_1(t)$ — путь, построенный в предыдущей лемме; положим

$$g_2(t) = B^p_\Delta(g_1(t)) \cap B^q_\Delta(f(t)) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Это — гладкий путь. Действительно, возьмем какую-нибудь точку $t_0 \in [0, 1]$ и проверим гладкость $g_2(t)$ в окрестности этой точки. Из того, что $g_1(t)$ при всех t лежит на одном и том же слое, легко вывести, что в некоторой окрестности точки t_0

$$g_2(t) = B^p_\Delta(g_1(t_0)) \cap B^q_\Delta(f(t)).$$

А отсюда, согласно сказанному выше, следует, что $g_2(t)$ гладко зависит от t.

Вообще говоря,

$$w = g_1(0) \notin B^p_\Delta(f(0)),$$

так что путь $g_2(t)$ начинается не в точке w, а в другой точке. Но, во всяком случае, $g_2(0)$ лежит в том же слое, что и w, и отстоит от w в метрике слоя не более чем на Δ. Соединив w и $g_2(0)$ в слое отрезком геодезической и присоединив этот отрезок к началу пути g_2, получим спрямляемый путь g_3, который при достаточно малом Δ будет сколь угодно близок к пути f и длина которого

длина $g_3 <$ длины $g_2 + \Delta$.

Ниже мы докажем, что при $0 \leqslant t \leqslant 1$

$$|g_2'(t)| \leqslant |f'(t)| + O(\Delta). \tag{14.1}$$

Отсюда следует, что при достаточно малом $\rho(w, f(0))$

длина $g_2 <$ длины $f + \varepsilon$.

Поэтому сгладив путь g_3 в слое, получим гладкий путь g, удовлетворяющий всем требованиям.

Обозначим вложения

$$R^p_w \subset R^m_w, \quad E^q_w \subset R^m_w$$

через $\alpha(w)$ и $\beta(w)$ соответственно. Имеем изоморфизм

$$(\alpha(w), \beta(w)) : R^p_w \oplus E^q_w \to R^m_w.$$

Обратный изоморфизм обозначим через $(\alpha^{-1}(w), \beta^{-1}(w))$, так что α^{-1} и β^{-1} суть соответствующие проекции. Ясно, что

$$g_2(t) = h(f(t), \beta(f(t))\, e(t)), \tag{14.2}$$

где $e(t) \in E^m_{f(t)}$, $|e(t)| < \Delta$. Пользуясь конечными атласами многообразия W^m и векторного расслоения

$$\mathfrak{E} = \bigcup_{w \in W^m} E^q_w,$$

достаточно доказать (14.1) для участка пути, целиком лежащего внутри некоторой карты. Таким образом, теперь $f(t)$ и $g_2(t)$ можно считать путями в m-мерном эвклидовом пространстве R^m, $e(t)$ — путем в q-мерном эвклидовом пространстве E^q, $\beta(w)$ есть зависящее от параметра $w \in R^m$ вложение E^q в R^m, а $\beta^{-1}(w)$ — обратная к β проекция R^m на E^q. При достаточной мелкости карты тензор римановой метрики $g_{ij}(w_1, \ldots, w_m)$ можно считать постоянным, ибо от этого $|f'|$ и $|g_2'|$ изменятся незначительно.

Так как g_2 целиком содержится в некотором слое слоения $\mathfrak{S}^p$, то

$$g_2'(t) \in R^p_{g_2(t)}. \tag{14.3}$$

Продифференцируем (14.2):

$$g_2'(t) = h_w(f, \beta e)\, f'(t) +$$
$$+ h_\omega(f, \beta e)\, \beta_\omega(f(t))\, f'(t)\, e(t) + h_\omega(f, \beta e)\, \beta(f(t))\, e'(t).$$

Первый член здесь равен $f(t) + O(e)$, второй член (записанный несколько небрежно) — $O(e)$, в третьем члене $h_\omega = 1_{R^m} + O(e)$. Значит,

$$g_2'(t) = f'(t) + O(e) + \beta(f(t))e'(t) + O(e)O(e'). \tag{14.4}$$

Отсюда

$$\beta^{-1}(f(t))g_2'(t) = e'(t) + O(e) + O(e)O(e'), \tag{14.5}$$

ибо $f' \in R^p_f$ и потому $\beta^{-1}f' = 0$.

Из непрерывности поля R^p_w легко вывести, что при любых w, ω, ω' включение $\omega' \in R^m_{h(w,\omega)}$ влечет за собой неравенство

$$|\beta^{-1}(w)\,\omega'| \leqslant \Omega(\omega) \cdot |\omega'|.$$

Применяя это к (14.3), выводим с помощью (14.2) и (14.4), что

$$|\beta^{-1}(f(t))g_2'(t)| \leqslant \Omega(e)\,|f' + O(e) + \beta e' + O(e)\,O(e')|$$

или, согласно (14.5),

$$|e' + O(e) + O(e)O(e')| \leqslant \Omega(e)\,[O(1) + O(e) + O(e') + O(e)\,O(e')].$$

Отсюда следует, что $|e'| = \Omega(e)$. Подставив это в (14.4), получаем

$$|g_2'(t)| \leqslant |f'(t)| + \Omega(e),$$

что и требовалось доказать.

Вернемся к нашей ($У$)-системе (6.1). Мы связали с ней слоения $\mathfrak{S}^k$, $\mathfrak{S}^l$, $\mathfrak{S}^{k+1}$, $\mathfrak{S}^{l+1}$. Обозначим слои этих слоений, проходящие через точку w, через

$$M^k(w), \; N^l(w), \; M^{k+1}(w), \; N^{l+1}(w)$$

соответственно. Через

$$B_R^k(w),\quad B_R^l(w),\quad B_R^{k+1}(w),\quad B_R^{l+1}(w)$$

обозначим открытый шар радиуса R в слое $M^k(w)$, $N^l(w)$, $M^{k+1}(\ )$, $N^{l+1}(w)$ соответственно с центром в w. (Шар берется в метрике слоя.) Как нетрудно показать, для любого достаточно малого $\delta > 0$ существует такое $\varepsilon > 0$, что при $\rho(w, w') < \varepsilon$ пересечение $B_\delta^l(w') \cap B_\delta^{k+1}(w)$ состоит ровно из одной точки. Отметим формулы

$$\begin{aligned} B_{Re^{-t}}^l(w) &\supset T^{-t}B_R^l(T^t w),\\ B_{Re^{-t}}^k(w) &\supset T^t B_R^k(T^{-t}w), \end{aligned}\qquad (t > 0) \tag{14.6}$$

очевидно, следующие из (7.7) при надлежащем выборе масштаба времени.

Положим

$$U_R(w) = \bigcup_{w'\in M^{k+1}(w)} B_R^l(w'),\quad U_\infty(w) = \bigcup_{w'\in M^{k+1}(w)} N^l(w').$$

Ясно, что

$$U_\infty(w) = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n(w). \tag{14.7}$$

Из (14.6) и $T^t M^{k+1}(w) = M^{k+1}(w)$ следует, что

$$T^t U_R(w) \supset U_{Re^t}(w),\quad T^t U_\infty(w) = U_\infty(w). \tag{14.8}$$

Лемма 14.3. *При $0 < R \leqslant \infty$ множество $U_R(w)$ — открытое, причем при достаточно большом R оно содержит ε-окрестность точки w, где ε можно взять одним и тем же для всех точек w.*

Доказательство. Пусть $0 < R < \infty$ и $z \in U_R(w)$, т. е. $z \in B_R^l(y)$, $y \in M^{k+1}(w)$. Тогда z и y можно соединить кривой z_t, которая целиком лежит в слое $N^l(z)$ и длина которой $< R - 2\delta$, где δ — некоторое положительное число. По лемме 14.2, если $\rho(z, z')$ достаточно мало, то существует кривая z'_t, которая целиком лежит в слое $N^l(z')$ и длина которой $< R - \delta$, причем $z'_0 = z'$ и $\rho(z'_1, z_1) < \varepsilon$, где ε — любое наперед заданное число. Если это ε выбрать достаточно малым, то множества $B_\delta^{k+1}(y)$ и $B_\delta^l(z'_1)$ должны будут пересекаться в некоторой точке y'. Эту точку y' и точку z'_1 можно соединить путем, который лежит в слое $N(z'_1) = N(z')$ и длина которого $< \delta$; присоединим этот путь к пути z'_t. В результате получится кривая, целиком лежащая в слое $N(z')$, соединяющая точку $y' \in M^{k+1}(w)$ с точкой z' и имеющая длину $< R$. А это означает, что

$$z' \in B_R^l(y') \subset U_R(w).$$

Таким образом, множество $U_R(w)$ — открытое.

Из (14.7) теперь следует, что и множество $U_\infty(w)$ — открытое.

Наконец, если $\rho(w, w') < \varepsilon$, где ε — то же, что и выше, то

$$B_\delta^l(w') \cap B_\delta^{k+1}(w) \neq \phi,$$

откуда следует, что $w' \in U_\delta(w)$.

Лемма 14.4 *Для любых $\delta > 0$ и $w \in W^m$ найдутся такое число $s > 0$ и такая периодическая (т. е. лежащая на некоторой периодической траектории) точка $\bar{w}$, что $\rho(T^{-s}w, \bar{w}) < \delta$.*

Доказательство. Рассмотрим всевозможные точки $\{T^{-k\delta}w\}$, где $k > 0$. Эти точки попарно различны, если только исходная точка w не периодическая; в противном случае нечего доказывать. Ввиду компактности W^m, найдутся два такие числа k и $k + l$, где $l > 0$, что

$$\rho(T^{-k\delta}w, T^{-(k+l)\delta}w) < \varepsilon,$$

где ε — то же, что и в лемме 13.1. Тогда из этой леммы, примененной к точке $T^{-(k+l)\delta} w$ и числу $\tau = l\delta$, следует, что имеется периодическая точка $\overline{w}$, отстоящая от $T^{-(k+l)\delta} w$ не более чем на δ.

Лемма 14.5. *Для любой точки $w \in W^m$ имеется такая периодическая точка $\overline{w}$, что $w \in U_\infty(\overline{w})$.*

Доказательство. Из лемм 14.3 и 14.4 следует, что имеются периодическая точка $\overline{w}$ и число s такие, что $T^{-s} w \in U_\infty(\overline{w})$. Из (14.8) видно, что тогда и $w \in U_\infty(\overline{w})$.

Лемма 14.6. *Существуют такое число R, $0 < R < \infty$, и такие периодические точки $w_1, \ldots, w_n$, что*

$$W^m = \bigcup_{i=1}^{n} U_R(w_i).$$

Доказательство. Это следует из леммы 14.5, компактности W^m, формулы (14.7) и леммы 14.3.

Лемма 14.7. *Если имеется при некотором $R < \infty$ такая последовательность $t_i \to \infty$, что $T^{t_i}(w) \in U_R(\overline{w})$, то точка w принадлежит замыканию листа $M^{k+1}(\overline{w})$.*

Доказательство. Если $T^{t_i} w \in U_R(\overline{w})$, то, согласно (14.8),

$$w \in T^{-t_i} U_R(\overline{w}) \subset U_{Re^{-t_i}}(\overline{w}).$$

Значит, в условиях леммы

$$w \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_{Re^{-t_i}}(\overline{w}).$$

Иными словами, имеется последовательность точек w_i, лежащих на листе $M^{k+1}(\overline{w})$ такая, что $w \in B^l_{\mathrm{Re}^{-t_i}}(w_i)$, т. е. $w_i \to w$.

Доказательство утверждения теоремы 9, относящегося к ($У$)-потокам без интегрального инварианта. Из леммы 14.6 следует, что для любой точки w найдутся такая последовательность $t_i \to \infty$ и такая периодическая точка w_j — одна из тех, о которых говорится в лемме 14.6,— что $T^{t_i} w \in U_R(w_j)$. Согласно лемме 14.7, тогда $w \in \overline{M^{k+1}(w_j)}$. Таким образом, объединение конечного числа слоев $M^{k+1}(w_1), \ldots, M^{k+1}(w_n)$ всюду плотно в W^m.

Доказательство теоремы 9 для ($У$)-потока с интегральным инвариантом. Возьмем какой-нибудь слой $M^{k+1}(w)$ слоения $\mathfrak{S}^{k+1}$. Покажем, что замкнутое множество $\overline{M^{k+1}(w)}$ является в то же время и открытым, откуда будет следовать, что $\overline{M^{k+1}(w)} = W^m$. Для этого мы докажем, что $\overline{M^{k+1}(w)} = U_R(w)$.

Сперва убедимся, что $U_R(w) \supset \overline{M^{k+1}(w)}$. Пусть $w' \in \overline{M^{k+1}(w)}$, т. е. в сколь угодно малой окрестности точки w' имеется точка $w'' \in M^{k+1}(w)$. Возьмем w'' настолько близко к w', что пересечение

$$B^l_R(w') \cap B^{k+1}_R(w'') \neq \phi.$$

Если z — точка этого пересечения, то $z \in M^{k+1}(w)$ и $w' \in B^l_R(z)$, а значит $w' \in U_R(w)$.

Чтобы доказать обратное включение $U_R(w) \subset \overline{M^{k+1}(w)}$, достаточно показать, что любая периодическая точка, содержащаяся в $U_R(w)$, принадлежит $\overline{M^{k+1}(w)}$. (Действительно, в ($У$)-системе с интегральным инвариантом периодические точки образуют всюду плотное множество.) Но это следует из леммы 14.7, ибо если $\overline{w} = T^{\tau}\overline{w} \in U_R(w)$, то

$$T^{i\tau}\overline{w} \in U_R(w), \quad i = 1, 2, \ldots$$

Лемма 14.8. *В (У)-системе в сколь угодно малой окрестности неблуждающей точки имеются периодические точки.*

(Напомню, что точка называется *блуждающей*, если у нее имеется такая окрестность U, что при всех достаточно больших t

$$T^t U \cap U = \phi.$$

В противном случае точка называется *неблуждающей*. Иными словами, точка — неблуждающая, если для любой ее окрестности U найдется такая последовательность $t_n \to \infty$, что

$$T^{t_n} U \cap U \neq \phi.)$$

Доказательство. Лемма 14.8 очевидным образом следует из леммы 13.1.

Доказательство теоремы 2. Мы видели (леммы 14.5 и 14.6), что периодические траектории существуют. Допустим, что их конечное число — пусть это будут траектории $l_1, \ldots, l_N$, — и докажем, что тогда должна существовать еще одна периодическая траектория.

Если траектория $T^t w$ стремится при $t \to \infty$ к периодической траектории l_i, то, как следует из леммы 11.3, w лежит на том же слое слоения $\mathfrak{S}^{k+1}$, что и l_i. Обозначим этот слой через M_i^{k+1}. Множество $\bigcup_{i=1}^{N} M_i^{k+1}$ $(k+1)$-мерно и поэтому существуют точки, не принадлежащие этому множеству. Пусть w — одна из таких точек. Тогда найдутся такое $\varepsilon > 0$ и такая последовательность $t_n \to \infty$, что точки $T^{t_n} w$ лежат на расстоянии, не меньшем ε, от $l_1, \ldots, l_N$. Выберем из последовательности $\{T^{t_n} w\}$ сходящуюся подпоследовательность и обозначим ее снова через $\{T^{t_n} w\}$. Пусть $w_0 = \lim T^{t_n} w$. Точка w_0 тоже отстоит от $l_1, \ldots, l_N$ не менее чем на ε. Убедимся, что эта точка — неблуждающая.

Возьмем какую-нибудь окрестность U точки w_0. Существует такое n_0, что $T^{t_n} w \in U$ при $n \geqslant n_0$. Но тогда пересечение

$$T^{t_n - t_{n_0}} U \cap U \neq \phi,$$

ибо точка $T^{t_n} w = T^{t_n - t_{n_0}} T^{t_{n_0}} w$ должна принадлежать как U, так и $T^{t_n - t_{n_0}} U$.

По лемме 14.8, сколь угодно близко к w_0 имеется периодическая точка $\overline{w}$, отстоящая от w_0 менее чем на ε. Эта точка $\overline{w}$ не может, следовательно, лежать ни на одной из траекторий $l_1, \ldots, l_N$, так что проходящая сквозь нее периодическая траектория отлична от $l_1, \ldots, l_N$.

§ 15. (У)-каскады

До сих пор в этой главе рассматривались (У)-потоки. Как было сказано в § 4 и 6, для каскадов доказательства теорем 1—3, 8 и 9, во-первых, проще, а во-вторых, могут быть сведены к доказательствам соответствующих теорем для потоков. В справедливости первого из этих высказываний можно убедиться, шаг за шагом просмотрев все рассуждения, что и рекомендуется проделать читателю, поскольку это, конечно, наиболее рациональный путь. Формально же проще свести случай (У)-каскада к случаю (У)-потока. (Такой способ действия, конечно, напоминает известную шутку: «Требуется вскипятить воду. Рассмотрим два случая. 1) Имеется пустой чайник; тогда надо налить в него воду и поставить на огонь. 2) Имеется чайник, наполненный водой. Выльем воду; тем самым данный случай сведется к предыдущему».) Пусть диффеоморфизм T_0: $W_0^m \to W_0^m$ порождает (У)-каскад $\{T_0^n\}$ и пусть $T^t: W^{m+1} \to W^{m+1}$ — поток, полученный из этого каскада с помощью конструкции, описанной в § 2,Б.

Редукция теорем 2 и 3 для каскада $\{T_0^n\}$ к соответствующим теоремам для потока $\{T^t\}$ совершенно очевидна. С теоремой 8 дело обстоит тоже весьма просто. Имеем расслоение $W^{m+1} \to S^1$ со слоем W_0^m. Отображение T^1 переводит каждый слой этого расслоения в себя и ограничение T^1 на слое совпадает с T_0. Остановим внимание на каком-нибудь слое и будем обозначать этот слой через W_0^m. Я хочу доказать, что в W_0^m существует инвариантное относительно T_0 слоение $\mathfrak{S}_0^k$ с касательным полем X_w^k и что любое интегральное многообразие поля X_w^k является открытым подмножеством одного из слоений $\mathfrak{S}_0^k$.

Поля X_w^k, Y_w^l — одни и те же и для $\{T^t\}$, и для $\{T_0^n\}$. Построим в W^{m+1} слоения $\mathfrak{S}^{k+1}$, $\mathfrak{S}^{l+1}$ для потока $\{T^t\}$. Пересечение каждого слоя слоения $\mathfrak{S}^{k+1}$ с W_0^m состоит из гладких полных связных k-мерных подмногообразий многообразия W_0^m. Эти подмногообразия являются слоями слоения $\mathfrak{S}^k$, ибо они в каждой точке касаются X_w^k. Отсюда следует, что W_0^m целиком состоит из слоев слоения $\mathfrak{S}^k$. Но тогда очевидно, что разбиение W_0^m на слои слоения $\mathfrak{S}^k$ является искомым слоением $\mathfrak{S}_0^k$.

Немногим сложнее обстоит дело с теоремой 1. Пусть диффеоморфизм T_0: $W_0^m \to W_0^m$ порождает ($У$)-каскад $\{T_0^n\}$, а диффеоморфизм $\hat{T}_0 : W_0^m \to W_0^m$ близок к T_0 в метрике C^1. Согласно сказанному в § 2, Б, по диффеоморфизму T_0 строятся некоторое многообразие W^{m+1} и некоторый поток $\{T^t\}$ в этом многообразии, а по диффеоморфизму $\hat{T}_0$ строятся некоторое многообразие $\hat{W}^{m+1}$ и некоторый поток $\{\hat{T}^t\}$ в этом многообразии. Нам же хотелось бы получить поток $\{\check{T}^t\}$, который действовал бы в многообразии W^{m+1} и был бы близок в метрике C^1 к потоку $\{T^t\}$, причем преобразование $\check{T}^1$ отображало бы каждый слой расслоения $W^{m+1} \to S^1$ в себя и ограничение $\check{T}^1$ на слое совпадало бы с $\hat{T}_0$. Тогда, очевидно, применяя теорему 1 к потокам $\{T^t\}$ и $\{\check{T}^t\}$, можно было бы доказать теорему 1 и для каскадов $\{T_0^n\}$ и $\{\hat{T}_0^n\}$. (При этом площадки Π (w) следовало бы взять таким образом, чтобы каждая из них целиком лежала бы в одном слое расслоения $W^{m+1} \to S^1$; тогда гомеоморфизм χ: $W^{m+1} \to W^{m+1}$, построенный с их помощью и переводящий траектории $\{T^t\}$ в траектории $\{\check{T}^t\}$, будет переводить каждый слой в себя.)

Обозначим, как и в § 13, через γ (w, w', t) ту точку кратчайшего геодезического отрезка, соединяющего в многообразии W_0^m две достаточно близкие точки w и w', которая делит этот отрезок в отношении $t : (1 - t)$. В § 13 мы видели, что γ является гладкой функцией своих аргументов класса C^∞. С помощью γ построим диффеотопию S_s, соединяющую $1^{W_0^m}$ с $T_0^{-1}\hat{T}_0$:

$$S_s(w) = \gamma(w, T_0^{-1}\hat{T}_0 w, \alpha(s)),$$

где функция $\alpha(s) \in C^\infty$ такова, что $\alpha(s) = 0$ при $s \in [0, \frac{1}{3}]$, $\alpha(s)$ монотонно возрастает при $s \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, $\alpha(s) = 1$ при $s \in [\frac{2}{3}, 0]$. Построим отображение

$$\bar{\varphi}: W_0^m \times [0, 1] \to W_0^m \times [0, 1],$$

переводящее точку (w, s) в ($S_s w$, s). Если $\hat{T}_0$ достаточно близко к T_0(в смысле C^1), то отображение $\bar{\varphi}$ будет близким к тождественному (в смысле C^1). При отождествлении $W_0^m \times 0$ с $W_0^m \times 1$ согласно отображениям $\hat{T}_0$ и T_0, отображение $\bar{\varphi}$ перейдет в диффеоморфизм φ: $\hat{W}^{m+1} \to W^{m+1}$. Легко видеть, что поток $\check{T}^t = \varphi\hat{T}^t\varphi^{-1}$ обладает всеми требуемыми свойствами.

Чтобы доказать утверждение теоремы 9 для ($У$)-каскада $\{T_0^n\}$, не имеющего интегрального инварианта, заметим, что в § 14 при доказательстве соответствующего утверждения для ($У$)-потока было показано не только то, что существует некоторое конечное множество слоев слоения $\mathfrak{S}^{k+1}$, объединение которых плотно в фазовом пространстве, но и то, что эти слои $M^{k+1}(w_1), \dots, M^{k+1}(w_n)$ можно выбрать проходящими через некоторые периодические траектории. Пересечение каждой периодической траектории потока $\{T^t\}$ с W_0^m состоит из конечного числа точек, а пересечение проходящего через эту траекторию слоя слоения $\mathfrak{S}^{k+1}$ с W_0^m состоит из конечного числа слоев слоения $\mathfrak{S}_0^k$, проходящих через эти периодические точки. Таким образом, пересечение

$$(M^{k+1}(w_1) \cup \dots \cup M^{k+1}(w_n)) \cap W_0^m$$

состоит из конечного числа слоев слоения $\mathfrak{S}_0^k$, которые мы обозначим через $M_1^k, \dots, M_N^k$. Покажем, что

$$\overline{M_1^k \cup \dots \cup M_N^k} = W_0^m.$$

Некоторая окрестность многообразия W_0^m имеет (в естественных «координатах») вид $W_0^m \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, а лежащий в этой окрестности отрезок траектории потока $\{T^t\}$ имеет вид $w \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, где $w \in W_0^m$. Любой слой слоения $\mathfrak{S}^{k+1}$ состоит из слоев слоения $\mathfrak{S}^k$, получающихся друг из друга преобразованиями T^t. Поэтому для любого слоя M^{k+1} слоения $\mathfrak{S}^{k+1}$

$$M^{k+1} \cap (W_0^m \times (-\varepsilon, \varepsilon)) = (M^{k+1} \cap W_0^m) \times (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Следовательно,

$$(M^{k+1}(w_1) \cup \dots \cup M^{k+1}(w_n)) \cap (W_0^m \times (-\varepsilon, \varepsilon)) = \\ = (M_1^k \cup \dots \cup M_N^k) \times (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Поскольку это множество плотно в $W_0^m \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, то множество $M_1^k \cup \dots$ $\dots \cup M_N^k$ плотно в W_0^m.

Осталось доказать утверждение теоремы 9 для ($У$)-каскада $\{T_0^n\}$ с интегральным инвариантом. Пусть сперва $w \in W_0^m$ — неподвижная точка каскада $\{T_0^n\}$, т. е. $T_0 w = w$. Тогда

$$M^{k+1}(w) \cap (W_0^m \times (-\varepsilon, \varepsilon)) = M^k(w) \times (-\varepsilon, \varepsilon),$$

и из $\overline{M^{k+1}(w)} = W^{m+1}$ следует, что $\overline{M^k(w)} = W_0^m$.

Пусть далее, $w \in W_0^m$ — периодическая точка каскада $\{T_0^n\}$ с периодом $p: T_0^p w = w$. Тогда w является неподвижной точкой ($У$)-каскада $\{T_0^{pn}, -\infty < n < \infty\}$. Ясно, что слой $M^k(w)$ один и тот же для каскада $\{T_0^n\}$ и для каскада $\{T_0^{pn}\}$, поэтому из сказанного в предыдущем абзаце следует, что этот слой плотен в W_0^m.

Пусть, наконец, $w \in W_0^m$ — произвольная точка. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число p, что периодические точки с периодом p (не обязательно минимальным) образуют ε-сеть в W_0^m, т. е. их ε-окрестности покрывают W_0^m. Действительно, так как периодические точки всюду плотны в W_0^m, то имеется конечное множество периодических точек $w_1, \dots$ $\dots, w_N$, являющееся ε-сетью в W_0^m; тогда можно взять

$$p = (\text{период } w_1) \times \dots \times (\text{период } w_N).$$

Последовательность $\{T^{pn}w,\ n = 1, 2,\ldots\}$ должна бесконечное число раз попадать в ε-окрестность хотя бы одной из точек w_j. Отсюда видно, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такая последовательность $n_i \to \infty$ и такая периодическая точка $\bar{w} \in W_0^m$ с некоторым периодом p, что расстояние

$$\rho\,(T^{pn_i}\,w,\ \bar{w}) < \varepsilon. \tag{15.1}$$

Так как, по сказанному ранее, $\overline{M^k(\bar{w})} = W_0^m$, то достаточно доказать, что при достаточно малом ε

$$M^k(\bar{w}) \subset \overline{M^k(w)}. \tag{15.2}$$

Возьмем какую-нибудь точку $w' \in M^k(\bar{w})$. В метрике слоя $M^k(\bar{w})$ точки w' и $\bar{w}$ находятся на некотором конечном расстоянии, которое, скажем, меньше R. Тогда $w' \in B_R^k(\bar{w})$. Согласно (14.6), в таком случае

$$T^{pn_i}w' \in B^k_{R\varepsilon^{-n_i}}(T^{pn_i}\bar{w}) = B^k_{R\varepsilon^{-n_i}}(\bar{w}).$$

При достаточно малом ε и достаточно большом n_i отсюда и из (15.1) следует, что

$$B_1^l\,(T^{pn_i}\,w') \cap B_1^k\,(T^{pn_i}w) \neq \phi,$$

ибо слоения $\mathfrak{S}_0^k$ и $\mathfrak{S}_0^l$ трансверсальны. Пусть, скажем, это пересечение содержит точку z_i. Тогда

$$T^{-pn_i}z_i \in T^{-pn_i}B_1^l\,(T^{pn_i}w') \cap T^{-pn_i}B_1^k\,(T^{pn_i}w);$$

но, согласно (14.6),

$$T^{-pn_i}B_1^l\,(T^{pn_i}w') \subset B^l_{e^{-pn_i}}(w'),$$

а $T^{-pn_i}B_1^k\,(T^{pn_i}w) \subset M^k(w)$; поэтому

$$T^{-pn_i}z_i \in B^l_{e^{-pn_i}}(w') \cap M^k(w).$$

Таким образом, имеется последовательность точек $T^{-pn_i}z_i$, лежащая в $M^k(w)$ и стремящаяся к w'. Значит, $w' \in \overline{M^k(w)}$, и (15.2) доказано.

Последовательность $\{T^{pn}w,\ n = 1, 2,\ldots\}$ должна бесконечное число раз попадать в ε-окрестность хотя бы одной из точек w_j. Отсюда видно, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такая последовательность $n_i \to \infty$ и такая периодическая точка $\overline{w} \in W_0^m$ с некоторым периодом p, что расстояние

$$\rho\,(T^{pn_i}\,w,\ \overline{w}) < \varepsilon. \tag{15.1}$$

Так как, по сказанному ранее, $\overline{M^k(\overline{w})} = W_0^m$, то достаточно доказать, что при достаточно малом ε

$$M^k(\overline{w}) \subset \overline{M^k(w)}. \tag{15.2}$$

Возьмем какую-нибудь точку $w' \in M^k(\overline{w})$. В метрике слоя $M^k(\overline{w})$ точки w' и $\overline{w}$ находятся на некотором конечном расстоянии, которое, скажем, меньше R. Тогда $w' \in B_R^k(\overline{w})$. Согласно (14.6), в таком случае

$$T^{pn_i}w' \in B^k_{Re^{-n_i}}(T^{pn_i}\overline{w}) = B^k_{Re^{-n_i}}(\overline{w}).$$

При достаточно малом ε и достаточно большом n_i отсюда и из (15.1) следует, что

$$B_1^l(T^{pn_i}\,w') \cap B_1^k(T^{pn_i}w) \neq \phi,$$

ибо слоения $\mathfrak{S}_0^k$ и $\mathfrak{S}_0^l$ трансверсальны. Пусть, скажем, это пересечение содержит точку z_i. Тогда

$$T^{-pn_i}z_i \in T^{-pn_i}B_1^l(T^{pn_i}w') \cap T^{-pn_i}B_1^k(T^{pn_i}w);$$

но, согласно (14.6),

$$T^{-pn_i}B_1^l(T^{pn_i}w') \subset B^l_{e^{-pn_i}}(w'),$$

а $T^{-pn_i}B_1^k(T^{pn_i}w) \subset M^k(w)$; поэтому

$$T^{-pn_i}z_i \in B^l_{e^{-pn_i}}(w') \cap M^k(w).$$

Таким образом, имеется последовательность точек $T^{-pn_i}z_i$, лежащая в $M^k(w)$ и стремящаяся к w'. Значит, $w' \in \overline{M^k(w)}$, и (15.2) доказано.

вектора в этом базисе часто обозначают через dx^i, и здесь опять выражение «вектор dx^i» можно понимать в двух смыслах.

В классической тензорной дифференциальной геометрии выражение типа «вектор x^i» или «вектор dx^i» имело, как правило, первый смысл, тогда как в современной литературе оно обычно имеет второй смысл. В данной работе я не выдерживаю единства стиля; мне кажется, что иногда удобнее одно, а иногда другое. Но я надеюсь, что подразумеваемый смысл, если он и не указан явно, всегда ясен из контекста. В данной главе преобладает второй смысл, а в § 22— первый. (В случае «вектора dx^i» возможна была бы еще дополнительная неопределенность, связанная с тем, что в классической дифференциальной геометрии под «вектором» нередко понималось векторное поле, заданное во всей координатной окрестности U_α используемой карты (U_α, φ_α). Но в данной работе я избегаю такого словоупотребления.)

Напомню, далее, что между внешними степенями $\Lambda^h R^m$ и $\Lambda^h \overset{*}{R}{}^m$ имеется сопряжение, которое на разложимых элементах определяется по формуле

$$\langle \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_h, x_1 \wedge \ldots \wedge x_h \rangle = \det \langle \xi_i, x_j \rangle \quad (\xi_i \in \overset{*}{R}{}^m,\ x_j \in R^m).$$

Внутреннее произведение r-поливектора x и q-формы ψ определяется как $(q - r)$-форма $x \lrcorner \psi$, которая на каждом $(q - r)$-поливекторе y принимает значение

$$\langle x \lrcorner \psi, y \rangle = \langle \psi, x \wedge y \rangle.$$

(При $q < r$ $x \lrcorner \psi = 0$.) Ясно, что отображение

$$\lrcorner : \Lambda^r R^m \times \Lambda^q \overset{*}{R}{}^m \to \Lambda^{q-r} \overset{*}{R}{}^m$$

билинейно. Поэтому множество

$$L(\psi) = \{x : x \in R^m = \Lambda^1 R^m,\ x \lrcorner \psi = 0\}$$

является некоторым векторным подпространством пространства R^m.

Любое подпространство $E \subset \overset{*}{R}{}^m$ определяет вложение $\Lambda E \subset \Lambda \overset{*}{R}{}^m$, и q-форма ψ может оказаться образом при каком-нибудь таком вложении. Ясно, что существует минимальное подпространство $E(\psi) \subset \overset{*}{R}{}^m$, обладающее тем свойством, что $\psi \in \Lambda E(\psi)$. Его размерность называют *рангом* ψ. Если взять базис $e^1, \ldots, e^{\mathrm{Rg}\,\psi}$ пространства $E(\psi)$, то ψ окажется некоторым многочленом от $e^1, \ldots, e^{\mathrm{Rg}\,\psi}$; таким образом, ранг ψ равен наименьшему возможному числу линейных форм, через которые можно выразить ψ. Ясно, что $q \leqslant \mathrm{Rg}\,\psi \leqslant m$ и что $\mathrm{Rg}\,\psi = q$ тогда и только тогда, когда q-форма ψ разложима.

Пространства $L(\psi)$ и $E(\psi)$ являются аннуляторами друг для друга. Действительно, во-первых $\mathrm{Ann}\,E(\psi) \subset L(\psi)$, ибо если $x \in \mathrm{Ann}\,E(\psi)$, то при вычислении $\langle x \lrcorner \psi, y \rangle = \langle x \wedge y, \psi \rangle$, независимо от выбора $(q - 1)$-поливектора y, приходится иметь дело с суммой членов вида

$$\langle x \wedge y_1 \wedge \ldots \wedge y_{q-1}, z_1 \wedge \ldots \wedge z_q \rangle = \begin{vmatrix} \langle x, z_1 \rangle \ldots \langle x, z_q \rangle \\ \langle y_1, z_1 \rangle \ldots \langle y_1, z_q \rangle \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix},$$

где все $z_i \in E(\psi)$, так что первая строчка этого определителя состоит из нулей. Доказанное включение эквивалентно такому: $E(\psi) \supset \mathrm{Ann}\,L(\psi)$. Во-вторых, имеет место и обратное включение: $E(\psi) \subset \mathrm{Ann}\,L(\psi)$, которое следует из того, что, как сейчас будет доказано, при $x \in L(\psi)$

$$\psi \in \Lambda\,(\mathrm{Ann}\,x)$$

и, стало быть,

$$\psi \in \Lambda\,\mathrm{Ann}\,L(\psi).$$

Возьмем базис $e_1, \ldots, e_m$ пространства R^m, в котором $e_1 = x$. В этом базисе ψ имеет вид

$$\psi = \sum_{i_1 < \ldots < i_q} \psi_{i_1 \ldots i_q} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_q}$$

($\{e^i\}$ — двойственный базис). Так как $x \in L(\psi)$, то $e_1 \lrcorner \psi = 0$, т. е. при любом выборе $j_2 < \ldots < j_q$

$$\langle e_1 \wedge e_{j_2} \wedge \ldots \wedge e_{j_q}, \quad \psi \rangle = 0,$$

а это произведение, как легко видеть, есть $\psi_{1 j_2 \ldots j_q}$. Итак, в ψ не входит e^1, т. е.

$$\psi \in \Lambda(e^2, \ldots, e^m) = \Lambda(\operatorname{Ann} e_1).$$

Пространство $E(\psi)$ иногда называют *ранговым пространством формы* ψ или *пространством ассоциированных с* ψ *линейных форм* (последние образуют его базис,— понимание этого замечения не требуется для дальнейшего). Пространство $L(\psi)$, насколько мне известно, не имеет особого названия, а между тем оно-то нам и нужно, правда только в том случае, когда форма ψ разложимая или, что в свете сказанного выше эквивалентно, когда $\dim L(\psi) = m - q$. Я буду называть его *пространством, определяемым разложимой* q*-формой* ψ.

Пусть R^p — p-мерное векторное подпространство пространства R^m. Обозначим $m - p$ через q и выберем какое-нибудь q-мерное пространство R^q, трансверсальное к R^p (т. е. $R^p \cap R^q = 0$). Тогда в R^m можно выбрать такой базис $\{e_i\}$, что

$$e_1, \ldots, e_p \in R^p; \; e_{p+1}, \ldots, e_m \in R^q.$$

Пусть $\{e^i\}$ — двойственный базис в $\overset{*}{R}{}^m$. Вектор с координатами x^i принадлежит R^p тогда и только тогда, когда

$$x^{p+1} = 0, \ldots, x^m = 0,$$

то есть

$$\langle e^{p+1}, x \rangle = 0, \ldots, \langle e^m, x \rangle = 0.$$

Разложимая q-форма $\psi = e^{p+1} \wedge \ldots \wedge e^m$ определяет как раз пространство R^p. Действительно, пусть $x \in R^p$. Для любого $(q-1)$-поливектора y произведение $\langle x \wedge y, \psi \rangle$ является суммой членов, каждый из которых содержит сомножителем одно из чисел $\langle e^{p+1}, x \rangle, \ldots, \langle e^m, x \rangle$, то есть нуль. Значит, $R^p \subset L(\psi)$, а так как $\operatorname{Rg} \psi = q$, то $\dim L(\psi) = p$ и $L(\psi) = R^p$.

Пространство R^p и форма ψ определяют друг друга почти однозначно. Точнее говоря, форма ψ однозначно определяет пространство R^p и сама им определяется с точностью до скалярного множителя. Действительно, если $L(\psi) = R^p$, то, как мы видели,

$$\psi \in \Lambda E(\psi) = \Lambda(\operatorname{Ann} R^p),$$

а в q-мерном пространстве $\operatorname{Ann} R^p$ имеется, с точностью до скалярного множителя, только одна q-форма.

Рассмотрим теперь непрерывное поле p-мерных касательных подпространств R^p_w, заданное на многообразии W^m. В некоторой окрестности U любой точки w, можно построить такие m непрерывных векторных полей $\{e_i(w)\}$, что при любом $w \in U$ векторы $\{e_i(w)\}$ образуют базис в касательном пространстве R^m_w, причем первые p векторов этого базиса лежат в R^p_w. Следовательно, форма

$$\psi(w) = e^{p+1}(w) \wedge \ldots \wedge e^m(w),$$

как и любая форма, получающаяся из нее умножением на функцию, определяет поле R^p_w в области U. Если поле R^p_w гладкое, то (путем надлежащего выбора $\{e_i(w)\}$) форму тоже можно сделать гладкой, и т. д.

Возьмем в какой-нибудь точке $w \in U$ какое-нибудь q-мерное пространство R^q_w, трансверсальное к R^p_w. Вложение $R^q_w \subset R^m_w$ порождает проекцию

$$\Lambda \overset{*}{R}{}^m_w \to \Lambda \overset{*}{R}{}^q_w,$$

при которой форма $\psi(w)$, очевидно, не переходит в нуль; поэтому образ формы $\psi(w)$ определяет некоторый «ориентированный» объем в R^q_w (т. е. некоторую меру, удовлетворяющую известным условиям, и ориентацию). Форма $\psi(w)$ будет определена в области U однозначно, если для некоторого поля R^q_w, всюду трансверсального к полю R^p_w, этот объем будет задан. Например, можно потребовать, чтобы этот объем совпадал бы с объемом, задаваемым в пространствах R^q_w римановой метрикой многообразия W^m, и указать ориентацию. Если поле R^q_w выбрать бесконечно дифференцируемым, то гладкость нормированной с его помощью формы $\psi(w)$ будет та же, что и гладкость поля R^p_w, ибо риманова метрика в W^m, как неоднократно говорилось, всегда предполагается класса C^∞.

Обратно, пусть в некоторой области $U \subset W^m$ задана непрерывная и разложимая q-форма $\psi(w)$, которая ни при одном w не обращается в нуль. (Под «разложимостью» дифференциальной формы я понимаю локальную разложимость: форма должна быть разложимой при любом фиксированном $w \in U$ как форма в R^m_w, т. е. ранг ее при всех w равен q.) Ясно, что такая форма определяет непрерывное поле p-мерных касательных подпространств R^p_w, заданное в области U. Если форма $\psi(w)$ гладкая, то поле R^p_w тоже будет гладким, и т. д. (Между прочим, сопоставляя сказанное здесь со сказанным абзацем выше, мы видим, что разложимая непрерывная форма (нигде не обращающаяся в нуль) — это форма, которая в некоторой окрестности каждой точки представляется как произведение непрерывных пфаффовых форм, разложимая гладкая форма — это форма, которая в некоторой окрестности каждой точки представляется как произведение гладких пфаффовых форм, и т. д.)]

Форма $\psi(w)$, задающая поле R^p_w, была определена пока что только локально. Теперь я скажу несколько слов о том, как обстоит дело с построением на всем многообразии W^m непрерывной разложимой q-формы $\psi(w)$, задающей поле R^p_w. Вообще говоря, такая форма не всегда существует. Действительно, возьмем какое-нибудь поле R^q_w, всюду трансверсальное к полю R^p_w (например, за R^q_w можно взять ортогональное дополнение к R^p_w в некоторой римановой метрике); согласно сказанному выше, форма $\psi(w)$, если ее можно построить глобально, определяет некоторую ориентацию во всех пространствах R^q_w. Но, вообще говоря, поле неориентированных подпространств R^q_w не обязательно получается из некоторого поля ориентированных пространств путем пренебрежения ориентацией. В инвариантных терминах необходимое условие, к которому мы пришли, гласит: векторное расслоение $\mathfrak{R}^m/\mathfrak{R}^p$ со слоем R^m_w/R^p_w должно быть ориентируемым.

Допустим, что это условие выполняется; тогда форму ψ, задающую поле R^p_w, можно построить глобально. (Ориентируемости же всегда можно достичь, перейдя к двулистному накрытию.) В самом деле, выберем какую-нибудь ориентацию векторного расслоения $\mathfrak{R}^m/\mathfrak{R}^p$. Пусть $\{U_\alpha\}$ — конечное покрытие многообразия W^m областями, в каждой из которых имеется форма $\psi_\alpha(w)$, определяющая поле R^p_w в этой области. Можно считать, что все $\psi_\alpha(w)$ задают ориентацию в подпространствах $R^q_w \approx R^m_w/R^p_w$, совпадающую с выбранной ориентацией слоев векторного расслоения $\mathfrak{R}^m/\mathfrak{R}^p$. Тогда при $w \in U_{\alpha_1} \cap \ldots \cap U_{\alpha_s}$ формы $\psi_{\alpha_1}(w), \ldots, \psi_{\alpha_s}(w)$ отличаются друг от друга скалярными положительными множителями, поэтому любая линейная комбинация этих форм с положительными коэффициентами снова является ненулевой разложимой q-формой, определяющей пространство R^p_w. Пусть $\{h_\alpha(w)\}$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$; положим

$$\psi(w) = \Sigma h_\alpha(w)\,\psi_\alpha(w).$$

Ясно, что ψ обладает желаемыми свойствами. Если поле R^p_w гладкое, то и построенная таким путем форма ψ будет гладкой формой того же класса гладкости.

Допустим теперь, что поле R^p_w является касательным полем некоторого слоения $\mathfrak{S}^p$. Будем пока считать все рассматриваемые объекты достаточно гладкими. Тогда локально можно считать, что в некоторой координатной окрестности U_α слои $\mathfrak{S}^p$ задаются уравнениями

$$y^{p+1} = \mathrm{const}, \ldots, y^m = \mathrm{const}.$$

Касательные векторы к слоям имеют вид $(dy^1, \ldots, dy^p, 0, \ldots, 0)$. Можно также сказать, что касательный вектор к слою — это вектор, для которого

$$dy^{p+1} = 0, \ldots, dy^m = 0.$$

В качестве ψ тогда, очевидно, можно взять форму

$$\psi_\alpha = dy^{p+1} \wedge \ldots \wedge dy^m.$$

Ясно, что эта форма замкнутая $(d\psi_\alpha = 0)$. Переход от локальных форм ψ_α к «глобальной» форме ψ осуществляется путем умножения на некоторые функции g_α. При этом, вообще говоря, мы замкнутой формы не получим, но при $w \in U_\alpha$

$$d\psi = d(g_\alpha\psi_\alpha) = dg_\alpha \wedge \psi_\alpha = d\ln g_\alpha \wedge \psi.$$

Если при этом также $w \in U_\beta$, то, конечно,

$$d\ln g_\beta \wedge \psi = d\ln g_\alpha \wedge \psi$$

(ибо обе эти формы совпадают с $d\psi$), но, вообще говоря, $d\ln g_\beta \neq d\ln g_\alpha$. Однако, используя разбиение единицы $\{h_\alpha\}$, можно написать

$$d\psi = \Sigma h_\alpha d\psi = \Sigma h_\alpha\, d\ln g_\alpha \wedge \psi = \vartheta \wedge \psi,$$

где ϑ — некоторая пфаффова форма (определенная уже всюду). Итак, мы видим, что касательное поле R^p_w слоения $\mathfrak{S}^p$ определяется некоторой разложимой q-формой ψ, внешняя производная которой $d\psi$ делится на саму ψ. Легко видеть, что форма ψ имеет тот же класс гладкости, что и слоение $\mathfrak{S}^p$ (т. е. его касательное поле).

Более того, в этом случае любая гладкая разложимая q-форма φ, определяющая поле R^p_w, тоже обладает тем свойством, что $d\varphi$ делится на φ. Действительно, $\varphi = f\psi$, где f — некоторая гладкая функция, поэтому

$$d\varphi = df \wedge \psi + f \wedge d\psi = d\ln|f| \wedge \varphi + f \wedge \vartheta \wedge \psi = (d\ln|f| + \vartheta) \wedge \varphi.$$

Справедливо также и обратное утверждение: если разложимая гладкая q-форма обладает тем свойством, что $d\psi$ делится на ψ, то определяемое формой ψ поле p-мерных пространств является касательным полем некоторого гладкого слоения $\mathfrak{S}^p$ (имеющего тот же класс гладкости, что и ψ). Это — просто перефразировка классической теоремы Фробениуса, которая обычно приводится в следующей формулировке. Пусть в области U заданы q гладких пфаффовых форм

$$\omega_1(w, dw), \ldots, \omega_q(w, dw),$$

которые ни при одном $w \in U$ не являются линейно зависимыми, и пусть

$$d\omega_i \wedge \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_q = 0, \quad i = 1, \ldots, q. \qquad (16.2)$$

Тогда сквозь каждую точку области U проходит интегральное многообразие (q-мерное) поля p-мерных касательных пространств

$$R_w^p = \{dw : \omega_1(w, dw) = 0, \ldots, \omega_q(w, dw) = 0\}. \qquad (16.3)$$

В таком виде теорема Фробениуса является, так сказать, локальной теоремой существования для системы уравнений Пфаффа, аналогичной теореме существования для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, т. е. для системы m уравнений Пфаффа. Наряду с теоремой существования для систем уравнений Пфаффа, как и для обыкновенных дифференциальных уравнений, справедлива теорема единственности: два интегральных многообразия, проходящие через одну и ту же точку, совпадают в некоторой окрестности этой точки, и локальная теорема о непрерывной зависимости от начальных данных. Но в то время как теорема существования для пфаффовой системы представляет собой нечто новое по сравнению с теоремой существования для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (условия интегрируемости (16.2)), теоремы о единственности и о непрерывной зависимости никакого элемента новизны не содержат, почему на них и не делают ударения. Действительно, теорему о непрерывной зависимости можно доказать с помощью теоремы о единственности таким же образом, как и для обыкновенных дифференциальных уравнений, а теорема единственности, в свою очередь, вытекает из следующего утверждения: если M^p — (локальное) интегральное многообразие поля R_w^p, проходящее через точку w_0, то любая достаточно короткая гладкая кривая L, которая проходит через точку w_0 и в каждой своей точке касается поля R_w^p, целиком лежит в M^p. Последнее же утверждение непосредственно сводится к теореме единственности для обыкновенных дифференциальных уравнений. (Введем в некоторой окрестности точки w_0 систему координат $(y^1, \ldots, y^m)$, в которой многообразие M^p имеет уравнение $y^{p+1} = 0, \ldots, y^m = 0$, а поле R_w^p приблизительно параллельно многообразию M^p. Пусть кривая L представлена в параметрической форме: $y^i = y^i(t)$, $i = 1, \ldots, m$. Рассмотрим отображение

$$\chi : (t, \eta) = (t, \eta^1, \ldots, \eta^q) \to (y^1(t), \ldots, y^p(t), \eta^1, \ldots, \eta^q)$$

$(q+1)$-мерного пространства (t, η) в m-мерное и обозначим через $\tilde{\chi}$ его дифференциал. Легко видеть, что возле начала координат прообраз $\tilde{\chi}^{-1} R^p_{\chi(t,\eta)}$ одномерен и что, сопоставив каждой точке (t, η) прямую $\tilde{\chi}^{-1} R^p_{\chi(t,\eta)}$, получим гладкое поле направлений в пространстве (t, η). Кривые $(t, 0, \ldots, 0)$ и $(t, y^{p+1}(t), \ldots, y^m(t))$ всюду касаются этого поля, ибо при отображении χ эти кривые переходят в некоторую кривую, лежащую на многообразии M^p, и в кривую L соответственно, а обе последние кривые всюду касаются поля R_w^p. Но при $t = 0$ эти две кривые совпадают. Следовательно, они совпадают при всех t, при которых наши построения законны, т. е. при которых L не выходит из некоторой окрестности точки w_0.) Единственность позволяет, наконец, «склеить» локальные интегральные многообразия в глобальные и получить слоение.

Вместо того, чтобы задавать поле (16.3) с помощью системы пфаффовых форм $\omega_1, \ldots, \omega_q$, его можно определить как $L(\psi(w))$, где $\psi = \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_q$. Обратно, если поле R_w^p задано как $L(\psi(w))$, где ψ — гладкая разложимая q-форма, которую, следовательно, можно локально представить в виде $\psi = \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_q$, где ω_i — гладкие пфаффовы формы, то его можно определить и согласно (16.3). Нетрудно проверить, что условие интегрируемости

(16.2) и условие делимости $d\psi$ на ψ

$$\psi \mid d\psi \tag{16.4}$$

эквивалентны. Поэтому обычная формулировка теоремы Фробениуса с помощью системы пфаффовых форм совершенно эквивалентна приведенной ранее более инвариантной глобальной формулировке с помощью ψ.

До сих пор все объекты были гладкими. Гартман доказал ([76, 77]; см. также его книгу [102], гл 6), что в обычной формулировке теоремы Фробениуса условие гладкости пфаффовых форм $\omega_1,\ldots,\omega_q$ можно ослабить. Достаточно потребовать, чтобы каждая из них была непрерывной, имела непрерывную внешнюю производную $d\omega_i$ и чтобы выполнялись условия интегрируемости (16.2). При этих условиях в области U сквозь каждую точку проходит интегральное многообразие поля (16.3) и имеет место локальная единственность; более того, любая гладкая кривая, в каждой своей точке касающаяся поля R^p_w, целиком лежит в некотором интегральном многообразии. Как обычно, отсюда следует, что поле R^p_w является касательным полем некоторого слоения $\mathfrak{S}^p$ (которое, вообще говоря, уже не будет гладким).

Из того, что существуют непрерывные внешние производные $d\omega_i$, следует, что форма $\psi = \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_q$ имеет непрерывную внешнюю производную, а из (16.2) следует (16.4). Обратное, однако, не всегда верно. Поле R^p_w, определяемое разложимой непрерывной формой ψ с непрерывной внешней производной $d\psi$, делящейся на ψ, может не быть касательным полем никакого слоения. Рассмотрим в пространстве (x, y, z) форму

$$\psi = (dy - z dx) \wedge (dz - 30 y^{\frac{2}{3}}\, dx)$$

($y^{\frac{2}{3}}$ будем брать с тем же знаком, что и y). Очевидно, ψ обладает всеми перечисленными свойствами (причем $d\psi$ даже равно нулю). Поле

$$R^1_{(x,y,z)} = L(\psi) = \{(dx, dy, dz) : dy - z dx = 0,\ dz - 30 y^{\frac{2}{3}}\, dx = 0\}$$

имеет своими интегральными многообразиями решения системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dx} = z, \qquad \frac{dz}{dx} = 30 y^{\frac{2}{3}} \quad (\operatorname{sign} y^{\frac{2}{3}} = \operatorname{sign} y). \tag{16.5}$$

Рассматривая всевозможные интегральные кривые системы (16.5), проходящие через ось x, а также близкие к ним интегральные кривые, нетрудно усмотреть, что в данном случае не только нарушается единственность и непрерывная зависимость от начальных данных, но и невозможно выбрать из множества всех интегральных кривых такое семейство, которое образовывало бы слоение.

Хотя в этом примере поле R^1_w не является касательным полем никакого слоения, все же сквозь каждую точку проходит интегральное многообразие. Разумеется, хорошо известно, что для обыкновенных дифференциальных уравнений нужно разделять вопрос о существовании решений и вопрос о единственности. Первый вопрос имеет положительный ответ, если поле R^1_w всего лишь непрерывно, для второго же вопроса этого мало. Вопрос, которым мы занимались: является ли поле R^1_w касательным полем некоторого слоения,— близок к вопросу о единственности, хотя и не совсем совпадает с ним. (Например, уравнение $\frac{dy}{dx} = 3y^{2/3}$, $\operatorname{sign} y^{2/3} > 0$, определяет слоение, слоями которого являются кривые

$$y = \begin{cases} -(x-c)^3, & x \leqslant c, \\ (x-c)^3, & x \geqslant c, \end{cases}$$

но единственность для этого уравнения нарушается,— помимо указанных кривых есть еще решения.) В связи с этим возникает мысль, что и для полей p-мерных касательных подпространств ($p > 1$) эти вопросы надо разделить. Условия Гартмана, видимо, являются довольно естественными для единственности, а стало быть и для того, чтобы поле R_w^p было касательным полем некоторого слоения. Но не достаточно ли каких-то более слабых условий в том случае, когда речь идет только о существовании интегральных многообразий? (Скажем, не достаточно ли существования непрерывной внешней производной $d\psi$, делящейся на ψ?). Об этом я не имею ни малейшего представления.

В ($У$)-системах возникают поля касательных подпространств X_w^k и Y_w^l (а в ($У$)-потоках — еще и поля X_w^{k+1} и Y_w^{l+1}), не являющиеся гладкими. В предыдущей главе было доказано, что эти поля являются касательными полями некоторых слоений и что имеет место единственность: любое интегральное многообразие является подмножеством слоя и, более того, любая гладкая кривая, в каждой своей точке касающаяся поля, целиком лежит в некотором слое соответствующего слоения. Это — те свойства, которые имеют место при выполнении условий Гартмана. Однако я не знаю, можно ли задать локально эти поля с помощью системы непрерывных пфаффовых форм, каждая из которых имеет непрерывную внешнюю производную. Можно доказать только то, что, скажем, в ($У$)-каскаде класса C^2 поле X_w^k задается некоторой непрерывной разложимой l-формой ψ, имеющей непрерывную внешнюю производную $d\psi$, делящуюся на ψ (и аналогично для других рассматриваемых полей в ($У$)-системах класса C^2). Как мы видели выше, само по себе это еще недостаточно для того, чтобы поле X_w^k было касательным полем некоторого слоения; поэтому доказательство существования слоения $\mathfrak{S}^k$ (и единственности), данное в предыдущей главе, опиралось на иные соображения.

§ 17. Абсолютная непрерывность слоений и дифференциальные формы

В этом параграфе обсуждается связь между абсолютной непрерывностью слоения $\mathfrak{S}^p$ и свойствами определяющей его глобально формы ψ. Используются те же обозначения, что и в предыдущем параграфе.

Пусть имеются две гладкие q-мерные ($q = m - p$) площадки Π_0^q и Π_1^q, трансверсальные к слоению $\mathfrak{S}^p$, т. е. два q-мерные шара, гладко вложенные в W^m и нигде не касающиеся слоев слоения $\mathfrak{S}^p$. Обозначим через

$$i_0 : E^q \to W^m, \quad i_1 : E^q \to W^m$$

вложения q-мерного шара E^q в W^m, образами которых являются эти площадки. Пусть некоторая точка $w_0 \in \Pi_0^q$ соединена с некоторой точкой $w_1 \in \Pi_1^q$ некоторой непрерывной кривой

$$L_0 : w = w_0(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{17.1}$$

целиком лежащей в некотором слое слоения $\mathfrak{S}^p$. Из непрерывной зависимости слоев от начальных точек следует (см. ниже), что тогда любую достаточно близкую к w_0 точку $w_0' \in \Pi_0^q$ можно соединить с некоторой (зависящей от w_0') точкой $w_1' \in \Pi_1^q$ кривой, которая целиком лежит в некотором (зависящем от w_0') слое слоения $\mathfrak{S}^p$ и близка к кривой L_0; отображение $w_0' \to w_1'$ некоторой окрестности точки $w_0 \in \Pi_0^q$ на некоторую окрестность точки $w_1 \in \Pi_1^q$ непрерывно. Говоря подробнее, тогда существует такое непрерывное отображение

$$g : E_0^q \times I \to W^m$$

прямого произведения q-мерного шара E_0^q, являющегося некоторой окрестностью точки $e_0 = i_0^{-1}(w_0)$ в шаре E^q, на отрезок $I = [0,1]$ в многообразие W^m, что

$$\left.\begin{array}{ll} g(x, 0) = i_0(x) \text{ и } g(x, 1) \in \Pi_1^q & \text{при } x \in E_0^q; \\ g(e_0, t) = w(t) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant 1; \\ \multicolumn{2}{l}{\text{при любом } x \in E_0^q \text{ кривая } w = g(x, t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1,} \\ \multicolumn{2}{l}{\text{целиком лежит в некотором слое слоения } \mathfrak{S}^p.} \end{array}\right\} \qquad (17.2)$$

Если точка $w_0' = i_0(x)$, то эта точка соединена кривой $g(x, t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, с точкой $w_1' = i_1(g(x, 1))$, так что отображение $w_0' \to w_1'$ в используемых нами на площадках Π_0^q, Π_1^q координатах является отображением

$$f : x \to i_1^{-1} g(x, 1). \qquad (17.3)$$

Отображение f гомеоморфно отображает шар E_0^q внутрь шара E^q. Можно считать, что оно не меняет ориентации — этого можно достичь, заменив при необходимости отображение i_1 отображением, определяющим другую ориентацию на площадке Π_1^q. Далее, если имеется непрерывная деформация площадок Π_0^q, Π_1^q, причем при этой деформации обе площадки все время остаются трансверсальными к слоению $\mathfrak{S}^p$ и все время существует соединяющая обе площадки кривая, целиком лежащая в некотором слое и непрерывно меняющаяся со временем, то отображение f тоже меняется непрерывно.

Говоря подробнее, пусть имеются два семейства гладких вложений

$$i_{0,s} : E^q \to W^m, \quad i_{1,s} : E^q \to W^m, \quad 0 \leqslant s \leqslant 1,$$

непрерывных по s (т. е. $i_{0,s}(x)$ и $i_{1,s}(x)$ непрерывны по (s, x) и производные $\frac{d}{dx} i_{0,s}(x)$ и $\frac{d}{dx} i_{1,s}(x)$ тоже непрерывны по (s, x)), причем при любом s площадки

$$\Pi_{0,s}^q = i_{0,s}(E^q), \quad \Pi_{1,s}^q = i_{1,s}(E^q),$$

являющиеся образами этих вложений, трансверсальны к слоению $\mathfrak{S}^p$. Допустим, что точку $w_{0,s} = i_{0,s}(e_0)$ в любой момент s можно соединить с внутренностью площадки $\Pi_{1,s}^q$ некоторой кривой

$$L_s : w = w_s(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \qquad (17.4)$$

целиком лежащей в некотором (зависящем от s) слое слоения $\mathfrak{S}^p$, причем $w_s(t)$ непрерывно по (t, s). Тогда из непрерывной зависимости слоев от начальных точек следует (см. ниже), что любую достаточно близкую к $w_{0,s}$ точку $w_{0,s}' \in \Pi_{0,s}^q$ можно соединить с площадкой $\Pi_{1,s}^q$ кривой, которая целиком лежит в некотором слое слоения $\mathfrak{S}^p$ и непрерывно зависит от s и от $w_{0,s}'$. Иными словами, существует такое непрерывное отображение

$$g : E_0^q \times I \times I \to W^m \qquad (x, t, s) \to g(x, t, s)$$

(шар E_0^q, возможно, придется несколько уменьшить), что

$$\left.\begin{array}{l} \text{при } s = 0 \text{ это отображение совпадает с рассмотренным выше:} \\ g(x, t, 0) = g(x, t); \\ g(x, 0, s) = i_{0,s}(x) \text{ и } g(x, 1, s) \in \Pi_{1,s}^q \text{ при } x \in E_0^q; \\ g(e_0, t, s) = w_t(s) \text{ при } 0 \leqslant t,\ s \leqslant 1; \\ \text{при любых } x \in E_0^q,\ s \in I \text{ кривая } w = g(x, t, s),\ 0 \leqslant s \leqslant 1, \\ \text{целиком лежит в некотором слое слоения } \mathfrak{S}^p. \end{array}\right\} \qquad (17.5)$$

В момент времени s роль гомеоморфного вложения f играет гомеоморфное вложение

$$f_s : E_0^q \to E^q, \quad f_s(x) = i_{1,s}^{-1} g(x, 1, s), \tag{17.6}$$

непрерывное по (x, s).

Опишем построение отображений g. Очевидно, отображения $i_{1,s}$ можно выбрать такими, что $i_{1,s}(e_0) = w(1, s)$. Возьмем в E^q шар E_1^q с центром e_0. При достаточной малости E_1^q можно построить непрерывное отображение

$$h : E_1^q \times I \times I \to W^m, \qquad (x, t, s) \to h_{t,s}(x),$$

обладающее следующими свойствами:

$$\left.\begin{array}{l} h_{0,s} = i_{0,s} \mid E_1^q, \ h_{1,s} = i_{1,s} \mid E_1^q; \\ h_{t,s}(e_0) = w(t, s); \\ \text{ограничение } h \mid E_0^q \times t \times s \text{ является при любых} \\ (t, s) \in I \times I \text{ гладким вложением, образ которого} \\ \text{трансверсален к слоению } \mathfrak{S}^p; \\ \text{производная } \dfrac{d}{dx} h_{t,s}(x) \text{ непрерывна по } (x, t, s). \end{array}\right\} \tag{17.7}$$

Рассмотрим пересечения слоев слоения $\mathfrak{S}^p$ с многообразиями $h(E_0^q \times \times t \times s)$ и то, как эти пересечения зависят от t и s. Возьмем какую-нибудь точку (x_0, t_0, s_0), где x_0 лежит во внутренности шара E_1^q. При изменении t, s, гладкое многообразие $h(E_1^q \times s \times t)$ непрерывно деформируется, оставаясь трансверсальным к слоению $\mathfrak{S}^p$. Поэтому при достаточно малых $|t - t_0|$, $|s - s_0|$ определена непрерывно зависящая от (t, s) функция $x(t,s)$, для которой точка $h_{t,s}(x(t, s))$ является точкой пересечения $h(E_1^q \times \times t \times s)$ со слоем слоения $\mathfrak{S}^p$, проходящим через точку $h_{t_0,s_0}(x_0)$, и расположена близко к этой точке в метрике слоя:

$$x(t, s) = h_{t,s}^{-1}(h(E_1^q \times t \times s) \cap B_\varepsilon^p(h_{t_0,s_0}(x_0))),$$

где $B_\varepsilon^p(w)$ обозначает шар радиуса ε в слое слоения $\mathfrak{S}^p$, проходящем через w. Так как $x(t, s)$ зависит от начальной точки (x_0, t_0, s_0), то подробнее следовало бы писать $x(t, s, x_0, t_0, s_0)$. Ясно, что если

$$x_1 = x(t_1, s_1, x_0, t_0, s_0),$$

то

$$x(t, s, x_0, t_0, s_0) = x(t, s, x_1, t_1, s_1)$$

при тех t, s, при которых обе эти функции определены. Это позволяет продолжать функцию $x(t, s)$ вдоль любого непрерывного пути (s_τ, t_τ) в $I \times I$ до тех пор, пока $x(s_\tau, t_\tau)$ не попадет на край шара E_1^q. Из односвязности $I \times I$ и непрерывности слоения $\mathfrak{S}^p$ следует, что при достаточно малом $x_0 - w(t_0, s_0)$ можно осуществить такое продолжение на все $I \times I$ и что $x(\ , s)$ не зависит от пути, соединяющего (t_0, s_0) с (t, s). Считая x_0 достаточно близким к e_0, обозначим $x(t, s, x_0, 0, 0)$ через $f_{t,s}(x_0)$. Отображение $f_{1,s}(x_0)$, по существу, совпадает с $f_s(x_0)$, — точнее,

$$f_{1,s}(x_0) = (f_s(x_0), 1, s),$$

а отображение g определяется следующим образом:

$$g(x_0, t, s) = h_{t,s} f_{t,s}(x_0). \tag{17.8}$$

x_0 должно при этом лежать в некотором шаре E_0^q, который содержит e_0 и настолько мал, что $x(t, s, x_0, 0, 0)$ определено при всех $(t, s) \in I \times I$.

Кривую (17.1), если она негладкая, можно заменить близкой гладкой кривой L_0^1, которая имеет те же концы и лежит в том же слое слоения $\mathfrak{S}^p$, что и L_0. Точно так же семейство кривых (17.4) можно заменить семейством гладких кривых

$$L_s^1 : w = w_s^1(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

каждая из которых имеет те же концы и лежит в том же слое слоения $\mathfrak{S}^p$, что и кривая L_s; функция $w_s^1(t)$ непрерывна по (t, s) и имеет производную по t, также непрерывную по (t, s). Нетрудно убедиться, что отображение (17.2) или, соответственно, семейство отображений (17.6) при этом не изменится (по крайней мере, не изменится в некоторой окрестности точки e_0). Поэтому будем с самого начала считать, что L_0 — гладкая кривая или что L_s — непрерывное семейство гладких кривых (в частности, производная $\frac{d}{dt} w_s(t)$ непрерывна по (t, s)). В дополнение к (17.7), отображение h тогда можно считать обладающим следующим свойством:

$$\begin{gathered}\text{при любых } (x, t, s) \in E_0^q \times I \times I \text{ существует} \\ \text{производная } \frac{d}{dt} h_{t,s}(x), \text{ непрерывная по } (x, t, s).\end{gathered} \tag{17.9}$$

Ясно, что в таком случае при фиксированном s функция $x(t, s)$ гладко зависит от t и удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению в пространстве $E_1^q \times I \times s$ касательной к кривой $(x(t, s), t, s)$ является прямая

$$\left(\frac{d}{dx} h_{t,s}, \frac{d}{dt} h_{t,s}\right)^{-1} X^p_{h_{t,s}(x(t,s))}. \tag{17.10}$$

Если слоение $\mathfrak{S}^p$ гладкое, то поле направлений (17.10) тоже гладкое; стало быть , его интегральная кривая, проходящая через точку $(x, 0, s)$, определяется однозначно, а функция $x(t, s) = f_{t,s}(x_0)$ дифференцируема не только по t, но и по x_0, причем производная непрерывна по (t, s, x_0). Если же слоение $\mathfrak{S}^p$ негладкое, то можно утверждать только, что поле направлений (17.10) непрерывно. Впрочем, слоения, с которыми мы имеем дело, обладают тем свойством, что кривая, всюду касающаяся слоев, целиком лежит в одном и том же слое; при этом условии для интегральных кривых поля направлений (17.10) по-прежнему имеет место единственность. Так или иначе, мы берем только те интегральные кривые, которые описанным выше образом соответствуют непрерывно зависящим от t точкам пересечения $h(E_1^q \times \times t \times s)$ со слоями $\mathfrak{S}^p$, а уж эти-то интегральные кривые сами не ветвятся (хотя от них могут ответвляться другие). Из (17.8) видно, что в случае гладкого слоения $\mathfrak{S}^p$ отображение g, помимо (17.5), обладает свойством

$$\begin{gathered}g(x, t, s) \text{ при любых } (x, t, s) \in E_0^q \times I \times I \\ \text{имеет производные по } x \text{ и по } t, \text{ непрерывные} \\ \text{по } (x, t, s).\end{gathered} \tag{17.11}$$

Отсюда и из (17.3) или (17.6) видно, что если слоение $\mathfrak{S}^p$ гладкое, то гомеоморфизм f или, соответственно, гомеоморфизмы f_s являются гладкими отображениями, как и $f_{t,s}$. Если же слоение не гладкое, то, конечно, эти гомеоморфизмы не обязаны быть гладкими. Согласно данному в начале § 5 определению, абсолютно непрерывное слоение — это такое слоение, для которого f_s имеют обобщенный якобиан, непрерывный по (x, s).

Рассмотрим гомеоморфизмы f_s подробнее, сперва предполагая слоение $\mathfrak{S}^p$ гладким. Выведем некоторые соотношения для якобианов этих отображений. Якобианы при этом оказывается целесообразным брать не по эвклидовой мере, а по мере, которая на площадках $\Pi_{1,s}$ и $\Pi_{0,s}$ определяется гладкой разложимой q-формой ψ, задающей слоение $\mathfrak{S}^p$:

$$\mu(A) = \int_A \psi \text{ для } A \subset \Pi_{0,s} \text{ или } A \subset \Pi_{1,s}.$$

Говоря «на языке (x, t, s)», мы будем пользоваться мерой

$$\mu_{t,s}(A) = \int_{A \times t \times s} \widetilde{h}^*_{t,s} \psi, \tag{17.12}$$

где под интегралом стоит дифференциальная форма, являющаяся образом формы ψ (w) при отображении

$$\widetilde{h}^*_{t,s} : \Lambda \overset{*}{R}{}^m_w \to \Lambda \overset{*}{E}{}^q_0,$$

индуцированном дифференциалом $\widetilde{h}_{t,s}$ отображения $h_{t,s}$. Из (17.7) и (17.9) следует, что мера $\mu_{t,s}$ эквивалентна эвклидовой мере в E^q_1, причем «якобиан» (производная Радона — Никодима) непрерывен по (x, t, s).

Удобно также несколько видоизменить обозначения, полагая

$$h_s(x, t) = h_{t,s}(x), \; g_s(x, t) = g(x, t, s), \; f_s(x, t) = f_{t,s}(x),$$

так что h_s, g_s, f_s суть гладкие отображения

$$h_s : E^q_1 \times I \to W^m, \qquad g_s: E^q_0 \times I \to W^m, \qquad f_s : E^q_0 \times I \to E^q_1 \times I,$$

причем h_s и g_s являются погружениями (якобиан в каждой точке имеет максимальный ранг), а f_s — вложением.

Пусть $A^q \subset E^q_0$ — q-мерное подмножество, ограниченное гладкой или кусочно-гладкой $(q-1)$-мерной поверхностью ∂A^{q-1} (например, шар или куб). Применим формулу Стокса к «цилиндру» $f_s(A \times [0, t])$ и форме $\widetilde{h}^*_s \psi$:

$$\int_{f_s(A \times t)} \widetilde{h}^*_s \psi - \int_{f_s(A \times 0)} \widetilde{h}^*_s \psi + \int_{f_s(\partial A \times [0, t])} \widetilde{h}^*_s \psi = \int_{f_s(A \times [0, t])} d(\widetilde{h}^*_s \psi). \tag{17.13}$$

Интеграл по боковой поверхности цилиндра $f_s(\partial A \times [0, t])$ равен нулю. Действительно, если R^{q-1}_x — касательное пространство к ∂A^{q-1} в точке x, то касательным пространством к $f_s(\partial A^{q-1} \times [0, 1])$ в точке $f_s(x, t)$ служит $\widetilde{f}_s(R^{q-1}_x \oplus R^1)$. Из (17.5) следует, что образ этого пространства при отображении $\widetilde{h}_s$ пересекается с $R^p_{g_s(x,t)}$, а именно,

$$\widetilde{g}_s(R^{q-1}_x \oplus R^1) \cap R^p_{g_s(x,t)} = \widetilde{g}_s(R^1).$$

Значит, любой q-поливектор из этого пространства делится на некоторый вектор из $R^p_{g_s(x,t)}$, поэтому

$$\psi \,|\, \widetilde{g}_s(R^{q-1}_x \oplus R^1) = 0$$

и

$$\widetilde{h}^*_s \psi \,|\, \widetilde{f}_s(\partial A^{q-1} \times [0, t]) = 0.$$

Что же до оставшихся двух интегралов в левой части (17.13), то они, очевидно, равны

$$\int_{f_{t,s}(A) \times t \times s} \widetilde{h}^*_{t,s} \psi \quad \text{и} \quad \int_{A \times 0 \times s} \widetilde{h}^*_{0,s} \psi$$

соответственно, т. е. (см. 17.12))

$$\mu_{t,s} f_{t,s}(A) \quad \text{и} \quad \mu_{0,s} A.$$

Кроме того, ясно, что

$$\mu_{t,s} f_{t,s}(A) = \int\limits_A J(x, t, s)\, d\mu_{0,s}(x), \tag{17.14}$$

где «якобиан» $J(x, t, s)$ является положительной непрерывной функцией своих аргументов.

Займемся теперь правой частью (17.13). Прежде всего,

$$d(\widetilde{h}_s^* \psi) = \widetilde{h}_s^* d\psi. \tag{17.15}$$

Пользуясь координатами

$$(x, t) = (x^1, \ldots, x^q, t), \quad x = (x^1, \ldots, x^q) \in E_1^q, t \in I$$

в прямом произведении $E_1^q \times I \times s$, мы можем написать

$$\widetilde{h}_s^* d\psi = \varphi(x, t, s) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^q \wedge dt, \tag{17.16}$$

$$\widetilde{h}_{t,s}^* \psi = \chi(x, t, s)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^q \tag{17.17}$$

и, стало быть,

$$\widetilde{h}_s^* d\psi = \Psi(x, t, s)\, \widetilde{h}_{t,s}^* \psi \wedge dt, \tag{17.18}$$

где $\Psi = \varphi / \chi$ является положительной и непрерывной функцией своих аргументов. Поэтому интеграл в правой части (17.13) равен

$$\int\limits_0^t \int\limits_{f_{\tau,s}(A)} \Psi(x, \tau, s)\, d\mu_{\tau,s}(x) d\tau.$$

Но, согласно (17.14), внутренний интеграл здесь есть

$$\int\limits_{f_{\tau,s}(A)} \Psi(x, \tau, s)\, d\mu_{\tau,s}(x) = \int\limits_A \Psi(f_{\tau,s}(x), \tau, s)\, d\mu_{\tau,s}(f_{\tau,s}(x)) =$$

$$= \int\limits_A \Psi(f_{\tau,s}(x), \tau, s)\, J(x, \tau, s)\, d\mu_{0,s}(x).$$

Теперь можно поменять местами интегрирование по τ и по x. В результате всего этого (17.13) принимает вид

$$\mu_{t,s} f_{t,s}(A) - \mu_{0,s}(A) = \int\limits_A \int\limits_0^t \Psi(f_{\tau,s}(x), \tau, s)\, J(x, \tau, s)\, d\tau\, d\mu_{0,s} \tag{17.19}$$

или

$$\int\limits_A [J(x, t, s) - 1]\, d\mu_{0,s} = \int\limits_A \int\limits_0^t \Psi(f_{\tau,s}(x), \tau, s)\, J(x, \tau, s)\, d\tau\, d\mu_{0,s}.$$

Отсюда

$$J(x, t, s) - 1 = \int\limits_0^t \Psi(f_{\tau,s}(x), \tau, s)\, J(x, \tau, s)\, d\tau$$

и, наконец,

$$J(x, t, s) = e^{\int\limits_0^t \Psi(f_{\tau,s}(x), \tau, s)\, d\tau} \tag{17.20}$$

Допустим теперь, что слоение $\mathfrak{S}^p$ — не гладкое, но что его можно задать с помощью непрерывной разложимой q-формы ψ, которая имеет непрерывную внешнюю производную $d\psi$, делящуюся на ψ. Тогда по-прежнему имеют место формулы (17.15)—(17.18); в (17.18) функция Ψ по-прежнему непрерывна и положительна. Правая часть (17.20) по-прежнему непрерывно зависит от (x, t, s) и ничто не мешает обозначить эту величину через $J(x, t, s)$, однако не видно, каким образом можно было бы в данном случае доказать формулу (17.14) или (17.19). Неясно, будет ли слоение $\mathfrak{S}^p$ в данном случае абсолютно непрерывным. (Неясно также и обратное: если слоение абсолютно непрерывно, то можно ли задающую его форму ψ подобрать так, чтобы она имела непрерывную внешнюю производную?) В формуле (17.13) неприятности вызывает интеграл по боковой поверхности цилиндра: поскольку эта поверхность не гладкая, то неясно, существует ли вообще этот интеграл. Но оказывается, что при одном дополнительном условии это затруднение можно обойти.

Лемма 17.1. *Если слоение $\mathfrak{S}^p$ обладает тем свойством, что гладкая кривая, всюду касающаяся слоев, целиком лежит в некотором слое, и если $\mathfrak{S}^p$ задается непрерывной разложимой q-формой ψ, имеющей непрерывную внешнюю производную $d\psi$, то это слоение абсолютно непрерывно.*

Доказательство. При сделанных предположениях для интегральных кривых поля направлений (17.10) имеет место единственность. Обозначим через $P(x, t, s)$ векторное поле, имеющее направление (17.10) и проекция которого на ось t в прямом произведении $E_1^q \times I \times s$ равна 1. Тогда, как легко видеть,

$$\tilde{h}_s^*\psi = \chi(x, t, s) \bigwedge_{i=1}^{q} (dx^i - P^i(x, t, s)\,dt)$$

χ — то же, что и в (17.17)). Аппроксимируем эту форму гладкими формами

$$\psi_k = \chi_k(x, t, s) \bigwedge_{i=1}^{q} (dx^i - P_k^i(x, t, s)\,dt)$$

таким образом, чтобы имела место равномерная сходимость

$$\chi_k \rightrightarrows \chi, \quad P_k^i \rightrightarrows P^i, \quad d\psi_k \rightrightarrows d(\tilde{h}_s^*\psi).$$

(Заметим, что в $(q+1)$-мерном пространстве $E_1^q \times I \times s$ всякая q-форма разложима.) Из единственности легко вывести, что тогда

$$f_{t,s}^k(x) \rightrightarrows f_{t,s}(x). \tag{17.21}$$

Аналогично (17.18), формы $d\psi_k$ можно представить в виде

$$d\psi_k = \Psi_k(x, t, s)\,(\psi_k \,|\, E_1^q \times t \times s) \wedge dt,$$

причем $\Psi_k \rightrightarrows \Psi$. Отсюда и из (17.21) следует, что

$$J_k(x, t, s) = e^{\int_0^t \Psi_k(f_{\tau,s}^k(x),\, \tau,\, s)\,d\tau}$$

равномерно сходятся к функции $J(x, t, s)$, определяемой (17.20). Поскольку для

$$\mu_{t,s}^k(A) = \int_{A \times t \times s} \psi_k$$

выполняется соотношение (17.19), в котором все буквы J, μ, Ψ, f надо снабдить индексом k, и поскольку ясно, что

$$\mu_{t,s}^k(A) \rightrightarrows \mu_{t,s}(A)$$

(причем «равномерность» здесь включает в себя и равномерность по A), то отсюда и из сказанного выше следует, что

$$\mu_{t,s} f_{t,s}^k(A) - \mu_{0,s}(A) \rightrightarrows \int\limits_A \int\limits_0^t \Psi(f_{\tau,s}(x), \tau, s)\, J(x, \tau, s)\, d\mu_{0,s}(x).$$

Поэтому осталось только доказать, что

$$\mu_{t,s} f_{t,s}^k(A) \rightrightarrows \mu_{t,s} f_{t,s}(A).$$

Это вытекает из следующей леммы.

Лемма 17.2. *Пусть имеется последовательность гладких вложений шара*

$$f_n : E^q \to E^q,$$

равномерно сходящаяся к гомеоморфному вложению f: $E^q \to E^q$. Пусть якобианы отображений f_n равномерно сходятся к положительной и непрерывной функции $\varphi(x)$:

$$\det\left(\frac{df_n(x)}{dx}\right) \rightrightarrows \varphi(x). \tag{17.22}$$

Тогда отображение f абсолютно непрерывно и его обобщенным якобианом служит $\varphi(x)$.

Доказательство. Равенство

$$\operatorname{mes} f(A) = \int\limits_A \varphi(x)\, dx \tag{17.23}$$

достаточно доказать для того случая, когда A — открытый куб, замыкание которого $\bar{A}$ лежит во внутренности E^q. Возьмем какие-нибудь замкнутые кубы A_1 и A_2, первый из которых содержится в A, а второй, наоборот, содержит замыкание $\bar{A}$ в своей внутренности и сам лежит во внутренности E^q. Тогда при всех достаточно больших n

$$f_n(A_1) \subset f(A) \subset f_n(A_2).$$

Следовательно,

$$\int\limits_{A_1} \det\left(\frac{df_n(x)}{dx}\right) dx = \operatorname{mes} f_n(A_1) \leqslant \operatorname{mes} f(A) \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{mes} f_n(A_2) = \int\limits_{A_2} \det\left(\frac{df_n(x)}{dx}\right) dx.$$

При $n \to \infty$ крайние интегралы, в силу (17.22), стремятся к интегралам

$$\int\limits_{A_1} \varphi(x)\, dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{A_2} \varphi(x)\, dx$$

соответственно. Поэтому.

$$\int\limits_{A_1} \varphi(x)\, dx \leqslant \operatorname{mes} f(A) \leqslant \int\limits_{A_2} \varphi(x)\, dx.$$

Но кубы A_1 и A_2 можно взять сколь угодно мало отличающимися от куба A, так что оба интеграла будут сколь угодно близки к $\int\limits_A \varphi(x)\, dx$. Тем самым (17.22) доказано.

§ 18. Доказательство теоремы 10

Рассмотрим сперва более простой случай, когда речь идет об ($У$)-каскаде.

Аппроксимируем поля X_w^k и Y_w^l гладкими полями $\hat{X}_w^k$ и $\hat{Y}_w^l$ (в дальнейшем будет постепенно уточняться, насколько близкой должна быть аппроксимация; во всяком случае, поля $\hat{X}^k_w$ и $\hat{Y}^l_w$ должны быть трансверсальны, т. е. при всех w $\hat{X}^k_w \cap \hat{Y}^l_w = 0$). Как обычно, $\varkappa(w)$, $\lambda(w)$, $\hat{\varkappa}(w)$ и $\hat{\lambda}(w)$ обозначают вложения X^k_w, Y^l_w, $\hat{X}^k_w$ и $\hat{Y}^l_w$ в R^m_w.

Пусть $\omega^l(w)$ — разложимая гладкая дифференциальная l-форма, определяющая $\hat{X}^k_w$ и нормированная таким образом, что при отображении

$$\hat{\lambda}^*(w) : \Lambda^*(R^m_w) \to \Lambda^*(\hat{Y}^l_w),$$

порожденном вложением $\hat{\lambda}(w)$, она переходит в единичную (т. е. задающую единичный объем,— подразумевается единичный объем, определяемый используемой римановой метрикой) форму в $\hat{Y}^l_w$. (Мы вправе считать, что векторное расслоение $\mathfrak{R}^m/\hat{\mathfrak{X}}^k$ ориентируемо; в противном случае надо перейти к двулистному накрытию.) Поскольку в l-мерном пространстве все l-формы пропорциональны, то

$$\hat{\lambda}^*(w)\overset{*}{T}{}^n\omega^l(T^n w) = f_n(w)\hat{\lambda}^*(w)\omega^l(w), \tag{18.1}$$

где $f_n(w)$ — некоторая гладкая скалярная функция. Положим

$$\omega^l_n(w) = \frac{1}{f_n(w)}\overset{*}{T}{}^n\omega^l(T^n w) \tag{18.2}$$

(мы вскоре увидим, что $\hat{\lambda}^*\overset{*}{T}{}^n\omega \neq 0$, так что $f_n \neq 0$ и определение (18.2) законно).

Лемма 18.1. *При $n \to \infty$ имеет место равномерная сходимость*

$$\omega_n(w) \rightrightarrows \psi(w),$$

где ψ — непрерывная разложимая дифференциальная l-форма, задающая поле X^k_w и нормированная таким образом, что

$$\hat{\lambda}^*(w)\psi(w) = \hat{\lambda}^*(w)\omega(w) \tag{18.3}$$

(ясно, что при достаточной близости $\hat{X}^k_w$ к X^k_w и $\hat{Y}^l_w$ к Y^l_w форма $\hat{\lambda}^*\psi \neq 0$, так что такая нормировка возможна).

Доказательство леммы 18.1. Нетрудно сообразить, что утверждение леммы, в сущности, эквивалентно тому, что последовательность полей подпространств

$$T^{-n}\hat{X}^k_{T^n w} \rightrightarrows X^k_w.$$

В наличии же этой равномерной сходимости мы не раз убеждались выше. хотя бы неявно. Таким образом, лемму 18.1 можно считать доказанной Можно дать формально несколько иное (хотя по существу такое же) доказательство, основывающееся на следующей лемме, которая будет нужна и для других целей.

В этой лемме $\lambda^*(w)$ — отображение

$$\lambda^*(w) : \Lambda^*(R^m_w) \to \Lambda^*(Y^l_w),$$

порожденное вложением $\lambda(w)$..

Лемма 18.2. *Для любой ограниченной p-формы $\varphi(w)$, где $1 \leqslant p \leqslant m$, удовлетворяющей условию $\lambda^*(w)\varphi(w) = 0$, имеет место следующее:*

$$\frac{1}{f_n(w)}\overset{*}{T}{}^n\varphi(T^n w) \rightrightarrows 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Более точно, существуют такие константы C и ϑ, $0 < \vartheta < 1$, что

$$\left|\frac{1}{f_n(w)}\overset{*}{T}{}^n\varphi(T^n w)\right| \leqslant C\vartheta^n\|\varphi\|. \tag{18.4}$$

Доказательство. Образуем последовательность гладких полей $Y^l_{n,w}$:

$$Y^l_{n,w} = T^n \hat{Y}^l_{T^{-n}w}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{18.5}$$

Вложение $Y^l_{n,w} \subset R^m_w$ обозначим через $\lambda_n(w)$. В частности,

$$Y^l_{0,m} = \hat{Y}^l_w \text{ и } \lambda_0(w) = \hat{\lambda}(w).$$

Если поле $\hat{Y}^l_w$ достаточно близко аппроксимирует Y^l_w, то все $Y^l_{n,w}$ будут близки к Y^l_w и при $n \to \infty$

$$Y^l_{n,w} \rightrightarrows Y^l_w, \quad \lambda_n(w) \rightrightarrows \lambda(w).$$

Ясно, что $\tilde{T} Y^l_{n,w} = Y^l_{n+1,Tw}$. Обозначим $\tilde{T} \mid Y^l_{n,w}$ через $D_n(w)$:

$$\text{образ} \quad \operatorname{Im} \tilde{T}\lambda_n(w) = \operatorname{Im}\lambda_{n+1}(Tw),$$

$$D_n(w) = \lambda^{-1}_{n+1}(Tw)\tilde{T}\lambda_n(w). \tag{18.6}$$

С помощью l-формы $\omega^l(w)$ определим единичные объемы в касательных подпространствах $Y^l_{n,w}$. По отношению к этим объемам можно говорить об определителе $\det D_n(w)$. Покажем, что

$$f_n(w) = \det D_0(w) \ldots \det D_{n-1}(T^{n-1}w). \tag{18.7}$$

Действительно, из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\hat{Y}^l_w \arrow[r, "D_0(w)\ldots D_{n-1}(T^{-n}w)"] \arrow[d, "\hat{\lambda}(w)"'] & Y^l_{n,T^n w} \arrow[d, "\lambda_n(T^n w)"] \\
R^m_w \arrow[r, dashed, "T^n"] & R^m_{T^n w}
\end{tikzcd}$$

следует, что

$$\hat{\lambda}^*(w) \overset{*}{T^n} \omega(T^n w) = D^*_{n-1}(T^{n-1}w) \ldots D^*_0(w) \lambda^*_n(T^n w)\omega^l(T^n w). \tag{18.8}$$

Но $\lambda^*_n(T^n w)\omega^l(T^n w)$ — это как раз та l-форма в $Y^l_{n,T^n w}$, которую мы приняли за единичную. Преобразование $D^*_{n-1} \ldots D^*_0$ переводит ее в единичную форму пространства $\hat{Y}^l_w$, умноженную на определитель

$$\det(D^*_{n-1} \ldots D^*_0) = \prod_{i=0}^{n-1} \det D_i(T^i w).$$

Наконец, единичной формой пространства $\hat{Y}^l_w$ является $\hat{\lambda}^*(w)\,\omega^l(w)$, а левая часть (18.8), согласно (18.1), как раз и равна $f_n(w)\,\hat{\lambda}^*(w)\,\omega^l(w)$.

Представим теперь R^m_w в виде прямой суммы

$$R^m_w = X^k_w \oplus Y^l_w. \tag{18.9}$$

Так как при всех w угол между X^k_w и Y^l_w ограничен снизу некоторым положительным числом, то существует такое $c > 0$, что для любых разложимых форм $\xi \in \Lambda^*(X^k_w)$, $\eta \in \Lambda^*(Y^l_w)$

$$\frac{1}{c}|\xi||\eta| \leqslant |\xi \wedge \eta| \leqslant c|\xi||\eta|. \tag{18.10}$$

Поскольку поля X^k_w, Y^l_w инвариантны относительно $\tilde{T}$, то отображение

$$\tilde{T} : R^m_w \to R^m_{Tw}$$

представляется, согласно (18.9), матрицей

$$\begin{pmatrix} A(w) & 0 \\ 0 & D(w) \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} A(w) \in \operatorname{Hom}(X^k_w,\ X^k_{Tw}), \\ D(w) \in \operatorname{Hom}(Y^l_w,\ Y^l_{Tw}). \end{array}$$

Точнее говоря, эта матрица представляет отображение

$$(\varkappa(Tw),\ \lambda(Tw))^{-1}\widetilde{T}(\varkappa(w),\ \lambda(w)).$$

Отсюда и из (18.6) видно, что при достаточной близости поля $\hat{Y}^l_w$ к Y^l_w (которая гарантирует также и близость λ_n к λ) $D_n(w)$ и $D(w)$ будут сколь угодно близки, так что, в частности,

$$\frac{\det D(w)}{\det D_n(w)} < 1 + \varepsilon \text{ при всех } n \geqslant 0,\ w \in W^m. \tag{18.11}$$

Единичные объемы в пространствах Y^l_w, по отношению к которым берется $\det D(w)$, можно определять с помощью $\omega^l(w)$ или же с помощью римановой метрики в W^m; но так как в $\hat{Y}^l_w$ эти единичные объемы совпадают, а $\hat{Y}^l_w$ и Y^l_w близки, то различие между этими двумя вариантами не влияет на справедливость (18.11).

Пусть $\lambda^*(w)\varphi(w) = 0$. Тогда $\varphi(w)$ является суммой членов вида $\xi^q(w) \wedge \wedge\, \eta^r(w)$, где $\xi^q = q$-форма из $\Lambda^*(X^k_w)$, а $\eta^r = r$-форма из $\Lambda^*(Y^l_w)$. Здесь $q + r = p$, $q \geqslant 1$ и $r \leqslant l$ (ибо r-форм с $r > l$ в $\Lambda^*(Y^l_w)$ нет). При таком разложении $\psi = \Sigma\xi^q \wedge \eta^r$ норма

$$|\psi| \leqslant \Sigma|\xi^q \wedge \eta^r| \leqslant b|\psi|, \tag{18.12}$$

где константа b зависит только от используемой метрики. Далее, по (18.10),

$$|\overset{*}{T}{}^n(\xi^q \wedge \eta^r)| = |\overset{*}{T}{}^n\xi^q \wedge \overset{*}{T}{}^n\eta^r| \leqslant \frac{1}{c}|\overset{*}{T}{}^n\xi^q| \cdot |\overset{*}{T}{}^n\eta^r|. \tag{18.12'}$$

Для любого вектора $x \in X_w$

$$|\widetilde{T}x| \leqslant \vartheta|x|$$

где ϑ — некоторое число, меньшее 1; отсюда для любой 1-формы $\xi \in \overset{*}{X}_w$

$$|\overset{*}{T}\xi| < \vartheta|\xi|,$$

а для q-формы $\xi^q \in \Lambda^*(X_w)$

$$|\overset{*}{T}\xi^q| \leqslant \vartheta^q|\xi^q|;$$

значит

$$|\overset{*}{T}{}^n\xi^q| \leqslant \vartheta^{nq}|\xi^q|. \tag{18.13}$$

Мы вскоре увидим, что

$$|\overset{*}{T}{}^n\eta^r(T^nw)| \leqslant c\vartheta^{n(l-r)} \det D(w) \ldots \det D(T^{n-1}w)\,|\eta^r(T^nw)|. \tag{18.14}$$

Подставив (18.13) и (18.14) в (18.12) и еще раз воспользовавшись (18.10), найдем, что

$$\begin{aligned} &|\overset{*}{T}{}^n(\xi^q(T^nw) \wedge \eta^r(T^nw))| \leqslant \\ &\qquad \leqslant c\vartheta^{nq+n(l-r)} \det D(w) \ldots \det D(T^{n-1}w)\,|\xi^q|\,|\eta^r| \leqslant \\ &\qquad\qquad \leqslant c^2\vartheta^{nq+n(l-r)} \det D(w) \ldots \det D(T^{n-1}w)\,|\xi^q \wedge \eta^r|. \end{aligned}$$

Отсюда с помощью (18.7) и (18.11) заключаем, что

$$\begin{aligned} &\frac{1}{f_n(w)}|\overset{*}{T}{}^n(\xi^q(T^nw) \wedge \eta^r(T^nw))| \leqslant \\ &\qquad\qquad \leqslant c^2\vartheta^{nq+n(l-r)}(1+\varepsilon)^n\,|\xi^q(T^nw) \wedge \eta^r(T^nw)|. \end{aligned}$$

Согласно (18.12), тогда

$$\left|\frac{1}{f_n(w)}\overset{*}{T}{}^n\varphi(T^n w)\right|\leqslant b\varepsilon^2\vartheta^n(1+\varepsilon)^n\,|\varphi(T^n w)|,$$

и если $\hat{Y}$ столь близко к Y, что ε столь мало, что $\vartheta(1+\varepsilon)<1$, то, меняя обозначения, получаем (18.4).

Осталось проверить (18.14). Подберем разложимую $(l-r)$-форму $\eta^{l-r}\in\Lambda^*(Y_w)$ таким образом, чтобы пространство $\overset{*}{T}{}^n\eta^{l-r}$ было ортогонально к пространству $\overset{*}{T}{}^n\eta^r$. Тогда

$$\begin{aligned}|\overset{*}{T}{}^n\eta^{l-r}|\cdot|\overset{*}{T}{}^n\eta^r| &= |\overset{*}{T}{}^n(\eta^{l-r}\wedge\eta^r)| =\\ &= \det D(w)\ldots\det D(T^{n-1}w)\,|\eta^{l-r}\wedge\eta^r|\leqslant\\ &\leqslant c\det D(w)\ldots\det D(T^{n-1}w)\,|\eta^{l-r}|\cdot|\eta^r|,\end{aligned}$$

а

$$|\eta^{l-r}| = |\overset{*}{T}{}^{-n}(\overset{*}{T}{}^n\eta^{l-r})|\leqslant\vartheta^{n(l-r)}\,|\overset{*}{T}{}^n\eta^{l-r}|,$$

так что

$$|\overset{*}{T}{}^n\eta^{l-r}|\cdot|\overset{*}{T}{}^n\eta^r|\leqslant c\vartheta^{n(l-r)}\det D(w)\ldots\det D(T^{n-1}w)\,|\overset{*}{T}{}^n\eta^{l-r}|\cdot|\eta^r|,$$

откуда и следует (18.14).

Покажем теперь, как доказать лемму 18.1 с помощью леммы 18.2. Форма ψ задает инвариантное относительно T поле X_w^k, поэтому формы $\overset{*}{T}{}^n\psi(T^n w)$ и $\psi(w)$ могут отличаться только скалярным множителем:

$$\overset{*}{T}{}^n\psi(T^n w) = g_n(w)\,\psi(w). \tag{18.15}$$

Далее, в $\Lambda^*(Y_w^l)$ l-форма $\lambda^*(w)\,\omega(w)$ может отличаться от ненулевой l-формы $\lambda^*(w)\,\psi(w)$ только скалярным множителем $h(w)$, поэтому

$$\lambda^*(w)\,[\omega(w)-h(w)\,\psi(w)] = 0.$$

По лемме 18.2, тогда

$$\frac{1}{f_n(w)}\overset{*}{T}{}^n\,[\omega(T^n w)-h(T^n w)\,\psi(T^n(w))] = 0$$

или, согласно (18.2) и (18.15),

$$\omega_n(w)-\frac{g_n(w)\,h(T^n w)}{f_n(w)}\,\psi(w)\rightrightarrows 0. \tag{18.16}$$

Применяя $\hat{\lambda}^*(w)$ к левой части (18.16) и учитывая (18.1) — (18.3), найдем, что

$$\hat{\lambda}^*(w)\,\omega(w)-\frac{g_n(w)\,h(T^n(w))}{f_n(w)}\,\hat{\lambda}^*(w)\,\omega(w)\rightrightarrows 0,$$

т. е. $\dfrac{g_n(w)\,h(T^n w)}{f_n(w)}\rightrightarrows 1$. Теперь ясно, что из (18.16) следует $\omega_n(w)\rightrightarrows\psi(w)$.

З а м е ч а н и е 18.1. Как видно из доказательства,

$$\left.\begin{aligned}&\omega_n(w) = g_n(w)\,\psi(w)+\frac{1}{f_n(w)}\overset{*}{T}{}^n\,\chi(T^n w),\\ &\text{где } g_n(w)\rightrightarrows 1,\ \lambda^*(w)\,\chi(w) = 0.\end{aligned}\right\} \tag{18.17}$$

(Через $g_n(w)$ здесь обозначено то, что раньше обозначалось через $\dfrac{g_n(w)\,h(T^n w)}{f_n(w)}$.)

З а м е ч а н и е 18.2. Значительно труднее доказать, что при $n \to \infty$ равномерно сходится не только последовательность ω_n, но и последовательность $d\omega_n$. Из (18.2) следует, что

$$d\omega_n^l = \frac{1}{f_n} \overset{*}{T}{}^n d\omega^l - d \ln f_n \wedge \omega_n^l. \tag{18.18}$$

Первый член здесь не вызывает никаких затруднений. Действительно, $\lambda^*(w)\, d\omega^l(w) = 0$, ибо в $\Lambda^* Y_w^l$ нет ненулевых $(l+1)$-форм; значит, согласно лемме 18.2, $\frac{1}{f_n} \overset{*}{T}{}^n d\omega^l \rightrightarrows 0$.

Л е м м а 18.3. *Пусть имеются равномерно ограниченные в совокупности 1-формы*

$$\alpha_1(w), \ldots, \alpha_n(w), \ldots$$

Тогда при $n \to \infty$ последовательность $(l+1)$-форм

$$\varphi_n(w) = \sum_{i=1}^{n} \overset{*}{T}{}^i \alpha_i(T^i w) \wedge \omega_n(w)$$

равномерно сходится к некоторой $(l+1)$-форме, делящейся на $\psi(w)$:

$$\varphi_n(w) \rightrightarrows \sigma(w) \wedge \psi(w).$$

(В частности, отсюда следует, что если формы α_i сверх того еще и непрерывны, то и форма $\sigma \wedge \psi$ непрерывна.)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя разложение

$$R_w^* = X_w^* \oplus Y_w^*,$$

представим каждую α_i в виде

$$\alpha_i(w) = \beta_i(w) + \gamma_i(w),$$

где

$$\beta_i(w) \in X_w^*, \qquad \gamma_i(w) \in Y_w^*. \tag{18.19}$$

Нормы всех этих форм ограничены сверху некоторой константой C. С помощью (18.19) и (18.17) представим $\varphi_n(w)$ в виде

$$\varphi_n(w) = \sum_{i=1}^{n} \overset{*}{T}{}^i \beta_i(T^i w) \wedge g_n(w)\, \psi(w) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \overset{*}{T}{}^i \beta_i(T^i w) \wedge \frac{1}{f_n(w)} \overset{*}{T}{}^n \chi(T^n w) + \sum_{i=1}^{n} \overset{*}{T}{}^i \gamma_i(T^i w) \wedge g_n(w)\, \psi(w) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \overset{*}{T}{}^i \gamma_i(T^i w) \wedge \frac{1}{f_n(w)} \overset{*}{T}{}^n \chi(T^n w).$$

В первой сумме ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \overset{*}{T}{}^i \beta_i(T^i w)$$

равномерно мажорируется рядом $\sum_{i=1}^{\infty} \vartheta^i \|\beta_i\|$, а $g_n(w) \rightrightarrows 1$. Поэтому первая сумма равномерно сходится к некоторой $(l+1)$-форме, делящейся на ψ.

Во второй сумме

$$\frac{1}{f_n(w)} \overset{*}{T}{}^n \chi(T^n w) \rightrightarrows 0,$$

а норма

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \overset{*}{T}{}^{i} \beta_i (T^i w)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \vartheta^i C = \frac{C}{1-\vartheta}.$$

Поэтому вторая сумма равномерно стремится к нулю.

Третья сумма равна нулю, как $(l+1)$-форма из $\Lambda^*(Y_w^l)$.

Наконец, четвертую сумму преобразуем: она равна

$$\overset{*}{T}{}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n} \overset{*}{T}{}^{i-n} \gamma_i (T^i w) \wedge \chi (T^n w)\right].$$

Так как $\gamma_i \in Y^*$, то $|\overset{*}{T}{}^{i-n}\gamma_i| \leqslant \vartheta^{n-i}\|\gamma_i\|$ и, следовательно, норма формы, стоящей в квадратных скобках, не превосходит

$$\sum_{i=1}^{n} \vartheta^{n-i}\|\gamma_i\|\cdot\|\chi\| \leqslant \frac{C}{1-\vartheta}\|\chi\|.$$

Таким образом, норма этой формы ограничена при всех n одной и той же константой. Но

$$\lambda^*\left[\sum_{i=1}^{n} \overset{*}{T}{}^{i-n} \gamma_i (T^i w) \wedge \chi (T^n w)\right] = \text{нечто} \wedge \lambda^*\chi = 0.$$

Из леммы 18.2 теперь следует, что четвертая сумма также равномерно стремится к нулю. Тем самым лемма 18.3 доказана.

Замечание 18.3. Из доказательства видно, что в *условиях леммы* 18.3

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \overset{*}{T}{}^{i} \alpha_i (T^i w) \wedge \omega_n (w)\right| \leqslant C \sum_i \|\alpha_i\| \vartheta^i,$$

где C, ϑ — некоторые константы, не зависящие от форм α_i, причем $\vartheta < 1$.

Для дальнейших рассуждений построим некоторый новый атлас $\{(U_{n,w}, \varphi_{n,w})\}$ многообразия W^m; карты этого атласа нумеруются всеми неотрицательными числами $n \geqslant 0$ и всеми точками $w \in W^m$. Возьмем какой-нибудь ортонормированный базис в $\hat{X}_w^k$ и в $Y_{n,w}^l$, после чего эти пространства можно отождествить с «арифметическими» пространствами X^k, Y^l, состоящими из точек $x = (x_1, \ldots, x_k)$, $y = (y_1, \ldots, y_l)$. Карта $(U_{n,w}, \varphi_{n,w})$ строится следующим образом. Существует такое $\delta > 0$, что отображение

$$(x, y) \to h(w, \hat{\varkappa}(w)x + \lambda_n(w)y) \tag{18.20}$$

является диффеоморфным отображением области $X_\delta^k \times Y_\delta^l$ пространства $X^k \oplus Y^l$ на некоторую окрестность точки w; эту окрестность мы и принимаем за $U_{n,w}$, а отображение (18.20) — за $\varphi_{n,w}^{-1}$. Следует иметь в виду, что определение $\varphi_{n,w}$ зависит от конкретного выбора ортонормированных базисов в $\hat{X}_w^k$ и $Y_{n,w}^l$, но это не отражено в обозначениях. (Область же $U_{n,w}$ от выбора базисов не зависит.)

Запишем форму ω^l в координатах (x, y):

$$\overset{*}{\varphi}{}_{n,w}^{-1}\omega^l(\varphi_{n,w}^{-1}(x, y)) = q_{n,w}(x, y)\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^l +$$
$$+ \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} q_{n,w}^{ij}(x, y)\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^{j-1} \wedge dx^i \wedge dy^{j+1} \wedge \ldots \wedge dy^l +$$
$$+ \text{члены, содержащие } dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} + \ldots \tag{18.21}$$

Коэффициенты $q_{n,w}$, $q^{ij}_{n,w}$ зависят также от выбранного базиса в $\hat{X}^k_w$, $Y^l_{n,w}$, но это не отражено в обозначениях.

В начале координат $x = 0$, $y = 0$ касательное подпространство $\hat{X}^k_w$ определяется уравнениями $dy^1 = 0, \ldots, dy^l = 0$, поэтому задающая это пространство форма (18.21) содержит только член с $dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^l$:

$$\overset{*}{\varphi}{}^{-1}_{n,w}\, \omega^l(\varphi^{-1}_{n,w}(0,0)) = q_{n,w}(0,0)\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^l. \tag{18.22}$$

Ясно, что $q_{n,w}$ (0, 0) является отношением единичного объема в $Y^l_{n,w}$, задаваемого формой $\omega^l(w)$, к единичному объему, задаваемому формой $dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^l$, т. е. римановой метрикой; таким образом, $q_{n,w}(0, 0)$ имеет инвариантный смысл. Обозначим $q_{n,w}$ (0, 0) короче через $q_n(w)$. Это — гладкие скалярные функции на W^m, которые равномерно ограничены в совокупности, и даже более того: при всех n, w

$$|q_n(w) - 1| < \varepsilon, \tag{18.23}$$

если только $\hat{Y}^l_w$ выбрать достаточно близким к Y^l_w. Кроме того,

$$q_0(w) \equiv 1, \tag{18.24}$$

ибо в $Y^l_{0,w} = \hat{Y}^l_w$ форма $\omega^l(w)$ задает тот же объем, что и риманова метрика.

Обозначим далее

$$\alpha_n(w) = \varphi^*_{n,w}\, dq_{n,w}(x,y)|_{x=0,\,y=0}. \tag{18.25}$$

$\alpha_n(w)$ не зависит от выбора базиса в $\hat{X}^k_w$ и $Y^l_{n,w}$. Действительно, при другом выборе базиса вместо карты $(U_{n,w}, \varphi_{n,w})$ получится другая карта $(U_{n,w}, \bar{\varphi}_{n,w})$. Различие между этими двумя картами состоит в том, что если $\varphi_{n,w} = (x, y)$, то $\bar{\varphi}_{n,w} = (\bar{x}, \bar{y}) = (Ax, By)$, где A, B — некоторые матрицы. Иными словами,

$$\bar{\varphi}_{n,w}\varphi^{-1}_{n,w} = A \oplus B. \tag{18.26}$$

В карте $(U_{n,w}, \varphi_{n,w})$ форма ω принимает вид

$$\bar{q}_{n,w}(\bar{x}, \bar{y})\, d\bar{y}^1 \wedge \ldots \wedge d\bar{y}^l + \ldots,$$

где $\bar{q}_{n,w}(\bar{x}, \bar{y}) = q_{n,w}(x, y)$. Отсюда

$$(A \oplus B)^* d\bar{q}_{n,w}(0,0) = dq_{n,w}(0,0),$$

и с помощью (18. 26) теперь легко вывести, что

$$\varphi^*_{n,w}\, dq_{n,w}(0,0) = \bar{\varphi}^*_{n,w}\, d\bar{q}_{n,w}(0,0).$$

Пфаффова форма $\alpha_n(w)$ непрерывно зависит от w. Действительно, в некоторой окрестности произвольной точки w_0 базис в пространствах $\hat{X}^k_w$, $Y^l_{n,w}$ можно выбрать непрерывно зависящим от w; тогда в этой окрестности производные $q_{n,w}(x, y)$ по x и y будут непрерывными функциями (w, x, y) и $\overset{*}{\varphi}_{n,w}\, dq_{n,w}$ (0, 0) будет непрерывно зависеть от w.

Наконец, формы $\alpha_n(w)$ равномерно ограничены в совокупности. Действительно, из того, что углы между пространствами $\hat{X}^k_w$ и $Y^l_{n,w}$ при всех n, w равномерно ограничены снизу некоторой положительной константой, следует, что при любых n, w и при любом выборе ортонормированного базиса в $\hat{X}^k_w$ и $Y^l_{n,w}$ производные двух первых порядков функции

$$\varphi^{-1}_{n,w}: X^k_\delta \times Y^l_\delta \to W^m$$

равномерно ограничены сверху некоторой константой. Отсюда следует, что при любых n, w и при любом выборе ортонормированного базиса в $\hat{X}^k_w$ и $Y^l_{n,w}$ коэффициенты формы (18.21) являются гладкими функциями x, y, первые производные которых по x, y ограничены сверху одной и той же константой.

В частности, равномерно ограничены сверху коэффициенты формы

$$dq_{n,w}(x, y)|_{x=0, y=0},$$

а значит и ее образа при отображении $\varphi^*_{n,w}$ (т. е. формы $\alpha_n(w)$), ибо дифференциал отображения $\varphi_{n,w}$ тоже равномерно ограничен при всех n, w.

Пусть теперь выбраны ортонормированные базисы в

$$\hat{X}^k_w,\ Y^l_{0,w},\ \hat{X}^k_{T^n w},\ Y^l_{n,T^n w} \tag{18.27}$$

и с их помощью построены карты $(U_{0,w}, \varphi_{0,w})$ и $(U_{n,T^n w}, \varphi_{n,T^n w})$. Тогда в некоторой окрестности начала координат $x = 0$, $y = 0$ определено отображение

$$\mathfrak{T}_{n,w} = \varphi_{n,T^n w} T^n \varphi^{-1}_{0,w} \tag{18.28}$$

«арифметического» пространства $X^k \oplus Y^l$ в себя. В координатах $(x, y) = (x^1, \ldots, x^k, y^1, \ldots, y^l)$ дифференциал этого отображения в точке (x, y) представляется квадратной матрицей, разбитой на клетки, отвечающие координатам x и y. Обозначим эту матрицу следующим образом:

$$\widetilde{\mathfrak{T}}_{n,w} = \widetilde{\mathfrak{T}}_{n,w}(x, y) = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_{n,w}(x, y) & \mathfrak{B}_{n,w}(x, y) \\ \mathfrak{C}_{n,w}(x, y) & \mathfrak{D}_{n,w}(x, y) \end{pmatrix}. \tag{18.29}$$

Конечно, матрицы $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ зависят также от выбора ортонормированных базисов в пространствах (18.27), но это не отражено в обозначениях. Из $\widetilde{T}^n Y^l_{0,w} = Y^l_{n,T^n w}$ и определения $\varphi_{n,w}$ следует, что

$$\mathfrak{B}_{n,w}(0, 0) = 0. \tag{18.30}$$

Положим

$$\beta_n(w) = \varphi^*_{0,w}\, d \ln \det \mathfrak{D}_{n,w}(x, y)\,|_{x=0, y=0} \tag{18.31}$$

$\beta_n(w)$ являются пфаффовыми формами на W^m, не зависящими от выбора ортонормированных базисов в пространствах (18.27). Действительно, при другом выборе базисов вместо карт $(U_{0,w}, \varphi_{0,w})$, $(U_{n,T^n w}, \varphi_{n,T^n w})$ получатся другие карты

$$(U_{0,w}, \bar{\varphi}_{0,w}),\ (U_{n,T^n w}, \bar{\varphi}_{n,T^n w}). \tag{18.32}$$

Различие между этими картами состоит в том, что (ср. (18.26))

$$\bar{\varphi}_{0,w}\varphi^{-1}_{0,w} = A \oplus B,\ \bar{\varphi}_{n,T^n w}\varphi^{-1}_{n,T^n w} = A' \oplus B', \tag{18.33}$$

где A, B, A', B' — некоторые ортогональные матрицы. Пользуясь картами (18.32), мы вместо отображения (18.28) должны рассматривать отображение

$$\bar{\mathfrak{T}}_{n,w} = \bar{\varphi}_{n,T^n w} T^n \bar{\varphi}^{-1}_{0,w} = (A' \oplus B')\, \mathfrak{T}_{n,w}\, (A^{-1} \oplus B^{-1}).$$

Его дифференциал в точке $(\bar{x}, \bar{y}) = (Ax, By)$ представляется матрицей

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathfrak{A}}_{n,w}(\bar{x}, \bar{y}) & \bar{\mathfrak{B}}_{n,w}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \bar{\mathfrak{C}}_{n,w}(\bar{x}, \bar{y}) & \bar{\mathfrak{D}}_{n,w}(\bar{x}, \bar{y}) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_{n,w}(x, y) & \mathfrak{B}_{n,w}(x, y) \\ \mathfrak{C}_{n,w}(x, y) & \mathfrak{D}_{n,w}(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A' \mathfrak{A}_{n,w}(x, y) A^{-1} & A'\mathfrak{B}_{n,w}(x, y) B^{-1} \\ B' \mathfrak{C}_{n,w}(x, y) A^{-1} & B'\mathfrak{D}_{n,w}(x, y) B^{-1} \end{pmatrix}. \tag{18.34}$$

В частности,

$$\overline{\mathfrak{D}}_{n,w}(\bar{x}, \bar{y}) = B'\mathfrak{D}_{n,w}(x, y)\, B^{-1} \text{ при } (\bar{x}, \bar{y}) = (Ax, By).$$

Так как матрицы B' и B^{-1} — ортогональные, то

$$\det \overline{\mathfrak{D}}_{n,w}(\bar{x}, \bar{y}) = \det \mathfrak{D}_{n,w}(x, y) \text{ при } (\bar{x}, \bar{y}) = (Ax, By). \tag{18.35}$$

Отсюда легко вывести, что

$$\varphi^*_{0,w}\, d \ln \det \mathfrak{D}_{n,w}(0, 0) = \bar{\varphi}^*_{0,w} d \ln \det \overline{\mathfrak{D}}_{n,w}(0, 0).$$

Пфаффовы формы $\beta_n(w)$ непрерывно зависят от w. Действительно, в некоторой окрестности произвольной точки w_0 и ее образа $T^n w_0$ базисы в пространствах (18.27) можно выбрать непрерывно зависящими от w. Тогда вблизи точки w_0 матрица $\mathfrak{D}_{n,w}(x, y)$ имеет производные по x, y, непрерывные по (w, x, y). Значит, форма $d\ln \det \mathfrak{D}_{n,w}(0, 0)$ непрерывно зависит от w, а тогда и $\beta_n(w)$ непрерывна.

Наконец, нам будет нужна еще пфаффова форма $\gamma_n(w)$, которая определяется следующим образом. Если точка $w' \in U_{0,m}$ имеет в карте $(U_{0,w}, \varphi_{0,w})$ координаты (x, y), то касательное пространство $\hat{Y}^l_{w'}$ определяется уравнениями

$$dx^i = \sum_{j=1}^{l} r^{ij}_w(x, y)\, dy^j, \quad i = 1, \ldots, k. \tag{18.36}$$

(Иными словами, если положить

$$\xi^i = dx^i - \sum_{j=1}^{l} r^{ij}_w(x, y)\, dy^j, \quad i = 1, \ldots, k, \tag{18.37}$$

то в $X^k \oplus Y^l$ поле касательных подпространств

$$\tilde{\varphi}_{0,w}\, \hat{Y}^l_{\varphi^{-1}_{0,w}(x,y)} \tag{18.38}$$

определяется уравнениями $\xi^1 = 0, \ldots, \xi^k = 0$.) Обозначим через $R_w(x, y)$ матрицу, коэффициентами которой являются $r^{ij}_w(x, y)$; конечно, эта матрица зависит также от выбора ортонормированных базисов в пространствах $\hat{X}^k_w$, $\hat{Y}^l_w$, но это не отражено в обозначениях. Ясно, что $R_w(x, y)$ гладко зависит от x, y. Так как при $x = 0$, $y = 0$ пространство (18.38) совпадает с Y^l, то

$$R_w(0, 0) = 0. \tag{18.39}$$

Положим

$$\gamma_n(w) = \varphi^*_{0,w} \operatorname{Sp} [\mathfrak{D}^{-1}_{n,w} \mathfrak{C}_{n,w} dR_w(x, y)]_{\substack{x=0\\y=0}} \tag{18.40}$$

$\gamma_n(w)$ являются пфаффовыми формами на W^m, не зависящими от выбора ортонормированных базисов в пространствах (18.27). Действительно, при другом выборе базисов получатся другие карты (18.32), связь которых с исходными дается формулами (18.33). Вместо матриц $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{C}$, R мы будем иметь дело с матрицами, $\overline{\mathfrak{D}}, \overline{\mathfrak{C}}, \overline{R}$, первые две из которых связаны с $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{C}$ согласно формулам (18.34). Что же до $\overline{R}$, то

$$\overline{R}(\bar{x}, \bar{y}) = AR(x, y)\, B^{-1} \text{ при } (\bar{x}, \bar{y}) = (Ax, By). \tag{18.41}$$

В самом деле, уравнения (18.36) и аналогичные им уравнения в карте $(U_{0,w}, \bar{\varphi}_{0,w})$ можно короче записать в векторно-матричном виде

$$dx = R_w(x, y)\, dy, \quad d\bar{x} = \overline{R}_w(\bar{x}, \bar{y})\, d\bar{y},$$

а из (18.26) явствует, что второе из этих уравнений перейдет в первое, если подставить

$$\bar{x} = Ax,\quad d\bar{x} = Adx,\quad \bar{y} = By,\quad d\bar{y} = Bdy.$$

Отсюда и вытекает (18.41). Из (18.41) следует, что

$$d\bar{R} = A\,[(A \oplus B)^* \, dR]B^{-1}; \tag{18.42}$$

в этой формуле под $(A \oplus B)^* \, dR$ понимается матрица, коэффициенты которой суть формы $(A \oplus B)^* \, dr^{ij}_{w}$. Теперь мы можем сравнить между собой правые части (18.40) с $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{C}$, R и с $\bar{\mathfrak{D}}$, $\bar{\mathfrak{C}}$, $\bar{R}$. Согласно (18.34) и (18.42),

$$\bar{\mathfrak{D}}^{-1}\bar{\mathfrak{C}}d\bar{R} = (B'\mathfrak{D}B^{-1})^{-1}\,(B'\mathfrak{C}A^{-1})\,A\,\,[(A \oplus B)^* dR]\,B^{-1} = \\ = B\mathfrak{D}^{-1}\mathfrak{C}\,\,[(A \oplus B)^* \, dR]\,B^{-1},$$

а так как следы подобных матриц равны, то след этой матрицы равен

$$\mathrm{Sp}\,\{\mathfrak{D}^{-1}\mathfrak{C}\,\,[(A \oplus B)^* dR]\} = (A \oplus B)^* \,\mathrm{Sp}\,\,[\mathfrak{D}^{-1}\mathfrak{C}dR].$$

Отсюда, как обычно, заключаем, что

$$\overset{*}{\varphi}_{0,w}\,\mathrm{Sp}\,[\mathfrak{D}^{-1}\mathfrak{C}\,dR] = \overset{*}{\bar{\varphi}}_{0,w}\,\mathrm{Sp}\,[\bar{\mathfrak{D}}^{-1}\bar{\mathfrak{C}}d\bar{R}].$$

Пфаффовы формы $\gamma_n(w)$ непрерывно зависят от w. Действительно, в некоторой окрестности произвольной точки w и ее образа $T^n w_0$ базисы в пространствах (18.27) можно выбрать непрерывно зависящими от w. Тогда вблизи точки w_0 производные матрицы $R_w(x, y)$ по x и y непрерывно зависят от (w, x, y); остальное ясно.

Теперь можно объяснить, зачем нужны формы α_n, β_n, γ_n.

Лемма 18.4.

$$\alpha_0(w) + d\ln f_n(w) = \frac{1}{q_n(T^n w)}\,\overset{*}{T}{}^n\alpha_n(T^n w) + \beta_n(w) + \gamma_n(w). \tag{18.43}$$

Доказательство. Если точка $w' \in U_{0,w}$ имеет в карте $(U_{0,w}\ \varphi_{0,w})$ координаты (x, y), то касательное пространство $\hat{X}^k_{w'}$ определяется уравнениями

$$dy^j = \sum_{i=1}^{k} s^{ji}_{w}(x, y)\,dx^i,\quad j = 1, \ldots, l,$$

где $s^{ji}_{w}(x, y)$ — некоторые гладкие функции (x, y). Или, если положить

$$\eta^j = dy^j - \sum_{i=1}^{k} s^{ji}_{w}(x, y)\,dx^i,\qquad j = 1, \ldots, l, \tag{18.44}$$

то в $X^k \oplus Y^l$ поле касательных подпространств

$$\tilde{\varphi}_{0,w}\hat{X}^k_{\varphi^{-1}_{0,w}(x,y)}$$

определяется уравнениями $\eta^1 = 0, \ldots, \eta^l = 0$. Значит, форма

$$\overset{*}{\varphi}{}^{-1}_{0,w}\,\omega^l(\varphi^{-1}_{0,w}(x, y)),$$

задающая это поле, должна делиться на $\eta^1 \wedge \ldots \wedge \eta^l$. Выразив из (18.44) dy^j через η^j и dx^i и подставив это в (18.21) с $n = 0$, получим форму $q_{0,w}(x, y)\,\eta^1 \wedge \ldots \wedge \eta^l +$ члены, содержащие dx^i. А так как эта форма должна делиться на $\eta^1 \wedge \ldots \wedge \eta^l$, то в действительности все члены с dx^i сокращаются. Итак,

$$\overset{*}{\varphi}{}^{-1}_{0,w}\omega^l(\varphi^{-1}_{0,w}(x, y)) = q_{0,w}(x, y)\,\eta^1 \wedge \ldots \wedge \eta^l. \tag{18.45}$$

Заметим, кстати, что аналогично (18.39)

$$S_w(0, 0) = 0. \tag{18.46}$$

Теперь мы будем пользоваться в касательном пространстве к $X^k \oplus Y^l$ в точке (x, y) координатами ξ^i, η^j, связанными с dx^i, dy^j формулами (18.37), (18.44), которые короче можно записать так:

$$\xi = dx - Rdy, \quad \eta = dy - Sdx.$$

Отсюда

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -R \\ -S & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-RS)^{-1} & (1-RS)^{-1}R \\ (1-SR)^{-1}S & (1-SR)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Пользуясь, с одной стороны, координатами ξ, η в касательном пространстве к $X^k \oplus Y^l$ в точке (x, y) и, с другой стороны, естественными координатами $(d\bar{x}, d\bar{y})$, преобразование $\mathfrak{T}_{n, w}$ можно записать в виде (см. (18.29))

$$\begin{pmatrix} d\bar{x} \\ d\bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_{n, w} & \mathfrak{B}_{n, w} \\ \mathfrak{C}_{n, w} & \mathfrak{D}_{n, w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1-RS)^{-1} & (1-RS)^{-1}R \\ (1-SR)^{-1}S & (1-SR)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \tag{18.47}$$

Чтобы вычислить форму

$$\overset{*}{\varphi}{}_{0, w}^{-1} \overset{*}{T}{}^n \omega^l = \widetilde{\mathfrak{T}}{}^*_{n, w} \overset{*}{\varphi}{}^{-1}_{n, T^n w} \omega^l,$$

надо с помощью (18.47) выразить $d\bar{x}^i$, $d\bar{y}^j$ через ξ^i, η^j и подставить это в правую часть (18.21), заменив при этом w на $T^n w$ и x, y, dx, dy на $\bar{x}$, $\bar{y}$, $d\bar{x}$, $d\bar{y}$. Коэффициенты матрицы, переводящей (ξ, η) в $(d\bar{x}, d\bar{y})$, обозначим через

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{a}^i_j & \mathfrak{e}^i_j \\ \mathfrak{c}^i_j & \mathfrak{d}^i_j \end{pmatrix}.$$

Примем временно следующее сокращенное обозначение для суммирования: если индекс σ_i повторяется два раза — один раз внизу, а другой раз вверху, — то по этому индексу производится суммирование от $\sigma_i = 1$ до $\sigma_i = k$; в аналогичных условиях по индексу ρ_i производится суммирование от $\rho_i = 1$ до $\rho_i = l$. В этих обозначениях

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{T}^*_{n, w} \overset{*}{\varphi}{}^{-1}_{n, T^n w} \omega^l (\varphi^{-1}_{n, T^n w}(\bar{x}, \bar{y})) = \\
&\quad = q_{n, T^n w}(\bar{x}, \bar{y}) (\mathfrak{c}^1_{\alpha_1} \xi^{\alpha_1} + \mathfrak{d}^1_{\beta_1} \eta^{\beta_1}) \wedge \ldots \wedge (\mathfrak{c}^l_{\alpha_l} \xi^{\alpha_l} + \mathfrak{d}^l_{\beta_l} \eta^{\beta_l}) + \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} q^{ij}_{n, T^n w}(\bar{x}, \bar{y}) (\mathfrak{c}^1_{\alpha_1} \xi^{\alpha_1} + \mathfrak{d}^1_{\beta_1} \eta^{\beta_1}) \wedge \ldots \\
&\qquad \ldots \wedge (\mathfrak{c}^{j-1}_{\alpha_{j-1}} \xi^{\alpha_{j-1}} + \mathfrak{d}^{j-1}_{\beta_{j-1}} \eta^{\beta_{j-1}}) \wedge (\mathfrak{a}^i_{\alpha_j} \xi^{\alpha_j} + \mathfrak{b}^i_{\beta_j} \eta^{\beta_j}) \wedge \\
&\qquad \wedge (\mathfrak{c}^{j+1}_{\alpha_{j+1}} \xi^{\alpha_{j+1}} + \mathfrak{d}^{j+1}_{\beta_{j+1}} \eta^{\beta_{j+1}}) \wedge \ldots \wedge (\mathfrak{c}^l_{\alpha_l} \xi^{\alpha_l} + \mathfrak{d}^l_{\beta_l} \eta^{\beta_l}) + \\
&\qquad\qquad + \text{члены с } d\bar{x}^{i_1} \wedge d\bar{x}^{i_2} + \ldots
\end{aligned}$$

Ясно, что отображение

$$\hat{\lambda}^* = \overset{*}{\varphi}{}^{-1}_{0, w} \hat{\lambda}^* (\varphi^{-1}_{0, w}(x, y)) \varphi^*_{0, w}$$

переводит ξ^i в нуль, а η^j — в базисные векторы пространства, двойственного к пространству (18.38). Поэтому в форме

$$\hat{\lambda}^* \mathfrak{T}^*_{n, w} \overset{*}{\varphi}{}^{-1}_{n, T^n w} \omega^l (\varphi^{-1}_{n, T^n w}(\bar{x}, \bar{y}))$$

остается только член $\hat{\lambda}^*(\eta^1 \wedge \ldots \wedge \eta^l)$ с коэффициентом

$$q_{n,T^n w}(\bar{x}, \bar{y}) \det \| \mathfrak{d}^i_\beta \| +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} q^{ij}_{n,T^n w}(\bar{x}, \bar{y}) \begin{vmatrix} \mathfrak{d}^1_1 \ldots \mathfrak{d}^{j-1}_1 \mathfrak{b}^i_1 \mathfrak{d}^{j+1}_1 \ldots \mathfrak{d}^l_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{d}^1_l \ldots \mathfrak{d}^{j-1}_l \mathfrak{b}^i_l \mathfrak{d}^{j+1}_l \ldots \mathfrak{d}^l_l \end{vmatrix} +$$

$$+ \text{члены с } \mathfrak{b}^{i_1}_{\beta_1} \mathfrak{b}^{i_2}_{\beta_2} + \ldots \qquad (18.48)$$

Но, по (18.1) и (18.45),

$$\hat{\lambda}^* \mathfrak{T}^*_{n,w} \overset{*}{\varphi}{}^{-1}_{n,T^n w} \omega^l (\varphi^{-1}_{n,T^n w}(\bar{x}, \bar{y})) =$$

$$= f_n(\varphi^{-1}_{0,w}(x, y))\, q_{0,w}(x, y)\, \hat{\lambda}(\eta^1 \wedge \ldots \wedge \eta^l).$$

Поэтому

$$\text{коэффициент (18.48)} = f_n(\varphi^{-1}_{0,w}(x, y))\, q_{0,w}(x, y). \qquad (18.49)$$

Заметим теперь, что при $x = 0$, $y = 0$ все $q^{ij}_{n,T^n w} = 0$, см. (18.22), а также

$$\mathfrak{b}^i_\beta = 0, \quad \| \mathfrak{d}^i_\beta \| = \mathfrak{D}_{n,w}(0, 0),$$

— см. (18.47), (18.30), (18.39) и (18.46). Поэтому из (18.48), (18.49), (18.24) и из того, что, очевидно,

$$df_n(\varphi^{-1}_{0,w}(x, y))|_{x=0, y=0} = \overset{*}{\varphi}{}^{-1}_{0,w} df_n(w),$$

следует, что

$$f_n(w) = q_n(T^n w) \det \mathfrak{D}_{n,w}(0, 0), \qquad (18.50)$$

$$\overset{*}{\varphi}{}^{-1}_{0,w} df_n(w) + f_n(w)\, dq_{0,w}(0, 0) =$$

$$= \det \mathfrak{D}_{n,w}(0, 0)\, dq_{n,T^n w}(\mathfrak{T}_{n,w}(x, y))|_{x=0, y=0} +$$

$$+ q_n(T^n w)\, d \det \| \mathfrak{D}^i_\beta \| \, |_{x=0, y=0}. \qquad (18.51)$$

Но из (18.47), (18.39) и (18.46)

$$d \| \vartheta^i_\beta \| \, |_{x=0, y=0} = d\, [\mathfrak{C}(1 - RS)^{-1} R + \mathfrak{D}(1 - SR)^{-1}]_{x=0, y=0} =$$

$$= [\mathfrak{C}_{n,w}\, dR_w + d\mathfrak{D}_{n,w}]_{x=0, y=0}.$$

Далее, для любой матрицы A

$$d \det A = \det A \cdot \mathrm{Sp}\,(A^{-1} dA), \qquad (18.52)$$

ибо

$$d \det A = \det(A + dA) - \det A =$$

$$= \det [A(1 + A^{-1} dA)] - \det A = \det A \det(1 + A^{-1} dA) - \det A =$$

$$= \det A [1 + \mathrm{Sp}\,(A^{-1} dA)] - \det A = \det A \cdot \mathrm{Sp}\,(A^{-1} dA).$$

Поэтому

$$d \det \| \vartheta^i_\beta \| \, |_{x=0, y=0} =$$

$$= \det \mathfrak{D}_{n,w} \cdot \mathrm{Sp}\, [\mathfrak{D}^{-1}_{n,w} \mathfrak{C}_{n,w}\, dR_w + \mathfrak{D}^{-1}_{n,w}\, d\mathfrak{D}_{n,w}]_{x=0, y=0} =$$

$$= \det \mathfrak{D}_{n,w} \cdot \mathrm{Sp}\, [\mathfrak{D}^{-1}_{n,w} \mathfrak{C}_{n,w}\, dR_w]_{x=0, y=0} + d \det \mathfrak{D}_{n,w} |_{x=0, y=0}.$$

С помощью этой формулы и (18.25), (18.31), (18.40) и (18.50) из (18.51) непосредственно получается искомая формула (18.43).

З а м е ч а н и е 18.4. В формуле (18.43) член с α_n не вызывает никаких забот:

$$\frac{1}{q_n(T^n w)} \overset{*}{T}{}^n \alpha_n(T^n w) \wedge \omega_n(w) \rightrightarrows 0. \qquad (18.53)$$

Действительно, формы $\alpha_n(w)$ равномерно ограничены в совокупности, а q_n удовлетворяют (18,23). Поэтому (18.53) представляет собой весьма частный случай леммы 18.3.

Член с γ_n, как мы сейчас увидим, также не вызывает особых забот.

Лемма 18.5. *Последовательность пфаффовых форм $\gamma_n(w)$ равномерно сходится к некоторой пфаффовой форме $\gamma(w)$ (которая автоматически является непрерывной).*

Доказательство. Выберем ортонормированные базисы в пространствах

$$\hat{X}^k_{T^i w},\ Y^l_{i,\,T^i w}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \qquad (18.54)$$

и с их помощью построим карты $(U_{i,\,T^i w}, \varphi_{i,\,T^i w})$. В координатах (x, y), соответствующих этим картам, отображение T представляется отображениями

$$T_{n,\,w} = \varphi_{n+1,\,Tw} T \varphi^{-1}_{n,\,w},$$

а его дифференциал $\widetilde{T}$ — матрицей

$$\widetilde{T}_{n,\,w} = \widetilde{\varphi}_{n+1,\,Tw} \widetilde{T} \widetilde{\varphi}^{-1}_{n,\,w} = \begin{pmatrix} A_{n,\,w}(x, y) & B_{n,\,w}(x, y) \\ C_{n,\,w}(x, y) & D_{n,\,w}(x, y) \end{pmatrix}.$$

Сопоставляя это с (18.28) и (18.29), видим, что

$$\begin{gathered} \mathfrak{T}_{n,\,w} = T_{n-1,\,T^{n-1}w} \dots T_{0,\,w}, \qquad \widetilde{\mathfrak{T}}_{n,\,w} = \widetilde{T}_{n-1,\,T^{n-1}w} \dots \widetilde{T}_{0,\,w}, \\ \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_n & \mathfrak{B}_n \\ \mathfrak{C}_n & \mathfrak{D}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{n-1} & B_{n-1} \\ C_{n-1} & D_{n-1} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} A_0 & B \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix}. \end{gathered} \qquad (18.55)$$

Совершенно аналогично (18.30) имеем

$$B_{n,\,w}(0,\ 0) = 0, \qquad (18.56)$$

ибо $\widetilde{T}^n Y^l_{0,\,w} = Y^l_{n,\,T^n w}$, а в $X^k \oplus Y^l$ пространство (18.38) при $x = 0$, $y = 0$ совпадает с Y^l, так что

$$\widetilde{T}_{i,\,T^i w}\big|_{x=0,\ y=0} Y^l = Y^l.$$

Следовательно, при $x = 0$, $y = 0$ (18.55) принимает вид

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{A}_n & 0 \\ \mathfrak{C}_n & \mathfrak{D}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 \\ C_{n-1} & D_{n-1} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\mathfrak{D}_n = D_{n-1} \dots D_0$$

и

$$\mathfrak{C}_n = \sum_{i=0}^{n-1} D_{n-1} \dots D_{i+1} C_i A_{i-1} \dots A_0;$$

стало быть,

$$\mathfrak{D}_n^{-1}\mathfrak{C}_n = D_0^{-1} \dots D_{n-1}^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} D_{n-1} \dots D_{i+1} C_i A_{i-1} \dots A_0 =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} D_0^{-1} \dots D_i^{-1} C_i A_{i-1} \dots A_0.$$

Итак, (18.40) можно переписать в виде

$$\gamma_n(w) = \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i(w),$$

где

$$\delta_i(w) = \overset{*}{\varphi}_{0,\, w} \operatorname{Sp} [D_{0,\, w}^{-1} \ldots D_{i,\, T^i w}^{-1} C_{i,\, T^i w} A_{i-1,\, T^{i-1} w} \ldots A_{0,\, w}\, dR_w]_{x=0,\, y=0}.$$

Но из условий (У) следует, что при всех i, w нормы матриц

$$|D_{i,\, T^i w}^{-1}(0, 0)| < \vartheta, \quad |A_{i,\, T^i w}(0, 0)| < \vartheta,$$

где ϑ — некоторое число, меньшее единицы. Формы же

$$dr_w^{ij}(x, y)\,|_{x=0,\, y=0}$$

и коэффициенты всех матриц C_i можно считать равномерно ограниченными. Поэтому $\|\delta_i\| < M\vartheta^{2i+1}$, где M — некоторая константа. Следовательно, ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \delta_i(w)$ равномерно сходится.

Всего сложнее обстоят дела с β_n.

Лемма 18.6. *Пфаффовы формы $\beta_n(w)$ можно представить в виде*

$$\beta_n(w) = \sum_{i=0}^{n-1} \overset{*}{T}{}^i\, [\beta_i'(T^i w) + \beta_{i,\, n}(T^i w)], \tag{18.57}$$

где формы β_i' равномерно ограничены в совокупности и $\|\beta_{i,\, n}\| < C\vartheta^{n-i}$, где C, ϑ — некоторые константы, причем $\vartheta < 1$. Согласно лемме 18.3 и замечанию 18.3, отсюда следует, что последовательность $\beta_n(w) \wedge \omega_n(w)$ равномерно сходится. (Заметим, что

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} \overset{*}{T}{}^i \beta_{i,\, n}(T^i w) \wedge \omega_n(w)\right| < Cn\vartheta^n.)$$

Доказательство. Используя те же обозначения, что и при доказательстве леммы 18.5, заключаем из (18.55) и (18.56), что при $x = 0$, $y = 0$

$$d\begin{pmatrix} \mathfrak{A}_n & \mathfrak{B}_n \\ \mathfrak{C}_n & \mathfrak{D}_n \end{pmatrix} = d\left[\begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 \\ C_{n-1} & D_{n-1} \end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix}\right] + \\ + d_B\left[\begin{pmatrix} A_{n-1} & B_{n-1} \\ C_{n-1} & D_{n-1} \end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix}\right], \tag{18.58}$$

где во втором члене дифференцирование действует только на матрицы B_i. Этот член, стало быть, равен

$$\sum_{i=0}^{n-1} \begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 \\ C_{n-1} & D_{n-1} \end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix} A_{i+1} & 0 \\ C_{i+1} & D_{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & dB_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{i-1} & 0 \\ C_{i-1} & D_{i-1} \end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix}. \tag{18.59}$$

Так как правая нижняя клетка матрицы

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & dB \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & 0 \\ C' & D' \end{pmatrix}$$

равна $C \cdot dB \cdot D'$, то для нахождения правой нижней клетки i-го члена суммы (18.59) надо найти, прежде всего, левую нижнюю клетку матрицы

$$\begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 \\ C_{n-1} & D_{n-1} \end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix} A_{i+1} & 0 \\ C_{i+1} & D_{i+1} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно подсчитать, что эта клетка равна сумме

$$\sum_{j=i+1}^{n-1} D_{n-1} \ldots D_{j+1} C_j A_{j-1} \ldots A_{i+1}$$

и, значит, правая нижняя клетка матрицы (18.59) равна

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n-1} D_{n-1} \ldots D_{j+1} C_j A_{j-1} \ldots A_{i+1}\, dB_i \cdot D_{i-1} \ldots D_0. \tag{18.60}$$

Чтобы получить $d\mathfrak{D}$, надо, согласно (18.58), к (18.60) добавить еще

$$d\,[D_{n-1} \ldots D_0] = \sum_{i=0}^{n-1} D_{n-1} \ldots D_{i+1}\, dD_i \cdot D_{i-1} \ldots D_0.$$

Теперь, согласно (18.52), мы можем написать

$$d \ln \det \mathfrak{D} = \operatorname{Sp}\, [\mathfrak{D}^{-1}\, d\mathfrak{D}] =$$

$$= \operatorname{Sp} D_0^{-1} \ldots D_{n-1}^{-1} \Big[\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n-1} D_{n-1} \ldots D_{j+1} C_j A_{j-1} \ldots A_{i+1}\, dB_i \cdot D_{i-1} \ldots D_0 + {}$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1} D_{n-1} \ldots D_{i+1}\, dD_i \cdot D_{i-1} \ldots D_0 \Big] =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n-1} \operatorname{Sp} D_0^{-1} \ldots D_j^{-1} C_j A_{j-1} \ldots A_{i+1}\, dB_i \cdot D_{i-1} \ldots D_0 + {}$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1} \operatorname{Sp} D_0^{-1} \ldots D_i^{-1}\, dD_i \cdot D_{i-1} \ldots D_0.$$

Но матрицы

$$D_0^{-1} \ldots D_j^{-1} C_j A_{j-1} \ldots A_{i+1}\, dB_i \cdot D_{i-1} \ldots D_0 \quad (j > i)$$

и

$$D_i^{-1} \ldots D_j^{-1} C_i A_{j-1} \ldots A_{i+1}\, dB_i$$

подобны и потому имеют одинаковый след, равно как и матрицы

$$D_0^{-1} \ldots D_i^{-1}\, dD_i \cdot D_{i-1} \ldots D_0$$

и

$$D_i^{-1}\, dD_i.$$

Поэтому

$$d \ln \det \mathfrak{D}_{n,w}(x, y)_{x=0,\, z=0} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n-1} \operatorname{Sp} D_i^{-1} \ldots D_j^{-1} C_j A_{j-1} \ldots A_{i+1}\, dB_i + \sum_{i=0}^{n-1} \operatorname{Sp} D_i^{-1}\, dD_i.$$

Здесь

$$dB_i = dB_{i,\, T^i w}(\mathfrak{T}_{i,w}(x, y))$$

суть матрицы, состоящие из форм

$$db^{\alpha\beta}_{i,\, T^i w}(\mathfrak{T}_{i,w}(x, y)), \tag{18.61}$$

где $b^{\alpha\beta}_{i,\, T^i w}$ — элемент матрицы $B_{i,\, T^i w}$, и аналогично для dD_i. Форма (18.61), согласно определению отображения $\mathfrak{T}^*$ для форм, совпадает с формой

$$\mathfrak{T}^*_{i,w}\, db^{\alpha\beta}_{i,\, T^i w}(x, y);$$

обозначим матрицу, состоящую из таких форм, через $\mathfrak{T}^*_{i,w}dB_i$. Что же до $\operatorname{Sp} D_i^{-1}\,dD_i$, то, очевидно,

$$\operatorname{Sp} D_i^{-1}\,dD_i = d\ln\det D_i;$$

говоря подробнее, это есть

$$d\ln\det D_{i,\,T^i w}(\mathfrak{T}_{i,w}(x, y))\,|_{x=0,\,y=0} = \mathfrak{T}^*_{i,w}\,d\ln\det D_{i,\,T^i w}(x, y)\,|_{x=0,\,y=0}.$$

Итак,

$$d\ln\det \mathfrak{D}_{n,w}(x, y)\,|_{x=0,\,y=0} = \\ = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n-1} \operatorname{Sp} D_i^{-1}\ldots D_j^{-1}C_jA_{j-1}\ldots A_{i+1}(\mathfrak{T}^*_{i,w}\,dB_i) + \\ + \sum_{i=0}^{n-1}\mathfrak{T}^*_{i,w}\,d\ln\det D_i.$$

Вспоминая определение (18.31) форм $\beta_n(w)$, заключаем отсюда, что имеет место формула

$$\beta_n(w) = \sum_{i=0}^{n-1}\overset{*}{T}{}^{i}\,[\beta_i''(T^iw) + \beta_{i,n}'(T^iw)],$$

где

$$\beta_i''(w) = \varphi^*_{i,w}\,d\ln\det D_{i,w}(x, y)\,|_{x=0,\,y=0},$$

$$\beta_{i,n}'(w) = \sum_{j=i+1}^{n-1}\operatorname{Sp} D_i^{-1}\ldots D_j^{-1}C_jA_{j-1}\ldots A_{j+1}(\varphi^*_{i,w}\,dB_i(x, y))\,|_{\substack{x=0\\ y=0}}.$$

Ясно, что 1-формы $\beta_i''(w)$ равномерно ограничены в совокупности. Далее, ряды

$$\beta_i'''(w) = \sum_{j=i+1}^{\infty}\operatorname{Sp} D_i^{-1}\ldots D_j^{-1}C_jA_{j-1}\ldots A_{j+1}(\varphi^*_{i,w}\,dB_i)$$

абсолютно сходятся, ибо

$$|\,D_i^{-1}\ldots D_j^{-1}C_jA_{j-1}\ldots A_{i+1}(\varphi^*_{i,w}\,dB_i)\,| \leqslant \\ \leqslant \vartheta^{j-i+1}\|C_j\|\,\vartheta^{j-1-i}\|dB_i\| = \vartheta^{2j-2i}\|C_j\|\,\|dB_i\| \leqslant M\vartheta^{j-1i},$$

где M — некоторая константа. Значит,

$$\beta_{i,n}'(w) = \beta_i'''(w) + \beta_{i,n}(w),$$

где $\beta_i'''(w)$ равномерно ограничены, а для

$$\beta_{i,n}(w) = \sum_{j=n}^{\infty}\operatorname{Sp} D_i^{-1}\ldots D_j^{-1}C_jA_{j-1}\ldots A_{i+1}(\varphi^*_{i,w}\,dB_i)$$

имеет место оценка

$$\|\beta_{i,n}\| \leqslant M\vartheta^{n-i}(1 + \vartheta + \vartheta^2 + \ldots) = \frac{M\vartheta^{n-i}}{1-\vartheta}.$$

Положив $\beta_i'' + \beta_i''' = \beta_i'$, получим утверждение леммы.

Л е м м а 18.7. *Последовательность форм $d\omega_n(w)$ равномерно сходится.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это следует из замечаний 18.2, 18.4 и лемм 18.1, 18.4, 18.5, 18.6.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 10 д л я ($У$)-к а с к а д о в. Из лемм 12.11, 17.1, 18.1 и 18.7 следует, что слоение $\mathfrak{S}^k$ абсолютно непрерывно. При изменении знака времени слоения $\mathfrak{S}^k$ и $\mathfrak{S}^l$ меняются ролями; поэтому слоение $\mathfrak{S}^l$ тоже абсолютно непрерывно.

Доказательство теоремы 10 для ($У$)-потоков. Аналогично предыдущему достаточно доказать абсолютную непрерывность слоений $\mathfrak{S}^k$, $\mathfrak{S}^{k+1}$. Согласно леммам 12.10, 12.11 и 17.1, достаточно доказать, что задающие это слоение формы ψ^{l+1}, ψ^l можно выбрать имеющими непрерывную внешнюю производную.

Для ψ^{l+1} проходят почти без всяких изменений те же рассуждения, что в случае ($У$)-каскада, только пространство $\hat{Y}^l_w$ и вложение λ надо заменить пространством $\hat{Y}^l_w \oplus Z^l_w$ и соответствующим вложением $\hat{\lambda} \oplus f$. Что же до ψ^l, то нетрудно проверить, что за ψ^l можно принять форму

$$\psi^l(w) = f(w) \lrcorner \psi^{l+1}(w)$$

(где $f(w)$ — векторное поле, задающее ($У$)-систему). Существование непрерывной внешней производной $d\psi^l$ нетрудно вывести, пользуясь формулой

$$d(f \lrcorner \varphi) = \mathcal{L}_f(\varphi) - f \lrcorner d\varphi, \tag{18.62}$$

в которой $\mathcal{L}_f(\varphi)$ — производная Ли дифференциальной формы φ в силу векторного поля f:

$$(\mathcal{L}_f(\varphi))(w) = \frac{d}{dt} \overset{*}{T}{}^t \varphi(T^t w)\big|_{t=0}.$$

Формула (18.62) хорошо известна для гладких дифференциальных форм φ (см., например, [78, гл. III, § 1]). Отсюда нетрудно заключить, что если непрерывная форма φ имеет непрерывную внешнюю производную $d\varphi$ и непрерывную производную Ли $\mathcal{L}_f(\varphi)$ в силу гладкого векторного поля f, то и форма $f \lrcorner \varphi$ имеет непрерывную внешнюю производную $d(f \lrcorner \varphi)$, выражающуюся формулой (18.62). (Доказательство аналогично рассуждениям в конце § 6.) Поэтому надо только доказать существование непрерывной производной Ли $\mathcal{L}_f(\psi^{l+1})$, а это почти непосредственно следует из того, что вдоль траектории X^k_w и Y^l_w зависят от w гладко, и того, что условие нормировки (18.3), которое в данном случае имеет вид

$$(\hat{\lambda}^*(w) \oplus f^*(w))\, \psi^{l+1}(w) = (\hat{\lambda}^*(w) \oplus f^*(w))\, \omega(w),$$

тоже в очевидном смысле гладко зависит от w.

ГЛАВА V

§ 19. Эргодичность ($У$)-систем и доказательство теоремы 11

В этой главе будут доказаны теоремы 4, 6, 11, 12, 13 и 15. Как уже говорилось в § 3 и 5, теорема 14 является резюме теорем 12 и 13, а теоремы 5 и 7 следуют из теорем 11 и 14, с одной стороны, и результатов Синая — с другой; таким образом, в этой главе доказывается все то, что (в сочетании с работами Синая) нужно для установления сформулированных в § 3 метрических свойств ($У$)-систем.

Я начну с некоторых замечаний об абсолютно непрерывных слоениях. Пусть сперва слоение $\mathfrak{S}^p$ — гладкое; тогда хорошо известно, что любое множество A меры нуль пересекает почти каждый слой по множеству (p-мерной) меры нуль, и обратно, каждое множество с таким свойством имеет меру нуль. «Почти каждый слой» — это значит, что совокупность «исключительных» слоев в пересечении с любой трансверсальной q-мерной ($q=m-p$) гладкой площадкой образует множество меры нуль. Впрочем, здесь нет необходимости рассматривать всевозможные трансверсальные площадки: если совокупность $\{\Pi_i\}$ площадок такова, что любой слой пересекает хотя бы одну из них, и если на каждой из Π_i множество точек пересечения со всеми исключительными слоями имеет меру нуль, то то же самое будет верно и для любой другой трансверсальной площадки Π. (Любую точку $w_0 \in \Pi$ можно соединить с точкой w_i, лежащей на некоторой из площадок Π_i, путем $w(t)$, целиком лежащем в некотором слое. Тогда точки $w \in \Pi$, достаточно близкие к w_0, и точки $w' \in \Pi_i$, достаточно близкие к w_i, можно соединить путями, лежащими в слоях $\mathfrak{S}^p$ и близкими к $w(t)$. Отображение $w' \to w$ переводит множество меры 0 в множество меры 0.)

Покажем, что сказанное справедливо и для абсолютно непрерывного слоения $\mathfrak{S}^p$. Поскольку вопрос, очевидно, носит локальный характер, то достаточно рассмотреть такую область $U \subset W^m$, в которой имеется трансверсальное к $\mathfrak{S}^p$ гладкое слоение $\mathfrak{S}^p$, причем слои $\mathfrak{S}^q$ и слои $\mathfrak{S}^p|U$ (т. е. связные компоненты пересечений слоев $\mathfrak{S}^p$ с областью U) являются соответственно q- и p-мерными шарами и каждый слой $\mathfrak{S}^p|U$ пересекается с каждым слоем $\mathfrak{S}^q$ ровно в одной точке. Выберем какие-нибудь слои этих двух слоений, обозначим точки выбранных слоев через x и y соответственно и, наконец, обозначим слой слоения $\mathfrak{S}^p|U$, соответственно $\mathfrak{S}^q$, проходящий через y, соответственно через x, знаком $M^p(y)$, соответственно $N^q(x)$. Отображение

$$\varphi^{-1}:(x, y) \to M^p(y) \cap N^q(x)$$

определяет некоторую (негладкую) карту с координатной окрестностью U. Пусть множество A имеет меру 0. Тогда, согласно сказанному выше о гладких слоениях, mes $A \cap N^q(x) = 0$ для почти всех x. Следовательно, если обозначить

$$E_x = \{y : (x, y) \in \varphi(A)\} = \{y : M^p(y) \cap N^q(x) \in A\},$$

то для почти всех x будет mes $E_x = 0$, ибо отображение $N^q(x) \to N^q(0)$, переводящее $M^p(y) \cap N^q(x)$ в y, абсолютно непрерывно. Отсюда mes $\bigcup_x x \times E_x = 0$, т. е. mes $\varphi(A) = 0$. Значит, если обозначить

$$E'_y = \{x : (x, y) \in \varphi(A)\} = \{x : M^p(y) \cap N^q(x) \in A\},$$

то для почти всех y mes $E'_y = 0$. А так как отображение $M^p(0) \to M^p(y)$, переводящее x в $M^p(y) \cap N^q(x)$, переводит множество меры 0 в множество меры 0 (и даже является гладким), то для почти всех y

$$\operatorname{mes}(A \cap M^p(y)) = 0,$$

т. е. почти со всеми слоями слоения $\mathfrak{S}^p|U$ множество A пересекается по множеству (p-мерной) меры 0. Проводя это рассуждение в обратном направлении, убедимся, что всякое множество A, пересечение которого почти с каждым слоем $\mathfrak{S}^p|U$ имеет (p-мерную) меру 0, само имеет меру 0.

Пусть теперь имеются два слоения $\mathfrak{S}^p$ и $\mathfrak{S}^q$, которые абсолютно непрерывны и трансверсальны друг к другу, причем $p + q = m$. Возьмем какую-нибудь точку $w \in W^m$ и построим следующую карту возле этой точки. Введем гладкие координаты $x^1, \ldots, x^p$ в шаре $B^p_\delta(w)$ слоя слоения $\mathfrak{S}^p$ с радиусом δ и центром w, а также гладкие координаты $y^1, \ldots, y^q$ в шаре $B^q_\delta(w)$ слоя слоения $\mathfrak{S}^q$. Точку шара $B^p_\delta(w)$ с координатами x^i обозначим короче через x, отождествляя тем самым $B^p_\delta(w)$ с шаром X^p_δ «арифметического» пространства x-в, а точку шара $B^q_\delta(w)$ с координатами y^i обозначим через y, отождествляя $B^q_\delta(w)$ и Y^q_δ. Положим

$$\varphi^{-1}(x, y) = B^q_\Delta(x) \cap B^p_\Delta(y)$$

(Δ надо взять, для гарантии, в несколько раз больше δ, но все же малым). Легко видеть, что $U = \varphi^{-1}(X^p_\delta \times Y^q_\delta)$ действительно является окрестностью точки w и что φ — гомеоморфизм. Вообще говоря, этот гомеоморфизм — не гладкий, но он переводит меру в эквивалентную. Действительно, соотношение mes $A = 0$ и соотношение mes $\varphi(A) = 0$ оба означают, что пересечение A с почти каждым слоем $\mathfrak{S}^p \mid U$ имеет меру нуль.

Пусть

$$\{\psi_i(x, y)\},\ i = 1, \ldots, \min(p, q)$$

—система углов* между касательными пространствами к слоям $\mathfrak{S}^p$ и $\mathfrak{S}^q$ в точке $\varphi^{-1}(x, y)$. Пусть, далее, при отображениях

$$B^p_\delta(0) \to B^p_\delta(y) : x \to B^p_\Delta(y) \cap B^q_\Delta(x),$$

$$B^q_\delta(0) \to B^q_\delta(x) : y \to B^p_\Delta(y) \cap B^q_\Delta(x)$$

индуцированные римановой метрикой в слоях меры $d\mu$, $d\nu$ связаны с мерами dx, dy по формулам

$$d\mu = g(x, y)\,dx,\quad d\nu = h(x, y)\,dy.$$

* Система углов между двумя векторными подпространствами векторного пространства определяется так: число углов системы равно наименьшей из размерностей этих подпространств, а косинусы углов равны главным полуосям эллипсоида, получающегося при ортогональном проектировании единичного шара одного из подпространств на другое. До сих пор, говоря, что угол между подпространствами ограничен снизу положительной константой, я имел в виду наименьший из системы углов.

Тогда

$$\operatorname{mes} A = \int\limits_{\varphi(A)} \prod_{i=1}^{\min(p,q)} \sin\psi_i(x, y)\, g(x, y)\, h(x, y)\, dxdy. \tag{19.1}$$

Для наших теперешних целей, правда, вполне достаточно и того, что

$$\operatorname{mes} A = \int\limits_{\varphi(A)} f(x, y)\, dxdy, \tag{19.2}$$

где f — некоторая положительная почти всюду и суммируемая функция. Все же ради полноты я вкратце укажу доказательство (19.1).

Рассмотрим в слоях слоений $\mathfrak{S}^p$ и $\mathfrak{S}^q$, проходящих через точку w_1 с координатами (x_1, y_1), два маленьких куба K^p и K^q с центром w_1. Точнее говоря, K^p (или K^q) является, скажем, образом, при геодезическом отображении $X^p \to M^p$ (или $Y^q \to N^q$) маленького кубика в касательном к слою пространстве $X^p_{w_1}$ (или $Y^q_{w_1}$). В координатах (x, y) эти кубы переходят в два гомеоморфных им множества Q^p и Q^q на параллельных «осям» пространствах $X^p \times y_1$ и $x_1 \times Y^q$. Геометрически ясно, что (независимо от абсолютной непрерывности слоений)

$$\operatorname{mes} \varphi^{-1}(Q^p \times Q^q) \approx \prod_{i=1}^{\min(p;q)} \sin\psi_i(x_1, y_1) \operatorname{mes} K^p \operatorname{mes} K^q \tag{19.3}$$

в том смысле, что при уменьшении размеров этих кубиков отношение правой и левой частей (19.3) стремится к единице. В то же время из абсолютной непрерывности следует, что

$$\operatorname{mes} K^p \approx g(x_1, y_1) \operatorname{mes} Q^p, \quad \operatorname{mes} K^q \approx h(x_1, y_1) \operatorname{mes} Q^q. \tag{19.4}$$

Сопоставляя (19.3) и (19.4) с (19.2), найдем, что при почти всех (x, y) подынтегральное выражение в (19.1) действительно совпадает с производной Радона — Никодима $f(x, y)$.

Вернемся теперь к нашей ($\mathcal{Y}$)-системе; пока безразлично, является ли она каскадом или потоком. Будем, как и обычно, пользоваться «ляпуновской» метрикой. Начиная с этого места и до конца параграфа $t \geqslant 0$. Напомню, что если L — кривая в слое слоения $\mathfrak{S}^l$, то при $t \geqslant 0$

$$\text{длина } T^t L \geqslant \lambda^t \cdot \text{длина } L,$$

где λ — некоторое число, большее 1 (то же самое число, которое участвует в неравенстве

$$|\tilde{T}^t \eta| \geqslant \lambda^t |\eta| \text{ при } t > 0).$$

Значит

$$\text{длина } T^{-t} L \leqslant \lambda^{-t} \cdot \text{длина } L \quad (\lambda > 1).$$

Отсюда следует

$$T^{-t} B^l_{\lambda^t r}(T^t w) \subset B^l_r(w), \tag{19.5}$$

потому что T^{-t} переводит $T^t w$ в w, а геодезическую линию в слое из $\mathfrak{S}^l$ длины $L \leqslant \lambda^t r$, соединяющую $T^t w$ и $w' \in B^l_{\lambda^t r}$, преобразование T^t переводит в линию длины $\leqslant \lambda^{-t} L \leqslant r$, соединяющую w и $T^{-t} w'$.

Аналогично

$$B^k_r(w) \supset T^t B^k_{\lambda^t r}(T^{-t} w). \tag{19.6}$$

Положим для любой функции f на W^m

$$\omega_f^k(r) = \sup_{\substack{w,\, w' \in W^m \\ w' \in B_r^k(w)}} |f(w) - f(w')|; \quad \omega_f^l(r) = \sup_{\substack{w, w' \in W^m \\ w' \in B_r^l(w)}} |f(w) - f(w')|$$

и для любого множества $M \subset W^m$

$$\omega_f^k(r \mid \text{вне}\, M) = \sup_{\substack{w,\, w' \in W^m \setminus M \\ w' \in B_r^k(w)}} |f(w) - f(w')|,$$

$$\omega_f^l(r \mid \text{вне}\, M) = \sup_{\substack{w,\, w' \in W^m \setminus M \\ w' \in B_r^l(w)}} |f(w) - f(w')|.$$

Если ввести еще

$$\omega_f^k(r, w) = \sup_{w' \in B_r^k(w)} |f(w) - f(w')|,$$

$$\omega_f^l(r, w) = \sup_{w' \in B_r^l(w)} |f(w) - f(w')|,$$

то можно написать

$$\omega_f^k(r) = \sup_{w \in W^m} \omega_f^k(r, w), \quad \omega_f^l(r) = \sup_{w \in W^m} \omega_f^l(r, w).$$

Все введенные $\omega_f(r)$ обладают следующими свойствами: они определены при $r \geqslant 0$; $\omega_f(r) \geqslant 0$; $\omega_f(0) = 0$; $\omega_f(r)$ — неубывающая функция r. Если функция f непрерывна, то $\omega_f(r) \to 0$ при $r \to 0$.

Наконец, через U^t обозначается оператор сдвига:

$$U^t f(w) = f(T^t w).$$

Лемма 19.1.

$$\omega_{U^t f}^k(\lambda^t r, w) \leqslant \omega_f^k(r, T^t w),$$

$$\omega_{U^{-t} f}^l(\lambda^t r, w) \leqslant \omega_f^l(r, T^{-t} w).$$

Доказательство. Используем определение ω и (19.6):

$$\omega_{U^t f}^k(\lambda^t r, w) = \sup_{w' \in B_{\lambda^t r}^k(w)} |(U^t f)(w) - (U^t f)(w')| =$$

$$= \sup_{w' \in B_{\lambda^t r}^k(w)} |f(T^t w) - f(T^t w')| = \sup_{w' \in T^t B_{\lambda^t r}^k(w)} |f(T^t w) - f(\omega')| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{w' \in B_r^k(T^t w)} |f(T^t w) - f(w')| = \omega_f^k(r, T^t w).$$

Аналогично доказывается второе неравенство.

Лемма 19.2.

$$\omega_{U^t f}^k(\lambda^t r) \leqslant \omega_f^k(r), \quad \omega_{U^{-t} f}^l(\lambda^t r) \leqslant \omega_f^l(r).$$

Доказательство. Это следует из леммы 1.

В трех следующих леммах предполагается, что функция $f \in L^2(W^m$

инвариантна относительно сдвига: $f(T^t w) = f(w)$ при всех t, w *. Через r обозначается фиксированное число, например, можно взять $r = 1$.

Лемма 19.3. *Пусть* $\varepsilon > 0$. *Существуют измеримое множество* M_ε *такое, что* $\operatorname{mes} M_\varepsilon < \varepsilon$ *и* $\omega_f^k(r \mid \text{вне } M_\varepsilon) \leqslant 3\varepsilon$, *и измеримое множество* N_ε *такое, что* $\operatorname{mes} N_\varepsilon < \varepsilon$ *и* $\omega_f^l(r \mid \text{вне } N_\varepsilon) \leqslant 3\varepsilon$.

Доказательство. Поскольку непрерывные функции плотны в L^2, f можно представить в виде $f = g + h$, где g непрерывна, $\|h\|_{L^2} < \varepsilon^3$. Пусть t столь велико, что $\omega_g^k(\lambda^{-t} r) < \varepsilon$. Тогда, по лемме 19.2,

$$\omega_{U^t g}^k(r) \leqslant \omega_g^k(\lambda^{-t} r) < \varepsilon.$$

Положим $M_\varepsilon = \{w : |U^t h(w)| \geqslant \varepsilon\}$. Так как $\|U^t h\|_{L^2} = \|h\|_{L^2} < \varepsilon^3$, то имеем (неравенство Чебышева):

$$\varepsilon^3 > \int_{M_\varepsilon} |U^t h|^2 \, dw \geqslant \operatorname{mes} M_\varepsilon \cdot \varepsilon^2,$$

т. е. $\operatorname{mes} M_\varepsilon < \varepsilon$. Но если $w, w' \in W^m \setminus M_\varepsilon$ и $w' \in B_r^k(w)$, то

$$\begin{aligned} |f(w) - f(w')| &= |U^t f(w) - U^t f(w')| = \\ &= |(U^t g + U^t h)(w) - (U^t g + U^t h)(w')| \leqslant |U^t g(w) - U^t g(w')| + \\ &\quad + |U^t h(w)| + |U^t h(w')| < \omega_{U^t g}^k(r) + \varepsilon + \varepsilon \leqslant \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Вторая часть леммы доказывается аналогично.

Лемма 19.4.

$$\omega_f^k\Big(r \,\Big|\, \text{вне } \bigcup_{n=1}^{\infty} M_{\frac{\varepsilon}{2^n}}\Big) = 0, \quad \omega_f^l\Big(r \,\Big|\, \text{вне } \bigcup_{n=1}^{\infty} N_{\frac{\varepsilon}{2^n}}\Big) = 0,$$

$$\operatorname{mes} \bigcup_{n=1}^{\infty} M_{\frac{\varepsilon}{2^n}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon, \quad \operatorname{mes} \bigcup_{n=1}^{\infty} N_{\frac{\varepsilon}{2^n}} < \varepsilon.$$

Доказательство. Это следует из леммы 19.3.

Лемма 19.5. *Существуют измеримые множества* M *и* N *такие, что* $\operatorname{mes} M = 0$, $\omega_f^k(r \mid \text{вне } M) = 0$; $\operatorname{mes} N = 0$, $\omega_f^l(r \mid \text{вне } N) = 0$.

Доказательство. Это следует из леммы 19.4.

Доказательство теоремы 4. Пусть f — инвариантная функция. Лемма 19.5 означает, что на почти каждом слое слоения $\mathfrak{S}^k$ и на почти каждом слое слоения $\mathfrak{S}^l$ функция f постоянна почти всюду. В случае потока инвариантность f позволяет заключить отсюда, что f постоянна также и на почти каждом слое $\mathfrak{S}^{k+1}$ и $\mathfrak{S}^{l+1}$. Теперь, учитывая абсолютную непрерывность наших слоений и сказанное в начале этого параграфа, нетрудно видеть, что f постоянна почти всюду, а следовательно (поскольку W^m связно), f почти всюду равна некоторой константе.

Переходим к доказательству метрической неразложимости слоений $\mathfrak{S}^k$, $\mathfrak{S}^l$ для ($У$)-каскада. Впрочем, в леммах 19.6 и 19.7 еще нет разницы между ($У$)-потоком и ($У$)-каскадом.

Лемма 19.6. *Пусть даны функция* $f \in L^2(W^m)$ *и числа* $\varepsilon > 0$, $r > 0$. *Существует такое число* $t_0 = t_0(f, \varepsilon, r)$, *что для каждого* $t > t_0$ *найдется измеримое множество* M_ε^t *(оно зависит также и от* f *и* r, *но мы не делаем*

---

* Т. е. функция f инвариантна именно как функция, а не только как элемент пространства $L^2(W^m)$. (Инвариантность f как элемента пространства $L^2(W^m)$ означает то, что при любом t равенство $f(T^t w) = f(w)$ может нарушаться на множестве меры нуль.) Хорошо известно (см. [2] или [81]), что всякая функция, инвариантная в этом более слабом смысле, совпадает почти всюду с некоторой функцией, инвариантной уже строго.

в обозначениях явного указания на эту зависимость), обладающее тем свойством, что

$$\operatorname{mes} M_\varepsilon^t < \varepsilon, \quad \omega_{U^t f}^k (r \mid \text{вне } M_\varepsilon^t) < 3\varepsilon.$$

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 19.3, представим f в виде $f = g + h$, где g непрерывна, $\|h\|_{L^2} < \varepsilon^3$. Пусть t_0 столь велико, что $\omega_g^k(\lambda^{-t} r) > \varepsilon$ при $t > t_0$. Тогда в силу леммы 19.2 при $t > t_0$ будет

$$\omega_{U^t g}^k (r) \leqslant \omega_g^k (\lambda^{-t} r) < \varepsilon.$$

Положим $M_\varepsilon^t = \{w : |U^t h (w)| \geqslant \varepsilon\}$. Так как $\|U^t h\|_{L^2} = \|h\|_{L^2} < \varepsilon^3$, то имеем (неравенство Чебышева):

$$\varepsilon^3 > \int\limits_{M_\varepsilon^t} |U^t h|^2 \, dw \geqslant \varepsilon^2 \operatorname{mes} M_\varepsilon^t,$$

т. е. $\operatorname{mes} M_\varepsilon^t < \varepsilon$. Но если $w, w' \in W^m \setminus M_\varepsilon^t$ и $w' \in B_r^k(w)$, то

$$\begin{aligned} &|U^t f (w) - U^t f (w')| = \\ &= |(U^t g + U^t h) (w) - (U^t g + U^t h) (w')| \leqslant |U^t g (w) - U^t g (w')| + \\ &\quad + |U^t h (w)| + |U^t h (w')| < \omega_{U^t g}^k (r) + \varepsilon + \varepsilon < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Лемма 19.7. *Пусть A — любое измеримое множество. Для любых $r > 0$, $\varepsilon > 0$ и любого достаточно большого t найдется такое множество M_ε^t (зависящее также и от A, r), что $\operatorname{mes} M_\varepsilon^t < \varepsilon$ и любые две точки w, $w' \in W^m \setminus M_\varepsilon^t$, которые лежат на одном слое слоения $\mathfrak{S}^k$ на расстоянии $< r$ друг от друга, либо обе принадлежат, либо обе не принадлежат множеству $T^{-t}A$.*

Доказательство. Применим лемму 19.6 к $f(w) = \chi_A(w)$, где χ_A — характеристическая функция множества A. Ясно, что

$$\chi_{T^t A} (\omega) = \begin{Bmatrix} 1, & w \in T^t A \\ 0, & w \notin T^t A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1, & T^{-t} w \in A \\ 0, & T^{-t} w \notin A \end{Bmatrix} = \chi_A (T^{-t} w) = (U^{-t} \chi_A)(w),$$

т. е. $U^t \chi_A = \chi_{T^{-t} A}$. Поэтому применительно к χ_A лемма 19.6 означает, что при достаточно больших t

$$\omega_{\chi_{T^{-t} A}}^k (r \mid \text{вне } M_\varepsilon^t) < 3\varepsilon.$$

Но можно считать, что $3\varepsilon < 1$; в таком случае из $\omega_\chi < 1$ следует, что $\omega_\chi = 0$, ибо $\chi = 0$ или 1. Значит,

$$\omega_{\chi_{T^{-t} A}}^k (r \mid \text{вне } M_\varepsilon^t) = 0,$$

а это эквивалентно утверждению леммы.

Теперь мы ограничиваемся ($У$)-каскадами.

Лемма 19.8. *Существует такое положительное число β, что для любого измеримого множества A, целиком состоящего из слоев слоения $\mathfrak{S}^l$, имеет место альтернатива:*

$$\text{либо } \operatorname{mes} A = 0, \ \text{либо } \operatorname{mes} A > \beta.$$

Доказательство. Пусть A — измеримое множество, целиком состоящее из слоев слоения $\mathfrak{S}^l$. Множество $T^{-t}A$, подобно A, целиком состоит из слоев $\mathfrak{S}^l$; в то же время при достаточно больших t для $T^{-t}A$ справедливо заключение леммы 19.7.

Рассмотрим какую-нибудь карту (U, φ), построенную с помощью слоений $\mathfrak{S}^k$, $\mathfrak{S}^l$ так, как это описано в начале этого параграфа. Число δ, характеризующее размеры карты, считаем фиксированным, число r, о котором идет речь в лемме 19.7,— превышающим размеры U, а число ε из той же леммы можно считать сколь угодно малым, если взять t достаточно большим. Из (19.2) следует, что в координатах (x, y) множество M_ε^t — вернее, та его часть, которая попадает в U, т. е. множество $\varphi(M_\varepsilon^t \cap U)$,— имеет меру, меньшую ε', где $\varepsilon' = \varepsilon'(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, так что ε' можно считать сколь угодно малым по сравнению с мерой и размерами области $U = X_\delta \times Y_\delta$. Пусть $f(x, y)$ — характеристическая функция множества $T^{-t}A$ в координатах (x, y); точнее говоря,

$$f(x,y) = \chi_{\varphi(T^{-t}A \cap U)}(x, y).$$

Из сказанного выше о свойствах $T^{-t}A$ явствует, что

$$\begin{gathered} f(x, y) = f(x, y') \text{ при всех } x, y, y', \\ f(x, y) = f(x', y), \text{ если } (x, y) \notin \varphi(M_\varepsilon^t \cap U), \\ (x', y) \notin \varphi(M_\varepsilon^t \cap U). \end{gathered} \tag{19.7}$$

Отсюда видно, что найдется такое $y_0 \in Y_\delta$, что

$$\operatorname{mes}[\varphi(M_\varepsilon^t \cap U) \cap (X_\delta \times y_0)] < \varepsilon'', \tag{19.8}$$

где ε'' тоже можно считать малым (ε'' имеет порядок $\varepsilon'\delta^{-l}$, а δ у нас фиксировано). Вне множества

$$\varphi(M_\varepsilon^t \cap U) \cup \{[\varphi(M_\varepsilon^t \cap U) \cap (X_\delta \times y_0)] \times Y_\delta\} \tag{19.9}$$

функция $f(x, y)$ постоянна. Действительно, если точки (x_1, y_1), (x_2, y_2) лежат вне множества (19.10), то и точки (x_1, y_0), (x_2, y_0) лежат вне этого множества, а тем более вне множества $\varphi(M_\varepsilon^t \cap U)$; тогда из (19.7)

$$f(x_1, y_1) = f(x_1, y_0) = f(x_2, y_0) = f(x_2, y_2).$$

Наконец, мера множества (19.9) не превосходит

$$\operatorname{mes}\varphi(M_\varepsilon^t \cap U) + \operatorname{mes}\text{ (множества (19.8))} \cdot \operatorname{mes} Y_\delta^l < \varepsilon + \varepsilon'' \cdot c\delta^l,$$

что при достаточно малом ε может быть сделано сколь угодно малым. Таким образом, при достаточно большом t множество $U \cap T^{-t}A$ либо составляет «весьма значительную» часть множества U, скажем,

$$\frac{\operatorname{mes}(U \setminus T^{-t}A)}{\operatorname{mes} U} > 1 - \alpha, \tag{19.10}$$

либо, наоборот, оно составляет лишь «весьма малую» часть U, скажем,

$$\frac{\operatorname{mes}(U \cap T^{-t}A)}{\operatorname{mes} U} < \alpha. \tag{19.11}$$

В (19.10) и (19.11) α — любое наперед заданное положительное число, которое можно сделать сколь угодно малым при достаточно большом t.

Многообразие W^m можно покрыть конечным набором таких карт $\{U_i, \varphi_i\}$, и если в каждой из областей U_i имеет место неравенство (19.11), то

$$\operatorname{mes} A = \operatorname{mes} T^{-t}A < \alpha \sum_i \operatorname{mes} U_i,$$

а если хотя бы в одной из них, скажем в i-й, имеет место (19.10), то

$$\operatorname{mes} A = \operatorname{mes} T^{-t} A > (1-\alpha) \operatorname{mes} U_i.$$

Итак, для любого измеримого множества A, целиком состоящего из слоев $\mathfrak{S}^l$, имеет место альтернатива: при любом положительном α либо $\operatorname{mes} A < \alpha \sum_i \operatorname{mes} U_i$, либо $\operatorname{mes} A > (1-\alpha) \min_i \operatorname{mes} U_i$. Отсюда, очевидно, следует, что

$$\text{либо } \operatorname{mes} A = 0, \text{ либо } \operatorname{mes} A > \min_i \operatorname{mes} U_i,$$

и мы получаем утверждение леммы 19.8 с $\beta = \min_i \operatorname{mes} U_i$.

Доказательство теоремы 11. Достаточно доказать метрическую транзитивность слоения $\mathfrak{S}^l$, ибо при изменении знака времени слоения $\mathfrak{S}^k$ и $\mathfrak{S}^l$ меняются ролями.

Допустим, что существует измеримое множество A, мера которого положительна, но меньше меры W^m, и которое целиком состоит из слоев слоения $\mathfrak{S}^l$. В таком случае A либо не имеет измеримых подмножеств, мера которых положительна, но меньше меры A, и которые целиком состоят из слоев слоения $\mathfrak{S}^l$, либо же A имеет такое подмножество A'. К A' и к $A \setminus A'$ можно применить то же рассуждение. Такой процесс дробления A на непересекающиеся множества положительной меры, целиком состоящие из слоев $\mathfrak{S}^l$, нельзя продолжать неограниченно, потому что мера каждого из таких подмножеств, согласно лемме 19.8, должна быть больше β, а мера A конечна. Поэтому рано или поздно мы придем к такому множеству B, которое целиком состоит из слоев $\mathfrak{S}^l$ и мера которого положительна и меньше меры W^m, но которое не имеет подмножеств положительной меры (меньшей, чем мера B), целиком состоящих из слоев $\mathfrak{S}^l$.

Из теоремы о возвращении следует, что существует такое n, что $\operatorname{mes}(B \cap T^n B) > 0$. Но $T^n B$, а значит и $B \cap T^n B$, тоже состоит из слоев слоения $\mathfrak{S}^l$. Значит, $\operatorname{mes}(B \cap T^n B) = \operatorname{mes} B$, т. е. $T^n B = B$ с точностью до множества меры нуль.

Таким образом, B является инвариантным множеством каскада $\{(T^n)^t\}_{\infty<t<\infty}$. Но этот каскад тоже является $(У)$-каскадом и поэтому не может иметь инвариантных множеств промежуточной меры.

§ 20. Доказательство теорем 6 и 12

Начиная отсюда и до конца этой главы, мы будем иметь дело исключительно с $(У)$-потоками. Поскольку нам придется одновременно рассматривать слои нескольких слоений, целесообразно присвоить им собственные имена. Слои слоений $\mathfrak{S}^k$ и $\mathfrak{S}^l$ будем называть орисферами (соответственно устойчивыми и неустойчивыми), а слои слоений $\mathfrak{S}^{k+1}$ и $\mathfrak{S}^{l+1}$ — листьями (тоже устойчивыми и неустойчивыми соответственно). Напомню, что каждый лист состоит из однопараметрического семейства орисфер.

Этот параграф посвящен ситуации, возникающей, когда слоения $\mathfrak{S}^k$, $\mathfrak{S}^l$ образуют интегрируемую пару. Сперва мы обсудим само понятие интегрируемости пары слоений. Определение этого понятия, данное в § 5, по форме имеет глобальный характер. В действительности же интегрируемость пары слоений — локальное свойство, и состоит оно в следующем. Пусть $M_{w_0}^{k+1}$ — окрестность точки w_0 на устойчивом листе, проходящем через эту точку. Возьмем, далее, какую-нибудь точку w_1, расположенную на проходящей через w_0 неустойчивой орисфере $N_{w_0}^l$ вблизи w_0, и окрестность $M_{w_1}^{k+1}$ точки w_1 на соответствующем устойчивом листе. Если «для гарантии» размеры окрестности $M_{w_1}^{k+1}$ взять достаточно превосходящими размеры $M_{w_0}^{k+1}$ (но все же малыми), то любая орисфера N_w^l, пересекающая $M_{w_0}^{k+1}$ в точке w, будет пересекать $M_{w_1}^{k+1}$ ровно в одной точке w'. Обозначим через F или, подробнее, F_{w_0,w_1} отображение, переводящее w в w'. F_{w_0,w_1} определено для любых точек w_0, w_1, расположенных достаточно близко друг к другу на одной неустойчивой орисфере, и отображает некоторую окрестность одной из этих точек на проходящем через нее устойчивом листе в некоторую окрестность другой; размеры этих окрестностей и «максимально допустимое» расстояние между w_0 и w_1 можно при желании охарактеризовать некоторым числом ε (которое можно считать одним и тем же для всех w_0, w_1). Отображение F непрерывно (даже гомеоморфно) и абсолютно непрерывно.

Лемма 20.1. *Слоения $\mathfrak{S}^k$ и $\mathfrak{S}^l$ образуют интегрируемую пару тогда и только тогда, когда при любых (расположенных достаточно близко друг к другу на одной неустойчивой орисфере) w_0, w_1 отображение F_{w_0,w_1} переводит орисферы в орисферы.*

Доказательство. Сформулированное условие эквивалентно тому, что при любых $w_1 \in N_{w_0}^l$, $w_2 \in M_{w_0}^k$ многообразия $M_{w_1}^k$ и $N_{w_2}^l$ пересекаются («для гарантии» радиусы $M_{w_1}^k$ и $N_{w_2}^l$ надо взять больше радиусов $N_{w_0}^l$ и $M_{w_0}^k$). Необходимость этого условия очевидна; докажем его достаточность.

Слои слоения $\mathfrak{S}^{m-1} = \mathfrak{S}^k \wedge \mathfrak{S}^l$ мы будем склеивать из «кусочков» M_w^{m-1}, которые строятся следующим образом:

$$M_{w_0}^{m-1} = \bigcup_{w_1 \in N_{w_0}^l} F_{w_0 w_1}(M_{w_0}^k) = \bigcup_{w_1 \in N_{w_0}^l} M_{w_1}^k. \tag{20.1}$$

Здесь M_w^k, N_w^l — окрестности точки w на соответствующих орисферах. При каком-нибудь определенном выборе размеров этих окрестностей в наших построениях, строго говоря, может появиться некоторая несогласованность, скажем, $F_{w_0,w_1}(M_{w_0}^k)$ не обязано в точности совпадать с $M_{w_1}^k$; просто оба эти множества являются некоторыми окрестностями (примерно одинаковых размеров) точки w_1 на соответствующей орисфере. Чтобы не возиться с этим, условимся в правой части (20.1) брать размеры окрестностей, превышающими ε (скажем, в несколько раз), а затем брать ε-окрестность w_0 в полученном множестве. Аналогичный образ действий подразумевается и в дальнейшем.

В случае, когда слоения $\mathfrak{S}^k$, $\mathfrak{S}^l$ — гладкие, очевидно, что M_w^{k+1} являются гладкими многообразиями и что, «склеивая» между собой те «кусочки» M_w^{k+1}, которые имеют общие точки, мы получим слоение. Если же $\mathfrak{S}^k$ и $\mathfrak{S}^l$ — негладкие слоения, это не очевидно и нуждается в доказательстве.

Введем возле w_0 гладкую систему координат, построенную следующим образом. Сперва построим гладкую $(m-1)$-мерную площадку $\Pi_{w_0}^{m-1}$ содержащую $M_{w_0}^k$ и $N_{w_0}^l$. На этой площадке можно ввести гладкие координаты (x, y) таким образом, чтобы $M_{w_0}^k$ играло роль оси X, а $N_{w_0}^l$ — оси Y. Наконец, если некоторая точка $w \notin \Pi_{w_0}^{m-1}$, но $T^{-t} w \in \Pi_{w_0}^{m-1}$, то точке w сопоставляются в качестве ее координат координаты точки $T^{-t} w$ на площадке $\Pi_{w_0}^{m-1}$ и число t.

Рассмотрим траекторию потока $\{T^t\}$, проходящую через точку (x, y), площадки $\Pi_{w_0}^{m-1}$. Эта траектория лежит на некотором устойчивом листе $M_{y'}^{k+1}$, где $y' \in N_{w_0}^l$, и близка к траектории, проходящей через точку y', поэтому она пересекает при некотором $t = t(x, y)$ устойчивую орисферу $M_{y'}^k$. Точка пересечения имеет координаты x, y, $t(x, y)$. С другой стороны, эта траектория лежит на некотором неустойчивом листе $N_{x'}^{l+1}$ и близка к траектории, проходящей через точку $x' \in M_{w_0}^k$, поэтому траектория $T^t(x, y)$ пересекает при некотором $t = \bar{t}(x, y)$ неустойчивую орисферу $N_{x'}^l$. Но, по условию леммы, неустойчивые орисферы, проходящие через точки оси X, которая ведь является устойчивой орисферой, должны пересекать $M_{y'}^{k+1}$ по некоторой устойчивой орисфере, каковой может быть только $M_{y'}^{k}$, ибо $N_{w_0}^{l}$ пересекает $M_{y'}^{k+1}$ в точке y'. Следовательно, $t(x, y) = \bar{t}(x, y)$.

Уравнение $t = t(x, y)$ определяет $(m-1)$-мерную поверхность $M_{w_0}^{m-1}$. Из построения видно, что эта поверхность состоит из орисфер слоений $\mathfrak{S}^k$ и $\mathfrak{S}^l$. Докажем, что эта поверхность гладкая. Прежде всего,

$$t(x, y) = o(|x| + |y|). \tag{20.2}$$

Действительно, точки y' и $(x, y, t(x, y))$ можно соединить в орисфере $M_{y'}^{k}$ геодезическим отрезком γ, который целиком содержится в некоторой $O(|x| + |y| + |t|)$-окрестности точки w_0 и длина которого $|\gamma|$ тоже есть $O(|x| + |y| + |t|)$. В любой точке (ξ, η, τ) направление устойчивой орисферы отличается от направления оси X на $\omega(|\xi| + |\eta| + |\tau|)$, где $\omega(r) \to 0$ при $r \to 0$. Поэтому из того, что орисфера $M_{y'}^{k}$ проходит и через точку (x, y, t), и через точку $(0, y', 0)$, следует, что

$$|t| = \omega(|x| + |y| + |t|) \cdot |\gamma| = o(|x| + |y| + |t|),$$

а значит, $|t| = o(|x| + |y|)$.

Из (20.2) явствует, что функция $t(x, y)$ дифференцируема при $x = 0$, $y = 0$ (в том смысле, что, как говорится в учебниках дифференциального исчисления, она имеет полный дифференциал). Возьмем, далее, какую-нибудь точку (x_1, y_1); пусть числа x_1, y_1, $t(x_1, y_1)$ являются координатами точки w_1. В точке w_1 проделаем те же построения, что и в точке w_0. Площадка $\Pi_{w_1}^{m-1}$ будет иметь уравнение вида $t = T(x, y)$, где T — гладкая функция, а координаты ξ, η на $\Pi_{w_1}^{m-1}$ являются гладкими функциями x, y. Третья координата τ в системе координат, связанной с w_1, вводится так же, как t в системе координат, связанной с w_0. Поэтому эти две системы координат связаны соотношениями

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \quad \tau = t - T(x, y). \tag{20.3}$$

Участок поверхности $M_{w_0}^{m-1}$, расположенный возле точки w_1, можно построить с помощью орисфер, проходящих через оси ξ и η площадки $\Pi_{w_1}^{m-1}$, совершенно аналогично тому, как это делалось выше. Следовательно, в координатах ξ, η, τ поверхность $M_{w_0}^{m-1}$ имеет вид $\tau = \tau(\xi, \eta)$, где τ дифференцируема в начале координат $\xi = 0$, $\eta = 0$. Но тогда соотношения (20.3) позволяют заключить, что $t(x, y)$ дифференцируема при $x = x_1$, $y = y_1$.

Итак, функция $t(x, y)$ — дифференцируемая. Но из доказанного выше видно, что в начале координат $x = 0$, $y = 0$ касательной плоскостью к поверхности $t = t(x, y)$ является плоскость $t = 0$, т. е. $X_{w_0}^{k} \oplus Y_{w_0}^{l}$. Аналогично, в точке (x_1, y_1) касательной плоскостью в координатах ξ, η, τ служит плоскость $\tau = 0$, т. е., в инвариантных терминах, $X_{w_1}^{k} \oplus Y_{w_1}^{l}$. Отсюда следует гладкость M_{w}^{m-1}, ибо поле $X_{w}^{k} \oplus Y_{w}^{l}$ непрерывно.

Чтобы доказать, что при склеивании «соседних» площадок M_{w}^{m-1} действительно получится слоение, нужно убедиться еще в непрерывной зависимости слоев от начальных данных. Отображение T^t переводит M_{w}^{m-1} в $M_{T^t w}^{m-1}$, точнее сказать — некоторую окрестность точки w на первой из этих поверхностей в некоторую окрестность $T^t w$ на второй. Это следует из построения этих поверхностей и из того, что T^t переводит орисферы в орисферы. Поэтому, если снова проделать те же построения, что и выше, но приняв на сей раз за $\Pi_{w_0}^{m-1}$ поверхность $M_{w_0}^{m-1}$ (в гладкости которой мы теперь убедились), то в новых координатах x, y, t слои $\mathfrak{S}^{m-1}$ (точнее, связные компоненты их пересечений с нашей координатной окрестностью) будут иметь уравнения $t = \mathrm{const}$.

Отсюда, между прочим, можно вывести, что слоение $\mathfrak{S}^{m-1}$ удовлетворяет даже сильному варианту условия единственности: кривая, всюду касающаяся слоев, целиком лежит в некотором слое. Действительно, уравнения слоев локально имеют вид $t(w) = \mathrm{const}$, где $t(w)$ — третья координата точки w в нашей новой системе координат — является гладкой функцией w. Если гладкая кривая $w(s)$ всюду касается слоев, то $\frac{d}{ds}\, t(w(s)) = 0$, откуда $t(w(s)) = \mathrm{const}$.

Замечание 20.1. В наших рассуждениях использовалось то, что $\mathfrak{S}^k$, $\mathfrak{S}^l$ — не просто какие-то слоения, но слоения, инвариантные относительно потока $\{T^t\}$; особенно существенно это использовалось в самом конце. Допустим, что никакого потока нет, а просто нам даны два слоения $\mathfrak{S}^k$ и $\mathfrak{S}^l$, $k + l = m - 1$, слои одного из которых нигде не касаются слоев другого, причем известно, что выполняется условие, сформулированное в первом абзаце доказательства леммы 20.1. Тогда нетрудно показать, что «локально» слои этих слоений лежат на гладких $(m-1)$-мерных поверхностях M_w^{m-1}; вероятно, можно доказать, что при склеивании этих поверхностей получается слоение. Однако я не представляю себе, как для этого слоения обстоят дела с единственностью (предполагается, конечно, что исходные слоения $\mathfrak{S}^k$, $\mathfrak{S}^l$ условию единственности удовлетворяют).

Доказательство теоремы 12. Пусть имеется компактный слой M^{m-1} слоения $\mathfrak{S}^{m-1} = \mathfrak{S}^k \wedge \mathfrak{S}^l$. Выше мы видели, что поток $\{T^t\}$ переводит слои $\mathfrak{S}^{m-1}$ снова в слои $\mathfrak{S}^{m-1}$ (причем компактные слои переходят, конечно, в компактные слои). Отсюда и из теоремы о возвращении следует, что существует такое t, что $T^t M^{m-1} = M^{m-1}$. Множество тех t, для которых $T^t M^{m-1} = M^{m-1}$, должно, очевидно, быть замкнутой (ввиду компактности M^{m-1}) подгруппой группы всех действительных чисел, и так как оно, очевидно, не является всей числовой прямой, то оно состоит из чисел, кратных некоторому τ. Множество $\bigcup_{0 \leqslant t \leqslant \tau} T^t M^{m-1}$ инвариантно, имеет положительную меру и даже, как легко видеть, замкнуто; поэтому W^m совпадает с этим множеством. Каждая точка $w \in W^m$ однозначно представима в виде $T^t w'$, где $0 \leqslant t < \tau$ и $w' \in M^{m-1}$. Мы приходим к конструкции, описанной в § 2, Б; роль W_0^m теперь играет M^{m-1}, а роль T_0 — T^τ.

Переходим к доказательству теоремы 6.

Лемма 20.2. *Пусть (У)-поток имеет собственную функцию f. Тогда вне некоторого множества меры 0 эта функция постоянна на орисферах* * *(как на устойчивых, так и на неустойчивых).*

Доказательство. Пусть λ — собственное значение, которому соответствует собственная функция f, т. е. при любом t почти всюду $(T^t w) = e^{i\lambda t} f(w)$. Тогда для последовательности $t_n = \frac{2\pi n}{\lambda}$ имеем:

$$f(T^{t_n} w) = f(w) \text{ почти всюду} \tag{20.4}$$

(теперь исключительное множество меры 0 можно взять одним и тем же для всех t_n). Применим лемму 19.6 к функции f. Как видно из этой леммы и из (20.4), существует такое множество M_ε^n, что

$$\mathrm{mes}\, M_\varepsilon^n < \varepsilon, \qquad \omega_f^k(r \mid \text{вне } M_\varepsilon^n) < 3\varepsilon.$$

Отсюда следует, что существует такое множество M, что

$$\mathrm{mes}\, M = 0, \qquad \omega_f^k(r \mid \text{вне } M) = 0 \tag{20.5}$$

* Т. е. на том, что останется от орисфер после выбрасывания исключительного множества меры нуль.

(то же рассуждение, что в леммах 19.4, 19.5); аналогично существует такое измеримое множество N, что

$$\operatorname{mes} N = 0, \quad \omega_f^l(r \mid \text{вне } N) = 0. \tag{20.6}$$

Доказательство теоремы 6. Допустим, что ($\mathcal{Y}$)-поток имеет собственную функцию f:

$$f(T^t w) = e^{i\lambda t} f(w), \tag{20.7}$$

и пусть $\lambda \neq 0$. Покажем, прежде всего, что тогда выполняется условие интегрируемости пары слоений $\mathfrak{S}^k$ и $\mathfrak{S}^l$, о котором говорится в лемме 20.1.

Функция f является измеримой функцией на почти каждом листе и почти каждой орисфере. Из (20.6) следует, что если w_0 и w_1 лежат вне некоторого исключительного множества меры 0, то при почти всех $w_2 \in M_{w_0}^{k+1}$

$$f(w_2) = f(F_{w_0, w_1}(w_2)), \tag{20.8}$$

ибо при почти всех $w_2 \in M_{w_0}^{k+1}$

$$w_2 \notin N \text{ и } F_{w_0, w_1}(w_2) \notin N.$$

С другой стороны, из (20.5) следует, что на почти всех устойчивых листах f постоянна на устойчивых орисферах; из (20.7) тогда видно, что на почти каждом листе f совпадает почти всюду с непрерывной функцией, каждое множество уровня которой является устойчивой орисферой. Теперь из (20.8) следует, что F_{w_0,w_1} действительно переводит орисферы в орисферы.

Покажем, что f почти всюду совпадает с некоторой непрерывной функцией. Покроем W^m конечным набором областей $\{U_i\}$, в каждой из которых можно ввести такие координаты, что слои слоения $\mathfrak{S}^{k+1} \mid U_i$ (т. е. связные компоненты пересечений слоев $\mathfrak{S}^{k+1}$ с U_i) будут параллельны координатным плоскостям, а мера переходит в инвариантную. На почти каждом листе M^{k+1} слоения $\mathfrak{S}^{k+1}|U_i$ функция f почти всюду совпадает с некоторой непрерывной функцией $f_{M^{k+1}}$. Из (20.8) следует, что на разных листах функции $f_{M^{k+1}}$ согласованы между собой таким образом, что их можно «объединить» в одну непрерывную в U_i функцию f_{U_i}, с которой f совпадает почти всюду. Наконец, в $U_i \cap U_j$ функции f_{U_i} и fU_{U_i} совпадают почти всюду с f и друг с другом, а так как f_{U_j} и f_{U_j} непрерывны, то они совпадают друг с другом во всех точках $U_i \cap U_j$; поэтому все эти f_{U_i} являются ограничениями на U_i некоторой непрерывной функции, с которой f совпадает почти всюду в W^m.

Теперь из леммы 20.2 следует, что эта непрерывная функция f постоянна на слоях слоения $\mathfrak{S}^{m-1} = \mathfrak{S}^k \wedge \mathfrak{S}^l$, а из (20.7) видно, что вблизи каждого слоя этого слоения f принимает уже другие значения. Нетрудно вывести отсюда, что слои должны быть компактны. Тем самым теорема 6 сводится к уже доказанной теореме 12.

§ 21. Доказательство теорем 13 и 15

В этом параграфе все время предполагается, что рассматриваемый ($\mathcal{Y}$)-поток $\{T^t\}$ имеет непрерывный спектр.

Лемма 21.1. *Пусть даны измеримые множества B, $U_1, \ldots, U_N$ положительной меры. Тогда существуют такая последовательность $t_n \to \infty$ и такое $\delta > 0$, что при всех t_n*

$$\operatorname{mes} T^{-t_n} B \cap U_i > \delta.$$

Доказательство. На самом деле справедливо более сильное утверждение: существует измеримое множество $J \subset [0, \infty)$ плотности 0 (это значит, что $\frac{1}{t}$ mes$(J \cap [0, t]) \to 0$ при $t \to \infty$) такое, что

$$\lim_{t\to\infty,\ t\notin J} \operatorname{mes} T^{-t}B \cap U_i = \frac{\operatorname{mes} B \operatorname{mes} U_i}{\operatorname{mes} W^m}, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{21.1}$$

Действительно, непрерывность спектра эквивалентна тому [81], что для каждых двух множеств положительной меры,— скажем, B и U_i,— существует такое множество $J_i \subset [0, \infty)$ плотности 0, что

$$\lim_{t\to\infty,\ t\notin J_i} \operatorname{mes} T^{-t} B \cap U_i = \frac{\operatorname{mes} B \operatorname{mes} U_i}{\operatorname{mes} W^m}.$$

Возьмем $J = J_1 \cup \ldots \cup J_N$; ясно, что это множество имеет плотность 0 и что для него справедливо (21.1).

Лемма 21.2. *Пусть A — борелевское множество, целиком состоящее из слоев слоения $\mathfrak{S}^l$. Тогда функция*

$$m_\tau(w) = \frac{1}{2\tau} \operatorname{mes} \{t : |t| \leqslant \tau,\ T^t w \in A\} \tag{21.2}$$

измерима, постоянна на слоях $\mathfrak{S}^l$ и $m_\tau(w) \to 1$ на A по мере при $\tau \to 0$.

Доказательство*. Измеримость следует из теоремы Фубини, ибо множество, мера которого стоит в (21.2), является пересечением с $w \times [-\tau, \tau]$ прообраза борелевского множества A при гладком отображении

$$W^m \times [-\tau, \tau] \to W^m \qquad (w, t) \to T^t w. \tag{21.3}$$

Постоянство $m_\tau(w)$ на слоях $\mathfrak{S}^l$ следует из того, что A состоит из слоев $\mathfrak{S}^l$, а T^t переводит эти слои друг в друга. Далее, ясно, что

$$m_\tau(w) = \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} \chi_A(T^t w)\, dt,$$

где χ_A — характеристическая функция множества A. Имеем

$$\int_A m_\tau(w)\, dw = \frac{1}{2\tau} \int_{W^m} \left(\int_{-\tau}^{\tau} \chi_A(T^t w) \chi_A(w)\, dt \right) dw =$$

$$= \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} \left(\int_{W^m} \chi_A(w) \chi_A(T^t w)\, dw \right) dt. \tag{21.4}$$

Покажем, что при $t \to 0$ внутренний интеграл стремится к mes A. Действительно, для любой функции $f \in L^2(W^m)$ при $t \to 0$ имеем $\|U^t f - f\|_{L^2} \to 0$; приняв χ_A за f, получим, что

$$\int_{W^m} \chi_A(w) \chi_A(T^t w)\, dw = (\chi_A, U^t \chi_A) \to (\chi_A, \chi_A) = \operatorname{mes} A.$$

* Доказательство леммы можно сократить, а ее утверждение — усилить, заменив сходимость по мере сходимостью почти всюду, если воспользоваться следующей теоремой Винера [84]. Пусть $\{T^t\}$ — измеримый поток в пространстве с мерой W, а функция $f \in L^1(W)$; тогда при почти всех w

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(T^t w)\, dt = f(w).$$

(Ясно, что $m_\tau(w) = \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} \chi_A(T^t w)\, dt$.)

Теперь из (21.4) следует

$$\int\limits_A m_\tau(w)\,dw \to \frac{1}{2\tau}\int\limits_{-\tau}^{\tau} \operatorname{mes} A\,d\tau = \operatorname{mes} A.$$

А так как, очевидно, $0 \leqslant m_\tau(w) \leqslant 1$, то отсюда и вытекает сходимость по мере.

Лемма 21.3. *Если существует измеримое множество A промежуточной меры ($0 < \operatorname{mes} A < \operatorname{mes} W^m$), целиком состоящее из слоев слоения $\mathfrak{S}^l$, то существуют такое измеримое множество B промежуточной меры, целиком состоящее из слоев $\mathfrak{S}^l$, и такое число $\tau > 0$, что множество $C = \bigcup\limits_{|t|\leqslant\tau} T^t B$ тоже является измеримым множеством промежуточной меры, целиком состоящим из слоев $\mathfrak{S}^l$.*

Доказательство. Прежде всего убедимся, что в любом измеримом множестве, целиком состоящем из слоев $\mathfrak{S}^l$, имеется борелевское подмножество той же меры, тоже целиком состоящее из слоев $\mathfrak{S}^l$. Это вытекает из следующих двух фактов. Во-первых, если на площадке Π^{k+1}, трансверсальной к слоению $\mathfrak{S}^l$, имеется множество типа F_σ, то объединение всех слоев $\mathfrak{S}^l$, пересекающихся с этим множеством, тоже имеет тип F_σ. (Следует из непрерывной зависимости слоев от начальных данных.) Во-вторых, если на указанной площадке имеется множество $(k+1)$-мерной меры 0, то объединение всех пересекающихся с ним слоев $\mathfrak{S}^l$ тоже имеет меру 0. (Следует из абсолютной непрерывности слоения.)

Пусть $D = W^m \setminus A$. Определим $m_\tau(w)$ согласно (21.2) и $n_\tau(w)$ как

$$n_\tau(w) = \frac{1}{2\tau}\operatorname{mes}\{t : |t| \leqslant \tau,\ T^t w \in D\}. \tag{21.5}$$

Из леммы 21.2 следует, что при достаточно малом τ множества

$$B = \left\{w : w \in A,\ m_\tau(w) > \frac{9}{10}\right\},$$
$$E = \left\{w : w \in D,\ n_\tau(w) > \frac{9}{10}\right\}$$

имеют положительную меру и целиком состоят из слоев $\mathfrak{S}^l$. (Функции $m_\tau(w)$, $n_\tau(w)$ могут не быть определены на множестве точек w меры 0 из-за неизмеримости множеств, фигурирующих в (21.2), (21.5); такие точки мы не включаем в B, E. Заметим, что для всех точек одного и того же слоя слоения $\mathfrak{S}^l$ множества (21.2), равно как и множества (21.5), одни и те же.)

Покажем, что $E \cap C = \phi$. В противном случае существовали бы такая точка w и такое число s, что

$$|s| \leqslant \tau,\ w \in B,\ w' = T^s w \in E.$$

Но это невозможно. Действительно, пусть, скажем, $s > 0$. Подсчитаем меру точек множеств A и D на отрезке траектории $\{T^t w,\ s-\tau \leqslant t \leqslant \tau\}$. Этот отрезок содержится в отрезке $\{T^t w,\ -\tau \leqslant t \leqslant \tau\}$, в котором, согласно определению множества B, «доля» множества D не превышает 10%; стало быть

$$\operatorname{mes}\{t : s-\tau \leqslant t \leqslant \tau,\ T^t w \in D\} \leqslant$$
$$\leqslant \operatorname{mes}\{t : -\tau \leqslant t \leqslant \tau,\ T^t w \in D\} \leqslant \frac{1}{10}2\tau = \frac{1}{5}\tau.$$

С другой стороны, этот отрезок есть $\{T^t w',\ -\tau \leqslant t \leqslant \tau - s\}$ и в качестве такового содержится в отрезке $\{T^t w',\ -\tau \leqslant t \leqslant \tau\}$; стало быть, согласно определению множества E,

$$\operatorname{mes}\{t : -\tau \leqslant t \leqslant \tau - s,\ T^t w' \in A\} \leqslant$$
$$\leqslant \operatorname{mes}\{t : -\tau \leqslant t \leqslant \tau,\ T^t w' \in A\} \leqslant \frac{1}{10}2\tau = \frac{1}{5}\tau.$$

Так как $A \cup D = W^m$, то каждая точка отрезка $\{T^t w,\ s-\tau \leqslant t \leqslant \tau\}$ принадлежит либо A, либо D; значит, длина этого отрезка $\leqslant \frac{1}{5}\tau + \frac{1}{5}\tau = \frac{2}{5}\tau < \tau$. Но, с другой стороны, длина этого отрезка равна $\tau - (s-\tau) = 2\tau - s > \tau$. Полученное противоречие означает, что $C \cap E = \phi$.

Выбросив, быть может, из B некоторое множество меры нуль, мы можем считать, что B — борелевское множество. Тогда множество C измеримо как образ борелевского множества $B \times [-\tau, \tau]$ при гладком отображении (21.2). Ясно, что оно состоит из слоев $\mathfrak{S}^l$. Наконец, оно имеет промежуточную меру, ибо как оно, так и его дополнение содержат множества положительной меры (B и E соответственно).

Доказательство теоремы 13. Мы хотим привести к противоречию предположение о существовании множеств B, C и числа τ из леммы 21.3. Ясно, что при этом предположении существует такое $r > 0$, что если $w \in B$, то r-окрестность точки w на проходящем через эту точку листе слоения $\mathfrak{S}^{l+1}$ целиком содержится в C. Это r можно взять зависящим только от τ, но не от B; поэтому для множеств $T^t B$, $T^t C$ (имеющих, очевидно, те же свойства, что и B, C) годится то же самое число r (ибо и τ для них то же самое).

Рассмотрим конечный атлас $\{(U_i, \varphi_i),\ i = 1, \ldots, N\}$ многообразия W^m, состоящий из карт, построенных аналогично тому, как это описано в начале § 19. При этом координатные окрестности $U_i = \varphi_i^{-1}(X^k \times Y^{l+1})$ будем считать столь малыми, что r-окрестность любой точки $w \in U_i$ на проходящем через эту точку листе слоения $\mathfrak{S}^{l+1}$ целиком содержит связную компоненту N_w^{l+1} пересечения этого листа с U_i. Кстати, если w имеет координаты $\varphi_i(w) = (x, y)$, то $\varphi_i(N_w^{l+1}) = x \times Y$.

Применим лемму 21.1 к множествам $B, U_i, \ldots, U_N$. Эта лемма и абсолютная непрерывность φ_i гарантируют существование такой последовательности $t_n \to \infty$ и такого числа $\Delta > 0$, что

$$\operatorname{mes} \varphi_i (T^{-t_n} B \cap U_i) > \Delta, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Отсюда и из свойств множества C — точнее, теперь уже $T^{-t_n} C$,— следует, что при некотором $\delta > 0$

$$\operatorname{mes}\{x : x \times Y \subset \varphi_i (T^{-t_n} C \cap U_i)\} > \delta, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{21.6}$$

Теперь воспользуемся леммой 19.7, заменив в ней A на C и считая число r из этой леммы превосходящим размеры слоев слоений $\mathfrak{S}^k | U_i$. При достаточно большом t_n мера «исключительного» множества $M_\varepsilon^{t_n}$ из этой леммы будет сколь угодно мала. Значит и меру множества $\varphi_i (M_\varepsilon^{t_n} \cap U_i)$ можно считать сколь угодно малой,— значительно меньшей, чем δ из (21.6). Поэтому для каждого из этих множеств при достаточно большом t_n можно указать такое x_n, что

$$x_n \times Y \subset \varphi_i (T^{-t_n} C \cap U_i)$$

и мера $\operatorname{mes} [\varphi_i (M_\varepsilon^{t_n} \cap U_i) \cap (x_n \times Y)]$ мала. Если теперь точка (x, y) лежит вне множества

$$\varphi_i (M_\varepsilon^{t_n} \cap U_i) \cup \{X \times [\varphi_i (M_\varepsilon^{t_n} \cap U_i) \cap (x_n \times Y)]\},$$

то она принадлежит или не принадлежит $\varphi_i (T^{-t_n} C \cap U_i)$ одновременно с точкой (x_n, y), а эта последняя принадлежит $\varphi_i (T^{-t_n} C \cap U_i)$. Поэтому

$$\operatorname{mes} [(X \times Y) \setminus \varphi_i (T^{-t_n} C \cap U_i)] \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

а отсюда и $\operatorname{mes}(U_i \setminus T^{-t_n} C) \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно,

$$\operatorname{mes}(W^m \setminus C) = \operatorname{mes}(W^m \setminus T^{-t_n} C) \leqslant \sum_i \operatorname{mes}(U_i \setminus T^{-t_n} C) \to 0.$$

Но это противоречит тому, что C имеет промежуточную меру.

Доказательство теоремы 15. Так как при изменении знака времени слоения $\mathfrak{S}^k$ и $\mathfrak{S}^l$ меняются местами, то достаточно доказать, что каждый слой слоения $\mathfrak{S}^l$ всюду плотен. Возьмем какой-нибудь слой N^l этого слоения, и пусть w_0 — произвольная точка многообразия W^m, а $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Покажем, что на N^l есть точки, находящиеся в ε-окрестности $U_\varepsilon(w_0)$ точки w_0.

Будем, как и раньше, обозначать через $B^l_\varepsilon(w)$ шар радиуса ε в слое слоения $\mathfrak{S}^l$ с центром w, а через $B^{k+1}_\varepsilon(w)$ — аналогичный шар в слое $\mathfrak{S}^{k+1}$ Пусть

$$V_\varepsilon(w) = \bigcup_{w' \in B^l_\varepsilon(w)} B^{k+1}_\varepsilon(W).$$

Из непрерывной зависимости слоев от начальных данных следует, что любому $\varepsilon > 0$ можно сопоставить такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что если $w' \in U_{\delta(\varepsilon)}(w)$, то любой слой слоения $\mathfrak{S}^l$, проходящий через w', пересекает все $B^{k+1}_\varepsilon(w'')$ при любых $w'' \in B^l_\varepsilon(w)$. Выберем какую-нибудь систему шаров

$$U_{\delta\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)}(w_i), \ldots, U_{\delta\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)}(w_n), \tag{21.7}$$

полностью покрывающую W^m. Рассуждая, как и при доказательстве леммы 21.1, найдем такое число $t > 0$, что все пересечения

$$T^t V_{\frac{\varepsilon}{3}}(w_i) \cap U_{\frac{\varepsilon}{3}}(w_0), \quad i = 1, \ldots, n$$

непусты. Пусть

$$\overline{w}_i \in T^t V_{\frac{\varepsilon}{3}}(w_i) \cap U_{\frac{\varepsilon}{3}}(w_0), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{21.8}$$

Точка $T^{-t}\overline{w}_i \in V_{\frac{\varepsilon}{3}}(w_i)$ и потому

$$T^{-t}\overline{w}_i \in B^{k+1}_{\frac{\varepsilon}{3}}(w_i'), \text{ где } w_i' \in B^l_{\frac{\varepsilon}{3}}(w_i).$$

Рассмотрим теперь слой $T^{-t} N^l$ слоения $\mathfrak{S}^l$. Так как шары (21.7) покрывают все W^m, то, во всяком случае, на $T^{-t} N^l$ имеется точка w', лежащая в каком-нибудь, скажем в i-м, из этих шаров. Тогда $T^{-t} N^l$ пересекает $B^{k+1}_{\frac{\varepsilon}{3}}(w_i')$, скажем,

$$\overline{w} \in B^{k+1}_{\frac{\varepsilon}{3}}(w_i') \cap T^{-t} N^l.$$

Точка $T^{-t}\overline{w}_i$ тоже принадлежит $B^{k+1}_{\frac{\varepsilon}{3}}(w_i')$, поэтому точки $\overline{w}$ и $T^{-t}\overline{w}_i$ лежат в одном и том же слое слоения $\mathfrak{S}^{k+1}$ и расстояние между ними в метрике слоя не превосходит $\frac{2}{3}\varepsilon$. При применении преобразования T^t с $t > 0$ расстояния между образами любых двух точек в слое слоения $\mathfrak{S}^{k+1}$ не увеличивается (см., например, доказательство леммы 12.11), тем более и в метрике W^m

$$\rho(T^t\overline{w}, \overline{w}_i) \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Отсюда и из (21.8) следует, что $T^t\overline{w} \in U_\varepsilon(w_0)$. Но $\overline{w} \in T^{-t} N^l$ и поэтому $T^t\overline{w} \in N^l$, т. е. $N^l \cap U_\varepsilon(w_0) \neq \phi$, что и требовалось доказать.

ГЛАВА VI

§ 22. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны

Эта глава посвящена примерам ($У$)-систем, приведенным или упомянутым в первой главе. В § 22, 23 рассматриваются геодезические потоки, а в § 24, 25 — каскады, получающиеся путем возмущения ($У$)-автоморфизмов тора.

В настоящем параграфе будет доказано, что геодезический поток на замкнутом римановом многообразии отрицательной кривизны удовлетворяет условию ($У$). Предварительно я напомню некоторые подробности, связанные с определением геодезического потока, предполагая, однако, что читатель в общих чертах знаком с элементами римановой геометрии; в частности, я не буду воспроизводить вывод уравнения геодезических линий

$$\ddot{v}^i + \Gamma^i_{jk}\dot{v}^j\dot{v}^k = 0 \tag{22.1}$$

(Γ^i_{jk} — символы Кристоффеля; по повторяющимся сверху и снизу индексам производится суммирование), который можно найти в любом учебнике. Затем я несколько более подробно напомню, как выглядят уравнения в вариациях для геодезического потока, в частности, как они связаны с кривизной.

Через V^n все время обозначается n-мерное замкнутое риманово многообразие, геодезические линии на котором мы собираемся изучать; о кривизне пока что никаких предположений не делается. Обозначим через W^{2n} пространство всех его (контравариантных) касательных векторов (в § 6 аналогичный объект обозначался через $\mathfrak{R}$), а через W^{2n-1} — пространство его касательных векторов единичной длины. Каждая точка $w \in W^{2n}$ представляет собой пару (v, ν), состоящую из некоторой точки $v \in V^n$ и выходящего из точки v (контравариантного) касательного вектора ν; точка $w \in W^{2n-1}$, если этот вектор ν имеет единичную длину. Имеем вложение $W^{2n-1} \subset W^{2n}$ и расслоения

$$W^{2n} \to V^n,\ W^{2n-1} \to V^n,$$

слоями которых служат, соответственно, касательное пространство R^n_v и единичная сфера S^{n-1}_v касательного пространства.

Проведем через точку v_0 ориентированную геодезическую линию l, имеющую в точке v_0 направление $e_0 \in S^{n-1}_{v_0}$. Пусть точка v_t движется по l в положительном направлении с единичной скоростью. В момент времени t вектор скорости $e_t \in S^{n-1}_{v_t}$. Определим преобразование $T^t : W^{2n-1} \to W^{2n-1}$, полагая

$$T^t(v_0, e_0) = (v_t, e_t).$$

Преобразования $\{T^t\}$ и образуют геодезический поток в W^{2n-1}, который мы будем изучать. Но сперва мы рассмотрим геодезический поток не в W^{2n-1}, а в W^{2n}, где он определяется следующим образом. Пусть точка $w_0 \in W^{2n}$ представляет собой пару (v_0, ν_0). Если $v_0 \neq 0$, то обозначим $\lambda = |\nu_0|$, $e_0 = \frac{1}{\lambda}\nu_0$, и пусть $T^t(v_0, e_0) = (v_t, e_t)$; тогда, по определению,

$$T^t(v_0, \nu_0) = (v(t), \ \nu(t)) = (v_{\lambda t}, \ \lambda e_{\lambda t}).$$

Если же $w_0 = (v_0, 0)$, то полагаем $T^t w_0 = w_0$. Ясно, что и в W^{2n-1}, и в W^{2n} траектория геодезического потока $(v(t), \nu(t))$ обладает тем свойством, что

$$\nu(t) = \frac{dv(t)}{dt} \text{ и } |\nu(t)| = \text{const}. \tag{22.2}$$

Как уже упоминалось, в «естественных» локальных координатах уравнения геодезических линий имеют вид (22.1). Говоря подробнее, если в естественной карте многообразия W^{2n}, отвечающей некоторой карте (U, φ) многообразия V^n, некоторая траектория потока $\{T^t\}$,— точнее, некоторый отрезок траектории,— имеет вид

$$T^t w_0 = (v(t), \ \nu(t)) = (v^1(t), \ldots, v^n(t), \ \nu^1(t), \ldots, \nu^n(t)),$$

то функции $v^i(t)$ удовлетворяют уравнению (22.1). Функции же $\nu^i(t)$, согласно (22.2), являются производными $v^i(t)$; иными словами, $v^i(t)$ и $\nu^i(t)$ удовлетворяют автономной системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{v}^i &= \nu^i, \\ \dot{\nu}^i &= -\Gamma^i_{jk}(v)\,\nu^j\nu^k, \end{aligned} \tag{22.3}$$

в правой части которой стоят координаты векторного поля, описывающего геодезический поток в W^{2n} (или в W^{2n-1}). Поскольку Γ^i_{jk} определяются через первые производные метрического тензора g_{ij}, то из (22.3) видно, что класс гладкости геодезического потока на единицу ниже класса гладкости римановой метрики.

Исходя из (22.3), можно было бы написать уравнения в вариациях:

$$\begin{aligned} (dv^i)^{\cdot} &= d\nu^i, \\ (d\nu^i)^{\cdot} &= -d\,(\Gamma^i_{jk}(v)\,\nu^j\nu^k) = -\frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial v^h}\,dv^h\nu^j\nu^k - 2\Gamma^i_{jk}(v)\,\nu^j d\nu^k. \end{aligned} \tag{22.4}$$

Однако в такой форме они нам неудобны. Удобная форма записи уравнений в вариациях связана с ковариантным дифференцированием и параллельным перенесением.

В § 6, 7 уже обсуждали вопросы, связанные с касательными векторами к пространству $W^{2n} = \mathfrak{R}$, см. в особенности текст, связанный с формулами (6.19), (6.20) и рассуждения о роли связности в § 7. Касательное пространство $R^{2n}_{(v,\nu)}$ к многообразию W^{2n} в точке (v, ν) состоит из пар $(dv, d\nu)$. В § 6 мы видели, что можно определить вложение $R^n_v \subset R^{2n}_{(v,\nu)}$, переводящее dv в $(0, dv)$; образ пространства R^n_v при этом вложении обозначим через $\hat{R}^n_v$. Пользуясь аффинной связностью,— причем теперь мы, естественно, будем пользоваться аффинной связностью, соответствующей рассматриваемой римановой метрике,— можно определить другое вложение R^n_v в $R^{2n}_{(v,\nu)}$, переводящее dv в $(dv, -\Gamma(v, \nu, dv))$. Обозначая образ R^n_v при этом вложении через $\tilde{R}^n_{(v,\nu)}$, разложим $R^{2n}_{(v,\nu)}$ в прямую сумму $\tilde{R}^n_{(v,\nu)}$ и $\hat{R}^n_v$, а затем, используя имеющиеся изоморфизмы $\hat{R}^n_{(v,\nu)}$ и R^n_v, $\hat{R}^n_v$ и R^n_v, придем к представлению $R^{2n}_{(v,\nu)}$ в виде прямой суммы двух пространств R^n_v:

$$R^{2n}_{(v,\nu)} = \widetilde{R}^n_{(v,\nu)} \oplus \hat{R}^n_v \approx R^n_v \oplus R^n_v. \tag{22.5}$$

Вектор $(dv, d\nu) \in R^{2n}_{(v,\nu)}$ можно представить в виде суммы вектора из $\widetilde{R}^n_{(v,\nu)}$ и вектора из $\hat{R}^n_v$; последние два вектора представляются некоторыми векторами δv, $\delta\nu \in R^n_v$, так что при разложении (22.5) вектору dw ставится в соответствие пара $\{\delta v, \delta\nu\}$. Здесь использованы фигурные скобки во избежание смешения с представлением dw в виде пары $(dv, d\nu)$, с которого мы начали. Если

$$dw = (dv, d\nu) = \{\delta v, \delta\nu\},$$

то это значит, что

$$(dv, d\nu) = (\delta v - \Gamma(v, \nu, \delta v)) + (0, \delta\nu),$$

т. е.

$$\delta v = dv, \ \delta\nu = d\nu + \Gamma(v, \nu, dv). \tag{22.6}$$

Можно рассмотреть векторное расслоение $W^{3n} \to W^{2n}$, индуцированное отображением $W^{2n} \to V^n$ и расслоением $W^{2n} \to V^n$:

$$\begin{array}{ccc} W^{3n} & \to & W^{2n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ W^{2n} & \to & V^n \end{array} \tag{22.7}$$

Пространство W^{3n} состоит из троек (v, ν, ξ), где $\nu \in R^n_v$ и $\xi \in R^n_v$, а проекция $W^{3n} \to W^{2n}$ переводит (v, ν, ξ) в (v, ν). Тогда (22.5) означает, что касательное векторное расслоение $\mathfrak{R}(W^{2n})$ многообразия W^{2n} представляется в виде суммы Уитни векторного расслоения $W^{3n} \to W^{2n}$ с самим собой:

$$\Phi : \mathfrak{R}(W^{2n}) \approx W^{3n} \oplus W^{3n}. \tag{22.8}$$

Здесь $\Phi((v, \nu), (dv, d\nu)) = ((v, \nu, \delta v), (v, \nu, \delta\nu))$, где δv, $\delta\nu$ связаны с dv, $d\nu$ согласно (22.6).

Из (22.7) видно, что метрику в расслоении $W^{2n} \to V^n$ можно перенести и в расслоение $W^{3n} \to W^{2n}$. А тогда естественно ввести риманову метрику в многообразии W^{2n}, т. е. в расслоении $\mathfrak{R}(W^{2n})$, полагая для $dw = \{\delta v, \delta\nu\}$

$$|dw|^2 = |\delta v|^2 + |\delta\nu|^2. \tag{22.9}$$

В этой метрике пространства $\hat{R}^n_v$ и $\widetilde{R}^n_{(v,\nu)}$ ортогональны.

Если имеется гладкая кривая $v(t)$ и вдоль нее задана гладкая векторная функция $\nu(t) \in R^n_{v(t)}$, то скорость $(\dot{v}(t), \dot{\nu}(t))$ движения точки $(v(t), \nu(t))$ в W^{2n} представляется, согласно (22.5) и (22.6), парой векторов $\{\dot{v}, \dot{\nu} + \Gamma(v, \nu, \dot{v})\}$. Второй из этих векторов называется ковариантной производной вектора ν (вдоль кривой $v(t)$), и обозначается $\frac{D\nu}{Dt}$. Ради единообразия скорость $\dot{v}$ движения точки v в V^n тоже можно обозначить через $\frac{Dv}{Dt}$, так что

$$(\dot{v}, \dot{\nu}) = \left\{\frac{Dv}{Dt}, \frac{D\nu}{Dt}\right\} = \{\dot{v}, \dot{\nu} + \Gamma(v, \nu, \dot{v})\}.$$

Тогда уравнение геодезических линий (22.1) можно записать в виде $\frac{D^2v}{Dt^2} = 0$, т. е. вектор фазовой скорости потока $\{T^t\}$ в новых обозначениях имеет вид $\{\nu, 0\}$.

Перепишем уравнения в вариациях (22.4) в новых обозначениях, учитывая, что δv и $\delta\nu$ связаны с dv и $d\nu$ согласно (22.6), а v и ν должны изменяться согласно (22.3). Имеем

$$\frac{D}{Dt}\delta v = (\delta v)^{\cdot} + \Gamma(v, \delta v, \dot v) = (dv)^{\cdot} + \Gamma(v, av, \nu) = \\ = d\nu + \Gamma(v, \nu, dv) = \delta v,$$

т. е.

$$\frac{D}{Dt}\delta v = \delta\nu. \tag{22.10}$$

Далее,

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt}\delta\nu &= (\delta\nu)^{\cdot} + \Gamma(v, \delta\nu, \dot v) = \\ &= (d\nu + \Gamma(v, \nu, dv))^{\cdot} + \Gamma(v, \delta\nu, \nu) = \\ &= -d\Gamma(v, \nu, \nu) + \dot\Gamma(v, \nu, dv) + \Gamma(v, \delta\nu, \nu) = \\ &= -\Gamma_v(v, \nu, \nu)\, dv - 2\Gamma(v, \nu, d\nu) + \Gamma_v(v, \nu, dv)\, \dot v + \\ &+ \Gamma(v, \dot\nu, dv) + \Gamma(v, \nu, (dv)^{\cdot}) + \Gamma(v, \delta\nu, \nu) = \\ &= -\Gamma_v(v, \nu, \nu)\, dv - 2\Gamma(v, \nu, d\nu) + \Gamma_v(v, \nu, dv)\nu - \\ &- \Gamma(v, \Gamma(v, \nu, \nu), dv) + \Gamma(v, \nu, d\nu) + \Gamma(v, d\nu, \nu) + \\ &+ \Gamma(v, \Gamma(v, v, dv), \nu) = \\ &= -\Gamma_v(v, \nu, \nu)\, dv + \Gamma_v(v, \nu, dv)\, \nu - \\ &\qquad - \Gamma(v, \Gamma(v, \nu, \nu), dv) + \Gamma(v, \Gamma(v, \nu, d v), \nu),\end{aligned}$$

т. е.

$$\frac{D}{Dt}\delta\nu^j = -\frac{\partial\Gamma^j_{ir}}{\partial v^s}\nu^i\nu^r dv^s + \frac{\partial\Gamma^j_{is}}{\partial v^r}\nu^i dv^s \nu^r - \Gamma^j_{ks}\Gamma^k_{ir}\nu^i\nu^r dv^s + \\ + \Gamma^j_{kr}\Gamma^k_{is}\nu^i dv^s\nu^r. \tag{22.11}$$

Вспомним теперь выражение для тензора кривизны (см. [3, гл. VII, п. 159]):

$$R^j_{irs} = \frac{\partial\Gamma^j_{is}}{\partial v^r} - \frac{\partial\Gamma^j_{ir}}{\partial v^s} + \Gamma^j_{kr}\Gamma^k_{is} - \Gamma^j_{ks}\Gamma^k_{ir}.$$

Сопоставляя это с (22.11), заключаем, что

$$\frac{D}{Dt}\delta\nu^j = R^j_{irs}\nu^i\nu^r dv^s,$$

или

$$\frac{D^2}{Dt^2}\delta v^i + R^i_{jkl}\dot v^j\delta v^k\dot v^l = 0. \tag{22.12}$$

Объединяя уравнения (22.3), (22.10) и (22.12), получаем систему, описывающую поток $\{\widetilde T^t\}$ в $\mathfrak{R}(W^{2n})$,— или, если угодно, поток $\{\Phi\,\widetilde T^t\Phi^{-1}\}$ в $W^{3n}\oplus W^{3n}$ (см. (22.8)):

$$\begin{gathered}\dot v = \nu;\ \dot\nu = -\Gamma(v, \nu, \nu),\ \text{т. е. } \frac{D\nu}{Dt} = 0; \\ \frac{D}{Dt}\delta v = \delta\nu;\ \frac{D}{Dt}\delta\nu^i + R^i_{jkl}\nu^j\delta v^k\nu^l = 0.\end{gathered} \tag{22.13}$$

Перейдем теперь к W^{2n-1}. Это пространство является подмногообразием W^{2n}, которое в «естественных» локальных координатах задается уравнением

$$g_{ij}(v)\,\nu^i\nu^j = 1. \tag{22.14}$$

Посмотрим, из каких векторов состоит касательное расслоение $\mathfrak{R}(W^{2n-1})$ многообразия W^{2n-1}. Вектор $(dv, d\nu)$ касается W^{2n-1}, если

$$\frac{\partial g_{ij}(v)}{\partial v^k}\nu^i\nu^j dv^k + 2g_{ij}(v)\,\nu^i d\nu^j = 0. \tag{22.15}$$

Тот же вектор имеет представление $\{\delta v, \delta \nu\}$, и в терминах δv, $\delta \nu$ условие что этот вектор касается W^{2n-1}, формулируется более изящно:

$$g_{ij}(v)\,\nu^i\delta\nu^j = 0. \tag{22.16}$$

(22.16) сразу же получается из (22.14), если воспользоваться ковариантным дифференцированием. Говоря подробнее, кривая $(v(t), \nu(t))$, которая в своей начальной точке (v, ν) лежит на многообразии W^{2n-1} и имеет направление $\{\delta v, \delta \nu\}$, будет при $t = 0$ касаться многообразия W^{2n-1} (а это и означает, что вектор $\{\delta v, \delta \nu\}$ касается W^{2n-1}) в том и только в том случае, если

$$\frac{d}{dt} g_{ij}(v(t))\,\nu^i(t)\,\nu^j(t) = 0 \text{ при } t = 0;$$

отсюда путем обычного дифференцирования получается (22.15), а с помощью ковариантного дифференцирования — (22.16), ибо ковариантные производные метрического тензора равны нулю. Разумеется, (22.16) можно получить и непосредственно из (22.15), подставив в (22.15) выражение $d\nu$ через $\delta\nu$:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial v^k}\nu^i\nu^j\delta v^k + 2g_{ij}\nu^i\delta\nu^j - 2g_{il}\nu^i\Gamma^l_{kj}\nu^j\,dv^k = \\ &= \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial v^k} - 2g_{il}\Gamma^l_{kj}\right)\nu^i\nu^j\,dv^k + 2g_{ij}\nu^i\delta\nu^j = \\ &= \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial v^k} - 2\Gamma_{i,kj}\right)\nu^i\nu^j\,dv^k + 2g_{ij}\nu^i\delta\nu^j = \\ &= \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial v^k} - \Gamma_{i,kj} - \Gamma_{j,ki}\right)\nu^i\nu^j\,dv^k + 2g_{ij}\nu^i\delta\nu^j.\end{aligned}$$

Здесь мы заменили в одном члене $\Gamma_{i,kj}$ на $\Gamma_{j,ki}$, пользуясь тем, что $\Gamma_{i,kj}$ множится на симметричное относительно i, j выражение $\nu^i\nu^j$. Но хорошо известно, что

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial v^k} - \Gamma_{i,kj} - \Gamma_{j,ki} = 0$$

(см., например, [3, гл. II, п. 33]), и мы снова приходим к (22.16).

Из (22.16) видно, что при $|\nu| = 1$ пространство $\widetilde{R}^n_{(v,\nu)}$ содержится в касательном пространстве $R^{2n-1}_{(v,\nu)}$ многообразия W^{2n-1}, ибо $\widetilde{R}^n_{(v,\nu)}$ состоит из векторов вида $\{\delta v, 0\}$. С другой стороны, слоем расслоения $W^{2n-1} \to V^n$ является единичная сфера S^{n-1}_v пространства R^n_v, поэтому касательное пространство к этой сфере в точке ν, которое мы обозначим через $R^{n-1}_{(v,\nu)}$, вкладывается в $R^{2n-1}_{(v,\nu)}$. Ясно, что образ этого пространства, который мы обозначим через $\hat{R}^{n-1}_{(v,\nu)}$, является подпространством $R^{2n-1}_{(v,\nu)}$ и состоит из векторов вида $\{0, \delta\nu\}$, где $\delta\nu$ касается сферы S^{n-1}_v в точке ν:

$$g_{ij}(v)\,\nu^i\delta\nu^j = 0.$$

Таким путем мы приходим к разложению $R^{2n-1}_{(v,\nu)}$ в прямую сумму, аналогичную (22.5):

$$R^{2n-1}_{(v,\nu)} = \widetilde{R}^n_{(v,\nu)} \oplus \hat{R}^{n-1}_{(v,\nu)} \approx R^n_v \oplus R^n_v. \tag{22.17}$$

Ясно, что $\widetilde{T}^t\mathfrak{R}(W^{2n-1}) = \mathfrak{R}(W^{2n-1})$, ибо $T^tW^{2n-1} = W^{2n-1}$. Таким образом, если решение системы (22.13) в начальный момент удовлетворяет условию (22.16), то оно удовлетворяет этому условию и при всех t. Покажем теперь, что если вектор $dw \in \mathfrak{R}(W^{2n-1})$ в начальный момент ортогонален в метрике (22.8) вектору фазовой скорости $\{\nu, 0\}$ геодезического потока $\{T^t\}$, то и при всех t вектор $\widetilde{T}^t dw$ будет ортогонален вектору фазовой скорости геодезического потока. Действительно, пусть

$$w = (v, \nu) \in W^{2n-1}, \quad dw = \{\delta v, \delta\nu\} \in R^{2n-1}_{(v, \nu)}, \quad dw \perp \{\nu, 0\}$$

и

$$T^t w = (v(t), \nu(t)), \qquad \widetilde{T}^t dw = \{\delta v(t), \delta\nu(t)\}.$$

Ортогональность $dw \perp \{\nu, 0\}$ означает, что

$$g_{ij}(v)\,\nu^i \delta v^j = 0. \tag{22.18}$$

Но

$$\frac{d}{dt} g_{ij}(v(t))\,\nu^i(t)\,\delta v^j(t) = g_{ij}\frac{D\nu^i}{Dt}\delta v^j + g_{ij}\nu^i\frac{D\delta v^j}{Dt} = g_{ij}\nu^i\delta\nu^j = 0.$$

Здесь использовано, что ковариантные производные метрического тензора равны нулю, что $\nu(t)$ и $\delta v(t)$ удовлетворяют (22.13) и что при всех t вектор $\widetilde{T}^t dw \in R^{2n-1}_{T^t w}$, т. е. при всех t выполняется (22.16).

Введем обозначение

$$U^{2n-2}_{(v, \nu)} = \{dw : dw \in R^{2n-1}_{(v, \nu)},\ dw \perp \{\nu, 0\}\}$$

и обозначим через $\mathfrak{U}$ подрасслоение расслоения $\mathfrak{R}(W^{2n-1})$, имеющее своим слоем над точкой (v, ν) пространство $U^{2n-2}_{(v, \nu)}$. Ясно, что $\hat{R}^{n-1}_{(v, \nu)} \subset U^{2n-2}_{(v, \nu)}$. Что же до векторов $\{\delta v, 0\} \in \widetilde{R}^n_{(v, \nu)}$, то только те из них, для которых $\delta v \perp \nu$, ортогональны вектору фазовой скорости $\{\nu, 0\}$. Обозначая совокупность таких векторов через $\widetilde{R}^{n-1}_{(v, \nu)}$, имеем, аналогично (22.5) и (22.17):

$$U^{2n-2}_{(v, \nu)} = \widetilde{R}^{n-1}_{(v, \nu)} \oplus \hat{R}^{n-1}_{(v, \nu)} \approx R^{n-1}_{(v, \nu)} \oplus R^{n-1}_{(v, \nu)}. \tag{22.19}$$

Из определения $U^{2n-2}_{(v, \nu)}$ видно, что

$$R^{2n-1}_{(v, \nu)} = U^{2n-2}_{(v, \nu)} \oplus Z^1_{(v, \nu)},$$

где $Z^1_{(v, \nu)}$ — прямая, порожденная вектором фазовой скорости $\{\nu, 0\}$. Мы доказали выше, что $\widetilde{T}^t\mathfrak{U} = \mathfrak{U}$. Поэтому ясно, что можно ограничиться рассмотрением потока $\widetilde{T}^t \mid \mathfrak{U}$.

Пусть $v(t)$, $\nu(t)$, $\delta v(t)$, $\delta\nu(t)$ — решение системы (22.13). Имеем*

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2} g_{ij}\,\delta v^i\,\delta v^j &= 2g_{ij}\delta v^i\frac{D^2}{Dt^2}\delta v^j + 2g_{ij}\frac{D\delta v^i}{Dt}\frac{D\delta v^j}{Dt} = \\ &= -2g_{ij}\delta v^i R^j_{hkl}\nu^h\delta v^k\nu^l + 2|\delta\nu|^2 = \\ &= -2R_{ihkl}\delta v^i\nu^h\delta v^k\nu^l + 2|\delta\nu|^2.\end{aligned}$$

Но

$$R_{ihkl}\delta v^i\nu^h\delta v^k\nu^l = K(v, \delta v, \nu)\,|\delta v \wedge \nu|^2,$$

где $|\delta v \wedge \nu|$ — площадь бивектора $\delta v \wedge \nu$, $K(v, \delta v, \nu)$ — кривизна в точке v в направлении этого бивектора. Окончательно

$$\frac{d^2}{dt^2}|\delta v|^2 = -2K(v, \delta v, \nu)\,|\delta v \wedge \nu|^2 + 2|\delta\nu|^2. \tag{22.20}$$

Если рассматривать только такие $\{\delta v, \delta\nu\}$, которые лежат в $\mathfrak{U}$, то для них $|\delta v \wedge \nu| = |\delta v|$, так что

$$\frac{d^2}{dt^2}|\delta v|^2 = -2K(v, \delta v, \nu)\,|\delta v|^2 + 2|\delta\nu|^2. \tag{22.21}$$

Теперь и до конца этого параграфа будем считать, что кривизна отрицательна. Если $\delta v(t)$ не обращается тождественно в нуль, то, как видно из (22.21), при всех t

$$\frac{d^2}{dt^2}|\delta v|^2 > 0, \tag{22.22}$$

* Фигурирующие здесь R_{ihkl} отличается от фигурирующего в [3] знаком.

так что $|\delta v(t)|^2$ — выпуклая функция (т. е. ее график выпуклый вниз). Отсюда, прежде всего, следует, что у уравнений в вариациях нет сопряженных точек: если $\delta v(0)=0$, $\delta v(t_1)=0$ и $t_1\neq 0$, то $\delta v(t)\equiv 0$. Далее, из отсутствия сопряженных точек следует, что для уравнения в вариациях всегда разрешима краевая задача

$$\delta v(0)=0\in R_w^{n-1},\ \delta v(t_1)=\xi\in R_{T^{t_1}w}^{n-1}. \qquad (22.23)$$

Действительно, $\widetilde{T}^{t_1}\hat{R}_w^{n-1}$ — линейное подпространство $U_{T^{t_1}w}^{2n-2}$ размерности $n-1$, и если бы при его проектировании на пространство $\widetilde{R}_{T^{t_1}w}^{n-1}$ параллельно $\hat{R}_{T^{t_1}w}^{n-1}$ имелось ядро, то у уравнений в вариациях была бы сопряженная точка. Значит, $\widetilde{T}^{t_1}\hat{R}_w^{n-1}$ проектируется на все $\widetilde{R}_{T^{t_1}w}^{n-1}$; это и означает разрешимость краевой задачи (22.23). Наконец, отсюда следует, что для уравнений в вариациях всегда разрешима и (формально более общая) краевая задача

$$\delta v(0)=\xi_1\in R_w^{n-1},\qquad \delta v(t_1)=\xi_2\in R_{T^{t_1}w}^{n-1}. \qquad (22.24)$$

Действительно, возьмем произвольное решение $\overline{\delta v}(t)$ уравнений в вариациях, удовлетворяющее первому из условий (22.24), и «подправим» его, вычтя из $\overline{\delta v}(t)$ решение краевой задачи

$$\delta v(0)=0,\ \delta v(t_1)=\overline{\delta v}(t_1)-\xi_2.$$

Пусть

$$X_w=\{dw: dw\in U_w^{2n-2},\ \widetilde{T}^t dw\to 0 \quad \text{при } t\to+\infty\},$$
$$Y_w=\{dw: dw\in U_w^{2n-2},\ \widetilde{T}^t dw\to 0 \quad \text{при } t\to-\infty\}.$$

Ясно, что X_w, Y_w — линейные подпространства U_w^{2n-2}. Из выпуклости $|\delta v(t)|^2$ следует, что одно и то же решение уравнений в вариациях не может стремиться к нулю и при $t\to+\infty$, и при $t\to-\infty$, поэтому

$$X_w\cap Y_w=0. \qquad (22.25)$$

Из самого определения X_w, Y_w следует, что

$$\widetilde{T}^tX_w=X_{T^tw},\ \widetilde{T}^tY_w=Y_{T^tw}. \qquad (22.26)$$

Если $\delta v(0)\neq 0$ и $\{\delta v(0),\ \delta\nu(0)\}\in X_w$, то $\frac{d}{dt}|\delta v(t)|^2<0$ для всех t. Действительно, если, скажем, $\frac{d}{dt}|\delta v(t)|^2\geqslant 0$ при $t=t_0$, то тогда, согласно (22.22), и подавно будет $\frac{d}{dt}|\delta v(t)|^2>0$ при $t>t_0$; ясно, что в таком случае $\delta v(t)$ не может стремиться к нулю при $t\to+\infty$. Аналогично доказывается, что если $\delta v(0)\neq 0$ и $\{\delta v(0),\ \delta\nu(0)\}\in Y_w$, то $\frac{d}{dt}|\delta v(t)|^2>0$ для всех t.

Из (22.13) следует, что имеет место неравенство

$$\left|\frac{D}{Dt}\delta\nu(t)\right|\leqslant A|\delta v(t)| \qquad (22.27)$$

с некоторой константой $A>0$, одной и той же для всех v, ν с $|\nu|=1$, δv, $\delta\nu$. Покажем, что

$$|\delta\nu|\leqslant 2\sqrt{A}\,|\delta v| \quad \text{при} \quad \{\delta v,\ \delta\nu\}\in X_{(v,\,\nu)}, \qquad (22.28)$$
$$|\delta\nu|\leqslant 2\sqrt{A}\,|\delta v| \quad \text{при} \quad \{\delta v,\ \delta\nu\}\in Y_{(v,\,\nu)}, \qquad (22.29)$$

где A—то же, что и в (22.27). Как обычно, достаточно доказать только одно из этих двух неравенств, скажем, неравенство (22.28). Если $\{\delta v,\ \delta\nu\}\in X_{(v,\,\nu)}$, то, как мы только что видели, $|\delta v(t)|$ убывает при всех t. Поэтому (22.28) является частным случаем следующей леммы.

Лемма 22.1. *Пусть начальные значения* $v(0)$, $\nu(0)$, $\delta v(0)$, $\delta\nu(0)$ *некоторого решения* $v(t)$, $\nu(t)$, $\delta v(t)$, $\delta\nu(t)$ *уравнения* (22.13) *таковы, что* $|\nu| = 1$ *и* $|v(t)|$ *не возрастает при* $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{\sqrt{A}}$. *Тогда*

$$|\delta\nu(0)| \leqslant 2\sqrt{A}\,|\delta v(0)|. \tag{22.30}$$

Доказательство. Прежде всего,

$$\frac{d}{dt}|\delta v(t)|^2 < 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t < \frac{1}{\sqrt{A}}. \tag{22.31}$$

Действительно, нам дано, что $\frac{d}{dt}|\delta v(t)|^2 \leqslant 0$ при $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{\sqrt{A}}$, но мы видели выше, что если при каком-нибудь t, скажем при $t = t_0$, эта производная равна 0, то при $t > t_0$ она положительна.

Далее, $\delta\nu(t) \neq 0$ при $0 \leqslant t < \frac{1}{\sqrt{A}}$. Действительно,

$$\frac{d}{dt}|\delta v(t)|^2 = \frac{d}{dt}g_{ij}\delta v^i\delta v^j = 2g_{ij}\delta v^i\frac{D}{Dt}\delta v^j = 2g_{ij}\delta v^i\delta\nu^j,$$

так что если бы $\delta\nu(t) = 0$, то это противоречило бы (22.31).

При $\delta\nu(t) \neq 0$ можно говорить о производной $\frac{d}{dt}|\delta\nu(t)|$, и так как из (22.27) следует, что

$$\begin{aligned}2|\delta\nu(t)|\left|\frac{d}{dt}|\delta\nu(t)|\right| &= \left|\frac{d}{dt}|\delta\nu(t)|^2\right| = \\ &= \left|2g_{ij}\delta\nu^i\frac{D}{Dt}\delta\nu^j\right| \leqslant 2A|\delta\nu(t)|\,|\delta v(t)|,\end{aligned}$$

то

$$\left|\frac{d}{dt}|\delta\nu(t)|\right| \leqslant A|\delta v(t)| \quad \text{при } \delta\nu(t) \neq 0,\ |\nu| = 1. \tag{22.32}$$

Конечно, легко видеть, что при $\delta\nu(t) = 0$ единственное осложнение состоит здесь в том, что вместо производной надо говорить о (правом и левом) верхнем производном числе функции $|\delta\nu(t)|$; но нам останавливаться на этом ни к чему, ибо у нас $\delta\nu \neq 0$ на рассматриваемом отрезке времени.

Так как $|\delta v(t)|$ убывает, то из (22.32) следует, что

$$\left|\frac{d}{dt}|\delta\nu(t)|\right| \leqslant A|\delta v(0)| \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t < \frac{1}{\sqrt{A}},$$

откуда

$$|\delta\nu(t)| \geqslant |\delta\nu(0)| - A|\delta v(0)|\,t \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{\sqrt{A}}$$

и

$$|\delta\nu(t)|^2 \geqslant |\delta\nu(0)|^2 - 2A|\delta v(0)|\,|\delta\nu(0)|\,t \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{\sqrt{A}}. \tag{22.33}$$

(Действительно, если $a, b, c > 0$ и $a \geqslant b - c$, то $a^2 \geqslant b^2 - 2bc$, ибо при $b - c \geqslant 0$ имеем $a^2 \geqslant b^2 - 2bc + c^2 \geqslant b^2 - 2bc$, а при $b < c$ и подавно $b < 2c$, т. е. $b^2 - 2bc < 0$.)

Теперь из (22.21), $K < 0$ и (22.33) выводим, что

$$\frac{d^2}{dt^2}|\delta v(t)|^2 \geqslant 2|\delta\nu(t)|^2 \geqslant 2|\delta\nu(0)|^2 - 4A|\delta v(0)|\,|\delta\nu(0)|\,t,$$

откуда, интегрируя от 0 до s, получаем

$$\frac{d}{dt}|\delta v(t)|^2\Big|_0^s \geqslant 2|\delta\nu(0)|^2 s - 2A|\delta v(0)|\,|\delta\nu(0)|\,s^2.$$

Так как

$$\left|\frac{d}{dt}\,|\,\delta v\,|^2\right| = |\,2g_{ij}\delta v^i\delta\nu^j\,| \leqslant 2\,|\,\delta v\,|\;\;|\,\delta\nu\,|,$$

то, перенося $\frac{d}{dt}\,|\,\delta v\,(t)\,|^2\Big|_{t=0}$ в правую часть, найдем, что

$$\frac{d}{ds}\,|\,\delta v\,(s)\,|^2 \geqslant 2\,|\,\delta\nu\,(0)\,|^2\,s - 2A\,|\,\delta v\,(0)\,|\;\;|\,\delta\nu\,(0)\,|\,s^2 - 2\,|\,\delta v\,(0)\,|\;\;|\,\delta\nu\,(0)\,|.$$

Это неравенство выполняется при $0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{\sqrt{A}}$. Кроме того, мы знаем, что при $0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{\sqrt{A}}$ левая часть неположительна. Поэтому, подставив $s = \frac{1}{\sqrt{A}}$, мы получим

$$0 \geqslant \frac{2\,|\,\delta\nu\,(0)\,|^2}{\sqrt{A}} - 4\,|\,\delta v\,(0)\,|\;\;|\,\delta\nu\,(0)\,| =$$

$$= \frac{2\,|\,\delta\nu\,(0)\,|}{\sqrt{A}}\{|\,\delta\nu\,(0)\,| - 2\sqrt{A}\,|\,\delta v\,(0)\,|\},$$

откуда и следует неравенство (22.30).

Лемма 22.2. *Для любого* $\delta v_0 \in R_w^{n-1}$ *найдутся такое* $\delta\nu_0 \in R_w^{n-1}$, *что* $\{\delta v_0,\ \delta\nu_0\} \in X_w$, *и такое* $\delta\nu_0' \in R_w^{n-1}$, *что* $\{\delta v_0,\ \delta\nu_0'\} \in Y_w$.

Доказательство. Как обычно, достаточно доказать только утверждение, относящееся к X_w. Пусть $\{\delta v_n\,(t),\ \delta\nu_n\,(t)\}$ — решение уравнений в вариациях, удовлетворяющее краевым условиям

$$\delta v_n\,(0) = \delta v_0, \qquad \delta v_n\,(n) = 0.$$

$|\,\delta v_n\,(t)\,|^2$ — выпуклая неотрицательная функция, обращающаяся в нуль при $t = n$; следовательно, она не возрастает на отрезке $0 \leqslant t \leqslant n$. При достаточно больших n,— именно, при $n > \frac{1}{\sqrt{A}}$,— из леммы 22.1 следует, что $|\,\delta\nu_n\,(0)\,| \leqslant 2\sqrt{A}\,|\,\delta v_0\,|$. Поэтому из последовательности $\{\delta\nu_n\,(0)\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность; обозначим эту подпоследовательность через $\{\delta\nu_{n_k}\,(0)\}$, а ее предел через $\delta\nu_0$. Рассмотрим решение уравнений в вариациях с начальным условием

$$\delta v\,(0) = \delta v_0,\ \ \delta\nu\,(0) = \delta\nu_0.$$

Ясно, что $\delta v_{n_k}\,(t) \to \delta v\,(t)$ равномерно на любом конечном интервале времени. Отсюда следует, что $|\,\delta v\,(t)\,|$ — невозрастающая функция времени.

Докажем, что

$$\lim_{t\to+\infty} \delta v\,(t) = 0. \tag{22.34}$$

Допустим, что $|\,\delta v\,(t)\,|$ не стремится к нулю при $t \to +\infty$; тогда существовало бы такое $a > 0$, что $|\,\delta v\,(t)\,| > a$ при всех t. Из (22.21) тогда следовало бы, что при всех t

$$\frac{d^2}{dt^2}\,|\,\delta v\,(t)\,|^2 > 2ka^2,$$

где $k = \min\limits_{(v,\delta v,\nu)} |K\,(v,\,\delta v,\,\nu)\,|$— положительная константа. Но тогда $|\,\delta v\,(t)\,|^2 \to \infty$ при $t \to +\infty$, так что $|\,\delta\,v\,(t)\,|$ не могло бы быть невозрастающей функцией.

Так как при всех t рассматриваемое решение $\delta v\,(t)$ уравнений в вариациях не возрастает, то в силу леммы 22.1 $|\,\delta\nu\,(t)\,| \leqslant 2\sqrt{A}\,|\,\delta v\,(t)|$ при всех t. А тогда, согласно (22.34), и $\lim\limits_{t\to+\infty}\,|\,\delta\nu\,(t)\,| = 0$. Тем самым доказано, что $\{\delta v_0,\ \delta\nu_0\} \in X_w$.

Из леммы 22.2 следует, что

$$\dim X_w \geqslant n-1, \ \dim Y_w \geqslant n-1.$$

Отсюда и из (22.25) вытекает, что размерности этих пространств равны $n-1$ и что U_w^{2n-2} разлагается в их прямую сумму:

$$U_w^{2n-2} = X_w^{n-1} \oplus Y_w^{n-1}.$$

Теперь для того чтобы проверить выполнение условия (У), осталось получить оценки для $|\delta v(t)|$ и $|\delta \nu(t)|$ при

$$\{\delta v(0),\ \delta\nu(0)\} \in X_w^{n-1} \text{ или } \{\delta v(0),\ \delta\nu(0)\} \in Y_w^{n-1}.$$

Из (22.26) и сказанного в § 1 следует, что достаточно получить такие оценки только при $t > 0$, а из обычной симметрии между X_w и Y_w — что можно ограничиться векторами из Y_w^{n-1}. Наконец, из (22.28) и (22.29) следует, что достаточно получить только оценку для $|\delta v(t)|$. Мы видели, что $\frac{d}{dt}|\delta v(t)|^2 > 0$, а из (22.21) видно, что

$$\frac{d^2}{dt^2}|\delta v(t)|^2 \geqslant 2k|\delta v(t)|^2,$$

где $k = \min\limits_{(v,\delta v,\nu)} |K(v, \delta v, \nu)| > 0$. Применив приводимую ниже лемму 22.3 к функции $r(t) = |\delta v(t)|^2$, отбросив в полученном таким путем неравенстве положительный член с sh и заменив $\operatorname{ch}\sqrt{2k}\,t$ меньшей величиной $\frac{1}{2}e^{\sqrt{2k}t}$, мы получим искомую оценку:

$$|\delta v(t)| \geqslant \frac{1}{2}|\delta v(0)|\, e^{\sqrt{2k}\,t} \text{ при } t > 0.$$

Лемма 22.3. *Пусть имеется дважды непрерывно дифференцируемая функция $r(t)$, определенная при всех $t > 0$ и удовлетворяющая условиям*

$$\ddot r(t) \geqslant 2kr(t),\ r(0) = r_0,\ \dot r(0) = \dot r_0 > 0.$$

Тогда

$$r(t) \geqslant r_0 \operatorname{ch}\sqrt{2k}\,t + \frac{1}{\sqrt{2k}}\dot r_0 \operatorname{sh}\sqrt{2k}t \quad \textit{при} \quad t \geqslant 0. \tag{22.35}$$

Доказательство. Сравним $r(t)$ с функцией $\rho(t)$, которая удовлетворяет условиям

$$\ddot\rho(t) = 2k\rho(t), \quad \rho(0) = \rho_0, \quad \dot\rho(0) = \dot\rho_0, \tag{22.36}$$

где

$$\rho_0 < r_0, \quad \dot\rho_0 < \dot r_0. \tag{22.37}$$

Покажем, что при всех $t > 0$

$$\rho(t) < r(t), \quad \dot\rho(t) < \dot r(t).$$

Действительно, эти неравенства выполняются при $t = 0$, а следовательно и при всех достаточно малых положительных t. Ясно, что если $\dot\rho(t) < \dot r(t)$ при всех $t \geqslant 0$, то и $\rho(t) < r(t)$ при всех $t \geqslant 0$. Допустим поэтому, рассуждая от противного, что при некоторых $t > 0$ имеет место равенство $\dot\rho(t) = \dot r(t)$. Пусть t^* — наименьшее из этих t. При всех $t \in [0, t^*)$

$$\rho(t) < r(t), \quad \dot\rho(t) < \dot r(t).$$

Но тогда из

$$\dot\rho(t^*) = \dot\rho_0 + 2k\int_0^{t^*}\rho(t)\,dt \quad \text{и} \quad \dot r(t^*) \geqslant \dot r_0 + 2k\int_0^{t^*} r(t)\,dt$$

следует, что

$$\dot r(t) - \dot\rho(t) = \dot r_0 - \dot\rho_0 + 2k\int_0^{t^*}[r(t)-\rho(t)]\,dt > 0,$$

так что равенство $\dot r(t^*) = \dot\rho(t^*)$ в действительности невозможно ни при каком $t^* > 0$.

Из (22.36) находим

$$\rho(t) = \rho_0 \operatorname{ch}\sqrt{2k}t + \frac{1}{\sqrt{2k}}\dot\rho_0 \operatorname{sh}\sqrt{2k}t.$$

Значит,

$$r(t) \geqslant \rho_0 \operatorname{ch}\sqrt{2k}t + \frac{1}{\sqrt{2k}}\dot\rho_0 \operatorname{sh}\sqrt{2k}t \quad \text{при} \quad t \geqslant 0.$$

ρ_0 и $\dot\rho_0$ здесь могут быть любыми числами, удовлетворяющими условиям (22.37). Откуда следует (22.35).

В заключение рассмотрим поток кривых постоянной кривизны k на ориентируемой поверхности V^2. Напомню, что имеются два семейства таких кривых — кривые одного семейства «заворачивают» в одну сторону, а кривые другого — в другую. Мы выбираем какое-нибудь одно из этих семейств и с его помощью строим поток $\{T_k^t\}$ в пространстве W^3 единичных касательных векторов. Если l — ориентированная кривая из выбранного нами семейства, проходящая через точку (v_0, e_0) в направлении единичного вектора e_0, то

$$T_k^t(v_0, e_0) = (v_t, e_t),$$

где v_t — такая точка кривой l, что длина дуги v_0v_t равна $|t|$, причем направление от v_0 к v_t совпадает с ориентацией кривой l или противоположно ей в зависимости от того, положительно или отрицательно t; e_t — единичный вектор, указывающий направление l в точке v_t. Как и в случае геодезического потока, целесообразно расширить поток кривых постоянной кривизны до потока во всем W^4, полагая

$$T^t(v_0, 0) = (v_0, 0),$$

$$T^t(v_0, \nu_0) = (v_{\lambda t}, \lambda e_{\lambda t}),$$

где $\lambda = |\nu_0|$, $e_0 = \frac{1}{\lambda}\nu_0$ и $T^t(v_0, e_0) = (v_t, e_t)$.

Обозначим через $\mu(v, \nu) \in R_v^2$ вектор, который ортогонален вектору $\nu \in R_v^2$, имеет ту же длину и ориентирован таким образом, чтобы кривая постоянной кривизны из рассматриваемого нами семейства, проходящая через точку v в направлении вектора ν, заворачивала в направлении вектора μ. Тогда легко видеть, что поток $\{T_k^t\}$ в W^4 описывается дифференциальными уравнениями

$$\frac{Dv}{Dt} = \nu, \quad \frac{D\nu}{Dt} = k\mu(v, \nu) \tag{22.38}$$

или

$$\dot v^i = \nu^i, \quad \dot\nu^i = -\Gamma_{jk}^i(v)\nu^j\nu^k + k\mu^i(v, \nu). \tag{22.39}$$

Исходя из (22.39), можно было бы написать уравнения в вариациях; они отличались бы от (22.4) только тем, что в правой части уравнения для $(d\nu^i)^\cdot$ добавился бы член

$$k\,d\mu^i(v, \nu) = k\frac{\partial\mu^i}{\partial v^j}dv^j + k\frac{\partial\mu^i}{\partial\nu^j}d\nu^j. \tag{22.40}$$

Однако в такой форме они нам неудобны. Чтобы записать уравнения в вариациях в удобном виде, нужно по-прежнему пользоваться ковариантным дифференцированием и писать уравнения не для $(dv, d\nu)$, а для $\{\delta v, \delta\nu\}$), где δv и $\delta\nu$ связаны с dv и $d\nu$ согласно (22.6). По-прежнему находим, что

$$\frac{D}{Dt}\delta v = \delta\nu. \tag{22.41}$$

Приступим к вычислению ковариантной производной $\frac{D}{Dt}\delta\nu$, имея в виду, что v и ν изменяются согласно уравнениям (22.39):

$$\frac{D}{Dt}\delta\nu = (\delta\nu)^{\cdot} + \Gamma(v, \ \delta\nu, \ \dot v) = (d\nu + \Gamma(v, \nu, dv))^{\cdot} + \Gamma(v, \ \delta\nu, \ \nu) =$$
$$= -d\dot\Gamma + kd\mu + \dot\Gamma + \Gamma.$$

Здесь мы учли, что в выражение для $(d\nu)^{\cdot}$ входит новый по сравнению с (22.4) член (22.40). Члены $d\Gamma$ и Γ в полученном выражении ничем не отличаются от аналогичных членов в случае геодезического потока, а

$$\dot\Gamma = \Gamma_v(v, \nu, dv)\,\dot v + \Gamma(v, \dot\nu, dv) + \Gamma(v, \nu, (dv)^{\cdot}) =$$

$=$ то же выражение, что и в случае геодезического потока, $+$

$+\Gamma(v, k\mu, dv)$,

ибо $\dot\nu$ в (22.39) отличается от $\dot\nu$ в (22.3) членом $k\mu$. Поэтому

$\frac{D}{Dt}\delta\nu =$ то же выражение, что и в случае геодезического потока, $+$

$+ kd\mu + \Gamma(v, \ k\mu, \ dv)$.

Чтобы выяснить инвариантный смысл последних двух членов, рассмотрим отображение

$$W^4 \to W^4, \qquad (v, \nu) \to (v, \mu(v, \ \nu)).$$

Его дифференциал

$$\tilde\mu : \mathfrak{R}(W^4) \to \mathfrak{R}(W^4)$$

имеет в наших обозначениях вид

$$\tilde\mu(v, \nu, dv, d\nu) = (v, \mu, dv, d\mu),$$

где $d\mu$ выражается через dv и $d\nu$ по формуле (22.40). Пользуясь аффинной связностью, мы представили $\mathfrak{R}(W^4)$ в виде $W^6 \oplus W^6$ (см. (22.8)). В новых обозначениях $\tilde\mu$ записывается так:

$$\tilde\mu((v, \nu, \delta v), (v, \nu, \delta\nu)) = ((v, \mu, \delta v), (v, \mu, \delta\mu)).$$

Здесь $\delta v = dv$, а переход от $d\mu$ к $\delta\mu$ аналогичен переходу от $d\nu$ к $\delta\nu$ согласно (22.6), то есть

$$\delta\mu = d\mu + \Gamma(v, \mu, dv).$$

Учитывая эту формулу и вспоминая, что в случае геодезического потока мы получили уравнения (22.13), находим окончательно, что

$$\frac{D}{Dt}\delta\nu^i + R^i_{jkl}\nu^j\delta v^k\nu^l = k\delta\mu^i(v, \nu). \tag{22.42}$$

Рассмотрим теперь уравнения в вариациях для потока $T^t_k|W^3$. Касательное пространство $R^3_{(v,\nu)}$ состоит из пар $\{\delta v, \delta\nu\}$, где вектор $\delta v \in R^2_v$ произволен, а $\delta\nu$ удовлетворяет условию (22.16), т. е. перпендикулярен к ν; значит,

$$\delta\nu = z\mu(v, \ \nu), \tag{22.43}$$

где z — число. Вектор же δv можно представить в виде

$$\delta v = x\nu + y\mu\ (v,\ \nu). \tag{22.44}$$

Тем самым мы представили $\mathfrak{R}\ (W^3)$ в виде прямого произведения $W^3 \times R^3$. Перепишем уравнения в вариациях (22.41) и (22.42) в терминах x, y, z. Заметим, что из (22.38) и из определения вектора μ следует, что

$$\frac{D\mu}{Dt} = -k\nu. \tag{22.45}$$

Из (22.44), (22.41), (22.38), (22.45) и (22.43) имеем $\dot{x}\nu + \dot{y}\mu + xk\mu - yk\nu = z\mu$, т. е.

$$\dot{y} + kx = z,\ \ \dot{x} - ky = 0. \tag{22.46}$$

Левая часть (22.42), согласно (22.43), (22.45) и (22.44), равна

$$\dot{z}\mu^i - zk\nu^i + R^i_{jkl}\nu^j x\nu^k\nu^l + R^i_{jkl}\nu^j y\mu^k\nu^l,$$

причем третий член здесь ввиду антисимметричности R^i_{jkl} по последним двум индексам равен нулю. Свернем полученное выражение с $g_{ih}\mu^h$. Так как $\mu \perp \nu$ и $|\mu| = |\nu| = 1$ (ибо мы находимся в W^3), то получим

$$\dot{z} + yR_{hjkl}\mu^h\nu^j\mu^k\nu^l = \dot{z} + K(v)\,y.$$

В правой же части (22.42) при свертывании с $g_{ih}\mu^h$ получается

$$kg_{ih}\mu^h\delta\mu^i = k\delta\,(g_{ih}\mu^h\mu^i) = 0.$$

Итак,

$$\dot{z} + K\ (v)\ y = 0. \tag{22.47}$$

Наконец, из (22.46) и (22.47) вытекает уравнение

$$\ddot{y} + [K\ (v) + k^2]\ y = 0, \tag{22.48}$$

которое в том частном случае, когда $k = 0$, т. е. когда (22.48) является уравнением в вариациях для геодезического потока на поверхности, называется уравнением Якоби.

Предположим теперь, что $k^2 < \min\limits_{v \in V^2} |K\ (v)|$.

Тогда в (22.48) коэффициент при y отрицателен и отделен от нуля некоторой константой:

$$K(v) + k^2 \leqslant -c, \qquad c > 0.$$

Проверка выполнения условий (У) теперь ничем не отличается от соответствующих рассуждений для геодезического потока.

§ 23. Теорема Арнольда

Теорема Арнольда. *Пусть V^n — замкнутое риманово многообразие, не гомеоморфное двумерному тору. Если геодезический поток на V^n эргодичен, то этот поток не может иметь непрерывной собственной функции, кроме константы, равно как и поток, получающийся из него путем непрерывной замены времени.*

Прежде чем доказывать теорему Арнольда, рассмотрим произвольный поток $\{T^t\}$ с интегральным инвариантом, заданный на многообразии W^m с помощью системы дифференциальных уравнений $\dot{w} = f\ (w)$. Для любой пфаффовой формы $\varphi\ (w)$ положим

$$\langle f, \varphi\rangle = \int\limits_{W^m} \langle\varphi(w), f(w)\rangle\, d\mu(w). \tag{23.1}$$

Здесь $<\varphi\ (w),\ f\ (w)>$ — значение 1-формы $\varphi\ (w) \in \overset{*}{R}{}^m_w$ на векторе $f(w) \in$ $\in R^m_w$, а $\mu\ (w)$ — инвариантная мера нашего потока. Таким образом, векторное поле $f\ (w)$ определяет некоторый линейный функционал на пфаффовых формах. Покажем, что если форма φ — точная, т. е. если она является дифференциалом некоторой гладкой функции ψ, то функционал $\langle f, \cdot \rangle$ обращается на этой форме в нуль:

$$\langle f, d\psi \rangle = 0. \tag{23.2}$$

Действительно, $\langle f(w), d\psi(w) \rangle = \left. \frac{d\psi(T^t w)}{dt} \right|_{t=0}$, так что

$$\langle f, d\psi \rangle = \int_{W^m} \left. \frac{d\psi(T^t w)}{dt} \right|_{t=0} d\mu(w) = \frac{d}{dt} \int_{W^m} \psi(T^t w)\, d\mu(w) \Big|_{t=0} = 0,$$

ибо из инвариантности меры μ следует, что

$$\int_{W^m} \psi(T^t w)\, d\mu(w) = \int_{W^m} \psi(w)\, d\mu(w).$$

(23.2) позволяет определить функционал F на пространстве $H^1(W^m, R)$ одномерных когомологий многообразия W^m с вещественными коэффициентами: для любого класса $x \in H^1(W^m, R)$ определяем $F(x)$ как $\langle f, \varphi \rangle$, где φ — какая-нибудь пфаффова форма из класса x. Функционал F можно рассматривать как элемент пространства $H_1(W^m, R)$ одномерных гомологий многообразия W^m с вещественными коэффициентами. При непрерывной замене с изменения f и μ таковы, что F, самое большее, умножается на положительное число.

Доказательство теоремы Арнольда. Теорема Арнольда очевидным образом вытекает из следующих двух лемм.

Лемма 23.1. *Если эргодический поток $\{T^t\}$ имеет непрерывную непостоянную собственную функцию, то $F \neq 0$.*

Лемма. 23.2. *Если $\{T^t\}$ — геодезический поток на замкнутом римановом многообразии V^n, не гомеоморфном двумерному тору, то $F = 0$.*

Доказательство леммы 23.1. Мы укажем такую замкнутую пфаффову форму $\varphi(w)$, что $\langle f, \varphi \rangle \neq 0$.

Пусть $\psi(w)$ — непрерывная непостоянная собственная функция потока $\{T^t\}$:

$$\psi(T^t w) = e^{i\lambda t}\psi(w), \quad \lambda \neq 0. \tag{23.3}$$

Из эргодичности следует, что $|\psi(w)| = \mathrm{const}$; можно считать, что $|\psi(w)| = 1$. (Это — единственное место, в котором используется эргодичность.) Из (23.3) видно, что существует производная $D_f\psi(w)$:

$$D_f\psi(w) = \frac{d}{dt}\psi(T^t w)\big|_{t=0} = i\lambda\psi(w)$$

и эта производная непрерывна по w. В конце § 6 мы видели, что в таком случае можно аппроксимировать функцию $\psi(w)$ гладкой функцией $\hat{\psi}(w)$ таким образом, чтобы

$$|\psi(w) - \hat{\psi}(w)| < \varepsilon, \quad |D_f\psi(w) - D_f\hat{\psi}(w)| < \varepsilon,$$

где ε — любое наперед заданное положительное число. Покажем, что аппроксимирующую функцию тоже можно считать по модулю равной единице: $|\hat{\psi}(w)| = 1$. Действительно, возьмем какую-нибудь гладкую функцию $\hat{\psi}(w)$, аппроксимирующую $\psi(w)$ в указанном смысле, но не обязательно равную 1 по модулю, и рассмотрим функцию $\frac{\hat{\psi}(w)}{|\hat{\psi}(w)|}$. Ясно, что при достаточной близости $\hat{\psi}$ к ψ разность

$$\psi(w) - \frac{\hat{\psi}(w)}{|\hat{\psi}(w)|}$$

тоже будет мала. Далее, из $D_f(\psi\overline{\psi}) = 0$ (черта сверху обозначает комплексное сопряжение) следует малость $D_f(\hat{\psi}\overline{\hat{\psi}})$, т. е. малость $D_f|\hat{\psi}|$; теперь ясно, что и разность

$$D_f\psi(w) - D_f\frac{\hat{\psi}(w)}{|\hat{\psi}(w)|}$$

мала. Итак, можно считать, что $|\hat{\psi}(w)| = 1$.

$\mathrm{Ln}\,\hat{\psi}(w)$ — многозначная чисто-мнимая гладкая функция, а $\varphi(w) = \frac{1}{i}d\,\mathrm{Ln}\,\hat{\psi}(w)$ — уже однозначная и вещественная замкнутая пфаффова форма. Выражение

$$\langle\varphi(w),\ f(w)\rangle = \frac{1}{i}D_f\,\mathrm{Ln}\,\hat{\psi}(w)$$

близко к $\frac{1}{i}D_f\,\mathrm{Ln}\,\psi(w)$, а последнее, как явствует из (23.3), равно $\lambda \neq 0$. Из (23.1) теперь ясно, что $\langle f, \varphi\rangle \neq 0$.

Доказательство леммы 23.2. Используя те же обозначения, что в § 22, рассмотрим отображение одномерных когомологий

$$p^* : H^1(V^n, R) \to H^1(W^{2n-1}, R),$$

индуцированное проекцией $p: W^{2n-1} \to V^n$, которая переводит точку $w = (v, \nu)$, $\nu \in S_v^{n-1}$, в точку v. Хорошо известно, что если V^n не гомеоморфно двумерному тору, то p^* — изоморфизм. (В когомологической спектральной последовательности расслоения $W^{2n-1} \to V^n$ член $E_2^{1,0} = H^1(V^n, R)$, очевидно, является циклом всех дифференциалов и не является образом никакого дифференциала, член же $E_3^{0,1} = 0$. Действительно, при $n > 2$ уже

$$E_2^{0,1} = H^1(S^{n-1}, R) = 0,$$

при $n = 2$ в неориентируемом случае тоже

$$E_2^{0,1} = H^0(V^2, H^1(S^1, R)) = 0,$$

а в ориентируемом случае при $n = 2$, хотя

$$E_2^{0,1} = H^1(S^1, R) = R,$$

но $d_2E_2^{0,1} = E_2^{2,0}$. Последнее следует из того, что если обозначить фундаментальные коциклы $H^1(S^{n-1}, R)$ и $H^2(V^2, R) = E_2^{2,0}$ через u^1 и v^2 соответственно, то, как легко видеть, $d_2u^1 = \chi(V^2)v^2$, где $\chi(V^2)$ — эйлерова характеристика.)

Поэтому для того чтобы найти $F(x)$ для $x \in H^1(W^{2n-1}, R)$, мы можем взять в качестве представителя класса x пфаффову форму $p^*\varphi$, где φ — замкнутая форма на V^n, и вычислить $\langle f, p^*\varphi\rangle$. Имеем

$$F(x) = \langle f, p^*\varphi\rangle = \int\limits_{W^m} \langle (p^*\varphi)(w), f(w)\rangle\, d\mu(w) = \int\limits_{W^m} \langle \varphi(pw), \tilde{p}f(w)\rangle\, d\mu(w).$$

Отображение касательных пространств $\tilde{p} : R_w^{2n-1} \to R_v^n$ переводит вектор фазовой скорости геодезического потока

$$f(w) = \{\nu, -\Gamma(v, \nu, \nu)\}$$

в ν. Что же до инвариантной меры $\mu(w)$ геодезического потока, то, как хорошо известно, она (локально) является произведением меры $\upsilon(v)$ в многообразии V^n (индуцированной римановой метрикой в V^n) и эвклидовой меры $\sigma(\nu)$ на сфере S_v^{n-1};

$$d\mu(w) = d\upsilon(v)\, d\sigma(\nu) \text{ при } w = (v, \nu).$$

Поэтому

$$F(x) = \int\limits_{V^n} d\upsilon(v) \int\limits_{S_v^{n-1}} <\varphi(v), \nu> d\sigma(\nu) = \int\limits_{V^n} <\varphi(v), \int\limits_{S_v^{n-1}} \nu\, d\sigma(\nu)>\, d\upsilon(v) = 0,$$

ибо ясно, что $\int\limits_{S_v^{n-1}} \nu\, d\sigma(\nu) = 0$. Тем самым лемма 23.2 доказана.

В заключение этого параграфа докажем, что *если на двумерном торе геодезический поток является (У)-потоком, то для него выполняется вторая возможность альтернативы*. Действительно, пространство единичных касательных векторов W^3 в данном случае является трехмерным тором. Допустим, что выполняется первая возможность альтернативы. Многообразие W_0^2, о котором идет речь в теореме 14, допускает одномерное слоение без особенностей (и даже два всюду трансверсальных таких слоения — $\mathfrak{S}^k$ и $\mathfrak{S}^l$); значит, W_0^2 — либо тор, либо бутылка Клейна. Но из конструкции примера Б, § 2, видно, что поверхность W_0^2 является двусторонней поверхностью в W^3 и потому должна быть ориентируемой. Итак, W_0^2 — тор.

Рассмотрим действие T_0 на одномерных гомологиях W_0^2 с целочисленными коэффициентами. Пусть x, y — образующие $H_1(W_0^2)$ и

$$T_{0*}x = ax + by, \quad T_{0*}y = cx + dy.$$

Легко видеть, что группа $H_1(W^3)$ порождается тремя образующими x, y, z (последняя из которых при проекции $W^3 \to S^1$ переходит в образующий элемент $H_1(S^1)$), подчиненными соотношениям

$$x = ax + by, \; y = cx + dy.$$

Отсюда ясно, что $H_1(W^3)$ может быть прямой суммой трех бесконечных циклических групп только в том случае, когда $a = d = 1$, $b = c = 0$. Значит, число Лефшеца преобразования T_0, как и всех его степеней, равно нулю.

Поля направлений X_w^1, Y_w^1 на торе W_0^2 ориентируемы. Действительно, из классических результатов Кнезера [72] (модернизированное изложение см. в [73, 74]) легко вывести, что в противном случае слоения $\mathfrak{S}^k$, $\mathfrak{S}^l$ имели бы замкнутые слои (окружности), чего не может быть, ибо при отображениях T_0^n или T_0^{-n} длины этих окружностей должны укорачиваться до нуля. Значит, можно ориентировать слои этих слоений. Можно считать, что отображение T_0 сохраняет ориентацию этих слоев; в противном случае будем рассматривать T_0^2.

Некоторая r-я степень T_0 (или T_0^2) имеет неподвижные точки, причем эти точки изолированные. Если возле такой точки направить ось x в положительном направлении вдоль слоя $\mathfrak{S}^k$, а ось y — в положительном направлении вдоль слоя $\mathfrak{S}^l$, то преобразование $\tilde{T}_0^r$ (дифференциал T_0^r) примет вид

$$x \to \lambda x, \; y \to \mu y, \text{ где } |\lambda| < 1, \; |\mu| > 1,$$

а так как ориентация слоев сохраняется, то $0 < \lambda < 1$ и $\mu > 1$. Поэтому индексы всех этих неподвижных точек равны -1. Но это противоречит тому, что число Лефшеца равно нулю.

Замечание 23.1. Фактически мы здесь показали, что трехмерное многообразие, на котором существует (У)-поток, получающийся с помощью конструкции из § 2, Б, должно удовлетворять некоторым топологическим условиям. Фазовое пространство геодезического потока на поверхности отрицательной кривизны этим условиям не удовлетворяет.

Замечание 23.2. Если слоения $\mathfrak{S}^k$, $\mathfrak{S}^l$ образуют интегрируемую пару, то аналогично лемме 23.1 $F \neq 10$ (задающая $\mathfrak{S}^k \wedge \mathfrak{S}^l$ пфаффова форма φ будет замкнутой при нормировке: $\langle \varphi(w), f(w) \rangle \equiv 1$).

§ 24. Аналитические ($У$)-каскады с недостаточно гладкими слоениями $\mathfrak{S}^k$, $\mathfrak{S}^l$

В этом параграфе рассматриваются некоторые аналитические ($У$)-каскады, получающиеся путем возмущения ($У$)-автоморфизмов тора. Первая часть параграфа относится к двумерному случаю. В этом случае, как уже говорилось в § 2, поля X_w^1, Y_w^1 обязательно являются гладкими. Будет доказано, что существуют (аналитические) каскады, у которых эти поля не принадлежат классу C^2. Во второй части параграфа приводится многомерный пример с негладкими полями X_w^k, Y_w^l.

Пусть начало координат на плоскости является неподвижной точкой канонического преобразования (каноничность в двумерном случае означает просто, что преобразование сохраняет эвклидову меру)

$$T: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} \quad T^{-1}: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(x, y) \\ \psi(x, y) \end{pmatrix}.$$

Функции f, g пусть будут сколь угодно гладкими или даже аналитическими. Пусть собственные значения линейного преобразования

$$\widetilde{T} = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}$$

в точке (0, 0) равны a, d, где $a > 1$, $0 < d < 1$. Допустим, что гладкая класса C^2 функция $k(x, y)$ является угловым коэффициентом инвариантного относительно T поля направлений. Иными словами, если $dy = k(x, y)\,dx$ и

$$dx' = f_x(x, y)\,dx + f_y(x, y)\,dy,$$
$$dy' = g_x(x, y)\,dx + g_y(x, y)\,dy,$$

то $dy' = k(x', y')\,dx'$. Докажем, что в таком случае производные первого, второго и третьего порядков функций f и g в точке (0, 0) должны удовлетворять некоторому соотношению.

Будем сперва считать, что направления координатных осей x и y совпадают с направлениями в токе (0, 0) собственных векторов отображения $\widetilde{T}$, соответствующих собственным значениям a и d соответственно:

$$f_x(0, 0) = a, \; f_y(0, 0) = g_x(0, 0) = 0, \; g_y(0, 0) = d.$$

Поле направлений $dy = k\,dx$, очевидно, должно давать в точке (0,0) направление одного из собственных векторов преобразования $\widetilde{T}$, т. е. $k(0, 0) = 0$ или ∞ (в последнем случае «гладкость k» означает, конечно, гладкость функции $\frac{1}{k}$); можно ограничиться случаем $k(0, 0) = 0$. Обозначим $k(x', y')$ короче через k'; ясно, что

$$k'(f_x + f_y k)\,dx = k' dx' = dy' = (g_x + g_y k)\,dx,$$

откуда

$$k' = \frac{g_x + g_y k}{f_x + f_y k}.$$

Введя обозначение

$$h(x, y, k) = \frac{g_x(x, y) + g_y(x, y)k}{f_x(x, y) + f_y(x, y)k}, \tag{24.1}$$

можем написать

$$k(x', y') = h(x, y, k(x, y)). \tag{24.2}$$

Полученные соотношения позволяют вычислить $k_x(0, 0)$ и $k_y(0, 0)$. Действительно, из (24.2)

$$k_{y'}(x', y') = (h_x + h_k k_x)\varphi_{y'} + (h_y + h_k k_y)\psi_{y'}. \tag{24.3}$$

Но $\varphi_y(0, 0) = 0$, $\psi_y(0, 0) = \frac{1}{d}$, а из (24.1) можно найти производные h_y, h_x и h_k при $x = 0$, $y = 0$, $k = 0$:

$$h_y(x, y, 0) = \frac{g_{xy}f_x - g_x f_{xy}}{f_x^2}, \quad h_x(x, y, 0) = \frac{g_{xx}f_x - g_x f_{xx}}{f_x^2}, \tag{24.4}$$

$$h_y(0, 0, 0) = \frac{g_{xy}(0, 0)}{a}, \quad h_x(0, 0, 0) = \frac{g_{xx}(0, 0)}{a}, \tag{24.5}$$

$$h_k(x, y, k) = \frac{1}{(f_x + f_y k)^2}\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}, \tag{24.6}$$

$$h_k(0, 0, 0) = \frac{d}{a}. \tag{42.7}$$

Подставив это в (24.3), получим, что при $x = 0, y = 0$

$$k_y = \left(\frac{g_{xy}}{a} + \frac{d}{a}k_y\right)\frac{1}{d},$$

откуда

$$k_y(0, 0) = \frac{g_{xy}(0, 0)}{d(a-1)}. \tag{24.8}$$

Аналогично получается

$$k_x(0, 0) = \frac{g_{xx}(0, 0)}{a^2 - d}. \tag{24.9}$$

Если теперь попытаться тем же путем вычислить $k_{yy}(0, 0)$, то получится, что как раз в интересующем нас случае, когда якобиан T равен единице, k_{yy} выпадает из левой и правой частей соотношения, получающегося дифференцированием (24.3), и остается некоторое соотношение, которому должны удовлетворять производные первых трех порядков функций f и g в точке (0, 0). Действительно, дифференцируя (24.3), получим

$$\begin{aligned} k_{y'y'}(x', y') = {} & (h_x + h_k k_x)_x \varphi_{y'}^2 + (h_x + h_k k_x)_y \varphi_{y'}\psi_{y'} + \\ & + (h_y + h_k k_y)_x \varphi_{y'}\psi_{y'} + (h_y + h_k k_y)_y \psi_{y'}^2 + \\ & + (h_x + h_k k_x)\varphi_{y'y'} + (h_y + h_k k_y)\psi_{y'y'}. \end{aligned} \tag{24.10}$$

При $x = 0$, $y = 0$ первые три члена в правой части обращаются в нуль. Дифференцируя при $x = 0$, $y = 0$ по y соотношения

$$\varphi_{x'}f_y + \varphi_{y'}g_y = 0, \quad \psi_{x'}f_y + \psi_{y'}g_y = 1,$$

получим

$$\varphi_{x'}f_{yy} + \varphi_{y'y'}d^2 = 0, \quad \psi_{y'y'}d^2 + \psi_{y'}g_{yy} = 0,$$

или

$$\varphi_{y'y'}(0, 0) = -\frac{f_{yy}(0, 0)}{ad^2}, \quad \psi_{y'y'}(0,0) = -\frac{g_{yy}(0, 0)}{d^3}.$$

Далее,

$$(h_y + h_k k_y)_y = h_{yy} + h_{ky} k_y + h_{kk} k_y^2 + h_k k_{yy}.$$

Из (24.4)

$$h_{yy}(0, 0, 0) = \left(\frac{g_{xy}}{f_x}\right)_y - \frac{g_{xy} f_{xy}}{f_x^2} = \frac{g_{xyy}}{a}.$$

Так как $h(0, 0, k) = \frac{d}{a} k$ (см. (24.6)), то $h_{kk}(0, 0, k) = 0$. Наконец, смешанную производную h_{ky} тоже можно найти из равенства (24.6). Это равенство при $k = 0$ принимает вид

$$h_k(x, y, 0) = \frac{1}{f_x^2} \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix};$$

значит,

$$h_{ky}(0, 0, 0) = -\frac{2f_{xy}}{f_x^3} \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} + \frac{1}{f_x^2} \begin{vmatrix} f_{xy} & f_y \\ g_{xy} & g_y \end{vmatrix} + \frac{1}{f_x^2} \begin{vmatrix} f_x & f_{yy} \\ g_x & g_{yy} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{2f_{xy}}{a^3} ad + \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} f_{xy} & 0 \\ g_{xy} & d \end{vmatrix} + \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} a & f_{yy} \\ 0 & g_{yy} \end{vmatrix} = \frac{ag_{yy} - df_{xy}}{a^2}.$$

Подставляя полученные результаты, а также (24.5), (24.7), (24.8) и (24.9) в (24.10), получаем

$$k_{yy} = \left(\frac{g_{xyy}}{a} + \frac{ag_{yy} - df_{xy}}{a^2} \frac{g_{xy}}{d(a-1)} + \frac{d}{a} k_{yy}\right) \frac{1}{d^2} -$$

$$- \left(\frac{g_{xx}}{a} + \frac{d}{a} \frac{g_{xx}}{a^2 - d}\right) \frac{f_{yy}}{ad^2} - \left(\frac{g_{xy}}{a} + \frac{d}{a} \frac{g_{xy}}{d(a-1)}\right) \frac{g_{yy}}{d^3},$$

откуда

$$\left(1 - \frac{1}{ad}\right) k_{yy} = \frac{g_{xyy}}{ad^2} - \frac{f_{xy} g_{xy}}{a^2 d^2 (a-1)} - \frac{g_{xx} f_{yy}}{d^2 (a^2 - d)} - \frac{g_{xy} g_{yy}}{ad^3}.$$

Так как преобразование T — каноническое, то $ad = 1$, и поэтому

$$\frac{g_{xyy}}{d} - \frac{f_{xy} g_{xy}}{a-1} - \frac{g_{xx} f_{yy}}{1 - d^3} - \frac{g_{xy} g_{yy}}{d^2} = 0. \tag{24.11}$$

Набор всевозможных производных порядка не выше n функций f и g задающих преобразование T) в точке (x, y) обозначим через $j^n_{x, y}(T)$ и будем называть *струей n-го порядка отображения T*. (Следует заметить, что здесь этот термин используется только как сокращенное название для некоторой совокупности чисел, тогда как ему можно придать — и придается обычно — инвариантный смысл, указав закон преобразования этих чисел при изменении карты или же сразу дав инвариантное определение.) Если имеется струя j^n и $k < n$, то струей k-го порядка струи j^n будем называть струю k-го порядка, состоящую из входящих в j^n производных порядка не выше k.

Выше мы доказали следующую лемму.

Лемма. 24.1. *Если каноническое преобразование T оставляет инвариантным некоторое поле направлений класса C^2 и если это преобразование имеет неподвижную точку, в которой*

$$j^1(T) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad a > 1, \ 0 < d < 1,$$

то струя третьего порядка $j^3(T)$ удовлетворяет в этой точке соотношению (24.11).

Струи канонических преобразований должны удовлетворять соотношениям, получающимся путем дифференцирования соотношения

$$\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} = 1. \tag{24.12}$$

(24.12) — это соотношение, которому должна удовлетворять струя первого порядка. Применяя к (24.12) операторы дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$, получим новые соотношения, содержащие наряду с первыми уже и вторые производные; струя второго порядка любого канонического преобразования должна удовлетворять этим двум соотношениям наряду с (24.12). Струя $(n+1)$-го порядка удовлетворяет тем же соотношениям, которым удовлетворяет струя n-го порядка, и еще новым соотношениям, получающимся применением к (24.12) операторов $\frac{\partial^n}{\partial x^n}$, $\frac{\partial^n}{\partial x^{n-1}\partial y}$, ..., $\frac{\partial^n}{\partial y^n}$; производные $(n+1)$-го порядка входят только в эти последние соотношения. Назовем струю $(n+1)$-го порядка *канонической*, если она удовлетворяет вышеуказанным соотношениям. Между прочим, легко доказать, что любая каноническая струя действительно является струей некоторого канонического преобразования; ниже это будет доказано (и использовано) в несколько иной форме.

Покажем, что не всякая каноническая струя третьего порядка, для которой $j^1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, удовлетворяет соотношению (24.11). Для этого убедимся, что если j^2 — произвольная каноническая струя второго порядка, у которой $j^1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, а c — произвольное число, то имеется каноническая струя третьего порядка с этой j^2 и с $g_{xyy} = c$. Действительно, соотношения, в которые входит g_{xyy}, получаются, если к (24.12) применить $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ или $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$. Но в первом случае коэффициентом при g_{xyy} служит $f_y(0, 0) = 0$, поэтому ограничения на g_{xyy} накладываются только вторым соотношением. Это соотношение имеет вид

$$a g_{xyy} + d f_{xxy} = \text{некоторому выражению, зависящему от } j^2. \tag{24.14}$$

Далее, f_{xxy} входит в два соотношения: в (24.14) и еще в соотношение, получающееся применением к (24.12) оператора $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Но в последнем соотношении коэффициентом при f_{xxy} служит $g_x(0, 0) = 0$, т. е. это соотношение не накладывает никаких ограничений на f_{xxy}. Итак, g_{xyy} и f_{xxy} должны удовлетворять только одному соотношению — соотношению (24.14) — откуда ясно, что g_{xyy} можно задать произвольно. Соотношения же, получающиеся применением к (24.12) операторов $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, позволяют выразить $a g_{xxy} + d f_{xxx}$ и $a g_{yyy} + d f_{xyy}$ через j^2. В итоге для построения j^3 еще остается несколько свободных параметров.

Будем теперь рассматривать диффеоморфизмы двумерного тора W^2 вида

$$\begin{aligned} x &\to 2x + y + F(x, y), \\ y &\to x + y + G(x, y), \end{aligned} \tag{24.15}$$

где F, G — малые аналитические функции. «Малость» можно понимать, например в смысле их малости при $|\operatorname{Im} x|$, $|\operatorname{Im} y| \leqslant r_0$ или в том смысле, что все их производные малы (n-я производная меньше ε_n). При $F = G = 0$, а значит и при всех достаточно малых F, G, получается, как легко видеть, ($У$)-каскад. Будем рассматривать только канонические (сохраняющие эвклидову меру) диффеоморфизмы. Такие преобразования можно строить с помощью производящей функции $\Phi(x, x')$. Если положить

$$\Phi(x, x') = xx' - x^2 - \frac{1}{2}x'^2 + S(x, x'), \tag{24.16}$$

где функция S аналитическая и достаточно малая (в полосе $|\operatorname{Im} x|$, $|\operatorname{Im} y| < r_0$ или вместе со своими производными), то соотношения

$$y = \Phi_x(x, x') = x' - 2x + S_x(x, x'), \tag{24.17}$$

$$y' = -\Phi_{x'}(x, x') = x' - x - S_{x'}(x, x') \tag{24.18}$$

определяют аналитическое каноническое преобразование. (Подразумевается, что из (24.17) надо выразить x' через x и y и подставить это в (24.18).) Если функция S периодична по x, x' с периодом 1, то это преобразование будет индуцировать преобразование тора вида (24.15) с малыми F, G. (Обратно, легко доказать, что любое каноническое преобразование (24.15) с достаточно малыми F, G можно получить с помощью производящей функции вида (24.16), но нам это не потребуется.) Преобразование (24.15), строящееся с помощью производящей функции Φ вида (24.16), обозначим через T_S.

Возьмем какую-нибудь точку (x_0, y_0). Из (24.17) и (24.18) видно что значение T_S в точке (x_0, y_0) определяется первыми производными S_x, $S_{x'}$ при $x = x_0$, $x' = x'_0$. Рассмотрим всевозможные функции S с фиксированной $j^1_{x_0, x'_0}(S)$. Условия аналитичности и периодичности функции S не мешают ей иметь какие угодно производные первых n порядков, т. е. пространство струй $j^n_{x_0, y_0}(S)$ для рассматриваемого нами класса функций — то же, что и для всех функций. Малость S означает просто малость струи. Из (24.17) и (24.18) можно вывести, что любая каноническая струя порядка n, у которой первые производные достаточно близки к $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, являются струей $j^n_{x_0, y_0}(T_S)$ с некоторой функцией S, у которой вторые производные малы, и что струя $j^{n+1}_{x_0, x'_0}(S)$ определяется при этом однозначно. Прежде всего, струя $j^n_{x_0, y_0}(T_S)$ зависит только от струи $j^{n+1}_{x_0, x'_0}(S)$, а не от самой S. Далее, каждая струя $j^{n+1}_{x_0, x'_0}(S)$ определяет именно каноническую, а не какую-нибудь иную, струю $j^n_{x_0, y_0}(T_S)$. После этого индукцией по n легко доказать, что при различных струях $j^{n+1}(S)$ получаются разные струи $j^n(T)$. Отображение $j^{n+1}(S) \to j^n(T)$ линейно зависит от старших производных. А в то же время простой подсчет параметров показывает, что пространство всех струй $j^{n+1}(S)$ имеет ту же размерность, что и пространство всех канонических струй порядка n.

Рассмотрим теперь такую функцию S, что

$$S_x = S_{x'} = S_{xx} = S_{xx'} = S_{x'x'} = 0 \text{ при } x = x' = 0.$$

Из (24.17) и (24.18) видно, что при такой S начало координат является неподвижной точкой преобразования T_S и что

$$\tilde{T}_S(0, 0) = T_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Введем новую карту (U, φ) с началом координат по-прежнему в $(0, 0)$ и с осями, направленными по собственным векторам линейного преобразования T; замена координат линейная. Преобразование T_S в новых координатах имеет вид $\varphi T_S \varphi^{-1}$. Производные второго и высших порядков этого последнего преобразования являются многочленами от производных S третьего и высших порядков. Таким путем можно получить каноническую струю с $j^1_{0,0} =$

$= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ и достаточно малыми высшими производными. Из леммы 24.1 следует, что отображение T_S может иметь гладкое класса C^2 инвариантное поле направлений лишь в том случае, когда производные функции S в начале координат удовлетворяют некоторому соотношению,— а именно, соотношению, которое получается при подстановке в (24.11) $j^3(T)$, выраженной через $j^4(S)$. Из сказанного ранее явствует, что это соотношение не выполняется тождественно и, следовательно, существуют такие S, что в начале координат инвариантное относительно T_S поле направлений не является гладким в смысле C^2.

Можно достичь несколько большего. При надлежащем выборе функции S (сколь угодно малой) гладкость (класса C^2) инвариантного относительно T_S поля направлений нарушается на всюду плотном множестве точек. Более того, можно доказать, что тейлоровские коэффициенты тех S, для которых T_S имеет гладкое класса C^2 инвариантное поле направлений, должны удовлетворять счетному множеству аналитических условий. Точки, в которых можно установить нарушение гладкости при «почти всех» S — это периодические точки отображения T_S. Теорема 3 настоящей работы утверждает, что такие точки образуют счетное всюду плотное множество. Каждое из упомянутых аналитических условий, выполнение которых необходимо для гладкости класса C^2 инвариантного поля направлений, соответствует периодической траектории каскада $\{T_S^n\}$.

При доказательстве теоремы 1 мы видели, что при любой достаточно малой S существует непрерывное отображение χ_S: $W^2 \to W^2$, переводящее точку w в такую точку $\chi_S w$, что $T_S \chi_S = \chi_S T_0$ и при всех k, $-\infty < k < \infty$, точки $T_S^k \chi_S w$ и $T_0^k w$ близки друг к другу. Этими свойствами $\chi_S w$ определяется однозначно при любой w. Если обозначить через C_ε^2 шар $\|S\|_{C^2} < \varepsilon$ в пространстве всех периодических функций S с метрикой C^2, то отображение

$$\chi : C_\varepsilon^2 \times W^2 \to W^2 \qquad (S, w) \to \chi_S w,$$

как нетрудно убедиться, непрерывно по (S, w). Это позволяет, в частности, установить взаимно-однозначное соответствие между периодическими точками T_0 и T_S. Тем самым периодические точки T_S можно перенумеровать единым образом при всех $S \in C_\varepsilon^2$, и при непрерывном изменении S n-я периодическая точка будет непрерывно изменяться. С другой стороны, пусть w_0 — какая-нибудь периодическая точка T_0; известно из теории возмущений, что при достаточно малой аналитической функции S преобразование T_S тоже имеет периодическую точку w_S, которая аналитически зависит от S (представляется абсолютно сходящимися степенными рядами от тейлоровских коэффициентов S) и близка к w_0, а ее образы $T_S^k w_S$ близки к образам w_0; ясно, что $w_S = \chi_S w_0$. Оказывается, что «малость» S, обеспечивающая аналитическую зависимость w_S от аналитической функции S, может быть выбрана одной и той же для всех периодических точек w_0: существует такое $\varepsilon > 0$, что при

$$\sup_{\substack{(\mathrm{Re}\,x,\ \mathrm{Re}\,y) \in W^2 \\ |\mathrm{Im}\,x|,\ |\mathrm{Im}\,y| < r_0}} |S(x, y)| < \varepsilon$$

w_S аналитически зависит от S, какой бы ни была периодическая точка w_0 (и какой бы период она ни имела). Нужно просто повторить обычное доказательство локаль-ного утверждения об аналитическом изменении w_S при малом аналитическом изменении S и убедиться в том, что из-за «благоприятных» свойств линейных частей фигурирующих в этом доказательстве уравнений (условия ($У$), причем для постоянных коэффициентов) требуемая «малость» S может быть выбрана не зависящей от рассматриваемой периодической точки и от ее периода*.

Далее, рассмотрим возле точки w_S отображение T_S^n, где n — период w_S. Это отображение оставляет w_S на месте, а его дифференциал $\widetilde{T}_S^n$ имеет два собственных вектора e_S и e'_S, которые соответствуют собственным значениям a_S и d_S. Такая же аргументация, что и выше, показывает, что a_S, d_S, e_S e'_S также аналитически зависят от S. Введем новую карту (U_S, φ_S) с началом координат в w_S, направив оси ξ и η по векторам e_S и e'_S; замена координат линейная. В новых координатах струя $j^3_{0,0}$ $(\varphi_S T_S^n \varphi_S^{-1})$ будет аналитически зависеть от S. Применим лемму 2.1. Получается, что для того, чтобы T_S имело инвариантное поле направлений класса C^2, необходимо, чтобы выполнялось некоторое аналитическое условие, — именно, струя $j^3_{0,0}$ $(\varphi_S T_S^n \varphi_S^{-1})$ должна удовлетворять (24.11). Поэтому единственное, что еще надо доказать — это что указанное аналитическое условие действительно является условием, а не выполняется тождественно. Для этого рассмотрим окрестность точки $S = 0$ в пространстве функций. Пусть траектория точки w_0 имеет вид

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1}).$$

Потребуем, чтобы функция S и ее производные первого и второго порядка в точках (x_0, x_1), (x_1, x_2),..., (x_{n-1}, x_0) были равны нулю; это не противоречит периодичности и аналитичности S. При этом будет $\varphi_S = \varphi_0$. Равным образом можно потребовать, чтобы и производные третьего и четвертого порядков в точках (x_0, x_1).,..., (x_{n-2}, x_{n-1}) были равны нулю. Легко убедиться, что варьируя струю S в оставшейся точке (x_{n-1}, x_0), можно получить любую каноническую струю $j^3_{0,0}$ $(\varphi_0 T_S^n \varphi_0^{-1})$ с $j^1 = \widetilde{T}_0^n$. Поэтому (24.11) не может выполняться тождественно.

Вероятно, гладкость класса C^2 полей X_w^1, Y_w^1 нарушается при «почти всех» отображениях T, не только канонических, и не только в счетном множестве точек $w \in W^2$, но и почти всюду. Однако этого я не доказал.

В многомерном случае, как мы сейчас увидим, даже для аналитической ($У$)-системы поля X_w^k, Y_w^l не обязаны быть гладкими. В размерности 3, как видно из сказанного в § 2, Г, одно из этих полей,— а именно то, для которого k или l равно двум,— всегда должно быть гладким, другое же поле, во всяком случае, должно быть гладким, если система получается малым возмущением системы с интегральным инвариантом, а ведь мы как раз и рассматриваем малые возмущения ($У$)-автоморфизма тора; поэтому примеры с негладкими полями удается построить только в размерностях 4 и выше. Четырехмерный пример можно построить с помощью хотя и простых, но довольно кропотливых рассмотрений в окрестности периодических точек; во многих отношениях он напоминает предыдущий пример. Как и там, на-

* Если брать функции S не произвольными, достаточно малыми, а зависящими от конечного числа параметров σ, и желать доказать только аналитичность w_S по σ при $|\sigma| < \varepsilon$ и $\mathrm{Im}\, S = 0$, то возможность выбрать ε одним и тем же для всех w_0 следует из уже сказанного. Действительно, из сказанного следует, что существует такое ε, что при $|\sigma| < \varepsilon$ w_S непрерывно зависит от σ, а в то же время в окрестности любого значения $\sigma = \sigma_0$ w_S является аналитической функцией σ; обычные аргументы тип амонодромии завершают доказательство. Вероятно, в случае, когда S зависит от бесконечного числа параметров—тейлоровских коэффициентов — тоже возможна подобная аргументация общего характера, но я не знаю подходящей теоремы о степенных рядах бесконечного числа переменных, на которую здесь можно было бы сослаться.

рушение гладкости удается установить только на множестве меры нуль, хотя и всюду плотном. Я приведу более простой шестимерный пример, который в то же время более эффектен, так как в нем недифференцируемость имеет место почти всюду.

Рассмотрим сперва несколько более общую ситуацию, чем в том примере, который сейчас является нашей целью. Пусть W^m и Z^n — два тора, A и B — их (У)-автоморфизмы (автоморфизмы в алгебраическом смысле). Накрывающие эти автоморфизмы линейные отображения $R^m \to R^m$ и $R^n \to R^n$ также будем обозначать через A и B. Обозначим через X и Y инвариантные относительно A подпространства R^m, отвечающие собственным значениям, лежащим, соответственно, внутри и вне единичного круга; U и V пусть играют аналогичную роль для B. Пусть f: $R^m \to Z^n$ — аналитическое периодическое отображение. Рассмотрим каскад, получающийся итерированием диффеоморфизма

$$T: W^m \times Z^n \to W^m \times Z^n \quad T(w, z) = (Aw,\ Bz + f(w)).$$

Посмотрим, как выглядит для каскада $\{T^n\}$ наше обычное разложение $R^m_w = X^k_w \oplus Y^l_w$, фигурирующее в условиях (У). В данном случае запишем это разложение в виде

$$R^m \oplus R^n = \widetilde{X}_{(w,z)} \oplus \widetilde{Y}_{(w,z)}. \tag{24.19}$$

Дифференциал T имеет вид

$$\widetilde{T}(\omega, \zeta) = (A\omega,\ B\zeta + f_w(w)\,\omega), \tag{24.20}$$

отсюда

$$\widetilde{T}^n(\omega, \zeta) = \left(A^n\omega,\ B^n\left[\zeta + \sum_{i=0}^{n-1} B^{-1-i} f_w(A^i w)\, A^i\omega\right]\right). \tag{24.21}$$

Разложим f в сумму

$$f(w) = g(w) + h(w),\ g \in U,\ h \in V, \tag{24.22}$$

тогда в (24.21) вторая компонента есть

$$B^n\zeta + \sum_{i=0}^{n-1} B^{n-1-i} g_w(A^i w)\, A^i\omega + B^n \sum_{i=0}^{n-1} B^{-1-i} h_w(A^i w)\, A^i\omega. \tag{24.23}$$

Обозначим вложения $X \subset R^m$, $Y \subset R^m$, $U \subset R^n$, $V \subset R^n$ через $\varkappa$, λ, μ, ν. Ясно, что имеют место оценки

$$\begin{gathered} \|(A\varkappa)^i\| < M\vartheta^i, \qquad \|(B\mu)^i\| < M\vartheta^i, \\ \|(A\lambda)^{-i}\| < M\vartheta^i, \qquad \|(B\nu)^{-i}\| < M\vartheta^i \ \text{при}\ i > 0, \end{gathered} \tag{24.24}$$

где $0 < \vartheta < 1$, а M — некоторая константа. Условимся попутно, что и в дальнейших формулах через M обозначаются константы, которые могут быть различными в разных формулах и даже в разных частях одной и той же формулы, напр., $M^2 = M$. Определим зависящее от w линейное отображение $F(w)$: $X \to V$ как

$$F(w) = -\sum_{i=0}^{\infty} (B\nu)^{-1-i} h_w(A^i w)\,(A\varkappa)^i. \tag{24.25}$$

$(B\nu)^{-1-i} h_w$ имеет смысл, ибо $h \in V$. Из (24.24) видно, что ряд в (24.25) сходится. (24.25) означает просто то, что при $\omega \in X$

$$F(w)\,\omega = -\sum_{i=0}^{\infty} B^{-1-i} h_w(A^i w)\, A^i\omega. \tag{24.26}$$

Проверим, что

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{T}^n(\omega, F(w)\omega) = 0 \text{ при } \omega \in X. \tag{24.27}$$

Для первой компоненты в (24.21) это ясно. Вторая компонента, согласно (24.23) и (24.26), равна

$$-B^n \sum_{i=0}^{\infty} B^{-1-i} h_w(A^i w) A^i\omega + \sum_{i=0}^{n-1} B^{n-1-i} g_w(A^i w) A^i\omega +$$
$$+ B^n \sum_{i=0}^{n-1} B^{-1-i} h_w(A^i w) A^i\omega =$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} B^{n-1-i} g_w(A^i w) A^i\omega - B^{-n} \sum_{i=n}^{\infty} B^{-1-i} h_w(A^i w) A^i\omega =$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} B^{n-1-i} g_w(A^i w) A^i\omega - \sum_{i=0}^{\infty} B^{-1-i} h_w(A^{i+n} w) A^{i+n}\omega.$$

i-й член первой суммы не превосходит

$$M\vartheta^{n-1-i}\|g_w\| M\vartheta^i|\omega| \leqslant M\vartheta^{n-1}|\omega|,$$

а i-й член второй суммы —

$$M\vartheta^{1+i}\|h_w\| a\vartheta^{i+n}|\omega| \leqslant M\vartheta^{2i+n}|\omega|.$$

Отсюда видно, что и вторая компонента в (24.21) стремится к нулю.

Далее, из (24.20) и (24.27) видно, что

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{T}^n(\omega, F(w)\omega + \zeta) = 0 \text{ при } \omega \in X,\ \zeta \in U.$$

Рассматривая преобразование $\widetilde{T}^{-1}$, можно аналогичным образом построить такую непрерывную зависящую от w матрицу $G(w) \in \mathrm{Hom}(Y, V)$, что

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{T}^{-n}(\omega, G(w) + \zeta) = 0 \text{ при } \omega \in Y,\ \zeta \in V.$$

Теперь легко сообразить, что в (24.19)

$$\widetilde{X}_{(w,z)} = \{(\omega, \zeta)\colon\ \omega \in X,\ \zeta - F(w)\omega \in U\},$$
$$\widetilde{Y}_{(w,z)} = \{(\omega, \zeta)\colon\ \omega \in Y,\ \zeta - G(w)\omega \in V\}.$$

Гладкость или негладкость полей $\widetilde{X}_{(w,z)}$ и $\widetilde{Y}_{(w,z)}$ эквивалентна гладкости или негладкости $F(w)$ и $G(w)$.

Конкретизируем теперь выбор W^m, Z^n, A и B. За Z примем двумерный тор Z^2, а

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда U и V одномерны. Собственное значение B, меньшее 1, обозначим через α; другим собственным значением тогда будет $\frac{1}{\alpha}$. Оператор $B\nu$ умножает вектор на $\frac{1}{\alpha}$, поэтому в (24.25) $(B\nu)^{-1-i} = \alpha^{1+i}$. Далее, за W примем четырехмерный тор, представленный в виде произведения двух двумерных торов (тождественных друг с другом и с Z^2): $W = W_1^2 \times W_2^2$. Точки этих двумерных торов обозначаются через w_1 и w_2. Автоморфизм A тора $W_1^2 \times W_2^2$ определим как $B \times B^3$:

$$(B \times B^3)(w_1, w_2) = (Bw_1, B^3w_2).$$

Матрица $B \oplus B^3 = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B^3 \end{pmatrix}$ имеет в пространстве $R^2 \oplus R^2$ своим «устойчивым» инвариантным подпространством подпространство $U \oplus U$, причем расщепление инвариантного пространства оператора A в прямую сумму $U \oplus U$ порождено расщеплением $R^4 = R^2 \oplus R^2$. На $U \oplus U$ оператор A действует как $\alpha \oplus \alpha^3$.

Отображение h: $W_1^2 \times W_2^2 \to V$ можно рассматривать просто как функцию — его областью значений является одномерное эвклидово пространство. Производная

$$h_w = (h_{w_1}, h_{w_2}) = (h_{w_1^1}, h_{w_1^2}, h_{w_2^1}, h_{w_2^2}).$$

Здесь через (w_1^1, w_1^2) и (w_2^1, w_2^2) обозначены координаты точек w_1 и w_2. Ряд (24.26) теперь можно переписать в виде

$$-\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^{1+i} (h_{w_1}, h_{w_2}) \begin{pmatrix} \alpha^i & 0 \\ 0 & \alpha^{3i} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(-\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^{1+2i} h_{w_1} (B^i w_1, B^{3i} w_2), \; -\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^{1+4i} h_{w_2} (B^i w_1, B^{3i} w_2) \right). \quad (24.28)$$

Конкретизируем выбор h:

$$h(w_1, w_2) = -\frac{1}{2\pi} \cos 2\pi w_1^1 \sin 2\pi w_2^1.$$

Тогда

$$h_{w_1} = (\sin 2\pi w_1^1 \sin 2\pi w_2^1, \; 0).$$

Если ввести вектор $e = (1,0)$, то $w_1^1 = (w_1, e)$ и $w_2^1 = (w_2, e)$, а у i-го члена в (24.28) аргументами тригонометрических функций будут $2\pi (B^i w_1, e)$ и $2\pi (B^{3i} w_2, e)$.

Докажем, что самая первая компонента $F(w)$, т. е. функция

$$\varphi(w_1, w_2) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^{1+2i} \sin 2\pi (B^i w_1, e) \sin 2\pi (B^{3i} w_2, e), \quad (24.29)$$

которая по своему виду не слишком отличается от недифференцируемой функции Вейерштрасса, почти нигде не дифференцируема. Для этого рассмотрим разность

$$\varphi(w_1, w_2 + h) - \varphi(w_1, w_2) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^{1+2i} \sin 2\pi (B^i w_1, e) \{\sin 2\pi [(B^{3i} w_2, e) + (B^{3i} h, e)] - \sin 2\pi (B^{3i} w_2, e)\} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^{1+2i} \sin 2\pi (B^i w_1, e) \sin 2\pi (B^{3i} w_2, e) [\cos 2\pi (B^{3i} h, e) - 1] +$$

$$+ \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^{1+2i} \sin 2\pi (B^i w_1, e) \cos 2\pi (B^{3i} w_2, e) \sin 2\pi (B^{3i} h, e). \quad (24.30)$$

Вычислим норму этой разности (как функции от w_1, w_2) в $L^2(W_1 \times W_2)$. Функции

$$\sin 2\pi (B^i w_1, e) \sin 2\pi (B^{3i} w_2, e) =$$

$$= \sin 2\pi (w_1, B^{*i} e) \sin 2\pi (w_2, B^{*3i} e) \quad (24.31)$$

при разных $i \geqslant 0$ ортогональны друг другу в L^2. Действительно, из положительности элементов матрицы B^* и из $e = (1, 0)$ следует, что при разных i вектора $B^{*i} e$ получаются различными, равно как и вектора $B^{*3i} e$. Точно так же при разных $j \geqslant 0$ функции

$$\sin 2\pi (B^j w_1, e) \cos 2\pi (B^{3j} w_2, e) \tag{24.32}$$

ортогональны друг другу; наконец, при любых $i, j \geqslant 0$ функции (24.31) ортогональны функциям (24.32). Норма же каждой из этих функций, как легко видеть, равна $\frac{1}{2}$. Поэтому

$$\|\varphi(w_1, w_2+h)-\varphi(w_1, w_2)\|_{L^2}^2 = \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^{2+4i} [\cos 2\pi (B^{3i}h, e) - 1]^2 +$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^{2+4i} \sin^2 2\pi (B^{3i}h, e) = \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^{2+4i} \sin^2 \pi (B^{3i}h, e).$$

Возьмем $h = (h_1, h_2) \in V$; тогда

$$B^{3i}h = \frac{1}{\alpha^{3i}} h = \left(\frac{1}{\alpha^{3i}} h_1, \frac{1}{\alpha^{3i}} h_2\right), (B^{3i}h, e) = \frac{1}{\alpha^{3i}} h_1$$

и

$$\|\varphi(w_1, w_2+h)-\varphi(w_1, w_2)\|_{L^2}^2 = \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^{2+4i} \sin^2 \frac{\pi h_1}{\alpha^{3i}}. \tag{24.33}$$

Убедимся, что при достаточно малом h_1

$$\|\varphi(w_1, w_2+h)-\varphi(w_1, w_2)\|_{L^2} \geqslant \frac{1}{2}\alpha^2 |h_1|^{\frac{2}{3}}. \tag{24.34}$$

Для этого мы найдем такое i, что уже один только i-й член в (24.33) обеспечивает это неравенство, т. е.

$$\alpha^{2i}\left|\sin\frac{\pi h_1}{\alpha^{3i}}\right| > \alpha |h_1|^{\frac{2}{3}}.$$

При достаточно малом $|h_1|$ найдется такое i, что

$$\frac{1}{2}\alpha^{3i+3} \leqslant |h_1| < \frac{1}{2}\alpha^{3i}.$$

Тогда и подавно

$$\frac{\alpha^3}{8}\alpha^{3i} < |h_1| < \frac{1}{2}\alpha^{3i}.$$

Отсюда

$$|h_1|^{\frac{1}{3}} > \frac{\alpha}{2}\alpha^i \tag{24.35}$$

и $\frac{\pi |h_1|}{\alpha^{3i}} < \frac{\pi}{2}$. Из последнего неравенства следует, что

$$\left|\sin\frac{\pi h_1}{\alpha^{3i}}\right| > \frac{2}{\pi}\frac{\pi |h_1|}{\alpha^{3i}} = \frac{2|h_1|}{\alpha^{3i}},$$

а тогда с помощью (24.35) получаем искомое неравенство

$$\alpha^{2i}\left|\sin\frac{\pi h_1}{\alpha^{3i}}\right| > \frac{2|h_1|}{\alpha^i} = \frac{2|h_1|^{\frac{2}{3}}}{\alpha^i}|h_1|^{\frac{1}{3}} > \frac{2|h_1|^{\frac{2}{3}}}{\alpha^i}\frac{\alpha}{2}\alpha^i = \alpha|h_1|^{\frac{2}{3}}.$$

Докажем теперь, что при всех w_1, w_2 и $h = (h_1, h_2) \in V$

$$|\varphi(w_1, w_2+h)-\varphi(w_1, w_2)| \leqslant C|h_1|^{\frac{2}{3}}, \tag{24.36}$$

где C — некоторая константа, не зависящая от w_1, w_2. Оценивая в (24.30) каждое слагаемое по модулю, имеем

$$|\varphi(w_1, w_2+h) - \varphi(w_1, w_2)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^{1+2i} \left|1 - \cos\frac{2\pi h_1}{\alpha^{3i}}\right| + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^{1+2i} \left|\sin\frac{2\pi h_1}{\alpha^{3i}}\right| =$$

$$= 2\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^{1+2i} \left(\sin^2\frac{\pi h_1}{\alpha^{3i}} + \left|\sin\frac{\pi h_1}{\alpha^{3i}}\cos\frac{\pi h_1}{\alpha^{3i}}\right|\right) \leqslant$$

$$\leqslant 4\alpha \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^{2i} \left|\sin\frac{\pi h_1}{\alpha^{3i}}\right|.$$

При достаточно малом $|h_1|$ можно найти такое целое число $j \geqslant 0$, что

$$\alpha^{3(j+1)} < |h_1| \leqslant \alpha^{3j}.$$

Тогда $|h_1|^{\frac{1}{3}} \leqslant \alpha^j$ и $\alpha^{2j+2} \leqslant |h_1|^{\frac{2}{3}}$. Имеем

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^{2i}\left|\sin\frac{\pi h_1}{\alpha^{3i}}\right| = \sum_{i=0}^{j} \alpha^{2i}\left|\sin\frac{\pi h_1}{\alpha^{3i}}\right| + \sum_{i=j+1}^{\infty} \alpha^{2i}\left|\frac{\sin \pi h_1}{\alpha^{3i}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{j} \alpha^{2i}\frac{\pi|h_1|}{\alpha^{3i}} + \sum_{i=j+1}^{\infty} \alpha^{2i} = \frac{\pi|h_1|}{\alpha^j}\sum_{i=0}^{j} \alpha^{j-i} + \alpha^{2j+2}\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^{2i} <$$

$$< \pi|h_1|^{\frac{2}{3}} \frac{|h_1|^{\frac{1}{3}}}{\alpha^j}\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^i + |h_1|^{\frac{2}{3}}\frac{1}{1-\alpha^2} \leqslant \pi|h_1|^{\frac{2}{3}}\frac{1}{1-\alpha} + |h_1|^{\frac{2}{3}}\frac{1}{1-\alpha^2},$$

и (24.36) доказано.

Допустим теперь, что функция $\varphi(w_1, w_2)$ дифференцируема на множестве E положительной меры. Из (24.29) видно, что

$$\varphi(w_1, w_2) = \alpha \sin 2\pi(w_1, e)\sin 2\pi(w_2, e) + \alpha^3\varphi(Bw_1, B^3w_2).$$

Поэтому функция φ дифференцируема в точке (w_1, w_2) тогда и только тогда, когда она дифференцируема в точке (Bw_1, B^3w_2). Значит, φ дифференцируема на измеримом множестве $\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(B \times B^3)E$, которое инвариантно относительно эргодического автоморфизма

$$(B \times B^3)\colon W_1 \times W_2 \to W_1 \times W_2$$

и имеет положительную меру, а потому совпадает почти со всем $W_1 \times W_2$. Итак, φ должна быть дифференцируема почти всюду. Тогда при почти всех w_1, w_2 должно быть

$$\lim_{h_1\to 0}\frac{|\varphi(w_1, w_2+h) - \varphi(w_1, w_2)|}{|h_1|^{2/3}} = 0 \qquad (h = (h_1, h_2) \in V).$$

С другой стороны, из (24.36) видно, что это отношение ограничено (равномерно по w_1, w_2, h). Отсюда следует, что

$$\lim_{h_1\to 0}\frac{\|\varphi(w_1, w_2+h) - \varphi(w_1, w_2)\|_{L^2}}{|h_1|^{\frac{2}{3}}} = 0.$$

Но это противоречит (24.34). Остается только признать, что φ недифференцируема почти всюду.

§ 25. Изменение энтропии (У)-каскада при малом возмущении

В этом параграфе приводится пример малого аналитического возмущения эргодического автоморфизма двумерного тора, при котором эвклидова мера остается инвариантной, но энтропия меняется. Таким примером служит каскад

$$T_\varepsilon:\ \begin{array}{l} x \to x' = 2x + y, \\ y \to y' = x + y + \varepsilon \sin 2\pi (2x + y). \end{array} \tag{25.1}$$

Ясно, что если к x, y добавить целые числа, то к правым частям (25.1) тоже добавятся целые числа, поэтому (25.1) действительно определяет отображение двумерного тора в себя. При малом ε это отображение близко к автоморфизму

$$T_0:\ \begin{array}{l} x \to 2x + y, \\ y \to x + y, \end{array}$$

порождающему (У)-каскад, и, значит, само порождает (У)-каскад (§ 7). В этом и последующих рассуждениях, собственно говоря, нигде не используется то, что в (25.1) входит именно синус. Удобно писать несколько короче и несколько с большей общностью:

$$T = T_f:\ \begin{array}{l} x \to x' = 2x + y, \\ y \to y' = x + y + f(2x + y), \end{array} \tag{25.2}$$

где достаточно гладкая периодическая функция $f(x) \equiv f(x + 1)$ обладает следующими свойствами: $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$, f мала вместе со своей первой производной (например, $f(x) = \varepsilon F(x)$). Функцию, являющуюся производной функции $f(x)$, обозначим через $Df(x)$. Якобиан отображения (25.2) равен

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 + 2Df & 1 + Df \end{vmatrix} = 1,$$

так что каскад $\{T_f^n\}$ действительно сохраняет эвклидову меру. Будет доказано, что при достаточно малой f энтропия $h(T_f) < h(T_0)$.

Согласно Синаю ([69], об этом говорится также в его обзоре [14], хотя и менее четко и не в такой общности, в основном для случая $k = l = 1$, чего, впрочем, вполне достаточно для целей настоящего параграфа), энтропия (У)-каскада $\{T^n\}$ может быть вычислена следующим образом. При отображении $\widetilde{T}^n$ пространство Y_w^l отображается на пространство Y_{Tw}^l; пусть при этом l-мерный объем увеличивается в $\lambda(w)$ раз: объем $\widetilde{T}$ (единичного куба в $Y_w^l) = \lambda(w)$. Тогда

$$h(T) = \int_{W^m} \ln \lambda(w) dw.$$

Здесь подразумевается, что объем всего W^m равен 1, а логарифм берется по тому же основанию, по которому он берется и в самом определении энтропии, когда энтропия конечного или счетного разбиения

$$\xi : W^m = \bigcup_i A_i,\ A_i \cap A_j = \phi \text{ при } i \neq j$$

определяется как

$$H(\xi) = \Sigma \operatorname{mes} A_i \cdot \ln \operatorname{mes} A_i.$$

Обычно пользуются двоичным логарифмом, но для нас удобнее натуральный.

Дифференциал преобразования (25.2) имеет вид

$$\widetilde{T}=\widetilde{T}_f\colon \begin{array}{l} dx\to dx'=2dx+dy,\\ dy\to dy'=dx+dy+Df\,(2x+y)\,dx'. \end{array}$$

Пусть $k\,(x,\ y)$ — угловой коэффициент поля направлений Y^1_w; обозначим, для краткости, $k\,(T\,(x,\ y))$ через k'. Поскольку $\widetilde{T}Y^1_w=Y^1_{Tw}$, то вектор $(dx,\ kdx)$ переходит при отображении $\widetilde{T}$ в $(dx',\ k'dx')$; следовательно,

$$dx'=2\,dx+k\,dx=(2+k)\,dx,$$

$$k'\,dx'=dy'=dx+k\,dx+Df\,(2x+y)\,dx'=(1+k)\,dx+Df\cdot dx',$$

т. е.

$$k'=\frac{1+k}{2+k}+Df,\ \text{где}\ Df=Df\,(2x+y). \tag{25.3}$$

Коэффициент расширения слоя $\mathfrak{S}^l$ равен

$$\lambda\,(x,\ y)=\frac{\sqrt{dx'^2+dy'^2}}{\sqrt{dx^2+dy^2}}=\frac{\sqrt{k'^2+1}}{\sqrt{k^2+1}}\,\frac{dx'}{dx}=\frac{\sqrt{k'^2+1}}{\sqrt{k^2+1}}\,(2+k). \tag{25.4}$$

Но для любой функции $g\,(w)$, обозначая $g\,(Tw)$ через $g'\,(w)$, имеем

$$\int g'dw=\int g\,(Tw)\,dw=\int g\,(Tw)\,dTw=\int g\,(w)\,dw.$$

Поэтому

$$h\,(T)=\iint \ln\lambda\,(x,\ y)\,dx\,dy=$$

$$=\iint \ln\sqrt{k'^2+1}\,dx\,dy-\iint \ln\sqrt{k^2+1}\,dx\,dy+\iint \ln\,(2+k)\,dx\,dy=$$

$$=\iint \ln\,(2+k)\,dx\,dy.$$

Обозначим $2+k$ через μ. Ясно, что при $f\equiv 0$ величины $\lambda,\ \mu, k$ — обозначим их через $\lambda_0,\ \mu_0,\ k_0$,— не зависят от $x,\ y$. В частности, $k_0'=k_0$, и из (25.4) $\lambda_0=2+k_0=\mu_0$. Ясно также, что λ_0 является бо́льшим собственным значением матрицы $T_0=\widetilde{T}_0$, т. е.

$$\mu_0^2-3\mu_0+1=0. \tag{25.5}$$

Далее, при любой f точка $(0,0)$ является неподвижной точкой преобразования T_f, поэтому $k'\,(0,\ 0)=k\,(0,\ 0)$, и из (25.4) и $\mu=2+k$ видно, что $\lambda\,(0,0)=\mu\,(0,0)$ является бо́льшим корнем характеристического уравнения матрицы $\widetilde{T}_f\,(0,\ 0)$, т. е.

$$\mu^2\,(0,\ 0)-(3+Df\,(0))\,\mu\,(0,\ 0)+1=0.$$

Если, как мы предполагаем, $Df\,(0)\neq 0$, то отсюда и из (25.5) следует, что $\mu\,(0{,}0)\neq\mu_0$, поэтому для $\nu\,(x,\ y)=\mu\,(x,\ y)-\mu_0$ имеем

$$\iint \nu^2dxdy>0. \tag{25.6}$$

Заметим, что $\|\nu\|_C\to 0$ при $\|f\|_{C^1}\to 0$.

В терминах $\mu=2+k$ соотношение (25.3) принимает вид

$$\mu'=2+k'=2+\frac{\mu-1}{\mu}+Df=3-\frac{1}{\mu}+Df,$$

а в терминах $\nu=\mu-\mu_0$ — вид

$$\nu'=3-\frac{1}{\mu_0+\nu}-\mu_0+Df=3-\frac{1}{\mu_0\left(1+\frac{\nu}{\mu_0}\right)}-\mu_0+Df=$$

$$=3-\frac{1}{\mu_0}-\mu_0+\frac{\nu}{\mu_0^2}-\frac{\nu^2}{\mu_0^3}+o\,(\nu^2)+Df.$$

Но из (25.5) следует, что $3-\frac{1}{\mu_0}-\mu_0=0$. Поэтому

$$\nu' = \frac{1}{\mu_0^2}\nu - \frac{1}{\mu_0^3}\nu^2 + o(\nu^2) + Df.$$

Проинтегрируем полученное соотношение по тору. Так как

$$\iint \nu' dx\,dy = \iint \nu\, dx\,dy$$

и

$$\iint Df\, dx\,dy = \iint f_y\,(2x+y)\,dxdy = \int_0^1\left(\int_0^1 f_y\,dy\right)dx =$$

$$= \int_0^1 [f(2x+1) - f(2x)]\,dx = 0,$$

то, следовательно,

$$\iint \nu\, dx\,dy = \frac{1}{\mu_0^2}\iint \nu\, dx\,dy - \frac{1}{\mu_0^3}\iint \nu^2\, dx\,dy + \iint o(\nu^2)\,dx\,dy,$$

$$\left(1-\frac{1}{\mu_0^2}\right)\iint \nu\, dx\,dy = -\frac{1}{\mu_0^3}\iint \nu^2\,dx\,dy + o\left(\iint \nu^2\,dx\,dy\right),$$

$$\iint \nu\,dx\,dy = -\frac{1}{\mu_0(\mu_0^2-1)}\iint \nu^2\,dx\,dy + o\left(\iint \nu^2\,dx\,dy\right). \tag{25.7}$$

Как мы видели,

$$h(T_f) = \iint \ln\mu\,dx\,dy = \iint \ln(\mu_0+\nu)\,dx\,dy. \tag{25.8}$$

Разложим логарифм в ряд:

$$\ln(\mu_0+\nu) = \ln\mu_0 + \ln\left(1+\frac{\nu}{\mu_0}\right) = \ln\mu_0 + \frac{\nu}{\mu_0} - \frac{\nu^2}{2\mu_0^2} + o(\nu^2),$$

подставим это в (25.8) и используем (25.7):

$$h = \ln\mu_0 + \frac{1}{\mu_0}\iint \nu\,dx\,dy - \frac{1}{2\mu_0^2}\iint \nu^2\,dx\,dy + \iint o(\nu^2)\,dx\,dy =$$

$$= \ln\mu_0 - \frac{1}{\mu_0^2(\mu_0^2-1)}\iint \nu^2\,dx\,dy - \frac{1}{2\mu_0^2}\iint \nu^2\,dx\,dy + o\left(\iint \nu^2\,dx\,dy\right) =$$

$$= \ln\mu_0 - \frac{1}{\mu_0^2}\left(\frac{1}{\mu_0^2-1}+\frac{1}{2}\right)\iint \nu^2\,dx\,dy + o\left(\iint \nu^2\,dx\,dy\right) =$$

$$= \ln\mu_0 - \frac{\mu_0^2+1}{2\mu_0^2(\mu_0^2-1)}\iint \nu^2\,dx\,dy + o\left(\iint \nu^2\,dx\,dy\right).$$

В силу (25.6) это меньше $\ln\mu_0 = h(T_0)$ при достаточно малом ν, что и требовалось доказать.

Приложение

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ МЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1. Пространства Лебега, каскады и потоки

В первых работах Пуанкаре и Биркгофа по метрической теории динамических систем под динамической системой понималось примерно то же, что и в настоящей монографии, т. е. фазовое пространство было гладким многообразием, поток определялся векторным полем, каскад получался итерированием диффеоморфизма, а инвариантная мера имела плотность. Но вскоре было осознано, что для эргодической теории играет роль только метрическая, а не топологическая структура. Далее, одна из задач метрической теории динамических систем состоит в том, чтобы выяснить, при каких условиях поток или каскад имеет инвариантную меру, удовлетворяющую тем или иным естественным условиям. Конечно, проверка того, является ли гладкая плотность ρ, заданная в явном виде посредством той или иной формулы, интегральным инвариантом, сводится к простому вычислению; но ясно, что таким простым путем решить задачу о существовании интегрального инварианта можно лишь в некоторых, хотя и важных, «счастливых» случаях. (В частности, теорема Лиувилля констатирует результаты такой проверки для гамильтоновых систем и $\rho = \mathrm{const}$.) При наличии, скажем, асимптотически устойчивого положения равновесия или периодического решения вопрос решается тривиально; но подобные случаи нас не интересуют *.

* Отвлекаясь в сторону, я замечу, что даже и при наличии асимптотически устойчивого положения равновесия самая простая система двух уравнений с аналитическими правыми частями может все же в некоторой инвариантной области (не содержащей, конечно, этого положения равновесия) вести себя как настоящая консервативная система. Примером может служить система

$$\dot{x} = (x-8)(5y^2-20y-x^2),$$
$$\dot{y} = -(y-2)(3x^2+5y^2-16x),$$

которая имеет первый интеграл

$$H(x, y) = \frac{x-8}{y-2}(x^2+5y^2) = \mathrm{const}$$

(и которая получается из гамильтоновой системы $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}$, $\dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}$, если правые части последней умножить на $(y-2)^2$. На языке гидродинамики эта гамильтонова система описывает стационарное плоское течение идеальной несжимаемой жидкости с функцией тока $H(x, y)$; в точке $x = 8$, $y = 2$ находится сток). Данная система имеет три положения равновесия

$$x = 0,\ y = 0;\ x = 5,\ y = -1;\ x = 8,\ y = 2,$$

являющиеся, соответственно, центром, седлом и узлом; предельных циклов, как легко убедиться с помощью первого интеграла, быть не может. Наконец, так как

Рассматривая седлообразные положения равновесия или периодические решения, иногда можно убедиться, что система не имеет гладкого интегрального инварианта (ибо при его наличии между собственными значениями или мультипликаторами системы уравнений в вариациях должно выполняться определенное соотношение); но об интегральном инварианте из L^1 такие рассуждения ничего не говорят. В метрической теории известны некоторые общие критерии существования или несуществования интегрального инварианта, но проверить выполнение этих критериев в нетривиальных конкретных примерах не удается. Во всяком случае, мне не удалось установить, существуют ли ($У$)-системы без интегрального инварианта (и если существуют, то образуют ли они в пространстве ($У$)-систем плотное множество). Даже для совершенно конкретных примеров малых аналитических возмущений эргодического автоморфизма двумерного тора вопрос остается неясным. Впрочем, вообще проблема существования инвариантной меры слабо связана с другими разделами эргодической теории, где изучаются такие динамические системы, о которых уже с самого начала известно, что они имеют инвариантную меру.

Мы оставим эту проблему в стороне и будем, таким образом, считать, что нам задано некоторое пространство с мерой, т. е. тройка $(M, \mathfrak{B}, \mu)$ (нередко обозначаемая одной своей первой буквой M), где M — некоторое множество, $\mathfrak{B}$ — некоторая σ-алгебра его подмножеств, именуемых измеримыми, а μ — некоторая мера, определенная на измеримых множествах; рассматриваться будут только такие динамические системы, которые сохраняют эту меру. Мы всегда будем считать, что мера — конечная; в таком случае ее без ограничения общности можно считать нормированной: $\mu(M) = 1$. (Следует заметить, что хотя некоторые теоремы, включая различные обобщения эргодической теоремы Биркгофа, в случае конечной и в случае бесконечной меры формулируются и доказываются одинаково или почти одинаково, при более детальном исследовании эти два случая оказываются весьма различными.)

В некоторых вопросах эргодической теории, которые изложены у Хопфа [81] или Халмоша [1], можно, как эти авторы и делают, понимать под фазовым пространством произвольное пространство с мерой. Но для того, чтобы получить ряд более тонких результатов, нужно предполагать, что рассматриваемые пространства с мерой удовлетворяют тем или иным дополнительным условиям. Если стремиться к максимальной общности и выяснять, каковы те минимальные требования на пространство с мерой, которые обеспечивают справедливость той или иной теоремы, то эти требования в разных случаях оказываются различными. Однако целесообразно произвести разумное ограничение общности и с самого начала ограничиться определенным классом пространств с мерой. Естественный для энтропийной теории класс пространств с (нормированной) конечной мерой образуют так называемые *пространства Лебега.* Определение этих пространств, которое сейчас будет дано, является не аксиоматическим, а конструктивным. Пространством Лебега называется отрезок $[0, 1]$ вместе с σ-алгеброй его борелевских подмножеств и с любой нормированной мерой Лебега — Стильтьеса, а также любое пространство с мерой, изоморфное по модулю 0 отрезку $[0, 1]$ с указанными σ-алгеброй и мерой. (Напомню, что *изоморфизмом пространств с мерой* $(M, \mathfrak{B}, \mu)$ и $(M', \mathfrak{B}', \mu')$ называется такое взаимно одно-

---

$$3x\dot{x} + 5y\dot{y} = -3x^4 - 25y^4 + \text{члены меньшей степени,}$$

то все траектории остаются в некоторой ограниченной области. С помощью теории Пуанкаре — Бендиксона теперь легко сообразить, что качественная картина такова. Один из неустойчивых усов седла возвращается снова в седло в качестве его устойчивого уса и ограничивает на плоскости область, целиком заполненную периодическими траекториями, окружающими центр; все остальные траектории(за исключением второго устойчивого уса) стремятся к узлу.

значное отображение $f\colon M \to M'$, при котором образ или прообраз любого измеримого множества из M или из M' измерим и имеет ту же меру, что и само это множество. f — *изоморфизм по модулю нуль* (mod 0), если из пространств M и M' можно выбросить такие множества N и N' меры нуль, что отображение f осуществляет изоморфизм между пространствами $M \setminus N$ и $M' \setminus N'$ (тогда как на N это отображение может вообще не быть определено). Допуская вольность речи, изоморфизм по mod 0 часто называют просто изоморфизмом. Если $(M, \mathfrak{B}, \mu) = (M', \mathfrak{B}', \mu')$, то изоморфизм, как обычно, называется *автоморфизмом*.) Теория пространств Лебега изложена в работе Рохлина [89]; основные результаты приведены в его статьях по эргодической теории [2, 13]. В [89] и [2] можно найти, в частности, аксиоматическое определение пространств Лебега.

Итерируя какой-нибудь автоморфизм T и обратный к нему автоморфизм T^{-1}, получаем *каскад* $\{T^n\}$, $-\infty < n < \infty$. Собственно говоря, при последовательном проведении принципа пренебрежения множествами меры нуль в это определение нужно внести некоторые коррективы, впрочем вполне тривиальные. Вместо автоморфизма можно исходить из автоморфизма по mod 0, а так как два автоморфизма не различаются с метрической точки зрения, если они совпадают всюду, кроме множества меры 0, то рассматриваются не столько отдельные каскады, сколько классы эквивалентности каскадов по mod 0. Можно было бы даже сказать, что рассматриваются классы эквивалентности таких последовательностей $\{T_n\}$ автоморфизмов mod 0, что $T_n = (T_1)^n$ mod 0, причем две последовательности $\{T_n\}$ и $\{S_n\}$ эквивалентны, если все $T_n = S_n$ mod 0; ясно, что для любой такой последовательности $\{T_n\}$ существуют такой автоморфизм T и такое множество меры нуль, что вне этого множества $T_n = T^n$ при всех n.

Менее тривиальное обобщение состоит в том, чтобы исходить не из автоморфизма, а из *эндоморфизма*, т. е. такого отображения $T: M \to M$, при котором прообраз любого измеримого множества измерим и имеет ту же меру. В этом случае, естественно, рассматриваются только неотрицательные степени T, т. е. каскад является уже не группой, а полугруппой $\{T^n\}$, $0 \leqslant n < \infty$. Пренебрежение множествами меры 0 очевидным образом осуществляется и в этом случае. У Халмоша [1] изложение многих вопросов ведется как раз для эндоморфизмов (которые он называет измеримыми преобразованиями, сохраняющими меру). В большинстве работ по энтропийной теории речь идет об автоморфизмах, но и здесь в ряде случаев (в том числе при определении энтропии) возможно обобщение на эндоморфизмы (а один класс эндоморфизмов был подвергнут специальному изучению [11]). Мы, однако, оставим это обобщение в стороне.

Измеримым потоком называется такое семейство $\{T^t\}$ (t — любое вещественное число) автоморфизмов пространства M, что

1. $T^{t+s}(W) = T^t\, T^s\,(w)$ для всех w, t, s.
2. Для любого измеримого множества $A \subset M$ множество

$$\{(x, t)\colon T^t x \in A\}$$

измеримо в $M \times (-\infty, \infty)$.

Насколько я знаю, потоки, являющиеся полугруппами эндоморфизмов, систематически не рассматривались, да и неясно, насколько такой объект можно считать естественным. Зато при последовательном проведении в жизнь принципа пренебрежения множествами меры нуль мы в данном случае сталкиваемся с нетривиальным вопросом, ответ на который был получен лишь совсем недавно. *Непрерывным потоком* называется такое семейство $\{T_t\}$ автоморфизмов mod 0 пространства M, что

1. $T_{t+s} = T_t\, T_s$ mod 0. (Исключительное множество, вообще говоря, зависит от t и s.)

2. Для любых измеримых множеств $A, B \subset M$ функция $\mu\,(T^t\,(A) \cap B)$ непрерывно зависит от t.

Два непрерывных потока $\{T_t\}$ и $\{S_t\}$ эквивалентны с метрической точки зрения, если при всех t $T_t = S_t \bmod 0$. Легко проверяется с помощью спектральной теории * и давно известно [81], что измеримый поток непрерывен, но отнюдь не очевидно, всякий ли непрерывный поток эквивалентен некоторому измеримому. Вершик [90] доказал, что в случае пространств Лебега это так. Этот результат Вершика позволяет ограничиваться измеримыми потоками всюду, где это представляется удобным, — в частности, в настоящем приложении.

Определим, наконец, так называемый *специальный поток* $\{T^t\}$, *построенный по автоморфизму* T_0 *пространства Лебега* (M_0, μ_0) *и положительной интегрируемой функции* F *на этом пространстве*. Фазовым пространством потока $\{T^t\}$ служит подмножество

$$M = \{(x, s) ; x \in M_0, s \in [0, F(x))\}$$

прямого произведения $M_0 \times (-\infty, \infty)$; мера μ в M — та же, что и в $M_0 \times (-\infty, \infty)$ (прямое произведение μ_0 и меры Лебега на прямой), деленная (для нормировки) на $\int\limits_{M_0} F d\mu_0$. Движение в M происходит следующим образом: каждая точка (x, s) движется с единичной скоростью по отрезку $x \times [0, F(x))$ в сторону возрастания своей второй координаты s, пока не дойдет до «правого» конца $(x, F(x))$ этого отрезка; тогда она «мгновенно перепрыгивает» в $(T_0 x, 0)$. Чтобы движение точки $(x, s) \in M$ было определено при всех t, надо, чтобы выполнялись условия

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(T_0^n x) = \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} F(T_0^{-n} x) = \infty;$$

легко видеть, что они действительно выполняются почти для всех x и что полученный поток является измеримым и сохраняет меру. Амброз и Какутани доказали (доказательство приводится в [2]), что *любой апериодический поток* (т. е. поток, периодические траектории которого, если они вообще имеются, образуют в совокупности множество меры нуль) *изоморфен по* mod 0 *некоторому специальному потоку, для которого* $\inf F \geqslant \frac{1}{2} \sup F > 0$ и что, более обще, *любой поток без неподвижных точек изоморфен по* mod 0 *некоторому «обобщенному специальному» потоку, определение которого отличается от определения специального потока только тем, что мера пространства* M_0 *может быть бесконечной*. Роль специальных потоков в эргодической теории аналогична роли локальных сечений и отображений последования при иccледовании гладких динамических систем; M_0 играет роль сечения, а T_0 — отображения последования. Но если в топологической теории построить сечение в виде многообразия удается, вообще говоря, только локально, то в метрической теории, где допускается, чтобы секущая поверхность была разрывной, всегда можно построить глобальную секущую поверхность.

2. Некоторые сведения о спектрах

Один из наиболее известных приемов эргодической теории состоит в том, чтобы переводить различные утверждения о динамических системах, сформулированные в терминах траекторий, множеств и т. п., на язык функций и оператора сдвига

$$U^t f(w) = f(T^t w),$$

причем функции, отличающиеся только на множестве меры нуль, отождествляются. Чаще всего используются комплексные функции, суммируемые с квадратом; они образуют гильбертово пространство $L^2(M)$, в котором опе-

* При этом используется сепарабельность гильбертова пространства $L^2(M)$; для спектральной теории нужно только это слабое следствие из того, что M — пространство Лебега.

раторы сдвига являются унитарными и образуют однопараметрическую группу (с дискретным или непрерывным t):

$$U^{t+s} = U^t U^s.$$

Непрерывность потока $\{T^t\}$ в точности равносильна [81] непрерывности отображения $t \to U^t$ числовой прямой в пространство унитарных операторов, снабженное слабой топологией (которая в данном случае совпадает с сильной). Группа операторов $\{U^t\}$ тривиальным образом имеет одномерное инвариантное пространство, состоящее из констант; обычно это пространство отбрасывают и рассматривают операторы $\{U^t\}$ только на его ортогональном дополнении, состоящем из функций, среднее значение которых равно нулю.

Широкая известность такого перехода к функциональному языку объясняется рядом причин. Во-первых, переход от той или иной категории пространств и отображений к категории тех или иных семейств функций на этих пространствах и соответствующих отображений этих семейств ныне широко применяется во многих разделах математики, и даже общеизвестно, что такой образ действий удовлетворяет новоосвященным канонам функториальности. Поэтому, знакомясь с эргодической теорией, всякий воспринимает функциональный язык как нечто совершенно естественное. Во-вторых, использование функционального языка в эргодической теории было начато Купманом еще на самой ее заре и с тех пор непрерывно всеми продолжалось; в [1] этот язык играет важную, а в [81] — даже основную роль. В-третьих, спектральная теория линейных операторов сама по себе «имеет хорошую репутацию». Поскольку предполагается, что читатель знаком с [1] или [81], я ограничусь лишь немногими замечаниями по поводу функционального языка.

Теорема о спектральном разложении однопараметрической группы унитарных операторов, приведенная в [81], еще не дает полной информации об этой группе и не отвечает, в частности, на вопрос, при каких условиях две такие группы $\{U_1^t\}$ и $\{U_2^t\}$ сопряжены (или, как говорит Халмош [1], спектрально эквивалентны), т. е. когда существует такой унитарный оператор A, что

$$AU_1^t A^{-1} = U_2^t. \tag{П.1}$$

Следующая более сильная теорема, доказательство которой приводится в [93], отвечает на этот и многие другие вопросы. Условимся обозначать через L^2_μ гильбертово пространство функций, суммируемых с квадратом по некоторой мере μ, заданной на окружности $|\lambda| = 1$ или на прямой $-\infty < \lambda < \infty$ в зависимости от того, дискретно ли время t или непрерывно, а через V^t — следующий унитарный оператор в L^2_μ:

$$\begin{aligned} V^t f(\lambda) &= \lambda^t f(\lambda), \text{ если время } t \text{ дискретно},\\ V^t f(\lambda) &= e^{i\lambda t} f(\lambda), \text{ если время } t \text{ непрерывно}. \end{aligned} \tag{П.2}$$

Теорема утверждает, что *для любой группы $\{U^t\}$ гильбертово пространство разлагается в ортогональную прямую сумму конечного или счетного числа инвариантных подпространств H_i, для каждого из которых существует такой изоморфизм*

$$\varphi_i : H_i \to \underbrace{L^2_{\mu_i} \oplus L^2_{\mu_i} \oplus \ldots}_{n_i \text{ раз}},$$

что

$$\varphi_i \circ (U^t \mid H_i) \circ \varphi_i^{-1} = \underbrace{V^t \oplus V^t \oplus \ldots}_{n_i \text{ раз}},$$

причем числа n_i, одно из которых может принимать значение ∞, попарно различны, а меры μ_i, μ_j при $i \neq j$ взаимно сингулярны. Инвариантные пространства H_i и соответствующие им числа n_i определяются однозначно (с точностью до порядка, конечно), а меры μ_i — с точностью до эквивалентности (эквивалентность двух мер понимается в обычном смысле). *Две сопряженные группы $\{U_1^t\}$ и $\{U_2^t\}$ имеют один и тот же набор пар*

$$(n_1, \mu_1), (n_2, \mu_2), \ldots .$$

Совокупность этих пар называется *спектром* группы. Обратно, из приведенной теоремы видно, что при совпадении спектров однопараметрические группы сопряжены.

Спектром динамической системы называется спектр соответствующей группы $\{U^t\}$ на ортогональном дополнении к константам. Ясно, что спектр динамической системы является метрическим инвариантом, т. е. у двух изоморфных систем спектры совпадают.

Спектр, состоящий из одной пары $(1, \mu)$, называется *простым*. *Циклическое подпространство $H(f)$, порожденное элементом f*, — это замыкание множества всевозможных линейных комбинаций элементов вида $U^t f$. Спектр ограничения $\{U^t \mid H(f)\}$ является простым, причем соответствующая мера (вернее сказать, одна из соответствующих данному спектру эквивалентных друг другу мер) следующим образом связана с f. «Автокорреляционная функция» $R_f(t) = (U^t f, f)$, будучи положительно определенной, представляется, по теореме Бохнера, в виде

$$R_f(t) = (U^t f, f) = \int e^{i\lambda t} d\mu_f(\lambda). \tag{П.3}$$

Оказывается, что μ_f как раз и есть искомая мера.

Группу унитарных операторов с *простым лебеговским спектром*, т. е. спектром $(1, \mathrm{mes})$, где mes — обычная мера Лебега на окружности или прямой, можно с помощью преобразования Фурье представить еще более наглядным образом, чем в (П.2). А именно, в случае непрерывного времени можно реализовать гильбертово пространство как $L^2(-\infty, \infty)$ (мера — лебеговская) и группу $\{U^t\}$ как группу операторов сдвига:

$$U^t f(x) = f(x + t).$$

В случае же дискретного времени гильбертово пространство реализуется как пространство $L^2(Z)$ функций $f(k)$ от целочисленного аргумента (мера в множестве Z целых чисел «равномерная», т. е. мера подмножества $A \subset Z$ равна числу его элементов), а группу $\{U^n\}$ как группу операторов сдвига:

$$U^n f(k) = f(k + n).$$

Иными словами, в случае дискретного времени простой лебеговский спектр характеризуется тем, что в гильбертовом пространстве имеется ортонормированный базис $\{e_n\}$, $-\infty < n < \infty$, векторы которого U последовательно переводит друг в друга: $Ue_n = e_{n+1}$. Как видно, существуют динамические системы с бесконечной инвариантной мерой, имеющие простой лебеговский спектр; однако неизвестно, может ли такой спектр быть у системы с конечной инвариантной мерой.

Счетнократный лебеговский спектр — это спектр, состоящий из пары (∞, mes); гильбертово пространство разлагается в этом случае в ортогональную прямую сумму счетного множества циклических подпространств с простым лебеговским спектром.

Определим спектр специального потока $\{T^t\}$, построенного с помощью автоморфизма $T_0 \colon M_0 \to M_0$, который имеет счетнократный лебеговский спектр, и постоянной функции, которую без ограничения общности можно считать равной единице. Фазовым пространством потока $\{T^t\}$ служит $M = M_0 \times [0, 1]$. Ясно, что функции $f(x, s)$ $(x \in M_0, s \in [0, 1))$, зависящие только от s, образуют инвариантное подпространство, в котором спектр дискретный. Ортогональное дополнение к этому подпространству состоит из функций $f(x, s)$, для которых $\int f(x, s)\, dx = 0$ при почти всех s. Обозначим это ортогональное дополнение через H и покажем, что в нем группа унитарных операторов сдвига $\{U^t\}$ имеет счетнократный лебеговский спектр.

В гильбертовом пространстве функций $f(x)$ на M_0 с интегрируемым квадратом и со средним значением нуль существует такой ортонормированный базис f_{kl} (буквы k, l, а также фигурирующие ниже m, p, q, r пробегают все целые числа), что

$$f_{kl}(T_0^n x) = f_{k+n,\, l}(x).$$

Легко видеть, что функции

$$f_{klm}(x, s) = e^{2\pi i m s} f_{kl}(x)$$

образуют ортонормированный базис в H и

$$U^t f_{klm}(x, s) = e^{2\pi i m t} e^{2\pi i m s} f_{k+[t+s],\, l}(x) \tag{П.4}$$

(квадратные скобки обозначают целую часть). Обозначим через H_l гильбертово пространство, базис которого образуют функции f_{klm} с фиксированным l и всевозможными k, m. Ясно, что H распадается в ортогональную прямую сумму пространств H_l. В скалярном произведении

$$(U^t f_{klm}, f_{pqr}) = e^{2\pi i m t} \int_0^1 e^{2\pi i (m-p) s} \left(\int_{M_0} f_{k+[t+s],\, l}(x) \overline{f_{pq}(x)}\, dx \right) ds \tag{П.5}$$

внутренний интеграл при $q \neq l$ равен нулю, следовательно, $U^t f_{klm}$ ортогонально всем пространствам H_q с $q \neq l$. Значит, пространства H_l инвариантны относительно $\{U^t\}$, поэтому достаточно доказать, что спектр ограничения $\{U^t \mid H_l\}$ — однородный лебеговский, т. е. состоит из пары (n, mes), где $1 \leqslant n \leqslant \infty$. А так как из (П.4) видно, что все f_{klm}, $-\infty < k < \infty$, лежат в циклическом пространстве $H(f_{0lm})$, то достаточно доказать следующие два утверждения. Во-первых, в каждом $H(f_{0lm})$ спектр простой лебеговский. Во-вторых, если через $H(f_1, \ldots, f_s)$ обозначать замыкание множества всевозможных линейных комбинаций элементов вида $U^t f_i$, $i = 1, \ldots, s$, то из

$$f_{0lm} \notin H(f_{0lm_1}, \ldots, f_{0lm_s}) \tag{П. 6}$$

следует, что в пространстве

$$H(f_{0lm_1}, \ldots, f_{0lm_s}, f_{0lm}) \ominus H(f_{0lm_1}, \ldots, f_{0lm_s})$$

(знак $\ominus$ означает, что берется ортогональное дополнение ко второму пространству в первом) спектр простой лебеговский.

Начнем с циклического пространства $H(f)$, порожденного элементом $f = f_{0lm}$. Из (П.5) видно, что автокорреляционная функция

$$R_f(t) = (U^t f, f) = (U^t f_{0lm}, f_{0lm}) = 0 \quad \text{при } |t| > 1,$$

ибо в этом случае внутренний интеграл в (П.5) равен нулю при всех s. Следовательно, можно говорить об (обратном) преобразовании Фурье

$$\widetilde{R}_f(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\lambda t} R_f(t)\, dt,$$

которое является аналитической функцией. Сопоставляя формулу

$$R_f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i\lambda t} \widetilde{R}_f(\lambda)\, d\lambda$$

с (П.3), заключаем, что $d\mu_f(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widetilde{R}_f(\lambda)\, d\lambda$. Ввиду аналитичности $\widetilde{R}_f$

отсюда следует, что мера μ_f эквивалентна мере Лебега, т. е. спектр $\{U^t \mid H(f)\}$ — простой лебеговский.

Пусть теперь выполняется (П.6). Из (П.5) видно, что

$$(U^t f_{0lm_i}, f_{0lm}) = 0 \quad \text{при } |t| > 1, \ i = 1, \ldots, s.$$

Поэтому ортогональная проекция g элемента f_{0lm} на пространство $H(f_{0lm_1}, \ldots, f_{0lm_s})$ аппроксимируется линейными комбинациями элементов $U^t f_{0lm_i}$ с $|t| \leqslant 1$; для каждой такой линейной комбинации g_n (П.5) дает

$$(U^t(f_{0lm} - g_n), \ f_{0lm} - g_n) = 0 \quad \text{при } |t| > 3.$$

Отсюда следует, что для вектора $f_{0lm} - g$, который мы снова обозначим через f, имеем

$$f \neq 0, \quad f \perp H(f_{0lm_1}, \ldots, f_{0lm_s}), \quad (U^t f, f) = 0 \quad \text{при } |t| > 3.$$

Аналогично тому, как это делалось выше, заключаем, что в циклическом пространстве

$$H(f) = H(f_{0lm_1}, \ldots, f_{0lm_s}, f_{0lm}) \ominus H(f_{0lm_1}, \ldots, f_{0lm_s})$$

спектр простой лебеговский, что и требовалось доказать.

В заключение напомню, что из совпадения спектров двух динамических систем, т. е. из сопряженности соответствующих групп $\{U_1^t\}$ и $\{U_2^t\}$, еще не следует, вообще говоря, что динамические системы изоморфны. Таким образом, спектральный язык не является, так сказать, полным: некоторые утверждения эргодической теории на нем нельзя высказать. В связи с этим возникает вопрос, как его «пополнить».

Операторы сдвига, помимо унитарности, обладают еще свойством мультипликативности по отношению к поточечному умножению функций:

$$(U^t(fg))(w) = ((U^t f)(w)) \cdot ((U^t g)(w)).$$

Известно [1, 2], что если двум динамическим системам $\{T_1^t\}$ и $\{T_2^t\}$ соответствуют однопараметрические группы унитарных операторов $\{U_1^t\}$ и $\{U_2^t\}$, которые не только сопряжены, но унитарное преобразование A в (П. 1) является также и мультипликативным, то динамические системы $\{T_1^t\}$ и $\{T_2^t\}$ изоморфны. Таким образом, можно «пополнить» функциональный язык, учитывая, что в функциональном пространстве $L^2(M)$ имеется не только структура гильбертова пространства, но и мультипликативная структура. Эта мультипликативная структура отличается от структуры кольца в одном отношении: произведение определено не для всех элементов, ибо произведение двух функций из $L^2(M)$ может уже не принадлежать $L^2(M)$. Рохлин назвал объект, обладающий такой же мультипликативной и гильбертовой структурой, как пространство функций $L^2(M)$, *унитарным кольцом*, и описал унитарные кольца аксиоматически [91]. В переводе на язык унитарных колец динамическим системам соответствуют группы автоморфизмов этих колец.

3. Булевы алгебры и измеримые разбиения

Второй язык эргодической теории — это язык булевых σ-алгебр с мерой и их автоморфизмов. Вместо пространства M и преобразования $T: M \to M$ мы могли бы говорить о σ-алгебре $\mathfrak{B}$ измеримых подмножеств пространства M и о преобразовании $\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$, при котором множество A переходит в TA. При этом, однако, целесообразно считать два множества A и B эквивалентными, если мера их симметрической разности равна нулю, и рассматривать вместо отдельных множеств их классы эквивалентности. При таком отождествлении из $\mathfrak{B}$ получается некоторая новая булева σ-алгебра $\mathfrak{M}$, меру можно считать определенной прямо в $\mathfrak{M}$, а автоморфизм T пространства M определяет некоторый автоморфизм этой алгебры, который мы тоже будем обозначать через T. Можно доказать, что если M, как мы предполагаем,— пространство Лебега, то любой автоморфизм алгебры с мерой $\mathfrak{M}$ порождается некоторым автоморфизмом пространства M. (Надо заметить, что очевидные функториальные соображения подсказывают, что целесообразнее рассматривать отображение $T^{-1}:\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}$, при котором множество A переходит в полный прообраз $T^{-1}(A)$, и соответствующее отображение $T^{-1}:\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}$. Конечно, это не существенно, если T, как мы предполагаем, является автоморфизмом пространства с мерой; но отображение T^{-1} алгебры с мерой имеет смысл и является эндоморфизмом этой алгебры также и в том случае, когда T — не автоморфизм, а всего лишь эндоморфизм пространства с мерой.)

При каноническом отображении $\mathfrak{B}\to\mathfrak{M}$ каждая σ-подалгебра $\mathfrak{B}_1\subset\subset\mathfrak{B}$ переходит в некоторую σ-подалгебру $\mathfrak{M}_1\subset\mathfrak{M}$ и каждая σ-подалгебра $\mathfrak{M}_1\subset\mathfrak{M}$ получается таким путем. Две σ-подалгебры $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2\subset\subset\mathfrak{B}$ определяют одну и ту же подалгебру $\mathfrak{M}_1\subset\mathfrak{M}$ в том и только в том случае, когда для любого множества A, входящего в одну из них, имеется такое множество B, входящее во вторую, что мера симметрической разности $\mu(A\,\Delta\,B)=0$; в этом случае мне кажется естественным писать $\mathfrak{B}_1=\mathfrak{B}_2 \bmod 0$, хотя это не согласуется с обозначениями Рохлина [2], [89]. Обозначим через $\mathfrak{X}$ множество всех σ-подалгебр алгебры $\mathfrak{M}$, частично упорядоченное по включению. Легко видеть, что $\mathfrak{X}$ является полной структурой в том смысле, как это понимается в теории структур [92], т. е. любое множество σ-подалгебр $\{\mathfrak{M}_\alpha\}$ имеет верхнюю грань $\bigvee\limits_\alpha\mathfrak{M}_\alpha$ и нижнюю грань $\bigwedge\limits_\alpha\mathfrak{M}_\alpha$. Автоморфизм $T:\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}$ определяет некоторый автоморфизм структуры $\mathfrak{X}$, который мы тоже будем обозначать через T. Можно говорить о свойствах преобразования $M\to M$ не только в терминах преобразования $\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}$, но, делая еще один шаг, также и в терминах преобразования $\mathfrak{X}\to\mathfrak{X}$.

Данный язык тоже довольно хорошо известен, по крайней мере в той части, в которой речь идет о $\mathfrak{M}$. Во многих (особенно алгебраических) разделах математики подобъекты того или иного объекта образуют структуру, свойствам которой уделяется внимание. Этому в данном случае и соответствует переход от M к $\mathfrak{B}$ и от $\mathfrak{M}$ к $\mathfrak{X}$, тогда как переход от $\mathfrak{B}$ к $\mathfrak{M}$ с алгебраической точки зрения является факторизацией кольца $\mathfrak{B}$ (в котором роль суммы $A+B$ играет симметрическая разность $A\,\Delta\,B$, а произведения AB — пересечение $A\cap B$) по идеалу, состоящему из множеств меры нуль. В эргодической теории «язык $\mathfrak{M}$ » был введен еще до войны Нейманом (отчасти совместно с Г. Биркгофом) и нашел отражение в учебнике [1]. Квазифизические соображения в его пользу, основывающиеся на анализе «исчисления высказываний классической механики», приводятся в [92], гл. XII, § 4. Каждое свойство, которым может обладать или не обладать физическая система в зависимости от того, в каком состоянии она находится, представляется некоторым подмножеством фазового пространства (состоящим из точек, представляющих те состояния, в которых система этим свойством обладает). Рассматривая вопрос об измерениях в классической механике, Нейман пришел к выводу, что, во-первых, в классической механике высказывание о наличии у системы того или иного свойства может быть экспериментально подтверждено или опровергнуто со сколь угодно малой вероятностью ошибки тогда и только тогда, когда это свойство представляется измеримым подмножеством фазового пространства, и что, во-вторых, никакой эксперимент не может дать оснований заключить о выполнении одного свойства и невыполнении другого, если мера симметрической разности соответствующих множеств равна нулю. При последовательном проведении такой точки зрения приходится признать, что физически бессмысленно говорить об отдельных точках фазового пространства, а стало быть — и о самом фазовом пространстве, как о множестве точек; математическим объектом, адекватным «исчислению высказываний классической механики», является булева σ-алгебра $\mathfrak{M}$ (причем фазовое пространство сохраняет смысл как наибольший элемент этой алгебры).

Изложенные доводы, вероятно, достаточно убеждают в естественности языка σ-алгебр, хотя, как проницательный читатель не преминет заметить, эти соображения еще не такого характера, чтобы вести к каким-нибудь конкретным математическим результатам. В то же время в смежном разделе математики — в теории вероятностей — булевы σ-алгебры уже давно вошли в число основных понятий, фигурирующих при изучении случайных процессов. Правда, там предпочитают пренебрежение множествами меры нуль осуществлять de facto, не оформляя этого de jure путем перехода от M и $\mathfrak{B}$ к $\mathfrak{M}$, поэтому рассматриваемые булевы σ-алгебры суть просто σ-алгебры подмножеств пространства элементарных событий M. Зато в теории вероятностей приходится рассматривать не одну только σ-алгебру $\mathfrak{B}$, но и много различных ее подалгебр (например, подалгебру событий, «зависящих только от того, что произошло до момента времени t_0»); при этом две подалгебры $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ играют одинаковую роль, если $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2 \bmod 0$. Когда в эргодическую теорию стали проникать идеи вероятностного происхождения, язык σ-алгебр и в эргодической теории из декоративного украшения превратился в орудие труда. Так, первые две статьи по энтропийной теории — статьи Колмогорова [9, 10] — были написаны на этом языке.) Здесь он, однако, имеет шансы вернуться в исходное состояние, потому что у него имеется конкурент — третий язык, в некотором смысле совершенно эквивалентный второму, но более удобный.

Под *разбиением* того или иного множества всегда понимается разбиение на непересекающиеся подмножества, которые называются *элементами разбиения*. Разбиение η является *подразбиением* разбиения ξ, если каждый элемент разбиения η содержится в некотором элементе разбиения ξ; в этом случае говорят также, что η *мельче чем* ξ, а ξ *крупнее* η, и пишут $\xi \leqslant \eta$. Ясно, что бинарное отношение $\xi \leqslant \eta$ является отношением (частичного) порядка. Два разбиения ξ и η пространства с мерой M *эквивалентны по* mod 0, если существует такое множество N меры 0, что разбиения пространства $M \setminus N$, элементами которых являются пересечения с $M \setminus N$ элементов разбиений ξ и η, совпадают; в этом случае пишут $\xi = \eta \bmod 0$. Запись $\xi \leqslant \eta \bmod 0$ означает, что существуют такие разбиения ξ' и η', что

$$\xi = \xi' \bmod 0, \qquad \eta = \eta' \bmod 0, \ \xi' \leqslant \eta'.$$

Бинарное отношение $\xi \leqslant \eta \bmod 0$ является отношением предпорядка (т. е. оно рефлексивно и транзитивно) и, как легко видеть, из $\xi \leqslant \eta \bmod 0$ и $\eta \leqslant \xi \bmod 0$ следует $\xi = \eta \bmod 0$. Поэтому при отождествлении разбиений, эквивалентных mod 0, бинарное отношение $\xi \leqslant \eta \bmod 0$ становится отношением порядка.

Разбиение ξ пространства Лебега M называется *измеримым*, если существует такая счетная система Σ измеримых множеств, состоящих из элементов разбиения, что для любых двух различных элементов A и B разбиения ξ найдется такое $C \in \Sigma$, которое целиком содержит одно из множеств A, B и в дополнении к которому содержится второе из этих множеств. Система множеств Σ называется *базисом* измеримого разбиения ξ. Разбиение естественно назвать *измеримым по* mod 0, если оно эквивалентно mod 0 измеримому разбиению (при принятых нами определениях отсюда еще не следует, что оно само измеримо). Нужно иметь в виду, что неизмеримые (и неизмеримые по mod 0) разбиения отнюдь не (всегда) являются «патологическими» объектами, как неизмеримые множества или функции. Например, разбиение гладкого многообразия W^m на слои метрически транзитивного слоения $\mathfrak{S}^p$

неизмеримо. С другой стороны, в этом случае любая точка имеет такую окрестность U, что слоение $\mathfrak{S}^p|U$, слоями которого служат связные компоненты пересечений слоев слоения $\mathfrak{S}^p$ с U, является измеримым. Действительно, у любой точки имеется такая окрестность U и такой гомеоморфизм этой окрестности на m-мерный куб $|w_i| < 1$ $(i = 1,\ldots, m)$, при котором слои слоения $\mathfrak{S}^p|U$ переходят в плоскости $w_{p+1} = \mathrm{const},\ldots, w_m = \mathrm{const}$. Ясно, что прообразы при этом гомеоморфизме параллелепипедов

$$|w_1| < 1, \ldots, |w_p| < 1, a_{p+1} < w_{p+1} < b_{p+1}, \ldots, a_m < w_m < b_m,$$

где $a_{p+1}, b_{p+1},\ldots, a_m, b_m$ — рациональные числа, образуют счетную систему измеримых (и даже открытых) множеств, являющуюся базисом разбиения $\mathfrak{S}^p|U$.

Множество классов эквивалентных mod 0 измеримых mod 0 разбиений, снабженное отношением порядка $\xi \leqslant \eta$ mod 0, обозначим через Ξ. Допуская вольность речи, аналогичную обычно практикуемой при работе с функциями и элементами гильбертова пространства $L^2(M)$, различия между разбиением и его классом эквивалентности чаще всего не соблюдают со всей строгостью, равно как и различия между измеримостью разбиения и измеримостью mod 0, равенством и эквивалентностью mod 0 или бинарным отношением $\xi \leqslant \eta$ и отношением $\xi \leqslant \eta$ mod 0. Верхняя грань разбиений ξ_α в структуре Ξ (т. е. верхняя грань их классов эквивалентности) обозначается через $\bigvee\limits_\alpha \xi_\alpha$, а нижняя грань — через $\bigwedge\limits_\alpha \xi_\alpha$. Верхнюю грань конечного или счетного числа измеримых разбиений ξ_n легко описать в терминах операций над множествами, являющимися элементами этих разбиений: если ξ_n — разбиение на множества $\{A_{n\beta}\}$, то элементами разбиения $\bigvee\limits_n \xi_n$ служат множества вида $\bigcap A_{n\beta_n}$. Нижняя грань так просто не описывается. Разбиение, состоящее из одного-единственного элемента — множества M — обозначается через ν, а разбиение на отдельные точки обозначается через ε (легко видеть, что ε измеримо mod 0, хотя и не обязано быть измеримым). При изоморфизме $T: M \to M$ измеримое разбиение ξ переходит в измеримое разбиение $T\xi$, состоящее из множеств $\{TA, A \in \xi\}$; разбиение $\{T^{-1}A, A \in \xi\}$ обозначается через $T^{-1}\xi$. Если $\xi = \eta$ mod 0 и $T = S$ mod 0, то $T\xi = S\eta$ mod 0; поэтому классу эквивалентных по mod 0 автоморфизмов пространства Лебега соответствует некоторый автоморфизм структуры Ξ. Наконец, факторпространство M/ξ, по определению, имеет своими точками элементы разбиения ξ, своими измеримыми подмножествами — такие подмножества, прообразы которых при естественной проекции π: $M \to M/\xi$ измеримы, а мера $\mu_\xi A = \mu\pi^{-1}A$. Если разбиение ξ измеримо, то M/ξ оказывается пространством Лебега.

Каждому измеримому разбиению ξ соответствует некоторая σ-алгебра $\mathfrak{B}(\xi)$, состоящая из всех тех измеримых множеств, которые целиком состоят из элементов разбиения ξ. Оказывается, что и обратно, для любой σ-подалгебры $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}$ существует такое измеримое разбиение ξ, что $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}(\xi)$ mod 0. Если перейти к $\mathfrak{M}$, то получится естественный изоморфизм между Ξ и $\mathfrak{X}$; образ $\mathfrak{B}_1(\xi)$ в $\mathfrak{M}$ обозначим через $\mathfrak{M}(\xi)$. Измеримому разбиению ξ соответствует также подкольцо унитарного кольца $L^2(M)$ (т.е. такое линейное подпространство последнего, которое само является унитарным кольцом в смысле Рохлина по отношению к поточечному умножению функций), состоящее из (классов) функций, постоянных (с точностью до исключительных множеств меры нуль; исключительное множество зависит от функции) на элементах ξ, т. е. из функций, измеримых по отношению к пополнению $\mathfrak{B}^*(\xi)$ σ-алгебры $\mathfrak{B}(\xi)$ (т. е. полному прообразу $\mathfrak{M}(\xi)$ при каноническом отображении $\mathfrak{B} \to \mathfrak{M}$). Соответствие между элементами структуры Ξ и унитарными подкольцами тоже оказывается взаимно-однозначным. Таким образом, язык измеримых разбиений в некотором смысле совершенно эквивалентен первым двум языкам.

Удобство языка измеримых разбиений отчетливо проявляется при рассмотрении условных вероятностей. Рассмотрим сперва, как говорят в теории вероятностей, испытание, могущее иметь своими результатами взаимно исключающие исходы $A_1, A_2, \ldots$, число которых конечно или счетно; на нашем языке речь идет просто о конечном или счетном разбиении ξ пространства с мерой M на измеримые множества A_i. Если $\mu A_i > 0$,— а те A_i, для которых это не так, образуют в совокупности множество меры нуль,— то определена условная вероятность

$$\mu(X \mid A_i) = \frac{\mu(X \cap A_i)}{\mu(A_i)},$$

которая сама является некоторой мерой, причем можно рассматривать ее как меру на A_i. Условная вероятность $\mu(X|\xi)$ события X после испытания ξ — это случайная величина, принимающая на A_i значение $\mu(X|A_i)$; в данном случае эта случайная величина получается из некоторого набора мер на элементах разбиения. В общем же случае, как известно, условная вероятность $\mu(X|\mathfrak{B}_1)$ события X по отношению к σ-алгебре $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}$ является некоторой случайной величиной, но ее нельзя интерпретировать с помощью набора мер на элементах какого-то разбиения. (Этим и объясняется, почему в теории вероятностей, где не желают накладывать ограничений на пространство с мерой, вместо разбиений говорят о σ-алгебрах; язык разбиений не дал бы никаких преимуществ, за исключением того случая, когда разбиение конечное или счетное, но тогда и так все просто.) Однако для пространств Лебега положение оказывается иным. *Системой условных мер* (или, как говорили раньше, *канонической системой мер*), *принадлежащей разбиению* ξ, называется система мер $\mu(.|A)$, каждая из которых определена на некотором элементе A разбиения ξ, причем

1) Почти каждому элементу разбиения (объединение исключительных элементов, если они существуют, имеет меру нуль) соответствует ровно одна мера и пара $(A, \mu(.\,|A))$ является пространством Лебега.

2) Для любого $X \subset \mathfrak{B}$ множество $X \cap A$ измеримо почти во всех A (т. е. во всех, за исключением некоторых A, которые образуют множество меры нуль), мера $\mu(X \cap A \mid A)$ является измеримой функцией точки $A \in M/\xi$ и

$$\mu X = \int\limits_{M/\xi} \mu(X \cap A \mid A)\, d\mu_\xi.$$

Мера $\mu(X|A) = \mu(X \cap A/A)$ называется условной мерой множества $X \subset M$ при условии $A \in M/\xi$. Оказывается [89], что *для любого измеримого разбиения пространства Лебега существует система условных мер*. Эта система однозначна по mod 0, т. е. две такие системы, принадлежащие одному и тому же разбиению, сопоставляют одни и те же меры почти всем элементам A.

Рассмотрим в заключение «сложное» испытание, состоящее из последовательности испытаний $\{\xi_n\}$, n-е из которых имеет исходы $\{A_{n\beta}\}$. Если в результате проведения этих испытаний осуществились исходы $A_{1\beta_1}, \ldots, A_{n\beta_n}, \ldots$, т. е. если $x \in A_{n\beta_n}$, $n = 1, 2, \ldots$, то это эквивалентно тому, что $x \in \bigcap_n A_{n\beta_n}$; но множества такого вида образуют разбиение $\bigvee_n \xi_n$. Таким образом, рассматриваемое «сложное» испытание эквивалентно одному-единственному испытанию, описываемому этим последним разбиением.

Язык измеримых разбиений почти не известен за пределами узкого круга специалистов по эргодической теории. Одна из причин этого, по-видимому, заключается в том, что в других разделах математики нет аналогичных объектов (за исключением разве непрерывных разбиений в теоретико-множественной топологии, но это не такой аналог, который способствовал бы популярности). Другая причина состоит в том, что этот язык является, в общем, более новым, чем первые два, и потому он не отражен в [1] и [81]. Заголовок статьи Рохлина [89] выражает мнение, что измеримые разбиения — это основной объект теории меры. Последнее, несомненно, должно представляться спорным большинству аналитиков («я всю жизнь работал (а) с интегралом Лебега, а об измеримых разбиениях слышу в первый раз»), но так или иначе остается фактом, что язык, как бы специально созданный для энтропийной теории, возник за 10 лет до нее в значительной степени благодаря анализу оснований теории меры.

4. Энтропия и K-системы

Энтропия $H(\xi)$ *измеримого разбиения* ξ определяется следующим образом: если элементы этого разбиения, имеющие меру нуль, образуют в совокупности множество положительной меры, то $H(\xi)=\infty$, а в противном случае

$$H(\xi) = -\sum \mu(A) \lg \mu(A), \tag{П.7}$$

где сумма берется по всем элементам разбиения ξ, имеющим положительную меру. Логарифм lg обычно берется двоичный. Разбиения с конечной энтропией образуют подструктуру $Z \subset \Xi$ (конечно, Z уже не является ни полной, ни даже σ-структурой). Если $\zeta \in Z$, то ζ является mod 0 конечным или счетным разбиением на множества $A_1, A_2, \ldots$, причем в последнем случае при $n \to \infty$ меры $\mu(A_n)$ должны убывать не слишком медленно. На вероятностном языке речь идет об испытании с конечным или счетным числом исходов. Хорошо известны мотивы, побуждающие считать $-\lg \mu(A)$ количеством информации, полученной в том случае, когда в результате испытания осуществился исход A, вероятность которого до испытания была равна $\mu(A)$. Среднее же значение информации, полученной после испытания, дается выражением (П. 7). Эту величину можно также рассматривать как количественную меру той неопределенности в отношении исхода испытания, которая существовала до проведения последнего. Ясно, что $H(\xi)=0$ только при $\xi=\nu$ mod 0.

Пусть, далее, имеются два измеримых разбиения ξ и η. Разбиение ξ индуцирует разбиение $\xi \mid B$ каждого элемента B разбиения η на множества $A \cap B$, где A — элементы разбиения ξ. Рассматривая множество B, снабженное принадлежащей разбиению η условной мерой $\mu(\cdot \mid B)$, как пространство Лебега, можно поставить вопрос об измеримости разбиения $\xi \mid B$. Оказывается, что при почти всех B (исключительные B, если они вообще существуют, образуют в совокупности множество меры нуль) разбиение $\xi \mid B$ измеримо, и можно говорить о его энтропии $H(\xi \mid B)$. (*Средняя*) *энтропия измеримого разбиения* ξ *относительно измеримого разбиения* η определяется как

$$H(\xi \mid \eta) = \int\limits_{M/\eta} H(\xi \mid B)\, d\mu_\eta.$$

Ясно, что $H(\xi)=H(\xi \mid \nu)$. Если $\xi=\xi'$ mod 0, $\eta=\eta'$ mod 0, то $H(\xi' \mid \eta') = H(\xi \mid \eta)$, так что $H(\xi \mid \eta)$ является корректно определенной функцией на $\Xi \times \Xi$. Из определения видно, что $H(\xi \mid \eta)=0$ тогда и только тогда, когда $\xi \leqslant \eta$ mod 0. Между прочим, величину

$$\rho(\xi, \eta) = H(\xi \mid \eta) + H(\eta \mid \xi) \qquad (\text{теперь } \xi, \eta \in Z)$$

можно рассматривать как метрику в Z, по отношению к которой Z оказывается полным метрическим пространством; конечные разбиения образуют всюду плотное множество в Z. Перечень различных свойств энтропии имеется в [11]. На вероятностном языке $H(\xi \mid B)$ есть количественная мера неопределенности в отношении исхода испытания ξ, если известно, что в результате испытания η осуществился исход B. Среднее же количество неопределенности в отношении исхода испытания ξ, которая остается после проведения испытания η, равно $H(\xi \mid \eta)$, а $H(\xi) - H(\xi \mid \eta)$ есть средняя информация о результате испытания ξ, которую можно получить, проведя испытание η.

Пусть $T: M \to M$ — автоморфизм пространства Лебега M. Положим для любого $\xi \in \Xi$

$$\xi_T^n = \bigvee_{k=0}^{n} T^{-k}\xi, \quad \xi_T^- = \bigvee_{k=1}^{\infty} T^{-k}\xi. \tag{П. 8}$$

Если $\zeta \in Z$, то и $\zeta_T^n \in Z$, поэтому энтропия $H(\zeta_T^n) < \infty$. Оказывается, что существует конечный (и даже не превосходящий $H(\zeta)$) предел

$$h(T, \zeta) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\zeta_T^n), \tag{П. 9}$$

который называется *энтропией разбиения* ζ *на единицу времени* (подразумевается: относительно автоморфизма T). Оказывается, далее, что $h(T, \zeta) = H(\zeta|\zeta^-)$, а последнее выражение, в отличие от (П.9), может оказаться конечным и для измеримого разбиения из $\Xi \setminus Z$, так что $h(T, \xi)$ можно определить и для всех $\xi \in \Xi$ посредством формулы

$$h(T, \xi) = H(\xi \mid \xi^-). \tag{П. 10}$$

Однако некоторые свойства h в Ξ весьма отличны от свойств h в Z. Например, из (П.8) и (П.9) видно, что при $\xi, \eta \in Z$ и $\xi \leqslant \eta$ всегда $h(T, \xi) \leqslant h(T, \eta)$, в Ξ же это не так: ε — самое мелкое разбиение, а между тем $\varepsilon^- = \varepsilon$ и

$$h(T, \varepsilon) = 0. \tag{П. 11}$$

Поскольку $\bigvee_{k=0}^{n} T^{-k}\zeta = T^{-n} \bigvee_{k=0}^{n} T^{k}\zeta$, а для любого ξ, как легко видеть, $H(T\xi) = H(\xi)$, то для $\zeta \in Z$ имеем

$$h(T, \zeta) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{k=0}^{n} T^{k}\zeta\right) = h(T^{-1}, \zeta).$$

Напротив, второе определение энтропии (П.10) не симметрично относительно направления времени, и можно показать на примере, что при $\xi \in \Xi / Z$ энтропии $h(T, \xi)$ и $h(T^{-1}, \xi)$ не обязаны совпадать.

Квазифическая интерпретация величины $h(T, \zeta)$ такова. Допустим, что при наблюдении за движением некоторой точки в динамической системе с дискретным временем мы не можем установить координат с абсолютной точностью, но можем только узнать, какому из элементов разбиения $\zeta = \{A_1, A_2, \ldots\}$ принадлежит эта точка; априорное же распределение вероятностей задается той самой инвариантной мерой μ, с которой мы все время работаем. Испытание, состоящие в определении того, какому из множеств $A_1, A_2, \ldots$ принадлежит наша точка в n-й момент времени, есть $T^{-n}\zeta$, ибо если в n-й момент времени мы узнаем, что $T^n x \in A_i$, то это эквивалентно $x \in T^{-n}A_i$. За время n мы, таким образом, производим испытания $\zeta, T^{-1}\zeta, \ldots, T^{-n}\zeta$, совокупность которых эквивалентна одному испытанию ζ_T^n. Общее количество информации, получаемой за время n, равно $H(\zeta_T^n)$, а на единицу времени при большом n приходится, согласно (П.9), как раз $h(T, \zeta)$. Чтобы интерпретировать (П. 10), удобнее говорить о другой величине

$$h(T^{-1}, \xi) = H(\xi \mid \xi_T^+), \quad \text{где } \xi_T^+ = \bigvee_{k=1}^{\infty} T^{k}\xi.$$

Задание исхода испытания ξ_T^+ означает, что заданы результаты наблюдений во все моменты времени в прошлом, поэтому $H(\xi \mid \xi_T^+)$ есть количество информации, доставляемой наблюдением в некоторый момент времени, при условии, что такие наблюдения уже велись длительное время вплоть до этого момента. При такой трактовке (П.11) является просто лаконичной формулировкой детерминизма Лапласа.

Энтропия $h(T)$ *автоморфизма* T (*и каскада* $\{T^n\}$) определяется как $\sup h(T, \xi)$, где верхнюю грань можно брать по всем конечным разбиениям, или по всем $\xi \in Z$, или даже по всем $\xi \in \Xi$,— результат получается одинаковый. *Энтропия потока* $\{T^t\}$ определяется как энтропия $h(T^1)$ автоморфизма T^1; мотивировка такого определения дается теоремой Абрамова [85], согласно которой

$$h(T^t) = |t| h(T^1).$$

В той же работе Абрамова получена следующая формула для энтропии специального потока $\{T^t\}$, построенного по автоморфизму T_0 пространства Лебега M_0 с мерой μ_0 и функции $F(x)$:

$$h(T^t) = \frac{|t| h(T_0)}{\int\limits_{M_0} F(x)\, d\mu_0}. \qquad (\text{П. } 12)$$

Из самого определения энтропии следует, что она является метрическим инвариантом. С помощью энтропии впервые удалось показать, что существуют неизоморфные динамические системы с одинаковым непрерывным спектром [9]. Следует заметить, что в настоящее время известны также и такие примеры неизоморфных систем, у которых совпадают и спектр, и энтропия. Спектр и энтропия не вполне независимы: если энтропия положительна, то в спектре каскада имеется счетнократная лебеговская компонента [86].

Автоморфизмы с нулевой энтропией можно охарактеризовать, не пользуясь понятием энтропии. Разбиение ξ называется *инвариантным* (соответственно *вполне инвариантным*) относительно динамической системы $\{T^t\}$, если при $t > 0$ $T^t\xi \geqslant \xi \bmod 0$ (соответственно $T^t\xi = \xi \bmod 0$). В определении энтропии автоморфизма

$$h(T, \xi) = \sup_{\xi \in \Xi} H(\xi \mid \xi_T^-)$$

верхнюю грань достаточно брать по инвариантным разбиениям, ибо ξ_T^- инвариантно и

$$H(\xi_T^- \mid (\xi_T^-)_T^-) = H(T\xi_T^- \mid \xi_T^-) = H(\xi \vee \xi_T^- \mid \xi_T^-) = H(\xi \mid \xi_T^-).$$

Но если ξ инвариантно, то $\xi_T^- = T^{-1}\xi$, поэтому $h(T, \xi) = H(\xi | T^{-1}\xi)$ и равенство нулю этой энтропии означает, что $\xi \leqslant T^{-1}\xi \bmod 0$. После сказанного ясно, что автоморфизмы с нулевой энтропией полностью характеризуются следующим свойством: всякое инвариантное измеримое разбиение является вполне инвариантным.

Для гладких динамических систем хотелось бы связать энтропию, определение которой является чисто метрическим, с такими характеристиками системы, которые формулируются в более обычных для теории дифференциальных уравнений терминах,— скажем, посредством уравнений в вариациях. Некоторые результаты в этом направлении принадлежат Синаю и Кушниренко. Синай показал, что энтропия ($У$)-системы является, в некотором смысле, средним коэффициентом экспоненциального разбегания траекторий; точную формулировку см. в § 25 настоящей работы. Энтропия выступает здесь не как характеристика неопределенности, а как характеристика неустойчивости, что подтверждает интуитивно ясную связь между тем и другим. Кушниренко доказал [94], что энтропия произвольной гладкой системы конечна, и получил для нее некоторую оценку сверху. Эта оценка тоже дается в терминах скорости разбегания траекторий. В частности, если все решения уравнений в вариациях растут медленнее экспоненты:

$$\lim_{t\to\infty} | \widetilde{T}^t \omega | e^{-ct} = 0$$

при любом $c > 0$ (т. е. характеристические числа в смысле Ляпунова — Перрона неположительны), то энтропия равна нулю. Два интересных примера — нильпоток и орициклический поток; впрочем, в обоих случаях равенство энтропии нулю было известно еще до работы Кушниренко.

Теперь я приведу определение K-системы. Так называется динамическая система $\{T^t\}$, для которой существует такое измеримое инвариантное разбиение ξ, что

$$\bigvee_{t=-\infty}^{\infty} T^t\xi = \varepsilon \bmod 0 \ \text{ и } \bigwedge_{-\infty}^{\infty} T^t \xi = \nu \bmod 0.$$

Для K-каскада можно дать несколько других определений, эквивалентных этому. Для K-потоков пока что других определений нет.

Разбиение ξ в определении K-системы не может быть вполне инвариантным, ибо в противном случае мы имели бы

$$\varepsilon = \bigvee T^t\xi = \xi = \bigwedge T^t\xi = \nu;$$

ясно также, что если $\{T^t\}$ — K-поток, то ξ не может быть вполне инвариантным относительно каскада $\{T^n\}$. Отсюда следует, что K-система имеет положительную энтропию.

K-системы обладают счетнократным лебеговским спектром и перемешиванием всех степеней. В случае дискретного времени наличие очень сильного перемешивания можно даже принять за определение K-системы. А именно, оказывается, что каскад $\{T^n\}$ является K-каскадом тогда и только тогда, когда для любого измеримого множества A и любого измеримого конечного разбиения ζ

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{B\in\mathfrak{M}\left(\bigvee\limits_{k=n}^{\infty} T^k\zeta\right)} |\mu(A \cap B - \mu(A)\mu(B)| = 0.$$

Здесь $\mathfrak{M}(\xi)$, как и в п.3, обозначает σ-алгебру, определяемую разбиением ξ.

5. Динамические системы с трансверсальными слоениями

В этом пункте приводятся некоторые результаты Синая о гладких динамических системах с трансверсальными слоениями. Напомню вкратце еще раз относящиеся сюда определения из § 4. Слоение *трансверсально*, если оно инвариантно относительно динамической системы и является либо *сжимающимся*, либо *расширяющимся*, т. е. под действием $\widetilde{T}^t$ любой вектор, касающийся слоя, либо уменьшается, либо увеличивается по длине с экспоненциальной скоростью, причем соответствующая оценка предполагается равномерной. В большинстве случаев приходится, кроме того, предполагать, что слоение абсолютно непрерывно; иногда достаточно несколько меньшего (см. ниже). *Динамическая система с трансверсальным слоением* — это система, имеющая хотя бы одно трансверсальное слоение. Не предполагается, что система имеет и сжимающееся, и расширяющееся слоения, хотя не известно примера, в котором существовало бы, скажем, только расширяющееся слоение и не существовало бы сжимающегося*. Мы видели в § 4, что система, в том числе и ($У$)-система, может иметь несколько различных сжимающихся или расширяющихся слоений, хотя в случае ($У$)-системы мы уделяли внимание только слоениям максимальной размерности $\mathfrak{S}^k$ и $\mathfrak{S}^l$.

Пусть η — какое-нибудь разбиение, не предполагаемое измеримым. Его *измеримой оболочкой* $\nu(\eta)$ называется самое мелкое mod 0 среди всех измеримых разбиений ξ, для которых $\xi \leqslant \eta$ mod 0:

$$\nu(\eta) = \bigvee_{\substack{\xi \leqslant \eta \bmod 0 \\ \xi \in \Xi}} \xi \quad \text{(верхняя грань берется в } \Xi).$$

Вспоминая определение метрически транзитивного слоения из § 5, можно сказать, что слоение $\mathfrak{S}^p$ метрически транзитивно в том и только в том случае, когда $\nu(\mathfrak{S}^p) = \nu$.

Теорема Синая. *Если эргодическая система $\{T^t\}$ имеет сжимающееся трансверсальное слоение $\mathfrak{S}^p$ с касательным полем X^p_w, то существует инвариантное измеримое разбиение ξ, элементы которого суть подмножества слоения $\mathfrak{S}^p$ (т. е. $\xi \geqslant \mathfrak{S}^p$) и*

$$\bigvee_{t=-\infty}^{\infty} T^t \xi = \varepsilon, \qquad \bigwedge_{t=-\infty}^{\infty} T^t \xi = \nu(\mathfrak{S}^p),$$

$$h(T^1, \xi) = \int_{W^m} \lg \lambda(w)\, dw, \tag{П.13}$$

где $\lambda(w)$ — величина, обратная к коэффициенту объемного сжатия слоя слоения $\mathfrak{S}^p$ в точке w:

$$\frac{1}{\lambda(\omega)} = \text{объем } \widetilde{T}^1 \text{ (единичного куба пространства } X^p_w).$$

В доказательстве теоремы Синая используется, собственно говоря, не абсолютная непрерывность слоения $\mathfrak{S}^p$, а только более слабое свойство, которое он включает в определение слоения. Это свойство состоит в следующем: любая точка имеет такую окрестность U, что условные меры на элементах разбиения $\mathfrak{S}^p | U$ (которое при достаточной малости U измеримо) эквивалентны p-мерной мере Лебега. Из (П.13), в частности, следует, что $h(T^1, \xi) > 0$, а значит и подавно $h(T^1) > 0$; поэтому *любая динамическая система с трансверсальным слоением имеет положительную энтропию*. Это единственный результат, так сказать, окончательного (а не технического) характера, в доказательстве которого не используется в полном объеме абсолютная непрерывность слоения; во всех дальнейших рассуждениях она уже требуется.

Рассмотрим ($У$)-систему $\{T^t\}$ и обычное сжимающееся слоение $\mathfrak{S}^k$. Система $\{T^t\}$ эргодична (теорема 4) и $\nu(\mathfrak{S}^k) = \nu$, если время дискретно (теорема 11) или если время непрерывно и выполняется вторая возможность альтернативы из теоремы 15. Сопоставляя это с теоремой Синая и с определением K-системы, немедленно получаем теоремы 5 и 7. (В их доказательстве, как мы видим, действительно используется теорема об абсолютной непрерывности, ибо она неоднократно используется в доказательстве теорем 4, 11 и 15.) Синай доказал также, что в данном случае разбиение ξ, построенное в его теореме, обладает тем свойством, что $h(T^1, \xi) = h(T^1)$; таким путем он получил приведенную в § 25 формулу для энтропии ($У$)-системы.

* В § 7 работы Синая [69] рассматривается чисто метрический вариант теории, в котором фазовое пространство не предполагается многообразием, а вместо трансверсального слоения фигурирует «трансверсальный поток» — метрический аналог одномерного трансверсального слоения. Трансверсальный поток — это поток $\{S^s\}$, траектории которого под действием преобразований T^t переходят друг в друга, причем временна́я длина отрезка траектории уменьшается или увеличивается в зависимости от знака t и от того, играет ли поток $\{S^s\}$ роль сжимающегося или расширяющегося слоения; должны выполняться еще некоторые условия, которые уточняют характер этого сжатия или растяжения и которых я приводить не буду. В одном из рассмотренных Синаем примеров (автоморфизм соленоидальной группы), по-видимому, существует только сжимающийся трансверсальный поток.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Р. Халмош. Лекции по эргодической теории. М., ИЛ, 1959.
2. В. А. Рохлин. Избранные вопросы метрической теории динамических систем.— Успехи матем. наук, 1949, т. 4, № 2, 57—128.
3. Э. Картан. Геометрия римановых пространств. М.—.Л., Гостехиздат, 1936.
4. В. И. Арнольд, Я. Г. Синай. О малых возмущениях автоморфизмов тора.— Докл. АН СССР, 1962, т. 144, № 4, 695—698.
5. В. И. Арнольд, Я. Г. Синай. Поправка.— Докл. АН СССР, 1963, т. 150, № 5, 958.
6. Э. Хопф. Статистика геодезических линий на многообразиях отрицательной кривизны.— Успехи матем. наук, 1949, т. 4, № 2, 129—170.
7. E. Hopf. Statistik der Lösungen geodätischer Probleme vom unstabilen Typus. II. Math. Ann, 1940, Bd. 117, № 4, 590—608.
8. А. А. Андронов, Л. С. Понтрягин. Грубые системы.— Докл. АН СССР, 1937, т. 14, № 5, 247—250; или А. А. Андронов. Собрание трудов. Изд-во АН СССР, 1956, стр. 183—187.
9. А. Н. Колмогоров. Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега.— Докл. АН СССР, 1958, т. 119, № 5, 861—865.
10. А. Н. Колмогоров. Об энтропии на единицу времени, как метрическом инварианте.— Докл. АН СССР, 1959, т. 124, № 4, 754—755.
11. В. А. Рохлин. Точные эндоморфизмы пространства Лебега.— Изв. АН СССР, серия матем., 1961, т. 25, № 4, 499—530.
12. Я. Г. Синай. Динамические системы со счетнократным лебеговским спектром. I.— Изв. АН СССР, серия матем., 1961, т. 25, № 6, 899—924.
13. В. А. Рохлин. Новый прогресс в теории преобразований с инвариантной мерой.— Успехи матем. наук, 1960, т. 15, № 4, 3—26.
14. Я. Г. Синай. Вероятностные идеи в эргодической теории. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Uppsala 1963, pp. 540—559.
15. Г. Ф. де Баггис. Грубые системы двух дифференциальных уравнений.— Успехи матем. наук, 1955, т. 10, № 4, 101—126.
16. M. M. Peixoto. Structural stability on two-dimensional manifolds. Topology, 1962, v. 1, № 2, 101—120.
17. С. Смейл. Структурно устойчивый дифференцируемый гомеоморфизм с бесконечным числом периодических точек. Тезисы доклада на симпозиуме по нелинейным колебаниям. Киев, Институт математики АН УССР, 1961, стр. 1—3; или Труды Международного симпозиума по нелинейным колебаниям. Киев, Изд-во АН УССР, 1963, т. II стр. 365—366.
18. С. Смейл. Динамические системы и проблема топологической сопряженности диффеоморфизмов. Сб. переводов «Математика», 1967, т. 11, № 4, 69—78.
19. Д. В. Аносов. Грубость геодезических потоков на компактных римановых многообразиях отрицательной кривизны.— Докл. АН СССР, 1962, т. 145, № 4, 707—709.
20. Д. М. Гробман. О гомеоморфизме систем дифференциальных уравнений.— Докл. АН СССР, 1959, т. 128, № 5, 880—881.
21. Д. М. Гробман. Топологическая классификация окрестностей особой точки в n-мерном пространстве.— Матем. сборник, 1962, т. 56, № 1, 77—94.
22. Ph. Hartman. A lemma in the theory of structural stability of differential equations. Proc. Amer. Math. Soc., 1960 v. 11, № 4, 610—620.
23. Ph. Hartman. On the local linearization of differential equations. Proc. Amer. Math. Soc. 1963, v. 14, № 4, 568—573.
24. G. A. Hedlund. The dynamics of geodesic flows. Bull. Amer. Math. Soc. 1939, v. 45, № 4, 241—260.
25. Г. Буземан. Геометрия геодезических. М., Физматгиз, 1962.

26. Х. Х. Каримова. О геодезических потоках в трехмерных пространствах переменной отрицательной кривизны.— Вестник МГУ, серия матем., 1959, № 5, 3—14.
27. О. С. Парасюк. Ергодичність геодезичних потоків на деяких тримірних многообразях змінної вид'є мної кривизни.— Докл. АН УССР, 1953, № 6, 387—388.
28. Y. N. Dowker. Реферат, Mathem. Rev., 1955, v. 16, № 4, 358.
29. И. М. Гельфанд, С. В. Фомин. Геодезические потоки на многообразиях постоянной отрицательной кривизны.— Успехи матем. наук., 1952, т. 7, № 1, 118—137.
30. F. J. Mautner. Geodesic flows and unitary representations. Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1954, v. 40, № 1,33—36.
31. F. J. Mautner. Geodesic flows on symmetric Riemann spaces. Ann. Math. 1957, v. 65, № 3, 416—431.
32. О. С. Парасюк. Потоки гороциклов на поверхностях постоянной отрицательной кривизны.— Успехи матем. наук, 1953, т. 8, № 3, 125—126.
33. C. C. Moore. Ergodicity of flows on homogeneous spaces. Amer. J. Math., 1966, v. 88, N 1, 154—178.
34. Л. Ауслендер, Л. Грин, Ф.Хан. Потоки на однородных пространствах. М., «Мир», 1966.
35. L. Auslander. Modifications of solvmanifolds and G-induced flows. Amer. J. Math., 1966, v. 88, N 3, 615—625.
36. L. Auslander, F. Hahn. Discrete transformations on tori and flows on solvmanifolds. Bull. Amer. Math. Soc. 1962, v. 68, № 6, 614—615.
37. Я. Г. Синай. Геодезические потоки на многообразиях отрицательной постоянной кривизны.— Докл. АН СССР, 1960, т. 131, № 4, 752—755.
38. Я. Г. Синай. Геодезические потоки на компактных поверхностях отрицательной кривизны.— Докл. АН СССР, 1961, т. 136, № 3, 549—552.
39. В. И. Арнольд. Несколько замечаний о потоках линейных элементов и реперов.— Докл. АН СССР, 1961, т. 138, № 2, 255—257.
40. В. И. Арнольд. Замечания о числах вращения.—Сибирский матем. ж., 1961, т. 2, № 6, 807—813.
41. E. Hopf. Closed surfaces without conjugate points. Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 1948, v. 34, № 2, 47—51.
42. К. Шевалле. Теория групп Ли, I. М., ИЛ, 1948.
43. J. Hadamard. Sur l'itération et les solutions asymptotiques des équations différentielles. Bull. Soc. Math. France, 1901, t. 29, 224—228.
44. O. Perron. Über Stabilität und asymptotisches Verhalten der Integrale von Differentialgleichungssystemen. Math. Zs., 1928, Bd. 29, № 1, 129—160.
45. O. Perron. Über Stabilität und asymptotisches Verhalten der Lösungen eines Systems endlicher Differenzengleichungen. J. reine u. angew. Math., 1929, Bd. 161, № 1, 41—64.
46. O. Perron. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen. Math. Zs. 1930, Bd. 32, 703—728.
47. В. В. Немыцкий, В. В. Степанов. Качественная теория дифференциальных уравнений, изд. 2. М.— Л., Гостехиздат, 1949.
48. С. Лефшец. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М., ИЛ, 1961.
49. А. М. Ляпунов. Общая задача об устойчивости движения. М.— Л., Гостехиздат, 1950.
50. Ta Li. Die Stabilitätsfrage bei Differenzengleichungen. Acta Mathematica, 1934, v. 63, 99—141.
51. А. Д. Майзель. Об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений. Труды Уральского Политехнического института, сборник 51 «Математика». Свердловск, 1954, стр. 20—50.
52. J. L. Massera, J. J. Schäffer. Linear differential equations and functional analysis, I. Ann. Math. 1958, v. 67, № 3, 517—573.
53. Д. В. Аносов. Многомерный аналог одной теоремы Адамара. Научные доклады высшей школы, физ.-матем. науки, 1959, № 1, 3—12.
54. Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., ИЛ, 1958.
55. Z. Szmydt. On the degree of regularity of surfaces formed by the asymptotic integrals of differential equations. Ann. Polon. Mathematici, 1955, 2, № 2, 294—313.
56. S. Sternberg. On the behavior of invariant curves near a hyperbolic point of a surface transformation. Amer. J. Math. 1955, v. 77, № 3, 526—534.
57. S. Sternberg. Local contractions and a theorem of Poincaré. Amer. J. Math. 1957, v. 79, № 4, 809—824.
58. Ph. Hartman. On local homeomorphisms of euclidean spaces. Symposium internacional de ecuaciones differenciales ordinarias, publicado por la Universidad Nacional Autónoma de México y la Sociedad Matemática Mexicana, 1961, 220—241, или Boletin de la Sociedad Matemática Mexicana, 1960, v. 5, 220—241.
59. Н. Н. Боголюбов. О некоторых статистических методах в математической физике. Львов, Изд. АН УССР, 1945.
60. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, изд. 2. М., Физматгиз, 1958.

61. Б. П. Демидович. Об ограниченных решениях некоторой нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.—Матем. сборник, 1956, т. 40, №1, 73—94.
62. Д. В. Аносов. О предельных циклах систем дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных.— Матем. сборник, 1960, т. 50, № 3, 299—334.
63. Я. Г. Синай. Об одной «физической» системе, имеющей положительную энтропию.— Вестник МГУ, серия I (матем., мех.), 1963, № 5, 6—12.
64. Я. Г. Синай. К обоснованию эргодической гипотезы для одной динамической системы статистической механики.— Докл. АН СССР, 1963, т. 153, № 6, 1261—1264.
65. A. Grant. Surfaces of negative curvature and permanent regional transitivity. Duke Math. J., 1939, v. 5, № 2, 207—229.
66. G. A. Hedlund. Fuchsian groups and mixtures. Ann. Math. 1939, v. 40, № 2, 370—383.
67. G. A. Hedlund. Fuchsian groups and transitive horocycles. Duke Math. J., 1936, v. 2, № 3, 530—542.
68. Д. В. Аносов. Эргодические свойства геодезических потоков на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны.— Докл. АН СССР, 1963, т. 151, № 6, 1250—1252.
69. Я. Г. Синай. Классические динамические системы со счетнократным лебеговским спектром, II.— Изв. АН СССР, серия матем., 1966, т. 30, № 1, 15—68.
70. M. C. Peixoto, M. M. Peixoto. Structural stability in the plane with enlarged boundary conditions. Anais da Acad. Brasileira de Ciências, 1959, v. 31, № 2, 135—160.
71. I. Kupka. Stabilité des variétés invariants d'un champ de vecteurs pour les petites perturbations. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris, 1964, t. 258, № 17, Groupe 1, 4197—4200.
72. H. Kneser. Reguläre Kurvenscharen auf den Ringflächen. Math. Ann, 1923, Bd. 91, H. 1/2, 135—154.
73. A. Aepply, L. Markus. Integral equivalence of vector fields on manifolds and bifurcation of differential systems. Amer. J. Math. 1963, v. 85, № 4, 633—654.
74. B. L. Reinhart. Line elements on the torus, Amer. J. Math., 1959, v. 81, № 3, 617—631.
75. L. Markus. Structurally stable differential systems. Ann. Math., 1961, v. 73, № 1, 1—19.
76. Ph. Hartman. On exterior derivatives and solutions of ordinary differential equations. Trans. Amer. Math. Soc., 1959, v. 91, № 2, 277—293.
77. Ph. Hartman. On uniqueness and differentiability of solutions of ordinary differential equations. Nonlinear Problems, edited by R. Langer. Madison. University of Wisconsin Press, 1963, 219—232.
78. S. Sternberg. Lectures on Differential Geometry. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.
79. С. Смейл. Диффеоморфизмы со многими периодическими точками. Сб. переводов «Математика», 1967, т. 11, № 4, 88—106.
80. В. А. Рохлин. Метрические свойства эндоморфизмов копактных коммутативных групп.— Изв. АН СССР, серия матем., 1964, т. 28, № 4, 867—874.
81. Э. Хопф. Эргодическая теория.— Успехи матем. наук, 1949, т. 4, № 1, 113—182.
82. Д.В. Аносов, Я. Г. Синай. Некоторые гладкие эргодические системы.—Успехи матем. наук, 1967, т. 22, № 5.
83. M. M. Peixoto. Structural stability on two-dimensional manifolds — a further remark. Topology, 1963 v. 2, № 2, 179—180.
84. N. Wiener.. The ergodic theorem. Duke Mathematical Journal, 1939, v. 5, № 1, 1—18.
85. Л. М. Абрамов. Об энтропии потока.— Докл. АН СССР, 1959, т. 128, № 5, 873—876.
86. В. А. Рохлин. Об энтропии метрического автоморфизма.— Докл. АН СССР, 1959, 124, №, 5, 980—983.
87. I. M. Gelfand. Automorphic functions and theory of representations. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Uppsala 1963, pp. 74—85.
88. С. Г. Гиндикин. Алгебраические вопросы теории функций нескольких комплексных переменных.— В сб. «Математический анализ. 1963. (Итоги науки. Ин-т научной информации АН СССР)». М., 1965, стр. 81—124.
89. В. А. Рохлин. Об основных понятиях теории меры.— Матем. сборник, 1949, т. 25, № 1, 107—150.
90. А. М. Вершик. Измеримая реализация непрерывных групп автоморфизмов унитарного кольца.— Изв. АН СССР, серия матем., 1965, т. 29, № 1, 127—136.
91. В. А. Рохлин. Унитарные кольца.— Докл. АН СССР, 1948, т. 59, № 4, 643—646.
92. Г. Биркгоф. Теория структур. М., ИЛ, 1952.
93. А. И. Плеснер. Спектральная теория линейных операторов. М., изд-во «Наука», 1965.
94. А. Г. Кушниренко. Оценка сверху энтропии классической динамической системы.— Докл. АН СССР, 1965, т. 161, № 1, 37—38.
95. С. П. Новиков. Топология слоений. Труды Московского Математического Общества, 1965, т. 14, 248—278.

96. Г. А. Маргулис. О некоторых вопросах, связанных с теорией $У$-систем в смысле Д. В. Аносова. Международный математический конгресс в Москве, тезисы кратких научных сообщений, обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1966, стр. 35.
97. M. Artin and B. Mazur. On periodic points. Annals of Math., 1965, v. 81, № 1 и 1—14. (Русский перевод будет опубликован в сб. переводов «Математика»), 1967, т. 11, № 5).
98. Я. Г. Синай. Асимптотика числа замкнутых геодезических на компактных многообразиях отрицательной кривизны. Изв. АН СССР, серия матем., 1966, т. 30, № 6, 1275—1296.
99. Г. Буземан. Экстремали в замкнутых гиперболических пространственных формах. Сборник переводов «Математика», 1966, т. 10, № 4, 140—145.
100. Е. В. Гайдуков. Асимптотические геодезические на римановом многообразии, негомеоморфном сфере. Докл. АН СССР, 1966, т. 169, № 5, 999—1001.
101. L. W. Green. Geodesic instability. Proc. Amer. Math. Soc., 1956, v. 7, № 3, 438—448.
102. Ph. Hartman. Ordinary differential equations. New York, Wiley, 1964.
103. Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман, В. В. Немыцкий. Теория показателей Ляпунова. М., изд-во «Наука», 1966.
104. G. Reeb. Sur certaines propriétés topologiques des tragectoires des systèmes dynamiques. Acad. Roy. Belg., Cl. Sci., Mémoires, Coll. in 8°, 1952, t. 27, № 9.

ОГЛАВЛЕНИЕ