МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

ФУНКЦИИ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ И КЛАССЫ ПОСТА

С. В. ЯБЛОНСКИЙ
Г. П. ГАВРИЛОВ
В. Б. КУДРЯВЦЕВ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1966

ФУНКЦИИ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ И КЛАССЫ ПОСТА

С. В. ЯБЛОНСКИЙ
Г. П. ГАВРИЛОВ
В. Б. КУДРЯВЦЕВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1966

517.1
Я 14
УДК 512.8+164

2-2-3
116-66

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В 1921 году появилось сообщение о крупном исследовании в области алгебры логики, выполненном известным американским математиком Э. Постом. Однако только через 20 лет, в 1941 году, автору удалось оформить этот труд в виде монографии «Two-valued iterative systems»*). Основным результатом этой работы является построение всех подалгебр (замкнутых систем) алгебры логики. Это дало возможность сильно продвинуть разработку проблематики полноты. Здесь следует упомянуть установление для каждой замкнутой системы необходимых и достаточных условий полноты, позволяющих выяснять возможность порождения этой системы из данной ее подсистемы. Оказалось, что каждая замкнутая система функций алгебры логики порождается некоторой своей конечной подсистемой. Эти результаты теперь кажутся еще интереснее, так как накопилось много фактов**), выявляющих существенное различие алгебры логики и многозначных логик.

Изучение структуры замкнутых систем было необходимым для решения вопросов полноты, т. е. вопросов, связанных со свойствами самих замкнутых систем, и, в конечном счете, со свойствами алгебры логики. Оно

*) Post E., Introduction to a general theory of elementary propositions. Amer. J. Math. **43** (1921); Post E., Two-valued iterative systems, 1941.

) Słupecki J., Kryterium petnosci wielowartosciowych systemow logiki zdan. Comptes rendus des séances de la Societé des Sciences et des Lettres de Varsovie, Cl. III **32 (1939); Яблонский С. В., Функциональные построения в k-значной логике, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 51, Изд-во АН СССР, 1958; Янов Ю. И., Мучник А. А., О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса, Доклады АН СССР **127**, № 1 (1959).

было важным для исследования возможностей аксиоматизации замкнутых систем *), являющейся частью более крупной проблемы — тождественных преобразований управляющих систем. В самое последнее время результаты Поста дали выход за пределы алгебры логики. Они нашли свое приложение в решении вопросов синтеза управляющих систем **) и в исследовании надежности управляющих систем ***).

Таким образом, результаты Поста являются существенным вкладом в алгебру логики и расширяют возможности ее приложений. Знакомство с этими исследованиями будет, несомненно, интересным для специалистов в области логики, алгебры и теоретической кибернетики.

Данный труд, как это отражено в его заглавии, содержит упомянутые результаты Поста и опирается на его работу (см. сноску *) на стр. 7). Из нее заимствована общая идея доказательства, формулировки многих лемм и некоторые рассуждения. В то же время, стремясь упростить изложение, доказательство значительно переработано. В отличие от Поста мы считаем, что коль скоро дана функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, даны также все функции, отличающиеся от f фиктивными (несущественными) переменными. Благодаря этому получается более простая структура замкнутых классов, чем структура, описанная у Поста. В ней отсутствует группа тривиальных замкнутых классов (это классы O_i^*, S_i^*, P_i^*). В остальном обе структуры совпадают. Для удобства ссылок мы сохранили для замкнутых классов обозначения Поста.

Работа состоит из двух частей. В гл. I первой части вводятся основные понятия алгебры логики и приводится ряд общих теорем. Эта глава по своему содержанию (так же как и глава II) тесно примыкает к работе одного из авторов [30]. В гл. II — IV первой части рассматриваются некоторые специальные замкнутые классы и связанные с ними итерационные свойства. В связи с этим доказывается большое количество лемм. Основные построения производятся в следующей части. В гл. I второй части строятся все замкнутые классы функций алгебры логики. Здесь же показывается, что других замкнутых классов нет, каждый замкнутый класс порождается своей конечной подсистемой и т. п. В гл. II монтируется структура всех замкнутых классов, исходя из структур для отдельных групп замкнутых классов. На основе этого уточняются некоторые теоремы гл. I и формулируются теоремы о полноте. В конце приводятся: сводная таблица замкнутых классов с указанием их свойств, структура классов по включению (см. рис. 19), литература для дальнейшего знакомства с алгеброй логики, список обозначений и предметный указатель.

---

*) Линдон Р. К., Тождества в конечных алгебрах, Кибернетический сборник, № 1, ИЛ, 1960; Вишин В. В., Тождественные преобразования в четырехзначной логике, Доклады АН СССР **150**, № 4 (1963); Мурский В. Л., Существование в трехзначной логике замкнутого класса с конечным базисом, не имеющего конечной полной системы тождеств, Докл. АН СССР **163**, № 4 (1965).

**) Нечипорук Э. И., О сложности схем в некоторых базисах, содержащих нетривиальные элементы с нулевыми весами, Сб. «Проблемы кибернетики», № 8, Физматгиз, 1962.

***) Мучник А. А., Гиндикин С. Г., О полноте системы ненадежных элементов, реализующих функции алгебры логики, Доклады АН СССР **144**, № 5 (1962); Кириенко Г. И., О синтезе самокорректирующихся схем из функциональных элементов, Сб. «Проблемы кибернетики», № 12, Изд-во «Наука», 1964.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

§ 1. Определение функции. Элементарные функции

Мы исходим из некоторого счетного алфавита переменных $U = \{u_\nu\}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ В дальнейшем во избежание употребления сложных индексов мы будем использовать для обозначения букв этого алфавита метасимволы x, y, z с индексами или без них.

Пусть C_1 обозначает множество всех функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *), переменные которых определены на множестве $E^2 = \{0, 1\}$ и таких, что $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in E^2$, если $\alpha_i \in E^2$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Функции из C_1 мы будем называть *функциями алгебры логики*. Очевидно, что функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ полностью определена, если задана таблица 1.

Таблица 1

x_1	x_2	$\ldots$	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$
0	0	$\ldots$	0	0	$f(0, 0, \ldots, 0, 0)$
0	0	$\ldots$	0	1	$f(0, 0, \ldots, 0, 1)$
0	0	$\ldots$	1	0	$f(0, 0, \ldots, 1, 0)$
0	0	$\ldots$	1	1	$f(0, 0, \ldots, 1, 1)$
.	.	...	.	.	. . . .
1	1	$\ldots$	1	1	$f(1, 1, \ldots, 1, 1)$

*) В дальнейшем, если не будет сделано оговорок, запись $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ означает, что переменные из алфавита U, которым соответствуют различные обозначения x_i и x_j ($i \neq j$), различны.

Если рассматривать наборы

$$(0, 0, \ldots, 0, 0), (0, 0, \ldots, 0, 1), \ldots, (1, 1, \ldots, 1, 1)$$

как разложения в двоичной системе счисления чисел $0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1$, то принятое расположение наборов в таблице 1, очевидно, соответствует расположению этих чисел в порядке возрастания. Будем говорить, что функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ *существенно зависит* от переменной x_i, если найдутся два набора

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n),$$
$$\tilde{\alpha}' = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$$

такие, что $f(\tilde{\alpha}) \neq f(\tilde{\alpha}')$ *). Переменная x_i называется существенной для функции f. Все переменные, от которых функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не зависит существенно, называются *фиктивными*.

Число всех переменных, от которых функция зависит существенно, назовем *порядком* этой функции.

Две функции называются *равными*, если одна из них может быть получена из другой путем добавления и изъятия некоторых фиктивных переменных.

Условимся считать, что вместе с функцией f заданы все функции, равные ей.

Замечание. Пусть имеется конечная система функций из C_1:

$$f_1, f_2, \ldots, f_n.$$

В силу сказанного выше можно считать, что все эти функции зависят от одних и тех же переменных.

Введем необходимые для дальнейших рассмотрений следующие функции: 0, 1, x, $\bar{x}$, $x_1 \& x_2$, $x_1 \vee x_2$, $x_1 \to x_2$, $x_1 \sim x_2$, $x_1 + x_2$, $x_1 | x_2$. Определение этих функций содержится в таблице 2.

*) Здесь и в дальнейшем обозначение $f(\tilde{\alpha})$, где $\tilde{\alpha}$ — набор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, есть сокращенная запись выражения $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$; аналогично выражение $f(\tilde{x})$ будем употреблять вместо $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Таблица 2

x	0	1	x	$\bar{x}$	x_1	x_2	$x_1 \& x_2$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \to x_2$	$x_1 \sim x_2$	$x_1 + x_2$	$x_1 \mid x_2$
0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1
					1	0	0	1	0	0	1	1
					1	1	1	1	1	1	0	0

Функции 0, 1 и x называются соответственно константой 0, константой 1 и функцией, тождественно равной x. Функция $\bar{x}$ называется отрицанием переменной x, $x_1 \& x_2$ — конъюнкцией (или логическим произведением) x_1 и x_2, $x_1 \vee x_2$ — дизъюнкцией (или логической суммой) x_1 и x_2, $x_1 \to x_2$ — импликацией x_1 и x_2, $x_1 \sim x_2$ — эквивалентностью x_1 и x_2, $x_1 + x_2$ — суммой x_1 и x_2 по mod 2, $x_1 | x_2$ — функцией Шеффера (или штрихом Шеффера) от x_1 и x_2.

Замечание. Вместо символа & иногда будем употреблять символ $\cdot$ или, как в обычной алгебре, знак операции будем опускать. Символы $+$, $\sum$ в дальнейшем будут употребляться для обозначения сложения по mod 2, при этом по определению $\sum\limits_{i=1}^{0} x_i = 0$.

Заметим еще, что константы 0 и 1 имеют нулевой порядок.

§ 2. Определение формулы и суперпозиции

Пусть имеется счетное множество X переменных x_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ Рассмотрим над этим множеством конечную или счетную систему функций алгебры логики

$$f_1\left(x_{\mu(1,1)}, x_{\mu(1,2)}, \ldots, x_{\mu(1,n_1)}\right), \ldots \\ \ldots, f_s\left(x_{\mu(s,1)}, x_{\mu(s,2)}, \ldots, x_{\mu(s,n_s)}\right), \ldots, \qquad (*)$$

где $\mu(s, k)$ — целочисленная функция, принимающая при любом фиксированном s различные значения при различных k.

Введем понятие формулы над этой системой.

Определение (индуктивное). 1. *Выражение*

$$f_s\left(x_{\mu(s,1)}, x_{\mu(s,2)}, \ldots, x_{\mu(s,n_s)}\right), \quad s = 1, 2, \ldots,$$

называется формулой над системой (*).

2. *Выражение*

$$f_p\left(A_1, A_2, \ldots, A_{n_p}\right)$$

называется формулой над системой (*), *если* A_i $(i = 1, 2, \ldots, n_p)$ — *формула или переменная из* X, *а* f_p — *произвольная функция из системы* (*).

Сопоставим каждой формуле функцию алгебры логики.

Определение (индуктивное). 1. *Формуле*

$$f_s\left(x_{\mu(s,1)}, x_{\mu(s,2)}, \ldots, x_{\mu(s,n_s)}\right), \quad s = 1, 2, \ldots,$$

сопоставим функцию

$$f_s\left(x_{\mu(s,1)}, x_{\mu(s,2)}, \ldots, x_{\mu(s,n_s)}\right), \quad s = 1, 2, \ldots$$

2. *Формуле*

$$f_p\left(A_1, A_2, \ldots, A_{n_p}\right),$$

где A_i $(i = 1, 2, \ldots, n_p)$ — *либо формулы, либо переменные из* X, *а* f_p — *функция из системы* (*), *сопоставим функцию*

$$f_p\left(g_1, g_2, \ldots, g_{n_p}\right);$$

здесь, если A_i — *переменная, то* g_i *совпадает с* A_i; *если* A_i — *формула, то* g_i — *функция, сопоставленная этой формуле.*

Полученные в соответствии с данным определением функции называются суперпозициями функций системы (*).

Если формуле сопоставлена функция, то говорят также, что формула реализует эту функцию.

Замечание. Очевидно, функция

$$f_p\left(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n_p}}\right),$$

где $x_{i_j} \in X$ $(j = 1, 2, \ldots, n_p)$, является суперпозицией функций системы (*).

Будем говорить, что функция $f_p(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n_p}})$ получена из функции $f_p(x_{\mu(p,1)}, x_{\mu(p,2)}, \ldots, x_{\mu(p,n_p)})$ путем переименования переменных.

Пример. Очевидно, функция

$$f(x_3, x_6, x_1, x_4, x_4)$$

получена из функции

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

путем переименования переменных.

Как нетрудно видеть, при переименовании переменных, вообще говоря, возможно появление новых переменных, исчезновение старых переменных, перестановка переменных и отождествление переменных.

Замечание. Пусть формула

$$f(f_1, f_2, \ldots, f_n)$$

построена из функций $f, f_1, f_2, \ldots, f_n$. Можно считать, что функции $f_1, f_2, \ldots, f_n$ зависят от одних и тех же переменных.

Определение. *Две формулы называются эквивалентными, если им сопоставлены равные функции.*

В дальнейшем эквивалентные формулы будем соединять знаком равенства.

Пример. Рассмотрим формулы $\overline{x \cdot y}$ и $\bar{x} \vee \bar{y}$. Как следует из таблицы 2, каждая из них реализует функцию $x|y$. Поэтому имеет место равенство

$$\overline{x \cdot y} = \bar{x} \vee \bar{y}.$$

Пример. Как следует из таблицы 2, имеют место следующие равенства (законы ассоциативности):

$$(x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3),$$
$$(x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 = x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3).$$

Аналогичные равенства имеют место для любого числа переменных.

Формулы, в построении которых участвуют функции $\vee$, &, $\rightarrow$, $^{-}$, в силу специфики записи этих функций содержат скобки. Так же как и в элементарной алгебре, можно ввести сокращенную запись формулы, содержащую, вообще говоря, меньшее число скобок. С этой целью введем порядок действий, считая, что вначале выполняется $^{-}$, далее & и затем $\vee$.

Пример. 1) $x \cdot y \vee x \cdot \overline{x \cdot y}$ есть сокращенная запись формулы $(x \cdot y) \vee (x \cdot (\overline{x \cdot y}))$.

2) $x_1 \cdot f(x_2, \ldots, x_n) \vee \bar{x}_1 \cdot g(x_2, \ldots, x_n)$ есть сокращенная запись формулы $(x_1 \cdot f(x_2, \ldots, x_n)) \vee \vee (\bar{x}_1 \cdot g(x_2, \ldots, x_n))$.

В тех случаях, когда нас интересует формула как средство задания функции, можно произвести дальнейшее упрощение этой формулы. С этой целью будем использовать законы ассоциативности для $\vee$ и &.

Последнее позволяет употреблять следующую запись:

$$x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n,$$

под которой мы будем понимать любую формулу, получающуюся из этого выражения после расстановки скобок. Аналогично обстоит дело с записью

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n.$$

§ 3. Теорема о разложении

Примем следующие обозначения:

$$x^0 = \bar{x}, \qquad x^1 = x.$$

Легко видеть, что

если $x = \sigma$, то $x^\sigma = 1$;

если $x \neq \sigma$, то $x^\sigma = 0$, где $\sigma \in E^2$.

Теорема 1 (о разложении). *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция алгебры логики. Тогда* *ее можно представить в следующей форме*:

$$f(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)} x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{\sigma_k} \cdot f(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)^{*)}. \quad (*)$$

Доказательство. Сначала заметим, что $0 \cdot x = 0$ и что $x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{\sigma_k} = 1$ тогда и только тогда, когда $x_1 = \sigma_1, \ldots, x_k = \sigma_k$. Рассмотрим теперь произвольные $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, и пусть $x_1 = \alpha_1, \ldots, x_k = \alpha_k$. Тогда в левой части соотношения $(*)$ получим $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$. Правая часть в силу сделанного замечания также дает $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$. Теорема доказана.

Представление $(*)$ называется разложением функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по k переменным.

Следствие 1. *Если $k = 1$, то представление $(*)$ принимает следующий вид*:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 f(1, x_2, \ldots, x_n) \vee \bar{x}_1 f(0, x_2, \ldots, x_n).$$

Следствие 2. *Если $k = n$, то представление $(*)$ превращается в такое*:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{\substack{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \\ f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1}} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n}.$$

Это разложение называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (с. д. н. ф.) функции f. Оно определено для любой функции f из C_1, не равной константе 0.

Пример. Пусть функция $h(x, y, z)$ задана при помощи таблицы 3.

*) Здесь $\bigvee_{i=1}^{n} y_i$ представляет сокращенную запись формулы $y_1 \vee y_2 \vee \ldots \vee y_n$.

Таблица 3

x	y	z	$h(x, y, z)$	x	y	z	$h(x, y, z)$
0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1

Рассмотрим наборы, на которых функция h принимает значение 1:

$$(0, 1, 1), \quad (1, 0, 1), \quad (1, 1, 0), \quad (1, 1, 1).$$

По этим наборам строим с. д. н. ф. функции h:

$$x^0 \cdot y^1 \cdot z^1 \vee x^1 \cdot y^0 \cdot z^1 \vee x^1 \cdot y^1 \cdot z^0 \vee x^1 \cdot y^1 \cdot z^1 = \bar{x} \cdot y \cdot z \vee x \cdot \bar{y} \cdot z \vee x \cdot y \cdot \bar{z} \vee x \cdot y \cdot z.$$

§ 4. Теорема о компонентах функции

Рассмотрим разложение функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по переменной x_i (см. следствие 1 теоремы 1):

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) = x_i \cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n) \vee \bar{x}_i \cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ назовем x_i-компонентой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и обозначим через $f^{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$; соответственно, функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ назовем $\bar{x}_i$-компонентой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и обозначим через $f^{\bar{x}_i}(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

Сформулируем без доказательства следующее очевидное утверждение.

Теорема 2 (о суперпозиции компонент). *Если*

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_m) = f(f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots \\ \ldots, f_{i-1}(x_1, x_2, \ldots, x_m), x_i, f_{i+1}(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots \\ \ldots, f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)),$$

то

$$\Phi^{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \\ = f^{x_i}(f_1^{x_i}, \ldots, f_{i-1}^{x_i}, f_{i+1}^{x_i}, \ldots, f_n^{x_i}).$$

Обратно, если

$$\Phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m) = \\ = f^{x_i}(f_1^{x_i}, \ldots, f_{i-1}^{x_i}, f_{i+1}^{x_i}, \ldots, f_n^{x_i}),$$

то $\Phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m)$ *есть* x_i*-компонента функции*

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_m) = \\ = f(f_1, f_2, \ldots, f_{i-1}, x_i, f_{i+1}, \ldots, f_n).$$

Аналогично формулируется утверждение для $\bar{x}_i$-компоненты.

§ 5. Определение замкнутого класса. Базис и порядок замкнутого класса

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое подмножество множества C_1.

Определение. *Множество* $[\mathfrak{M}]$ *называется замыканием* $\mathfrak{M}$, *если оно содержит все суперпозиции функций множества* $\mathfrak{M}$ *и не содержит никаких других функций.*

Пример. Пусть $\mathfrak{M} = \{\bar{x}\}$; тогда, очевидно,

$$[\mathfrak{M}] = \{u_1, u_2, \ldots; \bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots\}.$$

Отметим очевидные свойства замыкания:

1) $\mathfrak{M} \subseteq [\mathfrak{M}]$;

2) $[[\mathfrak{M}]] = [\mathfrak{M}]$;

3) если $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_2$, то $[\mathfrak{M}_1] \subseteq [\mathfrak{M}_2]$.

Определение. *Множество* $\mathfrak{M}$ *называется замкнутым классом, если* $\mathfrak{M} = [\mathfrak{M}]$.

Пример. Пусть $\mathfrak{M} = \{\bar{x}\}$. Как следует из предыдущего примера, $\mathfrak{M} \neq [\mathfrak{M}]$ и потому $\mathfrak{M}$ не является замкнутым классом.

Пример. Пусть $\mathfrak{M} = \{u_1, u_2, \ldots; \bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots\}$. Класс $\mathfrak{M}$ является замыканием класса $\{\bar{x}\}$. В силу свойства 2) операции замыкания $\mathfrak{M}$ является замкнутым классом.

Очевидно, что пересечение любого числа замкнутых классов есть замкнутый класс.

Замечание. Легко видеть, что если все функции u_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, содержатся в $\mathfrak{M}$, то для выяснения того, является ли $\mathfrak{M}$ замкнутым классом, достаточно ограничиться проверкой выполнения следующего условия (см. замечание на стр. 14): если функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $f_i(y_1, \ldots, y_m)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, принадлежат множеству $\mathfrak{M}$, то функция $f(f_1(y_1, \ldots, y_m), \ldots, f_n(y_1, \ldots, y_m))$ также принадлежит множеству $\mathfrak{M}$.

В дальнейшем, когда это не вызовет недоразумений, мы вместо термина «замкнутый класс» будем использовать термин «класс».

Определение. *Система* $\mathfrak{M}'$ *функций из замкнутого класса* $\mathfrak{M}$ *называется полной в* $\mathfrak{M}$, *если* $[\mathfrak{M}'] = \mathfrak{M}$.

В случае если система $\mathfrak{M}'$ полна в $\mathfrak{M}$, то всякая функция из $\mathfrak{M}$ является суперпозицией функций из $\mathfrak{M}'$.

Определение. *Полная в* $\mathfrak{M}$ *система функций называется базисом множества* $\mathfrak{M}$, *если никакая ее собственная подсистема не является полной в* $\mathfrak{M}$.

A priori возможны следующие случаи:

1) замкнутый класс $\mathfrak{M}$ имеет конечный базис;

2) замкнутый класс $\mathfrak{M}$ имеет счетный базис;

3) замкнутый класс $\mathfrak{M}$ не имеет базиса.

Для каждого замкнутого класса с конечным базисом введем понятие порядка замкнутого класса.

Пусть $\mathfrak{M}_1$ — конечный базис в $\mathfrak{M}$. Обозначим через $k(\mathfrak{M}_1)$ наибольший из порядков функций из $\mathfrak{M}_1$.

Определение. *Порядком замкнутого класса* $\mathfrak{M}$ *с конечным базисом называется такое натуральное число* $k(\mathfrak{M})$, *что*

$$k(\mathfrak{M}) = \min_{\mathfrak{M}_1} k(\mathfrak{M}_1)$$

(здесь минимум берется по всевозможным базисам $\mathfrak{M}_1$ класса $\mathfrak{M}$).

Теорема 3. *Конъюнкция, дизъюнкция и отрицание образуют полную в* C_1 *систему.*

Доказательство. Это утверждение вытекает из следствия 2 теоремы о разложении и соотношения $0 = x \cdot \bar{x}$.

Легко проверяются равенства: $x \vee y = \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}}$ и $x \cdot y = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$. Используя их, теорему 1 и неполноту каждой из систем $\{x \vee y\}$, $\{x \cdot y\}$, $\{\overline{x}\}$, получаем

Следствие 1. *Системы функций* $\{x \cdot y, \overline{x}\}$ и $\{x \vee y, \overline{x}\}$ *образуют базисы множества* C_1.

Далее, так как $x \mid y = \overline{x} \vee \overline{y}$, то $x \mid x = \overline{x}$, $x \mid x \mid y \mid y = x \vee y$, и мы имеем:

Следствие 2. *Функция* $x \mid y$ *образует базис* C_1.

Следствие 3. *Порядок класса* C_1 *равен* 2.

§ 6. Принцип двойственности

Определение. *Функция* $f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ *называется двойственной к функции* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Из определения следует, что

функция xy двойственна функции $x \vee y$,
функция $x \vee y$ двойственна функции xy,
функция 0 двойственна функции 1,
функция 1 двойственна функции 0,
функция x двойственна функции x,
функция $\overline{x}$ двойственна функции $\overline{x}$.

Заметим, что двойственная функция к двойственной функции есть исходная функция, т. е. $(f^*)^* = f$.

Теорема 4 (принцип двойственности). *Если*

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_m) = f(f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)),$$

то

$$\Phi^*(x_1, x_2, \ldots, x_m) = f^*(f_1^*(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, f_n^*(x_1, x_2, \ldots, x_m)),$$

где $\Phi^*, f^*, f_1^*, f_2^*, \ldots, f_n^*$ — функции, двойственные соответственно к $\Phi, f, f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Доказательство. Имеем

$$\Phi^*(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \overline{\Phi}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_m) =$$
$$= \overline{f}(f_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_m), \ldots, f_n(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_m)) =$$
$$= \overline{f}(\overline{\overline{f}}_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_m), \ldots, \overline{\overline{f}}_n(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_m)) =$$
$$= f^*(f_1^*(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, f_n^*(x_1, x_2, \ldots, x_m)).$$

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое множество функций из C_1. Обозначим через $\mathfrak{M}^*$ множество всех тех функций, которые являются двойственными к функциям из $\mathfrak{M}$. Назовем множество $\mathfrak{M}^*$ двойственным к $\mathfrak{M}$. Множество $\mathfrak{M}$ называется *самодвойственным*, если $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}$. Тогда в силу принципа двойственности имеют место:

Следствие 1. *Если* $\mathfrak{M}$ *— замкнутый класс, то* $\mathfrak{M}^*$ *также образует замкнутый класс.*

Следствие 2. *Если* $\mathfrak{M}$ *— замкнутый класс и система функций* $\{f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\}$ *полна в* $\mathfrak{M}$, *то система* $\{f_1^*, f_2^*, \ldots, f_n^*, \ldots\}$ *полна в* $\mathfrak{M}^*$, *т. е. из* $[f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots] = \mathfrak{M}$ *следует, что* $[f_1^*, f_2^*, \ldots, f_n^*, \ldots] = \mathfrak{M}^*$.

В частности, если $\mathfrak{M}_1$ является базисом замкнутого класса $\mathfrak{M}$, то $\mathfrak{M}_1^*$ является базисом $\mathfrak{M}^*$.

Следствие 3. *Если* $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_2$, *то* $\mathfrak{M}_1^* \subseteq \mathfrak{M}_2^*$.

ГЛАВА II

САМОДВОЙСТВЕННЫЕ, МОНОТОННЫЕ И ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

§ 1. Самодвойственность. Класс D_3, его базис. Лемма о несамодвойственной функции

Определение. *Функция* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *называется самодвойственной, если* $f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Очевидно, что функции x и $\bar{x}$ являются самодвойственными. Из равенств

$$(x \vee y) \cdot (x \vee z) \cdot (y \vee z) = x \cdot y \vee x \cdot z \vee y \cdot z,$$

$$[(x+1)+(y+1)+(z+1)]+1 = x+y+z$$

и принципа двойственности следует, что функции $x \cdot y \vee x \cdot z \vee y \cdot z$, $x+y+z$ также являются самодвойственными.

Обозначим через D_3 множество всех самодвойственных функций.

Так как функции 0 и 1 не являются самодвойственными, то D_3 отличен от C_1.

Лемма 1. *D_3 образует замкнутый класс.*

Доказательство. В силу того, что функция, совпадающая с функцией x, самодвойственна, достаточно показать, что если функции

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \; f_1(y_1, y_2, \ldots, y_m), \; f_2(y_1, y_2, \ldots, y_m), \ldots, f_n(y_1, y_2, \ldots, y_m)$$

являются самодвойственными, то функция

$$\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_m) = f(f_1(y_1, y_2, \ldots, y_m), \ldots, f_n(y_1, y_2, \ldots, y_m))$$

также будет самодвойственной.

Мы имеем

$$\begin{aligned}\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_m) &= f(f_1(y_1, y_2, \ldots, y_m), \ldots, f_n(y_1, y_2, \ldots, y_m)) = \\ &= f(\bar{f}_1(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m), \ldots, \bar{f}_n(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m)) = \\ &= \bar{f}(f_1(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m), \ldots, f_n(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m)) = \\ &= \bar{\Phi}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m),\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Замечание 1. Таким же методом доказывается утверждение о том, что замыкание произвольного множества самодвойственных функций содержит только самодвойственные функции.

Рассмотрим разложение самодвойственной функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по переменной x_1 (см. следствие 1 теоремы 1):

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 f(1, x_2, \ldots, x_n) \vee \bar{x}_1 f(0, x_2, \ldots, x_n).$$

Замечание 2. Очевидно, что x_1-компонента и $\bar{x}_1$-компонента функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ двойственны друг другу, т. е. $f_1^*(x_2, x_3, \ldots, x_n) = f_0(x_2, x_3, \ldots, x_n)$, где

$$f_1(x_2, x_3, \ldots, x_n) = f(1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = f^{x_1}$$

и

$$f_0(x_2, x_3, \ldots, x_n) = f(0, x_2, x_3, \ldots, x_n) = f^{\bar{x}_1}.$$

Из замечания 2 следует, что для задания самодвойственной функции достаточно задать одну из вышеупомянутых компонент.

Замечание 3. Если самодвойственная функция существенно зависит более чем от одной переменной, то из нее путем подстановки константы c можно получить несамодвойственную функцию, существенно зависящую по крайней мере от двух переменных. Действительно, рассмотрим разложение самодвойственной функции по существенной переменной x_1:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = x_1 \cdot f(1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{f}(1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots, \bar{x}_n).$$

Легко видеть, что функция $f(1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ является несамодвойственной, так как в противном случае (см. замечание 2)

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 \vee \bar{x}_1) \cdot f(1, x_2, x_3, \ldots, x_n),$$

т. е. функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не зависела бы существенным образом от переменной x_1. В частности, функции $f(1, x_2, \ldots, x_n)$ и $f(0, x_2, \ldots, x_n)$ не могут существенно зависеть только от одной переменной. Далее, очевидно, что функции $f(1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ и $\bar{f}(1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots, \bar{x}_n)$ отличны от констант и, следовательно, каждая из них зависит существенно по крайней мере от двух переменных. Таким образом, $f(c, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ является искомой функцией.

Лемма 2. *Функция $x \cdot \bar{y} \vee x \cdot \bar{z} \vee \bar{y} \cdot \bar{z}$ образует базис класса D_3.*

Доказательство. Очевидно, что функция $x \cdot \bar{y} \vee x \cdot \bar{z} \vee \bar{y} \cdot \bar{z}$ принадлежит D_3. Покажем теперь, что произвольная функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из класса D_3 порождается функцией $x \cdot \bar{y} \vee x \cdot \bar{z} \vee \bar{y} \cdot \bar{z}$. Разложим самодвойственную функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по первой переменной:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = x_1 \cdot f(1, x_2, \ldots, x_n) \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{f}(1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n).$$

x_1-компонента функции $f(\tilde{x})$ порождается функцией Шеффера $x \mid y$ (см. следствие 2 теоремы 3). Следовательно, в силу теоремы 2 функция $f(\tilde{x})$ порождается функцией $x_1 (x \mid y) \vee \bar{x}_1 (\overline{\bar{x} \mid \bar{y}})$, которая, как нетрудно проверить, равна функции $x_1 \cdot \bar{x} \vee x_1 \cdot \bar{y} \vee \bar{x} \cdot \bar{y}$. Лемма доказана.

Следствие 1. *Системы $\{\overline{x \cdot y \vee x \cdot z \vee y \cdot z}\}$ и $\{\bar{x},\ x \cdot y \vee x \cdot z \vee y \cdot z\}$ образуют базисы класса D_3.*

Так как класс D_3 не содержит функций, существенно зависящих в точности от двух переменных, то получаем

Следствие 2. *Порядок класса D_3 равен 3.*

Лемма 3. *Из несамодвойственной функции при помощи подстановки функций $\bar{x}$ и x можно получить константу.*

Доказательство. Пусть функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — несамодвойственная. Тогда найдется набор значений переменных $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ такой, что

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = f(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_n).$$

Введем функции $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} x, & \text{если } \alpha_i = 0, \\ \bar{x}, & \text{если } \alpha_i = 1. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$\varphi_i(0) = \alpha_i \quad \text{и} \quad \varphi_i(1) = \bar{\alpha}_i.$$

Рассмотрим функцию $\varphi(x)$, где

$$\varphi(x) = f(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)).$$

Легко видеть, что функция $\varphi(x)$ нами получена из $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ подстановкой функций $\bar{x}$ и x. Далее, $\varphi(0) = f(\varphi_1(0), \varphi_2(0), \ldots, \varphi_n(0)) = f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = f(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_n) = f(\varphi_1(1), \varphi_2(1), \ldots, \varphi_n(1)) = \varphi(1)$, т. е. $\varphi(x)$ — константа. Лемма доказана.

§ 2. Монотонность. Класс A_1, его базис. Лемма о немонотонной функции. Сокращенная дизъюнктивная нормальная форма

Будем говорить, что набор $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ предшествует набору $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, и писать $\tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\beta}$, если $\alpha_i \leqslant \beta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Очевидно, что если $\tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\beta}$ и $\tilde{\beta} \leqslant \tilde{\gamma}$, то $\tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\gamma}$. Наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ назовем сравнимыми, если один из них предшествует другому. Отметим, что не всякие наборы являются сравнимыми. Так, например, наборы (0, 1) и (1, 0) не сравнимы.

Определение. *Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется монотонной, если для любых наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ таких, что $\tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\beta}$, имеет место соотношение*

$$f(\tilde{\alpha}) \leqslant f(\tilde{\beta}).$$

Из определения следует, что функции 0, 1, x, $x \vee y$, xy являются монотонными.

Обозначим через A_1 множество всех монотонных функций.

Так как функция $\bar{x}$ не является монотонной, то A_1 отлично от C_1.

Лемма 4. *A_1 образует замкнутый класс.*

Доказательство. В силу того, что функция x монотонна, достаточно показать, что если функции

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ f_1(y_1, y_2, \ldots, y_m),$$
$$f_2(y_1, y_2, \ldots, y_m), \ldots, f_n(y_1, y_2, \ldots, y_m)$$

являются монотонными, то функция $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_m) = f(f_1(y_1, y_2, \ldots, y_m), \ldots, f_n(y_1, y_2, \ldots, y_m))$ также монотонна. Рассмотрим два произвольных набора $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ таких, что $\tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\beta}$. В этом случае $f_i(\tilde{\alpha}) \leqslant f_i(\tilde{\beta})$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Следовательно,

$$(f_1(\tilde{\alpha}), f_2(\tilde{\alpha}), \ldots, f_n(\tilde{\alpha})) \leqslant (f_1(\tilde{\beta}), f_2(\tilde{\beta}), \ldots, f_n(\tilde{\beta}))$$

и, значит, в силу монотонности функции $f(\tilde{x})$,

$$\Phi(\tilde{\alpha}) \leqslant \Phi(\tilde{\beta}).$$

Лемма доказана.

Замечание. Таким же методом доказывается утверждение о том, что замыкание произвольного множества монотонных функций содержит только монотонные функции.

Наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ называются соседними по i-й компоненте, если они имеют вид

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n),$$
$$\tilde{\beta} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n).$$

Очевидно, соседние наборы сравнимы.

Лемма 5. *Для того чтобы функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ была немонотонной, необходимо и достаточно, чтобы существовала пара соседних наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ таких, что*

$$\tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\beta} \quad и \quad f(\tilde{\alpha}) > f(\tilde{\beta}).$$

Доказательство. Необходимость. Пусть функция f немонотонная. Тогда найдутся два набора $\tilde{\alpha}'$ и $\tilde{\beta}'$ таких, что $\tilde{\alpha}' \leqslant \tilde{\beta}'$ и $f(\tilde{\alpha}') > f(\tilde{\beta}')$. Вставим между $\tilde{\alpha}'$ и $\tilde{\beta}'$ промежуточные наборы так, чтобы имело место

$$\tilde{\alpha}' = \tilde{\alpha}^{(1)} \leqslant \tilde{\alpha}^{(2)} \leqslant \ldots \leqslant \tilde{\alpha}^{(t)} = \tilde{\beta}'$$

и чтобы пары наборов

$$\tilde{\alpha}^{(\nu)} \quad и \quad \tilde{\alpha}^{(\nu+1)}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, t-1,$$

были соседними. Очевидно, это всегда можно сделать, если наборы $\tilde{\alpha}'$ и $\tilde{\beta}'$ сравнимы. Если бы для каждой пары выполнялись соотношения

$$f(\tilde{\alpha}^{(\nu)}) \leqslant f(\tilde{\alpha}^{(\nu+1)}),$$

то

$$f(\tilde{\alpha}') \leqslant f(\tilde{\beta}').$$

Следовательно, найдется такая пара соседних наборов $\tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\beta}$, что

$$f(\tilde{\alpha}) > f(\tilde{\beta}).$$

Достаточность очевидна.

Следствие. *Подстановкой констант 0, 1 и переменной x в немонотонную функцию можно получить функцию $\bar{x}$.*

В самом деле, пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — немонотонная функция. Тогда по лемме 5 найдутся соседние по некоторой i-й компоненте наборы

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n),$$
$$\tilde{\beta} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$$

такие, что имеет место

$$f(\tilde{\alpha}) = 1, \quad f(\tilde{\beta}) = 0.$$

Рассмотрим функцию

$$g(x) = f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, x, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n).$$

Очевидно, что $g(x) = \bar{x}$.

Выражение $\mathfrak{A}$ вида $x_{i_1}^{\sigma_1} \cdot x_{i_2}^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_m}^{\sigma_m}$ называется элементарной конъюнкцией ранга m, если $i_k \neq i_l$ при $k \neq l$; $\mathfrak{A} = 1$ считается элементарной конъюнкцией нулевого ранга. Выражение $x_{i_\nu}^{\sigma_\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots, m$, входящее в элементарную конъюнкцию $x_{i_1}^{\sigma_1} \cdot x_{i_2}^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_m}^{\sigma_m}$, называется множителем.

Пусть имеется некоторая функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из C_1. Элементарная конъюнкция $\mathfrak{A}$ называется импликантом для функции $f(\tilde{x})$, если имеет место равенство

$$(\mathfrak{A} \to f(\tilde{x})) = 1,$$

т. е. если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ обращается в единицу на тех наборах значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, на которых конъюнкция $\mathfrak{A}$ равна 1. Очевидно также, что любой член совершенной д. н. ф. функции $f(\tilde{x})$ является для $f(\tilde{x})$ импликантом (см. следствие 2 теоремы 1).

Импликант $\mathfrak{A}$ для функции $f(\tilde{x})$ называется простым импликантом, если выражение, получающееся из него после выкидывания любого множителя, не является импликантом для функции $f(\tilde{x})$.

Очевидно, из любого импликанта, если он еще не простой, можно получить выкидыванием некоторых множителей простой импликант.

Определение. *Назовем сокращенной дизъюнктивной нормальной формой (сокращенной д. н. ф.) функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дизъюнкцию всех ее простых импликантов, отождествляя пустую дизъюнкцию с* 0.

Пример. Для функции $h(x, y, z)$ (см. пример на стр. 17) простыми импликантами являются $x \cdot y$, $x \cdot z$, $y \cdot z$, и потому сокращенная д. н. ф. для функции $h(x, y, z)$ имеет вид

$$x \cdot y \vee x \cdot z \vee y \cdot z.$$

Как следует из разобранного примера, с. д. н. ф., вообще говоря, не совпадает с сокращенной д. н. ф. для той же функции.

Теорема 5. *Сокращенная д. н. ф. $\mathfrak{B}$ функции $f(\tilde{x})$ реализует функцию $f(\tilde{x})$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B}$ обращается на некотором наборе $\tilde{\alpha}$ в единицу; тогда один из ее дизъюнктивных членов также равен 1, отсюда $f(\tilde{\alpha}) = 1$. Пусть теперь на некотором наборе $\tilde{\alpha}$ $f(\tilde{\alpha}) = 1$. Это означает, что одна из элементарных конъюнкций в совершенной д. н. ф. функции $f(\tilde{x})$ также обращается в единицу. Из этой конъюнкции, как указывалось выше, можно получить простой импликант для $f(\tilde{x})$, который, очевидно, на этом наборе тоже равен единице. Отсюда следует, что и $\mathfrak{B}$ обращается на наборе $\tilde{\alpha}$ в единицу, что и требовалось доказать.

Отметим одно важное свойство сокращенной д. н. ф., которое нам понадобится в дальнейшем. Пусть $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ — произвольные простые импликанты, входящие в некоторую сокращенную д. н. ф. Тогда $\mathfrak{A}_1$ необходимо содержит множитель, не входящий в $\mathfrak{A}_2$; аналогично $\mathfrak{A}_2$ содержит множитель, не входящий в $\mathfrak{A}_1$. Если бы это было не так, то одну из указанных конъюнкций можно было бы получить из другой вычеркиванием некоторых множителей, что противоречило бы простоте импликантов $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$.

Лемма 6. *Сокращенная д. н. ф. монотонной функции не содержит отрицаний переменных.*

Доказательство. Достаточно, очевидно, показать, что никакой простой импликант для монотонной функции не содержит отрицаний.

Пусть импликант

$$\mathfrak{A} = x_{i_1}^{\sigma_1} \cdot x_{i_2}^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_{j-1}}^{\sigma_{j-1}} \cdot \bar{x}_{i_j} \cdot x_{i_{j+1}}^{\sigma_{j+1}} \cdot \ldots \cdot x_{i_t}^{\sigma_t}$$

простой для монотонной функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Рассмотрим выражение

$$\mathfrak{A}' = x_{i_1}^{\sigma_1} \cdot x_{i_2}^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_{j-1}}^{\sigma_{j-1}} \cdot x_{i_{j+1}}^{\sigma_{j+1}} \cdot \ldots \cdot x_{i_t}^{\sigma_t}.$$

Покажем, что имеет место $(\mathfrak{A}' \to f) = 1$, т. е. для любог набора $\tilde{\alpha}' = (\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_n')$, такого, что $\mathfrak{A}'(\tilde{\alpha}') = 1$, имее место $f(\tilde{\alpha}') = 1$. Возьмем

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$

где

$$\alpha_k = \begin{cases} \alpha_k', & \text{если } k \neq i_j; \\ 0, & \text{если } k = i_j. \end{cases}$$

Набор $\tilde{\alpha}$ отличается от набора $\tilde{\alpha}'$ самое большее в i_j-компоненте. Очевидно, что $\mathfrak{A}(\tilde{\alpha}) = 1$, поэтому $f(\tilde{\alpha}) = 1$ Далее, поскольку $f(\tilde{x})$ монотонна и $\tilde{\alpha}' \geqslant \tilde{\alpha}$, получае $f(\tilde{\alpha}') = 1$. Таким образом, $\mathfrak{A}'$ является импликанто для f, что противоречит простоте импликанта $\mathfrak{A}$. Лемм доказана.

Из доказанной леммы и теоремы 5 получаем следую щие утверждения.

Следствие 1. *Система функций* $\{x \vee y, xy, 0, 1$ *образует базис класса* A_1.

Следствие 2. *Порядок класса* A_1 *равен* 2.

Лемма 7. *Из монотонной функции* f, *не совпа дающей с функцией* $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ $(n \geqslant 1)$ *и отлич ной от констант* 0 *и* 1, *при помощи подстановк переменных* x, y *и константы* 1 *можно получит функцию* $x \vee y$.

Доказательство. Рассмотрим функцию f^*, двой ственную к f. Нетрудно видеть, что f^* не совпадае с функцией $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$ и отлична от констант и 1. Для доказательства леммы ввиду принципа двой ственности достаточно показать, что из функций f^* пр помощи подстановки переменных x, y и константы можно получить функцию $x \cdot y$. Рассмотрим сокращен ную д. н. ф. функции f^*, простые импликанты которо согласно лемме 6 не содержат отрицаний переменны Поскольку f^* отлична от $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$, то в это д. н. ф. (см. теорему 5) найдется импликант $\mathfrak{A}$, содержа щий более одной переменной. Каждый другой импликан из сокращенной д. н. ф. функции f^* содержит по край ней мере одну переменную, не входящую в $\mathfrak{A}$. Поэтом после подстановки вместо каждой из переменных, не вход

щих в $\mathfrak{A}$, константы 0 получим из функции f^* конъюнкцию $\mathfrak{A}$. Нетрудно видеть, что путем подстановки в конъюнкцию $\mathfrak{A}$ переменных x и y можно получить функцию xy. Лемма доказана.

§ 3. Класс D_2, его базис

Лемма 8. *Если замкнутый класс* $\mathfrak{M}$ *самодвойственных монотонных функций содержит функцию, не совпадающую с функцией* x, *то* $\mathfrak{M}$ *содержит функцию* $h(x, y, z) = x \cdot y \vee x \cdot z \vee y \cdot z$.

Доказательство. По условию система $\mathfrak{M}$ содержит функцию, отличную от функции x. Обозначим эту функцию через $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Так как самодвойственных функций от двух переменных, не совпадающих с функцией x, нет, то $n \geqslant 3$. Покажем, что имеет место соотношение

$$f(0, 1, 1, \ldots, 1) = f(1, 0, 1, 1, \ldots, 1) = \ldots$$
$$\ldots = f(1, 1, \ldots, 1, 0) = 1. \quad (*)$$

Пусть это не так; тогда найдется набор $\tilde{\alpha}$, у которого все компоненты, кроме i-й, равны единице, а i-я компонента равна нулю, причем $f(\tilde{\alpha}) = 0$. Поэтому функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ввиду монотонности на любом наборе вида $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{i-1}, 0, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n)$, т. е. на половине всех наборов, являющихся областью определения функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, также обращается в нуль, а в силу самодвойственности на любом наборе вида $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{i-1}, 1, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n)$ обращается в единицу. Таким образом, функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ совпадает с x_i. Полученное противоречие доказывает $(*)$.

Очевидно, что если некоторая функция удовлетворяет соотношению $(*)$, то она отлична от $g(x) = x$. Легко проверить, что существует только одна самодвойственная монотонная функция, существенно зависящая от трех переменных, именно $h(x, y, z) = x \cdot y \vee y \cdot z \vee x \cdot z$. Пусть функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ существенно зависит от $n \geqslant 4$ переменных. Покажем, как из нее можно получить $h(x, y, z)$. Рассмотрим произвольный набор $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ такой, что в нем содержится не менее двух нулей и не менее двух единиц. Можно считать, что $f(\tilde{\beta}) = 1$, так как если $f(\tilde{\beta}) = 0$, то мы рассмотрели бы набор $\tilde{\gamma}=(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \ldots, \bar{\beta}_n)$, который по-прежнему содержит не менее двух нулей и не менее двух единиц, причем в силу самодвойственности нашей функции $f(\tilde{\gamma})=1$. Подставим вместо всех переменных x_j таких, что $\beta_j=0$, переменную x. Получим новую функцию $f'(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}, x)$, существенно зависящую от некоторого числа r_1 переменных, причем $r_1 \leqslant r+1 < n$. Ясно, что $f'(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}, x)$ — по-прежнему самодвойственная монотонная функция, удовлетворяющая условию (*) и потому не совпадающая с $g(x)=x$. Если окажется, что $r_1>3$, то продолжаем описанный процесс замены переменных и далее. В результате на некотором шаге получим функцию от трех переменных, которой, очевидно, и будет $h(x, y, z)$. Лемма доказана.

Обозначим через D_2 множество всех самодвойственных монотонных функций. Очевидно, что D_2 является замкнутым классом как пересечение классов D_3 и A_1 (см. леммы 1 и 4).

Лемма 9. *Функция* $h(x, y, z)=x \cdot y \vee x \cdot z \vee y \cdot z$ *является базисом в* D_2.

Доказательство. Очевидно, что функция $h(x, y, z)$ содержится в D_2. Покажем, что любая функция из D_2 является суперпозицией функции $h(x, y, z)$. Доказательство будем вести индукцией по числу переменных n, от которых функция зависит существенно. Утверждение очевидно для $n \leqslant 3$. В самом деле,

для $n=1$ единственная самодвойственная монотонная функция совпадает с функцией x и получается из $h(x, y, z)$ следующим образом: $h(x, x, x)=x$;

для $n=2$ таких функций не существует;

для $n=3$, как отмечалось в доказательстве леммы 8, имеется единственная самодвойственная монотонная функция $h(x, y, z)$.

Индукционный шаг. Пусть утверждение справедливо для функций, существенно зависящих не более чем от $n-1$ переменных ($n \geqslant 4$). Покажем, что наше утверждение справедливо для функций, существенно зависящих от n переменных. Пусть $f(x, y, z, x_4, x_5, \ldots, x_n)$ — любая такая функция.

Рассмотрим функцию

$$f_1(x, y, z, x_4, x_5, \ldots, x_n)=h(f(x, x, z, x_4, x_5, \ldots, x_n), f(x, y, y, x_4, x_5, \ldots, x_n), f(z, y, z, x_4, x_5, \ldots, x_n)).$$

Утверждается, что будет $f_1(x, y, z, x_4, x_5, \ldots, x_n)=f(x, y, z, x_4, x_5, \ldots, x_n)$. Очевидно, что в этом случае $f_1(x, y, z, x_4, x_5, \ldots, x_n)$ — самодвойственная функция, поэтому достаточно показать, что

$$\begin{aligned} f_1(0, 0, z, x_4, x_5, \ldots, x_n)&=f(0, 0, z, x_4, x_5, \ldots, x_n), \\ f_1(0, 1, z, x_4, x_5, \ldots, x_n)&=f(0, 1, z, x_4, x_5, \ldots, x_n). \end{aligned} \qquad (**)$$

Подставим в функции $f(x, y, z, x_4, x_5, \ldots, x_n)$ и $f_1(x, y, z, x_4, x_5, \ldots, x_n)$ вместо переменных $x_4, x_5, \ldots, x_n$ произвольный фиксированный набор значений аргументов $(\sigma_4, \sigma_5, \ldots, \sigma_n)$, полученные функции обозначим соответственно через $g(x, y, z)$ и $g_1(x, y, z)$. Соотношения (**) теперь можно переписать так:

$$g_1(0, 0, z)=g(0, 0, z),$$
$$g_1(0, 1, z)=g(0, 1, z).$$

Имеем

$$g_1(0, 0, z)=g(0, 0, z) \cdot g(0, 0, 0) \vee \\ \vee g(0, 0, z) \cdot g(z, 0, z) \vee g(0, 0, 0) \cdot g(z, 0, z).$$

Из монотонности функции $f(x, y, z, x_4, x_5, \ldots, x_n)$ следует, что

$$g(z, 0, z) \geqslant g(0, 0, z) \geqslant g(0, 0, 0).$$

Отсюда

$$g_1(0, 0, z)= \\ =g(0, 0, 0) \vee g(0, 0, z) \vee g(0, 0, 0)=g(0, 0, z).$$

Далее,

$$g_1(0, 1, z)=g(0, 0, z) \cdot g(0, 1, 1) \vee \\ \vee g(0, 0, z) \cdot g(z, 1, z) \vee g(0, 1, 1) \cdot g(z, 1, z).$$

Снова используем предположенную нами монотонность функции $f(x, y, z, x_4, x_5, \ldots, x_n)$:

$$g(0, 0, z) \leqslant g(0, 1, 1), \quad g(0, 0, z) \leqslant g(z, 1, z).$$

Отсюда

$$g_1(0,\ 1,\ z) =$$
$$= g(0,\ 0,\ z) \vee g(0,\ 0,\ z) \vee g(0,\ 1,\ 1) \cdot g(z,\ 1,\ z) =$$
$$= g(0,\ 1,\ 1) \cdot g(z,\ 1,\ z) = g(0,\ 1,\ z$$

Таким образом,

$$f(x,\ y,\ z,\ x_4,\ x_5, \ldots,\ x_n) = h(f(x,\ x,\ z,\ x_4,\ x_5,\ \ldots,\ x_n$$
$$f(x,\ y,\ y,\ x_4,\ x_5, \ldots,\ x_n),\quad f(z,\ y,\ z,\ x_4,\ x_5,\ \ldots,\ x_n)$$

Из предположения индукции следует, что функции, вх дящие в правую часть этой формулы, выражают через $h(x,\ y,\ z)$, поэтому и левая часть выражает через $h(x,\ y,\ z)$, что и требовалось доказать.

Замечание. Так как D_2 не содержит функци существенно зависящих от двух переменных, то, как сл дует из леммы 9, порядок его равен 3.

§ 4. Линейность. Теорема Жегалкина *). Леммы о нелинейных функциях

Пусть имеется система функций

$$f_1(x_1,\ x_2) = x_1 \cdot x_2,\quad f_2(x_1,\ x_2) = x_1 + x_2,$$
$$f_3(x_1) = 0,\quad f_4(x_1) = 1.\qquad ($$

Рассмотрим произвольную формулу $\mathfrak{b}$ над системой (Ее можно преобразовывать, пользуясь правилами элеме тарной алгебры и тремя специальными правилами $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} =$ $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$, $\mathfrak{c} + 0 = \mathfrak{c}$. В частности, если раскрыть скоб и привести подобные члены, то получим выражение задающее ту же функцию, что и формула $\mathfrak{b}$. Выражен $\mathfrak{b}'$ называется полиномом Жегалкина.

Теорема 6 (Жегалкин И. И.). *Для любой фун ции из C_1 существует полином Жегалкина, зада щий эту функцию.*

Доказательство. Действительно, как указывал выше, система $\{x \cdot y,\ \bar{x}\}$ является полной в C_1. Полную

---

*) Жегалкин И. И., О технике вычислений предло ний в символической логике, Матем. сб. **34**, 1927; Жегалк И. И., Арифметизация символической логики, Матем. сб. вып. 3—4, 1928.

систему образует и система $\{x \cdot y,\ x + y,\ 0,\ 1\}$, так как $\bar{x} = x + 1$. Теорема доказана.

Замечание. Каждая функция $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ представляется в виде полинома Жегалкина единственным образом.

Это замечание сразу следует из теоремы 6 и того факта, что число полиномов Жегалкина от переменных $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ равно 2^{2^n}, т. е. совпадает с числом всех функций алгебры логики от тех же переменных.

Определение. *Функция $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ называется линейной, если имеет место соотношение:*

$$f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n.$$

Замечание. Пусть линейная функция $f(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ существенно зависит от переменной x_i; тогда $c_i = 1$. Очевидно, что если в наборе $\tilde{\alpha} = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)$ заменить α_i на $\bar{\alpha}_i$, то значение функции f изменится на противоположное. Справедливо и обратное утверждение. Если функция относительно каждой существенной переменной обладает указанным выше свойством, то она линейная.

Обозначим через L_1 множество всех линейных функций.

Лемма 10. *L_1 образует замкнутый класс.*

Доказательство очевидно.

Замечание. Очевидно, что замыкание произвольного множества линейных функций содержит только линейные функции.

Следствие 1. *Система функций $\{0,\ x + y + 1\}$* образует базис класса L_1.

Следствие 2. *Порядок класса L_1 равен* 2.

Лемма 11. *Из нелинейной функции $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ при помощи констант 0 и 1 и функций $\bar{x}$ и x можно получить конъюнкцию двух переменных.*

Доказательство. Так как функция $f(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ нелинейная, то найдется пара переменных (без ограничения общности можно считать, что это x_1 и x_2), которые входят в одно и то же слагаемое полинома Жегалкина функции $f(\tilde{x})$ (см. теорему 6). Учитывая это, мы получим следующее представление для этой функции:

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot f_1(x_3, x_4, \ldots, x_n) + x_1 \cdot f_2(x_3, x_4, \ldots, x_n) + x_2 \cdot f_3(x_3, x_4, \ldots, x_n) + f_4(x_3, x_4, \ldots, x_n),$$

где в силу замечания к теореме 6 $f_1(x_3, x_4, \ldots, x_n) \neq 0$ *).

Так как $f_1 \neq 0$, то существует набор $(\alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_n)$ такой, что имеет место равенство

$$\chi(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_n) = x_1 \cdot x_2 + \alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2 + \gamma.$$

(Таким образом, функцию $\chi(x_1, x_2)$ можно получить из функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ путем подстановки констант вместо переменных x_i, $i = 3, 4, \ldots, n$.) Далее рассмотрим функцию

$$\Phi(x_1, x_2) = \chi(x_1 + \beta, x_2 + \alpha) + \gamma + \alpha \cdot \beta.$$

Функция $\Phi(x_1, x_2)$ выражается через $\chi(x_1, x_2)$ и отрицание. Легко видеть, что $\Phi(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$. Лемма доказана.

Лемма 12. *Из нелинейной функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при помощи подстановки переменных x, y, z можно получить либо нелинейную функцию $g_1(y, z)$ от двух переменных, либо нелинейную функцию $g_2(x, y, z)$ от трех переменных, x-компонента которой нелинейна.*

Доказательство. Сначала покажем, что для функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно найти такие четыре различных набора $\tilde\tau_1, \tilde\tau_2, \tilde\tau_3, \tilde\tau_4$, где

$$\tilde\tau_1 = (1, 1, \ldots, 1, 1, 1, \ldots, 1),$$
$$\tilde\tau_2 = (1, 1, \ldots, 1, 0, 1, \ldots, 1),$$
$$\tilde\tau_3 = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{i-1}, 1, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n),$$
$$\tilde\tau_4 = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{i-1}, 0, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n),$$

ровно на трех из которых функция f принимает одно и то же значение.

*) Соотношение $f \neq g$ означает, что функции f и g не являются равными.

Так как $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — нелинейная функция, то (см. замечание 2 на стр. 35) для некоторой существенной переменной x_i найдется пара соседних по i-й компоненте наборов, на которых функция f принимает одно и то же значение. Рассмотрим два соседних по i-й компоненте набора:

$$\tilde\tau_1 = (1, 1, \ldots, 1, 1, 1, \ldots, 1),$$
$$\tilde\tau_2 = (1, 1, \ldots, 1, 0, 1, \ldots, 1).$$

Возможны два случая.

а) $f(\tilde\tau_1) = f(\tilde\tau_2)$. Тогда в силу существенности переменной x_i найдутся два соседних по i-й компоненте набора

$$\tilde\tau_3 = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{i-1}, 1, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n),$$
$$\tilde\tau_4 = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{i-1}, 0, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n)$$

такие, что $f(\tilde\tau_3) \neq f(\tilde\tau_4)$.

б) $f(\tilde\tau_1) \neq f(\tilde\tau_2)$. Как указывалось выше, найдутся наборы

$$\tilde\tau_3 = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{i-1}, 1, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n),$$
$$\tilde\tau_4 = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{i-1}, 0, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n)$$

такие, что $f(\tilde\tau_3) = f(\tilde\tau_4)$.

Исходя из наборов $\tilde\tau_3$ и $\tilde\tau_4$, разобьем переменные на три группы. К первой группе отнесем переменную x_i; ко второй — те из оставшихся переменных x_j, для которых $\sigma_j = 0$; к третьей — все остальные переменные x_j (для них $\sigma_j = 1$).

Вместо переменных первой группы подставим переменную z, вместо переменных второй группы — переменную y, вместо переменных третьей группы — переменную x. Возможны два случая.

1) Третья группа пустая. После описанной подстановки мы получим функцию $g_1(y, z)$ (см. таблицу 4а). Так как ровно три числа из $f(\tilde\tau_4)$, $f(\tilde\tau_3)$, $f(\tilde\tau_2)$, $f(\tilde\tau_1)$ совпадают, то функция $g_1(y, z)$ нелинейна.

2) Третья группа непустая. В этом случае получ функцию $g_2(x, y, z)$ (см. таблицу 4б).

Таблица 4а

y z	$g_1(y, z)$
0 0	$f(\tilde{\tau}_4)$
0 1	$f(\tilde{\tau}_3)$
1 0	$f(\tilde{\tau}_2)$
1 1	$f(\tilde{\tau}_1)$

Таблица 4б

x y z	$g_2(x, y, z)$
1 0 0	$f(\tilde{\tau}_4)$
1 0 1	$f(\tilde{\tau}_3)$
1 1 0	$f(\tilde{\tau}_2)$
1 1 1	$f(\tilde{\tau}_1)$

В таблице 4б выписаны значения функций для двух п наборов, соседних по компоненте z. Так как ровно т числа из $f(\tilde{\tau}_4)$, $f(\tilde{\tau}_3)$, $f(\tilde{\tau}_2)$, $f(\tilde{\tau}_1)$ совпадают, то $g_2(x, y,$ нелинейна и

$$g_2(x, y, z) = x \cdot g_1(y, z) \vee \overline{x} \cdot g_2(0, y, z),$$

где x-компонента функции $g_2(x, y, z)$, т. е. $g_1(y,$ также нелинейна, что и требовалось доказать.

Следствие. *Из нелинейной функции при помо подстановки переменных y, z и константы 1 мож получить нелинейную функцию от двух переменны*

ГЛАВА III

ТИПЫ ОСНОВАНИЙ ЗАМКНУТЫХ КЛАССОВ

§ 1. Типы оснований. Свойства $\langle A^2 \rangle$ и $\langle a^2 \rangle$. Леммы о классах, содержащих функцию $x \cdot y$

Определение. *Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется*

α-функцией, если $f(x, x, \ldots, x) = x$;
β-функцией, если $f(x, x, \ldots, x) = 1$;
γ-функцией, если $f(x, x, \ldots, x) = 0$;
δ-функцией, если $f(x, x, \ldots, x) = \overline{x}$.

Замечание. Очевидно, что замыкание произвольного множества, состоящего из α-функций (соответственно, α- и β-функций и α- и γ-функций), содержит только α-функции (соответственно, только α- и β-функции и только α- и γ-функции).

Определение. *Система всех функций не выше первого порядка, содержащаяся в данном замкнутом классе, называется основанием этого класса. Типом основания назовем набор всех типов функций, входящих в это основание. Набор этих типов будем заключать в скобки $\langle \ \rangle$.*

Каждый замкнутый класс в зависимости от типа основания назовем, соответственно, $\langle\alpha\rangle$-, $\langle\beta\rangle$-, $\langle\gamma\rangle$-, $\langle\alpha, \beta\rangle$-, $\langle\alpha, \gamma\rangle$-, $\langle\alpha, \delta\rangle$-, $\langle\beta, \gamma\rangle$-, $\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle$-, $\langle\alpha, \beta, \gamma, \delta\rangle$-системой. Очевидно, что замкнутых систем с основаниями другого типа не существует.

Лемма 13. *Из β-функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, отличной от константы 1, путем подстановки константы 1 и переменной можно получить функцию $g(x) = \overline{x}$.*

Доказательство. Так как $f(\tilde{x})$ есть β-функци и $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 1$, то найдется набор

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$

отличный от единичного набора $\tilde{1} = (1, 1, \ldots, 1)$ и такой что $f(\tilde{\alpha}) = 0$.

Подставим в функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вместо пере менной x_i единицу, если $\alpha_i = 1$, и переменную x, есл $\alpha_i = 0$. Полученная таким способом функция, очевидно совпадает с $g(x) = x$. Лемма доказана.

Определение. *Будем говорить, что функци $f(\tilde{x})$ удовлетворяет условию $\langle A^2 \rangle$, если у любых дву наборов, на которых функция $f(\tilde{x})$ равна 1, суще ствует общая единичная компонента.*

Пример. Функция $h(x, y, z) = x \cdot y \vee x \cdot z \vee y \cdot$ (см. пример на стр. 17) удовлетворяет условию $\langle A^2 \rangle$.

Двойственным образом определяется условие $\langle a^2 \rangle$.

Определение. *Будем говорить, что функци $f(\tilde{x})$ удовлетворяет условию $\langle a^2 \rangle$, если у любых дву наборов, на которых функция равна 0, существуе общая нулевая компонента.*

Константа 0, по определению, удовлетворяет услови $\langle A^2 \rangle$ и не удовлетворяет условию $\langle a^2 \rangle$. Константа 1, п определению, удовлетворяет условию $\langle a^2 \rangle$ и не удовле творяет условию $\langle A^2 \rangle$.

Замечание 1. Если функция $f(\tilde{x})$ удовлетворяе условию $\langle A^2 \rangle$ (соответственно, $\langle a^2 \rangle$), то очевидно, ч $f(\tilde{0}) = 0$ (соответственно, $f(\tilde{1}) = 1$), т. е. $f(\tilde{x})$ есть ли α-, либо γ-функция (соответственно, $f(\tilde{x})$ — либо α-, ли β-функция).

Замечание 2. Легко доказать, что замыкание пр извольного множества функций, удовлетворяющих усл вию $\langle A^2 \rangle$ (соответственно, функций, удовлетворяющ условию $\langle a^2 \rangle$), содержит только функции, удовлетворяющ условию $\langle A^2 \rangle$ (соответственно, условию $\langle a^2 \rangle$).

Лемма 14. *Если замкнутый класс $\mathfrak{M}$, состоящ из α-функций, содержит*

а) *несамодвойственную функцию*;

б) *функцию, не удовлетворяющую условию* $\langle A^2 \rangle$;

в) *функцию, не удовлетворяющую условию* $\langle a^2 \rangle$, *то он содержит функции* $x \cdot y$ *и* $x \vee y$.

Доказательство. Пусть $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — несамодвойственная функция из класса $\mathfrak{M}$. Тогда

$$f_1(0, 0, \ldots, 0) = 0, \quad f_1(1, 1, \ldots, 1) = 1$$

и найдется пара противоположных наборов

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \quad \tilde{\alpha}' = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_n)$$

таких, что

$$f_1(\tilde{\alpha}) = f_1(\tilde{\alpha}') = c.$$

Исходя из набора $\tilde{\alpha}$, разобьем все переменные на две группы. К первой группе отнесем все переменные x_i такие, что $\alpha_i = 0$, ко второй — все переменные x_i такие, что $\alpha_i = 1$. Если заменить переменные первой группы на x, а второй группы — на y, то получим из исходной функции f_1 функцию $g_1(x, y)$ (см. таблицу 5).

Таблица 5

x	y	$g_1(x, y)$	
0	0	$f_1(\tilde{0})$	0
0	1	$f_1(\tilde{\alpha})$	c
1	0	$f_1(\tilde{\alpha}')$	c
1	1	$f_1(\tilde{1})$	1

Из таблицы 5 следует, что

$$g_1(x, y) = \begin{cases} x \cdot y, & \text{если } c = 0; \\ x \vee y, & \text{если } c = 1. \end{cases}$$

Следовательно, класс $\mathfrak{M}$ содержит $x \cdot y$ или $x \vee y$.

Пусть для определенности класс $\mathfrak{M}$ содержит $x \vee y$; покажем, что он также содержит $x \cdot y$ (другой случай рассматривается двойственным образом).

Дизъюнкция $x \vee y$ есть функция, удовлетворяющая условию $\langle a^2 \rangle$, но не удовлетворяющая условию $\langle A^2 \rangle$.

Возьмем в классе $\mathfrak{M}$ некоторую функцию $f_2(x_1, \ldots, x_m)$, не удовлетворяющую условию $\langle a^2 \rangle$. Для нее можно указать два набора

$$\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m) \text{ и } \tilde{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m),$$

не имеющих общей нулевой компоненты, таких, что

$$f_2(\tilde{\beta}) = f_2(\tilde{\gamma}) = 0.$$

Исходя из наборов $\tilde{\beta}$ и $\tilde{\gamma}$, разобьем переменные на три группы. К первой группе отнесем все переменные x_i

такие, что $\beta_i=0$, $\gamma_i=1$; ко второй группе — все пере-менные x_i такие, что $\beta_i=1$, $\gamma_i=0$; к третьей — вс-переменные x_i такие, что $\beta_i=\gamma_i=1$. Если заменить пере-менные первой группы на x, второй — на y, третьей — н $x \vee y$, то из исходной функ-ции f_2 получим функци $g_2(x, y)$ (см. таблицу 6).

Таблица 6

x y	$g_2(x, y)$	
0 0	$f_2(\tilde{0})$	0
0 1	$f_2(\tilde{\beta})$	0
1 0	$f_2(\tilde{\gamma})$	0
1 1	$f_2(\tilde{1})$	1

Следовательно, $g_2(x, y) = x \cdot y$.

Лемма доказана.

Следствие 1. *Есл замкнутый класс $\mathfrak{M}$, со-стоящий из α-функций, со-держит несамодвойственную функцию, то он соде-жит либо функцию $x \cdot y$, либо функцию $x \vee y$.*

Следствие 2. *Если замкнутый класс $\mathfrak{M}$, со-стоящий из α-функций, содержит несамодвойствен-ную функцию, удовлетворяющую условию $\langle a^2 \rangle$ (соо-ветственно, $\langle A^2 \rangle$), то он содержит функцию $x \vee$ (соответственно, $x \cdot y$).*

Лемма 15. *Если замкнутый класс $\mathfrak{M}$, состоящи из α-функций и β-функций, содержит функцию, удовлетворяющую условию $\langle a^2 \rangle$, то он содержи либо функцию $x \cdot y$, либо функцию $x+y+1$.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — фун-ция из класса $\mathfrak{M}$, не удовлетворяющая условию $\langle a^2 \rangle$. Д этой функции можно найти два набора $\tilde{\alpha}=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta}=(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, не имеющих общей нулевой компо-ненты, таких, что

$$f(\tilde{\alpha})=f(\tilde{\beta})=0.$$

Таблица

x y z	$g(x, y, z)$	
0 0 1		$g(0, 0,$
0 1 1	$f(\tilde{\alpha})$	0
1 0 1	$f(\tilde{\beta})$	0
1 1 1	$f(\tilde{1})$	1

Исходя из этих наборов, разобьем переменные на три группы. К первой группе от-несем все переменные x_i такие, что $\alpha_i=0$, $\beta_i=1$; второй группе — все переменные такие, что $\alpha_i=1$, $\beta_i=$ и к третьей — все переменные такие, что $\alpha_i=\beta_i=$

Если заменить переменные первой группы на x, второй группы — на y, третьей — на z, то получим из исходной функции f функцию $g(x, y, z)$ (см. таблицу 7).

Если функция g существенно зависит от переменной z, то подставим вместо этой переменной константу 1, которая, очевидно, принадлежит классу $\mathfrak{M}$. В результате подстановки получим функцию $g_1(x, y)$, где

$$g_1(x, y)=\begin{cases} x \cdot y, & \text{если } g(0, 0, 1)=0; \\ x+y+1, & \text{если } g(0, 0, 1)=1. \end{cases}$$

Лемма доказана.

§ 2. Лемма о соотношении свойств $\langle A^2 \rangle$, $\langle a^2 \rangle$, самодвойственности и монотонности

Лемма 16. *Если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ удовлетворяет любым двум из четырех условий:*

1) *самодвойственность,*
2) *монотонность,*
3) $\langle A^2 \rangle$,
4) $\langle a^2 \rangle$,

кроме наборов условий (2,3) *и* (2,4), *то она удовлетворяет и двум другим условиям.*

Доказательство. В формулировке теоремы говорится о следующих парах условий: (1, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 4). Для доказательства леммы достаточно установить такую цепочку следований:

$$(1, 4) \to (1, 3) \to (1, 2) \to (3, 4) \to (1, 4).$$

а) Пусть функция удовлетворяет условиям (1, 4); покажем, что тогда она удовлетворяет также и условиям (1, 3). Для этого достаточно доказать, что функция удовлетворяет условию $\langle A^2 \rangle$. Пусть $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ — два произвольных набора таких, что $f(\tilde{\alpha})=f(\tilde{\beta})=1$. Тогда на наборах $\tilde{\alpha}'$ и $\tilde{\beta}'$, противоположных наборам $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$, соответственно, в силу самодвойственности f будет $f(\tilde{\alpha}')=f(\tilde{\beta}')=0$. f удовлетворяет условию $\langle a^2 \rangle$, поэтому наборы $\tilde{\alpha}'$ и $\tilde{\beta}'$ имеют общую нулевую компоненту, а значит, наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ имеют общую единичную компоненту.

б) Пусть функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ удовлетворя условиям (1, 3). Покажем, что тогда она удовлетворя также и условиям (1, 2). Для этого достаточно показат что f монотонна. Пусть это не так, тогда по лемме найдется пара соседних наборов

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n),$$
$$\tilde{\beta} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$$

таких, что $f(\tilde{\alpha}) > f(\tilde{\beta})$. Очевидно, что $f(\tilde{\alpha})=1$ и $f(\tilde{\beta})=0$ Тогда в силу самодвойственности f имеет место

$$f(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_{i-1}, 0, \bar{\alpha}_{i+1}, \ldots, \bar{\alpha}_n) = 1.$$

Легко видеть, что наборы $\tilde{\alpha}$ и $(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_{i-1}, 0, \bar{\alpha}_{i+1}, \ldots, \bar{\alpha}_n)$ не имеют общих единичных компонент. Это противоречи тому, что функция f удовлетворяет условию $\langle A^2 \rangle$.

в) Пусть функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ удовлетворяе условиям (1, 2). Покажем, что тогда она удовлетворяе также и условиям (3, 4). Для этого достаточно доказать что f удовлетворяет условию $\langle a^2 \rangle$, т. е. (1, 4). Допустим что функция f не удовлетворяет условию $\langle a^2 \rangle$; тогд найдутся два набора

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$
$$\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n),$$

не имеющих общей нулевой компоненты и таких, что

$$f(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\beta}) = 0.$$

Рассмотрим набор $\tilde{\alpha}' = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_n)$, который, очевид но, предшествует набору $\tilde{\beta}$. Так как функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ самодвойственная, то $f(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_n) = 1$, но это проти воречит монотонности f.

г) Пусть функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ удовлетворяе условиям (3,4). Покажем, что тогда она также удовле творяет и условиям (1,4). Для этого достаточно показать что f — самодвойственная функция. Пусть $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\tilde{\alpha}' = (\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n)$ — произвольная пара противополож

ных наборов. Оба этих набора не имеют общих единичных и нулевых компонент. Поэтому не может иметь место равенство $f(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\alpha}')$. Лемма доказана.

§ 3. Класс C_4, его базис

Обозначим через C_4 множество всех α-функций. Очевидно, что C_4 является замкнутым классом.

Лемма 17. *Система функций $\{x \cdot y,\ x \vee y,\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$, где $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — произвольная немонотонная α-функция, полна в C_4.*

Доказательство. Покажем, что из заданной системы функций можно построить функцию $x + y + z$. Согласно лемме 5 для немонотонной функции f можно указать два соседних набора

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \text{ и}$$
$$\tilde{\beta} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$$

таких, что

$$f(\tilde{\alpha}) > f(\tilde{\beta}).$$

Отсюда следует, что $f(\tilde{\alpha}) = 1$, а $f(\tilde{\beta}) = 0$.

Исходя из наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$, разобьем переменные на три группы. К первой группе отнесем переменную x_i, ко второй группе — те из оставшихся переменных, для которых $\alpha_j = 0$; к третьей — все переменные x_j такие, что $\alpha_j = 1$. Если заменить переменную первой группы на x, переменные второй группы — на y, а третьей — на z, то получим из исходной функции f функцию $g(x, y, z)$ (см. таблицу 8).

Таблица 8

x	y	z	$g(x, y, z)$	
0	0	0	$f(\tilde{0})$	0
0	0	1	$f(\tilde{\alpha})$	1
1	0	1	$f(\tilde{\beta})$	0
1	1	1	$f(\tilde{1})$	1

Легко видеть, что

$$g(x \cdot y \vee x \cdot z \vee y \cdot z,\ x \cdot y \cdot z,\ x \vee y \vee z) = x + y + z.$$

Для завершения доказательства покажем, что любую α-функцию можно построить из функций $x \cdot y$ и $x + y + z$. Последнее следует из того, что полином Жегалкина

α-функции имеет свободный член, равный 0, и содержит нечетное число слагаемых. Лемма доказана.

Следствие. *Система функций* $\{x \vee y, x \cdot (y+z+1)\}$ *образует базис в* C_4.

Доказательство. Очевидно, что $x \cdot (y+z+1)$ — немонотонная α-функция и $x \cdot (x+y+1) = x \cdot y$. Поэтому $[x \vee y, \ x \cdot (y+z+1)] = C_4$. Ясно, что немонотонная функция $x \cdot (y+z+1)$ не выражается через монотонную функцию $x \vee y$. С другой стороны, функция $x \vee y$ не удовлетворяет условию $\langle A^2 \rangle$ и, следовательно, не может быть построена из функции $x \cdot (y+z+1)$, удовлетворяющей условию $\langle A^2 \rangle$.

§ 4. Классы C_2 и C_3, их базисы

Обозначим через C_2 множество всех α- и β-функций и через C_3 — множество всех α- и γ-функций. Очевидно, что C_2 и C_3 являются замкнутыми классами.

Лемма 18. а) *Каждая из систем функций* $\{x \vee y, x+y+1\}$, $\{x \cdot y, x+y+1\}$ *и* $\{x \cdot y, x \vee \bar{y}\}$ *является базисом в* C_2. б) *Каждая из систем функций* $\{x \cdot y, x+y\}$, $\{x \vee y, x+y\}$ *и* $\{x \vee y, x \cdot \bar{y}\}$ *является базисом в* C_3.

Доказательство. В силу принципа двойственности, очевидно, достаточно ограничиться доказательством одной из частей леммы, например, второй.

Легко видеть, что функции $x \cdot y$, $x+y$, $x \vee y$ и $x \cdot \bar{y}$ принадлежат C_3. Сначала покажем, что система функций $\{x \cdot y, x+y\}$ является полной в C_3.

Пусть функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C_3$, т. е. является некоторой α- или γ-функцией. Тогда в соответствующем ей полиноме Жегалкина (см. теорему 6) свободный член равен нулю. Очевидно, что этот полином может быть построен из функций $x \cdot y$ и $x+y$.

Полнота в C_3 каждой из систем $\{x \vee y, x+y\}$ и $\{x \vee y, x \cdot \bar{y}\}$ следует, принимая во внимание соотношения

$$x \cdot y = (x \vee y) + x + y,$$
$$x + y = x \cdot \bar{y} \vee \bar{x} \cdot y,$$

из полноты в C_3 системы $\{x \cdot y, x+y\}$.

Для завершения доказательства остается показать, что никакая собственная подсистема любой из указанных систем не является полной в C_3.

Каждая из функций $x \cdot y$, $x \vee y$, $x+y$, $x \cdot \bar{y}$ не образует полной системы в C_3. Из функций $x \cdot y$ и $x \vee y$ нельзя получить функции $x+y$ и $x \cdot \bar{y}$, так как первые являются монотонными функциями, а последние не монотонны. Из функции $x+y$ нельзя получить функций $x \cdot y$ и $x \vee y$, так как первая — линейная, а конъюнкция и дизъюнкция не линейны. Наконец, из функции $x \cdot \bar{y}$ невозможно получить $x \vee y$ потому, что функция $x \cdot \bar{y}$ удовлетворяет условию $\langle A^2 \rangle$, а функция $x \vee y$ не удовлетворяет этому условию. Лемма доказана.

Лемма 19. *Если замкнутый класс* $\mathfrak{M}$, *состоящий из* α- *и* β-*функций, содержит*

а) нелинейную функцию;

б) функцию, не удовлетворяющую условию $\langle a^2 \rangle$;

в) немонотонную функцию,

то он совпадает с C_2.

Доказательство. Очевидно, что $\mathfrak{M} \subseteq C_2$. Для доказательства обратного включения достаточно показать, что функции $x \cdot y$ и $x+y+1$ принадлежат $\mathfrak{M}$, и воспользоваться леммой 18.

В силу леммы 15 класс $\mathfrak{M}$ содержит одну из функций $x \cdot y$ или $x+y+1$. В связи с этим рассмотрим два случая.

1) Класс $\mathfrak{M}$ содержит $x \cdot y$. По условию классу $\mathfrak{M}$ принадлежат константа 1 и немонотонная функция $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Согласно лемме 5 найдется пара соседних наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$, где

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n),$$
$$\tilde{\beta} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n),$$

таких, что $f_1(\tilde{\alpha}) > f_1(\tilde{\beta})$. Исходя из наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$, разобьем переменные на три группы. К первой группе отнесем переменную x_i; ко второй — те из оставшихся переменных x_j, для которых $\alpha_j = 0$; к третьей — все остальные переменные x_j (для них $\alpha_j = 1$). Ясно, что первая группа непустая. Поскольку $f_1(\tilde{\beta}) = 0$, а $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является α- или β-функцией, то набор $\tilde{\beta}$ отличен от единичного набора. Отсюда следует непустота второй группы. Вместо переменных первой группы подставим переменную x, вместо второй группы — переменную y, вместо третьей группы — константу 1.

В результате этой подстановки получим некоторую немонотонную функцию $g_1(x, y)$ (см. таблицу 9).

Таким образом,

$$g_1(x, y) = \begin{cases} x + y + 1, & \text{если} \quad g_1(0, 1) = 0; \\ x \vee \bar{y}, & \text{если} \quad g_1(0, 1) = 1. \end{cases}$$

Так как

$$x + y + 1 = (x \vee \bar{y}) \cdot (\bar{x} \vee y),$$

то из $x \cdot y$ и $g_1(x, y)$ всегда можно получить функцию $x + y + 1$. Тем самым показано, что вместе с функцией $x \cdot y$ классу $\mathfrak{M}$ принадлежит функция $x + y + 1$.

Таблица 9

x	y	$g_1(x, y)$	
0	0	$f_1(\tilde{\alpha})$	1
0	1		$g_1(0, 1)$
1	0	$f_1(\tilde{\beta})$	0
1	1	$f_1(\tilde{1})$	1

2) Класс $\mathfrak{M}$ содержит $x + y + 1$. По условию леммы класс $\mathfrak{M}$ содержит некоторую нелинейную функцию (на основании следствия из леммы 12 можно считать, что она зависит от двух переменных) $f_2(x, y)$. Поскольку $f_2(x, y)$ является α- или β-функцией, то она совпадает с одной из следующих функций:

$$x \cdot y, \quad x \vee y, \quad \bar{x} \vee y, \quad x \vee \bar{y}.$$

Так как имеют место следующие равенства:

$$(x \vee y) + (x + y + 1) + 1 = x \cdot y,$$
$$(\bar{x} \vee y) + x + 1 = x \cdot y,$$
$$(x \vee \bar{y}) + y + 1 = x \cdot y,$$

то из функций $f_2(x, y)$ и $x + y + 1$ можно получить $x \cdot y$. Лемма доказана.

§ 5. Классы самодвойственных α-функций

Обозначим через L_4 множество всех линейных функций со свободным членом, равным 0, и существенно зависящих от нечетного числа переменных. Оно, очевидно, образует замкнутый класс, порождаемый системой $\{x + y + z\}$.

Заметим, что L_4 есть множество всех линейных самодвойственных α-функций.

Обозначим через D_1 множество всех самодвойственных α-функций. Очевидно, что D_1 является замкнутым классом.

Лемма 20. *Если замкнутый класс $\mathfrak{M}$, состоящий из самодвойственных α-функций, содержит немонотонную функцию, то он есть либо L_4, либо D_1.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — немонотонная функция из $\mathfrak{M}$. Тогда по лемме 5 найдется пара соседних наборов

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n),$$
$$\tilde{\beta} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$$

таких, что $f(\tilde{\alpha}) > f(\tilde{\beta})$. Исходя из наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$, разобьем переменные на три группы. К первой группе отнесем переменную x_i; ко второй — те из оставшихся переменных x_j, для которых $\alpha_j = 0$; к третьей — все остальные переменные x_j (для них $\alpha_j = 1$). Очевидно, ни одна из этих групп не пуста. Вместо переменных первой группы подставим переменную z, вместо переменных второй группы — переменную x, вместо переменных третьей группы — переменную y. В результате этой подстановки получим самодвойственную немонотонную α-функцию $g(x, y, z)$ (см. таблицу 10).

Таблица 10

x	y	z	$g(x, y, z)$	
0	0	0	$f(\tilde{0})$	0
0	0	1		$g(0, 0, 1)$
0	1	0	$f(\tilde{\alpha})$	1
0	1	1	$f(\tilde{\beta})$	0
1	0	0	$\bar{f}(\tilde{\beta})$	1
1	0	1	$\bar{f}(\tilde{\alpha})$	0
1	1	0		$\bar{g}(0, 0, 1)$
1	1	1	$f(\tilde{1})$	1

Из таблицы 10 следует, что

$$g(x, y, z) = \begin{cases} \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z} \vee x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \vee x \cdot y \cdot \bar{z} \vee x \cdot y \cdot z, \\ \qquad\qquad \text{если} \quad g(0, 0, 1) = 0; \\ \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z \vee \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z} \vee x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \vee x \cdot y \cdot z, \\ \qquad\qquad \text{если} \quad g(0, 0, 1) = 1. \end{cases}$$

В связи с этим доказательство распадается на два случая.

1) $g(x, y, z)=\bar{x}\cdot y\cdot\bar{z}\vee x\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}\vee x\cdot y\cdot\bar{z}\vee x\cdot y\cdot z=$ $=x\cdot y\vee x\cdot\bar{z}\vee y\cdot\bar{z}$. Пусть $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — произвольная самодвойственная α-функция; тогда она полностью определяется своей x_1-компонентой, которая, очевидно, является α- или β-функцией, т. е. $\varphi(1, x_2, x_3, \ldots, x_n)\in C_2$. Так как

$$g(x, y, z)=x\cdot(y\vee\bar{z})\vee\bar{x}\cdot(y\cdot\bar{z})$$

и

$$g(z, y, x)=x\cdot(y\cdot z)\vee\bar{x}\cdot(y\vee z),$$

то функции $g(x, y, z)$ и $g(z, y, x)$ имеют x-компонентами соответственно функции $y\vee\bar{z}$ и $y\cdot z$. На основании теоремы 2 и леммы 18 путем суперпозиции функций $g(x, y, z)$ и $g(z, y, x)$ без подстановки вместо переменной x можно получить функцию, x-компонентой которой является произвольная функция из C_2. Таким образом, $\mathfrak{M}=D_1$.

2) $g(x, y, z)=\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot z\vee\bar{x}\cdot y\cdot\bar{z}\vee x\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}\vee x\cdot y\cdot z=$ $=x+y+z$. В этом случае $\mathfrak{M}$ содержит L_4. Поэтому он либо совпадает с L_4, либо содержит некоторую нелинейную функцию f'. Покажем, что в последнем случае $\mathfrak{M}$ совпадает с D_1. Используя лемму 12 и учитывая самодвойственность функции f', построим функцию $g'(x, y, z)$, существенно зависящую в точности от трех переменных, x-компонента которой $g'(1, y, z)$ является нелинейной функцией. С другой стороны, x-компонента функции $g(x, y, z)$ есть функция $y+z+1$. На основании теоремы 2 и леммы 19 путем суперпозиции функций $g(x, y, z)$ и $g'(x, y, z)$ без подстановки вместо переменной x можно получить функцию, x-компонента которой есть произвольная функция из C_2.

Таким образом, $\mathfrak{M}=D_1$. Лемма доказана.

Следствие 1. *Система* $\{x\cdot y\vee x\cdot\bar{z}\vee y\cdot\bar{z}\}$ *является базисом класса* D_1.

Так как не существует самодвойственных функций от двух переменных, то на основании следствия 1 имеем

Следствие 2. *Порядок класса* D_1 *равен* 3.

ГЛАВА IV
НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАМКНУТЫЕ КЛАССЫ

§ 1. Свойства $\langle A^{\mu}\rangle$, $\langle A^{\infty}\rangle$, $\langle a^{\mu}\rangle$, $\langle a^{\infty}\rangle$

Определение. *Будем говорить, что функция удовлетворяет условию* $\langle A^{\mu}\rangle$, $\mu\geqslant 2$, *если любые* μ *наборов, на которых функция обращается в единицу, имеют общую единичную компоненту. Функция удовлетворяет условию* $\langle A^{\infty}\rangle$, *если все наборы, на которых функция равна* 1, *имеют общую единичную компоненту.*

Пример. Как легко проверить, функция

$$h_{\mu}=\bigvee_{i=1}^{\mu+1} x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_{i-1}\cdot x_{i+1}\cdot\ldots\cdot x_{\mu+1}$$

удовлетворяет условию $\langle A^{\mu}\rangle$, а функция

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=x_1\cdot f_1(x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

удовлетворяет условию $\langle A^{\infty}\rangle$.

Замечание. Очевидно, если функция удовлетворяет условию $\langle A^{\mu_1}\rangle$, то она удовлетворяет и условию $\langle A^{\mu_2}\rangle$ при любом μ_2, таком, что $2\leqslant\mu_2\leqslant\mu_1$. В частности, если функция удовлетворяет условию $\langle A^{\infty}\rangle$, то она удовлетворяет условию $\langle A^{\mu}\rangle$ для любого μ.

Двойственным образом определяются условия $\langle a^{\mu}\rangle$ и $\langle a^{\infty}\rangle$.

Определение. *Будем говорить, что функция удовлетворяет условию* $\langle a^{\mu}\rangle$, $\mu\geqslant 2$, *если любые* μ *наборов, на которых функция обращается в нуль,* *имеют общую нулевую компоненту. Функция удовлетворяет условию $\langle a^\infty \rangle$, если все наборы, на которых функция равна* 0, *имеют общую нулевую компоненту.*

Очевидно, если функция удовлетворяет условию $\langle a^{\mu_1} \rangle$, то она удовлетворяет и условию $\langle a^{\mu_2} \rangle$ при любом μ_2, таком, что $2 \leqslant \mu_2 \leqslant \mu_1$. В частности, если функция удовлетворяет условию $\langle a^\infty \rangle$, то она удовлетворяет условию $\langle a^\mu \rangle$ для любого μ.

Константа 0, по определению, удовлетворяет условию $\langle A^\infty \rangle$ и, как отмечалось раньше, не удовлетворяет условию $\langle a^2 \rangle$, а следовательно, не удовлетворяет любому из условий $\langle a^\mu \rangle$ и $\langle a^\infty \rangle$. Константа 1, по определению, удовлетворяет условию $\langle a^\infty \rangle$ и не удовлетворяет никакому из условий $\langle A^\mu \rangle$ и $\langle A^\infty \rangle$.

Замечание. Очевидно, что если функция $f(\tilde{x})$ удовлетворяет какому-нибудь из условий $\langle A^\mu \rangle$ и $\langle A^\infty \rangle$, то она на нулевом наборе обращается в 0 и, следовательно, есть либо α-, либо γ-функция. Аналогично, если функция $f(\tilde{x})$ удовлетворяет какому-нибудь из условий $\langle a^\mu \rangle$ и $\langle a^\infty \rangle$, то она есть либо α-, либо β-функция.

Определение. *Множество $\mathfrak{M}$, состоящее из функций, удовлетворяющих условию $\langle A^\mu \rangle$ (соответственно, $\langle A^\infty \rangle$, $\langle a^\mu \rangle$, $\langle a^\infty \rangle$), называется множеством, удовлетворяющим условию $\langle A^\mu \rangle$ (соответственно, $\langle A^\infty \rangle$, $\langle a^\mu \rangle$, $\langle a^\infty \rangle$).*

Замечание. Очевидно, что замыкание произвольного множества функций, удовлетворяющих какому-либо из описанных условий, содержит только функции, удовлетворяющие тому же условию.

Лемма 21. *Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — функция, удовлетворяющая условию $\langle A^\mu \rangle$. Тогда для любых m импликантов, где $m \leqslant \mu$, в сокращенной д. н. ф. функции f найдется такая переменная x_k, которая входит в каждый из этих импликантов в качестве множителя.*

Доказательство. Если $f = 0$, то утверждение очевидно. Пусть $f \neq 0$ и $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m$ — произвольные m импликантов из сокращенной д. н. ф. функции f.

Каждому импликанту $\mathfrak{A}_l$ сопоставим набор

$$\tilde{\alpha}_l = (\alpha_{l1}, \alpha_{l2}, \ldots, \alpha_{ln}),$$

где

$$\alpha_{lj} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_j \text{ входит в } \mathfrak{A}_l; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Очевидно, что

$$f(\tilde{\alpha}_1) = f(\tilde{\alpha}_2) = \ldots = f(\tilde{\alpha}_m) = 1.$$

Так как функция f удовлетворяет условию $\langle A^\mu \rangle$ и $m \leqslant \mu$, то все эти наборы должны содержать общую единичную компоненту. Отсюда в силу определения наборов $\tilde{\alpha}_l$ ($l = 1, 2, \ldots, m$) следует, что импликанты $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m$ содержат некоторый общий множитель x_k. Лемма доказана.

Следствие. *Если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ удовлетворяет условию $\langle A^\infty \rangle$, то найдется такое k, что*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) = \\ = x_k \cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, 1, x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Лемма 22. *Если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ удовлетворяет условию $\langle A^\mu \rangle$ и не удовлетворяет условию $\langle A^{\mu+1} \rangle$, то $n > \mu$.*

Доказательство. Так как функция f не удовлетворяет условию $\langle A^{\mu+1} \rangle$, то существуют такие $\mu + 1$ наборов

$$\tilde{\alpha}_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\tilde{\alpha}_{\mu+1} = (\alpha_{\mu+1,1}, \alpha_{\mu+1,2}, \ldots, \alpha_{\mu+1,n}),$$

не имеющих общей единичной компоненты, на которых функция равна единице. Рассмотрим более подробно строение матрицы, связанной с этими наборами:

$$\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{\mu+1,1} & \alpha_{\mu+1,2} & & \alpha_{\mu+1,n} \end{Vmatrix}.$$

Из вышеупомянутого следует, что матрица не содержит единичных столбцов.

Покажем, что для каждого i $(i=1, 2, \ldots, \mu+1)$ в матрице найдется столбец, имеющий только один нуль, и этот нуль принадлежит i-й строке. Рассмотрим наборы $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_{i-1}, \tilde{\alpha}_{i+1}, \ldots, \tilde{\alpha}_{\mu+1}$. Так как функция f удовлетворяет условию $\langle A^{\mu}\rangle$, то эти наборы имеют общую единичную компоненту. Эта компонента и определяет искомый столбец матрицы.

Таким образом, в рассматриваемой матрице содержатся по крайней мере $\mu+1$ различных столбцов. Следовательно, $n \geqslant \mu+1$. Лемма доказана.

Следствие. *Если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ удовлетворяет условию $\langle A^{\mu}\rangle$, то при $n \leqslant \mu$ она удовлетворяет условию $\langle A^{\infty}\rangle$.*

Используя принцип двойственности, можно получить аналогичные результаты для свойств $\langle a^{\mu}\rangle$ и $\langle a^{\infty}\rangle$.

§ 2. Класс F_5^{∞}, его базис. Лемма об $\langle\alpha\rangle$-системах, содержащих класс F_5^{∞}

Обозначим через F_5^{∞} множество всех α-функций, удовлетворяющих условию $\langle A^{\infty}\rangle$. Очевидно, что F_5^{∞} является замкнутым классом.

Лемма 23. *Функция $x \cdot (y \vee \bar{z})$ является базисом в F_5^{∞}.*

Доказательство. Очевидно, что функция $x \cdot (y \vee \bar{z})$ принадлежит F_5^{∞}. Покажем теперь, что произвольная функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из класса F_5^{∞} порождается функцией $x \cdot (y \vee \bar{z})$. По следствию из леммы 21 найдется такое k, что

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = x_k \cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, 1, x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Поскольку $f(x)$ есть α-функция, то ее x_k-компонента является α- или β-функцией, т. е. принадлежит классу C_2. Так как C_2 порождается системой $\{x \cdot y, x \vee \bar{y}\}$ (см. лемму 18), то по теореме 2 функция $f(\tilde{x})$ порождается

системой $\{x_k \cdot (x \cdot y), x_k \cdot (x \vee \bar{y})\}$. Для завершения доказательства достаточно показать, что обе последние функции порождаются функцией $x \cdot (y \vee \bar{z})$. Это следует из того, что $x \cdot y = x \cdot (y \vee \bar{x})$. Лемма доказана.

Лемма 24. *Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная замкнутая $\langle\alpha\rangle$-система, удовлетворяющая условию $\langle A^2\rangle$ и содержащая немонотонную функцию. Тогда $\mathfrak{M}$ содержит класс F_5^{∞}.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — немонотонная функция из $\mathfrak{M}$. Согласно лемме 5 можно указать два соседних набора

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n),$$
$$\beta = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$$

такие, что

$$f(\tilde{\alpha}) > f(\tilde{\beta}).$$

Так как f есть α-функция, то оба набора $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ отличны от нулевого и единичного наборов.

Исходя из наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$, разобьем переменные на три группы. К первой группе отнесем переменную x_i; ко второй группе — те из оставшихся переменных, для которых $\alpha_j = 0$; к третьей — все переменные x_j такие, что $\alpha_j = 1$. Если заменить переменную первой группы на x, переменные второй группы — на y, а третьей — на z, то получим из исходной функции f функцию $g(x, y, z)$ (см. таблицу 11).

Таблица 11

x	y	z	$g(x, y, z)$	
0	0	0	$f(\tilde{0})$	0
0	0	1	$f(\tilde{\alpha})$	1
0	1	0		$g(0, 1, 0)$
0	1	1		$g(0, 1, 1)$
1	0	0		$g(1, 0, 0)$
1	0	1	$f(\tilde{\beta})$	0
1	1	0		$g(1, 1, 0)$
1	1	1	$f(\tilde{1})$	1

Легко видеть, что $g(x, y, z)$ удовлетворяет условию $\langle A^2\rangle$. Так как каждый из наборов (0, 1, 0), (1, 0, 0) и (1, 1, 0) не имеет общей единичной компоненты с набором (0, 0, 1) и $g(0, 0, 1)=1$, то $g(0, 1, 0)=g(1, 0, 0)=g(1, 1, 0)=0$.

В зависимости от того, какое значение принимает функция $g(x, y, z)$ на наборе (0, 1, 1), возможны два случая:

$$g(x, y, z)= \begin{cases} \bar{x}\cdot\bar{y}\cdot z\vee x\cdot y\cdot z, & \text{если } g(0, 1, 1)=0;\\ \bar{x}\cdot\bar{y}\cdot z\vee\bar{x}\cdot y\cdot z\vee x\cdot y\cdot z, & \text{если } g(0, 1, 1)=1. \end{cases}$$

Пусть $g(x, y, z)=\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot z\vee\bar{x}\cdot y\cdot z\vee x\cdot y\cdot z$. Очевидно, что $g(x, y, z)=(\bar{x}\vee y)\cdot z$, т. е. $g(x, y, z)$ образует базис в F_5^∞ (см. лемму 23). Пусть $g(x, y, z)=\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot z\vee x\cdot y\cdot z$. Легко видеть, что имеют место следующие равенства:

$$g(x, y, x)=x\cdot y,$$
$$g(g(x, y, x), y, z)=(x\vee\bar{y})\cdot z,$$

т. е. и в этом случае $g(x, y, z)$ образует базис в F_5^∞ (см. лемму 23). Лемма доказана.

§ 3. Класс F_8^∞, его базис. Лемма об $\langle\alpha, \gamma\rangle$-системах, содержащих класс F_8^∞

Обозначим через F_8^∞ множество всех функций, удовлетворяющих условию $\langle A^\infty\rangle$. Очевидно, что F_8^∞ является замкнутой $\langle\alpha, \gamma\rangle$-системой.

Лемма 25. *Функция $x\cdot\bar{y}$ является базисом в F_8^∞.*

Доказательство. Очевидно, что функция $x\cdot\bar{y}$ принадлежит F_8^∞. Покажем теперь, что произвольная функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из класса F_8^∞ порождается функцией $x\cdot\bar{y}$. По следствию из леммы 21 найдется такое k, что

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)= x_k\cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, 1, x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

x_k-компонента функции $f(\tilde{x})$ порождается системой $\{x\cdot y, \bar{x}\}$ (см. следствие 1 из теоремы 3). Следовательно, по теореме 2 функция $f(\tilde{x})$ порождается системой $\{x_k\cdot(x\cdot y), x_k\cdot\bar{x}\}$. Для завершения доказательства достаточно показать, что обе последние функции порождаются функцией $x\cdot\bar{y}$. Это следует из того, что $x\cdot y=x\cdot(\overline{\bar{y}\cdot x})$. Лемма доказана.

Лемма 26. *Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная замкнутая $\langle\alpha, \gamma\rangle$-система, удовлетворяющая условию $\langle A^2\rangle$ и содержащая немонотонную функцию. Тогда $\mathfrak{M}$ содержит класс F_8^∞.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — немонотонная функция из $\mathfrak{M}$. Покажем, что, используя эту функцию, можно получить $x\cdot\bar{y}$. Возможны два случая.

1) f — α-функция. Тогда по лемме 24 система содержит класс F_5^∞, а следовательно, функцию $x\cdot(y\vee\bar{z})$. Так как $\mathfrak{M}$ является $\langle\alpha, \gamma\rangle$-системой, то она содержит константу 0. Подставляя в функцию $x\cdot(y\vee\bar{z})$ вместо переменной y константу 0, получим функцию $x\cdot\bar{z}$, т. е. базис класса F_8^∞ (см. лемму 25).

2) f — γ-функция. В силу того, что f — немонотонная γ-функция, существует набор $\tilde{\alpha}=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, отличный от нулевого и единичного наборов, на котором f равна 1. Так как f удовлетворяет условию $\langle A^2\rangle$, то на наборе $\tilde{\beta}$, противоположном набору $\tilde{\alpha}$, она равна 0.

Таблица 12

x	y	$g(x, y)$	
0	0	$f(\tilde{0})$	0
0	1	$f(\tilde{\beta})$	0
1	0	$f(\tilde{\alpha})$	1
1	1	$f(\tilde{1})$	0

Исходя из набора $\tilde{\alpha}$, разобьем переменные на две группы. К первой группе отнесем те переменные x_i, для которых $\alpha_i=0$; ко второй — оставшиеся переменные. Если заменить переменные первой группы на y, а второй — на x, то получим из исходной функции f функцию $g(x, y)$ (см. таблицу 12).

Таким образом, при заданной подстановке мы получаем из функции f функцию $x \cdot \overline{y}$, образующую базис в F_8^∞ (см. лемму 25). Лемма доказана.

§ 4. Классы F_6^∞ и F_7^∞, их базисы. Лемма об $\langle\alpha\rangle$-системах, содержащих класс F_6^∞. Лемма об $\langle\alpha, \gamma\rangle$-системах, содержащих класс F_7^∞

Обозначим через F_6^∞ множество всех монотонных α-функций, удовлетворяющих условию $\langle A^\infty\rangle$. Очевидно, что F_6^∞ является замкнутым классом.

Лемма 27. *Функция $x \cdot (y \vee z)$ является базисом в F_6^∞.*

Доказательство. Очевидно, что функция $x \cdot (y \vee z)$ принадлежит F_6^∞. Покажем теперь, что произвольная функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из класса F_6^∞ порождается функцией $x \cdot (y \vee z)$. По следствию из леммы 21 найдется такое k, что

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = x_k \cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, 1, x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Поскольку $f(\widetilde{x})$ есть монотонная α-функция, то ее x_k-компонента является монотонной α- или β-функцией. Легко видеть (см. лемму 6), что система $\{x \cdot y, x \vee y, 1\}$ порождает все монотонные α- и β-функции. Таким образом, по лемме 5 функция $f(\widetilde{x})$ порождается системой $\{x_k \cdot (x \cdot y), x_k \cdot (x \vee y), x_k\}$. Для завершения доказательства достаточно показать, что функция $x_k \cdot (x \cdot y)$ порождается функцией $x \cdot (y \vee z)$. Это следует из того, что $x \cdot y = x \cdot (y \vee y)$. Лемма доказана.

Лемма 28. *Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная замкнутая $\langle\alpha\rangle$-система монотонных функций, удовлетворяющих условию $\langle A^2\rangle$. Пусть, кроме того, $\mathfrak{M}$ не состоит целиком из самодвойственных функций или функций вида $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$. Тогда она содержит класс F_6^∞.*

Доказательство. В силу следствия 2 леммы 14 система $\mathfrak{M}$ содержит функцию $x \cdot y$. Так как $\mathfrak{M}$ не исчерпывается функциями вида $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$, то в ней существует функция $f(\widetilde{x})$, сокращенная д. н. ф. которой содержит по крайней мере два импликанта $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$. Пусть $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{B}_2$, где $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ не содержат общих переменных. Из свойств сокращенной д. н. ф. вытекает, что $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ содержат хотя бы по одной переменной. С другой стороны, так как f удовлетворяет условию $\langle A^2\rangle$, то по лемме 21 $\mathfrak{C}$ также содержит по крайней мере одну переменную. Если заменить переменные, входящие в $\mathfrak{C}$, на x, в $\mathfrak{B}_1$ — на y, а оставшиеся — на z, то из исходной функции $f(\widetilde{x})$ получим функцию $g(x, y, z)$, равную либо $x \cdot y \vee x \cdot z$, либо $x \cdot y \vee x \cdot z \vee y \cdot z$.

Последнее вытекает из того, что сокращенная д. н. ф. монотонной функции не содержит отрицаний (см. лемму 7) и каждый импликант функции, удовлетворяющей условию $\langle A^2\rangle$, имеет общую переменную с импликантом $\mathfrak{A}_1$ и переменную, отличную от переменных из $\mathfrak{A}_1$, и, следовательно, после указанной подстановки имеет вид либо $x \cdot y \cdot z$, либо $x \cdot z$, либо $y \cdot z$. Для завершения доказательства достаточно еще заметить (см. лемму 27), что функции $x \cdot y$ и $x \cdot y \vee x \cdot z \vee y \cdot z$ порождают функцию $x \cdot (y \vee z)$:

$$x \cdot y \vee x \cdot z = \\ = x \cdot y \vee x \cdot (x \cdot z) \vee y \cdot (x \cdot z).$$

Лемма доказана.

Обозначим через F_7^∞ множество всех монотонных функций, удовлетворяющих условию $\langle A^\infty\rangle$. Очевидно, что F_7^∞ является замкнутым классом.

Лемма 29. *Система функций $\{0, x \cdot (y \vee z)\}$ является базисом в F_7^∞.*

Доказательство. Всякая функция, удовлетворяющая условию $\langle A^\infty\rangle$, есть либо α-, либо γ-функция. Очевидно, что единственной монотонной γ-функцией является константа 0. В силу этого $F_7^\infty = F_6^\infty \cup \{0\}$. Для завершения доказательства остается воспользоваться леммой 27.

Лемма 30. *Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная замкнутая $\langle\alpha, \gamma\rangle$-система монотонных функций, удовлетворяющая условию $\langle A^2\rangle$ и содержащая функцию, отличную от константы* 0, *функции x и функции $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$. Тогда $\mathfrak{M}$ содержит класс F_7^∞.*

Доказательство. Так как единственной монотонной γ-функцией является константа 0, то $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} \cup \{0\}$, где $\mathfrak{N}$ — некоторая замкнутая $\langle\alpha\rangle$-система монотонных функций, удовлетворяющая условию $\langle A^2\rangle$ и содержащая функцию, отличную от $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k$. Покажем, что $\mathfrak{N}$ содержит несамодвойственную функцию. По условию леммы $\mathfrak{N}$ содержит функцию f, отличную от x. Тогда либо f сама не самодвойственна, либо из нее при помощи подстановки константы 0 можно получить несамодвойственную функцию, зависящую существенно более чем от одной переменной (см. замечание 3 к лемме 1). Отсюда в силу леммы 28 $\mathfrak{N}$ содержит F_6^∞. Следовательно, $\mathfrak{M} \supseteq \{F_6^\infty \cup \{0\}\} = F_7^\infty$. Лемма доказана.

§ 5. Лемма о порядках классов F_5^∞, F_6^∞, F_7^∞, F_8^∞

Лемма 31. *Порядок классов F_5^∞, F_6^∞ и F_7^∞ равен* 3, *порядок класса F_8^∞ равен* 2.

Доказательство. В силу лемм 23, 27 и 29 порядки классов F_5^∞, F_6^∞, F_7^∞ не больше 3, а в силу леммы 25 порядок класса F_8^∞ не больше 2. Поскольку мы рассматриваем системы порядка выше 1 и имеет место равенство $F_7^\infty = F_6^\infty \cup \{0\}$, то для завершения доказательства достаточно оценить снизу порядки классов F_5^∞ и F_6^∞. Допустим, что порядок любого из классов F_5^∞ и F_6^∞ равен 2. Так как единственной α-функцией, зависящей от двух переменных и удовлетворяющей условию $\langle A^\infty\rangle$, является функция $x \cdot y$, то базис состоял бы из одной функции $x \cdot y$. Поскольку $x \cdot y$ не порождает ни одну из функций $x \cdot (y \vee \bar{z})$ и $x \cdot (y \vee z)$, то в силу лемм 23 и 27 она не является базисом ни в F_5^∞, ни в F_6^∞. Лемма доказана.

§ 6. Лемма о классах, удовлетворяющих условию $\langle A^2\rangle$ и не удовлетворяющих условию $\langle A^{\mu+1}\rangle$

Лемма 32. *Если замкнутый класс $\mathfrak{M}$ удовлетворяет условию $\langle A^2\rangle$, не удовлетворяет условию $\langle A^{\mu+1}\rangle$ $(\mu \geqslant 2)$ и содержит несамодвойственную функцию, то в него входит функция $h_\mu(\tilde{x})$, где*

$$h_\mu(\tilde{x}) = h_\mu(x_1, x_2, \ldots, x_{\mu+1}) = \bigvee_{i=1}^{\mu+1} x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{i-1} \cdot x_{i+1} \cdot \ldots \cdot x_{\mu+1}.$$

Доказательство. Пусть функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принадлежит классу $\mathfrak{M}$ и не удовлетворяет условию $\langle A^{\mu+1}\rangle$. Тогда существуют наборы

$$\tilde{\alpha}_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n}),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\tilde{\alpha}_{\mu+1} = (\alpha_{\mu+1,1}, \alpha_{\mu+1,2}, \ldots, \alpha_{\mu+1,n}),$$

на которых функция f равна единице, и такие, что матрица

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{\mu+1,1} & \alpha_{\mu+1,2} & & \alpha_{\mu+1,n} \end{pmatrix}$$

не содержит единичных столбцов.

Возможны два случая.

1) f — α-функция. Рассмотрим функции

$$g_1(x_1, x_2, \ldots, x_{\mu+1}), \quad g_2(x_1, x_2, \ldots, x_{\mu+1}), \ldots, g_n(x_1, x_2, \ldots, x_{\mu+1}),$$

где

$$g_l(x_1, x_2, \ldots, x_{\mu+1}) = \begin{cases} 0 & \text{на наборах, имеющих более одного нуля;} \\ \alpha_{il} & \text{на наборе, который содержит один нуль, и этот нуль стоит на } i\text{-м месте;} \\ 1 & \text{на единичном наборе;} \end{cases}$$

$l = 1, 2, \ldots, n$ (см. таблицу 13).

Таблица

x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_μ	$x_{\mu+1}$	g_1	g_2	g_3	$\ldots$	g_n
0	0	0		0	0	0	0	0	$\ldots$	0
.	.	.	. . .	.	.	.	.	.	. . .	.
1	1	1	$\ldots$	0	0	0	0	0	$\ldots$	0
0	1	1	$\ldots$	1	1	α_{11}	α_{12}	α_{13}	$\ldots$	α_{1n}
1	0	1	$\ldots$	1	1	α_{21}	α_{22}	α_{23}	$\ldots$	α_{2n}
1	1	0	$\ldots$	1	1	α_{31}	α_{32}	α_{33}	$\ldots$	α_{3n}
.	.	.	. . .	.	.	.	.	.	. . .	.
1	1	1	$\ldots$	1	0	$\alpha_{\mu+1,\,1}$	$\alpha_{\mu+1,\,2}$	$\alpha_{\mu+1,\,3}$	$\ldots$	$\alpha_{\mu+1,\,n}$
1	1	1	$\ldots$	1	1	1	1	1	$\ldots$	1

Очевидно, что функции $g_1, g_2, \ldots, g_n$ являются мо нотонными α-функциями. Так как функция g_l $(1 \leqslant l \leqslant$ может принимать значение 1 только на наборах, содер жащих не более одного нуля, и хотя бы на одном из на боров, содержащих ровно один нуль, равна 0, то он удовлетворяет условию $\langle A^\infty \rangle$. Таким образом, функци $g_1, g_2, \ldots, g_n$ принадлежат классу F_6^∞.

Поскольку $\mathfrak{M}$ есть замкнутый класс, удовлетворяющи условию $\langle A^2 \rangle$, то он является либо $\langle\alpha\rangle$-, либо $\langle\alpha,\gamma\rangle$ системой. В связи с этим рассмотрим четыре по случая.

а) $\mathfrak{M}$ — $\langle\alpha\rangle$-система, не состоящая целиком из мо нотонных функций. Согласно лемме 24 $\mathfrak{M}$ содержи класс F_5^∞.

б) $\mathfrak{M}$ — $\langle\alpha\rangle$-система монотонных функций. Так как не удовлетворяет условию $\langle A^{\mu+1} \rangle$, то он не состо целиком из функций вида $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$. Кроме тог по условию леммы $\mathfrak{M}$ содержит несамодвойственну функцию. Используя лемму 28, получаем, чт $\mathfrak{M} \supseteq F_6^\infty$.

в) $\mathfrak{M}$ — $\langle\alpha,\gamma\rangle$-система, не состоящая целиком из мо нотонных функций. Тогда по лемме 26 имеем $\mathfrak{M} \supseteq F_8^\infty$

г) $\mathfrak{M}$ — $\langle\alpha,\gamma\rangle$-система монотонных функций. Так к $\mathfrak{M}$ не удовлетворяет условию $\langle A^{\mu+1} \rangle$, то он содерж

функцию, отличную от константы 0, функции x и функции $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$. В силу леммы 30 $\mathfrak{M}$ содержит класс F_7^∞.

Поскольку классы F_5^∞, F_7^∞ и F_8^∞ содержат класс F_6^8, то во всех этих подслучаях класс $\mathfrak{M}$ содержит F_6^∞. Таким образом, функции $g_1, g_2, \ldots, g_n$ принадлежат классу $\mathfrak{M}$.

Так как

$$f(g_1(x_1, x_2, \ldots, x_{\mu+1}), \ldots, g_n(x_1, x_2, \ldots, x_{\mu+1})) = h_\mu(x_1, x_2, \ldots, x_{\mu+1}),$$

то функция $h_\mu(\tilde{x})$ принадлежит классу $\mathfrak{M}$.

2) f – γ-функция. Рассмотрим функции

$$g'_1(x_1, x_2, \ldots, x_{\mu+1}),\ g'_2(x_1, x_2, \ldots, x_{\mu+1}), \ldots \ldots, g'_n(x_1, x_2, \ldots, x_{\mu+1}),$$

$$g'_l(x_1, x_2, \ldots, x_{\mu+1}) = \begin{cases} 0 & \text{на наборах, имеющих более одного нуля;} \\ \alpha_{il} & \text{на наборе, который содержит один нуль и этот нуль стоит на } i\text{-м месте;} \\ \alpha_{1l} & \text{на единичном наборе;} \end{cases}$$

$l = 1, 2, \ldots, n$.

Аналогично предыдущему случаю устанавливается, что функции $g'_1, g'_2, \ldots, g'_n$ удовлетворяют условию $\langle A^\infty \rangle$. Таким образом, функции $g'_1, g'_2, \ldots, g'_n$ принадлежат классу F_8^∞. Далее, поскольку $\mathfrak{M}$ является $\langle\alpha,\gamma\rangle$-системой, содержащей немонотонную функцию, то по лемме 26 $\mathfrak{M} \supseteq F_8^\infty$. Следовательно, $g'_1, g'_2, \ldots, g'_n$ принадлежат $\mathfrak{M}$.

Так как

$$f(g'_1(x_1, x_2, \ldots, x_{\mu+1}), \ldots, g'_n(x_1, x_2, \ldots, x_{\mu+1})) = h_\mu(x_1, x_2, \ldots, x_{\mu+1}),$$

то функция $h_\mu(\tilde{x})$ принадлежит классу $\mathfrak{M}$.

Лемма доказана.

§ 7. Классы F_5^μ, их базисы

Обозначим через F_5^μ множество всех α-функций, удовлетворяющих условию $\langle A^\mu \rangle$. Очевидно, что F_5^μ являет замкнутым классом.

Лемма 33. *Система функций* $\{x \cdot (y \vee \bar{z}),\ h_\mu(\tilde{x}$ *является базисом в* F_5^μ.

Доказательство. Очевидно, что функции $x \cdot (y \vee$ и $h_\mu(\tilde{x})$ принадлежат классу F_5^μ. Покажем, что произвол ная функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из класса F_5^μ порождает функциями $x \cdot (y \vee \bar{z})$ и $h_\mu(\tilde{x})$. Доказательство буде вести индукцией по числу m всех наборов значений пер менных, на которых функция равна 1.

а) $m \leqslant \mu + 1$. Рассмотрим все наборы, на которы α-функция f принимает значение 1. Среди этих m н боров находится единичный набор. Так как функци удовлетворяет условию $\langle A^\mu \rangle$ и остальных наборов (исключа единичный) будет $m - 1 \leqslant \mu$, то они содержат общу единичную компоненту. А потому и все m наборов имею общую единичную компоненту. Следовательно, f удовлет воряет условию $\langle A^\infty \rangle$. В силу леммы 23 функция порождается функцией $x \cdot (y \vee \bar{z})$.

б) Пусть утверждение справедливо для всех функций f у которых $m = t$ $(t \geqslant \mu + 1)$. Тогда оно имеет место дл функций, у которых $m = t + 1$.

Рассмотрим произвольную функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n$ с $m = t + 1$. Обозначим наборы, на которых она равна 1 через $\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_t$, где $\tilde{\alpha}_0 = (1, 1, \ldots, 1)$. Возьме функции

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \ldots \\ \ldots,\ \varphi_t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

где

$$\varphi_i(\tilde{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \tilde{x} = \tilde{\alpha}_j,\ j = 0, 1, \ldots, i-1, \\ & i+1, \ldots, t; \\ 0 & \text{в противном случае, } i = 1, 2, \ldots, t. \end{cases}$$

Очевидно, что каждая из построенных функций является α-функцией. Далее, так как условие $\varphi_i(\tilde{x}) = 1$ влечет

условие $f(\tilde{x}) = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$ и функция $f(\tilde{x})$ удовлетворяет условию $\langle A^\mu \rangle$, то функции $\varphi_i(\tilde{x})$ удовлетворяют условию $\langle A^\mu \rangle$. Таким образом, функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_t$ принадлежат классу F_5^μ. Поскольку каждая из функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_t$ принимает значение 1 ровно на t наборах, то по индуктивному предположению они порождаются функциями $x \cdot (y \vee \bar{z})$ и $h_\mu(\tilde{x})$.

Так как $t \geqslant \mu + 1$, то формула

$$h_\mu(\varphi_1(\tilde{x}),\quad \varphi_2(\tilde{x}),\ \ldots,\ \varphi_{\mu+1}(\tilde{x}))$$

имеет смысл и очевидно, что

$$h_\mu(\varphi_1(\tilde{x}),\ \varphi_2(\tilde{x}),\ \ldots,\ \varphi_{\mu+1}(\tilde{x})) = f(\tilde{x}).$$

Следовательно, функция $f(\tilde{x})$ порождается функциями $x \cdot (y \vee \bar{z})$ и $h_\mu(\tilde{x})$.

Для завершения доказательства остается установить, что каждая из функций $x \cdot (y \vee \bar{z})$ и $h_\mu(\tilde{x})$ в отдельности не порождает класса F_5^μ.

Действительно, так как функция $x \cdot (y \vee \bar{z})$ удовлетворяет условию $\langle A^\infty \rangle$, а функция $h_\mu(\tilde{x})$ не удовлетворяет условию $\langle A^\infty \rangle$, то $h_\mu(\tilde{x})$ не выражается через функцию $x \cdot (y \vee \bar{z})$. С другой стороны, из монотонной функции $h_\mu(\tilde{x})$ нельзя получить никакую немонотонную функцию, в частности, функцию $x \cdot (y \vee \bar{z})$. Следовательно, система $\{x \cdot (y \vee \bar{z}),\ h_\mu(\tilde{x})\}$ является базисом класса F_5^μ. Лемма доказана.

§ 8. Классы F_8^μ, их базисы

Обозначим через F_8^μ множество всех функций, удовлетворяющих условию $\langle A^\mu \rangle$. Очевидно, что F_8^μ является замкнутой $\langle \alpha, \gamma \rangle$-системой.

Лемма 34. *Система функций* $\{x \cdot \bar{y},\ h_\mu(\tilde{x})\}$ *является базисом в* F_8^μ.

Доказательство. Очевидно, что функции $x \cdot \bar{y}$ и $h_\mu(\tilde{x})$ принадлежат классу F_8^μ. Покажем, что произвольная функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из класса F_8^μ порождае функциями $x \cdot \bar{y}$ и $h_\mu(\tilde{x})$.

Возможны два случая.

1) $f(\tilde{x})$ — α-функция. Тогда $f(\tilde{x}) \in F_5^\mu$. Так к $x \cdot (\overline{y \cdot z}) = x \cdot (\bar{y} \vee \bar{z})$, то по лемме 33 $f(\tilde{x})$ порождае функциями $x \cdot \bar{y}$ и $h_\mu(\tilde{x})$.

2) $f(\tilde{x})$ — γ-функция. Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$ то $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \cdot \bar{x}_1$. Ввиду этого можно сч тать, что $f(\tilde{x}) \neq 0$. Рассмотрим вспомогательную фун цию $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$, где

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot x_{n+1} \vee$$
$$\vee f(x_1, x_2, \ldots, x$$

Легко проверить, что функция φ является α-функцие удовлетворяющей условию $\langle A^\mu \rangle$. Как установлено вы функция $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ может быть выражена че функции $x \cdot \bar{y}$ и $h_\mu(\tilde{x})$. Кроме того, мы показали, константа 0 также выражается через эти функции. Вви этого из равенства

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

следует, что и $f(\tilde{x})$ выражается через функции $x \cdot \bar{y}$ $h_\mu(\tilde{x})$.

Для завершения доказательства остается установит что каждая из функций $x \cdot \bar{y}$ и $h_\mu(\tilde{x})$ в отдельности порождает класса F_8^μ.

В самом деле, так как $x \cdot \bar{y}$ удовлетворяет услови $\langle A^\infty \rangle$ и немонотонна, а $h_\mu(\tilde{x})$ не удовлетворяет услови $\langle A^\infty \rangle$ и монотонна, то они не выражаются друг чер друга. Следовательно, система $\{x \cdot \bar{y}, h_\mu(\tilde{x})\}$ являет базисом в F_8^μ. Лемма доказана.

§ 9. Классы F_6^μ и F_7^μ, их базисы

Обозначим через F_6^μ множество всех монотонн α-функций, удовлетворяющих условию $\langle A^\mu \rangle$. Очевидн что F_6^μ является замкнутым классом.

Лемма 35. *Система функций $\{x \cdot (y \vee z), h_2(\tilde{x})\}$ и система $\{h_\mu(\tilde{x})\}$ при $\mu \geqslant 3$ являются базисами в F_6^2 и в F_6^μ соответственно.*

Доказательство. Очевидно, что функции $x \cdot (y \vee z)$ и $h_\mu(\tilde{x})$ принадлежат классу F_6^μ. Сначала установим, что система функций $\{x \cdot (y \vee z), h_\mu(\tilde{x})\}$ является полной в F_6^μ. Для этого покажем, что произвольная функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из класса F_6^μ порождается функциями $x \cdot (y \vee z)$ и $h_\mu(\tilde{x})$. Доказательство будем вести индукцией по числу m всех простых импликантов в сокращенной д. н. ф. функции $f(\tilde{x})$.

Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{k=1}^{m} \mathfrak{A}_k$.

а) $m \leqslant \mu$. Тогда по лемме 21 функция $f(\tilde{x})$ удовлетворяет условию $\langle A^\infty \rangle$, т. е. $f(\tilde{x}) \in F_6^\infty$. Отсюда, применяя лемму 27, получаем, что функция $f(\tilde{x})$ порождается функцией $x \cdot (y \vee z)$.

б) Пусть утверждение справедливо для всех функций f, у которых $m = t$ $(t \geqslant \mu)$. Покажем тогда, что оно имеет место для функций, у которых $m = t + 1$.

Рассмотрим произвольную функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с $m = t + 1$. Возьмем функции $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ..., $\varphi_{t+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где

$$\varphi_i(\tilde{x}) = \bigvee_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{t+1} \mathfrak{A}_k, \quad i = 1, 2, \ldots, t+1.$$

Очевидно, что каждая из функций $\varphi_i(\tilde{x})$ $(i = 1, 2, \ldots, t+1)$ монотонна, так как ее импликанты не содержат отрицаний переменных. Далее, поскольку $t \geqslant \mu \geqslant 2$, то сокращенная д. н. ф. функции $\varphi_i(\tilde{x})$ содержит непустое множество импликантов и поэтому $\varphi_i(\tilde{x})$ является α-функцией. Так как условие $\varphi_i(\tilde{x}) = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, t+1)$ влечет условие $f(\tilde{x}) = 1$ и функция $f(\tilde{x})$ удовлетворяет условию $\langle A^\mu \rangle$, то функции $\varphi_i(\tilde{x})$ удовлетворяют условию $\langle A^\mu \rangle$. Таким образом, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{t+1}$ принадлежат классу F_6^μ. Поскольку формула $\bigvee_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{t+1} \mathfrak{A}_k$ является сокращен ной д. н. ф. функции $\varphi_i(\tilde{x})$ $(i=1, 2, \ldots, t+1)$ и содержи ровно t простых импликантов, то по индуктивному пред положению функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{t+1}$ порождаются фун циями $x\cdot(y\vee z)$ и $h_\mu(\tilde{x})$.

Так как $t\geqslant\mu$, то формула

$$h_\mu(\varphi_1(\tilde{x}), \varphi_2(\tilde{x}), \ldots, \varphi_{\mu+1}(\tilde{x}))$$

имеет смысл и очевидно, что

$$h_\mu(\varphi_1(\tilde{x}), \varphi_2(\tilde{x}), \ldots, \varphi_{\mu+1}(\tilde{x}))=f(\tilde{x}).$$

Следовательно, функция $f(\tilde{x})$ порождается функциям $x\cdot(y\vee z)$ и $h_\mu(\tilde{x})$.

В случае, если $\mu=2$, функция $x\cdot(y\vee z)$ удовлетво ряет условию $\langle A^\infty\rangle$ и несамодвойственна, а $h_2(x_1, x_2, x$ не удовлетворяет условию $\langle A^\infty\rangle$ и самодвойственна. Сл довательно, они не выражаются друг через друга и с стема $\{x\cdot(y\vee z), h_2(\tilde{x})\}$ является базисом в F_6^2.

Если $\mu\geqslant 3$, то функция $h_\mu(\tilde{x})$ порождает функци $x\cdot(y\vee z)$:

$$h_\mu(x_1, x_2, x_3, \overbrace{x_1, x_1, \ldots, x_1}^{\mu-2 \text{ раза}})=x_1\cdot(x_2\vee x_3).$$

Следовательно, при $\mu\geqslant 3$ функция $h_\mu(\tilde{x})$ образует баз в F_6^μ. Лемма доказана.

Обозначим через F_7^μ множество всех монотонн функций, удовлетворяющих условию $\langle A^\mu\rangle$. Очевидно, ч F_7^μ является замкнутой $\langle\alpha, \gamma\rangle$-системой.

Лемма 36. *Система функций* $\{0, h_\mu(\tilde{x})\}$ *являет базисом в* F_7^μ.

Доказательство. Очевидно, что функция $h_\mu($ и константа 0 принадлежат классу F_7^μ. Покажем, ч произвольная функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из класса порождается функцией $h_\mu(\tilde{x})$ и константой 0. Так к

$F_7^\mu=F_6^\mu\cup\{0\}$, то достаточно установить, что система $\{0, h_\mu(\tilde{x})\}$ порождает класс F_6^μ.

Пусть $\mu=2$. Тогда

$$h_2(x, h_2(x, y, z), 0)=x\cdot(y\vee z).$$

Следовательно, система $\{0, h_\mu(\tilde{x})\}$ порождает базис класса F_6^μ (см. лемму 35).

Пусть $\mu\geqslant 3$. Тогда система $\{0, h_\mu(\tilde{x})\}$ содержит базис класса F_6^μ (см. лемму 35). Лемма доказана.

§ 10. Лемма о порядках классов F_5^μ, F_6^μ, F_7^μ, F_8^μ

Лемма 37. *Порядок класса* F_i^μ, *где* $i=5, 6, 7, 8$, *равен* $\mu+1$.

Доказательство. В силу лемм 33, 34, 35 и 36 порядок классов F_i^μ $(i=5, 6, 7, 8)$ не больше $\mu+1$. С другой стороны, если бы в F_i^μ существовал базис порядка меньше $\mu+1$, то по следствию из леммы 22 он состоял бы из функций, удовлетворяющих условию $\langle A^\infty\rangle$, и поэтому не порождал бы функцию $h_\mu(\tilde{x})$, принадлежащую каждому из классов F_5^μ, F_6^μ, F_7^μ и F_8^μ и, очевидно, не удовлетворяющую условию $\langle A^\infty\rangle$. Лемма доказана.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ГЛАВА I

ОПИСАНИЕ ЗАМКНУТЫХ КЛАССОВ В C_1

Будем рассматривать подмножества функций из C_1. Поскольку мы условились, что вместе с каждой функцией заданы все функции, получающиеся из нее добавлением и изъятием любого конечного числа фиктивных переменных, естественно считать, что в подмножествах наряду с каждой функцией f содержатся все равные ей функции.

Здесь мы займемся изучением таких подмножеств, которые являются замкнутыми классами. В итоге мы получим полное описание всех замкнутых классов, которое отличается от описания Э. Поста второстепенными деталями, связанными с классами O_i, P_i и S_i.

§ 1. Замкнутые классы O_i, P_i, S_i

Сначала опишем три семейства простейших замкнутых классов. Первое семейство состоит из замкнутых классов нулевого и первого порядка.

Класс O_1 состоит из всех функций, равных $f_i(x_i) = x_i$, $i = 1, 2, \ldots$ Очевидно, O_1 есть $\langle\alpha\rangle$-система и имеет базис $\{f(x) = x\}$.

Класс O_2 состоит из всех функций, равных 1. Очевидно, O_2 есть $\langle\beta\rangle$-система и имеет базис $\{1\}$.

Класс O_3 состоит из всех функций, равных 0. Очевидно, O_3 есть $\langle\gamma\rangle$-система и имеет базис $\{0\}$.

Класс O_4 состоит из всех функций, равных $f_i(x_i) = x_i$ и $g_j(x_j) = \bar{x}_j$, $i, j = 1, 2, \ldots$ Очевидно, O_4 есть $\langle\alpha, \delta\rangle$-система и имеет базис $\{f(x) = \bar{x}\}$.

Класс $O_5 = O_1 \cup O_2$. Очевидно, O_5 есть $\langle\alpha, \beta\rangle$-система и имеет базис $\{f(x) = x, 1\}$.

Класс $O_6 = O_1 \cup O_3$. Очевидно, O_6 есть $\langle\alpha, \gamma\rangle$-система и имеет базис $\{f(x) = x, 0\}$.

Класс $O_7 = O_2 \cup O_3$. Очевидно, O_7 есть $\langle\beta, \gamma\rangle$-система и имеет базис $\{0, 1\}$.

Класс $O_8 = O_1 \cup O_2 \cup O_3$. Очевидно, O_8 есть $\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle$-система и имеет базис $\{f(x) = x, 0, 1\}$.

Класс $O_9 = O_2 \cup O_3 \cup O_4$. Очевидно, O_9 есть $\langle\alpha, \beta, \gamma, \delta\rangle$-система и имеет базис $\{f(x) = \bar{x}, 0\}$.

Базисы классов O_2, O_3, O_7 имеют нулевой порядок, а базисы классов O_1, O_4, O_5, O_6, O_8, O_9 имеют первый порядок. Очевидно, здесь перечислены все замкнутые классы, имеющие порядок 0 и 1.

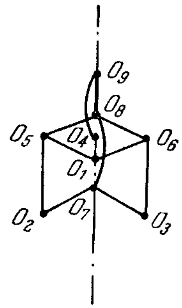

Рис. 1.

На рис. 1 изображена взаимосвязь построенных классов. На нем классы изображены точками. Точки O_i и O_j соединены отрезком, если соответствующий класс O_i непосредственно содержит класс O_j (т. е. между ними нет промежуточных классов). При этом точка O_i помещена выше точки O_j. Фигура, изображенная на рис. 1, имеет ось симметрии. Самодвойственные классы изображены точками на этой оси; классы, двойственные друг другу, расположены симметрично относительно этой оси.

Второе семейство состоит из замкнутых классов, содержащих функции первого порядка и все логические суммы.

Класс S_1 состоит из всех логических сумм.

Очевидно, S_1 есть α-система и имеет базис $\{x \vee y\}$.

Класс S_3 состоит из всех логических сумм и константы 1. Очевидно, S_3 есть $\langle\alpha, \beta\rangle$-система и имеет базис $\{x \vee y, 1\}$.

Класс S_5 состоит из всех логических сумм и константы 0. Очевидно, S_5 есть $\langle\alpha, \gamma\rangle$-система и имеет базис $\{x \vee y, 0\}$.

Класс S_6 состоит из всех логических сумм и констант 1 и 0. Очевидно, S_6 есть $\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle$-система и имеет базис $\{x \vee y, 0, 1\}$.

Легко видеть, что всякий замкнутый класс $\mathfrak{M}$, входящий в S_6, коль скоро он содержит функцию, существенно зависящую более чем от одной переменной, совпадает с одним из замкнутых классов S_1, S_3, S_5, S_6. В противном случае $\mathfrak{M}$ состоит из функций, зависящих не более чем от одной переменной, и поэтому совпадает с одним из замкнутых классов O_1, O_2, O_3, O_5, O_6, O_7, O_8. Отсюда следует, что S_6 непосредственно содержит только S_3, S_5

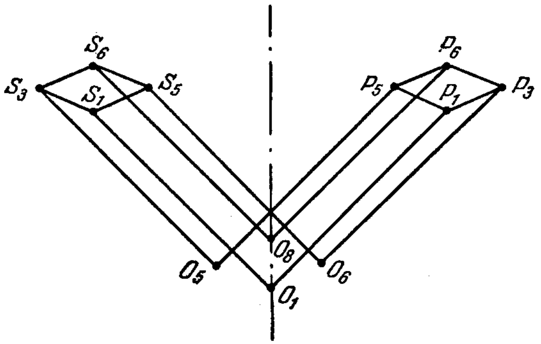

Рис. 2.

и O_8; S_5 непосредственно содержит только S_1 и O_6; S_3 — только S_1 и O_5; S_1 — только O_1.

Третье семейство состоит из замкнутых классов, являющихся двойственными к соответствующим классам из второго семейства.

Класс P_1 состоит из всех логических произведений. Очевидно, P_1 есть $\langle\alpha\rangle$-система и имеет базис $\{x \cdot y\}$.

Класс P_3 состоит из всех логических произведений и константы 0. Очевидно, P_3 есть $\langle\alpha, \gamma\rangle$-система и имеет базис $\{x \cdot y, 0\}$.

Класс P_5 состоит из всех логических произведений и константы 1. Очевидно, P_5 есть $\langle\alpha, \beta\rangle$-система и имеет базис $\{x \cdot y, 1\}$.

Класс P_6 состоит из всех логических произведений и констант 0 и 1. Очевидно, P_6 есть $\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle$-система и имеет базис $\{x \cdot y, 0, 1\}$.

Легко видеть, что каждый из классов второго и третьего семейств имеет порядок два.

На рис. 2 изображена взаимосвязь построенных классов

§ 2. Замкнутые классы линейных функций

Класс L_1 состоит из всех линейных функций. Очевидно, L_1 есть $\langle\alpha, \beta, \gamma, \delta\rangle$-система, имеет базис $\{0, x+y+1\}$ и порядок 2.

Каждую линейную функцию путем переименования без отождествления переменных можно привести к виду

$$\sum_{i=1}^{m} x_i + c_0.$$

Если $m = 2k+1$ и $c_0 = 0$, то

$$\sum_{i=1}^{2k+1} x_i \text{ — линейная } \alpha\text{-функция;}$$

если $m = 2k$ и $c_0 = 1$, то

$$\sum_{i=1}^{2k} x_i + 1 \text{ — линейная } \beta\text{-функция;}$$

если $m = 2k$ и $c_0 = 0$, то

$$\sum_{i=1}^{2k} x_i \text{ — линейная } \gamma\text{-функция;}$$

если $m = 2k+1$ и $c_0 = 1$, то

$$\sum_{i=1}^{2k+1} x_i + 1 \text{ — линейная } \delta\text{-функция.}$$

Класс L_2 состоит из всех линейных функций вида

$$\sum_{i=1}^{2k} x_i + 1, \quad \sum_{i=1}^{2l+1} x_i, \quad k, l = 0, 1, 2, \ldots,$$

и всех функций, получающихся из них путем переименования переменных без отождествления. Очевидно, L_2 есть $\langle\alpha, \beta\rangle$-система, содержащая все линейные α- и β-функции, имеет базис $\{x+y+1\}$ и порядок 2.

Легко видеть, что между L_1 и L_2 не существует промежуточных классов. Действительно, всякий такой класс был бы либо $\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle$-, либо $\langle\alpha, \beta, \gamma, \delta\rangle$-системой. И в том и в другом случае он содержал бы константу 0, но система $\{0, x+y+1\}$ является базисом класса L_1, поэтому рассматриваемый класс совпал бы с L_1.

Класс L_3 является двойственным к L_2 и состоит из всех линейных функций вида

$$\sum_{i=1}^{s} x_i, \quad s=0, 1, \ldots,$$

и всех функций, получающихся из них путем переименования переменных без отождествления. Очевидно, L_3 есть $\langle\alpha, \gamma\rangle$-система, содержащая все линейные α- и γ-функции, имеет базис $\{x+y\}$ и порядок 2.

Аналогично предыдущему устанавливается отсутствие промежуточных замкнутых классов между L_1 и L_3.

Класс L_5 состоит из всех линейных функций вида

$$\sum_{i=1}^{2s+1} x_i + 1, \quad \sum_{i=1}^{2s+1} x_i, \quad s=0, 1, 2, \ldots,$$

и всех функций, получающихся из них путем переименования переменных без отождествления. Очевидно, L_5 есть $\langle\alpha, \delta\rangle$-система, содержащая все линейные α- и δ-функции, имеет базис $\{x+y+z+1\}$ и порядок 3.

Легко видеть, что между L_1 и L_5 не существует промежуточных замкнутых классов. Действительно, всякий такой класс есть $\langle\alpha, \beta, \gamma, \delta\rangle$-система и потому содержит константу 0. Поскольку система $\{0, x+y+z+1\}$ есть базис класса L_1, то этот класс совпадал бы с L_1.

Класс L_4 состоит из всех линейных функций вида

$$\sum_{i=1}^{2s+1} x_i, \quad s=0, 1, 2, \ldots,$$

и линейных функций, получающихся из них путем переименования переменных без отождествления. Очевидно, L_4 есть $\langle\alpha\rangle$-система, содержащая все линейные α-функции, имеет базис $\{x+y+z\}$ и порядок 3.

Нетрудно видеть, что любая функция из L_4, существенно зависящая более чем от одной переменной, является базисом этого класса и потому класс L_4 не содержит замкнутых подклассов порядка выше единицы. Покажем, что всякий класс линейных функций, содержащий L_4, совпадает с одним из классов: L_1, L_2, L_3, L_5. Действительно, всякий такой класс должен непременно быть либо $\langle\alpha, \beta\rangle$-, либо $\langle\alpha, \gamma\rangle$-, либо $\langle\alpha, \delta\rangle$-, либо $\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle$-, либо $\langle\alpha, \beta, \gamma, \delta\rangle$-системой.

В соответствии с этим возможны следующие случаи.

а) Класс содержит константу 1. Поскольку система $\{x+y+z, 1\}$ порождает L_2, то он совпадает с L_2 или с L_1.

б) Класс содержит константу 0. Поскольку система $\{x+y+z, 0\}$ порождает L_3, то он совпадает с L_3 или с L_1.

в) Класс содержит $\bar{x}$. Поскольку система $\{x+y+z, \bar{x}\}$ порождает L_5, то он совпадает с L_5 или с L_1.

Отсюда следует, что перечисленные классы L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 исчерпывают все замкнутые классы линейных функций порядка выше единицы. В самом деле, так как из каждой линейной функции порядка выше единицы, очевидно, можно построить функцию $x+y+z$, то любой такой замкнутый класс линейных функций содержит класс L_4.

Очевидно, что каждый из замкнутых классов функций, зависящих не более чем от одной переменной, состоит из линейных функций. Отсюда следует, что L_1 непосредственно содержит только L_2, L_3, L_5 и O_9; L_2 непосредственно содержит только L_4 и O_5; L_3 — только L_4 и O_6; L_4 — только O_1; L_5 — только L_4 и O_4. На рис. 3 изображена взаимосвязь указанных классов.

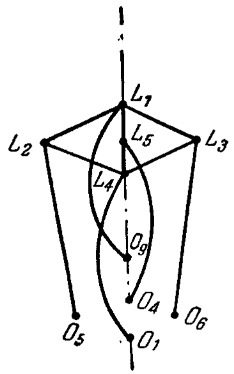

Рис. 3.

В дальнейшем при классификации замкнутых классов будем исходить из типов их оснований.

§ 3. $\langle\beta\rangle$-, $\langle\gamma\rangle$-, $\langle\beta, \gamma\rangle$-системы

Как следует из леммы 13 и теоремы 4, каждая из перечисленных систем содержит только константы и потому совпадает с одним из классов O_2, O_3 и O_7.

§ 4. $\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle$-системы

Класс A_1 состоит из всех монотонных функций. Очевидно, A_1 есть $\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle$-система, имеет базис $\{0, 1, x \cdot y, x \vee y\}$ и порядок 2 (см. следствия 1 и 2 из леммы 6).

Покажем, что всякая замкнутая $\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle$-система, не совпадающая с A_1, есть один из классов O_8, S_6, P_6.

Очевидно, что всякая замкнутая $\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle$-система содержится в A_1. В противном случае она содержала бы немонотонную функцию, из которой по следствию из леммы 5 мы получили бы функцию $\bar{x}$, т. е. δ-функцию.

Возможны следующие случаи.

Замкнутый класс состоит из монотонных функций нулевого и первого порядка. Тогда, очевидно, он совпадает с классом O_8.

Замкнутый класс содержит монотонные функции порядка выше единицы, и все они являются логическими суммами. Тогда он, очевидно, совпадает с S_6.

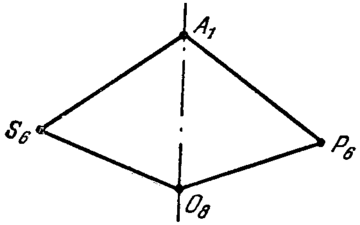

Рис. 4.

Замкнутый класс содержит монотонные функции порядка выше единицы, и все они являются логическими произведениями. Тогда он, очевидно, совпадает с P_6.

Замкнутый класс содержит монотонную функцию порядка выше единицы, не совпадающую с логической суммой, и монотонную функцию порядка выше единицы, не совпадающую с логическим произведением. В этом случае, используя лемму 7 и теорему 4, получаем, что он должен содержать конъюнкцию и дизъюнкцию. Следовательно, он совпадает с A_1.

Итак, показано, что никаких других замкнутых $\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle$-систем, кроме O_8, S_6, P_6 и A_1, не существует.

На рис. 4 изображена взаимосвязь указанных классов.

§ 5. $\langle\alpha, \beta, \gamma, \delta\rangle$-системы

Класс C_1 состоит из всех функций алгебры логики. Очевидно, C_1 есть $\langle\alpha, \beta, \gamma, \delta\rangle$-система, имеет базис $\{\bar{x}, x \cdot y\}$ и порядок 2 (см. следствия 1 и 3 из теоремы 3).

Если замкнутая $\langle\alpha, \beta, \gamma, \delta\rangle$-система не состоит только из линейных функций, то по лемме 11 она содержит функцию $x \cdot y$. Поэтому всякая $\langle\alpha, \beta, \gamma, \delta\rangle$-система либо совпадает с C_1, либо состоит только из линейных функций. Но последних классов, очевидно, только два: L_1 и O_9. На рис. 5 изображена взаимосвязь указанных классов.

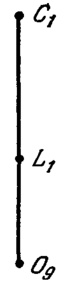

Рис. 5.

§ 6. $\langle\alpha\rangle$-системы (первая часть)

Рассмотрим сначала $\langle\alpha\rangle$-системы, содержащие функции $x \cdot y$ и $x \vee y$.

Класс A_4 состоит из всех монотонных α-функций. Очевидно, A_4 имеет базис $\{x \cdot y, x \vee y\}$ (см. лемму 6) и имеет порядок 2.

Класс C_4 состоит из всех α-функций. Очевидно, C_4 имеет базис $\{x \vee y, x \cdot (y + z + 1)\}$ (см. следствие из леммы 17) и порядок 3.

Как следует из леммы 17, между C_4 и A_4 промежуточных замкнутых классов не существует. Очевидно, A_4 и C_4 исчерпывают все замкнутые $\langle\alpha\rangle$-системы, содержащие функции $x \cdot y$ и $x \vee y$.

Если замкнутая $\langle\alpha\rangle$-система отлична от A_4 и C_4, то она удовлетворяет хотя бы одному из условий:

а) самодвойственность;
б) $\langle A^2\rangle$;
в) $\langle a^2\rangle$.

Действительно, в противном случае эта система содержала бы несамодвойственную функцию, функцию, не удовлетворяющую условию $\langle A^2\rangle$, функцию, не удовлетворяющую условию $\langle a^2\rangle$. Тогда (по лемме 14) в нее должны входить функции $x \cdot y$ и $x \vee y$. Следовательно, эта система совпадала бы либо с A_4, либо с C_4.

Теперь рассмотрим $\langle\alpha\rangle$-системы самодвойственных функций. Здесь мы различаем два случая.

1) Система содержит немонотонную функцию. В силу леммы 20 мы имеем два замкнутых класса.

Класс D_1 состоит из всех самодвойственных α-функций. Очевидно, D_1 имеет базис $\{x \cdot y \vee x \cdot \bar{z} \vee y \cdot \bar{z}\}$ и порядок 3 (см. следствия 1 и 2 из леммы 20).

Из следствия 1 леммы 14, соотношений

$$x \cdot y \vee x \cdot \overline{(x \cdot y)} \vee y \cdot \overline{(x \cdot y)} = x \vee y,$$

$$x \cdot y \vee x \cdot \overline{(x \vee y)} \vee y \cdot \overline{(x \vee y)} = x \cdot y$$

и леммы 17 следует, что класс D_1 непосредственно содержится в C_4.

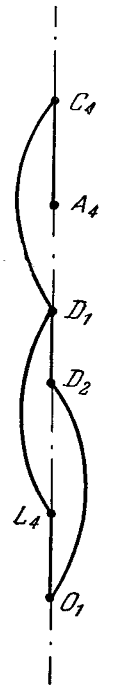

Рис. 6.

Класс L_4 состоит из всех самодвойственных линейных функций (см. § 2).

Из рассмотрения случая 2) в доказательстве леммы 20 заключаем, что класс L_4 непосредственно содержится в D_1.

2) Система содержит только монотонные функции. В этом случае система есть либо O_1, либо на основании лемм 8 и 9 совпадает с D_2, причем, как следует из лемм 8 и 9, класс O_1 непосредственно содержится в D_2.

Класс D_2 состоит из всех самодвойственных, монотонных α-функций. Очевидно, D_2 имеет базис $\{x \cdot y \vee x \cdot z \vee y \cdot z\}$ (см. лемму 9) и порядок 3 (см. замечание к той же лемме).

Из леммы 20 следует, что класс D_2 непосредственно содержится в D_1.

Напомним еще, что (см. § 2) класс O_1 непосредственно содержится в L_4. На рис. 6 изображена взаимосвязь рассмотренных классов.

Нам осталось рассмотреть замкнутые $\langle\alpha\rangle$-системы, удовлетворяющие хотя бы одному из условий $\langle A^2\rangle$ или $\langle a^2\rangle$ и не состоящие только из самодвойственных функций. Поскольку на основании леммы 16 всякая замкнутая система, удовлетворяющая любым двум из условий а), б), в), удовлетворяет и третьему условию, эта система либо удовлетворяет условию $\langle A^2\rangle$ и содержит функцию, не удовлетворяющую условию $\langle a^2\rangle$, либо удовлетворяет условию $\langle a^2\rangle$ и содержит функцию, не удовлетворяющую условию $\langle A^2\rangle$.

Рассмотрение этих классов производится ниже в § 9.

§ 7. $\langle\alpha, \delta\rangle$-системы

Всякая замкнутая $\langle\alpha, \delta\rangle$-система состоит из самодвойственных функций. В противном случае система содержала бы функции x, $\bar{x}$ и несамодвойственную функцию и на основании леммы 3 в нее входила бы константа, т. е. β- или γ-функция.

Класс D_3 состоит из всех самодвойственных функций. Очевидно, D_3 имеет базис $\{\overline{x \cdot y \vee x \cdot z \vee y \cdot z}\}$ и имеет порядок 3 (см. следствия 1 и 2 из леммы 2).

Для построения всех замкнутых (α, δ)-систем заметим, что всякая такая система может быть представлена в виде прямой суммы двух множеств, первое из которых состоит из всех α-функций этого класса и является замкнутым классом, а второе — из отрицаний этих функций. Таким образом, каждая замкнутая $\langle\alpha, \delta\rangle$-система полностью определяется некоторой замкнутой $\langle\alpha\rangle$-системой самодвойственных функций. Поскольку все замкнутые $\langle\alpha\rangle$-системы самодвойственных функций исчерпываются классами O_1, D_2, L_4 и D_1, то мы имеем не более четырех замкнутых $\langle\alpha, \delta\rangle$-систем.

Рис. 7.

Множество B_1 состоит из всех таких функций f, для которых имеет место одно из двух: либо $f \in O_1$, либо $\bar{f} \in O_1$. Очевидно, что B_1 совпадает с O_4.

Множество B_2 состоит из всех таких функций f, что либо $f \in D_2$, либо $\bar{f} \in D_2$. Покажем, что класс B_2 не является замкнутым.

Рассмотрим самодвойственную α-функцию $x + y + z$. Очевидно, что она не принадлежит классу D_2. Легко видеть, что эта функция не принадлежит также множеству B_2. В то же время множество B_2 порождает все самодвойственные функции, так как оно содержит функцию $\overline{x \cdot y \vee x \cdot z \vee y \cdot z}$. Отсюда следует, что не существует замкнутой $\langle\alpha, \delta\rangle$-системы, определяемой классом D_2.

Множество B_3 состоит из всех таких функций f, что либо $f \in L_4$, либо $\bar{f} \in L_4$. Очевидно, что B_3 совпадает с L_5.

Множество B_4 состоит из всех таких функций f, что либо $f \in D_1$, либо $\bar{f} \in D_1$. Очевидно, что B_4 совпадает с D_3.

Таким образом, все замкнутые $\langle \alpha, \delta\rangle$-системы исчерпываются классами O_4, L_5 и D_3.

Очевидно, что класс L_5 непосредственно содержится в D_3. Напомним еще, что (см. § 2) класс O_4 непосредственно содержится в L_5.

На рис. 7 изображена взаимосвязь рассмотренных классов.

§ 8. $\langle \alpha, \beta\rangle$- и $\langle \alpha, \gamma\rangle$-системы (первая часть)

В силу принципа двойственности достаточно рассмотреть $\langle \alpha, \beta\rangle$-системы. Здесь будут рассмотрены замкнутые $\langle \alpha, \beta\rangle$-системы, содержащие функцию, не удовлетворяющую условию $\langle a^2\rangle$.

Класс A_2 состоит из всех монотонных α- и β-функций. Очевидно, A_2 имеет базис $\{x \cdot y,\ x \vee y,\ 1\}$ (см. лемму 6) и порядок 2.

Класс C_2 состоит из всех α- и β-функций. Очевидно, C_2 имеет базис $\{x \cdot y,\ x + y + 1\}$ (см. лемму 18) и имеет порядок 2.

Напомним, что по лемме 15 всякая замкнутая (α, β)-система $\mathfrak{M}$, в которую входит функция, не удовлетворяющая условию $\langle a^2\rangle$, содержит либо функцию $x \cdot y$, либо функцию $x + y + 1$. Поэтому возможны два случая.

1) $\mathfrak{M}$ содержит функцию $x \cdot y$. Рассмотрим подслучаи.

а) $\mathfrak{M}$ содержит немонотонную функцию. Тогда по лемме 19 $\mathfrak{M}$ совпадает с C_2.

б) $\mathfrak{M}$ состоит из монотонных функций и содержит функцию, отличную от логического произведения и константы 1. Тогда по лемме 7 $\mathfrak{M}$ содержит функцию $x \vee y$ и по лемме 6 совпадает с A_2.

в) $\mathfrak{M}$ состоит из монотонных функций, являющихся либо логическим произведением, либо константой 1. В этом случае $\mathfrak{M}$ совпадает с P_5.

2) $\mathfrak{M}$ содержит функцию $x + y + 1$. Рассмотрим подслучаи.

а) $\mathfrak{M}$ содержит нелинейную функцию. Тогда по лемме 19 $\mathfrak{M}$ есть C_2.

б) $\mathfrak{M}$ состоит из линейных функций. Как следует из рассмотрения замкнутых классов линейных функций (см. § 2), имеется только один замкнутый класс L_2 порядка выше 1 — класс всех линейных α- и β-функций. Поэтому $\mathfrak{M} = L_2$.

Из наших рассмотрений следует, что других замкнутых $\langle \alpha, \beta\rangle$-систем, содержащих функцию, не удовлетворяющую условию $\langle a^2\rangle$, не существует. Из леммы 19 вытекает, что классы A_2 и L_2 непосредственно содержатся в C_2. Кроме того, из леммы 7 легко следует, что класс P_5 непосредственно содержится в A_2.

Пользуясь принципом двойственности, перечислим все замкнутые $\langle \alpha, \gamma\rangle$-системы, содержащие функцию, не удовлетворяющую условию $\langle A^2\rangle$.

Класс A_3 состоит из всех монотонных α- и γ-функций. Очевидно, A_3 имеет базис $\{x \cdot y,\ x \vee y,\ 0\}$ и порядок 2.

Класс C_3 состоит из всех α- и γ-функций. Очевидно, C_3 имеет базис $\{x \vee y,\ x + y\}$ и порядок 2.

Кроме того, имеются еще два класса S_5 и L_3. На рис. 8 изображена взаимосвязь рассмотренных классов.

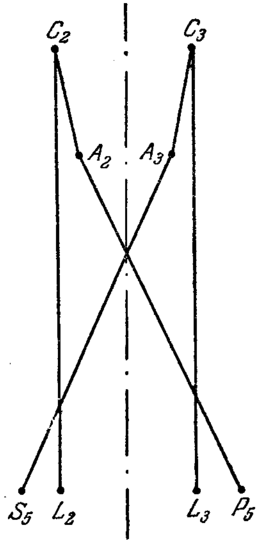

Рис. 8.

Нам осталось рассмотреть замкнутые $\langle \alpha, \beta\rangle$- и $\langle \alpha, \gamma\rangle$-системы, первые из которых удовлетворяют условию $\langle a^2\rangle$, а вторые — условию $\langle A^2\rangle$.

Рассмотрение таких систем производится ниже в § 10.

§ 9. $\langle \alpha\rangle$-системы (вторая часть)

Как отмечалось в § 6, для завершения рассмотрения замкнутых $\langle \alpha\rangle$-систем необходимо разобрать два случая.

1) $\langle \alpha\rangle$-системы, удовлетворяющие условию $\langle A^2\rangle$ и содержащие несамодвойственную функцию (следовательно, не удовлетворяющие условию $\langle a^2\rangle$).

2) $\langle \alpha\rangle$-системы, удовлетворяющие условию $\langle a^2\rangle$ и содержащие несамодвойственную функцию (следовательно, не удовлетворяющие условию $\langle A^2\rangle$).

Разберем первый случай. Здесь возможны два подслучая.

а) Система содержит немонотонную функцию.

Класс F_5^{∞} состоит из всех α-функций, удовлетворяющи[х] условию $\langle A^{\infty}\rangle$. F_5^{∞} имеет базис $\{x\cdot(y\vee\bar z)\}$ (см. лемму 2[3]) и порядок 3 (см. лемму 31).

Класс F_5^{μ} ($\mu=2, 3, \ldots$) состоит из всех α-функций, удовлетворяющих условию $\langle A^{\mu}\rangle$. F_5^{μ} имеет базис $\{x\cdot(y\vee\bar z)$, $h_{\mu}(\tilde x)\}$ (см. лемму 33) и порядок $\mu+1$ (см. лемму 37).

Покажем, что этими классами исчерпываются все замкнутые $\langle\alpha\rangle$-системы, удовлетворяющие условию $\langle A^2\rangle$ и содержащие несамодвойственную функцию и немонотонную функцию.

Действительно, пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная система описанного вида. По лемме 24 $\mathfrak{M}\supseteq F_5^{\infty}$. Если $\mathfrak{M}\neq F_5^{\infty}$, то в силу лемм 32 и 33 она совпадает с некоторым F_5^{μ} ($\mu=2, 3, \ldots$).

б) Система состоит из монотонных функций.

Класс F_6^{∞} состоит из всех монотонных α-функций, удовлетворяющих условию $\langle A^{\infty}\rangle$. F_6^{∞} имеет базис $\{x\cdot(y\vee z)\}$ (см. лемму 27) и порядок 3 (см. лемму 31).

Класс F_6^{μ} ($\mu=2, 3, \ldots$) состоит из всех монотонных α-функций, удовлетворяющих условию $\langle A^{\mu}\rangle$. F_6^{μ} имеет базис $\{x\cdot(y\vee z),\ h_2(\tilde x)\}$ при $\mu=2$ и $\{h_{\mu}(\tilde x)\}$ при $\mu\geqslant 3$ (см. лемму 35) и порядок $\mu+1$ (см. лемму 37).

Покажем, что этими классами исчерпываются все замкнутые $\langle\alpha\rangle$-системы монотонных функций, удовлетворяющие условию $\langle A^2\rangle$, содержащие несамодвойственную функцию и отличные от класса P_1. Действительно, пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная система описанного вида. По лемме 28 $\mathfrak{M}\supseteq F_6^{\infty}$. Если $\mathfrak{M}\neq F_6^{\infty}$, то в силу лемм 32 и 35 она совпадает с некоторым F_6^{μ} ($\mu=2, 3, \ldots$).

В силу замечания на стр. 51 имеют место следующие включения:

$$F_5^2\supset F_5^3\supset\ \ldots\ \supset F_5^{\mu}\supset\ \ldots\ \supset F_5^{\infty},$$

$$F_6^2\supset F_6^3\supset\ \ldots\ \supset F_6^{\mu}\supset\ \ldots\ \supset F_6^{\infty}.$$

Как следует из построения, первая цепочка состоит из всех замкнутых $\langle\alpha\rangle$-систем, удовлетворяющих условию $\langle A^2\rangle$

и содержащих несамодвойственную функцию и немонотонную функцию. Вторая цепочка состоит из всех замкнутых $\langle\alpha\rangle$-систем монотонных функций, удовлетворяющих условию $\langle A^2\rangle$, содержащих несамодвойственную функцию и отличных от класса P_1. Очевидно, что эти цепочки не содержат никаких других промежуточных классов.

Легко видеть (см. лемму 28), что $F_5^{\infty}\supset F_6^{\infty}$ и $F_5^{\mu}\supset F_6^{\mu}$.

Из леммы 24 следует, что между F_5^{∞} и F_6^{∞} нет промежуточных классов. Далее, из лемм 24, 33 и 35 вытекает, что между F_5^{μ} и F_6^{μ} также нет промежуточных классов.

Таким образом, первый случай разобран полностью.

Разберем второй случай.

Пользуясь принципом двойственности, перечислим все замкнутые $\langle\alpha\rangle$-системы, удовлетворяющие условию $\langle a^2\rangle$, содержащие несамодвойственную функцию и отличные от класса S_1.

Класс F_1^{∞} состоит из всех α-функций, удовлетворяющих условию $\langle a^{\infty}\rangle$. F_1^{∞} имеет базис $\{x\vee y\cdot\bar z\}$ и порядок 3.

Класс F_1^{μ} ($\mu=2, 3, \ldots$) состоит из всех α-функций, удовлетворяющих условию $\langle a^{\mu}\rangle$. F_1^{μ} имеет базис $\{x\vee y\cdot\bar z,\ h_{\mu}^{*}(\tilde x)\}$ и порядок $\mu+1$.

Класс F_2^{∞} состоит из всех монотонных α-функций, удовлетворяющих условию $\langle a^{\infty}\rangle$. F_2^{∞} имеет базис $\{x\vee y\cdot z\}$ и порядок 3.

Класс F_2^{μ} ($\mu=2, 3, \ldots$) состоит из всех монотонных α-функций, удовлетворяющих условию $\langle a^{\mu}\rangle$. F_2^{μ} имеет базис $\{x\vee y\cdot z,\ h_2^{*}(\tilde x)\}$ при $\mu=2$ и $\{h_{\mu}^{*}(\tilde x)\}$ при $\mu\geqslant 3$ и порядок $\mu+1$.

На рис. 9 изображена взаимосвязь указанных классов.

Таким образом, мы построили две диаграммы включения для замкнутых $\langle\alpha\rangle$-систем (см. рис. 6 и 9). Теперь, используя их, построим диаграмму включения для всех замкнутых $\langle\alpha\rangle$-систем. Для этого, очевидно, достаточно установить, какие из классов, изображенных на первой диаграмме (см. рис. 6), непосредственно содержатся в классах второй диаграммы и, наоборот, какие из классов второй диаграммы непосредственно содержатся в классах первой диаграммы.

Проследим, какие классы первой диаграммы непосредственно содержатся в классах правой части второй диаграммы. Последние, очевидно, удовлетворяют условию $\langle A^2\rangle$.

Легко видеть, что среди классов первой диаграммы удовлетворяют условию $\langle A^2\rangle$ только D_2 и O_1. Ранее указывалось, что O_1 непосредственно содержится в P_1. Так как

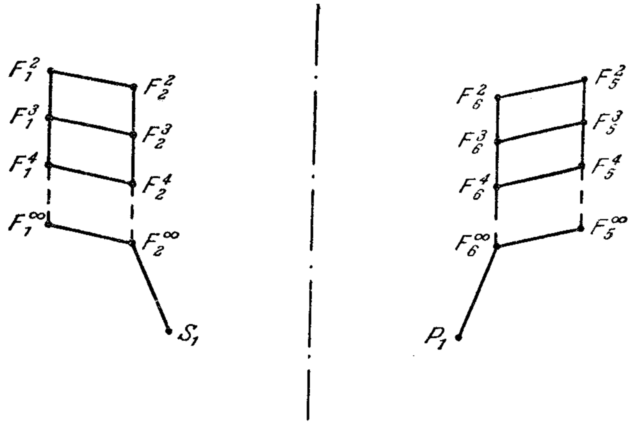

Рис. 9.

функция $x \cdot y \vee x \cdot z \vee y \cdot z$ образует базис класса D_2 (см. лемму 9), содержится в классе F_6^2 (см. лемму 35) и не принадлежит классу F_5^3, то очевидно, что D_2 непосредственно содержится в F_6^2.

Проследим, какие из классов правой части второй диаграммы непосредственно содержатся в классах первой диаграммы.

Как мы видели раньше, классы, входящие в первую диаграмму, делятся на классы, состоящие из самодвойственных функций, и классы, содержащие функции $x \cdot y$ и $x \vee y$.

Очевидно, что классы самодвойственных функций не могут целиком содержать ни один из классов правой части второй диаграммы (см. определения этих классов). Классами из первой диаграммы, содержащими функции $x \cdot y$

и $x \vee y$, являются C_4 и A_4. Как следует из определений классов C_4, A_4, F_5^2 и F_6^2, класс C_4 содержит F_5^2 и класс A_4 содержит F_6^2. Далее, класс A_4 состоит из монотонных

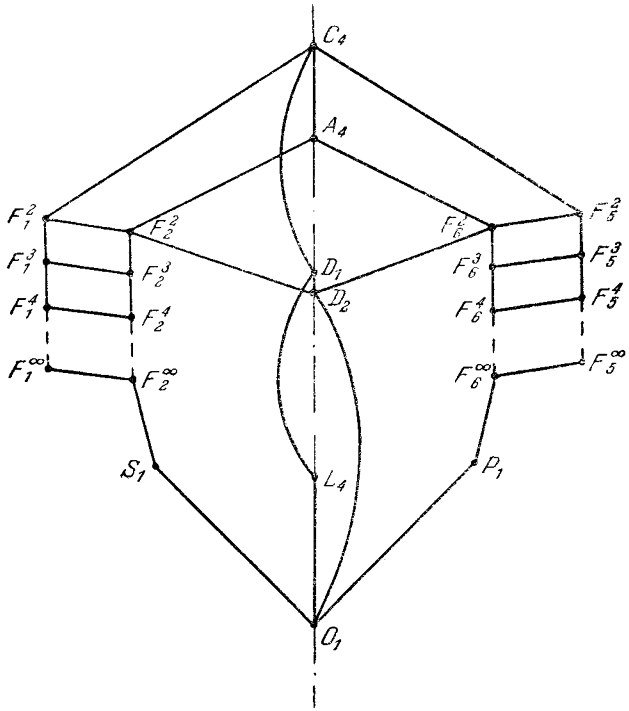

Рис. 10.

функций, а каждый из классов F_5^μ и F_5^∞ содержит немонотонную функцию. Следовательно, класс C_4 непосредственно содержит F_5^2 и класс A_4 непосредственно содержит F_6^2.

Используя принцип двойственности, получим, что D_2 непосредственно содержится в F_2^2, F_1^2 непосредственно содержится в C_4, F_2^2 — в A_4 и O_1 — в S_1.

На рис. 10 приведена диаграмма включений всех замкнутых $\langle\alpha\rangle$-систем.

§ 10. $\langle\alpha, \beta\rangle$- и $\langle\alpha, \gamma\rangle$-системы (вторая часть)

Как отмечалось в § 8, для завершения рассмотрения замкнутых $\langle\alpha, \beta\rangle$- и $\langle\alpha, \gamma\rangle$-систем необходимо разобрать два случая.

1) $\langle\alpha, \beta\rangle$-системы, удовлетворяющие условию $\langle a^2\rangle$;
2) $\langle\alpha, \gamma\rangle$-системы, удовлетворяющие условию $\langle A^2\rangle$.

В силу принципа двойственности достаточно рассмотреть, например, второй случай. Здесь возможны два подслучая.

а) Система содержит немонотонную функцию.

Класс F_8^∞ состоит из всех функций, удовлетворяющих условию $\langle A^\infty\rangle$. F_8^∞ имеет базис $\{x\cdot\bar{y}\}$ (см. лемму 25) и порядок 2 (см. лемму 31).

Класс F_8^μ ($\mu=2, 3, \ldots$) состоит из всех функций, удовлетворяющих условию $\langle A^\mu\rangle$. F_8^μ имеет базис $\{x\cdot\bar{y}, h_\mu(\tilde{x})\}$ (см. лемму 34) и порядок $\mu+1$ (см. лемму 37).

Покажем, что этими классами исчерпываются все замкнутые $\langle\alpha, \gamma\rangle$-системы, удовлетворяющие условию $\langle A^2\rangle$ и содержащие немонотонную функцию. Действительно, пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная система описанного вида. По лемме 26 $\mathfrak{M}\supseteq F_8^\infty$. Если $\mathfrak{M}\neq F_8^\infty$, то в силу лемм 32 и 34 она совпадает с некоторым F_8^μ ($\mu=2, 3, \ldots$).

б) Система состоит из монотонных функций.

Класс F_7^∞ всех монотонных функций, удовлетворяющих условию $\langle A^\infty\rangle$. F_7^∞ имеет базис $\{0, x\cdot(y\vee z)\}$ (см. лемму 29) и порядок 3 (см. лемму 31).

Класс F_7^μ ($\mu=2, 3, \ldots$) состоит из всех монотонных функций, удовлетворяющих условию $\langle A^\mu\rangle$. F_7^μ имеет базис $\{0, h_\mu(\tilde{x})\}$ (см. лемму 36) и порядок $\mu+1$ (см. лемму 37).

Покажем, что этими классами исчерпываются все замкнутые $\langle\alpha, \gamma\rangle$-системы монотонных функций, удовлетворяющие условию $\langle A^2\rangle$ и отличные от классов O_6 и P_3. Действительно, пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная система описанного вида. По лемме 30 $\mathfrak{M}\supseteq F_7^\infty$. Если $\mathfrak{M}\neq F_7^\infty$, то в силу лемм 32 и 36 она совпадает с некоторым F_7^μ ($\mu=2, 3, \ldots$).

В силу замечания на стр. 51 имеют место следующие включения:

$$F_8^2\supset F_8^3\supset \ldots \supset F_8^\mu\supset \ldots \supset F_8^\infty,$$
$$F_7^2\supset F_7^3\supset \ldots \supset F_7^\mu\supset \ldots \supset F_7^\infty.$$

Как следует из построения, первая цепочка состоит из всех замкнутых $\langle\alpha, \gamma\rangle$-систем, удовлетворяющих условию $\langle A^2\rangle$ и содержащих немонотонную функцию. Вторая цепочка состоит из всех замкнутых $\langle\alpha, \gamma\rangle$-систем монотонных функций, удовлетворяющих условию $\langle A^2\rangle$ и отличных от классов O_6 и P_3. Очевидно, что эти цепочки не содержат никаких других промежуточных классов.

Легко видеть, что $P_3\subset F_7^\infty$, $F_7^\infty\subset F_8^\infty$ и $F_7^\mu\subset F_8^\mu$.

Далее, из лемм 26, 30, 34, 36 следует, что P_3 непосредственно содержится в F_7^∞, F_7^∞ — в F_8^∞ и F_7^μ — в F_8^μ.

Таким образом, второй случай разобран полностью.

Пользуясь принципом двойственности, перечислим все замкнутые $\langle\alpha, \beta\rangle$-системы, удовлетворяющие условию $\langle a^2\rangle$ и отличные от классов O_5 и S_3.

Класс F_4^∞ состоит из всех функций, удовлетворяющих условию $\langle a^\infty\rangle$. F_4^∞ имеет базис $\{x\vee\bar{y}\}$ и порядок 2.

Класс F_4^μ ($\mu=2, 3, \ldots$) состоит из всех функций, удовлетворяющих условию $\langle a^\mu\rangle$. F_4^μ имеет базис $\{x\vee\bar{y}, h_\mu^*(\tilde{x})\}$ и порядок $\mu+1$.

Класс F_3^∞ состоит из всех монотонных функций, удовлетворяющих условию $\langle a^\infty\rangle$. F_3^∞ имеет базис $\{1, x\vee y\cdot z\}$ и порядок 3.

Класс F_3^μ ($\mu=2, 3, \ldots$) состоит из всех монотонных функций, удовлетворяющих условию $\langle a^\mu\rangle$. F_3^μ имеет базис $\{1, h_\mu^*(\tilde{x})\}$ и порядок $\mu+1$.

На рис. 11 изображена взаимосвязь указанных классов.

Таким образом, мы построили две диаграммы включений для замкнутых $\langle\alpha, \beta\rangle$- и $\langle\alpha, \gamma\rangle$-систем (см. рис. 8 и 11). Теперь, используя их, построим диаграмму включений для всех замкнутых $\langle\alpha, \beta\rangle$- и $\langle\alpha, \gamma\rangle$-систем. В силу принципа двойственности достаточно ограничиться построением диаграммы включений для всех замкнутых $\langle\alpha, \beta\rangle$-систем.

Сначала проследим, какие замкнутые $\langle\alpha, \beta\rangle$-системы второй диаграммы (т. е. классы, расположенные в левой

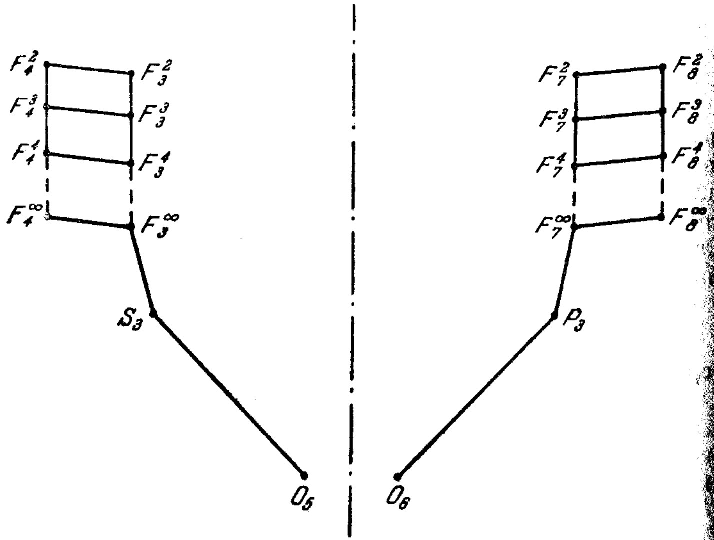

Рис. 11.

части второй диаграммы) непосредственно содержатся в замкнутых системах первой диаграммы (см. рис. 8).

Как следует из определений классов C_2, A_2, F_3^2 и F_4^2, класс C_2 содержит F_4^2 и класс A_2 содержит F_3^2. Класс A_2 состоит из монотонных функций, класс L_2 — из линейных функций, а каждый из классов F_4^μ и F_4^∞ содержит немонотонную функцию и нелинейную функцию. Следовательно, C_2 непосредственно содержит F_4^2. Далее, так как S_3 не содержится в P_5, то A_2 непосредственно содержит F_3^2. Кроме того, ранее отмечалось (см. §§ 1 и 2), что классы L_2 и P_5 непосредственно содержат класс O_5.

Покажем теперь, что ни одна из замкнутых $\langle\alpha, \beta\rangle$-систем первой диаграммы не содержится ни в одном из классов левой части второй диаграммы.

Это следует из того, что каждый из классов левой части второй диаграммы удовлетворяет условию $\langle a^2\rangle$, а ни

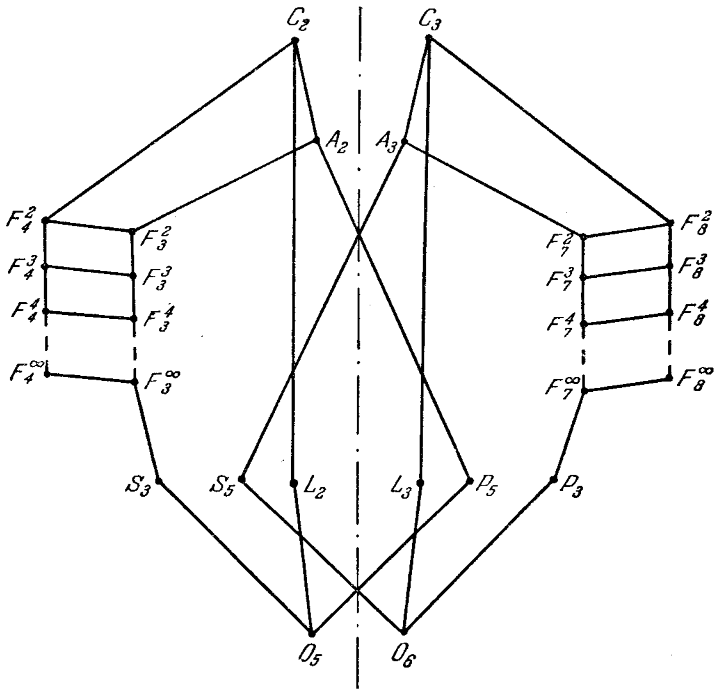

Рис. 12.

одна из $\langle\alpha, \beta\rangle$-систем первой диаграммы не обладает этим свойством.

Используя принцип двойственности, имеем, что F_8^2 непосредственно содержится в C_3, F_7^2 непосредственно содержится в A_3 и O_6 — в L_3 и S_5.

На рис. 12 приведена диаграмма включений всех замкнутых $\langle\alpha, \beta\rangle$- и $\langle\alpha, \gamma\rangle$-систем.

§ 11. Основные теоремы Поста о замкнутых классах алгебры логики

Теперь мы сформулируем ряд теорем, принадлежащих Посту, доказательство которых непосредственно следует из предыдущих рассмотрений.

Теорема 7. *Приведенное описание замкнутых классов исчерпывает все замкнутые классы алгебры логики, т. е. не существует замкнутых классов, отличных от классов*

$$O_i, \quad i=1, 2, \ldots, 9;$$
$$P_1, P_3, P_5, P_6;$$
$$S_1, S_3, S_5, S_6;$$
$$L_1, L_2, L_3, L_4, L_5;$$
$$D_1, D_2, D_3;$$
$$A_1, A_2, A_3, A_4;$$
$$C_1, C_2, C_3, C_4;$$
$$F_j^\infty, \quad j=1, 2, \ldots, 8;$$
$$F_j^\mu, \quad j=1, 2, \ldots, 8, \quad \mu=2, 3, \ldots$$

Теорема 8. *Множество всех замкнутых классов алгебры логики счетно.*

Теорема 9. *Каждый замкнутый класс алгебры логики имеет конечный базис.*

Теорема 10. *В алгебре логики существуют*

а) *три замкнутых класса, имеющих порядок* 0:

$$O_2, O_3, O_7;$$

б) *шесть замкнутых классов, имеющих порядок* 1:

$$O_1, O_4, O_5, O_6, O_8, O_9;$$

в) *двадцать замкнутых классов, имеющих порядок* 2:

$$P_1, P_3, P_5, P_6, \quad S_1, S_3, S_5, S_6, \quad L_1, L_2, L_3,$$
$$A_1, A_2, A_3, A_4, \quad C_1, C_2, C_3, \quad F_4^\infty, F_8^\infty;$$

г) *двадцать замкнутых классов, имеющих порядок* 3:

$$C_4, \quad L_4, L_5, \quad D_1, D_2, D_3, \quad F_1^\infty, F_2^\infty, F_3^\infty,$$
$$F_5^\infty, F_6^\infty, F_7^\infty, F_i^2, \quad i=1, 2, \ldots, 8;$$

д) *для каждого* $\mu \geqslant 4$ *восемь замкнутых классов, имеющих порядок* μ:

$$F_i^{\mu-1}, \quad i=1, 2, \ldots, 8.$$

ГЛАВА II

ПОСТРОЕНИЕ ДИАГРАММЫ ВКЛЮЧЕНИЙ ЗАМКНУТЫХ КЛАССОВ

При построении полной диаграммы включений замкнутых классов мы будем исходить из диаграмм включений для отдельных групп замкнутых классов (см. рис. 1—5, 7, 10, 12). С этой целью рассмотрим вспомогательную диаграмму (рис. 13), которая является результатом склеивания упомянутых диаграмм.

Ранее мы выявили все непосредственные включения внутри каждой из $\langle\alpha\rangle$-, $\langle\beta\rangle$-, $\langle\gamma\rangle$-, $\langle\alpha, \beta\rangle$-, $\langle\alpha, \gamma\rangle$-, $\langle\alpha, \delta\rangle$-, $\langle\beta, \gamma\rangle$-, $\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle$-, $\langle\alpha, \beta, \gamma, \delta\rangle$-систем. Кроме того, были прослежены связи $\langle\beta\rangle$-, $\langle\gamma\rangle$-, $\langle\beta, \gamma\rangle$-систем со всеми перечисленными выше системами.

Остается проследить связи между $\langle\alpha\rangle$-, $\langle\alpha, \beta\rangle$-, $\langle\alpha, \gamma\rangle$-, $\langle\alpha, \delta\rangle$-, $\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle$-, $\langle\alpha, \beta, \gamma, \delta\rangle$-системами. Этот просмотр мы начнем с $\langle\alpha\rangle$-систем (как систем, обладающих наименьшим основанием среди этих систем). Далее мы последовательно будем переходить к системам с более сложными основаниями.

§ 1. $\langle\alpha\rangle$-системы

Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная замкнутая $\langle\alpha\rangle$-система. Если $\mathfrak{M}$ содержится в замкнутой системе $\mathfrak{M}'$, не являющейся $\langle\alpha\rangle$-системой, то $\mathfrak{M}$ содержится в некоторой подсистеме $\mathfrak{M}''$ системы $\mathfrak{M}'$ и при этом $\mathfrak{M}''$ есть либо замкнутая $\langle\alpha, \beta\rangle$-, либо замкнутая $\langle\alpha, \gamma\rangle$-, либо замкнутая $\langle\alpha, \delta\rangle$-система. В самом деле, если в $\mathfrak{M}'$ есть β-функция (или γ-функция), то $\mathfrak{M}'' = [\mathfrak{M} \cup \{1\}] \subseteq \mathfrak{M}'$ (соответственно, $\mathfrak{M}'' = [\mathfrak{M} \cup \{0\}] \subseteq \mathfrak{M}'$) и $\mathfrak{M}''$ есть $\langle\alpha, \beta\rangle$-система (соответ-

ственно, $\langle\alpha, \gamma\rangle$-система). Если же в $\mathfrak{M}'$ нет ни β-, ни γ-функции, то $\mathfrak{M}'$ есть $\langle\alpha, \delta\rangle$-система.

Таким образом, для выявления всех непосредственных включений замкнутых $\langle\alpha\rangle$-систем в замкнутые системы

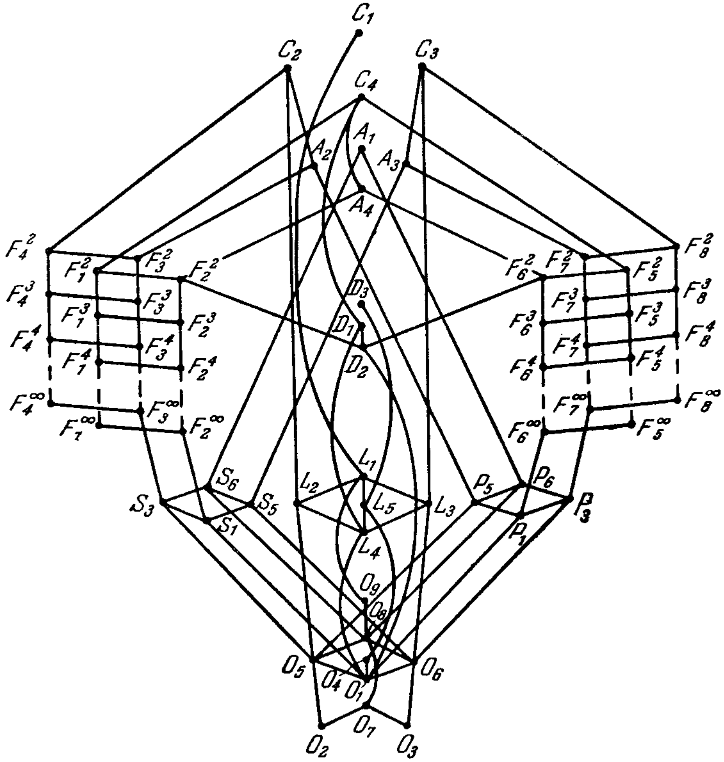

Рис. 13.

других типов достаточно рассмотреть только взаимосвязь между замкнутыми $\langle\alpha\rangle$-системами и замкнутыми $\langle\alpha, \beta\rangle$-, $\langle\alpha, \gamma\rangle$- и $\langle\alpha, \delta\rangle$-системами. При этом, очевидно, все необходимые $\langle\alpha, \beta\rangle$- и $\langle\alpha, \gamma\rangle$-системы получаются из замкнутых $\langle\alpha\rangle$-систем присоединением к последним соответственно констант 1 и 0 с последующим замыканием получившихся множеств. Все необходимые $\langle\alpha, \delta\rangle$-системы получаются путем присоединения к замкнутым $\langle\alpha\rangle$-системам самодвойственных функций функции $\bar{x}$ с последующим замыканием получившихся множеств (здесь мы ограничились $\langle\alpha\rangle$-системами самодвойственных функций потому, что в противном случае по лемме 3 $[\mathfrak{M} \cup \{\bar{x}\}]$ есть $\langle\alpha, \beta, \gamma, \delta\rangle$-система).

З а м е ч а н и е 1. Пусть $g(x)$ есть либо константа 1, либо константа 0, либо функция $\bar{x}$. Легко заметить, что если замкнутые классы $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ не содержат $g(x)$ и удовлетворяют условиям:

а) $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_1 \neq \mathfrak{M}_2$;

б) $[\mathfrak{M}_1 \cup \{g(x)\}] = \mathfrak{N} = [\mathfrak{M}_2 \cup \{g(x)\}]$,

то класс $\mathfrak{M}_1$ не может непосредственно содержаться в классе $\mathfrak{N}$. Отсюда заключаем, что замкнутый класс $\mathfrak{M}$ лишь тогда непосредственно содержится в классе $[\mathfrak{M} \cup \{g(x)\}]$, когда не существует такого замкнутого класса $\mathfrak{M}'$, не содержащего $g(x)$, что

$$\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}', \quad \mathfrak{M} \neq \mathfrak{M}' \text{ и } [\mathfrak{M} \cup \{g(x)\}] = [\mathfrak{M}' \cup \{g(x)\}].$$

З а м е ч а н и е 2. Из всего сказанного выше следует, что для установления непосредственных включений замкнутых $\langle\alpha\rangle$-систем в замкнутые системы других типов нужно: 1) рассмотреть всевозможные множества $[\mathfrak{M} \cup \{g(x)\}]$, где $\mathfrak{M}$ есть произвольная замкнутая $\langle\alpha\rangle$-система, а $g(x)$ — константы 1 и 0 и функция $\bar{x}$, и из них выбрать такие, которые являются $\langle\alpha, \beta\rangle$-, $\langle\alpha, \gamma\rangle$- и $\langle\alpha, \delta\rangle$-системами; 2) из всех замкнутых $\langle\alpha\rangle$-систем $\mathfrak{M}$ таких, что $[\mathfrak{M} \cup \{g(x)\}] = \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — какая-то фиксированная замкнутая $\langle\alpha, \beta\rangle$-, или $\langle\alpha, \gamma\rangle$-, или $\langle\alpha, \delta\rangle$-система, выбрать максимальную. При этом, как отмечалось выше, для получения всех необходимых $\langle\alpha, \delta\rangle$-систем достаточно ограничиться только $\langle\alpha\rangle$-системами самодвойственных функций.

Теперь перейдем к выявлению непосредственных связей между замкнутыми $\langle\alpha\rangle$-системами и $\langle\alpha, \beta\rangle$-, $\langle\alpha, \gamma\rangle$- и $\langle\alpha, \delta\rangle$-системами. При этом в силу принципа двойственности подробно будут рассмотрены только случаи $\langle\alpha, \beta\rangle$- и $\langle\alpha, \delta\rangle$-систем.

1. Присоединяем к замкнутым $\langle\alpha\rangle$-системам константу 1 и замыкаем получившиеся множества.

$[C_4 \cup \{1\}] = C_2$ (см. лемму 18 и базис класса C_4);

$[D_1 \cup \{1\}] = C_2$ (см. лемму 19, базис класса D_1 и определения классов D_1 и C_2);

$[F_5^\infty \cup \{1\}] = C_2$ (см. лемму 19 и базис класса F_5^∞);

$[F_5^\mu \cup \{1\}] = C_2$ (см. лемму 19 и базис класса F_5^μ);

$[A_4 \cup \{1\}] = A_2$ (см. базисы классов A_2 и A_4);

$[F_6^\infty \cup \{1\}] = A_2$ (так как $x \cdot y \in F_6^\infty$, $1 \cdot (y \vee z) = y \vee z$; см. определения и базисы классов A_2 и F_6^∞);

$[F_6^\mu \cup \{1\}] = A_2$ (так как $x \cdot y \in F_6^\mu$, $1 \cdot (y \vee z) = y \vee z$; см. определения и базисы классов A_2 и F_6^μ);

$[L_4 \cup \{1\}] = L_2$ (см. базисы классов L_2 и L_4);

$[P_1 \cup \{1\}] = P_5$ (см. базисы классов P_1 и P_5);

$[S_1 \cup \{1\}] = S_3$ (см. базисы классов S_1 и S_3);

$[O_1 \cup \{1\}] = O_5$ (см. базисы классов O_1 и O_5);

$[F_1^\infty \cup \{1\}] = F_4^\infty$ (см. определения классов F_1^∞ и F_4^∞ и их базисы, $x \vee 1 \cdot \bar{z} = x \vee \bar{z}$);

$[F_1^\mu \cup \{1\}] = F_4^\mu$ (см. определения классов F_1^μ и F_4^μ и их базисы);

$[F_2^\infty \cup \{1\}] = F_3^\infty$ (см. определения классов F_2^∞ и F_3^∞ и их базисы);

$[F_2^\mu \cup \{1\}] = F_3^\mu$ (см. определения классов F_2^μ и F_3^μ и их базисы);

$[D_2 \cup \{1\}] = F_3^2$ (так как $F_3^2 = [h_2, 1]$, см. лемму 36).

Из этих равенств, замечания 2 и соотношений:

$$F_6^\infty \subset \ldots \subset F_6^\mu \subset \ldots \subset F_6^3 \subset F_6^2 \subset A_4,$$
$$F_5^\infty \subset \ldots \subset F_5^\mu \subset \ldots \subset F_5^3 \subset F_5^2 \subset C_4,$$
$$D_1 \subset C_4, \quad D_2 \subset F_2^2$$

следует, что класс C_4 непосредственно содержится в классе C_2, A_4 — в A_2, L_4 — в L_2, P_1 — в P_5, S_1 — в S_3, O_1 — в O_5, F_1^∞ — в F_4^∞, F_1^μ — в F_4^μ, F_2^∞ — в F_3^∞, F_2^μ — в F_3^μ.

2. Используя принцип двойственности и результаты предыдущего пункта, имеем, что класс C_4 непосредственно

содержится в классе C_3, A_4 — в A_3, L_4 — в L_3, S_1 — в S_5, P_1 — в P_3, O_1 — в O_6, F_5^∞ — в F_8^∞, F_5^μ — в F_8^μ, F_6^∞ — в F_7^∞ и F_6^μ — в F_7^μ.

3. К замкнутым $\langle\alpha\rangle$-системам самодвойственных функций (как было отмечено раньше — см. § 7 гл. I, — такие

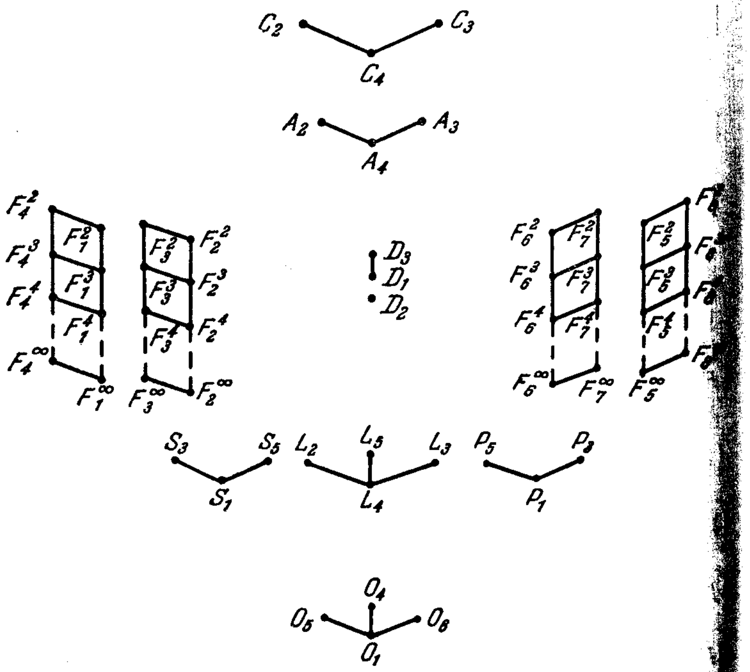

Рис. 14.

системы исчерпываются классами D_1, D_2, L_4 и O_1) присоединяем функцию $\bar{x}$ и замыкаем получившиеся множества.

$[D_1 \cup \{\bar{x}\}] = D_3$ (см. определения классов D_1 и D_3 и их базисы);

$[D_2 \cup \{\bar{x}\}] = D_3$ (см. определения классов D_2 и D_3 и их базисы);

$[L_4 \cup \{\bar{x}\}] = L_5$ (см. базисы классов L_4 и L_5);

$[O_1 \cup \{\bar{x}\}] = O_4$ (см. базисы классов O_1 и O_4).

Из этих равенств, замечания 2 и соотношения $D_1 \supset D_2$ (см. определения классов D_1 и D_2) следует, что D_1 непосредственно содержится в D_3, L_4 — в L_5 и O_1 — в O_4.

На рис. 14 дана диаграмма включений замкнутых $\langle\alpha\rangle$-систем в замкнутые $\langle\alpha, \beta\rangle$-, $\langle\alpha, \gamma\rangle$-, $\langle\alpha, \delta\rangle$-системы.

§ 2. $\langle\alpha, \beta\rangle$- и $\langle\alpha, \gamma\rangle$-системы

В силу принципа двойственности достаточно подробно рассмотреть случай $\langle\alpha, \beta\rangle$-систем.

1. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная замкнутая $\langle\alpha, \beta\rangle$-система. Очевидно, что если она содержится в некоторой замкнутой системе $\mathfrak{M}'$, не являющейся $\langle\alpha, \beta\rangle$-системой, то a priori $\mathfrak{M}'$ есть либо $\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle$-, либо $\langle\alpha, \beta, \gamma, \delta\rangle$-система. Поэтому для выявления всех непосредственных включений замкнутых $\langle\alpha, \beta\rangle$-систем в замкнутые системы других типов нужно: 1) рассмотреть всевозможные множества $[\mathfrak{M} \cup \{0\}]$, где $\mathfrak{M}$ есть произвольная замкнутая $\langle\alpha, \beta\rangle$-система; 2) из всех замкнутых $\langle\alpha, \beta\rangle$-систем $\mathfrak{M}$ таких, что $[\mathfrak{M} \cup \{0\}] = \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — какая-то фиксированная замкнутая $\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle$- или $\langle\alpha, \beta, \gamma, \delta\rangle$-система, выбрать максимальную.

Перейдем к осуществлению описанного процесса.

Присоединим к замкнутым $\langle\alpha, \beta\rangle$-системам константу 0 и замыкаем получившиеся множества:

$[C_2 \cup \{0\}] = C_1$ (см. базис класса C_2 и следствие 1 из теоремы 3);

$[F_4^\infty \cup \{0\}] = C_1$ (см. базис класса F_4^∞ и следствие 1 из теоремы 3);

$[F_4^\mu \cup \{0\}] = C_1$ (см. базис класса F_4^μ и следствие 1 из теоремы 3);

$[A_2 \cup \{0\}] = A_1$ (см. базисы классов A_1 и A_2);

$[F_3^\infty \cup \{0\}] = A_1$ (см. определения и базисы классов A_1 и F_3^∞);

$[F_3^\mu \cup \{0\}] = A_1$ (см. определения и базисы классов A_1 и F_3^μ);

$[L_2 \cup \{0\}] = L_1$ (см. базисы классов L_1 и L_2);

$[P_5 \cup \{0\}] = P_6$ (см. базисы классов P_5 и P_6);

$[S_3 \cup \{0\}] = S_6$ (см. базисы классов S_3 и S_6);

$[O_5 \cup \{0\}] = O_8$ (см. базисы классов O_5 и O_8).

Из этих равенств и соотношений:

$$F_3^{\infty}\subset\ldots\subset F_3^{\mu}\subset\ldots\subset F_3^{3}\subset F_3^{2}\subset A_2,$$
$$F_4^{\infty}\subset\ldots\subset F_4^{\mu}\subset\ldots\subset F_4^{3}\subset F_4^{2}\subset C_2$$

следует, что класс C_2 непосредственно содержится в

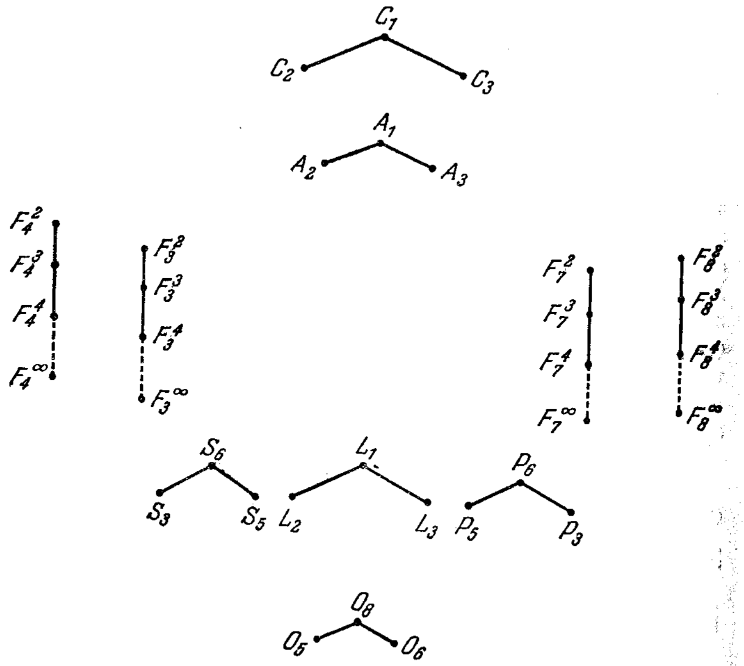

Рис. 15.

классе C_1, A_2 — в A_1, L_2 — в L_1, P_5 — в P_6, S_3 — в S_6, O_5 — в O_8.

2. Используя принцип двойственности и результаты предыдущего пункта, получим, что класс C_3 непосредственно содержится в классе C_1, A_3 — в A_1, L_3 — в L_1, S_5 — в S_6, P_3 — в P_6, O_6 — в O_8.

На рис. 15 приведена диаграмма включений замкнутых $\langle\alpha,\ \beta\rangle$- и $\langle\alpha,\ \gamma\rangle$-систем в замкнутые $\langle\alpha,\ \beta,\ \gamma\rangle$- и $\langle\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\rangle$-системы.

§ 3. $\langle\alpha,\ \delta\rangle$-системы

Если замкнутая $\langle\alpha,\ \delta\rangle$-система $\mathfrak{M}$ содержится в некоторой замкнутой системе $\mathfrak{M}'$, не являющейся $\langle\alpha,\ \delta\rangle$-системой, то, очевидно, $\mathfrak{M}'$ есть $\langle\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\rangle$-система. Поэтому для выявления всех непосредственных включений замкнутых $\langle\alpha,\ \delta\rangle$-систем в замкнутые системы других типов нужно (и, как следует из дальнейшего, достаточно) рассмотреть всевозможные множества $[\mathfrak{M}\cup\{1\}]$, где $\mathfrak{M}$ есть произвольная замкнутая $\langle\alpha,\ \delta\rangle$-система.

Перейдем к осуществлению указанного процесса. Присоединяем к замкнутым $\langle\alpha,\ \delta\rangle$-системам константу 1 и замыкаем получившиеся множества.

$[D_3\cup\{1\}]=C_1$ (так как $\overline{\overline{x\cdot y\vee x\cdot 1\vee y\cdot 1}}=\overline{\overline{x\vee y}}$; см. следствие 1 из теоремы 3);
$[L_5\cup\{1\}]=L_1$ (см. базисы классов L_1 и L_5);
$[O_4\cup\{1\}]=O_9$ (см. базисы классов O_4 и O_9).

Из этих равенств следует, что класс D_3 непосредственно содержится в классе C_1, L_5 — в L_1 и O_4 — в O_9.

На рис. 16 приведена диаграмма включений замкнутых $\langle\alpha,\ \delta\rangle$-систем в замкнутые $\langle\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\rangle$-системы.

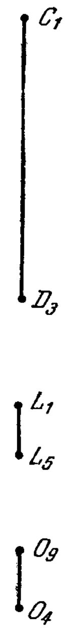

Рис. 16.

§ 4. $\langle\alpha,\ \beta,\ \gamma\rangle$-системы

Очевидно, что для выявления всех непосредственных включений замкнутых $\langle\alpha,\ \beta,\ \gamma\rangle$-систем в замкнутые системы других типов нужно:

1) рассмотреть всевозможные множества $[\mathfrak{M}\cup\{\bar{x}\}]$, где $\mathfrak{M}$ есть произвольная замкнутая $\langle\alpha,\ \beta,\ \gamma\rangle$-система; 2) из всех замкнутых $\langle\alpha,\ \beta,\ \gamma\rangle$-систем $\mathfrak{M}$ таких, что $[\mathfrak{M}\cup\{\bar{x}\}]=\mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — какая-то фиксированная замкнутая $\langle\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\rangle$-система, выбрать максимальную.

Перейдем к осуществлению описанного процесса.

Присоединяем к замкнутым $\langle\alpha,\ \beta,\ \gamma\rangle$-системам функцию $\bar{x}$ и замыкаем получившиеся множества.

$[A_1 \cup \{\bar{x}\}] = C_1$ (см. базис класса A_1 и следствие 1 из теоремы 3);

$[P_6 \cup \{\bar{x}\}] = C_1$ (см. базис класса P_6 и следствие 1 из теоремы 3);

$[S_6 \cup \{\bar{x}\}] = C_1$ (см. базис класса S_6 и следствие 1 из теоремы 3);

$[O_8 \cup \{\bar{x}\}] = O_9$ (см. базисы классов O_8 и O_9).

Из этих равенств и соотношений $P_6 \subset A_1$ и $S_6 \subset A_1$ следует, что класс A_1 непосредственно содержится в классе C_1 и класс O_8 — в классе O_9.

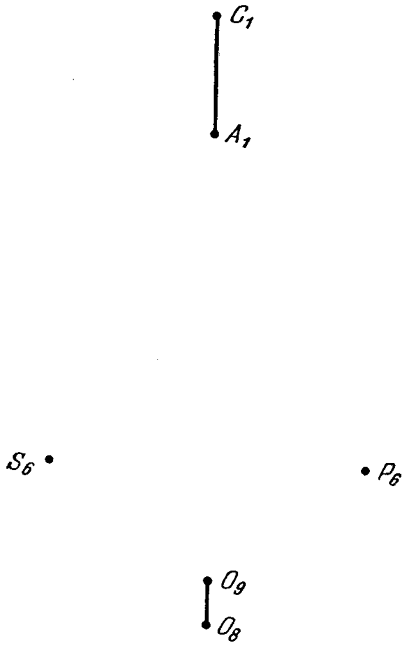

Рис. 17.

На рис. 17 приведена диаграмма включений замкнутых $\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle$-систем в замкнутые $\langle\alpha, \beta, \gamma, \delta\rangle$-системы.

§ 5. Построение полной диаграммы включений. Некоторые следствия из полной диаграммы включений

Теперь мы можем построить полную диаграмму включений. Для этого, очевидно, достаточно склеить диаграммы включений, приведенные на рис. 13 — 17. На

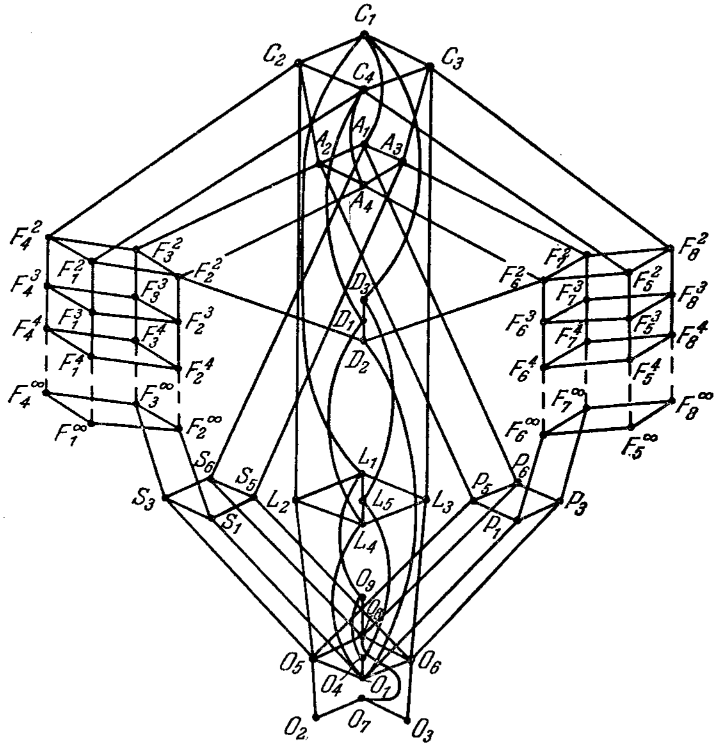

Рис. 18.

рис. 18 приведена полная диаграмма включений замкнутых классов алгебры логики.

Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольный замкнутый класс алгебры логики. Пусть, кроме того, $\mathfrak{M}'$ — некоторый замкнутый класс, удовлетворяющий условиям: $\mathfrak{M}' \neq \Lambda$, $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$ и

$\mathfrak{M}' \neq \mathfrak{M}$ (здесь символ Λ обозначает пустое множество). Тогда, как следует из диаграммы включений, существует замкнутый класс $\mathfrak{M}''$ такой, что $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}''$ и $\mathfrak{M}''$ непосредственно содержится в $\mathfrak{M}$.

Замечание 1. Замкнутый класс $\mathfrak{M}_1$, непосредственно содержащийся в замкнутом классе $\mathfrak{M}_2$, иногда называют предполным в $\mathfrak{M}_2$ классом.

Итак, мы можем сформулировать такое утверждение.

Теорема 11. *Если $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ — два произвольных замкнутых класса алгебры логики, удовлетворяющих условиям $\mathfrak{M}_1 \neq \Lambda$, $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{M}_1 \neq \mathfrak{M}_2$, то $\mathfrak{M}_1$ можно расширить до предполного в $\mathfrak{M}_2$ класса.*

Далее, из рассмотрения диаграммы включений следует

Теорема 12. *Каждый замкнутый класс алгебры логики имеет не более пяти предполных в нем классов.*

Замечание 2. Очевидно, что: 1) пятью предполными классами обладает только класс C_1; 2) нет предполных классов только у O_1, O_2 и O_3.

Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольный замкнутый класс алгебры логики и $\mathfrak{N}$ — подмножество $\mathfrak{M}$.

Теорема 13. *Множество $\mathfrak{N}$ является полной в $\mathfrak{M}$ системой тогда и только тогда, когда оно не содержится ни в одном из предполных в $\mathfrak{M}$ классов.*

Доказательство. Необходимость. Если $\mathfrak{N}$ содержится в каком-нибудь из предполных в $\mathfrak{M}$ классов, то, очевидно, $[\mathfrak{N}] \neq \mathfrak{M}$.

Достаточность. Если $\mathfrak{N}$ не является полной системой, то $[\mathfrak{N}] \neq \mathfrak{M}$. Отсюда следует, что $[\mathfrak{N}]$ (а значит, и $\mathfrak{N}$) можно расширить до предполного в $\mathfrak{M}$ класса. Теорема доказана.

Следствие 1. *Из любой полной в $\mathfrak{M}$ системы $\mathfrak{N}$ можно выделить подсистему $\mathfrak{N}'$, состоящую не более чем из пяти функций и также полную в $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Утверждение вытекает из теорем 12 и 13.

Сейчас мы докажем более сильное утверждение.

Теорема 14. *Из любой полной в $\mathfrak{M}$ системы $\mathfrak{N}$ можно выделить подсистему $\mathfrak{N}'$, состоящую не более чем из четырех функций и также полную в $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Если $\mathfrak{M} \neq C_1$, то утверждение немедленно вытекает из теорем 12 и 13. Пусть $\mathfrak{M} = C_1$. По следствию 1 из любой полной в $\mathfrak{M}$ системы $\mathfrak{N}$ можно выделить подсистему $\mathfrak{N}'$, состоящую не более чем из пяти функций. Возможны следующие случаи.

1) $\mathfrak{N}'$ содержит β-функцию (или γ-функцию). Обозначим эту функцию через f_1. Очевидно, что она не принадлежит классам C_3 и D_3 (соответственно, C_2 и D_3). Кроме того, в силу теоремы 13 в $\mathfrak{N}'$ есть функции f_2, f_3 и f_4, не принадлежащие соответственно классам C_2 (в случае, когда f_1 — γ-функция, f_2 не принадлежит классу C_3), A_1 и L_1. По теореме 13 система $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ полна в C_1.

2) $\mathfrak{N}'$ не содержит ни β-, ни γ-функций. Тогда, очевидно, она содержит δ-функцию (иначе бы $\mathfrak{N}' \subseteq C_4$). Обозначим эту δ-функцию через f_1. В силу теоремы 13 $\mathfrak{N}'$ содержит также функции f_2, f_3 и f_4, являющиеся соответственно несамодвойственной, немонотонной и нелинейной. По лемме 3 из функций f_1, f_2 можно построить константы 0 и 1. Следовательно, система $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ не содержится также в классах C_2 и C_3 и потому, в силу теоремы 13, полна в C_1. Теорема доказана.

Следствие 2. *Любой базис замкнутого класса $\mathfrak{M}$ состоит не более чем из четырех функций.*

Дальнейшее понижение этой оценки невозможно. Это следует, например, из того, что множества $\{0, 1, x+y+z, x \cdot y\}$ и $\{0, 1, x \cdot y, x \vee y\}$ являются базисами классов C_1 и A_1 соответственно.

СВОДНАЯ ТАБЛИЦА ЗАМКНУТЫХ КЛАССОВ

№	Обозначение у Поста	Другие обозначения	Перечень функций, входящих в замкнутый класс	Тип основания	Пример базиса	Порядок
1	O_1		Все функции, равные функции x, и все функции, получающиеся из них путем переименования переменных без отождествления	$<\alpha>$	$\{x\}$	1
2	O_2		Все функции, равные функции 1	$<\beta>$	$\{1\}$	0
3	O_3		Все функции, равные функции 0	$<\gamma>$	$\{0\}$	0
4	O_4		Все функции, равные функциям x или $\overline{x}$, и все функции, получающиеся из них путем переименования переменных без отождествления	$<\alpha, \delta>$	$\{\overline{x}\}$	1
5	O_5		Все функции, равные функциям 1 или x, и все функции, получающиеся из них путем переименования переменных без отождествления	$<\alpha, \beta>$	$\{x, 1\}$	1
6	O_6		Все функции, равные функциям 0 или x, и все функции, получающиеся из них путем переименования переменных без отождествления	$<\alpha, \gamma>$	$\{x, 0\}$	1

Продолжение

№	Обозначение у Поста	Другие обозначения	Перечень функций, входящих в замкнутый класс	Тип основания	Пример базиса	Порядок
7	O_7		Все функции, равные функциям 0 или 1	$<\beta, \gamma>$	$\{0, 1\}$	0
8	O_8		Все функции, равные функциям 0, 1 или x и все функции, получающиеся из них путем переименования переменных без отождествления	$<\alpha, \beta, \gamma>$	$\{x, 0, 1\}$	1
9	O_9		Все функции, равные функциям 1, 0, x или $\overline{x}$, и все функции, получающиеся из них путем переименования переменных без отождествления	$<\alpha, \beta, \gamma, \delta>$	$\{\overline{x}, 0\}$	1
10	S_1		Все логические суммы (т. е. функции вида $\bigvee_{i=1}^{n} x_i$, $n = 1, 2, \ldots$, и все функции, получающиеся из них путем переименования переменных без отождествления)	$<\alpha>$	$\{x \vee y\}$	2
11	S_3		Все логические суммы и все функции, равные 1	$<\alpha, \beta>$	$\{x \vee y, 1\}$	2

Продолжение

№	Обозначение у Поста	Другие обозначения	Перечень функций, входящих в замкнутый класс	Тип основания	Пример базиса	Порядок
12	S_5		Все логические суммы и все функции, равные 0	$<\alpha, \gamma>$	$\{x \vee y, 0\}$	2
13	S_6		Все логические суммы и все функции, равные 0 или 1	$<\alpha, \beta, \gamma>$	$\{x \vee y, 0, 1\}$	2
14	P_1		Все логические произведения (т. е. функции вида $\underset{i=1}{\overset{n}{\&}} x_i$, $n=1, 2, \ldots$, и все функции, получающиеся из них путем переименования переменных без отождествления)	$<\alpha>$	$\{x \cdot y\}$	2
15	P_3		Все логические произведения и все функции, равные 0	$<\alpha, \gamma>$	$\{x \cdot y, 0\}$	2
16	P_5		Все логические произведения и все функции, равные 1	$<\alpha, \beta>$	$\{x \cdot y, 1\}$	2
17	P_6		Все логические произведения и все функции, равные 0 или 1	$<\alpha, \beta, \gamma>$	$\{x \cdot y, 0, 1\}$	2
18	L_1	L	Все линейные функции	$<\alpha, \beta, \gamma, \delta>$	$\{x + y, 1\}$	2

Продолжение

№	Обозначение у Поста	Другие обозначения	Перечень функций, входящих в замкнутый класс	Тип основания	Пример базиса	Порядок
19	L_2		Все линейные α- и β-функции $\left(\text{т. е. функции вида } \sum_{i=1}^{2k} x_i + 1, \sum_{i=1}^{2l+1} x_i, k, l = 0, 1, 2, \ldots, \text{ и все функции, получающиеся из них путем переименования переменных без отождествления}\right)$	$<\alpha, \beta>$	$\{x + y + 1\}$	2
20	L_3		Все линейные α- и γ-функции (т. е. все функции вида $\sum_{i=1}^{s} x_i$, $s = 0, 1, \ldots$, и все функции, получающиеся из них путем переименования переменных без отождествления)	$<\alpha, \gamma>$	$\{x + y\}$	2

Продолжение

№	Обозначение у Поста	Другие обозначения	Перечень функций, входящих в замкнутый класс	Тип основания	Пример базиса	Порядок
21	L_4		Все линейные α-функции (т. е. все функции вида $\sum_{i=1}^{2s+1} x_i$, $s = 0, 1, 2, \ldots$, и все функции, получающиеся из них путем переименования переменных без отождествления)	$<\alpha>$	$\{x+y+z\}$	3
22	L_5		Все линейные самодвойственные функции (т. е. все функции вида $\sum_{i=1}^{2s+1} x_i+1$, $\sum_{i=1}^{2s+1} x_i$, $s=0,1,2,\ldots$, и все функции, получающиеся из них путем переименования переменных без отождествления)	$<\alpha, \delta>$	$\{x+y+z+1\}$	3
23	D_2		Все самодвойственные монотонные функции	$<\alpha>$	$\{x \cdot y \vee y \cdot z \vee x \cdot z\}$	3
24	D_1		Все самодвойственные α-функции	$<\alpha>$	$\{x \cdot y \vee x \cdot \bar{z} \vee y \cdot \bar{z}\}$	3

Продолжение

№	Обозначение у Поста	Другие обозначения	Перечень функций, входящих в замкнутый класс	Тип основания	Пример базиса	Порядок
25	D_3	S	Все самодвойственные функции	$<\alpha, \delta>$	$\{x \cdot \bar{y} \vee x \cdot \bar{z} \vee \bar{y} \cdot \bar{z}\}$	3
26	A_1	M	Все монотонные функции	$<\alpha, \beta, \gamma>$	$\{x \cdot y, x \vee y, 0, 1\}$	2
27	A_2		Все монотонные α- и β-функции	$<\alpha, \beta>$	$\{x \cdot y, x \vee y, 1\}$	2
28	A_3		Все монотонные α- и γ-функции	$<\alpha, \gamma>$	$\{x \cdot y, x \vee y, 0\}$	2
29	A_4		Все монотонные α-функции	$<\alpha>$	$\{x \cdot y, x \vee y\}$	2
30	C_1	P_2	Все функции алгебры логики	$<\alpha, \beta, \gamma, \delta>$	$\{x \mid y\}$	2
31	C_2	T_1	Все α- и β-функции	$<\alpha, \beta>$	$\{x \vee y, x+y+1\}$	2
32	C_3	T_0	Все α- и γ-функции	$<\alpha, \gamma>$	$\{x \cdot y, x+y\}$	2
33	C_4		Все α-функции	$<\alpha>$	$\{x \vee y, x \cdot (y+z+1)\}$	3
34	F_1^{μ} ($\mu = 2, 3, \ldots$)		Все α-функции, удовлетворяющие условию $<a^{\mu}>$	$<\alpha>$	$\{x \vee y \cdot \bar{z}, h_{\mu}^{*}(\tilde{x})\}$ *)	$\mu+1$
35	F_2^{μ} ($\mu = 2, 3, \ldots$)		Все монотонные α-функции, удовлетворяющие условию $<a^{\mu}>$	$<\alpha>$	$\{x \vee y \cdot z, h_2^{*}(\tilde{x})\}$, $\mu = 2$; $\{h_{\mu}^{*}(\tilde{x})\}$, $\mu \geqslant 3$	$\mu+1$

*) Здесь и в дальнейшем через $h_{\mu}^{*}(\tilde{x})$ обозначена функция, двойственная к функции $h_{\mu}(\tilde{x}) = \bigvee_{i=1}^{\mu+1} x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{i-1} \cdot x_{i+1} \cdot \ldots \cdot x_{\mu+1}$.

Продолжение

№	Обозначение у Поста	Другие обозначения	Перечень функций, входящих в замкнутый класс	Тип основания	Пример базиса	Порядок
36	F_3^μ $(\mu = 2, 3, \ldots)$		Все монотонные функции, удовлетворяющие условию $< a^\mu >$	$< \alpha, \beta >$	$\{1, h_\mu^*(\tilde{x})\}$	$\mu + 1$
37	F_4^μ $(\mu = 2, 3, \ldots)$		Все функции, удовлетворяющие условию $< a^\mu >$	$< \alpha, \beta >$	$\{x \vee \bar{y}, h_\mu^*(\tilde{x})\}$	$\mu + 1$
38	F_5^μ $(\mu = 2, 3, \ldots)$		Все α-функции, удовлетворяющие условию $< A^\mu >$	$< \alpha >$	$\{x \cdot (y \vee \bar{z}), h_\mu(\tilde{x})\}$	$\mu + 1$
39	F_6^μ $(\mu = 2, 3, \ldots)$		Все монотонные α-функции, удовлетворяющие условию $< A^\mu >$	$< \alpha >$	$\{x \cdot (y \vee z), h_2(\tilde{x})\}$, $\mu = 2$; $\{h_\mu(\tilde{x})\}$, $\mu \geqslant 3$	$\mu + 1$
40	F_7^μ $(\mu = 2, 3, \ldots)$		Все монотонные функции, удовлетворяющие условию $< A^\mu >$	$< \alpha, \gamma >$	$\{0, h_\mu(\tilde{x})\}$	$\mu + 1$
41	F_8^μ $(\mu = 2, 3, \ldots)$		Все функции, удовлетворяющие условию $< A^\mu >$	$< \alpha, \gamma >$	$\{x \cdot \bar{y}, h_\mu(\tilde{x})\}$	$\mu + 1$
42	F_1^∞		Все α-функции, удовлетворяющие условию $< a^\infty >$	$< \alpha >$	$\{x \vee y \cdot \bar{z}\}$	3

Продолжение

№	Обозначение у Поста	Другие обозначения	Перечень функций, входящих в замкнутый класс	Тип основания	Пример базиса	Порядок
43	F_2^∞		Все монотонные α-функции, удовлетворяющие условию $< a^\infty >$	$< \alpha >$	$\{x \vee y \cdot z\}$	3
44	F_3^∞		Все монотонные функции, удовлетворяющие условию $< a^\infty >$	$< \alpha, \beta >$	$\{1, x \vee y \cdot z\}$	3
45	F_4^∞		Все функции, удовлетворяющие условию $< a^\infty >$	$< \alpha, \beta >$	$\{x \vee \bar{y}\}$	2
46	F_5^∞		Все α-функции, удовлетворяющие условию $< A^\infty >$	$< \alpha >$	$\{x \cdot (y \vee \bar{z})\}$	3
47	F_6^∞		Все монотонные α-функции, удовлетворяющие условию $< A^\infty >$	$< \alpha >$	$\{x \cdot (y \vee z)\}$	3
48	F_7^∞		Все монотонные функции, удовлетворяющие условию $< A^\infty >$	$< \alpha, \gamma >$	$\{0, x \cdot (y \vee z)\}$	3
49	F_8^∞		Все функции, удовлетворяющие условию $< A^\infty >$	$< \alpha, \gamma >$	$\{x \cdot \bar{y}\}$	2

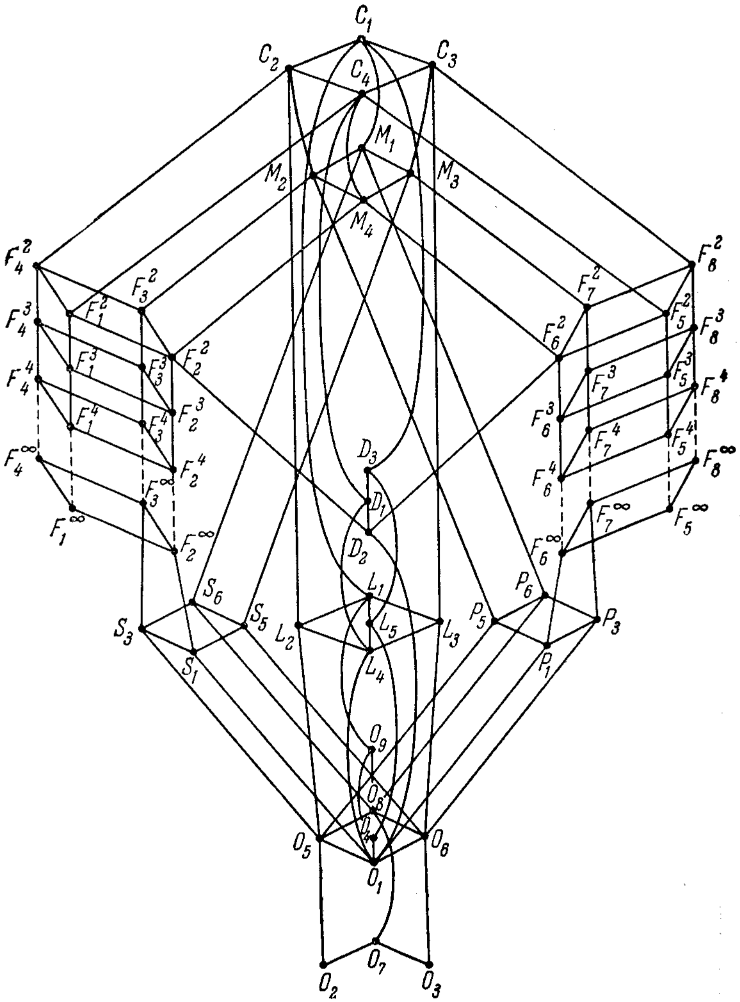

Рис. 19. Структура замкнутых классов Поста.

ЛИТЕРАТУРА

Васильев Ю. Л., О сравнении сложности тупиковых и минимальных дизъюнктивных нормальных форм. Сб. «Проблемы кибернетики», № 10, Физматгиз, 1963.

Васильев Ю. Л., К вопросу о числе тупиковых и минимальных дизъюнктивных нормальных форм. Сб. «Дискретный анализ», вып. 2, Институт математики СО АН СССР, Новосибирск, 1964.

Глаголев В. В., Функция алгебры логики, число единиц которой равно числу монотонных функций от n переменных. Сб. «Дискретный анализ», вып. 2, Институт математики СО АН СССР, Новосибирск, 1964.

Гилберт Э. Н., Теоретико-структурные свойства замыкающих переключательных функций. Кибернетический сборник, № 1, ИЛ, 1960.

Журавлев Ю. И., О различных понятиях минимальных дизъюнктивных нормальных форм. Сибирский матем. журнал **1**, № 4 (1960).

Журавлев Ю. И., Теоретико-множественные методы в алгебре логики. Сб. «Проблемы кибернетики», № 8, Физматгиз, 1962.

Журавлев Ю. И., Оценка для числа тупиковых дизъюнктивных нормальных форм функций алгебры логики. Сибирский матем. журнал **3**, № 5 (1962).

Журавлев Ю. И., Алгоритмы с конечной памятью над дизъюнктивными нормальными формами. Сб. «Дискретный анализ», вып. 1, Институт математики СО АН СССР, Новосибирск, 1963.

Коллектив авторов вычислительной лаборатории Гарвардского университета. Синтез электронных вычислительных и управляющих схем, ИЛ, 1954.

Коробков В. К., Реализация симметрических функций в классе π-схем. Доклады АН СССР **109**, № 2 (1956).

Коробков В. К., О монотонных функциях алгебры логики. Сб. «Проблемы кибернетики», № 13, Изд-во «Наука», 1965.

Коробков В. К., К вопросу о числе монотонных функций алгебры логики. Сб. «Дискретный анализ», вып. 1, Институт математики СО АН СССР, Новосибирск, 1963.

Кричевский Р. Е., О реализации функций суперпозициями. Сб. «Проблемы кибернетики», № 2, Физматгиз, 1959.

Кричевский Р. Е., Оценка сложности π-схемы для одной функции алгебры логики. Сб. «Дискретный анализ», вып. 1, Институт математики СО АН СССР, Новосибирск, 1963.

Кузнецов А. В., О бесповторных контактных схемах и бесповторных суперпозициях функций алгебры логики. Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 51, Изд-во АН СССР, 1958.

Кутюра Л., Алгебра логики. «Mathesis», Одесса, 1909.

Линдон Р. К., Тождества в двузначных исчислениях. Кибернетический сборник, № 1, ИЛ, 1960.

Лупанов О. Б., О сложности реализации функций алгебры логики формулами. Сб. «Проблемы кибернетики», № 3, Физматгиз, 1960.

Лупанов О. Б., О реализации функций алгебры логики формулами из конечных классов (формулами ограниченной глубины) в базисе &, $\vee$, $^{-}$. Сб. «Проблемы кибернетики», № 6, Физматгиз, 1961.

Лупанов О. Б., О синтезе некоторых классов управляющих систем. Сб. «Проблемы кибернетики», № 10, Физматгиз, 1963.

Марков А. А., Об инверсионной сложности системы булевых функций. Доклады АН СССР **150**, № 3 (1963).

Новиков П. С., Элементы математической логики. Физматгиз, 1959.

Поваров Г. Н., О групповой инвариантности булевых функций. Сб. «Применение логики в науке и технике», Изд-во АН СССР, 1961.

Субботовская Б. А., О реализации линейных функций формулами в базисе &, $\vee$, $^{-}$. Доклады АН СССР **136**, № 3 (1961).

Субботовская Б. А., О сравнении базисов при реализации функций алгебры логики формулами. Доклады АН СССР **149**, № 4 (1963).

Шестаков В. И., Алгебра двухполюсных схем, построенных исключительно из двухполюсников (алгебра A-схем). Автоматика и телемеханика, № 2, 1941.

Шестопал Г. А., О числе простых базисов булевых функций. Доклады АН СССР **140**, № 2 (1961).

Яблонский С. В., Реализация линейной функции в классе π-схем. Доклады АН СССР **94**, № 5 (1954).

Яблонский С. В., Функциональные построения в k-значной логике. Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 51, Изд-во АН СССР, 1958.

Яблонский С. В., Об алгоритмических трудностях синтеза минимальных контактных схем. Сб. «Проблемы кибернетики», № 2, Физматгиз, 1959.

Яблонский С. В., К вопросу об оценке длины тупиковых дизъюнктивных нормальных форм. Сб. «Проблемы кибернетики», № 7, Физматгиз, 1962.

Яблонский С. В., О суперпозициях функций в P_k. Сб. «Проблемы кибернетики», № 9, Физматгиз, 1963.

Яновская С. А., Математика в СССР за 40 лет (1917—1957), т. 1, М., 1959.

Blake A., Canonical expression in Boolean algebra. Dissertation, Chicago, 1937 (литограф. в 1938).

Boole G., An investigation of the laws of thought, 1951.

Higonnet R., Grea R., Étude logique des circuits electigness et des systemes binaires, 452 pp., Paris, 1955.

Lewis C. I., Implication and the algebra of logic, Mind, n. s. **21** (1912), 522—531.

Mc-Cluskey E. J., Minimization of Boolean functions. B. S. T. I., **35**, № 6 (1956).

Nakasima A., Hausawa M., The theory of equivalent transformation of simple partical paths in a relay circuits. J. Inst. Elect. Commun. Engrs. Japan, 1936, № 165, 1937.

Nelson R. I., Simplest normal truth functions, J. Symb. Logic **20**, № 2 (1955).

Polya G., Sur les types des propositions composees, J. Symbolic Logic **5**, № 3 (1940), 98—103.

Post E., Two-valued iterative systems, 1941.

Post E., Introduction to a general theory of elementary propositions. Amer. J. Math. **43** (1921), 163—185.

Quine W. V., A way to simplify truth functions. Amer. Monthly **62**, № 2 (1955), 627—631.

Quine W. V., The problems of symplifying truth functions. Amer. Math. Monthly **59**, № 8 (1952), 521—531.

Riordan J., Shannon C. E., The number of two-terminal series-parallel networks. J. Math. and Phys. **21**, № 2 (1942), 83—93. (Русский перевод см. в сб. К. Шеннон «Работы по теории информации и кибернетике», ИЛ, 1963.)

Shannon C. E., A Symbolic Analysis of Relay and Switching circuits. Trans. AIEE **57** (1938), 713—723.

(Русский перевод см. в сб. К. Шеннон «Работы по теории информации и кибернетике», ИЛ, 1963.)

Shannon C. E., The synthesis of two-terminal switching circuits, BSTJ **28**, № 1 (1949), 59—98.

Schröder E., Vorlesungen über die Algebra der Logik, 1895.

Slepian D., On the number of symmetry types of Boolean function of n-variables. Canad. J. Math. **5**, № 2 (1953), 185—193.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

E_2 — множество, состоящее из двух элементов 0 и 1;

$\tilde{\alpha}$ — набор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ из нулей и единиц;

$f(\tilde{\alpha})$ — значение функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ на наборе $\tilde{\alpha}$;

$f(\tilde{x})$ — сокращенная запись функции $f(x_1, \ldots, x_n)$;

$\bar{x}$ — функция «отрицание x»;

$x_1 \& x_2$ — функция «конъюнкция x_1 и x_2»;

$x_1 \vee x_2$ — функция «дизъюнкция x_1 и x_2»;

$x_1 \rightarrow x_2$ — функция «импликация x_1 и x_2»;

$x_1 \sim x_2$ — функция «эквивалентность x_1 и x_2»;

$x_1 + x_2$ — функция «сложение x_1 и x_2 по модулю два»;

$x_1 \mid x_2$ — функция «штрих Шеффера»;

$\sum_{i=1}^{n} b_i$ — сумма двоичных элементов $b_1, b_2, \ldots, b_n$ по mod 2;

$\bigvee_{i=1}^{n} \mathfrak{A}_i$ — дизъюнкция двоичных элементов $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$;

x^0 — функция, равная функции $\bar{x}$;

x^1 — функция, равная функции x;

$f^{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ — x_i-компонента функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$;

$f^{\bar{x}_i}(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ — $\bar{x}_i$-компонента функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$;

$[\mathfrak{M}]$ — замыкание множества $\mathfrak{M}$;

$f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — функция, двойственная к функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;

$\mathfrak{M}^*$ — множество функций, двойственных функциям из $\mathfrak{M}$;

$h(x, y, z)$ — функция, равная функции $xy \vee xz \vee yz$, медиана;

$\neq$ — отлично от;

$h_\mu(\tilde{x})$ — функция, равная функции $\bigvee_{i=1}^{\mu} x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{i-1} \cdot x_{i+1} \cdot \ldots \cdot x_{\mu+1}$;

O_i $(i = 1, 2, \ldots, 9)$ — классы функций (см. сводную таблицу);

S_i $(i = 1, 3, 5, 6)$ то же

P_i $(i = 1, 3, 5, 6)$ » »

L_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ » »

D_i $(i = 1, 2, 3)$ » »

A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ » »

C_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ » »

F_i^μ $(i = 1, 2, \ldots, 8)$ » »

F_i^∞ $(i = 1, 2, \ldots, 8)$ » »

$\langle a^2 \rangle$ — свойство функции

$\langle A^2 \rangle$ — » »

$\langle a^\mu \rangle$ — » »

$\langle a^\infty \rangle$ — » »

$\langle A^\mu \rangle$ — » »

$\langle A^\infty \rangle$ — » »

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Сергей Всеволодович Яблонский,
Гарий Петрович Гаврилов,
Валерий Борисович Кудрявцев.

Функции алгебры логики и классы Поста.

(Серия: «Математическая логика и основания математики»).

М., 1966 г., 120 стр. с илл.

Редактор *В. В. Донченко.*

Художник *Ю. И. Соколов.*

Техн. редактор *Л. А. Пыжова.*

Корректор *С. Д. Кайсер.*

Сдано в набор 21/IX 1965 г. Подписано к печати 11/I 1966 г. Бумага $84 \times 108^1/_{32}$. Физ. печ. л. 3,75. Условн. печ. л. 6,3. Уч.-изд. л. 5,21. Тираж 10000 экз. Т-01415. Цена книги 38 к. Заказ № 1940.

Издательство «Наука».
Главная редакция физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой
Главполиграфпрома
Комитета по печати
при Совете Министров СССР.
Измайловский проспект, 29.