ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

PAR

N. BOURBAKI

PREMIÈRE PARTIE

LES STRUCTURES FONDAMENTALES DE L'ANALYSE

LIVRE IV

FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE

(THÉORIE ÉLÉMENTAIRE)

PARIS

HERMANN & Cie, ÉDITEURS

6, Rue de la Sorbonne, 6

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИКИ

Н. БУРБАКИ

ФУНКЦИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ

ПЕРЕВОД С ФРАНЦУЗСКОГО
Е. И. СТЕЧКИНОЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1965

517.2
Б 91
УДК 517.51

АННОТАЦИЯ

Группа французских математиков, объединенная под псевдонимом «Бурбаки», поставила перед собой цель — написать под общим заглавием «Элементы математики» полный трактат по современной математике. Многие выпуски этого трактата уже вышли во Франции, вызвав большой интерес математиков всего мира.

Настоящая книга посвящена функциям одного действительного переменного.

Книга рассчитана на математиков — научных работников, аспирантов и студентов старших курсов университетов и пединститутов.

Н. Бурбаки

Функции действительного переменного

М., 1965 г., 424 стр. с илл.

Редакторы *И. А. Виноградова, С. А. Широкова*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод* Корректор *Т. С. Плетнева*

Сдано в набор 18/V 1965 г. Подписано к печати 13/IX 1965 г. Бумага $60\times90^1/_{16}$.
Физ. печ. л. 26,5. Условн. печ. л. 26,5. Уч.-изд. л. 22,18. Тираж 25000 экз.
Цена книги 1 р. 79 к. Заказ № 1028.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Московская типография № 16
Главполиграфпрома Государственного комитета Совета Министров СССР по печати.
Москва, Трехпрудный пер., д. 9.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Целью этой книги является элементарное изучение дифференциальных свойств функций *одного* действительного переменного; распространение этих свойств на функции многих действительных переменных, и тем более на функции, определенные в более общих пространствах, будет рассмотрено в последующих книгах.

Свойства, которые будут здесь доказаны, справедливы для *числовых* (конечных) функций одного действительного переменного; однако большинство из них может быть без дополнительных рассуждений перенесено на функции одного действительного переменного, принимающие значения в некотором *конечномерном векторном пространстве* над телом **R**, и даже на более общий класс функций со значениями в *топологическом векторном пространстве* над телом **R** (см. ниже); поскольку такие функции часто встречаются в анализе, то мы будем формулировать все свойства именно для них, за исключением тех случаев, когда они справедливы лишь для числовых функций.

Понятие топологического векторного пространства, о котором только что говорилось, определено и подробно изучено в книге V настоящего трактата; однако *никакие* результаты оттуда нам не понадобятся, а будет нужно только несколько определений, которые мы для удобства читателей воспроизводим здесь.

Определение *векторного пространства* над *коммутативным* телом K (Алгебра, гл. II, § 1, n° 2) *) мы напоминать не будем.

---

*) В этой главе элементы (или *векторы*) какого-либо векторного пространства E будут обозначаться, как правило, строчными жирными буквами, а скаляры — строчными светлыми буквами; скаляр t в произведении вектора $\mathbf{x}$ на скаляр t мы в основном будем писать *справа*, так что это произведение будет иметь вид $\mathbf{x}t$; по

Топологическое векторное пространство E над *топологическим телом* K есть векторное пространство над телом K, наделенное топологией, в которой функции $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ и $\mathbf{x}t$ *непрерывны* соответственно на множествах $E \times E$ и $E \times K$; такая топология, в частности, согласуется со структурой аддитивной группы пространства E. Если E представляет собой полную топологическую группу, то говорят, что топологическое векторное пространство E является *полным*. Всякое *нормированное* векторное пространство над *упорядоченным телом* K (Общая топология, гл. IX, § 3, n° 3) *) есть топологическое векторное пространство над телом K.

Пусть E — векторное пространство (вне зависимости от того, наделено оно какой-нибудь топологией или нет) над телом $\mathbf{R}$ действительных чисел; если $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ — две произвольные точки из E, то *замкнутым отрезком* с концами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ называется множество точек вида $\mathbf{x}t+\mathbf{y}(1-t)$, где t пробегает замкнутый интервал $[0, 1]$ прямой $\mathbf{R}$. Говорят, что подмножество A пространства E *выпукло*, если для любых двух точек $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ из A замкнутый отрезок с концами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ содержится в A. Например, линейное аффинное многообразие, замкнутый отрезок, а также параллелепипед в $\mathbf{R}^n$ выпуклы (Общая топология, гл. VI, § 1, n° 3). Всякое пересечение выпуклых множеств есть выпуклое множество.

Топологическое векторное пространство E над телом $\mathbf{R}$ *локально выпукло*, если начало координат (а значит, и любая точка пространства E) обладает фундаментальной системой *выпуклых* окрестностей. Всякое *нормированное* пространство E над телом $\mathbf{R}$ локально выпукло; в самом деле, шары $\|\mathbf{x}\| \leqslant r$ $(r > 0)$ образуют фундаментальную систему окрестностей начала в E и каждый из них является выпуклым множеством, ибо

в некоторых случаях мы ради удобства будем использовать и левое обозначение $t\mathbf{x}$; мы будем также часто записывать произведение скаляра $\frac{1}{t}$ $(t \neq 0)$ на вектор $\mathbf{x}$ в виде $\frac{\mathbf{x}}{t}$.

*) Напомним, что *нормой* в пространстве E называется числовая функция $\|\mathbf{x}\|$, определенная в E, принимающая конечные неотрицательные значения и такая, что соотношение $\|\mathbf{x}\|=0$ эквивалентно $\mathbf{x}=0$, что $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|$ и что $\|\mathbf{x}t\|=\|\mathbf{x}\|\,|t|$ для любого $t \in K$ (где $|t|$ — абсолютное значение t в K).

соотношения $\|\mathbf{x}\| \leqslant r$, $\|\mathbf{y}\| \leqslant r$ влекут за собой

$$\|\mathbf{x}t + \mathbf{y}(1-t)\| \leqslant \|\mathbf{x}\| t + \|\mathbf{y}\| (1-t) \leqslant r$$

для $0 \leqslant t \leqslant 1$. В частности, числовые пространства $\mathbf{R}^n$ локально выпуклы.

Наконец, *топологическая алгебра* A над *топологическим телом* (коммутативным) K есть алгебра над телом K, наделенная такой топологией, что функции $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, $\mathbf{xy}$ и $\mathbf{x}t$ непрерывны соответственно на $A \times A$, $A \times A$ и $A \times K$; если же рассматривать A лишь как множество, наделенное топологией и структурой векторного пространства над телом K, то A есть топологическое векторное пространство. Всякая *нормированная алгебра* над *упорядоченным телом* K (Общая топология, гл. IX, § 3, n° 7) является топологической алгеброй над телом K.

ГЛАВА I

ПРОИЗВОДНЫЕ

§ 1. Первая производная

Как уже говорилось во введении, в этой и в последующих главах мы будем изучать дифференциальные свойства функций, определенных на части тела $\mathbf{R}$ действительных чисел и принимающих значения в некотором *топологическом векторном пространстве* E над телом $\mathbf{R}$; для краткости мы будем такие функции называть *вектор-функциями одного действительного переменного*. Наиболее важным является случай $E=\mathbf{R}$ (конечные числовые функции действительного переменного). Если же $E=\mathbf{R}^n$, то рассмотрение одной вектор-функции со значениями в E сводится к одновременному рассмотрению n конечных числовых функций.

Многие определения и свойства, изложенные в главе I, переносятся на функции, определенные на части тела $\mathbf{C}$ комплексных чисел и принимающие значения в топологическом векторном пространстве над телом $\mathbf{C}$ (вектор-функции одного комплексного переменного). Некоторые из этих определений и свойств распространяются даже на функции, определенные на части произвольного коммутативного *топологического тела* K и принимающие значения в топологическом векторном пространстве над телом K.

По ходу дела мы будем указывать эти обобщения (см., например, замечание 2, § 1, n° 6), выделяя всюду случай функций одного комплексного переменного, который наряду со случаем функций одного действительного переменного является самым важным и будет более глубоко изучаться в одной из последующих книг.

1. Производная вектор-функции

Определение 1. *Пусть вектор-функция* $\mathbf{f}$ *определена на интервале* $I\subset\mathbf{R}$, *не сводящемся к точке. Говорят, что* $\mathbf{f}$ *дифференцируема в точке* $x_0\in I$, *если предел* $\displaystyle\lim_{x\to x_0,\, x\in I,\, x\neq x_0}\frac{\mathbf{f}(x)-\mathbf{f}(x_0)}{x-x_0}$

существует (в векторном пространстве, в котором $\mathbf{f}$ *принимает свои значения); значение этого предела называется первой производной* (или просто *производной*) *функции* $\mathbf{f}$ *в точке* x_0 *и обозначается* $\mathbf{f}'(x_0)$ *или* $D\mathbf{f}(x_0)$.

Если $\mathbf{f}$ дифференцируема в точке x_0, то в этой точке дифференцируемо и *сужение* функции $\mathbf{f}$ на любой не сводящийся к точке интервал $J \subset I$, содержащий x_0, и производная этого сужения равна $\mathbf{f}'(x_0)$. Обратно, пусть J — интервал, содержащийся в I и содержащий окрестность точки x_0 относительно I; если сужение функции $\mathbf{f}$ на J имеет в точке x_0 производную, то тем же свойством обладает и функция $\mathbf{f}$.

Эти свойства выражают, говоря, что понятие производной есть понятие *локальное*.

Замечания. * 1) В кинематике (если $\mathbf{f}(t)$ означает положение движущейся точки в пространстве $\mathbf{R}^3$ в момент t) выражение $\frac{\mathbf{f}(t)-\mathbf{f}(t_0)}{t-t_0}$ называется *средней скоростью* движения между моментами t_0 и t, а его предел $\mathbf{f}'(t_0)$ — *мгновенной скоростью* (или просто *скоростью*) в момент t_0 (если этот предел существует). *

2) Если функция $\mathbf{f}$ определена на I и дифференцируема в некоторой точке $x_0 \in I$, то в этой точке она *непрерывна относительно* I.

Определение 2. *Пусть* $\mathbf{f}$ — *вектор-функция, определенная на интервале* $I \subset \mathbf{R}$, *и пусть* x_0 — *такая точка из* I, *что интервал* $I \cap]x_0, +\infty[$ (соответственно $I \cap]-\infty, x_0[$) *не сводится к точке. Говорят, что* $\mathbf{f}$ *дифференцируема в точке* x_0 *справа* (соответственно *слева*), *если сужение функции* $\mathbf{f}$ *на интервал* $I \cap]x_0, +\infty[$ (соответственно $I \cap]-\infty, x_0[$) *дифференцируемо в точке* x_0; *значение производной этого сужения в точке* x_0 *называется правой* (соответственно *левой*) *производной функции* $\mathbf{f}$ *в точке* x_0 *и обозначается* $\mathbf{f}'_d(x_0)$ (соответственно $\mathbf{f}'_g(x_0)$).

Пусть $\mathbf{f}$ — вектор-функция, определенная на I, x_0 — *внутренняя* точка этого интервала, и пусть $\mathbf{f}$ непрерывна в этой точке; из определений 1 и 2 вытекает, что для того, чтобы функция $\mathbf{f}$ была дифференцируема в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы она обладала в этой точке как правой, так и левой производной и чтобы эти производные были *равны*; тогда $\mathbf{f}'(x_0)=\mathbf{f}'_d(x_0)=\mathbf{f}'_g(x_0)$.

Примеры. 1) *Постоянная* функция в каждой точке имеет производную, равную нулю.

2) Линейная функция $x \to \mathbf{a}x+\mathbf{b}$ в каждой точке имеет производную, равную $\mathbf{a}$, то есть *постоянную*.

3) Числовая функция $\frac{1}{x}$ (определенная для $x \neq 0$) дифференцируема в любой точке $x_0 \neq 0$, так как $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right)/(x-x_0)=-\frac{1}{xx_0}$, а поскольку функция $\frac{1}{x}$ в точке x_0 непрерывна, то предел предыдущего выражения равен $-\frac{1}{x_0^2}$.

4) Числовая функция $|x|$, определенная на $\mathbf{R}$, имеет в точке $x=0$ правую производную, равную $+1$, а левую — равную -1; значит, в этой точке она не дифференцируема.

5) Числовая функция, равная нулю при $x=0$ и равная $x \sin\frac{1}{x}$ для $x \neq 0$, определена и непрерывна на $\mathbf{R}$, однако в точке $x=0$ не имеет ни правой, ни левой производной. Можно указать примеры функций, непрерывных на некотором интервале и не имеющих производной *ни в какой* точке этого интервала (упражнения 2 и 3).

Определение 3. — *Говорят, что вектор-функция* $\mathbf{f}$, *определенная на некотором интервале* $I \subset \mathbf{R}$, *дифференцируема* (соответственно *дифференцируема справа, дифференцируема слева*) *на* I, *если она дифференцируема* (соответственно *дифференцируема справа, дифференцируема слева*) *в каждой точке этого интервала; функция* $x \to \mathbf{f}'(x)$ (соответственно $x \to \mathbf{f}'_d(x)$, $x \to \mathbf{f}'_g(x)$), *определенная на* I, *называется производной функцией или* (сокращенно) *производной* (соответственно *правой производной, левой производной*) *функции* $\mathbf{f}$ *и обозначается* $\mathbf{f}'$, $D\mathbf{f}$ *или* $\frac{d}{dx}\mathbf{f}$ (соответственно $\mathbf{f}'_d$, $\mathbf{f}'_g$).

Замечание. Если функция дифференцируема на интервале, то ее производная не обязана быть непрерывной в каждой точке этого интервала (ср. упражнение 5); * например, функция, равная нулю при $x=0$ и равная $x^2 \sin\frac{1}{x}$ при $x \neq 0$, всюду имеет производную, но эта производная в точке $x=0$ разрывна. *

2. *Линейность дифференцирования*

Предложение 1. *Множество вектор-функций, определенных на некотором интервале $I \subset \mathbf{R}$, принимающих свои значения в одном и том же топологическом векторном пространстве E и дифференцируемых в точке x_0, образует векторное пространство над телом $\mathbf{R}$, и $\mathbf{f} \to D\mathbf{f}(x_0)$ есть линейное (однородное) отображение этого пространства в E.*

Иными словами, если $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ определены на I и дифференцируемы в точке x_0, то $\mathbf{f}+\mathbf{g}$ и $\mathbf{f}a$ (a—произвольный скаляр) дифференцируемы в точке x_0 и имеют в качестве производных в этой точке соответственно $\mathbf{f}'(x_0)+\mathbf{g}'(x_0)$ и $\mathbf{f}'(x_0)\,a$. Это следует сразу из непрерывности $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ и $\mathbf{x}a$ соответственно на множествах $E \times E$ и E.

Следствие. *Множество вектор-функций, определенных на интервале I, принимающих свои значения в одном и том же топологическом векторном пространстве E и дифференцируемых на I, образует векторное пространство над телом $\mathbf{R}$, а $\mathbf{f} \to D\mathbf{f}$ является линейным (однородным) отображением этого пространства в векторное пространство отображений интервала I в E.*

Замечание. Если векторное пространство отображений I в E и подпространство дифференцируемых отображений наделить топологией простой сходимости (или топологией равномерной сходимости) (ср. Общая топология, гл. X, § 1), то линейное отображение $f \to Df$, вообще говоря, *не будет непрерывным* (ср. гл. II, § 3); например, последовательность функций $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin n^2 x$ равномерно сходится к нулю на $\mathbf{R}$, а последовательность производных $f'_n(x) = n \cos n^2 x$ не сходится к нулю даже в смысле простой сходимости).

Предложение 2. *Пусть E и F — два топологических векторных пространства над телом $\mathbf{R}$, и пусть $\mathbf{u}$ — непрерывное линейное отображение E в F. Если вектор-функция $\mathbf{f}$ определена на интервале $I \subset \mathbf{R}$, принимает свои значения в E и дифференцируема в точке $x_0 \in I$, то сложная функция $\mathbf{u} \circ \mathbf{f}$ имеет в точке x_0 производную, равную $\mathbf{u}(\mathbf{f}'(x_0))$.*

В самом деле, в силу равенства $\frac{\mathbf{u}(\mathbf{f}(x)) - \mathbf{u}(\mathbf{f}(x_0))}{x - x_0} = \mathbf{u}\left(\frac{\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(x_0)}{x - x_0}\right)$ это следует из непрерывности отображения $\mathbf{u}$.

Следствие. *Если φ есть непрерывная линейная форма на E, то числовая функция $\varphi\circ\mathbf{f}$ имеет в точке x_0 производную, равную $\varphi(\mathbf{f}'(x_0))$.*

Примеры. 1) Пусть $\mathbf{f}=(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ — функция со значениями в $\mathbf{R}^n$, определенная на интервале $I\subset\mathbf{R}$; тогда каждая из числовых функций f_i есть не что иное, как сложная функция $pr_i\circ\mathbf{f}$, и значит, она дифференцируема в точке x_0, *если* дифференцируема $\mathbf{f}$, и тогда $\mathbf{f}'(x_0)=(f_i'(x_0))_{1\leqslant i\leqslant n}$.

2) В кинематике, если $\mathbf{f}(t)$ означает положение движущейся точки M в момент t, $\mathbf{g}(t)$ — положение в тот же момент проекции M' точки M на плоскость P (соответственно прямую D) параллельно некоторой прямой (соответственно плоскости), не параллельной P (соответственно D), то $\mathbf{g}$ есть сложная функция $\mathbf{u}\circ\mathbf{f}$, где $\mathbf{u}$ есть проекция точек $\mathbf{R}^3$ на P (соответственно на D); так как $\mathbf{u}$ есть линейное (непрерывное) отображение, то очевидно, что проекция скорости движения точки на плоскость (соответственно прямую) равна скорости проекции точки на плоскость (соответственно прямую).

3) Пусть f — функция с комплексными значениями, определенная на интервале $I\subset\mathbf{R}$, и пусть a — произвольное комплексное число; предложение 2 показывает, что если f дифференцируема в точке $x_0\in I$, то этим же свойством обладает и af и производная этой функции в точке x_0 равна $af'(x_0)$.

3. Производная произведения

Рассмотрим теперь p топологических векторных пространств E_i $(1\leqslant i\leqslant p)$ над телом $\mathbf{R}$ и *непрерывное полилинейное* *) отображение (которое мы запишем в виде $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p)\to[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\ldots\mathbf{x}_p]$) множества $E_1\times E_2\times\ldots\times E_p$ в топологическое векторное пространство F на телом $\mathbf{R}$.

*) Напомним (Алгебра, гл. III, § 1), что отображение f произведения $E_1\times E_2\times\ldots\times E_p$ в F называется *полилинейным*, если каждое частичное отображение

$$\mathbf{x}_i\to\mathbf{f}(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{i-1},\mathbf{x}_i,\mathbf{a}_{i+1},\ldots,\mathbf{a}_p)$$

пространства E_i в F $(1\leqslant i\leqslant p)$, где $\mathbf{a}_j$ для индексов, отличных от i, выбирается в E_j произвольно, является *линейным* (однородным) отображением. Заметим, что если E_i и F — пространства *конечной* размерности над телом $\mathbf{R}$, то всякое полилинейное отображение произведения $E_1\times E_2\times\ldots\times E_p$ в F непрерывно; это уже не имеет места, если некоторые из пространств являются бесконечномерными топологическими векторными пространствами.

Предложение 3. *Пусть для каждого индекса* i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ *функция* $\mathbf{f}_i$ *определена на интервале* $I \subset \mathbf{R}$, *принимает свои значения в* E_i *и дифференцируема в точке* $x_0 \in I$. *Тогда функция*

$$x \to [\mathbf{f}_1(x)\,\mathbf{f}_2(x)\,\ldots\,\mathbf{f}_p(x)],$$

определенная на I *и принимающая значения в* F, *имеет в точке* x_0 *производную, равную*

$$\sum_{i=1}^{p} [\mathbf{f}_1(x_0)\,\ldots\,\mathbf{f}_{i-1}(x_0)\,\mathbf{f}_i'(x_0)\,\mathbf{f}_{i+1}(x_0)\,\ldots\,\mathbf{f}_p(x_0)]. \tag{1}$$

В самом деле, положим $\mathbf{h}(x) = [\mathbf{f}_1(x)\,\mathbf{f}_2(x)\,\ldots\,\mathbf{f}_p(x)]$; на основании тождества

$$[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\,\ldots\,\mathbf{b}_p] - [\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\,\ldots\,\mathbf{a}_p] = \sum_{i=1}^{p} [\mathbf{b}_1\,\ldots\,\mathbf{b}_{i-1}(\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i)\,\mathbf{a}_{i+1}\,\ldots\,\mathbf{a}_p]$$

можно написать

$$\mathbf{h}(x) - \mathbf{h}(x_0) = \\ = \sum_{i=1}^{p} [\mathbf{f}_1(x_0)\,\ldots\,\mathbf{f}_{i-1}(x_0)\,(\mathbf{f}_i(x) - \mathbf{f}_i(x_0))\,\mathbf{f}_{i+1}(x)\,\ldots\,\mathbf{f}_p(x)].$$

Умножив обе части равенства на $\frac{1}{x - x_0}$ и устремив $x \in I$ к x_0, получим выражение (1), приняв во внимание непрерывность отображения

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p) \to [\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\,\ldots\,\mathbf{x}_p]$$

и непрерывность сложения в F.

Если некоторые из функций $\mathbf{f}_i$ *постоянны*, то члены в выражении (1), содержащие производные $\mathbf{f}_i'(x_0)$ этих функций, обращаются в нуль.

Разберем подробнее случай $p = 2$, как наиболее важный для приложений: если $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \to [\mathbf{xy}]$ — *непрерывное билинейное* отображение произведения $E \times F$ в G (E, F, G — топологические векторные пространства над телом $\mathbf{R}$), $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ — две вектор-функции, дифференцируемые в точке x_0 и принимающие свои значения соответственно в E и F, то вектор-функция $x \to [\mathbf{f}(x)\,\mathbf{g}(x)]$ (которая обозначается также $[\mathbf{fg}]$) имеет в точке x_0 производную, равную $[\mathbf{f}'(x_0)\,\mathbf{g}(x_0)] + [\mathbf{f}(x_0)\,\mathbf{g}'(x_0)]$. В частности, если $\mathbf{a}$ — постоянный вектор, то $[\mathbf{af}]$ (соответственно $[\mathbf{fa}]$) имеет в точке x_0 производную, равную $[\mathbf{af}'(x_0)]$ (соответственно $[\mathbf{f}'(x_0)\,\mathbf{a}]$).

Если обе функции $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ дифференцируемы на I, то тем же свойством обладает и $[\mathbf{fg}]$, и

$$[\mathbf{fg}]' = [\mathbf{f}'\mathbf{g}] + [\mathbf{fg}']. \tag{2}$$

Примеры. 1) Пусть f — числовая функция, $\mathbf{g}$ — вектор-функция и обе они дифференцируемы в точке x_0; тогда функция $\mathbf{g}f$ имеет в точке x_0 производную, равную $\mathbf{g}'(x_0) f(x_0) + \mathbf{g}(x_0) f'(x_0)$. В частности, если $\mathbf{a}$ — постоянный вектор, то $\mathbf{a}f$ имеет производную, равную $\mathbf{a}f'(x_0)$. Последнее замечание в применении к примеру 1 n° 2 показывает, что если $\mathbf{f} = (f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ есть вектор-функция со значениями в $\mathbf{R}^n$, то для дифференцируемости $\mathbf{f}$ в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы этим свойством обладала каждая из числовых функций f_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, ибо если $(\mathbf{e}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — канонический базис пространства $\mathbf{R}^n$, то можно записать: $\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i f_i$.

2) Числовая функция x^n может быть получена из определенной в $\mathbf{R}^n$ полилинейной функции $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to x_1 x_2 \ldots x_n$ путем замены каждого из x_i на x; тогда предложение 3 показывает, что x^n дифференцируема на $\mathbf{R}$ и ее производная равна nx^{n-1}. Отсюда следует, что производная многочлена $\mathbf{a}_0 x^n + \mathbf{a}_1 x^{n-1} + \ldots + \mathbf{a}_{n-1} x + \mathbf{a}_n$ ($\mathbf{a}_i$ — постоянные векторы) равна $n\mathbf{a}_0 x^{n-1} + (n-1)\mathbf{a} x^{n-2} + \ldots + \mathbf{a}_{n-1}$; в том случае, когда все $\mathbf{a}_i$ являются действительными числами, эта функция совпадает с производной многочлена, определенной в алгебре (Алгебра, гл. IV, § 4).

3) Евклидово *скалярное произведение* $\langle x, y \rangle$ (Общая топология, гл. VI, § 2, n° 2) есть билинейное (непрерывное) отображение пространства $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}$. Если даны две вектор-функции $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ со значениями в $\mathbf{R}^n$ и обе они дифференцируемы в точке x_0, то числовая функция $x \to \langle \mathbf{f}(x), \mathbf{g}(x) \rangle$ имеет в точке x_0 производную, равную $\langle \mathbf{f}'(x_0), \mathbf{g}(x_0) \rangle + \langle \mathbf{f}(x_0), \mathbf{g}'(x_0) \rangle$. Аналогичный результат имеет место и для эрмитова скалярного произведения в $\mathbf{C}^n$ (Алгебра, гл. IX), если это последнее рассматривать как векторное пространство *над телом* $\mathbf{R}$.

Рассмотрим, в частности, случай, когда евклидова норма $\| \mathbf{f}(x) \|$, а значит и $\langle \mathbf{f}(x), \mathbf{f}(x) \rangle = \| \mathbf{f}(x) \|^2$, постоянна; записывая, что производная произведения $\langle \mathbf{f}(x), \mathbf{f}(x) \rangle$ в точке x_0 равна нулю, получаем, что $\langle \mathbf{f}(x_0), \mathbf{f}'(x_0) \rangle = 0$, или, другими словами, $\mathbf{f}'(x_0)$ есть вектор, *ортогональный* к $\mathbf{f}(x)$.

4) *Векторное произведение* $x \overline{\wedge} y$ двух векторов из $\mathbf{R}^3$ (Алгебра, гл. IX) есть билинейное (непрерывное) отображение пространства $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ в $\mathbf{R}^3$; при тех же предположениях относительно функций $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$, что и выше, функция $x \to \mathbf{f}(x) \overline{\wedge} \mathbf{g}(x)$ имеет в точке x_0 производную, равную

$$\mathbf{f}'(x_0) \overline{\wedge} \mathbf{g}(x_0) + \mathbf{f}(x_0) \overline{\wedge} \mathbf{g}'(x_0).$$

5) Если E есть *топологическая алгебра* над телом $\mathbf{R}$ (см. введение), то произведение $\mathbf{xy}$ двух элементов из E есть билинейная непрерывная функция от $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$; если функции $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ принимают свои значения в E и дифференцируемы в точке x_0, то функция $x \to \mathbf{f}(x)\mathbf{g}(x)$ имеет в точке x_0 производную, равную $\mathbf{f}'(x_0)\mathbf{g}(x_0) + \mathbf{f}(x_0)\mathbf{g}'(x_0)$. В частности, если $U(x) = (\alpha_{ij}(x))$, $V(x) = (\beta_{ij}(x))$ — две *квадратные матрицы* порядка n, дифференцируемые в точке x_0, то их произведение UV имеет в этой точке производную, равную матрице $U'(x_0)V(x_0) + U(x_0)V'(x_0)$ (где $U'(x) = (\alpha'_{ij}(x))$ и $V'(x) = (\beta'_{ij}(x))$).

6) Так как *определитель* $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n]$ n векторов $\mathbf{x}_i = (x_{ij})_{1 \leqslant j \leqslant n}$ пространства $\mathbf{R}^n$ (Алгебра, гл. III, § 6) является полилинейной (непрерывной) функцией от $\mathbf{x}_i$, то очевидно, что если n^2 числовых функций f_{ij} дифференцируемы в точке x_0, то их определитель $g(x) = \det(f_{ij}(x))$ имеет в этой точке производную, равную

$$\sum_{i=1}^{n} [\mathbf{f}_1(x_0), \ldots, \mathbf{f}_{i-1}(x_0), \mathbf{f}'_i(x_0), \mathbf{f}_{i+1}(x_0), \ldots, \mathbf{f}_n(x_0)],$$

где $\mathbf{f}_i(x) = (f_{ij}(x))_{1 \leqslant j \leqslant n}$; иными словами, чтобы получить производную определителя n-го порядка, нужно взять сумму n определителей, которые получатся, если в данном определителе для каждого i заменить члены i-го столбца их производными.

Замечание. Если $U(x)$ — квадратная матрица, дифференцируемая и обратимая в точке x_0, то производная ее определителя $\Delta(x) = \det(U(x))$ выражается также и через производную матрицы $U(x)$ посредством формулы

$$\Delta'(x_0) = \Delta(x_0)\,\mathrm{Tr}\,(U'(x_0)\,U^{-1}(x_0)). \tag{3}$$

В самом деле, положим $U(x_0 + h) = U(x_0) + hV$; V, по определению, стремится к $U'(x_0)$, когда h стремится к нулю. Тогда можно написать

$$\Delta(x_0 + h) = \Delta(x_0)\det(I + hVU^{-1}(x_0)).$$

Но

$$\det(I + hX) = 1 + h\,\mathrm{Tr}\,(X) + \sum_{k=2}^{n} \lambda_k h^k,$$

где λ_k $(k \geqslant 2)$ являются многочленами относительно элементов матрицы X, а поскольку элементы матрицы $VU^{-1}(x_0)$ стремятся к пределу, когда h стремится к 0, то получаем формулу (3).

4. Производная обратной величины функции

Предложение 4. *Пусть E — полная нормированная алгебра над телом* $\mathbf{R}$, *содержащая единицу, и пусть* $\mathbf{f}$ — *функция, определенная на интервале* $I \subset \mathbf{R}$, *принимающая свои значения в* E *и дифференцируемая в точке* $x_0 \in I$. *Если элемент* $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(x_0)$ *обратим*) в* E, *то функция* $x \to (\mathbf{f}(x))^{-1}$ *определена в окрестности точки* x_0 *(относительно* I*) и имеет в точке* x_0 *производную, равную* $-(\mathbf{f}(x_0))^{-1}\mathbf{f}'(x_0)(\mathbf{f}(x_0))^{-1}$.

В самом деле, множество обратимых элементов из E образует открытое множество, на котором функция $\mathbf{y} \to \mathbf{y}^{-1}$ непрерывна (Общая топология, гл. IX, § 3, предложение 14); так как $\mathbf{f}$ непрерывна (относительно I) в точке x_0, то $(\mathbf{f}(x))^{-1}$ определена в окрестности точки x_0 и

$$(\mathbf{f}(x))^{-1} - (\mathbf{f}(x_0))^{-1} = (\mathbf{f}(x))^{-1}(\mathbf{f}(x_0) - \mathbf{f}(x))\,\mathbf{f}(x_0)^{-1}.$$

Таким образом, предложение вытекает из непрерывности $\mathbf{y}^{-1}$ в окрестности точки $\mathbf{y}_0$ и непрерывности $\mathbf{xy}$ на $E \times E$.

Примеры. 1) Наиболее важным является тот частный случай, когда E есть одно из тел $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$: если f есть функция с действительными или комплексными значениями, дифференцируемая в точке x_0 и такая, что $f(x_0) \neq 0$, то $1/f$ имеет в точке x_0 производную, равную $-f'(x_0)/(f(x_0))^2$.

2) Если $U = (a_{ij}(x))$ есть квадратная матрица порядка n, дифференцируемая в точке x_0 и обратимая в этой точке, то U^{-1} имеет в точке x_0 производную, равную $-U^{-1}U'U^{-1}$.

5. Производная сложной функции

Предложение 5. *Пусть числовая функция* f *определена на интервале* $I \subset \mathbf{R}$, *а вектор-функция* $\mathbf{g}$ *определена на интервале из* $\mathbf{R}$, *содержащем* $f(I)$. *Если* f *дифференцируема в точке* x_0, *а* $\mathbf{g}$ *дифференцируема в точке* $f(x_0)$, *то сложная функция* $\mathbf{g} \circ f$ *имеет в точке* x_0 *производную, равную* $\mathbf{g}'(f(x_0))f'(x_0)$.

---

*) Напомним (Алгебра, гл. I, § 2, n° 9), что элемент $\mathbf{z} \in E$ называется *обратимым*, если в E существует такой элемент, обозначаемый через $\mathbf{z}^{-1}$, что $\mathbf{z}\mathbf{z}^{-1} = \mathbf{z}^{-1}\mathbf{z} = \mathbf{e}$ ($\mathbf{e}$ — единичный элемент множества E).

В самом деле, положив $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ f$, можем написать:

$$\mathbf{h}(x) - \mathbf{h}(x_0) = \mathbf{u}(x) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0};$$

где $\mathbf{u}(x) = \frac{\mathbf{g}(f(x)) - \mathbf{g}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}$, если $f(x) \neq f(x_0)$, и $\mathbf{u}(x) = \mathbf{g}'(f(x_0))$ в противном случае. Когда x стремится к x_0, $f(x)$ имеет в качестве предела $f(x_0)$ и, следовательно, $\mathbf{u}(x)$ имеет своим пределом $\mathbf{g}'(f(x_0))$, откуда на основании непрерывности функции $\mathbf{y}x$ на $E \times \mathbf{R}$ получаем предложение.

Замечание. В книге, посвященной дифференциалам, мы покажем, что предложения 2 и 5 можно рассматривать (в том случае когда E — нормированное пространство над телом $\mathbf{R}$) как частные случаи одной и той же теоремы о дифференцировании функции $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$, где $\mathbf{f}$ — отображение интервала $I \subset \mathbf{R}$ в E, а $\mathbf{g}$ — отображение множества из E в нормированное пространство F.

6. Производная обратной функции

Предложение 6. *Пусть f есть гомеоморфизм интервала $I \subset \mathbf{R}$ на интервал $J = f(I) \subset \mathbf{R}$, а g — обратный гомеоморфизм*). Если f дифференцируема в точке $x_0 \in I$ и если $f'(x_0) \neq 0$, то g имеет в точке $y_0 = f(x_0)$ производную, равную $\frac{1}{f'(x_0)}$.*

В самом деле, для любого $y \in J$ имеем $g(y) \in I$ и $y = f(g(y))$; следовательно, для $y \neq y_0$ можем написать: $\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{g(y) - x_0}{f(g(y)) - f(x_0)}$. Когда y стремится к y_0, оставаясь в J и $y \neq y_0$, $g(y)$ стремится к x_0, оставаясь в I и $g(y) \neq x_0$, и, значит, правая часть в предыдущей формуле имеет предел, равный $\frac{1}{f'(x_0)}$, так как, по предположению, $f'(x_0) \neq 0$.

Следствие. *Если f дифференцируема на I и $f'(x) \neq 0$ на I, то g дифференцируема на J и ее производная в любой точке $y \in J$ равна $\frac{1}{f'(g(y))}$.*

*) Известно, что для того, чтобы f была гомеоморфизмом интервала I на множество из $\mathbf{R}$, необходимо и достаточно, чтобы f была непрерывна и строго монотонна на I (Общая топология, гл. IV, § 2, теорема 5).

Например, для любого целого $n>0$ функция $x^{\frac{1}{n}}$, обратная к функции x^n и являющаяся гомеоморфизмом $\mathbf{R}_+^*$ на себя, имеет в каждой точке $x>0$ производную, равную $\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$.

Отсюда на основании предложения 5 легко вывести, что для всякого рационального числа $r=p/q>0$ функция $x^r=(x^{\frac{1}{q}})^p$ имеет в каждой точке $x>0$ производную, равную rx^{r-1}.

Замечания. 1) Все предыдущие предложения, сформулированные для функций, дифференцируемых в точке x_0, позволяют сразу же получить предложения для функций, дифференцируемых справа (соответственно слева) в точке x_0, если вместо этих функций рассматривать их сужения на пересечение интервала, на котором они определены, с интервалом $[x_0, +\infty[$ (соответственно $]-\infty, x_0]$); предоставляем читателю сформулировать и доказать эти предложения.

2) Предыдущие определения и предложения (за исключением тех, которые относятся к правым и левым производным) легко переносятся на случай, когда вместо $\mathbf{R}$ берется произвольное *коммутативное топологическое тело* K, а вместо топологических векторных пространств (соответственно топологических алгебр) над телом $\mathbf{R}$ — топологические векторные пространства (соответственно топологические алгебры) над телом K. В определении 1 и предложениях 1, 2 и 3 достаточно заменить I *окрестностью* точки x_0 в K; в предложении 4 нужно, кроме того, предположить, что отображение $\mathbf{y} \to \mathbf{y}^{-1}$ определено и непрерывно в окрестности точки $\mathbf{f}(x_0)$ в E. Предложение 5 обобщается следующим образом: пусть K' — подтело топологического тела K, E — топологическое векторное пространство *над телом* K; пусть функция f, определенная в окрестности $V \subset K'$ точки $x_0 \in K'$ со значениями в K (рассматриваемом как топологическое векторное пространство над K'), дифференцируема в точке x_0, и пусть функция $\mathbf{g}$, определенная в окрестности точки $f(x_0) \in K$ со значениями в E, дифференцируема в точке $f(x_0)$; тогда отображение $\mathbf{g} \circ f$ дифференцируемо в точке x_0 и его производная в этой точке равна $\mathbf{g}'(f(x_0))\,f'(x_0)$ (E рассматривается в этом случае как топологическое векторное пространство *над телом* K').

Пусть, в тех же обозначениях, $\mathbf{f}$ — функция, определенная в окрестности V точки $a \in K$, принимающая значения в E и дифференцируемая в точке a; если $a \in K'$ и не является в K' изолированной точкой, то *сужение* функции $\mathbf{f}$ на $V \cap K'$ дифференцируемо в точке a и его производная в этой точке равна $\mathbf{f}'(a)$. Фактически эти соображения будут применяться к случаю $K=\mathbf{C}$, $K'=\mathbf{R}$.

Наконец, предложение 6 переносится на случай, когда I заменяется окрестностью точки $x_0 \in K$, а f — гомеоморфизмом интервала I на окрестность $J=f(I)$ точки $y_0=f(x_0)$ в K.

7. *Производные числовых функций*

Для *числовых* (конечных) функций действительного переменного предыдущие определения и предложения могут быть дополнены в некоторых пунктах.

Прежде всего, если f — такая функция, определенная на интервале $I \subset \mathbf{R}$ и непрерывная относительно I в некоторой точке $x_0 \in I$, то может оказаться, что, когда x стремится к x_0, оставаясь внутри I и $x \neq x_0$, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ имеет предел, равный $+\infty$ или $-\infty$; в этом случае снова говорят, что функция f дифференцируема в точке x_0 и ее производная в этой точке равна $+\infty$ (соответственно $-\infty$); если функция f имеет производную $f'(x)$ (конечную или бесконечную) в каждой точке x интервала I, то функция f' (со значениями в $\overline{\mathbf{R}}$) снова называется производной функцией (или просто производной) функции f. Точно так же расширяются понятия правой и левой производных.

Пример. В точке $x=0$ функция $x^{\frac{1}{3}}$ (обратная к функции x^3, являющейся гомеоморфизмом $\mathbf{R}$ на себя) имеет производную, равную $+\infty$; функция $|x|^{\frac{1}{3}}$ имеет в точке $x=0$ правую производную, равную $+\infty$, и левую производную, равную $-\infty$.

Формулы для производной суммы, произведения числовых дифференцируемых функций или обратной величины дифференцируемой функции (предложения 1, 3 и 4), равно как и для производной сложной (числовой) функции (предложение 5), остаются справедливыми и в том случае, когда фигурирующие в них производные бесконечны, поскольку ни одно из выражений, входящих в эти формулы, не теряет смысла (ср. Общая топология, гл. IV, § 4, n° 3). Наконец, если в предложении 6 допустить, что f строго возрастает (соответственно строго убывает), непрерывна на I и $f'(x_0)=0$, то обратная функция g имеет в точке $y_0=f(x_0)$ производную, равную $+\infty$ (соответственно $-\infty$); если же $f'(x_0)=+\infty$ (соответственно $-\infty$), то g имеет производную, равную 0. Аналогичные результаты имеют место для правых и левых производных, но эти результаты мы предлагаем сформулировать читателю.

Пусть C есть *график* или *кривая, изображающая* на плоскости $\mathbf{R}^2$ конечную числовую функцию f. Если функция f имеет в некоторой точке $x_0 \in I$ конечную правую производную, то полупрямая, берущая свое начало в точке $M_{x_0} = (x_0, f(x_0))$ кривой C и имеющая в качестве направляющих параметров $(1, f'_d(x_0))$, называется *правой полукасательной* к кривой C в точке M_{x_0}; если $f'_d(x_0) = +\infty$ (соответственно $f'_d(x_0) = -\infty$), то точно так же называется полупрямая с началом в точке M_{x_0} и параметрами $(0, 1)$ (соответственно $(0, -1)$). Аналогично определяется *левая полукасательная* в точке M_{x_0}, если $f'_g(x_0)$ существует. При этих определениях мы сразу же убеждаемся в том, что угол, образованный правой полукасательной (соответственно левой) с осью абсцисс, есть *предел*, к которому стремится угол, образованный с этой осью полупрямой с началом M_{x_0}, проходящей через точку $M_x = (x, f(x))$ кривой C, когда x стремится к x_0, оставаясь $> x_0$ (соответственно $< x_0$).

Можно также сказать, что правая (соответственно левая) полукасательная есть *предел* полупрямой с началом в M_{x_0}, проходящей через M_x, если перенести на множество полупрямых с общим началом топологию фактор-пространства $\mathbf{C}^*/\mathbf{R}^*_+$ (Общая топология, гл. VIII, § 2).

Если в точке M_{x_0} кривой C существуют обе полукасательные, то они будут противоположными только тогда, когда f имеет *производную* (конечную или бесконечную) в точке x_0 (предполагается, что точка лежит внутри I); совпадать же они могут лишь в том случае, когда $f'_d(x_0)$ и $f'_g(x_0)$ бесконечны и имеют противоположные знаки. В обоих случаях говорят, что прямая, содержащая эти две полукасательные, есть *касательная* к кривой C в точке M_{x_0}.

Если в точке M_{x_0} существует касательная, то она является *пределом* прямой, проходящей через M_{x_0} и M_x, когда x стремится к x_0, оставаясь $\neq x_0$, при условии, что множество прямых, проходящих через одну точку, наделено топологией фактор-пространства $\mathbf{C}^*/\mathbf{R}^*$ (Общая топология, гл. VIII, § 2).

Понятия касательной и полукасательной к кривой являются частными случаями общих понятий, которые будут определены в части трактата, относящейся к дифференцируемым многообразиям.

Определение 4. *Говорят, что конечная числовая функция f, определенная на подмножестве A топологического пространства E, имеет относительный максимум* (соответственно *строгий относительный максимум, относительный минимум, строгий относительный минимум*) *в точке $x_0 \in A$ по отношению к A, если в A существует такая окрестность V точки x_0, что для любой точки $x \in V \cap A$, отличной от x_0, $f(x) \leqslant f(x_0)$* (соответственно $f(x) < f(x_0)$, $f(x) \geqslant f(x_0)$, $f(x) > f(x_0)$).

Ясно, что если f достигает своей верхней (соответственно нижней) грани на A в некоторой точке из A, то она имеет в этой точке относительный максимум (соответственно относительный минимум) по отношению к A; обратное же, разумеется, неверно.

Заметим, что если $B \subset A$ и если f имеет, например, в некоторой точке $x_0 \in B$ относительный максимум *по отношению к B*, то это вовсе не значит, что f должна иметь в этой точке относительный максимум *по отношению к A*.

Предложение 7. *Пусть f — конечная числовая функция, определенная на интервале $I \subset R$. Если f имеет относительный максимум* (соответственно *относительный минимум*) *в некоторой точке x_0 внутри I и имеет в этой точке как правую, так и левую производную, то $f'_d(x_0) \leqslant 0$ и $f'_g(x_0) \geqslant 0$* (соответственно $f'_d(x_0) \geqslant 0$ *и* $f'_g(x_0) \leqslant 0$); *в частности, если f дифференцируема в точке x_0, то $f'(x_0) = 0$.*

Это предложение тривиальным образом вытекает из определений.

Можно также сказать, что если в некоторой точке x_0 внутри I функция f дифференцируема и имеет относительный максимум или минимум, то касательная к ее графику *параллельна оси абсцисс*. Обратное неверно, как показывает пример функции x^3, которая в точке $x = 0$ имеет производную, равную нулю, но не имеет в этой точке ни относительного максимума, ни относительного минимума.

Упражнения. 1) Пусть вектор-функция $\mathbf{f}$ одного действительного переменного, определенная на интервале $I \subset R$, дифференцируема в некоторой точке x_0 внутри I. Показать, что отношение $\frac{\mathbf{f}(x_0+h)-\mathbf{f}(x_0-k)}{h+k}$ стремится к $\mathbf{f}'(x_0)$, когда h и k стремятся к 0, *принимая строго положительные значения* *), и обратно.

* Показать, что функция f, равная $x^2 \sin \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ и 0 для $x=0$, дифференцируема в любой точке и отношение $\frac{f(y)-f(z)}{y-z}$ не стремится к $f'(0)$, когда y и z стремятся к 0, оставаясь строго положительными. *

°2) На интервале $I=[0, 1]$ определим следующим образом по индукции последовательность непрерывных числовых функций (f_n): $f_0(x)=x$; для любого n функция f_n линейна в каждом из 3^n интервалов $\left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right]$ $(0 \leqslant k \leqslant 3^n-1)$; кроме того,

$$f_{n+1}\left(\frac{k}{3^n}\right)=f_n\left(\frac{k}{3^n}\right),$$

$$f_{n+1}\left(\frac{k}{3^n}+\frac{1}{3^{n+1}}\right)=f_n\left(\frac{k}{3^n}+\frac{2}{3^{n+1}}\right),$$

$$f_{n+1}\left(\frac{k}{3^n}+\frac{2}{3^{n+1}}\right)=f_n\left(\frac{k}{3^n}+\frac{1}{3^{n+1}}\right).$$

Показать, что последовательность (f_n) равномерно сходится на I к непрерывной функции f, не имеющей производной (ни конечной, ни бесконечной) ни в одной точке интервала $]0, 1[$ (использовать упр. 1).

°3) Пусть $\mathscr{C}(I)$ — полное пространство конечных числовых непрерывных функций, определенных на компактном интервале $I=[a, b]$ из $\mathbf{R}$ ($\mathscr{C}(I)$ наделено топологией равномерной сходимости (Общая топология, гл. X, § 2)). Пусть A — подмножество пространства $\mathscr{C}(I)$, образованное функциями x, имеющими хотя бы в *одной* точке $t \in [a, b]$ (зависящей от x) конечную правую производную. Показать, что A является *тощим* множеством в $\mathscr{C}(I)$ (Общая топология, гл. IX, § 5, п° 2) и, следовательно, его дополнение, то есть множество функций, непрерывных на I и не имеющих конечной правой производной *ни в одной точке* интервала I, есть подпространство Бэра пространства $\mathscr{C}(I)$ (Общая топология, гл. IX, § 5, п° 3, предложение 5). (Пусть A_n — множество таких функций $x \in \mathscr{C}(I)$, что

---

*) В трактате «Элементы математики» Н. Бурбаки нуль считается принадлежащим множеству $\mathbf{N}$ целых положительных чисел (Теория множеств, Результаты, § 6, п° 2, сноска). Поэтому в настоящей книге различаются положительные ($\geqslant 0$) и строго положительные (>0) числа, а также, в соответствии с терминологией авторов, возрастающие (неубывающие) и строго возрастающие функции. (*Прим. ред.*)

хотя бы для одного значения t, удовлетворяющего условиям $a \leqslant t \leqslant b - \frac{1}{n}$ (и зависящего от x), $|x(t') - x(t)| \leqslant n|t' - t|$ для любого t' в пределах $t \leqslant t' \leqslant t + \frac{1}{n}$; показать, что каждое из A_n есть замкнутое *редкое* множество в $\mathscr{C}(I)$; в качестве указания отметим, что в $\mathscr{C}(I)$ всякий шар содержит функцию, имеющую на I ограниченную правую производную, а с другой стороны, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого целого $m > 0$ существует непрерывная функция y, имеющая в каждой точке из $[a, b[$ конечную правую производную и такая, что для любого $t \in I$, $|y(t)| \leqslant \varepsilon$ и $|y'_d(t)| \geqslant m$.)

°4) Пусть E — топологическое векторное пространство над телом $\mathbf{R}$, а $\mathbf{f}$ — непрерывная вектор-функция, определенная на открытом интервале $I \subset R$, принимающая значения в E и имеющая во всех точках интервала I как правую, так и левую производные.

а) Пусть U — непустое открытое множество из E и A — подмножество интервала I, состоящее из точек x, для которых $\mathbf{f}'_d(x) \in U$. Пусть, далее, для некоторого фиксированного числа $\alpha > 0$ множество B является подмножеством интервала I, состоящим из таких точек x, для которых существует хотя бы одна точка y, удовлетворяющая условиям $x - \alpha \leqslant y < x$ и $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \in U$; показать, что множество B открыто и что $A \cap \mathrm{C}B$ счетно (заметить, что последнее множество состоит из концов интервалов, смежных к $\mathrm{C}B$). Вывести отсюда, что множество точек $x \in A$, для которых $f'_g(x) \notin \overline{U}$, счетно.

б) Предположим, что E — *нормированное* пространство; тогда образ $\mathbf{f}(I)$ есть метрическое пространство со счетным базисом и тем же свойством обладает порожденное $\mathbf{f}(I)$ замкнутое векторное подпространство F пространства E, содержащее $\mathbf{f}'_d(I)$ и $f'_g(I)$. При этих условиях вывести из а), что множество точек $x \in I$, для которых $\mathbf{f}'_d(x) \neq \mathbf{f}'_g(x)$, *счетно* (обозначив через (U_m) счетный базис топологии подпространства F, заметить, что для различных двух точек $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ из F существуют такие два множества U_p, U_q без общих точек, что $\mathbf{a} \in U_p$, а $b \in U_q$).

в) Возьмем в качестве E пространство-произведение $\mathbf{R}^I$ (пространство отображений I в $\mathbf{R}$, наделенное топологией простой сходимости), и для любого $x \in I$ обозначим через $\mathbf{g}(x)$ отображение $t \to |x - t|$ интервала I в $\mathbf{R}$. Показать, что для любого $x \in I$, $\mathbf{g}'_d(x) \neq \mathbf{g}'_g(x)$.

5) Пусть $\mathbf{f}$ — непрерывная вектор-функция, определенная на открытом интервале $I \subset \mathbf{R}$, принимающая значения в нормированном пространстве E над телом $\mathbf{R}$ и имеющая в каждой точке интервала I правую производную.

а) Показать, что множество точек $x \in I$, для которых $\mathbf{f}'_d$ ограничена в некоторой окрестности этих точек, есть открытое множество, всюду плотное в I (воспользоваться теоремой 2 из Общей топологии, гл. IX, § 5).

б) Показать, что множество точек из I, для которых $\mathbf{f}'_d$ непрерывна, является дополнением *тощего* в I множества (ср. Общая топология, гл. IX, § 5, упражнение 14).

°6) Пусть (r_n)—последовательность рациональных чисел из $[0, 1]$, расположенных в определенном порядке. Показать, что функция $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(x-r_n)^{\frac{1}{3}}$ непрерывна и дифференцируема в каждой точке из $\mathbf{R}$ и имеет бесконечную производную во всех точках r_n.

Для доказательства того, что f дифференцируема в некоторой точке x, отличной от r_n, нужно рассмотреть отдельно случай, когда ряд с общим членом $\frac{1}{2^n}(x-r_n)^{-\frac{2}{3}}$ имеет суммой $+\infty$ и когда этот ряд сходится; во втором случае учесть, что для любого $x \neq 0$ и любого $y \neq x$

$$0 \leqslant \frac{(y^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}})}{(y-x)} \leqslant \frac{4}{3x^{\frac{2}{3}}}.$$

7) Пусть числовая функция f, определенная на интервале I, имеет в некоторой точке из I правую производную $f'_d(x_0)=0$, и пусть вектор-функция $\mathbf{g}$, определенная в окрестности точки $y_0=f(x_0)$, обладает в этой точке как правой, так и левой производной (не обязательно совпадающими). Показать, что $\mathbf{g}\circ f$ имеет в точке x_0 правую производную, равную 0.

8) Пусть $\mathscr{B}(\mathbf{N})$—пространство ограниченных последовательностей $\mathbf{x}=(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ действительных чисел с нормой $\|\mathbf{x}\|=\sup_n |x_n|$; указать пример такого непрерывного отображения $t\to\mathbf{f}(t)=(f_n(t))_{n\in\mathbf{N}}$ пространства $\mathbf{R}$ в пространство $\mathscr{B}(\mathbf{N})$, при котором каждая из числовых функций f_n дифференцируема в $t=0$, но $\mathbf{f}$ не дифференцируема в этой точке.

§ 2. Теорема о конечных приращениях

В предложениях, доказанных в § 1, все условия и заключения носили локальный характер: они относились к свойствам функций, рассматриваемых в произвольно малой окрестности некоторой фиксированной точки. Вопросы же, которыми мы будем заниматься в этом параграфе, напротив, будут связаны со свойствами функции на всем интервале.

1. *Теорема Ролля*

Предложение 1 («теорема Ролля»). *Пусть f — конечная числовая функция, непрерывная на замкнутом интервале $I = [a, b]$, имеющая в каждой точке интервала $]a, b[$ производную* (конечную или бесконечную) *и такая, что $f(a) = f(b)$. Тогда в $]a, b[$ найдется* (*по крайней мере одна*) *точка c, в которой $f'(c) = 0$.*

Если f постоянна, то предложение очевидно; если же f принимает, например, значения $> f(a)$, то эта функция достигает своей верхней грани в некоторой точке c *внутри* I (Общая топология, гл. IV, § 6, теорема 1). А так как в этой точке f имеет относительный максимум, то $f'(c) = 0$ (§ 1, предложение 7).

Следствие. *Пусть конечная числовая функция f непрерывна на $[a, b]$ и имеет производную* (конечную или бесконечную) *в каждой точке интервала $]a, b[$. Тогда в $]a, b[$ существует* (*по крайней мере одна*) *такая точка c, что $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.*

Для доказательства достаточно применить предложение 1 к функции $f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$.

Это следствие означает, что на графике C функции f существует такая точка $M_c = (c, f(c))$, что $a < c < b$ и касательная к C в этой точке *параллельна* прямой, соединяющей точки $M_a = (a, f(a))$ и $M_b = (b, f(b))$.

2. *Теорема о конечных приращениях для числовых функций*

Из следствия предложения 1 вытекает, в частности, следующее важное свойство: если на $]a, b[$ имеют место неравенства $m < f'(x) \leqslant M$, то имеют место и неравенства $m \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant M$. Иными словами, из *оценок для производной* f' на всем интервале с концами a, b вытекают *те же оценки* для отношения

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (отношение «приращения» функции к «приращению» переменной на интервале). Теперь мы уточним и обобщим этот фундаментальный результат.

Предложение 2. *Пусть конечная числовая функция f непрерывна на ограниченном замкнутом интервале $I=[a, b]$ и имеет правую производную* (конечную или бесконечную) *во всех точках интервала $[a, b[$, за исключением некоторой его* счетной *части A. Если $f'_d(x)\geqslant 0$ во всех точках x из $[a, b[$, не принадлежащих A, то $f(b)\geqslant f(a)$; если при этом $f'_d(x)>0$ хотя бы в одной точке из $[a, b[$, то $f(b)>f(a)$.*

Зафиксируем число $\varepsilon>0$ и обозначим через (a_n) последовательность, полученную в результате некоторого упорядочения точек счетного множества A. Пусть J — множество таких точек $y\in I$, что для всякого x, удовлетворяющего условиям $a\leqslant x\leqslant y$, выполняется неравенство

$$f(x)-f(a)\geqslant -\varepsilon(x-a)-\varepsilon\sum_{a_n<x}\frac{1}{2^n}, \tag{1}$$

где сумма в правой части распространяется на множество тех индексов n, для которых $a_n<x$. Докажем, что если $f'_d(x)\geqslant 0$ во всех точках из $[a, b[$, отличных от a_n, то $J=I$.

Ясно, что J не пусто, поскольку $a\in J$; с другой стороны, из определения этого множества следует, что если $y\in J$, то $x\in J$ для $a\leqslant x\leqslant y$ и, значит, J есть *интервал* с началом в a (Общая топология, гл. IV, § 2, предл. 1); обозначим через c его конец. Покажем, что $c\in J$; для $c=a$ это очевидно; в остальных случаях для всех $x<c$ справедливо неравенство (1) и *тем более* неравенство

$$f(x)-f(a)\geqslant -\varepsilon(c-a)-\varepsilon\sum_{a_n<c}\frac{1}{2^n},$$

из которого, устремив x к c, получаем (в силу непрерывности функции f), что c удовлетворяет неравенству (1).

Теперь мы докажем, что $c=b$. Допустим, что $c<b$ и пусть $c\notin A$; тогда существует $f'_d(c)$, а так как по условию $f'_d(c)\geqslant 0$, то найдется такое y, что $c<y\leqslant b$ и что для $c\leqslant x\leqslant y$ выпол-

няется неравенство

$$f(x)-f(c)\geqslant-\varepsilon(x-c).$$

Сложив его с соотношением (1), в котором x заменено на c, получим неравенство

$$f(x)-f(a)\geqslant-\varepsilon(x-a)-\varepsilon\sum_{a_n<c}\frac{1}{2^n}\geqslant-\varepsilon(x-a)-\varepsilon\sum_{a_n<x}\frac{1}{2^n},$$

означающее, что $y\in I$, что противоречит нашему предположению относительно c. Пусть теперь $c=a_k$ при некотором k; так как f в точке a_k непрерывна, то существует такое y, что $c<y\leqslant b$ и что для $c<x\leqslant y$ имеет место неравенство

$$f(x)-f(c)\geqslant-\frac{\varepsilon}{2^k},$$

сложив которое с (1) с заменой в нем x на c, получаем

$$f(x)-f(a)\geqslant-\varepsilon(c-a)-\varepsilon\sum_{a_n<x}\frac{1}{2^n}\geqslant\varepsilon(x-a)-\varepsilon\sum_{a_n<x}\frac{1}{2^n},$$

что снова приводит к противоречию; значит, $c=b$, и следовательно,

$$f(b)-f(a)\geqslant-\varepsilon(b-a)-\varepsilon\sum_{a_n<b}\frac{1}{2^n}\geqslant-\varepsilon(b-a)-\varepsilon. \qquad (2)$$

А поскольку $\varepsilon>0$ выбирается произвольно, то из (2) следует, что $f(b)\geqslant f(a)$, что и доказывает первую часть предложения.

Заметим теперь, что этот результат, примененный к интервалу $[y, x]$, где $a\leqslant x\leqslant y\leqslant b$, показывает, что f *возрастает* на интервале I; а в том случае, когда $f(b)=f(a)$, f постоянна на I и, следовательно, $f'_d(x)=0$ в каждой точке из $[a, b[$, откуда следует вторая часть доказываемого предложения.

Следствие. *Пусть конечная числовая функция f, непрерывная на $[a, b]$, имеет правую производную во всех точках интервала $[a, b[$, за исключением некоторой его счетной части A. Для того чтобы f была возрастающей на I, необходимо и достаточно, чтобы неравенство $f'_d(x)\geqslant 0$ выполнялось в каждой точке интервала $[a, b[$, не принадлежащей A; для того чтобы f была строго возрастающей, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось предыдущее условие и чтобы, кроме того, множество тех точек x, в которых $f'_d(x)>0$, было всюду плотным на $[a, b]$.*

Замечания. 1) Предложение 2 остается справедливым, если в его формулировке интервал $[a, b[$ заменить интервалом $]a, b]$, а слова «правая производная» словами «левая производная»,

2) Предположение о *непрерывности* функции f на замкнутом интервале I (а не только ее *непрерывности справа* *)) в каждой точке интервала $[a, b[$) является существенным для предложения 2 (ср. упражнение 2).

3) Утверждение предложения 2 становится неверным, если предположить только, что множество A «исключительных» точек будет *редким* в I, а не счетным (ср. упражнение 4).

Из предложения 2 вытекает следующая (кажущаяся более общей) основная теорема:

Теорема 1 (теорема о конечных приращениях). *Пусть f и g — две конечные числовые функции, непрерывные на ограниченном замкнутом интервале $I=[a, b]$ и имеющие правую производную* (конечную или бесконечную) *во всех точках интервала $[a, b[$ за исключением некоторой его счетной части. Предположим, кроме того, что $f'_d(x)$ и $g'_d(x)$ могут одновременно обращаться в бесконечность не более чем на счетном множестве точек из I и что существуют такие конечные числа m и M, что неравенства*

$$mg'_d(x) \leqslant f'_d(x) \leqslant Mg'_d(x) \tag{3}$$

выполняются во всех точках интервала I, за исключением некоторой его счетной части ($Mg'_d(x)$ при $M=0$ и $g'_d(x)=\pm\infty$ (соответственно $mg'_d(x)$ при $m=0$) мы полагаем равным нулю), При этих условиях

$$m(g(b)-g(a)) < f(b)-f(a) < M(g(b)-g(a)), \tag{4}$$

за исключением того случая, когда $f(x)=Mg(x)+k$ или $f(x)=mg(x)+k$ (k — постоянная) для всех $x \in I$.

Достаточно применить предложение 2 к функциям $Mg-f$ и $f-mg$, которые, на основании сделанных предположений, имеют положительную правую производную во всех точках интервала I, за исключением некоторой его счетной части.

---

*) Функция, определенная на интервале $I \subset R$, называется *непрерывной справа* в точке $x_0 \in I$, если ее сужение на интервал $I \cap [x_0, +\infty[$ непрерывно в точке x_0 относительно этого интервала; то же самое можно выразить, сказав, что предел функции справа в точке x_0 существует и равен значению функции в этой точке.

Замечание. Теорема 1 будет неверна, если предположить, что f'_d и g'_d могут одновременно обращаться в бесконечность на несчетном подмножестве интервала I (ср. упражнение 4).

Следствие. *Пусть f — конечная числовая функция, непрерывная на* $[a, b]$ *и имеющая правую производную* (конечную или бесконечную) *в каждой точке множества B всех точек интервала* $[a, b[$ *без некоторой его счетной части. Если m и M — нижняя и верхняя грани производной f'_d на множестве B, то*

$$m(b-a) < f(b) - f(a) < M(b-a), \tag{5}$$

если f не является линейной функцией; если же f линейна, то

$$m = M = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Неравенства (5) при конечных m и M вытекают из (4); случай же, когда то или другое из этих чисел бесконечно, является тривиальным.

Замечание. Неравенства (5) показывают, что непрерывная функция не может иметь правой производной, равной $+\infty$ в каждой точке интервала (ср. § 1, упражнение 6).

3. Теорема о конечных приращениях для вектор-функций

Теорема 2. *Пусть вектор-функция $\mathbf{f}$, определенная и непрерывная на ограниченном замкнутом интервале $I = [a, b]$ из $\mathbf{R}$, принимает свои значения в некотором нормированном пространстве E над телом $\mathbf{R}$, и пусть числовая функция g непрерывна и возрастает на I. Предположим, что $\mathbf{f}$ и g имеют правую производную во всех точках интервала $[a, b[$, за исключением некоторой счетной части A этого интервала* ($g'_d(x)$ в некоторых из этих точек может обращаться в бесконечность), *и что в каждой из этих точек*

$$\|\mathbf{f}'_d(x)\| \leqslant g'_d(x). \tag{6}$$

При этих условиях имеет место неравенство

$$\|\mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a)\| \leqslant g(b) - g(a). \tag{7}$$

Доказательство проводится совершенно аналогично доказательству предложения 2. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число и (a_n) — последовательность, полученная в результате некоторого упорядочения точек множества A. Пусть J — множество таких точек $y \in I$, что для всех x, удовлетворяющих условиям $a \leqslant x \leqslant y$, выполняется неравенство

$$\| \mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(a) \| \leqslant g(x) - g(a) + \varepsilon (x - a) + \varepsilon \sum_{a_n < x} \frac{1}{2^n}; \qquad (8)$$

покажем, что $J = I$. Прежде всего, как и в предложении 2, очевидно, что J есть интервал с левым концом a; если обозначить через c его правый конец, то $c \in J$; в самом деле, для любого $x < c$ имеет место (8) и тем более

$$\| \mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(a) \| \leqslant g(c) - g(a) + \varepsilon (c - a) + \varepsilon \sum_{a_n < c} \frac{1}{2^n},$$

откуда, устремив в этом неравенстве x к c, получаем, в силу непрерывности функции f, что c удовлетворяет соотношению (8).

Покажем, что $c = b$. Допустим, что это не так, то есть что $c < b$ и что $c \notin A$; тогда $\mathbf{f}'_d(c)$ и $g'_d(c)$ существуют и удовлетворяют неравенству (6); сначала мы предположим, что $g'_d(c)$ (которая непременно $\geqslant 0$) конечна; в этом случае мы всегда можем написать $\mathbf{f}'_d(c) = \mathbf{u} g'_d(c)$, где $\| \mathbf{u} \| \leqslant 1$; а поскольку функция $\mathbf{f}(x) - \mathbf{u} g(x)$ имеет в точке c правую производную, равную нулю, то существует такое y, что $c < y \leqslant b$ и что для $c \leqslant x \leqslant y$ имеет место неравенство

$$\| \mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(c) - \mathbf{u} (g(x) - g(c)) \| \leqslant \varepsilon (x - c),$$

откуда

$$\| \mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(c) \| \leqslant g(x) - g(c) + \varepsilon (x - c)$$

и, применяя соотношение (8) с заменой в нем x на c, получаем

$$\| \mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(a) \| \leqslant g(x) - g(a) + \varepsilon (x - a) + \varepsilon \sum_{a_n < c} \frac{1}{2^n} \leqslant$$
$$\leqslant g(x) - g(a) + \varepsilon (x - a) + \varepsilon \sum_{a_n < x} \frac{1}{2^n}.$$

Таким образом, $y \in J$, чего быть не может. Предположим теперь, что $c \notin A$ и $g'_d(c) = +\infty$; тогда найдется такое y, что $c < y \leqslant b$ и что для $c \leqslant x \leqslant y$, с одной стороны,

$$\| \mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(c) \| \leqslant (\| \mathbf{f}'_d(c) \| + 1)(x - c),$$

а с другой стороны,

$$g(x) - g(c) \geqslant (\| \mathbf{f}'_d(c) \| + 1)(x - c),$$

откуда

$$\|\mathbf{f}(x)-\mathbf{f}(c)\| \leqslant g(x)-g(c),$$

и мы приходим к предыдущему заключению. Наконец, если $c=a_k$ при некотором k, то, в силу непрерывности $\mathbf{f}$ в точке a_k, существует такое y, что $c<y\leqslant b$ и что для $c<x\leqslant y$ имеет место неравенство

$$\|\mathbf{f}(x)-\mathbf{f}(c)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^k},$$

откуда, используя (8) с заменой в нем x на c, получаем

$$\|\mathbf{f}(x)-\mathbf{f}(a)\| \leqslant g(c)-g(a)+\varepsilon(c-a)+\varepsilon \sum_{a_n<x} \frac{1}{2^n} \leqslant$$

$$\leqslant g(x)-g(a)+\varepsilon(x-a)+\varepsilon \sum_{a_n<x} \frac{1}{2^n},$$

что снова приводит к противоречию. На этом доказательство заканчивается.

Замечания. 1) Здесь снова можно заменить в формулировке теоремы 2 интервал $[a, b[$ на $]a, b]$, а «правую производную» на «левую производную».

2) Ниже будет показано, как можно уточнить случай равенства в соотношении (7), а также как можно обобщить теорему 2 на случай, когда E — произвольное локально выпуклое пространство, при помощи метода, отличного от предыдущего и позволяющего вывести теорему 2 из теоремы 1.

Следствие. *Для того чтобы вектор-функция, непрерывная на интервале $I \subset \mathbf{R}$ и принимающая значения в нормированном пространстве E над телом $\mathbf{R}$, была постоянной на I, достаточно, чтобы ее правая производная была равна нулю во всех точках интервала I, за исключением некоторой его счетной части.*

Замечание. Доказательства теорем 1 и 2 существенным образом опирались на специальные топологические свойства тела $\mathbf{R}$; в самом деле, можно указать примеры упорядоченных тел K, для которых существуют отличные от постоянного отображения тела K в себя, имеющие в каждой точке производную, равную нулю (ср. упражнение 3).

Предложение 3. *Пусть вектор-функция $\mathbf{f}$, принимающая значения в некотором нормированном пространстве E над телом $\mathbf{R}$, определена и непрерывна на интервале $I \subset \mathbf{R}$ и* *дифференцируема справа на дополнении* B (относительно I) *некоторой счетной части интервала* I; *тогда для любых точек* $x_0 \in B$, $x \in I$, $y \in I$ *имеем* (допустив, например, что $x < y$)

$$\|\mathbf{f}(y)-\mathbf{f}(x)-\mathbf{f}'_d(x_0)(y-x)\| \leqslant \\ \leqslant (y-x) \sup_{z \in B,\, x<z<y} \|\mathbf{f}'_d(z)-\mathbf{f}'_d(x_0)\|. \quad (9)$$

В самом деле, достаточно применить теорему 2, заменив $\mathbf{f}$ функцией $\mathbf{f}(z)-\mathbf{f}'_d(x_0)z$, а g — линейной функцией, производная которой равна $\sup\limits_{z \in B,\, x<z<y} \|\mathbf{f}'_d(z)-\mathbf{f}'_d(x_0)\|$.

Теорема 2 распространяется на вектор-функции одного *комплексного* переменного.

Предложение 4. *Пусть* $\mathbf{f}$ — *вектор-функция комплексного переменного, определенная, непрерывная и дифференцируемая на некотором открытом выпуклом подмножестве* A *тела* $\mathbf{C}$ *и принимающая значения в нормированном пространстве* E *над телом* $\mathbf{C}$. *Если* $\|\mathbf{f}'(z)\| \leqslant m$ *для любого* $z \in A$, то $\|\mathbf{f}(b)-\mathbf{f}(a)\| \leqslant m|b-a|$ *для любой пары точек* a, b *из* A.

В самом деле, положим $\mathbf{g}(t)=\frac{1}{b-a}\mathbf{f}(a+t(b-a))$ для $0 \leqslant t \leqslant 1$; так как $\mathbf{g}'(t)=\mathbf{f}'(a+t(b-a))$, то применение теоремы 2 к функции $\mathbf{g}$ сразу доказывает предложение.

Следствие. *Для того чтобы вектор-функция* $\mathbf{f}$ *комплексного переменного, определенная и непрерывная на некоторой области* $A \subset \mathbf{C}$ *со значениями в нормированном пространстве над* $\mathbf{C}$, *была постоянна, достаточно, чтобы она в любой точке из* A *имела производную, равную нулю.*

В самом деле, пусть a — произвольная точка области A; множество B точек z из A, в которых $\mathbf{f}(z)=\mathbf{f}(a)$, с одной стороны, *замкнуто*, поскольку $\mathbf{f}$ непрерывна, а с другой стороны, *открыто* в силу предложения 4 (с $m=0$), примененного к какой-либо содержащейся в A окрестности произвольной точки множества B; следовательно, оно совпадает с A.

Предложение 5. *Пусть вектор-функция* $\mathbf{f}$ *комплексного переменного определена, непрерывна и дифференцируема на некотором открытом выпуклом множестве* $A \subset \mathbf{C}$ *и принимает значе-*

ния в нормированном пространстве над телом **C**; *тогда для любых точек* x_0 *и* x *из* A *имеем*

$$\|\mathbf{f}(y)-\mathbf{f}(x)-\mathbf{f}'(x_0)(y-x)\| \leqslant |y-x| \sup_{z\in A} \|\mathbf{f}'(z)-\mathbf{f}'(x_0)\|. \qquad (10)$$

Для доказательства достаточно применить теорему 2 к функции

$$\mathbf{g}(t)=\mathbf{f}(x-t(y-x))-\mathbf{f}'(x_0)(y-x)t$$

на интервале $[0, 1]$.

4. *Непрерывность производных*

Предложение 6. *Пусть* I — *открытый интервал из* **R**, x_0 — *один из его концов*, $\mathbf{f}$ — *вектор-функция, определенная и непрерывная на* I *и принимающая свои значения в полном нормированном пространстве* E *над телом* **R**; *предположим, что* f *имеет правую производную в точках дополнения* B, *относительно* I, *некоторой счетной части этого интервала. Для того чтобы* $\mathbf{f}'_d(x)$ *имела предел, когда* x *стремится к* x_0, *оставаясь в* B *и* $x \neq x_0$, *необходимо и достаточно, чтобы выражение* $\frac{\mathbf{f}(y)-\mathbf{f}(x)}{y-x}$ *имело предел* $\mathbf{c}$, *когда* (x, y) *стремится к* (x_0, x_0) *таким образом, что* $x\in I$, $y\in I$, $x\neq x_0$, $y \neq x_0$ *и* $x \neq y$. *При этих условиях* $\mathbf{f}$ *продолжается по непрерывности в точку* x_0, $\mathbf{f}'_d(x)$ *стремится к* $\mathbf{c}$, *когда* x *стремится к* x_0 (оставаясь в B), *и продолженная функция* $\mathbf{f}$ (определенная на $I \bigcup \{x_0\}$) *имеет в точке* x_0 *производную, равную* $\mathbf{c}$.

Допустим, например, что x_0 — правый конец интервала I. Покажем сначала, что если $\mathbf{f}'_d(x)$ стремится к $\mathbf{c}$, когда x стремится к x_0, оставаясь в B и $x\neq x_0$, то $\frac{\mathbf{f}(y)-\mathbf{f}(x)}{y-x}$ стремится к $\mathbf{c}$; это сразу следует из теоремы 2, применение которой к функции $\mathbf{f}(z)-\mathbf{c}z$ дает нам неравенство

$$\|\mathbf{f}(y)-\mathbf{f}(x)-\mathbf{c}(y-x)\| \leqslant (y-x) \sup_{z\in B,\ x<z<y} \|\mathbf{f}'_d(z)-\mathbf{c}\|$$

для $x<y<x_0$. Обратно, если $\frac{\mathbf{f}(y)-\mathbf{f}(x)}{y-x}$ стремится к $\mathbf{c}$, то для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $h>0$, что для $|x-x_0|<h$, $|y-x_0|<h$ $(x\neq x_0,\ y\neq x_0)$ выполняется неравенство

$$\|\mathbf{f}(y)-\mathbf{f}(x)-\mathbf{c}(y-x)\| \leqslant \varepsilon\,|y-x|. \qquad (11)$$

Но для любого $x \in B$, $x \neq x_0$ и удовлетворяющего условию $|x - x_0| < h$, найдется такое число $k > 0$ (зависящее от x), что соотношения $x < y < x + k$ влекут

$$\| \mathbf{f}(y) - \mathbf{f}(x) - \mathbf{f}'_d(x)(y - x) \| \leqslant \varepsilon |y - x|, \tag{12}$$

откуда, принимая во внимание (11), для $|x - x_0| < h$, $x \in B$ и $x \neq x_0$ получаем неравенство

$$\| \mathbf{f}'_d(x) - \mathbf{c} \| \leqslant 2\varepsilon,$$

которое показывает, что $\mathbf{f}'_d(x)$ стремится к $\mathbf{c}$. Кроме того, из соотношения (11) сразу получаем, что

$$\| \mathbf{f}(y) - \mathbf{f}(x) \| \leqslant (\| \mathbf{c} \| + \varepsilon) |y - x|$$

и, значит, (в силу критерия Коши) $\mathbf{f}$ имеет в точке x_0 предел $\mathbf{d}$, когда x стремится к этой точке, оставаясь в I и $x \neq x_0$; устремив теперь в соотношении (11) x к x_0, получаем для $y \in I$, $y \neq x_0$ и $|y - x_0| \leqslant h$ неравенство

$$\left\| \frac{\mathbf{f}(y) - \mathbf{d}}{y - x_0} - \mathbf{c} \right\| \leqslant \varepsilon,$$

которое показывает, что $\mathbf{c}$ является производной в точке x_0 функции $\mathbf{f}$, продолженной по непрерывности на $I \cup \{x_0\}$.

Замечание. Аналогичное рассуждение, основанное на теореме 1, показывает, что если f — числовая функция, для которой $f'_d(x)$ стремится к $+\infty$ в точке x_0, то отношение $\frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ тоже стремится к $+\infty$, и обратно; если же, помимо того, f имеет в точке x_0 конечный предел (что в данном случае не вытекает из сделанного предположения), то функция f, продолженная по непрерывности в точку x_0, имеет в этой точке производную, равную $+\infty$.

Упражнения. 1) Пусть для любого числа x из интервала $[0, 1[$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^{-n}$ является его собственным двоичным разложением (Общая топология, гл. IV, § 8, n° 5); положим $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^{-2n}$. Показать, что f непрерывна *справа* в каждой точке интервала $[0, 1[$, не постоянна ни на каком интервале и во всех точках из $[0, 1[$ имеет правую производную, равную *нулю*.

2) В теле $\mathbf{Q}_p$ p-адических чисел (Общая топология, гл. III, § 5, упражнения 25—35) всякое целое p-адическое число $x \in \mathbf{Z}_p$ допускает разложение, и притом единственное, вида $x = a_0 + a_1 p + \ldots$ $\ldots + a_n p^n + \ldots$, где a_n — целые рациональные числа, $0 \leqslant a_i \leqslant p - 1$

при любом i. Для любого $x \in \mathbf{Z}_p$ положим

$$f(x) = a_0 + a_1 p^2 + \ldots + a_n p^{2^n} + \ldots;$$

показать, что в $\mathbf{Z}_p$ функция f непрерывна, не является постоянной в окрестности ни одной из точек и в каждой точке имеет *производную, равную нулю.*

^{c}3) Пусть K — троичное канторово множество (Общая топология, гл. IV, § 2, n° 5), $I_{n,p}$ — 2^n его смежных интервалов длины $\frac{1}{3^{n+1}}$ $(1 \leqslant p \leqslant 2^n)$, $K_{n,p}$ — 2^{n+1} замкнутых интервалов длины $\frac{1}{3^{n+1}}$, объединение которых составляет дополнение объединения $I_{m,p}$ для $m \leqslant n$.

а) Пусть α — число в пределах $1 < \alpha < \frac{3}{2}$; для любого n обозначим через f_n непрерывную возрастающую на $[0, 1]$ функцию, равную 0 в точке $x=0$, постоянную на каждом интервале $I_{m,p}$, для которого $m \leqslant n$, линейную на каждом из интервалов $K_{n,p}$ $(1 \leqslant p \leqslant 2^{n+1})$ и такую, что $f'_d(x) = \alpha^{n+1}$ на каждом из этих последних интервалов. Показать, что ряд с общим членом f_n равномерно сходится на $[0, 1]$, имеет своей суммой функцию f, которая всюду на $[0, 1[$ имеет правую производную, и что $f'_d(x) = +\infty$ во всех точках множества K, кроме левых концов смежных интервалов $I_{n,p}$.

б) Пусть g — непрерывное возрастающее отображение интервала $[0, 1]$ на себя, постоянное на каждом из интервалов $I_{n,p}$ (ср. Общая топология, гл. IV, § 8, упражнения 9 и 16б)). Показать, что если $h = f + g$, то h имеет в любой точке интервала $[0, 1[$ правую производную, равную $f'_d(x)$.

4) Пусть f — числовая функция, конечная и непрерывная на компактном интервале $[a, b]$ и имеющая в каждой точке открытого интервала $]a, b[$ правую производную. Пусть m и M — нижняя и верхняя (конечные или бесконечные) грани функции $f'_d(x)$ на $]a, b[$.

а) Показать, что когда x и y пробегают $[a, b]$ так, что $x \neq y$, то множество значений отношения $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ совпадает с интервалом $]m, M[$, если f не линейна (свести к доказательству того, что если f'_d принимает два различных значения противоположных знаков в двух точках c и d из $]a, b[$, то существуют две различные точки интервала $]c, d[$, в которых f принимает равные значения).

б) Если f имеет, кроме того, в каждой точке из $]a, b[$ и левую производную, то нижние (соответственно верхние) грани функций f'_d и f'_g на $]a, b[$ равны.

в) Вывести отсюда, что если f дифференцируема на $]a, b[$, то при отображении f' образ любого интервала, содержащегося в $]a, b[$, снова есть интервал и, следовательно, *связен* (использовать а)).

5) Пусть $\mathbf{f}$ — векторное отображение интервала $I=[0, 1]$ в $\mathbf{R}^3$ определенное следующим образом: для $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{4}$, $\mathbf{f}(t)=(-4t, 0, 0)$; для $\frac{1}{4} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$, $\mathbf{f}(t)=(-1, 4t-1, 0)$; для $\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{3}{4}$, $\mathbf{f}(t)=(-1, 1, 4t-2)$ и, наконец, для $\frac{3}{4} \leqslant t \leqslant 1$, $\mathbf{f}(t)=(4t-4, 1, 1)$. Показать, что выпуклое множество, порожденное множеством $\mathbf{f}'_d(I)$, не совпадает с замыканием множества значений отношения $\frac{\mathbf{f}(y)-\mathbf{f}(x)}{y-x}$, когда (x, y) пробегает множество различных пар точек из I (ср. упражнение 4а)).

6) На интервале $I=[-1, +1]$ задана вектор-функция $\mathbf{f}$ со значениями в $\mathbf{R}^2$, определенная следующим образом: $f(t)=(0, 0)$ для $-1 \leqslant t \leqslant 0$; $\mathbf{f}(t)=\left(t^2 \sin\frac{1}{t}, t^2 \cos\frac{1}{t}\right)$ для $0 < t \leqslant 1$. Показать, что $\mathbf{f}$ дифференцируема на $]-1, +1[$, но что образ этого интервала при отображении $\mathbf{f}'$ не является связным множеством в $\mathbf{R}^2$ (ср. упражнение 4 в)).

7) Пусть непрерывная вектор-функция $\mathbf{f}$ определена на открытом интервале $I \subset \mathbf{R}$, принимает значения в нормированном пространстве E над $\mathbf{R}$ и имеет в каждой точке интервала I правую производную. Показать, что множество точек из I, в которых $\mathbf{f}$ имеет производную, является дополнением тощего в I множества (использовать упражнение 4 б) § 1 и предложение 6).

°8) Рассмотрим на интервале $[0, 1]$ семейство $(I_{n,p})$ открытых интервалов, не имеющих попарно общих точек и определенных по индукции следующим образом: n — целое и принимает все значения $\geqslant 0$; для каждого значения n целое p принимает значения $1, 2, \ldots, 2^n$; $I_{0,1}=\left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$; если J_n есть объединение интервалов $I_{m,p}$, соответствующих числам $m \leqslant n$, то дополнение к J_n есть объединение 2^{n+1} замкнутых интервалов $K_{n,p}$ $(1 \leqslant p \leqslant 2^{n+1})$, не имеющих попарно общих точек. Если $K_{n,p}$ есть интервал $[a, b]$, то в качестве $I_{n+1,p}$ берется открытый интервал с концами $b-\frac{b-a}{3}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$ и $b-\frac{b-a}{3 \cdot 2^n}$. Пусть E — совершенное множество, являющееся дополнением объединения интервалов $I_{n,p}$ относительно $[0, 1]$. Определить на $[0, 1]$ непрерывную числовую функцию, которая имеет в каждой точке интервала $[0, 1[$ правую производную, но не имеет левой производной в точках несчетного множества, состоящего из точек множества E, отличных от концов смежных к E интервалов (ср. упражнение 7). (Положить $f=0$ на E и определить надлежащим образом f на каждом $I_{n,p}$ так, чтобы для любого $x \in E$ существовали точки $y < x$, не принадлежащие E, сколь угодно близкие к x и такие, что $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = -1$.)

9) Пусть f и g — две конечные числовые функции, непрерывные на $[a, b]$ и имеющие на $]a, b[$ конечную производную; показать, что существует такое c, $a < c < b$, что

$$\begin{vmatrix} f(b)-f(a) & g(b)-g(a) \\ f'(c) & g'(c) \end{vmatrix} = 0.$$

°10) Пусть две конечные числовые функции f и g строго положительны, непрерывны и дифференцируемы на некотором открытом интервале I. Показать, что если f' и g' строго положительны и $\frac{f'}{g'}$ строго возрастает на I, то либо $\frac{f}{g}$ строго возрастает на I, либо существует такое число $c \in I$, что $\frac{f}{g}$ строго убывает для $x \leqslant c$ и строго возрастает для $x \geqslant c$ $\left(\text{учесть, что если } \frac{f'(x)}{g'(x)} < \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ то и для всякого } y < x \text{ имеет место } \frac{f'(y)}{g'(y)} < \frac{f(y)}{g(y)}\right)$.

11) Пусть f — комплекснозначная функция, непрерывная на открытом интервале I, не обращающаяся на нем в нуль и имеющая в каждой точке этого интервала правую производную. Для того чтобы $|f|$ была возрастающей на I, необходимо и достаточно, чтобы $\mathscr{R}\left(\frac{f_d}{f}\right) \geqslant 0$ на I.

°12) Пусть числовая функция f дифференцируема на открытом интервале I, g — ее производная на I, и пусть $[a, b]$ — компактный интервал, заключенный в I; предположим, что g дифференцируема на открытом интервале $]a, b[$, но не обязательно непрерывна справа (соответственно слева) в точке a (соответственно b); показать, что существует такое c, $a < c < b$, что $g(b) - g(a) = (b-a)\, g'(c)$ (использовать упражнение 4в)).

13) Симметрической производной вектор-функции $\mathbf{f}$ во внутренней точке x_0 интервала, на котором определена $\mathbf{f}$, называется предел (если он существует) отношения $\frac{\mathbf{f}(x_0+h)-\mathbf{f}(x_0-h)}{2h}$, когда h стремится к нулю, оставаясь > 0.

а) Обобщить на симметрическую производную правила счисления, установленные в § 1 для производной.

б) Показать, что теоремы 1 и 2 остаются верными, если слова «правая производная» заменить словами «симметрическая производная».

§ 3. Производные высших порядков

1. *Производные n-го порядка*

Пусть вектор-функция $\mathbf{f}$ одного действительного переменного определена, непрерывна и дифференцируема на интервале I. Если производная $\mathbf{f}'$ существует в некоторой окрестности (относительно I) точки $x_0 \in I$ и дифференцируема в точке x_0, то ее производная называется *второй производной* функции $\mathbf{f}$ в точке x_0 и обозначается $\mathbf{f}''(x_0)$ или $D^2\mathbf{f}(x_0)$. Если эта вторая производная существует в любой точке интервала I (что предполагает существование и непрерывность $\mathbf{f}'$ на I), то $x \to \mathbf{f}''(x)$ есть вектор-функция, которую обозначают $\mathbf{f}''$ или $D^2\mathbf{f}$. Точно так же по индукции определяется *n-я производная* (или *производная n-го порядка*) функции $\mathbf{f}$, которая обозначается $\mathbf{f}^{(n)}$ или $D^n\mathbf{f}$; по определению, ее значение в точке $x_0 \in I$ есть производная функции $\mathbf{f}^{(n-1)}$ в точке x_0; следовательно, это определение предполагает существование *всех* производных $\mathbf{f}^{(k)}$ порядка $k \leqslant n-1$ в некоторой *окрестности* точки x_0 относительно I и дифференцируемость функции $\mathbf{f}^{(n-1)}$ в точке x_0.

Говорят, что функция $\mathbf{f}$ *дифференцируема n раз* в точке x_0 (соответственно на интервале), если она имеет в этой точке (соответственно на этом интервале) n-ю производную. Говорят, что $\mathbf{f}$ *бесконечно дифференцируема* на I, если она имеет на I производную n-го порядка для любого целого $n > 0$.

При помощи индукции по m получаем, что

$$D^m(D^n\mathbf{f}) = D^{m+n}\mathbf{f}. \tag{1}$$

Точнее, когда определен один из двух членов равенства (1), то другой тоже определен и равен первому.

Предложение 1. *Множество вектор-функций, определенных на интервале $I \subset \mathbf{R}$, принимающих свои значения в одном и том же топологическом векторном пространстве E и имеющих на I n-ю производную, образует векторное пространство над телом* $\mathbf{R}$, *а $\mathbf{f} \to D^n\mathbf{f}$ является линейным (однородным) отображением этого пространства в векторное пространство отображений I в E.*

Действительно, применяя индукцию по n, мы докажем формулы

$$D^n(\mathbf{f}+\mathbf{g}) = D^n\mathbf{f} + D^n\mathbf{g}, \tag{2}$$

$$D^n(\mathbf{f}a) = D^n\mathbf{f}a, \tag{3}$$

когда $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ имеют n-е производные на I (a — постоянная).

Предложение 2 («формула Лейбница»). *Пусть E, F, G — три топологических векторных пространства над телом* $\mathbf{R}$, *а отображение* $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \to [\mathbf{xy}]$ *есть непрерывное билинейное отображение множества $E \times F$ в G.* Если $\mathbf{f}$ (соответственно $\mathbf{g}$) *определена на интервале $I \subset \mathbf{R}$, принимает свои значения в E* (соответственно в F) *и имеет на I производную n-го порядка, то* $[\mathbf{fg}]$ *имеет на I производную n-го порядка, выражаемую формулой*

$$D^n [\mathbf{fg}] = [\mathbf{f}^{(n)}\mathbf{g}] + \binom{n}{1} [\mathbf{f}^{(n-1)}\mathbf{g}'] + \ldots + \binom{n}{p} [\mathbf{f}^{(n-p)}\mathbf{g}^{(p)}] + \ldots + [\mathbf{fg}^{(n)}]. \quad (4)$$

Формула (4) доказывается тоже индукцией по n $\Big($с учетом соотношения $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$ между биномиальными коэффициентами$\Big)$.

Точно так же проверяется и следующая формула (при тех же предположениях, что и предложение 2):

$$[\mathbf{f}^{(n)}\mathbf{g}] + (-1)^{n-1} [\mathbf{fg}^{(n)}] = D([\mathbf{f}^{(n-1)}\mathbf{g}] - [\mathbf{f}^{(n-2)}\mathbf{g}'] + \ldots + (-1)^{n-1} [\mathbf{fg}^{(n-1)}]). \quad (5)$$

Предыдущие предложения были сформулированы для функций, n раз дифференцируемых на интервале; предлагаем читателю сформулировать аналогичные предложения для функций, n раз дифференцируемых в точке.

2. *Формула Тейлора*

Пусть $\mathbf{f}$ — определенная на интервале $I \subset \mathbf{R}$ вектор-функция со значениями в нормированном пространстве E над телом $\mathbf{R}$; утверждение, что $\mathbf{f}$ имеет производную в точке $a \in I$, означает, что существует предел

$$\lim_{x \to a,\ x \in I,\ x \neq a} \frac{\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(a) - \mathbf{f}'(a)(x-a)}{x-a} = 0, \quad (6)$$

или, иными словами, что $\mathbf{f}$ «приближенно равна» *линейной* функции $\mathbf{f}(a) + \mathbf{f}'(a)(x-a)$ в окрестности точки a (см. гл. V, где дается общее изложение этого понятия). Мы покажем, что существование производной n-го порядка функции $\mathbf{f}$ в точке a точно таким же образом влечет за собой «приближенное равенство» функции $\mathbf{f}$ *многочлену от x порядка n* с коэффициентами из E (Общая топология, гл X, § 5) в окрестности точки a. Более точно:

Теорема 1. *Если функция* $\mathbf{f}$ *в точке* a *имеет* n*-ю производную, то*

$$\lim_{x\to a,\ x\in I,\ x\neq a} \frac{\mathbf{f}(x)-\mathbf{f}(a)-\mathbf{f}'(a)\frac{x-a}{1!}-\ldots-\mathbf{f}^{n}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}}{(x-a)^n}=0. \qquad (7)$$

Проведем индукцию по n. Для $n=1$ теорема верна. Для произвольного n, согласно предположению индукции, ее можно применить к производной $\mathbf{f}'$ функции $\mathbf{f}$; следовательно, для любого $\varepsilon>0$ существует такое $h>0$, что, положив

$$\mathbf{g}(x)=\mathbf{f}(x)-\mathbf{f}(a)-\mathbf{f}'(a)\frac{x-a}{1!}-\mathbf{f}''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}-\ldots-\mathbf{f}^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$

для $|y-a|\leqslant h$ и $y\in I$, получим

$$\|\mathbf{g}'(y)\|=\left\|\mathbf{f}'(y)-\mathbf{f}'(a)-\mathbf{f}''(a)\frac{x-a}{1!}-\ldots\right.$$
$$\left.\ldots-\mathbf{f}^{(n)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}\right\|\leqslant\varepsilon|y-a|^{n-1}.$$

Применим теорему о конечных приращениях (§ 2, теорема 2) на интервале с концами a, x (при $|x-a|<h$) к вектор-функции $\mathbf{g}$ и к возрастающей числовой функции, равной $\frac{\varepsilon}{n}|y-a|^n$ для $x>a$ и $-\frac{\varepsilon}{n}|y-a|^n$ для $x<a$; получим $\|\mathbf{g}(x)\|\leqslant\frac{\varepsilon}{n}|x-a|^n$, что доказывает теорему.

Следовательно, можно написать

$$\mathbf{f}(x)=\mathbf{f}(a)+\mathbf{f}'(a)\frac{x-a}{1!}+\mathbf{f}''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}+\ldots+$$
$$+\mathbf{f}^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}+\mathbf{u}(x)\frac{(x-a)^n}{n!}, \qquad (8)$$

где $\mathbf{u}(x)$ стремится к 0, когда x стремится к a, оставаясь в I; эта формула называется *формулой Тейлора n-го порядка* в точке a, а правая часть в формуле (8) называется *разложением Тейлора порядка n* функции $\mathbf{f}$ в точке a. Последний член $\mathbf{r}_n(x)=\mathbf{u}(x)\frac{(x-a)^n}{n!}$ называется *остаточным членом* формулы Тейлора n-го порядка.

Если $\mathbf{f}$ имеет на I *производную* $(n+1)$*-го порядка*, то можно получить оценку выражения $\| \mathbf{r}_n(x) \|$ через эту $(n+1)$-ю производную, и притом не только в неопределенной окрестности точки a, но и на всем интервале I:

Предложение 3. *Если* $\| \mathbf{f}^{(n+1)}(x) \| \leqslant M$ *на* I, *то*

$$\| \mathbf{r}_n(x) \| \leqslant M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \tag{9}$$

на I.

Действительно, для $n=0$ формула верна в силу теоремы 2 § 2. Докажем ее индукцией по n; согласно предположению индукции мы можем применить ее к $\mathbf{f}'$, и тогда получим

$$\| \mathbf{r}'_n(y) \| \leqslant M \frac{|y-a|^n}{n!},$$

откуда формула (9) получается в результате применения теоремы о конечных приращениях (§ 2, теорема 2).

Следствие. *Если конечная числовая функция* f *имеет на* I *производную* $(n+1)$*-го порядка и на* I *выполняются неравенства* $m \leqslant f^{(n+1)} \leqslant M$, *то для любого* $x \geqslant a$ *из этого интервала*

$$m \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant r_n(x) \leqslant M \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}, \tag{10}$$

причем второй член может быть равен первому (соответственно *третьему*) *лишь в том случае, если* $f^{(n+1)}$ *постоянна и равна* m (соответственно M) *на интервале* $[a, x]$.

Доказательство проводится точно так же, только применяется теорема 1 § 2.

Замечания. 1) Еще в процессе доказательства теоремы 1 было замечено, что если $\mathbf{f}$ имеет на I производную порядка n и если

$$\mathbf{f}(x) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1(x-a) + \mathbf{a}_2(x-a)^2 + \ldots + \mathbf{a}_n(x-a)^n + \mathbf{r}_n(x) \tag{11}$$

есть разложение Тейлора n-го порядка этой функции в точке a, то разложение Тейлора n-го порядка функции $\mathbf{f}'$ в точке a имеет вид

$$\mathbf{f}'(a) = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2(x-a) + \ldots + n\mathbf{a}_n(x-a)^{n-1} + \mathbf{r}'_n(x). \tag{12}$$

Говорят, что эта формула получается путем *почленного дифференцирования* разложения (11) функции f.

2) При тех же условиях коэффициенты $\mathbf{a}_i$ в формуле (11) определяются по индукции при помощи соотношений:

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{f}(a),$$
$$\mathbf{a}_1 = \lim_{x \to a} \frac{\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(a)}{x - a},$$
$$\mathbf{a}_2 = \lim_{x \to a} \frac{\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(a) - \mathbf{a}_1(x-a)}{(x-a)^2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathbf{a}_n = \lim_{x \to a} \frac{\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(a) - \mathbf{a}_1(x-a) - \ldots - \mathbf{a}_{n-1}(x-a)^{n-1}}{(x-a)^n}.$$

В случае $a=0$ отсюда, в частности, вытекает, что если $\mathbf{f}(x^p)$ (p — целое, >0) имеет в окрестности нуля производную порядка pn, то разложение Тейлора порядка pn этой функции имеет вид

$$\mathbf{f}(x^p) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 x^p + \mathbf{a}_2 x^{2p} + \ldots + \mathbf{a}_n x^{np} + \mathbf{r}_n(x^p),$$

где $\mathbf{r}_n(x^p)$ — остаточный член разложения (ср. гл. V, § 2).

3) Определение производной n-го порядка и предыдущие результаты без труда переносятся на функции одного комплексного переменного; но мы не будем останавливаться здесь на этом вопросе, так как он будет рассмотрен подробно в одной из следующих книг этого трактата.

Упражнения. 1) При тех же предположениях, что и в предложении 2, доказать формулу

$$[\mathbf{f}^{(n)}\,\mathbf{g}] = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} D^{n-p}\,[\mathbf{f}\mathbf{g}^{(p)}].$$

2) Предположим, в обозначениях предложения 2, что из соотношения $[\mathbf{a}\mathbf{y}]=0$ для любого $\mathbf{y} \in F$ следует, что $\mathbf{a}=0$ в E. Если при этих условиях $\mathbf{g}_i$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$ — $n+1$ вектор-фуякций со значениями в E, определенных на интервале I и таких, что для *любой* вектор-функции $\mathbf{f}$, принимающей значения в F и n раз дифференцируемой на I, имеет место тождество

$$[\mathbf{g}_0\mathbf{f}] + [\mathbf{g}_1\mathbf{f}'] + \ldots + [\mathbf{g}_n\mathbf{f}^{(n)}] = 0,$$

то функции $\mathbf{g}_i$ тождественно равны нулю.

3) Предположим, в обозначениях упражнения 2 и при тех же предположениях относительно $[\mathbf{x}\,\mathbf{y}]$, что каждая из функций $\mathbf{g}_h$ n раз дифференцируема на I; для любой функции $\mathbf{f}$, n раз диффе-

ренцируемой на I и принимающей свои значения в F, положим

$$[\mathbf{g}_0\mathbf{f}]-[\mathbf{g}_1\mathbf{f}]'+[\mathbf{g}_2\mathbf{f}]''+\ldots+(-1)^n[\mathbf{g}_n\mathbf{f}]^{(n)}=$$
$$=[\mathbf{h}_0\mathbf{f}]+[\mathbf{h}_1\mathbf{f}']+\ldots+[\mathbf{h}_n\mathbf{f}^{(n)}],$$

определив тем самым, и притом однозначно, функции $\mathbf{h}_i$ $(0\leqslant i\leqslant n)$ (упражнение 2); показать, что имеет место тождество

$$[\mathbf{h}_0\mathbf{f}]-[\mathbf{h}_1\mathbf{f}]'+[\mathbf{h}_2\mathbf{f}]''+\ldots+(-1)^n[\mathbf{h}_n\mathbf{f}]^{(n)}=$$
$$=[\mathbf{g}_0\mathbf{f}]+[\mathbf{g}_1\mathbf{f}']+\ldots+[\mathbf{g}_n\mathbf{f}^{(n)}].$$

4) Пусть вектор-функция $\mathbf{f}$ дифференцируема n раз на интервале I. Показать, что для $\frac{1}{x}\in I$ имеет место тождество

$$\frac{1}{x^{n+1}}\mathbf{f}^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)=(-1)^nD^n\left[x^{n-1}\mathbf{f}\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

(рассуждение проводить методом индукции по n).

5) Пусть u и v — две конечные числовые функции, n раз дифференцируемые на интервале I. Показать, что если в любой точке, в которой $v(x)\neq 0$, положить $D^n\left(\frac{u}{v}\right)=(-1)^n\frac{w_n}{v^{n+1}}$, то

$$w_n=\begin{vmatrix} u & v & 0 & 0 & \ldots & 0\\ u' & v' & v & 0 & \ldots & 0\\ u'' & v'' & 2v' & v & \ldots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ u^{(n-1)} & v^{(n-1)} & \binom{n-1}{1}v^{(n-2)} & \binom{n-1}{2}v^{(n-3)} & \ldots & v\\ u^{(n)} & v^{(n)} & \binom{n}{1}v^{(n-1)} & \binom{n}{2}v^{(n-2)} & \ldots & \binom{n}{n-1}v' \end{vmatrix}$$

$\left(\text{положив } w=\frac{u}{v}, \text{ продифференцировать } n \text{ раз тождество } u=wv\right)$.

°6) Пусть вектор-функция $\mathbf{f}$ определена на открытом интервале I и принимает свои значения в нормированном пространстве E.

Положим $\Delta\mathbf{f}(x;\ h_1)=\mathbf{f}(x+h_1)-\mathbf{f}(x)$; затем по индукции $\Delta^p\mathbf{f}(x;\ h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_{p-1},\ h_p)=\Delta^{p-1}\mathbf{f}(x+h_p;\ h_1,\ \ldots,\ h_{p-1})-\Delta^{p-1}\mathbf{f}(x;\ h_1,\ \ldots,\ h_{p-1})$. Таким образом, эти функции определены для каждого $x\in I$, если h_i достаточно малы.

а) Если функция $\mathbf{f}$ дифференцируема n раз в точке x (и следовательно, $n-1$ раз дифференцируема в окрестности точки x), то

$$\lim_{(h_1,\ \ldots,\ h_n)\to(0,\ \ldots,\ 0)}\frac{\Delta^n\mathbf{f}(x;\ h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_n)}{h_1h_2\ldots h_n}=\mathbf{f}^{(n)}(x)$$

(рассуждение проводить методом индукции по n, используя теорему о конечных приращениях).

б) Если $\mathbf{f}$ дифференцируема n раз *на интервале* I, то

$$\|\Delta^n \mathbf{f}(x;\ h_1, \ldots, h_n) - \mathbf{f}^{(n)}(x_0) h_1 h_2 \ldots h_n\| \leqslant \\ \leqslant |h_1 h_2 \ldots h_n| \sup \|\mathbf{f}^{(n)}(x + t_1 h_1 + \ldots + t_n h_n) - \mathbf{f}^{(n)}(x_0)\|,$$

где верхняя грань берется по множеству таких (t_i), что $0 \leqslant t_i \leqslant 1$ для $1 \leqslant i \leqslant n$ (тот же метод).

в) Если числовая функция f дифференцируема n раз на I, то

$$\Delta^n f(x;\ h_1, h_2, \ldots, h_n) = h_1 h_2 \ldots h_n f^{(n)}(x + \theta_1 h_1 + \ldots + \theta_n h_n),$$

где числа θ_i принадлежат интервалу $[0, 1]$ (тот же метод с применением следствия из предложения 1).

7) Пусть числовая функция f дифференцируема n раз в точке x_0, а вектор-функция $\mathbf{g}$ дифференцируема n раз в точке $y = f(x_0)$. Пусть, далее,

$$f(x_0 + h) = a_0 + a_1 h + \ldots + a_n h^n + r_n(h),$$
$$\mathbf{g}_0(y_0 + k) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 k + \ldots + \mathbf{b}_n k^n + \mathbf{s}_n(k)$$

— разложения Тейлора n-го порядка функций f и $\mathbf{g}$ соответственно в точках x_0 и y_0. Показать, что сумма $n+1$ членов в разложении Тейлора n-го порядка сложной функции $\mathbf{g} \circ f$ в точке x_0 равна сумме членов степени, не превосходящей n, многочлена

$$\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1(a_1 h + \ldots + a_n h^n) + \mathbf{b}_2(a_1 h + \ldots + a_n h^n)^2 + \ldots \\ \ldots + \mathbf{b}_n(a_1 h + \ldots + a_n h^n)^n.$$

Вывести отсюда следующие две формулы:

а) $D^n(\mathbf{g}(f(x))) =$

$$= \sum \frac{n!}{m_1!\, m_2! \ldots m_q!} \mathbf{g}^{(p)}(f(x)) \left(\frac{f'(x)}{1!}\right)^{m_1} \ldots \left(\frac{f^{(q)}(x)}{q!}\right)^{m_q},$$

где сумма распространяется на все совокупности таких целых строго положительных чисел $(m_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$, что

$$m_1 + 2m_2 + \ldots + qm_q = n,$$

а p означает сумму $m_1 + m_2 + \ldots + m_q$;

б) $$D^n(\mathbf{g}(f(x))) = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!} \mathbf{g}^{(p)}(f(x)) \left[\sum_{q=1}^{p} \binom{p}{q} (-f(x))^{p-q} D^n((f(x))^q)\right].$$

8) Пусть f — числовая функция, определенная и n раз дифференцируемая на интервале I, $x_1, x_2, \ldots, x_p$ — отличные друг от друга точки этого интервала, а n_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ суть p целых положительных чисел и таких, что $n_1 + n_2 + \ldots + n_p = n$. Предположим, что в точке x_i функция f обращается в нуль вместе со своими $n_i - 1$ первыми производными $(1 \leqslant i \leqslant p)$; показать, что внутри наименьшего интервала, содержащего все x_i, существует точка ξ, в которой $f^{(n-1)}(\xi) = 0$.

9) Предположим, используя обозначения упражнения 8, что функция f дифференцируема n раз на I, а в остальном произвольна. Пусть, далее, g — многочлен степени $n-1$ (с действительными коэф-

фициентами), обладающий тем свойством, что в точке x_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ многочлен g и его n_i-1 первых производных равны соответственно f и ее n_i-1 первым производным. Показать, что

$$f(x)=g(x)+\frac{(x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2}\ldots(x-x_p)^{n_p}}{n!}f^{(n)}(\xi),$$

где ξ — внутренняя точка наименьшего интервала, содержащего все точки x_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ и x. (Применить упражнение 8 к функции от t:

$$f(t)-g(t)-a\,\frac{(t-x_1)^{n_1}(t-x_2)^{n_2}\ldots(t-x_p)^{n_p}}{n!},$$

где a — надлежащим образом выбранная постоянная.)

10) Пусть g — *нечетная* числовая функция, определенная в окрестности нуля и 5 раз дифференцируемая в этой окрестности. Показать, что

$$g(x)=\frac{x}{3}(g'(x)+2g'(0))-\frac{x^5}{180}g^{(5)}(\xi)$$

(тот же метод, что и в упражнении 9).

Вывести отсюда, что если f — числовая функция, определенная на $[a, b]$ и 5 раз дифференцируемая на этом интервале, то

$$f(b)-f(a)=\frac{b-a}{6}\left[f'(a)+f'(b)+4f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(5)}(\xi),$$

где $a<\xi<b$ («формула Симпсона»).

11) Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_n, g_1, g_2, \ldots, g_n$ — $2n$ числовых функций, $n-1$ раз дифференцируемых на интервале I. Пусть $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ — строго возрастающая последовательность n точек из I. Показать, что отношение двух определителей

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \ldots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \ldots & f_2(x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & \ldots & f_n(x_n) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} g_1(x_1) & g_1(x_2) & \ldots & g_1(x_n) \\ g_2(x_1) & g_2(x_2) & \ldots & g_2(x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_n(x_1) & g_n(x_2) & \ldots & g_n(x_n) \end{vmatrix}$$

равно отношению двух определителей

$$\begin{vmatrix} f_1(\xi_1) & f_1'(\xi_2) & \ldots & f_1^{(n-1)}(\xi_n) \\ f_2(\xi_1) & f_2'(\xi_2) & \ldots & f_2^{(n-1)}(\xi_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_n(\xi_1) & f_n'(\xi_2) & \ldots & f_n^{(n-1)}(\xi_n) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} g_1(\xi_1) & g_1'(\xi_2) & \ldots & g_1^{(n-1)}(\xi_n) \\ g_2(\xi_1) & g_2'(\xi_2) & \ldots & g_2^{(n-1)}(\xi_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_n(\xi_1) & g_n'(\xi_2) & \ldots & g_n^{(n-1)}(\xi_n) \end{vmatrix},$$

где

$$\xi_1=x_1, \quad \xi_1<\xi_2<x_2, \quad \xi_2<\xi_3<x_3, \quad \ldots, \quad \xi_{n-1}<\xi_n<x_n$$

(использовать упражнение 9 § 2).

Частный случай: $g_1(x)=1$, $g_2(x)=x$, $\ldots$, $g_n(x)=x^{n-1}$.

°12) а) Пусть вектор-функция $\mathbf{f}$ определена и непрерывна на конечном интервале $I=[-a, +a]$, принимает свои значения в нормированном пространстве E над телом $\mathbf{R}$ и дважды дифференцируема на I. Показать, что если $M_0=\sup\limits_{x\in I}\|\mathbf{f}(x)\|$, $M_2=\sup\limits_{x\in I}\|\mathbf{f}''(x)\|$, то для любого $x\in I$

$$\|\mathbf{f}'(x)\|\leqslant\frac{M_0}{a}+\frac{x^2+a^2}{2a}M_2$$

(выразить каждую из разностей $\mathbf{f}(a)-\mathbf{f}(x)$, $\mathbf{f}(-a)-\mathbf{f}(x)$).

б) Вывести из а), что если функция $\mathbf{f}$ дважды дифференцируема на интервале I (не обязательно ограниченном) и если $M_0=\sup\limits_{x\in I}\|\mathbf{f}(x)\|$ и $M_2=\sup\limits_{x\in I}\|\mathbf{f}''(x)\|$ конечны, то $M_1=\sup\limits_{x\in I}\|\mathbf{f}'(x)\|$ тоже конечно и

$M_1\leqslant 2\sqrt{M_0M_2}$, если I имеет длину $\geqslant 2\sqrt{\dfrac{M_0}{M_2}}$, $M_1\leqslant\sqrt{2}\sqrt{M_0M_2}$, если $I=\mathbf{R}$.

Показать, что числа 2 и $\sqrt{2}$ в этих неравенствах не могут быть заменены меньшими числами (рассмотреть сначала тот случай, когда предполагается лишь, что $\mathbf{f}$ имеет вторую правую производную, и показать, что в этом случае предыдущие неравенства могут обратиться в равенства, если в качестве $\mathbf{f}$ взять числовую функцию, «кусочно» равную многочленам второго порядка).

в) Вывести из б), что если $\mathbf{f}$ дифференцируема p раз на $\mathbf{R}$ и если $M_p=\sup\limits_{x\in R}\|\mathbf{f}^{(p)}(x)\|$ и $M_0=\sup\limits_{x\in R}\|\mathbf{f}(x)\|$ конечны, то каждое из чисел $M_k=\sup\limits_{x\in R}\|\mathbf{f}^{(k)}(x)\|$ конечно для $1\leqslant k\leqslant p-1$ и

$$M_k\leqslant 2^{\frac{k(p-k)}{2}}M_0^{1-\frac{k}{p}}M_p^{\frac{k}{p}}.$$

°13) а) Пусть дважды дифференцируемая на $\mathbf{R}$ числовая функция f удовлетворяет условиям: $(f(x))^2\leqslant a$ и $(f'(x))^2+(f''(x))^2\leqslant b$ на $\mathbf{R}$; показать, что $(f(x))^2+(f'(x))^2\leqslant\max(a, b)$ на $\mathbf{R}$ (рассуждать от противного, заметив, что если функция $f^2+f'^2$ принимает значение $c>\max(a, b)$ в точке x_0, то найдутся такие две точки x_1 и x_2, что $x_1<x_0<x_2$, и что в точках x_1 и x_2 функция f принимает столь малые значения, что $f^2+f'^2$ принимает значения, меньшие c; после этого взять точку из интервала $[x_1, x_2]$, в которой $f^2+f'^2$ достигает своей верхней грани на этом интервале).

б) Пусть числовая функция f, n раз дифференцируемая на $\mathbf{R}$, удовлетворяет на $\mathbf{R}$ условиям: $(f(x))^2\leqslant a$ и $(f^{(n-1)}(x))^2+(f^{(n)}(x))^2\leqslant b$; показать, что тогда на $\mathbf{R}$ выполняется неравенство $(f^{(k-1)}(x))^2+(f^{(k)}(x))^2\leqslant\max(a, b)$ для $1\leqslant k\leqslant n$. (Рассуждение проводить методом индукции по n; заметить, что на основании упражнения 12 верхняя грань c выражения $(f'(x))^2$ на $\mathbf{R}$ конечна; рассуждая от противного, показать, что $c\leqslant\max(a, b)$: допустив, что $c>\max(a, b)$, выбрать такие постоянные λ и μ, чтобы для функции $g=\lambda f+\mu$

выполнялись неравенства $|g(x)| \leqslant 1$, $|g'(x)| \leqslant 1$, но чтобы неравенство $(g(x))^2 + (g'(x))^2 \leqslant 1$ не могло выполняться для любого x.)

°14) Пусть функция $\mathbf{f}$ дифференцируема $n-1$ раз на интервале I, содержащем 0, а вектор-функции $\mathbf{f}_n$ определены на I для $x \neq 0$ при помощи соотношения

$$\mathbf{f}(x) = \mathbf{f}(0) + \mathbf{f}'(0)\frac{x}{1!} + \mathbf{f}''(0)\frac{x^2}{2!} + \\ + \ldots + \mathbf{f}^{(n-1)}(0)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \mathbf{f}_n(x)\,x^n.$$

а) Показать, что если $\mathbf{f}$ имеет в 0 производную $(n+p)$-го порядка, то $\mathbf{f}_n$ имеет производную порядка p в 0 и производную порядка $(n+p-1)$ в любой отличной от 0 точке из некоторой окрестности 0; кроме того, $\mathbf{f}_n^{(k)}(0) = \frac{k!}{(n+k)!}\mathbf{f}^{(n+k)}(0)$ для $0 \leqslant k \leqslant p$ и $\mathbf{f}_n^{(p+k)}(x)\,x^k$ стремится к 0 одновременно с x для $1 \leqslant k \leqslant n-1$ (выразить производные функции $\mathbf{f}_n$ при помощи разложений Тейлора последовательных производных функции $\mathbf{f}$ и использовать предложение 6 § 2).

б) Обратно, пусть $\mathbf{f}_n$ — вектор-функция, имеющая производные $(n+p-1)$-го порядка в окрестности 0 интервала I и такая, что $\mathbf{f}_n^{(p+k)}(x)\,x^k$ стремится к пределу для $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Показать, что функция $\mathbf{f}_n(x)\,x^n$ имеет на I производную $(n+p-1)$-го порядка; если, кроме того, $\mathbf{f}_n$ имеет в 0 производную порядка p, то $\mathbf{f}_n(x)\,x^n$ имеет в 0 производную порядка $(n+p)$.

в) Предположим, что интервал I симметричен относительно 0 и что $\mathbf{f}$ — *четная* функция ($\mathbf{f}(-x) = \mathbf{f}(x)$ на I). Показать при помощи а) и б), что если $\mathbf{f}$ дифференцируема $2n$ раз на I, то существует такая функция $\mathbf{g}$, определенная и n раз дифференцируемая на I, что $\mathbf{f}(x) = \mathbf{g}(x^2)$ на I.

°15) Пусть I — открытый интервал из $\mathbf{R}$ и $\mathbf{f}$ — вектор-функция, определенная и непрерывная на I; предположим, что существует n вектор-функций $\mathbf{g}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, определенных на I и таких, что функции от x

$$\frac{1}{h^n}\left(\mathbf{f}(x+h) - \mathbf{f}(x) - \sum_{p=1}^{n}\frac{h^p}{p!}\mathbf{g}_p(x)\right)$$

равномерно сходятся к 0 на любом компактном интервале, содержащемся в I, когда h стремится к 0.

а) Положим $\mathbf{f}_p(x, h) = \Delta^p \mathbf{f}(x; h, h, \ldots, h)$ (упражнение 6). Показать, что для $1 \leqslant p \leqslant n$ функции $\frac{1}{h^p}\mathbf{f}_p(x, h)$ *равномерно* сходятся к $\mathbf{g}_p(x)$ на любом компактном интервале, содержащемся в I, когда h стремится к 0, и что функции $\mathbf{g}_p$ непрерывны на I (доказывать последовательно для $p = n$, $p = n-1$ и т. д.).

б) Вывести отсюда, что $\mathbf{f}$ обладает на I n-й непрерывной производной и что $\mathbf{f}^{(p)} = \mathbf{g}_p$ для $1 \leqslant p \leqslant n$ (принять во внимание соотношение $\mathbf{f}_{p+1}(x, h) = \mathbf{f}_p(x+h, h) - \mathbf{f}_p(x, h)$).

°16) Пусть f — числовая функция, n раз дифференцируемая на $I =]-1, +1[$ и такая, что $|f(x)| \leqslant 1$ на этом интервале.

а) Показать, что если $m_k(\lambda)$ означает минимум выражения $|f^{(k)}(x)|$ на интервале длины λ, содержащемся в I, то

$$m_k(\lambda) \leqslant \frac{2^{\frac{k(k+1)}{2}} k^k}{\lambda^k} \qquad (1 \leqslant k \leqslant n).$$

(Заметить, что если интервал длины λ разбит на три интервала длины α, β, γ, то

$$m_k(\lambda) \leqslant \frac{1}{\beta}(m_{k-1}(\alpha) + m_{k-1}(\gamma)).\text{)}$$

б) Вывести отсюда, что существует такое число μ_n, зависящее только от n, что если $|f'(0)| \geqslant \mu_n$, то $f^{(n)}(x)$ обращается в нуль по крайней мере в $n-1$ различных точках интервала I (показать индукцией по k, что $f^{(k)}$ обращается в нуль по крайней мере $k-1$ раз на I).

°17) а) Пусть $\mathbf{f}$ — вектор-функция, имеющая на открытом интервале I производные всех порядков. Предположим, что на I выполняются неравенства $\|\mathbf{f}^{(n)}(x)\| \leqslant an!\,r^n$, где a и r — два положительных числа, не зависящие от x и от n; показать, что в любой точке $x_0 \in I$ «ряд Тейлора» с общим членом $\frac{1}{n!}\mathbf{f}^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$ сходится к сумме $\mathbf{f}(x)$ в окрестности точки x_0.

б) Обратно, если ряд Тейлора функции $\mathbf{f}$ в точке x_0 сходится в окрестности точки x_0, то существуют такие два числа a и r (зависящие от x_0), что $\|\mathbf{f}^{(n)}(x_0)\| \leqslant an!\,r^n$ для любого n.

в) Вывести из а) и из упражнения 16 б), что если на открытом интервале I числовая функция бесконечно дифференцируема и если существует такое не зависящее от n число p, что $f^{(n)}$ обращается в нуль не более чем в p различных точках интервала I, то ряд Тейлора функции f в окрестности любой точки x_0 интервала I сходится и имеет своей суммой $f(x)$ в любой точке некоторой окрестности точки x_0.

§ 4. Выпуклые функции действительного переменного

Пусть H — часть тела $\mathbf{R}$, f — конечная числовая функция, определенная на H, G — *график* или множество, изображающее функцию f на $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2$, то есть множество точек $M_x = (x, f(x))$, где x пробегает множество H. Условимся говорить, что точка

(a, b) из $\mathbf{R}^2$, такая, что $a \in H$, лежит *выше* (соответственно *строго выше*, *ниже*, *строго ниже*) графика G, если $b \geqslant f(a)$ (соответственно $b > f(a)$, $b \leqslant f(a)$, $b < f(a)$). Если $A = (a, a')$ и $B = (b, b')$ — две точки из $\mathbf{R}^2$, то обозначим через AB замкнутый отрезок с концами A и B; если $a < b$, то AB есть график линейной функции $a' + \frac{b'-a'}{b-a}(x-a)$, определенной на $[a, b]$; обозначим через $p(AB)$ *наклон* $\frac{b'-a'}{b-a}$ этого отрезка. Мы будем пользоваться следующей леммой, справедливость которой очевидна:

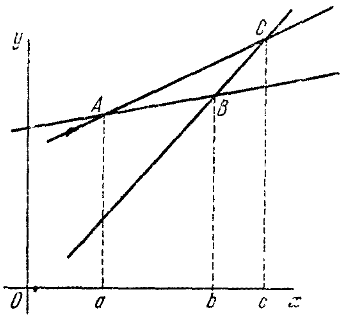

Рис. 1.

Лемма. *Пусть* $A = (a, a')$, $B = (b, b')$, $C = (c, c')$ — *такие три точки из* $\mathbf{R}^2$, *что* $a < b < c$. *Тогда следующие предложения эквивалентны*:

a) *B лежит ниже AC*;
b) *C лежит выше прямой, проходящей через A и B*;
c) *A лежит выше прямой, проходящей через B и C*;
d) $p(AB) \leqslant p(AC)$;
e) $p(AC) \leqslant p(BC)$.

Лемма остается справедливой, если заменить в ней слово «выше» (соответственно «ниже») словами «строго выше» (соответственно «строго ниже») и знак $\leqslant$ знаком $<$ (рис. 1).

1. Определение выпуклых функций

Определение 1. *Говорят, что конечная числовая функция f, определенная на интервале $I \subset \mathbf{R}$, выпукла на I, если для любых двух точек x, x' из I $(x < x')$ всякая точка M_z графика G функции f, для которой $x \leqslant z \leqslant x'$, лежит ниже отрезка $M_xM_{x'}$* (или, что то же самое, если всякая точка этого отрезка лежит выше G) (рис. 2).

Если учесть параметрическое представление отрезка (Общая топология, гл. VI, § 1, n° 4), то условие выпуклости функции f

на I можно представить в виде

$$f(\lambda x + (1-\lambda) x') \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x') \tag{1}$$

для любой пары точек (x, x') из I и любого $\lambda \in [0, 1]$.

Определение 1 эквивалентно, кроме того, следующему утверждению: *множество точек из* $\mathbf{R}^2$, *лежащих выше графика* G *функции* f, *выпукло.* В самом деле, это условие, очевидно, достаточно для того, чтобы f была выпукла на I; оно также и необходимо, так как если f выпукла на I и если (x, y), (x', y') — две точки, лежащие выше G, то $y \geqslant f(x)$, $y' \geqslant f(x')$, откуда для $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ на основании формулы (1) получаем

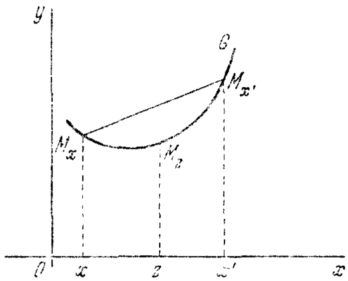

Рис. 2.

$$\lambda y + (1-\lambda) y' \geqslant \lambda f(x) + \\ + (1-\lambda) f(x') \geqslant f(\lambda x + (1-\lambda) x'),$$

то есть всякая точка отрезка с концами (x, y) и (x', y') лежит выше G.

Замечание. Точно так же доказывается, что множество точек, лежащих *строго выше* G, выпукло. Обратно, если это множество выпукло, то

$$\lambda y + (1-\lambda) y' > f(\lambda x + (1-\lambda) x')$$

для $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ и $y > f(x)$, $y' > f(x')$; устремив в этой формуле y к $f(x)$, а y' к $f(x')$, получим, что f выпукла.

Примеры. 1) Всякая линейная аффинная (числовая) функция $ax + b$ выпукла на $\mathbf{R}$.

2) Функция x^2 выпукла на $\mathbf{R}$, так как

$$\lambda x^2 + (1-\lambda) x'^2 - (\lambda x + (1-\lambda) x')^2 = \lambda(1-\lambda)(x-x')^2 \geqslant 0$$

для $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

3) Функция $|x|$ выпукла на $\mathbf{R}$, так как

$$|\lambda x + (1-\lambda) x'| \leqslant \lambda |x| + (1-\lambda) |x'|$$

для $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Ясно, что если f выпукла на I, то ее сужение на любой интервал $J \subset I$ выпукло на J.

Пусть функция f выпукла на I, и пусть x, x' — такие две точки из I, что $x < x'$; тогда для точки $z \in I$, лежащей вне интервала $[x, x']$, M_z лежит *выше* прямой D, соединяющей M_x и $M_{x'}$; это непосредственно следует из леммы.

Отсюда получаем, что если точка z такова, что $x < z < x'$ и M_z находится *на* отрезке $M_x M_{x'}$, то для *любой другой точки* z', удовлетворяющей тому же условию $x < z' < x'$, $M_{z'}$ тоже лежит на отрезке $M_x M_{x'}$, так как из вышесказанного следует, что точка $M_{z'}$ должна лежать одновременно и выше и ниже этого отрезка; другими словами, в этом случае f равна на интервале $[x, x']$ линейной функции.

Определение 2. *Говорят, что конечная числовая функция f, определенная на интервале $I \subset \mathbf{R}$, строго выпукла на I, если для любых двух точек x, x' из I $(x < x')$ всякая точка M_z графика G функции f для $x < z < x'$ лежит строго ниже отрезка* $M_x M_{x'}$ (или, что сводится к тому же, если любая точка этого отрезка, отличная от его концов, лежит строго выше G).

Иными словами, неравенство

$$f(\lambda x + (1-\lambda) x') < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x') \tag{2}$$

должно иметь место для любой пары (x, x') различных точек из I и любого λ, удовлетворяющего условию $0 < \lambda < 1$.

Замечания, предшествующие определению 2, показывают, что для того, чтобы выпуклая на I функция f была строго выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы не существовало ни одного интервала, содержащегося в I (и не сводящегося к точке), на котором сужение функции f *линейно*.

Первая и третья функции в рассмотренных выше примерах не являются строго выпуклыми; напротив, ясно, что функция x^2 строго выпукла на $\mathbf{R}$; простое вычисление показывает, что функция $\frac{1}{x}$ строго выпукла на $]0, +\infty[$.

Предложение 1. *Пусть конечная числовая функция f выпукла* (соответственно *строго выпукла*) *на интервале $I \subset \mathbf{R}$. Для любой совокупности $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$, $p \geqslant 2$, различных точек из I и любой совокупности $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ таких p действительных чисел, что*

$0 < \lambda_i < 1$ *и* $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$, *выполняется неравенство*

$$f\Big(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i) \tag{3}$$

(соответственно

$$f\Big(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\Big) < \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i)\Big). \tag{4}$$

Так как при $p=2$ предложение (для выпуклых функций) сводится к неравенству (1), то для $p>2$ мы будем рассуждать по индукции. Число $\mu = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i > 0$; ясно, что если a и b — наименьшее и наибольшее из x_i, то $a \leqslant \dfrac{\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i} \leqslant b$, или, другими словами, точка $x = \dfrac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i x_i$ принадлежит I, и, согласно предположению индукции, $\mu f(x) \leqslant \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i f(x_i)$; с другой стороны, на основании (1) имеем

$$f\Big(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\Big) = f(\mu x + (1-\mu)x_p) \leqslant \mu f(x) + (1-\mu) f(x_p) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i).$$

Для строго выпуклых функций рассуждаем точно так же, с той лишь разницей, что в качестве исходного берем неравенство (2).

Говорят, что конечная числовая функция f *вогнута* (соответственно *строго вогнута*) на I, если функция $-f$ выпукла (соответственно строго выпукла) на I, или, что сводится к тому же, если для любой пары (x, x') различных точек из I и любого λ в пределах $0 < \lambda < 1$ выполняется неравенство

$$f(\lambda x + (1-\lambda)x') \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x')$$

(соответственно $f(\lambda x + (1-\lambda)x') > \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x')$).

2. Семейства выпуклых функций

Предложение 2. *Пусть $f_i\ (1 \leqslant i \leqslant p)$ — p функций, выпуклых на интервале $I \subset \mathbf{R}$, а $c_i\ (1 \leqslant i \leqslant p)$ — p произвольных положительных чисел; тогда функция $f = \sum_{i=1}^{p} c_i f_i$ выпукла на I. Если к тому же хотя бы для одного индекса j функция f_j строго выпукла на I и $c_j > 0$, то f строго выпукла на I.*

Это сразу следует из неравенства (1) (соответственно (2)), если применить его к каждой из функций f_i, умножить полученные неравенства на c_i и почленно сложить.

Предложение 3. *Пусть (f_α) — семейство функций, выпуклых на интервале $I \subset \mathbf{R}$; если верхняя огибающая g этого семейства конечна в любой точке из I, то g выпукла на I.*

В самом деле, множество точек $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, лежащих выше графика функции g, является пересечением выпуклых множеств, образованных соответственно точками, лежащими выше графика каждой из функций f_α; следовательно, оно выпукло.

Предложение 4. *Пусть H — семейство функций, выпуклых на интервале $I \subset \mathbf{R}$; если $\mathfrak{F}$ есть фильтр в H, сходящийся на I в смысле простой сходимости к конечной числовой функции f_0, то эта функция выпукла на I.*

Для доказательства достаточно в неравенстве (1) перейти к пределу по $\mathfrak{F}$.

3. Непрерывность и дифференцируемость выпуклых функций

Предложение 5. *Для того чтобы конечная числовая функция f была выпуклой* (соответственно *строго выпуклой*) *на интервале I, необходимо и достаточно, чтобы для любой точки $a \in I$ наклон $p(M_a M_x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ был возрастающей* (соответственно *строго возрастающей*) *функцией от x на $I \cap \complement\{a\}$.*

Это предложение является непосредственным следствием определений 1 и 2 и леммы, приведенной в начале этого параграфа.

Предложение 6. *Пусть конечная числовая функция f выпукла на интервале $I \subset \mathbf{R}$. Тогда в каждой точке a внутри I она непрерывна, имеет конечную правую и конечную левую производные и $f'_g(a) \leqslant f'_d(a)$.*

Действительно, для $x \in I$ и $x > a$ функция $x \to \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ возрастает (предложение 5) и ограничена снизу, так как если $y < a$ и $y \in I$, то в силу предложения 5

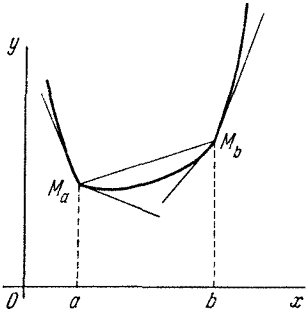

Рис. 3.

$$\frac{f(y)-f(a)}{y-a} \leqslant \frac{f(x)-f(a)}{x-a}; \tag{5}$$

следовательно, эта функция имеет в точке a конечный предел справа, то есть $f'_d(a)$ существует и конечна; кроме того, устремив в неравенстве (5) x к a $(x > a)$, видим, что

$$\frac{f(y)-f(a)}{y-a} \leqslant f'_d(a) \tag{6}$$

для любого $y < a$, принадлежащего I. Точно так же доказывается, что существует $f'_g(a)$ и что

$$f'_g(a) \leqslant \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \tag{7}$$

для $x \in I$ и $x > a$. Устремив в этом последнем неравенстве x к a $(x > a)$, получим $f'_g(a) \leqslant f'_d(a)$. Существование же в точке a правой и левой производных влечет за собой непрерывность функции f в этой точке.

Следствие 1. *Пусть функция f выпукла* (соответственно *строго выпукла*) *на I; если a и b $(a < b)$ — две внутренние точки интервала I, то* (рис. 3)

$$f'_d(a) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'_g(b) \tag{8}$$

(соответственно

$$f'_d(a) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < f'_g(b)). \tag{9}$$

Двойное неравенство (8) получается из (6) и (7) путем простого изменения обозначений. С другой стороны, если f строго выпукла и c удовлетворяет условию $a<c<b$, то согласно неравенству (8) и предложению 5

$$f'_d(a) \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a} < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < \frac{f(b)-f(c)}{b-c} \leqslant f'_g(b),$$

откуда следует (9).

Следствие 2. *Если f выпукла* (соответственно *строго выпукла*) *на I, то f'_d и f'_g возрастают* (соответственно *строго возрастают*) *внутри I; множество точек интервала I, в которых f не дифференцируема, счетно, и f'_d и f'_g непрерывны во всех точках, в которых f дифференцируема.*

Первое утверждение следует из (8) (соответственно (9)) и из неравенства $f'_g(a) \leqslant f'_d(a)$. Что касается второго утверждения, то обозначим через E множество тех внутренних точек I, в которых f не дифференцируема (то есть $f'_g(x) < f'_d(x)$). Для любого $x \in E$ обозначим через I_x открытый интервал $]f'_g(x), f'_d(x)[$; из формулы (8) следует, что если две точки x и y из E удовлетворяют условию $x<y$, то $u<v$ для любого $u \in I_x$ и любого $v \in I_y$; другими словами, когда x пробегает множество E, непустые открытые интервалы I_x попарно не пересекаются; значит, множество этих интервалов счетно, а стало быть, счетно и множество E. Наконец, поскольку f'_d (соответственно f'_g) возрастает, то она имеет в каждой точке x внутри I предел справа и предел слева; тогда предложение 6 § 2 показывает, что предел справа производной f'_d (соответственно f'_g) в точке x равен $f'_d(x)$, а ее предел слева равен $f'_g(x)$, откуда вытекает последнее утверждение следствия.

Пусть функция f выпукла на I, точка a лежит внутри I, а прямая D, проходящая через точку M_a, имеет уравнение $y-f(a)=\alpha(x-a)$. Из неравенств (8) следует, что если $f'_g(a) \leqslant \alpha \leqslant f'_d(a)$, то всякая точка графика G функции f лежит выше прямой D, и если f строго выпукла, то M_a — единственная общая точка прямой D и графика G; говорят, что D есть *опорная прямая* графика G в точке M_a. Обратно, если G находится выше D, то для любого $x \in I$ имеем $f(x)-f(a) \geqslant \alpha(x-a)$, откуда $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant \alpha$

для $x > a$ и $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \alpha$ для $x < a$; устремив в этих неравенствах x к a, получим $f'_g(a) \leqslant \alpha \leqslant f'_d(a)$.

В частности, если f дифференцируема в точке a, то существует единственная опорная прямая графика G в точке M_a, а именно *касательная* к G в точке M_a.

Замечание. Если функция f строго выпукла на открытом интервале I, то f'_d строго возрастает на этом интервале, и значит, на основании предложения 2 из § 2 возможны лишь три случая:

1° f строго убывает на I;

2° f строго возрастает на I;

3° существует такая точка $a \in I$, что f строго убывает для $x \leqslant a$ и строго возрастает для $x \geqslant a$.

Если на I функция f выпукла, но не строго выпукла, то f может быть постоянной на некотором интервале, содержащемся в I; пусть $J =]a, b[$ — наибольший открытый интервал, на котором f постоянна (то есть внутренность интервала, на котором $f'_d(x) = 0$); тогда f строго убывает на интервале, состоящем из точек $x \in I$, для которых $x \leqslant a$ (если таковой существует), и строго возрастает на интервале, состоящем из точек $x \in I$, для которых $x \geqslant b$ (если таковой существует).

Во всех случаях очевидно, что f имеет *предел справа* в левом конце интервала I (в $\overline{\mathbf{R}}$) и *предел слева* в его правом конце; эти пределы могут быть как конечными, так и бесконечными (ср. упражнения 5, 6 и 7). Поэтому иногда говорят, что непрерывная функция (со значениями в $\overline{\mathbf{R}}$), равная f внутри I и продолженная по непрерывности на концы этого интервала, *выпукла на* $\overline{I}$.

4. Критерии выпуклости

Предложение 7. *Пусть f — конечная числовая функция, определенная на интервале $I \subset \mathbf{R}$. Для того чтобы f была выпуклой на I, необходимо и достаточно, чтобы для любой пары чисел a и b из I ($a < b$) и любого действительного числа μ функция $f x + \mu x$ достигала своей верхней грани на $[a, b]$ в одной из точек a, b.*

Условие *необходимо*; в самом деле, так как μx выпукла на $\mathbf{R}$, то функция $f(x) + \mu x$ выпукла на I; поэтому можно ограничиться случаем $\mu = 0$. Но для $x = \lambda a + (1-\lambda) b$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$ имеем

$$f(x) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) \leqslant \operatorname{Max}(f(a), f(b)).$$

Условие *достаточно*. В самом деле, положим $\mu = -\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, и пусть $g(x)=f(x)+\mu x$; тогда $g(a)=g(b)$, и следовательно, для любого $x\in[a, b]$ выполняется неравенство $g(x)\leqslant g(a)$, которое, как легко видеть, эквивалентно неравенству (1) с заменой в нем x на a и x' на b.

Предложение 8. *Для того чтобы конечная числовая функция f была выпуклой* (соответственно *строго выпуклой*) *на открытом интервале $I\subset\mathbf{R}$, необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывна на I, имела производную в каждой точке дополнения B относительно I некоторой счетной части этого интервала и чтобы эта производная возрастала* (соответственно *строго возрастала*) *на B.*

Условие необходимо в силу предложения 6 и следствия 2 из него; покажем, что оно достаточно. Итак, допустим, что f' возрастает на B, а f не является выпуклой функцией; тогда существуют (предложение 5) такие три точки a, b и c из I, что $a<c<b$ и $\frac{f(c)-f(a)}{c-a}>\frac{f(b)-f(c)}{b-c}$; но согласно теореме о конечных приращениях (§ 2, теорема 1) имеем

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\leqslant \sup_{x\in B,\ a<x<c} f'(x) \quad \text{и} \quad \frac{f(b)-f(c)}{b-c}\geqslant \inf_{x\in B,\ c<x<b} f'(x).$$

Таким образом, $\sup\limits_{x\in B,\ a<x<c} f'(x) > \inf\limits_{x\in B,\ c<x<b} f'(x)$, что противоречит нашему предположению о том, что f' возрастает на B.

Если теперь предположить, что f' строго возрастает на B, то f выпукла и не может быть равна линейной функции ни на каком открытом интервале, содержащемся в I, так как на таком интервале f', вопреки предположению, должна быть постоянной.

Следствие. *Пусть f — конечная числовая функция, непрерывная и дважды дифференцируемая на интервале $I\subset\mathbf{R}$; для того чтобы она была выпуклой на I, необходимо и достаточно, чтобы $f''(x)\geqslant 0$ для любого $x\in I$; для того чтобы f была строго выпуклой на I, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось предыдущее условие и чтобы, кроме того, множество точек $x\in I$, в которых $f''(x)>0$, было всюду плотно на I.*

Это следует непосредственно из предыдущего предложения и следствия из теоремы 2 § 2.

Пример. *На интервале $]0, +\infty[$ функция x^r (r — произвольное действительное число) имеет вторую производную, равную $r(r-1)x^{r-2}$; следовательно, она строго выпукла, если $r>1$ или $r<0$, и строго вогнута, если $0<r<1$.*

Для того чтобы сформулировать еще один критерий выпуклости, введем следующее определение: пусть задан график G конечной числовой функции, определенной на интервале $I \subset \mathbf{R}$, и точка a внутри I; будем говорить, что прямая D, проходящая через точку $M_a=(a, f(a))$, находится *локально выше* (соответственно *локально ниже*) графика G в этой точке, если существует такая окрестность $V \subset I$ точки a, что всякая точка прямой D, содержащаяся в $V \times \mathbf{R}$, лежит выше (соответственно ниже) графика G; будем говорить, что D лежит *локально на G* в точке M_0, если существует такая окрестность $V \subset I$ точки a, что пересечение прямой D с $V \times \mathbf{R}$ совпадает с пересечением графика G с $V \times \mathbf{R}$ (другими словами, если D одновременно лежит локально выше и локально ниже G).

Предложение 9. *Пусть конечная числовая функция f полунепрерывна сверху на открытом интервале $I \subset \mathbf{R}$. Для того чтобы f была выпуклой на I, необходимо и достаточно, чтобы для всякой точки M_x графика G функции f любая прямая, лежащая в этой точке локально выше G, лежала локально на G* (в точке M_x).

Условие *необходимо*; в самом деле, если f выпукла на I, то в любой точке M_a графика G функции f существует *опорная прямая* Δ графика G; эта прямая лежит ниже G, и *тем более* локально ниже (n° 3); если прямая D находится локально выше графика G в точке M_a, то она находится локально выше прямой Δ и, значит, совпадает с Δ; поэтому она лежит локально на G в точке M_a.

Условие *достаточно*. Действительно, предположим, что условие выполнено, и допустим, что функция f не является выпуклой на I; тогда в I найдутся такие две точки a и b ($a<b$), что среди точек M_x графика G имеется точка, лежащая строго выше

отрезка M_aM_b (рис. 4). Иными словами, функция $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ принимает строго положительные значения на $[a, b]$; а так как она конечна и полунепрерывна сверху на этом компактном интервале, то ее верхняя грань k на $[a, b]$ конечна и строго положительна, а множество $g^{-1}(k)$ замкнуто и не пусто (Общая топология, гл. IV, § 6, теорема 3 и предложение 1). Пусть c — нижняя грань множества $g^{-1}(k)$; тогда $a < c < b$ и в точке M_c прямая D, имеющая уравнение $y = f(c) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-c)$, лежит локально выше G (рис. 4); но она не может лежать локально на G в этой точке, так как для $a < x < c$ $g(x) < k$, откуда заключаем, что M_x лежит строго ниже D. Значит, мы пришли к противоречию, и предложение доказано.

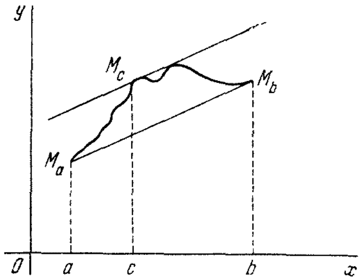

Рис. 4.

Следствие 1. *Для того чтобы конечная числовая функция f, определенная и полунепрерывная сверху на открытом интервале $I \subset \mathbf{R}$, была выпуклой на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in I$ существовало такое $\varepsilon > 0$, что соотношение $|h| \leqslant \varepsilon$ влечет неравенство*

$$f(x) \leqslant \frac{1}{2}(f(x+h) + f(x-h)).$$

Очевидно, можно ограничиться доказательством того, что условие *достаточно*. Если в некоторой точке M_a графика G функции f прямая D лежит локально выше G, то она в этой точке лежит локально на G, так как в противном случае, например, точка M_{a+h} будет лежать строго ниже D, если M_{a-h} лежит ниже D; тогда середина отрезка $M_{a-h}M_{a+h}$ будет лежать строго ниже D (рис. 5) и, согласно предположению, M_a будет тем более лежать строго ниже D, чего не может быть.

Следствие 2. *Пусть f — конечная числовая функция, определенная на открытом интервале $I \subset \mathbf{R}$. Если для любой точки*

$x \in I$ найдется открытый интервал $J_x \subset I$, содержащий x и такой, что сужение функции f на J_x выпукло на J_x, то f выпукла на I.

В самом деле, очевидно, что f удовлетворяет критерию, сформулированному в предложении 8.

Упражнения. 1) а) Пусть H — множество функций, выпуклых на компактном интервале $[a, b] \subset \mathbf{R}$; предположим, что множества $H(a)$ и $H(b)$ ограничены сверху в $\mathbf{R}$ и что существует точка c, $a < c < b$, такая, что $H(c)$ ограничено снизу в $\mathbf{R}$; показать, что множество H *равностепенно непрерывно* во всякой точке открытого интервала с концами a и b (Общая топология, гл. X, § 3).

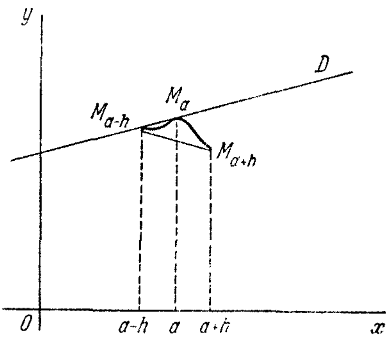

Рис. 5.

б) Пусть H — множество функций, выпуклых на интервале $I \subset \mathbf{R}$, и пусть $\mathfrak{F}$ — фильтр в H, сходящийся на I в смысле простой сходимости к конечной функции f_0; показать, что $\mathfrak{F}$ равномерно сходится к f_0 на любом компактном интервале, содержащемся в I (использовать а)).

2) Показать, что всякая функция f, выпуклая на компактном интервале I, является пределом равномерно сходящейся убывающей последовательности функций, выпуклых на I и имеющих на этом интервале вторую производную (рассмотреть сначала функцию $|x-a|$, а затем приблизить f при помощи линейной комбинации таких функций с положительными коэффициентами и некоторой линейной функции).

3) Пусть функция f выпукла на интервале $I \subset \mathbf{R}$.

а) Показать, что если f не равна постоянной, то она не может достигать своей верхней грани во внутренних точках интервала I.

б) Показать, что если множество I относительно компактно, то f ограничена снизу на I.

в) Показать, что если $I = \mathbf{R}$ и если f не равна постоянной, то f не ограничена на I.

4) Для того чтобы функция f была выпуклой на компактном интервале $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы она была выпукла на $]a, b[$ и чтобы $f(a) \geqslant f(a+)$ и $f(b) \geqslant f(b-)$.

5) Пусть функция f выпукла на открытом интервале $]a, +\infty[$. если существует такая точка c, что функция f строго возрастает на $]c, +\infty[$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

6) Пусть функция f выпукла на интервале $]a, +\infty[$; показать, что $\dfrac{f(x)}{x}$ имеет предел (конечный или равный $+\infty$), когда x стремится к $+\infty$; этот предел является также пределом для $f'_d(x)$ и $f'_g(x)$; он строго положителен, если $f(x)$ стремится к $+\infty$, когда x стремится к $+\infty$.

7) Пусть функция f выпукла на интервале $]a, b[$, где $a \geqslant 0$; показать, что функция $f(x) - xf'_d(x)$ («отнесенная к началу» правая полукасательная) убывает (строго убывает, если f строго выпукла) на этом интервале. Вывести отсюда, что:

а) Если f имеет в точке a конечный предел справа, то функция $(x-a)f'_d(x)$ имеет в этой точке предел справа, равный 0.

б) Функция $\dfrac{f(x)}{x}$ на $]a, b[$ либо возрастает, либо убывает, либо существует $c \in]a, b[$, обладающее тем свойством, что $\dfrac{f(x)}{x}$ убывает на $]a, c[$ и возрастает на $]c, b[$.

в) Предположим, что $b = +\infty$; показать, что если предел

$$\beta = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - xf'_d(x))$$

конечен, то конечен и предел $\alpha = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, а прямая $y = \alpha x + \beta$ является *асимптотой* *) графика функции f и лежит *ниже* этого графика (строго ниже, если f строго выпукла).

8) Пусть f — конечная числовая функция, полунепрерывная сверху на открытом интервале $I \subset \mathbf{R}$. Для того чтобы f была выпуклой на I, необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in I$ выполнялось неравенство

$$\limsup_{h\to 0,\ h\neq 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} \geqslant 0.$$

(Доказать сначала, что для любого $\varepsilon > 0$ функция $f(x) + \varepsilon x^2$ выпукла, воспользовавшись предложением 9.)

°9) Пусть f — конечная числовая функция, полунепрерывная снизу на интервале $I \subset \mathbf{R}$. Для того чтобы f была выпуклой на I, достаточно, чтобы для любой пары точек a, b из I, $a < b$, существовала хотя бы одна такая точка z, $a < z < b$, что M_z лежит ниже отрезка M_aM_b (рассуждать от противного, заметив, что множество тех точек x, для которых M_x лежат строго выше M_aM_b, открыто).

---

*) То есть $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (\alpha x + \beta)) = 0$.

°10) Пусть конечная числовая функция f, определенная на интервале $I \subset \mathbf{R}$, удовлетворяет неравенству $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}(f(x)+f(y))$ для любых x и y из I. Показать, что если f ограничена сверху на *некотором* открытом интервале $]a, b[$, содержащемся в I, то f выпукла на I (сначала доказывается, что f ограничена сверху на *любом* компактном интервале, содержащемся в I, а затем, что f непрерывна в каждой точке внутри I).

°11) Пусть функция f непрерывна на открытом интервале $I \subset \mathbf{R}$ и имеет в каждой точке этого интервала конечную правую производную. Показать, что если для любого $x \in I$ и *любого* $y \in I$ такого, что $y > x$, точка $M_y = (y, f(y))$ лежит выше правой полукасательной в точке $M_x = (x, f(x))$ графика функции f, то f выпукла на I (пользуясь теоремой о конечных приращениях, показать, что $f'_d(y) \geqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ для $x < y$).

Построить пример невыпуклой функции, имеющей в каждой точке конечную правую производную и обладающей тем свойством, что для любого $x \in I$ существует такое зависящее от x число $h_x > 0$, что точка M_y лежит выше правой полукасательной в точке M_x для всякого y, удовлетворяющего условию $x \leqslant y \leqslant x+h_x$. Однако последнее условие становится достаточным условием выпуклости функции f, если предположить к тому же, что f дифференцируема на I (использовать следствие из предложения 1 § 2).

°12) Пусть числовая функция f непрерывна на открытом интервале $I \subset \mathbf{R}$; предположим, что для любой пары (a, b), $a < b$, точек из I график функции f на интервале $[a, b]$ лежит либо целиком выше, либо целиком ниже отрезка M_aM_b. Показать, что f либо выпукла на всем I, либо на всем интервале вогнута (показать, что если в $]a, b[$ существует такая точка c, что M_c лежит строго выше отрезка M_aM_b, то для любого $x \in I$, $x > a$, график функции f на интервале $[a, x]$ лежит выше отрезка M_aM_x).

13) Пусть числовая функция f дифференцируема на открытом интервале $I \subset \mathbf{R}$. Предположим, что для любой пары (a, b), $a < b$, точек из I существует *единственная* точка $c \in]a, b[$, удовлетворяющая условию $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$; показать, что функция f либо строго выпукла на I, либо строго вогнута на I (показать, что f' строго монотонна на I).

14) Пусть числовая функция f выпукла и строго монотонна на открытом интервале $I \subset \mathbf{R}$; пусть, далее, функция g (определенная на интервале $f(I)$) обратна функции f. Показать, что если f убывает (соответственно возрастает) на I, то g выпукла (соответственно вогнута) на $f(I)$.

15) Пусть интервал I содержится в $]0, +\infty[$; показать, что если $f\left(\frac{1}{x}\right)$ выпукла на I, то выпукла и функция $xf(x)$, и обратно.

*16) Пусть положительная функция f выпукла на $]0, +\infty[$, и пусть a и b — произвольные действительные числа. Показать, что функция $x^a f(x^{-b})$ будет выпуклой на $]0, +\infty[$ в следующих случаях:

1° $a = \frac{1}{2}(b+1)$, $|b| \geqslant 1$;

2° $x^a f(x^{-b})$ возрастает, $a(b-a) \geqslant 0$, $a \geqslant \frac{1}{2}(b+1)$;

3° $x^a f(x^{-b})$ убывает, $a(b-a) \geqslant 0$, $a \leqslant \frac{1}{2}(b+1)$.

Показать, при тех же предположениях относительно f, что функция $e^{\frac{x}{2}} f(e^{-x})$ выпукла (использовать упражнение 2).*

17) Пусть две положительные функции f и g выпуклы на интервале $I = [a, b]$; предположим, что существует такая точка $c \in I$, что в каждом из интервалов $[a, c]$ и $[c, b]$ обе функции f и g изменяются в одинаковом направлении. Показать, что произведение fg выпукло на I.

18) Пусть функция f выпукла на интервале $I \subset \mathbf{R}$, а функция g выпукла и возрастает на интервале, содержащем $f(I)$; показать, что функция $g \circ f$ выпукла на I.

°19) Пусть f и g — две конечные числовые функции, одна из которых, f, определена и непрерывна на интервале I, а другая, g, определена и непрерывна на $\mathbf{R}$. Предположим, что для любой пары вещественных чисел (λ, μ) функция $g(f(x) + \lambda x + \mu)$ выпукла на I.

а) Показать, что g выпукла и монотонна на $\mathbf{R}$.

б) Показать, что если g возрастает (соответственно убывает) на $\mathbf{R}$, то f выпукла (соответственно вогнута) на I (использовать предложение 7).

20) Показать, что множество $\mathfrak{K}$ функций, выпуклых на интервале $I \neq \mathbf{R}$, образует *решетку* с отношением порядка «для любого $x \in I$ $f(x) \leqslant g(x)$» (Теория множеств, Результаты, § 6, n° 8). Построить пример двух функций f и g, выпуклых на I и таких, что их нижняя грань на $\mathfrak{K}$ принимает в некоторых точках значение, отличное от $\inf(f(x), g(x))$. Построить пример такого бесконечного семейства (f_α) функций из $\mathfrak{K}$, чтобы $\inf\limits_{\alpha} f_\alpha(x)$ была конечна в любой точке $x \in I$, но чтобы не существовало ни одной функции из $\mathfrak{K}$, меньшей всех f_α.

21) Пусть конечная числовая функция f полунепрерывна сверху на открытом интервале $I \subset \mathbf{R}$. Для того чтобы f была строго выпуклой на I, необходимо и достаточно, чтобы не существовало ни одной прямой, лежащей локально выше графика G функции f в некоторой точке графика G.

ГЛАВА II

ПРИМИТИВНЫЕ И ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Примитивные и интегралы

В этой главе всюду, где не будет оговорено противное, мы будем рассматривать лишь вектор-функции одного *действительного* переменного, принимающие свои значения в *полном* нормированном пространстве над телом $\mathbf{R}$. В частности, когда будет идти речь о числовых функциях, мы будем считать эти функции *конечными*, если заранее не будет указано обратное.

1. Определение примитивных

Вектор-функция $\mathbf{f}$, определенная на интервале $I \subset \mathbf{R}$, может служить в *каждой точке* этого интервала *производной* некоторой вектор-функции $\mathbf{g}$ (определенной и непрерывной на I) только в том случае, если она удовлетворяет довольно жестким условиям: так, например, если $\mathbf{f}$ имеет в некоторой точке x_0 внутри I предел справа *и* предел слева, то на основании предложения 6 главы I, § 2, она должна быть *непрерывной* в точке x_0; отсюда следует, что если в качестве I взять интервал $[-1, +1]$, а в качестве f — числовую функцию, равную -1 на $[-1, 0[$ и $+1$ на $[0, 1]$, то f не будет служить производной никакой функции, непрерывной на I; однако она является производной функции $|x|$ для всех точек, отличных от 0; это приводит нас к следующему определению:

Определение 1. *Если задана вектор-функция* $\mathbf{f}$, *определенная на интервале* $I \subset \mathbf{R}$, *то говорят, что функция* $\mathbf{g}$, *определенная на* I, *является примитивной функции* $\mathbf{f}$, *если* $\mathbf{g}$ *непрерывна на* I *и имеет производную, равную* $\mathbf{f}(x)$, *во всех точках дополнения* (относительно I) *некоторой счетной части интервала* I.

Если $\mathbf{g}$ имеет производную, равную $\mathbf{f}(x)$, в *каждой точке* интервала I, то мы будем говорить, что $\mathbf{g}$ есть *точная* примитивная функции $\mathbf{f}$.

Приняв это определение, мы видим, что рассмотренная выше числовая функция f имеет примитивную, равную $|x|$.

Ясно, что если $\mathbf{f}$ имеет на I примитивную, то всякая примитивная функции $\mathbf{f}$ будет примитивной и для любой функции, равной $\mathbf{f}$ всюду, за исключением точек некоторой счетной части интервала I. Для простоты можно говорить о примитивной на I для функции $\mathbf{f}_0$, определенной только на дополнении (относительно I) некоторой счетной части I; это означает, что речь идет о примитивной всякой функции $\mathbf{f}$, определенной на I и равной $\mathbf{f}_0$ в тех точках, где $\mathbf{f}_0$ определена.

Предложение 1. *Пусть вектор-функция* $\mathbf{f}$ *определена на* I *и принимает свои значения в* E; *если* $\mathbf{f}$ *имеет на* I *примитивную* $\mathbf{g}$, *то множество примитивных функции* $\mathbf{f}$ *на* I *совпадает с множеством функций* $\mathbf{g}+\mathbf{a}$, *где* $\mathbf{a}$ — *постоянная функция*, $\mathbf{a}\in E$.

В самом деле, ясно, что $\mathbf{g}+\mathbf{a}$ является примитивной для $\mathbf{f}$ при любом $\mathbf{a}\in E$; с другой стороны, если $\mathbf{g}_1$ служит примитивной для $\mathbf{f}$, то функция $\mathbf{g}_1-\mathbf{g}$ имеет производную, равную нулю во всех точках интервала I, кроме некоторой его счетной части, и, следовательно, равна постоянной (гл. I, § 2, следствие из теоремы 2).

Говорят, что примитивные для функции $\mathbf{f}$ (если таковые существуют) определены «с точностью до аддитивной постоянной». Для того чтобы выделить какую-нибудь одну примитивную функции $\mathbf{f}$, достаточно задать (произвольно) ее значение в некоторой точке $x_0\in I$; в частности, существует, и притом только одна, примитивная $\mathbf{g}$ функции $\mathbf{f}$ такая, что $\mathbf{g}(x_0)=0$; для любой примитивной $\mathbf{h}$ функции $\mathbf{f}$ имеем $\mathbf{g}(x)=\mathbf{h}(x)-\mathbf{h}(x_0)$.

2. *Существование примитивных*

Пусть функция $\mathbf{f}$ определена на произвольном интервале $I\subset\mathbf{R}$; для того чтобы определенная на I функция $\mathbf{g}$ служила примитивной для $\mathbf{f}$, необходимо и достаточно, чтобы сужение этой функции на любой компактный интервал $J\subset I$ служило примитивной для сужения $\mathbf{f}$ на J.

Теорема 1. *Пусть A — множество, фильтрующееся по фильтру $\mathfrak{F}$, $(\mathbf{f}_\alpha)_{\alpha\in A}$ — семейство вектор-функций со значениями в полном нормированном пространстве E над телом $\mathbf{R}$, определенных на интервале $I\subset\mathbf{R}$, и пусть для любого $\alpha\in A$ функция $\mathbf{g}_\alpha$ есть примитивная функции $\mathbf{f}_\alpha$. Предположим, что:*

1° функции $\mathbf{f}_\alpha$ равномерно сходятся по фильтру $\mathfrak{F}$ на любой компактной части интервала I к функции $\mathbf{f}$;

2° существует такая точка $a\in I$, что семейство $(\mathbf{g}_\alpha(a))$ имеет в E предел по фильтру $\mathfrak{F}$.

При этих условиях функции $\mathbf{g}_\alpha$ равномерно сходятся (по фильтру $\mathfrak{F}$) на любой компактной части интервала I к примитивной $\mathbf{g}$ функции $\mathbf{f}$.

В силу замечания, сделанного в начале этого n°, мы можем ограничиться случаем, когда интервал I *компактен.*

Прежде всего покажем, что функции $\mathbf{g}_\alpha$ равномерно сходятся на I к непрерывной функции $\mathbf{g}$. По предположению, для любого $\varepsilon>0$ существует такое множество $M\in\mathfrak{F}$, что для любых двух индексов α, β, принадлежащих M, при любом $x\in I$ выполняется неравенство $\|\mathbf{f}_\alpha(x)-\mathbf{f}_\beta(x)\|\leqslant\varepsilon$, откуда (гл. I, § 2, теорема 2)

$$\|\mathbf{g}_\alpha(x)-\mathbf{g}_\beta(x)-(\mathbf{g}_\alpha(a)-\mathbf{g}_\beta(a))\|\leqslant\varepsilon|x-a|\leqslant\varepsilon l,$$

где через l обозначена длина интервала I; так как $\mathbf{g}_\alpha(a)$, по условию, стремится к пределу по фильтру $\mathfrak{F}$, то из критерия Коши следует, что функции $\mathbf{g}_\alpha$ равномерно сходятся на I. Остается показать, что предел $\mathbf{g}$ функций $\mathbf{g}_\alpha$ служит примитивной для $\mathbf{f}$.

Пусть для любого целого $n>0$ через α_n обозначен такой индекс, что на I выполняется неравенство $\|\mathbf{f}(x)-\mathbf{f}_{\alpha_n}(x)\|\leqslant\frac{1}{n}$; ясно, что последовательность $(\mathbf{f}_{\alpha_n})$ равномерно сходится к $\mathbf{f}$, а последовательность $(\mathbf{g}_{\alpha_n})$ равномерно сходится к $\mathbf{g}$ на I. Пусть H_n — счетная часть интервала I, на которой $\mathbf{f}_{\alpha_n}$ не является производной функции $\mathbf{g}_{\alpha_n}$, и пусть H — объединение множеств H_n, являющееся, таким образом, счетной частью интервала I. Покажем, что в любой точке $x\in I$, не принадлежащей H, $\mathbf{g}$ имеет производную, равную $\mathbf{f}(x)$. В самом деле, как и выше, ясно, что для всякого $m\geqslant n$ и для любого $y\in I$ выполняется неравенство

$$\|\mathbf{g}_{\alpha_m}(y)-\mathbf{g}_{\alpha_m}(x)-(\mathbf{g}_{\alpha_n}(y)-\mathbf{g}_{\alpha_n}(x))\|\leqslant\frac{2}{n}|y-x|.$$

Заставив m неограниченно возрастать, получим, что

$$\| \mathbf{g}(y)-\mathbf{g}(x)-(\mathbf{g}_{\alpha_n}(y)-\mathbf{g}_{\alpha_n}(x))\| \leqslant \frac{2}{n}|y-x|$$

для любого $y \in I$; но существует такое $h>0$, что для $|y-x| \leqslant h$ и $y \in I$ имеем

$$\| \mathbf{g}_{\alpha_n}(y)-\mathbf{g}_{\alpha_n}(x)-\mathbf{f}_{\alpha_n}(x)(y-x)\| \leqslant \frac{1}{n}|y-x|;$$

а так как, с другой стороны, $\|\mathbf{f}(x)-\mathbf{f}_{\alpha_n}(x)\| \leqslant \frac{1}{n}$, то окончательно получаем, что

$$\| \mathbf{g}(y)-\mathbf{g}(x)-\mathbf{f}(x)(y-x)\| \leqslant \frac{4}{n}|y-x|$$

для $y \in I$ и $|y-x| \leqslant h$, что и завершает доказательство.

Следствие 1. *Множество $\mathscr{H}$ отображений интервала I в E, имеющих на I примитивную, образует замкнутое* (а значит, *полное*) *векторное подпространство полного векторного пространства $\mathscr{F}_c(I, E)$ отображений интервала I в E, наделенное топологией равномерной сходимости на любой компактной части интервала I* (Общая топология, гл. X, § 1).

Следствие 2. *Пусть x_0 — точка из I, и пусть для каждой функции $\mathbf{f} \in \mathscr{H}$ функция $P(\mathbf{f})$ есть примитивная функции $\mathbf{f}$, обращающаяся в нуль в точке x_0; тогда отображение $\mathbf{f} \to P(\mathbf{f})$ множества $\mathscr{H}$ в $\mathscr{F}_c(I, E)$ линейно и непрерывно.*

Следствие 1 теоремы 1 позволяет установить существование примитивных для некоторых категорий функций следующим образом: если известно, что функции, принадлежащие части $\mathscr{A}$ пространства $\mathscr{F}_c(I, E)$, имеют примитивную, то этим свойством обладают и функции, принадлежащие *замыканию* в $\mathscr{F}_c(I, E)$ векторного подпространства, порожденного множеством $\mathscr{A}$. Этот метод мы применим в следующем n°.

3. *Линейчатые функции*

Определение 2. *Говорят, что отображение $\mathbf{f}$ интервала $I \subset \mathbf{R}$ в множество E есть ступенчатая функция, если существует такое разбиение интервала I на конечное число интервалов J_k, что функция $\mathbf{f}$ постоянна на каждом из J_k.*

Пусть $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ — строго возрастающая последовательность, образованная различными концами интервалов J_k; так как J_k попарно не пересекаются, то каждый из них либо сводится к некоторой точке a_i, либо представляет собой интервал с концами в двух последовательных точках a_i, a_{i+1}; кроме того, так как I является объединением интервалов J_k, то a_0 — левый, а a_n — правый конец интервала I. Следовательно, всякая ступенчатая функция на I может быть охарактеризована как функция, постоянная на каждом из открытых интервалов $]a_i, a_{i+1}[$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$, где $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ — такая строго возрастающая последовательность точек из I, что a_0 есть левый, а a_n — правый конец интервала I.

Предложение 2. *Множество ступенчатых функций, определенных на интервале I и принимающих значения в векторном пространстве E над телом* $\mathbf{R}$, *образует векторное подпространство $\mathscr{E}$ векторного пространства $\mathscr{F}(I, E)$ всех отображений I в E.*

В самом деле, пусть $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ — две ступенчатые функции, а (A_i) и (B_j) — два разбиения интервала I на конечное число таких интервалов, что $\mathbf{f}$ (соответственно $\mathbf{g}$) постоянна на каждом из A_i (соответственно B_j); очевидно, что для любых действительных чисел λ и μ функция $\lambda\mathbf{f}+\mu\mathbf{g}$ постоянна на каждом из непустых интервалов $A_i \cap B_j$, которые снова образуют разбиение интервала I.

Следствие. *Векторное подпространство $\mathscr{E}$ порождается характеристическими функциями интервалов.*

Теперь мы рассмотрим случай, когда E есть нормированное пространство над телом $\mathbf{R}$; тогда очевидно, что характеристическая функция интервала J с концами a, b $(a<b)$ имеет примитивную, а именно функцию, равную: a для $x \leqslant a$, x для $a \leqslant x \leqslant b$ и b для $x \geqslant b$. Таким образом, следствие из предложения 2 показывает, что *всякая ступенчатая функция со значениями в E имеет примитивную.*

Теперь мы можем применить метод, изложенный в n°2.

Определение 3. *Вектор-функция, определенная на интервале I и принимающая значения в полном нормированном про-*

странстве E над телом $\mathbf{R}$, *называется линейчатой, если она на любой компактной части интервала I является равномерным пределом ступенчатых функций.*

Иными словами, линейчатые функции являются предельными элементами в $\mathscr{F}_c(I, E)$ векторного подпространства $\mathscr{E}$ ступенчатых функций; $\overline{\mathscr{E}}$ есть векторное подпространство пространства $\mathscr{F}_c(I, E)$, а поскольку последнее полно, то полно и $\overline{\mathscr{E}}$, то есть функция, являющаяся на любой компактной части интервала I равномерным пределом линейчатых функций, снова линейчата на I. Для того чтобы $\mathbf{f}$ была линейчатой на I, необходимо и достаточно, чтобы ее сужение на любой компактный интервал, содержащийся в I, было линейчатой функцией.

Следствие 1 теоремы 1 показывает, что справедлива

Теорема 2. *Всякая функция, линейчатая на интервале I, имеет на нем примитивную.*

Преобразуем определение 3 в другое, ему эквивалентное:

Теорема 3. *Для того чтобы вектор-функция* $\mathbf{f}$, *определенная на интервале I и принимающая значения в полном нормированном пространстве E над телом* $\mathbf{R}$, *была линейчатой, необходимо и достаточно, чтобы она имела предел справа и предел слева во всякой внутренней точке интервала I, предел справа в его левом конце и предел слева в его правом конце, если эти точки принадлежат I. Множество точек разрыва функции* $\mathbf{f}$ *счетно.*

Так как всякий интервал I есть объединение счетного множества компактных интервалов, то можно ограничиться доказательством теоремы 3 для того случая, когда интервал I *компактен*, скажем, $I = [a, b]$.

1° Условие *необходимо*. Действительно, предположим, что $\mathbf{f}$ линейчата, и пусть x — точка из I, отличная от b. По условию, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая ступенчатая функция $\mathbf{g}$, что $\|\mathbf{f}(z) - \mathbf{g}(z)\| \leqslant \varepsilon$ для любого $z \in I$; так как $\mathbf{g}$ имеет в точке x предел справа, то найдется такая точка y, $x < y \leqslant b$, что для любой пары точек z, z' интервала $]x, y]$ выполняется неравенство $\|\mathbf{g}(z) - \mathbf{g}(z')\| \leqslant \varepsilon$, а значит и неравенство $\|\mathbf{f}(z) - \mathbf{f}(z')\| \leqslant 3\varepsilon$;

это показывает (критерий Коши), что $\mathbf{f}$ имеет предел справа в точке x. Точно так же доказывается, что $\mathbf{f}$ имеет предел слева во всякой точке из I, отличной от a.

2° Условие *достаточно*. Пусть оно выполнено; тогда для любого $x \in I$ существует такой содержащий x открытый интервал $V_x =]c_x, d_x[$, что на пересечении интервала I с каждым из открытых интервалов $]c_x, x[$, $]x, d_x[$ (если это пересечение не пусто) колебание функции $\mathbf{f}$ не превосходит ε. А поскольку интервал I компактен, то в I найдется конечное число таких точек x_i, что V_{x_i} образуют покрытие интервала I; пусть $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ — последовательность, полученная путем расположения в возрастающем порядке точек конечного множества, состоящего из a, b и из точек x_i, c_{x_i} и d_{x_i}, принадлежащих I; так как каждый из интервалов $]a_k, a_{k+1}[$ $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ содержится в интервале $]c_{x_i}, x_i[$ или в интервале $]x_i, d_{x_i}[$, то колебание функции $\mathbf{f}$ на этом интервале не превосходит ε; пусть c_k — одно из значений функции $\mathbf{f}$ на $]a_k, a_{k+1}[$; положив $\mathbf{g}(a_k) = \mathbf{f}(a_k)$ для $0 \leqslant k \leqslant n$ и $\mathbf{g}(x) = c_k$ для любого $x \in]a_k, a_{k+1}[$ $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$, мы тем самым определим такую ступенчатую функцию $\mathbf{g}$, что $\|\mathbf{f}(z) - \mathbf{g}(z)\| \leqslant \varepsilon$ на I; следовательно, $\mathbf{f}$ линейчата на I.

Покажем, наконец, что если $\mathbf{f}$ линейчата на I, то множество ее точек разрыва счетно. Для любого $n > 0$ существует такая ступенчатая функция $\mathbf{g}_n$, что $\|\mathbf{f}(x) - \mathbf{g}_n(x)\| \leqslant \frac{1}{n}$ на I; так как последовательность $(\mathbf{g}_n)$ равномерно сходится на I к функции $\mathbf{f}$, то $\mathbf{f}$ непрерывна в каждой точке, в которой непрерывны все $\mathbf{g}_n$ (Общая топология, гл. X, § 2); но поскольку каждая функция $\mathbf{g}_n$ непрерывна всюду, за исключением точек конечного множества H_n, то $\mathbf{f}$ непрерывна в точках дополнения множества $H = \bigcup_n H_n$, которое счетно.

Следствие 1. *Пусть функция* $\mathbf{f}$ *линейчата на* I; *всякая примитивная этой функции имеет в каждой точке интервала* I, *за исключением его правого* (соответственно *левого*) *конца, правую производную, равную* $\mathbf{f}(x+)$ (соответственно *левую производную, равную* $\mathbf{f}(x-)$); *в частности, в каждой точке* x, *в которой* $\mathbf{f}$ *непрерывна*, $\mathbf{f}(x)$ *служит производной для любой из своих примитивных.*

Это следует сразу из доказанной выше теоремы 3 и из предложения 6 главы I, § 2.

Следствие 2. *Пусть функции* $\mathbf{f}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *линейчаты на интервале* I *и каждая из* $\mathbf{f}_i$ *принимает свои значения в полном нормированном пространстве* E_i *над телом* $\mathbf{R}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. *Если* $\mathbf{g}$ — *непрерывное отображение подпространства* $\prod_{i=1}^{n} \mathbf{f}_i(I)$ *пространства* $\prod_{i=1}^{n} E_i$ *в полное нормированное пространство* F *над телом* $\mathbf{R}$, *то сложная функция* $x \to \mathbf{g}(\mathbf{f}_1(x), \mathbf{f}_2(x), \ldots, \mathbf{f}_n(x))$ *линейчата на* I.

В самом деле, $\mathbf{g}$ очевидным образом удовлетворяет условиям теоремы 3.

Таким образом, мы видим, что если вектор-функция $\mathbf{f}$ линейчата на I, то числовая функция $x \to \|\mathbf{f}(x)\|$ тоже линейчата. Кроме того, линейчатые числовые функции на I образуют *кольцо*; а также, если f и g — две линейчатые числовые функции, то $\sup(f, g)$ и $\inf(f, g)$ линейчаты.

Замечание. Если f — линейчатая числовая функция на I, а $\mathbf{g}$ — линейчатая вектор-функция на интервале, содержащем $f(I)$, то сложная функция $\mathbf{g} \circ f$ может и не быть линейчатой (ср. упражнение 4).

Особый интерес представляют два частных случая теоремы 3:

Предложение 3. *Всякая вектор-функция, непрерывная на интервале* $I \subset \mathbf{R}$ *и принимающая свои значения в полном нормированном пространстве* E *над телом* $\mathbf{R}$, *линейчата и имеет на* I *примитивную, для которой служит производной в каждой точке.*

Замечания. 1) Для доказательства существования примитивной у непрерывной функции можно использовать тот факт, что всякий многочлен (с коэффициентами из E) от одного действительного переменного имеет примитивную; а так как согласно теореме Вейерштрасса (Общая топология, гл. X, § 5) всякая непрерывная функция есть равномерный предел многочленов на любом компактном интервале, то теорема 1 показывает, что всякая непрерывная функция имеет примитивную.

2) Предыдущее замечание без существенных изменений переносится на вектор-функции одного *комплексного* переменного со значениями в полном нормированном пространстве над телом $\mathbf{C}$. Если открытое в $\mathbf{C}$ множество U гомеоморфно $\mathbf{C}$, то *примитивная* такой вектор-функции $\mathbf{f}$, определенной на U, есть, по определению, функция, непрерывная на U и имеющая в каждой точке из U производную, равную $\mathbf{f}$. При таком определении теорема 1 переносится на такие функции без каких бы то ни было изменений (в самом деле, приняв во внимание связность U, доказываем, что последовательность $(\mathbf{g}_\alpha)$ равномерно сходится по $\mathfrak{F}$ в окрестности любой точки множества U, откуда следует, что $(\mathbf{g}_\alpha)$ равномерно сходится по $\mathfrak{F}$ на любой компактной части множества U; конец доказательства проводится с применением предложения 4 гл. I, § 2). Следовательно, всякая функция, являющаяся равномерным пределом многочленов на любой компактной части множества U, имеет на U примитивную; эти функции являются не чем иным, как функциями, которые называют *голоморфными* на U и которые мы будем изучать более подробно в одной из последующих книг.

Предложение 4. *Всякая числовая функция f, монотонная на интервале $I \subset \mathbf{R}$, линейчата, и всякая примитивная этой функции выпукла на I.*

В самом деле, f удовлетворяет критерию, сформулированному в теореме 3 (Общая топология, гл. IV, § 5, предложение 4); вторая же часть предложения вытекает из следствия 1 вышеуказанной теоремы 3 и из предложения 7, гл. I, § 4.

Замечание. Не следует полагать, что функции, линейчатые на интервале I, исчерпывают класс функций, имеющих примитивную на I (ср. упражнения 7 и 8).

4. *Интегралы*

Мы получили (теоремы 1 и 2) примитивную функции, линейчатой на интервале I, как равномерный предел примитивных для ступенчатых функций. Это может быть сделано и несколько иным путем. Пусть x_0, x — любые две точки из I, $x_0 < x$; назовем *разбиением* интервала $[x_0, x]$ любую последовательность интервалов $[x_i, x_{i+1}]$, составляющих в сумме $[x_0, x]$, где $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ есть строго возрастающая последовательность точек из $[x_0, x]$, в которой $x_n = x$. *Суммой Римана* для вектор-функции $\mathbf{f}$, определенной на I, и относительно разбиения, состоящего из интервалов $[x_i, x_{i+1}]$, будем называть всякое выражение вида $\sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{f}(t_i)(x_{i+1}-x_i)$, где t_i принадлежит интервалу $[x_i, x_{i+1}]$ для $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Тогда получим следующее предложение:

Предложение 5. *Пусть* $\mathbf{f}$ — *линейчатая функция на интервале* I, $\mathbf{g}$ — *примитивная функции* $\mathbf{f}$ *на* I, $[x_0, x]$ — *компактный интервал, содержащийся в* I. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое число* $\rho > 0$, *что для всякого разбиения интервала* $[x_0, x]$ *на интервалы, длина которых не превосходит* ρ, *выполняется неравенство*

$$\left\| \mathbf{g}(x) - \mathbf{g}(x_0) - \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{f}(t_i)(x_{i+1}-x_i) \right\| \leqslant \varepsilon \qquad (1)$$

для любой суммы Римана относительно этого разбиения.

Действительно, пусть $\mathbf{f}_1$ — такая ступенчатая функция, что $\|\mathbf{f}(y) - \mathbf{f}_1(y)\| \leqslant \varepsilon$ для любого $y \in [x_0, x]$; тогда, обозначив через $\mathbf{g}_1$ примитивную функции $\mathbf{f}_1$ на I, в силу теоремы о конечных приращениях получим неравенство $\|\mathbf{g}(x) - \mathbf{g}(x_0) - (\mathbf{g}_1(x) - \mathbf{g}_1(x_0))\| \leqslant \varepsilon(x - x_0)$, а с другой стороны,

$$\left\| \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{f}(t_i)(x_{i+1}-x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{f}_i(t_i)(x_{i+1}-x_i) \right\| \leqslant \varepsilon(x - x_0)$$

Значит, достаточно доказать предложение для того случая, когда $\mathbf{f}$ — *ступенчатая функция*. Пусть $(y_k)_{1 \leqslant k \leqslant m}$ — строго возрастающая последовательность точек разрыва функции $\mathbf{f}$ на интервале $[x_0, x]$. Для любого разбиения интервала $[x_0, x]$ на интервалы длины, не превосходящей ρ, каждая из точек y_k принадлежит одновременно не более чем двум интервалам; значит, в $[x_0, x]$ может существовать не более $2m$ интервалов, на которых $\mathbf{f}$ не равна постоянной; но для такого интервала $[x_i, x_{i+1}]$ имеем

$$\| \mathbf{g}(x_{i+1}) - \mathbf{g}(x_i) - \mathbf{f}(t_i)(x_{i+1}-x_i) \| \leqslant 2M(x_{i+1}-x_i),$$

где через M обозначена верхняя грань функции $\|\mathbf{f}\|$ на $[x_0, x]$. Напротив, когда $\mathbf{f}$ постоянна на $[x_i, x_{i+1}]$, то

$$\mathbf{g}(x_{i+1}) - \mathbf{g}(x_i) - \mathbf{f}(t_i)(x_{i+1}-x_i) = 0.$$

Таким образом, очевидно, что разность

$$\left\| \mathbf{g}(x) - \mathbf{g}(x_0) - \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{f}(t_i)(x_{i+1}-x_i) \right\|$$

не может превышать $4Mm\varrho$; следовательно, для получения неравенства (1) достаточно взять $\varrho \leqslant \frac{\varepsilon}{4Mm}$.

Замечание. Если $\mathbf{f}$ *непрерывна*, то предложение 5 доказывается проще: так как $\mathbf{f}$ равномерно непрерывна на $[x_0, x]$, то существует такое $\varrho > 0$, что на любом содержащемся в $[x_0, x]$ интервале длины, не превосходящей ϱ, колебание функции $\mathbf{f}$ будет меньше или равно $\frac{\varepsilon}{x-x_0}$; для всякого разбиения интервала $[x_0, x]$ на интервалы $[x_i, x_{i+1}]$ длины, не превосходящей ϱ, и для любого выбора точек t_i в $[x_i, x_{i+1}]$ при $0 \leqslant i \leqslant n-1$ ступенчатая функция $\mathbf{f}_1$, равная $\mathbf{f}(t_i)$ на $[x_i, x_{i+1}[$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$ и $\mathbf{f}(x)$ в точке x, обладает тем свойством, что $\|\mathbf{f}(y)-\mathbf{f}_1(y)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{x-x_0}$ на $[x_0, x]$; если $\mathbf{g}_1$ — примитивная функции $\mathbf{f}_1$, то $\mathbf{g}_1(x)-\mathbf{g}_1(x_0) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \mathbf{f}(t_i)(x_{i+1}-x_i)$, и соотношение (1) получается тотчас после применения теоремы о конечных приращениях.

На протяжении остальной части этой главы мы ограничимся изучением примитивных для *линейчатых* функций на интервале I. Для такой функции $\mathbf{f}$ со значениями в E, для ее примитивной $\mathbf{g}$ и для любых двух точек x_0, x из I элемент $\mathbf{g}(x)-\mathbf{g}(x_0)$ пространства E (который, очевидно, будет один и тот же независимо от того, какую именно примитивную $\mathbf{g}$ функции $\mathbf{f}$ мы рассматриваем) называется *интегралом функции* $\mathbf{f}$ *от* x_0 *до* x (или *на компактном интервале* $[x_0, x]$) и обозначается $\int\limits_{x_0}^{x} \mathbf{f}(t)\,dt$ или $\int\limits_{x_0}^{x} \mathbf{f}$. И термин этот, и обозначение берут свое начало в предложении 5, где показано, что интеграл можно с любой точностью приблизить суммой Римана; в частности, можно, взяв разбиение интервала $[x_0, x]$ на равные интервалы, написать

$$\frac{1}{x-x_0}\int\limits_{x_0}^{x} \mathbf{f}(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{f}\left(x_0 + k\,\frac{x-x_0}{n}\right). \qquad (2)$$

Иными словами, элемент $\frac{1}{x-x_0}\int\limits_{x_0}^{x} \mathbf{f}(t)\,dt$ есть предел *среднего арифметического* значений функции $\mathbf{f}$ в левых концах интервалов разбиения $[x_0, x]$ на равные интервалы; его называют еще *средним значением* функции $\mathbf{f}$ на интервале $[x_0, x]$.

По определению, функция

$$x \to \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(t)\,dt$$

есть не что иное, как примитивная функции $\mathbf{f}$, обращающаяся в нуль в точке $x_0 \in I$; ее обозначают снова через $\int_{x_0} \mathbf{f}(t)\,dt$ или $\int_{x_0} \mathbf{f}$.

Замечания. 1) Для произвольной функции $\mathbf{h}$, определенной на I и принимающей значения в E, выражение $\mathbf{h}(x) - \mathbf{h}(x_0)$ записывается также в виде $\mathbf{h}(t)\,|_{x_0}^{x}$; при таком обозначении для любой примитивной $\mathbf{g}$ линейчатой функции $\mathbf{f}$ на интервале I мы можем написать, что

$$\int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(t)\,dt = \mathbf{g}(t)\,|_{x_0}^{x}. \tag{3}$$

2) Выражения $\int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(t)\,dt$, $\mathbf{g}(t)\Big|_{x_0}^{x}$ являются «сокращенными символами», представляющими собой структуры, в которые *входят* буквы x, x_0, $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$, но *не входит* буква t (ср. Теория множеств, гл. I, § 1, n° 1); говорят, что в этих символах t является «немой переменной»; следовательно, t в этих символах можно заменить любым другим аргументом, отличным от x, x_0, $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ (и от аргументов, которые могут входить в то доказательство, в котором фигурируют такие символы), и при этом смысл полученного символа не изменится (предлагаем читателю сравнить эти символы с такими символами, как $\sum_{i=1}^{n} x_i$ и $\bigcup X_i$, в которых i также служит немой переменной).

3) Приближение интеграла суммами Римана имеет прямое отношение к одному из исторических истоков понятия интеграла — к проблеме плоской *меры*. К этому пункту мы вернемся в книге VI, посвященной тем обобщениям понятия интеграла, к которым эта проблема приводит; в этих обобщениях «интегрируемые» функции определены не обязательно на части множества $\mathbf{R}$; с другой стороны, даже когда речь идет о числовых функциях f одного действительного переменного (не обязательно линейчатых), для которых можно

определить интеграл $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$, функция $x \to \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ не всегда служит примитивной для f и существуют функции, имеющие примитивную, но не «интегрируемые» в привычном для нас смысле.

5. Свойства интегралов

Свойства интегралов от линейчатых функций являются не чем иным, как *переложением* на язык интегралов свойств производных, доказанных в главе I.

Во-первых, формула (3) показывает, что для любых точек x, y, z из I

$$\int_{x}^{x} \mathbf{f}(t)\,dt = 0, \tag{4}$$

$$\int_{x}^{y} \mathbf{f}(t)\,dt + \int_{y}^{x} \mathbf{f}(t)\,dt = 0, \tag{5}$$

$$\int_{x}^{y} \mathbf{f}(t)\,dt + \int_{y}^{z} \mathbf{f}(t)\,dt + \int_{z}^{x} \mathbf{f}(t)\,dt = 0. \tag{6}$$

Далее, на основании предложения 1 § 1 имеем

$$\int_{x_0} (\mathbf{f}+\mathbf{g}) = \int_{x_0} \mathbf{f} + \int_{x_0} \mathbf{g} \tag{7}$$

и для любого скаляра k

$$\int_{x_0} k\mathbf{f} = k \int_{x_0} \mathbf{f}. \tag{8}$$

Пусть E, F — два полных нормированных пространства над телом $\mathbf{R}$, $\mathbf{u}$ — непрерывное линейное отображение E в F. Если $\mathbf{f}$ — линейчатая функция на I со значениями в E, то $\mathbf{u} \circ \mathbf{f}$ есть линейчатая функция на I со значениями в F (следствие 2 из теоремы 3) и (гл. I, § 1, предложение 2)

$$\int_{a}^{b} \mathbf{u}(\mathbf{f}(t))\,dt = \mathbf{u}\left(\int_{a}^{b} \mathbf{f}(t)\,dt\right). \tag{9}$$

Пусть теперь E, F, G — три полных нормированных пространства над телом $\mathbf{R}$, и пусть $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \to [\mathbf{xy}]$ — непрерывное билинейное отображение произведения $E \times F$ в G. Пусть, далее, $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ — две вектор-функции, определенные и непрерывные на I и принимающие свои значения соответственно в E и в F; кроме того, предположим, что обе функции $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ служат примитивными для линейчатых функций, которые мы можем обозначить через $\mathbf{f}'$ и $\mathbf{g}'$ (действительно, эти функции отличаются от соответствующих производных функций $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ не более чем на счетном множестве точек). Согласно предложению 3 главы I, § 1, функция $\mathbf{h}(x) = [\mathbf{f}(x)\,\mathbf{g}(x)]$ в каждой точке дополнения некоторой счетной части интервала I имеет производную, равную $[\mathbf{f}(x)\,\mathbf{g}'(x)] + [\mathbf{f}'(x)\,\mathbf{g}(x)]$. Но в силу непрерывности функции $[\mathbf{xy}]$ и на основании следствия 2 из теоремы 3 каждая из функций $[\mathbf{f}\mathbf{g}']$ и $[\mathbf{f}'\,\mathbf{g}]$ является линейчатой функцией на I; следовательно, имеет место формула

$$\int_a^b [\mathbf{f}'(t)\,\mathbf{g}(t)]\,dt = [\mathbf{f}(t)\,\mathbf{g}(t)]\Big|_a^b - \int_a^b [\mathbf{f}(t)\,\mathbf{g}'(t)]\,dt, \tag{10}$$

называемая *формулой интегрирования по частям* и позволяющая находить многочисленные примитивные.

Например, формула интегрирования по частям дает нам следующую формулу:

$$\int_{x_0}^{x} t\mathbf{f}'(t)\,dt = t\mathbf{f}(t)\Big|_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(t)\,dt,$$

и, значит, позволяет сводить вычисление примитивных одной из функций $\mathbf{f}(x)$ и $x\mathbf{f}'(x)$ к другой.

Точно так же, если $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ дифференцируемы n раз на интервале I и если $\mathbf{f}^{(n)}$ и $\mathbf{g}^{(n)}$ — линейчатые функции на I, то формула (5) главы I, § 3, эквивалентна следующей:

$$\int_a^b [\mathbf{f}^{(n)}(t)\,\mathbf{g}(t)]\,dt =$$

$$= \left(\sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p\,[\mathbf{f}^{(n-p-1)}(t)\,\mathbf{g}^{(p)}(t)]\right)\Big|_a^b + (-1)^n \int_a^b [\mathbf{f}(t)\,\mathbf{g}^{(n)}(t)]\,dt, \tag{11}$$

называемой *формулой интегрирования по частям порядка* n.

Найдем теперь аналог формулы дифференцирования сложных функций (гл. I, § 1, предложение 5). Пусть числовая функция f, определенная и непрерывная на I, служит примитивной для некоторой линейчатой на I функции (которую мы для краткости снова обозначим через f'); с другой стороны, пусть вектор-функция $\mathbf{g}$ (со значениями в полном нормированном пространстве) *непрерывна* на открытом интервале J, содержащем $f(I)$; любая примитивная $\mathbf{h}$ функции $\mathbf{g}$ на J имеет в каждой точке этого интервала производную, равную $\mathbf{g}$ (предложение 3); следовательно, сложная функция $\mathbf{h}\circ f$ имеет производную, равную $\mathbf{g}(f(x))\,f'(x)$ во всех точках дополнения (относительно I) некоторой счетной части интервала I (гл. I, § 1, предложение 5); так как функция $\mathbf{g}(f(x))\,f'(x)$ линейчата (следствие 2 из теоремы 3), то мы можем написать формулу

$$\int_a^b \mathbf{g}(f(t))\,f'(t)\,dt = \int_{f(a)}^{f(b)} \mathbf{g}(u)\,du, \tag{12}$$

называемую *формулой замены переменных*, которая также упрощает вычисление примитивных.

Если, например, взять $f(x)=x^2$, то очевидно, что формула (12) позволяет свести вычисление примитивных для одной из функций $\mathbf{g}(x)$ и $x\mathbf{g}(x^2)$ к другой.

Для того чтобы перенести теорему о конечных приращениях (гл. I, § 2, теорема 1) на примитивные линейчатых числовых функций, заметим, что числовая функция f, линейчатая на компактном интервале I, ограничена на I. Пусть J — множество точек из I, в которых f *непрерывна*, и пусть $m=\inf\limits_{x\in J} f(x)$, $M=\sup\limits_{x\in J} f(x)$. Известно (теорема 3), что множество $I\cap \complement J$ счетно; кроме того, если B есть дополнение относительно I некоторой счетной части интервала I и $m'=\inf\limits_{x\in B} f(x)$, $M'=\sup\limits_{x\in B} f(x)$, то $m'\leqslant m\leqslant M\leqslant M'$; в самом деле, для каждой точки $x\in J$ найдутся точки y из B, сколь угодно близкие к x, и значит, $m'\leqslant f(y)\leqslant \leqslant M'$; так как f непрерывна в точке x, то, устремив y к x (по множеству B), получаем $m'\leqslant f(x)\leqslant M'$, что доказывает наше утверждение. После этого перенесение теоремы о конечных приращениях дает нам следующее предложение:

Предложение 6 (теорема о среднем). *Пусть числовая функция f линейчата на компактном интервале $I=[a, b]$; если J — множество точек из I, в которых f непрерывна, и если*

$m = \inf\limits_{x \in J} f(x)$, $M = \sup\limits_{x \in J} f(x)$, *то*

$$m < \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,dt < M, \tag{13}$$

за исключением того случая, когда f постоянна на J. Тогда все три члена неравенства (13) *равны между собой.*

Иными словами, *среднее значение* линейчатой функции f на I заключено между гранями этой функции на той части интервала, на которой f непрерывна.

Следствие 1. *Если числовая функция f линейчата на I и в точках непрерывности $f(x) \geqslant 0$, то $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,dt > 0$, за исключением того случая, когда в точках непрерывности $f(x) = 0$.*

Следствие 2. *Пусть две числовые функции f и g линейчаты на I, и пусть $g(x) \geqslant 0$ в тех точках, где она непрерывна; если m и M — нижняя и верхняя грани функции f на множестве точек из I, в которых f непрерывна, то*

$$\frac{m}{b-a} \int_a^b g(t)\,dt \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,g(t)\,dt \leqslant \frac{M}{b-a} \int_a^b g(t)\,dt. \tag{14}$$

Равенство двух левых (соответственно *двух правых*) *частей этой формулы достигается лишь в том случае, когда $g(x)(f(x) - m) = 0$* (соответственно $g(x)(f(x) - M) = 0$) *в каждой точке, в которой обе функции непрерывны.*

Для вектор-функций теорема о конечных приращениях (гл. 1, § 2, теорема 2) позволяет сформулировать следующее предложение:

Предложение 7. *Пусть вектор-функция $\mathbf{f}$ линейчата на компактном интервале $I = [a, b]$ и принимает свои значения в полном нормированном пространстве E, и пусть линейчатая на I числовая функция g такова, что $g(x) \geqslant 0$ в точках непрерывности; тогда*

$$\left\| \int_a^b \mathbf{f}(t)\,g(t)\,dt \right\| \leqslant \int_a^b \|\mathbf{f}(t)\|\,g(t)\,dt. \tag{15}$$

Как частный случай этой формулы получаем неравенство

$$\left\| \int_a^b \mathbf{f}(t)\,dt \right\| \leqslant \int_a^b \|\mathbf{f}(t)\|\,dt. \tag{16}$$

6. *Интегральная форма остаточного члена в формуле Тейлора; примитивные высших порядков*

Формула интегрирования по частям порядка n (формула (11)) позволяет выразить в интегральной форме остаточный член $r_n(x)$ разложения Тейлора n-го порядка функции $\mathbf{f}$, имеющей $(n+1)$-ю производную, линейчатую на интервале I (гл. I, § 3, n° 2); в самом деле, заменив в формуле (11) $\mathbf{f}$ на $\mathbf{f}'$, b на x и $g(t)$ на функцию $\frac{(t-x)^n}{n!}$, получим формулу

$$\mathbf{f}(x) = \mathbf{f}(a) + \mathbf{f}'(a)\frac{(x-a)}{1!} + \mathbf{f}''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots + \mathbf{f}^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + \\ + \int_a^x \mathbf{f}^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt, \tag{17}$$

то есть формулу

$$\mathbf{r}_n(x) = \int_a^x \mathbf{f}^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt, \tag{18}$$

которая часто позволяет получать простые оценки остаточного члена.

Если на интервале I задана линейчатая функция $\mathbf{f}$, то любая ее примитивная $\mathbf{g}$, будучи непрерывной на I, имеет в свою очередь примитивную; любая из примитивных какой угодно примитивной для $\mathbf{f}$ называется *второй примитивной* для функции $\mathbf{f}$. Вообще, *примитивной n-го порядка* для функции $\mathbf{f}$ называется примитивная примитивной $(n-1)$-го порядка для $\mathbf{f}$. Проведя индукцию по n, сразу видим, что разность двух примитивных n-го порядка функции $\mathbf{f}$ есть *многочлен степени, меньшей или равной* $n-1$ (с коэффициентами из E). Примитивная n-го порядка функции $\mathbf{f}$ полностью определена, если задано ее значение и значение ее $n-1$ первых производных в некоторой точке $a \in I$.

Будем, в частности, обозначать через $\int\limits_a^{(n)} \mathbf{f}$ те примитивные n-го порядка функции $\mathbf{f}$, которые в точке a равны нулю вместе со своими $n-1$ производными. Формула Тейлора $(n-1)$-го порядка, примененная к такой примитивной, показывает, что если $\mathbf{g}=\int\limits_a^{(n)} \mathbf{f}$, то имеет место формула

$$\mathbf{g}(x)=\int\limits_a^x \mathbf{f}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt, \tag{19}$$

позволяющая, таким образом, нахождение примитивных n-го порядка свести к вычислению одного-единственного интеграла.

Упражнения. °1) Пусть (f_α) — множество числовых функций, определенных на интервале I, имеющих на I точную примитивную и образующих множество, фильтрующееся по отношению $\leqslant$. Пусть f — верхняя огибающая семейства (f_α); предположим, что f имеет на I точную примитивную. Показать, что если g_α (соответственно g) есть примитивная функции f_α (соответственно f), обращающаяся в нуль в точке $x_0 \in I$, то g является верхней огибающей семейства (g_α). (Сначала, обозначив через u верхнюю огибающую семейства (g_α), показать, что для $h>0$ выполняется неравенство $u(x+h)-u(x)\leqslant \leqslant g(x+h)-g(x)$; затем, что для любого α выполняется неравенство $u(x+h)-u(x)\geqslant g_\alpha(x+h)-g_\alpha(x)$, из которого заключить, что $\liminf\limits_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\geqslant f(x)$. Сравнивая полученные неравенства, получить искомое утверждение.)

Построить пример возрастающей последовательности (f_n) функций, непрерывных на интервале I и равномерно ограниченных, чтобы их верхняя огибающая не имела на I точной примитивной.

2) Показать, что для того, чтобы функция $\mathbf{f}$ была ступенчатой на интервале I, необходимо и достаточно, чтобы она имела не более чем конечное число точек разрыва и на каждом интервале непрерывности была постоянной.

3) Пусть функция $\mathbf{f}$, линейчатая на интервале I, принимает свои значения в полном нормированном пространстве E над телом $\mathbf{R}$; показать, что для любой компактной части H интервала I множество $\mathbf{f}(H)$ относительно компактно в E; построить пример, когда $\mathbf{f}(H)$ не замкнуто в E.

4) Построить пример такой непрерывной на компактном интервале $I\subset\mathbf{R}$ числовой функции $f(x)$, чтобы сложная функция $\operatorname{sign} f(x)$ не была линейчатой на I (хотя функция $\operatorname{sign} x$ линейчата на $\mathbf{R}$).

°5) Пусть функция $\mathbf{f}$ определена на компактном интервале $I=[a, b]\subset \mathbf{R}$ и принимает свои значения в полном нормированном пространстве E; говорят, что $\mathbf{f}$ есть функция с *ограниченным изменением* на I, если существует такое число $m>0$, что для любой строго возрастающей последовательности $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ точек из I, в которой $x_0=a$, $x_n=b$, выполняется неравенство

$$\sum_{i=0}^{n-1} \|\mathbf{f}(x_{i+1})-\mathbf{f}(x_i)\|\leqslant m.$$

а) Показать, что $\mathbf{f}(I)$ относительно компактно в E (рассуждать от противного).

б) Показать, что $\mathbf{f}$ линейчата на I (сначала показать, что, когда x стремится к точке $x_0\in I$, оставаясь больше x_0, $\mathbf{f}$ не может иметь двух различных предельных значений, а затем использовать а)).

6) Для того чтобы определенная на открытом интервале $I\subset \mathbf{R}$ функция $\mathbf{f}$ во всех точках дополнения некоторой счетной части интервала I была равна функции, линейчатой на I, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла следующему условию: для любого $x\in I$ и любого $\varepsilon>0$ найдутся такое $h>0$ и такие два элемента $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ из E, что неравенство $\|\mathbf{f}(y)-\mathbf{a}\|\leqslant\varepsilon$ выполняется для любого y, принадлежащего $[x, x+h]$, за исключением не более чем счетного множества точек этого интервала, а неравенство $\|\mathbf{f}(z)-\mathbf{b}\|\leqslant\varepsilon$ выполняется для любого z, принадлежащего $[x-h, x]$, за исключением не более чем счетного множества точек этого интервала.

*7) Показать, что функция, равная $\sin\frac{1}{x}$ для $x\neq 0$ и 0 для $x=0$, имеет на $\mathbf{R}$ точную примитивную $\left(\text{заметить, что } x^2\sin\frac{1}{x}\right.$ $\left.\text{имеет производную в каждой точке}\right)$.

Вывести отсюда, что если $g(x, u, v)$ — многочлен от u, v, коэффициентами которого служат функции, непрерывные на интервале I, содержащем 0, то функция, равная $g\left(x, \sin\frac{1}{x}, \cos\frac{1}{x}\right)$ для $x\neq 0$ и надлежащим образом выбранному значению α для $x=0$, имеет точную примитивную на I; построить пример, когда $\alpha\neq g(0, 0, 0)$.*

*8) Показать, что существует непрерывная на $[-1, +1]$ функция, имеющая на этом интервале конечную производную, равную $\sin\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}\right)$ в точках x, отличных от $\frac{1}{n\pi}$ (n — целое, $n\neq 0$) и от 0. $\left(\text{В окрестности точки } x=\frac{1}{n\pi} \text{ сделать замену переменной}\right.$ $x=\frac{1}{n\pi+\operatorname{Arcsin} n}$ и использовать упражнение 7; при помощи той же замены переменной показать, что существует такая не зависящая от n постоянная $a>0$, что

$$\left|\int_{\frac{2}{(2n+1)\pi}}^{\frac{2}{(2n-1)\pi}} \sin\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}\right) dx\right| \leqslant \frac{a}{n^3};$$

отсюда вывести, что функция

$$g(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{x} \sin\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{t}}\right) dt$$

имеет в точке $x=0$ производную, равную нулю.)*

9) Пусть функция $\mathbf{f}$ линейчата на компактном интервале $I=[a, b]$. Показать, что для любого $\varepsilon>0$ существует функция $\mathbf{g}$, непрерывная на I и такая, что $\int_a^b \|\mathbf{f}(t)-\mathbf{g}(t)\|\,dt \leqslant \varepsilon$ (свести к тому случаю, когда $\mathbf{f}$ — ступенчатая функция). Вывести отсюда существование такого многочлена $\mathbf{h}$ (с коэффициентами из E), что $\int_a^b \|\mathbf{f}(t)-\mathbf{h}(t)\|\,dt \leqslant \varepsilon$.

10) Пусть функция $\mathbf{f}$ линейчата на $[a, b]$ и принимает свои значения в E, функция $\mathbf{g}$ линейчата на $[a, c]$ $(c>b)$ и принимает свои значения в F, и пусть $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \to [\mathbf{xy}]$ — билинейное непрерывное отображение произведения $E\times F$ в G (E, F и G — полные нормированные пространства). Показать, что

$$\lim_{h\to 0,\ h>0} \int_a^b [\mathbf{f}(t)\,\mathbf{g}(t+h)]\,dt = \int_a^b [\mathbf{f}(t)\,\mathbf{g}(t)]\,dt$$

(свести к тому случаю, когда $\mathbf{f}$ — ступенчатая функция).

11) При тех же предположениях, что и в упражнении 10, показать, что для любого $\varepsilon>0$ найдется такое число $\varrho>0$, что для всякого разбиения интервала $[a, b]$ на интервалы $[x_i, x_{i+1}]$ длины, не превосходящей ϱ $(0\leqslant i\leqslant n-1)$, неравенство

$$\left\| \int_a^b [\mathbf{f}(t)\,\mathbf{g}(t)]\,dt - \sum_{i=0}^{n-1} [\mathbf{f}(u_i)\,\mathbf{g}(v_i)]\,(x_{i+1}-x_i) \right\| \leqslant \varepsilon$$

выполняется для произвольно выбранной пары точек u_i, v_i в каждом из интервалов $[x_i, x_{i+1}]$ (свести к тому случаю, когда функции $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ ступенчаты).

°12) Говорят, что последовательность (x_n) вещественных чисел, принадлежащих интервалу $[0, 1]$, *равномерно распределена* на этом интервале, если для любой пары чисел α, β, удовлетворяющих условию $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$, и для числа $\nu_n(\alpha, \beta)$ индексов i таких, что $1 \leqslant i \leqslant n$ и $\alpha \leqslant x_i \leqslant \beta$, имеет место формула

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\nu_n(\alpha, \beta)}{n} = \beta - \alpha. \tag{1}$$

Показать, что если последовательность (x_n) равномерно распределена и если функция $\mathbf{f}$ линейчата на $[0, 1]$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{f}(x_i) = \int_0^1 \mathbf{f}(t)\, dt \tag{2}$$

(свести к случаю, когда $\mathbf{f}$ — ступенчатая функция).

Показать, что для того, чтобы последовательность (x_n) была равномерно распределена, достаточно, чтобы соотношение (2) выполнялось для всякой числовой функции f, принадлежащей *всюду плотному* множеству в пространстве непрерывных на $[0, 1]$ числовых функций, наделенном топологией равномерной сходимости.

°13) Пусть числовая функция f линейчата на компактном интервале $[a, b]$. Положим

$$r(n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) - \int_a^b f(t)\, dt.$$

а) Показать, что если f возрастает на $[a, b]$, то

$$0 \leqslant r(n) \leqslant \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)).$$

б) Показать, что если f непрерывна и имеет на $[a, b[$ ограниченную линейчатую правую производную, то $\lim\limits_{n\to\infty} nr(n) = \dfrac{b-a}{2}(f(b) - f(a))$ $\Big($положив $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$, заметить, что

$$r(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x_{k+1}) - f(t))\, dt,$$

а затем применить предложение 5$\Big)$.

в) Построить пример возрастающей и непрерывной на $[a, b]$ функции f, чтобы при неограниченном возрастании n величина $nr(n)$ не стремилась к $\dfrac{b-a}{2}(f(b) - f(a))$ (взять в качестве f предел убывающей последовательности возрастающих функций, графики которых являются ломаными линиями, удовлетворяющих условиям

$$f_n\left(a+k\frac{b-a}{2^n}\right)=f\left(a+k\frac{b-a}{2^n}\right) \quad \text{для} \quad 0\leqslant k\leqslant 2^n,$$

$$(b-a)\sum_{k=1}^{2^n} f_n\left(a+k\frac{b-a}{2^n}\right)-2^n\int_a^b f_n(t)\,dt\geqslant\frac{3}{4}(b-a)(f_n(b)-f_n(a))).$$

14) Пусть вектор-функция $\mathbf{f}$ служит примитивной для линейчатой на $[a, b]$ функции $\mathbf{f}'$ и удовлетворяет условию $\mathbf{f}(a)=\mathbf{f}(b)=0$. Показать, что если M — верхняя грань функции $\|\mathbf{f}'(x)\|$ на множестве тех точек из $[a, b]$, в которых $\mathbf{f}'$ непрерывна, то

$$\left\|\int_a^b \mathbf{f}(t)\,dt\right\|\leqslant M\frac{(b-a)^2}{4}.$$

15) Пусть числовая функция f непрерывна, строго возрастает на интервале $[0, a]$ и удовлетворяет условию $f(0)=0$; пусть обратная к ней функция g определена и строго возрастает на интервале $[0, f(a)]$; показать, что для $0\leqslant x\leqslant a$ и для $0\leqslant y\leqslant f(a)$ справедливо неравенство

$$xy\leqslant\int_0^x f(t)\,dt+\int_0^y g(u)\,du,$$

причем равенство имеет место лишь в том случае, когда $y=f(x)$ (рассмотреть изменение функции $xy-\int_0^x f(t)\,dt$, как функции от x при фиксированном y). Вывести отсюда, что для $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $p>1$, $p'=\frac{p}{p-1}$ выполняется неравенство $xy\leqslant ax^p+{}+by^{p'}$, если $a>0$, $b>0$ и $(pa)^{p'}(p'b)^p\geqslant 1$.

16) Пусть $\mathbf{f}$ — вектор-функция, линейчатая на $I=[a, b]\subset\mathbf{R}$, $\mathbf{u}$ — примитивная функции $\mathbf{f}$ на I и D — выпуклое замкнутое множество, содержащее $\mathbf{u}(I)$. Показать, что если g — числовая функция, *монотонная* на I, то

$$\int_a^b \mathbf{f}(t)\,g(t)\,dt=(\mathbf{u}(b)-\mathbf{c})\,g(b)-(\mathbf{c}-\mathbf{u}(a))\,g(a),$$

где $\mathbf{c}$ принадлежит D (свести к случаю, когда g — монотонная ступенчатая функция). Вывести отсюда, что если f — числовая функция, линейчатая на I, то найдется такое $c\in I$, что

$$\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt=g(a)\int_a^c f(t)\,dt+g(b)\int_c^b f(t)\,dt$$

(«вторая теорема о среднем»).

17) Пусть числовая функция g имеет отличную от 0 непрерывную производную на $[a, x]$; показать, что если числовая функция f имеет $(n+1)$-ю производную, линейчатую на $[a, x]$, то остаточный член разложения Тейлора n-го порядка функции f в точке a может быть записан в виде

$$r_n(x) = (g(x) - g(a)) \frac{(x-\xi)^n f^{(n+1)}(\xi)}{n!\, g'(\xi)},$$

где $a < \xi < x$ (воспользоваться интегральной формой $r_n(x)$).

18) Пусть числовая функция f конечна и непрерывна на открытом интервале I. Для того чтобы f была выпукла на I, необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in I$ выполнялось соотношение

$$\limsup_{h \to 0} \left(\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)\, dt - f(x) \right) \geqslant 0$$

(рассуждать, как в упражнении 9 гл. I, § 4).

19) Пусть f — выпуклая функция на интервале I, h — строго положительное число и I_h — пересечение интервала I с интервалами $I+h$ и $I-h$; показать, что если I_h не пусто, то функция

$$g_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)\, dt$$

выпукла на I_h; если $h < k$, то $g_h \leqslant g_k$. Показать, что если h стремится к 0, то g_h равномерно стремится к f на любом компактном интервале, *лежащем внутри* I.

20) Показать, что при неограниченном возрастании n многочлен

$$f_n(x) = \frac{\int_0^x (1-t^2)^n\, dt}{\int_0^1 (1-t^2)^n\, dt}$$

равномерно стремится к -1 на всяком интервале $[-1, -\varepsilon]$ и равномерно стремится к $+1$ на всяком интервале $[\varepsilon, +1]$, где $\varepsilon > 0$ $\left(\text{заметить, что } \int_0^1 (1-t^2)^n\, dt \geqslant \int_0^1 (1-t)^n\, dt\right)$. Вывести отсюда, что многочлен $g_n(x) = \int_0^x f_n(t)\, dt$ равномеряо стремится к $|x|$ на $[-1, +1]$, что дает новое доказательство теоремы Вейерштрасса (Общая топология, гл. X, § 5).

§ 2. Интегралы на некомпактных интервалах

1. *Определение интеграла на некомпактном интервале*

Пусть I — компактный интервал $[a, b]$ *расширенной прямой* $\bar{\mathbf{R}}$ (следовательно, a и b могут принимать бесконечные значения); пусть, далее, $\mathbf{f}$ — функция, определенная на $]a, b[$ и принимающая свои значения в полном нормированном пространстве E над телом $\mathbf{R}$. Обобщая определение 2 из § 1, будем говорить, что функция $\mathbf{g}$, определенная на $[a, b]$ и принимающая значения в E, есть *примитивная* функции $\mathbf{f}$, если она *непрерывна* на $[a, b]$ (и, в частности, в концах a и b) и имеет производную, равную $\mathbf{f}(x)$, во всех точках дополнения относительно $]a, b[$ некоторой счетной части этого интервала.

Мы ограничимся рассмотрением следующего случая: существует конечная строго возрастающая последовательность $(c_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ точек из $I = [a, b]$, $c_0 = a$, $c_n = b$, такая, что функция $\mathbf{f}$ *линейчата* на каждом из открытых интервалов $]c_i, c_{i+1}[$, но не линейчата ни на каком открытом интервале, содержащем хотя бы одну точку c_i, лежащую внутри I; такую функцию будем называть *кусочно линейчатой* на $[a, b]$. Отметим, что функция, линейчатая на $]a, b[$, кусочно линейчата (для этого достаточно в предыдущем определении положить $n = 1$).

Если $\mathbf{f}$ имеет на I примитивную $\mathbf{g}$ (в вышеуказанном смысле) и если α есть некоторая точка из интервала $]c_i, c_{i+1}[$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$, то, согласно нашему предположению, для любого x, принадлежащего этому интервалу, $\mathbf{g}(x) - \mathbf{g}(\alpha) = \int_{\alpha}^{x} \mathbf{f}(t)\,dt$; так как $\mathbf{g}$ предполагается непрерывной на I, то очевидно, что интеграл $\int_{0}^{x} \mathbf{f}(t)\,dt$ должен стремиться к пределу в E, когда x стремится к c_i справа и когда x стремится к c_{i+1} слева. Обратно, допустим, что эти условия выполнены для любого i, и пусть $\mathbf{g}_i$ — примитивная функции $\mathbf{f}$ на интервале $]c_i, c_{i+1}[$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$; тотчас же заключаем, что функция $\mathbf{g}$, определенная на дополнении относительно I

множества c_i как функция, равная

$$\mathbf{g}_i(x)+\sum_{k=1}^{i}(\mathbf{g}_{k-1}(c_k-)-\mathbf{g}_k(c_k+)) \text{ на }]c_i, c_{i+1}[\text{ для } 0\leqslant i\leqslant n-1,$$

непрерывна в любой точке интервала I, отличной от c_i, и в каждой из этих точек имеет предел; следовательно, она может быть продолжена по непрерывности в каждую из точек c_i, и продолженная функция, очевидно, является примитивной функции $\mathbf{f}$ на I. Кроме того, ясно, что всякая другая примитивная функции $\mathbf{f}$ имеет вид $\mathbf{g}+\mathbf{a}$ ($\mathbf{a}$ — элемент пространства E).

Определение 1. *Говорят, что вектор-функция* $\mathbf{f}$, *кусочно линейчатая на интервале* $]a, b[$ *расширенной прямой* $\overline{\mathbf{R}}$, *интегрируема на этом интервале, если она имеет на* $[a, b]$ *примитивную; если* $\mathbf{g}$ — *любая из примитивных функции* $\mathbf{f}$ *на* $[a, b]$, *а* x_0 *и* x — *две произвольные точки из* $[a, b]$, *то интегралом функции* $\mathbf{f}$ *от* x_0 *до* x *называется элемент* $\mathbf{g}(x)-\mathbf{g}(x_0)$, *который обозначается через* $\int_{x_0}^{x}\mathbf{f}(t)\,dt$.

Это понятие, как легко видеть, совпадает с понятием, определенным в § 1, n°4, если интервал $[x_0, x]$ не содержит ни одной из точек c_i.

Замечания, которые предшествовали определению 1, показывают, что для того, чтобы функция $\mathbf{f}$ была интегрируема на $]a, b[$, необходимо и достаточно, чтобы ее сужение на каждый из интервалов $]c_i, c_{i+1}[$ было интегрируемо на этом интервале. Иными словами, все сводится к тому случаю, когда функция $\mathbf{f}$ линейчата на *некомпактном* интервале $I\subset\mathbf{R}$ с концами a и b ($a<b$) и когда: 1° или (по крайней мере) одно из чисел a, b бесконечно; 2° или $\mathbf{f}$ не линейчата на компактном интервале, содержащем хотя бы одну из точек a, b (эти два условия не исключают друг друга). Тогда для интегрируемости функции $\mathbf{f}$ на I необходимо и достаточно, чтобы интеграл $\int_{x}^{y}\mathbf{f}(t)\,dt$ стремился к пределу, когда точка (x, y) стремится к $(a, b)\in\overline{\mathbf{R}}^2$, оставаясь в $I\times I$, и этот предел, согласно определению 1, должен быть

равен $\int_a^b \mathbf{f}(t)\,dt$. Часто, вместо того чтобы говорить, что функция $\mathbf{f}$ интегрируема на I, говорят, что интеграл $\int_a^b \mathbf{f}(t)\,dt$ *сходится*.

Примеры. 1) Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ сходится и равен 1, так как $\int_1^x \frac{dt}{t^2} = 1 - \frac{1}{x}$.

2) Интеграл $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ сходится и равен 2, так как

$$\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\,(1 - \sqrt{x}) \quad \text{для} \quad x > 0.$$

3) Пусть $(\mathbf{u}_n)_{n \geqslant 1}$ — бесконечная последовательность точек из E, и пусть $\mathbf{f}$ — ступенчатая функция, определенная на интервале $[1, +\infty]$ при помощи следующих условий: $\mathbf{f}(x) = \mathbf{u}_n$ для $n \leqslant x < n+1$. Для того чтобы интеграл $\int_1^{+\infty} \mathbf{f}(t)\,dt$ был сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы ряд с общим членом $\mathbf{u}_n$ *сходился* в E; в самом деле, $\int_1^n \mathbf{f}(t)\,dt = \sum_{p=1}^{n-1} u_p$, и значит, условие необходимо; обратно: если ряд с общим членом $\mathbf{u}_n$ сходится в E, то $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{u}_n = 0$; но для $n \leqslant x < n - 1$ имеем $\int_1^x \mathbf{f}(t)\,dt = \sum_{p=1}^{n-1} \mathbf{u}_p + \mathbf{u}_n\,(x - n)$, и следовательно, этот интеграл стремится к $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{u}_n$, когда x стремится к $+\infty$.

Очевидно, что если кусочно линейчатая функция $\mathbf{f}$ интегрируема на I, то формулы (4) и (9) из § 1 снова справедливы. Точно так же, формула (10) обобщается следующим образом: через $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ обозначим примитивные линейчатых на $]a, b[$ функций $\mathbf{f}'$ и $\mathbf{g}'$, а через $[\mathbf{f}, \mathbf{g}]\,\big|_a^b$ — предел (если он существует) выражения

$[\mathbf{f}\mathbf{g}]\,|_x^y$, когда (x, y) стремится к (a, b) (при $a < x \leqslant y < b$); тогда, если два из трех выражений $[\mathbf{f}\mathbf{g}]\,|_a^b$, $\int_a^b [\mathbf{f}(t)\,\mathbf{g}'(t)]\,dt$, $\int_a^b [\mathbf{f}'(t)\,\mathbf{g}(t)]\,dt$ имеют смысл, то имеет смысл и третье, и формула (10) верна.

Пусть, наконец, числовая функция f, определенная и непрерывная на $I =]a, b[$, служит примитивной функции f', линейчатой на $]a, b[$; с другой стороны, пусть вектор-функция $\mathbf{g}$ непрерывна на открытом интервале J, содержащем $f(I)$; если функция $\mathbf{g}(f(x))\,f'(x)$ интегрируема на I и если f стремится к пределу (конечному или бесконечному) в точках a и b, то функция $\mathbf{g}$ интегрируема в пределах от $f(a+)$ до $f(b-)$ и

$$\int_a^b \mathbf{g}(f(t))\,f'(t)\,dt = \int_{f(a+)}^{f(b-)} \mathbf{g}(u)\,du. \tag{1}$$

В самом деле, когда (x, y) стремится к (a, b), $(f(x), f(y))$, по предположению, стремится к $(f(a+), f(b-))$; значит, для того чтобы получить (1), достаточно взять формулу (12) из § 1 в пределах от x до y и перейти к пределу.

Возьмем теперь функцию $\mathbf{f}$, линейчатую на некомпактном интервале $I \subset \mathbf{R}$ с концами a и b $(a < b)$. Тогда условие интегрируемости функции $\mathbf{f}$ на I может быть выражено следующим образом. Компактные интервалы $J \subset I_1$ образуют *упорядоченное фильтрующееся множество* $\mathfrak{K}(I)$ по отношению $\subset$ *), ибо если $[\alpha, \beta]$ и $[\gamma, \delta]$ — два компактных интервала, содержащиеся в I и если $\lambda = \min(\alpha, \gamma)$, $\mu = \max(\beta, \delta)$, то интервал $[\lambda, \mu]$ содержится

*) Напомним (Теория множества, Результаты, § 6), что множество $\mathfrak{F}$ частей интервала I называется *фильтрующимся по отношению* $\subset$, если для любых $X \in \mathfrak{F}$ и $Y \in \mathfrak{F}$ существует такой элемент $Z \in \mathfrak{F}$, что $X \subset Z$ и $Y \subset Z$. Если через $S(X)$ обозначено подмножество из $\mathfrak{F}$, состоящее из элементов $Y \in \mathfrak{F}$, удовлетворяющих условию $Y \supset X$, то подмножества $S(X)$ образуют базис фильтра в $\mathfrak{F}$, называемый *фильтром сечений* множества $\mathfrak{F}$; предел (если таковой существует) отображения f множества $\mathfrak{F}$ в топологическое пространство по фильтру сечений множества $\mathfrak{F}$ снова называется *пределом функции f по упорядоченному фильтрующемуся множеству* $\mathfrak{F}$ (см. Общая топология, гл. I, §§ 5 и 6 и гл. IV, § 5, n° 2).

в I и содержит в свою очередь оба рассмотренных интервала. Тогда для всякого компактного интервала $J=[\alpha, \beta]$, содержащегося в I, положим

$$\int_J \mathbf{f}(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \mathbf{f}(t)\,dt;$$

для того чтобы функция $\mathbf{f}$ была интегрируема на I, необходимо и достаточно, чтобы отображение $J \to \int_J \mathbf{f}(t)\,dt$ имело *в E предел по упорядоченному фильтрующемуся множеству* $\mathfrak{K}(I)$; этот предел будет равен $\int_a^b f(t)\,dt$; мы будем обозначать его также через $\int_I f(t)\,dt$.

Предложение 1 (критерий Коши для интегралов). *Пусть функция $\mathbf{f}$ линейчата на интервале $I \subset \mathbf{R}$ с концами a и b $(a<b)$. Для того чтобы существовал интеграл $\int_a^b \mathbf{f}(t)\,dt$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовал такой содержащийся в I компактный интервал $J_0=[\alpha, \beta]$, что для всякого содержащегося в I компактного интервала $K=[x, y]$, не имеющего с J_0 внутренних общих точек, $\left\|\int_K \mathbf{f}(t)\,dt\right\| \leqslant \varepsilon$.*

Действительно, так как E — полное пространство, то критерий Коши показывает, что для сходимости интеграла $\int_I \mathbf{f}(t)\,dt$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовал такой компактный интервал $J_0=[\alpha, \beta]$, что для всякого компактного интервала J, удовлетворяющего условию $J_0 \subset J \subset I$, выполняется неравенство $\left\|\int_J \mathbf{f}(t)\,dt - \int_{J_0} \mathbf{f}(t)\,dt\right\| \leqslant \varepsilon$. Таким образом, предложение будет вытекать из следующей леммы:

Лемма. *Пусть $J_0=[\alpha, \beta]$ — компактный интервал, содержащийся в I. Для того чтобы неравенство* $\left\|\int_J \mathbf{f}(t)\,dt - \int_{J'} \mathbf{f}(t)\,dt\right\| \leqslant \varepsilon$

выполнялось для любой пары компактных интервалов J, J', содержащихся в I и содержащих J_0, необходимо, чтобы $\left\|\int\limits_K \mathbf{f}(t)\,dt\right\| \leqslant \varepsilon$, и достаточно, чтобы $\left\|\int\limits_K \mathbf{f}(t)\,dt\right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ для всякого компактного интервала K, содержащегося в I и не имеющего с J_0 внутренних общих точек.

Действительно, если для $J_0 \subset J \subset I$ и $J_0 \subset J' \subset I$ справедливо неравенство

$$\left\| \int\limits_J f(t)\,dt - \int\limits_{J'} f(t)\,dt \right\| \leqslant \varepsilon,$$

то очевидно, в частности, что для $x \leqslant y \leqslant \alpha$ или для $\beta \leqslant x \leqslant y$ (x и y принадлежат I) справедливо неравенство $\left\|\int\limits_x^y \mathbf{f}(t)\,dt\right\| \leqslant \varepsilon$.

Обратно, если $\left\|\int\limits_K f(t)\,dt\right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ для любого компактного интервала $K \subset J$, удовлетворяющего условию $K \cap J_0 = \phi$, и если $J = [x, y]$, $J' = [z, t]$ — два компактных интервала, содержащихся в I и содержащих J_0, то

$$\left\| \int\limits_J \mathbf{f}(t)\,dt - \int\limits_{J'} \mathbf{f}(t)\,dt \right\| = \left\| \int\limits_x^z \mathbf{f}(t)\,dt + \int\limits_t^y \mathbf{f}(t)\,dt \right\| \leqslant \varepsilon,$$

поскольку

$$x \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant y \quad \text{и} \quad z \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant t.$$

Пример. Если интервал I *ограничен* и функция $\mathbf{f}$ *ограничена* на I, то интеграл $\int\limits_I \mathbf{f}(t)\,dt$ всегда существует, так как, в силу теоремы о среднем, для $y \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant z$ имеем

$$\left\| \int\limits_y^\alpha \mathbf{f}(t)\,dt \right\| \leqslant (\alpha - a) \sup_{x \in I} \|\mathbf{f}(x)\|, \qquad \left\| \int\limits_\beta^z \mathbf{f}(t)\,dt \right\| \leqslant (b - \beta) \sup_{x \in I} \|\mathbf{f}(x)\|,$$

и для того, чтобы выполнялся критерий Коши, достаточно выбрать надлежащим образом $\alpha - a$ и $b - \beta$.

Отметим, что в этом случае примитивная функции $\mathbf{f}$ на I не обязана иметь производиую справа (соответственно слева) в левом (соответственно в правом) конце интервала I (когда это число конечно) в противовес тому, что имело место для случая компактного интервала I и линейчатой на I функции $\mathbf{f}$ (ср. упражнение 1).

2. Интегралы от положительных функций на некомпактном интервале

Предложение 2. *Пусть числовая функция f линейчата и неотрицательна на интервале $I \subset \mathbf{R}$ с концами a и b $(a < b)$. Для существования интеграла $\int_a^b f(t)\,dt$ необходимо и достаточно, чтобы множество чисел $\int_J f(t)\,dt$ было ограничено сверху, когда J пробегает множество компактных интервалов, содержащихся в I; тогда интеграл $\int_a^b f(t)\,dt$ есть верхняя грань множества $\int_J f(t)\,dt$.*

Действительно, так как $f \geqslant 0$, то соотношение $J \subset J'$ влечет неравенство

$$\int_J f(t)\,dt \leqslant \int_{J'} f(t)\,dt;$$

значит, отображение $J \to \int_J f(t)\,dt$ является возрастающей функцией, и предложение вытекает в качестве следствия из теоремы о монотонном пределе (Общая топология, гл. IV, § 5, теорема 2).

Если отображение $J \to \int_J f(t)\,dt$ является неограниченной функцией, то предел этой функции по упорядоченному фильтрующемуся множеству $\mathfrak{K}(I)$ будет равен $+\infty$; в этом случае сокращенно говорят, что интеграл $\int_a^b f(t)\,dt$ равен $+\infty$. Свойства интегралов, установленные в n° 1, переносятся (когда речь идет о неотрицательных функциях) на случай, когда некоторые из интегралов, фигурирующих в этих свойствах, бесконечны, пока соотношения, в которых они фигурируют, сохраняют смысл.

Предложение 3 (принцип сравнения). *Пусть две числовые функции f и g, линейчатые на интервале $I \subset \mathbf{R}$, удовлетворяют* *условиям* $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ *в каждой точке, в которой обе функции непрерывны* (ср. § 1, предложение 6). *Если интеграл от* g *сходится на интервале* I, *то сходится и интеграл от* f, *и* $\int\limits_J f(t)\,dt \leqslant \leqslant \int\limits_I g(t)\,dt$, *причем равенство обоих интегралов может достигаться лишь в том случае, когда* $f(x) = g(x)$ *во всех точках интервала* I, *в которых обе функции непрерывны.*

В самом деле, для любого компактного интервала $J \subset I$ имеем

$$\int\limits_J f(t)\,dt \leqslant \int\limits_J g(t)\,dt;$$

а так как $\int\limits_J g(t)\,dt \leqslant \int\limits_I g(t)\,dt$, то интеграл $\int\limits_J f(t)\,dt$ ограничен сверху и, значит, $\int\limits_I f(t)\,dt$ сходится; далее, переходя к пределу, получаем, что $\int\limits_I f(t)\,dt \leqslant \int\limits_I g(t)\,dt$. Предположим, кроме того, что $f(x) < g(x)$ в какой-нибудь точке $x \in I$, в которой обе функции непрерывны; существует такой содержащийся в I и не сводящийся к точке компактный интервал $[c, d]$, что $x \in [c, d]$; тогда $\int\limits_c^d f(t)\,dt < \int\limits_c^d g(t)\,dt$ (§ 1, следствие 1 из предложения 6), а так как, с другой стороны, $\int\limits_a^c f(t)\,dt \leqslant \int\limits_a^c g(t)\,dt$ и $\int\limits_d^b f(t)\,dt \leqslant \leqslant \int\limits_d^b g(t)\,dt$, то, складывая почленно последние три неравенства, получаем, что

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt < \int\limits_a^b g(t)\,dt.$$

Это предложение дает нам наиболее употребительный способ решить вопрос о сходимости или расходимости интеграла от функции $f \geqslant 0$ *путем сравнения* функции f с более простой функцией $g \geqslant 0$, относительно которой уже известно, сходится или расходится ее интеграл; в главе V мы на самых распространенных случаях покажем, каким образом можно искать функции сравнения, и затем выведем наиболее употребительные признаки сходимости интегралов и рядов.

3. Абсолютно сходящиеся интегралы

Определение 2. *Говорят, что интеграл от линейчатой на интервале $I \subset \mathbf{R}$ функции $\mathbf{f}$ абсолютно сходится, если сходится интеграл от положительной функции $\|\mathbf{f}(x)\|$.*

Предложение 4. *Если интеграл от $\mathbf{f}$ на I абсолютно сходится, то он сходится и в смысле простой сходимости и*

$$\left\| \int_I \mathbf{f}(t)\,dt \right\| \leqslant \int_I \|\mathbf{f}(t)\|\,dt. \tag{2}$$

В самом деле, для любого компактного интервала $J \subset I$ имеем (§ 1, формула (16))

$$\left\| \int_J \mathbf{f}(t)\,dt \right\| \leqslant \int_J \|\mathbf{f}(t)\|\,dt. \tag{3}$$

Если интеграл от положительной функции $\|\mathbf{f}(x)\|$ сходится, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой содержащийся в I компактный интервал $[\alpha, \beta]$, что для всякого компактного интервала $[x, y]$, содержащегося в I и не имеющего с $[\alpha, \beta]$ ни одной внутренней общей точки, $\int_x^y \|\mathbf{f}(t)\|\,dt \leqslant \varepsilon$ (предложение 1); отсюда вытекает неравенство $\left\| \int_x^y \mathbf{f}(t)\,dt \right\| \leqslant \varepsilon$, которое доказывает сходимость интеграла на I (предложение 1); переходя затем в формуле (3) к пределу, получаем неравенство (2).

Следствие. *Пусть E, F, G — три полных нормированных пространства над телом $\mathbf{R}$ и $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \to [\mathbf{x}\ \mathbf{y}]$ — непрерывное билинейное отображение $E \times F$ в G. Пусть $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ — две линейчатые на I функции со значениями соответственно в E и в F. Если $\mathbf{f}$ ограничена на I, а интеграл от $\mathbf{g}$ на I абсолютно сходится, то интеграл от $[\mathbf{f}\mathbf{g}]$ абсолютно сходится на I.*

В самом деле, существует такое число $h > 0$, что имеет место неравенство $\|[\mathbf{x}\ \mathbf{y}]\| \leqslant h \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$ (Общая топология, гл. IX,

§ 3, теорема 1); если положить $k = \sup_{x \in I} \| \mathbf{f}(x) \|$, то на I будет иметь место неравенство $\| [\mathbf{f}(x)\, \mathbf{g}(x)] \| \leqslant hk \| \mathbf{g}(x) \|$; следовательно, принцип сравнения показывает, что интеграл от $[\mathbf{fg}]$ абсолютно сходится на I, и на основании формулы (2) имеем

$$\left\| \int_I [\mathbf{f}(t)\, \mathbf{g}(t)]\, dt \right\| \leqslant hk \int_I \| \mathbf{g}(t) \|\, dt.$$

Замечание. Сходящийся интеграл может не быть абсолютно сходящимся, как показывает пример 3 из n° 1, если ряд с общим членом $\mathbf{u}_n$ сходится, но не абсолютно.

Упражнения. 1) Пусть два конечных действительных числа α и β таковы, что $\alpha < \beta$. Показать, что если два числа γ и δ удовлетворяют условиям $\alpha < \gamma \leqslant \delta < \beta$, то существует числовая функция f, определенная на интервале $]0, a]$, не принимающая никаких других значений, кроме α и β, являющаяся ступенчатой на любом интервале $[\varepsilon, a]$ $(\varepsilon > 0)$ и такая, что если положить $g(x) = \int_0^x f(t)\, dt$, то

$$\liminf_{x \to 0,\ x > 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \gamma, \qquad \limsup_{x \to 0,\ x > 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \delta$$

(взять в качестве $g(x)$ функцию, график которой представляет собой ломаную линию со сторонами, имеющими наклон, равный последовательно α и β, и с вершинами, находящимися попеременно то на прямых $y = \gamma x$ и $y = \delta x$ для $\gamma \neq \delta$, то на прямой $y = \gamma x$ и на параболе $y = \gamma x + x^2$ для $\gamma = \delta$).

Тем же самым способом показать, что независимо от того, конечны или бесконечны γ и δ $(\gamma < \delta)$, существует такая определенная на $]0, a]$ числовая функция f, что на любом интервале $[\varepsilon, a]$ функция f ступенчата, интеграл $g(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ существует и

$$\liminf_{x \to 0,\ x > 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \gamma, \qquad \limsup_{x \to 0,\ x > 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \delta.$$

°2) а) Пусть линейчатая на интервале $]0, a]$ функция $\mathbf{f}$ такова, что интеграл $\int_0^a \frac{\mathbf{f}(t)}{t}\, dt$ сходится. Показать, что интеграл $\mathbf{g}(x) = \int_0^x \mathbf{f}(t)\, dt$ сходится и имеет в точке $x = 0$ правую производную.

б) Построить пример такой числовой функции f, что интеграл $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ сходится и имеет в нуле правую производную, а функция $\frac{f(t)}{t}$ не интегрируема на $]0, a]$ $\Big($взять в качестве $\frac{f(x)}{x}$ производную функции вида $\cos\varphi(x)$, где φ стремится к $+\infty$, когда x стремится к 0$\Big)$.

°3) Пусть числовая функция $f\geqslant 0$, определенная на интервале $]0, a]$ и линейчатая на нем, такова, что интеграл $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ сходится, но не имеет в нуле правой производной. Показать, что существует такая линейчатая на $]0, a]$ функция f_1, что $(f_1(x))^2=f(x)$ для любого x, и что интеграл $g_1(x)=\int_0^x f_1(t)\,dt$ сходится и имеет в нуле правую производную. (Рассмотреть сначала случай, когда f совпадает с функцией, ступенчатой на любом интервале $[\varepsilon, a]$ $(\varepsilon>0)$. Разбить в этом случае каждый интервал, на котором f постоянна, на достаточно большое число равных интервалов и взять f_1 постоянной на каждом из этих интервалов, чередуя знаки функции f_1 для последовательных интервалов. Проделать то же самое для общего случая.)

4°) Определить на интервале $[0, 1]$ две числовые функции f и g, обладающие тем свойством, что f и g имеют *точные* примитивные, но fg в каждой точке из $[0, 1[$ служит правой производной для непрерывной функции, не имеющей левой производной на множестве мощности континуума (использовать конструкции, аналогичные конструкциям из упражнения 9 гл. I, § 2, и конструкциям из предыдущего упражнения).

°5) а) Пусть функция $\mathbf{f}$ линейчата на *ограниченном* открытом интервале $]a, b]$; предположим, что существует такая убывающая на $]a, b[$ числовая функция g, что

$$\|\mathbf{f}(x)\|\leqslant g(x)$$

и интеграл $\int_a^b g(t)\,dt$ сходится. Показать, что если (ε_n) — любая последовательность строго положительных чисел, сходящаяся к 0 и такая, что $\inf_n n\varepsilon_n>0$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{f}\left(a+\varepsilon_n+k\frac{b-a}{n}\right)=\int_a^b \mathbf{f}(t)\,dt. \tag{1}$$

б) Построить пример такой числовой строго положительной линейчатой функции на $]0, 1]$, что интеграл $\int\limits_0^1 f(t)\,dt$ сходится, в то время как соотношение (1) не имеет места для $\varepsilon_n=\frac{1}{n}$ $\Big($выбрать f так, чтобы ее значение при $x=\frac{1}{2^p}$ было равно $2^{2p}\Big)$.

в) При тех же предположениях, что и в а), показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\,\mathbf{f}\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)=0.$$

6) Пусть функция $\mathbf{f}$ линейчата на интервале $]a, +\infty[$; предположим, что существует такая убывающая на $]a, +\infty[$ числовая функция g, что $\|\mathbf{f}(x)\|\leqslant g(x)$ и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(t)\,dt$ сходится. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathbf{f}(a+nh)$ абсолютно сходится при любом $h>0$ и что

$$\lim_{h\to 0} h\left(\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{f}(a+nh)\right)=\int\limits_a^{+\infty}\mathbf{f}(t)\,dt.$$

7) Пусть функции f и g линейчаты и строго положительны на открытом интервале $]a, b[$. Показать, что интегралы от функций $\frac{f}{1+fg}$ и $\inf\left(f, \frac{1}{g}\right)$ на $]a, b[$ одновременно сходятся или обращаются в бесконечность.

8) Пусть функция f линейчата и положительна на интервале $[a, +\infty[$, и пусть возрастающая дифференцируемая функция g определена на $[a, +\infty[$ и обладает тем свойством, что $g(x)-x\geqslant\lambda>0$ для любого $x\geqslant a$. Показать, что если $f(g(x))\,g'(x)\leqslant kf(x)$ при $k<1$ (соответственно $f(g(x))\,g'(x)\geqslant kf(x)$ при $k>1$), то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,dt$ сходится (соответственно равен $+\infty$) (обозначив через g^n итерацию n-го порядка функции g, рассмотреть интеграл $\int\limits_a^{g^n(a)} f(t)\,dt$ и устремить n к бесконечности).

9) Пусть число $\alpha>0$, и пусть на интервале $]0+\infty[$ определена такая возрастающая и положительная функция f, что интеграл

$\int\limits_0^{+\infty} t^{\alpha} f(t)\,dt$ сходится. Показать, что для любого $x > 0$

$$\int\limits_x^{+\infty} f(t)\,dt \leqslant \left(\frac{\alpha}{(\alpha+1)\,x}\right)^{\alpha} \int\limits_0^{+\infty} t^{\alpha} f(t)\,dt$$

(доказать это неравенство сначала для функции f, постоянной на интервале $]0, a]$ и равной нулю для $x > a$, затем для суммы таких функций и, наконец, перейти к общему случаю).

§ 3. Производные и интегралы функций, зависящих от параметра

1. *Интеграл от предела функций на компактном интервале*

Теорема 1 из § 1 в частном случае примитивных для линейчатых функций на компактном интервале следующим образом формулируется в терминах интегралов:

Предложение 1. *Пусть A — множество, фильтрующееся по фильтру $\mathfrak{F}$, $(\mathbf{f}_\alpha)_{\alpha\in A}$ — семейство функций, линейчатых на компактном интервале $I = [a, b]$; если функции $\mathbf{f}_\alpha$ равномерно сходятся на I к линейчатой функции $\mathbf{f}$ по фильтру $\mathfrak{F}$, то*

$$\lim_{\mathfrak{F}} \int\limits_a^b \mathbf{f}_\alpha(t)\,dt = \int\limits_a^b \mathbf{f}(t)\,dt. \tag{1}$$

Для приложений важны два следствия отсюда:

Следствие 1. *Пусть $(\mathbf{f}_n)$ — последовательность функций, линейчатых на компактном интервале $I = [a, b]$. Если последовательность $(\mathbf{f}_n)$ равномерно сходится на I к (линейчатой) функции $\mathbf{f}$, то*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b \mathbf{f}_n(t)\,dt = \int\limits_a^b \mathbf{f}(t)\,dt. \tag{2}$$

В частности, если *ряд* с общим членом $\mathbf{u}_n$, являющимся линейчатой на I функцией, *равномерно сходится* на I к функции $\mathbf{f}$, то ряд с общим членом $\int\limits_a^b \mathbf{u}_n(t)\,dt$ сходится и имеет сумму $\int\limits_a^b \mathbf{f}(t)\,dt$ («почленное интегрирование равномерно сходящегося ряда»).

Следствие 2. *Пусть A — часть топологического пространства F, $\mathbf{f}$ — такое отображение множества $I \times A$ в полное нормированное пространство E над телом $\mathbf{R}$, что для любого $\alpha \in A$ функция $x \to \mathbf{f}(x, \alpha)$ линейчата на I. Если функции $\mathbf{f}(x, \alpha)$ равномерно сходятся на I к (линейчатой) функции $\mathbf{g}(x)$, когда α стремится к точке $\alpha_0 \in \overline{A}$, оставаясь в A, то*

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0,\ \alpha \in A} \int_a^b \mathbf{f}(x, \alpha)\, dx = \int_a^b \mathbf{g}(x)\, dx. \tag{3}$$

В частности, имеет место

Предложение 2 («непрерывность интеграла по параметру»). *Пусть F — компактное пространство, $I = [a, b]$ — компактный интервал прямой $\mathbf{R}$, $\mathbf{f}$ — непрерывное отображение множества $I \times F$ в полное нормированное пространство E над телом $\mathbf{R}$; тогда функция $\mathbf{h}(\alpha) = \int_a^b \mathbf{f}(x, \alpha)\, dx$ непрерывна на F.*

В самом деле, так как отображение $\mathbf{f}$ *равномерно непрерывно* на компактном множестве $I \times F$, то функции $\mathbf{f}(x, \alpha)$ равномерно сходятся на I к $\mathbf{f}(x, \alpha_0)$, когда α стремится к произвольно выбранной точке $\alpha_0 \in F$.

Укажем одно приложение этого результата: функция $(x, \alpha) \to x^\alpha$ непрерывна на множестве $I \times J$, где $I = [a, b]$ — компактный интервал, $0 < a < b$, а J — произвольный компактный интервал прямой $\mathbf{R}$; отсюда заключаем, что $\int_a^b x^\alpha\, dx$ есть непрерывная функция от α на $\mathbf{R}$; но для *рациональных* $\alpha \neq -1$ эта функция равна $\frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, а функция $\alpha \to \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ непрерывна на любом интервале прямой $\mathbf{R}$, не содержащем -1; следовательно (продолжение тождеств) $\int_a^b x^\alpha\, dx = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ для *любых* действительных $\alpha \neq -1$; это означает также, что для любых действительных α производная функции x^α равна $\alpha x^{\alpha-1}$ (ср. гл. III, § 1).

2. *Интеграл от предела функций на некомпактном интервале*

Теорема 1 из § 1 применима к функциям более общим, чем линейчатые функции, ибо в ней требуется только, чтобы эти функции имели примитивные. Следовательно, мы можем, в частности, заключить, что предложение 1 применимо также и в том случае, когда функции $\mathbf{f}_\alpha$ предполагаются лишь *кусочно линейчатыми* и *интегрируемыми* на интервале $I \subset \mathbf{R}$; однако этот результат предполагает, что выполняются два других условия предложения 1, а именно: 1° I — *ограниченный* интервал, и 2° функции $\mathbf{f}_\alpha$ *равномерно* сходятся *на* I к $\mathbf{f}$. Формула (1) может оказаться *неверной*, если одно из этих условий перестанет выполняться: тогда может случиться, что либо левая, либо правая часть этого равенства не существует или существуют обе, но имеют различные значения.

Так, например, пусть f_n есть линейчатая функция на $]0, 1]$, определенная следующим образом: $f_n(x) = n$ для $0 < x < 1/n$ и $f_n(x) = 0$ для $1/n \leqslant x \leqslant 1$. Тогда последовательность (f_n) сходится к 0 *равномерно на любом компактном интервале*, содержащемся в $]0, 1]$, но не равномерно на $]0, 1]$, и $\int_0^1 f_n(t)\,dt = 1$ для любого n. Можно указать пример, когда $\int_0^1 f_n(t)\,dt$ не стремится ни к какому пределу, заменив предыдущую последовательность (f_n) последовательностью $((-1)^n f_n)$, которая снова равномерно сходится к 0 на любом компактном интервале, содержащемся в $]0, 1]$.

С другой стороны, пусть функция f_n, линейчатая на *неограниченном* интервале $I = [0, +\infty[$, такова, что $f_n(x) = \dfrac{1}{n}$ для $n^2 \leqslant x \leqslant (n+1)^2$ и $f_n(x) = 0$ для всех остальных значений x из I $(n \geqslant 1)$; последовательность (f_n) равномерно сходится к 0 на I, но интеграл $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \dfrac{2n+1}{n}$ при неограниченном возрастании n стремится к 2.

Иными словами, когда интервал I не ограничен, то, обозначая через $\mathcal{U}$ векторное пространство, образованное линейчатыми и интегрируемыми на I функциями $\mathbf{f}$ со значениями в E, можно утверждать, что отображение $\mathbf{f} \rightarrow \int_I \mathbf{f}(t)\,dt$ *не будет непрерывным,* если наделить $\mathscr{U}$ топологией равномерной сходимости на I (ср. § 1, следствие 2 теоремы 1).

Найдем *достаточные* условия для того, чтобы обеспечить справедливость предложения 1 при следующих допущениях:

1° I — произвольный интервал прямой $\mathbf{R}$, функция $\mathbf{f}_\alpha$ линейчата на I и интегрируема на нем;

2° семейство $(\mathbf{f}_\alpha)$ равномерно сходится по фильтру $\mathfrak{F}$ к функции $\mathbf{f}$ на любом компактном интервале, содержащемся в I.

Тогда, обозначив через $\mathfrak{K}(I)$ упорядоченное фильтрующееся множество компактных интервалов, содержащихся в I (§ 2, n° 1), мы можем левую часть формулы (1) записать в виде $\lim_{\mathfrak{F}}\left(\lim\limits_{J \in \mathfrak{K}(I)} \int_J \mathbf{f}_\alpha(t)\,dt\right)$; с другой стороны, принимая во внимание предложение 1 и тот факт, что семейство $(\mathbf{f}_\alpha)$ равномерно сходится на любом компактном интервале $J \subset I$, мы можем правую часть в формуле (1) записать в виде $\lim\limits_{J \in \mathfrak{K}(I)}\left(\lim_{\mathfrak{F}} \int_J \mathbf{f}_\alpha(t)\,dt\right)$.

Очевидно, стало быть, что предложение 1 останется справедливым, если можно *изменить порядок пределов* в отображении $(J, \alpha) \rightarrow \rightarrow \int_J \mathbf{f}_\alpha(t)\,dt$ по фильтру $\mathfrak{F}$ и по фильтру сечений Φ упорядоченного фильтрующегося множества $\mathfrak{K}(I)$. Но мы знаем *достаточное* условие для того, чтобы эта перестановка была законной, а именно существование предела отображения $(J, \alpha) \rightarrow \int_J \mathbf{f}_\alpha(t)\,dt$ по *фильтру произведения* $\Phi \times \mathfrak{F}$ (Общая топология, гл. I, § 8, предложение 8). Мы преобразуем это условие в условие, ему эквивалентное, но более удобное.

Прежде всего, так как E — полное пространство, то для того, чтобы отображение $(J, \alpha) \rightarrow \int_J \mathbf{f}_\alpha(t)\,dt$ имело предел по фильтру $\Phi \times \mathfrak{F}$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовали такой компактный интервал $J_0 \subset I$ и такое множество $M \subset \mathfrak{F}$, что для любых элементов α, β из M и для любого компактного интервала $J \supset J_0$, содержащегося в I, выполняется неравенство

$$\left\| \int_J \mathbf{f}_\alpha(t)\,dt - \int_J \mathbf{f}_\beta(t)\,dt \right\| \leqslant \varepsilon. \tag{4}$$

С другой стороны, мы покажем, что само это условие эквивалентно следующему: для любого $\varepsilon > 0$ существуют такой компактный интервал $J_0 \subset I$ и такое множество $M \in \mathfrak{F}$, что для любого $\alpha \in M$ и для любого компактного интервала $J \supset J_0$, содержащегося в I, выполняется неравенство

$$\left\| \int_{J_0} \mathbf{f}_\alpha(t)\,dt - \int_J \mathbf{f}_\alpha(t)\,dt \right\| \leqslant \varepsilon. \tag{5}$$

В самом деле, необходимость последнего условия очевидна; обратно, если оно выполнено, то существует (на основании равномерной сходимости последовательности $(\mathbf{f}_\alpha)$ на любом компактном интервале) такое множество $N \in \mathfrak{F}$, что для любых α, β из N

$$\left\| \int_{J_0} \mathbf{f}_\alpha(t)\,dt - \int_{J_0} \mathbf{f}_\beta(t)\,dt \right\| \leqslant \varepsilon, \tag{6}$$

и значит, $\left\| \int_{J_0} \mathbf{f}_\alpha(t)\,dt - \int_J \mathbf{f}_\beta(t)\,dt \right\| \leqslant 2\varepsilon$ для любых α и β из $M \cap N \in \mathfrak{F}$ и любого компактного интервала $J \supset J_0$.

Наконец, лемма, при помощи которой было доказано предложение 1 из § 2, позволяет нам сформулировать только что найденное условие в следующей эквивалентной форме: *для любого $\varepsilon > 0$ существуют такой компактный интервал $J_0 \subset J$ и такое множество $M \in \mathfrak{F}$ (зависящее от ε), что для любого компактного интервала $K \subset I$, не имеющего ни одной общей внутренней точки с J_0, и для любого $\alpha \in M$ выполняется неравенство*

$$\left\| \int_K \mathbf{f}_\alpha(t)\,dt \right\| \leqslant \varepsilon.$$

Обычно используется более узкое условие, которое получится, если в предыдущей формулировке предположить, что множество M *не зависит от* ε:

Определение 1. *Говорят, что интеграл* $\int_I \mathbf{f}_\alpha(t)\,dt$ *равномерно сходится для* $\alpha \in A$ (*или равномерно сходится в* A), *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такой компактный интервал*

$J_0 \subset I$, что для любого компактного интервала $K \subset I$, не имеющего общих внутренних точек с J_0, и любого $\alpha \in A$,

$$\left\| \int_K \mathbf{f}_\alpha(t)\,dt \right\| \leqslant \varepsilon. \tag{7}$$

Это определение равносильно тому утверждению, что семейство отображений $\alpha \to \int_J \mathbf{f}_\alpha(t)\,dt$ *равномерно сходится в* A $\left(\text{к отображению } \alpha \to \int_J \mathbf{f}_\alpha(t)\,dt\right)$ по фильтру сечений Φ множества $\mathfrak{R}(I)$; каждый из интегралов $\int_I \mathbf{f}_\alpha(t)\,dt$ *тем более* сходится (обратное неверно). Кроме того, в силу вышеизложенного (или в силу предложения 1, Общая топология, гл. X, § 2) имеет место

Предложение 3. *Пусть $(\mathbf{f}_\alpha)$ — семейство функций, линейчатых на интервале I и удовлетворяющих условиям: 1° семейство $(\mathbf{f}_\alpha)$ равномерно сходится по фильтру $\mathfrak{F}$ к функции* $\mathbf{f}$ (линейчатой на I) *на любом компактном интервале, содержащемся в I; 2° интеграл $\int_I \mathbf{f}_\alpha(t)\,dt$ равномерно сходится для любого $\alpha \in A$.*

При этих условиях интеграл $\int_I \mathbf{f}(t)\,dt$ сходится и

$$\lim_{\mathfrak{F}} \int_I \mathbf{f}_\alpha(t)\,dt = \int_I \mathbf{f}(t)\,dt. \tag{8}$$

Условия предложения 3 выполняются, например, когда I — *ограниченный интервал*; в этом случае $\mathbf{f}_\alpha$ *равномерно ограничены* на I и равномерно сходятся к $\mathbf{f}$ на любом компактном интервале, содержащемся в I; в самом деле, если $\|\mathbf{f}_\alpha(x)\| \leqslant h$ для любого $x \in I$ и для любого α и если интервал J_0 таков, что разность между длиной интервала I и интервала J_0 будет меньше или равна $\frac{\varepsilon}{h}$, то условие (7) будет выполняться для любого интервала $K \subset I$, не имеющего общих внутренних точек с J_0.

Как и из предложения 1, из предложения 3 вытекают два следствия, важные для приложений:

Следствие 1. *Пусть* $(\mathbf{f}_n)$ — *последовательность линейчатых на произвольном интервале* I *функций, равномерно сходящаяся к функции* $\mathbf{f}$ *на любом компактном интервале, содержащемся в* I; *если интеграл* $\int_I \mathbf{f}_n(t)\,dt$ *равномерно сходится, то* $\int_I \mathbf{f}(t)\,dt$ *сходится и*

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \mathbf{f}_n(t)\,dt = \int_I \mathbf{f}(t)\,dt. \tag{9}$$

Замечание. Предположения, сделанные в этом следствии, достаточны, но не необходимы для справедливости формулы (9); в дальнейшем мы обобщим эту формулу одновременно с понятием интеграла (см. книгу VI, гл. IV) и получим менее жесткие условия.

Следствие 2. *Пусть* A — *часть топологического пространства* F *и* $\mathbf{f}$ — *такое отображение множества* $I \times A$ *в полное нормированное пространство* E *над телом* $\mathbf{R}$, *при котором для любого* $\alpha \in A$ *функция* $x \to \mathbf{f}(x, \alpha)$ *линейчата на* I. *Если, с одной стороны, функции* $\mathbf{f}(x, \alpha)$ *равномерно сходятся на любом компактном интервале, содержащемся в* I, *к функции* $\mathbf{f}(x)$, *когда* α *стремится к* $\alpha_0 \in \overline{A}$, *оставаясь в* A, *а с другой стороны, интеграл* $\int_I \mathbf{f}(x, \alpha)\,dx$ *равномерно сходится в* A, *то интеграл* $\int_I \mathbf{f}(x)\,dx$ *сходится и*

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0,\ \alpha\in A} \int_I \mathbf{f}(x, \alpha)\,dx = \int_I \mathbf{f}(x)\,dx. \tag{10}$$

В частности, имеет место

Предложение 4 («непрерывность несобственного интеграла по параметру»). *Пусть* F — *компактное пространство,* I — *произвольный интервал прямой* $\mathbf{R}$, $\mathbf{f}$ — *непрерывное отображение множества* $I \times F$ *в полное нормированное пространство* E *над телом* $\mathbf{R}$; *если интеграл* $\mathbf{h}(\alpha) = \int_I \mathbf{f}(x, \alpha)\,dx$ *равномерно сходится в* F, *то он является непрерывной функцией от* α *на* F.

Это предложение можно, приняв во внимание предложение 2, вывести также из непрерывности равномерного предела непрерывных функций (Общая топология, гл. X, § 2).

3. *Нормально сходящиеся интегралы*

Пусть $(\mathbf{f}_\alpha)_{\alpha \in A}$ — семейство функций, линейчатых на произвольном интервале $I \subset \mathbf{R}$ и принимающих значения в полном нормированном пространстве E над телом $\mathbf{R}$. Предположим, что существует такая линейчатая на I конечная числовая функция g, что для любого $x \in I$ и любого $\alpha \in A$ выполняется неравенство $\| \mathbf{f}_\alpha(x) \| \leqslant g(x)$ и что интеграл $\int\limits_I g(t)\,dt$ сходится. При этих условиях интеграл $\int\limits_I \mathbf{f}_\alpha(t)\,dt$ *абсолютно и равномерно сходится* в A; в самом деле, для любого компактного интервала K, содержащегося в I, имеем

$$\left\| \int\limits_K \mathbf{f}_\alpha(t)\,dt \right\| \leqslant \int\limits_K g(t)\,dt,$$

и из сходимости интеграла $\int\limits_I g(t)\,dt$ вытекает тот факт, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой компактный интервал $J \subset I$, что для любого компактного интервала $K \subset I$, не пересекающегося с J, $\int\limits_K g(t)\,dt \leqslant \varepsilon$. Если существует числовая функция g, обладающая вышеуказанными свойствами, то говорят, что интеграл $\int\limits_I \mathbf{f}_\alpha(t)\,dt$ *нормально сходится* в A (ср. Общая топология, гл. X, § 1, n° 6).

Интеграл может равномерно сходиться в A, не будучи нормально сходящимся. *Это обстоятельство имеет место для последовательности (f_n) числовых функций, определенных при помощи следующих условий: $f_n(x) = \frac{1}{x}$ для $n \leqslant x \leqslant n+1$, $f_n(x) = 0$ для остальных значений x на интервале $I = [1, +\infty[$. Легко видеть, что интеграл $\int\limits_1^\infty f_n(t)\,dt$ равномерно сходится, но он не является нормально сходящимся, так как соотношение $g(x) \geqslant f_n(x)$, справедливое для любого $x \in I$ и любого n, влечет за собой неравенство $g(x) \geqslant \frac{1}{x}$, и следовательно, интеграл от g на интервале I расходится.$_*$

Рассмотрим, в частности, *ряд*, общий член $\mathbf{u}_n$ которого является функцией, линейчатой на интервале I, и предположим, что ряд с общим членом $\|\mathbf{u}_n(x)\|$ (который является функцией, линейчатой на I) равномерно сходится на любом компактном интервале, содержащемся в I, и обладает тем свойством, что ряд с общим членом $\int \|\mathbf{u}_n(t)\| \, dt$ сходится; тогда (§ 2, предложение 2) функция (линейчатая) $g(x)$, являющаяся суммой ряда с общим членом $\|\mathbf{u}_n(x)\|$, такова, что интеграл $\int_I g(t)\,dt$ сходится. Если положить $\mathbf{f}_n = \sum_{p=1}^{n} \mathbf{u}_p$, то интеграл $\int_I \mathbf{f}_n(t)\,dt$ будет *нормально сходящимся*, так как $\|\mathbf{f}_n(x)\| \leqslant \sum_{p=1}^{n} \|\mathbf{u}_p(x)\| \leqslant g(x)$ для любого $x \in I$ и любого n; следовательно, сумма $\mathbf{f}$ ряда с общим членом $\mathbf{u}_n(x)$ есть такая линейчатая на I функция, что интеграл $\int_I \mathbf{f}(t)\,dt$ сходится и

$$\int_I \mathbf{f}(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I \mathbf{u}_n(t)\,dt \tag{11}$$

(«почленное интегрирование ряда на некомпактном интервале»).

4. *Производная по параметру интеграла на компактном интервале*

Пусть A — компактная окрестность точки α_0, принадлежащей телу $\mathbf{R}$ (соответственно телу $\mathbf{C}$), $I = [a, b]$ — компактный интервал из $\mathbf{R}$, $\mathbf{f}$ — *непрерывное* отображение множества $I \times A$ в полное нормированное пространство E над телом $\mathbf{R}$ (соответственно $\mathbf{C}$). Выше было показано (предложение 2), что при этих условиях $\mathbf{g}(\alpha) = \int_a^b \mathbf{f}(t, \alpha)\,dt$ является *непрерывной* функцией на A. Найдем теперь *достаточные* условия для того, чтобы $\mathbf{g}$ имела *производную* в точке α_0. Для $\alpha \neq \alpha_0$ имеем

$$\frac{\mathbf{g}(\alpha)-\mathbf{g}(\alpha_0)}{\alpha-\alpha_0}=\int_a^b \frac{\mathbf{f}(t,\alpha)-\mathbf{f}(t,\alpha_0)}{\alpha-\alpha_0}\,dt,$$

и следовательно (следствие 2 предложения 1), если функции $\frac{\mathbf{f}(x,\alpha)-\mathbf{f}(x,\alpha_0)}{\alpha-\alpha_0}$ *равномерно сходятся* на I к функции (обязательно непрерывной) $\mathbf{h}(x)$, когда α стремится к α_0 (оставаясь $\neq\alpha_0$), то $\mathbf{g}$ имеет производную в точке α_0, равную $\int_a^b \mathbf{h}(t)\,dt$; при этом для каждого $x \in I$ отношение $\frac{\mathbf{f}(x,\alpha)-\mathbf{f}(x,\alpha_0)}{\alpha-\alpha_0}$ стремится к $\mathbf{h}(x)$, и значит, $\mathbf{h}(x)$ является производной в точке α_0 функции $\alpha \to \mathbf{f}(x,\alpha)$; эту производную (называемую *частной производной функции* $\mathbf{f}$ *по* α (см. книгу V)) мы будем обозначать через $\mathbf{f}'_\alpha(x,\alpha_0)$; следовательно, при сделанных выше предположениях имеет место формула

$$\mathbf{g}'(\alpha_0)=\int_a^b \mathbf{f}'_\alpha(t,\alpha_0)\,dt. \tag{12}$$

Следующее предложение дает нам более простое достаточное условие справедливости формулы (12):

Предложение 5. *Предположим, что частная производная* $\mathbf{f}'_\alpha(x,\alpha)$ *существует для любого* $x \in I$ *и любого* α, *принадлежащего открытой окрестности* V *точки* α_0, *и что для любого* $\alpha \in V$ *отображение* $x \to \mathbf{f}'_\alpha(x,\alpha)$ *линейчато на* I. *Если при этих условиях функции* $\mathbf{f}'_\alpha(x,\alpha)$ *равномерно сходятся на* I *к* $\mathbf{f}'_\alpha(x,\alpha_0)$, *когда* α *стремится к* α_0, *то функция* $\mathbf{g}(\alpha)=\int_a^b \mathbf{f}(t,\alpha)\,dt$ *имеет в точке* α_0 *производную, задаваемую формулой* (12).

В самом деле, для любого $\varepsilon>0$ найдется, по условию, такое $r>0$, что неравенство $|\alpha-\alpha_0|\leqslant r$ влечет неравенство $\|\mathbf{f}'_\alpha(x,\alpha)-\mathbf{f}'_\alpha(x,\alpha_0)\|\leqslant\varepsilon$ *для любого* $x \in I$. В силу предложений 3 и 5 из главы I, § 2, для $|\alpha-\alpha_0|\leqslant r$ $(\alpha\neq\alpha_0)$ и любого $x\in I$ имеем соотношение

$$\left\| \frac{\mathbf{f}(x, \alpha) - \mathbf{f}(x, \alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} - \mathbf{f}'_\alpha(x, \alpha_0) \right\| \leqslant \varepsilon,$$

которое показывает, что функции $\frac{\mathbf{f}(x, \alpha) - \mathbf{f}(x, \alpha_0)}{\alpha - \alpha_0}$ равномерно сходятся к $\mathbf{f}'_\alpha(x, \alpha_0)$ на I, когда α стремится к α_0 (оставаясь $\neq \alpha_0$), и значит, формула (12) доказана.

Следствие. *Если частная производная* $\mathbf{f}'_\alpha(x, \alpha)$ *существует на* $I \times V$ *и является на этом множестве непрерывной функцией от* (x, α), *то функция* $\mathbf{g}$ *имеет в точке* α_0 *производную, задаваемую формулой* (12).

В самом деле, если W — компактная окрестность точки α_0, содержащаяся в V, то отображение $(x, \alpha) \to f'_\alpha(x, \alpha)$ *равномерно непрерывно* на компактном множестве $I \times W$, и следовательно, функции $f'_\alpha(x, \alpha)$ равномерно сходятся на I к $f'_\alpha(x, \alpha_0)$, когда α стремится к α_0.

Из предложения 5 вытекает более общее предложение, позволяющее вычислять интеграл, когда не только подынтегральная функция f, но и пределы интегрирования зависят от параметра α.

Предложение 6. *Пусть выполнены условия предложения* 5, *и пусть* $a(\alpha)$ *и* $b(\alpha)$ — *две функции, определенные на* V *и принимающие значения в* I; *если производные* $a'(\alpha_0)$ *и* $b'(\alpha_0)$ *существуют и конечны, то функция* $\mathbf{g}(\alpha) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} \mathbf{f}(t, \alpha)\, dt$ *имеет в точке* α_0 *производную, задаваемую формулой*

$$\mathbf{g}'(\alpha_0) = \int_{a(\alpha_0)}^{b(\alpha_0)} \mathbf{f}'_\alpha(t, \alpha_0)\, dt + b'(\alpha_0)\, \mathbf{f}(b(\alpha_0), \alpha_0) - a'(\alpha_0)\, \mathbf{f}(a(\alpha_0), \alpha_0). \tag{13}$$

В самом деле, для любого $\alpha \in V$, отличного от α_0, можно написать, что

$$\frac{\mathbf{g}(\alpha) - \mathbf{g}(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} = \int_{a(\alpha_0)}^{b(\alpha_0)} \frac{\mathbf{f}(t, \alpha) - \mathbf{f}(t, \alpha_0)}{\alpha - \alpha_0}\, dt + \frac{1}{\alpha - \alpha_0} \int_{b(\alpha_0)}^{b(\alpha)} \mathbf{f}(t, \alpha)\, dt - {}$$
$$- \frac{1}{\alpha - \alpha_0} \int_{a(\alpha_0)}^{a(\alpha)} \mathbf{f}(t, \alpha)\, dt.$$

В силу предложения 5 первый интеграл в правой части стремится к $\int_{a(\alpha_0)}^{b(\alpha_0)} \mathbf{f}'_\alpha(t, \alpha_0)\,dt$, когда α стремится к α_0. Во втором интеграле мы заменим $\mathbf{f}(t, \alpha)$ на $\mathbf{f}(b(\alpha_0), \alpha_0)$ и покажем, что разность между прежним и полученным интегралом стремится к 0. Положим $M = \operatorname{Max}(\|\mathbf{f}(b(\alpha_0), \alpha_0)\|, |b'(\alpha_0)|+1)$; поскольку функция $b(\alpha)$ непрерывна в точке α_0, а функция $\mathbf{f}$ непрерывна в точке $(b(\alpha_0), \alpha_0)$, то для любого ε, удовлетворяющего условиям $0<\varepsilon<1$, найдется такое $r>0$, что соотношение $\|\alpha-\alpha_0\|\leqslant r$ влечет неравенство $\|\mathbf{f}(t, \alpha)-\mathbf{f}(b(\alpha_0), \alpha_0)\|\leqslant\varepsilon$ для любого t, принадлежащего интервалу с концами $b(\alpha_0)$ и $b(\alpha)$; на том же основании можно утверждать, что соотношение $|\alpha-\alpha_0|\leqslant r$ влечет неравенство $\left|\frac{b(\alpha)-b(\alpha_0)}{\alpha-\alpha_0}-b'(\alpha_0)\right|\leqslant\varepsilon$. Следовательно, на основании теоремы о среднем (§ 1, формула (16)) имеем

$$\left\|\frac{1}{\alpha-\alpha_0}\int_{b(\alpha_0)}^{b(\alpha)} \mathbf{f}(t, \alpha)\,dt-\frac{b(\alpha)-b(\alpha_0)}{\alpha-\alpha_0}\,\mathbf{f}(b(\alpha_0), \alpha_0)\right\|\leqslant\left|\frac{b(\alpha)-b(\alpha_0)}{\alpha-\alpha_0}\right|\varepsilon,$$

и значит,

$$\left\|\frac{1}{\alpha-\alpha_0}\int_{b(\alpha_0)}^{b(\alpha)} \mathbf{f}(t, \alpha)\,dt-b'(\alpha_0)\,\mathbf{f}(b(\alpha_0), \alpha_0)\right\|\leqslant 2M\varepsilon,$$

откуда заключаем, что $\frac{1}{\alpha-\alpha_0}\int_{b(\alpha_0)}^{b(\alpha)} \mathbf{f}(t, \alpha)\,dt$ стремится к $b'(\alpha_0)\,\mathbf{f}(b(\alpha_0), \alpha_0)$. Точно таким же способом доказывается, что $\frac{1}{\alpha-\alpha_0}\int_{a(\alpha_0)}^{a(\alpha)} \mathbf{f}(t, \alpha)\,dt$ стремится к $a'(\alpha_0)\,\mathbf{f}(a(\alpha_0), \alpha_0)$.

В книге, посвященной дифференциалам, мы покажем, что предложение 6 может быть получено из предложения 5 более простым путем при помощи общей теоремы о дифференцировании сложной функции.

5. *Производная по параметру интеграла на некомпактном интервале*

Обозначив снова через V множество, указанное в предложении 5, предположим теперь, что I — *произвольный* интервал из $\mathbf{R}$, а $\mathbf{f}$ — непрерывное отображение множества $I\times V$ в E; если интеграл $g(\alpha) = \int_I f(t, \alpha)\, dt$ существует для любого $\alpha \in V$ и является непрерывной функцией от α, то функция g *может и не иметь в точке* α_0 *производной, равной* $\int_I f'_\alpha(t, \alpha_0)\, dt$, даже если функции $f'_\alpha(x, \alpha)$ равномерно сходятся к $f'_\alpha(x, \alpha_0)$ на любом компактном интервале, содержащемся в I, и интеграл $\int_I f'_\alpha(t, \alpha)\, dt$ существует для любого $\alpha \in V$ (ср. упражнение 3).

Следующее предложение дает достаточное условие для того, чтобы формула (12) была справедлива и в этом случае.

Предложение 7. *Пусть I — произвольный интервал из* $\mathbf{R}$, *а* f — *функция, непрерывная на* $I \times V$. *Предположим, что*:

1° *частная производная* $f'_\alpha(x, \alpha)$ *существует для любого* $x \in I$ *и любого* $\alpha \in V$, *а отображение* $x \to f'_\alpha(x, \alpha)$ *линейчато на* I *при любом* $\alpha \in V$;

2° *для любого* $\alpha \in V$ *функции* $f'_\alpha(x, \beta)$ *равномерно сходятся к* $f'_\alpha(x, \alpha)$ *на любом компактном интервале, содержащемся в* I, *когда* β *стремится к* α;

3° *интеграл* $\int_I f'_\alpha(t, \alpha)\, dt$ *равномерно сходится в* V;

4° *интеграл* $\int_I f(t, \alpha_0)\, dt$ *сходится.*

При этих условиях интеграл $g(\alpha) = \int_I f(t, \alpha)\, dt$ *равномерно сходится в* V *и функция* g *имеет в каждой точке множества* V *производную, выражаемую формулой*

$$g'(\alpha) = \int_I f'_\alpha(t, \alpha)\, dt. \tag{14}$$

Равномерная сходимость в V интеграла $\int_I f'_\alpha(t, \alpha)\, dt$ означает, что функция $\alpha \to \int_J f'(t, \alpha)\, dt$ равномерно сходится в V по фильтру сечений Φ упорядоченного фильтрующегося множества $\mathfrak{K}(I)$

компактных интервалов J, содержащихся в I. Положим $\mathbf{u}_J(\alpha) = \int_J \mathbf{f}(t, \alpha)\,dt$; с одной стороны, при сделанных предположениях $\mathbf{u}_J(\alpha_0)$ имеет предел по фильтру Φ, а с другой стороны, из предложения 5 следует, что $\mathbf{u}'_J(\alpha) = \int_J \mathbf{f}'_\alpha(t, \alpha)\,dt$ для любого $\alpha \in V$. Следовательно, мы можем применить теорему 1 из § 1 к функциям $\mathbf{u}_J$, где роль множества индексов играет множество $\mathfrak{K}(I)$, фильтрующееся по фильтру Φ; отсюда сразу вытекает наше предложение.

Замечания. 1) Условия 1° и 2° предложения 7 *тем более* выполняются, если $\mathbf{f}'_\alpha(x, \alpha)$ является *непрерывной* функцией от (x, α) на $I \times V$.

2) В том случае, когда пределы интегрирования в интеграле $\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} \mathbf{f}(t, \alpha)\,dt$ являются *конечными* функциями параметра, исследование такого интеграла как функции от α может быть сведено к изучению интеграла на $[0, 1]$; в самом деле, в результате замены переменной $t = a(\alpha)(1-u) + b(\alpha)u$ получаем

$$\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} \mathbf{f}(t, \alpha)\,dt = \int_0^1 \mathbf{f}(a(\alpha)(1-u) + b(\alpha)u, \alpha)(b(\alpha) - a(\alpha))\,du.$$

6. *Перемена порядка интегрирования*

Пусть $I = [a, b]$ и $A = [c, d]$ — два *компактных* интервала из $\mathbf{R}$; пусть, далее, $\mathbf{f}$ — *непрерывная* на $I \times A$ функция со значениями в полном нормированном пространстве E над телом $\mathbf{R}$; согласно предложению 2 интеграл $\int_a^b \mathbf{f}(x, \alpha)\,dx$ является непрерывной функцией от α на интервале A; интеграл $\int_c^d \left(\int_a^b f(x, \alpha)\,dx \right) d\alpha$ от этой функции для простоты обозначается также через $\int_c^d d\alpha \int_a^b f(x, \alpha)\,dx$.

Предложение 8. *Если функция* $\mathbf{f}$ *непрерывна на* $I \times A$, *то*

$$\int_c^d d\alpha \int_a^b \mathbf{f}(x, \alpha)\, dx = \int_a^b dx \int_c^d \mathbf{f}(x, \alpha)\, d\alpha \tag{15}$$

(«формула перемены порядка интегрирования»).

Мы покажем, что для любого $y \in A$ имеет место формула

$$\int_c^y d\alpha \int_a^b \mathbf{f}(x, \alpha)\, dx = \int_a^b dx \int_c^y \mathbf{f}(x, \alpha)\, d\alpha. \tag{16}$$

Так как обе части этого равенства являются функциями от y, равными друг другу при $y = c$, то достаточно показать, что они дифференцируемы на $]c, d[$ и что их производные равны в каждой точке этого интервала. Если положить $\mathbf{g}(\alpha) = \int_a^b \mathbf{f}(x, \alpha)\, dx$, $\mathbf{h}(x, y) = \int_c^y \mathbf{f}(x, \alpha)\, d\alpha$, то соотношение (16) примет вид

$$\int_c^y \mathbf{g}(\alpha)\, d\alpha = \int_a^b \mathbf{h}(x, y)\, dx.$$

Но производная левой части по y равна $\mathbf{g}(y)$, в то время как производная правой части, в силу следствия из предложения 5, равна $\int_a^b \mathbf{h}'_y(x, y)\, dx$, поскольку $\mathbf{h}'_y(x, y) = \mathbf{f}(x, y)$ непрерывна на $I \times A$; следовательно, оба полученных выражения тождественны.

Предположим теперь, что $A = [c, d]$ — *компактный* интервал из $\mathbf{R}$, а I — *произвольный* интервал из $\mathbf{R}$; пусть, далее, $\mathbf{f}$ — непрерывная на $I \times A$ функция со значениями в E, обладающая тем свойством, что интеграл $\mathbf{g}(\alpha) = \int_I \mathbf{f}(t, \alpha)\, dt$ сходится при любом $\alpha \in A$; даже если $\mathbf{g}(\alpha)$ непрерывна на A, перемена порядка интегрирования в интеграле $\int_c^d d\alpha \int_I \mathbf{f}(t, \alpha)\, dt$ не всегда возможна, так как интеграл $\int_I dt \int_c^d \mathbf{f}(t, \alpha)\, d\alpha$ может не существовать или быть отличным от интеграла $\int_c^d d\alpha \int_I \mathbf{f}(t, \alpha)\,dt$ (ср. упражнение 7). Тем не менее справедливо следующее утверждение:

Предложение 9. *Если функция* $\mathbf{f}$ *непрерывна на* $I \times A$ *и интеграл* $\int_I \mathbf{f}(t, \alpha)\,dt$ *равномерно сходится на* A, *то интеграл* $\int_I dt \int_c^d \mathbf{f}(t, \alpha)\,d\alpha$ *сходится и*

$$\int_c^d d\alpha \int_I \mathbf{f}(t, \alpha)\,dt = \int_I dt \int_c^d \mathbf{f}(t, \alpha)\,d\alpha. \tag{17}$$

Для любого компактного интервала J, содержащегося в I, положим $\mathbf{u}_J(\alpha) = \int_J \mathbf{f}(t, \alpha)\,dt$. Из условия предложения следует, что непрерывная функция $\mathbf{u}_J$ равномерно сходится на A по фильтру сечений Φ упорядоченного фильтрующегося множества $\mathfrak{K}(I)$ к $\int_I \mathbf{f}(t, \alpha)\,dt$; значит (предложение 1), $\int_c^d d\alpha \int_J \mathbf{f}(t, \alpha)\,dt$ сходится по Φ к пределу $\int_c^d d\alpha \int_I \mathbf{f}(t, \alpha)\,dt$; но в силу предложения 8 имеем

$$\int_c^d d\alpha \int_J \mathbf{f}(t, \alpha)\,dt = \int_J dt \int_c^d \mathbf{f}(t, \alpha)\,d\alpha. \tag{18}$$

Следовательно, на основании предыдущего результата заключаем, что интеграл $\int_I dt \int_c^d \mathbf{f}(t, \alpha)\,d\alpha$ сходится, и, переходя в соотношении (18) к пределу по Φ, получаем (17).

Упражнения. °1) Пусть I — произвольный интервал из $\mathbf{R}$ и A — произвольное множество; пусть $g(t, \alpha)$ — конечная числовая функция, определенная на $I \times A$ и такая, что для любого $\alpha \in A$ функция $t \to g(t, \alpha)$ положительна и убывает на I; предположим, кроме того, что существует такое не зависящее от α число M, что $g(t, \alpha) \leqslant M$ на $I \times A$.

а) Показать, что если линейчатая на I функция $\mathbf{f}$ удовлетворяет тому условию, что $\int\limits_I \mathbf{f}(t)\,dt$ сходится, то интеграл $\int\limits_I \mathbf{f}(t)\,g(t,\alpha)\,dt$ равномерно сходится для $\alpha \in A$ (воспользоваться второй теоремой о среднем; ср. § 1, упражнение 16).

б) Предположим, что $I=[a, +\infty[$ и $g(t, \alpha)$ равномерно стремится к 0 (для $\alpha \in A$), когда t стремится к $+\infty$.

Показать, что если функция $\mathbf{f}$ линейчата на I и если существует такое число $k>0$, что $\left\|\int\limits_J \mathbf{f}(t)\,dt\right\| \leqslant k$ для любого компактного интервала, содержащегося в I, то интеграл $\int\limits_I \mathbf{f}(t)\,g(t, \alpha)\,dt$ равномерно сходится для $\alpha \in A$ (тот же метод).

в) Предположим, что $a \geqslant 0$, $A=[0, +\infty[$ и что $g(t, \alpha)=\varphi(\alpha t)$, где $\varphi(x)$ — выпуклая убывающая и положительная на A функция, стремящаяся к 0, когда x стремится к $+\infty$, и такая, что $\varphi(0)=1$. Предположим, кроме того, что $\mathbf{f}=\mathbf{h}''$, где $\mathbf{h}$ — дважды дифференцируемая на $[a, +\infty[$ функция, ограниченная вместе с $\mathbf{h}'$ на этом интервале. Тогда интеграл $\int\limits_a^\infty \mathbf{f}(t)\,\varphi(\alpha t)\,dt$ сходится для $\alpha>0$; показать, что при α, стремящемся к 0, этот интеграл стремится к $-\mathbf{h}'(a)$ (проинтегрировать по частям и воспользоваться второй теоремой о среднем).

* г) Возьмем $\varphi(x)=e^{-x}$, $a=1$, а в качестве $\mathbf{f}$ возьмем числовую функцию $\frac{1}{t}\cos(\log t)$, которая представляет собой производную ограниченной на I функции; показать, что интеграл $\int\limits_1^\infty e^{-\alpha t}\frac{\cos\log t}{t}\,dt$, сходящийся при любом $\alpha>0$, не стремится ни к какому пределу, когда α стремится к 0.*

2) Пусть две числовые линейчатые на компактном интервале $[a, b]$ функции f и g таковы, что f убывает на $[a, b]$ и $0 \leqslant g(t) \leqslant 1$. Показать, что если $\lambda=\int\limits_a^b g(t)\,dt$, то выполняются неравенства

$$\int\limits_{b-\lambda}^{b} f(t)\,dt < \int\limits_a^b f(t)\,g(t)\,dt < \int\limits_a^{a+\lambda} f(t)\,dt,$$

кроме тех случаев, когда f постоянна или когда g равна 0 (соответственно 1) во всех точках, в которых она непрерывна (то есть кроме тех случаев, когда все три части неравенства равны между собой). $\left(\text{В интеграле } \int\limits_x^y f(t)\, g(t)\, dt \text{ заставить меняться один из пределов интегрирования.}\right)$

3) Пусть $f(x, \alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}$ для $-1 < x < 1$ и $\alpha \in \mathbf{R}$; показать, что функция $g(\alpha) = \int\limits_{-1}^{+1} \dfrac{dx}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}$ непрерывна на $\mathbf{R}$, но не имеет производной в точках $\alpha=1$ и $\alpha=-1$; показать, что $f'_\alpha(x, \alpha)$ существует для любого $\alpha \in \mathbf{R}$ и для $x \in I =]-1, +1[$ и что она непрерывна на $I \times \mathbf{R}$, а также что интеграл $\int\limits_{-1}^{+1} f'_\alpha(x, \alpha)\, dx$ существует для любого $\alpha \in \mathbf{R}$, но не является равномерно сходящимся в окрестности точки $\alpha=1$ или точки $\alpha=-1$.

°4) Пусть I — интервал из $\mathbf{R}$, A — окрестность точки α_0 тела $\mathbf{R}$ (соответственно тела $\mathbf{C}$), $\mathbf{f}$ — непрерывное отображение множества $I \times A$ в полное нормированное пространство E над телом $\mathbf{R}$, обладающее тем свойством, что $\mathbf{f}'_\alpha(x, \alpha)$ существует и непрерывна на $I \times A$. Пусть $a(\alpha)$, $b(\alpha)$ — такие две непрерывные на A функции со значениями в I, что имеет место тождество $\mathbf{f}(a(\alpha), \alpha) = \mathbf{f}(b(\alpha), \alpha) = 0$ на A. Показать, что функция $\mathbf{g}(\alpha) = \int\limits_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} \mathbf{f}(t, \alpha)\, dt$ имеет в точке α_0 производную, равную $\int\limits_{a(\alpha_0)}^{b(\alpha_0)} \mathbf{f}'_\alpha(t, \alpha_0)\, dt$, даже если a и b не дифференцируемы в точке α_0 (обозначив через M верхнюю грань функции $\|\mathbf{f}'_\alpha(x, \alpha)\|$ на некоторой компактной окрестности точки $(b(\alpha_0), \alpha_0)$, заметить, применив к $b(\alpha)$ теорему Больцано, что для любого x, принадлежащего интервалу с концами $b(\alpha_0)$ и $b(\alpha)$, при α, достаточно близком к α_0, выполняется неравенство $\|\mathbf{f}(x, \alpha)\| \leqslant M\,|\alpha-\alpha_0|$).

5) Пусть вектор-функция $\mathbf{f}$ непрерывна на компактном интервале $I = [0, a]$. Показать, что если для $\alpha_0 \in I$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что отношение $\dfrac{\mathbf{f}(x)-\mathbf{f}(\alpha_0)}{|x-\alpha_0|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}$ остается ограниченным, когда x стремится

к α_0, то функция $\mathbf{g}(\alpha)=\int\limits_0^{\alpha}\frac{\mathbf{f}(x)}{\sqrt{\alpha-x}}\,dx$ имеет в точке α_0 производную, равную

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha_0}}\,\mathbf{f}(\alpha_0)-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\alpha_0}\frac{\mathbf{f}(x)-\mathbf{f}(\alpha_0)}{(\alpha_0-x)^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

для $\alpha_0>0$ и равную 0 для $\alpha_0=0$.

Показать, что если $\mathbf{f}$ — числовая функция, равная $\sqrt{\alpha_0-x}$, то функция $\mathbf{g}$ имеет в точке α_0 бесконечную производную.

°6) Пусть $I=[a,\ b]$ и $A=[c,\ d]$ — два компактных в $\mathbf{R}$ интервала; пусть функция $\mathbf{f}$, определенная на $I\times A$ и принимающая значения в полном нормированном пространстве над телом $\mathbf{R}$, такова, что для любого $\alpha\in A$ отображение $t\to\mathbf{f}(t,\ \alpha)$ линейчато на $\mathbf{I}$, что $\mathbf{f}$ ограничена на $I\times A$ и что множество D точек разрыва функции $\mathbf{f}$ на $I\times A$ имеет *конечное* число общих точек с любой прямой $x=x_0$ и любой прямой $\alpha=\alpha_0$ $(x_0\in I,\ \alpha_0\in A)$.

а) Показать, что функция $\mathbf{g}(\alpha)=\int\limits_a^b\mathbf{f}(t,\ \alpha)\,dt$ непрерывна на A (если заданы $\alpha_0\in A$ и $\varepsilon>0$, то показать, что существуют такая окрестность V точки α_0 и конечное число таких интервалов J_k, содержащихся в I и имеющих в сумме длину, не превышающую ε, что если через J обозначить дополнение относительно I множества $\bigcup\limits_k J_k$, то $\mathbf{f}$ непрерывна на $J\times V$).

б) Показать, что формула перемены порядка интегрирования (формула (15)) снова верна (тот же метод, что и в а)).

7) Пусть числовая функция f имеет непрерывную производную на интервале $]0,\ +\infty[$ и удовлетворяет условию

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to\infty}f(x)=0.$$

Если интеграл $\int\limits_0^{\infty}f'(\alpha t)\,dt$ определен и непрерывен на любом ограниченном интервале $]0,\ a[$, показать, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty}dt\int\limits_0^a f'(\alpha t)\,d\alpha$ может не существовать или быть отличным от $\int\limits_0^a d\alpha\int\limits_0^{\infty}f'(\alpha t)\,dt$.

°8) Пусть I и J — любые два интервала из $\mathbf{R}$, а функция $\mathbf{f}$, определенная на $I\times J$, принимает свои значения в полном нормированном пространстве E над телом $\mathbf{R}$. Предположим, что:

1° интеграл $\int\limits_I \mathbf{f}(x, y)\, dx$ равномерно сходится, когда y пробегает какой угодно компактный интервал, содержащийся в J;

2° интеграл $\int\limits_J \mathbf{f}(x, y)\, dy$ равномерно сходится, когда x пробегает какой угодно компактный интервал, содержащийся в I;

3° если для любого компактного интервала H, содержащегося в J, положить $\mathbf{u}_H(y) = \int\limits_H \mathbf{f}(x, y)\, dx$, то интеграл $\int\limits_J \mathbf{u}_H(y)\, dy$ равномерно сходится для $H \in \mathfrak{K}(I)$ (упорядоченное фильтрующееся множество компактных интервалов, содержащихся в I).

Показать, что при этих условиях интегралы $\int\limits_I dx \int\limits_J \mathbf{f}(x, y)\, dy$ и $\int\limits_J dy \int\limits_I \mathbf{f}(x, y)\, dx$ существуют и равны между собой.

*9) Вывести из упражнения 8, что интегралы

$$\int\limits_0^\infty dx \int\limits_0^\infty e^{-yx^2} \sin y\, dy \quad \text{и} \quad \int\limits_0^\infty dy \int\limits_0^\infty e^{-yx^2} \sin y\, dx$$

существуют и равны между собой.*

ГЛАВА III

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Производные показательных и круговых функций

1. *Производные показательных функций; число e*

Известно, что всякое непрерывное представление аддитивной группы $\mathbf{R}$ в мультипликативную группу $\mathbf{R}^*$ действительных чисел, отличных от 0, является функцией вида $x \longrightarrow a^x$ (называемой *показательной функцией*), где a — положительное число (Общая топология, гл. V, § 4); если $a \neq 1$, то это есть изоморфизм группы $\mathbf{R}$ на мультипликативную группу $\mathbf{R}_+^*$ строго положительных чисел; обратный изоморфизм $\mathbf{R}_+^*$ на $\mathbf{R}$ обозначается через $\log_a x$ и называется *логарифмом с основанием* a.

Мы покажем, что функция $f(x) = a^x$ в каждой точке $x \in \mathbf{R}$ имеет производную вида $c \cdot a^x$ (где, очевидно, $c = f'(0)$). Это вытекает из следующей общей теоремы:

Теорема 1. *Пусть E — полная нормированная алгебра над телом $\mathbf{R}$, имеющая единичный элемент* $\mathbf{e}$, *и пусть* $\mathbf{f}$ — *непрерывное представление аддитивной группы* $\mathbf{R}$ *в мультипликативную группу G обратимых элементов из E. Отображение* $\mathbf{f}$ *дифференцируемо в любой точке* $x \in \mathbf{R}$, *и справедливо равенство*

$$\mathbf{f}'(x) = \mathbf{f}(x)\,\mathbf{f}'(0). \tag{1}$$

Прежде всего заметим, что если E — полная алгебра, то G *открыто* в E (Общая топология, гл. IX, § 3, предложение 14).

Рассмотрим функцию $\mathbf{g}(x)=\int\limits_0^a \mathbf{f}(x+t)\,dt$, где $a>0$ есть число, которое мы уточним в дальнейшем; так как по условию $\mathbf{f}(x+t)=\mathbf{f}(x)\,\mathbf{f}(t)$, то $\mathbf{g}(x)=\int\limits_0^a \mathbf{f}(x)\,\mathbf{f}(t)\,dt=\mathbf{f}(x)\int\limits_0^a \mathbf{f}(t)\,dt$ (гл. I, § 1, предложение 3). Пусть $\alpha>0$ таково, что шар $\|\mathbf{x}-\mathbf{e}\|\leqslant\alpha$ содержится в G; так как $\mathbf{f}(0)=\mathbf{e}$ и $\mathbf{f}$ по условию непрерывна, то можно предположить α столь малым, что $\|\mathbf{f}(t)-\mathbf{e}\|\leqslant\alpha$ на $[0, a]$; следовательно (гл. II, § 1, формула (17)), $\left\|\frac{1}{a}\int\limits_0^a \mathbf{f}(t)\,dt-\mathbf{e}\right\|\leqslant\alpha$ и элемент $\frac{1}{a}\int\limits_0^a \mathbf{f}(t)\,dt$ принадлежит G, то есть обратим; то же самое можно сказать относительно $\mathbf{b}=\int\limits_0^a \mathbf{f}(t)\,dt$ и написать $\mathbf{f}(x)=\mathbf{g}(x)\,\mathbf{b}^{-1}$; значит, достаточно показать, что $\mathbf{g}(x)$ дифференцируема; но, произведя замену переменной $x+t=u$, получим $\mathbf{g}(x)=\int\limits_x^{x+a} \mathbf{f}(u)\,du$; так как $\mathbf{f}$ непрерывна, то $\mathbf{g}$ дифференцируема в любой точке $x\in\mathbf{R}$ (гл. II, § 1, предложение 3) и

$$\mathbf{g}'(x)=\mathbf{f}(x+a)-\mathbf{f}(x)=\mathbf{f}(x)\,(\mathbf{f}(a)-\mathbf{e}).$$

Отсюда $\mathbf{f}'(x)=\mathbf{g}'(x)\,\mathbf{b}^{-1}=\mathbf{f}(x)\,\mathbf{c}$, где $\mathbf{c}=(\mathbf{f}(a)-\mathbf{e})\,\mathbf{b}^{-1}$, и очевидно, что $\mathbf{f}'(0)=\mathbf{c}$.

Обратно, можно доказать как непосредственно (упражнение 1), так и при помощи теории линейных дифференциальных уравнений (гл. IV, § 2), что всякое дифференцируемое отображение $\mathbf{f}$ тела $\mathbf{R}$ в полную нормированную алгебру E, удовлетворяющее условиям $\mathbf{f}'(x)=\mathbf{f}(x)\,\mathbf{c}$ и $\mathbf{f}(0)=\mathbf{e}$, является представлением аддитивной группы $\mathbf{R}$ в мультипликативную группу G.

Предложение 1. *Для любого строго положительного числа $a\neq 1$ показательная функция a^x имеет в каждой точке $x\in\mathbf{R}$ производную, равную* $(\log_e a)\,a^x$, *где e — число, большее* 1 (не зависящее от a).

Действительно, применение теоремы 1 к случаю, когда E есть само тело $\mathbf{R}$, показывает, что a^x имеет в каждой точке производную, равную $\varphi(a)\,a^x$, где $\varphi(a)$ есть действительное число, отличное от 0 и зависящее лишь от a. Пусть b — другое строго положительное число, отличное от 1; функция b^x, на основании вышеизложенного, имеет производную, равную $\varphi(b)\,b^x$; с другой стороны, $b^x = a^{x \log_a b}$, и следовательно (гл. I, § 1, предложение 5), производная функции b^x равна $\log_a b\,\varphi(a)\,b^x$; сравнив оба полученных выражения, видим, что

$$\varphi(b) = \varphi(a) \log_a b. \tag{2}$$

Отсюда следует, что существует, и притом только одно, такое число b, что $\varphi(b) = 1$; в самом деле, это равенство, в силу (2), эквивалентно равенству $b = a^{\frac{1}{\varphi(a)}}$. Определенное таким образом действительное число принято обозначать через e; согласно (2) имеем $\varphi(a) = \log_e a$, что и завершает доказательство предложения 1.

Часто вместо e пишут $\exp x$.

Определение числа e показывает, что

$$D(e^x) = e^x, \tag{3}$$

откуда следует, что e^x строго возрастает и, значит, $e > 1$.

В § 2 мы покажем, как можно приближенно вычислить число с любой точностью.

Определение 1. *Логарифмы с основанием e называются неперовыми логарифмами* (или *натуральными логарифмами*).

Обычно при написании неперовых логарифмов основание опускается. Следовательно, если не будет оговорено противное, выражение $\log x$ $(x > 0)$ будет обозначать *неперов логарифм* x. При таком обозначении предложение 1 выражается посредством тождества

$$D(a^x) = (\log a)\, a^x, \tag{4}$$

справедливого при любом $a > 0$ (поскольку $\log a = 0$ для $a = 1$).

Это соотношение показывает, что a^x имеет производные *любого порядка* и что

$$D^n(a^x) = (\log a)^n\, a^x. \tag{5}$$

В частности, для любого строго положительного $a \neq 1$ $D^2(a^x) > 0$ для всех $x \in \mathbf{R}$, и значит, функция a^x *строго выпукла* на $\mathbf{R}$ (гл. I, § 4, следствие из предложения 7). Отсюда получаем следующее предложение:

Предложение 2 («неравенство для среднего геометрического»). *Для любых чисел* $z_i > 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *и чисел* $p_i > 0$, *удовлетворяющих условию* $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$, *справедливо неравенство*

$$z_1^{p_1} z_2^{p_2} \ldots z_n^{p_n} \leqslant p_1 z_1 + p_2 z_2 + \ldots + p_n z_n, \tag{6}$$

причем равенство имеет место лишь в том случае, когда все z_i *равны между собой.*

В самом деле, положим $z_i = e^{x_i}$; тогда неравенство (6) примет вид

$$\exp(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n) \leqslant p_1 e^{x_1} + p_2 e^{x_2} + \ldots + p_n e^{x_n}, \tag{7}$$

и предложение вытекает из предложения 1 главы I, § 4, примененного к функции e^x, строго выпуклой на $\mathbf{R}$.

Говорят, что левая часть (соответственно правая часть) неравенства (6) есть *взвешенное среднее геометрическое* (соответственно *взвешенное среднее арифметическое*) n чисел z_i *с весами* p_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. При $p_i = \frac{1}{n}$ для $1 \leqslant i \leqslant n$ это будут обычные среднее геометрическое и среднее арифметическое чисел z_i. Тогда неравенство (6) примет вид

$$(z_1 z_2 \ldots z_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}(z_1 + z_2 + \ldots + z_n). \tag{8}$$

2. *Производная функции* $\log_a x$

Так как функция a^x при $a \neq 1$ строго монотонна на $\mathbf{R}$, то применение формулы дифференцирования обратной функции (гл. I, § 1, предложение 6) дает нам для любого $x > 0$ равенство

$$D(\log_a x) = \frac{1}{x \log a} \tag{9}$$

и, в частности,

$$D(\log x) = \frac{1}{x}. \tag{10}$$

Если числовая функция u имеет в точке x_0 производную $u(x_0) > 0$, то функция $\log u$ имеет в точке x_0 производную, равную $\frac{u'(x_0)}{u(x_0)}$. В частности, $D(\log|x|) = \frac{1}{x}$ при $x > 0$ и $D(\log|x|) = -\frac{1}{|x|} = \frac{1}{x}$ при $x < 0$; короче говоря, $D(\log|x|) = \frac{1}{x}$ для любого $x \neq 0$. Отсюда заключаем, что если на интервале I числовая функция u не равна тождественно нулю и имеет конечную производную, то функция $\log|u(x)|$ имеет на I производную, равную $\frac{u'}{u}$; эта производная называется *логарифмической производной* функции u. Легко видеть, что логарифмическая производная функции $|u|^\alpha$ равна $\frac{\alpha u'}{u}$ и что логарифмическая производная произведения равна сумме логарифмических производных сомножителей; применение этих правил часто позволяет гораздо быстрее вычислить производную функции. В частности, они снова приводят к формуле

$$D(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1} \qquad (\alpha \text{ — любое действительное, } x > 0), \tag{11}$$

уже доказанной другим способом в главе II (§ 3, n° 1).

Пример. Если функция u отлична от 0 на интервале I, а числовая функция v произвольна, то $\log(|u|^v) = v \log|u|$, и значит, если u и v дифференцируемы, то

$$\frac{1}{|u|^v} D(|u|^v) = v' \log|u| + v\frac{u'}{u}.$$

3. *Производные круговых функций; число π*

В общей топологии (Общая топология, гл. VIII, § 2) был определен гомоморфизм $x \to \mathbf{e}(x)$ аддитивной группы $\mathbf{R}$ на мультипликативную группу $\mathbf{U}$ комплексных чисел с абсолютным значением 1; это периодическая функция с главным периодом 1 и $\mathbf{e}\left(\frac{1}{4}\right) = i$. Известно (там же), что всякий гомоморфизм группы $\mathbf{R}$ на $\mathbf{U}$ имеет вид $x = \mathbf{e}\left(\frac{x}{a}\right)$ и что в общепринятых обозначениях $\cos_a x = \mathscr{R}\left(\mathbf{e}\left(\frac{x}{a}\right)\right)$, $\sin_a x = \mathscr{J}\left(\mathbf{e}\left(\frac{x}{a}\right)\right)$ (*тригонометрические* или *круговые* функции с основанием a); эти функции представляют собой непрерывные отображения $\mathbf{R}$ на $[-1, +1]$, имеющие a главным периодом. Имеем $\sin_a\left(x+\frac{a}{4}\right)=\cos_a x$, $\cos_a\left(x+\frac{a}{4}\right)=-\sin_a x$, и функция $\sin_a x$ возрастает на интервале $\left[-\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right]$.

Предложение 3. *Функция* $\mathbf{e}(x)$ *имеет в каждой точке из* $\mathbf{R}$ *производную, равную* $2\pi i\mathbf{e}(x)$, *где* π — *строго положительная постоянная.*

Действительно, теорема 1, примененная к случаю, когда E есть тело $\mathbf{C}$ комплексных чисел, дает нам соотношение $\mathbf{e}'(x) = \mathbf{e}'(0)\,\mathbf{e}(x)$; учитывая, кроме того, что $\mathbf{e}(x)$ имеет постоянную евклидову норму, мы заключаем, что $\mathbf{e}'(x)$ ортогональна к $\mathbf{e}(x)$ (гл. I, § 1, n° 3, пример 3); следовательно, $\mathbf{e}'(0)=\alpha i$, где α — действительное число. Так как $\sin_1 x$ возрастает на $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$, то производная этой функции в точке $x=0$ положительна и, значит, $\alpha \geqslant 0$, а поскольку $\mathbf{e}(x)$ не равна постоянной, то $\alpha > 0$; определенное таким образом число α принято обозначать через 2π.

В § 2 мы покажем, как можно приближенно вычислить число π с любой точностью.

Таким образом, имеем формулу

$$D\left(\mathbf{e}\left(\frac{x}{a}\right)\right)=\frac{2\pi i}{a}\mathbf{e}\left(\frac{x}{a}\right). \tag{12}$$

Легко видеть, что эта формула упрощается, если $a=2\pi$; именно поэтому в анализе используются исключительно круговые функции с основанием 2π; в обозначениях этих функций значок основания обычно опускают; значит, в дальнейшем, если не будет оговорено противное, выражения $\cos x$, $\sin x$ и $\operatorname{tg} x$ будут означать соответственно $\cos_{2\pi} x$, $\sin_{2\pi} x$ и $\operatorname{tg}_{2\pi} x$. Теперь формула (12) при $a=2\pi$ примет вид

$$D(\cos x + i\sin x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right), \tag{13}$$

что эквивалентно

$$D(\cos x) = -\sin x, \qquad D(\sin x) = \cos x, \tag{14}$$

откуда

$$D(\operatorname{tg} x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}. \tag{15}$$

Кроме трех круговых функций $\cos x$, $\sin x$ и $\operatorname{tg} x$ в вычислительной практике используются три вспомогательные функции: *котангенс*, *секанс* и *косеканс*, определенные посредством формул

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}, \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$

Напомним (Общая топология, гл. VIII, § 2, n° 3), что единица измерения угла, соответствующая основанию 2π, называется *радианом*.

4. Обратные круговые функции

Сужение функции $\sin x$ на интервал $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ является строго возрастающей функцией; следовательно, обратная ей функция, которую мы обозначим через *) Arcsin x, является строго возрастающим непрерывным отображением интервала $[-1, +1]$ на $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ (рис. 6). Формула дифференцирования обратной функции (гл. I, § 1, предложение 6) позволяет написать производную этой функции:

$$D(\operatorname{Arcsin} x) = \frac{1}{\cos(\operatorname{Arcsin} x)}.$$

Так как $-\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{Arcsin} x \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $\cos(\operatorname{Arcsin} x) \geqslant 0$, а так как $\sin(\operatorname{Arcsin} x) = x$, то $\cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1-x^2}$, откуда

$$D(\operatorname{Arcsin} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{16}$$

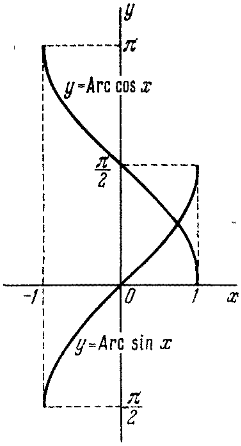

Рис. 6.

Точно так же сужение функции $\cos(x)$ на интервал $[0, \pi]$ является строго убывающей функцией; обозначим через Arccos x обратную ей функцию, которая является строго убывающим отображением интервала $[-1, +1]$ на $[0, \pi]$ (рис. 6). Кроме того, имеем

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arccos} x\right) = \cos(\operatorname{Arccos} x) = x,$$

*) В отечественной литературе определяемые в этом n° обратные круговые функции обозначают: arcsin x, arccos x, arctg x. — *Прим. перев.*

а так как $-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arccos} x \leqslant \frac{\pi}{2}$, то

$$\operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x, \tag{17}$$

откуда следует, в частности, что

$$D(\operatorname{Arccos} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{18}$$

Наконец, сужение функции $\operatorname{tg} x$ на интервал $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$ является строго возрастающей функцией; обратная ей функция $\operatorname{Arctg} x$ является строго возрастающим отображением $\mathbf{R}$ на $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$ (рис. 7), причем

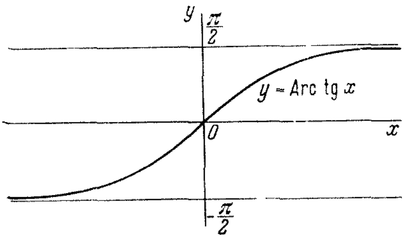

Рис. 7.

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{Arctg} x = -\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{Arctg} x = \frac{\pi}{2},$$

и в результате применения формулы дифференцирования обратной функции и формулы (15) получаем

$$D(\operatorname{Arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}. \tag{19}$$

5. *Комплексная показательная функция*

В общей топологии (Общая топология, гл. VIII, § 2, n° 1) определены все гомоморфизмы (аддитивной) топологической группы $\mathbf{C}$ комплексных чисел на (мультипликативную) топологическую группу $\mathbf{C}^*$ комплексных чисел, отличных от 0; это отображения

$$x + iy \to e^{\alpha x + \beta y} \mathbf{e}(\gamma x + \delta y), \tag{20}$$

где α, β, γ, δ — четыре действительных числа, подчиненные единственному условию $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Зададимся целью выделить те из этих гомоморфизмов $z \to f(z)$, которые *дифференцируемы* в $\mathbf{C}$. Прежде всего заметим, что для этого достаточно, чтобы функция f была дифференцируема в точке $z = 0$; в самом деле, для любой точки $z \in \mathbf{C}$ имеем $\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = f(z)\frac{f(h)-1}{h}$; если $f'(0)$ существует, то существует и $f'(z)$, и $f'(z) = af(z)$, где $a =$

$=f'(0)$. С другой стороны, если g — какой-нибудь другой дифференцируемый гомоморфизм, удовлетворяющий условию $g'(z)=$ $=bg(z)$, то $g\left(\frac{az}{b}\right)=f(z)$, так как сразу же можно заключить, что частное $\frac{g\left(\frac{az}{b}\right)}{f(z)}$ имеет производную, всюду равную 0, и равно 1 при $z=0$; следовательно, все дифференцируемые гомоморфизмы имеют вид $z\to f(\lambda z)$, где f — один из них (предполагаемый существующим), а λ — произвольная (комплексная) постоянная.

Теперь мы можем утверждать, что если гомоморфизм f дифференцируем в точке $z=0$, то каждое из отображений $x\to f(x)$, $y\to f(iy)$ тела $\mathbf{R}$ в $\mathbf{C}$ дифференцируемо в точке 0, причем первое имеет производную $f'(0)$, а второе $if'(0)$. Но производные отображений $x\to e^{\alpha x}\mathbf{e}(\gamma x)$, $y\to e^{\beta y}\mathbf{e}(\delta y)$ в точке 0 равны соответственно $\alpha+2\pi i\gamma$ и $\beta+2\pi i\delta$, откуда получаем условия $\beta=$ $=-2\pi\gamma$ и $\alpha=2\pi\delta$; эти условия выполняются, в частности, и для гомоморфизма $x+iy\to e^x\mathbf{e}\left(\frac{y}{2\pi}\right)$, который мы обозначим пока через f_0. Покажем теперь, что функция f_0 действительно дифференцируема в точке $z=0$.

В самом деле, очевидно, что отображения $x\to f_0(x)$ и $y\to f_0(iy)$ имеют производные любого порядка; в частности, формула Тейлора первого порядка, примененная к этим функциям, показывает, что для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $r>0$, что если положить $f_0(x)=1+x+\varphi(x)x$, $f_0(iy)=1+iy+\psi(y)y$, то условия $|x|\leqslant r$, $|y|\leqslant r$ влекут неравенства $|\varphi(x)|\leqslant\varepsilon$ и $|\psi(y)|\leqslant\varepsilon$; теперь мы можем написать, что $f_0(x+iy)=$ $=f_0(x)f_0(iy)=1+(x+iy)+\theta(x,y)$, где

$$\theta(x,y)=(i+\varphi(x)\psi(y))xy+(1+x)y\psi(y)+(1+iy)x\varphi(x);$$

если $|z|\leqslant r$, то $|x|\leqslant r$ и $|y|\leqslant r$, откуда следует неравенство

$$|\theta(x,y)|\leqslant(1+\varepsilon^2)|z|^2+2\varepsilon|z|(1+|z|),$$

которое показывает, что частное $\frac{f_0(z)-1-z}{z}$ стремится к 0 вместе с z, то есть что f_0 имеет в точке $z=0$ производную, равную 1. Тогда вышеизложенное позволяет утверждать, что для любого $z\in C$

$$D(f_0(z))=f_0(z). \tag{21}$$

Это свойство еще больше сближает f_0 с функцией e^x, которая к тому же является сужением функции f_0 на действительную ось; это позволяет нам сформулировать следующее определение:

Определение 2. *Показательной комплексной функцией называется гомоморфизм* $x+iy \longrightarrow e^x \mathbf{e}\left(\frac{y}{2\pi}\right)$ *тела* $\mathbf{C}$ *на* $\mathbf{C}^*$; *значение этой функции для произвольного комплексного числа* z *обозначается* e^z *или* $\exp z$.

6. *Свойства функции* e^z

Тот факт, что $z \longrightarrow e^z$ является представлением $\mathbf{C}$ в $\mathbf{C}^*$, выражается посредством тождеств

$$e^{z+z'} = e^z e^{z'}, \qquad e^0 = 1, \quad e^{-z} = \frac{1}{e^z}\,. \tag{22}$$

По определению, для любого $z = x + iy$

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y), \tag{23}$$

а так как $e^x > 0$, то очевидно, что *абсолютное значение* функции e^z равно e^x, а ее *аргументом* (*амплитудой*) является y (по модулю 2π).

Определение 2 дает нам, в частности, соотношение

$$\mathbf{e}(x) = e^{2\pi i x}, \tag{24}$$

которое позволяет записать формулы, определяющие $\cos x$ и $\sin x$, в виде

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \qquad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \tag{25}$$

(*формулы Эйлера*).

Так как главный период функции $\mathbf{e}\left(\frac{y}{2\pi}\right)$ равен 2π, то *главный период функции* e^z равен $2\pi i$, то есть группа периодов функции e^z представляет собой множество чисел $2\pi n i$, где n пробегает $\mathbf{Z}$.

Наконец, формула (21) принимает вид

$$D(e^z) = e^z, \tag{26}$$

и значит, для любого комплексного a

$$D(e^{az}) = ae^{az}. \tag{27}$$

Замечание. Если функцию e^{az} (a — комплексное) в формуле (27) рассматривать лишь на действительной оси, то для действительных x снова будет выполняться соотношение

$$D(e^{\alpha x}) = \alpha e^{\alpha x}. \tag{28}$$

Эта формула позволяет вычислять примитивную для каждой из функций $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$ (α и β — действительные); в самом деле, $e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x$, и значит, в силу (28)

$$D\left(\mathscr{R}\left(\frac{1}{\alpha+i\beta}e^{(\alpha+i\beta)x}\right)\right) = e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$D\left(\mathscr{J}\left(\frac{1}{\alpha+i\beta}e^{(\alpha+i\beta)x}\right)\right) = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Точно так же вычисление примитивной для функции $x^n e^{\alpha x}\cos\beta x$ или $x^n e^{\alpha x}\sin\beta x$ (n — *целое*, $n > 0$) заменяется вычислением примитивной для функции $x^n e^{(\alpha+i\beta)x}$; но формула интегрирования по частям порядка $n+1$ (гл. II, § 1, формула (12)) показывает, что примитивная этой последней функции равна

$$e^{(\alpha+i\beta)x}\left[\frac{x^n}{\alpha+i\beta} - \frac{nx^{n-1}}{(\alpha+i\beta)^2} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{(\alpha+i\beta)^3} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + (-1)^n \frac{n!}{(\alpha+i\beta)^{n+1}}\right].$$

С другой стороны, благодаря формулам Эйлера можно любую целую положительную степень функции $\cos x$ или $\sin x$ представить в виде линейной комбинации показательных функций e^{ipx} (p — целое, либо положительное, либо отрицательное). Следовательно, формула (28) позволяет примитивную функции вида $x^n e^{\alpha x}(\cos\beta x)^r(\sin\gamma x)^s$ представить в виде линейной комбинации функций вида $x^p e^{\alpha x}\cos\lambda x$ и $x^p e^{\alpha x}\sin\mu x$ (n, p, r, s — *целые*, α, β, γ, λ, μ — действительные).

Пример. Имеем

$$\sin^{2n} x = \frac{(-1)^n}{2^{2n}}(e^{ix} - e^{-ix})^{2n} =$$
$$= \frac{(-1)^n}{2^{2n}}\left[e^{2nix} - \binom{2n}{1}e^{(2n-2)ix} + \ldots + e^{-2nix}\right],$$

откуда

$$\int_0^x \sin^{2n} t\,dt = \frac{(-1)^n}{2^{2n}}\left[\frac{1}{n}\sin 2nx - \binom{2n}{1}\frac{1}{n-1}\sin(2n-2)x + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + (-1)^{n-1}\binom{2n}{n-1}\sin 2x + (-1)^n\binom{2n}{n}x\right]$$

и, в частности,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t\,dt = \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}}\frac{\pi}{2} = \frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2n}\frac{\pi}{2}. \tag{29}$$

7. Комплексный логарифм

Пусть B — «полоса», образованная точками $z=x+iy$, где $-\pi \leqslant y < \pi$; функция e^z принимает в B каждое значение один и только один раз, то есть $z \to e^z$ — *взаимно однозначное* и непрерывное отображение полосы B на $\mathbf{C}^*$; образом отрезка (полуоткрытого) $x=x_0$, $-\pi \leqslant y < \pi$ при этом отображении является окружность $|z|=e^{x_0}$, а образом прямой $y=y_0$ — полупрямая (открытая) $\operatorname{Am}(z)=y_0 \pmod{2\pi}$. При отображении $z \to e^z$ образ *внутренности* $\mathring{B}$ множества B, то есть образ множества тех точек $z \in \mathbf{C}$, для которых $|\mathcal{J}(z)| < \pi$, есть дополнение F отрицательной действительной (замкнутой) полуоси в $\mathbf{C}$; если условиться обозначать через $\operatorname{Am}(z)$ величину амплитуды числа z, принадлежащей интервалу $[-\pi, +\pi[$, то множество F можно также определить при помощи соотношений $-\pi < \operatorname{Am}(z) < \pi$. Поскольку $z \to e^z$ есть *гомоморфизм* группы $\mathbf{C}$ на $\mathbf{C}^*$, то образом любого открытого в $\mathring{B}$ (а значит, и в $\mathbf{C}$) множества является множество, открытое в $\mathbf{C}^*$ (а значит, и в F); иными словами, сужение отображения $z \to e^z$ на $\mathring{B}$ есть *гомеоморфизм* множества $\mathring{B}$ на F. Обозначим через $z \to \log z$ гомеоморфизм множества F на $\mathring{B}$, являющийся отображением, обратным предыдущему; для любого комплексного числа $z \in F$ число $\log z$ называется *главным значением логарифма числа* z. Если $z=x+iy$, а $\log z = u+iv$, то $x+iy=e^{u+iv}$, откуда $e^u=|z|$, а так как $-\pi < v < \pi$, то $v=\operatorname{Am}(z)$. Кроме того, при $y \neq 0$ имеем $\operatorname{tg}\left(v+\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{x}{y}$; следовательно, имеют место формулы

$$\left.\begin{aligned}
&u=\log|z|=\frac{1}{2}\log(x^2+y^2), \\
&v=\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctg}\frac{x}{y}, \quad \text{если } y>0, \\
&v=0, \qquad\qquad\qquad\;\; \text{если } y=0, \\
&v=-\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctg}\frac{x}{y}, \text{ если } y<0.
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Очевидно, функция $\log z$ является продолжением на F функции $\log x$, определенной на положительной действительной открытой полуоси $\mathbf{R}_+^*$. Если z, z' — такие два числа из F, произведение zz' которых не равно отрицательному действительному числу, то $\log(zz') = \log z + \log z' + 2\varepsilon\pi i$, где $\varepsilon = +1$, -1 или 0, в зависимости от значений $\mathrm{Am}(z)$ и $\mathrm{Am}(z')$.

Отметим, что в точках отрицательной действительной полуоси функция $\log z$ *не имеет предела*; более точно: когда x стремится к $x_0 < 0$, а y стремится к 0, оставаясь строго положительным (соответственно строго отрицательным), то $\log z$ стремится к $\log|x_0| + \pi i$ (соответственно к $\log|x_0| - \pi i$); когда z стремится к 0, $|\log z|$ неограниченно возрастает.

Позже мы увидим, как теория аналитических функций позволяет продолжить функцию $\log z$ и определить комплексный логарифм самым общим образом.

Так как $\log z$ является гомеоморфизмом, обратным гомеоморфизму e^z, то формула дифференцирования обратных функций (гл. I, § 1, предложение 6) показывает, что функция $\log z$ дифференцируема в каждой точке $z \in F$ и что имеет место формула

$$D(\log z) = \frac{1}{e^{\log z}} = \frac{1}{z}, \tag{31}$$

являющаяся обобщением формулы (10).

8. *Примитивные рациональных функций*

Формула (31) позволяет вычислять примитивную любой рациональной функции $r(x)$ *действительного* переменного x с действительными или комплексными коэффициентами. В самом деле, известно (Алгебра, гл. VII), что такую функцию можно представить (единственным образом) в виде суммы конечного числа членов, имеющих вид:

a) ax^p (p — целое, $p \geqslant 0$, a — комплексное число);

b) $\dfrac{a}{(x-b)^m}$ (m — целое, $m > 0$, a и b — комплексные числа).

Примитивную же каждого из этих выражений легко получить, а именно:

a) примитивная функции ax^p равна $a\dfrac{x^{p+1}}{p+1}$;

b) если $m > 1$, то примитивная функции $\dfrac{a}{(x-b)^m}$ равна $\dfrac{a}{(1-m)(x-b)^{m-1}}$;

c) наконец, согласно формулам (10) и (31) примитивная функции $\frac{a}{x-b}$ равна $a \log |x-b|$, если b — действительное, и равна $a \log(x-b)$, если b — комплексное. В последнем случае, если $b = p + iq$, то, кроме того (формула (30)),

$$\log(x-b) = \log \sqrt{(x-p)^2 + q^2} + i \operatorname{Arctg} \frac{x-p}{q} \pm i \frac{\pi}{2}.$$

Рассмотрение более практичных методов для вычисления примитивных различных конкретно заданных рациональных функций мы относим к тому разделу настоящего трактата, который посвящен численному анализу.

К вычислению примитивной рациональной функции можно свести:

1° вычисление примитивной для функции вида $r(e^{ax})$, где r — рациональная функция, а a — действительное число; в самом деле, после замены переменной $u = e^{ax}$ задача сводится к нахождению примитивной для функции $\frac{r(u)}{u}$;

2° вычисление примитивной для функции вида $f(\sin ax, \cos ax)$, где f — рациональная функция двух переменных и a — действительное число; в результате замены переменной $u = \operatorname{tg} \frac{ax}{2}$ задача сводится к нахождению примитивной для функции

$$\frac{2}{1+u^2} f\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right).$$

9. Комплексные круговые функции; гиперболические функции

Формулы Эйлера (25) и определение функции e^z для любого комплексного z позволяют *продолжить* на $\mathbf{C}$ функции $\cos x$ и $\sin x$, определенные на $\mathbf{R}$, при помощи равенств

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \qquad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \tag{32}$$

(см. упражнение 15).

Эти функции являются периодическими с главным периодом 2π; они удовлетворяют соотношениям $\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin z$,

$\sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=\cos z$; справедливы также тождества

$$\cos^2 z+\sin^2 z=1,$$
$$\cos(z+z')=\cos z\cos z'-\sin z\sin z',$$
$$\sin(z+z')=\sin z\cos z'+\cos z\sin z'.$$

Вообще, всякое алгебраическое тождество для круговых функций *действительных* переменных остается справедливым при замене этих переменных любыми *комплексными* значениями (упражнение 14).

Положим $\operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z}$, $z\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$; это периодическая функция с главным периодом π.

Формула (27) показывает, что функции $\cos z$ и $\sin z$ дифференцируемы в $\mathbf{C}$ и что

$$D(\cos z)=-\sin z,\qquad D(\sin z)=\cos z.$$

Для $z=ix$ (x — действительное) формулы (32) принимают вид

$$\cos ix=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}),\qquad \sin ix=\frac{i}{2}(e^x-e^{-x}).$$

Для получающихся таким образом действительных функций удобно ввести особое обозначение; положим

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{ch} x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\ \ (\textit{гиперболический косинус } x),\\
&\operatorname{sh} x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\ \ (\textit{гиперболический синус } x),\\
&\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\ \ (\textit{гиперболический тангенс } x).
\end{aligned}\right\}\qquad(33)$$

Следовательно, для любого действительного x имеем

$$\cos ix=\operatorname{ch} x,\qquad \sin ix=i\operatorname{sh} x.\qquad(34)$$

Из любого тождества, справедливого для круговых функций, зависящих от некоторого числа комплексных переменных z_k $(1\leqslant k\leqslant n)$, вытекает тождество для гиперболических функций, если заменить всюду z_k на ix_k (x_k — действительное, $1\leqslant k\leqslant n$) и применить формулы (34); например,

$$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1,$$
$$\operatorname{ch}(x+x')=\operatorname{ch} x\operatorname{ch} x'+\operatorname{sh} x\operatorname{sh} x',$$
$$\operatorname{sh}(x+x')=\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x'+\operatorname{ch} x\operatorname{sh} x'.$$

Гиперболические функции позволяют выразить отдельно действительные и мнимые части функций $\cos z$ и $\sin z$ для $z=x+iy$, так как

$$\cos(x+iy)=\cos x\cos iy-\sin x\sin iy=\cos x \operatorname{ch} y - i\sin x \operatorname{sh} y,$$
$$\sin(x+iy)=\sin x\cos iy+\cos x\sin iy=\sin x \operatorname{ch} y + i\cos x \operatorname{sh} y.$$

Наконец, имеем:

$$D(\operatorname{ch} x)=\operatorname{sh} x,\qquad D(\operatorname{sh} x)=\operatorname{ch} x,\qquad D(\operatorname{th} x)=1-\operatorname{th}^2 x=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

Так как $\operatorname{ch} x>0$ для любого x, то отсюда следует, что $\operatorname{sh} x$ строго возрастает на $\mathbf{R}$, а поскольку $\operatorname{sh} 0=0$, то $\operatorname{sh} x$ имеет тот же знак, что и x. Следовательно, $\operatorname{ch} x$ строго убывает для $x\leqslant 0$ и строго возрастает для $x\geqslant 0$; наконец, $\operatorname{th} x$ строго возрастает на $\mathbf{R}$. Кроме того, имеем:

$$\lim_{x\to-\infty}\operatorname{sh} x=-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}\operatorname{sh} x=+\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}\operatorname{ch} x=\lim_{x\to+\infty}\operatorname{ch} x=+\infty,$$
$$\lim_{x\to-\infty}\operatorname{th} x=-1,\quad \lim_{x\to+\infty}\operatorname{th} x=+1 \text{ (рис. 8 и 9)}.$$

Часто через $\operatorname{Arg}\operatorname{sh} x$ обозначают обратную к $\operatorname{sh} x$ функцию, являющуюся строго возрастающим отображением $\mathbf{R}$ на $\mathbf{R}$; эта функция выражается, кроме того, при помощи логарифма, так как из соотношения $x=\operatorname{sh} y=\frac{1}{2}(e^y-e^{-y})$ следует, что

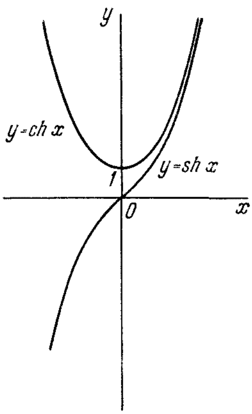

Рис. 8

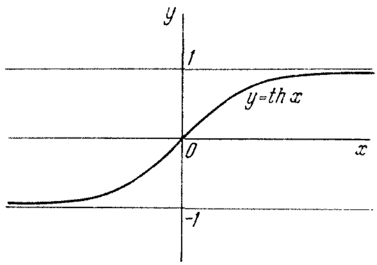

Рис. 9.

$e^{2y}-2xe^y-1=0$, а так как $e^y>0$, то $e^y=x+\sqrt{x^2+1}$, то есть

$$\operatorname{Arg}\operatorname{sh} x=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$$

Точно так же через $\operatorname{Arg}\operatorname{ch} x$ часто обозначают функцию, обратную к сужению функции $\operatorname{ch} x$ на $[0,+\infty[$; это строго возрастающее отображение интервала $[1,+\infty[$ на $[0,+\infty[$; тем же способом, что и выше, доказывается, что

$$\operatorname{Arg}\operatorname{ch} x = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

Наконец, через $\operatorname{Arg}\operatorname{th} x$ обозначается функция, обратная к $\operatorname{th} x$; она является строго возрастающим отображением интервала $]-1, +1[$ на $\mathbf{R}$; кроме того, имеем

$$\operatorname{Arg}\operatorname{th} x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}.$$

Замечание. Для комплексного z часто также пишут

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = \cos iz,$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) = -i\sin iz.$$

Следовательно, эти функции продолжают на $\mathbf{C}$ гиперболические функции, определенные на $\mathbf{R}$.

Упражнения. °1) Пусть $\mathbf{f}$ — непрерывное дифференцируемое отображение тела $\mathbf{R}$ в полную нормированную алгебру E над $\mathbf{R}$, имеющую единичный элемент $\mathbf{e}$; предположим, что $\mathbf{f}(0) = \mathbf{e}$ и что имеет место тождество $\mathbf{f}'(x) = \mathbf{f}(x)\mathbf{c}$, где $\mathbf{c}$ — некоторый обратимый элемент из E. Показать, что $\mathbf{f}$ является представлением аддитивной группы $\mathbf{R}$ в мультипликативную группу G обратимых элементов из E (рассмотреть наибольший открытый интервал $I \subset \mathbf{R}$, содержащий 0 и обладающий тем свойством, что элемент $\mathbf{f}(x)$ обратим для любого $x \in I$, и показать, что для x, y и $x+y$ из I выполняется соотношение $\mathbf{f}(x+y)(\mathbf{f}(x)\mathbf{f}(y))^{-1} = \mathbf{e}$, зафиксировав x, а y оставив переменным; наконец, вывести отсюда, что $I = \mathbf{R}$).

2) а) Для того чтобы функция $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+p}$ была убывающей (соответственно возрастающей) для $x > 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $p \geqslant \frac{1}{2}$ (соответственно $p \leqslant 0$); для $0 < p < \frac{1}{2}$ функция убывает на интервале $]0, x_0[$ и возрастает на интервале $]x_0, +\infty[$. Во всех случаях эта функция стремится к e, когда x стремится к $+\infty$.

б) Исследовать точно таким же способом функции $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x-p}$, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$, $\left(1 + \frac{p}{x}\right)$ и $\left(1 + \frac{p}{x}\right)^{x+1}$ для $x > 0$.

3) а) Доказать, что для $\alpha \geqslant 1$ и $x \geqslant 0$ имеем $(1+x)^\alpha \geqslant 1 + \alpha x$, а для $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ и $x \geqslant 0$ имеем $(1+x)^\alpha \leqslant 1 + \alpha x$.

б) Точно так же доказать, что для $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $\alpha \geqslant 0$ имеем $(1-x)^{\alpha} \leqslant \frac{1}{1+\alpha x}$.

4) Показать, что для $x > 0$ и для любого действительного y

$$xy \leqslant x \log x + e^{y-1}$$

(ср. гл. II, § 1, упражнение 15); в каком случае обе части этого неравенства будут равны?

5) Пусть a_i $(1 \leqslant i \leqslant n+1)$ суть $n+1$ строго положительных чисел, A_n и G_n — обычные среднее арифметическое и среднее геометрическое чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, A_{n+1} и G_{n+1} — аналогичные величины для $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$. Доказать, что

$$n(A_n - G_n) \leqslant (n+1)(A_{n+1} - G_{n+1}),$$

причем равенство имеет место только в том случае, если $a_{n+1} = G_n$ (положить $a_{n+1} = x^{n+1}$, $G_n = y^{n+1}$).

° 6) Пусть A и G — обычные среднее арифметическое и среднее геометрическое n строго положительных чисел a_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Показать, что если $x_i = \frac{a_i}{A}$, то соотношение $G \geqslant (1-\alpha) A$, где $0 \leqslant \alpha < 1$, влечет для $1 \leqslant i \leqslant n$ неравенство

$$x_i \left(1 - \frac{x_i - 1}{n-1}\right)^{n-1} \geqslant (1-\alpha)^n.$$

Вывести отсюда, что для любого индекса i выполняются неравенства $1 + x' \leqslant x_i \leqslant 1 + x''$, где x' — отрицательный, а x'' — положительный корень уравнения $(1+x)e^{-x} = (1-\alpha)^n$ (ср. упражнение 2).

7) Пусть a_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$ — такие положительные числа, что для любого индекса i имеет место равенство $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$, а для любого индекса j — равенство $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$. Пусть, далее, x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — n положительных чисел; положим

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \qquad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Показать, что $y_1 y_2 \ldots y_n \geqslant x_1 x_2 \ldots x_n$ (оценить снизу функцию $\log y_i$ для каждого индекса i).

8) а) Пусть $\sum_{i,j} c_{ij} x_i \bar{x}_j$, где $c_{ji} = \bar{c}_{ij}$, есть невырожденная положительная эрмитова форма с определителем Δ; показать, что $\Delta \leqslant c_{11} c_{22} \ldots c_{nn}$ (выразить Δ и c_{ii} при помощи собственных значений эрмитовой формы и применить предложение 2).

б) Вывести отсюда, что если (a_{ij}) — квадратная матрица n-го порядка, состоящая из произвольных комплексных элементов, и Δ — ее определитель, то справедливо неравенство («неравенство

Адамара»)

$$|\Delta|^2 \leqslant \Big(\sum_{j=1}^{n} |a_{1j}|^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} |a_{2j}|^2\Big)\dots\Big(\sum_{j=1}^{n} |a_{nj}|^2\Big),$$

причем равенство имеет место лишь в том случае, когда либо один из сомножителей в правой части равен нулю, либо для любых различных индексов h, k

$$a_{h1}\bar{a}_{k1}+a_{h2}\bar{a}_{k2}+\dots+a_{hn}\bar{a}_{kn}=0$$

(перемножить матрицу (a_{ij}) с матрицей, сопряженной к матрице, транспонированной относительно данной).

9) Показать, что если x, y, a, $b>0$, то

$$x\log\frac{x}{a}+y\log\frac{y}{b}\geqslant(x+y)\log\frac{x+y}{a+b},$$

причем равенство достигается лишь в случае $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$.

10) Пусть a — действительное число, удовлетворяющее условиям $0<a<\frac{\pi}{2}$. Показать, что функция

$$\frac{\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}-\dfrac{\operatorname{tg} a}{a}}{x\operatorname{tg} x-a\operatorname{tg} a}$$

строго возрастает на интервале $\left]a, \frac{\pi}{2}\right[$ (ср. гл. I, § 2, упражнение 11).

11) Пусть два многочлена u и v от x с действительными коэффициентами удовлетворяют тождеству $\sqrt{1-u^2}=v\sqrt{1-x^2}$; показать, что если n — степень многочлена u, то $u'=nv$; вывести отсюда, что $u(x)=\cos(n\operatorname{Arccos} x)$.

12) Доказать (индукцией по n) формулу

$$D^n(\operatorname{Arctg} x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}\sin\left(n\operatorname{Arctg}\frac{1}{x}\right).$$

° 13) Пусть числовая функция f, определенная на открытом интервале $I\subset\mathbf{R}$, такова, что для любой тройки точек x_1, x_2, x_3 из I, удовлетворяющих условиям $x_1<x_2<x_3<x_1+\pi$, выполняется неравенство

$$f(x_1)\sin(x_3-x_2)+f(x_2)\sin(x_1-x_3)+f(x_3)\sin(x_2-x_1)\geqslant 0. \qquad (1)$$

Показать, что:

a) В любой точке интервала I функция f непрерывна и имеет конечные правую и левую производные; кроме того, неравенство

$$f(x)\cos(x-y)-f'_d(x)\sin(x-y)\leqslant f(y) \qquad (2)$$

выполняется для любой пары точек x, y из I, удовлетворяющих условию $|x-y| \leqslant \pi$; а также справедливо неравенство, аналогичное неравенству (2), если заменить в нем f'_d на f'_g; наконец, для любого $x \in I$ имеем $f'_g(x) \leqslant f'_d(x)$ (для доказательства (2) устремить x_2 к x_1 в формуле (1), зафиксировав в ней x_3, и получить таким путем мажоранту выражения $\limsup\limits_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$; затем в найденном неравенстве устремить x_3 к x_1; вывести отсюда существование производной $f'_d(x)$ и неравенство (2) для $y > x$; для других утверждений вывод аналогичен).

б) Обратно, если формула (2) справедлива для любой пары точек x, y из I, удовлетворяющих условию $|x-y| \leqslant \pi$, то f удовлетворяет на I неравенству (1)

$$\left(\text{рассмотреть разность } \frac{f(x_2)}{\sin(x_3-x_2)} - \frac{f(x_1)}{\sin(x_3-x_1)}\right).$$

в) Если функция f имеет на I вторую производную, то формула (1) эквивалентна условию

$$f(x)+f''(x) \geqslant 0 \tag{3}$$

для любого $x \in I$.

* Пояснить эти результаты, рассмотрев плоскую кривую, определенную уравнениями $x = \frac{1}{f(t)} \cos t$, $y = \frac{1}{f(t)} \sin t$ («выпуклость относительно начала»). *

14) а) Показать, что в векторном пространстве отображений тела $\mathbf{R}$ в $\mathbf{C}$ различные функции вида $x^n e^{\alpha x}$ (n — целое, α — любое комплексное) образуют независимую систему (рассуждать от противного, рассматривая первичное соотношение (Алгебра, гл. II, § 5) между этими функциями и дифференцируя это соотношение).

б) Пусть $f(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ — многочлен от m неопределенных величин с комплексными коэффициентами, такой, что если в качестве X_j для $1 \leqslant j \leqslant r$ взять функцию $\cos\left(\sum\limits_{k=1}^{n} p_{jk}x_k\right)$, а для $r+1 \leqslant j \leqslant m$ — функцию $\sin\left(\sum\limits_{k=1}^{n} p_{jk}x_k\right)$, причем p_{jk} действительны, x_k также *действительны*, то получим функцию от x_k, тождественно равную нулю; показать, что то же самое тождество имеет место и в том случае, когда x_k принимают произвольные комплексные значения (использовать а)).

°15) Известно (Алгебра, гл. IX), что на *комплексной плоскости* $\mathbf{C}^2$ группа A углов между направленными прямыми изоморфна ортогональной группе $\mathbf{O}_2(\mathbf{C})$ посредством канонического изоморфизма, ставящего в соответствие углу θ вращение на угол θ; при помощи этого изоморфизма на группу A переносится топология группы $\mathbf{O}_2(\mathbf{C})$ (рассматриваемой как подпространство пространства $\mathbf{M}_2(\mathbf{C})$ матриц второго порядка на $\mathbf{C}$; см. Общая топология, гл. VIII, § 4, n° 2), что превращает A в локально компактную топологическую группу; кроме того, отображение $\theta \to \cos\theta + i\sin\theta$ является *изоморфизмом* топологической группы A на мультипликативную группу $\mathbf{C}^*$ комплексных чисел, отличных от 0, причем обратный изоморфизм задается формулами $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, $\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$. Вывести из этих соотношений, что всякий гомоморфизм $z \to \varphi(z)$ аддитивной группы $\mathbf{C}$ на A, при котором комплексные функции $\cos\varphi(z)$, $\sin\varphi(z)$ дифференцируемы на $\mathbf{C}$, определяется при помощи соотношений $\cos\varphi(z) = \cos az$, $\sin\varphi(z) = \sin az$ (a — комплексное число).

16) Пусть D — подмножество из $\mathbf{C}$, являющееся объединением множества, определенного условиями $-\pi < \mathscr{R}(z) \leqslant \pi$, $\mathscr{I}(z) > 0$, и отрезка $\mathscr{I}(z) = 0$, $0 \leqslant \mathscr{R}(z) \leqslant \pi$. Показать, что сужение функции $\cos z$ на D отображает *взаимно однозначно* множество D на $\mathbf{C}$; сужение функции $\cos z$ на внутренность множества D является гомеоморфизмом этого открытого множества на дополнение в $\mathbf{C}$ полупрямой $y = 0$, $x \leqslant 1$.

17) Пусть f и g — два взаимно простых многочлена (с комплексными коэффициентами), причем степень многочлена f строго меньше степени многочлена g. Обозначим через p многочлен, который является наибольшим общим делителем многочлена g и его производной g', а через q — частное от деления g на p. Показать, что существуют два однозначно определенных многочлена u и v, степени которых соответственно меньше степени многочленов p и q, и такие что

$$\frac{f}{g} = D\left(\frac{u}{p}\right) + \frac{v}{q}.$$

Вывести отсюда, что коэффициенты многочленов u и v принадлежат наименьшему из тел (над $\mathbf{Q}$), содержащему коэффициенты многочленов f и g и содержащемуся в $\mathbf{C}$.

18) Пусть f и g — два взаимно простых многочлена, причем степень многочлена f строго меньше степени многочлена g. Пусть K — подтело тела $\mathbf{C}$, содержащее коэффициенты многочленов f и g и такое, что g неприводим в K. Для того чтобы существовала примитивная функции $\frac{f}{g}$ вида $\sum_i a_i \log u_i$, где a_i — постоянные, принадлежащие K, а u_i — неприводимые в K многочлены, необходимо и достаточно, чтобы $f = cg'$, где c — постоянная, принадлежащая K.

19) Показать, что если $f(x, y)$ — произвольный многочлен от x, y с комплексными коэффициентами, то вычисление примитивной

для функции $f(x, \log x)$ и функции $f(x, \operatorname{Arcsin} x)$ сводится к вычислению примитивной для рациональной функции.

20) Показать, что вычисление примитивной для функции $(ax+b)^p x^q$ (p и q — действительные) можно свести к вычислению примитивной рациональной функции, если одно из чисел p, q, $p+q$ — целое (положительное или отрицательное).

21) а) Показать, что для двух целых чисел m и n, удовлетворяющих условиям $0 < m < n$, справедлива формула

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}.$$

б) Показать, что при $0 < a < 1$ интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx$ равномерно сходится, если a пробегает некоторый компактный интервал, и вывести из а), что

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

22) Показать, что если $I_{m,n}$ — примитивная функции $\sin^m x \cos^n x$ (m и n — любые действительные числа) и если $m+n+2 \neq 0$, то функция

$$I_{m+2,n} = -\frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{m+n+2} + \frac{m+1}{m+n+2} I_{m,n}$$

является примитивной для функции $\sin^{m+2} x \cos^n x$.

Вывести при помощи этой формулы формулу (29) из текста и доказать формулу

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6 \ldots 2n}{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n+1)} \qquad (n \text{ — целое, } n \geqslant 0).$$

23) Доказать *формулу Валлиса*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2\cdot 4\cdot 6 \ldots 2n}{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)} = \sqrt{\pi},$$

воспользовавшись упражнением 22 и неравенством $\sin^{n+1} x \leqslant \sin^n x$ для $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

24) а) Вычислить интегралы

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx \quad \text{и} \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

при помощи упражнения 22.

б) Показать, что

$$1-x^2 \leqslant e^{-x^2} \quad \text{для} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$e^{-x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2} \quad \text{для} \quad x \geqslant 0.$$

в) Из а) и б), а также из формулы Валлиса (упражнение 23) вывести, что

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

25) а) Показать, что для $\alpha > 0$ производная функции

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{\alpha x} \frac{\sin x}{x}\,dx \quad \text{равна} - \int_0^{+\infty} e^{\alpha x} \sin x\,dx.$$

б) Вывести отсюда, что $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

26) Доказать при помощи дифференцирования по параметру и при помощи упражнения 24 в) формулы

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos \alpha x\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\alpha^2}, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-\alpha x^2}}{x^2}\,dx = \sqrt{\pi\alpha},$$
$$\int_0^{+\infty} \exp\left(-x^2-\frac{\alpha^2}{x^2}\right)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2\alpha} \qquad (\alpha > 0).$$

27) Из упражнения 24 в) этого раздела и из упражнения 9 главы II, § 3, вывести, что

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

28) Пусть линейчатая на $]0, 1[$ вектор-функция $\mathbf{f}$ обладает тем свойством, что интеграл $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathbf{f}(\sin x)\,dx$ сходится. Показать, что сходится интеграл $\displaystyle\int_0^{\pi} x\mathbf{f}(\sin x)\,dx$ и что

$$\int_0^{\pi} x\mathbf{f}(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \mathbf{f}(\sin x)\,dx.$$

29) Пусть линейчатая для $x \geqslant 0$ вектор-функция $\mathbf{f}$ непрерывна в точке $x=0$ и обладает тем свойством, что интеграл $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{\infty} \mathbf{f}(x)\frac{dx}{x}$

сходится для любого $\varepsilon > 0$. Показать, что для $a > 0$ и $b > 0$ интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathbf{f}(ax) - \mathbf{f}(bx)}{x}\, dx$$

сходится и равен $\mathbf{f}(0) \log \frac{b}{a}$.

§ 2. Разложения показательных и круговых функций и функций, с ними связанных

1. *Разложение действительной показательной функции*

Так как $D^n(e^x) = e^x$, то разложение Тейлора порядка n для функции e^x имеет вид

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, e^t\, dt. \tag{1}$$

Остаточный член в этой формуле положителен для $x > 0$ и имеет знак $(-1)^{n+1}$ для $x < 0$; кроме того, теорема о среднем показывает, что

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, e^t\, dt < \frac{x^{n+1} e^x}{(n+1)!} \quad \text{для} \quad x > 0, \tag{2}$$

$$\frac{|x|^{n+1} e^x}{(n+1)!} < \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, e^t\, dt \right| < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{для} \quad x < 0. \tag{3}$$

Но известно, что предел последовательности $\left(\frac{x^n}{n!}\right)$ при неограниченном возрастании n равен 0 для любого $x \geqslant 0$ (Общая топология, гл. IV, § 7, n° 1); следовательно, зафиксировав x и заставив в (1) n неограниченно возрастать, получим в силу (2) и (3), что

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{4}$$

и ряд, стоящий в правой части, *абсолютно и равномерно сходится* на любом компактном интервале из $\mathbf{R}$. В частности, справедлива формула

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots \tag{5}$$

Эта формула позволяет вычислять с любой точностью значение числа e; таким образом получаем, что

$$e = 2{,}718281828\ldots$$

с точностью до $\frac{1}{10^9}$ с недостатком. Кроме того, формула (5) показывает, что e — число *иррациональное* *) (Общая топология, гл. V, § 8, n° 3).

З а м е ч а н и е. Поскольку остаточный член в формуле (1) положителен для $x > 0$, то для $x > 0$

$$e^x > 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

и тем более

$$e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

для любого целого n; отсюда следует, что $\frac{e^x}{x^n}$ *стремится к* $+\infty$ вместе с x при любом целом n; этот результат мы получим еще раз другим путем в главе V.

2. *Разложения комплексной показательной функции, функций* $\cos x$ *и* $\sin x$

Пусть z — произвольное комплексное число, и пусть $\varphi(t) = e^{zt}$ — функция действительного переменного t; имеем $D^n\varphi(t) = z^n e^{zt}$ и $e^z = \varphi(1)$; следовательно, разложение $\varphi(1)$ по формуле Тейлора порядка n относительно точки $t = 0$ дает формулу

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + z^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^{zt}\,dt, \tag{6}$$

которая при действительном z равносильна формуле (1). Остаточный член $r_n = z^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^{zt}\,dt$ снова оценивается сверху по абсолютному значению при помощи теоремы о среднем; если

*) Ш. Эрмит доказал в 1873 году, что e — *трансцендентное* число над телом $\mathbf{Q}$ рациональных чисел (то есть не является корнем никакого многочлена с рациональными коэффициентами) (Сочинения, т. III, стр. 150. Париж, 1912).

$z=x+iy$, то $|e^{zt}|=e^{xt}$ и, значит, при $x\leqslant 0$ имеем $|e^{zt}|\leqslant 1$, а при $x>0$ имеем $|e^{zt}|\leqslant e^x$, и следовательно,

$$|r_n(z)|\leqslant\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!},\quad\text{если}\quad x\leqslant 0,\tag{7}$$

$$|r_n(z)|\leqslant\frac{|z|^{n+1}e^x}{(n+1)!},\quad\text{если}\quad x>0.\tag{8}$$

Как и выше, отсюда заключаем, что ряд

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\tag{9}$$

абсолютно и равномерно сходится на любом компактном подмножестве из $\mathbf{C}$.

Из формулы (6), в частности, следует, что для действительного x

$$e^{ix}=1+\frac{ix}{1!}+\frac{i^2x^2}{2!}+\ldots+\frac{i^nx^n}{n!}+i^{n+1}\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}e^{it}\,dt,\tag{10}$$

откуда вытекает разложение Тейлора для функций $\cos x$ и $\sin x$: отделив действительную часть в формуле (10) порядка $2n+1$, получим формулу

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+$$
$$+(-1)^{n+1}\int_0^x\frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos t\,dt\tag{11}$$

с оценкой остатка

$$\left|\int_0^x\frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos t\,dt\right|\leqslant\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.\tag{12}$$

Точно так же, отделив мнимую часть в формуле (10) порядка $2n$, получим формулу

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+$$
$$+(-1)^n\int_0^x\frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}\cos t\,dt\tag{13}$$

с оценкой остатка

$$\left|\int_0^x\frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}\cos t\,dt\right|\leqslant\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.\tag{14}$$

Кроме того, сравнивая остаточные члены формулы (11) порядков $2n+1$ и $2n+3$, получаем, что

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{2n+3}}{(2n+3)!}\cos t\,dt = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} - \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos t\,dt,$$

и, принимая во внимание (12), видим, что остаточный член формулы (11) для любого x *имеет знак* $(-1)^n x$; точно так же доказывается, что остаточный член в формуле (13) *имеет знак* $(-1)^n x$. В частности, для $n=0$ и $n=1$ в (11) и для $n=1$ и $n=2$ в (13) получаем неравенства

$$1-\frac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1 \quad \text{для любого} \quad x, \tag{15}$$

$$x-\frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x \quad \text{для любого} \quad x \geqslant 0. \tag{16}$$

Наконец, полагая в (9) $z=ix$, получаем формулы

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \tag{17}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{18}$$

в которых ряды абсолютно и равномерно сходятся на любом компактном интервале.

Кроме того, очевидно, что формулы (17) и (18) остаются справедливыми и для *комплексных* x, причем ряды, стоящие в правой части, абсолютно и равномерно сходятся на любом компактном множестве из C. В частности, для любого x (как действительного, так и комплексного)

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

3. Разложение бинома

Пусть m — *произвольное* действительное число. Для любого $x>0$ имеем $D^n(x^m) = m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$; применяя к функции $(1+x)^m$ формулу Тейлора порядка n относительно точки $x=0$, получаем для любого $x>-1$ формулу

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \ldots + \binom{m}{n} x^n + \\ + \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{n!} \int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{m-1}\,dt, \quad (19)$$

где $\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}$. Если m — целое, строго положительное и $n \geqslant m$, то формула (19) сводится к формуле бинома (Алгебра, Сводка результатов, IV); в общем случае ее также называют *формулой бинома*, а коэффициенты $\binom{m}{n}$ называют *биномиальными коэффициентами* при *любом действительном* m и любом целом положительном n.

Остаточный член в формуле (19) имеет знак выражения $\binom{m}{n+1}$ для $x>0$ и знак выражения $(-1)^{n+1}\binom{m}{n+1}$ для $-1<x<0$. Так как неравенство $\left|\frac{x-t}{1+t}\right| \leqslant |x|$ справедливо при любом $t>-1$, принадлежащем интервалу с концами 0 и x, то для любых m и n и любого $x>-1$ справедлива следующая оценка остатка:

$$\left|\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{n!}\int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{m-1}\,dt\right| \leqslant \\ \leqslant \left|\binom{m-1}{n} x^n [(1+x)^m - 1]\right|. \quad (20)$$

При некоторых ограничениях на x, m или n можно указать более точные оценки (упражнение 3).

Из неравенства (20) мы выведем, что для $|x|<1$

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n, \quad (21)$$

где ряд, стоящий в правой части, *абсолютно и равномерно сходится* на любом *компактном* интервале, содержащемся в $]-1, +1[$. В самом деле,

$$\binom{m}{n} = (-1)^n \left(1 - \frac{m+1}{1}\right)\left(1 - \frac{m+1}{2}\right)\ldots\left(1 - \frac{|m+1|}{n}\right), \quad (22)$$

откуда

$$\left|\binom{m}{n}\right| \leqslant \left(1 + \frac{|m+1|}{1}\right)\left(1 + \frac{|m+1|}{2}\right)\ldots\left(1 + \frac{|m+1|}{n}\right).$$

Если $|x| \leqslant r < 1$, то существует такое n_0, что $1+\frac{|m|}{n_0} < \frac{1}{r'}$ где $r < r' < 1$, откуда, полагая

$$k = \left(1+\frac{|m|}{1}\right)\left(1+\frac{|m|}{2}\right) \cdots \left(1+\frac{|m|}{n_0}\right),$$

получаем неравенство

$$\left|\binom{m-1}{n} x^n\right| \leqslant k\,|x|^{n_0}\left(\frac{r}{r'}\right)^{n-n_0},$$

которое и доказывает наше утверждение. Напротив, для $x > 1$ абсолютное значение общего члена ряда (21) неограниченно возрастает вместе с n, если m не является целым положительным. в самом деле, из (22) для $n > n_1 \geqslant |m+1|$ следует, что

$$\left|\binom{m}{n}\right| \geqslant \left|\left(1-\frac{m+1}{1}\right)\left(1-\frac{m+1}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{m+1}{n_1}\right)\right| \times$$
$$\times\left(1-\frac{|m+1|}{n_1+1}\right)\cdots\left(1-\frac{|m+1|}{n}\right).$$

Пусть $n_0 \geqslant n$ таково, что для $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство $1-\frac{|m+1|}{n} > \frac{1}{x'}$, где $1 < x' < x$. Если теперь положить

$$k' = \left|\left(1-\frac{m+1}{1}\right)\cdots\left(1-\frac{m+1}{n_1}\right)\right|\left(1-\frac{|m+1|}{n_1+1}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(1-\frac{|m+1|}{n_0}\right),$$

то для $n > 0$ будет выполняться неравенство

$$\left|\binom{m}{n} x^n\right| \geqslant k'\,|x|^{n_0}\left(\frac{x}{x'}\right)^{n-n_0},$$

откуда и следует наше утверждение.

Отметим, что при $m = -1$ алгебраическое тождество

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + (-1)^n \frac{x^n}{1+x} \tag{23}$$

дает нам выражение остаточного члена в общей формуле (19) без знака интеграла, а формула (21) сводится в этом случае к выражению суммы *геометрического ряда* (или *прогрессии*) (Общая топология, гл. IV, § 7, n° 1).

4. *Разложения функций* $\log(1+x)$, $\operatorname{Arctg} x$ *и* $\operatorname{Arcsin} x$

Проинтегрируем обе части равенства (23) в пределах от 0 до x; получим разложение Тейлора порядка n для функции $\log(1+x)$, справедливое при $x>-1$:

$$\log(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^n\int_0^x\frac{t^n\,dt}{1+t}. \tag{24}$$

Остаток имеет знак $(-1)^n$, если $x>0$, и знак $-$, если $-1<x<0$; кроме того, для $x>0$ имеем $1+t\geqslant 1$ при $0\leqslant t\leqslant x$, а для $-1<x<0$ $1+t\geqslant 1-|x|$ при $x\leqslant t\leqslant 0$, откуда получаем оценку остатка:

$$\left|\int_0^x\frac{t^n\,dt}{1+t}\right|\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{n+1}\qquad\text{для}\quad x\geqslant 0, \tag{25}$$

$$\left|\int_0^x\frac{t^n\,dt}{1+t}\right|\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1-|x|)}\qquad\text{для}\quad -1<x\leqslant 0. \tag{26}$$

Из этих формул сразу же вытекает, что при $-1<x\leqslant 1$

$$\log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, \tag{27}$$

где ряд *равномерно сходится* на любом компактном интервале, содержащемся в $]-1, +1]$, и абсолютно сходится для $|x|<1$.

Напротив, для $|x|>1$ общий член ряда, стоящего в правой части формулы (27), неограниченно возрастает по абсолютному значению вместе с n (n° 1). Для $x=-1$ этот ряд сводится к гармоническому ряду, сумма которого равна $+\infty$ (Общая топология, гл. IV, § 7, n° 1).

Точно так же, заменив в (23) x на x^2 и проинтегрировав обе части в пределах от 0 до x, получим разложение Тейлора порядка $2n-1$ для функции $\operatorname{Arctg} x$, справедливое при любом действительном x:

$$\operatorname{Arctg} x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+(-1)^n\int_0^x\frac{t^{2n}\,dt}{1+t^2}. \tag{28}$$

Остаток имеет знак $(-1)^n x$, а так как $1+t^2\geqslant 1$ при любом

t, то получаем оценку

$$\left| \int_0^x \frac{t^{2n}\, dt}{1+t^2} \right| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}, \tag{29}$$

из которой следует, что для $|x| \leqslant 1$

$$\operatorname{Arctg} x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \tag{30}$$

где ряд *равномерно сходится* на $[-1, +1]$ и *абсолютно сходится* для $|x| < 1$.

В частности, при $x=1$ получаем формулу

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \ldots \tag{31}$$

Для $|x| > 1$ общий член ряда, стоящего в правой части формулы (30), неограниченно возрастает по абсолютному значению вместе с n.

Наконец, чтобы получить разложение Тейлора для функции $\operatorname{Arcsin} x$, воспользуемся разложением ее производной $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$; последнее получается в результате замены x на $-x^2$ в разложении функции $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ по формуле бинома, что для $|x| < 1$ дает

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} x^4 + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots 2n} x^{2n} + r_n(x)$$

с вытекающей из (20) оценкой

$$0 \leqslant r_n(x) \leqslant \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots 2n} \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Беря примитивную от предыдущего разложения, получаем, что

$$\operatorname{Arcsin} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_n(x), \tag{32}$$

где $R_n(x)$ имеет тот же знак, что и x, и удовлетворяет неравенству

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots 2n} \frac{|x|^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}} \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{33}$$

Из последнего соотношения вытекает тот факт, что $R_n(x)$ равномерно стремится к 0 на любом компактном интервале, содержащемся в $]-1, +1[$, когда n неограниченно возрастает, откуда следует равенство

$$\operatorname{Arcsin} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \tag{34}$$

где ряд, стоящий в правой части, *абсолютно и равномерно сходится* на любом компактном интервале, содержащемся в $]-1, +1[$ (ср. упражнение 7).

Напротив, можно показать, так же как и для формулы бинома, что общий член ряда, стоящего в правой части формулы (34), неограниченно возрастает по абсолютной величине для $|x|>1$.

Положив, например, в (34) $x=\frac{1}{2}$, получим новое выражение для числа π:

$$\frac{\pi}{6} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots 2n} \frac{1}{(2n+1)\, 2^{2n+1}},$$

которое дает значительно лучший способ для приближенного вычисления числа π, чем формула (31); таким образом можно получить значение

$$\pi = 3{,}141592653\ldots$$

с точностью до $\frac{1}{10^9}$ с недостатком *).

Упражнения. 1) Пусть вектор-функция $\mathbf{f}$ дифференцируема n раз на интервале $I \subset \mathbf{R}_+$. Доказать, что для любой точки x, для которой $e^x \in I$, имеет место формула

$$D^n\mathbf{f}(e^x) = \sum_{m=1}^{n} \frac{a_m}{m!} e^{mx}\mathbf{f}^{(m)}(e^x),$$

где коэффициенты a_m имеют вид

$$a_m = \sum_{p=0}^{m} (-1)^p \binom{m}{p} (m-p)^n$$

(тот же метод, что и в упражнении 7 гл. I, § 3, с использованием разложения Тейлора функции e^x).

2) Пусть f — числовая функция, n раз дифференцируемая в точке x, а $\mathbf{g}$ — вектор-функция, n раз дифференцируемая в точке $f(x)$.

*) Число π является не только *иррациональным* (см. упражнение 8), но даже *трансцендентным* над телом $\mathbf{Q}$ рациональных чисел, что впервые было доказано Линдеманом в 1882 году (см., например, D. Hilbert, Gesammelte Abhandlungen, т. 1, стр. 1, Berlin (Springer), 1932).

Если положить $D^n(g(f(x))) = \sum_{k=1}^{n} g^k(f(x))\, u_k(x)$, то u_k будет зависеть лишь от функции f; вывести отсюда, что u_k является коэффициентом при a^k в разложении (относительно a) функции

$$e^{-af(x)}D^n(e^{af(x)}).$$

3) Пусть $r_n(x)$ — остаточный член в формуле бинома (19).

а) Показать, что для $x \geqslant 0$ и $n \geqslant m-1$

$$|r_n(x)| \leqslant \left|\binom{m}{n+1}\right| x^{n+1}$$

(заметить, что $(1+t)^{n-m+1} \geqslant 1$).

б) Показать, что если $-1 \leqslant m < 0$ и $x > -1$, то для любого n

$$|r_n(x)| \leqslant |x|^{n+1}(1+x)^m$$

$\Bigl($сделать замену переменной $u = \frac{x-t}{x(1+t)}$ и устремить x к -1 в формуле (19), после чего разделить обе части на $(1+x)^m\Bigr)$.

°4) а) Показать, что для $m > -1$ биномиальный ряд (стоящий в правой части формулы (21)) сходится и имеет сумму 2^m для $x = 1$ и равномерно сходится на любом компактном интервале, содержащемся в $]-1, +1[$ (использовать упражнение 3 а)). Напротив, для $m \leqslant -1$ биномиальный ряд расходится как для $x = 1$, так и для $x = -1$.

б) Показать, что для $m > 0$ биномиальный ряд нормально сходится на интервале $[-1, +1]$ и его сумма на этом интервале равна $(1+x)^m$ (заметить, что остаток $r_n(x)$ в формуле (19) стремится к пределу, когда x стремится к -1, и применить затем формулу (20); наконец, заметить, что $(-1)^n \binom{m}{n}$ сохраняет постоянный знак, если $n > m+1$).

в) Показать, что если $-1 < m < 0$, то биномиальный ряд расходится при $x = -1$ (в противном случае он был бы нормально сходящимся на интервале $[-1, +1]$ и его сумма была бы непрерывна на этом интервале).

5) Для любого *действительного* $x > 0$ и любого *комплексного* $m = \mu + i\nu$ положим $x^m = e^{m \log x}$; показать, что формула (19) остается справедливой для комплексного m и $x > -1$ и что остаток $r_n(x)$ в этой формуле удовлетворяет неравенствам

$$|r_n(x)| \leqslant \left|\binom{m-1}{n} \frac{m}{\mu} x^n [(1+x)^\mu - 1]\right|, \quad \text{если} \quad \mu \neq 0,$$

$$|r_n(x)| \leqslant \left|\binom{m-1}{n} m x^n \log(1+x)\right|, \quad \text{если} \quad \mu = 0.$$

Обобщить упражнения 3 и 4 на случай комплексного m.

6) Доказать, что при любом действительном x и любом $p>1$ справедливо неравенство

$$|1+x|^p \leqslant 1+px+\frac{p(p-1)}{2}x^2+\ldots+$$
$$+\frac{p(p-1)\ldots(p-m+2)}{(m-1)!}x^{m-1}+\frac{p(p-1)\ldots(p-m+1)}{m!}|x|^m+h_p|x|^p,$$

где $m=[p]$ (целая часть числа p) и

$$h_p=\frac{p(p-1)\ldots(p-m+1)}{(m-1)!}\int_0^1 z^{p-m}(1-z)^{m-1}\,dz.$$

7) Показать, что ряд, стоящий в правой части формулы (34), нормально сходится на интервале $[-1, +1]$ и его сумма на этом интервале равна $\operatorname{Arcsin} x$ (использовать упражнение 3 б)).

°8) Доказать иррациональность числа π, используя следующий прием: если $\pi=\frac{p}{q}$ (p и q—целые), то, положив $f(x)=\frac{(x(\pi-x))^n}{n!}$, получить, что интеграл $q^n\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx$ равен целому положительному числу (применить формулу интегрирования по частям порядка $n+1$); с другой стороны, показать, что $q^n\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx$ стремится к 0, когда n стремится к $+\infty$.

9) Показать, что на интервале $[-1, +1]$ функция $|x|$ является равномерным пределом многочленов, заметив, что $|x|=(1-(1-x^2))^{\frac{1}{2}}$, и воспользовавшись упражнением 4 б). Вывести отсюда новое доказательство теоремы Вейерштрасса (ср. гл. II, § 1, упражнение 20).

°10) Пусть p—простое число, $\mathbf{Q}_p$—тело p-адических чисел (Общая топология, гл. III, § 5, упражнение 30 и далее), $\mathbf{Z}_p$—кольцо целых p-адических чисел и $\mathfrak{p}$—главный идеал (p) в $\mathbf{Z}_p$.

а) Пусть $a=1+pb$, где $b\in\mathbf{Z}_p$—элемент мультипликативной группы $1+\mathfrak{p}$; показать, что когда целое рациональное число m неограниченно возрастает, то p-адическое число $\frac{(1+pb)^{p^m}-1}{p^m}$ стремится к пределу, равному сумме сходящегося ряда

$$\frac{pb}{1}-\frac{p^2b^2}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{p^nb^n}{n}+\ldots$$

Обозначим этот предел через $\log a$.

б) Показать, что когда p-адическое число x стремится к 0 в $\mathbf{Q}_p$ то число $\frac{a^x-1}{x}$ стремится к $\log a$ (использовать а) и определение топологии тела $\mathbf{Q}_p$).

в) Показать, что если $p \neq 2$, то $\log a \equiv pb \pmod{\mathfrak{p}^2}$, а если $p=2$, то $\log a \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^2}$ и $\log a \equiv -4b^4 \pmod{\mathfrak{p}^3}$.

г) Показать, что если $p \neq 2$ (соответственно $p=2$), то $x \to \log x$ есть изоморфизм мультипликативной топологической группы $1+\mathfrak{p}$ на аддитивную топологическую группу $\mathfrak{p}$ (соответственно $\mathfrak{p}^2$); в частности, если e_p есть элемент группы $1+\mathfrak{p}$, для которого $\log e_p = p$ (соответственно $\log e_2 = 4$), то изоморфизм кольца $\mathbf{Z}_p$ на группу $1+\mathfrak{p}$, обратный к изоморфизму $x \to \frac{1}{p} \log x \left(\text{соответственно } x \to \frac{1}{4} \log x \right)$, имеет вид $y \to e_p^{\,y}$ (см. Общая топология, гл. III, § 5, упражнение 34).

д) Показать, что для любого $a \in 1+\mathfrak{p}$ непрерывная функция $x \to a^x$, определенная на $\mathbf{Z}_p$, имеет в каждой точке производную, равную $a^x \log a$; вывести отсюда, что функция $\log x$ имеет в каждой точке $1+\mathfrak{p}$ производную, равную $\frac{1}{x}$.

11) а) В обозначениях упражнения 10 показать, что ряд с общим членом $\frac{x^n}{n!}$ сходится для любого $x \in \mathfrak{p}$, если $p \neq 2$, и для любого $x \in \mathfrak{p}^2$ (но не сходится ни для какого $x \notin \mathfrak{p}^2$), если $p=2$ (определить показатель p в разложении $n!$ на простые множители). Показать, что если сумма этого ряда равна $f(x)$, то f является непрерывным отображением $\mathfrak{p}$ (соответственно $\mathfrak{p}^2$) в $1+\mathfrak{p}$. Вывести отсюда, что для любого $z \in \mathbf{Z}_p$ имеем $f(pz) = e_p^z$ (соответственно $f(p^2z) = e_p^z$), или, иными словами, что

$$e_p = 1 + \frac{p}{1!} + \frac{p^2}{2!} + \ldots + \frac{p^n}{n!} + \ldots, \quad \text{если} \quad p \neq 2,$$

и

$$e_2 = 1 + \frac{4}{1!} + \frac{4^2}{2!} + \ldots + \frac{4^n}{n!} + \ldots$$

(использовать упражнение 10 д)).

б) Для любого $a \in 1+\mathfrak{p}$ и любого $x \in \mathbf{Z}_p$ доказать соотношение $\log(a^x) = x \log a$ и вывести из а) и из упражнения 10 г), что

$$a^x = 1 + \frac{x \log a}{1!} + \frac{x^2 (\log a)^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n (\log a)^n}{n!} + \ldots$$

в) Показать, что для любого $m \in \mathbf{Z}_p$ непрерывная функция $x \to x^m$, определенная на $1+\mathfrak{p}$, имеет производную, равную mx^{m-1} (использовать б) и упражнение 10 д)).

г) Показать, что для любого $m \in \mathbf{Z}_p$ и любого $x \in \mathfrak{p}$ при $p \neq 2$ ($x \in \mathfrak{p}^2$ при $p=2$) ряд с общим членом $\binom{m}{n} x^n$ сходится и его сумма есть непрерывная функция от m; вывести отсюда, что эта сумма равна $(1+x)^m$, заметив, что $\mathbf{Z}$ всюду плотно в $\mathbf{Z}_p$.

°12) Приняв обозначения упражнения 10, обозначим через $\mathbf{O}_2^+(\mathbf{Q}_p)$ (группа вращений двумерного пространства над телом $\mathbf{Q}_p$) группу матриц вида

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix},$$

элементы которой принадлежат $\mathbf{Q}_p$ и удовлетворяют условию $x^2+y^2=1$, причем эта группа наделена топологией, определенной в «Общей топологии» (гл. VIII, § 4, упражнение 2).

а) Обозначим через G_n подгруппу группы $\mathbf{O}_2^+(\mathbf{Q}_p)$, образованную такими матрицами, для которых $t=\dfrac{y}{1+x}\in\mathfrak{p}^n$. Показать, что G_n — компактная группа, что G_n/G_{n+1} изоморфно $\mathbf{Z}/(p)$ и что единственными компактными подгруппами группы G_1 являются G_n (см. Общая топология, гл. III, § 5, упражнение 31).

б) Показать, что G_1 тождественна подгруппе матриц $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$, в которых $x^2+y^2=1$, $x\in 1+\mathfrak{p}^2$ и $y\in\mathfrak{p}$, если $p\neq 2$, и $x\in 1+\mathfrak{p}^3$ и $y\in\mathfrak{p}^2$, если $p=2$.

в) Показать, что ряды, общие члены которых $(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{2n!}$ и $(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, сходятся при любом $x\in\mathfrak{p}$, если $p\neq 2$, и при любом $x\in\mathfrak{p}^2$, если $p=2$; пусть $\cos x$ и $\sin x$ — суммы этих рядов. Показать, что отображение

$$x\to\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

является изоморфизмом аддитивной топологической группы $\mathfrak{p}$ (соответственно $\mathfrak{p}^2$) на группу G_1.

г) Если p имеет вид $4h+1$ (h — целое), то в $\mathbf{Q}_p$ существует такой элемент i, что $i^2=-1$. Если каждому $z\in\mathbf{Q}_p^*$ поставить в соответствие матрицу

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) & \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right) \\ -\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right) & \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) \end{pmatrix},$$

то определится изоморфизм мультипликативной группы $\mathbf{Q}_p^*$ на группу $\mathbf{O}_2^+(\mathbf{Q}_p)$; группе $1+\mathfrak{p}$ при этом изоморфизме соответствует группа G_1, и $\cos px+i\sin px=e_p^{ix}$ (упражнение 11).

д) Если p имеет вид $4h+3$ (h — целое), то элементы матриц группы $\mathbf{O}_2^+(\mathbf{Q}_p)$ будут непременно *целыми p-адическими числами.*

Тогда многочлен X^2+1 неприводим в $\mathbf{Q}_p$; пусть $\mathbf{Q}_p(i)$ — квадратическое расширение группы $\mathbf{Q}_p$, полученное путем присоединения корня i многочлена X^2+1; группа $\mathbf{Q}_p(i)$ наделена топологией, определенной в «Общей топологии» (гл. VIII, § 4, упражнение 2). Группа $\mathbf{O}_2^+(\mathbf{Q}_p)$ изоморфна мультипликативной группе N элементов из $\mathbf{Q}_p(i)$ с нормой 1 посредством изоморфизма, который матрице $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ ставит в соответствие элемент $z=x+iy$. Показать, что в группе $\mathbf{Q}_p(i)$ существует $p+1$ корней уравнения $x^{p+1}=1$, образующих циклическую подгруппу R группы N (рассуждать, как в упражнении 33, Общая топология, гл. III, § 5: сначала показать, что в $\mathbf{Q}_p(i)$ существует $p+1$ различных корней соотношения $x^{p+1} \equiv 1 \pmod p$, и для каждого корня a этого соотношения образовать последовательность $(a^{p^{2n}})$). Вывести отсюда, что группа $\mathbf{O}_2^+(\mathbf{Q}_p)$ изоморфна *произведению* групп R и G_1.

е) Показать, что для $p=2$ группа $\mathbf{O}_2^+(\mathbf{Q}_p)$ изоморфна произведению группы G_1 и циклической группы порядка 4.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК

(ГЛАВЫ I—III)

(Римские цифры отсылают читателя к библиографии, помещенной в конце этого очерка.)

В 1604 году, находясь в расцвете своей научной деятельности, Галилей считал, что при прямолинейном движении со скоростью, возрастающей пропорционально пройденному пути, закон движения будет тем же самым ($x = ct^2$), что и открытый им закон свободного падения ((III), т. X, стр. 115—116). А уже между 1695 и 1700 годами не было ни одного тома выходившего в Лейпциге ежемесячника *Acta Eruditorum*, в котором не появлялись бы статьи Лейбница, братьев Бернулли, маркиза де Лопиталя с разработкой задач дифференциального, интегрального и вариационного исчисления почти с той же терминологией и с теми же обозначениями, которые служат нам и по сей день. Таким образом, исчисление бесконечно малых или, как его принято называть в Англии, счисление («calculus») было почти полностью создано в течение одного столетия, и вот уже около трех веков постоянного применения не смогли притупить этот ни с чем не сравнимый инструмент.

Древние греки не только не имели, но и не представляли себе ничего подобного. Им, несомненно, было известно, хотя и не использовалось ими в полной мере, алгебраическое исчисление вавилонян, поскольку часть геометрии греков, судя по всему, является лишь его переложением, но как раз к области геометрии и относится их, быть может, самое гениальное открытие: метод подхода к задачам, которые ныне относятся к интегральному исчислению. Первые образцы такого подхода, дошедшие до нас в более или менее точной передаче Евклида ((I), книга XII, предложения 7 и 10), были даны Евдоксом при доказательстве теорем об объеме конуса и пирамиды. Но главное — именно этим задачам посвящены почти все труды Архимеда ((II) и (II bis)); благодаря счастливому стечению обстоятельств мы и сейчас имеем возможность читать в подлиннике большую часть его сочинений, тщательно изложенных на звучном дорическом диалекте, вплоть до того недавно обнаруженного труда, в котором он излагает «эвристические» методы, приведшие его к некоторым из его наиболее замечательных открытий ((II), стр. 298—327). Но именно в решении этих задач и проявляется одна из слабых сторон метода «исчерпывания» Евдокса: являясь (при некоторых допущениях) безупречным методом доказательства, он не является методом открытия; его применение основано на предварительном знании доказываемого факта; к тому же Архимед говорит: «*Относительно тех теорем о конусе и пирамиде, для которых Евдокс первый нашел доказательство. . . , немалую долю заслуги я уделяю и Демокриту, который первый высказал это положение относительно упомянутых фигур, хотя и без доказательства*» (цит. соч., стр. 299). Это обстоятельство делает особенно трудным подробный анализ наследия Архимеда, анализ, который, кажется, и не предпринимался ни одним из современных историков; ибо на самом деле мы не знаем, в какой мере Архимед осознавал те родственные связи, которые объединяли различные решенные им задачи (характер связей можно выразить, сказав, что один и тот же интеграл многократно выступает в различных геометрических задачах), и какое значение он мог им придавать. Например, возьмем следующие задачи, из которых первая была решена Евдоксом, а другие — Архимедом: объем пирамиды, площадь параболического сегмента, центр тяжести треугольника и площадь спирали Архимеда (в полярных координатах $\rho = c\omega$); все они приводятся к интегралу $\int x^2\,dx$, и, не отклоняясь ни в чем от основных идей метода исчерпывания, все их можно свести к вычислению «римановых сумм» вида $\sum\limits_n an^2$. Именно так на самом деле и поступает Архимед со спиралью ((II, т. II, стр. 1—121), исследуя ее при помощи леммы, которая может быть записана следующим образом:

$$N^3 < 3\sum_{n=1}^{N} n^2 = N^3 + N^2 + \sum_{n=1}^{N} n < (N+1)^3.$$

Что касается центра тяжести треугольника, то Архимед доказывает (методом исчерпывания, путем рассечения на параллельные полоски), что эта точка лежит на каждой из медиан, и следовательно, является их точкой пересечения ((II), т. II, стр. 261—315). Для параболы он дал три метода решения: один, эвристический, предназначенный только для того, чтобы «*сделать результат правдоподобным*», сводит задачу к задаче о центре тяжести треугольника при помощи рассуждения из статики, в котором Архимед, не колеблясь, рассматривает параболический сегмент как сумму бесконечного множества прямолинейных отрезков, параллельных оси ((II), стр. 302—304); другой имеет в своей основе аналогичный принцип, но проводится со всей строгостью по методу исчерпывания ((II), стр. 168—226); и последнее доказательство, необычайно остроумное, но наименее доходчивое, используя специальные свойства параболы, дает искомую площадь в виде суммы членов геометрической прогрессии ((II), стр. 77—94). Нигде не отмечается связь этих задач с задачей об объеме пирамиды, и даже подчеркивается ((II), стр. 229), что задачи, относящиеся к спирали, не имеют «ничего общего» с некоторыми другими задачами, относящимися к сфере и параболоиду вращения, о которых Архимед говорит в том же предисловии и среди которых находится такая (объем параболоида), которая сводится к интегралу $\int x\,dx$.

На этих примерах мы убеждаемся в том, что метод исчерпывания, не считая некоторых искусственных приемов, состоит в следующем: путем разбиения рассматриваемой величины на «римановы суммы» получают для нее верхнюю и нижнюю границы, а затем сравнивают их либо непосредственно с заранее заданным выражением для этой величины, либо с соответствующими границами в аналогичной, уже решенной задаче. Сравнение (которое из-за невозможности использовать отрицательные числа непременно делается в два приема) проводится при помощи магической формулы: «в самом деле, если бы это было не так, то рассматриваемая величина была бы либо больше, либо меньше; пусть, если это возможно, она больше, и т. д.; пусть, если это возможно, она меньше, и т. д.», откуда и название метода «апагогический», или «метод от противного», которое дали ему ученые XVII века. В аналогичной форме изложено Архимедом исследование о касательной к спирали ((II), стр. 241—252) — результат, стоящий особняком и единственный, на который мы могли бы сослаться как на античный исток «дифференциального исчисления», если не считать относительно простого определения касательных к коническим сечениям и нескольких задач на максимум и минимум. И в самом деле, если в том, что касается «интегрирования», греческим математикам было представлено обширное поле исследований не только теорией площадей и объемов, но и статикой и гидростатикой, то для серьезного подхода к дифференцированию у них, кроме кинематики, не было побудительных причин. Правда, Архимед дал для своей спирали кинематическое определение, и отсутствие сведений о том, каким путем он пришел к нахождению касательной к ней, дает нам право задать вопрос: не имел ли он некоторого представления о сложении движений? Но в таком случае не должен ли был он применять столь мощный метод к другим задачам того же типа? Скорее всего, он должен был привлечь какой-нибудь эвристический способ перехода к пределу, который ему могли подсказать имевшиеся в его распоряжении результаты о конических сечениях, имеющие, естественно, существенно более простой характер, так как можно найти точки пересечения прямой и конического сечения, а значит, и указать условия совпадения этих точек. Что же касается определения касательной, то она понимается как прямая, которая в окрестности некоторой точки кривой оставляет кривую целиком по одну сторону; допускается, что касательная существует и что всякая кривая составлена из выпуклых дуг; при этих условиях для доказательства того, что прямая является касательной к кривой, необходимо доказать некоторые неравенства, что, разумеется, и было проделано с самой высокой точностью.

С точки зрения строгости методы Архимеда не оставляют желать лучшего, и еще в XVII веке, когда наиболее скрупулезные математики хотели поставить вне всяких сомнений какой-либо считавшийся особенно тонким результат, они прибегали к «апагогическому» доказательству ((XIa) и (XIIa)). Что же касается плодотворности этих методов, то достаточным свидетельством тому служат труды Архимеда. Однако для того, чтобы иметь право усмотреть в них «интегральное исчисление», необходимо было бы составить, минуя многообразие геометрических образов, некоторое подобие классификации задач в соответствии с природой «интеграла», лежащего в их основе. Как мы увидим, в XVII веке поиски такой классификации становится постепенно одной из главных задач геометров. Если у Архимеда нет даже намека на это, то не является ли этот факт признаком того, что такие умозрения казались ему преувеличенно «абстрактными» и что, наоборот, он в каждом случае умышленно использовал с максимальной возможностью специальные свойства фигуры, которую он исследовал? И не должны ли мы заключить, что это замечательное наследие, из которого интегральное исчисление, по признанию его создателей, полностью вытекает, в каком-то смысле противостоит интегральному исчислению?

Вообще говоря, в математике углубление пропасти между открытием и доказательством не остается безнаказанным. При благоприятных обстоятельствах математик, не пренебрегая строгостью, просто излагает свои идеи в том виде, как они у него возникают; иногда еще можно надеяться добиться этого ценой удачных изменений в языке и в принятых обозначениях. Однако часто возникает необходимость сделать выбор между методами изложения некорректными, но, быть может, плодотворными, и корректными, но позволяющими выразить мысль лишь в измененном виде и притом ценой значительных усилий. Ни тот, ни другой путь не свободен от опасностей. Греки следовали второму пути, и, быть может, скорее в этом, чем в стерилизующем действии римского владычества, следует искать причины упадка их математики почти сразу после ее наиболее бурного расцвета. Высказывалась не лишенная правдоподобия мысль, что устное преподавание последователей Архимеда и Аполлония могло содержать некоторые новые результаты, которые не публиковались из-за нежелания ученых прилагать необычайные усилия, требуемые для того, чтобы публикация соответствовала установленным канонам. Во всяком случае подобные сомнения не возникали у математиков XVII века, когда они, очутившись перед большим количеством новых проблем, искали их разрешения в тщательном изучении трудов Архимеда.

В то время как великие классики греческой литературы и философии были изданы в Италии Альде Манусом и его конкурентами, и почти все до 1520 года, первое издание Архимеда на греческом и латинском языках *) было выпущено лишь в 1544 году в Базеле Гервагнусом, причем до этого не было ни одной публикации трудов Архимеда на латинском языке; на математиков той эпохи (поглощенных своими алгебраическими изысканиями) эти труды оказали влияние не сразу, и лишь с появлением Галилея и Кеплера — этих двух скорее астрономов и физиков, чем математиков,— это влияние стало явным. Начиная с того времени и вплоть до 1670 года в работах основоположников исчисления бесконечно малых не встречается имени,

*) *Archimedis Opera quae quidem exstant omnia, nunc primus et gr. et lat. edita...* Basileae, Jo. Hervagius, 1544, 1 vol. in-fol.

которое появлялось бы чаще имени Архимеда. Многие переводят его и комментируют; все, начиная от Ферма и кончая Барроу, наперебой цитируют его; все утверждают, что находят у него образец и источник творчества.

Правда, как мы увидим, все эти высказывания не должны пониматься буквально; в этом заключена одна из тех трудностей, которые препятствуют правильному истолкованию этих работ. Историк должен также учесть организацию научной жизни того времени, которая в начале XVII века была еще очень недостаточной, а уже к концу этого века, благодаря созданию научных обществ и периодических научных изданий, благодаря упрочению и развитию университетов, очень сильно стала походить на ту, которую мы видим сегодня. Не имевшие вплоть до 1665 года никаких периодических изданий, математики вынуждены были для распространения своих трудов прибегать либо к переписке, либо к печатанию книги, чаще всего за свой счет или за счет мецената, если таковой находился. Издатели и печатники, пригодные для такой работы, были редки и подчас ненадежны. После долгих проволочек и бесчисленных хлопот, с которыми была сопряжена публикация такого рода, автор чаще всего оказывался вынужденным вести бесконечные научные споры, на которые вызывали его научные соперники, причем не всегда с добрыми намерениями, и которые проводились часто в удивительно едком тоне, ибо при общей неясности в отношении основ исчисления бесконечно малых всякий без труда мог найти в рассуждениях своих соперников слабые или по крайней мере туманные и спорные места. Понятно, что при этих условиях многие ученые, любившие спокойствие, довольствовались тем, что сообщали свои методы и результаты лишь избранным друзьям. Некоторые из них, особенно математики-любители, такие, как Мерсенн в Париже и позже Коллинз в Лондоне, поддерживали обширную переписку с учеными многих стран, посылая им и получая от них научные факты, зачастую перемешанные с их собственными нелепостями. За неимением четких понятий и общих определений, математики, владевшие «методами», не могли представить их в виде теорем и даже сформулировать с достаточной точностью. Поэтому они вынуждены были проверять их на множестве частных случаев и не видели другой возможности для испытания силы этих методов, кроме как посылать вызовы своим соперникам, часто сопровождая их изложением собственных результатов в зашифрованной форме. Учащаяся молодежь путешествовала, пожалуй, больше, чем сейчас, и часто такой способ распространения идей ученого через его путешествующих учеников был более эффективным, чем их опубликование, хотя это и служило дополнительным поводом для недоразумений. Наконец, поскольку одни и те же задачи ставились многими математиками, среди которых было немало выдающихся, а сведения о результатах своих коллег у них были очень слабые, то неизбежно возникали бесконечные споры о приоритете, и нередки были случаи, когда к ним примешивались обвинения в плагиате.

Следовательно, для историка в письмах и в личных бумагах ученых того времени содержится столько же, если не больше, материала, сколько и в собственно публикациях. Однако в то время как, например, личные бумаги Гюйгенса сохранились и были образцово изданы (XVI), многие бумаги

Лейбница опубликованы еще далеко не полно и отрывочно, личные бумаги Ньютона совсем не опубликованы, а бумаги многих других ученых бесследно пропали. Во всяком случае последние изыскания, основанные на анализе самих рукописей, вносят неопровержимую ясность в один пункт, который был затемнен спорами последователей: именно, всякий раз, как один из великих математиков той эпохи высказывался о своих собственных работах, о развитии своих взглядов, о тех влияниях, которые он испытывал, и о тех, которые он отвергал, он делал это честно и добросовестно *); следовательно, этими ценными высказываниями, которыми мы обладаем в достаточно большом числе, можно смело пользоваться, и историк при их изучении не должен уподобляться судебному следователю. К тому же большая часть поднимавшихся тогда вопросов о приоритете лишена всякого смысла. Действительно, вводя обозначение dx для «дифференциала», Лейбниц не знал, что за десять лет до него Ньютон пользовался знаком $\dot{x}$ для обозначения «флюксии»; но какое это имеет значение? В качестве более поучительного примера рассмотрим вопрос о том, кем и когда была получена теорема $\log x = \int \frac{dx}{x}$. В том виде, как она здесь написана, эта формула принадлежит Лейбницу, поскольку обе ее части записаны в его обозначениях. Сам же Лейбниц и Валлис приписывают ее Григорию де Сен-Винсенту. Последний в своем *Opus Geometricum* (IX) (появившемся в 1647 году, но, по его утверждению, написанном гораздо раньше) доказывает лишь следующее: если $f(a, b)$ означает площадь гиперболического сегмента $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{A}{x}$, то соотношение $\frac{b'}{a'} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ влечет равенство $f(a', b') = n \cdot f(a, b)$; к этому его ученик и комментатор Сараса почти сразу же **) добавляет, что, стало быть, площади $f(a, b)$ могут «заменять логарифмы». То, что он ничего больше не говорит о логарифмах, а сам Сен-Винсент их вовсе не упоминает, может объясняться тем, что большинство математиков той эпохи относило логарифмы к «вспомогательным средствам счета» без права на место в математике. Известно, что Торричелли в одном письме от 1664 года (VII bis) говорит о своих исследованиях, относящихся к кривой, которую мы записали бы в виде $y = ae^{-cx}$, $x \geqslant 0$, добавляя, что там, где Непер (которого он, впрочем, осыпает похвалами), «*преследует лишь цели арифметической практики*», сам он «*выводит из этого геометрическую теорию*»; об этой кривой он оставил рукопись, судя по всему, подготовленную к печати, но остававшуюся

---

*) Это можно сказать, например, про Торричелли (см. (XII), т. VIII, стр. 181—194) и про Лейбница (D. Mahnke, Abn. Preuss. Akad. der Wiss., 1925, № 1, Berlin, 1926). Разумеется, это не означает, что математики не строили себе иллюзий относительно оригинальности своих идей; однако наиболее крупные из них не так уж часто ошибались в этом.

**) *Solutio problematis*... Auctore P. Alfonso Antonio de Sarasa... Antverpiae, 1649.

неопубликованной вплоть до 1900 года ((VII), т. I, стр. 335—347). Независимо от него Декарт сталкивается с той же кривой в 1639 году в связи с «проблемой Дебона» и описывает ее, ничего не говоря о логарифмах ((X), т. II, стр. 514—517). Как бы то ни было, а в 1667 году Дж. Грегори ((XVIIa), перепечатано в (XVI bis), стр. 407—462), ни на кого не ссылаясь, указывает правило вычисления площадей гиперболических сегментов при помощи (десятичных) логарифмов, что одновременно требовало теоретического знания связи между квадратурой гиперболы и логарифмами и знания численной зависимости между логарифмами «натуральными» и «десятичными». Только ли к этому последнему пункту относится протест Гюйгенса, который сразу же стал оспаривать новизну результата Грегори (XVIa)? Для нас это не более ясно, чем для его современников; во всяком случае они четко представляли себе, что существование связи между логарифмами и квадратурой гиперболы является фактом давно известным, но сослаться они могли лишь на высказывания, содержащиеся в письмах, или на книгу Григория де Сен-Винсента. Когда в 1668 году Броункер построил (с тщательно проведенным доказательством сходимости, путем сравнения с геометрической прогрессией) ряды для $\log 2$ и $\log\frac{5}{4}$ (XIV), то он представил их как выражения для соответствующих сегментов гиперболы и добавил, что полученные им численные значения «относятся, как логарифмы» чисел 2 и $\frac{5}{4}$. Но в том же году в работе Меркатора (XIII) (или, точнее, в изложении работы Меркатора, сразу же сделанном Валлисом (XV. bis)) язык меняется: поскольку сегменты гиперболы пропорциональны логарифмам, а последние, как хорошо известно, определены своими характеристическими свойствами лишь с точностью до постоянного множителя, то ничто не препятствует рассматривать сегменты гиперболы как логарифмы и называть их «натуральными» или «гиперболическими» (в противовес логарифмам «искусственным» или «десятичным»). Этим был сделан последний шаг, после чего (при помощи найденного Меркатором ряда для $\log(1+x)$) теорема $\log x = \int \frac{dx}{x}$ была получена с точностью до обозначений, или, скорее, она стала просто определением.

В заключение остается лишь сказать, что это открытие было сделано путем почти неуловимых переходов и что спор о приоритете в этом вопросе сильно походил бы на спор между скрипкой и тромбоном относительно точного момента появления в симфонии такой-то мелодии. И по правде сказать, в то время как в ту же эпоху другие математические творения, такие, как арифметика Ферма, динамика Ньютона, несли на себе сильный отпечаток индивидуальности, развитие исчисления бесконечно малых в XVII веке можно сравнить с постепенным и неудержимым развертыванием симфонии, в которой палочку держит «Zeitgeist» (дух времени) — одновременно и композитор, и дирижер — и в которой каждый ведет свою партию в собственном тембре, но никто не является хозяином звучащих тем, затейливо перепутанных сложным контрапунктом. Значит, и история создания исчисления бесконечно малых должна быть написана в форме тематического анализа; здесь мы ограничимся общим обзором, не претендующим на точность в деталях *). Во всяком случае вот те основные темы, которые возникают прежде всего:

А) Тема *математической строгости*, противостоящая теме *бесконечно малых, неделимых* или *дифференциалов*. Мы знаем, что обе темы занимают в трудах Архимеда значительное место: первая — во всех его сочинениях, а вторая — только в трактате о методе, который не был известен в XVII веке, так что если эта тема не возникла самостоятельно, а только возродилась, то лишь на почве философской традиции. К тому же принцип бесконечно малых появляется в двух различных формах в зависимости от того, идет ли речь о «дифференцировании» или об «интегрировании». Что касается последнего, то пусть требуется вычислить площадь плоской фигуры; тогда при помощи бесконечного числа равноотстоящих друг от друга параллельных разбивают фигуру на бесконечное число бесконечно малых параллельных полосок, каждая из которых является прямоугольником (даже если ни одна из конечных полосок, полученных при помощи двух параллельных, отстоящих друг от друга на конечном расстоянии, не будет прямоугольником). Точно так же плоскостями, перпендикулярными к оси, тело вращения разбивается на бесконечное число цилиндров одинаковой бесконечно малой высоты **); аналогичные способы выражения могут быть использованы и тогда, когда речь идет о разбиении площади на треугольники пересекающимися прямыми или о нахождении длины дуги кривой, если представить ее в виде ломаной с бесконечным числом звеньев, и т. д. Конечно, те немногие математики, которые до конца овладели методами Архимеда, такие, как Ферма, Паскаль, Гюйгенс, Барроу, в каждом конкретном случае не встречали никаких затруднений при замене этого языка строгими доказательствами; поэтому они часто замечали, что это только сокращенный способ выражения. «*Было бы легко,*— говорит Ферма,— *давать доказательства по способу Архимеда*; ...*достаточно раз и навсегда предупредить об этом, чтобы избежать непрерывных повторений*...» ((XI), т. I, стр. 257), а также Паскаль: «*Таким образом, эти методы отличаются один от другого лишь*

*) В дальнейшем, приписывая какой-либо результат определенному автору и относя его к определенной дате, мы тем самым указываем лишь, что этот результат был этому автору известен в тот момент (в чем чаще всего можно удостовериться по первоисточнику); мы не намереваемся делать абсолютного утверждения, что этот автор не знал его раньше или что он не заимствовал его у других; еще менее мы хотим сказать, что один и тот же результат не был получен независимо другими либо раньше, либо позже.

**) См., например, высказывания Паскаля в «Lettre à M. de Carcavy» (XIIb). Отметим, что обаяние бесподобного языка Паскаля позволяло ему достигать создания иллюзии совершенной ясности до такой степени, что один из современных издателей пришел в восторг от «четкости и точности в проведении доказательства»!

способом выражения» ((XIIb), стр. 352) *), и, наконец, Барроу, со свойственной ему лаконичной иронией: «*Longior discursus apagogicus adhiberi possit, sed quorsum?*» (можно было бы удлинить апагогическим рассуждением, но зачем?) ((XVIII), стр. 251). Сам Ферма, по-видимому, остерегался высказывать что бы то ни было, что он не мог проверить таким путем и тем самым вынудил себя формулировать всякий общий результат лишь в виде предположения, или «метода»; однако Барроу, обычно такой аккуратный, был несколько менее щепетильным. Большинству же их современников можно поставить в минус то, что соблюдение строгости не принадлежало к числу их главных забот, и имя Архимеда чаще всего служило вывеской, предназначенной, без сомнения, для того, чтобы возвысить значимость работ, за которые Архимед наверняка не взял бы на себя ответственность. И это тем более имеет место, когда речь идет о дифференцировании. Если кривая в процессе ее спрямления уподобляется ломаной с бесконечным числом звеньев, то в этом случае «бесконечно малая» дуга кривой рассматривается как «бесконечно малый» отрезок прямой, являющийся либо хордой, либо касательной, существование которой предполагается; рассматривают также «бесконечно малый» интервал времени, в течение которого (если речь идет лишь о скорости) движение «является» равномерным; еще более смело поступает Декарт, который в поисках определения касательной к циклоиде, не подходящей под его общее правило, рассматривает катящиеся одна по другой кривые в виде ломаных, чтобы вывести отсюда, что «в бесконечно малом» движение можно рассматривать как вращение вокруг точки соприкосновения ((X), т. II, стр. 307—338). И снова только Ферма, который, пользуясь такими инфинитезимальными рассмотрениями, формулирует свои правила для касательных и для максимума и минимума, только он один в состоянии обосновать их в каждом частном случае ((XIb); ср. также (XI), т. II, passim, особенно стр. 154—162, и Supplément aux Œuvres (Gauthier-Villars, 1922), стр. 72—86); Барроу для большей части своих теорем дает строгие доказательства в стиле древних, исходя из простых предположений монотонности и выпуклости. Однако уже было не время вкладывать новое содержание в старые формы. Теперь мы знаем, что все это подготавливало понятие предела; и если у Паскаля, Ньютона и у других можно отыскать формулировки, сильно напоминающие наши современные определения, то лишь изучение их в контексте дает возможность увидеть те непреодолимые трудности, которые вставали на пути к строгому изложению. Когда, начиная с XVIII века, математики, стремившиеся к ясности, хотели навести некоторый порядок в груде накопленных богатств, то такие указания, встречавшиеся в записях их предшественников, были для них очень ценны; например, когда Даламбер объясняет, что в дифференцировании нет ничего, кроме понятия предела, и дает ему точное определение (XXVI), то можно думать,

*) Однако в письме к господину A. D. D. S. он пишет: «...*не останавливаясь ни на методах движения, ни на методах неделимых, а следуя методам древних, с тем чтобы сие могло считаться отныне прочным и бесспорным*» ((XIIa), стр. 256).

что он руководствовался соображениями Ньютона о «первых и последних отношениях исчезающих величин» (XX). Но если говорить о XVII веке, то следует констатировать, что путь к современному анализу был открыт лишь после того, как Ньютон и Лейбниц, заглядывая вперед, начали прежде всего искать обоснование новых методов не в строгих доказательствах, а в плодотворности и согласованности результатов.

В) *Кинематика.* Уже Архимед, как мы видели, дал кинематическое определение своей спирали; а в средние века в зачаточной форме развивается (за исключением доказательства от противного, без инфинитезимальных рассмотрений) теория изменения величин как функций времени и их графического представления, истоки которой следует, быть может, отнести к астрономии вавилонян. Но для математики XVII века наибольшее значение имело то обстоятельство, что с самого начала задачи дифференцирования возникали не только в связи с касательной, но и в связи со скоростью. Однако Галилей ((III) и (III bis)), определяя закон изменения скорости при свободном падении (после того как он из опытов с наклонной плоскостью получил закон изменения пути $x = at^2$), не прибегал к дифференцированию. Он делал различные предположения относительно скорости: сначала, что $v = \frac{dx}{dt} = cx$ ((III), т. VIII, стр. 203), а затем, что $v = ct$ (там же, стр. 208), и пытался найти закон изменения пути, проводя довольно туманные рассуждения с графиком скорости как функции времени. Декарт (в 1618 году) также исследует закон $v = ct$, но строго математически, со всей ясностью, которую допускал язык неделимых *) ((X), т. X, стр. 75—78); у обоих график скорости (по существу, прямая) играет основную роль, и есть все основания задать вопрос, до какой степени они осознавали наличие пропорциональности между пройденным путем и площадью, заключенной между осью времени и кривой скорости; однако на этот счет трудно что-либо утверждать, хотя в изложении Декарта как будто предполагается знание существа вопроса (который, как считают некоторые историки, восходит к средним векам **)), в то время как Галилей не имеет о нем ясного представления. В 1670 году Барроу формулирует его в явном виде ((XVIII), стр. 171); может быть, в ту эпоху он ни для кого уже не был новостью, и Барроу вовсе и не пытается представить его таковым; однако относительно этого результата более, чем относительно какого-либо другого, неестественна попытка

---

*) Декарт даже добавляет интересное геометрическое рассуждение, при помощи которого он выводит закон движения $x = at^3$ в предположении, что $\frac{dv}{dt} = ct$. Зато любопытно, что десятью годами позже он запутывается в своих заметках и переписывает заимствованное у Мерсенна неточное рассуждение по тому же вопросу, в котором график скорости как функции времени смешивается с графиком ее как функции пройденного пути ((X), т. I, стр. 71).

**) H. W i e l e i t n e r, Der «Tractatus de latitudinibus formarum» des Oresme, Bibl. Mat. (III), т. 13 (1912), стр. 115—145.

указать дату с излишней точностью. Что касается предположения $v = cx$, также рассмотренного Галилеем, то он удовольствовался (цит. соч.) доказательством того, что это невозможно (или, говоря современным языком, что уравнение $\frac{dx}{dt} = cx$ не имеет ненулевого решения, обращающегося в нуль при $t = 0$), путем туманного рассуждения, которое позже Ферма ((XI), т. II, стр. 267—276) взял на себя труд развить (и которое примерно сводится к тому, что $2x$ являлось бы решением одновременно с x, $x \neq 0$, что противоречило бы физически очевидной единственности решения). Но это как раз и есть закон $\frac{dx}{dt} = cx$, послуживший в 1614 году Неперу для введения его логарифмов, которым он дал кинематическое определение (IV), в наших обозначениях записываемое следующим образом: если по двум прямым движутся две точки по законам $\frac{dx}{dt} = a$, $\frac{dy}{dt} = -\frac{ay}{r}$, $x_0=0$, $y_0=r$, то говорят, что x есть «логарифм» y $\left(\text{в современных обозначениях } x=r\log\left(\frac{r}{y}\right)\right)$.

Выше уже говорилось, что кривая, являющаяся решением уравнения $\frac{dy}{dx}=\frac{c}{x}$, встречается в 1639 году у Декарта, описавшего ее кинематически ((X), т. II, стр. 514—517); известно, что он довольно безапелляционно объявил «механическими» все неалгебраические кривые и требовал их исключения из геометрии; к счастью, это табу, против которого уже гораздо позже Лейбниц считал необходимым категорически протестовать, не соблюдалось ни современниками Декарта, ни им самим. Когда на очередь дня встали циклоида и логарифмическая спираль, то их изучение проходило весьма интенсивно и очень сильно помогло взаимному проникновению геометрических и кинематических методов. Принцип сложения движений, или, точнее, сложения скоростей, лежал в основе теории движения снарядов, изложенной Галилеем в шедевре его последних лет жизни *Discorsi* в 1638 году ((III), т. VIII, стр. 268—313), теории, в которой, стало быть, содержалось неявно новое определение касательной к параболе; и если Галилей не сделал об этом формального замечания, то Торричелли, наоборот ((VII), т. III, стр. 103—159), подчеркивает этот пункт и на той же основе создает общий метод определения касательных к кривым, которые могут быть определены кинематически. Правда, в этом его на несколько лет опередил Роберваль (VIIIa), утверждающий, что он пришел к этому методу при изучении циклоиды; кстати сказать, та же проблема касательной к циклоиде дала Ферма возможность продемонстрировать силу своего метода дифференцирования ((XIb), стр. 162—165), тогда как Декарт, не найдя способа применить к этой задаче свой алгебраический метод, ввел по этому поводу понятие мгновенного центра вращения ((X), т. II, стр. 307—338).

Но по мере того как развивается исчисление бесконечно малых, кинематика перестает быть обособленной наукой. Становится все более и более ясно, что вопреки заявлению Декарта алгебраические кривые и функции с точки зрения «локальной», то есть с точки зрения исчисления бесконечно малых, ничем не отличаются от других, гораздо более общих; что функции и кривые, определенные кинематически, являются такими же функциями и кривыми, что и другие, и поддаются тем же методам исследования, и что переменная «время» является не более чем параметром, временна́я сущность которого имеет чисто языковой смысл. Так, у Гюйгенса, даже когда речь идет о механике, доминирует геометрия (XVIb), а Лейбниц в своем исчислении не отводит времени никакого особого места. Барроу же, наоборот, одновременным сведением различных величин к функции универсальной независимой переменной, понимаемой как «время», пытался создать основу исчисления бесконечно малых с геометрическим уклоном. Эта идея, которая должна была появиться у него, когда он пытался найти метод сложения движений, о существовании которого он знал лишь понаслышке, подробно изложена в четких и очень общих терминах в первых трех из его *Lectiones Geometricae* (XVIII); там он, например, строго доказывает, что если движущаяся точка имеет в качестве проекций на две взаимно перпендикулярные оси AY, AZ две точки, одна из которых движется с постоянной скоростью a, а другая — со скоростью v, возрастающей вместе с временем, то угловой коэффициент касательной к траектории этой точки равен v/a и траектория вогнута в сторону возрастания Z. Дальше в *Lectiones* он очень далеко развивает эти идеи и хотя придает их изложению вычурную форму, почти от начала до конца по возможности геометрическую и как можно менее алгебраическую, тем не менее в этих идеях, по словам Якова Бернулли ((XXIII), т. I, стр. 431 и 453), содержится эквивалент значительной части исчисления бесконечно малых Ньютона и Лейбница. Те же точно идеи служат отправной точкой и Ньютону ((XIXc) и (XX)): его «флюенты» суть различные величины, являющиеся функциями «времени»— то есть просто универсального параметра, а «флюксии»— это их производные по «времени»; обоснованная Ньютоном возможность замены в случае надобности параметра представлена также и в методе Барроу, хотя и используется последним с меньшей гибкостью *). Таким образом, метод флюксий, принятый

*) Об отношениях между Барроу и Ньютоном см. Osmond, *Isaak Barrow. His life and time*, London, 1944. В письме от 1663 года (ср. St. P. Rigaud, *Correspondence of scientific men*... Oxford, 1841, т. II, стр. 32—33) Барроу сообщает о своих старых соображениях относительно сложения движений, которые привели его к весьма общей теореме о касательных (если речь идет о теореме из *Lect. Geom.*, лекция X ((XVIII), стр. 247), то, действительно, она настолько обща, что содержит в качестве частного случая все, что было сделано до него в этом направлении). С другой стороны, Ньютон был учеником Барроу в 1664 и в 1665 годах, однако он утверждает, что свое правило для вывода из соотношения между «флюентами» соотношения между их «флюксиями» он получил независимо. Вполне вероятно, что Ньютон перенял от Барроу общую идею величин как функций времени и идею скорости их изменения — понятия, уточнению которых сразу же способствовали его соображения, относящиеся к динамике (от которых Барроу был весьма далек).

Ньютоном и в силу авторитета его автора вошедший в употребление среди английских математиков следующего века, представляет собой за интересующий нас период последнее достижение кинематических методов, которые уже сыграли свою роль.

C) *Алгебраическая геометрия.* Эта привходящая тема, стоящая в стороне от предмета нашего очерка, вводится потому, что Декарт из склонности к систематике пытался сделать предметом геометрии исключительно алгебраические кривые ((X), т. VI, стр. 390); поэтому при определении касательных он пользуется методом алгебраической геометрии, а не дифференциального исчисления, как это делает Ферма. Оставшиеся нам от древних результаты относительно пересечения прямой и конического сечения, соображения самого Декарта о пересечении двух конических сечений и вопросы, которые при этом возникали, вполне естественно, натолкнули его на мысль взять в качестве критерия касания слияние двух точек пересечения; теперь мы знаем, что в алгебраической геометрии это корректный критерий и настолько общий, что не зависит от понятия предела и от природы «основного тела». Вначале Декарт применяет его не совсем удачно: он пытается устроить слияние в одну заданную точку двух точек пересечения изучаемой кривой и окружности с центром на оси Ox (X, т. VI, стр. 413—424); его последователи ван Скоотен и Хюдде заменили окружность прямой и получили выражение $-\frac{F'_x}{F'_y}$ для углового коэффициента касательной к кривой $F(x, y) = 0$, где «производные многочлены» F'_x, F'_y определены посредством формального правила для их вычисления ((X bis), т. I, стр. 147—344 и (XXII), стр. 234—237); примерно в то же время к этому результату пришел и де Слюз ((XXII), стр. 232—234). Разумеется, отмеченные здесь различия, которые только и могут придать смысл научному спору между Декартом и Ферма, никоим образом не могли существовать в умах математиков XVII века; мы упомянули о них лишь для того, чтобы осветить один из наиболее достопримечательных эпизодов интересующей нас истории и чтобы констатировать последовавшее почти сразу за ним полное исчезновение алгебраических методов, временно поглощенных методами дифференциальными.

D) *Классификация задач.* Выше уже говорилось о том, что эта тема, видимо, отсутствует в трудах Архимеда, которому довольно безразлично, решать ли задачу прямо или сводить ее к уже решенной задаче. В XVII веке задачи, связанные с дифференцированием, появились вначале в трех различных аспектах: скорости, касательные, максимумы и минимумы. Что касается последних, то Кеплер (V) делает наблюдение (которое имеется уже у Орезма *) и частично даже у вавилонских астрономов), что изменение функции является особенно медленным в окрестности максимума. Начиная с 1630 года ((XIb); ср. (XI), т. II, стр. 71) Ферма в связи с задачами на максимум и минимум закладывает начало своему методу бесконечно малых, который на современном языке сводится в конечном итоге к нахождению двух первых

*) H. Wieleitner, Der «Tractatus de latitudinibus formarum» des Oresme, Bibl. Mat. (III), т. 13 (1912), стр. 115—145, особенно стр. 141.

членов (постоянный член и член первого порядка) разложения Тейлора и к записи того, что в точке экстремума второй член обращается в нуль; из этого он исходит при распространении своего метода определения касательных и даже применяет такой образ действий для нахождения точек перегиба. Если при этом принять во внимание сказанное выше по поводу кинематики, то станет ясно, что объединение трех типов задач, связанных с первой производной, произошло довольно рано. Что же касается задач, связанных со второй производной, то они появляются лишь значительно позднее и в основном в работах Гюйгенса об эволюте кривой (опубликованы в 1673 году в его *Horologium Oscillatorium* (XVIb)); к этому моменту Ньютон с его флюксиями уже обладал всеми аналитическими средствами, необходимыми для решения таких задач; и несмотря на весь геометрический талант, который вложил Гейгенс в эти задачи (и из которых гораздо позже взяла свое начало дифференциальная геометрия), они в рассматриваемый период служили разве лишь тому, чтобы подтвердить силу методов нового анализа.

Что касается интегрирования, то оно возникло у древних греков как вычисление площадей, объемов, моментов, как вычисление длины окружности и площадей сферических сегментов; XVII век прибавляет к этому спрямление кривых, вычисление площади поверхностей вращения и (с работами Гюйгенса о сложном маятнике (XVIb)) вычисление моментов инерции. Прежде всего встал вопрос об установлении связи между всеми этими задачами. Для площадей и объемов первый и огромнейший шаг в этом направлении был сделан Кавальери в его *Геометрии неделимых* (VIa). Там он высказал и пытался доказать примерно следующий принцип: если две фигуры на плоскости таковы, что при пересечении их любой прямой, параллельной заданному направлению, получаются отрезки, длины которых находятся в постоянном отношении, то площади этих фигур находятся в том же отношении; аналогичный принцип сформулирован для объемов, пересекаемых плоскостями, параллельными фиксированной плоскости, так, что полученные площади находятся в постоянном отношении. Возможно, что этот принцип был подсказан Кавальери теоремами такого типа, как теоремы Евклида (или скорее Евдокса) об отношении объемов пирамид одинаковой высоты, и что прежде чем высказать этот принцип в общем виде, он сначала удостоверился в его справедливости на большом числе примеров, взятых у Архимеда. Он «подтверждает» этот принцип рассуждением, о законности которого спрашивал Галилея в письме от 1621 года, тогда как уже в 1622 г. он пользуется им без колебаний ((III), т. XIII, стр. 81 и 86), и которое заключается в следующем. Пусть, например, имеются две области: одна из них определяется условиями $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$, а другая — условиями $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant g(x)$; отношение сумм ординат $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{ka}{n}\right)$ и $\sum\limits_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{ka}{n}\right)$ при достаточно больших n сколь угодно близко к отношению двух площадей, что для монотонных f и g было бы даже нетрудно доказать методом исчерпывания; Кавальери переходит к пределу, полагает $n = \infty$ и говорит о «сумме всех ординат» первой кривой, которая находится к аналогичной сумме для второй кривой в отношении, строго равном отношению площадей; точно так же и для объемов; и это рассуждение было в дальнейшем повсеместно принято даже такими авторами, как Ферма, которые имели наиболее ясное представление о кроющихся в нем фактах. Правда, позже многие математики, как, например, Роберваль (VIIIa) и Паскаль (XIIb), предпочитают под этими ординатами кривой, из которых составляется «сумма», понимать не отрезки прямой, как у Кавальери, а прямоугольники с одинаковой бесконечно малой высотой, что само по себе не является таким уж большим шагом вперед с точки зрения строгости (что бы ни говорил об этом Роберваль), однако, может быть, препятствует воображению слишком легко сходить с правильного пути. Во всяком случае в той мере, в какой речь идет лишь об отношениях, выражение «сумма всех ординат» кривой $y = f(x)$ или сокращенно «все ординаты» кривой в конечном счете, как, например, хорошо показано в работах Паскаля, представляет собой точный эквивалент интеграла $\int y\,dx$ Лейбница.

Из рассуждения, проведенного Кавальери, сформулированный выше принцип вытекает бесспорно и влечет за собой следствия, которые мы сформулируем в современной терминологии, условившись, что $\int f\,dx$ здесь означает просто площадь, заключенную между осью Ox и кривой $y=f(x)$. Прежде всего, площадь любой плоской фигуры, которая при пересечении ее каждой прямой $x=\text{const}$ дает отрезки, сумма длин которых есть $f(x)$, равна $\int f\,dx$; то же самое имеет место для любого объема, в котором при пересечении каждой плоскостью $x = \text{const}$ получаются фигуры с площадью, равной $f(x)$. Далее, интеграл $\int f\,dx$ линеен относительно f; так,

$$\int (f+g)\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx, \qquad \int cf\,dx = c\int f\,dx.$$

В частности, все задачи на площади и объемы сводятся к квадратурам, то есть к вычислению площадей вида $\int f\,dx$; и, что, быть может, является еще более новым и важным, это то, что две задачи, зависящие от одной и той же квадратуры, должны рассматриваться как эквивалентные, и существует способ выяснить в каждом отдельном случае, имеется ли эта зависимость. Греческие математики никогда не достигали (или, быть может, никогда не пытались достигнуть) такой степени «абстракции». Так ((VI), стр. 133), Кавальери без всякого труда «доказал», что объемы двух подобных тел находятся между собой в отношении, равном кубу отношения подобия, тогда как Архимед сформулировал то же самое заключение для квадрик вращения и их сегментов лишь в терминах своей теории этих тел ((II), т. I, стр. 258). Но для того, чтобы прийти к этому, потребовалось отбросить присущую Архимеду строгость.

Следовательно, это давало способ классифицировать задачи, по крайней мере предварительно, по степени действительной или кажущейся трудности тех квадратур, к которым они сводятся. Моделью для этого служила алгебра того времени, так как в алгебре и в алгебраических задачах, возникающих в геометрии, в отличие от древних греков, интересовавшихся лишь их решением, алгебраисты XVI и XVII веков начали переносить свое основное внимание на классификацию задач, следуя природе способов, которые могут служить для их решения, предвосхитив, таким образом, современную теорию алгебраических расширений; они не только провели предварительную классификацию задач по степеням уравнений, от которых они зависят, но и поставили различные вопросы о возможности: возможности разрешить всякое уравнение в радикалах (в которую многие больше не верили) и т. д. (см. Исторический очерк к книге II, гл. V); они были также озабочены сведением к типичной геометрической форме всех задач заданной степени. Также и в интегральном исчислении принцип Кавальери заставляет сразу же признать, что многие решенные Архимедом задачи сводятся к квадратурам $\int x^n\,dx$ для $n=1, 2, 3$; Кавальери придумал остроумный способ выполнить эту квадратуру для каких угодно значений n (способ сводится к следующему: замечая, что в силу однородности $\int\limits^{2a} x^n\,dx = c_n a^{n+1}$,

и записывая

$$\int\limits_0^{2a} x^n\,dx = \int\limits_{-a}^{a} (a+x)^n\,dx = \int\limits_0^{a} [(a+x)^n+(a-x)^n]\,dx,$$

после раскрытия скобок получаем рекуррентное соотношение для c_n) ((VIa), стр. 159 и (VIb), стр. 269—273). Но уже Ферма продвинулся гораздо дальше, доказав прежде всего (ранее 1636 года) формулу $\int\limits_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$ для целого положительного n ((XI), т. II, стр. 83) посредством формулы для сумм степеней первых N целых чисел (способ, заимствованный из квадратуры спирали Архимеда), а затем распространив ту же формулу на любое рациональное $n \neq -1$ ((XI), т. I, стр. 195—198); доказательство этого последнего результата (который он сообщил Кавальери в 1644 году) он изложил значительно позже, после прочтения работ Паскаля по интегрированию *) (XIc).

*) Примечательно, что Ферма, такой приверженец точности, в приложениях, которые он сделал из своих общих результатов, использовал аддитивность интеграла, ни слова не сказав в ее подтверждение: быть может, он основывался на неявно допускаемой кусочной монотонности изучаемых им функций, используя которую, действительно нетрудно убедиться в аддитивности при помощи метода исчерпывания? Или, возможно, он, вопреки себе, увлекся рассуждением, которым пользовался?

Эти результаты, в соединении с геометрическими соображениями, связанными с заменой переменных и интегрированием по частям, уже позволяют решить большое число задач, сводящихся к элементарным квадратурам. Кроме того, мы встречаемся с квадратурой круга и квадратурой гиперболы. Так как в то время речь шла в основном о «неопределенных интегралах», то решение этих задач в современных терминах осуществлялось соответственно при помощи обратных круговых функций и логарифма; что касается первых, то они были введены геометрически, а относительно логарифма мы видели, как он постепенно внедрялся в анализ. Эти квадратуры явились предметом большого числа работ: Григория де Сен-Винсента (IX), Гюйгенса ((XVIc) и (XVId)), Валлиса (XVa) и Дж. Грегори (XVII); первый считал, что он осуществил квадратуру круга, а последний,—что доказал трансцендентность числа π; всех их объединяет то, что в их работах развивались методы бесконечного приближения круговых и логарифмических функций, у одних — с теоретическим уклоном, у других — с вычислительным, и эти методы сразу же, благодаря Ньютону ((XIXa) и (XIXb)), Меркатору (XIII), Грегори (XVII bis) и затем Лейбницу (XXII) примкнули к общим методам разложения в ряд. Во всяком случае постепенно укреплялось убеждение в «неразрешимости» этих квадратур, то есть в неалгебраическом характере определяемых ими функций, и в то же время существовала привычка считать, что проблема решена, насколько это возможно по ее природе, когда она сведена к одной из этих «неразрешимых» квадратур. Примером тому могут служить задачи о циклоиде, решавшиеся при помощи круговых функций, и о спрямлении параболы, сведенной к квадратуре гиперболы.

Задачи спрямления, из которых мы только что указали две из числа наиболее знаменитых, имели особое значение, ибо создавали естественный геометрический переход между дифференцированием, из которого они исходят, и интегрированием, к которому они приводятся; к ним же можно отнести и задачи о площади поверхностей вращения. Древние математики рассматривали лишь случай круга и сферы. В XVII веке эти вопросы появляются довольно поздно; судя по всему, тормозом послужила непреодолимая для того времени трудность в задаче о спрямлении эллипса (который считался самой простой кривой после круга). Некоторый подход к этим задачам дают кинематические методы, позволившие Робервалю (VIIIb) и Торричелли ((VII), т. III, стр. 103—159) между 1640 и 1645 годами получить результаты, относящиеся к дуге спиралей; но на очередь дня они становятся лишь непосредственно перед 1660 годом; циклоида спрямлена Вреном в 1658 году ((XV), т. I, стр. 533—541); немного позже кривая $y^3 = ax^2$ спрямлена различными авторами ((XVd), т. I, стр. 551—553; (X bis), стр. 517—520; (XId); а затем многие авторы ((XI), т. I, стр. 199, (XVI), т. II, стр. 334) сводят спрямление параболы к квадратуре гиперболы (то есть к алгебраико-логарифмической функции). Последний пример наиболее важен, так как это частный случай общего принципа, согласно которому спрямление кривой $y = f(x)$ является не чем иным, как квадратурой кривой

$y=\sqrt{1+(f'(x))^2}$; именно из этого принципа и выводит его Эйра. Не менее интересно проследить за догадками уже немолодого Ферма в его работе о кривой $y^3=ax^2$ (XId); с кривой $y=f(x)$, имеющей дугу $s=g(x)$, он связывает кривую $y=g(x)$ и определяет касательную к последней, исходя из касательной к первой кривой (по-современному, он доказывает, что их угловые коэффициенты $f'(x)$, $g'(x)$ связаны соотношением $(g'(x))^2=1+(f'(x))^2$); это очень близко к тому, что сделал Барроу, и достаточно лишь скомбинировать этот результат с результатом Эйры (что примерно и делает Грегори в 1668 году ((XVIIbis), стр. 488—491), чтобы получить соотношение между касательными и квадратурами; однако Ферма утверждает лишь, что если для двух кривых, каждая из которых отнесена к прямоугольной системе координат, касательные в точках с одинаковыми абсциссами всегда имеют одинаковый наклон, то кривые равны, или, другими словами, что знание $f'(x)$ определяет $f(x)$ (с точностью до постоянной); он это утверждение обосновывает лишь туманным рассуждением, не имеющим никакой убедительной силы.

Менее чем десять лет спустя появились *Lectiones Geometricae* Барроу (XVIII). С самого начала (лекция I) он положил в основу, что в прямолинейном движении пути пропорциональны площадям $\int_0^t v\,dt$, заключенным между осью времени и кривой скоростей. Можно было ожидать, что из этого и из кинематического метода, уже применявшегося для определения касательных, он сделает вывод о связи между производной, понимаемой как угловой коэффициент касательной, и интегралом, понимаемым как площадь; но ничего подобного он не делает и в дальнейшем чисто геометрическим путем доказывает ((XVIII), лекция X, § 11, стр. 243), что если две кривые $y=f(x)$, $Y=F(x)$ таковы, что ординаты кривой Y пропорциональны площадям $\int_a^x y\,dx$ $\left(\text{то есть если } cF(x)=\int_a^x f(x)\,dx\right)$, то касательная к $Y=F(x)$ пересекает ось Ox в точке с абсциссой $x=T$, определенной уравнением $\frac{y}{Y}=\frac{c}{T}$; при этом доказывает совершенно точно, исходя из явно высказанного предположения о том, что $f(x)$ монотонна, и утверждает, что направление изменения функции $f(x)$ определяет направление вогнутости кривой $Y=F(x)$. Заметим, однако, что эта теорема несколько теряется среди множества других, многие из которых более интересны; у неискушенного читателя возникает соблазн видеть в ней лишь средство решать при помощи квадратуры задачу $\frac{Y}{T}=\frac{f(x)}{c}$, то есть некоторую задачу определения кривой, исходя из данных относительно ее касательной (или, как мы сказали бы, дифференциальное уравнение специального вида); и это тем более так, что приложения, которые Барроу дает этому результату, относятся прежде всего к задачам подобного типа (то есть к дифференциальным уравнениям, интегрируемым методом «разделения переменных»). Геометрический язык, которым пользуется Барроу, является причиной того, что связь между дифференцированием и интегрированием, такая ясная, когда речь идет о кинематике, в данном случае несколько затемнена.

С другой стороны, различные методы приняли форму, которая позволяла сводить одни задачи на интегрирование к другим и «решать» их или сводить к «неразрешимым» задачам, уже классифицированным. В своей наиболее простой, геометрической форме интегрирование по частям состоит в том, что площадь, заключенная между осями Ox, Oy и дугой монотонной кривой, соединяющей точку $(a,\ 0)$ оси Ox с точкой $(0,\ b)$ оси Oy, записывается в виде $\int\limits_0^a y\,dx = \int\limits_0^b x\,dy$; эта формула часто используется в неявном виде. У Паскаля ((XIIc), стр. 287—288) появляется следующее, уже гораздо более скрытое обобщение: пусть $f(x)$ удовлетворяет сформулированным выше условиям, пусть $g(x)$ — неотрицательная функция, и пусть $G(x) = \int\limits_0^x g(x)\,dx$; тогда имеет место формула

$$\int\limits_0^a y g(x) dx = \int\limits_0^b G(x)\,dy,$$

которую он остроумно доказывает, вычисляя двумя различными способами объем тела $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$, $0 \leqslant z \leqslant g(x)$; частный случай $g(x) = x^n$, $G(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ играет важную роль, причем одновременно и у Паскаля (цит. соч., стр. 289—291), и у Ферма ((XI), т. I, стр. 271); последний (работа которого носит знаменательное название: «*Трансмутация и исправление уравнений кривых и их различные приложения к сравнению между собой криволинейных площадей и сравнению их с прямолинейными площадями...*») его не доказывает, без сомнения, потому, что он уверен в бесполезности повторять то, что Паскаль только что опубликовал. Эти теоремы о «трансмутации», в которых мы усмотрели бы сочетание интегрирования по частям с заменой переменных, в какой-то мере заменяют эту последнюю, которая была введена значительно позднее; и действительно, образу мышления того времени, еще слишком геометрическому и весьма мало аналитическому, несвойственно было позволить употребление других переменных, кроме тех, которые определяют фигуру, то есть кроме той или другой из координат (часто это были полярные координаты) и дуги кривой. Точно так же и у Паскаля (XIId) мы находим результаты, которые в современных обозначениях, если положить $x = \cos t$, $y = \sin t$, для частного вида функций имеют вид

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,y\,dt,$$

и у Грегори ((XVIIbis), стр. 480) для кривой $y = f(x)$ и ее дуги s, $\int y\,ds = \int z\,dx$, где $z = y\sqrt{1+y'^2}$. И только в 1669 году, как мы знаем, Барроу был в состоянии дать общую теорему о замене переменной ((XVIII), стр. 298—299); ее формулировка, как всегда геометрическая, сводится к следующему: пусть x и y связаны монотонным соотношением, и пусть p — наклон графика этого соотношения в точке (x, y); тогда, если функции $f(x)$ и $g(y)$ таковы, что $\frac{f(x)}{g(y)} = p$ для любой пары соответствующих значений (x, y), то площади $\int f(x)\,dx$ и $\int g(y)\,dy$, взятые в соответствующих пределах, равны; и обратно, если эти площади всегда равны (f и g предполагаются неявно имеющими постоянный знак), то $p = \frac{f(x)}{g(y)}$; обратное предложение, естественно, даст возможность применить теорему к решению дифференциальных уравнений (методом «разделения переменных»). Однако теорема была помещена Барроу лишь в приложении (лекция XII, прил. III, теор. IV), где, сделав наблюдение, что многие из его предыдущих результатов являются лишь ее частными случаями, он сожалеет о том, что открыл ее слишком поздно для того, чтобы лучше ее использовать.

Итак, к 1670 году положение дел таково. Известны единообразные приемы, при помощи которых можно решать задачи, связанные с первой производной, и Гюйгенс подошел вплотную к разработке геометрических вопросов, связанных со второй производной. Известно, как сводить задачи на интегрирование к квадратурам; имеются различные приемы геометрического характера для того, чтобы сводить одни квадратуры к другим в том случае, если они неудачны, и при этом свободно обращаются к круговым и логарифмическим функциям; осознана связь между дифференцированием и интегрированием; началось изучение «метода, обратного касательным» — название, данное в то время задачам, сводящимся к дифференциальным уравнениям первого порядка. Сенсационное открытие Меркатора — ряд

$\log(1+x) = -\sum_{1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n}$ — только что открыло совсем новые перспективы для применения рядов, в основном степенных, к задачам, называемым «неразрешимыми». Зато ряды математиков сильно поредели: Барроу сменил кафедру профессора на кафедру проповедника, и если не считать Гюйгенса (математическая сторона творчества которого уже позади: он получил все основные результаты своего *Horologium Oscillatorium*, которые собирается окончательно изложить), то активными являются лишь Ньютон в Кембридже и Грегори, работающий в одиночестве в Абердине, да к ним еще вскоре с рвением молодого энтузиаста подключится Лейбниц. Все трое: Ньютон уже начиная с 1665 года, Грегори — после опубликования открытия Меркатора в 1668 году, а Лейбниц — примерно с 1673 года —

занимаются главным образом злободневной темой — степенными рядами. Однако с точки зрения классификации задач основное действие новых методов состоит в сглаживании между ними всякого различия; и действительно, Ньютон, более аналитик, чем алгебраист, уверенно сообщает Лейбницу в 1676 году ((XXII), стр. 224), что он умеет решать все дифференциальные уравнения *); на это Лейбниц отвечает ((XXII), стр. 248—249), что, напротив, речь идет о том, чтобы каждый раз, когда это возможно, получать конечное решение, «допуская квадратуры», а также о том, чтобы знать, всякая ли квадратура может быть сведена к квадратурам круга и гиперболы, что было установлено в большинстве уже изученных случаев; по этому поводу он напоминает, что Грегори считал (и, как мы теперь знаем, не без оснований) спрямление эллипса и гиперболы неприводимым к квадратурам круга и гиперболы; и Лейбниц спрашивает, до какой степени метод рядов в том виде, как его использует Ньютон, может давать ответ на эти вопросы. Ньютон со своей стороны сообщает, что он располагает критерием, который он не указывает, для того, чтобы решить, вероятно путем рассмотрения рядов, вопрос о «возможности» некоторых квадратур (в конечном виде) и приводит в качестве примера (очень интересный) ряд для интеграла $\int x^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx$.

Наблюдается громадный сдвиг, происшедший менее чем за десять лет: вопросы классификации в вышеуказанной переписке ставятся уже в терминах совсем современных; если один из этих вопросов, поднятый Лейбницем, решен в XIX веке при помощи теории абелевых интегралов, то другой вопрос — о возможности сведения заданного дифференциального уравнения к квадратурам — все еще открыт, несмотря на важные работы последнего времени. Это происходит оттого, что уже Ньютон и Лейбниц, независимо друг от друга, сводили к алгоритму основные операции исчисления бесконечно малых; достаточно в обозначениях, служивших одному из них, записать задачу о квадратуре или о дифференциальном уравнении, чтобы сразу же выявилась ее алгебраическая структура, освобожденная от ее геометрической оболочки; методы «трансмутации» тоже записываются в простых аналитических обозначениях; проблемы классификации ставятся точно. В смысле математики XVII век закончился.

E) *Интерполирование и исчисление конечных разностей.* Эта тема (к которой мы причисляем и изучение *биномиальных коэффициентов*) возникает рано и разрабатывается на протяжении всего века одновременно в теоретическом и практическом направлениях. Одной из крупных задач эпохи была задача составления тригонометрических, логарифмических, навигационных таблиц, сделавшихся необходимыми из-за быстрого развития географии,

*) При этом обмене письмами, происходящем не непосредственно между ними, а официально, через секретаря Королевского общества, Ньютон делает «первый ход», формулируя свой метод в виде анаграммы 5*accdae* 10*effh* 12*i*... *rrrssssttuu*, в которой содержится метод решения при помощи степенного ряда с неопределенными коэффициентами ((XXII), стр. 224).

навигации, теоретической и практической астрономии, физики, небесной механики; и многие из наиболее крупных математиков, начиная от Кеплера и кончая Гюйгенсом и Ньютоном, участвовали в этом либо непосредственно, либо при помощи теоретических изысканий наиболее эффективных аппроксимативных методов.

Одна из первых задач, возникающих при использовании и даже при составлении таблиц,— это задача интерполирования; и по мере того, как повышается точность вычислений, в XVII веке замечают, что античный способ линейной интерполяции теряет свою ценность, как только первые разности (разности между последовательными значениями, фигурирующими в таблицах) заметно отклоняются от постоянных; так, например, у Бригга *) мы находим употребление разностей высших порядков, и даже довольно высоких, при вычислении логарифмов. Позже Ньютон ((XIXd) и (XX), книга III, лемма 5) **) и Грегори ((XVII bis), стр. 119—120), независимо друг от друга, продолжают исследования по интерполяции и по степенным рядам; впрочем, оба они различными путями приходят, с одной стороны, к интерполяционной формуле для многочленов, называемой «формулой Ньютона», а с другой стороны, к биномиальному ряду ((XVII bis), стр. 131; (XXII), стр. 180) и к основным разложениям в степенной ряд классического анализа ((XVII bis), (XIXa и d) и (XXII), стр. 179—192 и 203—225); почти не возникает сомнения в том, что эти два направления исследований не влияли друг на друга и не были тесно связаны в уме Ньютона с открытием основ исчисления бесконечно малых. У Грегори, как и у Ньютона, чувствуется большой интерес к практическим вычислениям, к составлению и использованию таблиц, к вычислению рядов и интегралов; в частности, хотя мы не находим у них ни одного строгого доказательства сходимости вроде вышеуказанного доказательства лорда Броункера, оба они постоянно упоминают о сходимости своих рядов с точки зрения их практической пригодности к вычислениям. Именно Ньютон в ответ на поставленную Коллинзом прикладную задачу ***) применяет к приближенному вычислению суммы $\sum\limits_{p=1}^{N}\frac{1}{n+p}$ для больших значений N метод суммирования, называемый методом Эйлера — Маклорена.

Довольно рано также встречается вычисление значений функции по ее разностям, употребляемое в качестве практического метода интегрирования и даже, можно было бы сказать, интегрирования дифференциального уравнения. Так, Райт в 1599 году, решая в связи с навигационными таблицами задачу, которая в современных обозначениях имела бы вид $\frac{dx}{dt}=\sec t=\frac{1}{\cos t}$,

*) H. Briggs, Arithmetica logarithmica, London, 1624, гл. XIII.

**) См. также D. C. Fraser, Newtons Interpolation Formulas, Journ. Inst. Actuaries, т. 51 (1918), стр. 77—106, 211—232, и т. 58 (1927), стр. 53—95 (статьи, перепечатанные в виде брошюры, Лондон (без даты)).

***) Ср. St. P. Rigaud, Correspondence of scientific men..., Oxford, 1841, т. II, стр. 309—310.

производит сложение значений функции $\sec t$ для последовательных интервалов дуги в одну секунду *) и получает, естественно, почти в точности таблицу значений функции $\log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2}\right)$; и это совпадение, замеченное уже при вычислении первых таблиц для $\log \operatorname{tg} t$, останется необъясненным вплоть до интегрирования функции $\sec t$ Грегори в 1668 году ((XVIIc) и (XVIIbis), стр. 7 и 463).

Однако эти вопросы имеют и чисто теоретическую и даже арифметическую сторону. Условимся обозначать через $\Delta^r x_n$ последовательности, состоящие из последовательных разностей некоторой последовательности (x_n) $n \in \mathbf{N}$, определенных по индукции посредством соотношений $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$, $\Delta^r x_n = \Delta(\Delta^{r-1} x_n)$, а через S^r условимся обозначать операцию, обратную к Δ и ее итерациям, полагая, таким образом, $y_n = Sx_n$, если $y_0 = 0$, $\Delta y_n = x_n$ и $S^r x_n = S\ (S^{r-1} x_n)$; тогда $S^r x_n = \sum\limits_{n-r}^{p=0} \binom{n-p-1}{r-1} x_p$; в частности, если $x_n = 1$ для любого n, то $Sx_n = n$, последовательности $S^2 x_n$ и $S^3 x_n$ являются последовательностями «треугольных» и «пирамидальных» чисел, уже изучавшихся греческими арифметиками, а в общем случае имеем $S^r x_n = \binom{n}{r}$ для $n \geqslant r$ (и $S^r x_n = 0$ для $n < r$); таким образом, эти последовательности появились во всяком случае не позже XVI века; они возникли в комбинаторных задачах, которые как сами по себе, так и в связи с вероятностями играли довольно большую роль в математике XVII века, например у Ферма и Паскаля, а затем у Лейбница. Они встречаются также в выражении суммы для m-х степеней первых N натуральных чисел, вычисление которой, как мы уже видели, служит основой для нахождения интеграла $\int x^m\, dx$ при целом m в первом методе Ферма ((XI), т. II, стр. 83). Точно так же поступает и Валлис в 1655 году в своей *Arithmetica Infinitorum* (XVa), не зная (неопубликованных) работ Ферма и, по его словам, не зная о методе неделимых ничего, кроме того, что изложено в лекциях Торричелли; правда, Валлис, стремясь к цели, не задерживается на строгом исследовании: как только результат получается для первых m целых чисел, он полагает его верным «по индукции» для любого целого m, корректно переходит от него к $m = \frac{1}{n}$ для целых n, а затем при помощи «индукции», еще более упрощенной, чем первая, к произвольному рациональному m. Но его работы интересны и оригинальны тем, что он от этого постепенно поднимается к изучению «эйлерова» интеграла $I(m, n) = \int\limits_0^1 (1 - x^{\frac{1}{m}})^n\, dx$ (значение которого для m

*) Ed. Wright, Table of Latitudes, 1599 (ср. Napier Memorial Volume, 1914, стр. 97).

и $n > 0$ равно $\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+1)}$) и других подобных интегралов, составляет для целых m и n таблицу значений выражения $\frac{1}{I(m, n)}$, которая оказывается не чем иным, как таблицей целых чисел $\binom{m+n}{n}$, и при помощи методов, почти тождественных тем, которые в настоящее время служат для изложения теории гамма-функции, приходит к бесконечному произведению для $I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4} = \left(\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right)^2$; впрочем, его метод нетрудно сделать корректным при помощи интегрирования по частям и очень простых замен переменных, рассматривая интеграл $I(m, n)$ для всех вещественных значений m и n, о чем он едва ли мог помышлять, но что анализ Ньютона сразу сделал возможным. Во всяком случае именно осуществленное Валлисом «интерполирование» целых $\binom{m+n}{n}$ на нецелые значения m (точнее, на значения вида $n = \frac{p}{2}$, где p — целое нечетное) служило отправной точкой начинающему Ньютону ((XXII), стр. 204—206) и привело его сначала путем изучения частного случая $(1 - x^2)^{\frac{p}{2}}$ к биномиальному ряду, а отсюда к введению функции x^a (так же и обозначенной) для любого действительного a и к дифференцированию x^a посредством биномиального ряда; при этом он не особенно старается давать доказательства и даже строгие определения; далее, замечательным его открытием был вывод $\int x^a\,dx$ при $a \neq -1$ из производной для x^a ((XIXa) и (XXII), стр. 225). Впрочем, хотя он быстро овладел многими более общими методами разложения в степенной ряд, такими, как метод, называемый многоугольником Ньютона (для алгебраических функций) ((XXII), стр. 221), и метод неопределенных коэффициентов, он много раз с явным предпочтением обращается к биномиальному ряду и его обобщениям; и именно из него он, по-видимому, получил разложение интеграла $\int x^\alpha (1+x)^\beta\,dx$, о котором говорилось выше ((XXII), стр. 209).

Тем временем на континенте эволюция идей протекает совсем другим путем, гораздо более абстрактным. Паскаль, наряду с Ферма, занимается изучением биномиальных коэффициентов (из которых он составляет то, что он называет «арифметическим треугольником») и применением их к исчислению вероятностей и к исчислению конечных разностей; когда он переходит к интегрированию, он и туда вводит те же идеи. Как и его предшественники, при применении метода неделимых он понимает интеграл $F(x) = \int_0^x f(x)\,dx$

как отношение «суммы всех ординат кривой»

$$S\left(f\left(\frac{n}{N}\right)\right)=\sum_{0\leqslant p<Nx} f\left(\frac{p}{N}\right)$$

к «сумме единиц» $N=\sum\limits_{0\leqslant p<N} 1$ для $N=\infty$ ((XIIb), стр. 352—355) (когда же он от этого метода переходит к корректному методу исчерпывания, то он понимает вышеуказанный интеграл как предел этого отношения при неограниченно возрастающем N). Но занимаясь проблемами моментов, он обнаруживает, что когда речь идет о дискретных массах y_i, удаленных друг от друга на равные расстояния, то вычисление общей массы сводится к операции Sy_n, определенной выше, а вычисление момента — к операции S^2y_n; по аналогии он повторяет операцию $\int$, чтобы составить то, что он называет «треугольными суммами координат», и значит, на нашем языке, пределы сумм $N^{-2}S^2\left(f\left(\frac{n}{N}\right)\right)$, то есть интегралы $F_2(x)=\int\limits_0^x F(x)\,dx$; новая итерация дает ему «пирамидальные суммы» $F_3(x)=\int\limits_0^x F_2(x)\,dx$, то есть пределы для $N^{-3}S^3\left(f\left(\frac{n}{N}\right)\right)$; при этом контекст достаточно ясно свидетельствует о том, что если он останавливается на этом шаге, то вовсе не из-за недостатка общности идей или метода, а лишь потому, что он собирается пользоваться лишь этими суммами, систематическое употребление которых лежит в основе значительной части его результатов и для которых он сразу же доказывает свойства, в наших обозначениях имеющие вид

$$F_2(x)=\int\limits_0^x (x-u)\,f(u)\,du, \qquad F_3(x)=\frac{1}{2}\int\limits_0^x (x-u)^2 f(u)\,du$$

((XIIb), стр. 361—367); все это изложено им без единой формулы, но таким прозрачным языком и настолько точно, что все сразу же можно переложить на формулы, как это только что было сделано. У Паскаля, как и у его предшественников, но только гораздо более четко и систематически, выбор независимой переменной (которая всегда является либо одной из координат, либо дугой кривой) неявно содержится в условии, фиксирующем точки разбиения как равноотстоящие (хотя и «бесконечно близкие») точки интервала интегрирования; эти точки могут лежать либо на оси Ox, либо на оси Oy, либо на дуге кривой, и Паскаль заботится о том, чтобы в этом вопросе не оставалось никакой неоднозначности ((XIIb), стр. 368—369). Когда он производит замену переменных, то делает это, исходя из принципа, суть которого сводится к тому, что площадь $\int f(x)\,dx$ может быть записана в виде суммы $S\,(f(x_i)\,\Delta x_i)$ для любого разбиения интервала интегрирования на «бесконечно малые» интервалы, как равные, так и не равные между собой ((XIId), стр. 61—68).

Как мы видим, это уже совсем близко к тому, что есть у Лейбница. Можно сказать, что, по счастливой случайности, Лейбниц, когда он захотел войти в курс дел современных ему математиков, встретил Гюйгенса, который тотчас же дал ему работы Паскаля, попавшие к нему ((XXII), стр. 407—408); благодаря своим размышлениям, относящимся к комбинаторному анализу, Лейбниц был частично подготовлен к чтению этих работ. и мы знаем, что он их глубоко изучил и что это отразилось на его творчестве. В 1675 году мы застаем его за приданием вышеуказанной теореме Паскаля вида omn $(x\omega) = x$ omn ω — omn (omn ω), где omn ω есть сокращенное обозначение интеграла от ω, взятого в пределах от 0 до x, которое Лейбниц несколько дней спустя заменяет $\int \omega$ (начальная буква выражения «summa omnium ω») одновременно с введением обозначения d для бесконечно малой «разности», или, как он вскоре будет говорить, дифференциала ((XXII), стр. 147—167). Понимая эти «разности» как величины, сравнимые между собой, но не сравнимые с конечными величинами, он к тому же принимает наиболее часто встречающийся как в явном, так и в неявном виде дифференциал dx независимой переменной x за единицу, $dx = 1$ (что приводит к отождествлению дифференциала dy с производной $\left.\frac{dy}{dx}\right)$, и вначале опускает его в своем обозначении интеграла, который, следовательно, появился сначала как $\int y$, а не как $\int y\,dx$; однако он недолго медлит с введением последнего обозначения и уже систематически придерживается его после того, как замечает его инвариантность относительно выбора независимой переменной, что избавляет от необходимости постоянно излагать принцип этого выбора *); он выражает известное удовлетворение, когда приступает к изучению работ Барроу, которые до тех пор оставлял без внимания, констатируя, что общая теорема о замене переменной, которой Барроу придавал такое большое значение, сразу вытекает из одних его обозначений ((XXII), стр. 42). К тому же все эти вопросы стоят очень близко к исчислению конечных разностей, из которого его дифференциальное исчисление вытекает при помощи перехода к пределу, который ему, разумеется, было бы очень трудно строго обосновать; поэтому он произвольно настаивает на том, что его принципы

---

*) «Предупреждаю, что отбрасывать dx нельзя... часто встречающаяся ошибка, которая мешает двигаться вперед из-за того, что тем самым лишает эти неделимые, каковой является dx, их общности..., дающей бесчисленные трансфигурации и равносильности фигур» ((XXIb), стр. 233).

применимы одинаково как к одному, так и к другому исчислению. Он, например, определенно ссылается на Паскаля, когда в своей переписке с Иоганном Бернулли ((XXI), т. III, стр. 156), возвращаясь к своим первым исследованиям, приводит формулу, которая представляет собой частный случай формулы Ньютона, и выводит из нее путем «перехода к пределу» формулу $y = \sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{d^n y}{dx^n} \cdot \frac{x^n}{n!}$ (где y — функция, обращающаяся в нуль для $x=0$, а $\frac{d^n y}{dx^n}$ — ее производные для значения x переменной величины), эквивалентную аналогичной формуле, которую ему сообщил Бернулли ((XXI), т. III, стр. 150 и (XXIV), т. I, стр. 125—128) и которую тот доказал при помощи последовательного интегрирования по частям. Эта формула, как мы видим, очень близка к формуле Тейлора; и в 1715 году Тейлор воспроизводит именно это рассуждение Лейбница о переходе к пределу на основе исчисления разностей для того, чтобы получить «свой» ряд *), к тому же не извлекая из него большой пользы.

F) В описанной выше эволюции уже замечается постепенное нарастание *алгебраизации* анализа бесконечно малых, то есть сведение его к *операционному исчислению*, наделенному системой единых обозначений алгебраического характера. Как много раз с полной определенностью указывал Лейбниц ((XXIb), стр. 230—233), речь шла о том, чтобы сделать для нового анализа то, что сделал Виета для теории уравнений, а Декарт для геометрии. Чтобы понять необходимость этого, достаточно прочитать лишь несколько страниц у Барроу; ни на один момент нельзя обойтись без того, чтобы не иметь перед глазами довольно сложную фигуру, предварительно кропотливо описанную; на 100 страниц (лекции V — XII), которые и составляют основное содержание работы, приходится не менее 180 фигур.

Правда, вопрос об алгебраизации едва ли мог возникнуть до выявления какого-нибудь единства среди множества геометрических образов. Однако уже Григорий де Сен-Винсент (IX) вводит (под названием «*ductus plani in planum*») некоторое подобие закона композиции, который сводится к си-

---

*) B. Taylor, Methodus Incrementorum directa et inversa, London, 1715. Что касается исчисления конечных разностей, то Тейлор, естественно, мог опираться на результаты Ньютона, содержащиеся в его известной лемме из *Principia* ((XX), книга III, лемма 5) и опубликованной в 1711 году (XIXd) в более полном виде. Что же касается перехода к пределу, то он представляется типично лейбницевским; и было бы трудно поверить в оригинальность Тейлора в этом пункте, даже если бы мы в любую эпоху не имели многочисленные примеры учеников, игнорирующих чужие работы, за исключением работ своего учителя и покровителя. Тейлор не ссылается ни на Лейбница, ни на Бернулли; но спор Ньютона с Лейбницем был в разгаре, Тейлор был секретарем Королевского общества, а сэр Исаак — его всемогущим президентом.

стематическому употреблению интегралов $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$, рассматриваемых как объемы тел $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$, $0 \leqslant z \leqslant g(x)$; но он далек от того, чтобы получать отсюда следствия, которые, как мы видели, позже вывел Паскаль при изучении того же тела. Валлис в 1655 году и Паскаль в 1658 году независимо друг от друга проводят рассуждения, носящие алгебраический характер и содержащие без единой формулы изложение утверждений, которые можно сразу перевести на язык формул интегрального исчисления, как только станет понятна суть дела. Язык Паскаля особенно ясен и точен; и если непонятно, почему он отказался от употребления алгебраических обозначений не только Декарта, но даже Виета, то можно лишь восхищаться той силой, которую он смог проявить благодаря непревзойденному мастерству своего языка.

Однако по прошествии нескольких лет картина меняется. Ньютону первому приходит идея окончательной замены всех операций современного анализа бесконечно малых, носящих геометрический характер, единственной аналитической операцией — дифференцированием и решением обратной задачи, операцией, которую, разумеется, метод степенных рядов позволял осуществлять с величайшей легкостью. Начиная, как мы видели, свой метод с введения универсального «временно́го» параметра, он называет «флюентами» переменные величины, являющиеся функциями этого параметра, а «флюксиями» — их производные. Он не придавал особого значения обозначениям, и позже его сторонники пытались представить как преимущество отсутствие систематического обозначения; тем не менее у него довольно рано для собственного употребления входит в обычай отмечать флюксии посредством точки, то есть $\frac{dx}{dt}$ через $\dot{x}$, а $\frac{d^2x}{dt^2}$ — через $\ddot{x}$, и т. д. Что же касается интегрирования, то, по-видимому, Ньютон, как и Барроу, всегда рассматривал его лишь как задачу (найти флюенту, зная флюксию, то есть решить уравнение $\dot{x} = f(t)$), а не как операцию; поэтому у него нет ни названия для интеграла, ни, кажется, постоянного обозначения (за исключением нескольких случаев квадрата $\boxed{f(t)}$ или $\square\, f(t)$ для $\int f(t)\,dt$). Не потому ли, что он считал недопустимым давать название и символ тому, что определяется не однозначно, а лишь с точностью до аддитивной постоянной? Отсутствие первоисточника не позволяет ответить на этот вопрос.

Насколько Ньютону присуща эмпиричность, конкретность и осмотрительность даже в его наиболее смелых высказываниях, настолько Лейбницу свойственна склонность к систематике, обобщению, смелому, подчас даже дерзкому новаторству. С юности он вынашивал идею «характеристики», или универсального языка символов, который в совокупности человеческой мысли должен быть тем же, чем алгебраическое обозначение является в алгебре, — языка, в котором всякое название или знак служил бы ключом для всех свойств обозначаемого понятия и который при правильном употреблении мог бы даже служить толчком для корректного рассуждения. Такой проект легко назвать несбыточным; однако не случайно именно его автор должен был вскоре обозреть и выделить основные понятия исчисления бесконечно малых и наделить их почти окончательными обозначениями. Выше уже шла речь о возникновении последних и о той тщательности, с которой Лейбниц, видимо, сознающий свою роль, постепенно изменяет их до тех пор, пока у него не появляется уверенность в простоте и полной инвариантности, которых он добивался (XXIa и b). Здесь важно отметить, что при введении значков $\int$ и d для интеграла и дифференциала (не зная еще ничего об идеях Ньютона) он ясно понимает их как взаимно обратные операции. Правда, поступая таким образом, он не может избежать присущей неопределенному интегралу неоднозначности, которая является слабым местом его системы и которую он умело обходит, так же как и его последователи. Но поразительно, что сразу после введения новых символов Лейбниц, занятый формулированием правил их употребления, спрашивает себя, верно ли, что $d(xy) = dx\,dy$ ((XXII), стр. 165—166), и отвечает на этот вопрос отрицательно, приходя постепенно к верному правилу (XXIa), которое он позже обобщит в своей знаменитой формуле для $d^n(xy)$ ((XXI), т. III, стр. 175). Разумеется, в тот момент, когда Лейбниц действует так осторожно, Ньютон уже в течение десяти лет знает, что $z = xy$ влечет соотношение $\dot{z} = \dot{x}y + x\dot{y}$, однако он никогда не дает труда говорить об этом, видя здесь лишь не заслуживающий упоминания частный случай своего правила для дифференцирования соотношения $F(x, y, z) = 0$ между флюентами. Напротив, основное стремление Лейбница состоит не в том, чтобы заставить свои методы служить для решения таких конкретных задач, и не в том, чтобы вывести из них строгие и неуязвимые законы, а прежде всего в том, чтобы создать алгоритм, формально управляемый несколькими простыми правилами. Именно в этом смысле он улучшает алгебраическое обозначение путем введения скобок, постепенно вводит обозначения $\log x$ или lx для логарифма *) и настаивает на «экспоненциальном исчислении», то есть на систематизации показательных функций a^x, x^x, x^y, где показатель есть переменная величина. А главное — в то время как Ньютон вводит флюксии высшего порядка лишь в той мере, в какой они необходимы в каждом конкретном случае, Лейбниц сразу ориентируется на создание «операционного исчисления» путем итерации d и $\int$; постепенно осознав ясно аналогию между перемножением чисел и композицией операторов в своем исчислении, он с удачной смелостью вводит обозначение показателя для записи итераций d, записывая, таким образом, n-ю итерацию через d^n ((XXII), стр. 595,

---

*) Однако у него нет обозначения ни для тригонометрических функций, ни (за отсутствием символа для e) для «числа, логарифм которого равен x».

и 601 *) и (XXI), т. V, стр. 221 и 378) и даже d^{-n}, d^{-1} для $\int$ и его итераций ((XXI), т. III, стр. 167); он пытается даже придать смысл знаку d^{α} при любом действительном α ((XXI), т. II, стр. 301—302 и т. III, стр. 228).

Нельзя сказать, что Лейбниц не интересуется также применениями своего исчисления, прекрасно понимая (как ему часто повторял Гюйгенс ((XXII), стр. 599)), что они являются пробным камнем; однако у него не хватает терпения для их углубления, и здесь также он всюду ищет возможность сформулировать новые общие правила. Так, в 1686 году (XXIc) он рассматривает кривизну кривых и соприкасающиеся окружности, чтобы в 1692 году (XXId) перейти к общим законам касания плоских кривых **); в 1692 году (XXIe) и в 1694 году (XXIf) он закладывает основы теории огибающих; соревнуясь с Иоганном Бернулли, он в 1702 и в 1703 годах осуществляет интегрирование рациональных дробей путем разложения их на простые дроби, но сначала формально и совершенно не отдавая себе отчета в обстоятельствах, сопровождающих наличие линейных комплексных множителей в знаменателе (XXIg и h). Так, однажды, в августе 1697 года, размышляя в экипаже над вопросами вариационного исчисления, он приходит к идее правила дифференцирования по параметру под знаком $\int$ и, в восторге, сразу же сообщает это правило Бернулли ((XXI), т. III, стр. 449—454). Однако в это время основные принципы его исчисления уже давно были усвоены и стали расширяться его применения: алгебраизация анализа бесконечно малых была завершена.

G) Понятие *функции* вводится и уточняется множеством способов на протяжении всего XVII века. Вся кинематика зиждется на интуитивной и в какой-то мере экспериментальной идее величин, меняющихся со временем, то есть функций времени, и мы уже видели, как это привело к функции от параметра в том виде, как она появилась у Барроу, или под названием флюенты, у Ньютона. Понятие «произвольной кривой» встречается часто, но редко уточняется; возможно потому, что нередко эта кривая возникала кинематически или во всяком случае экспериментально и не счита-

---

*) «...Это почти то же самое, как если бы вместо корней и степеней мы захотели подставлять всегда буквы и вместо xx или x^3 писать m или n, объяснив сначала, что сие должно означать степени величины x. Посудите сами, сударь, сколь сие было бы неудобно. То же самое имеет место и для dx и ddx, и разности в не меньшей мере присущи неопределенным величинам в их взаимосвязи, чем степени — одной отдельно взятой величине. Таким образом, мне кажется, что естественнее всего обозначать их так, чтобы они сразу давали возможность узнавать величину, к которой они относятся».

**) В этом он прежде всего совершает странную ошибку, полагая, что «cercle qui baise» (соприкасающаяся окружность) имеет в точке соприкосновения четыре общие точки с кривой, и лишь с трудом соглашается впоследствии с возражением братьев Бернулли по этому поводу ((XXI), т. III, стр. 187, 188, 201, 202 и 207).

лось необходимым, чтобы кривая была определена геометрически или аналитически с тем, чтобы она могла служить объектом исследований; в частности, так происходит (по причинам, которые мы сегодня в состоянии лучше понять), когда речь идет об интегрировании, например, у Кавальери, Паскаля и Барроу; последний, исследуя кривую, определенную соотношениями $x = ct$, $y = f(t)$, в предположении, что $\frac{dy}{dt}$ возрастает, даже определенно утверждает, что «*несущественно*», возрастает ли $\frac{dy}{dt}$ «*правильно, следуя некоторому закону, или произвольно*» ((XVIII), стр. 191), то есть, в нашей терминологии, допускает или не допускает эта величина аналитическое определение. К сожалению, эта глубокая и ясная идея, которая, надлежащим образом уточненная, возродится в XIX веке, в то время не могла устоять против созданной Декартом путаницы, когда он сначала удалил из «геометрии» все кривые, не поддающиеся точному аналитическому определению, а затем в качестве допустимых приемов для построения такого определения оставил лишь алгебраические операции. Правда, в этом последнем пункте большинство современников не последовало Декарту; постепенно, и часто трудноуловимым обходным путем, получают право на существование различные трансцендентные операторы, логарифмы, показательная функция, тригонометрические функции, квадратуры, решение дифференциальных уравнений, переход к пределу, суммирование рядов, и относительно каждого пункта нелегко точно указать момент, когда был сделан шаг вперед; впрочем, первый шаг вперед нередко сопровождался шагом назад. Например, для логарифма важнейшими этапами необходимо считать появление логарифмической кривой ($y = a^x$ или $y = \log x$ в зависимости от выбора осей) и логарифмической спирали, квадратуры гиперболы, разложение $\log(1 + x)$ в ряд и даже введение символа $\log x$ или lx. Что касается тригонометрических функций, то, хотя они в некотором смысле восходят к античной эпохе, интересно обратить внимание на то, что синусоида впервые была определена не при помощи уравнения $y = \sin x$, а появилась у Роберваля ((VIIIa), стр. 63—65) как «спутник рулеты» (по существу, речь идет о кривой $y = R\left(1 - \cos\frac{x}{R}\right)$), то есть как вспомогательная кривая, определение которой вытекает из определения циклоиды. Общее же понятие аналитического выражения впервые встречается у Грегори, который определил его в 1667 году ((XVI bis), стр. 413) как величину, получающуюся из других величин путем последовательных алгебраических операций «*или любой другой вообразимой операции*»; и он пробует уточнить это понятие в своем предисловии ((XVI bis), стр. 408—409), объясняя необходимость присоединить к пяти алгебраическим операциям *) шестую, которая в конеч-

*) Речь идет о четырех рациональных операциях и об извлечении корней любой степени; Грегори никогда не переставал верить в возможность решения в радикалах уравнений любых степеней.

ном итоге является не чем иным, как переходом к пределу. Однако эти интересные соображения были вскоре забыты, захлестнутые потоком разложений в ряд, открытых самим Грегори, Ньютоном и другими; и чрезвычайный успех этого последнего метода на длительное время смешал функции, допускающие аналитическое определение, с функциями, разложимыми в степенной ряд.

Что касается Лейбница, то он, по-видимому, придерживается точки зрения Декарта, расширенной явным добавлением квадратур и неявным добавлением других операций, обычных для анализа той эпохи, таких, как суммирование степенных рядов и решение дифференциальных уравнений. Точно так же Иоганн Бернулли, когда он рассматривает произвольную функцию от x, вводит ее как «*величину, получающуюся произвольным путем из x и из постоянных*» ((XXI), т. II, стр. 150), иногда уточняя, что речь идет о величине, образованной «*алгебраическим или трансцендентным путем*» ((XXI), т. II, стр. 324); в 1698 году он изъявляет свое согласие с Лейбницем в том, чтобы дать этой величине название «функции от x» ((XXI), т. III, стр. 507—510 и 525, 526) *). Уже Лейбниц ввел в употребление слова «постоянная», «переменная», «параметр» и уточнил в связи с огибающими понятие семейства кривых, зависящих от одного или нескольких параметров (XXIe). Вопросы обозначений уточняются также в его переписке с Иоганном Бернулли: последний свободно пользуется обозначением X или ξ для произвольной функции от x ((XXI), т. III, стр. 531); Лейбниц одобряет это, но предлагает еще обозначения x^1, x^2 для того, что мы обозначили бы через $f_1(x)$, $f_2(x)$; он предлагает также производную $\frac{dz}{dx}$ функции z от x обозначать через $\mathrm{d}\, z$ (в отличие от dz, обозначающего дифференциал), тогда как Бернулли пишет Δz ((XXI), т. III, стр. 537 и 526).

Итак, вместе с веком пришла к концу и героическая эпоха. Новое исчисление, с его понятиями и с его обозначениями, сложилось в том виде, который придал ему Лейбниц. Его первые последователи, Яков и Иоганн Бернулли, соревнуются со своим учителем в открытиях, проникая в те богатые области, к которым он проложил им дорогу. Первый учебник по дифференциальному и интегральному исчислению был написан в 1691—1692 годах

---

*) До этого, в частности, уже в рукописи 1673 года, Лейбниц пользовался этим словом как сокращением для обозначения величины, «осуществляющей ту или иную функцию» относительно кривой, например длину касательной или нормали (ограниченными кривой и осью Ox) либо поднормали, подкасательной и т. д., и значит, в конечном итоге функции переменной точки на кривой в дифференциально геометрическом определении. В той же рукописи 1673 года кривая предполагается определенной соотношением между x и y, «*заданным одним уравнением*», но Лейбниц добавляет, что «*неважно, будет ли кривая геометрической или нет*» (то есть, на нашем языке, алгебраической) (ср. D. M a h n k e, Abh. Preuss. Akad. der Wiss., 1925, № 1, Берлин, 1926).

Иоганном Бернулли *) для некоего маркиза, показавшего себя хорошим учеником. И не так уж важно, что Ньютон решился, наконец, в 1693 году опубликовать краткий обзор о своих флюксиях ((XV), т. II, стр. 391—396); если его *Principia* дали пищу для размышлений более чем на целый век, то на почве исчисления бесконечно малых его нагнали, а во многих пунктах даже превзошли.

Слабости новой системы очевидны, по крайней мере для нас. Ньютон и Лейбниц, одним ударом разрушив двухтысячелетнюю традицию, предоставляют дифференцированию ведущую роль, а интегрирование сводят лишь к операции, ему обратной; понадобился весь XIX век и часть XX, чтобы восстановить справедливое равновесие; это произошло после того, как интегрирование было положено в основу теории функций действительного переменного и были получены его современные обобщения (см. Исторический очерк к книге «Интегрирование»). Из этого искажения точки зрения проистекает та чрезмерная и почти исключительная роль неопределенного интеграла в ущерб определенному, которую мы видим уже у Барроу, а затем, начиная с Ньютона и Лейбница, всюду; и здесь XIX век поставил все на свое место. Наконец, чисто лейбницевская тенденция формального оперирования с терминами продолжала господствовать в течение всего XVIII века, выходя даже за рамки возможностей анализа того времени. В частности, необходимо признать, что лейбницевское понятие дифференциала не содержало в действительности никакого смысла; в начале XIX века оно потеряло доверие, которое восстанавливалось лишь постепенно; и если употребление дифференциалов первого порядка уже полностью узаконено, то дифференциалы высших порядков, такие удобные в употреблении, на самом деле еще до сих пор не узаконены.

Как бы то ни было, а история дифференциального и интегрального исчисления начиная с конца XVII века разбивается на две части. Одна относится к применениям этого исчисления, все более и более богатым, обильным и разнообразным. К дифференциальной геометрии плоских кривых, к дифференциальным уравнениям, к степенным рядам, к вариационному исчислению, о которых уже шла речь выше, прибавляется дифференциальная геометрия пространственных кривых, а затем и поверхностей, теория кратных интегралов, уравнений в частных производных, тригонометрических рядов, изучение множества специальных функций и много других типов проблем, история которых будет изложена в книгах, к ним относящихся. Здесь мы занимаемся лишь теми работами, которые способствовали возникновению, углублению и закреплению самих основ исчисления бес-

*) Часть этого учебника, относящаяся к интегральному исчислению, была опубликована только в 1742 году ((XXIV), т. III, стр. 385—558), а часть, в которой излагается дифференциальное исчисление, была лишь недавно найдена и опубликована (XXIV bis); правда, маркиз де Лопиталь, слегка переделав, опубликовал ее на французском языке под своим именем, о чем Бернулли с некоторой горечью сообщает в своих письмах к Лейбницу.

конечно малых в той части, которая относится к функциям одного действительного переменного.

С этой точки зрения наиболее крупные ученые середины XVIII века открыли не так много нового. Маклорен в Англии *), Эйлер на континенте (XXVa и b) остаются верными тем традициям, которые каждый из них унаследовал. Правда, первый из них пытается несколько прояснить ньютоновские концепции **), тогда как второй, в высшей степени приверженный формализму Лейбница, удовлетворяется тем, что, аналогично Лейбницу и Тейлору, в основу дифференциального исчисления кладет весьма нечеткий переход к пределу, выводимый из исчисления конечных разностей; в остальном же излагает его очень добросовестно. Однако главным образом Эйлер завершает дело Лейбница тем, что вводит и распространяет использующиеся и по сей день обозначения для e, i, тригонометрических функций, вводит в употребление обозначение π. С другой стороны, если он чаще всего не делает различия между функциями и аналитическими выражениями, то по поводу тригонометрических рядов в задаче о колебании струны он настаивает на необходимости не ограничиваться функциями, определенными таким способом (которые он называет «непрерывными»), а рассматривать также в случае надобности и произвольные, или «разрывные», функции, задаваемые экспериментально, посредством одной или нескольких дуг кривой ((XXVc), стр. 74—91). Наконец, хотя это немного выходит за рамки нашей тематики, нельзя не упомянуть здесь его распространение показательной функции на комплексную область, откуда он получает свои знаменитые формулы, связывающие показательную и тригонометрические функции, равно как и определение логарифма комплексного числа; в результате этого находит свое окончательное разъяснение известная аналогия между логарифмом и обратными круговыми функциями, или, на языке XVII века, между квадратурами круга и гиперболы, замеченная еще Григорием де Сен-Винсентом, уточненная Гюйгенсом и особенно Грегори и которая у Лейбница и Бернулли появилась при формальном интегрировании выражения

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{i}{2(x+i)}-\frac{i}{2(x-i)}.$$

Однако Даламбер, нетерпимый ко всякой неясности в математике, как и в остальном, в своих замечательных статьях (XXVI) определил с наибольшей ясностью понятие предела и производной и усиленно настаивал, что, в сущности, именно в них содержится вся «метафизика» исчисления бесконечно малых. Но эти разумные соображения не получили немедленного распространения. Монументальный труд Лагранжа (XXVII) представ-

*) C. Maclaurin, A complete treatise of fluxions, Эдинбург, 1742.

**) Они в самом деле нуждались в защите от нападок философско-теологического порядка и насмешек известного епископа Беркли, который говорил, что тому, кто верит во флюксии, не должно быть трудно уверовать и в таинства религии: аргумент *ad hominem*, не лишенный ни логики, ни остроумия.

ляет собой попытку положить в основу анализа одно из наиболее спорных положений Ньютона, а именно то, которое смешивает понятия произвольной функции с функцией, разлагающейся в степенной ряд, и вывести из этого (путем рассмотрения коэффициента при члене первой степени ряда) понятие дифференцирования. Разумеется, такой сильный математик, как Лагранж, не мог не получить при этом значительных и полезных результатов, как, например (в действительности способом, не зависящим от той отправной точки, которую мы только что указали), общее доказательство формулы Тейлора с выражением остаточного члена в форме интеграла и его оценку посредством теоремы о среднем; к тому же труд Лагранжа лег в основу метода Вейерштрасса в теории функций одного комплексного переменного и в основу современной алгебраической теории формальных рядов. Но с точки зрения его прямой цели он представляет скорее шаг назад, чем вперед.

Напротив, в учебных курсах Коши (XXVIII) все, наконец, построено на твердой основе. Он определяет функцию, по существу, так же, как мы делаем это теперь, хотя на языке еще немного расплывчатом. Понятие предела, определенное раз и навсегда, взято в качестве отправной точки; отсюда сразу выводятся понятия непрерывной функции (в современном смысле) и производной, равно как и их основные элементарные свойства, и существование производной, вместо того чтобы приниматься на веру, становится вопросом, изучаемым обычными средствами анализа. Правда, Коши почти не интересуется этим; с другой стороны, когда Больцано, пришедший независимо к тем же принципам, строит пример непрерывной функции, не имеющей конечной производной ни в одной точке (XXIX), этот пример не был опубликован, и вопрос был поднят лишь Вейерштрассом в работе от 1872 года (и в его курсах с 1861 года) (XXXII).

В том, что касается интегрирования, творчество Коши представляет собой возврат к здоровым традициям античного периода и начала XVII века, но опирается на средства, еще недостаточные в техническом отношении. Определенный интеграл, остававшийся слишком долго на втором плане, становится первостепенным понятием, для которого Коши окончательно вводит обозначение $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, предложенное Фурье (вместо неудобного обозначения $\int f(x)\,dx \begin{bmatrix} x=b \\ x=a \end{bmatrix}$, иногда употреблявшегося Эйлером); для его определения Коши возвращается к методу исчерпывания, или, как мы сказали бы, к «суммам Римана» (которые скорее должны были бы называться суммами Архимеда или суммами Евдокса). Правда, математики XVII века не решились подвергнуть критическому разбору понятие площади, которое казалось им по меньшей мере таким же ясным, как понятие иррационального действительного числа; однако сходимость сумм «Римана» к площади под кривой, когда речь идет о монотонной или о кусочно монотонной кривой, была фактом хорошо известным всем приверженным к точности авторам XVII века, таким, как Ферма, Паскаль, Барроу; и Грегори, особенно хорошо подготовленный своими соображениями о переходе к пределу и своим близким знакомством с уже достаточно абстрактной формой принципа «вложенных интервалов», кажется, даже изложил строгое доказательство этого факта, оставшееся неопубликованным ((XVII bis), стр. 445—446), которое могло бы служить Коши почти без изменений, если бы было ему известно *). Коши неудачно пытался доказать существование интеграла, то есть сходимость «римановых сумм», для любой непрерывной функции; его доказательство, которое было бы верным, если бы оно опиралось на теорему о равномерной непрерывности функций, непрерывных на замкнутом интервале, без этого понятия оказалось лишенным какой бы то ни было доказательной ценности. По-видимому, Дирихле тоже не заметил этой трудности, когда писал свои знаменитые мемуары о тригонометрических рядах, так как он, ссылаясь в них на теорему, о которой идет речь, пишет, что она «легко доказывается» ((XXX), стр. 136); правда, он применяет ее в действительности лишь к ограниченным кусочно монотонным функциям; Риман поступает более осмотрительно, упоминая лишь об этих последних, когда речь идет об использовании его необходимого и достаточного условия для сходимости «римановых сумм» ((XXXI), стр. 227—271). Как только Гейне доказал теорему о равномерной непрерывности (см. Общая топология, Исторический очерк к гл. II), вопрос перестал, разумеется, представлять какую бы то ни было трудность и был легко решен Дарбу в 1875 году в его мемуаре об интегрировании разрывных функций (XXXIII), который к тому же во многих пунктах пересекается с важными исследованиями Дюбуа-Реймона, появившимися в то время. Тем самым впервые, но на сей раз окончательно, доказана линейность интеграла от непрерывных функций. С другой стороны, понятие равномерной сходимости последовательности или ряда, введенное наряду с другими Зейделем в 1848 году и оцененное особенно после работ Вейерштрасса (ср. Общая топология, Исторический очерк к гл. X), позволяло создать прочную основу, правда, при несколько ограничительных условиях, для почленного интегрирования рядов и для дифференцирования под знаком $\int$ в ожидании современных теорий, о которых мы не будем здесь говорить и которые должны осветить эти вопросы окончательно для данного времени.

Итак, мы подошли к завершающему этапу классического исчисления бесконечно малых, который представлен великими трактатами по анализу конца XIX века; с интересующей нас точки зрения трактат Жордана (XXXIV) занимает среди них выдающееся место, как в эстетическом отношении, так и потому, что он, помимо того, что содержит замечательное изложение результатов классического анализа, во многом предвосхищает взгляды современного анализа и прокладывает им путь. За Жорданом стоит Лебег, но это входит в тематику другой книги настоящего трактата.

*) Во всяком случае, это показывает резюме Тернбула, сделанное по рукописи.

БИБЛИОГРАФИЯ

(I) Euclidis Elementa, 5 vol., éd. J. L. Heiberg, Lipsiae (Teubner), 1883—1888. Русский перевод: Евклид, Начала, М.— Л., Гостехиздат, 1948—1950, тт. 1—3.

(I bis) T. L. Heath, The thirteen books of Euclid's Elements..., 3 vol., Cambridge, 1908.

(II) Archimedis Opera Omnia, 3 vol., éd. J. L. Heiberg, 2e éd., Leipzig (Teubner), 1913—1915. Русский перевод: Архимед, Сочинения, М., Физматгиз, 1962.

(II bis) Les Œuvres complètes d'Archimède, trad. P. Ver Eecke, Paris-Bruxelles (Desclée=de Brouwer), 1921.

(III) Galileo Galilei, Opere, Ristampa della Edizione Nazionale, 20 vol., Firenze (Barbera), 1929—1939.

(III bis) Discorsi e Dimonstrazioni Matematiche intorno à due nuoue scienze Attenenti alla mecanica & i movimenti locali, del Signor Galileo Galilei Linceo, Filosofo e Matematico primario del Serenissimo Grand Duca di Toscana. In Leida, appresso gli Elsevirii, MDCXXXVIII.

(IV) J. Neper, Mirifici logarithmorum canonis constructio, Lyon, 1620.

(V) J. Kepler, Stereometria Doliorum, 1615.

(V bis) J. Kepler, Neue Stereometrie der Fäser, Ostwald's Klassiker, n° 165, Leipzig (Engelmann), 1908. Русский перевод: Кеплер И., Новая стереометрия винных бочек, М.— Л., ГТТИ, 1934.

(VI) B. Cavalieri: a) Geometria indivisibilibus continuorum quadam ratione promota, Bononiae, 1635 (2e éd., 1653); b) Exercitationes geometricae sex, Bononiae, 1647. Русский перевод: Кавальери Б., Геометрия неделимых, М.— Л., Гостехиздат, 1940.

(VII) E. Torricelli, Opere, 4 vol., éd. G. Loria et G. Vassura, Faenza (Montanari), 1919.

(VII bis) E. Torricelli, in G. Loria, Bibl. Mat. (III), t. I, 1900, p. 78—79.

(VIII) G. de Roberval, Ouvrages de Mathématique (Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, t. III), Amsterdam, 1736: a) Observations sur la composition des mouvements, et sur le moyen de trouver les touchantes des lignes courbes, p. 3—67; b) Epistola ad Torricellium, p. 363—399.

(IX) P. Gregorii a Sancto Vincentio, Opus Geometricum Quadraturae Circuli et Sectionum Coni..., 2 vol., Antverpiae, 1647.

(X) R. Descartes, Œuvres, éd. Ch. Adam et P. Tannery, 11 vol., Paris (L. Cerf), 1897—1909.

(X bis) R. Descartes, Geometria, trad. latine de Fr. van Schooten, 2e éd., 2 vol., Amsterdam (Elzevir), 1659—1661. Русский перевод: Декарт Р., Геометрия, М.— Л., ГОНТИ, 1938.

(XI) P. Fermat, Œuvres, Paris (Gauthier—Villars), 1891—1912: a) De linearum curvarum cum lineis rectis comparatione... Auctore M. P. E. A. S., t. I, p. 211—254 (trad. française, ibid., t. III, p. 181—215); b) Methodus ad disquirendam maximam et minimam, t. I, p. 133—179 (trad. française, ibid., t. III, p. 121—156); c) De aequationum localium transmutatione et emendatione ad multimodam curvilineorum inter se vel cum rectilineis comparationem, cui annectitur proportionis geometricae in quadrandis infinitis parabolis et hyperbolis usus, t. I, p. 255—288 (trad. française, ibid., t. III, p. 216—240).

(XII) B. Pascal, Œuvres, 14 vol., éd. Brunschvicg, Paris (Hachette), 1904—1914: a) Lettre de A. Dettonville à Monsieur A. D. D. S. en lui envoyant la démonstration à la manière des anciens de l'égalité des lignes spirale et parabolique, t. VIII, p. 249—282; b) Lettre de Monsieur Dettonville à Monsieur de Carcavy, t. VIII, p. 334—384; c) Traité des trilignes rectangles et de leurs onglets, t. IX, p. 3—45; d) Traité des sinus du quart de cercle, t. IX, p. 60—76.

(XIII) N. Mercator, Logarithmotechnia... cui nunc accedit vera quadratura hyperbolae..., Londini, 1668 (reproduit dans F. Masères, Scriptores Logarithmici..., vol. I, London, 1791, p. 167—196).

(XIV) Lord Brouncker, The Squaring of the Hyperbola by an infinite series of Rational Numbers, together with its Demonstration, by the Right Honourable the Lord Viscount Brouncker, Phil. Trans., t. 3 (1668), p. 645—649 (reproduit dans F. Masères, Scriptores Logarithmici..., vol. I, London, 1791, p. 213—218).

(XV) J. Wallis, Opera Mathematica, 3 vol., Oxoniae, 1693—1695: a) Arithmetica Infinitorum, t. I, p. 355—478.

(XV bis) J. Wallis, Logarithmotechnia Nicolai Mercatoris: discoursed in a letter written by Dr. J. Wallis to the Lord Viscount Brouncker, Phil. Trans., t. 3 (1668), p. 753—759 (reproduit dans F. Masères, Scriptores Logarithmici..., vol. I, London, 1791, p. 219—226).

(XVI) Ch. Huygens, Œuvres complètes, publiées par la Société Hollandaise des Sciences, 19 vol., La Haye (Martinus Nijhoff), 1888—1937: a) Examen de «Vera Circuli et Hyperboles Quadratura...», t. VI, p. 228—230 (=Journal des Sçavans, juillet 1668);

b) Horologium Oscillatorium, t. XVIII; c) Theoremata de Quadratura Hyperboles, Ellipsis et Circuli..., t. XI, p. 271—337; d) De Circuli Magnitudine Inventa..., t. XII, p. 91—180.

(XVI bis) Christiani Hugenii, Zulichemii Philosophi vere magni, Dum viveret Zelemii Toparchae, Opera Mechanica, Geometrica, Astronomica et Miscellanea, 4 tomes en 1 vol., Lugd. Batav., 1751.

(XVII) J. Gregory: a) Vera Circuli et Hyperbolae Quadratura..., Pataviae, 1667; b) Geometriae Pars Universalis, Pataviae, 1668; c) Exercitationes Geometricae, London, 1668.

(XVII bis) James Gregory Tercentenary Memorial Volume, containing his correspondence with John Collins and his hitherto unpublished mathematical manuscripts..., ed. H. W. Turnbull, London (Bell and Sons), 1939.

(XVIII) I. Barrow, Mathematical Works, ed. W. Whevell, Cambridge, 1860.

(XVIII bis) Lectiones Geometricae: In quibus (praesertim) Generalia Curvarum Linearum Symptomata Declarantur. Auctore Isaac Barrow... Londini... MDCLXX (=Mathematical Works, p. 156—320).

(XIX) I. Newton, Opuscula, t. I, Lausanne—Genève (M. M. Bousquet), 1744: a) De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas, p. 3—26; b) Methodus fluxionum et serierum infinitarum, p. 29—199 (1^{re} publication en 1736); c) De Quadratura curvarum, p. 201—244 (1^{re} publication en 1706); d) Methodus differentialis, p. 271—282 (1^{re} publication en 1711); e) Commercium Epistolicum, p. 295—420 (1^{re} publication en 1712, 2^{e} éd. en 1722). На русском языке: Ньютон И., Всеобщая арифметика, М., Изд-во АН СССР, 1948; Математические работы, М.— Л., ОНТИ, 1937.

(XX) I. Newton, Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, London, 1687 (nouvelle éd., Glasgow, 1871). Русский перевод: Ньютон И., Математические начала натуральной философии, 2-е изд., М.—Л., Изд-во АН СССР, 1936.

(XX bis) I. Newton, Mathematical principles of natural philosophy, and his System of the world, transl. into English by A. Motte in 1729, Univ. of California, 1946.

(XXI) G. W. Leibniz, Mathematische Schriften, éd. C. I. Gerhardt, 7 vol., Berlin — Halle (Asher-Schmidt), 1849—1863: a) Nova Methodus pro Maximis et Minimis... t. V, p. 220—226 (=Acta Erud. Lips., 1684); b) De Geometria recondita..., t. V, p. 226—223 (= Acta Erud. Lips., 1686); c) Meditatio nova de natura Anguli contactus..., t. VII, p. 326—329 (= Acta Erud. Lips., 1686); d) Generalia de Natura linearum..., t. VII, p. 331—337 (= Acta Erud. Lips., 1692); e) De linea ex lineis humero infinitis..., t. V, p. 266—269 (= Acta Erud. Lips., 1692); f) Nova Calculi differentialis applicatio..., t. V, p. 301—306 (= Acta Erud. Lips., 1694); g) Specimen novum Analyseos..., t. V, p. 350—361 (= Acta Erud. Lips., 1702); h) Continuatio Analyseos Quadraturarum Rationalium, t. V, p. 361—366 (= Acta Erud. Lips., 1703). Русский перевод отрывков из математических сочинений Лейбница имеется в журнале «Успехи матем. наук», т. 3, вып. 1(23), 1948, стр. 165—205.

(XXII) Der Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibniz mit Mathematikern, herausg. von C. I. Gerhardt, t. I, Berlin (Mayer und Müller), 1899.

(XXIII) Jakob Bernoulli, Opera, 2 vol., Genève (Cramer-Philibert), 1744.

(XXIV) Johann Bernoulli, Opera Omnia, 4 vol., Lausanne — Genève (M. M. Bousquet), 1742.

(XXIV bis) Johann Bernoulli, Die erste Integralrechnung, Ostwald's Klassiker, n° 194, Leipzig — Berlin, 1914; Die Differentialrechnung, Ostwald's Klassiker, n° 211, Leipzig, 1924.

(XXV) L. Euler, Opera Omnia: a) Institutiones calculi differentialis (1), t. X, Berlin (Teubner), 1913; b) Institutiones calculi integralis (1), t. XI — XIII, Berlin (Teubner), 1913—1914; c) Commentationes analyticae... (1), t. XXIII, Berlin — Zürich (Teubner-O. Füssli), 1938. На русском языке: Эйлер Л., Дифференциальное исчисление, М.— Л., Гостехиздат, 1949; Интегральное исчисление, тт. 1—3, М., Гостехиздат, 1956—1958; Введение в анализ бесконечных, тт. 1, 2, М., Физматгиз, 1961.

(XXVI) J. d'Alembert: a) Sur les principes métaphysiques du Calcul infinitésimal (Mélanges de littérature, d'histoire et de philosophie, nouv. éd., t. V, Amsterdam, 1768, p. 207—219); b) Encyclopédie, Paris, 1751—1965, articles «Différentiel» et «Limite».

(XXVII) J.-L. Lagrange, Œuvres, Paris (Gauthier—Villars), 1867—1892: a) Théorie des fonctions analytiques, 2e éd., t. IX; b) Leçons sur le calcul des fonctions, 2e éd., t. X.

(XXVIII) A.-L. Cauchy, Résumé des leçons données à l'Ecole Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal, Paris, 1823 (= Œuvres complètes (2), t. IV, Paris (Gauthier—Villars), 1899).

(XXIX) B. Bolzano, Schriften, Bd. I: Funktionenlehre, Prag, 1930.

(XXX) P. G. Lejeune-Dirichlet, Werke, t. I, Berlin (G.Reimer), 1889. На русском языке: Лежен - Дирихле П. Г., Лекции по теории чисел, М.— Л., ОНТИ, 1936.

(XXXI) B. Riemann, Gesammelte mathematische Werke, 2e éd., Leipzig (Teubner), 1892. На русском языке: Риман Б., Сочинения, М.— Л., Гостехиздат, 1948.

(XXXII) K. Weierstrass, Mathematische Werke, t. II, Berlin (Mayer und Müller), 1895.

(XXXIII) G. Darboux, Mémoire sur les fonctions discontinues, Ann. E. N. S. (2) t. IV (1875), p. 57—112.

(XXXIV) C. Jordan, Traité d'Analyse, 3e éd., 3 vol., Paris (Gauthier—Villars), 1909—1915.

ГЛАВА IV

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Теоремы существования

1. *Понятие дифференциального уравнения*

Пусть I есть интервал, содержащийся в $\mathbf{R}$ и не сводящийся к точке, E — *топологическое векторное пространство над телом* $\mathbf{R}$, A и B — два открытых множества из E. Пусть, далее, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \longrightarrow \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ — отображение множества $A \times B \times I$ в E; всякому *дифференцируемому* отображению $\mathbf{u}$ интервала I в A, производная которого принимает значения в B, поставим в соответствие отображение $t \longrightarrow \mathbf{g}(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}'(t), t)$ интервала I в E, которое обозначим через $\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{u})$; таким образом, функция $\tilde{\mathbf{g}}$ определена на множестве $\mathscr{D}(A, B)$ дифференцируемых отображений I в A, производная которых принимает свои значения в B. Будем говорить, что уравнение $\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{u}) = 0$ есть *дифференциальное уравнение* для $\mathbf{u}$ (относительно действительного переменного t); *решение* этого уравнения называется также *интегралом* дифференциального уравнения (на интервале I); стало быть, это есть дифференцируемое отображение интервала I в A, производная которого принимает свои значения в B и которое обладает тем свойством, что $\mathbf{g}(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}'(t), t) = 0$ при *любом* $t \in I$. Для удобства мы будем записывать дифференциальное уравнение $\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{u}) = 0$ в виде $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = 0$, подразумевая при этом, что $\mathbf{x}$ есть элемент множества $\mathscr{D}(A, B)$.

Например, для $I = E = \mathbf{R}$ соотношения

$$x' = 2t, \qquad tx' - 2x = 0, \qquad x'^2 - 4x = 0, \qquad x - t^2 = 0$$

являются дифференциальными уравнениями, имеющими в качестве решения одну и ту же функцию $x(t) = t^2$.

В этой главе мы будем главным образом рассматривать тот случай, когда E есть *полное нормированное пространство* над телом $\mathbf{R}$, а дифференциальные уравнения имеют специальный вид

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \tag{1}$$

(«уравнения, разрешенные относительно $\mathbf{x}'$»), причем $\mathbf{f}$ означает функцию со значениями в E, определенную на $I \times H$, где H — непустое *открытое* подмножество пространства E. С другой стороны, мы несколько расширим понятие *решения* (или *интеграла*) такого уравнения (на интервале I): будем говорить, что функция $\mathbf{u}$, определенная и непрерывная на I со значениями в H, является решением (или интегралом) уравнения (1), если существует такая *счетная* часть A интервала I, что в каждой точке t дополнения множества A относительно I функция $\mathbf{u}$ имеет производную $\mathbf{u}'(t)$, удовлетворяющую условию $\mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t))$. Если функция $\mathbf{u}$ дифференцируема и удовлетворяет вышеуказанному условию в *каждой* точке $t \in I$, то мы будем говорить, что она является *точным* решением уравнения (1) на интервале I.

В частном случае дифференциального уравнения вида $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t)$, где $\mathbf{f}$ — отображение I в E, решениями в указанном смысле служат *примитивные* функции $\mathbf{f}$ (гл. II, § 1, n° 1), а точными решениями — ее *точные примитивные*.

Если E есть *произведение* полных нормированных пространств E_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, то можно написать $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ и $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, где $\mathbf{x}_i$ — отображение интервала I в E_i, а $\mathbf{f}_i$ — отображение множества $I \times H$ в E_i; в этом случае уравнение (1) эквивалентно *системе дифференциальных уравнений*

$$\mathbf{x}_i' = \mathbf{f}_i(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{2}$$

Наиболее важным является случай, когда все E_i равны $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$; тогда говорят, что (2) есть система *скалярных* дифференциальных уравнений.

К изучению систем (2) сводится изучение соотношений вида

$$\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}', \ldots, \mathbf{x}^{(n-1)}), \tag{3}$$

где $\mathbf{x}$ — вектор-функция, n раз дифференцируемая на I; в самом деле, положив $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}$, $\mathbf{x}_p = \mathbf{x}^{(p-1)}$ для $2 \leqslant p \leqslant n$, получаем, что соотношение (3) эквивалентно системе

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{x}_i' = \mathbf{x}_{i+1} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n-1), \\ &\mathbf{x}_n' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Соотношение вида (3) называется *дифференциальным уравнением порядка n* (разрешенным относительно $\mathbf{x}^{(n)}$), а уравнения вида (1) называются дифференциальными уравнениями *первого порядка.*

К системе вида (2) приводится также всякая «система дифференциальных уравнений» вида

$$D^{n_i}\mathbf{x}_i = \mathbf{f}_i(t,\ \mathbf{x}_1,\ D\mathbf{x}_1,\ \ldots,\ D^{n_1-1}\mathbf{x}_1,\ \ldots,\ \mathbf{x}_p,\ D\mathbf{x}_p,\ \ldots,\ D^{n_p-1}\mathbf{x}_p) \quad (5)$$

$(1 \leqslant i \leqslant p)$, где $\mathbf{x}_i$ — функция, n_i раз дифференцируемая на I (для $1 \leqslant i \leqslant p$).

2. *Дифференциальные уравнения, имеющие в качестве решений примитивные линейчатых функций*

Напомним (гл. II, § 1, n° 3, определение 3), что вектор-функция $\mathbf{u}$, определенная на интервале $I \subset \mathbf{R}$, называется *линейчатой*, если на любой компактной части интервала I она является равномерным пределом ступенчатых функций; это равносильно тому условию, что в каждой точке интервала I функция $\mathbf{u}$ имеет предел справа и предел слева, а также предел справа в левом конце интервала и предел слева в его правом конце, если эти концы принадлежат I (гл. II, § 1, теорема 3). В этой главе мы ограничимся дифференциальными уравнениями (1), всякое решение которых является *примитивной некоторой линейчатой функции* на I. Очевидно, что это условие выполняется, если для любого *непрерывного* отображения $\mathbf{u}$ интервала I в H функция $\mathbf{f}(t,\ \mathbf{u}(t))$ линейчата на I; следующая лемма дает для этого достаточное условие:

Лемма 1. *Пусть* $\mathbf{f}$ — *такое отображение множества* $I \times H$ *в* E, *что если обозначить через* $\mathbf{f}_{\mathbf{x}}$ (*для любого* $\mathbf{x} \in H$) *отображение* $t \to \mathbf{f}(t,\ \mathbf{x})$ *интервала* I *в* E, *то будут выполняться следующие условия*: 1° *функция* $\mathbf{f}_{\mathbf{x}}$ *линейчата на* I *для любого* $\mathbf{x} \in H$; 2° *отображение* $\mathbf{x} \to \mathbf{f}_{\mathbf{x}}$ *множества* H *во множество* $\mathcal{F}(I,\ E)$ *отображений* I *в* E *непрерывно, если* $\mathcal{F}(I,\ E)$ *наделено топологией компактной сходимости* (Общая топология, гл. X, § 1, n° 3). *При этих условиях*:

1° *для любого непрерывного отображения* $\mathbf{u}$ *интервала* I *в* H *функция* $t \to \mathbf{f}(t,\ \mathbf{u}(t))$ *линейчата на* I; *более точно*: *предел справа* (соответственно *слева*) *этой функции в какой-либо точке* $t_0 \in I$ *равен пределу справа* (соответственно *слева*) *функции* $t \to \mathbf{f}(t,\ \mathbf{u}(t_0))$ *в точке* t_0;

2° если $(\mathbf{u}_n)$ — последовательность отображений I в H, равномерно сходящаяся на любом компактном подмножестве интервала I к непрерывному отображению $\mathbf{u}$ интервала I в H, то последовательность функций $\mathbf{f}(t, \mathbf{u}_n(t))$ равномерно сходится к $\mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t))$ на любом компактном подмножестве интервала I.

1° Пусть $\mathbf{c}$ есть предел справа функции $\mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t_0))$ в точке t_0; для любого $\varepsilon > 0$ на интервале I найдется такая компактная окрестность V точки t_0, что $\| \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t_0)) - \mathbf{c} \| \leqslant \varepsilon$ для $t \in V$ и $t > t_0$. С другой стороны, найдется такое $\delta > 0$, что соотношения $\mathbf{x} \in H$, $\| \mathbf{x} - \mathbf{u}(t_0) \| \leqslant \delta$ влекут $\| \mathbf{f}(s, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(s, \mathbf{u}(t_0)) \| \leqslant \varepsilon$ для любого $s \in V$; если $W \subset V$ есть такая окрестность точки t_0 в I, что $\| \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t_0) \| \leqslant \delta$ для любого $t \in W$, то неравенство $\| \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)) - \mathbf{c} \| \leqslant 2\varepsilon$ выполняется для $t \in W$, $t > t_0$; следовательно, $\mathbf{c}$ есть предел справа функции $\mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t))$ в точке t_0.

2° Пусть K — компактное подмножество интервала I; так как $\mathbf{u}$ непрерывна на I, то $\mathbf{u}(K)$ составляет компактное подмножество множества H; для любого $\varepsilon > 0$ и любого $x \in \mathbf{u}(K)$ найдется такое число $\delta_{\mathbf{x}}$, что для $\mathbf{y} \in H$, $\| \mathbf{y} - \mathbf{x} \| \leqslant \delta_{\mathbf{x}}$ и для любого $t \in K$ выполняется неравенство $\| \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \| \leqslant \varepsilon$. Существует конечное число таких точек $\mathbf{x}_i \in \mathbf{u}(K)$, что замкнутые шары с центром в $\mathbf{x}_i$ и радиусом $\frac{1}{2}\delta_{\mathbf{x}_i}$ образуют покрытие множества $\mathbf{u}(K)$; пусть $\delta = \min(\delta_{\mathbf{x}_i})$. По условию, найдется такое целое n_0, что для $n \geqslant n_0$ неравенство $\| \mathbf{u}_n(t) - \mathbf{u}(t) \| \leqslant \frac{1}{2}\delta$ выполняется для любого $t \in K$. Но для всякого $t \in K$ найдется такой индекс i, что $\| \mathbf{u}(t) - \mathbf{x}_i \| \leqslant \frac{1}{2}\delta_{\mathbf{x}_i}$; следовательно, $\| \mathbf{u}_n(t) - \mathbf{x}_i \| \leqslant \delta_{\mathbf{x}_i}$, откуда $\| \mathbf{f}(t, \mathbf{u}_n(t)) - \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)) \| \leqslant 2\varepsilon$ для любого $t \in K$ и любого $n \geqslant n_0$.

На протяжении всего этого параграфа через I будет обозначаться интервал, содержащийся в $\mathbf{R}$ *и не сводящийся к точке, через H — непустое открытое множество, содержащееся в нормированном пространстве E, и через* $\mathbf{f}$ *— отображение множества $I \times H$ в E, удовлетворяющее условиям леммы* 1.

Предложение 1. *Пусть t_0 — точка из I, а* $\mathbf{x}_0$ *— точка из H; для того чтобы непрерывная функция* $\mathbf{u}$ *была решением уравнения* (1) *на интервале I и принимала в точке t_0 значение* $\mathbf{x}_0$, *необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла соотношению*

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{u}(s))\, ds \tag{6}$$

для любого $t \in I$.

В самом деле, лемма 1 показывает, что если $\mathbf{u}$ является решением уравнения (1) на I, то $\mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t))$ линейчата и, значит, правая часть в формуле (6) определена и равна $\mathbf{u}(t)$ для любого $t \in I$. Обратно, если $\mathbf{u}$ есть непрерывная функция, удовлетворяющая соотношению (6), то $\mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t))$ линейчата на основании леммы 1 и, значит, $\mathbf{u}$ имеет в качестве производной функцию $\mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t))$ во всех точках интервала I, за исключением некоторой его счетной части.

Следствие. *Во всякой точке интервала I, отличной от его левого* (соответственно *правого*) *конца, любое решение $\mathbf{u}$ уравнения* (1) *на I имеет левую* (соответственно *правую*) *производную, равную пределу слева* (соответственно *справа*) *функции* $\mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t))$ *в этой точке.*

Предложение 2. *Если $\mathbf{f}$ есть непрерывное отображение множества $I \times H$ в E, то всякое решение уравнения* (1) *на I является точным решением.*

В самом деле, такое решение $\mathbf{u}$ есть примитивная непрерывной функции $\mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t))$ (гл. II, § 1, предложение 3).

Отметим также, что функция $\mathbf{f}$, непрерывная на $I \times H$, удовлетворяет условиям леммы 1 (Общая топология, гл. X, § 2, предложение 9).

В дальнейшем мы будем задавать произвольно $t_0 \in I$ и $\mathbf{x}_0 \in H$ и исследовать вопрос о том, существуют ли на I (или в некоторой окрестности точки t_0 относительно I) решения уравнения (1), принимающие в точке t_0 значение $\mathbf{x}_0$ (или, что сводится к тому же, решения уравнения (6)).

3. Существование приближенного решения

Пусть задано число $\varepsilon > 0$; будем говорить, что непрерывное отображение $\mathbf{u}$ интервала I в H есть *приближенное решение с точностью* ε дифференциального уравнения

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \tag{1}$$

если во всех точках дополнения относительно I некоторого *счетного* множества функция $\mathbf{u}$ имеет производную, удовлетворяющую условию

$$\| \mathbf{u}'(t) - \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)) \| \leqslant \varepsilon. \tag{7}$$

Пусть $(t_0, \mathbf{x}_0)$ — точка из $I \times H$; так как $\mathbf{f}$, по предположению, удовлетворяет условиям леммы 1, то существует такая компактная окрестность $J \subset I$ точки t_0, что $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0)$ ограничена на J, и такой открытый шар S с центром $\mathbf{x}_0$, содержащийся в H, что $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0)$ ограничена на $J \times S$; отсюда следует, что $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ *ограничена* на $J \times S$. *На протяжении всего этого* n° *через J будет обозначаться компактный интервал, представляющий собой окрестность точки t_0 в I, через S — открытый шар с центром $\mathbf{x}_0$ и радиусом r, содержащийся в H, причем J и S таковы, что $\mathbf{f}$ ограничена на $J \times S$; через M будет обозначаться верхняя грань функции $\| \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \|$ на $J \times S$.*

Предложение 3. *На любом содержащемся в J компактном интервале длины меньше $\frac{r}{M+\varepsilon}$ с левым (или правым) концом t_0 существует приближенное решение с точностью ε уравнения* (1), *принимающее значения в S и равное $\mathbf{x}_0$ в точке t_0.*

Допустим, что t_0 не является правым концом интервала J, и докажем предложение для интервалов, для которых t_0 служит левым концом. Пусть $\mathfrak{M}$ есть множество приближенных решений уравнения (1) с точностью ε, каждое из которых принимает свои значения в S, равно $\mathbf{x}_0$ в точке t_0 и определено на полуоткрытом интервале $[t_0, b[$, содержащемся в J (интервал зависит от того приближенного решения, которое рассматривается). Покажем прежде всего, что $\mathfrak{M}$ не пусто. Пусть $\mathbf{c}$ — предел справа функции $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0)$ в точке t_0; по лемме 1 функция $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0 + \mathbf{c}(t - t_0))$ имеет предел справа, равный $\mathbf{c}$ в точке t_0, и значит, сужение функции $\mathbf{x}_0 + \mathbf{c}(t - t_0)$ на достаточно малый полуоткрытый интервал $[t_0, b[$ принадлежит $\mathfrak{M}$.

Упорядочим множество $\mathfrak{M}$ посредством отношения «$\mathbf{u}$ есть сужение $\mathbf{v}$» и покажем, что $\mathfrak{M}$ *индуктивно* (Теория множеств, Результаты, § 6, n° 9). Пусть $(\mathbf{u}_\alpha)$ — совершенно упорядоченное подмножество множества $\mathfrak{M}$, и пусть $[t_0, b_\alpha[$ — интервал, на котором определена

$\mathbf{u}_\alpha$; следовательно, для $b_\alpha \leqslant b_\beta$ функция $\mathbf{u}_\beta$ является продолжением $\mathbf{u}_\alpha$. Объединение интервалов $[t_0, b_\alpha[$ составляет интервал $[t_0, b[$, содержащийся в J, и существует, притом единственная, функция $\mathbf{u}$, определенная на $[t_0, b[$ и совпадающая на $[t_0, b_\alpha[$ с $\mathbf{u}_\alpha$ для любого α; среди b_α найдется возрастающая последовательность (b_{α_n}), сходящаяся к b; поскольку на $[t_0, b_{\alpha_n}[$ функция $\mathbf{u}$ совпадает с $\mathbf{u}_{\alpha_n}$, то во всех точках дополнения относительно $[t_0, b[$ некоторого *счетного* множества функция $\mathbf{u}$ имеет производную, удовлетворяющую соотношению (7) и, значит, является верхней гранью множества $(\mathbf{u}_\alpha)$ в $\mathfrak{M}$.

Согласно теореме Цорна (Теория множеств, Результаты, § 6, n° 10) $\mathfrak{M}$ имеет *максимальный* элемент $\mathbf{u}_0$; мы покажем, что если $[t_0, t_1[$ есть интервал, на котором определена функция $\mathbf{u}_0$, то либо t_1 является правым концом интервала J, либо $t_1 - t_0 \geqslant \frac{r}{M+\varepsilon}$. Будем рассуждать от противного, допустив, что ни одно из этих предположений не выполняется; прежде всего покажем, что функцию $\mathbf{u}_0$ можно продолжить по непрерывности в точку t_1; в самом деле, для любых s и t из $[t_0, t_1]$, в силу теоремы о конечных приращениях, имеем

$$\| \mathbf{u}_0(s) - \mathbf{u}_0(t) \| \leqslant (M+\varepsilon) | s-t |;$$

следовательно, на основании критерия Коши $\mathbf{u}_0$ имеет в точке t_1 предел слева $\mathbf{x}_1 \in S$. Обозначим через $\mathbf{c}_1$ предел справа в точке t_1 функции $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_1)$; тогда $\| \mathbf{c}_1 \| \leqslant M$; рассуждая, как в начале доказательства, получим, что $\mathbf{u}_0$ можно продолжить на полуоткрытый интервал с началом t_1 при помощи функции $\mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_1(t - t_1)$ так, чтобы продолженная функция снова принадлежала $\mathfrak{M}$, что невозможно.

Следовательно, предложение доказано.

В случае, когда $\mathbf{f}$ *равномерно непрерывна* на $J \times S$, предложение 3 можно доказать, не пользуясь теоремой Цорна (упражнение 1а)).

Предложение 4. *Множество приближенных решений уравнения* (1) *с точностью* ε, *определенных на одном и том же интервале* $K \subset J$ *и принимающих свои значения в* S, *равномерно равностепенно непрерывно.*

В самом деле, если $\mathbf{u}$ есть произвольная функция, принадлежащая этому множеству, а s и t — две точки из K, то согласно теореме о конечных приращениях $\|\mathbf{u}(s)-\mathbf{u}(t)\| = (M+\varepsilon)|s-t|$.

Следствие (теорема Пеано). *Если E — пространство конечной размерности над телом* $\mathbf{R}$, *то на любом содержащемся в J компактном интервале K длины меньше $\frac{r}{M}$ с левым (или правым) концом t_0 существует решение уравнения* (1) *со значениями в S, равное $\mathbf{x}_0$ в точке t_0.*

Действительно, согласно предложению 3, при достаточно большом n существует приближенное решение $\mathbf{u}_n$ уравнения (1) с точностью $\frac{1}{n}$, определенное на K, принимающее значения в S и равное $\mathbf{x}_0$ в точке t_0. Множество функций $\mathbf{u}_n$ равностепенно непрерывно (предложение 4), а поскольку E имеет конечную размерность, то S относительно компактно в E, и значит, для любого $t \in K$ множество функций $\mathbf{u}_n(t)$ относительно компактно в E. На основании теоремы Асколи (Общая топология, гл. X, § 4, теорема 1) множество функций $\mathbf{u}_n$ относительно компактно в пространстве $\mathfrak{F}(K, E)$ отображений K в E, наделенном топологией равномерной сходимости. Следовательно, существует подпоследовательность $(\mathbf{u}_{n_k})$ последовательности $(\mathbf{u}_n)$, равномерно сходящаяся на K к непрерывной функции $\mathbf{u}$. Далее заметим, что, начиная с некоторого n, $\mathbf{u}_n(K)$ попадет в замкнутый шар с центром в точке $\mathbf{x}_0$ и радиусом $< r$ (не зависящим от n), то есть $\mathbf{u}_n(K) \subset S$ и, следовательно, $f(t, \mathbf{u}_n(t))$ определена на K. Согласно лемме 1 функции $\mathbf{f}(t, \mathbf{u}_{n_k}(t))$ равномерно сходятся к $\mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t))$ на K; в силу неравенства (7) $\mathbf{u}_{n_k}$ есть примитивная функции, равномерно сходящейся к $\mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t))$ на K, и значит (гл. II, § 1, теорема 1), $\mathbf{u}$ является на K решением уравнения (1), равным $\mathbf{x}_0$ в точке t_0; наконец, соотношение $\|\mathbf{u}'(t)\| \leqslant M$ показывает, что $\mathbf{u}(K) \subset S$.

Замечания. 1) Может существовать *бесконечно много* интегралов одного дифференциального уравнения (1), принимающих одно и то же значение в заданной точке. Например, скалярное дифференциальное уравнение $x' = 2\sqrt{|x|}$ имеет в качестве интегралов, принимающих значение 0 в точке $t=0$, все функции, определенные следующим образом:

$$u(t)=0 \quad \text{для} \quad -\beta \leqslant t \leqslant \alpha,$$
$$u(t)=-(t+\beta)^2 \quad \text{для} \quad t \leqslant -\beta,$$
$$u(t)=(t-\alpha)^2 \quad \text{для} \quad t \geqslant \alpha$$

для любых положительных чисел α и β.

2) Теорема Пеано уже не будет верна, если в качестве E взять произвольное полное нормированное пространство *бесконечной* размерности (упражнение 17).

4. *Сравнение приближенных решений*

В дальнейшем, как и выше, I и H означают соответственно интервал, содержащийся в $\mathbf{R}$, и открытое множество в нормированном пространстве E; t_0 есть точка из I.

Определение 1. *Пусть на интервале I задана положительная числовая функция $t \to k(t)$; говорят, что отображение $\mathbf{f}$ множества $I \times H$ в E есть липшицево отображение с функцией $k(t)$, если для любого $\mathbf{x} \in H$ функция $\mathbf{t} \to \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ линейчата на I и если для любого $t \in I$ и любой пары точек $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ из H выполняется неравенство* («условие Липшица»)

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_1)-\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_2)\| \leqslant k(t)\|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\|. \tag{8}$$

Будем называть функцию $\mathbf{f}$ просто *липшицевой* на $I \times H$, если она является липшицевой на этом множестве с некоторой *константой* $k \geqslant 0$. Очевидно, функция, являющаяся липшицевой на $I \times H$, удовлетворяет условиям леммы 1 (в то время как обратное неверно); если $\mathbf{f}$ липшицева (на $I \times H$), то говорят, что дифференциальное уравнение

$$\mathbf{x}'=\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \tag{1}$$

липшицево (на $I \times H$).

Пример. Пусть $E=\mathbf{R}$, H — интервал из $\mathbf{R}$; если в каждой точке (t, x) из $I \times H$ функция $f(t, x)$ имеет *частную производную* f'_x (гл. II, § 3, n° 4), удовлетворяющую на $I \times H$ неравенству $|f'_x(t, x)| \leqslant k(t)$, то условие (8) выполняется в силу теоремы о конечных приращениях; в книге VII мы покажем, как этот пример обобщается на случай произвольного нормированного пространства E.

Если функция $\mathbf{f}$ липшицева на $I \times H$, то для любого компактного интервала $J \subset I$ и любого открытого шара $S \subset H$

функция $\mathbf{f}$ *ограничена* на $J \times S$. Следовательно, применимо предложение 3, которое и доказывает существование приближенных решений уравнения (1). Но, кроме того, справедливо следующее предложение, позволяющее сравнить два приближенных решения:

Предложение 5. *Пусть $k(t) > 0$ — числовая линейчатая функция на I, $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ — липшицева функция с функцией $k(t)$ на $I \times H$. Если $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ — два приближенных решения уравнения (1) с точностью соответственно ε_1 и ε_2, определенные на I и принимающие свои значения в H, то для любого $t \in I$, $t \geqslant t_0$, имеет место неравенство*

$$\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)\| \leqslant \|\mathbf{u}(t_0) - \mathbf{v}(t_0)\| \Phi(t) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \Psi(t), \tag{9}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \Phi(t) &= 1 + \int_{t_0}^{t} k(s) \exp\left(\int_{s}^{t} k(\tau)\, d\tau \right) ds, \\ \Psi(t) &= t - t_0 + \int_{t_0}^{t} (s - t_0)\, k(s) \exp\left(\int_{s}^{t} k(\tau)\, d\tau \right) ds. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Из соотношения $\|\mathbf{u}'(t) - \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t))\| \leqslant \varepsilon$, справедливого на дополнении некоторого счетного множества, применяя теорему о конечных приращениях, выводим соотношение

$$\left\| \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t_0) - \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{u}(s))\, ds \right\| \leqslant \varepsilon_1 (t - t_0)$$

и точно так же

$$\left\| \mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(t_0) - \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{v}(s))\, ds \right\| \leqslant \varepsilon_2 (t - t_0),$$

откуда

$$\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)\| \leqslant \|\mathbf{u}(t_0) - \mathbf{v}(t_0)\| + \\ + \left\| \int_{t_0}^{t} (\mathbf{f}(s, \mathbf{u}(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{v}(s)))\, ds \right\| + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(t - t_0).$$

В силу условия Липшица (8) имеем

$$\left\| \int_{t_0}^{t} (\mathbf{f}(s, \mathbf{u}(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{v}(s)))\, ds \right\| \leqslant \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{f}(s, \mathbf{u}(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{v}(s))\|\, ds \leqslant \\ \leqslant \int_{t_0}^{t} k(s)\, \|\mathbf{u}(s) - \mathbf{v}(s)\|\, ds,$$

откуда, положив $w(t)=\|\mathbf{u}(t)-\mathbf{v}(t)\|$, получаем

$$w(t)=w(t_0)+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(t-t_0)+\int_{t_0}^{t} k(s)\,w(s)\,ds. \tag{11}$$

Теперь предложение будет вытекать из следующей леммы:

Лемма 2. *Если на интервале* $[t_0, t_1]$ *непрерывная числовая функция* w *удовлетворяет неравенству*

$$w(t)\leqslant\varphi(t)+\int_{t_0}^{t} k(s)\,w(s)\,ds, \tag{12}$$

где $\varphi\geqslant 0$ — *линейчатая функция на* $[t_0, t_1]$, *то для* $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ *выполняется неравенство*

$$w(t)\leqslant\varphi(t)+\int_{t_0}^{t}\varphi(s)\,k(s)\exp\left(\int_{s}^{t}k(\tau)\,d\tau\right)ds. \tag{13}$$

В самом деле, положим $y(t)=\int_{t_0}^{t}k(s)\,w(s)\,ds$; из соотношения (12) следует, что на дополнении некоторого счетного множества

$$y'(t)-k(t)\,y(t)\leqslant\varphi(t)\,k(t). \tag{14}$$

Если положить $z(t)=y(t)\exp\left(-\int_{t_0}^{t}k(s)\,ds\right)$, то неравенство (14) будет равносильно неравенству

$$z'(t)\leqslant\varphi(t)\,k(t)\exp\left(-\int_{t_0}^{t}k(s)\,ds\right).$$

Применяя к этому неравенству теорему о конечных приращениях (гл. I, § 2, теорема 2) и учитывая, что $z(t_0)=0$, получаем неравенство

$$z(t)\leqslant\int_{t_0}^{t}\varphi(s)\,k(s)\exp\left(-\int_{t_0}^{s}k(\tau)\,d\tau\right)ds,$$

откуда

$$y(t)\leqslant\int_{t_0}^{t}\varphi(s)\,k(s)\exp\left(\int_{s}^{t}k(\tau)\,d\tau\right)ds,$$

а поскольку $w(t)\leqslant\varphi(t)+y(t)$, то отсюда вытекает (13).

Следствие. *Пусть* $\mathbf{f}$ — *липшицева функция с константой* $k>0$, *определенная на* $I\times H$. *Если* $\mathbf{u}$ *и* $\mathbf{v}$ — *два приближенных решения уравнения* (1) *с точностью соответственно* ε_1 *и* ε_2, *определенные на* I *и принимающие свои значения в* H, *то для* $t\in I$ *имеет место неравенство*

$$\|\mathbf{u}(t)-\mathbf{v}(t)\|\leqslant\|\mathbf{u}(t_0)-\mathbf{v}(t_0)\|\,e^{k|t-t_0|}+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\frac{e^{k|t-t_0|}-1}{k}. \qquad (15)$$

В самом деле, для $t\geqslant t_0$ это неравенство является прямым следствием неравенства (9); если же $t\leqslant t_0$, то достаточно применить (9) к уравнению $\frac{d\mathbf{x}}{ds}=-\mathbf{f}(-s,\ \mathbf{x})$, получаемому из уравнения (1) путем замены переменной $t=-s$.

Замечания. 1) При $k=0$ неравенство (15) обращается в неравенство

$$\|\mathbf{u}(t)-\mathbf{v}(t)\|\leqslant\|\mathbf{u}(t_0)-\mathbf{v}(t_0)\|+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\,|t-t_0|,$$

доказательство которого очевидно.

2) Если E имеет *конечную* размерность и $\mathbf{f}$ есть липшицева функция на $I\times H$, то можно доказать существование приближенного решения уравнения (1) (предложение 3), не пользуясь аксиомой выбора (упражнение 1б)).

Предложение 6. *Пусть* $\mathbf{f}$ *и* $\mathbf{g}$ — *две функции, определенные на* $I\times H$, *удовлетворяющие условиям леммы* 1 *и такие, что на* $I\times H$

$$\|\mathbf{f}(t,\ \mathbf{x})-\mathbf{g}(t,\ \mathbf{x})\|\leqslant\alpha. \qquad (16)$$

Предположим, кроме того, что $\mathbf{g}$ *есть липшицева функция на* $I\times H$ *с константой* $k>0$. *Если при этих условиях* $\mathbf{u}$ *есть приближенное решение уравнения* $\mathbf{x}'=\mathbf{f}(t,\ \mathbf{x})$ *с точностью* ε_1, *определенное на* I, *со значениями в* H, *а* $\mathbf{v}$ — *приближенное решение уравнения* $\mathbf{x}'=\mathbf{g}(t,\ \mathbf{x})$ *с точностью* ε_2, *определенное на* I, *со значениями в* H, *то для любого* $t\in I$

$$\|\mathbf{u}(t)-\mathbf{v}(t)\|\leqslant\|\mathbf{u}(t_0)-\mathbf{v}(t_0)\|\,e^{k|t-t_0|}+(\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2)\frac{e^{k|t-t_0|}-1}{k}. \qquad (17)$$

В самом деле, для любого t из дополнения относительно I некоторой счетной части I выполняется неравенство

$$\|\mathbf{u}'(t)-\mathbf{g}(t,\ \mathbf{u}(t))\|\leqslant\alpha+\varepsilon,$$

то есть $\mathbf{u}$ есть приближенное решение уравнения $\mathbf{x}'=\mathbf{g}(t,\ \mathbf{x})$ с точностью $\alpha+\varepsilon_1$, откуда, применяя предложение 5, получаем неравенство (17).

5. Существование и единственность решений липшицевых и локально липшицевых уравнений

Теорема 1 (Коши). *Пусть* $\mathbf{f}$ — *липшицева функция на* $I \times H$, J — *компактный интервал, содержащийся в* I *и не сводящийся к точке,* t_0 — *точка из* J, S — *открытый шар с центром* $\mathbf{x}_0$ *и радиусом* r, *содержащийся в* H, *и* M — *верхняя грань функции* $\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\|$ *на* $J \times S$. *При этих условиях для любого не сводящегося к точке компактного интервала* K, *принадлежащего пересечению интервалов* J *и* $\left]t_0 - \frac{r}{M}, t_0 + \frac{r}{M}\right[$ *и содержащего* t_0, *существует, и притом единственное, решение дифференциального уравнения* $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, *определенное на* K, *принимающее значения в* S *и равное* $\mathbf{x}_0$ *в точке* t_0.

Действительно, для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ множество F_ε приближенных решений уравнения (1) с точностью ε, определенных на K, принимающих значения в S и равных $\mathbf{x}_0$ в точке t_0, не пусто (предложение 3); кроме того, если $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ принадлежат F_ε, то в силу (15) неравенство

$$\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)\| \leqslant 2\varepsilon \frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{k}$$

выполняется для любого $t \in K$, и значит, множества F_ε образуют базис фильтра $\mathfrak{G}$, *равномерно* сходящийся на K к непрерывной функции $\mathbf{w}$, равной $\mathbf{x}_0$ в точке t_0; функция $\mathbf{w}$ принимает свои значения в S, так как из того, что ε достаточно мало, следует, что функции $\mathbf{u} \in F_\varepsilon$ принимают свои значения в замкнутом шаре, содержащемся в S. Поскольку $\mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t))$ равномерно сходится на K по фильтру $\mathfrak{G}$ к функции $\mathbf{f}(t, \mathbf{w}(t))$, то $\mathbf{w}$ удовлетворяет уравнению (6) и, значит, является решением уравнения (1). Единственность решения сразу вытекает из неравенства (15), если положить в нем $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ и $\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{v}(t_0)$.

Будем говорить, что функция $\mathbf{f}$, определенная на $I \times H$, *локально липшицева* на этом множестве, если для любой точки $(t, \mathbf{x})$ из $I \times H$ существует такая окрестность V точки t (относительно I) и такая окрестность S точки $\mathbf{x}$, что функция $\mathbf{f}$ является липшицевой функцией на $V \times S$ (с некоторой константой k, *зависящей от* V и S). По теореме Бореля — Лебега для любого компактного интервала $J \subset I$ и любой точки $\mathbf{x}_0 \in H$ найдется такой содержащийся в H открытый шар S с центром $\mathbf{x}_0$, что функция $\mathbf{f}$ липшицева на $J \times S$; следовательно, $\mathbf{f}$ удовлетворяет условиям леммы 1. Если $\mathbf{f}$ — локально липшицева функция на $I \times H$, то мы будем говорить, что уравнение $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ *локально липшицево* на $I \times H$.

Обобщим и уточним теорему 1 для локально липшицевых уравнений; мы ограничимся случаем, когда t_0 является *левым концом* интервала I; отсюда легко перейти к случаю, когда t_0 — произвольная точка интервала I (см. следствие из предложения 5).

Теорема 2. *Пусть $I \subset \mathbf{R}$ — интервал (не сводящийся к точке) с левым концом $t_0 \in J$, H — непустое открытое подмножество пространства E и $\mathbf{f}$ — локально липшицева функция на $I \times H$.*

1° *Для любого $\mathbf{x}_0 \in H$ найдется такой наибольший интервал $J \times I$ с левым концом $t_0 \in J$, на котором существует интеграл $\mathbf{u}$ уравнения $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, принимающий свои значения в H и равный $\mathbf{x}_0$ в точке t_0; этот интеграл единствен.*

2° *Если $J \neq I$, то J есть полуоткрытый интервал $[t_0, \beta[$ конечной длины; кроме того, в этом случае для любого компактного подмножества $K \subset H$ множество $\mathbf{u}'(K)$ является компактным подмножеством множества $\mathbf{R}$.*

3° *Если интервал J ограничен и функция $\mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t))$ ограничена на J, то в правом конце интервала J функция $\mathbf{u}(t)$ имеет предел слева, равный $\mathbf{c}$; если, кроме того, $J = I$, то $\mathbf{c}$ есть граничная точка множества H в E.*

1° Пусть $\mathfrak{M}$ — множество интервалов L (не сводящихся к точке) с левым концом $t_0 \in L$, содержащихся в I и таких, что на L существует решение уравнения (1), принимающее значения в H и равное $\mathbf{x}_0$ в точке t_0; в силу теоремы 1 множество $\mathfrak{M}$ не пусто. Пусть L и L' — два интервала, принадлежащие $\mathfrak{M}$, и пусть, к примеру, $L \subset L'$; если $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ — два интеграла уравнения (1), определенные соответственно на L и на L', принимающие значения в H и равные $\mathbf{x}_0$ в точке t_0, то $\mathbf{v}$ является продолжением $\mathbf{u}$. В самом деле, пусть t_1 есть верхняя грань множества таких $t \in L$, что $\mathbf{u}(s) = \mathbf{v}(s)$ для $t_0 \leqslant s \leqslant t$; покажем, что t_1 есть правый конец интервала L. В противном случае мы могли бы утверждать, что $\mathbf{u}(t_1) = \mathbf{v}(t_1)$ по непрерывности, и $\mathbf{x}_1 = \mathbf{u}(t_1)$ принадлежала бы H; а поскольку $\mathbf{f}$ локально липшицева, то теорема 1 показывает, что может существовать лишь один интеграл уравнения (1), определенный в некоторой окрестности точки t_1, принимающий значения в H и равный $\mathbf{x}_1$ в точке t_1; итак, мы пришли к противоречию, предположив, что t_1 не является правым концом интервала L. Таким образом, мы показали, что если J есть объединение интервалов $L \in \mathfrak{M}$, то существует, и притом единственный, интеграл уравнения (1), определенный на J, принимающий значения в H и равный $\mathbf{x}_0$ в точке t_0.

2° Предположим, что $J \neq I$, и пусть β — правый конец интервала J; если β является в то же время правым концом интервала I, то $\beta \in I$ (следовательно, β конечно), и тогда, согласно допущению, $J = [t_0, \beta[$. Допустим поэтому, что β не является правым концом интервала I; если $\beta \in J$, то $\mathbf{u}(\beta) = \mathbf{c}$ принадлежит H; в силу теоремы 1 существует интеграл уравнения (1), принимающий значения в H, определенный на интервале $[\beta, \beta_1[\subset I$ и равный $\mathbf{c}$ в точке β; значит, J не может быть наибольшим из интервалов множества $\mathfrak{M}$, что невозможно; таким образом, окончательно получаем, что $J = [t_0, \beta[$.

Если K есть компактная часть множества H, то множество $\mathbf{u}^{-1}(K)$ замкнуто в J; докажем существование такого $\gamma \in J$, что функция $\mathbf{u}'(K)$ непрерывна на $[t_0, \gamma]$, откуда будет вытекать компактность множества $\mathbf{u}'(K)$. В противном случае найдется такая точка $\mathbf{c} \in K$, что точка $(\beta, \mathbf{c})$ является предельной для множества точек $(t, \mathbf{u}(t))$, где $t < \beta$ и $\mathbf{u}(t) \in K$. А так как $\beta \in I$ и $\mathbf{c} \in H$, то в I существует такая окрестность V точки β, а в H — такой открытый шар S с центром $\mathbf{c}$ и радиусом r, что функция $\mathbf{f}$ является липшицевой и ограниченной на $V \times S$; пусть M — верхняя грань функции $\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\|$ на этом множестве. По предположению, найдется такое $t_1 \in J$, что $\beta - t_1 < \frac{r}{2M}$, $t_1 \in V$ и $\|\mathbf{u}(t_1) - \mathbf{c}\| \leqslant \frac{r}{2}$; теорема 1 показывает, что существует, и притом единственный, интеграл уравнения (1), принимающий значения в H, определенный на интервале $[t_1, t_2]$, *содержащем* β, и равный $\mathbf{u}(t_1)$ в точке t_1; так как на интервале $[t_1, \beta[$ этот интеграл совпадает с $\mathbf{u}$, то $J = [t_0, \beta[$ не может быть наибольшим из интервалов множества $\mathfrak{M}$, что противоречит сделанному предположению.

3° Допустим, что интервал J ограничен и что $\|\mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t))\| \leqslant M$ на J; следовательно, $\|\mathbf{u}'(t)\| \leqslant M$ на дополнении некоторой счетной части интервала J; значит, согласно теореме о конечных приращениях, $\|\mathbf{u}(s)-\mathbf{u}(t)\| \leqslant M|s-t|$ для любых s и t из J; таким образом, на основании критерия Коши функция $\mathbf{u}$ имеет в правом конце β интервала J предел слева, равный $\mathbf{c}$. Если $J \neq I$, то $\mathbf{c}$ не может принадлежать H, так как, продолжив $\mathbf{u}$ по непрерывности в точку β, мы получим, что $\mathbf{u}$ является интегралом уравнения (1), *принимающим значения* в H, определенным на интервале $[t_0, \beta]$ и равным $\mathbf{x}_0$ в точке t_0; стало быть, в этом случае $J=[t_0, \beta]$, что противоречит только что доказанному утверждению 2°.

Следствие 1. *Если $H=E$ и $J \neq I$, то функция $\mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t))$ не ограничена на J; если к тому же E имеет конечную размерность, то $\|\mathbf{u}(t)\|$ имеет в правом конце интервала J предел слева, равный $+\infty$.*

Первое утверждение этого следствия вытекает непосредственно из третьего пункта теоремы 2. Если же E — конечномерное пространство, то всякий замкнутый шар $S \subset E$ компактен, и тогда вторая часть теоремы 2 показывает, что существует такое $\gamma \in J$, что $\mathbf{u}(t) \notin S$ для $t > \gamma$.

Если E имеет бесконечную размерность, то может случиться, что $J \neq I$, а $\|\mathbf{u}(t)\|$ остается *ограниченной*, когда t стремится к правому концу интервала J (упражнение 5).

Следствие 2. *Если на $I \times H$ функция $\mathbf{f}$ является липшицевой с линейчатой функцией $k(t)$ и если правый конец β интервала J принадлежит I, то $\mathbf{u}$ имеет в точке β предел слева; если $H=E$ и $\mathbf{f}$ является липшицевой функцией на $I \times H$ с линейчатой функцией $k(t)$, то $J=I$.*

В самом деле, если $\beta \in I$, то в I существует такая компактная окрестность V точки β, что функции $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0)$ и $k(t)$ ограничены на V; следовательно, $\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\| \leqslant m\|\mathbf{x}\|+h$ (m и h — постоянные) на $V \times H$, откуда $\|\mathbf{u}'(t)\| \leqslant m\|\mathbf{u}(t)\|+h$ на дополнении некоторой счетной части множества $V \cap J$ и, значит, $\|\mathbf{u}(t)\| \leqslant m \int_{t_0}^{t}\|\mathbf{u}(s)\| ds+q$ (q — постоянная) на $V \cap J$; лемма 2 показывает, что $\|\mathbf{u}(t)\| \leqslant c e^{mt}+d$ (c и d — постоянные) на $V \cap J$; стало быть, $\mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t))$ остается ограниченной на J, и доказываемое следствие вытекает из теоремы 2.

Примеры. 1) Для дифференциального уравнения вида $\mathbf{x}'=\mathbf{g}(t)$, где $\mathbf{g}$ линейчата на I, всякий интеграл $\mathbf{u}$, очевидно, определен на всем интервале I. Отметим, что функция $\mathbf{u}$ может быть ограничена на I и в том случае, когда для $\mathbf{g}(t)$ это не имеет места.

2) Для скалярного уравнения $x'=\sqrt{1-x^2}$ имеем $I=\mathbf{R}$, $H=\,]-1,1[$. Если положить $t_0=x_0=0$, то соответствующий интеграл равен $\sin t$ *на наибольшем содержащем* 0 *интервале, на котором производная функции* $\sin t$ *положительна, то есть на* $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$; на концах же этого интервала интеграл стремится к правому концу интервала H.

3) Для скалярного уравнения $x'=1+x^2$ имеем $I=H=\mathbf{R}$; интеграл, обращающийся в нуль при $t=0$, равен $\operatorname{tg} t$, а наибольший содержащий 0 интервал, на котором функция непрерывна, есть $J=\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$; на концах этого интервала функция $|\operatorname{tg} t|$ стремится к $+\infty$ (ср. следствие 1 из теоремы 2).

4) Для скалярного уравнения $x'=\sin tx$ имеем $I=H=R$ и правая часть ограничена на $I\times H$; значит (следствие 1 из теоремы 2), каждый интеграл определен на всей прямой $\mathbf{R}$.

6. Непрерывность интегралов как функций от параметра

Предложение 6 показывает, что если дифференциальное уравнение $\mathbf{x}'=\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ является «близким» к липшицеву уравнению $\mathbf{x}'=\mathbf{g}(t, \mathbf{x})$ и *оба* уравнения имеют приближенное решение на одном и том же интервале, то эти два приближенных решения являются «близкими»; мы уточним этот результат, показав, что существование решения липшицева уравнения $\mathbf{x}'=\mathbf{g}(t, \mathbf{x})$ на некотором интервале влечет существование приближенного решения уравнения $\mathbf{x}'=\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ на том же интервале, если только на этом интервале значения решения уравнения $\mathbf{x}'=\mathbf{g}(t, \mathbf{x})$ не будут «слишком близкими» к *границе* множества H.

Предложение 7. *Пусть* $\mathbf{f}$ *и* $\mathbf{g}$ — *две функции, определенные на* $I\times H$, *удовлетворяющие условиям леммы* 1 *и такие, что на* $I\times H$

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})-\mathbf{g}(t, \mathbf{x})\|\leqslant\alpha. \tag{16}$$

Кроме того, предположим, что $\mathbf{g}$ — *липшицева функция с константой* $k > 0$ *на* $I \times H$, *а* $\mathbf{f}$ — *локально липшицева на* $I \times H$ *или что* E — *конечномерное пространство. Пусть* $(t_0, \mathbf{x}_0)$ — *точка из* $I \times H$, μ — *строго положительное число и* $\varphi(t) = \mu e^{k(t-t_0)} + \alpha \frac{e^{k(t-t_0)}-1}{k}$. *Пусть* $\mathbf{u}$ — *интеграл уравнения* $\mathbf{x}' = g(t, \mathbf{x})$, *определенный на интервале* $K = [t_0, b[$, *содержащемся в* I, *равный* $\mathbf{x}_0$ *в точке* t_0 *и такой, что для любого* $t \in K$ *замкнутый шар с центром* $\mathbf{u}(t)$ *и радиусом* $\varphi(t)$ *содержится в* H. *При этих условиях для всякого* $\mathbf{y} \in H$, *удовлетворяющего неравенству* $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| \leqslant \mu$, *существует интеграл* $\mathbf{v}$ *уравнения* $\mathbf{x}' = f(t, \mathbf{x})$, *определенный на* K, *принимающий значения в* H *и равный* $\mathbf{y}$ *в точке* t_0; *кроме того,* $\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)\| \leqslant \varphi(t)$ *на* K.

Пусть $\mathfrak{M}$ — множество интегралов уравнения $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, каждый из которых принимает свои значения в H, равен $\mathbf{y}$ в точке t_0 и определен на полуоткрытом интервале $[t_0, \tau[$, содержащемся в I (и зависящем от рассматриваемого интеграла). Согласно теореме 1 (если $\mathbf{f}$ локально липшицева) или следствию из предложения 4 (если E — конечномерное пространство) множество $\mathfrak{M}$ не пусто, и то же самое рассуждение, что в предложении 3, показывает, что множество $\mathfrak{M}$ *индуктивно*, если упорядочить его посредством отношения «$\mathbf{v}$ есть сужение $\mathbf{u}$». Пусть $\mathbf{v}_0$ — максимальный элемент множества $\mathfrak{M}$, $[t_0, t_1[$ — интервал, на котором определена функция $\mathbf{v}_0$; в силу предложения 6 все сводится к доказательству того, что $t_1 \geqslant b$. В противном случае на основании предложения 6 на интервале $[t_0, t_1[$ выполнялось бы неравенство $\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}_0(t)\| \leqslant \varphi(t)$; но на компактном интервале $[t_0, t_1]$ линейчатая функция $\mathbf{g}(t, \mathbf{u}(t))$ ограничена, и следовательно, на интервале $[t_0, t_1[$ функция $\mathbf{g}(t, \mathbf{v}_0(t))$ ограничена, поскольку

$$\|\mathbf{g}(t, \mathbf{v}_0(t))\| \leqslant \|\mathbf{g}(t, \mathbf{u}(t))\| + k\varphi(t)$$

на этом интервале. А так как $\mathbf{v}_0$ есть приближенное решение уравнения $\mathbf{x}' = \mathbf{g}(t, \mathbf{x})$ с точностью α на $[t_0, t_1[$, то для всех точек этого интервала, за исключением счетного множества, существует такое число $M > 0$, что $\|\mathbf{v}_0'(t)\| \leqslant M$; тогда теорема о конечных приращениях показывает, что $\|\mathbf{v}_0(s) - \mathbf{v}_0(t)\| \leqslant M|s - t|$ для любой пары точек s, t из $[t_0, t_1[$, и значит (критерий Коши), $\mathbf{v}_0(t)$ имеет в точке t_1 предел слева, равный $\mathbf{c}$, и по непрерывности

$\|\mathbf{c}-\mathbf{u}(t_1)\|\leqslant\varphi(t_1)$; следовательно, $\mathbf{c}\in H$. В таком случае на основании теоремы 1 или следствия из предложения 4 заключаем, что интеграл уравнения $\mathbf{x}'=\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ определен на интервале $[t_1, t_2[$ и равен $\mathbf{c}$ в точке t_1, что противоречит определению $\mathbf{v}_0$.

Теорема 3. *Пусть F — топологическое пространство, $\mathbf{f}$ — такое отображение множества $I\times H\times F$ в E, что для любого $\xi\in F$ функция $(t, \mathbf{x})\to\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \xi)$ липшицева на $I\times H$* и *$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \xi)$ равномерно стремится к $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \xi_0)$ на $I\times H$, когда ξ стремится к ξ_0. Пусть $\mathbf{u}_0(t)$ — интеграл уравнения $\mathbf{x}'=\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \xi_0)$, определенный на интервале $J=[t_0, b[$, содержащемся в I, принимающий значения в H и равный x_0 в точке t_0. Для любого компактного интервала $[t_0, t]$, содержащегося в J, в F существует такая окрестность V точки ξ_0, что для любого $\xi\in V$ уравнение $\mathbf{x}'=\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \xi)$ имеет интеграл (и притом единственный) $\mathbf{u}(t, \xi)$, определенный на $[t_0, t_1]$, принимающий значения в H и равный $\mathbf{x}_0$ в точке t_0; кроме того, когда ξ стремится к ξ_0, $\mathbf{u}(t, \xi)$ равномерно стремится к $\mathbf{u}_0(t)$ на $[t_0, t_1]$.*

В самом деле, пусть $r>0$ таково, что для $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ замкнутый шар радиуса r с центром в $\mathbf{u}_0(t)$ содержится в H; если $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \xi_0)$ — липшицева функция с константой $k>0$ на $I\times H$, то возьмем α столь малым, что $\alpha\frac{e^{k(t_1-t_0)}-1}{k}<r$; выбрав затем V так, чтобы для любого $\xi\in V$ на $I\times H$ выполнялось неравенство $\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \xi)-\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \xi_0)\|\leqslant\alpha$, мы при помощи предложения 7 получаем требуемое утверждение; кроме того, на $[t_0, t_1]$

$$\|\mathbf{u}(t, \xi)-\mathbf{u}_0(t)\|\leqslant\alpha\frac{e^{k(t_1-t_0)}-1}{k},$$

что и завершает доказательство теоремы.

Замечание. Если $H=E$ и условие (16) выполняется на $I\times E$, то предложение 7 применимо к *любому* решению уравнения $\mathbf{x}'=\mathbf{g}(t, \mathbf{u})$ на *произвольном* интервале, на котором это решение определено; можно даже предположить, что $\mathbf{g}(t, \mathbf{x})$ есть липшицева функция с функцией $k(t)$, линейчатой на K, но не обязательно ограниченной на этом интервале.

7. *Зависимость от начальных условий*

Пусть $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ — локально липшицево уравнение на $I \times H$; согласно теореме 2, для любой точки $(t_0, \mathbf{x}_0)$ из $I \times H$ существует *наибольший* интервал $J(t_0, \mathbf{x}_0) \subset I$, не сводящийся к точке, содержащий t_0 и такой, что на нем существует интеграл (и притом единственный) уравнения, равный $\mathbf{x}_0$ в точке t_0; мы уточним, каким образом этот интеграл и интервал $J(t_0, \mathbf{x}_0)$, на котором он определен, зависят от точки $(t_0, \mathbf{x}_0)$.

Теорема 4. *Пусть* $\mathbf{f}$ — *локально липшицева функция на* $I \times H$ *и* $(a, \mathbf{b})$ — *произвольная точка из* $I \times H$.

1° *Существует такой интервал* $K \subset I$, *являющийся окрестностью точки* a *в* I, *и такая окрестность* V *точки* $\mathbf{b}$ *в* H, *что для любой точки* $(t_0, \mathbf{x}_0)$ *из* $K \times V$ *существует, и притом единственный, интеграл* $\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$, *определенный на* K, *принимающий значения в* H *и равный* $\mathbf{x}_0$ *в точке* t_0 (иными словами, для любой точки $(t_0, \mathbf{x}_0) \in K \times V$ имеем $J(t_0, \mathbf{x}_0) \supset K$).

2° *Отображение* $(t, t_0, \mathbf{x}_0) \to \mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ *произведения* $K \times K \times V$ *в* H *равномерно непрерывно*.

3° *В* H *существует такая окрестность* $W \subset V$ *точки* $\mathbf{b}$, *что для любой точки* $(t, t_0, \mathbf{x}_0) \subset K \times K \times W$ *уравнение* $\mathbf{x}_0 = \mathbf{u}(t_0, t, \mathbf{x})$ *имеет в* V *единственное решение* $\mathbf{x}$, *равное* $\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ («интеграл, разрешенный относительно постоянной интегрирования»).

1° Пусть S — такой содержащийся в H шар радиуса r с центром в $\mathbf{b}$ и J_0 — такой интервал, содержащийся в I и являющийся окрестностью точки a в I, что функция $\mathbf{f}$ ограничена и липшицева (с некоторой константой k) на $J_0 \times S$; обозначим через M верхнюю грань функции $\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\|$ на $J_0 \times S$. Тогда найдется (теорема 1) интервал $J \subset J_0$, являющийся окрестностью точки a в I, и интеграл $\mathbf{v}$ уравнения $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, определенный на J, принимающий значения в S и равный $\mathbf{b}$ в точке a. Мы покажем, что открытый шар V радиуса $\frac{r}{2}$ с центром в $\mathbf{b}$ и пересечение K с J и с интервалом $]a-l, a+l[$, где *l достаточно мало*, удовлетворяют требуемым условиям. В самом деле, предложение 7 (примененное к множеству $J_0 \times S$ для случая $\alpha = 0$) показывает, что существует интеграл уравнения $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, *определенный на* K, принимающий значения в S и равный $\mathbf{x}_0$ в точке

$t_0 \in K$, так как для любого $t \in K$

$$\|\mathbf{v}(t)-\mathbf{b}\|+\|\mathbf{v}(t_0)-\mathbf{x}_0\| e^{k|t-t_0|} < r. \tag{18}$$

Но в силу теоремы о конечных приращениях $\|\mathbf{v}(t)-\mathbf{b}\| \leqslant \leqslant M|t-a| \leqslant Ml$ для любого $t \in K$; поскольку $\|\mathbf{x}_0-\mathbf{b}\| \leqslant r/2$, то ясно, что для того, чтобы соотношение (18) выполнялось в любой точке $(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ из $K \times K \times V$, достаточно взять l таким, чтобы

$$Ml+\left(Ml+\frac{r}{2}\right)e^{2kl} < r. \tag{19}$$

2° Согласно теореме о конечных приращениях, для любых t_0, t_1, t_2 из K и любого $\mathbf{x}_0$ из V справедливо неравенство

$$\|\mathbf{u}(t_1, t_0, \mathbf{x}_0)-\mathbf{u}(t_2, t_0, \mathbf{x}_0)\| \leqslant M|t_2-t_1|. \tag{20}$$

Предложение 5 показывает, что соотношение

$$\|\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_1)-\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_2)\| \leqslant e^{2kl}\|x_2-x_1\| \tag{21}$$

выполняется для любых t и t_0 из K и любых $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ из V. Наконец, если t_1 и t_2 — любые точки из K, то в силу теоремы о конечных приращениях

$$\|\mathbf{u}(t_1, t_2, \mathbf{x}_0)-\mathbf{u}(t_2, t_2, \mathbf{x}_0)\| \leqslant M|t_2-t_1|,$$

то есть

$$\|\mathbf{u}(t_1, t_2, \mathbf{x}_0)-\mathbf{x}_0\| \leqslant M|t_2-t_1|;$$

а так как функция $\mathbf{u}(t, t_2, \mathbf{x}_0)$ совпадает с интегралом, принимающим в точке t_1 значение $\mathbf{u}(t_1, t_2, \mathbf{x}_0)$, то предложение 5 показывает, что

$$\|\mathbf{u}(t, t_1, \mathbf{x}_0)-\mathbf{u}(t, t_2, \mathbf{x}_0)\| \leqslant Me^{2kl}|t_2-t_1| \tag{22}$$

для любых t, t_1 и t_2 из K и любого $\mathbf{x}_0$ из V. Таким образом, неравенства (20), (21) и (22) показывают, что отображение $(t, t_0, \mathbf{x}_0) \to \mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ равномерно непрерывно на $K \times K \times V$.

3° В силу неравенства (20) $\|\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)-\mathbf{x}_0\| \leqslant M|t-t_0| \leqslant \leqslant 2Ml$ на $K \times K \times V$. Если взять l столь малым, чтобы $2Ml < \frac{r}{4}$, то, очевидно, для произвольной точки $\mathbf{x}_0$ открытого шара W с центром $\mathbf{b}$ и радиусом $\frac{r}{4}$ имеем $\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0) \in V$ при любых t и t_0 из K. Если $\mathbf{x}=\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$, то функция $s \to \mathbf{u}(s, t, \mathbf{x})$ определена на K и равна интегралу уравнения (1), принимающему в точке t значение $\mathbf{x}$, то есть равна $\mathbf{u}(s, t_0, \mathbf{x}_0)$; в частности,

$$\mathbf{x}_0=\mathbf{u}(t_0, t_0, \mathbf{x}_0)=\mathbf{u}(t_0, t, \mathbf{x}).$$

Если при этом $\mathbf{y} \in V$ удовлетворяет условию $\mathbf{x}_0 = \mathbf{u}(t_0, t, \mathbf{y})$, то интеграл $s \to \mathbf{u}(s, t, \mathbf{y})$ принимает в точке t_0 значение $\mathbf{x}_0$, значит, совпадает с интегралом $s \to \mathbf{u}(s, t_0, \mathbf{x}_0)$ и, следовательно, принимает в точке t значение $\mathbf{x}$, что показывает, что $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, чем доказательство и завершается.

Упражнения. 1) а) В обозначениях n° 3 предположим, что $\mathbf{f}$ равномерно непрерывна на $J \times S$. Доказать для этого случая предложение 3, не пользуясь аксиомой выбора (пусть δ таково, что из соотношений $|t_2 - t_1| \leqslant \delta$, $\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| \leqslant \delta$ вытекает неравенство $\|\mathbf{f}(t_2, \mathbf{x}_2) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_1)\| \leqslant \varepsilon$; рассмотреть разбиение J на интервалы длины меньше или равной $\min\left(\delta, \dfrac{\delta}{M}\right)$ и определить по индукции приближенное решение).

б) Доказать, не пользуясь аксиомой выбора, предложение 3 для того случая, когда E — конечномерное пространство, а $\mathbf{f}$ — липшицева функция на $I \times H$ (заметить, что для любого $\delta > 0$ в S найдется конечное число таких точек $\mathbf{x}_i$, что любая точка из S будет отстоять от одной из $\mathbf{x}_i$ на расстоянии, не превышающем δ; далее поступать, как в а), рассматривая конечное число линейчатых функций $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_i)$).

2) Пусть заданы два числа $b > 0$, $M > 0$ и произвольное число $\varepsilon > 0$. Указать пример такого скалярного дифференциального уравнения $x' = g(x)$, что $|g(x)| \leqslant M$ для $|x| \leqslant b$ и что интеграл $x = u(t)$ этого уравнения непрерывен на интервале $\left]-\dfrac{b}{M} - \varepsilon, \dfrac{b}{M} + \varepsilon\right[$, но не имеет конечного предела в точке $x = \dfrac{b}{M} + \varepsilon$ (определить g таким образом, чтобы рассматриваемый интеграл имел на интервале $\left]-\dfrac{b}{M} - \varepsilon, \dfrac{b}{M} + \varepsilon\right[$ непрерывную производную, которая на интервале $\left[-\dfrac{b}{M}, \dfrac{b}{M}\right]$ равна постоянной M).

3) Пусть S — открытый шар радиуса r с центром в $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{f}$ — липшицева функция с константой $k > 0$ на $I \times S$; предположим, кроме того, что $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0)$ ограничена на I, и обозначим через M_0 верхнюю грань функции $\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0)\|$ на этом интервале. Показать, что для любого $t_0 \in I$ существует интеграл $\mathbf{u}$ уравнения $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, принимающий значения в S, равный $\mathbf{x}_0$ в точке t_0 и определенный на пересечении интервала I с интервалом $]t_0 - \lambda, t_0 + \lambda[$, где $\lambda = \dfrac{1}{k} \log\left(1 + \dfrac{kr}{M_0}\right)$ (заметить, что для $t > t_0$ имеем $\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{x}_0\| \leqslant$

$$\leqslant M_0(t - t_0) + k \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{u}(s) - \mathbf{x}_0\| \, ds).$$

°4) а) Пусть $I =]t_0 - a, t_0 + a[$ — открытый интервал из $\mathbf{R}$, S — открытый шар в E радиуса r с центром в $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{f}$ — локально липшицева функция на $I \times S$. Пусть $h(s, z)$ — положительная функция действительных переменных s, z, определенная и непрерывная для $0 \leqslant s \leqslant a$ и $0 \leqslant z \leqslant r$ и такая, что при любом $s \in [0, a]$ отображение $z \to h(s, z)$ является возрастающей функцией; предположим, что на $I \times S$ выполняется неравенство $\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\| \leqslant h(|t - t_0|, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|)$. Пусть φ — примитивная линейчатой на $[0, \alpha]$ $(\alpha < a)$ функции, принимающая значения в $[0, r[$ и такая, что $\varphi(0) = 0$ и $\varphi'(s) > h(s, \varphi(s))$ на всем интервале $[0, \alpha]$, кроме счетного множества точек. Показать, что интеграл $\mathbf{u}$ уравнения $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, равный $\mathbf{x}_0$ в точке t_0, определен на $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$ и что на этом интервале $\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{x}_0\| \leqslant \varphi(|t - t_0|)$.

б) Вывести из а), что если $\mathbf{f}$ определена на $I \times E$ и если существует функция $h(z)$ действительного переменного z, непрерывная, возрастающая, строго положительная для всех $z \geqslant 0$ из этого множества и такая, что $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dz}{h(z)} = +\infty$ и $\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\| \leqslant h(\|\mathbf{x}\|)$, то любой интеграл уравнения $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ определен на всем интервале I.

°5) Пусть E — полное нормированное пространство последовательностей $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ действительных чисел, удовлетворяющих условию $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$, с нормой $\|\mathbf{x}\| = \sup\limits_n |x_n|$. Пусть для любого целого n: $\mathbf{e}_n$ есть последовательность, все члены которой равны нулю, кроме члена с номером n, равного 1; пространство E есть прямая сумма подпространства V_n размерности 2, порожденного векторами $\mathbf{e}_n$ и $\mathbf{e}_{n+1}$, и замкнутого подпространства W_n, порожденного векторами $\mathbf{e}_k$ с индексом k, отличным от n и от $n+1$. Пусть $\mathbf{f}_n$ — непрерывная и липшицева на E функция со значениями в E, постоянная на любом классе по модулю W_n, равная $\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_n$ на прямой, соединяющей $\mathbf{e}_n$ и $\mathbf{e}_{n+1}$, и равная 0 на пересечении V_n с шаром $\|\mathbf{x}\| \leqslant \frac{1}{4}$. С другой стороны, пусть для любого целого n функция φ_n означает числовую функцию, определенную и непрерывную на интервале $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, равную 0 на концах этого интервала и такую, что $\int\limits_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \varphi_n(t)\, dt = 1$. Пусть I — интервал $[0, 1]$ из $\mathbf{R}$; рассмотрим на $I \times E$ функцию $\mathbf{f}$ со значениями в E, определенную следующим образом: $\mathbf{f}(0, \mathbf{x}) = 0$ для любого $\mathbf{x} \in E$, $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \varphi_n(t)\mathbf{f}_n(t)$ для $\frac{1}{n+1} \leqslant t \leqslant \frac{1}{n}$.

Показать, что $\mathbf{f}$ непрерывна и локально липшицева на $I \times E$, но тем не менее существует интеграл $\mathbf{u}$ уравнения $\mathbf{x}' = f(t, \mathbf{x})$, определенный и ограниченный на $]0, 1[$, равный $\mathbf{e}_n$ для $t = \frac{1}{n}$ и, значит, не стремящийся ни к какому пределу, когда t стремится к 0.

°6) а) Пусть $I = [0, +\infty[$; показать, что если $\mathbf{f}$ — липшицева функция на $I \times E$ с линейчатой функцией $k(t) > 0$, для которой $\int_0^\infty k(t)\,dt$ сходится, то всякий интеграл уравнения $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ определен на всем интервале I.

б) Если, кроме того, интеграл $\int_0^\infty \| \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0) \| \, dt$ сходится (для некоторой точки $\mathbf{x}_0 \in E$), то показать, что всякий интеграл уравнения $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ стремится к конечному пределу, когда t стремится к $+\infty$ (вначале показать, что при t, стремящемся к $+\infty$, всякий интеграл остается ограниченным).

7) Рассмотрим систему скалярных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j,\, k=1}^{n} c_{ijk} x_j x_k \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

где c_{ijk} — постоянные, удовлетворяющие условию $c_{kji} = -c_{ijk}$. Показать, что интегралы этой системы определены для всех значений t $\left(\text{заметить, что } \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \text{ постоянна для любого интеграла } \mathbf{x} = (x_i)\right)$.

8) Пусть $\mathbf{f}$ — функция, определенная на $I \times H$, удовлетворяющая условиям леммы 1 и такая, что для некоторой константы k, $0 < k < 1$, и некоторой точки $t_0 \in I$ при любых $t \in I$ и $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ из H выполняется неравенство

$$\| \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_2) \| \leqslant \frac{k}{|t - t_0|} \| \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \|.$$

Показать, что если $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ — два приближенных решения уравнения $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ с точностью соответственно ε_1 и ε_2, определенные на I, принимающие значения в H и принимающие одно и то же значение в точке t_0, то для любого $t \in I$ выполняется неравенство

$$\| \mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t) \| \leqslant \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{1 - k} |t - t_0|.$$

Вывести отсюда, что при указанных условиях теоремы 1 и 2 остаются справедливыми для уравнения $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$.

°9) Пусть I — интервал из $\mathbf{R}$, t_0 — точка из I, S — шар в E радиуса r с центром в $\mathbf{x}_0$, G — нормированное пространство ограниченных отображений произведения $I \times S$ в E, причем норма такого отображения $\mathbf{f}$ равна верхней грани $\| \mathbf{f} \|$ функции $\| \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \|$ на $I \times S$.

Пусть G_M есть шар $\|\mathbf{f}\| \leqslant M$ в G для любого $M > 0$. Пусть L — подмножество пространства G, образованное липшицевыми отображениями $I \times S$ в E; пусть для любой функции $\mathbf{f} \in L \cap G_M$ интеграл $\mathbf{u} = U(\mathbf{f})$ уравнения $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ таков, что $\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{x}_0$, что он принимает значения в S и определен на пересечении интервала J_M из I с интервалом $\left]t_0 - \frac{r}{M}, t_0 + \frac{r}{M}\right[$ (теорема 1).

а) Пусть $(\mathbf{f}_n)$ — последовательность функций, принадлежащих $L \cap G_M$; если $\mathbf{f}_n$ равномерно сходится на $I \times S$ к некоторой функции $\mathbf{f}$, то любое предельное значение (в топологии равномерной сходимости) последовательности $\mathbf{u}_n = U(\mathbf{f}_n)$ в пространстве F ограниченных отображений интервала J_M в E есть интеграл уравнения $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, принимающий значение $\mathbf{x}_0$ в точке t_0 (воспользоваться тем, что множество функций $\mathbf{u}_n$ равностепенно непрерывно). Обратно, всякий интеграл $\mathbf{v}$ уравнения $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, определенный на J_M и такой, что $\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{x}_0$, является также интегралом уравнения $\mathbf{x}' = \mathbf{g}(t, \mathbf{x})$, где $\mathbf{g}$ — липшицева функция, сколь угодно близкая к функции $\mathbf{f}$ в G (рассмотреть уравнение $\mathbf{x}' = \mathbf{f}_n(t, \mathbf{x}) + \mathbf{v}'(t) - \mathbf{f}_n(t, \mathbf{v}(t))$).

б) Предположим, кроме того, что E имеет *конечную* размерность. Показать, что если $\mathbf{f} \in G_M$ удовлетворяет условиям леммы 1, то для любого $t \in J_M$ множество $H(t)$ значений в точке t интегралов уравнения $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, принимающих значение $\mathbf{x}_0$ в точке t_0, есть *компактное связное* множество (для доказательства того, что $H(t)$ замкнуто, воспользоваться теоремой Асколи; для доказательства его связности использовать а): если x_1, x_2 — точки из $H(t)$ и ε — произвольное строго положительное число, то показать, что существует связное множество Φ таких функций $\mathbf{g}$, принадлежащих $L \cap G_M$, что $\|\mathbf{f} - \mathbf{g}\| \leqslant \varepsilon$ для любой функции $\mathbf{g} \in \Phi$ и что множество значений функций $U(\mathbf{g})$ в точке t связно и содержит точки x_1 и x_2. В заключение перейти к пределу по ультрафильтру окрестностей 0 в $\mathbf{R}_+$).

10) Пусть f — непрерывная ограниченная числовая функция в прямоугольнике P: $|t - t_0| < a$, $|x - x_0| < b$ из $\mathbf{R}^2$. Пусть M — верхняя грань функции $|f(t, x)|$ на P и $I =]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$, где $\alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$. Показать, что верхняя и нижняя огибающие множества Φ интегралов уравнения $x' = f(t, x)$, определенных на I и принимающих значение x_0 в точке t_0, также являются интегралами уравнения $x' = f(t, x)$ и называются соответственно *максимальным* и *минимальным* интегралом этого уравнения, соответствующим точке (t_0, x_0) (заметить, что множество Φ равностепенно непрерывно и замкнуто в топологии равномерной сходимости на I).

Пусть (для любого $\tau \in I$) ξ есть значение минимального интеграла, соответствующего (t_0, x_0) в точке τ. Показать, что минимальный интеграл, соответствующий точке (τ, ξ), совпадает с минимальным интегралом, соответствующим точке (t_0, x_0), на интервале вида $[\tau, \tau+h[$, если $\tau > t_0$, и на интервале вида $]\tau-h, \tau]$, если $\tau < t_0$.

Вывести отсюда, что существует наибольший открытый интервал $]t_1, t_2[$, содержащий t_0, содержащийся в $]t_0-a, t_0+a[$ и такой, что минимальный интеграл u, соответствующий точке (t_0, x_0), может быть продолжен по непрерывности на $]t_1, t_2[$ так, чтобы в любой точке t из $]t_1, t_2[$ значение функции $u(t)$ принадлежало интервалу $]x_0-b, x_0+b[$ и чтобы интеграл u совпадал с минимальным интегралом, соответствующим точке $(t, u(t))$, на интервале вида $[t, t+h[$, если $t > t_0$, и на интервале вида $]t-h, t]$, если $t < t_0$; кроме того, показать, что либо $t_1 = t_0 - a$ (соответственно $t_2 = t_0 + a$), либо $\lim\limits_{t \to t_1} u(t) = x_0 \pm b$ (соответственно $\lim\limits_{t \to t_2} u(t) = x_0 \pm b$).

11) а) Пусть в прямоугольнике $P: |t-t_0| < a$, $|x-x_0| < b$ определены такие две непрерывные числовые функции g и h, что $g(t, x) < h(t, x)$ на P. Пусть u (соответственно v) — интеграл уравнения $x' = g(t, x)$ (соответственно $x' = h(t, x)$), определенный на интервале $[t_0, t_0+c[$ и такой, что $u(t_0) = x_0$ (соответственно $v(t_0) = x_0$); показать, что для $t_0 < t < t_0 + c$ выполняется неравенство $u(t) < v(t)$ (рассмотреть верхнюю грань τ тех t, для которых имеет место это неравенство).

б) Пусть u — максимальный интеграл уравнения $x' = g(t, x)$, соответствующий точке (t_0, x_0) (упражнение 10), определенный на интервале $[t_0, t_0+c[$. Показать, что на любом компактном интервале $[t_0, t_0+\alpha[$, содержащемся в $[t_0, t_0+c[$, минимальный и максимальный интегралы уравнения $x' = g(t, x) + \varepsilon$, соответствующие точке (t_0, x_0), определены для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ и равномерно сходятся к u, когда ε стремится к 0, принимая положительные значения.

в) Пусть g и h — две числовые функции, определенные и непрерывные на P и такие, что $g(t, x) \leqslant h(t, x)$ на P. Пусть $[t_0, t_0+c[$ — интервал, на котором определены интеграл u уравнения $x' = g(t, x)$, удовлетворяющий условию $u(t_0) = x_0$, и максимальный интеграл v уравнения $x' = h(t, x)$, соответствующий точке (t_0, x_0). Показать, что на этом интервале $u(t) \leqslant v(t)$ (свести к случаю а) при помощи б)).

12) Пусть u — интеграл уравнения $x' = \lambda + \dfrac{x^2}{1+t^2}$, равный 0 для $t = 0$, и пусть J — наибольший интервал с началом в 0, на котором функция u непрерывна.

а) Показать, что если $\lambda \leqslant \dfrac{1}{4}$, то $J = [0, +\infty[$ (использовать упражнение 4).

б) Показать, что если $\lambda > \dfrac{1}{4}$, то $J = [0, a[$, где

$$\operatorname{sh} \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}} < a < \operatorname{sh} \frac{\pi}{\sqrt{4\lambda - 1}}$$

(положить $x = y\sqrt{1+t^2}$ и воспользоваться упражнением 11).

°13) а) Пусть $I=[t_0, t_0+c]$, и пусть ω — непрерывная положительная числовая функция, определенная на $I\times\mathbf{R}$. Пусть S — шар с центром в $\mathbf{x}_0$ в полном нормированном пространстве E, и пусть $\mathbf{f}$ — такое непрерывное отображение произведения $I\times S$ в E, что для любых $t\in I$, $\mathbf{x}_1\in S$ и $\mathbf{x}_2\in S$ выполняется неравенство $\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_1)-\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_2)\|\leqslant\omega(t, \|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\|)$. Пусть $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ — два интеграла уравнения $\mathbf{x}'=\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, определенные на I, принимающие значения в S и такие, что $\mathbf{u}(t_0)=\mathbf{x}_1$, $\mathbf{v}(t_0)=\mathbf{x}_2$; пусть w — *максимальный* интеграл (упражнение 10) уравнения $z'=\omega(t, z)$, соответствующий точке $(t_0, \|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\|)$; допустим, что он определен на I; показать, что на I выполняется неравенство $\|\mathbf{u}(t)-\mathbf{v}(t)\|\leqslant w(t)$. (Пусть $w(t, \varepsilon)$ — максимальный интеграл уравнения $z'=\omega(t, z)+\varepsilon$, соответствующий точке $(t_0, \|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\|)$, где $\varepsilon>0$ достаточно мало. Рассуждая от противного, показать, что $\|\mathbf{u}(t)-\mathbf{v}(t)\|\leqslant w(t, \varepsilon)$ для любого $\varepsilon>0$.)

б) В формулировке условий упражнения а) заменить интервал I интервалом $I'=]t_0-c, t_0]$. Показать, что если w является на этом интервале *минимальным* интегралом уравнения $z'=\omega(t, z)$, соответствующим точке $(t_0, \|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\|)$, то на I' выполняется неравенство $\|\mathbf{u}(t)-\mathbf{v}(t)\|\geqslant w(t)$ (тот же прием).

°14) а) Пусть $\omega(t, z)$ — непрерывная положительная числовая функция, определенная для $0<t\leqslant a$ и $z\geqslant 0$. Предположим, что $z=0$ является единственным интегралом уравнения $z'=\omega(t, z)$, определенным для $0<t\leqslant a$ и таким, что $\lim\limits_{t\to 0} z(t)=0$ и $\lim\limits_{t\to 0}\frac{z(t)}{t}=0$. Пусть $I=[t_0, t_0+a[$, S — шар в E с центром в $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{f}$ — такое непрерывное отображение произведения $I\times S$ в E, что для любых $t\in I$, $\mathbf{x}_1\in S$ и $\mathbf{x}_2\in S$ выполняется неравенство $\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_1)-\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_2)\|\leqslant\omega(|t-t_0|, \|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\|)$. Показать, что на интервале, содержащемся в I и имеющем левым концом t_0, уравнение $\mathbf{x}'=\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ не может иметь более одного решения $\mathbf{u}$, удовлетворяющего условию $\mathbf{u}(t_0)=\mathbf{x}_0$. (Рассуждать от противного: если $\mathbf{v}$ — другой интеграл уравнения $\mathbf{x}'=\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, то при помощи упражнения 13 б) оценить снизу выражение $\|\mathbf{u}(t)-\mathbf{v}(t)\|$ на интервале с левым концом в t_0 и получить противоречие.)

Применить к случаю, когда $\omega(t, z)=k\frac{z}{t}$ при $0\leqslant k<1$ (ср. упражнение 8).

б) Результат упражнения а) применим к случаю $\omega(t, z)=\frac{z}{t}$; путем построения примера показать, что если в этом случае $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ — два приближенных интеграла с точностью ε уравнения $\mathbf{x}'=\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, равные $\mathbf{x}_0$ в точке t_0, то выражение $\|\mathbf{u}(t)-\mathbf{v}(t)\|$ нельзя оценить сверху при помощи числа, зависящего только от t (и *не зависящего* от функции $\mathbf{f}$). (Взять в качестве $\mathbf{f}$ непрерывное отображение произведения

$\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$, равное $\frac{x}{t}$ для $t > \alpha$ и для $0 \leqslant t \leqslant \alpha$, $|x| \leqslant t^2$, и не зависящее от t для остальных точек (t, x).)

в) Пусть $\theta(t)$ — положительная непрерывная числовая функция, заданная для $0 \leqslant t \leqslant a$. Показать, что если интеграл $\int_0^a \frac{\theta(t)}{t}\,dt$ сходится, то результат упражнения а) применим для $\omega(t, z) = \frac{1+\theta(t)}{t}z$; напротив, если $\int_0^a \frac{\theta(t)}{t}\,dt$ бесконечен, то построить пример такой непрерывной функции $\mathbf{f}$, что

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_2)\| \leqslant \frac{1+\theta(|t-t_0|)}{|t-t_0|}\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|,$$

но что уравнение $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ имеет бесконечно много интегралов, равных $\mathbf{x}_0$ в точке t_0 (построить $\mathbf{f}$, как в б)).

15) Пусть $f(t, x)$ — непрерывная числовая функция, определенная для $|t| \leqslant a$, $|x| \leqslant b$ и такая, что $f(t, x) < 0$ для $tx > 0$ и $f(t, x) > 0$ для $tx < 0$; показать, что $x = 0$ — единственный интеграл уравнения $x' = f(t, x)$, принимающий в точке $t = 0$ значение 0 (рассуждать от противного).

16) Пусть E — *конечномерное* векторное пространство, и пусть функция $\mathbf{f}$, ограниченная на $I \times H$ и удовлетворяющая условиям леммы 1, такова, что уравнение $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ имеет *единственное* решение $\mathbf{u}$, определенное на I, принимающее значения в H и равное x_0 в точке t_0. Предположим, кроме того, что для любого достаточно большого целого n существует приближенный интеграл $\mathbf{u}_n$ с точностью $\frac{1}{n}$ уравнения $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, определенный на I, принимающий значения в H и равный $\mathbf{x}_0$ в точке t_0. Показать, что последовательность $(\mathbf{u}_n)$ равномерно сходится к $\mathbf{u}$ на любом компактном интервале, содержащемся в I (воспользоваться тем что последовательность $(\mathbf{u}_n)$ равностепенно непрерывна на I).

17) Пусть E — пространство последовательностей $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ действительных чисел, удовлетворяющих условию $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, с нормой $\|\mathbf{x}\| = \sup_n |x_n|$; оно является полным нормированным пространством. Пусть для любого $\mathbf{x} = (x_n) \in E$ функция $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ есть элемент $y = (y_n)$ из E, определенный равенством $y_n = \sqrt{|x_n|} + \frac{1}{n+1}$; функция $\mathbf{f}$ непрерывна на E. Показать, что не существует ни одного решения дифференциального уравнения $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, определенного в окрестности точки 0, принимающего значения в E и равного 0 для $t = 0$ (ср. упражнение 11).

§ 2. Линейные дифференциальные уравнения

1. *Существование интегралов линейного дифференциального уравнения*

Пусть E — полное нормированное пространство над телом $\mathbf{R}$, J — итервал из $\mathbf{R}$, не сводящийся к точке. Говорят, что дифференциальное уравнение

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \tag{1}$$

где $\mathbf{f}$ определена на $J \times E$, есть линейное уравнение, если для любого $t \in J$ отображение $\mathbf{x} \to \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ является *непрерывным линейным аффинным отображением* *) E в себя; следовательно, если положить $\mathbf{b}(t) = \mathbf{f}(t, 0)$, то отображение $\mathbf{x} \to \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, 0) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{b}(t)$ будет непрерывным линейным *однородным* отображением E в себя; впредь мы будем обозначать это отображение через $A(t)$, а через $A(t)\cdot\mathbf{x}$ (или просто $A(t)\mathbf{x}$) будем обозначать его значение в точке $\mathbf{x} \in E$; тогда линейное дифференциальное уравнение (1) запишется в виде

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \tag{2}$$

где $\mathbf{b}$ — некоторое отображение интервала J в E; если $\mathbf{b} = 0$, то в этом случае говорят, что линейное дифференциальное уравнение (2) *однородно*.

Примеры. 1) Если E — пространство конечной размерности n над телом $\mathbf{R}$, то можно осуществить эндоморфизм отображения $A(t)$ в его *матрицу* $(a_{ij}(t))$ *относительно некоторого* (произвольного) *базиса пространства* E (Алгебра, гл. II, § 6, n° 5); если отождествить вектор $\mathbf{x} \in E$ со столбцом (x_j) матрицы, считая его элементы компонентами вектора относительно рассматриваемого базиса пространства E, то запись $A(t)\mathbf{x}$ значений линейного однородного отображения $A(t)$ в точке $\mathbf{x}$ будет полностью соответствовать общим соглашениям Алгебры (Алгебра, гл. II, § 6, n° 4). В этом случае уравнение (2) эквивалентно системе скалярных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, x_j + b_i(t) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{3}$$

2) Пусть G — *полная нормированная алгебра* над телом $\mathbf{R}$, $\mathbf{a}(t)$, $\mathbf{b}(t)$

*) Напомним, что если E имеет конечную размерность, то всякое линейное аффинное отображение E в себя непрерывно (Общая топология гл. VI, § 1, n° 3 и 5).

и $\mathbf{c}(t)$ — три отображения интервала J в G; уравнение

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{a}(t)\,\mathbf{x}+\mathbf{x}\mathbf{b}(t)+\mathbf{c}(t)$$

является линейным дифференциальным уравнением; роль $A(t)$ здесь играет линейное отображение $x\to\mathbf{a}(t)\,\mathbf{x}+\mathbf{x}\mathbf{b}(t)$ алгебры G в себя.

Для любого $t\in J$ отображение $A(t)$ представляет собой элемент множества $\mathscr{L}(E)$ непрерывных линейных отображений пространства E в себя (непрерывные эндоморфизмы пространства E); известно (Общая топология, гл. X, § 2, n° 2), что множество $\mathscr{L}(E)$, наделенное *нормой* $\|U\|=\sup\limits_{\|\mathbf{x}\|\leqslant 1}\|U\mathbf{x}\|$, есть *полная нормированная алгебра* над телом $\mathbf{R}$ и что $\|UV\|\leqslant\|U\|\cdot\|V\|$.

На протяжении всего этого параграфа мы будем предполагать, что выполняются следующие условия:

a) *Отображение* $t\to A(t)$ *интервала* J *в* $\mathscr{L}(E)$ *линейчато.*

b) *Отображение* $t\to\mathbf{b}(t)$ *интервала* J *в* E *линейчато.*

Если E есть n-мерное пространство, то $\mathscr{L}(E)$ изоморфно $\mathbf{R}^{n^2}$ (как топологическое векторное пространство) и условие a) означает, что каждый из элементов $a_{ij}(t)$ матрицы $A(t)$ есть функция, *линейчатая* на J.

Поскольку $\|A(t')\,\mathbf{x}-A(t)\,\mathbf{x}\|\leqslant\|A(t')-A(t)\|\cdot\|\mathbf{x}\|$, то отображение $t\to A(t)\,\mathbf{x}+\mathbf{b}(t)$ *линейчато* при любом $\mathbf{x}\in E$; кроме того, $\|A(t)\,\mathbf{x}_1-A(t)\,\mathbf{x}_2\|=\|A(t)(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)\|\leqslant\|A(t)\|\cdot\|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\|$ для любых $t\in J$, $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ из E; иными словами, правая часть уравнения (2) удовлетворяет условиям леммы 1 § 1 и является *липшицевой* функцией с *линейчатой* функцией $\|A(t)\|$ на $J\times E$. Следовательно (§ 1, следствие 2 из теоремы 2), имеет место

Теорема 1. *Пусть* $t\to A(t)$ — *линейчатое отображение интервала* J *в* $\mathscr{L}(E)$, $t\to\mathbf{b}(t)$ — *линейчатое отображение интервала* J *в* E. *Для любой точки* $(t_0,\,\mathbf{x}_0)$ *из* $J\times E$ *линейное уравнение* (2) *имеет, и притом единственное, решение, определенное на всем интервале* J *и равное* $\mathbf{x}_0$ *в точке* t_0.

2. Линейность интегралов линейного дифференциального уравнения

Решение линейного дифференциального уравнения (2) есть линейная задача (Алгебра, гл. II, § 4, n° 7); линейное однородное уравнение

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=A(t)\,\mathbf{x}\tag{4}$$

называется уравнением, *соответствующим* неоднородному уравнению (3); в этом случае известно (Алгебра, гл. II, § 4. n° 7, предложение 11), что если $\mathbf{u}_1$ есть некоторый интеграл неоднородного уравнения (2), то всякий интеграл этого уравнения имеет вид $\mathbf{u}+\mathbf{u}_1$, где $\mathbf{u}$ есть интеграл соответствующего ему однородного уравнения (4), и обратно. Прежде всего мы изучим в настоящем пункте интегралы однородного уравнения (4).

Предложение 1. *Множество $\mathcal{J}$ интегралов линейного однородного уравнения (4), определенных на J, образует векторное подпространство пространства $\mathscr{C}(J, E)$ непрерывных отображений интервала J в E.*

Доказательство очевидно.

Теорема 2. *Пусть для любой точки $(t_0, \mathbf{x}_0)$ из $J\times E$ функция $\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ является интегралом однородного уравнения (4), определенным на J и равным $\mathbf{x}_0$ в точке t_0.*

1° *Для любой точки $t\in J$ отображение $\mathbf{x}_0\to\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ есть взаимно однозначное и взаимно непрерывное линейное отображение $C(t, t_0)$ пространства E на себя.*

2° *Отображение $t\to C(t, t_0)$ интервала J в $\mathscr{L}(E)$ тождественно интегралу линейного однородного дифференциального уравнения*

$$\frac{dU}{dt}=A(t)\,U, \tag{5}$$

принимающему в точке t_0 значение I (тождественное отображение E на себя).

3° *Для любых точек s, t, u из J имеем*

$$C(s, u)=C(s, t)\,C(t, u), \qquad C(s, t)=(C(t, s))^{-1}. \tag{6}$$

Согласно предложению 1 функция $\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_1)+\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_2)$ (соответственно $\lambda\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$) есть интеграл уравнения (4) и принимает в точке t_0 значение $\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2$ (соответственно $\lambda\mathbf{x}_0$), и значит, на основании теоремы 1 она тождественна функции $\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)$ (соответственно $\mathbf{u}(t, t_0, \lambda\mathbf{x}_0)$); таким образом, отображение $\mathbf{x}_0\to\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ является линейным отображением $C(t, t_0)$ пространства E в себя, и можно написать $\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)=$ $=C(t, t_0)\,\mathbf{x}_0$.

Так как отображение $(X, Y) \to XY$ произведения $\mathscr{L}(E) \times \mathscr{L}(E)$ в $\mathscr{L}(E)$ *непрерывно* (Общая топология, гл. X, § 2, n° 2), то отображение $t \to A(t)U$ интервала J в $\mathscr{L}(E)$ линейчато для любого $U \in \mathscr{L}(E)$; кроме того, имеем (Общая топология, гл. X, § 2, n° 2)

$$\|A(t)X - A(t)Y\| = \|A(t)(X-Y)\| \leqslant \|A(t)\| \cdot \|X - Y\|,$$

и следовательно, к линейному однородному уравнению (5) можно применить теорему 1; пусть $V(t)$ — интеграл этого уравнения, определенный на J и равный I в точке t_0. Имеем (гл. I, § 1, предложение 3)

$$\frac{d}{dt}(V(t)\mathbf{x}_0) = \frac{dV(t)}{dt}\mathbf{x}_0 = A(t)(V(t)\mathbf{x}_0)$$

и в точке $t = t_0$ имеем $V(t)\mathbf{x}_0 = I\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$; согласно теореме 1 $V(t)\mathbf{x}_0 = C(t, t_0)\mathbf{x}_0$ для любого $\mathbf{x}_0 \in E$, то есть $V(t) = C(t, t_0)$; это показывает, что $C(t, t_0)$ принадлежит $\mathscr{L}(E)$, или, другими словами, что отображение $\mathbf{x}_0 \to C(t, t_0)\mathbf{x}_0$ непрерывно на множестве E и что отображение $t \to C(t, t_0)$ является интегралом уравнения (5), равным I в точке t_0.

Наконец, интеграл $s \to C(s, u)\mathbf{x}_0$ уравнения (4) в точке t равен $C(t, u)\mathbf{x}_0$, и значит, по определению,

$$C(s, u)\mathbf{x}_0 = C(s, t)(C(t, u)\mathbf{x}_0) = (C(s, t)C(t, u))\mathbf{x}_0$$

при любом $\mathbf{x}_0 \in E$, откуда вытекает первое из соотношений (6); так как $C(s, s) = I$, то $C(s, t)C(t, s) = I$ при любых s и t из J; это показывает (Теория множеств, Результаты, § 2, n° 12), что $C(t, t_0)$ есть взаимно однозначное отображение E на себя, для которого обратное отображение есть $C(t_0, t)$. Таким образом, теорема полностью доказана.

Говорят, что $C(t, t_0)$ есть *резольвента* уравнения (2).

Следствие 1. *Отображение, ставящее в соответствие каждой точке* $\mathbf{x}_0 \in E$ *непрерывную функцию* $t \to C(t, t_0)$, *определенную на* J, *есть изоморфизм нормированного пространства* E *на векторное пространство* $\mathfrak{J}$ *интегралов уравнения* (4), *наделенное топологией компактной сходимости.*

В самом деле, это отображение является взаимно однозначным линейным отображением пространства E на $\mathcal{J}$; функция $C(t, t_0)$ ограничена на компактном множестве $K \subset J$, и значит, $\|C(t, t_0)\mathbf{x}_0\| \leqslant M\|\mathbf{x}_0\|$ для любого $t \in K$ и любого $\mathbf{x}_0 \in K$, что доказывает непрерывность рассматриваемого отображения; так как $C(t_0, t_0)\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$, то обратное отображение тоже непрерывно.

Следствие 2. *Отображение $(s, t) \to C(s, t)$ произведения $J \times J$ в $\mathcal{L}(E)$ непрерывно.*

В самом деле, на основании (6) имеем

$$C(s, t) = C(s, t_0)(C(t, t_0))^{-1};$$

но отображение $(X, Y) \to XY$ множества $\mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$ непрерывно, и то же самое имеет место для отображения $X \to X^{-1}$ группы (открытой) обратимых элементов из $\mathcal{L}(E)$ на себя (Общая топология, гл. IX, § 3, предложение 14).

Отметим, что отображение $t \to C(t_0, t) = (C(t, t_0))^{-1}$ имеет (на дополнении некоторого счетного множества) производную, равную $-(C(t, t_0))^{-1}\dfrac{dC(t, t_0)}{dt}(C(t, t_0))^{-1}$ (гл. I, § 1, предложение 4), то есть (в силу формулы (5)) равную $-C(t_0, t)A(t)$.

Следствие 3. *Пусть K — компактный интервал, содержащийся в J, и пусть $k = \sup\limits_{t \in K}\|A(t)\|$. Для любых точек t и t_0 из K выполняется неравенство*

$$\|C(t, t_0) - I\| \leqslant e^{k|t-t_0|} - 1. \tag{7}$$

В самом деле, для любого $t \in K$ имеем $\|A(t)\mathbf{x}_0\| \leqslant k\|\mathbf{x}_0\|$; следовательно, на K постоянная функция, равная $\mathbf{x}_0$, является приближенным решением с точностью $k\|\mathbf{x}_0\|$ уравнения (4); таким образом, в силу формулы (15) § 1 для любых t и t_0 из K и любого $\mathbf{x}_0$ из E выполняется соотношение $\|C(t, t_0)\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0\| \leqslant \|\mathbf{x}_0\|(e^{k|t-t_0|} - 1)$, эквивалентное неравенству (7), согласно определению нормы в $\mathcal{L}(E)$.

Предложение 2. *Пусть B — непрерывный эндоморфизм пространства E, не зависящий от t и перестановочный с $A(t)$ для любого $t \in J$; тогда он перестановочен с $C(t, t_0)$ при любых t и t_0 из J.*

В самом деле, согласно (5)

$$\frac{d}{dt}(BC)=BAC=ABC \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt}(CB)=ACB,$$

и значит, $\frac{d}{dt}(BC-CB)=A(BC-CB)$; но $BC(t_0, t_0)-C(t_0,t_0)B=0$, и следовательно (теорема 1), $BC(t, t_0)-C(t, t_0)B=0$ для любого $t\in J$.

Наиболее важным является тот частный случай теоремы 2, когда пространство E наделено структурой нормированного векторного пространства относительно *тела комплексных чисел* $\mathbf{C}$ и когда для любого $t\in J$ отображение $A(t)$ есть эндоморфизм пространства E для этой структуры векторного пространства; это означает, что $A(t)$ перестановочно с непрерывным эндоморфизмом $\mathbf{x}\to i\mathbf{x}$ пространства E (для структуры векторного пространства *над телом* $\mathbf{R}$); следовательно, $C(t, t_0)$ перестановочно с этим эндоморфизмом, что означает, что для любых t и t_0 из J отображение $C(t, t_0)$ есть непрерывный эндоморфизм структуры нормированного векторного пространства E над телом $\mathbf{C}$.

3. *Интегрирование линейного неоднородного уравнения*

Интегрирование линейного неоднородного уравнения

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=A(t)\,\mathbf{x}+\mathbf{b}(t) \tag{2}$$

сводится к интегрированию соответствующего однородного уравнения

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=A(t)\,\mathbf{x} \tag{4}$$

и к вычислению примитивной. В самом деле, положим, в обозначениях теоремы 2, $\mathbf{x}=C(t, t_0)\,\mathbf{z}$, откуда на основании второй формулы (6) получим $\mathbf{z}=C(t_0, t)\,\mathbf{x}$; если $\mathbf{x}$ — интеграл уравнения (2), то $\mathbf{z}$ — интеграл уравнения $\frac{d}{dt}(C(t, t_0)\,\mathbf{z})=A(t)\,C(t, t_0)\,\mathbf{z}+\mathbf{b}(t)$; так как билинейное отображение $(U, \mathbf{y})\to U\mathbf{y}$ множества $\mathscr{L}(E)\times E$ в E непрерывно (Общая топология, гл. X, § 2, n° 2), то $\mathbf{z}$ имеет производную (на всем интервале J, за исключением счетного множества точек), и по формуле дифференцирования билинейной функции (гл. 1, § 1, предложение 3) мы получаем соотношение

$$\frac{d}{dt}(C(t, t_0)\mathbf{z}) = \frac{dC(t, t_0)}{dt}\mathbf{z} + C(t, t_0)\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \\ = A(t)C(t, t_0)\mathbf{z} + C(t, t_0)\frac{d\mathbf{z}}{dt}$$

$\left(\text{заменяя } \frac{dC(t, t_0)}{dt}\right.$ через $A(t)C(t, t_0)$ на основании формулы $\left.(5)\right)$. Следовательно, уравнение для $\mathbf{z}$, в силу формулы (6), сводится к уравнению $C(t, t_0)\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{b}(t)$ или к уравнению

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = C(t_0, t)\mathbf{b}(t). \tag{8}$$

Но правая часть уравнения (8) есть линейчатая на J функция, полученная путем замены функций U и $\mathbf{y}$ в непрерывной билинейной функции $U\mathbf{y}$ линейчатыми функциями (см. гл. II, § 1, следствие 2 из теоремы 3); таким образом, уравнение (8) имеет, и притом единственный, интеграл, принимающий в точке t_0 значение $\mathbf{x}_0$ и выражаемый формулой

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} C(t_0, s)\mathbf{b}(s)\,ds. \tag{9}$$

Но так как $C(t, t_0)\int_{t_0}^{t} C(t_0, s)\mathbf{b}(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} C(t, t_0)C(t_0, s)\mathbf{b}(s)\,ds$ (гл. II, § 1, формула (10)), то мы получаем (приняв во внимание первую из формул (6)) следующий результат:

Предложение 3. *В обозначениях теоремы 2 для любой точки* $(t_0, \mathbf{x}_0)$ *из* $J \times E$ *интеграл линейного уравнения* (2), *определенный на* J *и равный* $\mathbf{x}_0$ *в точке* t_0, *выражается формулой*

$$\mathbf{u}(t) = C(t, t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} C(t, s)\mathbf{b}(s)\,ds. \tag{10}$$

Метод, приводящий к формуле (10) и состоящий в том, что функция $\mathbf{z}$ рассматривается как новая неизвестная функция, называется часто «методом вариации постоянных».

4. *Фундаментальные системы интегралов системы скалярных линейных дифференциальных уравнений*

В этом и в следующем пунктах мы рассмотрим тот случай, когда E является векторным пространством *конечной размерности n относительно тела* $\mathbf{C}$ комплексных чисел (и значит, размерности $2n$ относительно $\mathbf{R}$) и когда для любой точки $t \in J$ отображение $A(t)$ является эндоморфизмом пространства E *для структуры векторного пространства над телом* $\mathbf{C}$. Тогда $A(t)$ можно отождествить с его матрицей $(a_{ij}(t))$ относительно некоторого базиса пространства E (над телом $\mathbf{C}$); в этом случае a_i будут представлять собой n^2 *комплексных* функций, определенных и линейчатых на J; если обозначить через x_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ компоненты (комплексные) вектора $\mathbf{x} \in E$ относительно рассматриваемого базиса, то линейное уравнение

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{b}(t) \tag{2}$$

будет эквивалентно системе

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, x_j + b_i(t) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{3}$$

Следовательно, теоремы 1 и 2 и предложение 2 показывают, что для любого $\mathbf{x}_0 = (x_{k0})_{1 \leqslant k \leqslant n}$ из E существует, и притом единственный, интеграл $\mathbf{u} = (u_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ уравнения

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\,\mathbf{x}, \tag{4}$$

определенный в E и равный $\mathbf{x}_0$ в точке t_0; этот интеграл может быть записан в виде $\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0) = C(t, t_0)\,\mathbf{x}_0$, где $C(t, t_0)$ — *обратимая* квадратная матрица $(c_{ij}(t, t_0))$ порядка n, коэффициенты которой представляют собой комплексные функции, непрерывные на $J \times J$, обладающие тем свойством, что функция $t \to c_{ij}(t, t_0)$ является примитивной линейчатой функции на J.

В частном случае $n = 1$ система (3) сводится к единственному скалярному уравнению

$$\frac{dx}{dt} = a(t)\,x + b(t) \tag{11}$$

($a(t)$ и $b(t)$ — комплексные линейчатые на J функции); легко видеть, что матрица (состоящая из одного элемента) $C(t, t_0)$

равна $\exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right)$; следовательно, интеграл уравнения (11), равный x_0 в точке t_0, выражается явно в виде формулы

$$u(t)=x_0\exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right)+\int_{t_0}^{t} b(s)\exp\left(\int_{s}^{t} a(\tau)\,d\tau\right)ds. \qquad (12)$$

В пространстве $\mathscr{C}(J, E)$ непрерывных отображений интервала J в E, наделенном топологией компактной сходимости, множество $\mathscr{J}$ интегралов уравнения (4) составляет векторное подпространство (над телом $\mathbf{C}$), *изоморфное* E, а значит, и $\mathbf{C}^n$ (следствие 1 из теоремы 2 и предложение 2). *Фундаментальной системой* интегралов уравнения (4) называется *базис* $(\mathbf{u}_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ этого пространства (над телом $\mathbf{C}$).

Предложение 4. *Для того чтобы n интегралов $\mathbf{u}_j$ $(1\leqslant j\leqslant n)$ уравнения* (4) *образовывали фундаментальную систему, необходимо и достаточно, чтобы их значения $\mathbf{u}_j(t_0)$ в точке $t_0\in J$ были линейно независимыми векторами в E.*

В самом деле, отображение, которое каждому $\mathbf{x}_0\in E$ ставит в соответствие интеграл $t\to C(t, t_0)\mathbf{x}_0$, есть изоморфизм пространства E на $\mathscr{J}$ (следствие 1 из теоремы 2 и предложение 2).

Если $(\mathbf{e}_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ есть произвольный базис пространства E над телом $\mathbf{C}$, то n интегралов $\mathbf{u}_j(t)=C(t, t_0)\mathbf{e}_j$ $(1\leqslant j\leqslant n)$ образуют фундаментальную систему; если отождествить отображение $C(t, t_0)$ с его матрицей относительно базиса $(\mathbf{e}_j)$, то интегралы $\mathbf{u}_j$ будут не чем иным, как *столбцами* матрицы $C(t, t_0)$. Тогда интеграл уравнения (4), принимающий в точке t_0 значение $\mathbf{x}_0=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\mathbf{e}_j$, будет равен $C(t, t_0)\mathbf{x}_0=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\mathbf{u}_k(t)$.

Если заданы *произвольно* n интегралов $\mathbf{u}_j$ $(1\leqslant j\leqslant n)$ уравнения (4), то *определителем* из этих n интегралов в точке $t\in J$ относительно некоторого базиса $(\mathbf{e}_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ пространства E называется определитель

$$\Delta(t)=[\mathbf{u}_1(t),\ \mathbf{u}_2(t),\ \ldots,\ \mathbf{u}_n(t)], \qquad (13)$$

составленный из n векторов $\mathbf{u}_j(t)$ относительно базиса $(\mathbf{e}_j)$ (Алгебра, гл. III, § 6, n° 1). Имеем (Алгебра, гл. III, § 6, формула (1))

$$\Delta(t) = \Delta(t_0)\det(C(t, t_0)). \qquad (14)$$

Согласно предложению 4, для того чтобы функции $(\mathbf{u}_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ образовывали фундаментальную систему интегралов уравнения (4), необходимо и достаточно, чтобы определитель $\Delta(t)$, составленный из $\mathbf{u}_j$, в точке $t_0 \in J$ был отличен от нуля; тогда формула (14) показывает, что $\Delta(t) \neq 0$ в каждой точке интервала J, или, иными словами, что векторы $\mathbf{u}_j(t)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ всегда линейно независимы.

Предложение 5. *Определитель матрицы* $C(t, t_0)$ *выражается формулой*

$$\det(C(t, t_0)) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{Tr}(A(s))\,ds\right). \qquad (15)$$

В самом деле, если положить $\delta(t) = \det(C(t, t_0))$, то на основании формулы для производной определителя (гл. I, § 1, формула (3))

$$\frac{d\delta}{dt} = \operatorname{Tr}\left(\frac{dC(t, t_0)}{dt}(C(t, t_0))^{-1}\right)\delta(t),$$

то есть, если принять во внимание дифференциальное уравнение (5), которому удовлетворяет $C(t, t_0)$,

$$\frac{d\delta}{dt} = \operatorname{Tr}(A(t))\,\delta(t).$$

Так как $\delta(t_0) = 1$, то формула (15) вытекает из выражения (12) для интеграла скалярного линейного уравнения.

Заданием n линейно независимых интегралов уравнения (4) определяются *все* интегралы этого уравнения, в чем мы только что убедились. Теперь мы покажем, что для $1 \leqslant p \leqslant n$ задание p *линейно независимых интегралов* $\mathbf{u}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant p)$ уравнения (4) сводит интегрирование этого уравнения к интегрированию *линейной однородной системы* $n-p$ *скалярных уравнений*. Предположим, что на интервале $K \subset J$ существует $n-p$ отображений $\mathbf{u}_{p+k}$ $(1 \leqslant k \leqslant n-p)$ интервала K в E, являющихся примитивными функций, линейчатых на K и таких, что для любого $t \in K$ n векторов $\mathbf{u}_j(t)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ образуют *базис* пространства E.

Для любой точки $t_1 \in J$ всегда найдется интервал K, являющийся окрестностью точки t_1 в J, на котором определенные таким образом $n-p$ функций $\mathbf{u}_{p+k}$ $(1 \leqslant k \leqslant n+p)$ обладают вышеуказанными свойствами. В самом деле, пусть $(\mathbf{e}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — базис пространства E; согласно теореме о замене существует $n-p$ векторов этого базиса, образующих вместе с $\mathbf{u}_j(t_1)$ $(1 \leqslant j \leqslant p)$ базис пространства E; пусть это будут, например, векторы $\mathbf{e}_{p+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$; так как определитель $[\mathbf{u}_1(t), \ldots, \mathbf{u}_p(t), \mathbf{e}_{p+1}, \ldots, \mathbf{e}_n]$ (относительно базиса $(\mathbf{e}_i)$) есть непрерывная функция от t, не равная нулю при $t=t_0$, то существует окрестность K точки t_1, в которой эта функция отлична от нуля; следовательно, можно взять $\mathbf{u}_{p+k}(t)=\mathbf{e}_{p+k}$ $(1 \leqslant k \leqslant n-p)$ для $t \in K$.

Существует такая обратимая матрица $B(t)$ порядка n с элементами, являющимися примитивными линейчатых на K функций, что $B(t)\,\mathbf{e}_j=\mathbf{u}_j(t)$ для $1 \leqslant j \leqslant n$. Положим $\mathbf{x}=B(t)\,\mathbf{y}$; $\mathbf{y}$ удовлетворяет уравнению $\frac{dB}{dt}\mathbf{y}+B(t)\frac{d\mathbf{y}}{dt}=A(t)\,B(t)\,\mathbf{y}$, которое записывается также в виде

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt}=(B(t))^{-1}\left(A(t)\,B(t)-\frac{dB}{dt}\right)\mathbf{y}=H(t)\,\mathbf{y},$$

где $H(t)=(h_{jk}(t))$ есть матрица с линейчатыми на K коэффициентами. Согласно определению матрицы $B(t)$ это линейное уравнение имеет p постоянных векторов $\mathbf{e}_p$ $(1 \leqslant j \leqslant p)$ в качестве интегралов; отсюда сразу же заключаем, что $h_{jk}(t)=0$ для $1 \leqslant k \leqslant p$; следовательно, компоненты y_k вектора $\mathbf{y}$ (относительно базиса $(\mathbf{e}_i)$) с индексом $k \geqslant p+1$ удовлетворяют линейной однородной системе $n-p$ уравнений; но как только определены решения этой системы, то известны и $\frac{dy_j}{dt}$ для $j \leqslant p$, являющиеся линейными функциями от y_k с индексом $k \geqslant p+1$, и их примитивные дают нам y_j для индекса $j \leqslant p$.

В частности, если известны $n-1$ линейно независимых интегралов уравнения (4), то интегрирование этого уравнения сводится к интегрированию единственного скалярного однородного уравнения и затем к вычислению n примитивных.

Замечания. 1) Все вышеизложенное применимо также к тому случаю, когда E является n-мерным пространством *над телом* $\mathbf{R}$ и $A(t)$ есть эндоморфизм пространства E для любого $t \in J$; достаточно всюду заменить $\mathbf{C}$ на $\mathbf{R}$.

2) Пусть $A(t)=(a_{ij}(t))$ — квадратная матрица n-го порядка, элементы которой суть действительные (соответственно комплексные) линейчатые функции от t на J, и пусть $C(t, t_0)=(c_{ij}(t, t_0))$ — соот-

ветствующая матрица-резольвента линейной системы (3). Пусть F — произвольное полное нормированное пространство над телом $\mathbf{R}$ (соответственно $\mathbf{C}$); рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{y}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\,\mathbf{y}_j,$$

где неизвестные функции $\mathbf{y}_j$ *принимают свои значения* в F. Очевидно, что решение $(\mathbf{u}_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ этой системы, удовлетворяющее условиям $\mathbf{u}_j(t_0) = \mathbf{d}_j$ для $1 \leqslant j \leqslant n$ ($\mathbf{d}_j$ — произвольные элементы из F), выражается посредством формул

$$\mathbf{u}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(t, t_0)\,\mathbf{d}_j \qquad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Рассмотрим, в частности, случай, когда $A(t)$ есть такой эндоморфизм n-мерного векторного пространства E *над телом* $\mathbf{C}$, что существует базис пространства E, относительно которого элементы матрицы $A(t)$ *действительны* для любого $t \in J$. Тогда вышеизложенное (на основании теоремы 1) позволяет утверждать, что элементы матрицы-резольвенты $C(t, t_0)$ относительно того же базиса тоже *действительны*; в самом деле, достаточно рассмотреть векторное пространство E_0 *над телом* $\mathbf{R}$, порожденное рассматриваемым базисом пространства E, и заметить, что сужение функции $A(t)$ на E_0 есть эндоморфизм этого векторного пространства. •

5. Сопряженное уравнение

В этом n° мы будем предполагать, что E всегда есть пространство *конечной* размерности n над телом $\mathbf{C}$, и через E^* будем обозначать *сопряженное* к нему (Алгебра, гл. II, § 4, n° 1) пространство, которое является n-мерным пространством над телом $\mathbf{C}$; каноническая билинейная форма $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \rangle$, определенная на $E \times E^*$ (Алгебра, гл. 1, § 4, n° 1), *непрерывна* на этом произведении (будучи многочленом относительно компонент вектора $\mathbf{x} \in E$ и вектора $\mathbf{x}^* \in E^*$).

Пусть задано линейное однородное уравнение (4), где $t \to A(t)$ есть линейчатое отображение интервала J в $\mathscr{L}(E)$. Исследуем вопрос о том, существует ли отображение $t \to \mathbf{v}(t)$ интервала J в E^*, являющееся примитивной некоторой линейчатой на J функции и такое, что числовая функция $t \to \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t) \rangle$ *постоянна* на J, когда u является *произвольным* решением уравнения (4); эта задача сводится к тому, что производная этой функции должна быть равна нулю во всех точках, в которых $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ дифференцируемы, то есть в этих точках должно выполняться соотношение

$$\left\langle \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \mathbf{v}(t) \right\rangle + \left\langle \mathbf{u}(t), \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right\rangle = 0.$$

Но согласно (4) имеем $\left\langle \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \mathbf{v}(t) \right\rangle = \langle A(t)\,\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)\rangle = -\langle \mathbf{u}(t), B(t)\,\mathbf{v}(t)\rangle$, где $B(t)$ — отображение, сопряженное к отображению $A(t)$ (*Алгебра*, гл. II, § 4, n° 9). Следовательно, соотношение, которому должна удовлетворять функция $\mathbf{v}$, записывается в виде

$$\left\langle \mathbf{u}(t), \frac{d\mathbf{v}}{dt} - B(t)\,\mathbf{v}(t) \right\rangle = 0$$

для всех точек, в которых $A(t)$ непрерывна, а $\mathbf{v}(t)$ дифференцируема. Но для такой точки t *и произвольной* точки $\mathbf{x}_0 \in E$ на основании теоремы 1 существует решение $\mathbf{u}$ уравнения (4), удовлетворяющее условию $\mathbf{u}(t) = \mathbf{x}_0$; стало быть, для *любой* точки $\mathbf{x}_0 \in E$ должно выполняться соотношение $\left\langle \mathbf{x}_0, \frac{d\mathbf{v}}{dt} - B(t)\,\mathbf{v}(t) \right\rangle = 0$, означающее, что $\frac{d\mathbf{v}}{dt} - B(t)\,\mathbf{v}(t) = 0$. Следовательно:

Предложение 6. *Для того чтобы отображение $t \to \mathbf{v}(t)$ интервала J в E^*, являющееся примитивной линейчатой на J функции, удовлетворяло тому условию, что функция $\langle \mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)\rangle$ постоянна на J для всякого решения $\mathbf{u}$ уравнения* (4), *необходимо и достаточно, чтобы функция $\mathbf{v}$ была решением линейного однородного уравнения*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = B(t)\,\mathbf{x}, \tag{16}$$

где $B(t)$ — отображение, сопряженное к $A(t)$.

Уравнение (16) называется *сопряженным* к уравнению (4); ясно, что и, обратно, уравнение (4) будет сопряженным к (16). Поскольку элементы матрицы $B(t)$ являются линейчатыми на J функциями от t, то результаты, полученные выше для линейных уравнений, применимы и к уравнению (16). В частности, интеграл уравнения (16), принимающий в точке t_0 значение $\mathbf{x}_0^*$, может быть записан в виде $H(t, t_0)\,\mathbf{x}_0^*$, где $H(t, t_0)$ — взаимно однозначное линейное отображение пространства E^* на себя, совпадающее с интегралом уравнения

$$\frac{dV}{dt} = B(t)V, \tag{17}$$

принимающим в точке t_0 значение I. Отсюда следует, что (в обозначениях n° 2) при любых $x_0 \in E$ и $x_0^* \in E^*$ справедливо равенство

$$\langle C(t, t_0)\mathbf{x}_0, H(t, t_0)\mathbf{x}_0^* \rangle = \langle \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0^* \rangle,$$

показывающее, что

$$H(t, t_0) = \check{C}(t, t_0) \tag{18}$$

(*контраградиент* к $C(t, t_0)$). В частности, если известна фундаментальная система интегралов сопряженного уравнения (16), то матрица $H(t, t_0)$ определена, а значит, определена и матрица $C(t, t_0)$, и стало быть, определены *все* интегралы уравнения (4).

Замечание. Пусть E и F — два полных нормированных пространства над телом $\mathbf{R}$ (или над телом $\mathbf{C}$), $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \to \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ — *непрерывная* билинейная форма на $E \times F$, обладающая тем свойством, что отношение «$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ для любого $\mathbf{y} \in F$» (соответственно «$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ для любого $\mathbf{x} \in E$») влечет $\mathbf{x} = 0$ (соответственно $\mathbf{y} = 0$). Предположим, кроме того, что для любого $t \in J$ существует такое непрерывное линейное отображение $B(t)$ пространства F на себя, что $\langle A(t)\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, B(t)\mathbf{y} \rangle = 0$ для любого $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E \times F$. При этих условиях так же, как и выше, ясно, что для того, чтобы отображение $t \to \mathbf{v}(t)$ интервала J в F, являющееся примитивной линейчатой функции, удовлетворяло тому условию, что $\langle \mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t) \rangle$ *постоянна* для *любого* интеграла $\mathbf{u}$ уравнения (4), необходимо и достаточно, чтобы функция $\mathbf{v}$ была интегралом уравнения (16), снова называемым *сопряженным* к уравнению (4).

6. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Предположим вновь, что E — *произвольное* полное нормированное пространство над телом $\mathbf{R}$, и пусть A — непрерывный эндоморфизм пространства E, *не зависящий* от t. Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}. \tag{19}$$

Если E — *конечномерное* пространство, то уравнение (19) эквивалентно однородной системе (3) скалярных дифференциальных уравнений, где коэффициенты a_{ij} суть *постоянные*.

Согласно теореме 1 всякий интеграл уравнения (19) определен *на всей прямой* R; на основании теоремы 2 интеграл уравнения (19), принимающий в точке $t_0 \in \mathbf{R}$ значение $\mathbf{x}_0$, может быть записан в виде $C(t, t_0)\mathbf{x}_0$, где $C(t, t_0)$ есть взаимно однозначное и взаимно непрерывное линейное отображение пространства E на себя, удовлетворяющее уравнению

$$\frac{dU}{dt} = AU \tag{20}$$

и такое, что $C(t_0, t_0) = I$. Кроме того, в этом случае для любого $\tau \in \mathbf{R}$ справедливо тождество

$$C(t+\tau, t_0+\tau) = C(t, t_0); \tag{21}$$

в самом деле, согласно формуле (20) имеем

$$\frac{dC(s, t_0+\tau)}{ds} = AC(s, t_0+\tau),$$

а так как A — постоянная, то отсюда следует, что справедливо также и соотношение $\frac{dC(t+\tau, t_0+\tau)}{dt} = AC(t+\tau, t_0+\tau)$; с другой стороны,

$$C(t_0+\tau, t_0+\tau) = I = C(t_0, t_0),$$

откуда следует тождество (21), ибо интеграл уравнения (20), равный I в точке t_0, единствен.

Если положить $C_0(t) = C(t, 0)$, то $C(t, t_0) = C_0(t-t_0)$; с другой стороны, для любого $\lambda \in \mathbf{R}$ функция $C_0(\lambda t)$ тождественна интегралу уравнения

$$\frac{dU}{dt} = \lambda AU, \tag{22}$$

принимающему в точке 0 значение I. Введем следующее определение:

Определение 1. *Если задан непрерывный эндоморфизм* A *пространства* E, *то через* e^A *или* $\exp A$ *обозначается автоморфизм пространства* E, *равный значению в точке* $t=1$ *интеграла уравнения* (20), *принимающего значение* I *в точке* $t=0$.

В этих обозначениях замечания, предшествовавшие определению 1, показывают, что

$$C(t, t_0) = \exp(A(t-t_0)). \tag{23}$$

Экспоненциальное обозначение, введенное таким образом, основывается на следующих свойствах, полностью аналогичных свойствам функции $\exp z$ для действительного или комплексного z (ср. гл. III):

Предложение 7. 1° *Отображение* $X \to e^X$ *есть непрерывное отображение пространства* $\mathscr{L}(E)$ *в группу автоморфизмов пространства* E (обратимых элементов из $\mathscr{L}(E)$).

2° *Отображение* $t \to e^{Xt}$ *пространства* $\mathbf{R}$ *в* $\mathscr{L}(E)$ *дифференцируемо и*

$$\frac{d}{dt}(e^{Xt}) = Xe^{Xt} = e^{Xt}X. \tag{24}$$

3° *Для любого* $X \in \mathscr{L}(E)$ *имеем*

$$e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}, \tag{25}$$

где ряд, стоящий в правой части, абсолютно и равномерно сходится на любом ограниченном подмножестве множества $\mathscr{L}(E)$; *в частности,* $e^{It} = e^t I$ *для любого* $t \in \mathbf{R}$.

4° *Если* X *и* Y *перестановочны, то и* Y *и* e^Y *перестановочны с* e^X *и*

$$e^{X+Y} = e^X e^Y. \tag{26}$$

Соотношение (24) является следствием выражения (23) для $C(t, 0)$ и того факта, что эта функция есть интеграл уравнения (20); из (24) индукцией по n получаем, что отображение $t \to e^{Xt}$ бесконечно дифференцируемо на $\mathbf{R}$ и что

$$D^n(e^{Xt}) = X^n e^{Xt}.$$

Следовательно, на основании формулы Тейлора можно написать

$$e^X = I + \frac{X}{1} + \frac{X^2}{2} + \ldots + \frac{X^n}{n!} + X^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^{Xt}\, dt. \tag{27}$$

С другой стороны, следствие 3 из теоремы 2 показывает, что $\|e^{Xt}\| \leqslant \exp(\|X\| \cdot |t|)$. Значит, остаточный член

$$r_n(X) = X^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^{Xt}\, dt$$

в формуле (27) удовлетворяет неравенству

$$\| r_n(X) \| \leqslant \frac{\| X \|^{n+1}}{(n+1)!} e^{\| X \|},$$

откуда выводится формула (25), причем ряд в правой части абсолютно и равномерно сходится на любом ограниченном подмножестве множества $\mathscr{L}(E)$. Стало быть, для любой пары элементов X, T из $\mathscr{L}(E)$ имеем

$$e^{X+T} - e^X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} ((X+T)^n - X^n).$$

Но мы можем написать, что $(X+T)^n - X^n = \sum\limits_{(V_i)} V_1 V_2 \ldots V_n$, где суммирование распространяется на $2^n - 1$ последовательностей (V_i) таких элементов из $\mathscr{L}(E)$, что $V_i = X$ или $V_i = T$ для $1 \leqslant i \leqslant n$ и по крайней мере один из V_i равен T; из этого сразу же выводим неравенство

$$\| (X+T)^n - X^n \| \leqslant (\| X \| + \| T \|)^n - \| X \|^n,$$

откуда

$$\| \exp(X+T) - \exp X \| \leqslant \exp(\| X \| + \| T \|) - \exp \| X \|, \tag{28}$$

что доказывает непрерывность отображения $X \to \exp X$.

Наконец, если X и Y перестановочны, то Y перестановочно с e^{Xt} (предложение 2), и следовательно,

$$\frac{d}{dt} (e^{Xt} e^{Yt}) = X e^{Xt} e^{Yt} + e^{Xt} (Y e^{Yt}) = (X+Y) e^{Xt} e^{Yt}.$$

Так как, с другой стороны, $e^{Xt} e^{Yt}$ равно I в точке $t=0$, то $e^{Xt} e^{Yt} = e^{(X+Y)t}$, откуда получаем формулу (26). Из нее, в частности, следует, что если s и t — произвольные действительные числа, то

$$e^{X(s+t)} = e^{Xs} e^{Xt}, \tag{29}$$

а также что

$$e^{-X} = (e^X)^{-1}. \tag{30}$$

Отметим, что, напротив, формула (26) будет, вообще говоря, неверна, если не предположить, что X и Y перестановочны: в самом деле, она влечет за собой то, что $\exp X$ и $\exp Y$ перестановочны, что, как показывают простые примеры, не всегда верно (упражнение 3).

Предположим теперь, что E — *конечномерное* векторное пространство *над телом* $\mathbf{C}$ *и* A — эндоморфизм пространства E (для структуры векторного пространства над телом $\mathbf{C}$), который можно отождествить с его матрицей относительно базиса пространства E; тогда для любого $t \in \mathbf{R}$ отображение e^{At} является автоморфизмом пространства E для этой же структуры (предложение 2). Пусть r_k $(1 \leqslant k \leqslant q)$ — различные корни (в $\mathbf{C}$) *характеристического многочлена* $\varphi(r) = \det(A - rI)$ эндоморфизма A («характеристические корни» эндоморфизма A); если n_k — порядок кратности корня r_k, то $\sum\limits_{k=1}^{q} n_k = n$. Известно (Алгебра, гл. VII), что каждому корню r_k соответствует такое подпространство E_k пространства E, имеющее размерность n_k, что E_k устойчиво относительно A и что E есть *прямая сумма* подпространств E_k; E_k может быть определено как подпространство векторов $\mathbf{x}$, для которых

$$(A - r_k I)^{n_k} \mathbf{x} = 0.$$

Пусть $\mathbf{a}$ — произвольный вектор из E; можно написать $\mathbf{a} = \sum\limits_{k=1}^{q} \mathbf{a}_k$, где $\mathbf{a}_k \in E_k$; следовательно, интеграл уравнения (19), принимающий в точке t_0 значение $\mathbf{a}$, выражается формулой

$$\mathbf{u}(t) = e^{At}\mathbf{a} = \sum_{k=1}^{q} e^{At}\mathbf{a}_k = \sum_{k=1}^{q} e^{r_k t} e^{(A - r_k I)t}\mathbf{a}_k.$$

Но так как $\mathbf{a}_k \in E_k$, то

$$e^{(A-r_kI)t}\mathbf{a}_k = \mathbf{a}_k + \frac{t}{1!}(A - r_k I)\,\mathbf{a}_k + \frac{t^2}{2!}(A - r_k I)^2\,\mathbf{a}_k + \ldots + \frac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!}(A - r_k I)^{n_k-1}\,\mathbf{a}_k. \qquad (31)$$

Таким образом, всякий интеграл уравнения (19) можно записать в виде

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{k=1}^{q} e^{r_k t}\mathbf{p}_k(t), \qquad (32)$$

где $\mathbf{p}_k(t)$ есть многочлен относительно t степени, меньшей или равной $n_k - 1$, с коэффициентами из векторного пространства E_k. В частности, если все корни характеристического уравнения эндоморфизма A *простые*, то пространства E_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ суть одномерные пространства над телом $\mathbf{C}$, и значит, найдется n векторов $\mathbf{c}_k$, для которых n функций $e^{r_k t}\mathbf{c}_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ образуют фундаментальную систему интегралов уравнения (19).

Характеристические корни эндоморфизма A называются также *характеристическими корнями линейного уравнения* (19). Заметим, что характеристическое уравнение эндоморфизма A можно получить, выразив, что функция $\mathbf{c}e^{rt}$ является интегралом уравнения (19) для вектора $\mathbf{c} \neq 0$.

Если корни r_k $(1 \leqslant k \leqslant q)$ определены в явном виде так, что порядок кратности корня r_k равен n_k, то практически интегралы уравнения (19) можно получить, записав, что это уравнение удовлетворяется выражением (32), где $\mathbf{p}_k$ — произвольный многочлен степени, не превосходящей $n_k - 1$, с коэффициентами из E; приравнивая в обеих частях полученного уравнения коэффициенты при $e^{r_k t}$ (для $1 \leqslant k \leqslant q$), получим уравнения, линейные относительно коэффициентов многочленов $\mathbf{p}_k$; легко видеть, что эти уравнения определяют коэффициенты при членах строго положительной степени многочлена $\mathbf{p}_k$ как функции свободного члена и что последний является решением уравнения $(A - r_k I)^{n_k}\mathbf{x} = 0$, которое определяет подпространство E_k («метод неопределенных коэффициентов»).

Замечание. Если существует такой базис пространства E, что элементы матрицы эндоморфизма A относительно этого базиса *действительны* (см. n° 4, замечание 2), то коэффициенты характеристического уравнения эндоморфизма A действительны для любого вектора $\mathbf{x} = (\xi_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ из E, отнесенного к рассматриваемому базису; пусть $\overline{\mathbf{x}} = (\overline{\xi}_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$, отображение $\mathbf{x} \to \overline{\mathbf{x}}$ является антилинейной инволюцией пространства E. Известно (Алгебра, гл. VII), что если r_k — не действительный корень характеристического уравнения эндоморфизма A, E_k — соответствующее ему устойчивое подпространство, то $\overline{r}_k$ тоже есть характеристический корень той же кратности n_k, что и r_k, и образ E'_k множества E_k при отображении $\mathbf{x} \to \overline{\mathbf{x}}$ есть устойчивое подпространство, соответствующее $\overline{r}_k$. Отсюда выводим, что если $\mathbf{u}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n_k)$ суть n_k линейно независимых интегралов со значениями в E_k, то $2n_k$ интегралов $\mathbf{u}_j + \overline{\mathbf{u}}_j$, $i(\mathbf{u}_j - \overline{\mathbf{u}}_j)$ линейно независимы и имеют относительно выбранного базиса пространства E компоненты, которые являются *действительными* функциями из E. Если же r_k — действительный характеристический корень, то замечание 2 из n° 4 показывает (в тех же обозначениях), что существует n_k линейно независимых интегралов $\mathbf{v}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n_k)$ со значениями в E_k с действительными компонентами. Таким образом, получаем фундаментальную систему интегралов уравнения (19), все компоненты которых *действительны*.

7. *Линейные уравнения n-го порядка*

Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка называется всякое уравнение вида

$$D^n x - a_1(t) D^{n-1} x - \ldots - a_{n-1}(t) Dx - a_n(t) x = b(t), \tag{33}$$

где a_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ и b — числовые (комплексные) функции действительного переменного t, определенные на интервале J из $\mathbf{R}$. Общее рассуждение из § 1, n° 1, показывает, что это уравнение эквивалентно линейной системе n уравнений первого порядка

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx_k}{dt} = x_{k+1} && (1 \leqslant k \leqslant n-1), \\ &\frac{dx_n}{dt} = a_1(t) x_n + a_2(t) + \ldots + a_n(t) x_1 + b(t), && \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

то есть линейному уравнению

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \tag{35}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{C}^n$, $\mathbf{b}(t) = (0, 0, \ldots, 0, b(t))$ и где матрица $A(t)$ имеет вид

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ a_n(t) & a_{n-1}(t) & a_{n-2}(t) & \ldots & a_1(t) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, исследование линейного уравнения n-го порядка состоит в применении к линейному уравнению (35) специального вида вышеизложенных общих результатов. Для любого интервала J, на котором функции a_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ и b *линейчаты*, существует, и притом единственная, функция u, определенная на J, имеющая на этом интервале $(n-1)$-ю непрерывную производную и линейчатую n-ю производную (всюду, за исключением счетного множества точек), удовлетворяющая уравнению (33) на дополнении счетной части интервала J и такая, что

$$u(t_0) = x_0, \qquad Du(t_0) = x_0', \ \ldots, \ D^{n-1} u(t_0) = x_0^{(n-1)}, \tag{36}$$

где t_0 — любая точка из J, а $x_0, x_0', \ldots, x_0^{(n-1)}$ — n произвольных комплексных чисел.

Для того чтобы p интегралов u_j $(1 \leqslant j \leqslant p)$ однородного уравнения

$$D^n x - a_1(t) D^{n-1} x - \ldots - a_{n-1}(t) Dx - a_n(t)\, x = 0, \qquad (37)$$

соответствующего уравнению (33), были линейно независимы (в пространстве $\mathscr{C}(J, \mathbf{C})$ непрерывных отображений J в $\mathbf{C}$, рассматриваемом как векторное пространство над телом $\mathbf{C}$), необходимо и достаточно, чтобы p соответствующих интегралов $\mathbf{u}_j = (u_j, \; Du_j, \; \ldots, \; D^{n-1} u_j)$ однородного уравнения $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\,\mathbf{x}$ были линейно независимы (в пространстве $\mathscr{C}(J, \mathbf{C}^n)$ непрерывных отображений интервала J в $\mathbf{C}^n$). В самом деле, необходимость очевидна. Обратно, если существует n комплексных постоянных λ_j, не равных одновременно нулю, удовлетворяющих на J тождеству $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j(t) = 0$, то отсюда выводим, что $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j D^k u_j(t) = 0$ на J для любого целого k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, что означает выполнение на J тождества $\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \mathbf{u}_j(t) = 0$.

Таким образом, имеем (следствие 1 из теоремы 2)

Предложение 8. *Множество интегралов линейного однородного уравнения* (37), *определенных на* J, *образует* n-*мерное векторное пространство над телом* $\mathbf{C}$.

Если заданы n произвольных интегралов u_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ уравнения (37), то *вронскианом* этой системы интегралов называется определитель (относительно канонического базиса пространства $\mathbf{C}^n$) системы n соответствующих интегралов $\mathbf{u}_j$ уравнения $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x}$, то есть функция

$$W(t) = \begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \ldots & u_n(t) \\ Du_1(t) & Du_2(t) & \ldots & Du_n(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ D^{n-1}u_1(t) & D^{n-1}u_2(t) & \ldots & D^{n-1}u_n(t) \end{vmatrix}.$$

Для того чтобы n интегралов u_j были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы $W(t) \neq 0$ на J, причем для этого достаточно, чтобы $W(t_0) \neq 0$ *в одной точке* t_0 *из* J (предложение 4);

кроме того, имеем (предложение 5)

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} a_1(s)\, ds\right). \qquad (38)$$

Отождествим резольвенту $C(t, t_0)$ уравнения (35) с ее матрицей относительно канонического базиса пространства $\mathbf{C}^n$; тогда столбцами $\mathbf{v}_j(t, t_0)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ этой матрицы будут n линейно независимых интегралов

$$\mathbf{v}_j(t, t_0) = (v_j(t, t_0),\ Dv_j(t, t_0),\ \ldots,\ D^{n-1}v_j(t, t_0))$$

однородного уравнения $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x}$, соответствующих линейно независимым интегралам $v_j(t, t_0)$ уравнения (37), удовлетворяющим условию $D^{k-1}v_j(t_0, t_0) = \delta_{jk}$ (индекс Кронекера) для $1 \leqslant j \leqslant n$, $1 \leqslant k \leqslant n$ (условимся считать $D^0 v_j = v_j$). Отсюда, в частности, вытекает, что метод вариации постоянных (n° 3), примененный к уравнению (35), в качестве интеграла уравнения (33), равного 0 в точке t_0 вместе со своими $n-1$ первыми производными, дает в данном случае функцию

$$w(t) = \int_{t_0}^{t} v_n(t, s)\, b(s)\, ds. \qquad (39)$$

В частном случае уравнения $D^n(x) = b(t)$ формула (39) дает нам снова формулу, выражающую n-ю примитивную линейчатой функции, обращающуюся в 0 в точке t_0 вместе со своими первыми производными

$$w(t) = \int_{t_0}^{t} b(s) \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\, ds$$

(гл. II, § 1, формула (20)): в самом деле, интеграл уравнения $D^n x = 0$, равный нулю в точке t_0 вместе со своими $n-2$ первыми производными и имеющий в этой точке $(n-1)$-ю производную, равную 1, является многочленом $\frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!}$.

8. *Линейные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами*

Если в уравнении (33) коэффициенты a_i постоянны, то соответствующая матрица A постоянна; записывая, что e^{rt} является решением, получим соответствующее характеристическое уравнение

$$r^n - a_1 r^{n-1} - \ldots - a_{n-1} r - a_n = 0. \tag{40}$$

Пусть r_j $(1 \leqslant j \leqslant q)$ — различные корни этого уравнения и n_j $(1 \leqslant j \leqslant q)$ — порядок кратности корня r_j $\left(\sum\limits_{j=1}^{q} n_j = n\right)$. В силу результатов n° 6 и 7 каждому корню r_j для однородного уравнения

$$D^n x - a_1 D^{n-1} x - \ldots - a_{n-1} D x - a_n x = 0 \tag{41}$$

соответствует система n_j *линейно независимых* интегралов

$$u_{jk}(t) = e^{r_j t} p_{jk}(t),$$

где p_{jk} — многочлен (с комплексными коэффициентами) степени, не превосходящей $n_j - 1$ $(1 \leqslant k \leqslant n_j)$; при этом n полученных таким способом интегралов u_{jk} $(1 \leqslant j \leqslant q,\ 1 \leqslant k \leqslant n_j)$ *линейно независимы.* Отсюда следует, что n_j многочленов p_{jk} $(1 \leqslant k \leqslant n_j)$ линейно независимы в пространстве многочленов от t степени, не превосходящей $n_j - 1$, и, значит, образуют *базис* (над телом $\mathbf{C}$) этого пространства, поскольку последнее имеет размерность n_j. Иными словами, имеем

Предложение 9. *Пусть r_j $(1 \leqslant j \leqslant q)$ — различные корни характеристического уравнения* (40), *и пусть n_j — порядок кратности корня r_j $(1 \leqslant j \leqslant q)$. Тогда n функций $t^k e^{r_j t}$ $(1 \leqslant k \leqslant n_j;\ 1 \leqslant j \leqslant q)$ являются линейно независимыми интегралами однородного уравнения* (41).

Этот результат можно доказать и непосредственно следующим образом. Из уравнения (41) следует, что n-я производная всякого интеграла этого уравнения дифференцируема на $\mathbf{R}$, откуда сразу же индукцией по целым $m > n$ получаем, что любой интеграл уравнения (41) имеет производную порядка m, или, другими словами, *бесконечно дифференцируем* на $\mathbf{R}$. Пусть $\mathscr{D}$ — векторное (не топологическое) пространство над телом $\mathbf{C}$ бесконечно дифференцируемых на $\mathbf{R}$ комплексных функций; отображение $x \to Dx$ есть эндоморфизм этого пространства, и уравнение (41) может быть записано в виде

$$f(D)\, x = 0, \tag{42}$$

где $f(D) = D^n - a_1 D^{n-1} - \ldots - a_{n-1} D - a_n$ (Алгебра, гл. IV, § 2, n° 1).

Предложение 10. *Пусть g и h — два взаимно простых многочлена, удовлетворяющие условию $f = gh$. Подпространство решений уравнения* (42) *представляет собой прямую сумму подпространств решений двух уравнений*

$$g(D)\,x = 0, \qquad h(D)\,x = 0.$$

В самом деле, на основании тождества Безу (Алгебра, гл. VII) существуют такие два многочлена $p(D)$ и $q(D)$, что $p(D)\,g(D) + q(D)\,h(D) = 1$. Следовательно, для любого решения x уравнения (42) можно записать $x = y + z$, где $y = p(D)\,g(D)\,x$, а $z = q(D)\,h(D)\,x$, и мы имеем $h(D)\,y = p(D)\,(f(D)\,x) = 0$ и $g(D)\,z = q(D)\,(f(D)\,x) = 0$. С другой стороны, если одновременно $g(D)\,x = 0$ и $h(D)\,x = 0$, то отсюда следует, что $x = p(D)\,(g(D)\,x) + q(D)\,(h(D)\,x) = 0$, что и завершает доказательство.

Таким образом, в принятых выше обозначениях можно записать, что

$$f(D) = \prod_{j=1}^{q} (D - r_j)^{n_j},$$

и, применяя индукцией по q предложение 10, получаем, что подпространство решений уравнений (42) есть прямая сумма подпространств решений q уравнений

$$(D - r_j)^{n_j}\,x = 0 \qquad (1 \leqslant j \leqslant q). \tag{43}$$

Но для любого комплексного числа r имеем

$$D\,(e^{rt}x) = e^{rt}\,(D + r)\,x; \tag{44}$$

значит, уравнение (43) эквивалентно уравнению

$$D^{n_j}\,(e^{-r_jt}x) = 0$$

и, стало быть, имеет в качестве решений функции $e^{r_jt}p_j(t)$, где p_j пробегает множество многочленов степени, не превосходящей n_{j-1}; итак, снова получаем предложение 9.

Если предположить, что однородное уравнение (41) решено (то есть характеристические корни предполагаются определенными), то мы знаем, что метод вариации постоянных позволяет найти решения неоднородного уравнения

$$D^n x - a_1 D^{n-1} x - \ldots - a_{n-1} D x - a_n x = b(t), \tag{45}$$

где $b(t)$ — *произвольная* линейчатая функция (n° 3); отметим, что если $b(t)$ *бесконечно дифференцируема* на интервале J, то все интегралы уравнения (45) бесконечно дифференцируемы на J. В частном случае $b(t)=e^{\alpha t}p(t)$, где p — *многочлен* (с комплексными коэффициентами) и α — произвольное комплексное число, интеграл уравнения (45) может быть получен следующим более простым путем. Положим $x=e^{\alpha t}y$; уравнение $f(D)x=e^{\alpha t}p(t)$, в силу (44), записывается в виде $f(\alpha+D)y=p(t)$ или еще, на основании формулы Тейлора, примененной к многочлену $f(D)$, в виде

$$\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}D^n y+\frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}D^{n-1}y+\ldots+\frac{f'(\alpha)}{1!}Dy+f(\alpha)y=p(t). \quad (46)$$

Пусть m — степень многочлена $p(t)=\sum_{k=0}^{m}\lambda_k t^{m-k}$; если $f(\alpha)\neq 0$ (то есть если α не является характеристическим корнем), то *найдется, и притом единственный, многочлен* $u(t)=\sum_{k=0}^{m}c_k t^{m-k}$ *степени* m, *являющийся решением уравнения* (46), поскольку коэффициенты c_k определяются из системы линейных уравнений

$$f(\alpha)c_k+\binom{m-k+1}{1}f'(\alpha)c_{k-1}+\binom{m-k+2}{2}f''(\alpha)c_{k-2}+\ldots$$
$$\ldots+\binom{m}{k}f^{(k)}(\alpha)c_0=\lambda_k \qquad (0\leqslant k\leqslant m),$$

которая, очевидно, имеет решение, и притом единственное. Если же, напротив, α — характеристический корень и если h — его порядок кратности, то предыдущая выкладка показывает, что существует, и притом единственный, многочлен $v(t)$ степени m, обладающий тем свойством, что всякое решение уравнения $D^h y=v(t)$ является интегралом; иными словами, всякий многочлен, удовлетворяющий уравнению (46), будет в этом случае иметь степень $m+h$ («резонанс»).

9. *Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами*

Приняв обозначения предыдущего n°, рассмотрим с более общей точки зрения систему m дифференциальных уравнений вида

$$\sum_{k=1}^{n}p_{jk}(D)x_k=b_j(t) \qquad (1\leqslant j\leqslant m), \quad (47)$$

где неизвестные обозначены через x_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$, а правые части b_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ являются комплексными функциями действительного переменного t, и где $p_{jk}(D)$ — многочлены (произвольной степени) с *постоянными* (комплексными) коэффициентами относительно оператора дифференцирования D $(1 \leqslant j \leqslant m,$ $1 \leqslant k \leqslant n)$.

Эти системы относятся к иному типу, чем системы, рассмотренные в § 1, n° 1 (формула (5)), что можно увидеть на следующем примере:

$$\left.\begin{aligned} Dx_1 &= a(t), \\ D^2x_1 + Dx_2 + x_2 &= b(t). \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Мы ограничимся случаем, когда $b_j(t)$ — *бесконечно дифференцируемые* функции на интервале J, и будем искать лишь решения (x_k) $(1 \leqslant k \leqslant n)$, бесконечно дифференцируемые на J. Положив $\mathbf{b}(t) = (b_1(t), \ldots, b_m(t))$ (отображение J в $\mathbf{C}^m$) и $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, мы можем записать систему (47) в виде

$$P(D)\,\mathbf{x} = \mathbf{b}(t), \tag{49}$$

где $P(D)$ есть матрица $(p_{jk}(D))$, состоящая из m строк и n столбцов с коэффициентами, принадлежащими кольцу $\mathbf{C}[D]$ многочленов от D, коэффициенты которых в свою очередь принадлежат $\mathbf{C}$. Пусть $f_j(D)$ $(1 \leqslant j \leqslant r \leqslant \operatorname{Min}(m, n))$ — отличные от нуля *инвариантные* множители матрицы $P(D)$; известно (Алгебра, гл. VII), что это вполне определенные унитарные многочлены, обладающие тем свойством, что f_j является делителем f_{j+1} при $1 \leqslant j \leqslant r-1$ (r — ранг матрицы $P(D)$); кроме того, существуют две квадратные матрицы $U(D)$ и $V(D)$, соответственно порядка m и n, *обратимые* (в кольцах квадратных матриц порядка соответственно m и n *с коэффициентами в кольце* $\mathbf{C}[D]$ *многочленов от* D *с комплексными коэффициентами*) и такие, что все члены матрицы $Q(D) = (q_{jk}(D)) = U(D)\,P(D)\,V(D)$, за исключением ее диагональных членов $q_{jj}(D) = f_j(D)$ для $1 \leqslant j \leqslant r$, равны нулю.

Положим $\mathbf{y} = V^{-1}(D)\,\mathbf{x}$; уравнение (49) эквивалентно уравнению

$$U(D)\,(P(D)\,(V(D)\,\mathbf{y})) = U(D)\,\mathbf{b},$$

то есть уравнению

$$Q(D)\,\mathbf{y} = U(D)\,\mathbf{b}, \tag{50}$$

поскольку матрица $U(D)$ обратима. Но если $\mathbf{y}=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и если $U(D)\mathbf{b}(t)=(c_1(t), \ldots, c_m(t))$, то уравнение (50) запишется в виде

$$f_j(D)\,y_j=c_j(t) \quad \text{для } 1\leqslant j\leqslant r, \tag{51}$$

$$0=c_j(t) \quad \text{для } r+1\leqslant j\leqslant m. \tag{52}$$

Следовательно, система имеет бесконечно дифференцируемые решения лишь в том случае, если выполняются условия (52); тогда нахождение y_j с индексом $j\leqslant r$ сводится к интегрированию линейных дифференциальных уравнений (51) с постоянными коэффициентами; функции y_j для индексов, бо́льших r, являются произвольными бесконечно дифференцируемыми функциями. Но как только найдены решения $\mathbf{y}$ уравнения (50), решения уравнения (47) выражаются через них формулой $\mathbf{x}=V(D)\,\mathbf{y}$.

Замечания. 1) Некоторые из многочленов $f_j(D)$ могут сводиться к отличным от нуля постоянным; тогда соответствующие y_j полностью определены.

2) Если все b_j равны нулю, то есть если система (47) *однородна*, то условия (52) всегда выполняются; если, кроме того, $r=n$, то очевидно, что множество решений системы (47) образует векторное пространство над телом $\mathbf{C}$ размерности, равной *сумме степеней* многочленов $f_j(D)$, то есть *степени* многочлена $\det(P(D))$.

3) Если заданы многочлены $p_{jk}(D)$, то система (47), имеющая решения, когда правые части бесконечно дифференцируемы (или дифференцируемы до некоторого порядка), может не иметь решений, когда в правой части стоят произвольные линейчатые функции; примером тому служит система (48), которая не имеет решений, если $a(t)$ не является примитивной. Мы не задаемся целью отыскивать здесь дополнительные условия, подобные вышеуказанному, которые нужно ввести, когда в правой части стоят произвольные линейчатые функции.

Упражнения. 1) Пусть E — полное нормированное пространство над телом $\mathbf{R}$, F — топологическое пространство, J — интервал из $\mathbf{R}$; пусть $(t, \xi)\to A(t, \xi)$ — такое отображение множества $J\times F$ в $\mathscr{L}(E)$, что, когда ξ стремится к ξ_0, $A(t, \xi)$ равномерно стремится к $A(t, \xi_0)$ на J. Показать, что если $C(t, t_0, \xi)$ — резольвента линейного уравнения $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt}=A(t, \xi)\,\mathbf{x}$, то на любом компактном интервале K, содержащемся в J, $C(t, t_0, \xi)$ равномерно стремится к $C(t, t_0, \xi_0)$ при ξ, стремящемся к ξ_0 для любых t и t_0 из K.

2) Пусть $t\to A(t)$ — такое линейчатое отображение интервала J в $\mathscr{L}(E)$, что для любых двух точек s, t из J отображения $A(s)$ и $A(t)$

перестановочны. Положим $B(t)=\int_{t_0}^{t} A(s)\,ds$. Показать, что резольвента $C(t, t_0)$ уравнения $\frac{d\mathbf{x}}{dt}=A(t)\mathbf{x}$ равна $\exp(B(t))$.

Если $t \to A_1(t)$, $t \to A_2(t)$ — такие два линейчатых отображения интервала J в $\mathscr{L}(E)$, что для любых двух точек s и t из J отображения $A_1(s)$, $A_1(t)$, $A_2(s)$, $A_2(t)$ попарно перестановочны, то показать, что

$$\exp\left(\int_{t_0}^{t}(A_1(s)+A_2(s))\,ds\right)=\exp\left(\int_{t_0}^{t}A_1(s)\,ds\right)\exp\left(\int_{t_0}^{t}A_2(s)\,ds\right).$$

3) Пусть заданы две матрицы

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}.$$

Показать, что $e^{A+B}\neq e^Ae^B$.

4) Показать, что если P — произвольный автоморфизм множества $\mathscr{L}(E)$, то $\exp(PAP^{-1})=P(\exp A)P^{-1}$.

5) Показать на примере, что уравнение $\frac{d\mathbf{x}}{dt}=A\mathbf{x}+e^{\alpha t}\mathbf{p}(t)$, где $\mathbf{p}$ — многочлен (с коэффициентами из E), может иметь интеграл, равный многочлену *той же степени*, что и $\mathbf{p}(t)$, даже когда α является характеристическим корнем для A.

6) Пусть $f(X)$ — многочлен n-й степени с комплексными коэффициентами, и пусть

$$\frac{1}{f(X)}=\sum_{j=1}^{q}\sum_{h=1}^{n_j}\frac{\lambda_{jh}}{(X-r_j)^h}$$

есть разложение рациональной дроби $\frac{1}{f(X)}$ на простейшие (Алгебра, гл. VII). Показать, что для любой линейчатой функции $b(t)$ функция

$$\sum_{j=1}^{q}\sum_{h=1}^{n_j}\lambda_{jh}\int_{t_0}^{t}\frac{(t-s)^{h-1}}{(h-1)!}\,e^{r_j(t-s)}\,b(s)\,ds$$

является интегралом уравнения $f(D)x=b(t)$.

°7) a) Пусть $t\to A(t)$ — такое отображение интервала $J\subset\mathbf{R}$ в $\mathscr{L}(E)$, что для любого $\mathbf{x}\in E$ отображение $t\to A(t)\mathbf{x}$ интервала J в E непрерывно. Показать, что $\|A(t)\|$ *ограничена* на любом компактном интервале $K\subset J$ (применить упражнение 20 из «Общей топологии», гл. IX, § 5). Показать, что при этих условиях для любой точки $(t_0, \mathbf{x}_0)$ из $J\times E$ уравнение $\frac{d\mathbf{x}}{dt}=A(t)\mathbf{x}+\mathbf{b}(t)$ имеет, и притом единственное, решение, определенное на J и равное $\mathbf{x}_0$

в точке t_0. Кроме того (если обозначить это решение через $\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$), отображение $\mathbf{x}_0 \to \mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ является взаимно однозначным и взаимно непрерывным линейным отображением $C(t, t_0)$ пространства E на себя, удовлетворяющим соотношениям (6) и (7); далее, отображение $(s, t) \to C(s, t)$ множества $J \times J$ в $\mathscr{L}(E)$ непрерывно.

б) Возьмем в качестве E пространство последовательностей $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ действительных чисел, удовлетворяющих условию $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$, с нормой $\| x \| = \sup\limits_n | x_n |$, при которой E является полным пространством. Пусть для любого $t \in J = [0, 1]$ линейное отображение $A(t)$ пространства E в себя таково, что

$$A(t)\,\mathbf{x} = \left(\frac{1}{1+nt}\, x_n\right)_{n \in \mathbf{N}}.$$

Показать, что $A(t)$ удовлетворяет условиям, сформулированным в а), но отображение $t \to A(t)$ интервала J в $\mathscr{L}(E)$ не является непрерывным в точке $t = 0$ и резольвента $C(t, t_0)$ уравнения $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\,\mathbf{x}$ обладает тем свойством, что отображение $t \to C(t, t_0)$ интервала J в $\mathscr{L}(E)$ не дифференцируемо в точке $t = 0$.

°8) Пусть G — полная нормированная алгебра над телом $\mathbf{R}$, обладающая единичным элементом $\mathbf{e}$.

а) Пусть $t \to \mathbf{a}(t)$ — линейчатая функция на интервале $J \subset \mathbf{R}$ со значениями в G. Показать, что интеграл $\mathbf{u}$ линейного уравнения $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{a}(t)\,\mathbf{x}$, принимающий в точке $t_0 \in J$ значение $\mathbf{e}$, обратим на J и что его обратная величина является решением уравнения $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = -\mathbf{x}\mathbf{a}(t)$ (обозначив через $\mathbf{v}$ интеграл последнего уравнения, принимающий в точке t_0 значение $\mathbf{e}$, рассмотреть линейные уравнения, которым удовлетворяют $\mathbf{uv}$ и $\mathbf{vu}$). Вывести отсюда, что для любого $t_0 \in G$ интеграл уравнения $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{a}(t)\,\mathbf{x}$, принимающий в точке t_0 значение x_0, равен $\mathbf{u}(t)\, x_0$.

б) Пусть $\mathbf{a}(t)$ и $\mathbf{b}(t)$ — две линейчатые на J функции, а $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ — интегралы уравнений $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{a}(t)\,\mathbf{x}$, $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{x}\mathbf{b}(t)$, принимающие в точке t_0 значение $\mathbf{e}$. Показать, что интеграл уравнения $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{a}(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{x}\mathbf{b}(t)$, принимающий в точке t_0 значение $\mathbf{x}_0$, равен $\mathbf{u}(t)\,\mathbf{x}_0\mathbf{v}(t)$.

в) Пусть $\mathbf{a}(t)$, $\mathbf{b}(t)$, $\mathbf{c}(t)$, $\mathbf{d}(t)$ — четыре линейчатые на J функции и $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ — решение системы двух линейных уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{a}(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)\,\mathbf{y}, \qquad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{c}(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{d}(t)\,\mathbf{y}.$$

Показать, что если функция $\mathbf{v}$ обратима на J, то $\mathbf{w}=\mathbf{u}\mathbf{v}^{-1}$ есть интеграл уравнения $\frac{d\mathbf{z}}{dt}=\mathbf{b}(t)+\mathbf{a}(t)\mathbf{z}-\mathbf{z}\mathbf{d}(t)-\mathbf{z}\mathbf{c}(t)\mathbf{z}$ («уравнение Риккати»), и обратно. Вывести отсюда, что всякий интеграл последнего уравнения на J, принимающий в точке t_0 значение $\mathbf{x}_0$, имеет вид $(A(t)\mathbf{x}_0+B(t)\mathbf{e})(C(t)\mathbf{x}_0+D(t)\mathbf{e})^{-1}$, где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и $D(t)$ — непрерывные отображения интервала J в $\mathscr{L}(G)$, удовлетворяющие тождеству $U(\mathbf{x}\ \mathbf{y})=(U\mathbf{x})\,\mathbf{y}$.

г) Пусть $\mathbf{w}_1$ — интеграл уравнения $\frac{d\mathbf{z}}{dt}=\mathbf{b}(t)+\mathbf{a}(t)\mathbf{z}-\mathbf{z}\mathbf{d}(t)-\mathbf{z}\mathbf{c}(t)\mathbf{z}$ на J; показать, что если $\mathbf{w}$ — другой интеграл этого уравнения, для которого разность $\mathbf{w}-\mathbf{w}_1$ обратима на J, то $\mathbf{w}-\mathbf{w}_1$ выражается при помощи интегралов уравнений $\frac{d\mathbf{x}}{dt}=-(\mathbf{d}-\mathbf{c}\mathbf{w}_1)\mathbf{x}$ и $\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{x}(\mathbf{a}-\mathbf{w}_1\mathbf{c})$ (рассмотреть уравнение, которому удовлетворяет $(\mathbf{w}-\mathbf{w}_1)^{-1}$, и воспользоваться б)).

9) Пусть y_k $(1\leqslant k\leqslant n)$ — n числовых функций, определенных на интервале $I\subset\mathbf{R}$ и имеющих на I $(n-1)$-ю непрерывную производную.

а) Показать, что если n функций y_k линейно зависимы, то матрица $(y_k^{(h)}(t))_{0\leqslant h\leqslant n-1,\ 1\leqslant k\leqslant n}$ в каждой точке $t\in I$ имеет ранг, меньший n.

б) Обратно, показать, что если для любой точки $t\in I$ матрица $(y_k^{(h)}(t))$ имеет ранг, меньший n, то на любом непустом открытом интервале $J\subset I$ найдется такой непустой открытый интервал $U\subset J$, что сужения функций y_k в U линейно зависимы (если p — наименьшее из чисел $q<n$, удовлетворяющих тому условию, что вронскианы q любых функций y_k тождественно равны нулю на J, то рассмотреть точку $a\in J$, в которой вронскиан из $p-1$ функций y_k отличен от нуля, и показать, что p функций y_k являются интегралами линейного уравнения порядка $p-1$ в некоторой окрестности точки a).

в) Положим $y_1(t)=t^2$ для $t\in\mathbf{R}$, $y_2(t)=t^2$ для $t\geqslant 0$, $y_2(t)=-t^2$ для $t<0$; показать, что y_1 и y_2 имеют на $\mathbf{R}$ непрерывную производную и $y_1y_2'-y_2y_1'=0$, но y_1 и y_2 не будут линейно зависимы на $\mathbf{R}$.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК

(Римские цифры отсылают читателя к библиографии, помещенной в конце этого очерка.)

Как мы уже видели (Исторический очерк к главам I—III), задачи, приводящие к интегрированию дифференциальных уравнений, находились в числе первых задач, рассматривавшихся создателями исчисления бесконечно малых в XVII веке (а именно Декартом и Барроу). С тех пор теория дифференциальных уравнений не переставала служить объектом творчества математиков и благоприятной почвой для применения самых разнообразных методов анализа; далеко не все вопросы, поднимавшиеся этой теорией, были решены, и интерес, связанный с теорией дифференциальных уравнений, поддерживался тем более, что она составляла одну из наиболее постоянных и наиболее плодотворных точек соприкосновения между математическими и экспериментальными науками: последние часто находили в этой теории актуальную помощь, постоянно доставляя ей в свою очередь новые задачи.

Из числа разделов, которые должны были бы составлять исчерпывающее изучение дифференциальных уравнений с современной точки зрения, мы выбрали для изложения в этой книге лишь два наиболее элементарных, включающие теоремы существования и линейные уравнения для *действительного* переменного. Стало быть, этими двумя аспектами мы и ограничим наш краткий исторический обзор. С начала XVIII века математики были убеждены, что «общий» интеграл дифференциального уравнения n-го порядка зависит от n произвольных постоянных и что «вообще», существует, и притом единственный, интеграл, принимающий вместе со своими $n-1$ первыми производными заданные значения для заданного значения x_0 переменной; это убеждение они основывали на процессе (восходящем к Ньютону) постепенного вычисления коэффициентов ряда Тейлора для решения в точке x_0 при помощи самого дифференциального уравнения и n первых коэффициентов. Однако до Коши никто не занимался ни исследованием сходимости полученного таким образом ряда, ни доказательством того, что его сумма является решением дифференциального уравнения; разумеется, речь шла лишь об аналитических дифференциальных уравнениях. Среди различных методов, привлеченных Коши для доказательства существования интегралов дифференциальных уравнений, те методы, которым мы следовали ((IV) и (IV bis)), обобщенные несколько позже Липшицем, особенно интересны для случая неаналитических уравнений и для аппроксимации интегралов.

Линейные уравнения были в числе первых уравнений, привлекших внимание. Лейбниц и Яков Бернулли интегрируют линейное уравнение первого порядка двумя квадратурами ((I), т. II, стр. 731); общий интеграл линейного уравнения произвольного порядка с постоянными коэффициентами и произвольной правой частью получен Эйлером ((II), стр. 296—354); тем же способом Даламбер решает линейные системы с постоянными коэффициентами. Немного позже Лагранж (III) закладывает основы общей теории линейных уравнений n-го порядка: он выясняет, что интеграл однородного уравнения есть линейная функция от n постоянных интегрирования, вводит сопряженное уравнение, открывает понижение порядка однородного уравнения, если известны частные решения, и метод вариации постоянных для интегрирования неоднородного уравнения. Неясные места теории Лагранжа (а именно в части, относящейся к линейной независимости интегралов) были освещены Коши, изложение которого (IV bis) остается почти полностью неизменным, если не считать улучшений в деталях путем введения матричной терминологии и теории элементарных делителей.

БИБЛИОГРАФИЯ

(I) J a k o b B e r n o u l l i, Opera, 2 vol., Genève (Cramer-Philibert), 1744.

(II) L. E u l e r, Opera omnia: Institutiones calculi integralis (1), t. XII, Leipzig — Berlin (Teubner), 1914. Русский перевод: Интегральное исчисление, т. т. 1—3, М., Гостехиздат, 1956—1958.

(III) J.-L. L a g r a n g e, Œuvres, Paris (Gauthier-Villars), 1867—1890: a) Solution de différents problémes de calcul intégral, t. I, p. 471; b) Sur le mouvement des nœuds des orbites planétaires, t. IV, p. 111.

(IV) A.-L. C a u c h y, Œuvres complètes (2), t. XI, Paris (Gauthier-Villars), 1913, p. 399 (= Exercices d'Analyse, Paris, 1840, t. I. p. 327).

(IV bis) A.-L. C a u c h y, in «Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral, rédigées principalement d'après les méthodes de M. A.-L. Cauchy», par l'abbé Moigno, t. II, Paris, 1844.

ГЛАВА V

ЛОКАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

§ 1. Сравнение функций на фильтрующемся множестве

Пусть E — множество, фильтрующееся по фильтру с базисом $\mathfrak{F}$ (Общая топология, гл. I, § 5); в этой главе мы будем рассматривать функции, множествами определения которых являются подмножества множества E, принадлежащие базису фильтра $\mathfrak{F}$ (зависящие от рассматриваемой функции), принимающие свои значения либо в теле $\mathbf{R}$ действительных чисел, либо вообще в некотором нормированном векторном пространстве над упорядоченным телом (Общая топология, гл. IX, § 3, n°3).

В приложениях в качестве E чаще всего будет рассматриваться подмножество числового пространства $\mathbf{R}^n$ или замкнутая прямая $\overline{\mathbf{R}}$, а в качестве $\mathfrak{F}$ — след на E фильтра окрестностей предельной точки множества E или фильтр дополнений относительно компактных множеств в E («окрестности бесконечно удаленной точки»).

Вообще говоря, знания того, что функция стремится к пределу по $\mathfrak{F}$, равно как и знания самого предела, недостаточно для того, чтобы решить все задачи «перехода к пределу по $\mathfrak{F}$», относящиеся к выражениям, составленным из этой функции.

Например, когда действительное переменное x стремится к $+\infty$, каждая из трех функций x, x^2 и $\sqrt{x}$ стремится к $+\infty$, в то время как первое из выражений

$$(x+1)^2-x^2, \quad (x+1)-x, \quad \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$$

стремится к $+\infty$, второе — к 1, а третье — к 0.

Таким образом, важно знать не только предельное значение функции по $\mathfrak{F}$ (если этот предел существует), но и «способ» стремления функции к своему пределу; иными словами, мы приходим к вопросу об установлении классификации во множестве функций, стремящихся к одному и тому же пределу.

1. Отношения сравнения: I. Слабые отношения

В дальнейшем мы будем через V обозначать нормированное векторное пространство над упорядоченным телом K, а через $\mathcal{H}(\mathfrak{F}, V)$ — множество функций со значениями в V, каждая из которых определена на подмножестве из E, принадлежащем базису фильтра $\mathfrak{F}$. Отношения, которые мы введем между такими функциями, носят *локальный* характер относительно фильтра с базисом $\mathfrak{F}$; уточним, что следует понимать под этим. Если $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ — две функции из $\mathcal{H}(\mathfrak{F}, V)$, то отношение «существует такое множество $Z \in \mathfrak{F}$, на котором функции $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ определены и равны» есть *отношение эквивалентности* R_∞ в $\mathcal{H}(\mathfrak{F}, V)$; в самом деле, оно, очевидно, рефлексивно и симметрично, а для доказательства его транзитивности достаточно заметить, что если $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ определены и равны на $X \in \mathfrak{F}$, $\mathbf{g}$ и $\mathbf{h}$ определены и равны на $Y \in \mathfrak{F}$, то $\mathbf{f}$ и $\mathbf{h}$ определены и равны на любом множестве из $\mathfrak{F}$, содержащемся в $X \cap Y$. Будем говорить, что отношение S, в которое входит функция $\mathbf{f}$ из $\mathcal{H}(\mathfrak{F}, V)$, носит *локальный* характер (по $\mathfrak{F}$) относительно $\mathbf{f}$, если оно *согласуется* (по $\mathbf{f}$) с отношением эквивалентности R_∞ (Теория множеств, Результаты, § 5, n° 7); известно, что если $\tilde{\mathbf{f}}$ есть класс функции $\mathbf{f}$ по модулю R_∞ (элемент фактор-множества $\mathcal{H}_\infty(\mathfrak{F}, V) = \mathcal{H}(\mathfrak{F}, V) / R_\infty$), то из S факторизацией выводится отношение между $\mathbf{f}$ и другими аргументами отношения S, и что всякое отношение такого рода определяет отношение, носящее локальный характер относительно $\mathbf{f}$.

Пример. Если $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ — две функции из $\mathcal{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$, то отношение «существует такое множество $X \subset \mathfrak{F}$, что $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ определены на X и $\mathbf{f}(t) \leqslant \mathbf{g}(t)$ для любого $t \in X$» носит локальный характер относительно $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$. Обозначим через $\tilde{\mathbf{f}} \leqslant \tilde{\mathbf{g}}$ отношение, полученное из него факторизацией (для $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$); заметим, что если $\tilde{\mathbf{f}} \leqslant \tilde{\mathbf{g}}$, то существуют функции $\mathbf{f}_1 \in \tilde{\mathbf{f}}$ и $\mathbf{g}_1 \in \tilde{\mathbf{g}}$, определенные *на всем* множестве E и такие, что $\mathbf{f}_1(t) < \mathbf{g}_1(t)$ для любого $t \in E$.

Замечания. 1) Пусть V_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — n нормированных векторных пространств над телом K и φ — функция, определенная на $V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n$ со значениями в V; если $\mathbf{f}_i$ и $\mathbf{g}_i$ — две функции из $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, V_i)$, определенные и равные на множестве $Z_i \in \mathfrak{F}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, то функции $t \to \varphi(\mathbf{f}_1(t), \mathbf{f}_2(t), \ldots, \mathbf{f}_n(t))$ и $t \to \varphi(\mathbf{g}_1(t), \mathbf{g}_2(t), \ldots, \mathbf{g}_n(t))$ определены и равны на любом множестве из $\mathfrak{F}$, содержащемся в $Z_1 \cap Z_2 \cap \ldots \cap Z_n$, или, иначе говоря, принадлежат одному и тому же классу по модулю R_∞ в $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, V)$; следовательно, функция φ факторизацией по R_∞ определяет отображение (которое мы чаще всего будем обозначать через $\varphi(\widetilde{\mathbf{f}}_1, \ldots, \widetilde{\mathbf{f}}_n)$) произведения $\mathscr{H}_\infty(\mathfrak{F}, V_1) \times \ldots$ $\ldots \times \mathscr{H}_\infty(\mathfrak{F}, V_n)$ в $\mathscr{H}_\infty(\mathfrak{F}, V)$. Если, например, в качестве φ взять отображения $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \to \mathbf{x} + \mathbf{y}$ и $\mathbf{x} \to \mathbf{x}\lambda$ $(\lambda \in K)$, то тем самым для произвольных двух элементов $\widetilde{\mathbf{f}}$ и $\widetilde{\mathbf{g}}$ из $\mathscr{H}_\infty(\mathfrak{F}, V)$ будут определены элементы $\widetilde{\mathbf{f}+\mathbf{g}}$ и $\widetilde{\mathbf{f}\lambda}$, и мы непосредственно можем убедиться в том, что законы композиции $(\widetilde{\mathbf{f}}, \widetilde{\mathbf{g}}) \to \widetilde{\mathbf{f}+\mathbf{g}}$ и $(\lambda, \mathbf{f}) \to \widetilde{\mathbf{f}\lambda}$ определяют в $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, V)$ структуру *векторного пространства* над телом K; в этом пространстве класс $\widetilde{0}$ состоит из функций, равных 0 на множестве из $\mathfrak{F}$, а класс $-\widetilde{\mathbf{f}}$ состоит из функций, равных $-\mathbf{f}$ на множестве из $\mathfrak{F}$. Далее, если V есть *алгебра* над телом K, то, приняв $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}\mathbf{y}$, мы определим в $\mathscr{H}_\infty(\mathfrak{F}, V)$ второй внутренний закон композиции $(\widetilde{\mathbf{f}}, \widetilde{\mathbf{g}}) \to \widetilde{\mathbf{f}\,\mathbf{g}}$; вместе с двумя вышеуказанными законами он определяет в $\mathscr{H}_\infty(\mathfrak{F}, V)$ структуру *алгебры* над телом K; если V обладает единичным элементом $\mathbf{e}$, то $\mathscr{H}_\infty(\mathfrak{F}, V)$ будет иметь в качестве единичного элемента класс $\widetilde{\mathbf{e}}$, состоящий из функций, равных $\mathbf{e}$ на множестве из $\mathfrak{F}$; для того чтобы класс $\widetilde{\mathbf{f}}$ был *обратимым* в $\mathscr{H}_\infty(\mathfrak{F}, V)$, необходимо и достаточно, чтобы для некоторой функции $\mathbf{f} \in \widetilde{\mathbf{f}}$ существовало такое множество $Z \in \mathfrak{F}$, что функция $\mathbf{f}(t)$ обратима в V для любого $t \in Z$ (в таком случае это условие выполняется для любой функции из класса $\widetilde{\mathbf{f}}$) *).

2) Пусть, в тех же обозначениях, ψ есть отображение подмножества произведения $\prod\limits_{i=1}^{n} V_i$ в $\mathbf{V}$; обозначим через $\psi(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n)$ функцию, равную $\psi(\mathbf{f}_1(t), \ldots, \mathbf{f}_n(t))$ в каждой точке $t \in E$, в которой определены $\mathbf{f}_i(t)$ и в которой точка $(\mathbf{f}_i(t))$ принадлежит множеству, на котором определена ψ **). Например, $\mathbf{f}+\mathbf{g}$ есть функция,

*) Эти действия над классами эквивалентности «локально равных» функций играют важную роль во многих теориях, которые будут изложены в настоящем трактате, особенно в теории дифференцируемых многообразий.

**) В частности, в дальнейшем мы будем для функции $\mathbf{f}$ из $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, V)$ обозначать через $\|\mathbf{f}\|$ функцию $t \to \|\mathbf{f}(t)\|$, принадлежащую $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$ и определенную на том же множестве, что и $\mathbf{f}$; особо оговорим, что в этой главе $\|\mathbf{f}\|$ означает *функцию*, а не *число*.

равная $\mathbf{f}(t)+\mathbf{g}(t)$ в любой точке $t\in E$, в которой определены обе функции $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$. Заметим, что отображение $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \to \mathbf{f}+\mathbf{g}$ *не является групповым законом* в $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, V)$, так как если $\mathbf{f}$ определена не на всем множестве E, то не существует такой функции $\mathbf{g}\in\mathscr{H}(\mathfrak{F}, V)$, что $\mathbf{f}+\mathbf{g}=0$.

Определение 1. *Если имеются две числовые функции f и g, принадлежащие $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$ и положительные на множестве из $\mathfrak{F}$, то говорят, что f подчинена функции g или что g доминирует над f (по $\mathfrak{F}$), и записывают $f \preccurlyeq g$ или $g \succcurlyeq f$, если существует такое множество $X\in\mathfrak{F}$ и такое число $k>0$, что $f(t)\leqslant kg(t)$ для любого $t\in X$* (иными словами, если существует такое $k>0$, что $\tilde{f}\leqslant k\tilde{g}$).

Если имеются два нормированных пространства V_1 и V_2 и две функции $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$, принадлежащие соответственно $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, V_1)$ и $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, V_2)$, то говорят, что f_1 подчинена f_2 (по $\mathfrak{F}$), и записывают $\mathbf{f}_1 \preccurlyeq \mathbf{f}_2$ или $\mathbf{f}_2 \succcurlyeq \mathbf{f}_1$, если $\|\mathbf{f}\| \preccurlyeq \|\mathbf{f}_2\|$.

Отношение $\mathbf{f}_1 \preccurlyeq \mathbf{f}_2$, очевидно, носит локальный характер относительно $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$; следовательно, оно эквивалентно отношению $\tilde{\mathbf{f}}_1 \preccurlyeq \tilde{\mathbf{f}}_2$, которое получается из него факторизацией. В случае числовых функций f и g не следует смешивать отношения $\tilde{f} \preccurlyeq \tilde{g}$ и $\tilde{f}\leqslant\tilde{g}$.

Отметим, что для любого скаляра $\lambda\neq 0$ отношение $\mathbf{f}_1 \preccurlyeq \mathbf{f}_2\lambda$ *эквивалентно* отношению $\mathbf{f}_1 \preccurlyeq \mathbf{f}_2$. Если $\mathbf{f}_1 \preccurlyeq \mathbf{f}_2$, то существует такое множество $X\in\mathfrak{F}$, что для любой точки $x\in X$, в которой $\mathbf{f}_2(x)=0$, выполняется равенство $\mathbf{f}_1(x)=0$.

Примеры. 1) Отношение $\mathbf{f} \preccurlyeq 1$ означает, что $\mathbf{f}$ *ограничена* на некотором множестве из $\mathfrak{F}$.

2) Для любой функции $\mathbf{f}$ из $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, V)$ и любого скаляра $\lambda\neq 0$ имеем $\mathbf{f} \preccurlyeq \mathbf{f}\lambda$.

3) Если x стремится к $+\infty$, то $\sin^2 x \preccurlyeq \sin x$.

4) Если (x, y) стремится к $(0, 0)$ в $\mathbf{R}^2$, то

$$xy \preccurlyeq x^2+y^2.$$

Из определения 1 непосредственно вытекают следующие предложения:

Предложение 1. *Если f, g, h — три функции из $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$, то отношения $f \preccurlyeq g$ и $g \preccurlyeq h$ влекут отношение $f \preccurlyeq h$.*

Предложение 2. *Пусть* $\mathfrak{f}_1$ *и* $\mathfrak{f}_2$ — *две функции из* $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, V)$ *и* g — *функция из* $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$. *Отношения* $\mathfrak{f}_1 \preccurlyeq g$ *и* $\mathfrak{f}_2 \preccurlyeq g$ *влекут отношение* $\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2 \preccurlyeq g$.

Кроме того, имеет место

Предложение 3. *Пусть* V_1, V_2, *и* V — *три нормированных пространства над одним и тем же упорядоченным телом и* $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \to [\mathbf{xy}]$ — *непрерывное билинейное отображение произведения* $V_1 \times V_2$ *в* V. *Если* $\mathfrak{f}_1$ *и* $\mathfrak{f}_2$ — *соответственно функции из* $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, V_1)$ и $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, V_2)$, *а* g_1 *и* g_2 — *такие функции из* $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$, *что* $\mathfrak{f}_1 \preccurlyeq g_1$ *и* $\mathfrak{f}_2 \preccurlyeq g_2$, *то* $[\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_2] \preccurlyeq g_1g_2$.

В самом деле (Общая топология, гл. IX, § 3, теорема 1), найдется такое число $a > 0$, что

$$\|[\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_2]\| \leqslant a \|\mathfrak{f}_1\| \cdot \|\mathfrak{f}_2\|.$$

Следствие. *Если* V — *нормированная алгебра*, $\mathfrak{f}_1$ *и* $\mathfrak{f}_2$ — *функции из* $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, V)$, *а* g_1 *и* g_2 — *функции из* $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$, *то отношения* $\mathfrak{f}_1 \preccurlyeq g_1$, $\mathfrak{f}_2 \preccurlyeq g_2$ *влекут отношение* $\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_2 \preccurlyeq g_1g_2$.

Отношение $\mathfrak{f} \preccurlyeq \mathfrak{g}$ между функциями из $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, V)$ *транзитивно* в силу предложения 1; а так как оно *рефлексивно*, то отношение «$\mathfrak{f} \preccurlyeq \mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g} \preccurlyeq \mathfrak{f}$» есть *отношение эквивалентности в* $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, V)$ (Теория множеств, Результаты, § 6, n° 1).

Определение 2. *Если имеются две функции* $\mathfrak{f}$ *и* $\mathfrak{g}$ *из* $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, V)$, *то говорят, что* $\mathfrak{f}$ *и* $\mathfrak{g}$ *подобны* (*по* $\mathfrak{F}$), *и записывают* $\mathfrak{f} \asymp \mathfrak{g}$, *если* $\mathfrak{f} \preccurlyeq \mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g} \preccurlyeq \mathfrak{f}$.

Для любого скаляра $\lambda \neq 0$ отношение $\mathfrak{f} \asymp \mathfrak{g}$ эквивалентно $\mathfrak{f} \asymp \mathfrak{g}\lambda$. Оно влечет существование такого множества $X \in \mathfrak{F}$, что подмножество множества X, состоящее из точек, в которых $\mathfrak{f}(x) = 0$, совпадает с подмножеством множества X, состоящим из точек, в которых $\mathfrak{g}(x) = 0$.

Примеры. 1) Для числовой функции $f \in \mathscr{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$ отношение $f \asymp 1$ означает, что найдутся такие два числа $a > 0$, $b > 0$, что $a \leqslant |f(x)| \leqslant b$ на некотором множестве из $\mathfrak{F}$ или что функция $\log|f|$ ограничена на некотором множестве из $\mathfrak{F}$; в этом случае говорят, что f *логарифмически ограничена* на некотором множестве из $\mathfrak{F}$.

2) Пусть V — нормированное пространство над недискретным упорядоченным телом K, и пусть $\mathbf{f}(x) = \mathbf{a}_0 x^n + \mathbf{a}_1 x^{n-1} + \ldots + \mathbf{a}_n$ — такой многочлен относительно $x \in K$ с коэффициентами из V, что $\mathbf{a}_0 \neq 0$. Тогда для любого вектора $\mathbf{b} \neq 0$ имеем $\mathbf{f}(x) \asymp \mathbf{b}x^n$, когда $|x|$ стремится к $+\infty$.

3) Как мы уже видели, при x, стремящемся к $+\infty$, справедливо отношение $\sin^2 x \preccurlyeq \sin x$, однако отношение $\sin^2 x \asymp \sin x$ уже *не имеет места*, несмотря на то, что обе эти функции обращаются в нуль в одних и тех же точках.

4) Имеем $x^2 + xy + y^2 \asymp x^2 + y^2$, когда (x, y) стремится к $(0, 0)$ в $\mathbf{R}^2$, в то время как $xy \asymp x^2 + y^2$ *неверно*.

Из предложения 3 сразу получаем, что если f_1, f_2, g_1, g_2 — функции из $\mathcal{H}(\mathfrak{F}, K)$ (где K — произвольное упорядоченное тело), то отношения $f_1 \asymp g_1$ и $f_2 \asymp g_2$ влекут отношение $f_1 f_2 \asymp g_1 g_2$.

Отметим, что, напротив, отношения $f_1 \asymp g_1$, $f_2 \asymp g_2$ *не влекут* отношения $f_1 + f_2 \asymp g_1 + g_2$, в чем можно убедиться на примере:

$$f_1(x) = g_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = -(x^2 + x), \quad g_2(x) = -(x^2 + 1),$$

где x действительно и стремится к $+\infty$.

Отношения сравнения $\mathbf{f} \preccurlyeq \mathbf{g}$ и $\mathbf{f} \asymp \mathbf{g}$ называются *слабыми* отношениями. Говорят, что две функции $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ из $\mathcal{H}(\mathfrak{F}, V)$ *слабо сравнимы*, если они удовлетворяют по крайней мере одному из двух отношений $\mathbf{f} \preccurlyeq \mathbf{g}$, $\mathbf{g} \preccurlyeq \mathbf{f}$.

Замечания. 1) Как показывает пример функций 1 и $x \sin x$, при x, стремящемся к $+\infty$, две функции из $\mathcal{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$ не обязаны быть слабо сравнимыми.

2) Обозначим через R_0 отношение $\mathbf{f} \asymp \mathbf{g}$ в $\mathcal{H}(\mathfrak{F}, V)$, а через $\mathcal{H}_0 = (\mathfrak{F}, V_0)$ — фактор-множество $\mathcal{H}(\mathfrak{F}, V)/R_0$; отметим, что отношение R_∞ *влечет* отношение R_0. В результате факторизации отношение $\mathbf{f} \preccurlyeq \mathbf{g}$, согласно предложению 1, приводит к *отношению порядка* в $\mathcal{H}_0 = (\mathfrak{F}, V)$ (Теория множеств, Результаты, § 6, n° 1); предыдущий пример показывает, что этого отношения недостаточно для того, чтобы множество $\mathcal{H}(\mathfrak{F}, V)$ *было совершенно упорядочено*.

2. *Отношения сравнения: II. Сильные отношения*

Определение 3. *Пусть f и g — две числовые функции, принадлежащие $\mathcal{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$ и неотрицательные на некотором множестве из $\mathfrak{F}$. Говорят, что f пренебрежима сравнительно с g или что g превалирует над f (по $\mathfrak{F}$), и пишут $f \prec\!\!\prec g$ или $g \succ\!\!\succ f$, если для* *любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое множество* $X \in \mathfrak{F}$, *что* $f(t) \leqslant \leqslant \varepsilon g(t)$ *для любого* $t \in X$.

Если имеются два нормированных пространства V_1 *и* V_2 *и две функции* $\mathbf{f}_1$ *и* $\mathbf{f}_2$, *принадлежащие соответственно* $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, V_1)$ *и* $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, V_2)$, *то говорят, что* $\mathbf{f}_1$ *пренебрежима сравнительно с* $\mathbf{f}_2$ (*по* $\mathfrak{F}$), *и записывают* $\mathbf{f}_1 \prec\!\!\prec \mathbf{f}_2$ *или* $\mathbf{f}_2 \succ\!\!\succ \mathbf{f}_1$, *если* $\|\mathbf{f}_1\| \prec\!\!\prec \|\mathbf{f}_2\|$.

Для любого скаляра $\lambda \neq 0$ отношение $\mathbf{f}_1 \prec\!\!\prec \mathbf{f}_2\lambda$ *эквивалентно* отношению $\mathbf{f}_1 \prec\!\!\prec \mathbf{f}_2$. Отношение $\mathbf{f}_1 \prec\!\!\prec \mathbf{f}_2$ влечет отношение $\mathbf{f}_1 \preccurlyeq \mathbf{f}_2$, но не эквивалентно ему.

Отметим, что отношение $\mathbf{f}_1 \preccurlyeq \mathbf{f}_2$ никоим образом не влечет отношения «$\mathbf{f}_1 \prec\!\!\prec \mathbf{f}_2$ или $\mathbf{f}_1 \asymp \mathbf{f}_2$»: например, при x, стремящемся к $+\infty$, имеет место отношение $\sin x \preccurlyeq 1$, но не имеет места ни одно из отношений $\sin x \prec\!\!\prec 1$ и $\sin x \asymp 1$.

Примеры. 1) Отношение $f \prec\!\!\prec 1$ означает, что f *стремится к* 0 *по фильтру* $\mathfrak{F}$.

2) Если α и β — два действительных числа, удовлетворяющих условию $\alpha < \beta$, то $x^\alpha \prec\!\!\prec x^\beta$, когда x стремится к $+\infty$. Точно так же, если m и n — два целых рациональных числа, удовлетворяющих условию $m < n$, то $z^m \prec\!\!\prec z^n$, когда комплексное число z стремится к ∞.

3) Если x стремится к $+\infty$, то $x^n \prec\!\!\prec e^x$ для любого целого n (гл. III, § 2, n° 1).

4) Если в $\mathbf{R}^2$ точка (x, y) стремится к $(0, 0)$, то $x^2 + y^2 \prec\!\!\prec |x| + |y|$.

Следующие предложения вытекают непосредственно из определения 3:

Предложение 4. *Если* f, g, h — *три функции из* $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$, *то отношения* $f \preccurlyeq g$ *и* $g \prec\!\!\prec h$ (соответственно $f \prec\!\!\prec g$ и $g \preccurlyeq h$) *влекут отношение* $f \prec\!\!\prec h$.

Предложение 5. *Пусть* $\mathbf{f}_1$ *и* $\mathbf{f}_2$ — *две функции из* $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, V)$, *а* g — *функция из* $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$. *Тогда отношения* $\mathbf{f}_1 \prec\!\!\prec g$ *и* $\mathbf{f}_2 \prec\!\!\prec g$ *влекут отношение* $\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 \prec\!\!\prec g$.

С другой стороны, то же рассуждение, что и в предложении 3, показывает, что справедливо

Предложение 6. *В обозначениях предложения* 3 *отношения* $\mathbf{f}_1 \prec\!\!\prec g_1$ *и* $\mathbf{f}_2 \preccurlyeq g_2$ (соответственно $\mathbf{f}_1 \preccurlyeq g_1$ и $\mathbf{f}_2 \prec\!\!\prec g_2$) *влекут отношение* $[\mathbf{f}_1\mathbf{f}_2] \prec\!\!\prec g_1g_2$.

Предложение 4 показывает, что отношение $\mathbf{f} \prec\!\prec \mathbf{g}$ между функциями из $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, V)$ *транзитивно*; однако *оно не рефлексивно*, точнее, из отношения $\mathbf{f} \prec\!\prec \mathbf{f}$ следует, что f *равна нулю на некотором множестве из* $\mathfrak{F}$ (иными словами, f эквивалентна 0 по модулю R_∞); в самом деле. для ε, удовлетворяющего условию $0 < \varepsilon < 1$, найдется такое множество $X \in \mathfrak{F}$, что $\|\mathbf{f}(x)\| \leqslant \varepsilon \|f(x)\|$ для любого $x \in X$, что возможно лишь в том случае, если $\mathbf{f}(x) = 0$ на X. Отсюда следует, что отношение «$\mathbf{f} \prec\!\prec \mathbf{g}$ и $\mathbf{g} \prec\!\prec \mathbf{f}$» транзитивно и симметрично, но не рефлексивно; следовательно, оно не может быть отношением эквивалентности (оно означает, что существует множество $X \in \mathfrak{F}$, обладающее тем свойством, что $\mathbf{f}(x) = \mathbf{g}(x) = 0$ для любого $x \in X$).

Предложение 7. *Если* $\mathbf{f}$ *и* $\mathbf{g}$ — *две функции из* $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, V)$, *то отношение* $\mathbf{f} - \mathbf{g} \prec\!\prec \mathbf{f}$ *эквивалентно отношению* $\mathbf{f} - \mathbf{g} \prec\!\prec \mathbf{g}$.

В самом деле, отношение $\mathbf{f} - \mathbf{g} \prec\!\prec \mathbf{f}$ означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое множество $X \in \mathfrak{F}$, что $\|\mathbf{f}(x) - \mathbf{g}(x)\| \leqslant \varepsilon \|\mathbf{f}(x)\|$ для любого $x \in X$. Отсюда $(1 - \varepsilon)\|\mathbf{f}(x)\| \leqslant \|\mathbf{g}(x)\|$, и следовательно, $\mathbf{f} \preccurlyeq \mathbf{g}$, откуда (предложение 4) вытекает, что $\mathbf{f} - \mathbf{g} \prec\!\prec \mathbf{g}$.

Следствие. *Отношение* $\mathbf{f} - \mathbf{g} \preccurlyeq \mathbf{f}$ *есть отношение эквивалентности в* $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, V)$.

В самом деле, если $\mathbf{f} - \mathbf{g} \prec\!\prec \mathbf{f}$ и $\mathbf{g} - \mathbf{h} \prec\!\prec \mathbf{g}$, то $\mathbf{f} - \mathbf{g} \prec\!\prec \mathbf{g}$, откуда (предложение 5) $\mathbf{f} - \mathbf{h} \prec\!\prec \mathbf{g}$, и, учитывая отношение $\mathbf{g} \preccurlyeq \mathbf{f}$, получаем $\mathbf{f} - \mathbf{h} \prec\!\prec \mathbf{f}$, то есть рассматриваемое отношение транзитивно; симметричность его следует из предложения 7, а рефлексивность очевидна, и таким образом, следствие доказано.

Определение 4. *Если* $\mathbf{f}$ *и* $\mathbf{g}$ — *функции из* $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, V)$, *то говорят, что* $\mathbf{f}$ *и* $\mathbf{g}$ *эквивалентны* (*по* $\mathfrak{F}$), *и записывают* $\mathbf{f} \sim \mathbf{g}$, *если* $\mathbf{f} - \mathbf{g} \prec\!\prec \mathbf{f}$.

Отношение $\mathbf{f} \sim \mathbf{g}$ влечет отношение $\mathbf{f} \asymp \mathbf{g}$, но не эквивалентно ему.

Примеры. 1) Если $\mathbf{a}$ — отличная от 0 постоянная функция на E, то отношение $\mathbf{f} \sim \mathbf{a}$ означает, что $\mathbf{f}$ *стремится к* $\mathbf{a}$ *по фильтру* $\mathfrak{F}$.

2) Пусть V — нормированное пространство над недискретным упорядоченным телом K, и пусть $\mathbf{f}(x) = \mathbf{a}_0 x^n + \mathbf{a} x^{n-1} + \ldots + \mathbf{a}_n$ — многочлен относительно x с коэффициентами из V и $\mathbf{a}_0 \neq 0$. Тогда $\mathbf{f}(x)$, $\sim a_0 x^n$, когда $|x|$ стремится к $+\infty$.

3) Если действительное переменное x стремится к $+\infty$, то $\left(1+\frac{1}{x}\right)\sin x \sim \sin x$.

4) Если комплексное переменное z стремится к 0, то $e^z-1 \sim z$. Вообще, если V — нормированное пространство над упорядоченным телом K, $\mathbf{f}$ — функция, определенная в окрестности точки $x_0 \in K$, принимающая значения в V и имеющая в точке x_0 производную $\mathbf{f}'(x_0) \neq 0$, то при x, стремящемся к x_0, $\mathbf{f}(x)-\mathbf{f}(x_0) \sim \mathbf{f}'(x_0)(x-x_0)$ (гл. I, § 1, определение 1).

5) Если (x, y) стремится к $(0, 0)$ в $\mathbf{R}^2$, то

$$\sqrt{\sin^2 x+\sin^2 y} \sim \sqrt{x^2+y^2}.$$

6) Пусть $f(x, y)$ — многочлен с действительными коэффициентами относительно двух действительных переменных x, y, не имеющий свободного члена. Если существует функция $\varphi(x)$, непрерывная на интервале $[0, a]$ и такая, что $\varphi(0)=0$ и $f(x, \varphi(x))=0$ для $0 \leqslant x \leqslant a$, то можно показать, что при $x>0$, стремящемся к 0, существуют такое рациональное число r и такое действительное число $\lambda \neq 0$, что $\varphi(x) \sim \lambda x^r$ (упражнение 3).

7) Пусть для любого $x>0$ $\pi(x)$ означает количество простых чисел, не превосходящих x. Доказано, что когда x стремится к $+\infty$, $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ *).

Замечание. Отметим, что отношение $\mathbf{f} \sim \mathbf{g}$ отнюдь не означает, что разность $\mathbf{f}-\mathbf{g}$ стремится к 0 по фильтру $\mathfrak{F}$; эта разность, как показывает пример $x^2+x \sim x^2$ при x, стремящемся к $+\infty$, может быть даже *неограниченной*.

Предложение 8. *Пусть K — упорядоченное тело и f_1, f_2, g_1, g_2 — четыре функции из $\mathcal{H}(\mathfrak{F}, K)$; тогда отношения $f_1 \sim g_1$ и $f_2 \sim g_2$ влекут отношение $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$.*

В самом деле, имеем $f_1 f_2 - g_1 g_2 = f_1(f_2-g_2)+(f_1-g_1)g_2$; так как $f_1 \preccurlyeq g_1$, $f_1-g_1 \ll g_1$ и $f_2-g_2 \ll g_2$, то $f_1 f_2 - g_1 g_2 \ll g_1 g_2$ (предложения 4 и 5).

Напротив, приведенный в n° 1 пример, в котором $f_1=g_1$, $f_2 \sim g_2$, показывает, что отношение $f_2+f_2 \asymp g_1+g_2$ (ни тем более $f_1+f_2 \sim g_1+g_2$) не выполняется.

Отношения сравнения $\mathbf{f} \ll \mathbf{g}$, $\mathbf{f} \sim \mathbf{g}$ называются *сильными* отношениями. Две функции $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ из $\mathcal{H}(\mathfrak{F}, V)$ называются *сравнимыми* (или, когда хотят избежать путаницы, *сильно*

*) См., например, А. Е. Ингам, Распределение простых чисел, М.—Л., 1936.

сравнимыми), если они удовлетворяют одному из трех отношений: $\mathfrak{f} \prec\!\!\prec \mathfrak{g}$, $\mathfrak{f} \succ\!\!\succ \mathfrak{g}$ или «существует такое $\lambda \neq 0$, что $\mathfrak{f} \sim \mathfrak{g}\lambda$».

Замечания. 1) Две функции могут быть слабо сравнимыми, не будучи сильно сравнимыми, как, например, функции 1 и $\sin x$ при x, стремящемся к $+\infty$.

2) Определение отношений сравнения $\mathfrak{f}_1 \preccurlyeq \mathfrak{f}_2$ и $\mathfrak{f}_1 \prec\!\!\prec \mathfrak{f}_2$ лишь внешним образом связано с *нормами* пространств V_1 и V_2, в которых $\mathfrak{f}_1$ и $\mathfrak{f}_2$ принимают соответственно свои значения; в действительности же оно зависит только от *топологии* пространств V_1 и V_2, ибо при замене нормы в V_1 или в V_2 на *эквивалентную* отношения $\mathfrak{f}_1 \preccurlyeq \mathfrak{f}_2$ и $\mathfrak{f}_1 \prec\!\!\prec \mathfrak{f}_2$ заменяются эквивалентными отношениями (Общая топология, гл. IX, § 3, n° 3).

3. Замена переменных

Пусть φ — такое отображение множества E' в E, при котором $\varphi^{-1}(\mathfrak{F})$ представляет собой базис фильтра в E'. Тогда очевидно, что если $\mathfrak{f}_1$ и $\mathfrak{f}_2$ — функции соответственно из $\mathcal{H}(\mathfrak{F}, V_1)$ и $\mathcal{H}(\mathfrak{F}, V_2)$, то функции $\mathfrak{f}_1 \circ \varphi$ и $\mathfrak{f}_2 \circ \varphi$ принадлежат соответственно $\mathcal{H}(\varphi^{-1}(\mathfrak{F}), V_1)$ и $\mathcal{H}(\varphi^{-1}(\mathfrak{F}), V_2)$ и отношение $\mathfrak{f}_1 \preccurlyeq \mathfrak{f}_2$ (соответственно $\mathfrak{f}_1 \prec\!\!\prec \mathfrak{f}_2$) эквивалентно отношению $\mathfrak{f} \circ \varphi \preccurlyeq \mathfrak{f}_2 \circ \varphi$ (соответственно $\mathfrak{f}_1 \circ \varphi \prec\!\!\prec \mathfrak{f}_2 \circ \varphi$).

4. Отношения сравнения между строго положительными функциями

Пусть функция g из $\mathcal{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$ *строго положительна на некотором множестве из* $\mathfrak{F}$. Тогда отношения сравнения, в которые входит g, можно сформулировать другим способом: отношение $\mathfrak{f} \preccurlyeq g$ равносильно утверждению, что функция $\frac{\|\mathfrak{f}\|}{g}$ (которая определена на некотором множестве из $\mathfrak{F}$) *ограничена* на множестве из $\mathfrak{F}$; отношение $\mathfrak{f} \prec\!\!\prec g$ равносильно утверждению, что функция $\frac{\|\mathfrak{f}\|}{g}$ *стремится к* 0 *по* $\mathfrak{F}$. Если f — функция из $\mathcal{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$, то отношение $f \asymp g$ означает, что функция $\frac{f}{g}$ *логарифмически ограничена* на множестве из $\mathfrak{F}$, а отношение $f \sim g$ — что $\frac{f}{g}$ *стремится к* 1 по $\mathfrak{F}$. Стало быть, если функция f из $\mathcal{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$ *положительна* на некотором множестве из $\mathfrak{F}$, то утверждение, что функции f и g *срав-*

нимы, означает, что $\frac{f}{g}$ *стремится к некоторому пределу* (*конечному или равному* $+\infty$) по фильтру $\mathfrak{F}$.

Предложение 9. *Пусть f и g — две функции из $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$, строго положительные на множестве из $\mathfrak{F}$. Для того чтобы f и g были сравнимы, необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $t \geqslant 0$, кроме, быть может, одного, функция $f-tg$ сохраняла постоянный знак*) на некотором множестве из $\mathfrak{F}$.*

Условие необходимо. Действительно, если $f \prec\!\!\prec g$, то $f-tg \sim -tg$ для всех значений t, кроме $t=0$, и значит, функция $f-tg$ строго отрицательна на множестве из $\mathfrak{F}$ для всех t, кроме $t=0$; если же $f \succ\!\!\succ g$, то функция $f-tg$ строго положительна на множестве из $\mathfrak{F}$ при любом t; наконец, если $f \sim kg$ (k — постоянная, $k>0$), то отношение $f-tg \sim (k-t)g$ имеет место для всех t, кроме $t=k$, и значит, для всех t, кроме, быть может, $t=k$, функция $f-tg$ имеет на некотором множестве из $\mathfrak{F}$ знак разности $k-t$.

Условие достаточно. В самом деле, допустим, что отношение $\frac{f}{g}$ имеет два различных предельных значения $\alpha<\beta$ по фильтру $\mathfrak{F}$. Тогда для *любого* числа t, $\alpha<t<\beta$, во *всяком* множестве $X \in \mathfrak{F}$ найдутся такие две точки x_1 и x_2, что $\frac{f(x_1)}{g(x_1)}<t$ и $\frac{f(x_2)}{g(x_2)}>t$; следовательно, функция $f(x)-tg(x)$ не сохраняет на множестве X постоянный знак, что противоречит нашему предположению. Отсюда следует, что $\frac{f}{g}$ имеет *единственное* предельное значение (конечное или бесконечное) по фильтру с базисом $\mathfrak{F}$ и, значит (Общая топология, гл. I, § 10, предложение 1), имеет это значение своим *пределом* по фильтру $\mathfrak{F}$.

---

*) Напомним, что функция $\operatorname{sign} x$ (*знак* действительного числа x) считается равной $+1$ при $x>0$, -1 при $x<0$ и 0 при $x=0$ (Общая топология, гл. IV, § 3, n° 2). Таким образом, утверждение, что числовая функция *сохраняет постоянный знак* на некотором множестве, означает, что в каждой точке этого множества она либо строго положительна, либо строго отрицательна, либо, наконец, тождественно равна нулю на указанном множестве.

Предложение 10. *Пусть f и g — две функции из* $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$, *строго положительные на некотором множестве из* $\mathfrak{F}$; *тогда для любого действительного* $\alpha \neq 0$ *отношение* $f \asymp g$ (соответственно $f \sim g$) *эквивалентно отношению* $f^\alpha \asymp g^\alpha$ (соответственно $f^\alpha \sim g^\alpha$); *если* $\alpha > 0$, *то отношение* $f \preccurlyeq g$ (соответственно $f \prec\!\!\prec g$) *эквивалентно отношению* $f^\alpha \preccurlyeq g^\alpha$ (соответственно $f^\alpha \succcurlyeq g^\alpha$); *если же* $\alpha < 0$, *то оно эквивалентно отношению* $f^\alpha \succcurlyeq g^\alpha$ (соответственно $f^\alpha \succ\!\!\succ g^\alpha$).

Доказательство всех утверждений очевидно.

Отметим, что в $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$ множество функций Γ, строго положительных на некотором множестве из $\mathfrak{F}$, обладает тем свойством, что Γ/R_∞ образует *мультипликативную группу* Γ_∞ в $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$; Γ/R_0 совпадает с фактор-группой группы Γ_∞ по подгруппе классов (по модулю R_∞) логарифмически ограниченных функций множества Γ; на Γ/R_0 отношение порядка, полученное из отношения $f \preccurlyeq g$ факторизацией, *согласуется* со структурой группы Γ/R_0 и, значит, превращает ее в упорядоченную группу.

Предложение 11. *Пусть функция g из* $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$ *такова, что* $\lim_{\mathfrak{F}} g = +\infty$; *тогда отношение* $f \prec\!\!\prec g$ *влечет отношение* $e^f \prec\!\!\prec e^g$, *а отношение* $f \sim g$ *влечет отношение* $\log f \sim \log g$.

Действительно, если $f \prec\!\!\prec g$, то $f - g = g\left(\frac{f}{g} - 1\right)$ стремится к $-\infty$ по $\mathfrak{F}$. Точно так же, если $f \sim g$, то $\log f = \log g + \log \frac{f}{g}$ и, значит, $\log f - \log g$ стремится к 0; то же самое можно сказать относительно $\frac{\log f}{\log g} - 1 = \frac{\log f - \log g}{\log g}$.

Отметим, что, напротив, отношение $f \sim g$ *не влечет* отношения $e^f \sim e^g$ и даже отношения $e^f \asymp e^g$, в чем можно убедиться на примере функций $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + x$ при x, стремящемся к $+\infty$; точно так же отношение $f \prec\!\!\prec g$, как показывает пример функций $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ при x, стремящемся к $+\infty$, *не влечет* отношения $\log f \prec\!\!\prec \log g$.

Определение 5. *Пусть g — функция из* $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$, *строго положительная на некотором множестве из* $\mathfrak{F}$ *и такая, что* $\lim_{\mathfrak{F}} g = 0$ *или* $\lim_{\mathfrak{F}} g = +\infty$. *Говорят, что функция* $f \in \mathscr{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$ *есть функция порядка* ϱ (*конечного или бесконечного*) *относительно* g, *если*

$$\lim_{\mathfrak{F}} \frac{\log|f|}{\log g} = \varrho.$$

Отметим, что если функция f имеет порядок ϱ относительно g, то относительно $1/g$ она имеет порядок $-\varrho$; следовательно, можно рассматривать только тот случай, когда $g(x)$ стремится к $+\infty$ по фильтру $\mathfrak{F}$.

Предложение 12. *Пусть* g — *функция из* $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$, *удовлетворяющая условию* $\lim_{\mathfrak{F}} g = +\infty$, *и* f — *функция из* $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$.

а) *Для того чтобы* f *была функцией порядка* $+\infty$ *относительно* g, *необходимо и достаточно, чтобы* $f \succ\!\succ g^{\alpha}$ *для любого* $\alpha > 0$.

б) *Для того чтобы* f *была функцией порядка* $-\infty$ *относительно* g, *необходимо и достаточно, чтобы* $f \prec\!\prec g^{\alpha}$ *для любого* $\alpha > 0$.

в) *Для того чтобы* f *была функцией конечного порядка* ϱ *относительно* g, *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *выполнялось отношение* $g^{\varrho-\varepsilon} \prec\!\prec f \prec\!\prec g^{\varrho+\varepsilon}$.

Докажем, например, в). Если порядок функции f относительно g равен ϱ, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое множество $M \in \mathfrak{F}$, что для всякого $x \in M$ справедливы неравенства

$$\left(\varrho - \frac{\varepsilon}{2}\right) \log g(x) \leqslant \log|f(x)| \leqslant \left(\varrho + \frac{\varepsilon}{2}\right) \log g(x)$$

или

$$(g(x))^{\varrho - \frac{\varepsilon}{2}} \leqslant |f(x)| \leqslant (g(x))^{\varrho + \frac{\varepsilon}{2}};$$

а так как $\lim_{\mathfrak{F}} g = +\infty$, то $g^{\varrho-\varepsilon} \prec\!\prec f \prec\!\prec g^{\varrho+\varepsilon}$ для любого $\varepsilon > 0$; обратное очевидно. Доказательства утверждений а) и б) аналогичны.

Отметим, что если f имеет *конечный* порядок ϱ относительно g, то $fg^{-\varrho}$ имеет порядок 0 относительно g, и обратно; если f_1 (соответственно f_2) имеет порядок ϱ_1 (соответственно ϱ_2) относительно g и если число $\varrho_1 + \varrho_2$ определено, то $f_1 f_2$ имеет порядок $\varrho_1 + \varrho_2$ относительно g.

Замечания. 1) Заметим, что если функция f имеет конечный порядок ϱ относительно g, то отношение $\frac{f}{g^{\varrho}}$ не обязано стремиться к пределу; например, всякая *логарифмически ограниченная* функция имеет порядок 0 относительно g и, однако, не всегда имеет предел по фильтру $\mathfrak{F}$.

2) Функция f, определенная на некотором множестве из $\mathfrak{F}$, не обязана иметь определенный порядок (конечный или бесконечный) относительно g: функции, имеющие определенный порядок относительно g, сравнимы со всеми степенями функции g, кроме, быть может, одной. Но функция f может и не обладать этим свойством, что видно из примера $g(x)=x$, $f(x)=1+x^2\sin^2 x$ (при x, стремящемся к $+\infty$). В этом примере функция f сравнима с g^α для $\alpha<0$ и $\alpha>2$; если же положить $f(x)=e^x\sin^2 x+e^{-x}\cos^2 x$, то функция f не будет сравнима ни с одной степенью (ни положительной, ни отрицательной) функции g.

5. *Обозначения*

Если задана числовая функция $f\in\mathscr{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$, то часто в формулах удобно бывает обозначать через $O(f)$ функцию, *подчиненную* функции f, а через $o(f)$ — функцию, *пренебрежимую сравнительно с* f. Если в одно выражение входит несколько функций, подчиненных одной и той же функции f (соответственно пренебрежимых сравнительно с f), то их обозначают через $O_1(f)$, $O_2(f)$ и т. д. (соответственно $o_1(f)$, $o_2(f)$ и т. д.).

Многие авторы обозначают через $O(f)$ (соответственно $o(f)$) *все* входящие в рассуждение функции, подчиненные функции f (соответственно пренебрежимые сравнительно с f), если эта неточность не может привести к недоразумениям.

В указанных обозначениях предложения 1, 2 и 3 принимают следующий вид: если $g=O_1(f)$ и $h=O(g)$, то $h=O_2(f)$; справедливы формулы

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i O_i(f)=O_{n+1}(f) \qquad (\lambda_i \text{ — скаляры}), \tag{1}$$

$$O(f)\,O(g)=O(fg). \tag{2}$$

Точно так же предложение 4 показывает, что если $g=O_1(f)$ и $h=o(g)$ (соответственно $g=o_1(f)$ и $h=O(g)$), то $h=o_2(f)$, а предложения 5 и 6 выражаются посредством формул

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i o_i(f)=o_{n+1}(f) \qquad (\lambda_i \text{ — скаляры}), \tag{3}$$

$$o(f)\,o(g)=o(fg). \tag{4}$$

Отношение $f \sim g$ эквивалентно равенству $f = g + o(g)$. Символ $O(1)$ (соответственно $o(1)$) означает функцию, ограниченную на некотором множестве из $\mathfrak{F}$ (соответственно функцию, стремящуюся к 0 по фильтру $\mathfrak{F}$).

Упражнения. 1) Показать, что для действительного x, стремящегося к $+\infty$, функция $f(x) = (x\cos^2 x + \sin^2 x)\, e^{x^2}$ монотонна, но не сравнима с e^{x^2} и не сравнима слабо с $x^{1/2} e^{x^2}$.

2) Пусть φ — строго положительная функция, определенная и возрастающая для $x > 0$.

а) Показать, что если функция $\dfrac{\log \varphi(x)}{\log x}$ возрастает, то отношение $f \prec\!\!\prec g$ между строго положительными функциями влечет $\varphi \circ f \prec\!\!\prec \varphi \circ g$.

б) Показать, что если функция $\dfrac{\log \varphi(x)}{\log x}$ убывает, то отношение $f \sim g$ между строго положительными функциями влечет $\varphi \circ f \sim \varphi \circ g$.

°3) а) Пусть (α_i, β_i) — n различных пар положительных действительных чисел, отличных от $(0, 0)$ и таких, что $\operatorname{Min}(\alpha_i) = \operatorname{Min}(\beta_i) = 0$. Рассмотрим уравнение

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^{\alpha_i} y^{\beta_i} (1 + \varphi_i(x, y)) = 0,$$

где a_i — действительные числа, отличные от 0, функции φ_i непрерывны на квадрате $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$ и стремятся к 0, когда (x, y) стремится к $(0, 0)$. Допустим, что существует функция g, положительная и непрерывная на интервале $[0, b]$, стремящаяся к 0 вместе с x и такая, что $f(x, g(x)) = 0$ для любого $x \in [0, b]$. Показать, что для любого действительного числа $\mu > 0$ отношение $\dfrac{g(x)}{x^{\mu}}$ стремится к пределу, конечному или бесконечному, когда x стремится к 0 (использовать предложение 9, рассматривая для любого числа $t \geqslant 0$ уравнение $f(x, tx^{\mu}) = 0$).

б) Для того чтобы отношение $\dfrac{g(x)}{x^{\mu}}$ стремилось к конечному и отличному от 0 пределу, необходимо, чтобы μ обладало тем свойством, что имеются по крайней мере две пары чисел (α_h, β_h) и (α_k, β_k), удовлетворяющих равенству $\alpha_h + \beta_h\mu = \alpha_k + \beta_k\mu$ и неравенству $\alpha_i + \beta_i\mu \geqslant \alpha_h + \beta_h\mu$, для любой другой пары (α_i, β_i), $i \neq k$. Таким образом, получаем конечное число возможных значений μ_j $(1 \leqslant j \leqslant r)$; числа $-\dfrac{1}{\mu_j}$ представляют собой наклоны прямых на $\mathbf{R}^2$, содержащих по крайней мере две точки из (α_i, β_i) и таких, что все другие точки этого множества лежат выше рассматриваемой прямой («многоугольник Ньютона»).

в) Пусть μ_1 — наименьшее из чисел μ_j. Показать, что отношение $\frac{g(x)}{x^{\mu_1}}$ стремится к *конечному* пределу (вначале показать, что всегда можно предполагать, что если i и j — два различных индекса, то неравенства $\alpha_i \leqslant \alpha_j$ и $\beta_i \leqslant \beta_j$ не могут выполняться одновременно; вывести отсюда, что можно предположить $\alpha_1 = 0$, $\alpha_i > 0$ и $\beta_i < \beta_1$ для $i \neq 1$; после этого, положив $g(x) = t(x)\, x^{\mu_1}$, показать, что $t(x)$ не может стремиться к $+\infty$, когда x стремится к 0).

г) Индукцией по r вывести из в) существование такого индекса j, при котором отношение $\frac{g(x)}{x^{\mu_j}}$ стремится к конечному и отличному от 0 пределу.

§ 2. Асимптотические разложения

1. Шкала сравнения

Пусть E — множество, фильтрующееся по фильтру с базисом $\mathfrak{F}$, и K — недискретное упорядоченное тело (чаще всего $K = \mathbf{R}$ или $K = \mathbf{C}$). В множестве функций из $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$, не эквивалентных 0 по модулю R_∞ (то есть таких, что в любом множестве из $\mathfrak{F}$ найдется хотя бы одна точка, в которой функция не обращается в нуль), отношение «$f \prec\!\!\prec g$ или $f = g$» есть *отношение порядка.*

Определение 1. *Говорят, что подмножество $\mathscr{E}$ множества $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, K)$, состоящее из функций, не эквивалентных* 0 *по модулю R_∞, есть шкала сравнения, если $\mathscr{E}$ совершенно упорядочено посредством отношения «$f \prec\!\!\prec g$ или $f = g$».*

Иными словами, если f и g — две функции из $\mathscr{E}$, то между f и g всегда существует одно (и только одно) из трех отношений $f \prec\!\!\prec g$, $g \prec\!\!\prec f$ или $f = g$. Из этого следует, что в $\mathscr{E}$ *отношение* $f \asymp g$ *(и тем более* $|f| \sim a|g|$, где a — строго положительное число) *влечет* $f = g$.

Всякое подмножество шкалы сравнения, очевидно, является в свою очередь шкалой сравнения.

Примеры. 1) Для любого действительного x, стремящегося к $+\infty$, множество функций x^α (α — произвольное действительное число) есть шкала сравнения. То же самое можно сказать о функциях $(x-a)^\alpha$, когда $\mathfrak{F}$ есть множество открытых интервалов с левым концом в точке a.

2) Для комплексного z, стремящегося к ∞, множество функций z^n (n — целое рациональное) является шкалой сравнения; то же самое справедливо для функций $(z-a)^n$, когда $\mathfrak{F}$ представляет собой след на дополнении точки $a \in \mathbf{C}$ фильтра окрестностей этой точки.

3) Пусть F — нормированное пространство; множество функций $\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^\alpha$ (α — произвольное действительное число) есть шкала сравнения, когда $\mathfrak{F}$ является следом на дополнении точки $\mathbf{a}$ фильтра окрестностей этой точки. Отметим, что если p и q — две различные нормы в F, то объединение двух шкал сравнения, образованных функциями $(p(\mathbf{x}-\mathbf{a}))^\alpha$ и $(q(\mathbf{x}-\mathbf{a}))^\alpha$, вообще говоря, уже не будет шкалой сравнения.

4) Для действительного x, стремящегося к $+\infty$, множество $\mathscr{E}$ функций вида $\exp(p(x))$, где $p(x)$ пробегает множество *многочленов без свободного члена* (с действительными коэффициентами), является шкалой сравнения: достаточно заметить, что частное двух функций из $\mathscr{E}$ снова принадлежит $\mathscr{E}$ и что функция $\exp(p(x))$ всегда стремится либо к 0, либо к $+\infty$, если $p \neq 0$; в самом деле, тогда $p(x) \sim \alpha x^n$, где $n > 0$ и $\alpha \neq 0$; если $\alpha > 0$, то $p(x) > \frac{1}{2}\alpha x^n$ для достаточно больших x; если $\alpha < 0$, то $p(x) < \frac{1}{2}\alpha x^n$ для достаточно больших x; в первом случае функция $\exp(p(x))$ стремится к $+\infty$, а во втором — к 0.

5) Для действительного x, стремящегося к $+\infty$, множество $\mathscr{E}$ функций вида $x^\alpha(\log x)^\beta$ (определенных для $x > 1$), где α и β — произвольные действительные числа, представляет собой шкалу сравнения. В самом деле, здесь снова частное двух функций из $\mathscr{E}$ есть функция из $\mathscr{E}$; значит, достаточно показать, что если α и β не равны одновременно нулю, то $x^\alpha(\log x)^\beta$ стремится к 0 или к $+\infty$; для $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ это очевидно; если же $\alpha > 0$, то $(\log x)^{-\beta} \lll x^\alpha$, а если $\alpha < 0$, то $(\log x)^\beta \lll x^{-\alpha}$ при любых β, откуда и следует утверждение.

Заметим, что последняя шкала сравнения является совершенно упорядоченным множеством (посредством отношения «$f \lll g$ или $f = g$»), структура порядка которого изоморфна *лексикографической* структуре порядка множества $\mathbf{R}^2$ (Множества, гл. III; напомним, что в этой структуре отношение $(\alpha, \beta) < (\gamma, \delta)$ означает «$\alpha < \gamma$ или $\alpha = \gamma$ и $\beta < \delta$»).

Точно так же шкала, состоящая из функций $\exp(p(x))$, где p пробегает множество P_0 многочленов без свободного члена, имеет структуру порядка, изоморфную структуре порядка множества P_0, в котором отношение $p < q$ означает, что старший член многочлена $q - p$ имеет строго положительный коэффициент (см. Алгебра, гл. VI, § 2, n° 3).

Пусть φ — такое отображение множества F в E, что $\overset{-1}{\varphi}(\mathfrak{F})$ является базисом фильтра в F. Если $\mathscr{E}$ есть шкала сравнения в E (для базиса фильтра $\mathfrak{F}$), то функции $f \circ \varphi$, где f пробегает множество $\mathscr{E}$, образуют шкалу сравнения в F (для базиса фильтра $\overset{-1}{\varphi}(\mathfrak{F})$).

2. *Главные части и асимптотические разложения*

Пусть $\mathscr{E}$ — шкала сравнения, состоящая из функций, принимающих значения в недискретном упорядоченном теле K. Пусть, далее, V — нормированное пространство над телом K и $\mathbf{f}$ — функция из $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, V)$; если существует такая функция $g \in \mathscr{E}$ и такой элемент $\mathbf{a} \neq 0$ пространства V, что $\mathbf{f} \sim \mathbf{a}g$, то говорят, что $\mathbf{a}g$ есть *главная часть* функции $\mathbf{f}$ относительно шкалы $\mathscr{E}$. Согласно определению 1 функция $\mathbf{f}$ может иметь только *одну* главную часть относительно $\mathscr{E}$, ибо если g_1 и g_2 — две функции из $\mathscr{E}$, $\mathbf{a} \neq 0$ и $\mathbf{a}_2 \neq 0$ — два элемента пространства V, то отношение $\mathbf{a}_1 g_1 \sim \mathbf{a}_2 g_2$ влечет отношение $|g_1| \asymp |g_2|$ и, значит, $g_1 = g_2$, откуда следует $(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1) g_1 \prec\!\!\prec g_1$, а поскольку g_1 не равна тождественно нулю ни на каком множестве из $\mathfrak{F}$, то $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1$.

Если функция $\mathbf{f}$ имеет главную часть относительно шкалы сравнения $\mathscr{E}$, то она имеет *ту же* главную часть относительно любой шкалы сравнения $\mathscr{E}' \supset \mathscr{E}$.

Примеры. 1) Для действительного (соответственно комплексного) x, стремящегося к $+\infty$ (соответственно к ∞), всякий многочлен $\mathbf{a}_0 = x^n + \mathbf{a}_1 x^{n-1} + \ldots + \mathbf{a}_n$ с коэффициентами из V и $\mathbf{a}_0 \neq 0$ имеет главную часть $\mathbf{a}_0 x^n$ относительно шкалы функций x^n (или любой другой шкалы, содержащей x^n). Отсюда следует, что любая рациональная дробь $\dfrac{a_0 x^m + \ldots + a_m}{b_0 x^n + \ldots + b_n}$ с действительными или комплексными коэффициентами, для которой $a_0 b_0 \neq 0$, имеет главную часть $\frac{a_0}{b_0} x^{m-n}$ относительно той же шкалы.

2) Функция может быть сравнимой со всеми функциями шкалы сравнения и не имея главной части относительно этой шкалы. Например, для действительного x, стремящегося к $+\infty$, функция $\sqrt{x}$ не имеет главной части относительно шкалы функций x^n, где n — целое рациональное; функция $\log x$ не имеет главной части относительно шкалы функций x^α (α — любое действительное); функции $\exp(\sqrt{\log x})$ и $x^x = e^{x \log x}$ не имеют главной части ни относительно шкалы функций $x^\alpha (\log x)^\beta$, ни относительно шкалы функций $\exp(p(x))$ (p — многочлен без свободного члена).

Понятие главной части допускает широкое обобщение. В самом деле, предположим, что функция $\mathbf{f} \in \mathcal{H}(\mathfrak{F}, V)$ имеет главную часть $\mathbf{a}_1 g_1$ относительно шкалы $\mathscr{E}$; тогда отношение $\mathbf{f} \sim \mathbf{a}_1 g_1$ эквивалентно отношению $\mathbf{f} - \mathbf{a}_1 g_1 \prec\!\!\prec g_1$ (§ 1, определение 4); следовательно, для более точного исследования функции $\mathbf{f}$ нам нужно рассмотреть функцию $\mathbf{f} - \mathbf{a}_1 g_1$. Если эта функция имеет главную часть $\mathbf{a}_2 \mathbf{g}_2$ относительно $\mathscr{E}$, то непременно будут иметь место отношения $g_2 \prec\!\!\prec g_1$ и $\mathbf{f} - \mathbf{a}_1 g_1 - \mathbf{a}_2 g_2 \prec\!\!\prec g_2$.

Вообще, предположим, что шкала $\mathscr{E}$ записывается в параметрической форме (g_α), где α пробегает множество индексов A, наделенное структурой совершенно упорядоченного множества, изоморфной структуре, *противоположной* структуре порядка множества $\mathscr{E}$; таким образом, отношение $\alpha < \beta$ эквивалентно отношению $g_\beta \prec\!\!\prec g_\alpha$. При этих условиях введем

Определение 2. *Говорят, что функция* $\mathbf{f} \in \mathcal{H}(\mathfrak{F}, V)$ *допускает асимптотическое разложение с точностью* g_α (относительно шкалы $\mathscr{E}$), *если существует семейство* $(\mathbf{a}_\lambda)_{\lambda \leqslant \alpha}$ *элементов из* V, *из которых все, за исключением конечного числа, равны нулю и для которых справедливо отношение* $\mathbf{f} - \sum_{\lambda \leqslant \alpha} \mathbf{a}_\lambda g_\lambda \prec\!\!\prec g_\alpha$. *Говорят, что* $\sum_{\lambda \leqslant \alpha} \mathbf{a}_\lambda g_\lambda$ *есть асимптотическое разложение функции* $\mathbf{f}$ *с точностью* g_α, *что* $\mathbf{a}_\lambda g_\lambda$ $(\lambda \leqslant \alpha)$ — *его члены*, $\mathbf{a}_\lambda$ — *коэффициенты, а функция* $\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{f} - \sum_{\lambda \leqslant \alpha} \mathbf{a}_\lambda g_\lambda$ — *остаток этого разложения.*

Для выражения того, что $\sum_{\lambda \leqslant \alpha} \mathbf{a}_\lambda g_\lambda$ есть асимптотическое разложение функции $\mathbf{f}$ с точностью g_α, чаще всего мы будем ограничиваться записью $\mathbf{f}=\sum_{\lambda\leqslant\alpha}\mathbf{a}_\lambda g_\lambda+o(g_\alpha)$ $\Big($или $\mathbf{f}=\sum_{\lambda\leqslant\alpha}\mathbf{a}_\lambda g_\lambda+o_k(g_\alpha)$, если в формулу входят несколько функций$\Big)$ в соответствии с обозначениями § 1, n° 5.

Про два асимптотических разложения (двух как различных, так и одинаковых функций) относительно одной и той же шкалы $\mathscr{E}$ говорят, что то из них, в котором g_α имеет больший индекс является *более точным*.

Если $\sum_{\lambda\leqslant\alpha}\mathbf{a}_\lambda g_\lambda$ — асимптотическое разложение функции $\mathbf{f}$ с точностью g_α, то для любого $\beta<\alpha$ выражение $\sum_{\lambda\leqslant\beta}\mathbf{a}_\lambda g_\lambda$ является асимптотическим разложением функции $\mathbf{f}$ с точностью g_β (§ 1, предложение 5); говорят, что оно получено *сведением к точности* g_β заданного разложения $\sum_{\lambda\leqslant\alpha}\mathbf{a}_\lambda g_\lambda$ функции $\mathbf{f}$.

Если $\sum_{\lambda\leqslant\alpha}\mathbf{a}_\lambda g_\lambda$ и $\sum_{\lambda\leqslant\alpha}\mathbf{b}_\lambda g_\lambda$ — асимптотические разложения с *одной и той же* точностью g_λ двух функций $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$, то выражение $\sum_{\lambda\leqslant\alpha}(\mathbf{a}_\lambda+\mathbf{b}_\lambda)\,g_\lambda$ является асимптотическим разложением функции $\mathbf{f}_1+\mathbf{f}_2$ с точностью g_α (§ 1, предложение 5) и для любого скаляра c выражение $\sum_{\lambda\leqslant\alpha}\mathbf{a}_\lambda c g_\lambda$ является асимптотическим разложением функции $\mathbf{f}_1 c$ с точностью g_α. Отсюда следует, что если функция $\mathbf{f}$ допускает асимптотическое разложение с точностью g_α, то это разложение *единственно*: в самом деле, достаточно показать, что функция 0 не может иметь асимптотического разложения с точностью g_α с коэффициентами, отличными от 0. Но если $0=\sum_{\lambda\leqslant\alpha}\mathbf{a}_\lambda g_\lambda+\mathbf{r}_\alpha$ и если γ — наименьший из индексов $\lambda\leqslant\alpha$, для которых $\mathbf{a}_\lambda\neq 0$, то $\mathbf{a}_\gamma g_\gamma=-\sum_{\gamma<\lambda\leqslant\alpha}\mathbf{a}_\lambda g_\lambda-\mathbf{r}_\alpha\prec\!\!\prec g_\gamma$, чего не может быть.

Утверждение, что функция $\mathbf{f}$ допускает асимптотическое разложение с точностью g_α, все коэффициенты которого равны *нулю* равносильно утверждению, что $\mathbf{f}\prec\!\!\prec g_\alpha$. Если $\mathbf{f}$ допускает асимптотическое разложение $\sum_{\lambda\leqslant\alpha}\mathbf{a}_\lambda g_\lambda$ с точностью g_λ, не все коэффициенты которого равны нулю, и если γ — наименьший из индексов λ, при которых $\mathbf{a}_\lambda\neq 0$, то $\mathbf{a}_\gamma g_\gamma$ есть главная часть функции $\mathbf{f}$ относительно шкалы $\mathscr{E}$, так как $\mathbf{f}-\mathbf{a}_\gamma g_\gamma=\sum\limits_{\gamma<\lambda\leqslant\alpha}\mathbf{a}_\lambda g_\lambda+\mathbf{r}_\alpha \prec\!\!\prec g_\gamma$; точно так же, если $\mu\leqslant\alpha$ — такой индекс, при котором $\mathbf{a}_\mu\neq 0$, то $\mathbf{a}_\mu g_\mu$ есть главная часть функции $\mathbf{f}-\sum\limits_{\lambda<\mu}\mathbf{a}_\lambda g_\lambda$.

Для приложений наибольший интерес представляют асимптотические разложения относительно шкалы функций x^{-n} (соответственно z^{-n}), где n есть целое положительное или отрицательное число, при действительном x, стремящемся к $+\infty$ или $-\infty$ (соответственно при комплексном z, стремящемся к ∞), или относительно шкалы функций $(x-c)^n$ (соответственно $(z-c)^n$) при действительном x, стремящемся к c справа или слева (соответственно при комплексном z, стремящемся к c). В главе I было показано (§ 3, n° 2), что всякая вектор-функция действительного переменного x, k раз дифференцируемая в точке $c\in\mathbf{R}$, допускает в этой точке разложение Тейлора порядка k, то есть асимптотическое разложение с точностью $(x-c)^k$ относительно шкалы функций $(x-c)^n$.

3. *Суммы и произведения асимптотических разложений*

Если функции $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$ допускают асимптотическое разложение с точностью соответственно g_α и g_β относительно шкалы сравнения $\mathscr{E}$, то отсюда выводим разложения с точностью $g_{\min(\alpha,\beta)}$, *ограничивая* этой точностью оба разложения; в n° 2 мы показали, каким образом можно получить асимптотическое разложение функции $\mathbf{f}_1+\mathbf{f}_2$ с точностью $g_{\min(\alpha,\beta)}$.

Пусть V_1, V_2 и V — три нормированных пространства над телом K, и пусть $(\mathbf{x},\mathbf{y})\to[\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}]$ — *непрерывное билинейное отображение* произведения $V_1\times V_2$ в V; с другой стороны, на протяжении остальной части этого параграфа мы будем предполагать, что шкала $\mathscr{E}$ обладает тем свойством, что *произведение* любых двух функций из $\mathscr{E}$ снова принадлежит $\mathscr{E}$ (этим свойством обладают все шкалы сравнения, приведенные в качестве примеров к n° 1).

При этих условиях возьмем две функции $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$ соответственно из $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, V_1)$ и $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, V_2)$, допускающие относительно шкалы $\mathscr{E}$ асимптотические разложения $\mathbf{f}_1=\sum\limits_{\lambda\leqslant\alpha}\mathbf{a}_\lambda g_\lambda+\mathbf{r}_\alpha$, $\mathbf{f}_2=\sum\limits_{\mu\leqslant\beta}\mathbf{b}_\mu g_\mu+\mathbf{r}_\beta$

с точностью соответственно g_α и g_β. Кроме того, предположим, что как $\mathbf{a}_\lambda$, так и $\mathbf{b}_\mu$ не все обращаются в нуль и что $\mathbf{a}_\gamma g_\gamma$ и $\mathbf{b}_\delta g_\delta$ составляют главные части функций $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$. По условию, имеем $g_\gamma g_\beta = g_\rho$ и $g_\delta g_\alpha = g_\sigma$; покажем, что сумма $\sum [\mathbf{a}_\lambda \mathbf{b}_\mu] g_\lambda g_\mu$, распространенная на такие пары (λ, μ), что $g_{\min(\rho,\sigma)} \preccurlyeq g_\lambda g_\mu$, является *асимптотическим разложением функции* $[\mathbf{f}_1\mathbf{f}_2]$ *с точностью* $g_{\min(\rho,\sigma)}$. В самом деле, разность между $[\mathbf{f}_1\mathbf{f}_2]$ и этой суммой представляет собой сумму конечного числа членов, которые либо имеют вид $[\mathbf{a}_\lambda \mathbf{b}_\mu] g_\lambda g_\mu$ с отношением $g_\lambda g_\mu \prec\!\!\prec g_{\min(\rho,\sigma)}$, либо $[\mathbf{a}_\lambda \mathbf{r}_\beta] g_\lambda$, где $\lambda \geqslant \gamma$, либо $[\mathbf{r}_\alpha \mathbf{b}_\mu] g_\mu$, где $\mu \geqslant \delta$; а так как функция $[\mathbf{x}\mathbf{y}]$ непрерывна, то (§ 1, предложения 3 и 6) $[\mathbf{a}_\lambda \mathbf{r}_\beta] g_\lambda \preccurlyeq \mathbf{r}_\beta g_\lambda \preccurlyeq g_\beta g_\gamma = g_\rho$ для $\lambda \geqslant \gamma$ и точно так же $[\mathbf{r}_\alpha \mathbf{b}_\mu] g_\mu \preccurlyeq \mathbf{r}_\alpha g_\mu \preccurlyeq g_\alpha g_\delta = g_\sigma$ для $\mu \geqslant \delta$, откуда (§ 1, предложение 5) получаем наше утверждение.

Если все $\mathbf{a}_\lambda$ равны нулю, то $[\mathbf{f}_1\mathbf{f}_2] \prec\!\!\prec g_\alpha g_\delta$, или, другими словами, имеется асимптотическое разложение функции $[\mathbf{f}_1\mathbf{f}_2]$ с нулевыми членами и с точностью $g_\alpha g_\beta$; точно так же и в случае, когда все $\mathbf{a}_\lambda$ и все $\mathbf{b}_\mu$ равны нулю, мы имеем асимптотическое разложение функции $[\mathbf{f}_1\mathbf{f}_2]$ с нулевыми членами и с точностью $g_\alpha g_\beta$.

Полученный результат будет применяться главным образом в том случае, когда V есть *нормированная алгебра* над телом K, а билинейная функция $[\mathbf{x}\mathbf{y}]$ является произведением $\mathbf{x}\mathbf{y}$ в этой алгебре; наиболее важны случаи, когда V равно $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$.

В частности, если f_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — n функций из $\mathcal{H}(\mathfrak{F}, K)$, каждая из которых допускает асимптотическое разложение относительно $\mathcal{E}$, то можно получить асимптотическое разложение относительно $\mathcal{E}$ для любого *многочлена* $\sum\limits_{(\nu_i)} \mathbf{a}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} f_1^{\nu_1} \ldots f_n^{\nu_n}$ от f_i с коэффициентами из нормированного пространства V; кроме того, сформулированные выше правила позволяют установить точность полученного разложения исходя из точности разложений функций f_i.

4. *Композиция асимптотических разложений*

Пусть f — функция из $\mathcal{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$ (соответственно $\mathcal{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{C})$), допускающая асимптотическое разложение с точностью g_α относительно шкалы $\mathcal{E}$ и такая, что *ее предел* по фильтру с базисом $\mathfrak{F}$ равен 0. С другой стороны, пусть $\mathbf{h}$ — функция со значениями в нормированном пространстве V над телом $\mathbf{R}$ (соответственно $\mathbf{C}$), определенная в окрестности точки 0 в $\mathbf{R}$ (соответственно в $\mathbf{C}$) и *n раз дифференцируемая* в этой окрестности; следовательно, для точек этой окрестности имеем $\mathbf{h}(t)=\mathbf{c}_0+\mathbf{c}t+\ldots+\mathbf{c}_nt^n+o(t^n)$ (гл. I, § 3, n° 2), откуда получаем, что на некотором, надлежащим образом выбранном множестве из $\mathfrak{F}$ $\mathbf{h}\circ f=\mathbf{c}_0+\mathbf{c}_1f+\ldots+\mathbf{c}_nf^n+o(f^n)$. В n° 3 мы показали, каким образом можно получить асимптотическое разложение для выражения $\mathbf{c}_0+\mathbf{c}_1f+\ldots+\mathbf{c}_nf^n$ с точностью g_ρ, полностью определенной точностью разложения функции f; с другой стороны, предположим, что коэффициенты асимптотического разложения функции f не обращаются одновременно в нуль и что $a_\gamma g_\gamma$ есть главная часть функции f, и пусть $g_\sigma=g_\gamma^n$; если $\sigma<\rho$, то мы получим разложение функции $\mathbf{h}\circ f$ с точностью g_σ, ограничив этой точностью разложение суммы $\sum_{k=0}^{n}\mathbf{c}_kf^k$; если же, наоборот, $\rho\leqslant\sigma$, то разложение суммы $\sum_{k=0}^{n}\mathbf{c}_kf^k$ есть в то же время разложение функции $\mathbf{h}\circ f$ с точностью g_ρ.

Если все члены асимптотического разложения функции f равны нулю и если $g_\alpha\prec\!\!\prec 1$, то $f\prec\!\!\prec g_\alpha$ и, значит, $f^k\prec\!\!\prec g_\alpha^k\prec\!\!\prec g_\alpha$ при любом целом $k>0$; если $\mathbf{c}_m$ — первый отличный от нуля коэффициент с индексом $m>0$ (в предположении, что не все $\mathbf{c}_k$ с индексом $k>0$ обращаются в нуль), то $\mathbf{c}_0$ есть асимптотическое разложение функции $\mathbf{h}\circ f$ с точностью g_α^m.

В оставшейся части этого n° мы ограничимся случаем функций из $\mathscr{E}$, принимающих действительные значения и *строго положительных* на некотором множестве из $\mathfrak{F}$, и будем рассматривать лишь асимптотические разложения функций из $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$. Предположим сначала, что для любой функции $g\in\mathscr{E}$ и любого действительного числа ν функция g^ν снова принадлежит $\mathscr{E}$; это условие выполняется, например, для шкалы функций x^α или $x^\alpha|\log x|^\beta$ (α и β — произвольные действительные числа) в окрестности $+\infty$ или в окрестности 0 в $\mathbf{R}$. Это свойство влечет за собой тот факт, что *частное* двух функций из $\mathscr{E}$ снова принадлежит $\mathscr{E}$. Тогда из асимптотического разложения относительно $\mathscr{E}$ функции $f\in\mathscr{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$ с точностью g_α можно вывести разложение функции $|f|^\nu$ при любом действительном ν. Действительно, ограничиваясь случаем, когда не все коэффициенты разложения функции f равны нулю, и обозначая через $a_\gamma g_\gamma$ главную часть функции f, напишем, что $|f|^\nu = |a_\gamma|^\nu g_\gamma^\nu (1+h)^\nu$, где

$$h = \sum_{\gamma<\lambda\leq\alpha} \frac{a_\lambda}{a_\gamma} \frac{g_\lambda}{g_\gamma} + o\left(\frac{g_\alpha}{g_\gamma}\right).$$

Согласно сделанным предположениям $\sum\limits_{\gamma<\lambda\leq\alpha} \frac{a_\lambda}{a_\gamma} \frac{g_\lambda}{g_\gamma}$ есть асимптотическое разложение функции h с точностью $\frac{g_\alpha}{g_\gamma}$; а поскольку h стремится к 0 по фильтру $\mathfrak{F}$, то описанный выше метод дает нам асимптотическое разложение функции $(1+h)^\nu$, а затем и, после умножения на $|a_\gamma|^\nu g_\gamma^\nu$, разложение функции $|f|^\nu$.

При тех же предположениях относительно f можно написать, что

$$\log|f| = \log|a_\gamma g_\gamma| + \log(1+h),$$

где функция $\log(1+h)$ разлагается, как указано выше, ибо функция $\log(1+t)$ бесконечно дифференцируема в окрестности 0; если, кроме того, функция $\log g_\gamma$ допускает асимптотическое разложение относительно $\mathscr{E}$ или относительно какой-нибудь шкалы $\mathscr{E}_1 \supset \mathscr{E}$, то асимптотическое разложение функции $\log|f|$ получается в виде суммы двух асимптотических разложений.

Пример. Имеем $(1+x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x}\log(1+x)\right)$, $\log(1+x) = \log x + \log\left(1+\frac{1}{x}\right)$, откуда при x, стремящемся к $+\infty$, следует асимптотическое разложение функции $\frac{1}{x}\log(1+x)$ относительно шкалы функций $x^\alpha(\log x)^\beta$:

$$\frac{1}{x}\log(1+x) = \frac{\log x}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^3} + o_1\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Из этого разложения и из разложения Тейлора

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3)$$

в окрестности точки $u=0$ в результате применения вышеизложенных методов вытекает асимптотическое разложение

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{\log x}{x} + \frac{1}{2}\frac{(\log x)^2}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{6}\frac{(\log x)^3}{x^3} + \frac{\log x}{x^3} - \frac{1}{2x^3} + o_2\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

относительно шкалы функций $x^\alpha(\log x)^\beta$.

При асимптотическом разложении функции e^f (при условии сохранения тех же предположений и обозначений) новые задачи возникают только при $f \succ\succ 1$; здесь необходимо различать два случая в зависимости от того, будет ли $g_\alpha \succ\succ 1$ или $g_\alpha \preccurlyeq 1$. В первом случае задание разложения функции f не позволяет получить главную часть функции e^f относительно $\mathscr{E}$, так как мы не знаем, будет ли остаток r_α стремиться к 0, то есть будет ли e^{r_α} стремиться к 1. Напротив, если $g_\alpha \preccurlyeq 1$, то $r_\alpha \prec\prec 1$ и, следовательно, $e^f \sim \exp\left(\sum_{\lambda \leqslant \alpha} a_\lambda g_\lambda\right)$. Этот результат можно уточнить: пусть $a_\gamma g_\gamma$ — главная часть функции f, и пусть δ — индекс (такой, что $\gamma < \delta \leqslant \alpha$), для которого $g_\delta = 1$; положим $f_1 = \sum_{\lambda \leqslant \delta} a_\lambda g_\lambda$, $f_2 = \sum_{\delta < \lambda \leqslant \alpha} a_\lambda g_\lambda + r_\alpha$; тогда $f = f_1 + f_2$ и, значит, $e^f = e^{f_1} e^{f_2}$; стало быть, метод, изложенный в начале этого n°, позволяет получить асимптотическое разложение функции e^{f_2} (исходя из разложения Тейлора функции e^t в точке $t = 0$). Таким образом, мы снова приходим к асимптотическому разложению функции e^f, если $e^{f_1} = \prod_{\lambda \leqslant \delta} \exp(a_\lambda g_\lambda)$ принадлежит $\mathscr{E}$ или некоторой шкале $\mathscr{E}_1$, содержащей $\mathscr{E}$.

Пример. Имеем $x^{x^{1/x}} = \exp\left(\log x \exp\left(\frac{1}{x}\log x\right)\right)$; если x стремится к $+\infty$, то $\log x \prec\prec x$, откуда вытекает асимптотическое разложение функции $\log x \exp\left(\frac{1}{x}\log x\right)$ относительно шкалы функций $x^\alpha (\log x)^\beta$:

$$\log x \exp\left(\frac{1}{x}\log x\right) = \log x + \frac{(\log x)^2}{x} + \frac{1}{2}\frac{(\log x)^3}{x^2} + o\left(\frac{(\log x)^3}{x^2}\right).$$

Все члены этого разложения, начиная со второго, стремятся к 0; исходя из этого разложения и из разложения Тейлора $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$ в окрестности точки $u = 0$, получаем

$$x^{x^{1/x}} = x + (\log x)^2 + \frac{1}{2}\frac{(\log x)^4}{x} + \frac{1}{2}\frac{(\log x)^3}{x} + o\left(\frac{(\log x)^3}{x}\right).$$

5. *Асимптотические разложения с переменными коэффициентами*

Понятия главной части и асимптотического разложения можно обобщить следующим образом. Пусть $\mathscr{E}$ — шкала сравнения, состоящая из действительных (соответственно комплексных) функций, для каждой из которых существует множество из $\mathfrak{F}$, на котором функция *не обращается в нуль ни в одной точке*. С другой стороны, пусть $\mathscr{C}$ — множество функций из $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, V)$, удовлетворяющих следующим трем условиям:

($\mathrm{CO_I}$) *Для любой функции* $\mathbf{a} \in \mathscr{C}$ *имеем* $\mathbf{a} \preccurlyeq 1$.

($\mathrm{CO_{II}}$) *Отношение* $\mathbf{a} \prec\!\!\prec 1$ *для функции* $\mathbf{a} \in \mathscr{C}$ *влечет* $\mathbf{a} = 0$.

($\mathrm{CO_{III}}$) $\mathscr{C}$ *есть векторное пространство над телом* $\mathbf{R}$ (соответственно $\mathbf{C}$).

Пусть при этих условиях $\mathbf{f}$ есть произвольная функция из $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, V)$; если существует такая функция $g \in \mathscr{E}$ и такая отличная от нуля функция $\mathbf{a} \in \mathscr{C}$, что $\mathbf{f} - \mathbf{a}g \prec\!\!\prec g$, то говорят, что $\mathbf{a}g$ есть *главная часть* функции $\mathbf{f}$ относительно шкалы сравнения $\mathscr{E}$ и *области изменения коэффициентов* $\mathscr{C}$. Если такая главная часть существует, то она *единственна*: в самом деле, допустим, что существуют две главные части $\mathbf{a}_1 g_1$ и $\mathbf{a}_2 g_2$, определенные вышеуказанным способом; отношение $g_1 \prec\!\!\prec g_2$ не может выполняться, так как из него в силу ($\mathrm{CO_I}$) должны вытекать отношения $\mathbf{a}_1 g_1 \prec\!\!\prec g_2$ и $\mathbf{f} - \mathbf{a}_1 g_1 \prec\!\!\prec g_1 \prec\!\!\prec g_2$ и, значит, $\mathbf{f} \prec\!\!\prec g_2$; но тогда будет выполняться также и отношение $\mathbf{a}_2 g_2 \prec\!\!\prec g_2$, а следовательно и $\mathbf{a}_2 \prec\!\!\prec 1$, вопреки предположению о том, что $\mathbf{a}_2 \neq 0$, и условию ($\mathrm{CO_{II}}$). Таким образом, $g_1 = g_2$; тогда из отношений $\mathbf{f} - \mathbf{a}_1 g_1 \prec\!\!\prec g_1$, $\mathbf{f} - \mathbf{a}_2 g_1 \prec\!\!\prec g_1$ получаем отношение $(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1) g_1 \prec\!\!\prec g_1$, из которого следует $\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 \prec\!\!\prec 1$; значит, на основании условий ($\mathrm{CO_{II}}$) и ($\mathrm{CO_{III}}$) $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1$.

Пример. Для действительного x, стремящегося к $+\infty$, *периодические* ограниченные на $\mathbf{R}$ функции, имеющие одинаковый период τ, удовлетворяют условиям ($\mathrm{CO_I}$), ($\mathrm{CO_{II}}$) и ($\mathrm{CO_{III}}$): в самом деле, если $\lim\limits_{x \to +\infty} a(x) = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое x_0, что неравенство $x \geqslant x_0$ влечет $|a(x)| \leqslant \varepsilon$; отсюда следует, что для $0 \leqslant x \leqslant \tau$ также имеет место неравенство $|a(x)| \leqslant \varepsilon$, поскольку существует такое целое n, что $x + n\tau \geqslant x_0$ и что $a(x) = a(x + n\tau)$, а так как ε произвольно, то $a(x) = 0$ на $[0, \tau]$, а значит, и всюду.

Сохранив обозначения n° 2, будем говорить, что сумма $\sum\limits_{\lambda \leqslant \alpha} \mathbf{a}_\lambda g_\lambda$, где $\mathbf{a}_\lambda$ принадлежат $\mathscr{C}$ и, за исключением конечного числа из них, равны нулю, является *асимптотическим разложением функции* $\mathbf{f}$ *с коэффициентами из* $\mathscr{C}$ с точностью g_α, если $\mathbf{f} - \sum\limits_{\lambda \leqslant \alpha} a_\lambda g_\lambda \prec\!\!\prec g_\alpha$; тогда для любого индекса μ, для которого $\mathbf{a}_\mu \neq 0$, выражение $\mathbf{a}_\mu g_\mu$ есть главная часть функции $\mathbf{f} - \sum\limits_{\lambda < \mu} \mathbf{a}_\lambda g_\lambda$ относительно $\mathscr{E}$ и $\mathscr{C}$, чем установлена единственность асимптотического разложения функции $\mathbf{f}$ (с точностью g_α), если таковое существует.

Указанные в n° 3 методы получения асимптотического разложения функций $\mathbf{f}_1+\mathbf{f}_2$ и $[\mathbf{f}_1\mathbf{f}_2]$ исходя из заданных асимптотических разложений функций $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$ применимы и к разложениям с переменными коэффициентами при условии, что выражения $[\mathbf{a}_\lambda \mathbf{b}_\mu]$ припадлежат области коэффициентов $\mathscr{C}$, соответствующей нормированному пространству V, или допускают асимптотическое разложение с коэффициентами из $\mathscr{C}$.

§ 3. Асимптотические разложения функций действительного переменного

В этом параграфе мы будем рассматривать только тот случай, когда множество E есть *открытый интервал* замкнутой прямой $\overline{\mathbf{R}}$, а $\mathfrak{F}$ есть базис следа на E фильтра окрестностей левого или правого конца a интервала E; кроме того, мы будем исследовать главным образом *числовые* (конечные) функции, определенные на некотором множестве из $\mathfrak{F}$ (зависящем от рассматриваемой функции). Применяя в случае надобности одну из замен переменных $x'=-x$, $x'=\frac{1}{x-a}$, $x'=-\frac{1}{x-a}$, можно всегда свести задачу к случаю, когда E — интервал вида $]a, +\infty[$, то есть к случаю, когда $\mathfrak{F}$ состоит из интервалов $[t, +\infty[$, где $t>a$. Поэтому мы, за исключением некоторых особо важных результатов, ограничимся в основном этим случаем, предоставляя читателю самостоятельно переформулировать большую часть полученных предложений (путем вышеуказанной замены переменных).

Множества фильтра $\mathfrak{F}$ мы будем кратко называть «окрестностями $+\infty$».

1. *Интегрирование отношений сравнения: I. Слабые отношения*

Предложение 1. *Пусть на интервале* $[a, +\infty[$ *заданы линейчатая вектор-функция* $\mathbf{f}$ *и такая линейчатая функция* $g\geqslant 0$, *что* $\int\limits_a^{+\infty} g(t)\,dt>0$. *Тогда отношение* $\mathbf{f}\preccurlyeq g$ *для* x, *стремящегося* *к* $+\infty$, *влечет отношение* $\int_a^x \mathbf{f}(t)\,dt \preccurlyeq \int_a^x g(t)\,dt$. *Если интеграл* $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ *сходится, то интеграл* $\int_a^{+\infty} \mathbf{f}(t)\,dt$ *абсолютно сходится.*

Действительно, по условию, найдется такое $b \geqslant a$ и такое число $c' > 0$, что

$$\|\mathbf{f}(x)\| \leqslant c' g(x) \quad \text{для} \quad x \geqslant b,$$

откуда

$$\left\| \int_b^x \mathbf{f}(t)\,dt \right\| \leqslant \int_b^x \|\mathbf{f}(t)\|\,dt \leqslant c' \int_b^x g(t)\,dt;$$

а поскольку b можно предположить настолько большим, чтобы выполнялось неравенство $\int_a^b g(t)\,dt > 0$, то найдется такое $c'' > 0$, что $\left\| \int_a^b \mathbf{f}(t)\,dt \right\| \leqslant c'' \int_a^b g(t)\,dt$; следовательно, положив $c = \max(c', c'')$, для любого $x \geqslant b$ получим неравенство

$$\left\| \int_a^x \mathbf{f}(t)\,dt \right\| \leqslant c \int_a^x g(t)\,dt,$$

откуда и вытекает предложение.

Следствие 1. *Если f и g — такие две линейчатые положительные функции на интервале $[a, +\infty[$, что $f \succcurlyeq g$, и если*

$$\int_a^{+\infty} g(t)\,dt = +\infty, \text{ то } \int_a^{+\infty} f(t)\,dt = +\infty.$$

Следствие 2. *Если f и g положительны, не равны тождественно нулю на $[a, +\infty[$ и таковы, что $f \asymp g$, то*

$$\int_a^x f(t)\,dt \asymp \int_a^x g(t)\,dt.$$

2. *Приложение: логарифмические признаки сходимости интегралов*

При надлежащем выборе функции g можно из предложения 1 и его следствия 1 вывести признаки, позволяющие судить о том, сходится или бесконечен интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,dt$ от функции $f \geqslant 0$; для этого достаточно выбрать в качестве g функцию, примитивная которой известна. В частности, поскольку x^μ имеет примитивную $\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}$ при $\mu \neq -1$ и $\log x$ при $\mu = -1$, то получаем следующий признак:

Предложение 2 («логарифмический признак порядка 0»). *Пусть $f \geqslant 0$ — линейчатая функция на интервале $[a, +\infty[$; если $f(x) \preccurlyeq x^\mu$ для некоторого значения $\mu < -1$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,dt$ сходится; если $f(x) \succcurlyeq x^\mu$ для некоторого значения $\mu \geqslant -1$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,dt$ бесконечен.*

Этот признак не позволяет сделать никакого заключения, если $\frac{1}{x^{1+\alpha}} \prec\!\!\prec f(x) \prec\!\!\prec \frac{1}{x}$ при *любом* показателе $\alpha > 0$, например, для функции $f(x) = \frac{1}{x(\log x)^\mu}$ $(\mu > 0)$. Однако в этом последнем случае функция f имеет примитивную $\frac{1}{1-\mu}(\log x)^{1-\mu}$ при $\mu \neq 1$ и $\log\log x$ при $\mu = 1$. Следовательно, имеет место

Предложение 3 («логарифмический признак порядка 1»). *Пусть $f \geqslant 0$ — линейчатая функция на интервале $[a, +\infty[$; если $f(x) \preccurlyeq \frac{1}{x(\log x)^\mu}$ для некоторого $\mu > 1$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,dt$ сходится; если $f(x) \succcurlyeq \frac{1}{x(\log x)^\mu}$ для некоторого $\mu \leqslant 1$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,dt$ бесконечен.*

Вообще, через $l_n(x)$ для любого целого $n \geqslant 0$ обозначим функцию, определенную по индукции (для достаточно больших x) при помощи соотношений $l_0(x) = x$, $l_n(x) = \log(l_{n-1}(x))$ для $n \geqslant 1$; говорят, что $l_n(x)$ есть *n-й повторный логарифм от* x (см. Приложение). Непосредственно убеждаемся в том, что $\frac{1}{1-\mu}(l_n(x))^{1-\mu}$ есть примитивная функции $\frac{1}{xl_1(x)\,l_2(x)\,\ldots\,l_{n-1}(x)\,(l_n(x))^{\mu}}$ для $\mu \neq 1$, а $l_{n+1}(x)$ есть примитивная функции $\frac{1}{xl_1(x)\,l_2(x)\,\ldots\,l_{n-1}(x)\,l_n(x)}$. Таким образом, имеет место

Предложение 4 («логарифмический признак порядка n»). *Пусть $f \geqslant 0$ — линейчатая функция на интервале $[a, +\infty[$; если $f(x) \preccurlyeq \frac{1}{xl_1(x)\,l_2(x)\,\ldots\,l_{n-1}(x)\,(l_n(x))^{\mu}}$ для некоторого $\mu > 1$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ сходится; если $f(x) \succcurlyeq \frac{1}{xl_1(x)\,\ldots\,l_{n-1}(x)\,(l_n(x))^{\mu}}$ для некоторого $\mu \leqslant 1$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ бесконечен.*

Следовательно, каждый логарифмический признак применим к функциям, для которых признаки более низкого порядка не позволяют сделать определенное заключение (см. Приложение, упражнения 5 и 8).

Приведем, ввиду его полезности, признак порядка 0 для интегралов $\int_\alpha^a f(t)\,dt$, где $f \geqslant 0$ линейчата на некомпактном интервале $]\alpha, a]$:

Предложение 5 («логарифмический признак порядка 0»). *Если в окрестности точки α отношение $f(x) \preccurlyeq \frac{1}{(x-\alpha)^{\mu}}$ выполняется для некоторого $\mu < 1$, то интеграл $\int_\alpha^a f(t)\,dt$ сходится; если $f(x) \succcurlyeq \frac{1}{(x-\alpha)^{\mu}}$ для некоторого $\mu \geqslant 1$, то интеграл $\int_\alpha^a f(t)\,dt$ бесконечен.*

Предоставляем читателю самостоятельно сформулировать для этого случая логарифмический признак порядка n.

Применение логарифмических признаков становится непосредственным, если получена *главная часть* функции f относительно шкалы сравнения, содержащей функции, входящие в эти признаки: если f_1 — эта главная часть, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ сходится или бесконечен одновременно с интегралом $\int_a^{+\infty} f_1(t)\,dt$, к которому логарифмические признаки применяются непосредственно.

Примеры. 1) Функция $t^p(1-t)^q$ не ограничена на интервале $]0, 1[$, если $p<0$ или $q<0$; согласно логарифмическим признакам порядка 0, примененным в окрестности точек 0 и 1, для сходимости интеграла $\int_0^1 t^p(1-t)^q\,dt$ необходимо и достаточно, чтобы $p>-1$ и $q>-1$. Интеграл, удовлетворяющий этим условиям, называется *эйлеровым интегралом первого рода* и обозначается через $\mathrm{B}(p+1,\ q+1)$ (ср. гл. VII).

2) Рассмотрим интеграл $\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$. Так как $e^{-t}\sim 1$ в окрестности 0, то для сходимости этого интеграла необходимо, чтобы $x>0$; это условие также и достаточно, ибо в окрестности $+\infty$ имеем $e^{-t}\prec\!\!\prec t^{-\mu}$ для любого $\mu>0$. Если $x>0$, то интеграл называется *эйлеровым интегралом второго рода* и обозначается через $\Gamma(x)$ (ср. гл. VII).

3. *Интегрирование отношений сравнения: II. Сильные отношения*

Предложение 6. *Пусть на* $[a, +\infty[$ *заданы линейчатая вектор-функция* $\mathbf{f}$ *и числовая линейчатая функция* $g\geqslant 0$.

1° *Если интеграл* $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ *сходится, то отношение* $\mathbf{f}\prec\!\!\prec g$ (соответственно $\mathbf{f}\sim \mathbf{c}g$, где $\mathbf{c}$ — постоянная) *влечет отношение*

$$\int_x^{+\infty}\mathbf{f}(t)\,dt\prec\!\!\prec\int_x^{+\infty}g(t)\,dt\quad\left(\text{соответственно}\quad\int_x^{+\infty}\mathbf{f}(t)\,dt\sim\mathbf{c}\int_x^{+\infty}g(t)\,dt\right).$$

2° *Если интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} g(t)\,dt$ *бесконечен, то отношение* $f \ll g$ (соответственно $f \sim \mathbf{c}g$) *влечет отношение* $\int\limits_\alpha^x \mathbf{f}(t)\,dt \ll \int\limits_\beta^x g(t)\,dt$ $\left(\text{соответственно } \int\limits_\alpha^x \mathbf{f}(t)\,dt \sim \mathbf{c}\int\limits_\beta^x g(t)\,dt\right)$ *при любых* α *и* β *из* $[a, +\infty[$.

Достаточно доказать предложение только для отношения $\mathbf{f} \ll g$, поскольку при $\mathbf{c} \neq 0$ отношение $\mathbf{f} \sim \mathbf{c}g$ эквивалентно отношению $\mathbf{f} - \mathbf{c}g \ll g$.

Первое утверждение следует непосредственно из теоремы о среднем, так как если $\|\mathbf{f}(x)\| \leqslant \varepsilon g(x)$ для $x \geqslant x_0$, то

$$\left\|\int\limits_x^{+\infty} \mathbf{f}(t)\,dt\right\| \leqslant \int\limits_x^{+\infty} \|\mathbf{f}(t)\|\,dt \leqslant \varepsilon \int\limits_x^{+\infty} g(t)\,dt \quad \text{для} \quad x \geqslant x_0.$$

Что касается второго утверждения, то предположим, что $\int\limits_a^{+\infty} g(t)\,dt = +\infty$. Если $\|\mathbf{f}(x)\| \leqslant \varepsilon g(x)$ для $x \geqslant x_0 \geqslant \max(\alpha, \beta)$, то

$$\int\limits_\alpha^x \|\mathbf{f}(t)\|\,dt = \int\limits_\alpha^{x_0} \|\mathbf{f}(t)\|\,dt + \int\limits_{x_0}^x \|\mathbf{f}(t)\|\,dt \leqslant \int\limits_\alpha^{x_0} \|\mathbf{f}(t)\|\,dt + \varepsilon \int\limits_{x_0}^x g(t)\,dt =$$

$$= \varepsilon \int\limits_\beta^x g(t)\,dt + \left(\int\limits_\alpha^{x_0} \|\mathbf{f}(t)\|\,dt - \varepsilon \int\limits_\beta^{x_0} g(t)\,dt\right).$$

Но существует такое $x_1 \geqslant x_0$, что для любого $x \geqslant x_1$

$$\left|\int\limits_\alpha^{x_0} \|\mathbf{f}(t)\|\,dt - \varepsilon \int\limits_\beta^{x_0} g(t)\,dt\right| \leqslant \varepsilon \int\limits_\beta^x g(t)\,dt,$$

откуда для $x \geqslant x_1$ получаем

$$\left\|\int\limits_\alpha^x \mathbf{f}(t)\,dt\right\| \leqslant \int\limits_\alpha^x \|\mathbf{f}(t)\|\,dt \leqslant 2\varepsilon \int\limits_\beta^x g(t)\,dt,$$

что и завершает доказательство, поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно.

Иначе говоря, обе части сильного отношения $\mathbf{f} \ll g$, $\mathbf{f} \sim \mathbf{a}g$, когда g *положительна* на интервале $[a, +\infty[$, можно *интегри-*

ровать, и отношение будет сохраняться между примитивными обеих частей, если интегрировать их от x до $+\infty$, когда $\int\limits_a^{+\infty} g(t)\,dt$ сходится, и от α до x (α — произвольная точка из $[a, +\infty[$) в противном случае.

Отметим, что предложения 1 и 6 снова верны, если $\mathfrak{F}$ есть базис фильтра, образованный следом интервалов $[t, +\infty[$ (где $t > a$) на *дополнении некоторого счетного множества* (см. гл. I, § 2, теорема 2).

Примеры. 1) Применяя предложение 6 к отношению $\frac{1}{x} \prec\!\!\prec x^{\alpha-1}$, где $\alpha > 0$, снова приходим к отношению $\log x \prec\!\!\prec x^{\alpha}$ для любого $\alpha > 0$, эквивалентному отношению $y^{\frac{1}{\alpha}} \prec\!\!\prec e^{y}$, доказанному в главе III, § 2, n° 1.

2) Имеем $\left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{e^x}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right) \sim \frac{e^x}{x}$; так как $\frac{e^x}{x}$ стремится к $+\infty$ вместе с x, то из предложения 6 вытекает, что

$$\int\limits_1^x \frac{e^t}{t}\,dt \sim \frac{e^x}{x}.$$

Замечание. Если не предполагать, что $g \geqslant 0$ на интервале $[a, +\infty[$ (или $g \leqslant 0$ на таком интервале), и допустить, что $\int\limits_a^{+\infty} g(t)\,dt$ не является сходящимся, то из отношения $f \sim g$ *не обязано вытекать отношение* $\int\limits_a^x f(t)\,dt \sim \int\limits_a^x g(t)\,dt$, как показывает пример функций $g(x) = \sin x$ и $f(x) = \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)\sin x$; в самом деле,

$$\int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 t}{t}\,dt \geqslant \frac{1}{(n+1)\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin^2 t\,dt \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{n+1}^{n+2} \frac{dt}{t},$$

откуда

$$\int\limits_{\pi}^{n\pi} \frac{\sin^2 t}{t}\,dt \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_2^{n+1} \frac{dt}{t},$$

и интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dt}{t}$ бесконечен, тогда как $\int\limits_{\pi/2}^{x} g(t)\,dt = -\cos x$ остается ограниченным (см. упражнение 4).

4. *Дифференцирование отношений сравнения*

Для предложений 1 и 6 *не существует обратных*: наличие между двумя функциями, дифференцируемыми в окрестности $+\infty$, отношения сравнения $f \preccurlyeq g$, $f \prec\!\!\prec g$, $f \sim cg$ *не означает обязательного* наличия того же отношения сравнения между их производными, даже если речь идет об отношении сравнения между числовыми *монотонными* функциями f и g.

Например, функция $x^2+x\sin x+\cos x$ монотонна и эквивалентна x^2, однако ее производная $x(2+\cos x)$ не эквивалентна $2x$.

Напротив, отношения сравнения можно дифференцировать, если предположить *заранее*, что производные рассматриваемых функций *сравнимы* (§ 1, n° 3). Вообще, будем говорить, что две числовые функции f и g, определенные на интервале $[a, +\infty[$, *сравнимы порядка* k в окрестности $+\infty$, если они имеют в этой окрестности линейчатую k-ю производную всюду, кроме счетного множества точек, и если в этой окрестности $f^{(k)}$ и $g^{(k)}$ *сохраняют постоянный знак* (на множестве, на котором они определены) и *сравнимы*.

Условимся говорить, что две *сравнимые* числовые функции (§ 1, n° 2) *сравнимы порядка* 0.

Предложение 7. *Если две числовые функции f и g сравнимы порядка* 1, *то они сравнимы; при этом отношение $f \prec\!\!\prec g$* (соответственно $f \sim cg$, где c — постоянная) *влечет $f' \prec\!\!\prec g'$* (соответственно $f' \sim cg'$), *кроме того случая, когда g эквивалентна постоянной, отличной от нуля.*

Действительно, поскольку на интервале $[x_0, +\infty[$ функции f' и g' сохраняют постоянный знак, то функции f и g монотонны на этом интервале и, значит, стремятся к конечному или бесконечному пределу, когда x стремится к $+\infty$. Очевидно, что f и g сравнимы при x, стремящемся к $+\infty$, если один из этих пределов конечен и не равен 0 или если один равен нулю, а другой бесконечен. Если обе функции f и g стремятся к 0, то можно написать

$$f(x) = -\int_x^{+\infty} f'(t)\,dt, \qquad g(x) = -\int_x^{+\infty} g'(t)\,dt;$$

так как функции f' и g' сравнимы, то в силу предложения 6 сравнимы и функции f и g с тем же отношением сравнения, что и для f' и g'. Точно так же, если обе функции f и g имеют бесконечный предел, то

$$f(x)=f(x_0)+\int\limits_{x_0}^{x} f'(t)\,dt, \qquad g(x)=g(x_0)+\int\limits_{x_0}^{x} g'(t)\,dt;$$

предложение 6 снова показывает, что f и g сравнимы и что отношение сравнения между f и g совпадает с тем, которое существует между f' и g'. Для завершения доказательства предложения остается рассмотреть случай, когда g стремится к $\pm\infty$, а f — к постоянной; тогда отношение $f' \succcurlyeq g'$ не может выполняться, ибо в таком случае из предложения 1 вытекало бы, что интеграл $\int\limits_{x_0}^{+\infty} g'(t)\,dt$ сходится; поскольку же функции f' и g' предполагаются сравнимыми, то должно выполняться отношение $f' \prec\!\!\prec g'$.

Следствие. *Если две числовые функции f и g сравнимы порядка $k \geqslant 1$, то они сравнимы порядка p для $0 \leqslant p \leqslant k$; при этом отношение $f \prec\!\!\prec g$* (соответственно $f \sim cg$) *влечет отношение $f^{(k)} \prec\!\!\prec g^{(k)}$* (соответственно $f^{(k)} \sim cg^{(k)}$), *кроме того случая, когда одна из производных $g^{(p)}$ $(0 \leqslant p \leqslant k-1)$ эквивалентна постоянной, отличной от нуля.*

Действительно, поскольку $f^{(k)}$ и $g^{(k)}$ сохраняют постоянный знак на интервале $[x_0, +\infty[$, то $f^{(k-1)}$ и $g^{(k-1)}$ монотонны на этом интервале и, значит, сохраняют постоянный знак в окрестности $+\infty$; кроме того, предложение 7 показывает, что $f^{(k-1)}$ и $g^{(k-1)}$ сравнимы, и стало быть, доказываемое следствие выводится из предложения 7 индукцией по k.

Замечания. 1) Ограничение, наложенное в формулировке предложения 7 на функцию g, существенно. Например, $\frac{1}{x} \prec\!\!\prec 1+\frac{1}{x}$, хотя производные обеих частей эквивалентны; точно так же $1+\frac{1}{x} \sim 1+\frac{1}{x^2}$, но $\frac{1}{x^2} \succ\!\!\succ \frac{2}{x^3}$.

2) Если f и g сравнимы порядка k, то функция f_1, эквивалентная f, не обязана быть сравнимой порядка k с функцией g; однако она будет обладать этим свойством, если предположить, что f_1

сравнима порядка k с f и что никакая из производных $f^{(p)}$ $(0 \leqslant p \leqslant k-1)$ не эквивалентна постоянной, отличной от 0.

3) Если f и g сравнимы порядка k, то функции hf и hg не обязаны быть сравнимыми даже для случая монотонной функции h, столь простой, как $h(x)=x$ (упражнение 3); точно так же функции $\frac{1}{f}$ и $\frac{1}{g}$ не обязаны быть сравнимыми порядка k (упражнение 1).

5. *Главная часть примитивной*

Пусть f — линейчатая числовая функция, не равная 0 и сохраняющая постоянный знак на интервале $[a, +\infty[$; предложение, которое мы докажем, в некоторых случаях позволяет получить сравнительно простую главную часть примитивной $\int\limits_x^{+\infty} f(t)\,dt$, если $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,dt$ сходится, и примитивной $\int\limits_a^{x} f(t)\,dt$, если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,dt$ бесконечен.

Предложение 8. *Положим* $F(x)=\int\limits_x^{+\infty} f(t)\,dt$, *если* $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,dt$ *сходится, и* $F(x)=\int\limits_a^{x} f(t)\,dt$, *если* $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,dt$ *бесконечен. Допустим, что* $\log|f|$ *и* $\log x$ *сравнимы порядка* 1. *Тогда*:

1° *Если функция* f *имеет конечный порядок* $\mu \neq -1$ *относительно* x, *то*

$$F(x) \sim \frac{1}{|\mu+1|}\, xf(x). \tag{1}$$

2° *Если* f *имеет бесконечный порядок относительно* x *и если* f/f_1 *и* x *сравнимы порядка* 1, *то*

$$F(x) \sim \frac{(f(x))^2}{|f(x)|}. \tag{2}$$

Отметим, что существование для функции $f(x)$ определенного порядка относительно x вытекает из условия этого предложения (§ 1, определение 5).

1° Если f имеет порядок $\mu \neq 0$ относительно x, то $\log|f| \sim \mu \log x$ и, значит, принимая во внимание, что функции $\log|f|$

и $\log x$ сравнимы порядка 1, получаем на основании предложения 7, что $\frac{f'}{f} \sim \frac{\mu}{x}$, откуда $xf' \sim \mu f$. Если $\mu > -1$, то $f(x) \succ\!\succ x^{\mu-\varepsilon}$ для любого $\varepsilon > 0$ и, следовательно (предложение 2), интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,dt$ бесконечен. Мы можем написать

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt = xf(x) - af(x) - \int\limits_a^x tf'(t)\,dt$$

или еще

$$\int\limits_a^x (f(t) + tf'(t))\,dt = xf(x) - af(a);$$

поскольку $\mu \neq -1$, то $f(x) + xf'(x) \sim (\mu+1) f(x)$ и, стало быть (предложение 6), справедливо отношение

$$\int\limits_a^x (f(t) + tf'(t))\,dt \sim (\mu+1) F(x),$$

доказывающее для данного случая отношение (1). Если $\mu = 0$, то точно так же имеем отношение $xf'(x) \prec\!\prec f(x)$, которое снова дает нам $f(x) + xf'(x) \sim f(x)$. Аналогичным образом рассуждаем для $\mu < -1$, то есть для случая, когда $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,dt$ сходится.

2° Если f имеет порядок $+\infty$ относительно x, то $\log|f| \succ\!\succ \log x$ и, значит (предложение 7), $\frac{f'}{f} \succ\!\succ \frac{1}{x}$, или, в обозначении $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$, $g(x) \prec\!\prec x$; кроме того, принимая во внимание, что $f(x) \succ\!\succ x^{\alpha}$ для любого $\alpha > 0$, заключаем, что $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,dt$ бесконечен. Можно написать

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt = \int\limits_a^x g(t) f'(t)\,dt =$$

$$= g(x) f(x) - g(a) f(a) - \int\limits_a^x f(t) g'(t)\,dt;$$

а поскольку g и x сравнимы порядка 1, то из отношения $g(x) \prec\!\prec x$ вытекает (предложение 7) отношение $g'(x) \prec\!\prec 1$, а следовательно и

$fg' \prec\!\!\prec f$, и значит (предложение 6), справедливо отношение $\int_a^x f(t)\,g'(t)\,dt \prec\!\!\prec F(x)$, доказывающее отношение (2). Для того случая, когда f имеет порядок $-\infty$ относительно x, то есть $\int_a^x f(t)\,dt$ сходится, доказательство аналогично.

Пусть $\mathscr{E}$ — шкала сравнения (для действительного x, стремящегося к $+\infty$), состоящая из числовых функций, отличных от нуля и имеющих постоянный знак в окрестности $+\infty$, обладающая тем свойством, что $x \in \mathscr{E}$ и что произведение и частное двух функций из $\mathscr{E}$ снова принадлежат $\mathscr{E}$ (§ 2). Если линейчатая функция f имеет постоянный знак в окрестности $+\infty$ и имеет главную часть cg относительно $\mathscr{E}$, то $\int_x^{+\infty} f(t)\,dt$ $\left(\text{или } \int_a^x f(t)\,dt\right)$ будет эквивалентен интегралу $c\int_x^{+\infty} g(t)\,dt$ $\left(\text{соответственно } c\int_a^x g(t)\,dt\right)$; если функция g удовлетворяет условиям предложения 8 и если (в случае, когда применима формула (2)) известна главная часть функции g' относительно $\mathscr{E}$, то будет известна и главная часть функции $\int_x^{+\infty} f(t)\,dt$ $\left(\text{соответственно } \int_a^x f(t)\,dt\right)$ относительно $\mathscr{E}$.

Примеры. 1) Функция $\frac{1}{\log x}$ имеет порядок 0 относительно x и удовлетворяет условиям предложения 8; следовательно,

$$\int_a^x \frac{dt}{\log t} \sim \frac{x}{\log x}.$$

2) Функция e^{x^2} имеет порядок $+\infty$ относительно x и удовлетворяет условиям предложения 8; следовательно,

$$\int_a^x e^{t^2}\,dt \sim \frac{1}{2x}\,e^{x^2}.$$

В Приложении (n° 5) мы определим множество функций, к которым предложения 7 и 8 всегда применимы.

Замечание. Предложение 8 к функции f порядка -1 относительно x непосредственно не применимо. Однако в этом случае можно написать, что $f(x)=\frac{f_1(x)}{x}$, где f_1 имеет порядок 0 относительно x.

Пусть, к примеру, $\int\limits_0^{+\infty} f(t)\,dt$ бесконечен; тогда

$$F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt=\int\limits_a^x \frac{1}{t} f_1(t)\,dt=\int\limits_{\log a}^{\log x} f_1(e^u)\,du.$$

Если функция $f_1(e^y)$ удовлетворяет условиям предложения 8 и имеет порядок, отличный от -1, относительно y (то есть если $f_1(x)$ имеет порядок, отличный от -1, относительно $\log x$), то формулы (1) и (2) снова позволяют получить главную часть функции $F(x)$. Пусть, например, $f(x)=\frac{\exp(\sqrt{\log x})}{x\log x}$; так как $\exp(\sqrt{\log x})$ имеет порядок 0 относительно x, то $f(x)$ имеет порядок -1; здесь $f_1(e^y)=\frac{e^{\sqrt{y}}}{y}$, и эта функция имеет порядок $+\infty$ относительно y; к ней предложение 8 уже применимо и даст отношение

$$\int\limits_a^y \frac{e^{\sqrt{u}}}{u}\,du \sim \frac{2e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{y}};$$

стало быть, возвращаясь к переменной x, получаем

$$\int\limits_a^x \frac{\exp(\sqrt{\log t})}{t\log t}\,dt \sim \frac{2\exp(\sqrt{\log x})}{\sqrt{\log x}}.$$

6. *Асимптотическое разложение примитивной*

Пусть $\mathscr{E}$ — шкала сравнения в окрестности $+\infty$, состоящая из числовых функций, не равных 0 и имеющих постоянный знак в окрестности $+\infty$; пусть $\mathbf{f}$ — линейчатая вектор-функция, определенная на интервале $[a, +\infty[$, принимающая значения в полном нормированном пространстве E и допускающая асимптотическое разложение $\mathbf{f}=\sum\limits_{\lambda\leq\alpha} \mathbf{a}_\lambda g_\lambda+\mathbf{r}_\alpha$ с точностью g_α относительно $\mathscr{E}$. Кроме того, предположим, что всякая примитивная $\int\limits_a^x g(t)\,dt$ функции $g\in\mathscr{E}$ допускает асимптотическое разложение относительно $\mathscr{E}$. При этих условиях мы покажем, что можно получить асимптотическое разложение функции $\mathbf{F}(x)=\int\limits_a^x \mathbf{f}(t)\,dt$ относительно $\mathscr{E}$. Будем различать два случая:

1° $\int_a^{+\infty} g_\alpha(t)\,dt$ бесконечен; тогда (предложение 6)

$$\int_a^x \mathbf{r}_\alpha(t)\,dt \prec\!\!\prec \int_a^x g_\alpha(t)\,dt;$$

по предположению, можно получить асимптотическое разложение функции $\sum_{\lambda \leqslant \alpha} \mathbf{a}_\lambda \int_a^x g_\lambda(t)\,dt$ с некоторой точностью g_ρ (§ 2, n° 3); стало быть, если cg_σ есть главная часть функции $\int_a^x g_\alpha(t)\,dt$, то существует асимптотическое разложение функции $\int_a^x \mathbf{f}(t)\,dt$ с точностью $g_{\min(\rho,\,\sigma)}$, все члены которого имеют неограниченно возрастающие нормы.

2° $\int_a^{+\infty} g_\alpha(t)\,dt$ сходится; тогда обозначим через β наименьший из индексов $\lambda \leqslant \alpha$, обладающих тем свойством, что $\mathbf{a}_\lambda \neq 0$ и что $\int_a^{+\infty} g_\lambda(t)\,dt$ сходится; тогда интеграл

$$\mathbf{C} = \int_a^{+\infty} \Big(\mathbf{f}(t) - \sum_{\lambda < \beta} \mathbf{a}_\lambda g_\lambda(t)\Big)\,dt$$

сходится, и можно написать, что

$$\mathbf{F}(x) = \sum_{\lambda < \beta} \mathbf{a}_\lambda \int_a^x g_\lambda(t)\,dt + \mathbf{C} - \sum_{\beta \leqslant \lambda \leqslant \alpha} \mathbf{a}_\lambda \int_x^{+\infty} g_\lambda(t)\,dt - \int_x^{+\infty} \mathbf{r}_\alpha(t)\,dt.$$

Отсюда получаем, что $\int_x^{+\infty} \mathbf{r}_\alpha(t)\,dt \prec\!\!\prec \int_x^{+\infty} g_\alpha(t)\,dt$; если cg_σ есть главная часть функции $\int_x^{+\infty} g_\alpha(t)\,dt$ и если имеется асимптотическое разложение функции $\sum\limits_{\lambda<\beta} \mathbf{a}_\lambda \int\limits_a^x g_\lambda(t)\,dt + \mathrm{C} - \sum\limits_{\beta\leqslant\lambda\leqslant\alpha} \mathbf{a}_\lambda \int\limits_x^{+\infty} g_\lambda(t)\,dt$ с точностью g_ρ, то оно будет асимптотическим разложением функции F с точностью $g_{\min(\rho,\,\sigma)}$.

Таким образом, все сводится к нахождению асимптотических разложений относительно $\mathscr{E}$ *примитивных для функций из* $\mathscr{E}$. Мы показали, как при некоторых ограничениях на $\mathscr{E}$ предложение 8 позволяет найти главную часть такой примитивной. Кроме того, доказательство предложения 8 дает нам выражение для разности обеих частей формулы (1) (соответственно (2)) в виде примитивной от функции $\frac{1}{|\mu+1|}(xf'(x)+f(x))-f(x)$ $\left(\text{соответственно } f(x)\,g'(x), \text{ где } g=\frac{f}{f'}\right)$; образуя главную часть этой новой примитивной, равно как и асимптотическое разложение правой части в формуле (1) (соответственно (2)), получим второй член искомого разложения (см. Приложение).

Примеры. 1) Пусть $f(x)=\frac{1}{\log x}$ $(x>1)$; известно, что $\int\limits_a^x \frac{dt}{\log t} \sim \frac{x}{\log x}$ и разность $\int\limits_a^x \frac{dt}{\log t} - \frac{x}{\log x}$ есть примитивная функции $\frac{1}{(\log x)^2}$; к этой функции можно снова применить предложение 8, которое даст нам отношение $\int\limits_a^x \frac{dt}{(\log t)^2} \sim \frac{x}{(\log x)^2}$. Проведя индукцию, получим, таким образом, разложение

$$\int\limits_a^x \frac{dt}{\log t} = \frac{x}{\log x} + \frac{x}{(\log x)^2} + \frac{2x}{(\log x)^3} + \ldots$$
$$\ldots + (n-1)!\,\frac{x}{(\log x)^n} + o\left(\frac{x}{(\log x)^n}\right).$$

Отметим, что, каково бы ни было n, все члены этого разложения стремятся к ∞ вместе с x.

2) Пусть $f(x)=\frac{e^x}{x^2+1}$; можно написать, что

$$f(x)=\frac{e^x}{x^2}-\frac{e^x}{x^4}+o_1\left(\frac{e^x}{x^4}\right).$$

Предложение 8 дает разложения

$$\int_a^x \frac{e^t}{t^2}\,dt = \frac{e^x}{x^2} + \frac{2e^x}{x^3} + \frac{6e^x}{x^4} + o_2\left(\frac{e^x}{x^4}\right),$$

$$\int_a^x \frac{e^t}{t^4}\,dt = \frac{e^x}{x^4} + o_3\left(\frac{e^x}{x^4}\right),$$

откуда

$$\int_a^x \frac{e^t}{t^2+1}\,dt = \frac{e^x}{x^2} + 2\frac{e^x}{x^3} + 5\frac{e^x}{x^4} + o_4\left(\frac{e^x}{x^4}\right).$$

Упражнения. 1) Определить такую возрастающую функцию g, имеющую непрерывную производную в окрестности $+\infty$, чтобы функции g и $1/x$ были сравнимы порядка 1, но чтобы x и $1/g$ не были сравнимы порядка 1 (взять $g'(x)=1$ всюду, кроме достаточно малых интервалов, имеющих середины в точках $x=n$ (n — целое, $n>0$), в которых g' принимает достаточно большие значения).

2) Пусть f и g — две положительные функции, стремящиеся к $+\infty$ вместе с x и сравнимые порядка 1; показать, что если h — дифференцируемая положительная функция, возрастающая при x, стремящемся к $+\infty$, то функции hf и hg сравнимы порядка 1.

3) Построить пример двух функций f и g, положительных, убывающих, стремящихся к 0 при x, стремящемся к $+\infty$, сравнимых порядка 1 и таких, что функции $xf(x)$ и $xg(x)$ не сравнимы порядка 1 $\Big($взять f и g эквивалентными и такими, чтобы функции $\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{1}{x}$ и $\frac{g'x}{g(x)} + \frac{1}{x}$ не были сравнимы$\Big)$.

4) а) Показать, что $\frac{\sin x}{\sqrt{x}} \sim \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)$, но что интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$ сходится, а интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\left(1 + \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right)dt$ бесконечен.

б) Показать что оба интеграла $\int_a^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ и $\int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt$ сходятся, но интеграл $\int_x^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt$ не является пренебрежимым сравнительно с $\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$, хотя $\frac{\sin^2 t}{t^2} \ll \frac{\sin t}{t}$.

в) Рассмотрим две непрерывные функции со значениями в $\mathbf{R}^2$, определенные на $[1, +\infty[$: $\mathbf{f}(x) = \left(\frac{1}{x^2}, \frac{\sin x}{x}\right)$ и $\mathbf{g}(x) = \left(\frac{1}{x^2}, \frac{\sin x}{x}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)\right)$. Показать, что они не обращаются в нуль ни при каких значениях x, что $f \sim g$ для x, стремящегося к $+\infty$, что интегралы $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ и $\int_1^{+\infty} g(t)\,dt$ сходятся, но функция $\int_x^{+\infty} f(t)dt$ не эквивалентна функции $\int_x^{+\infty} g(t)\,dt$.

°5) Пусть f — *выпуклая* функция, определенная в окрестности $+\infty$ и такая, что $f(x) \succ\succ x$. Говорят, что f *регулярно выпукла* в окрестности $+\infty$, если для *любой выпуклой* функции g, определенной в окрестности $+\infty$ и такой, что $f \sim g$, имеет место также отношение $f'_d \sim g'_d$.

Пусть для любого числа $\alpha > 0$ и любого достаточно большого x через $k(\alpha, x)$ обозначена нижняя грань чисел $\dfrac{f(y)-(y-x)f'_d(y)}{f(x)}$, когда $y \geqslant x$ пробегает множество таких значений, что

$$f'_d(y) \leqslant (1+\alpha) f'_d(x);$$

пусть также $h(\alpha, x)$ — нижняя грань чисел

$$\frac{f(z)+(x-z)f'_d(z)}{f(x)},$$

когда $z \leqslant x$ пробегает множество таких значений, что

$$f'_d(z) \geqslant (1-\alpha) f'_d(x).$$

Пусть $\psi(\alpha) = \limsup\limits_{x\to+\infty} k(\alpha, x)$, $\varphi(\alpha) = \limsup\limits_{x\to+\infty} h(\alpha, x)$. Показать, что для того, чтобы f была регулярно выпуклой в окрестности точки $+\infty$, необходимо и достаточно, чтобы для любого достаточно малого $\alpha > 0$ выполнялись неравенства $\psi(\alpha) < 1$ и $\varphi(\alpha) < 1$.

°6) Пусть функция $\mathbf{f}$ непрерывна на интервале $[x_0, +\infty[$ и такова, что при любом $\lambda \geqslant 0$ функция $\mathbf{f}(x+\lambda) - \mathbf{f}(x)$ стремится к 0, когда x стремится к $+\infty$.

а) Показать, что $\mathbf{f}(x+\lambda) - \mathbf{f}(x)$ *равномерно* стремится к 0 вместе с $1/x$, когда λ принадлежит произвольному компактному интервалу $K = [a, b]$ из $[0, +\infty[$. (Рассуждать от противного: если существует такая последовательность (x_n), стремящаяся к $+\infty$, и такая последовательность (λ_n) точек из K, что $\|\mathbf{f}(x_n+\lambda_n) - \mathbf{f}(x_n)\| > a > 0$ для любого n, то существует такая окрестность J_n точки λ_n из K, что $\|\mathbf{f}(x_n-\lambda) - \mathbf{f}(x_n)\| > a$ для любого $\lambda \in J_n$; построить по индукции *убывающую* последовательность таких замкнутых интервалов I_k из K

и такую подпоследовательность (x_{n_k}) последовательности (x_n), что $\|\mathbf{f}(x_{n_k}+\lambda)-\mathbf{f}(x_{n_k})\| \geqslant \frac{a}{3}$ для *любого* $\lambda \in I_k$; для этого заметим, что если δ_k есть длина интервала I_k и q — такое целое число, что $q\delta_k > b-a$, то $\|\mathbf{f}(x+\delta_k)-\mathbf{f}(x)\| \leqslant \frac{a}{3q}$ для достаточно больших x.)

б) Вывести из а), что $\int_x^{x+1} \mathbf{f}(t)\,dt - \mathbf{f}(x)$ стремится к 0, когда x стремится к $+\infty$, и отсюда получить, что $\mathbf{f}(x)=o(x)$.

7) Пусть g — строго положительная числовая функция, непрерывная на интервале $[x_0, +\infty[$ и такая, что $g(\mu x) \sim g(x)$ для любого $\mu > 0$. Вывести из упражнения 6, что g имеет порядок 0 относительно x.

§ 4. Применение к рядам с положительными членами

1. *Признаки сходимости рядов с положительными членами*

На протяжении всего этого параграфа *рядом с положительными членами* мы (ради удобства) будем считать ряд (u_n) с такими действительными членами, что $u_n \geqslant 0$ *начиная с некоторого номера* n. Все, что будет говориться об этих рядах, сразу же переносится путем изменения знака на ряды, все члены которых, начиная с некоторого номера n, отрицательны. Мы уже видели (гл. II, § 2, n° 1, пример 3), что всякой последовательности $(\mathbf{u}_n)_{n\geqslant 1}$ точек нормированного пространства E можно поставить в соответствие ступенчатую функцию $\mathbf{u}$, определенную на $[1, +\infty[$ при помощи условий $\mathbf{u}(x)=\mathbf{u}_n$ для $n \leqslant x < n+1$; тогда для сходимости ряда $(\mathbf{u}_n)$ необходимо и достаточно, чтобы интеграл $\int_1^{+\infty} \mathbf{u}(t)\,dt$ был сходящимся.

Пусть (u_n) и (v_n) — ряды с положительными членами, а u и v — соответствующие им ступенчатые функции; отношение $u_n \leqslant v_n$ для $n \geqslant n_0$ эквивалентно $u(x) \leqslant v(x)$ для $x \geqslant n_0$. Таким образом, каждое из отношений $u_n \preccurlyeq v_n$, $u_n \prec\!\!\prec v_n$, $u_n \sim v_n$ соответственно эквивалентно отношениям $u(x) \preccurlyeq v(x)$, $u(x) \prec\!\!\prec v(x)$, $u(x) \sim v(x)$; это замечание позволяет следующим образом переформулировать предложения 1 и 6 из § 3.

Предложение 1. *Пусть* (u_n) *и* (v_n) — *ряды с положительными членами. Если* $u_n \preccurlyeq v_n$ *и ряд* (v_n) *сходится, то сходится и ряд* (u_n); *если* $u_n \succcurlyeq v_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = +\infty$, *то* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = +\infty$.

Предложение 2. *Пусть* (u_n) *и* (v_n) — *ряды с положительными членами. Тогда*:

1° *Если ряд* (v_n) *сходится, то отношение* $u_n \prec\!\!\prec v_n$ (соответственно $u_n \sim v_n$) *влечет отношение* $\sum_{p=n}^{\infty} u_p \prec\!\!\prec \sum_{p=n}^{\infty} v_p$ $\Big($соответственно $\sum_{p=n}^{\infty} u_p \sim \sum_{p=n}^{\infty} v_p\Big)$.

2° *Если* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = +\infty$, *то отношение* $u_n \prec\!\!\prec v_n$ (соответственно $u_n \sim v_n$) *влечет отношение* $\sum_{p=1}^{n} u_p \prec\!\!\prec \sum_{p=1}^{n} v_p$ $\Big($соответственно $\sum_{p=1}^{n} u_p \sim \sim \sum_{p=1}^{n} v_p\Big)$.

Для получения удобных признаков сходимости можно в качестве ряда сравнения (v_n) в предложении 1 взять ряд, члены которого имеют вид $v_n = f(n)$, где функция $f \geqslant 0$ *определена для любого действительного числа* $x > x_0$ и убывает на интервал $[x_0, +\infty[$; действительно, имеет место

Предложение 3 («критерий Коши — Маклорена»). *Если функция* $f \geqslant 0$ *убывает на* $[x_0, +\infty[$, *то для того, чтобы ряд с общим членом* $v_n = f(n)$ *сходился, необходимо и достаточно, чтобы сходился интеграл* $\int_{x_0}^{+\infty} f(t)\,dt$.

Для доказательства достаточно заметить, что если v есть ступенчатая функция, соответствующая ряду (v_n), то $v(x+1) \leqslant \leqslant f(x) \leqslant v(x)$ для любого $x \geqslant x_0$, поскольку f убывает; таким образом, предложение вытекает из принципа сравнения (гл. II, § 2, предложение 3).

Учитывая, что функции, входящие в логарифмические признаки сходимости интегралов (§ 3, предложения 2, 3 и 4), убывают на интервале $[x_0, +\infty[$, и применяя предложения 1 и 3, получим следующие признаки:

Предложение 4 («логарифмический признак порядка 0»). *Пусть* (u_n) — *ряд с положительными членами; если* $u_n \preccurlyeq n^{\mu}$ *для некоторого* $\mu < -1$, *то ряд* (u_n) *сходится; если* $u_n \succcurlyeq n^{\mu}$ *для некоторого* $\mu \geqslant -1$, *то ряд* (u_n) *имеет бесконечную сумму.*

Предложение 5 («логарифмический признак порядка p»). *Пусть* (u_n) — *ряд с положительными членами. Если* $u_n \preccurlyeq \frac{1}{nl_1(n)\,l_2(n)\ldots l_{p-1}(n)\,(l_p(n))^{\mu}}$ *для некоторого* $\mu > 1$, *то ряд* (u_n) *сходится; если* $u_n \succcurlyeq \frac{1}{n\,l_1(n)\ldots l_{p-1}(n)\,(l_p(n))^{\mu}}$ *для некоторого* $\mu \leqslant 1$, *то ряд* (u_n) *имеет бесконечную сумму.*

Если $0 \leqslant q < 1$, то отношение $q^n \preccurlyeq n^{-\mu}$ справедливо при любом $\mu > 0$; применение логарифмического признака порядка 0 снова доказывает сходимость *геометрической прогрессии* $\underset{n=0}{\overset{\infty}{\mathrm{S}}}\, q^n$ при $|q| < 1$ (Общая топология, гл IV, § 7, n°1). Применяя предложение 1, в котором $v_n = q^n$, получим признак, который может быть высказан в следующей форме («признак Коши»).

Пусть (u_n) — *ряд с положительными членами; если для него* $\limsup\limits_{n\to\infty} (u_n)^{1/n} < 1$, *то ряд* (u_n) *сходится; если* $\limsup\limits_{n\to\infty} (u_n)^{1/n} > 1$, *то ряд* (u_n) *имеет бесконечную сумму.*

В самом деле, если $\limsup\limits_{n\to\infty} (u_n)^{1/n} = a < 1$, то для любого q, $a < q < 1$, имеет место отношение $u_n \preccurlyeq q^n$. Если же, напротив, $\limsup\limits_{n\to\infty} (u_n)^{1/n} = a > 1$, то для любого q, $1 < q < a$, имеем $u_n \geqslant q^n > 1$ для бесконечного множества значений n; а поскольку u_n не стремится к 0, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = +\infty$.

Этот признак существенным образом используется в теории степенных рядов, которые мы будем изучать позже; однако он уже не дает возможности судить о сходимости рядов $(1/n^{\alpha})$, то есть область его применения является более узкой, чем область применения логарифмических признаков.

2. *Асимптотическое разложение частичных сумм ряда*

Пусть для действительного x, стремящегося к $+\infty$, $\mathscr{E}$ есть шкала сравнения, состоящая из функций, каждая из которых определена на *всем интервале* $[x_0, +\infty[$ (зависящем от функции) и положительна на этом интервале. Пусть, далее, $(\mathbf{u}_n)$ есть ряд, члены которого принадлежат полному нормированному пространству E и в котором $\mathbf{u}_n$ допускает асимптотическое разложение с точностью g_α относительно шкалы $\mathscr{E}'$ сужений на $\mathbf{N}$ функций из $\mathscr{E}$:

$$\mathbf{u}_n = \sum_{\lambda \leqslant \alpha} \mathbf{a}_\lambda g_\lambda(n) + \mathbf{r}_\alpha(n).$$

Предположим, что всякая частичная сумма $\sum_{m=1}^{n} g(m)$, где $g \in \mathscr{E}$, допускает асимптотическое разложение относительно $\mathscr{E}'$. Тогда можно получить асимптотическое разложение частичной суммы $\mathbf{s}_n = \sum_{m=1}^{n} \mathbf{u}_n$ относительно $\mathscr{E}'$; будем различать два случая:

1° $\sum_{n=1}^{\infty} g_\alpha(n) = +\infty$. Тогда (предложение 2) имеет место отношение $\sum_{m=1}^{n} \mathbf{r}_\alpha(m) \prec\!\!\prec \sum_{m=1}^{n} g_\alpha(m)$; по предположению, можно получить асимптотическое разложение функции $\sum_{\lambda \leqslant \alpha} \mathbf{a}_\lambda \left(\sum_{m=1}^{n} g(m)\right)$ (§ 2, n° 3) с некоторой точностью g_ρ; если $cg_\sigma(n)$ есть главная часть функции $\sum_{m=1}^{n} g_\alpha(m)$, то получим асимптотическое разложение частичной суммы $\mathbf{s}_n$ с точностью $g_{\min(\rho, \sigma)}$.

2° Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} g_\alpha(n)$ сходится; тогда обозначим через β наименьший из индексов $\lambda \leqslant \alpha$, обладающих тем свойством, что $\mathbf{a}_\lambda \neq 0$ и что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} g_\lambda(n)$ сходится; тогда ряд

$$\mathbf{C} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathbf{u}_n - \sum_{\lambda < \beta} \mathbf{a}_\lambda g_\lambda(n)\right)$$

абсолютно сходится и

$$\mathbf{s}_n = \sum_{\lambda<\beta} \mathbf{a}_\lambda \Big(\sum_{m=1}^{n} g_\lambda(m)\Big) + \mathbf{C} - \sum_{\beta\leqslant\lambda\leqslant\alpha} \mathbf{a}_\lambda \Big(\sum_{m=n+1} g_\lambda(m)\Big) - \sum_{m=n+1} \mathbf{r}_\alpha(m).$$

Кроме того, имеем отношение $\sum\limits_{m=n+1}^{\infty} \mathbf{r}_\alpha(m) \prec\!\!\prec \sum\limits_{m=n+1}^{\infty} g_\alpha(m)$; если $cg_\alpha(n)$ есть главная часть функции $\sum\limits_{m=n+1}^{\infty} g_\alpha(m)$ и если существует асимптотическое разложение выражения $\sum\limits_{\lambda<\beta} \mathbf{a}_\lambda \Big(\sum\limits_{m=1}^{n} g_\lambda(m)\Big) + \mathbf{C} - \sum\limits_{\beta\leqslant\lambda\leqslant\alpha} \mathbf{a}_\lambda \Big(\sum\limits_{m=n+1}^{\infty} g_\lambda(m)\Big)$ с точностью g_ρ, то таким путем получим асимптотическое разложение частичной суммы $\mathbf{s}_n$ с точностью $g_{\min(\rho,\,\sigma)}$.

Таким образом, все сводится к частному случаю рядов $(g(n))$, где $g \in \mathscr{E}$. Мы покажем, как при некоторых условиях можно прежде всего получить главную часть суммы $s_n = \sum\limits_{m=1}^{n} g(m)$ $\Big($если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g(n) = +\infty\Big)$ или суммы $r_n = \sum\limits_{m=n+1}^{\infty} g(m)$ $\Big($если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g(n) < +\infty\Big)$.

Предложение 6. *Пусть числовая функция g положительна и монотонна на интервале $[x_0, +\infty[$ (где $x_0 \leqslant 1$) и обладает тем свойством, что $\log g$ и x сравнимы порядка 1. Тогда:*

1° *Если g — функция бесконечного порядка относительно e^x, то*

$$s_n = \sum_{m=1}^{n} g(m) \sim g(n), \text{ если } \sum_{n=1}^{\infty} g(n) = +\infty; \tag{1}$$

$$r_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} g(m) \sim g(n+1), \text{ если } \sum_{n=1}^{\infty} g(n) < +\infty. \tag{2}$$

2° *Если g — функция конечного порядка μ относительно e^x, то*

$$s_n = \sum_{m=1}^{n} g(m) \sim \frac{\mu}{1-e^{-\mu}} \int_{x_0}^{n} g(t)\,dt, \text{ если } \sum_{n=1}^{\infty} g(n) = +\infty; \tag{3}$$

$$r_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} g(m) \sim \frac{\mu}{1-e^{-\mu}} \int_{n}^{\infty} g(t)\,dt, \text{ если } \sum_{n=1}^{\infty} g(n) < +\infty \tag{4}$$

(при $\mu=0$ число $\frac{\mu}{1-e^{-\mu}}$ в формулах (3) и (4) должно быть заменено на 1).

1° Если g имеет порядок $+\infty$ относительно e^x, то $\log x \succ\!\succ x$, откуда $\frac{g'}{g} \succ\!\succ 1$ или, согласно предположению, $g' \succ\!\succ g$; следовательно, g возрастает и стремится к $+\infty$ вместе с x, откуда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g(n) = +\infty$. Если u есть ступенчатая функция, соответствующая ряду $(g(n))$ (n° 1), то $u(x) \leqslant g(x)$ начиная с некоторого значения x, а значит, справедливо отношение $u \preccurlyeq g$ и, стало быть,

$$s_{n-1} = \int_1^n u(t)\,dt \preccurlyeq \int_1^n g(t)\,dt \prec\!\prec \int_1^n g'(t)\,dt \sim g(n);$$

а поскольку $s_n = s_{n-1} + g(n)$, то справедливо отношение $s_n \sim g(n)$. В случае, когда g имеет порядок $-\infty$ относительно e^x, доказательство аналогично; итак, получена формула (2).

2° Если g имеет порядок μ относительно e^x, то можно написать, что $g(x) = e^{\mu x} h(x)$, где h имеет порядок 0 относительно e^x; кроме того, по условию отношение $\log x \sim \mu x$ для $\mu \neq 0$ ($\log x \prec\!\prec x$ для $\mu = 0$) влечет отношение $h' \prec\!\prec h$. Предположим сначала, что имеет место равенство $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g(n) = +\infty$ (которое неявно предполагает $\mu \geqslant 0$ и, обратно, всегда справедливо при $\mu > 0$, поскольку в этом случае $g(x)$ стремится к $+\infty$ вместе с x); оценим главную часть функции $\int_{n-1}^{n} g(t)\,dt$. Можно написать

$$\int_{n-1}^{n} g(t)dt = \int_{n-1}^{n} e^{\mu t} h(t)\,dt =$$

$$= h(n) \int_{n-1}^{n} e^{\mu t}\,dt + \int_{n-1}^{n} e^{\mu t}(h(t) - h(n))\,dt =$$

$$= \frac{1-e^{-\mu}}{\mu} g(n) + \int_{n-1}^{n} e^{\mu t}(h(t) - h(n))\,dt.$$

Но отношение $h' \prec\!\prec h$ означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое n_0, что неравенство $x \geqslant n_0$ влечет $\left|\frac{h'(x)}{h(x)}\right| \leqslant \varepsilon$; отсюда для $n-1 \leqslant t \leqslant n$, в силу теоремы о конечных приращениях, вытекает, что $-\varepsilon \leqslant \log\left|\frac{h(t)}{h(n)}\right| \leqslant \varepsilon$, если $n \geqslant n_0$, откуда

$$|h(t)-h(n)| \leqslant (e^\varepsilon - 1)\, h(n)$$

и, стало быть,

$$\left|\int_{n-1}^{n} e^{\mu t}(h(t)-h(n))\,dt\right| \leqslant (e^\varepsilon-1)\, e^{\mu n} h(n) = (e^\varepsilon - 1)\, g(n),$$

так как $e^{\mu t}$ возрастает. Поскольку $e^\varepsilon - 1$ произвольно мало вместе с ε, то очевидно, что

$$\int_{n-1}^{n} g(t)\,dt = \frac{1-e^{-\mu}}{\mu}\, g(n) + o(g(n))$$

$\left(\text{при } \mu = 0 \text{ число } \frac{1-e^{-\mu}}{\mu} \text{ заменяется на } 1\right)$. После этого предложение получается в качестве следствия из предложения 2. Для случая $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g(n)$ рассуждаем точно так же.

Асимптотическое разложение суммы $s_n = \sum\limits_{m=1}^{n} g(m)$ часто можно получить путем повторного применения предложения 6. Допустим сначала, что g имеет порядок $+\infty$ относительно e^x; тогда для любого *фиксированного* значения p на основании предложения 6 можно написать, что

$$s_n = g(n) + g(n-1) + \ldots + g(n-p) + o(g(n-p)),$$

и для получения асимптотического разложения суммы s_n достаточно разложить (относительно $\mathscr{E}'$) каждую из функций $g(n-k)$ $(0 \leqslant k \leqslant p)$, ограничив точность этих разложений главной частью функции $g(n-p)$.

Пример. Пусть $g(x) = x^x = \exp(x \log x)$; эта функция имеет порядок $+\infty$ относительно e^x. Взяв $p=2$, получим

$$(n-1)\log(n-1) = (n-1)\log n - 1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

откуда (§ 2, n° 4)

$$(n-1)^{n-1} = \frac{1}{e}\, n^{n-1} + \frac{1}{2e}\, n^{n-2} + o_1(n^{n-2})$$

и

$$(n-2)^{n-2} = \frac{1}{e^2}\, n^{n-2} + o_2(n^{n-2});$$

следовательно,

$$s_n = n^n + \frac{1}{e} n^{n-1} + \left(\frac{1}{2e} + \frac{1}{e^2} \right) n^{n-2} + o_3 (n^{n-2}).$$

Точно так же поступаем (для r_n) и в случае, когда g имеет порядок $-\infty$ относительно e^x.

Если теперь g имеет конечный порядок μ относительно e^x и если, к примеру, $\sum_{n=1}^{\infty} g(n) = +\infty$, то

$$s_n = \frac{\mu}{1-e^{-\mu}} \int_1^n g(t)\, dt + \sum_{m=1}^{n} f_1(m),$$

где

$$f_1(n) = g(n) - \frac{\mu}{1-e^{-\mu}} \int_{n-1}^{n} g(t)\, dt \prec\!\prec g(n)$$

в силу предложения 6. Если имеем главную часть $cg_1(n)$ функции $f_1(n)$ относительно $\mathscr{E}'$ и если к функции g_1 можно снова применить предложение 6, то получим примитивную, эквивалентную сумме $\sum_{m=1}^{n} f_1(m)$, если $\sum_{n=1}^{\infty} g_1(n) = +\infty$, и эквивалентную сумме $\sum_{m=n+1}^{\infty} f_1(m)$ в противном случае (в последнем случае записываем, что $\sum_{m=1}^{n} f_1(m) = C - \sum_{m=n-1}^{\infty} f_1(m)$, где $C = \sum_{n=1}^{\infty} f_1(n)$).

Так последовательно можно получить выражение суммы s_n в виде суммы некоторого числа примитивных, каждая из которых является функцией, пренебрежимой сравнительно с предыдущей, с остаточным членом, являющимся функцией, пренебрежимой сравнительно с последней написанной примитивной и, возможно, сравнительно с константой (случай, когда остаточный член стремится к 0). Далее остается разложить каждую из примитивных относительно $\mathscr{E}'$ (см. § 3).

Пример. Пусть $g(n) = \frac{1}{n}$; тогда

$$s_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} \sim \int_1^n \frac{dt}{t} = \log n$$

и

$$\frac{1}{n}-(\log n-\log(n-1)) \sim -\frac{1}{2n^2},$$

откуда

$$s_n=\log n+\gamma+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Константа γ, которая появляется в этой формуле, играет важную роль в анализе (см. гл. VI и VII); она известна под названием *постоянной Эйлера* и равна

$$\gamma=0{,}577215664\ldots$$

с точностью $\frac{1}{10^9}$ с недостатком.

В главе VI мы покажем, каким образом в наиболее важных случаях *формула суммирования Эйлера — Маклорена* дает асимптотическое разложение *произвольного* порядка для суммы s_n (или r_n).

3. *Асимптотическое разложение частичных произведений бесконечного произведения*

Известно (Общая топология, гл. V, § 4, n° 3), что для того, чтобы бесконечное произведение с общим сомножителем $1+u_n$ $(u_n>-1)$ было сходящимся (соответственно коммутативно сходящимся), необходимо и достаточно, чтобы ряд с общим членом $\log(1+u_n)$ сходился (соответственно коммутативно сходился), и что тогда выполняется равенство

$$\log \underset{n=1}{\overset{\infty}{\mathrm{P}}}(1+u_n)=\underset{n=1}{\overset{\infty}{\mathrm{S}}}\log(1+u_n).$$

Известно, что если бесконечное произведение сходится, то u_n стремится к 0; следовательно, $\log(1+u_n)\sim u_n$; но в то же время известно, что для коммутативной сходимости ряда действительных чисел необходимо и достаточно, чтобы он абсолютно сходился (Общая топология, гл. IV, § 7, предложение 5); таким образом, исходя из предложения 1, снова находим, что для того чтобы произведение с общим сомножителем $1+u_n$ было коммутативно сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы ряд с общим членом u_n был абсолютно сходящимся (Общая топология, гл. IV, § 7, теорема 4).

Аналогичное рассуждение применимо и к бесконечному произведению с общим *комплексным* сомножителем $1+u_n$ ($u_n \neq -1$). В самом деле, для того чтобы такое произведение коммутативно сходилось, необходимо и достаточно (Общая топология, гл. VIII, § 3, предложение 2), чтобы коммутативно сходилось бесконечное произведение с общим сомножителем $|1+u_n|$ и, кроме того, чтобы ряд из θ_n, где θ_n — амплитуда выражения $1+u_n$ (заключенная между $-\pi$ и π), коммутативно сходился. Так как в этом случае u_n стремится к 0, то $\log(1+u_n)$ определен начиная с некоторого номера n (гл. III, § 1, n° 7) и

$$\log(1+u_n) = \log|1+u_n| + i\theta_n;$$

значит, для того чтобы произведение с общим сомножителем $1+u_n$ было коммутативно сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы ряд с общим членом $|\log(1+u_n)|$ был абсолютно сходящимся (Общая топология, гл. VII, § 3, теорема 1); но $\log(1+u_n) \sim u_n$ (гл. 1, § 2, n° 3, предложение 5), и стало быть, мы снова пришли к тому заключению, что ряд с общим членом u_n должен абсолютно сходиться (Общая топология, гл. VIII, § 3, n° 2, теорема 1).

Связь, существующая между бесконечными произведениями и рядами действительных чисел, часто позволяет получить асимптотическое разложение частичного произведения $p_n = \prod_{k=1}^{n} (1+u_k)$; для этого достаточно иметь асимптотическое разложение частичной суммы $s_n = \sum_{k=1}^{n} \log(1+u_k)$, а затем разложить $p_n = \exp(s_n)$; таким образом, все сводится к двум уже изученным задачам (n° 2 и § 2, n° 4).

Пример: *формула Стирлинга*. Найдем асимптотическое разложение функции $n!$; задача сводится к разложению суммы $s_n = \sum_{p=1}^{n} \log p$, а затем — функции $\exp(s_n)$. Метод, сформулированный в n° 2, дает последовательно

$$s_n = \sum_{p=1}^{n} \log p \sim \int_1^n \log t\,dt = n\log n - n + 1,$$

затем

$$\log n - \int_{n-1}^{n} \log t\,dt = \log n - (n\log n - (n-1)\log(n-1) - 1) \sim \frac{1}{2n},$$

откуда

$$s_n = n\log n - n + \frac{1}{2}\log n + o(\log n).$$

Далее, имеем

$$\log n - \int\limits_{n-1}^{n} \log t\,dt - \frac{1}{2}(\log n - \log(n-1)) \sim -\frac{1}{12n^2},$$

откуда

$$s_n = n\log n - n + \frac{1}{2}\log n + k + \frac{1}{12n} + o_1\left(\frac{1}{n}\right) \quad (k \text{ — постоянная}),$$

и окончательно получаем (§ 2, n° 4)

$$n! = e^k n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}\left(1 + \frac{1}{12n} + o_2\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{5}$$

В главе VII мы докажем, что $e^k = \sqrt{2\pi}$. Формула (5) (с этим значением k) называется *формулой Стирлинга*. Точно таким же путем можно доказать, что для любого действительного a, отличного от целого строго положительного числа, справедлива формула

$$(a+1)(a+2)\ldots(a+n) \sim K(a)\,n^{n+a+\frac{1}{2}}e^{-n}. \tag{6}$$

Функцию $K(a)$ мы тоже определим в главе VII. Из формул (5) и (6), в частности, вытекает формула

$$\binom{a}{n} \sim (-1)^n \varphi(a)\,n^{-a-1} \tag{7}$$

для любого действительного a, отличного от целого строго положительного числа, и для функции $\varphi(a)$, которая будет уточнена в главе VII.

4. *Приложение: признаки сходимости второго рода для рядов с положительными членами*

Довольно часто встречаются ряды (u_n), в которых, начиная с некоторого номера, $u_n > 0$, а u_{n+1}/u_n имеет легко находимое асимптотическое разложение. Для таких рядов удобно иметь признаки (называемые *признаками второго рода*), позволяющие определять сходимость ряда по виду выражения u_{n+1}/u_n. Вот один из таких признаков:

Предложение 7 («признак Раабе»). *Пусть (u_n) — ряд, члены которого, начиная с некоторого номера, строго положительны.*

Если, начиная с некоторого номера, неравенство $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1 - \frac{\alpha}{n}$ *выполняется для некоторого* $\alpha > 1$, *то ряд* (u_n) *сходится; если, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \geqslant 1 - \frac{1}{n}$, *то ряд* (u_n) *имеет бесконечную сумму.*

Действительно, если $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1 - \frac{\alpha}{n}$ при некотором $\alpha > 1$ для любого $n \geqslant n_0$, то $u_n \preccurlyeq p_n = \prod_{n_0}^{n} \left(1 - \frac{\alpha}{k}\right)$. Но $\log\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) = -\frac{\alpha}{n} - \frac{\alpha^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, откуда $\log p_n = -\alpha \log n + k + o\left(\frac{1}{n}\right)$ (k — постоянная) и $p_n \sim e^k \frac{1}{n^\alpha}$; а поскольку $\alpha > 1$, то логарифмический признак порядка 0 показывает, что ряд сходится.

Если, напротив, начиная с некоторого номера, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 - \frac{1}{n}$, то та же самая выкладка показывает, что $u_n \succcurlyeq \frac{1}{n}$, откуда и следует предложение.

Точно таким же способом, используя логарифмические признаки порядка > 0, докажем следующий признак второго рода:

Предложение 8. *Пусть* (u_n) — *ряд, члены которого, начиная с некоторого номера, положительны. Если, начиная с некоторого номера, для какого-нибудь* $\alpha > 1$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{nl_1(n)} - \ldots - \frac{1}{nl_1(n)\,l_2(n)\,\ldots\,l_{p-1}(n)} - \frac{\alpha}{nl_1(n)\,l_2(n)\,\ldots\,l_p(n)},$$

то ряд (u_n) *сходится; если же, начиная с некоторого номера,*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{nl_1(n)} - \ldots - \frac{1}{nl_1(n)\,l_2(n)\,\ldots\,l_p(n)},$$

то ряд (u_n) *имеет бесконечную сумму.*

Пример. Рассмотрим *гипергеометрический ряд* с общим членом

$$u_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\,\ldots\,(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\,\ldots\,(\beta+n-1)}{1\cdot 2\,\ldots\,n\gamma(\gamma+1)\,\ldots\,(\gamma+n-1)},$$

где α, β, γ — любые действительные числа, отличные от целых неположительных чисел; ясно, что либо, начиная с некоторого номера, $u_n > 0$, либо, начиная с некоторого номера, $u_n < 0$. Имеем

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)} = \left(1+\frac{\alpha+\beta}{n}+\frac{\alpha\beta}{n^2}\right)\left(1+\frac{\gamma+1}{n}+\frac{\gamma}{n^2}\right)^{-1} =$$

$$= 1+\frac{\alpha+\beta-\gamma-1}{n}+\frac{\alpha\beta-(\alpha+\beta)(\gamma+1)+\gamma^2+\gamma+1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Следовательно, признак Раабе показывает, что ряд сходится для $\alpha+\beta<\gamma$ и имеет бесконечную сумму для $\alpha+\beta>\gamma$; если $\alpha+\beta=\gamma$, то, как показывает предложение 8, ряд имеет бесконечную сумму.

Замечания. 1) В качестве частного случая признака Раабе укажем признак, заключающийся в том, что если $\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$, то ряд (u_n) сходится; если же, напротив, $\liminf\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$, то ряд имеет бесконечную сумму (*признак Даламбера*).

2) Признаки второго рода могут применяться только к таким рядам, общий член которых при n, стремящемся к $+\infty$, меняется очень правильно; иными словами, область применения этих признаков значительно у́же, чем логарифмических признаков, и было бы ошибочно пытаться использовать их помимо специальных случаев, к которым они применимы. Например, для ряда (u_n), определенного так, что $u_{2m}=2^{-m}$, $u_{2m+1}=3^{-m}$, имеем $\frac{u_{2m+1}}{u_{2m}}=\left(\frac{2}{3}\right)^m$, $\frac{u_{2m+2}}{u_{2m+1}}=$ $=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^m$; при неограниченном возрастании m первое из этих отношений стремится к 0, а второе — к $+\infty$, и значит, никакой признак второго рода не может быть применен, хотя очевидно, что ряд сходится, ибо $u_n \preccurlyeq 2^{-n/2}$.

Даже когда отношение u_{n+1}/u_n имеет простой вид, непосредственная оценка главной части общего члена u_n часто приводит к цели так же быстро, как и при помощи признаков второго рода. Например, для гипергеометрического ряда формула Стирлинга сразу показывает, что $u_n \sim an^{\alpha+\beta-\gamma-1}$, где a — постоянная, отличная от 0, и значит, применим логарифмический признак порядка 0.

Упражнения. 1) Если ряд с общим членом $u_n \geqslant 0$ сходится, то сходится и ряд с общим членом $\sqrt{u_n u_{n+1}}$. Обратное, вообще говоря, неверно; но для убывающей последовательности (u_n) это утверждение справедливо.

2) Пусть (p_n) — возрастающая последовательность положительных чисел, стремящаяся к $+\infty$.

а) Показать, что если $\frac{p_n}{p_{n-1}}$ стремится к 1, когда n неограниченно возрастает, то

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{p_k - p_{k-1}}{p_k} \sim \log p_n,$$

$$\sum_{k=1}^{n} p_k^{\varrho}(p_k - p_{k-1}) \sim \frac{1}{\varrho+1} p_n^{\varrho+1} \text{ для } \varrho > -1$$

(использовать предложение 2).

б) Не накладывая никаких ограничений на отношение $\frac{p_k}{p_{k-1}}$, показать, что ряд с общим членом $\frac{p_n - p_{n-1}}{p_n}$ всегда имеет бесконечную сумму $\left(\text{различать два случая в зависимости от того, стремится } \frac{p_n}{p_{n-1}} \text{ к 1 или нет}\right)$.

в) Показать, что при $\varrho > 0$ ряд с общим членом $\frac{p_n - p_{n-1}}{p_n p_{n-1}^{\varrho}}$ сходится $\left(\text{сравнить с рядом, общий член которого имеет вид } \frac{1}{p_{n-1}^{\varrho}} - \frac{1}{p_n^{\varrho}}\right)$.

3) Показать, что для любого сходящегося ряда (u_n), члены которого строго положительны, существует такой ряд (v_n) с $v_n > 0$, сумма которого бесконечна и который обладает тем свойством, что $\liminf_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$.

4) Пусть (u_n) — убывающая последовательность строго положительных чисел; если существует такое целое $k \geqslant 2$, что, начиная с некоторого номера, неравенство $ku_{kn} \geqslant u_n$ справедливо при любом n, то ряд с общим членом u_n имеет бесконечную сумму.

5) Пусть члены ряда (u_n), начиная с некоторого номера, строго положительны. Показать, что если $\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^n < \frac{1}{e}$, то ряд (u_n) сходится, и что если $\liminf_{n\to\infty} \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^n \geqslant \frac{1}{e}$, то ряд имеет бесконечную сумму.

6) Пусть (u_n) — ряд, составленный из действительных чисел $u_n \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Показать, что если существует такое действительное число r, $0 < r < 1$, что, начиная с некоторого n, выполняются неравенства $-1 \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant r$, то ряд (u_n) сходится.

7) Пусть (u_n) — сходящийся ряд со строго положительными членами.

а) Показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_1+2u_2+\ldots+nu_n}{n}=0.$$

б) Показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_1+2u_2+\ldots+nu_n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

$\left(\text{записать } \dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$.

в) Вывести из а) и б), что

$$\lim_{n\to\infty} n(u_1u_2\ldots u_n)^{1/n}=0$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!u_1u_2\ldots u_n)^{1/n}}{n+1}<\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

(применить неравенство (8) из гл. III, § 1).

° 8) а) Пусть (z_n) — последовательность комплексных чисел. Показать, что если ряды с общими членами z_n, z_n^2, ..., z_n^{q-1}, $|z_n|^q$ сходятся, то бесконечное произведение с общим членом $1+z_n$ сходится.

б) Если z_n *действительно* и ряд с общим членом z_n сходится, то бесконечное произведение с общим членом $1+z_n$ сходится в том случае, когда сходится ряд с общим членом z_n^2, и

$$\mathop{P}_{n=1}^{\infty}(1+z_n)=0, \quad \text{если} \quad \sum_{n=1}^{\infty} z_n^2=+\infty.$$

в) Для любого целого p положим

$$k_p=[\log\log p], \quad h_p=\sum_{j=1}^{p-1} k_j, \quad \omega_p=\frac{2\pi}{k_p}.$$

Определим последовательность (z_n) комплексных чисел: для $h=h_p+m$, $0\leqslant m\leqslant k_p-1$, положим $z_n=\dfrac{e^{mi\omega_p}}{\log p}$. Показать, что для *любого* целого $q>0$ ряд с общим членом z_n^q сходится, а произведение с общим членом $1+z_n$ не сходится.

9) а) Доказать при помощи формулы Стирлинга, что максимум функции $f_n(x)=e^{-2x}-e^{-x}\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\dfrac{x^k}{k!}$ на интервале $[0, +\infty[$ стремится к 0 вместе с $\dfrac{1}{n}$.

б) Путем индукции по целым p вывести отсюда, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой многочлен $g(x)$, что $|e^{-px} - e^{-x}g(x)| \leqslant \varepsilon$ для любого $x \geqslant 0$ $\left(\text{заменить в а) } x \text{ на } \frac{px}{2} \text{ и воспользоваться предположением индукции, примененным к } e^{-(p-1)\frac{x}{2}}\right)$.

10) Для любого $\alpha > 0$ доказать формулу

$$1^{\alpha n} + 2^{\alpha n} + \ldots + n^{\alpha n} \sim \frac{n^{\alpha n}}{1 - e^{-\alpha}},$$

когда n стремится к $+\infty$.

°11) Для любого $\alpha > 0$ доказать формулу

$$(1!)^{-\frac{\alpha}{n}} + (2!)^{-\frac{\alpha}{n}} + \ldots + (n!)^{-\frac{\alpha}{n}} \sim \frac{1}{\alpha}\frac{n}{\log n},$$

когда n стремится к $+\infty$ $\left(\text{сравнить каждый член } (p!)^{-\frac{\alpha}{n}} \text{ с } n^{-\frac{\alpha p}{n}}\right)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ТЕЛО ХАРДИ. ФУНКЦИИ (H)

1. *Тело Харди*

Пусть $\mathfrak{F}$ — базис фильтра над телом $\mathbf{R}$, состоящий из интервалов вида $[x_0, +\infty[$. Напомним, что во множестве $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$ числовых функций, определенных на интервалах, принадлежащих $\mathfrak{F}$, нами введено отношение эквивалентности R_∞: «существует такое множество $M \in \mathfrak{F}$, что $f(x) = g(x)$ на M» (§ 1, n° 1), а также напомним, что фактор-множество $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})/R_\infty$ наделено структурой *кольца*, имеющего единичный элемент.

Определение 1. *Если задано подмножество* $\mathfrak{K}$ *множества* $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$, *то говорят, что множество* $\mathfrak{K}/R_\infty$ (канонический образ подмножества $\mathfrak{K}$ в $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})/R_\infty$) *есть тело Харди, если* $\mathfrak{K}$ *удовлетворяет следующим условиям*:

1° $\mathfrak{K}/R_\infty$ *есть подтело кольца* $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})/R_\infty$.

2° *Всякая функция из* $\mathfrak{K}$ *непрерывна и дифференцируема на интервале* $[a, +\infty[$ (зависящем от функции), *и класс ее производной относительно* R_∞ *принадлежит* $\mathfrak{K}/R_\infty$.

Соглашение о том, что $\mathfrak{K}/R_\infty$ есть *тело*, равносильно следующему: если $f \in \mathfrak{K}$ и $g \in \mathfrak{K}$, то $f+g$ и fg являются функциями из $\mathfrak{K}$ на некотором множестве из $\mathfrak{F}$; кроме того, если f не равна тождественно нулю на некотором множестве из $\mathfrak{F}$, то в $\mathfrak{F}$ найдется такое множество M, на котором f *не обращается в нуль*, и $\frac{1}{f}$ равна на M некоторой функции из $\mathfrak{K}$; согласно условию 2° множество M всегда можно предположить таким, чтобы f была *непрерывна* на M и, значит, *сохраняла постоянный знак* на этом интервале.

Если $\mathfrak{K}$ таково, что $\mathfrak{K}/R_\infty$ есть тело Харди, то мы для простоты будем говорить, что само множество $\mathfrak{K}$ есть *тело Харди*.

Примеры. 1) Всякое тело Харди содержит тело *рациональных постоянных* (наименьшее тело с характеристикой 0; см. Алгебра, гл. V, § 1), которое можно отождествить с телом $\mathbf{Q}$; а поскольку две постоянные конгруэнтны по модулю R_∞ только в том случае, если они равны, то $\mathbf{Q}/R_\infty$ совпадает с $\mathbf{Q}$. *Действительные постоянные* тоже образуют тело Харди, которое можно отождествить с $\mathbf{R}$.

2) Наиболее важный пример тела Харди представляет *множество рациональных функций с действительными коэффициентами*, которое мы обозначим через $\mathbf{R}(x)$; если $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ есть рациональная функция с действительными коэффициентами, не равная тождественно нулю, то она непрерывна, дифференцируема и отлична от нуля на интервале $[a, +\infty[$, где a строго больше максимального из действительных корней многочленов $p(x)$ и $q(x)$; следовательно, всякий элемент множества $\mathbf{R}(x)/R_\infty$, отличный от 0, обратим. Отметим еще, что две рациональные функции могут быть конгруэнтны по модулю R_∞, только когда они равны и, значит, снова $\mathbf{R}(x)/R_\infty$ может быть отождествлено с $\mathbf{R}(x)$.

2. Расширение тела Харди

Пусть имеется тело Харди $\mathfrak{K}$. Мы покажем, как можно образовать новые тела Харди $\mathfrak{K}'\supset\mathfrak{K}$, обладающие тем свойством, что $\mathfrak{K}'/R_\infty$ получается путем *присоединения* к $\mathfrak{K}/R_\infty$ (относительно алгебраического смысла термина см. Алгебра, гл. V, § 2) новых элементов, вид которых мы уточним.

Лемма 1. *Пусть $a(x)$ и $b(x)$ — непрерывные числовые функции, не меняющие знак на интервале $[x_0, +\infty[$. Если на этом интервале функция $y(x)$ непрерывна, дифференцируема и удовлетворяет равенству*

$$y' = ay + b, \tag{1}$$

то существует интервал $[x_1, +\infty[$, на котором y не меняет знак.

Действительно, положим $z(x) = y(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt\right)$ (см. гл. IV, § 2, n° 4); на основании (1) имеем $z'(x) = b(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt\right)$. Если $b(x) \geqslant 0$ для $x \geqslant x_0$, то z возрастает на этом интервале, и значит, либо $z < 0$ на всем интервале $[x_0, +\infty[$, либо $z = 0$ на некотором интервале $[x_1, +\infty[$, либо $z > 0$ на некотором интервале $[x_1, +\infty[$; а поскольку y имеет тот же знак, что и z, то для данного случая предложение доказано. Для случая же $b(x) \leqslant 0$ при $x \geqslant x_0$ рассуждение аналогично.

Замечание. Это столь элементарное свойство не распространяется на линейные дифференциальные уравнения порядка, большего 1; например, функция $y = \sin x$ удовлетворяет равенству $y'' + y = 0$ и однако меняет знак в любой окрестности $+\infty$.

Лемма 2. *Пусть $a(x)$ и $b(x)$ — две функции, принадлежащие одному и тому же телу Харди $\mathfrak{K}$, а $y(x)$ — функция, удовлетворяющая равенству* (1) *на интервале $[x_0, +\infty[$, на котором a и b непрерывны. Если $p(u)$ — многочлен от u, коэффициенты которого являются функциями от x, принадлежащими $\mathfrak{K}$, определенными и дифференцируемыми на $[x_0, +\infty[$, то существует интервал $[x_1, +\infty[$, на котором функция $p(y)$ не меняет знак.*

В том случае, когда коэффициенты многочлена $p(u)$ тождественно равны нулю на $[x_0, +\infty[$ или когда $p(u)$ имеет относительно u степень 0, предложение тривиально, ибо функции из $\mathfrak{K}$ сохраняют знак на некотором интервале $[x_1, +\infty[$. Допустим, что $p(u)$ имеет степень $n > 0$; тогда коэффициент c при старшем члене многочлена $p(u)$ отличен от нуля на некотором интервале $[\alpha, +\infty[$; значит, можно написать, что $p(u) = c(u^n + c_1 u^{n-1} + \ldots + c_n)$, где $c, c_1, c_2, \ldots, c_n$ — *функции*, принадлежащие $\mathfrak{K}$ и дифференцируемые на $[\alpha, +\infty[$; стало быть, достаточно доказать лемму для $c = 1$. Будем проводить индукцию по n; имеем

$$\frac{d}{dx}(p(y)) = (ay + b)(ny^{n-1} + (n-1)c_1 y^{n-2} + \ldots + c_{n-1}) + \\ + c_1' y^{n-1} + \ldots + c_n' = nap(y) + q(y),$$

где $q(y)$ есть многочлен степени, меньшей или равной $n-1$, с коэффициентами из $\mathfrak{K}$. По условию функции $na(x)$ и $q(y(x))$

не меняют знак на некотором интервале $[\beta, +\infty[$, и значит, лемма вытекает в качестве следствия из леммы 1.

Теорема 1. *Пусть $a(x)$ и $b(x)$ — две функции, принадлежащие одному и тому же телу Харди $\mathfrak{K}$, а $y(x)$ — функция, удовлетворяющая на интервале $[x_0, +\infty[$ равенству* (1). *Если $r(u) = \frac{p(u)}{q(u)}$ пробегает множество рациональных дробей от u с коэффициентами из $\mathfrak{K}$, удовлетворяющими тому условию, что $q(y)$ не равна тождественно нулю в окрестности $+\infty$, то множество $\mathfrak{K}(y)$ функций $r(y)$ образует тело Харди.*

Действительно, согласно лемме 2 существует интервал $[x_1, +\infty[$, на котором $r(y)$ определена, непрерывна и не меняет знак, откуда сразу же вытекает, что $\mathfrak{K}(y)/R_\infty$ есть тело; с другой стороны, поскольку

$$\frac{d}{dx}(r(y)) = r'(y)\, y' = r'(y)(ay+b)$$

$\left(\text{где } r'(y) = \frac{p'(y)\,q(y) - p(y)\,q'(y)}{(q(y))^2}\right.$, по условию, определена в окрестности $\left.+\infty\right)$, то производная любой функции из $\mathfrak{K}(y)$ принадлежит $\mathfrak{K}(y)$, что показывает, что $\mathfrak{K}(y)$ удовлетворяет условиям определения 1.

Ясно, что $\mathfrak{K}(y)/R_\infty$ получается в результате алгебраического *присоединения* к $\mathfrak{K}/R_\infty$ класса функций y, эквивалентных по модулю R_∞. Говорят также, что $\mathfrak{K}(y)$ получается *присоединением* y к $\mathfrak{K}$.

Следствие 1. *Если y есть функция из $\mathfrak{K}$, не равная тождественно нулю в окрестности $+\infty$, то $\mathfrak{K}(\log|y|)$ есть тело Харди.*

В самом деле, функция $(\log|y|)' = \frac{y'}{y}$ равна некоторой функции из $\mathfrak{K}$ на интервале $[x_0 + \infty[$.

Следствие 2. *Если y есть произвольная функция из $\mathfrak{K}$, то $\mathfrak{K}(e^y)$ есть тело Харди.*

В самом деле, $(e^y)' = e^y y'$, и значит, y' на интервале $[x_0, +\infty[$ равна некоторой функции из $\mathfrak{K}$.

Следствие 3. *Если $\mathfrak{K}$ содержит действительные постоянные и если y есть функция из $\mathfrak{K}$, не равная тождественно нулю* *в окрестности* $+\infty$, *то* $\mathfrak{K}(|y|^\alpha)$ *есть тело Харди при любом действительном* α.

В самом деле, $\frac{d}{dx}(|y|^\alpha) = |y|^\alpha \left(\frac{\alpha y'}{y}\right)$ и $\frac{\alpha y'}{y}$ равна некоторой функции из $\mathfrak{K}$ на интервале $[x_0, +\infty[$.

И наконец, отметим, что если y есть *примитивная* какой-нибудь функции из $\mathfrak{K}$, то $\mathfrak{K}(y)$ снова есть тело Харди.

3. Сравнение функций из тела Харди

Предложение 1. *Две функции, принадлежащие одному и тому же телу Харди, сравнимы любого порядка* (§ 3, n° 4).

Действительно, если f принадлежит телу Харди $\mathfrak{K}$, то для любого целого $n > 0$ найдется интервал $[x_0, +\infty[$, на котором f дифференцируема n раз и ее n-я производная на этом интервале равна функции из $\mathfrak{K}$. Таким образом, достаточно показать, что любые две функции f и g из $\mathfrak{K}$ *сравнимы*. Если они тождественно равны нулю в окрестности $+\infty$, то это очевидно; значит, можно ограничиться случаем, когда обе функции в окрестности $+\infty$ строго положительны. Но тогда для любого действительного числа t функция $f - tg$ в окрестности $+\infty$ равна функции из $\mathfrak{K}$, то есть сохраняет знак в окрестности $+\infty$, что и доказывает предложение (§ 1, предложение 9).

Из этого предложения мы прежде всего выводим, что если тело Харди $\mathfrak{K}$ содержит действительные постоянные (что мы и будем всегда предполагать в дальнейшем) и если f и g — две произвольные функции из $\mathfrak{K}$, то любые две функции из e^f, e^g, $\log|f|$, $\log|g|$, $|f|^\alpha$, $|g|^\alpha$ (α — любое действительное), $\int_a f$, $\int_a g$ (a — любое действительное из интервала $[x_0, +\infty[$, на котором f и g линейчаты) сравнимы (там, где они обе определены); в самом деле, любые две функции из вышеперечисленных принадлежат одному и тому же телу Харди, полученному последовательным присоединением этих функций к $\mathfrak{K}$.

Точно так же любая функция $f(x)$ из тела Харди $\mathfrak{K}$ сравнима с x, так как x и $f(x)$ принадлежат телу Харди $\mathfrak{K}(x)$, полученному присоединением x к $\mathfrak{K}$. Таким образом, отсюда, в частности, заключаем, что f сравнима какого угодно порядка с любой степенью x^a, равно как и с $\log x$ и e^x.

Ясно также, что если f и g принадлежат одному телу Харди $\mathfrak{K}$, а $g(x)>0$ на интервале $[x_0, +\infty[$ и если при x, стремящемся к $+\infty$, $g(x)$ стремится к 0 или к $+\infty$, то *порядок* функции f относительно g (§ 1, n° 3) всегда определен.

Стало быть, предложение 8 из § 3 применимо к любой функции f из тела Харди, и оно показывает, что:

1° если f имеет порядок $+\infty$ относительно x, то

$$\int_a^x f(t)\,dt \sim \frac{(f(x))^2}{f'(x)};$$

2° если f имеет относительно x порядок $\mu>-1$, то

$$\int_a^x f(t)\,dt \sim \frac{1}{\mu+1}\,xf(x);$$

3° если f имеет относительно x порядок $\mu<-1$, то

$$\int_x^{+\infty} f(t)\,dt \sim -\frac{1}{\mu+1}\,xf(x);$$

4° если f имеет относительно x порядок $-\infty$, то

$$\int_x^{+\infty} f(t)\,dt \sim -\frac{(f(x))^2}{f'(x)}.$$

Кроме того, имеет место следующее предложение:

Предложение 2. *Пусть f — функция, принадлежащая телу Харди $\mathfrak{K}$.*

1° *Если f имеет бесконечный порядок относительно x, то для любого целого $n>0$*

$$f^{(n)}(x) \sim \frac{(f'(x))^n}{(f(x))^{n-1}}. \tag{2}$$

2° *Если f имеет относительно x конечный порядок μ, то для любого $n>0$*

$$f^{(n)}(x) \sim \mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)\frac{f(x)}{x^n} \sim$$

$$\sim \frac{(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{\mu^{n-1}}\,\frac{(f'(x))^n}{(f(x))^{n-1}}, \tag{3}$$

кроме того случая, когда μ — целое положительное и $n>\mu$.

1° Если f имеет бесконечный порядок относительно x, то $\log|f| \ggg \log x$, и значит, в силу того что $\log|f|$ и $\log x$ сравнимы любого порядка, выполняется отношение $\frac{f'}{f} \ggg \frac{1}{x}$. Положим $g = \frac{f'}{f}$; поскольку g в окрестности $+\infty$ равна функции из $\mathfrak{K}$, то из отношения $\frac{1}{g} \lll x$ следует, что $\frac{g'}{g^2} \lll 1$, и значит, $\frac{g'}{g} \lll g = \frac{f'}{f}$ или еще $fg' \lll gf'$. Из отношения $f' = fg$ дифференцированием получаем, что

$$f'' = fg' + gf' \sim gf'$$

или что

$$\frac{f''}{f} \sim \frac{f'}{f}.$$

То же самое рассуждение, примененное к $f^{(n)}$, и индукция по n показывают, что $\frac{f^{(n)}}{f^{(n-1)}} \sim \frac{f'}{f}$, откуда следует отношение (2).

2° Если f имеет относительно x конечный порядок μ и если $\mu \neq 0$, то $\log|f| \sim \mu \log x$, откуда, дифференцируя, получаем $f'(x) \sim \mu \frac{f(x)}{x}$; отсюда выводим, что f' имеет относительно x порядок $\mu - 1$, и мы можем применить индукцию по n для $\mu \neq n$, после чего получим формулу (3), кроме случая целого положительного $\mu < n$.

Если порядок функции f относительно x равен целому $p \geqslant 0$, то можно написать, что $f(x) = x^p f_1(x)$, где f_1 имеет относительно x порядок 0. Согласно предложению 2 имеем

$$f^{(p)} \sim p! f_1.$$

Следовательно, для оценки производных порядка $n > p$ можно ограничиться случаем $p = 0$. Тогда $\log|f| \lll \log x$, откуда $\frac{f'(x)}{f(x)} \lll \frac{1}{x}$, или, другими словами, $xf'(x) \lll f(x)$; если f не эквивалентна постоянной $k \neq 0$, то дифференцирование этого отношения (§ 3, предложение 7) дает нам отношение $xf''(x) + f'(x) \lll f'(x)$, которое означает, что $xf''(x) \sim -f'(x)$. Учитывая эту формулу, индукцией по n покажем, что $f^{(n)}$ имеет относительно x порядок, не превосходящий $-n$, и что

$$f^{(n)}(x) \sim (-1)^{n-1}(n-1)! \frac{f'(x)}{x^{n-1}}. \tag{4}$$

Если f эквивалентна постоянной $k = 0$, то $f(x) = k + f_2(x)$, где $f_2 \lll 1$, и все сводится к исследованию производных функции f_2.

4. *Функции* (*H*)

Предложение 3. *Если $\mathfrak{K}_0$ — тело Харди, то существует тело Харди $\mathfrak{K}$, содержащее $\mathfrak{K}_0$ и такое, что для любой функции $z \in \mathfrak{K}$, не равной тождественно нулю в окрестности $+\infty$, функции e^z и $\log|z|$ принадлежат $\mathfrak{K}$.*

Обозначим через $\mathfrak{K}$ множество функций $f \in \mathscr{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$, обладающих следующими свойствами: для каждой функции $f \in \mathfrak{K}$ существует конечное число таких тел Харди $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_n$ (число n и тела $\mathfrak{K}_i$ зависят от f), что $f \in \mathfrak{K}_n$ и что для $0 \leqslant i \leqslant n-1$ имеем $\mathfrak{K}_{i+1} = \mathfrak{K}_i(u_{i+1})$, где u_{i+1} равно либо e^{z_i}, либо $\log|z_i|$, а z_i принадлежит $\mathfrak{K}_i$ и не обращается тождественно в нуль в окрестности $+\infty$. Говорят, что $u_1, u_2, \ldots, u_n$ образуют *определяющую последовательность* тела $\mathfrak{K}_n$ и функции f; одна и та же функция $f \in \mathfrak{K}$ может, естественно, допускать несколько определяющих последовательностей.

Согласно определению 1 всякая функция $f \in \mathfrak{K}$, не равная тождественно нулю в окрестности $+\infty$, сохраняет постоянный знак и дифференцируема на интервале $[x_0, +\infty[$; если $f \in \mathfrak{K}_n$, то функции $\frac{1}{f}$ и f' в окрестности $+\infty$ равны функциям из $\mathfrak{K}_n$, а значит, функциям из $\mathfrak{K}$. Таким образом, для того чтобы показать, что $\mathfrak{K}$ есть тело Харди, достаточно доказать, что если f и g — две функции из $\mathfrak{K}$, то $f-g$ и fg в окрестности $+\infty$ равны функциям из $\mathfrak{K}$. Итак, пусть $u_1, u_2, \ldots, u_m$ — определяющая последовательность функции f, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ — определяющая последовательность функции g. Последовательность $u_1, u_2, \ldots, u_m, v_1, v_2, \ldots, v_n$, полученная в результате объединения последовательностей (u_i) и (v_j), снова является определяющей последовательностью тела Харди $\mathfrak{K}_{m+n}$, и это тело содержит как f, так и g, а значит, в окрестности $+\infty$ функции $f-g$ и fg равны функциям из $\mathfrak{K}_{m+n}$.

Будем говорить, что тело Харди $\mathfrak{K}$, определенное в процессе доказательства предложения 3, есть *расширение* (*H*) тела Харди $\mathfrak{K}_0$.

Если имеется какое-либо другое тело Харди $\mathfrak{K}'$, обладающее свойствами, сформулированными в предложении 3, то из построения тела $\mathfrak{K}$ следует, что $\mathfrak{K}/R_\infty$ *содержится в* $\mathfrak{K}'/R_\infty$. Таким образом, расширение (H) тела Харди $\mathfrak{K}_0$ есть *наименьшее* тело Харди $\mathfrak{K}$, обладающее свойствами, сформулированными в предложении 3.

Определение 2. *Телом функций (H) называется расширение (H) тела Харди* $\mathbf{R}(x)$ *рациональных функций с действительными коэффициентами. Всякая функция, принадлежащая этому расширению, называется функцией (H).*

На основе этого определения мы можем заключить, что если f есть функция (H), не равная тождественно нулю в окрестности $+\infty$, то e^f и $\log|f|$ тоже являются функциями (H). Вообще, если g — какая-нибудь отличная от f функция (H) с определяющей последовательностью $u_1, u_2, \ldots, u_n$ и если f стремится к $+\infty$ вместе с x, то индукция по n показывает, что сложные функции $u_1 \circ f, u_2 \circ f, \ldots, u_n \circ f$ и $g \circ f$ суть функции (H).

5. Повторные показательные функции и повторные логарифмы

Повторные логарифмы $l_n(x)$ были уже определены нами (§ 3, n° 2) посредством условий $l_0(x) = x$, $l_n(x) = \log(l_{n-1}(x))$ для $n \geqslant 1$. Точно так же и *повторные показательные функции* $e_n(x)$ определяются условиями $e_0(x) = x$, $e_n(x) = \exp(e_{n-1}(x))$ для $n \geqslant 1$. Индукция по n сразу показывает, что $l_n(x)$ есть обратная к $e_n(x)$ функция, определенная для $x > e_{n-1}(0)$, и что $e_m(e_n(x)) = e_{m+n}(x)$, $l_m(l_n(x)) = l_{m+n}(x)$. Исходя из отношений $\log x \prec\!\!\prec x^\mu \prec\!\!\prec e^x$ при любом $\mu < 0$, получаем для $n \geqslant 1$ формулы:

$$l_n(x) \prec\!\!\prec (l_{n-1}(x))^\mu \text{ для любого } \mu > 0, \tag{5}$$

$$e_{n-1}(x^{1+\beta}) \prec\!\!\prec e_n(x^{1-\delta}) \prec\!\!\prec e_n((1-\gamma)x) \prec\!\!\prec (e_n(x))^\mu \prec\!\!\prec e_n((1+\alpha)x) \prec\!\!\prec \\ \prec\!\!\prec e_n(x^{1+\beta}), \tag{6}$$

где числа $\mu, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ удовлетворяют условиям $\mu > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $0 < \gamma < 1$, $0 < \delta < 1$, а в остальном произвольны (§ 1, предложение 11).

Мы уже видели (§ 3, n° 2), что для $n \geqslant 1$ имеет место формула

$$\frac{d}{dx}(l_n(x)) = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{l_i(x)}. \tag{7}$$

Точно так же для $n \geqslant 1$ имеем формулу

$$\frac{d}{dx}(e_n(x)) = \prod_{i=1}^{n} e_i(x), \tag{8}$$

из которой на основании предложения 8 из § 3 для любого $\mu > 0$ получаем

$$\int_a^x e_n(t^\mu)\,dt \sim \frac{x}{\mu} e_n(x^\mu) \prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{e_i(x^\mu)}, \tag{9}$$

$$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{e_n(t^\mu)} \sim \frac{x}{\mu} \prod_{i=0}^{n} \frac{1}{e_i(x^\mu)}. \tag{10}$$

Можно показать, что если f — *произвольная* функция (H), удовлетворяющая условию $f \succ\succ 1$, то найдутся такие два целых числа m и n, что

$$l_m(x) \prec\prec f(x) \prec\prec e_n(x)$$

(упражнения 1 и 5). Напротив, можно определить такие возрастающие функции $g(x)$ (которые уже не будут функциями (H)), что $g(x) \succ\succ e_n(x)$ для *любого* $n > 0$ или $1 \prec\prec g(x) \prec\prec l_m(x)$ для *любого* $m > 0$ (упражнения 8, 9 и 10).

При помощи повторных логарифмов мы покажем, что можно определить (для x, стремящегося к $+\infty$) *шкалу сравнения* $\mathscr{E}$, состоящую из функций (H), строго положительных в окрестности $+\infty$ и удовлетворяющих следующим условиям:

a) произведение любых двух функций из $\mathscr{E}$ принадлежит $\mathscr{E}$;

b) для любой функции $f \in \mathscr{E}$ и любого действительного μ имеем $f^\mu \in \mathscr{E}$;

c) для любой функции $f \in \mathscr{E}$ функция $\log f$ есть линейная комбинация конечного числа функций из $\mathscr{E}$;

d) для любой функции $f \in \mathscr{E}$, отличной от постоянной функции, равной 1, e^f эквивалентна функции из $\mathscr{E}$.

Рассмотрим вначале множество $\mathscr{E}_0$ функций вида $\prod_{m=0}^{\infty} (l_m(x))^{\alpha_m}$, где α_m — действительные числа, равные нулю для всех m, кроме конечного числа их; из формулы (5) сразу же получаем, что эти функции образуют *шкалу сравнения*, удовлетворяющую условиям a), b), c). Затем индукцией по n определим множество $\mathscr{E}_n$ (для

$n \geqslant 1$) как множество, состоящее из постоянной функции, равной 1, и из функций вида $\exp\left(\sum_{k=1}^{p} a_k f_k\right)$, где p — произвольное целое строго положительное число, f_k $(1 \leqslant k \leqslant p)$ — такие функции из $\mathscr{E}_{n-1}$, что $f_1 \succ\succ f_2 \succ\succ \ldots \succ\succ f_p \succ\succ 1$, и a_k — действительные числа, отличные от 0; методом индукции покажем, что $\mathscr{E}_n$ есть *шкала сравнения*, удовлетворяющая условиям а), b) и с) и содержащая $\mathscr{E}_{n-1}$. Во-первых, включение $\mathscr{E}_{n-1} \subset \mathscr{E}_n$ справедливо для $n=1$, поскольку логарифм функции из $\mathscr{E}_0$, не являющейся постоянной, имеет вид $\sum_{k=1}^{p} a_k f_k$, где f_k — повторные логарифмы, и значит, $f_k \succ\succ 1$; во-вторых, если $\mathscr{E}_{n-2} \subset \mathscr{E}_{n-1}$, то из определения $\mathscr{E}_n$ следует, что $\mathscr{E}_{n-1} \subset \mathscr{E}_n$; кроме того, это определение показывает, что $\mathscr{E}_n$ удовлетворяет условиям а), b) и с). Остается показать, что $\mathscr{E}_n$ есть шкала сравнения; так как частное двух функций из $\mathscr{E}_n$ снова принадлежит $\mathscr{E}_n$, то достаточно доказать, что функция f из $\mathscr{E}_n$, отличная от постоянной функции, равной 1, не может быть эквивалентна постоянной функции, отличной от 0. Но, по построению, $\log f = \sum_{k=1}^{p} a_k f_k \sim a_1 f_1$, а поскольку $f \succ\succ 1$, то $\log f$ стремится к $\pm\infty$, и значит, f стремится к 0 или к $+\infty$, когда x стремится к $+\infty$.

Если теперь $\mathscr{E}$ есть *объединение* множеств $\mathscr{E}_n$ для $n \geqslant 0$, то $\mathscr{E}$ есть шкала сравнения, так как две функции из $\mathscr{E}$ принадлежат одной и той же шкале $\mathscr{E}_n$; на том же основании множество $\mathscr{E}$ удовлетворяет условию а) и, очевидно, удовлетворяет также условиям b) и с). Наконец, если $f \in \mathscr{E}$, то найдется такое n, что $f \in \mathscr{E}_n$; если f не равна постоянной функции, равной 1, то $f(x)$ стремится или к 0, или к $+\infty$, когда x стремится к $+\infty$; в первом случае $e^f \sim 1$, а во втором e^f, по определению, принадлежит $\mathscr{E}_{n+1}$, а значит, и $\mathscr{E}$.

Замечание. Несмотря на практическую ценность шкалы $\mathscr{E}$, только что определенной, легко построить примеры функций (H), которые *не имеют главной части* относительно $\mathscr{E}$. В самом деле, если f есть функция (H), удовлетворяющая условию $f \sim ag$, где $a > 0$ — постоянная, а $g \in \mathscr{E}$, то $\log f - \log g - \log a$ стремится к 0 вместе с $\frac{1}{x}$, и значит, в силу свойства с), функция $\log f$

допускает относительно $\mathscr{E}$ асимптотическое разложение, *остаток* которого *стремится* к 0. Но если рассмотреть, например, функцию (H): $f(x)=e_2\left(x+\frac{1}{x}\right)$, то $\log f=\exp\left(x+\frac{1}{x}\right)$, и следовательно, асимптотические разложения функции $\log f$ относительно $\mathscr{E}$ имеют вид

$$\log f(x)=e^x+\frac{e^x}{x}+\frac{1}{2!}\frac{e^x}{x^2}+\ldots+\frac{1}{n!}\frac{e^x}{x^n}+o\left(\frac{e^x}{x^n}\right) \quad (n>0\text{—целое}).$$

Ясно, что остаток этого разложения эквивалентен $\frac{1}{(n+1)!}\frac{e^x}{x^{n+1}}$ и, значит, не стремится к 0. Таким образом, функция f не имеет главной части относительно $\mathscr{E}$.

6. *Функция, обратная к функции* (H)

Если f есть функция (H), то f монотонна и непрерывна на интервале $[x_0, +\infty[$; и значит, функция φ, обратная к сужению функции f на этот интервал, монотонна и непрерывна в окрестности точки $a=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; если a равно $+\infty$ (соответственно $-\infty$ или конечно), то можно показать, что функция $\varphi(y)$ $\left(\text{соответственно } \varphi(-y),\ \varphi\left(a+\frac{1}{y}\right) \text{ или } \varphi\left(a-\frac{1}{y}\right)\right)$, *вообще говоря, не равна функции* (H) в окрестности $+\infty$. Тем не менее мы покажем, что в некоторых важных случаях можно получить функцию (H), *эквивалентную* функции $\varphi(y)$ $\left(\text{соответственно } \varphi(-y),\ \varphi\left(a+\frac{1}{y}\right),\ \varphi\left(a-\frac{1}{y}\right)\right)$, и часто даже получить асимптотическое разложение этой функции относительно шкалы $\mathscr{E}$, определенной в n° 5.

Нам понадобится следующее предложение:

Предложение 4. *Пусть p и q — две функции* (H), *строго положительные на интервале* $[x_0, +\infty[$.

1° *Если* $q \prec\!\!\prec \frac{p}{p'}$, *то* $p(x+q(x)) \sim p(x)$.

2° *Если одновременно* $q \prec\!\!\prec \frac{p}{p'}$ *и* $q(x) \prec\!\!\prec x$, *то* $p(x-q(x)) \sim p(x)$.

Оба утверждения очевидны, если $p \sim k$ (постоянной, отличной от 0); значит, можно предположить $p(x) \prec\!\!\prec 1$ $\left(\text{в противном случае можно проводить рассуждение для } \frac{1}{p}\right)$. Отсюда следует, что $p'(x) \prec\!\!\prec 1$.

1° Можно написать, что $p(x+q(x)) = p(x) + q(x)\,p'(x+\theta q(x))$ с $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ (гл. I, § 2, следствие из предложения 1). Так как функция $|p'(x)|$ стремится к 0, когда x стремится к $+\infty$, и равна функции (H) в окрестности $+\infty$, то она убывает на интервале $[x_1, +\infty[$, и значит, для $x \geqslant x_1$ имеем $|p'(x+\theta q(x))| \leqslant \leqslant |p'(x)|$, а поскольку $qp' \prec\!\!\prec p$, то $p(x+q(x)) \sim p(x)$.

2° Условие $q(x) \prec\!\!\prec x$ показывает, что $x - q(x)$ стремится к $+\infty$ вместе с x. Снова имеем $p(x+q(x)) = p(x) - q(x)\,p'(x-\theta q(x))$ с $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. То же самое рассуждение, что и в первой части доказательства, показывает, что для достаточно больших x выполняется неравенство $|p'(x-\theta q(x))| \leqslant |p'(x-q(x))|$. Все сводится к доказательству того, что $q(x)\dfrac{p'(x-q(x))}{p(x-q(x))}$ стремится к 0, когда x стремится к $+\infty$. Если $\dfrac{p'}{p} \succ\!\!\succ 1$, то предложение справедливо, так как в этом случае $\left|\dfrac{p'}{p}\right|$ есть функция (H), возрастающая для достаточно больших x; следовательно, $q(x)\left|\dfrac{p'(x-q(x))}{p(x-q(x))}\right| \leqslant \leqslant q(x)\left|\dfrac{p'(x)}{p(x)}\right|$, а по условию $qp' \prec\!\!\prec p$. Оно справедливо также, если $\dfrac{p'}{p} \sim k$ (k — постоянная, отличная от 0), так как тогда $\dfrac{p'(x-q(x))}{p(x-q(x))} \sim \dfrac{p'(x)}{p(x)}$, поскольку $x - q(x)$ стремится к $+\infty$. Остается только проверить случай $\dfrac{p'}{p} \prec\!\!\prec 1$. Предположим сначала, что $p(x)$ имеет *конечный* порядок относительно x, то есть (§ 3, предложение 7) $\dfrac{p'(x)}{p(x)} \preccurlyeq 1$. Тогда $\dfrac{p'(x-q(x))}{p(x-q(x))} = \dfrac{1}{x-q(x)}\,O_1(1)$, а значит, $q(x) = \dfrac{p'(x-q(x))}{p(x-q(x))} = \dfrac{q(x)}{x}\left(1 - \dfrac{q(x)}{x}\right)^{-1} O_1(1) = \dfrac{q(x)}{x}\,O_2(1)$, и очевидно, что в этом случае предложение справедливо при *единственном* условии $q(x) \prec\!\!\prec x$. Наконец, рассмотрим случай, когда $\dfrac{1}{x} \prec\!\!\prec \dfrac{p'(x)}{p(x)} \prec\!\!\prec 1$; тогда функция $r = \dfrac{p'}{p}$ имеет конечный порядок относительно x; так как к такой функции, на основании предыдущего замечания, применимо предложение 4, то $\frac{p'(x-q(x))}{p(x-q(x))} \sim \frac{p'(x)}{p(x)}$, и тогда условие $qp' \prec\!\!\prec p$ позволяет завершить доказательство.

Замечание. Условия, наложенные на $q(x)$, не могут быть ослаблены, в чем можно убедиться на следующих примерах:

а) $$p(x)=e^x, \quad q(x)=1=\frac{p(x)}{p'(x)}, \quad p(x+q(x))=ep(x),$$

б) $$p(x)=\log x, \quad q(x)=x-\log x \prec\!\!\prec \frac{p(x)}{p'(x)}=x\log x,$$
$$p(x-q(x))=\log\log x \prec\!\!\prec p(x).$$

Сначала мы изучим функции, обратные к функциям (H) специального вида:

Предложение 5. *Пусть g — функция (H), не эквивалентная отличной от нуля постоянной и такая, что $g(x) \prec\!\!\prec x$, и пусть $u(x)$ — функция, обратная к функции $x-g(x)$, определенная в некоторой окрестности $+\infty$. Пусть (u_n) — последовательность функций, определенная индукцией по n условиями $u_0(x)=x$, $u_n(x)=x+g(u_{n-1}(x))$ для $n \geqslant 1$; тогда $u_n \succ\!\!\succ 1$ и*
$$u(x)-u_n(x) \sim g(x)(g'(x))^n. \tag{11}$$

Положим $y=u(x)$, $y_n=u_n(x)$; тогда $x=y-g(y)$, $y_0=x$ и $y_n = x+g(y_{n+1})$. Отсюда прежде всего получаем, что $\frac{x}{y}=1-\frac{g(y)}{y}$; так как y стремится к $+\infty$ вместе с x, то условие $g(x)\prec\!\!\prec x$ показывает, что $y=u(x)\sim x=y_0$; кроме того,
$$y-x=g(y)=g(x)+(y-x)g'(z),$$
где z принадлежит интервалу с концами x, y; значит, когда x стремится к $+\infty$, то и z стремится к $+\infty$, а поскольку $g(x)\prec\!\!\prec x$, $g'\prec\!\!\prec 1$, то $g'(z)$ стремится к 0 и, стало быть,
$$y-x=g(x)+o(y-x),$$
откуда
$$u(x)-x\sim g(x). \tag{12}$$

Далее, индукцией по n покажем, что, когда x стремится к $+\infty$, $u_n \succ\!\!\succ 1$ и
$$u(x)-u_n(x)\prec\!\!\prec u(x)-u_{n-1}(x). \tag{13}$$

В самом деле, $y - y_n = g(y) - g(y_{n-1}) = (y - y_{n-1})\, g'(z_{n-1})$, где z_{n-1} принадлежит интервалу с концами y и y_{n-1}; согласно предположению индукции, z_{n-1} стремится к $+\infty$ вместе с x, и значит, $g'(z_{n-1})$ стремится к 0, что и доказывает отношение (13). Из этого отношения и из отношения (12) следует, что $u(x) - u_n(x) \prec\!\!\prec u(x) - x \sim g(x) \prec\!\!\prec x \sim u(x)$, откуда $u_n(x) \sim u(x)$ и, следовательно, $u_n \succ\!\!\succ 1$. Наконец, отношение $u(x) - u_n(x) \prec\!\!\prec u(x) - x$ может быть также записано в виде $(u(x) - x) - (u_n(x) - x) \succ\!\!\succ u(x) - x$, откуда

$$u_n(x) - x \sim u(x) - x \sim g(x). \tag{14}$$

Для доказательства отношения (11) прежде всего заметим, что если $t(x)$ — такая функция, что $t(x) - x \sim g(x)$, то $g'(t(x)) \sim g'(x)$. В самом деле, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, для достаточно больших x функция g' монотонна, и значит, $g'(t(x))$ заключена между $g'(x + (1+\varepsilon)\, g(x))$ и $g'(x + (1-\varepsilon)\, g(x))$. Следовательно, предложение 4 показывает, что $g'(t(x)) \sim g'(x)$, если только установлено отношение $g \prec\!\!\prec \dfrac{g'}{g''}$. Но если g имеет бесконечный порядок относительно x, то (предложение 2) $\dfrac{g''}{g'} \sim \dfrac{g'}{g}$, а так как $g' \prec\!\!\prec 1$, то $g \prec\!\!\prec \dfrac{g}{g'} \sim \dfrac{g'}{g''}$; если же g имеет относительно x конечный порядок μ, то непременно $\mu \leqslant 1$; если $\mu < 1$, то, поскольку g не эквивалентна отличной от нуля постоянной, формулы (3) и (4) показывают, что в этом случае $\dfrac{g''}{g} \sim \dfrac{k}{x}$ (k — постоянная, отличная от 0), откуда снова получаем $g \prec\!\!\prec \dfrac{g'}{g''}$; наконец, если $\mu = 1$, то g' имеет порядок 0 относительно x, то есть $\dfrac{g''}{g'} \prec\!\!\prec \dfrac{1}{x}$, и значит, снова $g \prec\!\!\prec \dfrac{g'}{g''}$.

Теперь, в силу того что z_{n-1} заключена между y и y_{n-1}, из формулы (14) следует, что $z_{n-1} - x \sim g(x)$, откуда на основании вышеизложенного $g'(z_{n-1}) \sim g'(x)$; следовательно, имеет место отношение $y - y_n \sim (y - y_{n-1})\, g'(x)$, из которого индукцией по n получаем формулу (11).

Замечания. 1) Если *порядок* функции g *относительно* x меньше 1, то функция $u(x) - u_n(x)$ при достаточно больших n *стремится к* 0 *вместе с* $\dfrac{1}{x}$. В самом деле, в противном случае отношение $gg'^n \succ\succ 1$ имело бы место при *любом* n, и тогда g имела бы бесконечный порядок относительно $\frac{1}{g'}$; иными словами, выполнялось бы отношение $\log|g| \succ\succ \log|g'|$, откуда $\frac{g'}{g} \succ\succ \frac{g''}{g'}$. Но если g имеет относительно x порядок $\mu < 1$, то $\frac{g'}{g} \sim \frac{g''}{g'}$ для $\mu = -\infty$, $\frac{g'}{g} \sim \sim \frac{\mu}{\mu - 1}\frac{g''}{g'}$ для $\mu \neq 0$ и, наконец, $\frac{g'}{g} \prec\prec \frac{g''}{g'}$ для $\mu = 0$ (n° 3).

Напротив, если порядок функции g относительно x равен 1, то отношение $gg'^n \succ\succ 1$ может выполняться при любом целом $n > 0$, как показывает пример $g(x) = \frac{x}{\log x}$.

2) Если $g(x)$ есть функция (H), эквивалентная постоянной $k \neq 0$, то $g(x) = k + g_1(x)$, где $g_1 \prec\prec 1$; функция $u_1(x) = u(x) - k$ есть функция, обратная к $x - g_1(x+k)$, и вопрос сводится к случаю, изложенному в предложении 5.

Таким образом, для того чтобы получить асимптотическое разложение функции u, достаточно получить такое разложение для функции u_n: если g допускает асимптотическое разложение относительно рассматриваемой шкалы, то тем самым задача сводится (согласно определению функций (H)) к задачам, рассмотренным в § 2.

К случаю, изложенному в предложении 5, приводится следующий более общий случай: предполагается, что функция $y = u(x)$ удовлетворяет соотношению

$$\varphi(x) = \psi(y) - g(y), \tag{15}$$

где φ есть функция (H), ψ — такая функция (H), что $\psi \succ\succ 1$ и что функция θ, обратная к ψ, тоже является функцией (H), а g — такая функция (H), что $g \prec\prec \psi$. Тогда обозначим через $v(x)$ функцию, обратную к $x - g(\theta(x))$; имеем $u = \theta \circ v \circ \varphi$ и $g(\theta(x)) \prec\prec x$; если благодаря предложению 5 известно асимптотическое разложение функции v, то из него при помощи методов, изложенных в § 2, получается асимптотическое разложение функции u.

Примеры. 1) Найдем асимптотическое разложение функции $v(x)$, обратной к функции $x^5 + x$ (для x, стремящегося к $+\infty$); положив $x^5 = t$, сведем задачу к отысканию разложения функции $u(t)$, обратной к $t + t^{\frac{1}{5}}$ (для t, стремящегося к $+\infty$), то есть к применению предложения 5 для случая, когда $g(t)=-t^{1/5}$. Вычислим, например, $u_2(t)$:

$$u_2(t)=t-(t-t^{\frac{1}{5}})^{\frac{1}{5}}=t-t^{\frac{1}{5}}+\frac{1}{5}t^{-\frac{3}{5}}+\frac{2}{25}t^{-\frac{7}{5}}+o_1(t^{-\frac{7}{5}}).$$

С другой стороны, в силу (11),

$$u(t)-u_2(t)\sim\frac{1}{25}t^{-\frac{7}{5}},$$

откуда

$$u(t)=t-t^{\frac{1}{5}}+\frac{1}{5}t^{-\frac{3}{5}}+\frac{1}{25}t^{-\frac{7}{5}}+o_2(t^{-\frac{7}{5}}),$$

и мы получаем искомое разложение

$$v(x)=(u(x))^{\frac{1}{5}}=x^{\frac{1}{5}}-\frac{1}{5}x^{-\frac{3}{5}}-\frac{1}{25}x^{-\frac{7}{5}}+o_3(x^{-\frac{7}{5}}).$$

2) Найдем асимптотическое разложение функции $v(x)$, обратной к функции $\frac{x}{\log x}$; из тождества $x=\frac{y}{\log y}$ с $y=v(x)$ выводим, что $\log x=\log y-\log\log y$; положив $z=\log y$, $t=\log x$, получим $t=z-\log z$, и, стало быть, задача сводится к разложению функции $u(t)$, обратной к $t-\log t$, например:

$$u_2(t)=t+\log(t+\log t)=t+\log t+\frac{\log t}{t}-\frac{(\log t)^2}{2t^2}+o_1\left(\frac{\log t}{t^2}\right),$$

а с другой стороны, в силу (11),

$$u(t)-u_2(t)=\frac{\log t}{t^2},$$

откуда

$$u(t)=t+\log t+\frac{\log t}{t}-\frac{(\log t)^2}{2t^2}+\frac{\log t}{t^2}+o_2\left(\frac{\log t}{t^2}\right),$$

и, возвращаясь к исходной задаче, получаем асимптотическое разложение

$$u(x)=x\log x+x\log\log x+x\frac{\log\log x}{\log x}+o\left(x\frac{\log\log x}{\log x}\right).$$

З а м е ч а н и е. Отметим, что две эквивалентные функции (H) могут иметь обратные функции, не эквивалентные между собой, как показывает пример двух функций $\log x$ и $1+\log x$.

У п р а ж н е н и я. °1) Пусть $\mathfrak{K}$ — тело Харди, обладающее тем свойством, что для любой функции $f\in\mathfrak{K}$, не равной тождественно нулю в окрестности $+\infty$, найдется такое $\lambda>0$, что $\frac{1}{l_m(x^\lambda)}\prec\!\!\prec f(x)\prec\!\!\prec l_m(x^\lambda)$ (m — целое, *не зависящее от* f).

а) Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_p$ — p функций вида $u_k=\log|z_k|$, где $z_k\in\mathfrak{K}$ не равно нулю в окрестности $+\infty$. Показать, что для любой функции g (не равной нулю в окрестности $+\infty$) тела Харди

$\mathfrak{K}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$, полученного присоединением к $\mathfrak{K}$ функций u_k $(1 \leqslant k \leqslant p)$, найдется такое $\mu > 0$, что $\frac{1}{e_m(x^\mu)} \prec\!\!\prec g(x) \prec\!\!\prec e_m(x^\mu)$ (свести к случаю, когда g есть многочлен относительно u_k с коэффициентами из $\mathfrak{K}$, и применить индукцию по n, а затем для $p=1$ применить индукцию по степени многочлена g, поступая, как в лемме 2).

б) Пусть u_k $(1 \leqslant k \leqslant p)$ — p функций вида $u_k = \exp(z_k)$, где $z_k \in \mathfrak{K}$. Показать, что для любой функции g из тела Харди $\mathfrak{K}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$, не равной тождественно нулю в окрестности $+\infty$, найдется такое число $\mu > 0$, что

$$\frac{1}{e_{m+1}(x^\mu)} \prec\!\!\prec g(x) \prec\!\!\prec e_{m+1}(x^\mu)$$

(аналогичный метод).

в) Вывести отсюда, что если f — функция (H), допускающая определяющую последовательность из n членов и не равная тождественно нулю в окрестности $+\infty$, то найдется такое число $\lambda > 0$, что $\frac{1}{e_n(x^\lambda)} \prec\!\!\prec f(x) \prec\!\!\prec e_n(x^\lambda)$.

2) а) Показать, что всякая функция (H), обладающая определяющей последовательностью, состоящей из единственного члена, эквивалентна одной из функций вида $x^p(\log x)^q$ или $x^p e^{g(x)}$, где p и q — целые рациональные числа, а g — многочлен от x (метод упражнения 1).

б) Вывести из а), что всякая функция из тела Харди $\mathfrak{K}(x, u_1, u_2, \ldots, u_p)$, где $u_1, u_2, \ldots, u_p$ — функции (H), имеющие определяющую последовательность, состоящую из единственного члена, эквивалентна функции вида $x^p(\log x)^q e^{g(x)}$, где p и q — целые рациональные, а g — многочлен от x.

3) Пусть f и g — две такие функции (H), что $\frac{f}{g}$ имеет порядок 0 относительно $l_m(x)$; показать, что если порядок функции g относительно $l_m(x)$ отличен от 0, то $\frac{f'}{g'} \sim \frac{f}{g}$ $\left(\text{сравнить } \log\left|\frac{f}{g}\right| \text{ и } \log|g|\right)$.

4) Пусть $\mathfrak{K}$ — такое тело Харди, что для любой функции $f \in \mathfrak{K}$, не эквивалентной постоянной и имеющей относительно $l_{m-1}(x)$ порядок 0, существуют такая постоянная k и такое целое рациональное число r, при которых $f(x) \sim k(l_m(x))^r$.

а) Пусть z — произвольная функция из $\mathfrak{K}$, не равная тождественно нулю в окрестности $+\infty$. Показать, что всякая функция g из тела Харди $\mathfrak{K}(\log|z|)$, не эквивалентная постоянной и имеющая относительно $l_m(x)$ порядок 0, эквивалентна функции вида $k(l_{m+1}(z))^r$ (k — постоянная, r — целое рациональное число). (Сначала рассмотреть случай, когда g — многочлен степени p от $\log|z|$ с коэффициентами из $\mathfrak{K}$, и применить индукцию по p, использовав упражнение 3; если g — рациональная функция от $\log|z|$ с коэффициентами из $\mathfrak{K}$, то применить индукцию по степени числителя, воспользовавшись упражнением 3.)

б) Показать, что любая функция из $\mathfrak{K}(l_{m+1}(x))$ эквивалентна функции вида $f(x)(l_{m+1}(x))^r$, где $f \in \mathfrak{K}$, а r — целое рациональное число.

в) Пусть z — произвольная функция из $\mathfrak{K}$. Показать, что всякая функция g из тела Харди $\mathfrak{K}(e^z)$, имеющая порядок 0 относительно $l_m(x)$, эквивалентна постоянной. (Сначала рассмотреть случай $g = u^q P(u)$, где $u = e^z$, q — целое рациональное, а $P(u)$ — многочлен от u степени p с коэффициентами из $\mathfrak{K}$; в этом случае применить индукцию по p, использовав а) и упражнение 3. Отсюда при помощи упражнения 3 перейти к общему случаю.)

г) Распространить результат пункта а) на тело $\mathfrak{K}(u_1\ u_2, \ldots, u_s)$, где u_k имеют вид e^{z_k} или $\log|z_k|$, причем z_k — функции из $\mathfrak{K}$, не равные тождественно нулю в окрестности $+\infty$ (применить индукцию по s).

5) а) Вывести из упражнения 4, что если f — функция (H), имеющая определяющую последовательность из n членов, не эквивалентная постоянной и имеющая относительно $l_{n-1}(x)$ порядок 0, то найдется такая постоянная k и такое целое рациональное r, что $f(x) \sim k(l_n(x))^r$.

б) Вывести из упражнения 4, что если f — произвольная функция (H), то найдется такое целое n, что для определения того, сходится или бесконечен интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,dt$, можно применить логарифмический признак порядка n.

6) Сравнить между собой функции $e_p((l_q(x))^{\mu})$ по значениям целых p и q и действительного числа μ, предположив $\mu > 0$, $\mu \neq 1$.

°7) Пусть f — функция (H), имеющая определяющую последовательность из n членов. Показать, что если $e_p((l_{q+1}(x))^{\beta}) \prec\!\!\prec f(x) \prec\!\!\prec e_p((l_q(x))^{\alpha})$ (соответственно $e_p((l_q(x))^{\beta}) \prec\!\!\prec f(x) \prec\!\!\prec e_{p+1}((l_q(x))^{\alpha})$) при любом $\beta > 0$ и любом α, $0 < \alpha < 1$, то всегда $p+q+1 < n$ (применить индукцию по n, использовав методы, аналогичные методам упражнений 1 и 4).

8) а) Пусть (f_n) — последовательность непрерывных возрастающих функций, принадлежащих $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$ и таких, что $f_n \prec\!\!\prec f_{n+1}$ для любого n. Показать, что существует непрерывная возрастающая функция f, принадлежащая $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$ и такая, что $f \succ\!\!\succ f_n$ для любого n (свести к случаю, когда $f_n \leqslant f_{n+1}$, и определить f так, чтобы $f_n(x) \leqslant f(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ для $n \leqslant x \leqslant n+1$).

б) Пусть (f_n) — последовательность непрерывных возрастающих функций, принадлежащих $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$ и таких, что $1 \prec\!\!\prec f_{n+1} \prec\!\!\prec f_n$ для любого n. Показать, что существует непрерывная возрастающая функция f, принадлежащая $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$ и такая, что $1 \prec\!\!\prec f \prec\!\!\prec f_n$ для любого n (сведя задачу к случаю $f_{n+1} \leqslant f_n$, показать, что можно определить возрастающую последовательность (x_n) действительных чисел и такую непрерывную возрастающую функцию f, что $f_{n+1}(x) \leqslant \leqslant f(x) \leqslant f_n(x)$ для $x_n \leqslant x \leqslant x_{n+1}$).

в) Пусть (f_n) и (g_n) — две последовательности непрерывных возрастающих функций, принадлежащих $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$, обладающие тем свойством, что $f_n \prec\!\!\prec f_{n+1}$, $g_m \succ\!\!\succ g_{m+1}$ и $f_n \prec\!\!\prec g_m$ для любых m и n; показать, что существует такая непрерывная возрастающая функция h, принадлежащая $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$, что $f_n \prec\!\!\prec h \prec\!\!\prec g_m$ при любых m и n (аналогичный метод).

В частности, показать, что существует такая непрерывная возрастающая функция f, принадлежащая $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$, что *никакой* логарифмический признак не позволяет определить, сходится или бесконечен интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(t)\,dt$ («теоремы Дюбуа — Реймона»).

9) Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e_n(x)}{e_n(n)}$ равномерно сходится на любом компактном подмножестве из $\mathbf{R}$ и что его сумма $f(x)$ удовлетворяет отношению $f(x) \succ\!\!\succ l_n(x)$ при любом целом n.

10) Показать, что существует возрастающая функция f, определенная, непрерывная, строго положительная для $x \geqslant 0$ и такая, что $f(2x) = 2^{f(x)}$ для любого $x \geqslant 0$; вывести отсюда, что при любом целом n выполняется отношение $f(x) \succ\!\!\succ l_n(x)$.

11) Пусть функция $f \geqslant 0$ возрастает, непрерывна для $x \geqslant 0$ и такова, что $f(x) \succ\!\!\succ e_n(x)$ при любом целом n; показать, что если g — функция, обратная к f, то $1 \prec\!\!\prec g \prec\!\!\prec l_n(x)$ при любом целом n.

12) Пусть для любого целого $n > 0$ выражение $n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k 2^k$ есть двоичное разложение числа n (ε_k — целое, равное нулю, кроме конечного числа индексов, $0 \leqslant \varepsilon_k \leqslant 1$). Положим

$$\alpha(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k, \quad A_1(n) = \sum_{j=1}^{n} \alpha(j), \quad A_2(n) = \sum_{j=1}^{n} \alpha(\alpha(j)).$$

а) Доказать формулу $A_1(n) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (k+2)\,\varepsilon_k 2^{k-1}$. Вывести из нее формулу

$$A_1(n) = \frac{n \log n}{2 \log 2} + o(n \log \log n),$$

когда n неограниченно возрастает $\Bigl($разбить сумму, выражающую $A_1(n)$, на две части, в первой из которых индекс k меняется от 0 до $\mu(n)$, а во второй — от $\mu(n)$ до n_1, где n_1 — наибольшее из таких чисел k, для которых $\varepsilon_k \neq 0$, а $\mu(n)$ — надлежащим образом выбранное число; далее оценить сверху первую сумму, воспользовавшись предложением 6 из § 4, а затем оценить сверху разность между второй суммой и $\dfrac{n_1 n}{2}\Bigr)$.

б) Доказать соотношение

$$\sum_{j=0}^{2^m-1} f(\alpha(j)) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} f(k),$$

где f — любая функция, определенная на $\mathbf{N}$ (рассмотреть для заданного k числа $j < 2^m$, для которых $\alpha(j) = k$).

в) Доказать для $m = 2^r - 1$ соотношение $\alpha(m-j) + \alpha(j) = r$. Из этого соотношения и из б) вывести, что

$$A_2(2^m) = r2^{m-1} \sim \frac{2^m \log\log 2^m}{2\log 2}.$$

г) Показать для $m = 2^r$, что

$$A_2(2^m) = 2A_2(2^{m-1}) + 2^{m-1} - \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} \Delta(j+1),$$

где полагаем $\alpha(n+1) - \alpha(n) = 1 - \Delta(n+1)$ при любом n (применить б) и соотношение $\alpha(2^k + r) = \alpha(r) + 1$ для $r < 2^k$). Показать, что $\sum\limits_{j=0}^{m-1} \dbinom{m-1}{j} \Delta(j+1) \leqslant r2^{m-2}$ (заметить, что $\Delta(j+1) = 0$, если j четно, и $\Delta(j+1) \leqslant \dfrac{\log j}{\log 2}$ для любого j). Вывести отсюда при помощи в), что

$$A_2(2^m) \geqslant \frac{3}{2} r2^{m-1} \geqslant \frac{3}{2}\,\frac{2^m \log\log 2^m}{2\log 2}.$$

Из этого соотношения и из в) вывести, что $A_2(n)$ *не эквивалентна никакой функции* (H), когда n стремится к $+\infty$.

13) Пусть f — такая функция (H), что $1 \prec\!\!\prec f(x) \prec\!\!\prec x$. Показать, что в формуле Тейлора

$$f(x + f(x)) = f(x) + f(x) f'(x) + \frac{1}{2!}(f(x))^2 f''(x) + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{n!}(f(x))^n f^{(n)}(x) + \frac{1}{(n+1)!}(f(x))^{n+1} f^{(n+1)}(x + \theta f(x)),$$

где $0 < \theta < 1$ (гл. I, § 3, упражнение 9), каждый член пренебрежим сравнительно с предыдущим. Если порядок функции f относительно x меньше 1, то последний член этой суммы стремится к 0 вместе с $\frac{1}{x}$ при достаточно больших n.

14) Вывести из упражнения 13, что если f — такая функция (H), что $\log f(e^x)$ имеет порядок, меньший 1 относительно x, то функция $(xf(x))$ эквивалентна функции вида $e^{g(x)}$, где g — рациональная функция от x, $\log f(x)$ и некоторого числа производных последней функции.

°15) Пусть f — такая выпуклая в окрестности $+\infty$ функция (H), что $f(x) \succ\succ x$. Пусть для любого $\alpha > 0$ x_α — такая точка, что $f'(x_\alpha) = (1+\alpha) f'(x)$.

а) Показать, что если порядок функции f относительно x равен $+\infty$, то

$$x_\alpha - x \sim \log(1+\alpha) \frac{f(x)}{f'(x)}$$

(воспользоваться предложениями 2 и 4, применив формулу Тейлора к функции $\log f'(x)$). Показать, что $\frac{f(x_\alpha) - (x_\alpha - x) f'(x_\alpha)}{f(x)}$ стремится к $(1+\alpha)(1 - \log(1+\alpha))$, когда x стремится к $+\infty$.

б) Показать, что если f имеет порядок $r > 1$ относительно x, то

$$x_\alpha \sim (1+\alpha)^{\frac{1}{r-1}} x$$

(заметить, что если порядок функции f_1 относительно x равен 0, то, на основании предложения 4, $f_1(kx) \sim f_1(x)$ для любой постоянной k). Вывести отсюда, что выражение $\frac{f(x_\alpha) - (x_\alpha - x) f'(x_\alpha)}{f(x)}$ стремится к $r(1+\alpha) - (r-1)(1+\alpha)^{\frac{r}{r-1}}$, когда x стремится к $+\infty$.

в) Допустим, наконец, что порядок функции f относительно x равен 1. Положив $f(x) = x f_1(x)$, показать, что $x_\alpha - x \sim \log(1+\alpha) \frac{f_1(x)}{f_1'(x)}$ (рассмотреть обратную к f_1 функцию, порядок которой относительно x равен $+\infty$). Вывести отсюда, что $\frac{f(x_\alpha) - (x_\alpha - x) f'(x_\alpha)}{f(x)}$ стремится к $-\infty$, когда x стремится к $+\infty$.

Пусть точно так же x'_α — такая точка, что $f'(x'_\alpha) = (1-\alpha) f'(x)$ (для $0 < \alpha < 1$). Получить формулы, аналогичные вышеприведенным и выражающие главную часть разности $x - x'_\alpha$ и предел выражения

$$\frac{f(x'_\alpha) + (x - x_\alpha) f'(x'_\alpha)}{f(x)},$$

когда x стремится к $+\infty$.

Вывести из этих результатов, что f *регулярно выпукла* в окрестности $+\infty$ (§ 3, упражнение 5).

ГЛАВА VI

ОБОБЩЕННЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ТЕЙЛОРА. ФОРМУЛА СУММИРОВАНИЯ ЭЙЛЕРА — МАКЛОРЕНА

§ 1. Обобщенные разложения Тейлора

1. *Операторы композиции в алгебре многочленов*

Пусть K — коммутативное тело характеристики 0, а $K[X]$ — алгебра многочленов от одного переменного над телом K (Алгебра, гл. IV, § 1, n° 2); на протяжении всего этого параграфа под *оператором* в $K[X]$ мы будем понимать любое *линейное отображение* U векторного пространства $K[X]$ (относительно K) в себя; а поскольку одночлены X^n $(n \geqslant 0)$ образуют базис этого пространства, то U определяется заданием многочленов $U(X^n)$; точнее, если $f(X) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda_k X^k$, где $\lambda_k \in K$, то $U(f) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda_k U(X^k)$.

Если G есть коммутативная алгебра над телом K, имеющая единичный элемент, то G-модуль $G[X]$ получается путем расширения G тела скаляров K векторного пространства $K[X]$; следовательно, всякий оператор U в $K[X]$ продолжается единственным образом в линейное отображение G-модуля $G[X]$ в себя, которое мы снова обозначим через U (Алгебра, гл. III, § 2, n° 1); для любого элемента $g(X) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \gamma_k X^k$, где $\gamma_k \in G$, имеем $U(g) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \gamma_k U(X^k)$.

Рассмотрим, в частности, случай, когда $G = K[Y]$; тогда $G[X]$ будет кольцом $K[X, Y]$ многочленов от двух переменных над телом K; во избежание путаницы будем обозначать через U_X продолжение U на $G[X]$. Таким образом, для любого многочлена $g(X, Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(Y) X^k$, где $\gamma_k(Y) \in K[Y]$, имеем $U_X(g) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(Y) U(X^k)$. Так как отображение U_X линейно, то очевидно, что, положив $g(X, Y) = \sum_{h=0}^{\infty} \beta_h(X) Y^h$, получим $U_X(g) = \sum_{h=0}^{\infty} U(\beta_h) Y^h$.

Посредством канонического изоморфизма $K[X]$ на $K[Y]$, который элементу X ставит в соответствие Y, оператор U преобразуется в оператор $K[Y]$, который мы, во избежание всякой путаницы, обозначим через U_Y, и значит, $U_Y(f(Y))$ есть многочлен, полученный путем замены X на Y в многочлене $U(f(X)) = U_X(f(X))$. Этот оператор U_Y в свою очередь может быть продолжен в оператор (обозначаемый снова через U_Y) в $K[X, Y]$: если $g(X, Y) = \sum_{h=0}^{\infty} \beta_h(X) Y^h$, то в этом случае $U_Y(g(X, Y)) = \sum_{h=0}^{\infty} \beta_h(X) U_Y(Y^h)$.

В качестве примера этих продолжений приведем оператор *дифференцирования* D в $K[X]$ (Алгебра, гл. IV, § 4), который задается в $K[X, Y]$ операторами частного дифференцирования D_X и D_Y.

Для любого многочлена $f \in K[X]$ через $T_Y(f)$ обозначим многочлен $f(X+Y)$ из $K[X, Y]$; отображение T_Y есть K-линейное отображение $K[X]$ в $K[X, Y]$, называемое *оператором сдвига*.

Определение 1. *Говорят, что оператор U в $K[X]$ есть оператор композиции, если он перестановочен с оператором сдвига, то есть если $U_X T_Y = T_Y U_X$.*

Иными словами, если f — произвольный многочлен из $K[X]$ и если $g = U(f)$, то должно выполняться условие $g(X+Y) = U_X(f(X+Y))$.

Из этого определения сразу вытекает, что для любого многочлена $f(X) \in K[X]$ (в обозначениях, введенных выше) справедлива формула

$$U_X(f(X+Y)) = U_Y(f(X+Y)). \tag{1}$$

Примеры. 1) Для любого $\lambda \in K$ оператор, который всякому многочлену $f(X)$ ставит в соответствие многочлен $f(X+\lambda)$, есть оператор композиции.

2) *Дифференцирование* D в $K[X]$ есть оператор композиции (см. предложение 1).

Замечание. Так как K — бесконечное тело, то для того, чтобы оператор U в $K[X]$ был оператором композиции, необходимо и достаточно, чтобы для любого многочлена $f \in K[X]$ и любого элемента $\alpha \in K$, если положить $g = U(f)$, имело место равенство $g(X+\alpha) = U(f(X+\alpha))$ (Алгебра, гл. IV, § 2).

Ясно, что всякая линейная комбинация операторов композиции с коэффициентами из K есть оператор композиции; то же самое имеет место и для произведения двух операторов композиции. Иными словами, операторы композиции образуют *подалгебру* Γ алгебры эндоморфизмов векторного пространства $K[X]$.

Предложение 1. *Для того чтобы оператор U в $K[X]$ был оператором композиции, необходимо и достаточно, чтобы он был перестановочен с оператором дифференцирования D в $K[X]$.*

В самом деле, формула Тейлора показывает, что для любого многочлена $f \in K[X]$

$$U_X(f(X+Y)) = U_X\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} Y^k D^k f(X)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} Y^k U(D^k f(X));$$

если положить $g = U(f)$, то

$$g(X+Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} Y^k D^k g(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} Y^k D^k (U(f(X)));$$

тогда для того чтобы оператор U был оператором композиции при любом целом $k \geqslant 1$, должно выполняться равенство $UD^k = D^k U$ и, в частности, $UD = DU$. Обратно, если это соотношение выполняется, то из него индукцией по k получается соотношение $UD^k = D^k U$; в этом случае формула Тейлора показывает, что $g(X+Y) = U_X(f(X+Y))$.

Для любого многочлена $f \in K[X, Y]$ обозначим через $U_0(f)$ член многочлена $U_X(f)$, *не зависящий от* X; в частности, если $f \in K[X]$, то $U_0(f)$ есть *свободный член* многочлена $U(f)$, а U_0 — *линейная форма* в $K[X]$. Пусть для любого многочлена

$f \in K[X]$ имеем $g = U(f)$; тогда, согласно определению 1,

$$g(X+Y) = U_X(f(X+Y)) = U_X\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k D^k f(Y)\right) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} U(X^k) D^k f(Y),$$

и если в этой формуле заменить X на 0, то получим

$$g(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} U_0(X^k) D^k f(Y).$$

Таким образом, ясно, что

$$U(f(X)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mu_k D^k f(X), \tag{2}$$

где μ_k — *свободный член многочлена* $U(X^k)$.

Эта формула показывает, что задание μ_k полностью определяет оператор композиции U; обратно, если (μ_n) есть *произвольная* последовательность элементов из K, то формула (2) определяет оператор U, который, очевидно, перестановочен с D и, следовательно (предложение 1), является оператором композиции. Впредь мы будем записывать формулу (2) в виде

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mu_k D^k. \tag{3}$$

Эта формула с точки зрения топологии имеет следующее истолкование: если рассматривать $K[X]$ с дискретной топологией, а алгебру $\mathscr{L}(K[X])$ эндоморфизмов алгебры $K[X]$ — с топологией *простой* сходимости в $K[X]$ (Общая топология, гл. X, § 1, n° 3), то ряд с общим членом $\frac{1}{k!}\mu_k D^k$ коммутативно сходится в $\mathscr{L}(K[X])$ и имеет сумму U (Общая топология, гл. III, § 4, n° 7).

Формула (3) показывает, что всякому *формальному ряду* $u(S) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k S^k$ от одной переменной над телом K (Алгебра, гл. IV, § 5) можно поставить в соответствие оператор композиции $U = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k D^k$, который мы впредь будем обозначать через $u(D)$. Это замечание допускает следующее уточнение.

Теорема 1. *Отображение, которое всякому формальному ряду* $u(S)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k S^k$ *от одной переменной над телом* K *ставит в соответствие оператор композиции* $u(D)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k D^k$ *в* $K[X]$, *есть изоморфизм алгебры* $K[[S]]$ *формальных рядов на алгебру* Γ *операторов композиции.*

Сразу же убеждаемся в том, что это отображение есть представление. Следовательно, все сводится к тому, чтобы показать, что оно взаимно однозначно, или, другими словами, что соотношение $\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k D^k=0$ влечет $\alpha_k=0$ для любого k; но $h!\alpha_h$ есть свободный член многочлена, получающегося в результате применения операции $\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k D^k$ к X^h, откуда и следует теорема.

Следствие. *Алгебра* Γ *операторов композиции в* $K[X]$ *коммутативна.*

Пример. Если U есть оператор, который всякому многочлену $f(X)$ ставит в соответствие $f_\infty(X+\lambda)$ (где $\lambda\in K$), то $U_0(X^k)=\lambda^k$, и, значит, $U=\sum_{k=0}\frac{1}{k!}(\lambda D^k)$. По аналогии с разложением в ряд функции e^x (гл. III, § 2, n° 1) мы будем через e^s или через $\exp(S)$ обозначать формальный ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n!}S^n$ в кольце $K[[S]]$; следовательно, можно написать $U=e^{\lambda D}$. Заменив в этом рассуждении тело K телом рациональных дробей $K(Y)$, получаем также, что *оператор сдвига* T_Y можно записать в виде e^{YD}.

Отметим, что в кольце $K[[S, T]]$ формальных рядов над K относительно двух переменных имеет место формула

$$(\exp S)(\exp T)=\sum_{p,q}\frac{S^pT^q}{p!q!}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\binom{n}{0}S^n+\binom{n}{1}S^{n-1}T+\ldots+\binom{n}{n}T^n\right)=\exp(S+T) \quad (4)$$

и, в частности, формула

$$(\exp S)(\exp(-S)) = 1, \tag{5}$$

что оправдывает введенное обозначение.

Схолия. Изоморфизм алгебры $K[[S]]$ формальных рядов с алгеброй Γ операторов композиции в $K[X]$ позволяет иногда доказывать более простым путем предложения, относящиеся к формальным рядам, доказывая их для операторов композиции, соответствующих этим рядам (см. предложение 6).

2. *Многочлены Аппеля, соответствующие оператору композиции*

Пусть имеется оператор композиции $U = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k D^k \neq 0$, и пусть p — наименьшее целое k, для которого $\alpha_k \neq 0$; будем говорить, что p есть *порядок* оператора U.

Предложение 2. *Всякий оператор композиции порядка* 0 *обратим в алгебре* Γ *операторов композиции в* $K[X]$.

В самом деле, формальный ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k S^k$, для которого $\alpha_0 \neq 0$, *обратим* в кольце $K[[S]]$ (Алгебра, гл. IV, § 5, предложение 4); следовательно, доказываемое предложение вытекает из изоморфизма между $K[[S]]$ и Γ, установленного теоремой 1.

Предложение 3. *Пусть U — оператор композиции порядка p; для любого многочлена f, степень которого меньше p, $U(f) = 0$; для любого многочлена $f \neq 0$ степени $n \geqslant p$ имеем, что $U(f)$ есть не равный* 0 *многочлен степени $n - p$.*

Это предложение является прямым следствием формулы (2) и определения порядка оператора U.

Ясно, что всякий оператор U порядка p может быть записан единственным способом в виде $U = D^p V = V D^p$, где V есть оператор порядка 0 (то есть обратимый).

Определение 2. *Пусть $U = D^p V$ — оператор композиции порядка p в $K[X]$. Многочленом Аппеля порядка n, соответствующим оператору U, называется многочлен $u_n(X) = V^{-1}(X^n)$.*

Если $V^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\beta_k D^k$ (с $\beta_0\neq 0$), то

$$u_n(X)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\beta_n X^{n-k}. \tag{6}$$

Таким образом, установлено, что u_n есть многочлен *степени n* (предложение 3) и что, кроме того,

$$u_n(0)=\beta_n.$$

Предложение 4. *Многочлены Аппеля, соответствующие U, удовлетворяют соотношениям*

$$\frac{du_n}{dX}=nu_{n-1}, \tag{7}$$

$$u_n(X+Y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_{n-k}(X)\,Y^k, \tag{8}$$

$$U(u_n(X))=\frac{n!}{(n-p)!}X^{n-p}. \tag{9}$$

В самом деле, эти формулы соответственно равносильны следующим соотношениям (с учетом определения 2):

$$DV^{-1}=V^{-1}D, \tag{10}$$

$$(\exp(YD_X))\,V_X^{-1}=V_X^{-1}\exp(YD_X), \tag{11}$$

$$UV^{-1}=D^p. \tag{12}$$

Предложение 5. *Для любого многочлена $f\in K[X]$ и любого оператора композиции U порядка p справедлива формула*

$$f^{(p)}(X+Y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}U(f^{(k)}(X))\,u_k(Y) \tag{13}$$

(*обобщенное разложение Тейлора*).

В самом деле, если положить $U=D^pV=VD^p$, то (формула (1))

$$V_X^{-1}(f(X+Y))=V_Y^{-1}(f(X+Y))=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(X)\,u_k(Y) \tag{14}$$

на основании формулы Тейлора и определения 2; для того чтобы получить формулу (13), достаточно применить оператор U_X к двум крайним членам формулы (14).

3. Производящий ряд многочленов Аппеля

Пусть E — кольцо *формальных рядов* от переменной S с коэффициентами из кольца многочленов $K[X]$ (Алгебра, гл. IV, § 5), или, другими словами, кольцо формальных рядов $g(X, S) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(X) S^n$, где α_n принадлежит $K[X]$. Определим для любого оператора U в $K[X]$ отображение U_X кольца E в себя, положив $U_X(g(X, S)) = \sum_{n=0}^{\infty} U(\alpha_n) S^n$. Ясно, что E есть модуль над кольцом $K[[S]]$ формальных рядов от S с коэффициентами из K; на основании линейности оператора U в $K[X]$ сразу получаем, что $U_X(\theta g) = \theta U_X(g)$ для любого элемента $\theta \in K[[S]]$ и любого $g \in E$; иными словами, U_X есть *линейное* отображение модуля E в себя.

Предложение 6. *Пусть $U = D^p V = u(D)$ — оператор композиции порядка p в $K[X]$, причем $u(S)$ есть формальный ряд порядка p в $K[[S]]$. Тогда справедливы формулы*

$$U_X(\exp(XS)) = u(S) \cdot \exp(XS), \tag{15}$$

$$\frac{S^p}{u(S)} \exp(XS) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} u_n(X) S^n, \tag{16}$$

где u_n — многочлен Аппеля порядка n, соответствующий U.

На основании схолии из теоремы 1 (n° 1) для доказательства формулы (15) достаточно показать, что для любого многочлена $f(Y) \in K[Y]$ выполняется равенство

$$U_X(\exp(XD_Y)(f(Y))) = u(D_Y)(\exp(XD_Y)(f(Y))). \tag{17}$$

Но левая часть в формуле (17) равна $U_X(f(X+Y))$, а так как $U = u(D)$, то правая часть формулы (17) равна $U_Y(f(X+Y))$, так что тождество (17) сводится к (1).

Далее, для получения формулы (16) достаточно применить (15) к оператору композиции $V^{-1} = \frac{D^p}{u(D)}$, так как, по определению,

$$V^{-1}(\exp(XS)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} u_n(X) S^n.$$

Отметим, что формулу (16) *можно также получить*, перемножая формальные ряды $\frac{S^p}{u(S)}$ и $\exp(XS)$ с учетом формулы (6).

Говорят, что формальный ряд (16) есть *производящий ряд* многочленов Аппеля, соответствующих U.

4. Многочлены Бернулли

Рассмотрим оператор композиции U, определенный равенством

$$U(f(X)) = f(X+1) - f(X);$$

можно написать, что $U = e^D - 1$ (n° 1, Пример); порядок этого оператора равен 1, и если положить $U = DV$, то $V^{-1} = \frac{D}{e^D - 1}$. Многочлен Аппеля степени n, соответствующий оператору U, называется *многочленом Бернулли* степени n и обозначается $B_n(X)$; если положить $b_n = B_n(0)$, то будут иметь место формулы

$$B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} X^k, \tag{18}$$

$$\frac{Se^{XS}}{e^S - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B_n(X) S^n, \tag{19}$$

и, в частности, формула

$$\frac{S}{e^S - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} b_n S^n. \tag{20}$$

Формулы (7) и (9) дают для многочленов Бернулли соотношения

$$\frac{dB_n}{dX} = nB_{n-1}(X), \tag{21}$$

$$B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}. \tag{22}$$

В частности, для $n > 1$ справедливо равенство $B_n(1) - B_n(0) = 0$, которое, с учетом формулы (18), дает рекуррентное соотношение

$$\sum_{m=0}^{n-1} \binom{n}{m} b_n = 0 \qquad (\text{для } n > 1), \tag{23}$$

позволяющее вычислять последовательно значения b_n. Эти числа, очевидно, *рациональны*; а так как

$$\frac{S}{e^S-1}=-\frac{S}{2}+\frac{S}{2}\,\frac{e^S+1}{e^S-1}$$

и (формула (5))

$$\frac{e^{-S}+1}{e^{-S}+1}=-\frac{e^S+1}{e^S-1},$$

то ясно, что все члены *нечетной* степени формального ряда $\frac{S}{2}\,\frac{e^S+1}{e^S-1}$ имеют коэффициентами нули; следовательно,

$$b_0=1,\ b_1=-\frac{1}{2},\ b_{2n-1}=0 \text{ для } n>1. \tag{24}$$

Рациональные числа b_{2n} $(n\geqslant 1)$ называются *числами Бернулли*; в § 2 мы покажем, что b_{2n} имеет знак $(-1)^{n-1}$. Для первых значений n формула (23) дает

$$b_2=\frac{1}{6},\quad b_4=-\frac{1}{30},\quad b_6=\frac{1}{42},\quad b_8=-\frac{1}{30},\quad b_{10}=\frac{5}{66},$$
$$b_{12}=-\frac{691}{2730},\quad b_{14}=\frac{7}{6}.$$

5. *Операторы композиции над функциями действительного переменного*

Пусть I — интервал из $\mathbf{R}$, содержащий интервал $\mathbf{R}_+=[0,+\infty[$; пусть E — векторное пространство над телом $\mathbf{C}$, состоящее из определенных на I функций действительного переменного с комплексными значениями. Предположим, что для любого $a\geqslant 0$ и для всякой функции $f\in E$ функция $x\to f(x+a)$ принадлежит E; кроме того, предположим, что E содержит сужения на I *многочленов с комплексными коэффициентами и показательных функций* $e^{\lambda x}$, где λ — произвольное *комплексное* число. *Оператором* на E будем называть всякое линейное отображение U пространства E на пространство всех отображений интервала I в тело $\mathbf{C}$ комплексных чисел; если $f\in E$ и $g=U(f)$, то в этом случае удобно будет употребить обозначение

$$g(x)=U_x^{\xi}(f(\xi)),$$

где, следовательно, ξ есть *немая* переменная в функциональном символе правого члена (см. гл. II, § 1, n° 4). Для любого

$a \geqslant 0$ оператор, относящий всякой функции $f \in E$ сужение на I функции $x \to f(x+a)$, называется *оператором сдвига на* a.

Определение 3. *Говорят, что оператор U в E есть оператор композиции, если для любого $a \geqslant 0$ он перестановочен с оператором сдвига на a.*

Используя введенное выше обозначение, это определение можно выразить тождеством по x и a ($x \in I$, $a \geqslant 0$):

$$U^{\xi}_{x+a}(f(\xi)) = U^{\xi}_{x}(f(\xi+a)). \tag{25}$$

В этом тождестве, при условии $x \geqslant 0$, можно поменять местами x и a, а затем положить $a=0$; тогда для любого $x \geqslant 0$ получим

$$U^{\xi}_{x}(f(\xi)) = U^{\xi}_{0}(f(\xi+x)), \tag{26}$$

где U_0 — *линейная форма* в E, которая всякой функции $f \in E$ ставит в соответствие значение $g(0)$ функции $g = U(f)$.

Если f — многочлен, то $f(\xi+x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\xi)\, x^k$ и, стало быть, формула (26) показывает, что $U(f)$ — многочлен; сужая оператор U на множество многочленов от x с коэффициентами из $\mathbf{C}$ (множество, которое можно отождествить с алгеброй $\mathbf{C}[X]$), получим, что U есть оператор композиции в смысле определения 1 и что к нему применимы все результаты предыдущих пунктов.

Обозначим снова через u_n многочлены Аппеля, соответствующие оператору U. Обобщенному разложению Тейлора многочлена (формула (13)) для более общих функций соответствует следующий результат:

Теорема 2. *Пусть f — функция, имеющая на I непрерывную $(n+1)$-ю производную и принадлежащая E вместе со всеми своими производными $f^{(m)}$ при $1 \leqslant m \leqslant n$. Если U — оператор композиции порядка $p \leqslant n$ в E, то для $x \geqslant 0$ и $h \geqslant 0$ справедлива формула*

$$f^{(p)}(x+h) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} u_m(x)\, U^{\xi}_{h}(f^{(m)}(\xi)) + R_n(x, h), \tag{27}$$

где

$$R_n(x,\ h) = -U_h^\xi \left(\int_0^{\xi-x-h} \frac{1}{n!} u_n(x+\eta) f^{(n+1)}(\xi-\eta)\, d\eta \right) \qquad (28)$$

(*обобщенное разложение Тейлора*).

Рассмотрим интеграл $\int_0^{\xi-x-h} \frac{1}{n!} u_n(x+\eta) f^{(n+1)}(\xi-\eta)\, d\eta$, определенный для всех $\xi \in I$, и применим к нему формулу интегрирования по частям порядка n (гл. II, § 1, формула (12)); принимая во внимание соотношения $u_n^{(k)} = n(n-1)\ \dots\ (n-k+1)\, u_{n-k}$, получаемые из (7) индукцией, выводим, что

$$\int_0^{\xi-x-h} \frac{1}{n!} u_n(x+\eta) f^{(n+1)}(\xi-\eta)\, d\eta =$$
$$= \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} u_m(x) f^{(m)}(\xi) - \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} u_m(\xi-h) f^{(m)}(x+h). \qquad (29)$$

Применим оператор U к обеим частям формулы (29), рассматриваемым как функции от ξ, а затем возьмем значение функции, полученное для значения h переменной ξ; замечая, что согласно формулам (26) и (9)

$$U_h^\xi(u_m(\xi-h)) = U_0^\xi(u_m(\xi)) = \begin{cases} 0 & \text{для } m \neq p, \\ p! & \text{для } m = p, \end{cases}$$

получаем окончательно формулу (27).

6. *Индикатриса оператора композиции*

При тех же предположениях, что и в n° 5, применяя к функции $e^{\lambda x}$ формулу (26), получаем

$$U_x^\xi(e^{\lambda\xi}) = U_0^\xi(e^{\lambda x} e^{\lambda\xi}) = e^{\lambda x} U_0^\xi(e^{\lambda\xi}) = u(\lambda)\, e^{\lambda x}, \qquad (30)$$

где полагаем $u(\lambda) = U_0^\xi(e^{\lambda\xi})$. Говорят, что функция $u(\lambda)$, определенная на $\mathbf{C}$ и принимающая комплексные значения, есть *индикатриса* оператора композиции U. Отметим, что если сужение оператора U на кольцо $\mathbf{C}[X]$ многочленов равно ряду $D^p \sum_{n=0}^{\infty} a_n D^n$ (теорема 1) (который мы в n° 1 обозначили через $u(D)$), то ряд *с комплексными членами*, общий член которого имеет вид $\alpha_n\lambda^{n+p}$, *не обязан сходиться* для $\lambda \neq 0$, и даже если для некоторых значений λ он сходится, то его сумма *не обязана равняться индикатрисе* $u(\lambda)$ *оператора* U (упражнение 2). Будем говорить, что оператор композиции U является *регулярным*, если в C существует такая окрестность 0, что в этой окрестности ряд с общим членом $\alpha_n\lambda^{n+p}$ абсолютно сходится и имеет сумму, *равную индикатрисе* $u(\lambda)$ *).

Применим формулу (27) к функции $e^{\lambda x}$, положив $h=0$; поскольку $D^m(e^{\lambda x}) = \lambda^m e^{\lambda x}$, то $U_0^\xi(D^m(e^{\lambda\xi})) = \lambda^m u(\lambda)$; таким образом, для любого комплексного λ, для которого $u(\lambda) \neq 0$, получаем

$$\frac{\lambda^p e^{\lambda x}}{u(\lambda)} = \sum_{m=0}^{n} u_m(x)\frac{\lambda^m}{m!} - \frac{\lambda^{n+1}}{u(\lambda)} U_0^\xi\left(\int_0^{\xi-x} \frac{1}{n!} u_n(x+\eta)\, e^{\lambda(\xi-h)}\, d\eta\right) \quad (31)$$

и, в частности, для $x=0$,

$$\frac{\lambda^p}{u(\lambda)} = \sum_{m=0}^{n} \beta_m \frac{\lambda^m}{m!} - \frac{\lambda^{n+1}}{u(\lambda)} U_0^\xi\left(\int_0^{\xi} \frac{1}{n!} u_n(\eta)\, e^{\lambda(\xi-\eta)}\, d\eta\right) \quad (32)$$

с $\beta_m = u_m(0)$.

Если U есть оператор, *регулярный*, то для любого $\lambda \in C$, для которого степенные ряды $u(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\lambda^{n+p}$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \frac{\lambda^n}{n!}$ абсолютно сходятся **), из формулы (16) и из формулы для произведения двух абсолютно сходящихся рядов (Общая топология, гл. VIII, § 3, предложение 1) следует, что

$$\frac{\lambda^p}{u(\lambda)} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \frac{\lambda^n}{n!}. \quad (33)$$

Точно так же, в силу того что разложение в ряд Тейлора функции $e^{\lambda x}$ абсолютно сходится для любого $\lambda \in C$ и любого $x \in C$

---

*) Позже мы будем изучать ряды, общий член которых имеет вид $c_n z^n$ ($c_n \in C$, $z \in C$) и которые называются *степенными рядами*; в частности, мы покажем, что если такой ряд абсолютно сходится при $z = z_0$, то он *нормально сходится* для $|z| < |z_0|$.

**) Из теории степенных рядов вытекает, что если один из этих рядов абсолютно сходится в некоторой окрестности V точки 0, то другой абсолютно сходится в некоторой окрестности $W \subset V$ точки 0.

(гл. III, § 2), мы получаем (формулы (6) и (16)) для всех рассматриваемых значений λ и для любого $x \in \mathbf{C}$

$$\frac{\lambda^p e^{\lambda x}}{u(\lambda)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \frac{\lambda^n}{n!}. \tag{34}$$

Замечание. Формулу (33) (соответственно (34)) можно использовать для вычисления β_n (соответственно $u_n(x)$), применив следующую лемму из теории степенных рядов:

Лемма. *Если два степенных ряда* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n$ *и* $\sum_{n=0}^{\infty} d_n \lambda^n$ *абсолютно сходятся для любого* λ *из некоторой окрестности* 0 *и если для этих значений* λ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \lambda^n$, *то* $c_n = d_n$ *для любого целого* $n \geqslant 0$ *).

Если можно каким-нибудь способом получить сходящийся степенной ряд, равный $\frac{\lambda^p}{u(\lambda)}$ в некоторой окрестности 0, то коэффициенты этого ряда равны β_n. Именно такой прием мы и будем использовать в нижеследующих примерах.

Примеры. 1) Если U — тождественное отображение, то $u(\lambda) = 1$ и оператор U, очевидно, регулярен; а так как $u_n(x) = x^n$, то формула (27), если положить $t = \xi - h$, записывается в виде

$$f(x+h) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} f^{(m)}(h) x^m + \int_{h}^{x+h} f^{(n+1)}(t) \frac{(x+h-t)^n}{n!} dt,$$

то есть сводится к формуле Тейлора (гл. II, § 1, n° 6).

---

*) Эта лемма представляет собой частный случай одного общего результата, который мы докажем позже; приведем ее доказательство. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n$ абсолютно сходится для $\lambda = \lambda_0$, то при любом целом $k \geqslant 0$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k} \lambda^n$ нормально сходится для $|\lambda| \leqslant |\lambda_0|$, и значит, его сумма непрерывна на этом круге (Общая топология, гл. X, § 2, теорема 1); отсюда заключаем, что $\sum_{n=k+1}^{\infty} c_n \lambda^n = o(\lambda^k)$ в окрестности 0. Тогда лемма получается из условия единственности коэффициентов асимптотического разложения функции по λ^n (гл. V, § 2, n°2).

2) Возьмем в качестве U оператор композиции, который всякой функции f, определенной на $\mathbf{R}_+$, ставит в соответствие функцию $x \to f(x+1)-f(x)$; следовательно, $U_x^\xi(f(\xi))=f(x+1)-f(x)$; мы показали (n° 4), что сужение оператора U на $\mathbf{C}[X]$ равно e^D-1. Так как, с другой стороны, $u(\lambda)=e^\lambda-1$, то оператор U *регулярен*; в § 2 мы покажем, как можно определить числа Бернулли b_n, вычисляя разложение в сходящийся степенной ряд функции $\frac{\lambda}{e^\lambda-1}$. Применяя формулу (27) к функции, *примитивной* для функции f, получаем

$$f(x+h)=\int_h^{h+1} f(t)\,dt+$$
$$+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m!}B_m(x)\left(f^{(m-1)}(h+1)-f^{(m-1)}(h)\right)+R_n(x,h), \tag{35}$$

где

$$R_n(x,h)=-\int_0^{1-x}\frac{B_n(x+\eta)}{n!}f^{(n)}(h+1-\eta)\,d\eta+$$
$$+\int_0^{-x}\frac{B_n(x+\eta)}{n!}f^{(n)}(h-\eta)\,d\eta. \tag{36}$$

*3) Пусть E — векторное пространство функций f, определенных и непрерывных на $\mathbf{R}$ и, кроме того, удовлетворяющих тому условию, что интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+\xi)\,e^{-\frac{\xi^2}{2}}\,d\xi$ сходится при любом $x\geqslant 0$. Следовательно, оператор U, определенный равенством

$$U_x^\xi(f(\xi))=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\xi^2}{2}}f(x+\xi)\,d\xi,$$

определен в E и является, очевидно, оператором композиции. Пространство E содержит все показательные функции $e^{\lambda x}$ (λ — произвольное комплексное), причем

$$u(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\xi^2}{2}+\lambda\xi}\,d\xi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{\lambda^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(\xi-\lambda)^2}{2}}\,d\xi=e^{\frac{\lambda^2}{2}}$$

(см. гл. III, § 1, упражнение 24 и гл. VII, § 1, формула (22)).

Имеем $n!a_n = U_0^\xi(\xi^n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \xi^n d\xi$. Для любого целого n можно написать, что

$$\sum_{k=0}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\lambda\xi|^k}{k!} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi \leqslant 2 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}+|\lambda|\xi} d\xi.$$

Поэтому ряд $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \frac{(\lambda\xi)^n}{n!}$ можно почленно интегрировать на $\mathbf{R}$ (гл. II, § 3, следствие 1 из предложения 3), что показывает, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\lambda^n$ абсолютно сходится при любом $\lambda \in \mathbf{C}$ и имеет сумму, равную $u(\lambda) = e^{\frac{\lambda^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2n}}{2^n n!}$; следовательно, U — *регулярный* оператор. Применение сформулированной выше леммы показывает, что $\alpha_{2n} = \frac{1}{2^n n!}$, $\alpha_{2n+1} = 0$ для любого $n \geqslant 0$; значит, оператор U имеет порядок 0. Имеем $\frac{1}{u(\lambda)} = e^{-\frac{\lambda^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^{2n}}{2^n n!}$, где ряд абсолютно сходится при любом $\lambda \in \mathbf{C}$; повторное применение леммы показывает, что $\beta_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{(2n)!}{n!}$, $\beta_{2n+1} = 0$; кроме того, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} u_n(x)$ абсолютно сходится для любого $\lambda \in c$ и любого $x \in \mathbf{R}$ и

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} u_n(x) = \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2} + \lambda x\right) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}(\lambda - x)^2\right).$$

Стало быть, применяя формулу Тейлора к функции $\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, получаем следующее выражение для многочленов $u_n(x)$:

$$u_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-\frac{x^2}{2}}).$$

Этот многочлен называется *многочленом Эрмита* порядка n и обозначается чаще всего через $H_n(x)$. Формулы (7), (8) и (9) в этом случае дают

$$\frac{dH_n}{dx} = nH_{n-1}(x),$$

$$H_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} H_{n-k}(x)\, y^k,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(x+\xi)\, d\xi = x^n,$$

и формула (27) (при $h=0$) принимает вид

$$\sqrt{2\pi}\, f(x) = \sum_{m=0}^{n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}} f^{(m)}(\xi)\, d\xi \right) \frac{H_m(x)}{m!} -$$

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{0}^{\xi} \frac{H_n(x+\eta)}{n!}\, e^{\frac{-(\xi+x)^2}{2}} f^{(n+1)}(x+\xi-\eta)\, d\eta.$$

7. *Формула суммирования Эйлера—Маклорена*

Заменим в формуле (35) x на 0, а h на x; так как $B_m(0) = b_m$, то из соотношений (24) следует, что для любого целого $p > 0$

$$f(x) = \int_{x}^{x+1} f(t)\, dt - \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x)) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} \frac{b_{2k}}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(x+1) - f^{(2k-1)}(x)) + R_p(x), \tag{37}$$

где

$$R_p(x) = -\frac{1}{(2p+1)!} \int_{0}^{1} B_{2p+1}(t)\, f^{(2p+1)}(x+1-t)\, dt. \tag{38}$$

Заменим в этой формуле последовательно x на $x+1$, $x+2$, ..., $x+n$ и полученные формулы сложим почленно; получим

$$f(x) + f(x+1) + \ldots + f(x+n) =$$

$$= \int_{x}^{x+n+1} f(t)\, dt - \frac{1}{2}(f(x+n+1) - f(x)) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} \frac{b_{2k}}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(x+n+1) - f^{(2k-1)}(x)) + T_p(x, n), \tag{39}$$

где

$$T_p(x, n) = -\frac{1}{(2p+1)!}\int_0^1 B_{2p+1}(t)\left(\sum_{k=0}^{n} f^{(2p+1)}(x+k+1-t)\right)dt. \quad (40)$$

Остаток $T_p(x, n)$ в этой формуле может быть записан еще следующим образом: обозначим через $\overline{B}_{2p+1}(t)$ *периодическую* функцию с периодом 1, равную $B_{2p+1}(t)$ на интервале $[0, 1[$. Тогда

$$\int_0^1 B_{2p+1}(t) f^{(2p+1)}(x+k+1-t)\,dt = \int_k^{k+1} \overline{B}_{2p+1}(1-s) f^{(2p+1)}(x+s)\,ds$$

и, следовательно,

$$T_p(x, n) = -\frac{1}{(2p+1)!}\int_0^{n+1} \overline{B}_{2p+1}(1-s) f^{(2p+1)}(x+s)\,ds. \quad (41)$$

Формула (39) называется *формулой суммирования Эйлера — Маклорена*; она применима к любой комплексной функции, имеющей $(2p+1)$-ю непрерывную производную на интервале $[x_0, +\infty[$, т. е. для любого $x \geqslant x_0$. В § 3 мы покажем, как можно оценить сверху *остаток* $T_p(x, n)$ в этой формуле.

Упражнения. 1) Пусть K — тело характеристики 0, U и V — два оператора композиции в $K[X]$ и $W = UV = VU$; пусть, далее, (u_n), (v_n), (w_n) — последовательности многочленов Аппеля, соответствующие U, V и W. Доказать, что если p — порядок u, то

$$u_n^{(p)}(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} v_{n-k}(X)\, V_0(u_k),$$

$$w_n(X+Y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k(X) v_{n-k}(Y).$$

2) Пусть E — векторное пространство над телом $\mathbf{C}$, порожденное функциями x^n $(n \in \mathbf{N})$, $e^{\lambda x}$ $(\lambda \in \mathbf{C},\ \lambda \neq 0)$ и $|x-\mu|$ $(\mu \in \mathbf{R})$.

а) Показать, что вышеуказанные функции образуют базис пространства E.

б) Пусть U — оператор композиции, определенный в E при помощи условий $U_0^{\xi}(\xi^n) = (n!)^2$, $U(e^{\lambda x}) = e^{\lambda x}$ для $\lambda \neq 0$, $U(|x+\mu|) = |x+\mu|$ для $\mu \in R$. Тогда индикатриса $u(\lambda)$ есть постоянная, равная 1, но ряд с общим членом $n!\,\lambda^n$ не сходится ни при каком значении $\lambda \neq 0$.

в) Пусть V — оператор композиции, определенный в E при помощи условий $V(x^n)=x^n$, $V(|x+\mu|)=|x+\mu|$, $V(e^{\lambda x})=0$ для $\lambda\neq 0$; тогда индикатриса $u(\lambda)$ равна 1 для $\lambda=0$, 0 для $\lambda\neq 0$ и, значит, отлична от суммы ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\lambda^n$, где $\alpha_n=V_0^{\xi}(\xi^n)$.

г) Пусть W — оператор композиции, определенный в E условиями $W(x^n)=x^n$, $W(e^{\lambda x})=e^{\lambda x}$, $W(|x+\mu|)=e^{x+\mu}$; показать, что $VW\neq \neq WV$.

3) Пусть K — тело характеристики 0. Говорят, что эндоморфизм U алгебры $K[X, Y]$ многочленов от двух переменных X и Y над K есть оператор композиции, если, полагая для любого многочлена $f\in K[X, Y]$ $g=U(f)$, будем иметь $g(X+S,\ Y+T)=U_{X,Y}(f(X+ +S,\ Y+T))$, где S и T — новые переменные.

а) Обобщить на эти операторы предложение 1 и теорему 1. Вывести отсюда новое доказательство формулы $e^{S+T}=e^Se^T$.

б) Определить многочлены Аппеля $u_{m,n}$ и обобщить предложения 4, 5 и 6 на операторы композиции вида $D_X^p\ D_Y^p\ u\ (D_{X,\ Y})$, где свободный член формального ряда u отличен от нуля.

в) Рассмотрим, в частности, оператор композиции U, определенный равенством

$$U(f(X, Y))=f(X+1,\ Y+1)-f(X,\ Y+1)-f(X+1, Y)+f(X, Y);$$

многочленами Бернулли называют и обозначают через $B_{m,n}$ многочлены Аппеля, соответствующие этому оператору. Показать, что $B_{m,n}(X, Y)=B_m(X)\,B_n(Y)$.

§ 2. Эйлеровы разложения тригонометрических функций и числа Бернулли

1. *Эйлерово разложение функции* $\operatorname{ctg} z$

Согласно формуле (20) из § 1 числа $\frac{b_n}{n!}$ являются коэффициентами разложения в *формальный* ряд функции $\frac{S}{e^S-1}$; в этом параграфе мы докажем, что функция $\frac{z}{e^z-1}$ равна сумме степенного ряда, абсолютно сходящегося в некоторой окрестности 0 в $\mathbf{C}$; отсюда и из леммы, сформулированной в § 1, n° 6, получим, что коэффициентами этого ряда будут числа $\frac{b_n}{n!}$, откуда выведем оценки сверху для чисел Бернулли b_n.

Во-первых, отметим, что

$$\frac{z}{e^z-1}=-\frac{z}{2}+\frac{z}{2}\,\frac{e^z+1}{e^z-1}=-\frac{z}{2}+\frac{iz}{2}\operatorname{ctg}\frac{iz}{2}\,. \qquad (1)$$

Ниже мы получим разложение в ряд функции $\operatorname{ctg} z$, справедливое для любого z, отличного от значений, являющихся целыми кратными числа π.

Предложение 1. *Для любого комплексного числа z и любого целого n имеем*

$$\sin nz = 2^{n-1}\sin z \sin\left(z+\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(z+\frac{2\pi}{n}\right)\ldots\sin\left(z+\frac{(n-1)\pi}{n}\right). \tag{2}$$

Действительно, можно написать, что

$$\sin nz = \frac{e^{niz}-e^{-niz}}{2i} = \frac{e^{-niz}(e^{2niz}-1)}{2i} =$$

$$= \frac{e^{-niz}(e^{2iz}-1)\left(e^{2iz}-e^{-\frac{2i\pi}{n}}\right)\ldots\left(e^{2iz}-e^{-\frac{2(n-1)i\pi}{n}}\right)}{2i} =$$

$$= A\sin z\sin\left(z+\frac{\pi}{n}\right)\ldots\sin\left(z+\frac{(n-1)\pi}{n}\right),$$

где

$$A=(2i)^{n-1}e^{-\frac{i\pi}{n}(1+2+\ldots+(n-1))}=(2i)^{n-1}e^{-i(n-1)\frac{\pi}{2}}=2^{n-1}.$$

Следствие 1. *Для любого целого n имеем*

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}. \tag{3}$$

Разделим обе части формулы (2) на $\sin z$ и устремим z к 0.

Следствие 2. *Для любого целого нечетного $n=2m+1$ и любого комплексного числа z такого, что nz не является целым кратным числа π, справедлива формула*

$$\operatorname{ctg} nz=(-1)^m\operatorname{ctg} z\operatorname{ctg}\left(z+\frac{\pi}{n}\right)\ldots\operatorname{ctg}\left(z+\frac{(n-1)\pi}{n}\right). \tag{4}$$

В самом деле, $\sin n\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(nz+\frac{\pi}{2}+m\pi\right)=(-1)^m\cos nz$, откуда, заменяя в формуле (2) z на $z+\frac{\pi}{2}$, получаем

$$\cos nz=(-1)^m 2^{n-1}\cos z\cos\left(z+\frac{\pi}{n}\right)\ldots\cos\left(z+\frac{(n-1)\pi}{n}\right), \tag{5}$$

и формула (4) вытекает из формул (2) и (5) путем их почленного деления друг на друга, когда $\sin nz\neq 0$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что $n=2m+1$ — всегда целое нечетное; формулу (4) можно также записать в виде

$$\operatorname{ctg} nz=(-1)^m \sum_{k=-m}^{m} \operatorname{ctg}\left(z-\frac{k\pi}{n}\right).$$

Но $\operatorname{ctg}\left(z-\frac{k\pi}{n}\right)=\dfrac{1+\operatorname{tg} z \operatorname{tg}\frac{k\pi}{n}}{\operatorname{tg} z-\operatorname{tg}\frac{k\pi}{n}}$ для конечных $\operatorname{tg} z$; следовательно, $\operatorname{ctg} nz$ как функция от $u=\operatorname{tg} z$ является рациональной дробью, числитель которой имеет степень $n-1$, а знаменатель есть многочлен степени n, имеющий n простых корней $\operatorname{tg}\frac{k\pi}{n}$; разлагая эту дробь на простейшие, получаем

$$\operatorname{ctg} nz=\sum_{k=-m}^{m} \frac{A_k}{u-\operatorname{tg}\frac{k\pi}{n}}, \tag{6}$$

где

$$A_k=\lim_{z\to\frac{k\pi}{n}} \operatorname{ctg} nz\left(\operatorname{tg} z-\operatorname{tg}\frac{k\pi}{n}\right)=\lim_{z\to\frac{k\pi}{n}} \frac{\cos nz \sin\left(z-\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin nz \cos z \cos\frac{k\pi}{n}}=$$

$$=\lim_{h\to 0} \frac{\cos nh}{\cos\frac{k\pi}{n}\cos\left(h+\frac{k\pi}{n}\right)}\,\frac{\sin h}{\sin nh}=\frac{1}{n\cos^2\frac{k\pi}{n}},$$

откуда, отбросив в формуле (6) член, соответствующий $k=0$, объединив члены, соответствующие противоположным значениям k, и заменив z на $\frac{z}{n}$, получим формулу

$$\operatorname{ctg} z=\frac{1}{n\operatorname{tg}\frac{z}{n}}+\sum_{k=1}^{m} \frac{2n\operatorname{tg}\frac{z}{n}}{\cos^2\frac{k\pi}{n}\left(n\operatorname{tg}\frac{z}{n}\right)^2-\left(n\sin\frac{k\pi}{n}\right)^2}, \tag{7}$$

справедливую при всех комплексных значениях z, не являющихся целым кратным $\frac{\pi}{2}$. Эту формулу можно записать в виде

$$\operatorname{ctg} z=\frac{1}{n\operatorname{tg}\frac{z}{n}}+\sum_{k=1}^{\infty} v_k(n, z), \quad \text{где} \quad v_k(n, z)=0 \quad \text{для} \quad k>m$$

и

$$v_k(n, z)=\frac{2n\operatorname{tg}\frac{z}{n}}{\cos^2\frac{k\pi}{n}\left(n\operatorname{tg}\frac{z}{n}\right)^2-\left(n\sin\frac{k\pi}{n}\right)^2} \quad \text{для} \quad 1\leqslant k\leqslant m.$$

Мы покажем, что для любого z, содержащегося в *компактном подмножестве* K пространства $\mathbf{C}$, не содержащем целых кратных π, и для любого достаточно большого нечетного n ряд с общим членом $v_k(n, z)$ *нормально сходится*. В самом деле, когда n стремится к $+\infty$, $n \operatorname{tg} \frac{z}{n}$ равномерно стремится к z на K, и значит, найдется такое число $M > 0$, что $\left| n \operatorname{tg} \frac{z}{n} \right| \leqslant M$ для любого достаточно большого целого m и любого $z \in K$. С другой стороны, для $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ имеем $\frac{\sin x}{x} \geqslant 1 - \frac{x^2}{6} \geqslant \frac{1}{2}$ и, значит, для $1 \leqslant k \leqslant m$ имеем $n \sin \frac{k\pi}{n} \geqslant \frac{k\pi}{2}$; следовательно, для достаточно больших m и для любого целого k, удовлетворяющего условию $\frac{k\pi}{2} > M$, имеем $|v_k(n, z)| \leqslant \frac{2M}{\frac{k^2\pi^2}{4} - M^2}$, что и доказывает наше утверждение. Для любого фиксированного k при n, стремящемся к $+\infty$, $v_k(n, z)$ стремится (равномерно на K) к $\frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2}$. Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Для любого комплексного числа* z, *не являющегося целым кратным* π, *справедлива формула*

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}, \tag{8}$$

причем ряд, стоящий в правой части, нормально сходится на любом компактном множестве $K \subset \mathbf{C}$, *не содержащем целых кратных* π (эйлерово разложение функции $\operatorname{ctg} z$).

2. *Эйлерово разложение функции* $\sin z$

Для любого целого *нечетного* $n = 2m + 1$ и любого комплексного z формула (2) может быть записана в виде

$$\sin nz = (-1)^m 2^{n-1} \prod_{k=-m}^{k=m} \sin\left(z - \frac{k\pi}{n}\right) =$$

$$= (-1)^m 2^{n-1} \sin z \prod_{k=1}^{m} \sin\left(z - \frac{k\pi}{n}\right) \sin\left(z + \frac{k\pi}{n}\right).$$

Но

$$\sin\left(z-\frac{k\pi}{n}\right)\sin\left(z+\frac{k\pi}{n}\right)=\sin^2 z-\sin^2\frac{k\pi}{n}$$

и, в силу (3),

$$\prod_{k=1}^{m}\sin^2\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}},$$

откуда, заменяя z на $\frac{z}{n}$, получаем, что

$$\sin z=n\sin\frac{z}{n}\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{\sin^2\frac{z}{n}}{\sin^2\frac{k\pi}{n}}\right). \tag{9}$$

Эту формулу можно записать в виде

$$\sin z=n\sin\frac{z}{n}\prod_{k=1}^{m}(1-w_k(n,\ z)),$$

где $w_k(n,\ z)=0$ для $k>m$ и $w_k(n,z)=\dfrac{\sin^2\frac{z}{n}}{\sin^2\frac{k\pi}{n}}$ для $1\leqslant k\leqslant m$.

Мы покажем, что для любого z, содержащегося в компактном множестве K из $\mathbf{C}$, и для любого нечетного n ряд с общим членом $w_k(n,\ z)$ *нормально сходится*. В самом деле, когда n стремится к $+\infty$, выражение $n\sin\frac{z}{n}$ равномерно стремится к z на множестве K, и значит, найдется такое $M>0$, что $\left|n\sin\frac{z}{n}\right|\leqslant M$ для любого целого m и любого $z\in K$. Кроме того, в ходе доказательства теоремы 1 было установлено, что для $1\leqslant k\leqslant m$ выполняется неравенство $n\sin\frac{k\pi}{n}\geqslant\frac{k\pi}{2}$; следовательно, для любого целого k, удовлетворяющего условию $\frac{k\pi}{2}\geqslant M$, выполняется неравенство $|w_k(n,\ z)|\leqslant\frac{4M^2}{k^2\pi^2}$, которое и доказывает наше утверждение. Так как при любом фиксированном k и при n, стремящемся к $+\infty$, функция $w_k(n,\ z)$ стремится (равномерно на K) к $\frac{z^2}{k^2\pi^2}$, то справедлива

Теорема 2. *Для любого комплексного числа z имеем*

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right), \tag{10}$$

где бесконечное произведение, стоящее в правой части, абсолютно и равномерно сходится на любом компактном множестве из C (эйлерово разложение функции $\sin z$).

3. Приложение к числам Бернулли

Теорема 1 показывает, что для $0 \leqslant x < \pi$ ряд с общим членом $\frac{2x}{n^2\pi^2 - x^2} \geqslant 0$ сходится. С другой стороны, для любого комплексного числа z, $|z| < \pi$, можно написать, что

$$\frac{2z}{n^2\pi^2 - z^2} = \frac{2z}{n^2\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{n^{2k}\pi^{2k}},$$

где ряд справа абсолютно сходится. Отсюда мы выводим, что *«двойной» ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2z^{2k-1}}{n^{2k}\pi^{2k}} \tag{11}$$

абсолютно сходится в открытом круге $|z| < \pi$, нормально сходится на любом компактном множестве, содержащемся в этом круге, и имеет сумму $\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}$. В самом деле, для $|z| \leqslant a < \pi$ абсолютное значение общего члена ряда (11) не превосходит $\frac{2a^{2k-1}}{n^{2k}\pi^{2k}}$, а сумма любого конечного числа членов $\frac{2a^{2k-1}}{n^{2k}\pi^{2k}}$ меньше конечного числа $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{n^2\pi^2 - a^2}$; проведя суммирование сначала по k, а затем по n, видим, что сумма ряда (11) равна $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}$, что и доказывает наше утверждение.

Если мы теперь просуммируем ряд (11) сначала по n, а затем по k, то получим тождество (для $|z| < \pi$)

$$\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z} = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_{2k}}{\pi^{2k}} z^{2k-1}, \tag{12}$$

где $S_k = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$. Следовательно, согласно формуле (1) имеем для $|z| < 2\pi$ равенство

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} S_{2n}}{2^{2n} \pi^{2n}} z^{2n}, \tag{13}$$

из которого получаем формулу

$$b_{2n} = (-1)^{n-1} (2n)! \frac{2S_{2n}}{(2\pi)^{2n}} \quad \text{для} \quad n \geqslant 1, \tag{14}$$

показывающую, в частности, что числа $\frac{S_{2n}}{\pi^{2n}}$ рациональны. Очевидно, $S_{k+1} \leqslant S_k$, и значит, для любого целого $k \geqslant 2$ выполняются соотношения $S_k \leqslant S_2 = \frac{\pi^2}{6} \leqslant 2$; следовательно, из формулы (14) мы получаем следующую верхнюю оценку для чисел Бернулли:

$$|b_{2n}| \leqslant 4 \frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \quad \text{для} \quad n \geqslant 1. \tag{15}$$

Из этого неравенства можно вывести верхнюю оценку для многочлена Бернулли $B_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k x^{n-k}$; в частности, для $0 \leqslant x \leqslant 1$ имеем

$$|B_n(x)| \leqslant 4 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k!}{(2\pi)^k} = 4 \frac{n!}{(2\pi)^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2\pi)^k}{k!} \leqslant 4e^{2\pi} \frac{n!}{(2\pi)^n}. \tag{16}$$

Упражнения. 1) Доказать формулы

$$\operatorname{tg} z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 2^{2n} (2^{2n} - 1) b_{2n} \frac{z^{2n-1}}{(2n)!},$$

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 2 (2^{2n-1} - 1) b_{2n} \frac{z^{2n-1}}{(2n)!},$$

где ряды справа абсолютно сходятся: первый для $|z| < \frac{\pi}{2}$, а второй для $|z| < \pi$ $\Big($выразить $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{cosec} 2z = \frac{1}{\sin 2z}$ в виде линейных комбинаций функций $\operatorname{ctg} z$ и $\operatorname{ctg} 2z\Big)$. Вывести отсюда, что числа $\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n} b_{2n}$ *целые* (воспользоваться следующей леммой: если в двух абсолютно сходящихся рядах $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{z^n}{n!}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \beta_n \frac{z^n}{n!}$ коэффициенты α_n и β_n целые, то в произведении этих рядов, записанном в виде $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \gamma_n \frac{z^n}{n!}$, коэффициенты γ_n целые$\Big)$.

2) Доказать формулу

$$(n-1) B_n(X) = n(X-1) B_{n-1}(X) - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k B_{n-k}(X)$$

$\Big($продифференцировать ряд $\frac{Se^{SX}}{e^S-1}$ по $S\Big)$. Вывести отсюда формулу

$$(2n+1) b_{2n} = -\sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n}{2k} b_{2k} b_{2n-2k}$$

для чисел Бернулли.

3) Доказать для любого целого $p>1$ формулу

$$B_n\left(\frac{x}{p}\right) + B_n\left(\frac{x+1}{p}\right) + \ldots + B_n\left(\frac{x+p-1}{p}\right) = \frac{1}{p^{n-1}} B_n(x).$$

4) а) Доказать соотношение

$$B_n(1-X) = (-1)^n B_n(X)$$

(использовать тот факт, что $b_{2n-1}=0$ для $n>1$, и применить соотношение

$$B_n(1-X) = B_n(-X) = (-1)^{n-1} nX^{n-1}).$$

б) Показать, что

$$B_n\left(\frac{1}{2}\right) = b_n\left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right)$$

(использовать упражнение 3).

в) Показать, что для четного n многочлен $B_n(x)$ имеет на интервале $[0, 1]$ два корня, а для нечетного $n>1$ многочлен $B_n(x)$ имеет простые корни в точках 0, $\frac{1}{2}$ и 1 и не обращается в нуль ни в какой точке из $[0, 1]$, отличной от этих точек (использовать б) и соотношение $B'_n = nB_{n-1}$).

г) Вывести из в), что для четного n максимум функции $|B_n(x)|$ на интервале $[0, 1]$ равен $|b_n|$ и что для нечетного n, если обозначить через a_n максимум $|B_n(x)|$ на $[0, 1]$,

$$\frac{4}{n+1} |b_{n+1}| \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \leqslant a_n < \frac{1}{2} n |b_{n-1}|$$

(применить теорему о конечных приращениях).

°5) Если положить $S_n(x)=\frac{1}{n+1}(B_{n+1}(x)-B_{n+1}(0))$, то для любого целого $a>0$

$$S_n(a)=1^n+2^n+\ldots+a^n.$$

а) Показать, что для любого целого $n\geqslant 0$ и любого целого $a>0$ имеем $2S_{2n+1}(a)\equiv 0 \pmod a$ (рассмотреть сумму $k^{2n+1}+(a-k)^{2n+1}$).

б) Показать, что для любых целых строго положительных чисел a и b

$$S_n(ab)\equiv bS_n(a)+naS_{n-1}(a)S_1(b-1) \pmod{a^2}.$$

Вывести отсюда, что если a_1 $a_2, \ldots, a_k$ — взаимно простые целые числа, то число

$$\frac{S_n(a_1a_2\ldots a_k)}{a_1a_2\ldots a_k}-\sum_{i=1}^{k}\frac{S_n(a_i)}{a_i}$$

является целым.

в) Показать, что для любого целого $n>0$ и любой пары целых чисел $a>0$ и $b>0$

$$S_{2n}(ab)\equiv bS_{2n}(a) \pmod{a^2}.$$

Вывести отсюда, что для любого показателя r число

$$\frac{S_{2n}(a^r)}{a^r}-\frac{S_{2n}(a)}{a}$$

является целым.

г) Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — различные простые числа, а $r_1, r_2, \ldots, r_k$ — любые целые строго положительные числа; вывести из б) и из в), что число

$$\frac{S_{2n}(a_1^{r_1}a_2^{r_2}\ldots a_k^{r_k})}{a_1^{r_1}a_2^{r_2}\ldots a_k^{r_k}}-\sum_{i=1}^{k}\frac{S_{2n}(a_i)}{a_i}$$

является целым.

д) Пусть a — простое число; показать, что если n делится на $a-1$, то $S_n(a)\equiv -1 \pmod a$, и что если n не делится на $a-1$, то $S_n(a)\equiv 0 \pmod a$ (заметить, что $x^{a+k}\equiv x^{k+1} \pmod a$ для любого целого x, и воспользоваться формулами Ньютона, примененными к многочлену X^a-X в теле $\mathbf{Z}/(a)$).

е) Пусть x и n — произвольные целые строго положительные числа, и пусть a_i $(1\leqslant i\leqslant k)$ — различные простые множители числа x, удовлетворяющие тому условию, что a_i-1 является делителем для $2n$. Показать, что число

$$\frac{S_{2n}(x)}{x}+\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i}$$

является целым.

ж) Вывести из е) для любого $n \geqslant 1$, что если числа p_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ суть такие различные простые числа, что $2n$ делится на $p_i - 1$, то число $b_{2n} + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i}$ целое (применить результат, полученный в е), взяв в качестве x произведение всех простых чисел, меньших $2n+1$, заметив при этом, что тогда x^{2n} делится на $2n+1$, и применить индукцию по n) («теорема Клаузена — фон Штаудта»).

§ 3. Оценка остатка в формуле Эйлера — Маклорена

1. *Оценка остатка в формуле Эйлера — Маклорена*

Верхняя оценка, полученная в § 2 для многочленов Бернулли на интервале $[0, 1]$, позволяет просто оценить сверху остаток $T_p(x, n)$ в формуле Эйлера — Маклорена (§ 1, формула (39))

$$f(x) + f(x+1) + \ldots + f(x+n) =$$
$$= \int_x^{x+n+1} f(t)\,dt - \frac{1}{2}(f(x+n+1)) - f(x) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{p} \frac{b_{2k}}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(x+n+1) - f^{(2k-1)}(x)\right) + T_p(x, n). \tag{1}$$

В самом деле (§ 1, формула (41)),

$$T_p(x, n) = -\frac{1}{(2p+1)!}\int_0^{n+1} \overline{B}_{2p+1}(1-s)\, f^{(2p+1)}(x+s)\,ds, \tag{2}$$

где $\overline{B}_{2p+1}(t)$ — периодическая функция с периодом 1, равная $B_{2p+1}(t)$ на интервале $[0, 1[$. Формула (16) из § 2 показывает, что

$$|\overline{B}_{2p+1}(t)| \leqslant 4e^{2\pi}\frac{(2p+1)!}{(2\pi)^{2p+1}} \tag{3}$$

для любого $t \in \mathbf{R}$, и применение формулы о среднем дает нам верхнюю оценку для $T_p(x, n)$:

$$|T_p(x, n)| \leqslant \frac{4e^{2\pi}}{(2\pi)^{2p+1}}\int_x^{x+n+1} |f^{(2p+1)}(t)|\,dt. \tag{4}$$

2. Приложение к асимптотическим разложениям

Формула Эйлера — Маклорена позволяет получить более полное решение (для наиболее важных случаев) задачи, рассмотренной в главе V, § 4, n° 2, состоящей в нахождении асимптотического разложения частичной суммы $s_n = \sum_{m=0}^{n} g(m)$ (соответственно остатка $r_n = \sum_{m=n+1} g(m)$), где g — монотонная строго положительная числовая функция, определенная на интервале $[x_0, +\infty[$. Мы ограничимся случаем, когда g есть *функция* (H) (гл. V, Приложение, n° 4) *порядка* 0 относительно e^x; иными словами, если имеет место отношение $g' \prec\!\!\prec g$, то из него вытекает отношение $g^{(k+1)} \prec\!\!\prec g^{(k)}$ для любого целого $k > 0$, обладающего тем свойством, что никакая из производных $g^{(h)}$ порядка $h \leqslant k$ не эквивалентна постоянной (гл. V, § 3, предложение 7). Пусть p — такое целое число, что никакая из производных $g^{(h)}$ порядка $h \leqslant 2p$ не эквивалентна постоянной. Предположим сначала, что ряд с общим членом $g(n)$ имеет бесконечную сумму. Будем различать несколько случаев:

1° $|g^{(2p-1)}(n)|$ стремится к $+\infty$ вместе с n; согласно предположению, то же самое будет справедливо для $|g^{(2k-1)}(n)|$ при $1 \leqslant k \leqslant p$; кроме того, в силу монотонности функции $g^{(2p+1)}$ в окрестности $+\infty$, формула (4) дает $T_p(0, n) = O(g^{(2p)}(n+1)) = o(g^{(2p-1)}(n+1))$; формула Эйлера — Маклорена, примененная для $x = 0$, показывает, что

$$s_n = \sum_{m=0}^{n} g(m) = \int_0^{n+1} g(t)\,dt - \frac{1}{2} g(n+1) + \sum_{k=1}^{p} \frac{b_{2k}}{(2k)!} g^{(2k-1)}(n+1) + o(g^{(2p-1)}(n+1)),$$

причем каждый из членов этой суммы является функцией, пренебрежимой сравнительно с предыдущей; стало быть, разлагая эти функции относительно шкалы сравнения $\mathscr{E}$, получаем асимптотическое разложение частичной суммы s_n.

2° Предположим теперь, что для индекса q, удовлетворяющего условию $1 \leqslant q < p$, $|g^{(2q-1)}(n)|$ стремится к $+\infty$ вместе с n, но что $g^{(2k-1)}(n)$ стремится к 0 для $k>q$. Так как $g^{(2p+1)}$ монотонна в окрестности $+\infty$, то интеграл $\int\limits_0^\infty |g^{(2p+1)}(u)|\,du$ сходится, и таким образом, можно написать, что

$$s_n=\sum_{m=0}^{n} g(m)=\int\limits_0^{n+1} g(t)\,dt-\frac{1}{2}g(n+1)+\sum_{k=1}^{q}\frac{b_{2k}}{(2k)!}g^{(2k-1)}(n+1)+$$
$$+C+\sum_{k=q+1}^{p}\frac{b_{2k}}{(2k)!}g^{(2k-1)}(n+1)+o(g^{(2p-1)}(n+1)),$$

где C — постоянная; в самом деле, имеем

$$\int\limits_{n+1}^{\infty}|g^{(2p+1)}(u)|\,du=O(g^{(2p)}(n+1))=o(g^{(2p-1)}(n+1)).$$

Та же формула справедлива и для случая, когда сама функция $g(n)$ стремится к 0. Наконец, если ряд с общим членом $g(n)$ сходится, то мы имеем для остатка $r_n=\sum\limits_{m=n+1}^{\infty}g(m)$ разложение

$$r_n=\sum_{m=n+1}^{\infty}g(m)=\int\limits_{n+1}^{\infty}g(t)\,dt+$$
$$+\frac{1}{2}g(n+1)-\sum_{k=1}^{p}\frac{b_{2k}}{(2k)!}g^{(2k-1)}(n+1)+o(g^{(2p-1)}(n+1)).$$

Упражнения. 1) Показать, что если $f^{(2p+1)}(t)$ монотонна на интервале $[x, x+n+1]$, то остаток $T_p(x, n)$ в формуле Эйлера — Маклорена (формула (2)) имеет тот же знак, что и член $\frac{1}{(2p+2)!}b_{2p+2}(f^{(2p+1)}(x+n+1)-f^{(2p+1)}(x))$, и по абсолютному значению меньше или равен абсолютному значению этого члена.

Показать, что если $f^{(2p+2)}$ непрерывна (но произвольного знака), то

$$|T_p(x, n)|\leqslant\frac{1}{(2p+2)!}|b_{2p+2}|\Bigl(|f^{(2p+1)}(x+n+1)-f^{(2p+1)}(x)|+$$
$$+\int\limits_x^{x+n+1}|f^{(2p+2)}(t)|\,dt\Bigr).$$

2) Доказать формулу

$$\frac{1}{2} f(x) - f(x+1) + f(x+2) - \ldots - f(x+2n-1) + \frac{1}{2} f(x+2n) =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \frac{b_{2k}}{(2k)!} (2^{2k}-1) \left(f^{(2k-1)}(x+2n) - f^{(2k-1)}(x)\right) + U_p(x, n),$$

где

$$|U_p(x, n)| \leqslant \frac{4e^{2\pi}(2^{2p+1}+1)}{(2\pi)^{2p+1}} \int_x^{x+2n} |f^{(2p+1)}(t)|\,dt$$

(применить формулу Эйлера—Маклорена к $g(x) = f(2x)$).

3) Пусть функция f непрерывна вместе со своими $2p+1$ первыми производными на интервале $[0, 1]$. Доказать формулу

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} f(1)\right) - \sum_{k=1}^{p} \frac{b_{2k}}{(2k)!} \frac{1}{n^{2k}} \left(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)\right) + R_p(n),$$

где

$$|R_p(n)| \leqslant \frac{4e^{2\pi}}{(2\pi)^{2p+1}} \frac{1}{n^{2p+1}} \int_0^1 |f^{(2p+1)}(t)|\,dt.$$

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК

(ГЛАВЫ V И VI)

(Римские цифры в скобках отсылают к библиографии, помещенной в конце этого очерка.)

Различие между «бесконечно малыми» (или «бесконечно большими») различных порядков появляется неявно уже в первых сочинениях, относящихся к дифференциальному исчислению, как, например, в трудах Ферма; полностью же осознанным становится оно у Ньютона и Лейбница с введением теории «разностей высшего порядка»; причем довольно быстро было замечено, что в наиболее простых случаях предел (или «истинное значение») выражения вида $\frac{f(x)}{g(x)}$ в точке, в которой обе функции f и g стремятся к 0, определяется разложением Тейлора этих функций в окрестности рассматриваемой точки («правило Лопиталя», принадлежащее, по-видимому, Иоганну Бернулли).

За исключением этого элементарного случая, основная задача «асимптотической оценки», которая ставится математиками конца XVII века,— это задача о точном или приближенном вычислении сумм вида $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ для очень больших n; такое вычисление необходимо как для интерполяции и численной оценки сумм ряда, так и в исчислении вероятностей, где «функции больших чисел», таких, как $n!$ или $\binom{a}{n}$, играют главенствующую роль. Уже Ньютон для получения приближенных значений суммы $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a+k}$ при большом n указывает метод, который приводит (в этом частном случае) к вычислению первых членов формулы Эйлера—Маклорена (I). В конце века Яков Бернулли в ходе исследований по исчислению вероятностей рассматривает задачу о вычислении сумм

$$S_k(n) = \sum_{p=1}^{n} p^k$$

и открывает (без доказательства) общий закон образования этих многочленов относительно n *), тем самым впервые вводя в выражения для коэффициентов этих многочленов числа, носящие его имя, и указывает рекуррентное соотношение, позволяющее вычислять эти числа ((II), стр. 97). В 1730 году Стирлинг получает асимптотическое разложение для

$$\sum_{k=1}^{n} \log (x+ka)$$

при неограниченном возрастании n путем последовательного вычисления коэффициентов.

В период с 1730 по 1745 год появляются окончательные результаты Эйлера по рядам и по вопросам, связанным с ними. Полагая

$$S(n)=\sum_{k=1}^{n} f(k),$$

он применяет к функции $S(n)$ формулу Тейлора что дает ему уравнение

$$f(n)=S(n)-S(n-1)=\frac{dS}{dn}-\frac{1}{2!}\frac{d^2S}{dn^2}+\frac{1}{3!}\frac{d^3S}{dn^3}-\ldots,$$

которое он «обращает» при помощи метода неопределенных коэффициентов, отыскивая решение в форме

$$S(n)=\alpha\int f(n)\,dn+\beta f(n)+\gamma\frac{df}{dn}+\delta\frac{d^2f}{dn^2}+\ldots,$$

и получает шаг за шагом, что

$$S(n)=\int f(n)\,dn+\frac{f(n)}{2}+\frac{1}{12}\frac{df}{dn}-\frac{1}{720}\frac{d^3f}{dn^3}+\frac{1}{30\cdot 240}\frac{d^5f}{dn^5}-\ldots,$$

не будучи сначала в состоянии определить закон образования коэффициентов (IIIa и d). Однако к 1735 году он уже по аналогии с разложением многочлена на множители первой степени без колебаний пишет формулу

$$1-\frac{\sin s}{\sin\alpha}=\left(1-\frac{s}{\alpha}\right)\left(1-\frac{s}{\pi-\alpha}\right)\left(1-\frac{s}{-\pi-\alpha}\right)\times$$
$$\times\left(1-\frac{s}{2\pi+\alpha}\right)\left(1-\frac{s}{-2\pi+\alpha}\right)\ldots$$

и, приравняв коэффициенты разложения обеих частей в степенной ряд,

---

*) Речь идет о примитивных для «многочленов Бернулли» $B_k(x)$.

получает, в частности $\left(\text{для } \alpha = \frac{\pi}{2}\right)$, знаменитые выражения для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$ через степени π *) (IIIb). Несколько лет спустя он заметил, наконец, что коэффициенты при степенях π задаются теми же уравнениями, что и коэффициенты в его формуле суммирования, и тем самым выявил их связь с числами, введенными Бернулли, и с коэффициентами разложения в ряд функции

$$\frac{z}{e^z-1}. \text{ (IIIg).}$$

Независимо от Эйлера и в тот же период времени Маклорен пришел к той же формуле суммирования, но способом менее смелым, близким к тому, который приведен нами в тексте: в самом деле, он итерирует «тейлорову» формулу, которая выражает $f(x)$ через разности $f^{(2k+1)}(x+1)-$ $-f^{(2k+1)}(x)$, получая ее «обращением» разложения Тейлора для этих разностей методом неопределенных коэффициентов (IV); при этом он не находит закона образования коэффициентов, открытого Эйлером.

Но Маклорен, как и Эйлер, и как все математики того времени, представлял свои формулы в виде разложений в *ряд*, сходимость которого не была исследована. Это происходило не потому, что понятием сходящегося ряда в ту эпоху совершенно пренебрегали: начиная с Якова Бернулли было известно, что гармонический ряд расходится, и сам Эйлер уточнил этот результат, оценивая сумму n первых членов этого ряда при помощи своей формулы суммирования (IIIc и d); Эйлер также первый заметил, что отношение двух последовательных чисел Бернулли неограниченно возрастает и, значит целый ряд, коэффициентами которого служат эти числа, не может сходиться ((IIIf), стр. 357) **). Однако стремление к формальным вычислениям является очень сильным, и даже исключительная интуиция самого Эйлера иногда не спасает его от абсурдных утверждений, напри-

---

*) В 1743 году Эйлер, отвечая на различные возражения своих современников, дает несколько более правдоподобную основу «эйлеровых разложений» тригонометрических функций; например, разложение функции $\sin x$ в бесконечное произведение выводится из выражения $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$ и из того факта, что e^{ix} есть предел многочлена $\left(1+\frac{ix}{n}\right)^n$ (IIIe).

**) Поскольку рассматриваемый Эйлером ряд введен для числовых расчетов, то Эйлер берет лишь сумму тех членов, которые убывают, а с номера, начиная с которого члены возрастают, он заменяет их остатком, способ получения которого не указывает (остаток в формуле Эйлера — Маклорена в общем виде не был известен до Коши).

мер, когда он пишет $0=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} x^n$ ((IIIf), стр. 362) *). Мы уже говорили в другом месте (Общая топология, Исторический очерк к гл. IV), как математики начала XIX века, недовольные этим безудержным и необоснованным формализмом, направили анализ на путь строгости. И как только было уточнено понятие сходимости ряда, возникла необходимость в простых признаках, позволяющих доказывать сходимость интегралов и рядов путем сравнения их с известными интегралами или рядами; некоторое число подобных признаков указал Коши в своем *Алгебраическом анализе* (Va), тогда как в одном посмертном мемуаре Абеля имеются логарифмические признаки сходимости. С другой стороны, Коши (Vb) разъяснил парадокс таких рядов, как ряд Стирлинга, получаемых в результате применения формулы Эйлера — Маклорена (и часто называемых «полусходящимися рядами»): он показал, что если (на основании замечания Эйлера о числах Бернулли) общий член $u_k(n)$ такого ряда при *фиксированном* значении n неограниченно возрастает вместе с k, то тем не менее для *фиксированного* значения k частичная сумма $s_k(n)=$ $=\sum\limits_{h=1}^{k} u_h(n)$ дает асимптотическое разложение (при n, стремящемся к $+\infty$) функции, «представимой» рядом, и тем более точное, чем больше k.

В большинстве случаев в классическом анализе имеется возможность получить общий закон образования асимптотических разложений функции, имеющих *сколь угодно большое* число членов; этот факт способствовал возникновению длительной путаницы (по крайней мере в языке) между рядами и асимптотическими разложениями; и даже Пуанкаре, взяв на себя труд в 1886 году (VIII) кодифицировать элементарные правила асимптотических разложений $\left(\text{по целым степеням функции } \frac{1}{x} \text{ в окрестности } +\infty\right)$, все еще пользуется словарем теории рядов. И только с появлением асимптотических разложений в аналитической теории чисел было проведено, наконец, четкое различие между понятиями асимптотического разложения и ряда на основании того факта, что для большинства задач, относящихся к этой теории, удается получить в явном виде лишь очень небольшое число членов (чаще всего один) искомого разложения.

Эти задачи знакомили математиков также с применением шкал сравнения, отличных от шкалы степеней переменного (действительного или целого). Это расширение всплывает всюду в работах П. Дюбуа-Реймона

*) Любопытно, что эта формула находится за одну страницу до того места, где Эйлер предостерегает против неосмотрительного употребления расходящихся рядов!

(VII), который первый приступил к систематическому рассмотрению задач сравнения функций в окрестности некоторой точки и в очень оригинальных работах выяснил «неархимедов» характер шкал сравнения, изучая одновременно общий способ интегрирования и дифференцирования отношений сравнения и получая отсюда множество интересных следствий (VIIb). Однако его доказательства лишены ясности и строгости, и только Харди (IX) дал строгое изложение результатов Дюбуа-Реймона. Его основной вклад состоял в том, чтобы очертить множество «элементарных функций», функций (H), в которых обычные операции анализа (и, в частности, дифференцирование) применимы к отношениям сравнения *), и доказать его существование.

*) В наши планы не входило разбирать в этих главах методы, позволяющие получать асимптотические разложения функций, разбитых на некоторые специальные категории, как, например, некоторые типы интегралов, зависящих от параметра, которые часто встречаются в анализе; по этому вопросу (и, в частности, по важным методам Лапласа и Дарбу) читатель может обратиться к цитированной книге Харди (IX), содержащей очень полную библиографию.

БИБЛИОГРАФИЯ

(I) I. Newton, в кн. St. P. Rigaud, Correspondence of scientific men, Oxford, 1841, t. II, p. 309—310.

(II) Jacob Bernoulli, Arc conjectandi, Bâle, 1713. В русском переводе имеется 4-я часть этого сочинения, Спб., 1913.

(III) L. Euler, Opera omnia (1), t. XIV; Commentationes analyticae... Leipzig — Berlin (Teubner), 1924: a) Methodus generalis summandi progressiones, p. 42—72 (= Comm. Acad. petrop., t. IV (1732—1733)); b) De summus serierum reciprocarum, p. 73—86 (= Comm. Acad. petrop., t. VII (1734—1735)); c) De progressionibus harmonicis observationes, p. 87—100 (ibid.); d) Inventio summae cujusque seriei..., p. 108—123 (= Comm. Acad. petrop., t. VIII (1736)); e) De summis serierum reciprocarum... dissertatio altera..., p. 138—155 (= Misc. Berol., t. VII (1743)); f) Considerato progressionis..., p. 350—363 (= Comm. Acad. petrop., t. XI (1739)); g) De seriebus quibusdam considerationes, p. 407—462 (= Comm. Acad. petrop., t. XII (1740)).

(IV) C. Maclaurin, A complete treatise of fluxions, Edinburgh, 1742.

(V) A.-L. Cauchy: a) Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique, 1re partie, 1821 (=Œuvres (2), t. III, Paris (Gauthier-Villars), 1897); b) Œuvres (1), t. VIII, p. 18—25, Paris (Gauthier-Villars), 1893.

(VI) N. H. Abel, Œuvres, t. II, p. 197—205, éd Sylow et Lie, Christiania, 1881.

(VII) P. du Bois-Reymond: a) Sur la grandeur relative des infinis des fonctions, Ann. di Mat. (2), t. IV (1871), p. 338—353; b) Ueber asymptotische Werthe, infinitäre Approximationen und infinitäre Auflösung von Gleichungen, Math. Ann., t. VIII, (1875), p. 362—414.

(VIII) H. Poincaré, Sur les intégrales irrégulières des équations linéares, Acta Math., t. VIII, (1886), p. 295—344.

(IX) G. H. Hardy, Orders of infinity, Cambridge tracts, n° 12, 2 éd., Cambridge University Press, 1924.

ГЛАВА VII

ГАММА-ФУНКЦИЯ

§ 1. Гамма-функция в действительной области

1. *Определение гамма-функции*

Мы определили (Теория множеств, гл. III) функцию $n!$ для любого целого $n \geqslant 0$ как произведение $\prod\limits_{0 \leqslant k < n} (n-k)$; следовательно, $0! = 1$ и $(n+1)! = (n+1)\,n!$ для $n \geqslant 0$. Положим $\Gamma(n) = (n-1)!$ для любого целого $n \geqslant 1$; мы ставим перед собой задачу определить на множестве действительных чисел $x > 0$ *непрерывную* функцию $\Gamma(x)$, *продолжив* гамма-функцию $\Gamma(n)$, определенную на множестве целых $x \geqslant 1$.

Ясно, что таких функций бесконечно много; так как для любого целого $n \geqslant 1$ имеет место соотношение $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, то мы ограничимся рассмотрением тех непрерывных функций, продолжающих Γ, которые при любом $x > 0$ удовлетворяют уравнению

$$f(x+1) = xf(x). \tag{1}$$

Для того чтобы решение этого уравнения являлось продолжением функции $\Gamma(n)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $f(1) = 1$.

Если f удовлетворяет уравнению (1), то для любого целого $n > 0$ индукцией по n получаем формулу

$$f(x+n) = x(x+1)(x+2)\,\ldots\,(x+n-1)\,f(x) \tag{2}$$

для любого $x > 0$. Это соотношение, в частности, показывает, что значения функции f на интервале $]n,\ n+1]$ ($n \geqslant 1$ — целое) определяются ее значениями на интервале $]0,\ 1]$. Обратно, пусть φ — функция, непрерывная на $]0,\ 1]$ и удовлетворяющая только условиям $\varphi(1)=1$, $\lim_{x\to 0} x\varphi(x)=1$; для любого целого $n\geqslant 1$ определим функцию f на интервале $]n, n+1]$ при помощи соотношения

$$f(x)=(x-1)(x-2)\ \ldots\ (x-n)\varphi(x-n);$$

ясно, что f непрерывна на $]0, +\infty[$, удовлетворяет уравнению (1) и продолжает $\Gamma(n)$.

Если f — непрерывное решение уравнения (1), принимающее на $]0, 1]$ положительные значения, то согласно формуле (2) оно принимает положительные значения на интервале $]0, +\infty[$; следовательно, функция $g(x)=\log f(x)$ определена и непрерывна на интервале $]0, +\infty[$ и удовлетворяет на нем уравнению

$$g(x+1)-g(x)=\log x. \tag{3}$$

Если g_1 — другое непрерывное на $]0, +\infty[$ решение уравнения (3) и если $h=g_1-g$, то $h(x+1)-h(x)=0$ для любого $x>0$; иначе говоря, h есть непрерывная *периодическая* функция с периодом 1, определенная на $]0, +\infty[$; обратно, для любой функции h подобного рода $g+h$ является непрерывным решением уравнения (3).

Предложение 1. *Существует единственная выпуклая функция g, определенная на $]0, +\infty[$, удовлетворяющая уравнению (3) и принимающая при $x=1$ значение* 0.

Докажем сначала, что если существует функция g, удовлетворяющая вышеуказанным условиям, то она *полностью определена* на интервале $]0, 1]$, а следовательно, и на всем интервале $]0, +\infty[$. В самом деле, для любого целого $n>1$ наклон прямой, соединяющей точки $(n, g(n))$ и $(x, g(x))$, есть возрастающая функция от x, ибо функция g выпукла (гл. I, § 4, предложение 5); значит, для $0<x\leqslant 1$ должны выполняться неравенства

$$\frac{g(n-1)-g(n)}{(n-1)-n}\leqslant\frac{g(n+x)-g(n)}{(n+x)-n}\leqslant\frac{g(n+1)-g(n)}{(n+1)-n},$$

то есть, в силу (3),

$$x\log(n-1)\leqslant g(x+n)-g(n)\leqslant x\log n. \tag{4}$$

Но на основании формулы (3) имеем

$$g(x+n)-g(n)=g(x)+\log x+\sum_{k=1}^{n-1}(\log(x+k)-\log k).$$

С другой стороны, можно написать $\log n = \sum_{k=2}^{n} \log \frac{k}{k-1}$, и тогда неравенства (4) примут вид

$$x \sum_{k=2}^{n-1} \log \frac{k}{k-1} \leqslant$$
$$\leqslant g(x) + \log x + \sum_{k=2}^{n} (\log(x+k-1) - \log(k-1)) \leqslant x \sum_{k=2}^{n} \log \frac{k}{k-1}.$$

Положим для любого $n \geqslant 2$

$$u_n(x) = x \log \frac{n}{n-1} - \log(x+n-1) + \log(n-1) \tag{5}$$

и

$$g_n(x) = -\log x + \sum_{k=2}^{n} u_k(x).$$

Тогда для $0 < x \leqslant 1$

$$g_n(x) - x \log \frac{n}{n-1} \leqslant g(x) \leqslant g_n(x). \tag{6}$$

Так как $\log \frac{n}{n-1}$ при n, стремящемся к $+\infty$, стремится к 0, то из формулы (6) следует, что если решение g существует, то оно непременно равно на интервале $]0, 1]$ *пределу* функций $g_n(x)$.

Но из соотношения (5) сразу получаем, что при любом фиксированном $x > 0$ и при n, стремящемся к $+\infty$,

$$u_n(x) = -x \log\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \log\left(1 + \frac{x-1}{n}\right) +$$
$$+ \log\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim \frac{x(x-1)}{2n^2},$$

что и доказывает сходимость ряда с общим членом $u_n(x)$ при любом $x > 0$. Поскольку каждая из функций $u_n(x)$, равно как и $-\log x$, выпукла на $]0, +\infty[$, то функция $g(x) = -\log x + \sum_{n=2}^{\infty} u_n(x)$ выпукла на этом интервале (гл. I, § 4, предложения 2 и 4); наконец, $u_n(1) = 0$, откуда $g(1) = 0$ и

$$u_n(x+1) = u_{n+1}(x) + x\left(\log \frac{n}{n-1} - \log \frac{n+1}{n}\right),$$

и значит,

$$g(x+1) = -\log(x+1) + x\log 2 + \sum_{n=3}^{\infty} u_n(x) = \log x + g(x),$$

то есть g удовлетворяет уравнению (3), ч. т. д.

Определение 1. *Через $\Gamma(x)$ обозначается положительная функция, определенная на интервале $]0, +\infty[$, удовлетворяющая уравнению*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \tag{7}$$

такая, что $\Gamma(1)=1$ и что функция $\log\Gamma(x)$ выпукла на $]0, +\infty[$.

2. Свойства гамма-функции

Предложение 2. *Для любого $x>0$ имеем*

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)} \tag{8}$$

(формула Гаусса) и

$$\Gamma(x) = e^{-\gamma x}\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{x}{n}}}{1+\frac{x}{n}}, \tag{9}$$

где γ означает постоянную Эйлера, а бесконечное произведение, стоящее в правой части формулы (9), абсолютно и равномерно сходится на любом компактном интервале из $\mathbf{R}$, не содержащем никаких целых отрицательных чисел (формула Вейерштрасса).

Функция $\Gamma(x)$ бесконечно дифференцируема на интервале $]0, +\infty[$,

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n}\right) \tag{10}$$

и

$$D^k(\log\Gamma(x)) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(k-1)!}{(x+n)^k} \quad \text{для} \quad k\geqslant 2, \tag{11}$$

причем ряды справа в формулах (10) и (11) абсолютно и равномерно сходятся на любом компактном интервале, не содержащем никаких целых $x\leqslant 0$.

Действительно, из доказательства предложения 1 видно. что

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x (n-1)!}{x(x+1)\dots(x+n-1)},$$

откуда следует формула Гаусса, поскольку $\frac{n}{x+n}$ стремится к 1, когда n стремится к $+\infty$. Можно также написать, что

$$\log\frac{n}{n-1} = \frac{1}{n-1} + \left(\log\frac{n}{n-1} - \frac{1}{n-1}\right),$$

и значит (в обозначениях предложения 1),

$$\exp(u_n(x)) = e^{x\left(\log\frac{n}{n-1} - \frac{1}{n-1}\right)} \frac{e^{\frac{x}{n-1}}}{1+\frac{x}{n-1}}$$

и ряд с общим членом $\log\frac{n}{n-1} - \frac{1}{n-1}$ абсолютно сходится и имеет своей суммой $-\gamma$, где γ означает постоянную Эйлера (гл. V, § 4, n° 2), откуда получаем формулу Вейерштрасса.

Для $|x| \leqslant a$ при $n > a$ имеет место неравенство $\left|\frac{1}{(x+n)^k}\right| \leqslant \frac{1}{(n-a)^k}$, и следовательно, ряд в правой части формулы (11) абсолютно и равномерно сходится при любом $k \geqslant 2$ на любом компактном интервале из $\mathbf{R}$, не содержащем никакого целого $x \leqslant 0$; то же рассуждение применимо и к ряду в правой части формулы (10), поскольку $\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n}\right| \leqslant \frac{a}{n(n-a)}$ для $|x| \leqslant a$ и $n > a$. А так как эти ряды получаются путем почленного дифференцирования ряда

$$\log\Gamma(x) = -\gamma x - \log x + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n} - \log\left(1+\frac{x}{n}\right)\right),$$

сходящегося при $x > 0$, то ряд с общим членом $\frac{x}{n} - \log\left(1+\frac{x}{n}\right)$ абсолютно и равномерно сходится на любом компактном интервале, содержащемся в $[0, +\infty[$, так что соотношения (10) и (11) выполняются при любом $x > 0$ (гл. II, § 1, теорема 1). Кроме того, при достаточно больших n выражение $\frac{x}{n} - \log\left(1+\frac{x}{n}\right)$ определено для любого $x \in \mathbf{R}$, и значит, теорема 1 из главы II, § 1, снова показывает, что бесконечное произведение, стоящее в правой части формулы (9), абсолютно и равномерно сходится на любом компактном интервале, не содержащем целых $x \leqslant 0$.

Функция $\Gamma(x)$, определенная для $x > 0$, может быть продолжена на любое множество точек x, отличных от целых неположительных, так, чтобы на этом множестве удовлетворялось уравнение (7); для $-(n-1) < x < -n$ достаточно положить

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x(x+1)\ldots(x+n)}\Gamma(x+n+1).$$

Согласно предложению 2 на этом множестве снова имеют место формулы (8), (9), (10) и (11). Формула (9) показывает, что $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$, когда x стремится к 0, откуда на основании (7) получаем, что при x, стремящемся к $-n$ (n — целое неотрицательное),

$$\Gamma(x) \sim \frac{(-1)^n}{n!\,(x+n)}.$$

Следовательно, функцию $\frac{1}{\Gamma(x)}$ можно продолжить по непрерывности на всю прямую $\mathbf{R}$, придавая ей значение 0 для целых неположительных значений переменной; тогда для *любого* $x \in \mathbf{R}$

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{x(x+1)\ldots(x+n)}{n^x n!} \tag{12}$$

и

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = e^{\gamma x} x \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}, \tag{13}$$

и так же, как в предложении 2, доказывается, что бесконечное произведение в правой части формулы (13) абсолютно и равномерно сходится на любом компактном интервале из $\mathbf{R}$.

Так как $\Gamma(x) > 0$ для $x > 0$, то уравнение (7) показывает, что $\Gamma(x) < 0$ для $-(2n-1) < x < -(2n-2)$ и $\Gamma(x) > 0$ для $-2n < x < -(2n-1)$ (n — целое, $n \geqslant 1$); предел справа функции $\Gamma(x)$ в точках $-2n$ равен $+\infty$, в точках $-(2n+1)$ равен $-\infty$, а предел слева — в точках $-2n$ равен $-\infty$, а в точках $-(2n+1)$ равен $+\infty$ (при любом $n \in \mathbf{N}$). Формула (11) показывает, что для $k=2$ правая часть, если она определена, всегда неотрицательна, и значит,

$$\Gamma''(x)\Gamma(x) - (\Gamma'(x))^2 \geqslant 0,$$

то есть $\Gamma''(x)$ имеет одинаковый знак с $\Gamma(x)$; следовательно, гамма-функция *выпукла* для $x > 0$ и для $-(2n+2) < x < -(2n+1)$ и *вогнута* для $-(2n+1) < x < -2n$ $(n \in \mathbf{N})$; отсюда вытекает,

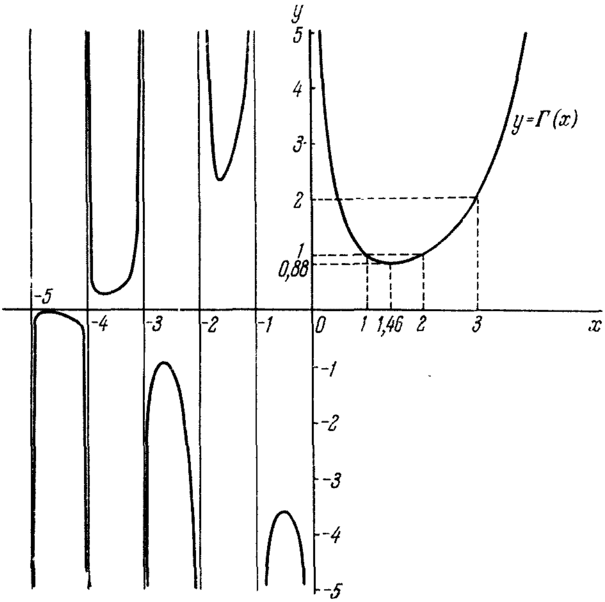

Рис. 10.

что на интервалах, на которых Γ выпукла, $\Gamma'(x)$ возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, а на интервалах, на которых Γ вогнута, $\Gamma'(x)$ убывает от $+\infty$ до $-\infty$. График гамма-функции изображен на рис. 10.

3. *Эйлеровы интегралы*

Будем говорить сокращенно, что функция f, определенная на интервале $I \subset \mathbf{R}$ и строго положительная на этом интервале, *логарифмически выпукла* на I, если функция $\log f$ выпукла на I. Определение функции $\Gamma(x)$ показывает, следовательно, что эта функция логарифмически выпукла на $]0, +\infty[$.

Ясно, что *произведение* двух логарифмически выпуклых на I функций логарифмически выпукло на I. Кроме того, имеет место

Лемма 1. *Пусть f и g — две строго положительные и дважды дифференцируемые функции на открытом интервале I. Если f и g логарифмически выпуклы на I, то $f+g$ логарифмически выпукла на I.*

В самом деле, соотношение $D^2(\log f(x)) \geqslant 0$ записывается в виде $f(x)f''(x)-(f'(x))^2 \geqslant 0$. Значит, все сводится к доказательству того, что соотношения $a \geqslant 0$, $a' \geqslant 0$, $ac-b^2 \geqslant 0$, $a'c'-b'^2 \geqslant 0$ влекут $(a+a')(c+c')-(b+b')^2 \geqslant 0$, но соотношения $a \geqslant 0$, $ac-b^2 \geqslant 0$ равносильны тому, что квадратичная форма $ax^2+2bxy+cy^2 \geqslant 0$ в $\mathbf{R}^2$, и очевидно, что если $ax^2+2bxy+cy^2 \geqslant 0$ и $a'x^2+2b'xy+$ $+c'y^2 \geqslant 0$ в $\mathbf{R}^2$, то и $(a+a')x^2+2(b+b')xy+(c+c')y^2 \geqslant 0$ в $\mathbf{R}^2$.

Лемма 2. *Пусть f — конечная строго положительная числовая функция, определенная и непрерывная на произведении $I \times J$ двух открытых интервалов из $\mathbf{R}$ и такая, что для любого $t \in J$ функция $x \to f(x, t)$ логарифмически выпукла и дважды дифференцируема на I. Если при этих условиях для любого $x \in I$ интеграл $g(x)=\int_J f(x, t)\,dt$ сходится, то функция g логарифмически выпукла на I.*

Покажем сначала, что для любого компактного интервала $K \subset J$ функция $g_K(x)=\int_K f(x, t)\,dt$ логарифмически выпукла. В самом деле, если $K=[a, b]$, то последовательность функций

$$g_n(x)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(x, a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

сходится к $g_K(x)$ на I в смысле простой сходимости (гл. II, § 1, предложение 5), следовательно, $\log g_n$ сходится к $\log g_K$ в смысле простой сходимости; в силу леммы 1 функция $\log g_n$ выпукла на I, следовательно (гл. I. § 4, предложение 4), то же самое справедливо для $\log g_K$.

С другой стороны, g является обычным пределом функций g_K по упорядоченному фильтрующемуся множеству компактных интервалов, содержащихся в I (гл. II, § 2, n° 1), и следовательно, $\log g$ является простым пределом функций $\log g_K$, а поскольку последние выпуклы на I, то тем же свойством обладает и $\log g$ (гл. I, § 4, предложение 4).

Легко показать, что леммы 1 и 2 верны и тогда, когда не предполагается, что функции дважды дифференцируемы (упражнение 5).

Лемма 3. *Пусть φ — строго положительная непрерывная функция на открытом интервале J, содержащемся в* $[0, +\infty[$. *Если I — такой открытый интервал, что интеграл* $g(x) = \int_J t^{x-1}\varphi(t)\,dt$ *сходится при любом $x \in I$, то функция g логарифмически выпукла на I.*

В самом деле, $\log t^{x-1} = (x-1)\log t$ есть функция от x, выпуклая и дважды дифференцируемая для любого $t > 0$, и следовательно, применима лемма 2.

Предложение 3. *Для любого $x > 0$*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt \tag{14}$$

(эйлеров интеграл второго рода).

В самом деле, функция $g(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt$ определена для любого $x > 0$ (гл. V, § 3, n° 2), и лемма 3 показывает, что эта функция *логарифмически выпукла* на $]0, +\infty[$. С другой стороны, интегрирование по частям дает

$$g(x+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^x\,dt = -e^{-t}t^x \Big|_0^\infty + x\int_0^x e^{-t}t^x\,dt = xg(x).$$

Иными словами, g есть решение уравнения (1); наконец, $g(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1$; стало быть, предложение вытекает из предложения 1.

Путем замены переменной $e^{-t} = u$ из формулы (14) получаем формулу

$$\Gamma(x) = \int_0^1 \left(\log\frac{1}{t}\right)^{x-1} dt. \tag{15}$$

Точно так же в результате замены переменной $u=t^x$ приходим к

$$x\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t^{\frac{1}{x}}}\,dt$$

или, принимая во внимание (1), к формуле

$$\Gamma\left(1+\frac{1}{x}\right)=\int_0^\infty e^{-t^x}\,dt, \tag{16}$$

и, в частности, для $x=2$ к формуле

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt. \tag{17}$$

Предложение 4. *При $x>0$ и $y>0$ интеграл*

$$\mathrm{B}(x,\,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

(*эйлеров интеграл первого рода*) *равен*

$$\mathrm{B}(x,\,y)=\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\,. \tag{18}$$

В самом деле, для $x>0$ и $y>0$ интеграл сходится (гл. V, § 3, n° 2). На основании леммы 3 функция $x\to\mathrm{B}(x,\,y)$ *логарифмически выпукла* для $x>0$. С другой стороны,

$$\mathrm{B}(x+1,\,y)=\int_0^1(1-t)^{x+y-1}\left(\frac{t}{1-t}\right)^x dt,$$

откуда, интегрируя по частям, получаем

$$\mathrm{B}(x+1,\,y)=-\frac{(1-t)^{x+y}}{x+y}\left(\frac{t}{1-t}\right)^x\Bigg|_0^1+ \\ +\frac{x}{x+y}\int_0^1(1-t)^{x+y}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1}\frac{dt}{(1-t)^2}=\frac{x}{x+y}\,\mathrm{B}(x,\,y).$$

Отсюда следует, что функция $f(x)=B(x,\,y)\,\Gamma(x+y)$ удовлетворяет равенству (1). С другой стороны, эта функция логарифмически выпукла, как произведение двух логарифмически выпуклых функций. Наконец, $f(1)=B(1,\,y)\,\Gamma(y+1)$ и $\mathrm{B}(1,\,y)=$ $=\int_0^1(1-t)^{y-1}\,dt=\frac{1}{y}$, откуда $f(1)=\frac{1}{y}\Gamma(y+1)=\Gamma(y)$. Следовательно, функция $\frac{f(x)}{\Gamma(y)}$ на основании предложения 1 равна $\Gamma(x)$, что и доказывает формулу (18).

Заменой переменной $t=\frac{u}{u+1}$ формула (18) приводится к виду

$$\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\,dt=\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \tag{19}$$

а заменой переменной $t=\sin^2\varphi$ — к формуле

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}\varphi\,\cos^{2y-1}\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{20}$$

Если в последней формуле положить $x=y=\frac{1}{2}$, то находим, что

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}, \tag{21}$$

откуда на основании (17) получаем

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}. \tag{22}$$

Согласно соотношению (7) имеем для $\Gamma(x)$ в окрестности 0 асимптотическое разложение

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x}\Gamma(x+1)=\frac{1}{x}+\Gamma'(1)+\frac{1}{2!}\Gamma''(1)\,x+\dots$$
$$\dots+\frac{1}{n!}\Gamma^{(n)}(1)\,x^{n-1}+O(x^n). \tag{23}$$

Точно так же для любого фиксированного $y>0$ можно написать, что

$$\frac{1}{\Gamma(x+y)}=\frac{1}{\Gamma(y)}+D\left(\frac{1}{\Gamma(y)}\right)x+\frac{1}{2!}D^2\left(\frac{1}{\Gamma(y)}\right)x^2+\dots$$
$$\dots+\frac{1}{n!}D^n\left(\frac{1}{\Gamma(y)}\right)x^n+O_1(x^{n+1}),$$

и следовательно, формула (18) дает для фиксированного y асимптотическое разложение в окрестности $x=0$:

$$B(x,y)=\frac{1}{x}+\left(\Gamma'(1)-\frac{\Gamma'(y)}{\Gamma(y)}\right)+$$
$$+\left(\frac{\Gamma''(1)}{2}-\Gamma'(1)\,\frac{\Gamma'(y)}{\Gamma(y)}+\frac{2\Gamma'^2(y)-\Gamma(y)\,\Gamma''(y)}{2\Gamma^2(y)}\right)x+O(x^2). \tag{24}$$

С другой стороны, для $x>0$ и $y>0$ имеем

$$B(x, y)=\int_0^1\left(t^{x-1}+t^x\frac{(1-t)^{y-1}-1}{t}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{x}+\int_0^1 t^x\frac{(1-t)^{y-1}-1}{t}\,dt. \qquad (25)$$

Функция $\varphi(t)=\dfrac{(1-t)^{y-1}-1}{t}$ непрерывна на компактном интервале $[0, 1]$; а так как

$$t^x=e^{x\log t}=1+x\log t+\frac{x^2}{2!}(\log t)^2+\ldots+\frac{x^n}{n!}(\log t)^n+r_n(x, t),$$

где $|r_n(x, t)|\leqslant\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}|\log t|^{n+1}$ (поскольку $\log t\leqslant 0$ и $x>0$), то формула (25) дает для $B(x, y)$ асимптотическое разложение в окрестности $x=0$:

$$B(x, y)=\frac{1}{x}+\int_0^1\varphi(t)\,dt+x\int_0^1\varphi(t)\log t\,dt+\ldots+$$

$$+\frac{x^n}{n!}\int_0^1\varphi(t)(\log t)^n\,dt+O_2(x^{n+1}).$$

В частности, при $n=1$ отождествление этого разложения с (24) дает

$$\Gamma'(1)-\frac{\Gamma'(y)}{\Gamma(y)}=\int_0^1\frac{(1-t)^{y-1}-1}{t}\,dt.$$

Кроме того, формула (10) дает $\Gamma'(1)=\dfrac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}=-\gamma$, и следовательно (*интеграл Гаусса*),

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}+\gamma=\int_0^1\frac{1-(1-t)^{x-1}}{t}\,dt. \qquad (26)$$

Упражнения. °1) Пусть $g(x)$ — строго положительная линейчатая функция на $]0, +\infty[$.

a) Пусть u и v — такие две возрастающие на $]0, +\infty[$ функции, что $u(x+1)-u(x)=v(x+1)-v(x)=g(x)$ для любого $x>0$. Показать, что если $w=u-v$, то

$$\sup_{0<x\leqslant y\leqslant 1}|w(y)-w(x)|\leqslant\inf_{x>0}g(x)$$

(заметить, что для $a \leqslant x \leqslant y \leqslant a+1$ выполняется неравенство $u(y)-u(x) \leqslant g(a)$). В частности, если $\inf\limits_{x>0} g(x)=0$, то существует не более одного возрастающего решения уравнения $u(x+1)-u(x)= g(x)$, принимающего в данной точке заданное значение.

б) Допустим, что g убывает на $]0, +\infty[$. Показать, что ряд $\varphi(x)=-g(x)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(g(n)-g(x+n))$ абсолютно и равномерно сходится на любом компактном интервале, содержащемся в $]0, +\infty[$; если $\lambda=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, то функция $u(x)=\varphi(x)+\lambda x$ является возрастающим решением уравнения $u(x+1)-u(x)=g(x)$. Показать, что для всякого возрастающего решения v этого уравнения $v(y)-v(x) \geqslant \varphi(y)-\varphi(x)$ для $0<x<y$. Какова верхняя (соответственно нижняя) огибающая множества возрастающих решений уравнения $u(x+1)-u(x)=g(x)$, принимающих в данной точке заданное значение? Показать, что для того, чтобы это множество сводилось к единственному элементу, необходимо и достаточно, чтобы $\lambda=0$.

в) Показать, что если $g(x)>0$ и возрастает на $[0, +\infty[$, то существует бесконечное множество возрастающих решений уравнения $u(x+1)-u(x)=g(x)$, принимающих в данной точке заданное значение.

г) Пусть $\psi(x)$ — функция, определенная на $]0, +\infty[$ при помощи условий: $\psi(x)=0$ для $0 \leqslant x<1$, $\psi(x)=1$ для $1 \leqslant x<2$, $\psi(x)=n$ для $n-1+\frac{1}{n-1} \leqslant x<n+\frac{1}{n}$ $(n \geqslant 2)$; пусть, далее, $g(x)=\psi(x+1)-\psi(x)$. Показать, что ψ есть единственное решение уравнения $u(x+1)-u(x)=g(x)$, удовлетворяющее условию $u(1)=1$.

2) Пусть g — непрерывная возрастающая функция на $]0, +\infty[$.

а) Показать, что если $\liminf\limits_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x}=0$, то найдется не более одного выпуклого решения уравнения $u(x+1)-u(x)=g(x)$, принимающего в данной точке заданное значение (заметить, что для любого $h>0$ функция $v(x)=u(x+h)-u(x)$ есть возрастающая функция, удовлетворяющая уравнению $v(x+1)-v(x)=g(x+h)-g(x)$, и применить упражнение 1 а)).

б) Показать, что если функция g вогнута на $]0, +\infty[$, то существует выпуклое решение уравнения $u(x+1)-u(x)=g(x)$; для того чтобы существовало единственное выпуклое решение этого уравнения, принимающее в данной точке заданное значение, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}=0$ (см. упражнение 1 б)).

в) Предположим теперь, что g возрастает и вогнута на $]0, +\infty[$ и что $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}=0$. Для любой пары чисел $h>0$, $k>0$ и любой конечной числовой функции f, определенной на $]0, +\infty[$. положим

$$\Delta(f(x);\ h,\ k)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{f(x)-f(x-k)}{k}$$

для $x>k$. Показать, что если u есть выпуклое решение уравнения $u(x+1)-u(x)=g(x)$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}\Delta(u(x);\ h,\ k)=0$ при любых $h>0$ и $k>0$ (использовать выражение для u'_d, полученное в упражнении 1 б)).

г) Используя обозначения, введенные в в), показать, что найдется такая постоянная α, что $u(x)=v(x)+\alpha$, где

$$v(x)=\int\limits_1^x g(t)\,dt-\frac{1}{2}\,g(x)+R(x)$$

и

$$R(x)=\sum_{n=0}^{\infty} h(x+n),\qquad h(x)=\int\limits_x^{x+1} g(t)\,dt-\frac{1}{2}\,(g(x+1)+g(x));$$

кроме того,

$$0\leqslant R(x)\leqslant\frac{1}{2}\left(g\left(x+\frac{1}{2}\right)-g(x)\right).$$

(Заметить, что $v(x+1)-v(x)=g(x)$ и что $\lim\limits_{x\to+\infty}\Delta(v(x);\ h,\ k)=0$ при любых $h>0$ и $k>0$.)

3) а) Пусть функция g имеет k-ю непрерывную производную на $]0, +\infty[$ и обладает тем свойством, что $g^{(k)}$ убывает на этом интервале и $\lim\limits_{x\to+\infty}g^{(k)}(x)=0$. Показать, что существует, и притом единственное, решение u уравнения $u(x+1)-u(x)=g(x)$, имеющее на $]0, +\infty[$ возрастающую k-ю производную и принимающее в данной точке заданное значение (использовать упражнение 1 б)).

б) Пусть α — произвольное действительное число. Пусть, далее. S_α — функция, определенная на $]0, +\infty[$, удовлетворяющая соотношению

$$S_\alpha(x+1)-S_\alpha(x)=x^\alpha$$

и такая, что $S_\alpha(1)=0$, и пусть производная функции S_α порядка равного целой части числа $(\alpha+1)^+$, возрастает (такая функция, согласно а), единственна). Показать, что $S'_\alpha(x)-S'_\alpha(1)=\alpha S_{\alpha-1}(x)$ и

$$S_\alpha\left(\frac{x}{p}\right)+S_\alpha\left(\frac{x+1}{p}\right)+\ldots+S_\alpha\left(\frac{x+p-1}{p}\right)=\frac{1}{p^\alpha}\,S_\alpha(x)+C_\alpha$$

для любого целого $p\geqslant 1$, где C_α — константа, которая при $\alpha\neq-1$ равна $\left(\frac{1}{p^\alpha}-p\right)\frac{S'_{\alpha+1}(1)}{\alpha+1}$ (см. § 2, предложение 2 и гл. VI, § 2, упражнение 3).

4) Показать, что функция $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)}$ является единственным выпуклым решением уравнения $u(x+1)=\frac{1}{xu(x)}$ (заметить, что это уравнение влечет $u(x+2)=\frac{x}{x+1}u(x)$. и применить упражнение 1 а)).

5) Обобщить леммы 1 и 2 на произвольные логарифмически выпуклые функции (см. гл. I, § 4, упражнение 2). Показать, что всякая логарифмически выпуклая функция выпукла.

6) Пусть $\psi(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$; доказать для любого целого $q>1$ и любого целого k, $1\leqslant k\leqslant q-1$, формулы

$$\sum_{p=1}^{q}\psi\left(\frac{p}{q}\right)\exp\left(\frac{2pk\pi i}{q}\right)=-q\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\exp\left(\frac{2nk\pi i}{q}\right)=$$
$$=q\log\left(1-\exp\left(\frac{2k\pi i}{q}\right)\right)$$

(воспользоваться формулой (9)).

§ 2. Гамма-функция в комплексной области

1. *Продолжение гамма-функции на* C

Вернемся к формуле Вейерштрасса, дающей выражение для функции $\frac{1}{\Gamma(x)}$ при любом действительном x:

$$\frac{1}{\Gamma(x)}=xe^{\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}},\tag{1}$$

и рассмотрим бесконечное произведение с общим членом $\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$ при любом комплексном z. Можно написать $e^{-\frac{z}{n}}=1-\frac{z}{n}+h(z)$ с $|h(z)|\leqslant\frac{|z|^2}{2n^2}e^{\left|\frac{z}{n}\right|}$ (гл. III, § 2, формула (8)), откуда

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}=1+v_n(z),$$

где $|v_n(z)|\leqslant\frac{|z|^2}{n^2}\left(1+\frac{e^{|z|}}{2}(1+|z|)\right)$; следовательно, рассматриваемое нами бесконечное произведение *абсолютно и равномерно* *сходится* на любом компактном множестве из $\mathbf{C}$; при этом его значение обращается в нуль лишь для точек $z=-n$ (Общая топология, гл. IX, Приложение, следствие из теоремы 2). На основании формулы (1) для любого комплексного z полагаем

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}. \tag{2}$$

Таким образом, функция $\Gamma(z)$ определена для любой точки $z\in\mathbf{C}$, отличной от точек $-n$ $(n\in\mathbf{N})$; она непрерывна на этом множестве, и в окрестности точек $-n$ имеем $(z+n)\Gamma(z)\sim\frac{(-1)^n}{n!}$. Формула (2) показывает, что $\Gamma(\bar{z})=\overline{\Gamma(z)}$ для любого z, не равного целому отрицательному числу.

Рассуждение, обратное тому, которое позволяет перейти от формулы Гаусса (§ 1, формула (8)) к формуле Вейерштрасса, применимо также к комплексным z и показывает, что для любого $z\neq-n$ $(n\in\mathbf{N})$

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^z n!}{z(z+1)\ldots(z+n)}, \tag{3}$$

если положить $n^z=e^{z\log n}$; так как

$$\frac{n^{z+1}n!}{(z+1)(z+2)\ldots(z+n+1)}=z\frac{n}{n+1+z}\,\frac{n^z n}{z(z+1)\ldots(z+n)},$$

то, перейдя к пределу, снова получим основное функциональное уравнение

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z) \tag{4}$$

для любого $z\neq-n$ $(n\in\mathbf{N})$.

Пусть p — произвольное целое строго положительное число, а K_p — открытый круг $|z|<p$; тогда для любого $z\in K_p$ и любого целого $n>p$ число $1+\frac{z}{n}$ не может быть действительным отрицательным числом, поэтому определена функция $\log\left(1+\frac{z}{n}\right)$, и из вышеизложенного следует, что ряд с общим членом $\log\left(1+\frac{z}{n}\right)-\frac{z}{n}$ $(n>p)$ *нормально сходится* в K_p; то же самое имеет место для рядов, полученных дифференцированием общего члена произвольное число раз, поскольку $\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{z+n}\right|\leqslant\frac{p}{n(n-p)}$ и $\left|\frac{1}{(z+n)^k}\right|\leqslant$

$\leqslant \frac{1}{(n-p)^k}$ $(k>1)$ для $z \in K_p$ и $n>p$. Таким образом, показано (см. гл. II, § 3, замечание 2 после предложения 3), что $\Gamma(z)$ *бесконечно дифференцируема* во всех точках $z \in \mathbf{C}$, отличных от точек $-n$, и

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n} \right), \tag{5}$$

$$D^{k-1} \left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k-1)!}{(z+n)^k} \quad \text{для} \quad k \geqslant 2, \tag{6}$$

причем ряды справа в формулах (5) и (6) *нормально сходятся* на любом компактном множестве, содержащемся в $\mathbf{C}$ и не содержащем целых отрицательных точек. Кроме того, можно написать

$$\log \Gamma(z) \equiv -\gamma z - \log z + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{n} - \log \left(1 + \frac{z}{n} \right) \right) \pmod{2\pi i}, \tag{7}$$

условившись, что когда в этой формуле логарифм берется от действительного отрицательного числа, то он принимает одно из двух предельных значений (отличных от $2\pi i$) функции $\log z$ в этой точке; тогда правая часть формулы (7) нормально сходится на любом компактном множестве, содержащемся в $\mathbf{C}$ и не содержащем целых отрицательных точек.

2. *Формула дополнения и формула умножения Лежандра — Гаусса*

Из формулы (2) сразу же получаем, что для любого $z \in \mathbf{C}$

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(-z)} = -z^2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right).$$

Но эйлерово разложение функции $\sin z$ (гл. VI, § 2, теорема 2) показывает, что $z \prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right) = \frac{1}{\pi} \sin \pi z$; следовательно, учитывая функциональное уравнение (4), заключаем, что справедливо

Предложение 1. *Для любого комплексного* z

$$\frac{1}{\Gamma(z)\,\Gamma(1-z)}=\frac{1}{\pi}\sin\pi z \tag{8}$$

(*формула дополнения*).

Следствие. *Для любого действительного* t

$$|\Gamma(it)|=\sqrt{\frac{\pi}{t\,\mathrm{sh}\,\pi t}}\qquad (t\neq 0), \tag{9}$$

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|=\sqrt{\frac{\pi}{\mathrm{ch}\,\pi t}}\,. \tag{10}$$

В самом деле, из формулы (8) вытекает, что $\Gamma(it)\,\Gamma(-it)=$ $=\frac{i\pi}{t\sin\pi it}=\frac{\pi}{t\,\mathrm{sh}\,\pi t}$, и имеем $\Gamma(-it)=\overline{\Gamma(it)}$; точно так же формула (8) дает

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+it\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-it\right)=\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi it\right)}=\frac{\pi}{\cos\pi it}=\frac{\pi}{\mathrm{ch}\,\pi t}\,,$$

и мы имеем

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-it\right)=\overline{\Gamma\left(\frac{1}{2}+it\right)}\,.$$

Пусть теперь p — произвольное целое строго положительное число. Рассмотрим произведение

$$f(z)=\Gamma\left(\frac{z+1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{z+2}{p}\right)\dots\Gamma\left(\frac{z+p}{p}\right).$$

Согласно формуле (3), для любого $z\neq -n$ $(n\in\mathbf{N})$ функция $f(z)$ является пределом произведения

$$\frac{n^{\frac{z+1}{p}}\,n!}{\left(\frac{z+1}{p}\right)\left(\frac{z+1}{p}+1\right)\dots\left(\frac{z+1}{p}+n\right)}\dots$$

$$\dots\frac{n^{\frac{z+2}{p}}\,n!}{\left(\frac{z+2}{p}\right)\left(\frac{z+2}{p}+1\right)\dots\left(\frac{z+2}{p}+n\right)}\dots$$

$$\dots\frac{n^{\frac{z+p}{p}}\,n!}{\left(\frac{z+p}{p}\right)\left(\frac{z+p}{p}+1\right)\dots\left(\frac{z+p}{p}+n\right)}=$$

$$=\frac{n^{z+\frac{p+1}{2}}\,p^{(n+1)p}\,(n!)^p}{(z+1)(z+2)\dots(z+(n+1)p)},$$

и, в частности, $f(0)$ является пределом произведения

$$\frac{n^{\frac{p+1}{2}} p^{(n+1)p} (n!)^p}{((n+1)p)!},$$

откуда следует, что $\frac{f(z)}{f(0)}$ является пределом выражения

$$\frac{n^z ((n+1)p)!}{(z+1)(z+2)\dots(z+(n+1)p)} =$$
$$= zp^{-z}\left(\frac{n}{n+1}\right)^z \frac{((n+1)p)^z ((n+1)p)!}{z(z+1)(z+2)\dots(z+(n+1)p)},$$

что на основании (3) дает формулу

$$f(z) = f(0)\, zp^{-z}\Gamma(z). \tag{11}$$

В то же время можно написать

$$f(0) = \prod_{k=1}^{p-1} \Gamma\left(\frac{k}{p}\right) = \prod_{k=1}^{p-1} \Gamma\left(1-\frac{k}{p}\right) = \sqrt{\prod_{k=1}^{p-1} \Gamma\left(\frac{k}{p}\right)\Gamma\left(1-\frac{k}{p}\right)},$$

поскольку $f(0) > 0$; следовательно, формула дополнения дает

$$f(0) = \sqrt{\frac{\pi^{p-1}}{\prod\limits_{k=1}^{p-1} \sin\frac{k\pi}{p}}},$$

а так как произведение справа равно $\frac{p}{2^{p-1}}$ (гл. VI, § 2, следствие 1 из предложения 1), то окончательно получаем

Предложение 2. *Для любого комплексного числа z, отличного от целого неположительного, и для любого целого $p > 0$ имеет место формула*

$$\Gamma\left(\frac{z}{p}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{p}\right)\dots\Gamma\left(\frac{z+p-1}{p}\right) = (2\pi)^{\frac{p-1}{2}} p^{\frac{1}{2}-z}\,\Gamma(z) \tag{12}$$

(*формула умножения Лежадра — Гаусса*).

Предложение 3. *Для любого действительного числа $x > 0$ имеет место формула*

$$\int_x^{x+1} \log\Gamma(t)\,dt = x(\log x - 1) + \frac{1}{2}\log 2\pi \tag{13}$$

(*интеграл Раабе*).

Докажем сначала формулу (13) для $x=0$. Так как при x, стремящемся к 0, $\log\Gamma(x)\sim\log\frac{1}{x}$, то интеграл $\int\limits_0^1\log\Gamma(x)\,dx$ сходится. Кроме того, на интервале $]0, 1]$ функция $\log\Gamma(x)$ убывает (§ 1, n° 2); следовательно, для любого $\alpha>0$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{q}\log\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)\leqslant\int\limits_0^\alpha\log\Gamma(x)\,dx,$$

где q — наибольшее целое число, удовлетворяющее условию $\frac{q}{n}\leqslant\alpha$. Так как $\int\limits_0^\alpha\log\Gamma(x)\,dx$ стремится к 0 вместе с α и $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=q+1}^{n}\log\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)$ стремится к $\int\limits_\alpha^1\log\Gamma(x)\,dx$, когда n стремится к $+\infty$ (гл. II, § 1, предложение 5), то

$$\int\limits_0^1\log\Gamma(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\Gamma\left(\frac{k}{n}\right).$$

Но согласно формуле (12) правая часть этого равенства является пределом выражения $\frac{n-1}{2n}\log 2\pi-\frac{1}{2}\frac{\log n}{n}$, откуда

$$\int\limits_0^1\log\Gamma(x)\,dx=\frac{1}{2}\log 2\pi. \tag{14}$$

Заметим теперь, что, интегрируя тождество

$$\log\Gamma(x+1)=\log\Gamma(x)+\log x,$$

получаем, что при $x>0$

$$\int\limits_0^x\log\Gamma(t+1)\,dt=\int\limits_0^x\log\Gamma(t)\,dt+\int\limits_0^x\log t\,dt.$$

Но интеграл слева в свою очередь равен $\int\limits_1^{x+1}\log\Gamma(t)\,dt$. Следовательно, в силу (14), получаем

$$\int\limits_x^{x+1}\log\Gamma(t)\,dt=\int\limits_0^x\log t\,dt+\frac{1}{2}\log 2\pi=x(\log x-1)+\frac{1}{2}\log 2\pi.$$

3. *Разложение Стирлинга*

Пусть x и y — два комплексных числа, не лежащие на вещественной отрицательной полуоси; согласно формуле (3) и соглашениям n° 1, относящимся к логарифмам, разность $\log\Gamma(x)-\log\Gamma(y)$ сравнима по модулю $2\pi i$ с пределом выражения

$$(x-y)\log n+\sum_{k=0}^{n}(\log(y+k)-\log(x+k)). \tag{15}$$

Положим $f(t)=\log(y+t)-\log(x+t)$; применим к функции f формулу суммирования Эйлера — Маклорена (гл. VI, § 3, n° 1). Получим

$$f(0)+f(1)+\ldots+f(n)=\int_0^{n+1} f(t)\,dt-\frac{1}{2}(f(n+1)-f(0))+$$
$$+\sum_{k=1}^{p}\frac{b_{2k}}{(2k)}\left(f^{(2k-1)}(n+1)-f^{(2k-1)}(0)\right)+T_p(n),$$

где

$$|T_p(n)|\leqslant\frac{4e^{2\pi}}{(2\pi)^{2p+1}}\int_0^{n+1}|f^{(2p+1)}(u)|\,du. \tag{16}$$

Так как $f^{(m)}(t)=(-1)^{m-1}(m-1)!\left(\frac{1}{(y+t)^m}-\frac{1}{(x+t)^m}\right)$, то при n, стремящемся к $+\infty$, $f^{(2k-1)}(n+1)$ стремится к 0 для любого $k\geqslant 1$; то же самое имеет место и для

$$f(n+1)=\log\left(1+\frac{y}{n+1}\right)-\log\left(1+\frac{x}{n+1}\right).$$

С другой стороны,

$$\int_0^{n+1}\log(x+t)\,dt=(x+n+1)(\log(x+n+1)-1)-x(\log x-1),$$

и при n, стремящемся к $+\infty$, имеем асимптотическое разложение

$$(x+n)(\log(x+n)-1)=n\log n-n+x\log n+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Подставляя в выражение (15), окончательно получаем, что, когда n стремится к $+\infty$, $T_p(n)$ имеет пределом $R_p(x, y)$ и что можно написать $\log\Gamma(x)-g(x)\equiv\log\Gamma(y)-g(y)+R_p(x, y) \pmod{2\pi i}$, где

$$g(x)=x\log x-x-\frac{1}{2}\log x+\sum_{k=1}^{p}\frac{b_{2k}}{2k(2k-1)}\frac{1}{x^{2k-1}}. \tag{17}$$

Оценим теперь верхнюю грань $R_p(x, y)$ при помощи неравенства (16), предположив, что и x и y принадлежат подмножеству H_A множества $\mathbf{C}$, определенному отношением «$\mathscr{R}(z)\geqslant A$ или $|\mathscr{J}(z)|\geqslant A$», где A — произвольное положительное число (рис. 11). Для этого заметим, что если $x=s+it$ с $s>A$, то $|x+u|\geqslant A+u$ для любого $u>0$ и, значит,

$$\int_0^{n+1}\frac{du}{|x+u|^{2p+1}}\leqslant\int_0^{\infty}\frac{du}{(A+u)^{2p+1}}=\frac{1}{2pA^{2p}}.$$

Точно так же, если $|t|\geqslant A$, то $|x+u|=|s+u+it|\geqslant\sqrt{A^2+(s+u)^2}$ для любого действительного u, откуда

$$\int_0^{n+1}\frac{du}{|x+u|^{2p+1}}\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{(A^2+u^2)^{p+\frac{1}{2}}}=$$

$$=\frac{2}{A^{2p}}\int_0^{\infty}\frac{dv}{(1+v^2)^{p+\frac{1}{2}}}.$$

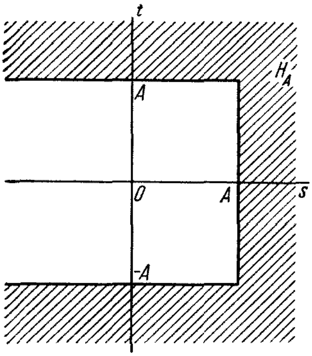

Рис. 11.

Таким образом, очевидно, что если x и y принадлежат H_A, то

$$|R_p(x, y)|\leqslant\frac{C_p}{A^{2p}},$$

где C_p зависит только от p. Обозначим через $\mathfrak{F}$ фильтр, имеющий в качестве базиса множества H_A; критерий Коши показывает, что по фильтру $\mathfrak{F}$ функция $\log\Gamma(z)-g(z)$ *имеет конечный предел* δ (по модулю $2\pi i$) и что если $\omega(z)=\max(\mathscr{R}(z), |\mathscr{J}(z)|)$, то

$$\log\Gamma(z)-g(z)-\delta\equiv O\left(\frac{1}{(\omega(z))^{2p}}\right) \pmod{2\pi i}. \tag{18}$$

Для любого действительного $x>0$ $\Gamma(x)>0$ и $g(x)$ действительна, так что можно предположить δ *действительным*, и тогда

$$\log \Gamma(x) = g(x) + \delta + O\left(\frac{1}{x^{2p}}\right).$$

Отсюда мы получим значение постоянной δ; согласно предложению 2, для $p=2$ при действительном x, стремящемся к $+\infty$,

$$\frac{x-1}{2}\log\frac{x}{2} - \frac{x}{2} + \frac{x}{2}\log\frac{x+1}{2} - \frac{x+1}{2} + 2\delta =$$

$$= x\log x - x - \frac{1}{2}\log x + \left(\frac{1}{2} - x\right)\log 2 + \frac{1}{2}\log 2\pi + \delta + o(1),$$

откуда легко получаем, что $\delta = \frac{1}{2}\log 2\pi$. Итак, окончательно имеем следующий результат:

Предложение 4. *Имеет место (для любого целого $p \geqslant 1$) асимптотическое разложение по фильтру* $\mathfrak{F}$:

$$\log \Gamma(z) \equiv z\log z - z - \frac{1}{2}\log z + \frac{1}{2}\log 2\pi +$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} \frac{b_{2k}}{2k(2k-1)}\,\frac{1}{z^{2k-1}} + O\left(\frac{1}{(\omega(z))^{2p}}\right) \pmod{2\pi i} \quad (19)$$

(*разложение Стирлинга*).

Следствие. *Имеет место отношение по фильтру* $\mathfrak{F}$:

$$\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi}\exp\left(z\log z - z - \frac{1}{2}\log z\right). \quad (20)$$

В частности, для действительного x, стремящегося к $+\infty$ формула (20) принимает вид

$$\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi}\, x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}, \quad (21)$$

откуда для целого n, стремящегося к $+\infty$, получаем

$$n! \sim \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

(см. гл. V, § 4, n° 3).

Отсюда выводятся многочисленные формулы. Например, для любого комплексного числа α и любого целого n имеем при n, стремящемся к $+\infty$,

$$\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n)} \sim n^{\alpha} \qquad (= e^{\alpha\log n}). \quad (22)$$

Точно так же для любого комплексного числа a, отличного от целого неположительного, имеем

$$a(a+1)(a+2)\ldots(a+n)=\frac{\Gamma(n+a+1)}{\Gamma(a)}\sim\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(a)}\,n^{n+a+\frac{1}{2}}e^{-n},\tag{23}$$

а для любого комплексного числа a, отличного от целого неотрицательного, имеем

$$\binom{a}{n}=\frac{(-1)^n}{\Gamma(-a)}\,\frac{\Gamma(n-a)}{\Gamma(n+1)}\sim\frac{(-1)^n}{\Gamma(-a)}\,n^{-a-1}.\tag{24}$$

Наконец, для любой действительной постоянной $k>1$

$$\binom{kn}{n}=\frac{\Gamma(kn+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma((k-1)\,n+1)}\sim\sqrt{\frac{k}{2\pi(k-1)\,n}}\left(\frac{k^k}{(k-1)^{k-1}}\right)^n.\tag{25}$$

То же рассуждение приводит к следующему аналогичному предложению.

Предложение 5. *Имеет место (для любого целого $p\geqslant 1$) асимптотическое разложение по фильтру $\mathfrak{F}$:*

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\log z-\frac{1}{2z}-\sum_{k=1}^{p}\frac{b_{2k}}{2k}\,\frac{1}{z^{2k}}+O\left(\frac{1}{(\omega(z))^{2p+1}}\right).\tag{26}$$

Вместо предложения 2 для определения константы используется формула

$$\int_x^{x+1}\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}\,dt=\log\Gamma(x+1)-\log\Gamma(x)=\log x.$$

Упражнения. °1) а) Пусть числовая функция g непрерывна для $x\geqslant 0$. Показать, что если g удовлетворяет двум равенствам:

$$\sum_{k=0}^{p-1}g\left(\frac{x+k}{p}\right)=g(x),$$

$$\sum_{h=0}^{q-1}g\left(\frac{x+h}{q}\right)=g(x),$$

то она удовлетворяет и равенству

$$\sum_{j=0}^{pq-1}g\left(\frac{x+j}{pq}\right)=g(x).$$

б) Вывести отсюда, что если функция g имеет при $x \geqslant 0$ непрерывную производную и удовлетворяет равенству

$$\sum_{k=0}^{p-1} g\left(\frac{x+k}{p}\right)=g(x),$$

то она имеет вид $a\left(x-\frac{1}{2}\right)$, где a — постоянная $\Bigl($заметить, что g удовлетворяет аналогичному равенству, в котором p заменено на p^n; затем устремить n к $+\infty$ и вывести отсюда, что

$$g'(x)=\int_0^1 g'(t)\,dt\Bigr).$$

в) Заключить на основании б), что гамма-функция есть единственная функция, имеющая непрерывную производную при $x>0$ и удовлетворяющая формуле умножения (12) для какого-нибудь одного значения p и уравнению (1) § 1.

2) Для любого числа $k>1$ положим $S_k=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-k}$. Доказать, что для $-1<x\leqslant 1$

$$\log \Gamma(1+x)=-\gamma x+\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k \frac{S_k}{k} x^k,$$

где ряд, стоящий справа, равномерно сходится на любом компактном интервале, содержащемся в $]-1, 1]$, и абсолютно сходится для $|x|<1$.

3) Пусть s — фиксированное действительное число; показать, что, когда t стремится к $+\infty$ или к $-\infty$,

$$|\Gamma(s+it)| \backsim \sqrt{2\pi}\,|t|^{s-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|t|}$$

и

$$\frac{\Gamma'(s+it)}{\Gamma(s+it)} \backsim \log|t|.$$

4) Пусть $t \neq 0$ — фиксированное действительное число; показать, что когда s стремится к $+\infty$, то

$$|\Gamma(-s+it)| \backsim \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{s^{s+\frac{1}{2}} e^{-s} \sqrt{\operatorname{sh}^2 \pi t+\sin^2 \pi s}}$$

(использовать формулу дополнения).

5) Пусть x_n — корень уравнения $\Gamma'(x)=0$, принадлежащий интервалу $]-n, -n+1[$. Показать, что

$$x_n = -n + \frac{1}{\log n} + O\left(\frac{1}{(\log n)^2}\right)$$

(использовать формулу дополнения и формулу (5)). Вывести отсюда, что

$$\Gamma(x_n) \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}}\, n^{-n-\frac{1}{2}} e^{n+1} \log n.$$

6) Пусть V_n — определитель Вандермонда $V(1, 2, \ldots, n)$ (Алгебра, гл. III, § 6, n° 4). Показать, что

$$\log V_n = \frac{n^2}{2}\log n - \frac{3n^2}{4} + \left(\frac{1}{2}\log 2\pi - \frac{1}{4}\right) n - \frac{1}{12}\log n + k + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

где k — постоянная.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК

(Римские цифры отсылают к библиографии, помещенной в конце этого очерка.)

Идея «интерполирования» последовательности (u_n) значениями интеграла, зависящего от действительного параметра λ и при $\lambda=n$ равного u_n, восходит к Валлису (см. Исторический очерк к главам I—III, стр. 185). Именно этой идеей руководствовался в основном и Эйлер, когда в 1730 году ((I), т. XIV, стр. 1—24) предложил интерполировать последовательность факториалов. Вначале он заметил, что $n!$ равно бесконечному произведению $\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{n}\right)^n \frac{k}{k+n}$, что это произведение определено для любого значения n (а не только для целого) и что, в частности, для $n=\frac{1}{2}$ оно, согласно формуле Валлиса, принимает значение $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ Аналогия этого результата с результатами Валлиса привела его затем к интегралу $\int_0^1 x^e(1-x)^n\,dx$ (n — целое, e — произвольное), уже рассмотренному последним. Отсюда Эйлер получил значение $\frac{n!}{(e+1)(e+2)\ldots(e+n)}$ при помощи разложения бинома; тогда замена переменных показала ему, что $n!$ есть предел при z, стремящемся к 0, интеграла $\int_0^1\left(\frac{1-x^z}{z}\right)^n dx$, откуда и был получен «второй эйлеров интеграл» $n!=\int_0^1\left(\log\frac{1}{x}\right)^n dx$; используя тот же метод и формулу Валлиса, он получил формулу $\int_0^1\sqrt{\log\frac{1}{x}}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. В своих последующих работах Эйлер часто обращался к этим интегралам; так, он открыл формулу дополнения ((I), т. XV, стр. 82 и т. XVII, стр. 342), формулу $\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

((I), т. XVII, стр. 355) и частный случай формулы Лежандра—Гаусса, соответствующий $x=1$ ((I), т. XIX, стр. 483), совершенно не беспокоясь, разумеется, о вопросах сходимости.

Гаусс продолжил изучение гамма-функции в связи со своими исследованиями гипергеометрической функции, для которой гамма-функция является предельным случаем (II); именно в ходе этих исследований он получил общую формулу умножения (уже подмеченную немного ранее Лежандром для $p=2$).

Все последующие работы по гамма-функции основаны на ее продолжении в комплексную область. Лишь недавно было замечено, что свойство логарифмической выпуклости характеризует $\Gamma(x)$ (в действительной области) с точностью до постоянного множителя среди всех решений функционального уравнения $f(x+1)=xf(x)$ (III), а Артин показал (IV), как можно просто связать все классические результаты, относящиеся к $\Gamma(x)$, с этим свойством. Мы довольно близко придерживались его изложения.

БИБЛИОГРАФИЯ

(I) L. Euler, Opera omnia, Leipzig — Berlin (Teubner): t. XIV (1924), t. XV (1927), t. XVII (1915) et t. XIX (1932).

(II) C. F. Gauss, Werke, t. III, Göttingen, 1866.

(III) H. Bohr und J. Mollerup, Laerebog i matematisk Analyse, t. III, Kopenhagen, 1922, p. 149—164.

(IV) E. Artin, Einführung in die Theorie der Gammafunktion, Leipzig (Teubner), 1931. Русский перевод: Артин Э., Введение в теорию гамма-функции, М.— Л., ГТТИ, 1934.

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

УКАЗАТЕЛЬ ТЕРМИНОВ

СЛОВАРЬ

Введение

Термины, набранные жирными прописными буквами, определены в книге IV этого трактата; для каждого из них указано французское написание (в скобках), а также глава и страница, где этот термин введен. Остальные слова являются переводом на другие терминологии (французские и иностранные) терминов, используемых в этой книге. Иностранные термины, сходные по написанию и имеющие одинаковый смысл с французскими, опущены. Если термин, стоящий в начале заметки, повторяется в ней, то вместо него ставится тире. Если термин состоит из нескольких слов, то он указывается, как правило, лишь под началом одного из них (например, «равномерно сходящийся интеграл» стоит только на букву «р»).

АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИЙСЯ (absolument convergente) **ИНТЕГРАЛ**: II, стр. 101.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ (developpement asymptotique): V, стр. 281. **Разложение Тейлора**: I, стр. 46; **РАЗЛОЖЕНИЕ ТЕЙЛОРА ОБОБЩЕННОЕ** (— Taylorien generalisé): VI, стр. 350. Нем.: Entwicklung.

Бесконечно большая (— **малая**) (infiniment grand (— petit)): так называют иногда функцию, стремящуюся к $\pm\infty$ (соотв. к 0) в некоторой фиксированной точке. Итал.: infinite, infinitesimo.

БОЛЕЕ ТОЧНОЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ (developpement asymptotique plus précis), чем другое: V, стр. 282.

ВАРИАЦИИ ПОСТОЯННЫХ МЕТОД (methode de variation des constantes): IV, стр. 236.

Верхняя сумма: так называется выражение $\sum\limits_i M_i(x_{i+1}-x_i)$ для функции f на I и для разбиения I на интервалы $[x_i, x_{i+1}]$, причем M_i означает верхнюю грань функции f на $[x_i, x_{i+1}]$. Нем.: Obersumme.

ВОГНУТАЯ ФУНКЦИЯ (fonction concave): I, стр. 58. Нем.: konkav, konvex von oben.

ВЫШЕ (au-dessus) **ГРАФИКА (ТОЧКА)**: I, стр. 55.

ВРОНСКИАН (wronskien) из n интегралов линейного дифференциального уравнения порядка n: IV, стр. 250.

ВЫПУКЛАЯ ФУНКЦИЯ (fonction convexe): I, стр. 55. Нем.: konvex, konvex von unten.

Гамма-функция (fonction gamma). Нем.: Fakultät. Англ.: factorial function; в английских текстах иногда пишут $\Pi(x)$ или $x!$ для $\Gamma(x+1)$ (x — любое действительное).

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ (fonctions hyperboliques): III, стр. 139. В немецких текстах гиперболические функции часто обозначаются через $\mathfrak{Cof}\,x$, $\mathfrak{Sin}\,x$, $\mathfrak{Tg}\,x$; в английских текстах их, вообще говоря, обозначают через $\cosh x$, $\sinh x$, $\tanh x$ (или $\operatorname{tgh} x$). В соответствии с этим обратные к ним функции обозначаются $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,x$, $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,x$, $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,x$ в немецких и $\cosh^{-1} x$, $\sinh^{-1} x$, $\tanh^{-1} x$ в английских текстах.

ГЛАВНОЕ ЗНАЧЕНИЕ (determination principale) логарифма комплексного числа: III, стр. 136. Нем.: Hauptwert.

ГЛАВНАЯ ЧАСТЬ (partie principale) функции: V, стр. 288.

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМАЯ ФУНКЦИЯ (fonction derivable): I, стр. 14; — **СПРАВА** (á droite): I, стр. 15; — **СЛЕВА** (á gauche): I, стр. 15; — n **РАЗ** (n fois): I, стр. 44; **БЕСКОНЕЧНО** — (indéfiniment): I, стр. 44. Нем.: differenzierbar. Англ.: differentiable.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ (equation differentielle): IV, стр. 202; — **ПОРЯДКА** n (d'ordre n): IV, стр. 204 Нем.: Differentialgleichung, gewöhnliche Differentialgleichung (в противоположность «partielle Differentialgleichung», что означает «уравнение в частных производных»).

ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ (changement de variables) (**ФОРМУЛА**): II, стр. 84. Нем.: Substitutionsformel. Итал.: Integrazione per sostituzione.

Замены переменной в интеграле формула (formule de changement de variables dans une integrale). Нем.: Substitutionsformel.

ИНТЕГРАЛ (integrale) **ЛИНЕЙЧАТОЙ ФУНКЦИИ НА КОМПАКТНОМ ИНТЕРВАЛЕ**: II, стр. 80; в прежней терминологии: определенный интеграл (integrale definie); нем.: bestimmtes Integral; — **КУСОЧНО ЛИНЕЙЧАТОЙ ФУНКЦИИ**: II, стр. 94; в прежней терминологии: несобственный интеграл (integrale impropre); нем.: uneigentliches Integral; — **ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ**: IV, стр. 202. Отметим, что под «интегралом дифференциального уравнения» чаще всего понимается то, что мы называем *точным* интегралом.

Интегрируемая функция (fonction integrée). Англ.: integrand.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ (integration par parties): II, стр. 83; — **ПОРЯДКА** n (— d'ordre n): II, стр. 83. Нем.: Integration nach Teilen, Teilintegration, partielle Integration, Produktintegration. Англ.: partial integration.

КАСАТЕЛЬНАЯ (tangente) **К ГРАФИКУ**: I, стр. 26. Нем.: Tangente.

КОМПЛЕКСНАЯ ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ (exponentielle complexe): III, стр. 135.

КОНЕЧНЫЕ ПРИРАЩЕНИЯ (accroissement finis) (**ТЕОРЕМА**): I, стр. 32. Нем.: Mittelwertsatz. Англ.: mean value theorem. Итал.: teorema del valor medio.

КОСЕКАНС (cosécante): III, стр. 131.

КОСИНУС ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ (cosinus hyperbolique): III, стр. 139.

КОСИНУС (cosinus) **КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА**: III, стр. 138.

КОЭФФИЦИЕНТЫ (coefficients) **АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ**: V, стр. 281; — **БИНОМИАЛЬНЫЕ** (binomiaux): III, стр. 152.

Кусочно (par morseaux). Нем.: stückweise.

ЛИНЕЙНОЕ (lineaire) **ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ**: IV, стр. 230; — **ОДНОРОДНОЕ** (homogène) **ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ**: IV, стр. 230;

— **ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПОРЯДКА** n — (d'ordre n): IV, стр. 249.

ЛИНЕЙЧАТАЯ ФУНКЦИЯ (fonction réglée): II, стр. 74—75; **КУСОЧНО** — (par morceaux): II, стр. 94. В прежней терминологии: функция, имеющая лишь разрывы первого рода.

ЛИПШИЦЕВА ФУНКЦИЯ (fonction lipschitzienne): IV, стр. 210; — **ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ**: IV, стр. 210.

ЛОГАРИФМИЧЕСКИ ОГРАНИЧЕННАЯ ФУНКЦИЯ (fonction logarithmiquement bornée): V, стр. 267; — **ВЫПУКЛАЯ ФУНКЦИЯ** (— convexe): VII, стр. 387.

Логарифмические признаки сходимости (critères logarithmiques de convergence). Англ.: logarithmic tests.

ЛОКАЛЬНО ЛИПШИЦЕВА ФУНКЦИЯ (fonction localement lipschitzienne): IV, стр. 214; — дифференциальное уравнение: IV, стр. 215.

ЛОКАЛЬНЫЙ ХАРАКТЕР НОСЯЩЕЕ (relation de caractère locale) **ОТНОШЕНИЕ**: V, стр. 264.

МНОГОЧЛЕНЫ АППЕЛЯ (polynomes d'Appell): V, стр. 349; — **БЕРНУЛЛИ** (— de Bernoulli): V, стр. 352; — **ЭРМИТА** (— d'Hermite): VI, стр. 359. В некоторых работах «многочленами Бернулли» называются такие многочлены $S_n(x) = \frac{1}{n+1}(B_{n+1}(x) - B_{n+1}(0))$, что для всех целых $a > 0$ $S_n(a) = 1^n + 2^n + \ldots + a^n$.

НАТУРАЛЬНЫЙ ЛОГАРИФМ (logarithme naturel): III, стр. 127; **НЕПЕРОВ ЛОГАРИФМ** (logarithme népérien): III, стр. 127. Неперов логарифм часто обозначается через $\ln x$.

Неопределенности (expressions indéterminées): так называют иногда числовые функции, которые в окрестности некоторой точки имеют вид $f(x) - g(x)$ или $\frac{f(x)}{g(x)}$, где f и g стремятся к $+\infty$ в точке x_0.

Неопределенный интеграл (integrale indefinie): примитивная функции.

Неперов логарифм (logarithme népérien). Нем.: Hyperbolischer Logarithmus.

Несобственный интеграл (integrale impropre): интеграл на некомпактном интервале.

НИЖЕ (au-dessous) **ГРАФИКА (ТОЧКА)**: I, стр. 55.

Нижняя сумма: так называют выражение $\sum_i m_i (x_{i+1} - x_i)$ для числовой функции f, определенной на $J = [a, b]$, и для подразделения J на интервалы $[x_i, x_{i+1}]$, причем m_i означает нижнюю грань функции f на $[x_i, x_{i+1}]$.

НОРМАЛЬНО СХОДЯЩИЙСЯ ИНТЕГРАЛ (integrale normalement convergente): II, стр. 112.

ОБРАТНЫЕ КРУГОВЫЕ (circulaires reciproques) **ФУНКЦИИ**: III, стр. 131, 132. Нем.: Arcus-functionen, zyklometrische Functionen. Функция $\operatorname{Arccos} x$ (соотв. $\operatorname{Arcsin} x$, $\operatorname{Arctg} x$) иногда называется «главным значением (determination principale, нем.: Hauptwert) функции $\arccos x$ (соотв. $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$)» на основе существования продолжения этих функций в комплексную область. В английских текстах обратные круговые функции часто обозначаются через $\cos^{-1} x$, $\sin^{-1} x$, $\tan^{-1} x$.

ОБЫЧНОЕ СРЕДНЕЕ АРИФМЕТИЧЕСКОЕ (moyenne arithmétique ordinaire): III, стр. 128; **ВЗВЕШЕННОЕ СРЕДНЕЕ АРИФМЕТИЧЕСКОЕ** (moyenne arithmétique pondérée): III, стр. 128; **СРЕДНЕЕ (ИЛИ СРЕДНЕЕ ЗНАЧЕНИЕ) ФУНКЦИИ** (moyenne d'un fonction): II, стр. 81; **ОБЫЧНОЕ СРЕДНЕЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ** (moyenne géométrique ordinaire): III, стр. 128; **ВЗВЕШЕННОЕ СРЕДНЕЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ** (moyenne géométrique pondérée): III, стр. 128. Нем.: Mittelwert. Англ.: mean value. Итал.: valor medio.

ОПЕРАТОРЫ КОМПОЗИЦИИ (operateurs de composition): VI, стр. 345.

ОПОРНАЯ ПРЯМАЯ (droite d'appui) к графику выпуклой функции: I, стр. 61. Нем.: Stutzgerade.

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ (integrale definie). См. интеграл определенный

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ (determinant из n интегралов системы n линейных дифференциальных уравнений: IV, стр. 238.

ОПРЕДЕЛЯЮЩАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ (suite de definition) функции (H): V, стр. 329.

ОСТАТОК (reste) в формуле Тейлора: I, стр. 46; —асимптотического разложения: V, стр. 281. Нем.: Rest, Fehler. Англ.: remainder.

ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ МАКСИМУМ (maximum relatif): I, стр. 27; **СТРОГИЙ—** (—strict): I, стр. 27. В некоторых работах под «максимумом» понимается «строгий относительный максимум»; тогда понятие, названное нами «относительным максимумом», именуется «максимумом в широком смысле». То же самое для «минимума».

ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ МИНИМУМ (minimum relatif): I, стр. 27; **СТРОГИЙ—** (—strict): I, стр. 27.

ПОВТОРНЫЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ (exponentielles itérées): V, стр. 330.

ПОДОБНЫЕ ФУНКЦИИ (fonctions semblables)): V, стр. 267. Англ.: functions of equal increase.

ПОДЧИНЕННАЯ (dominée) функция: V, стр. 266.

ПОРЯДОК (ordre) одной функции относительно другой: V, стр. 274.

ПОСТОЯННАЯ ЭЙЛЕРА (constante d'Euler): V. стр. 314.

ПОСТОЯННОГО ЗНАКА ФУНКЦИЯ (fonction de signe constant): V, стр. 273. В некоторых работах принимается, что числовая функция f есть функция «постоянного знака» на множестве A, если $f(x) \geqslant 0$ для всех $x \in A$ или $f(x) \leqslant 0$ для всех $x \in A$.

ПРАВАЯ ПОЛУКАСАТЕЛЬНАЯ (demi-tangente á droite): I, стр. 26; **ЛЕВАЯ** —(— á gauche): I, стр. 26. Нем.: rechtsseitige Tangente, linksseitige Tangente.

Правило дифференцирования сложной функции (régle de dérivation d'une fonction composée). Нем.: Kettenregel.

ПРЕВАЛИРУЮЩАЯ НАД ДРУГОЙ ФУНКЦИЯ (fonction prépondérante sur une autre): V, стр. 268. Англ.: function of greater increase than another.

ПРЕНЕБРЕЖИМАЯ СРАВНИТЕЛЬНО С ДРУГОЙ ФУНКЦИЯ (fonction négligeable devant une autre): V, стр. 268. Англ.: function of lesser increase than another.

ПРИБЛИЖЕННОЕ (approchée) **РЕШЕНИЕ** с точностью ε дифференциального уравнения: IV, стр. 206—207.

Признак Даламбера сходимости рядов с положительными членами (critère de d'Alambert). Нем.: Quotientenkriterium. Англ.: Ratio-test.

Признак сходимости Коши для рядов с положительными членами (critère de Cauchy). Нем.: Wurzelkriterium.

ПРИМИТИВНАЯ (primitive) функции: II, стр. 70 и 86; —**ПОРЯДКА** n (d'ordre n): II, стр. 86; **ВТОРАЯ**—(—seconde): II. стр. 86; **ТОЧНАЯ**—(—stricte); II, стр. 71. В прежней терминологии: неопределенный интеграл (intégrale indefinie). Нем.: Stammfunktion, primitive Funktion. Во многих работах над «примитивной» понимают то, что мы называем «точной примитивной».

ПРОИЗВОДНАЯ (derivée) функции: I. стр. 15; **ПРАВАЯ**— (—á droite) I, стр. 15; **ЛЕВАЯ**— (—á gauche): I. стр. 15; **ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ**—(—logarithmique): III. стр. 128; n-**Я**— (—n-éme) I, стр. 44; **ПЕРВАЯ**—(—premiere): I, стр. 15; **ВТОРАЯ**— (—seconde): I, стр. 44. Нем. Ableitung, Differenzialquotient (vorderer, hinterer. höherer). Англ.: derivative (left, right, higher). Итал.: derivata.

ПРЯМАЯ, ЛЕЖАЩАЯ ЛОКАЛЬНО НИЖЕ (droite localement au—dessons) графика: I, стр. 64; —**ВЫШЕ** (—au—dessus) графика: I, стр. 64: —**НА** (sur) графике: I, стр. 64.

РАВНОМЕРНО СХОДЯЩИЙСЯ ИНТЕГРАЛ (integral uniformement convergente): II, стр. 109. Нем.: gleichmässig konvergentes Integral.

РАСШИРЕНИЕ (extension) (H) тела Харди: V, стр. 329.

РЕЗОЛЬВЕНТА (rèsolvante) линейного дифференциального уравнения: IV. стр. 233.

РЕШЕНИЕ (solution) дифференциального уравнения: IV, стр. 203; **ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ С ТОЧНОСТЬЮ** ε (solution approchée a ε prés): IV, стр. 206—207; **ТОЧНОЕ**—(—stricte): IV, стр. 203. Нем.: Lösung. Чаще всего под решением дифференциального уравнения понимается то, что мы называем «точным решением».

РИМАНОВА СУММА (somme de Riemann): II, стр 78

СВЕДЕННОЕ К ТОЧНОСТИ g_β (réduit a la precision) **АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ**: V, стр 282

СИЛЬНО СРАВНИМЫЕ (fortement comparables) **ФУНКЦИИ**: V, стр. 271—272.

СИНУС ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ (sinus hyperbolique): III, стр. 139

СИНУС (sinus) комплексного числа: III, стр 138

СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (système d'equations différentielles): IV, стр. 203.

СКАЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СИСТЕМА (système d'equations differentielles scalaires): IV, стр. 203.

СЛАБО СРАВНИМЫЕ (faiblement somparable) **ФУНКЦИИ**: V, стр. 268.

СОПРЯЖЕННОЕ (adjointe) **ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ**: IV стр. 242.

СРАВНИМЫЕ ФУНКЦИИ (fonctions comparables): V, стр. 296; —**ПОРЯДКА** k (—d' ordre k): V, стр. 296.

Среднее значение (valeur moyenne). Нем.: Mittelwert. Англ.: mean value.

Среднее значение функции (valeur moyenne d'une fonction). Нем.: Integralmittelwert.

СТРОГО НИЖЕ ГРАФИКА (ТОЧКА) (point strictement au—dessons d'un graphe): I, стр. 55; —**ВЫШЕ** (—au—dessus): I, стр. 55; **СТРОГО ВОГНУТАЯ ФУНКЦИЯ** (fonction strictement concave): I, стр. 58; —**ВЫПУКЛАЯ ФУНЦИЯ** (fonction strictement convexe); I, стр. 57.

СТУПЕНЧАТЫЕ ФУНКЦИИ (fonctions en escalier): II, стр. 73. Нем.: Treppenfunktion. Англ.: stepfunction.

СХОДЯЩИЙСЯ ИНТЕГРАЛ (integrale convergente): II, стр. 95. Нем.: konvergentes uneigenliches Integral.

Сходящийся интеграл (integral convergente). Нем.: Bedingt konvergentes Integral (в противоположность «абсолютно сходящемуся интегралу»).

ТАНГЕНС ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ (tangente hyperbolique): III. стр. 139. Нем.: hyperbolische Tangens.

ТЕЛО ХАРДИ (corps de Hardy): V, стр. 322.

Точка разрыва первого рода (point de discontinuite de première espèce) некоторой функции: точка, в которой функция имеет предел справа и предел слева; **—второго рода** (de seconde espèce): точка, в которой функция не имеет хотя бы одного одностороннего предела.

ТОЧНОСТЬ (précision) асимптотического разложения: V, стр. 281.

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА (système fondamental) интегралов системы линейных дифференциальных уравнений: стр. 238. Нем.: Hauptsystem. Англ.: fundamental set, fundamental system.

ФУНКЦИЯ (fonction) (H): V, стр. 330. Англ. L-function, logarithmico-exponential function.

Функция, эквивалентная произведению логарифмической производной рассматриваемой функции на постоянный множитель. Англ.: Type of a function.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КОРНИ (racines caractéristiques) линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами: IV, стр. 248. Нем.: charakteristische Wurzeln.

ЧИСЛА БЕРНУЛЛИ (nombres de Bernoulli): VI, стр. 353. Во многих работах через B_n обозначается число, которое в наших обозначениях имеет вид $(-1)^{n-1}\, b_{2n}$.

ЧЛЕНЫ (termes) асимптотического разложения: V, стр. 281

ШКАЛА СРАВНЕНИЯ (échelle de comparaison): V, стр. 278. Англ.: scale of infinity.

Эквивалентные функции (fonctions equivalentes) Нем.: Asymptotisch gleiche Functionen.